UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos

SALVADOR, BA
2025

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos

Uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica

Dissertação de Mestrado apresentada ao colegiado do curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Mariana Cassol.

SALVADOR, BA

2025

“PROVA E DEMONSTRAÇÃO: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica”

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 04/04/2025.

Banca Examinadora:

Mariana Cassol

Profa. Dra. Mariana Cassol (orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Profa. Dra. Graça Luzia Dominguez Santos (interno – PROFMAT)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Profa. Dra. Jamille Vilas Boas de Souza (externo)
Instituto Federal de Educação e Tecnologia da Bahia (IFBA)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

A599 Anjos, Pitágoras Vasconcelos dos
Uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica / Pitágoras Vasconcelos dos Anjos. – Salvador, 2025.
133 f.

Orientadora: Profª. Drª. Mariana Cassol

Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, 2025.

1. Prova. 2. Demonstração. 3. Tarefas de Investigação. 4. Geometria Dinâmica. I. Cassol, Mariana. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU:514

Dedico à

Minha Mãe

Agradecimentos

À Minha Mãe, a minha maior referência, por sempre ter acreditado no poder transformador da educação.

Ao meu Pai, por me apresentar à literatura, isso fez de mim professor.

Aos meus familiares, em especial, a minha tia Nilza, tio Rui, Dade, Bah, Uendel e Dom, que sempre me ofertam um apoio muito maior do que mereço.

A Dan, por ser meu primeiro leitor e maior incentivador.

Às amigas Lunnara e Rênia, pela enorme paciência e disposição para escuta.

Aos colegas de mestrado, pelas conversas, apoios e comemorações.

Aos professores, por compartilhar o conhecimento, em especial, a professora Mariana, por também conduzir a orientação de modo respeitoso, assertivo e paciente.

À Banca Examinadora, que me honra com o aceite do convite.

A vida presta.

Fernanda Torres

Resumo

A demonstração é um importante elemento da história da matemática, ela é responsável por validar um argumento, explicar, comunicar a matemática construída e até mesmo estimular novas. Contudo, notamos que a abordagem de processos de validação ocupa pouco espaço na matemática escolar, nos documentos norteadores e até mesmo nas pesquisas acadêmicas. Tendo em vista a prática do professor que pretende abordar tais processos em sala de aula, empreendemos uma pesquisa de desenvolvimento educacional de abordagem qualitativa que tem como objetivo desenvolver tarefas de natureza investigativa em ambientes de geometria dinâmica de modo a contribuir com a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo. Tais tarefas foram organizadas em uma sequência didática que foi aplicada com 5 estudantes participantes do projeto Mais Estudo da rede estadual de educação da Bahia. Os resultados foram interpretados à luz do nosso quadro teórico que se alinha às concepções de prova e demonstração de Balacheff (2000), assim como à sua tipologia de provas quanto aos argumentos usados pelos estudantes para validar as suas conjecturas. Verificamos que a sequência didática produzida possibilitou o estímulo à formulação de conjecturas e na produção de provas tipificadas como empirismo ingênuo e experimento crucial.

Palavras-chave: Prova. Demonstração. Tarefas de Investigação. Geometria Dinâmica.

Abstract

Demonstration is an important element in the history of mathematics, it is responsible for validating an argument, explaining, communicating constructed mathematics and even stimulating new ones. However, we noticed that the approach to validation processes occupies little space in school mathematics, in the guiding documents and even in academic research. Considering the practice of teachers who want to address these processes in the classroom, we undertook an educational development research project with a qualitative approach that aims to develop tasks of an investigative nature in dynamic geometry environments in order to contribute to the construction of mathematical proof in problems relating to triangle inequalities. Such tasks were organized into a didactic sequence that was applied to 5 students participating in the Mais Estudo project in the state education school system of Bahia. The results were interpreted in the light of our theoretical framework, which is aligned with Balacheff's (2000) conceptions of proof and demonstration, as well as his typology of proofs in terms of the arguments used by students to validate their conjectures. We verified that the didactic sequence produced made it possible to stimulate the formation of conjectures and the production of proofs typified as naive empiricism in all the participants and crucial exemple.

Keywords: Proof. Demonstration. Dynamic Geometry. Investigation tasks. Triangle inequalities.

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CETIACB	Colégio Estadual de Tempo Integral Antônio da Costa Brito
DCRB	Documento Curricular Referencial da Bahia
GD	Geometria Dinâmica
GGB	GeoGebra
IA	Inteligência Artificial
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
IME	Instituto de Matemática e Estatística
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
MMM	Movimento Matemática Moderna
NTCM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PEAMAT	Grupo de Pesquisa em Processos de Ensino e de Aprendizagem Matemática
PMD	Performance Matemática Digital
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SGD	*Softwares* de Geometria Dinâmica
TD	Tecnologias Digitais
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Aos gregos é atribuída a responsabilidade sobre a mudança nos processos de validação da matemática, saindo daqueles fortemente empíricos e permitindo a migração para processos abstratos (Grabiner, 2012). Tales de Mileto (600 a. C.) teria sido o primeiro a construir uma demonstração e Euclides de Alexandria (300 a. C.) escreve a obra que marca a forma como a matemática é comunicada, explicada e até mesmo construída, *Os Elementos*. Partindo da premissa de considerar um conjunto de afirmações, autoevidentes, como verdadeiras e, a partir delas, deduzir todas as demais, ele criou um padrão de validação que só teria relevante alteração com o surgimento das axiomáticas formais introduzidas por David Hilbert (1852-1943), mas ainda assim, mantendo a estrutura original, um pequeno conjunto de afirmações tomadas como verdadeiras a partir das quais, com um pouco de lógica aristotélica, se demonstra a validade das demais afirmações (Domingues, 2002).

Como vemos, e veremos mais detalhes no capítulo a seguir, a demonstração é um elemento arraigado no desenvolvimento da matemática enquanto ciência que perdura até os dias de hoje e não há sinais de que será diferente mesmo com o desenvolvimento da era da informática e das inteligências artificiais. É nessa percepção de grande relevância da demonstração para a matemática enquanto ciência que começam as reflexões que dão origem a este trabalho: qual o papel que a demonstração, tão relevante na matemática acadêmica, pode ter ou tem na matemática escolar? Esta não é a nossa questão de pesquisa, mas é a partir dela que iniciamos as nossas investigações.

Notamos a partir do levantamento bibliográfico realizado neste trabalho que essa é uma discussão rarefeita no Brasil. Na ocasião da construção do projeto desta pesquisa, verificamos o banco de dissertações, a nível nacional, do nosso programa de pós-graduação e constatamos que, das 6.885 dissertações depositadas até o dia 03 de julho de 2023, somente 54 continham em seus títulos as palavras prova, demonstração ou argumentação. Ainda assim, nesses 54 casos de interesse, a maioria contém a palavra prova e a usa no sentido de exame. Matheus (2016) também verificou a pouca produção acerca do tema prova e demonstração na Educação Básica, afirmando que a produção sobre este tema passa por um momento de produções pouco relevantes.

Temos uma preocupação ainda mais específica, estamos interessados em pesquisas que apontem para a possibilidade de desenvolvimento de soluções que permitam ao professor da Educação

Básica adaptar ou até mesmo replicar em suas salas de aula essas soluções desenvolvidas com vistas a criar uma situação de prova. Neste sentido, nosso levantamento bibliográfico apontou as potencialidades de duas metodologias de ensino da matemática que, individualmente, podem amplificar a possibilidade de criar uma situação de prova: as tarefas investigativas - Ponte *et al.* (2019), Brocardo (2001) - e os ambientes de Geometria Dinâmica (GD) - Gravina (1996; 2001), De Villiers (2001), Alves e Soares (2005).

Por outro lado, o estudo teórico, Anjos (2016), produzido pelo autor deste trabalho, apontou que o uso desses ambientes de forma integrada favorece a construção de provas e demonstrações e afirma que o emprego simultâneo dessas metodologias "[...] funcionam como agente catalisador do processo de experimentação devido a sua capacidade de simulação dinâmica, isso permite que rapidamente conjecturas sejam levantadas, provadas ou refutadas"(p.31). Contudo, o estudo não apresenta alternativas, do ponto de vista prático e operacional, que possam criar uma situação de prova. É neste espaço que o presente trabalho se insere ao propor uma pesquisa de desenvolvimento que visa *desenvolver tarefas de natureza investigativa em ambientes de geometria dinâmica de modo a contribuir com a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo*. Para tal, estabelecemos os objetivos específicos que listamos a seguir:

- discutir, distinguir e analisar os tipos de prova matemática, sua história, e os respectivos ambientes aos quais elas são pertinentes;
- descrever e explicitar mecanismos presentes nos *softwares* de geometria dinâmica e nas atividades de investigação que podem auxiliar no processo de construção de argumentos;
- produzir tarefas investigativas em ambientes de geometria dinâmica e aplicá-las.

O estudo da demonstração, ou da sua versão que consideramos mais pertinente para a Educação Básica, a prova, que aqui não entendemos como sinônimo como veremos na p. 24-25, se justifica em três pilares: o primeiro é a inscrição desse objeto de conhecimento, a demonstração, na matemática, como já pontuamos. O segundo está relacionado aos documentos normativos. Os documentos norteadores, mesmo que de modo esparso, um pouco menos os documentos mais recentes, a trazem como um elemento a ser considerado no ensino de matemática, um deles a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), lhe conferiu lugar de destaque na competência específica 5 de matemática e suas tecnologias que transcrevemos a seguir:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma **demonstração** cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 532, grifo nosso).

Para além da adequação às normas em vigência e da presença histórica da demonstração no desenvolvimento da matemática, a abordagem da prova e demonstração na Educação Básica também se justifica pela necessidade crescente da formação de cidadãos críticos e conscientes. A demonstração e os processos de argumentação nos quais ela está contida, entre eles a prova, têm a potencialidade de desenvolver o senso crítico em razão do estímulo contínuo a realizarem inferências que ampliem os conhecimentos sobre um objeto e que possam ser analisadas, questionadas e validadas ou não pelo grupo social em questão, a sala de aula (Costa, 2023).

O desenvolvimento e estruturação do nosso trabalho está estreitamente ligado aos nossos objetivos específicos e a nossa questão norteadora: *de que modo sequências didáticas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática?*

Para trazer elementos que pudessem nos ajudar a compreender nosso objeto de pesquisa e contribuir com a discussão em torno da questão norteadora, iniciamos o desenvolvimento do trabalho apresentando a presença e a transformação da demonstração da matemática em alguns momentos da história. Também nos interessamos por analisar as funções que a demonstração tem na matemática acadêmica [1] antes de iniciar a discussão sobre a demonstração e a prova na matemática escolar. Realizamos, desse modo, no capítulo 2, uma discussão sobre a demonstração e a prova sob a perspectiva histórica, conceitual e da matemática escolar. Seguimos a discussão a partir da percepção da complexidade de criar uma situação de prova na Educação Básica e, por essa razão, apresentamos, no capítulo 3, duas metodologias de ensino da matemática que podem auxiliar no desenvolvimento de explorações e produção de provas: as tarefas investigativas e a geometria dinâmica.

Em nosso trabalho, a prova e a demonstração são o nosso objeto de estudo. Escolhemos, porém, um objeto matemático para que pudéssemos avançar no sentido de produzir as situações de prova que desejávamos. A escolha desse objeto ocorreu por simplicidade e por o considerarmos pouco explorado, principalmente sob essa perspectiva. O capítulo 4, portanto, é reservado às desigualdades no triângulo. Nele, apresentamos definições e resultados fundamentais na compreensão desse objeto e, principalmente, os resultados que foram explorados no nosso produto educacional, apresentando, para cada resultado, uma demonstração formal.

O nosso produto educacional é um dos resultados de nossa pesquisa, que, como podemos verificar no capítulo 5, que trata da metodologia, é uma pesquisa de desenvolvimento. Além dessa caracterização, nesse capítulo, fazemos uma breve descrição do produto educacional, apresentando em linhas gerais as suas tarefas e descrevendo as sessões e o público com o qual foi aplicado.

Na direção da finalização do trabalho, os capítulos 6 e 7 apresentam os resultados da pesquisa e as considerações finais e perspectivas. Neles notamos que a sequência didática criou um ambiente de exploração que permitiu a formulação, verificação e construção de provas para conjecturas. Os resultados apontam, portanto, para a possibilidade da sequência proposta em criar uma situação de prova. Os obstáculos ao aprendizado da prova também são notados e estão presentes no texto, com destaque para as questões que envolvem a rede semântica de significados na matemática. Também pontuamos as limitações da própria sequência e a necessidade de ajustes.

[1] A *priori* considere matemática acadêmica como aquela que é desenvolvida pelos matemáticos profissionais com os seus métodos e objetos de saber próprios. Por outro lado, considere, por ora, a matemática escolar como aquela desenvolvida no ambiente da Educação Básica que tem relação com a matemática acadêmica, mas tem foco nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, estando, portanto, relacionada às práticas e objetivos do processo de ensino.

Capítulo 2

A Demonstração: elementos históricos, conceituais e a sua relação com a matemática escolar

Neste capítulo apresentamos um arco histórico sobre a demonstração em matemática desde o seu berço na Grécia antiga até os dias de hoje. Ao descrever as questões históricas relativas ao nascimento e transformação dos padrões de demonstração e rigor, evidencia-se a sua importância para a matemática acadêmica. Já em direção ao final do capítulo, são apresentadas algumas concepções contemporâneas sobre a demonstração, suas funções para a matemática acadêmica e para a matemática escolar. Também apresentamos a concepção de prova enquanto um processo de validação distinto a demonstração e fazemos breves notas sobre a complexidade em abordar tais processos, prova e demonstração, na Educação Básica.

2.1 Elementos de uma Possível História

A tradição da comunicação em matemática ou ainda o seu fazer, impõe ao iniciar o estudo de um objeto a exibição de uma definição deste antes de qualquer outra ação. Não faremos isso, pelo menos não de modo direto neste momento. A ideia de demonstração será construída ao passo em que uma possível história sobre o seu desenvolvimento será contada. Dizemos possível, pois parte do que será narrado não tem uma prova definitiva sobre a sua ocorrência, são conclusões baseadas em uma série de evidências históricas, sobretudo da matemática ocidental, que muitas vezes foram documentadas séculos depois da sua provável ocorrência. Essa possível história foi construída a partir de momentos e personagens da história da demonstração (Euclides de Alexandria, os gregos, os árabes, a aritmetização do cálculo, as novas axiomáticas e outros) já disponíveis na literatura e que são apresentados e discutidos por Domingues (2002), Nagafuchi (2009) e Grabiner (2012), as referências que nos conduziram nesta reconstrução dessa linha do tempo. Ao final, incluímos nessa cronologia uma breve discussão sobre as Inteligências Artificiais (IA) e a demonstração.

Existem poucas fontes primárias de informação sobre os povos da antiguidade, porém sabe-se que todo povo que desenvolveu a escrita, desenvolveu algum tipo de conhecimento matemático, mesmo que elementar. As civilizações egípcia e babilônica, por exemplo, tinham sistemas de numeração próprios, noções de aritmética, métodos para solucionar equações lineares e noções de área e volume. Os babilônios até mesmo conseguiram solução para um certo grupo de equações de segundo grau, enquanto os egípcios conseguiram construir regras para determinar o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada (Berlinghof; Gouveia, 2010). Fato esse, segundo Domingues (2002), que em razão das hipóteses sobre como o resultado foi obtido, levanta a possibilidade de que os matemáticos do antigo Egito teriam exercitado a ideia de demonstração de algum modo, contudo, de forma isolada, rarefeita, sem qualquer estruturação ou formalização.

A matemática egípcia e a babilônica foram desenvolvidas em concomitância, contudo, ao que tudo indica, de modo independente (Berlinghoff; Gouveia, 2010). Inclusive, por vezes, chegavam a resultados distintos acerca dos mesmos problemas, como é o caso dos valores encontrados para a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Para os egípcios era 3,16 enquanto para os babilônios 3,125, em notação atual (Grabiner, 2012). Este é considerado por Grabiner (2012) como um dos fatores que levariam os gregos a desenvolver uma maneira de evitar as distintas soluções para os mesmos problemas.

> Talvez eles tenham chegado à conclusão de que a maneira de evitar ter várias respostas para as mesmas questões é fazer apenas aquelas suposições sobre as quais ninguém poderia discordar, como 'todos os ângulos retos são iguais', então deduzir outras coisas a partir dessas suposições inquestionáveis para ver quão longe eles poderiam chegar (Grabiner, 2012, p. 149, tradução nossa)[1].

Os procedimentos de validação tal como conhecemos não existiam nessas civilizações, até o surgimento da matemática grega. Segundo Domingues (2002), era suficiente verificar a sua aplicação no cotidiano ou, como destaca Grabiner (2012), usar provas visuais[2] para validar um argumento como o praticado pelos babilônios. Os gregos traçaram uma linha que separa a forma como a matemática foi construída no decorrer dos séculos no sentido da inclusão do sistema definição-axioma-proposição-demonstração (Garnica, 1995; Nagafuchi, 2009). A eles se deve o uso da lógica, a conexão entre resultados e o uso de pequenos grupos de afirmações, a partir das quais, se deduziam outras tantas. Tamanha é a importância dos gregos na construção da matemática que conhecemos hoje que, por vezes, a eles são atribuídas descobertas de resultados que, na realidade, apenas foram formalmente por eles demonstrados (Anglin, 1994 *apud* Reid, D; Knipping, 2010).

Tales de Mileto (600 a.C.) é um dos primeiros personagens gregos que são apresentados nas referências que até agora citamos, atribui-se a ele as primeiras formulações gerais sobre as propriedades de uma figura e Anglin (1994) citado por Reid e Knipping (2010), atribui a Tales a primeira demonstração. Ele foi o primeiro a levar para a Grécia conhecimentos de geometria vindos

[1] Perhaps they reasoned that the way to avoid having multiple answers to the same quation is to make only those assumptions about which nobody could disagree, like 'all right angles are equal', and then deduce other things from those undoubtable assumptions to see how far they could get.

[2] Processos de validação baseados em desenhos que convencem o interlocutor da validade de um fato, mas sem uso de recursos aritméticos ou algébricos, por exemplo.

do Egito, África, formulou diversas proposições e apresentou aos seus seguidores os princípios de tantas outras formulações, para isso usou métodos empíricos e até mesmo métodos gerais (Proclo, sec. V *apud* Domingues, 2002)

Outro personagem relevante, Pitágoras de Samos (532 a.C) e a sua irmandade teriam sido os responsáveis pelo desenvolvimento da matemática pura ao incorporar aos seus estudos temas de natureza abstrata e por inserir na matemática o aspecto dedutivo (Proclo, sec. V *apud* Domingues, 2002). Durante a maior parte da existência, os membros da confraria pitagórica teriam estabelecido resultados para casos particulares tanto na geometria quanto na aritmética, eles não instituíram o uso de axiomas ou similares. "Muito provavelmente, o máximo que fizeram em seus trabalhos foi encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria"(Domingues, 2002, p.57-58). Possivelmente por alguma razão de ordem intelectual, os pitagóricos não acreditavam na “intuição e observação” como a única forma de se obter conhecimento geométrico.

A derrocada da escola pitagórica, que durou até 400 a.C, pode ter sido acentuada em razão da descoberta de um de seus membros, Hipaso de Metaponto (IV a.C), que teria concluído que a diagonal de um quadrado de lado de medida 1 não poderia ser um número inteiro positivo ou ainda a razão de inteiros positivos. Tal descoberta colocava em xeque a crença da irmandade pitagórica de que tudo é número e, até então, isso se circunscrevia a inteiros positivos e suas possíveis razões. Contudo, o argumento que Hipaso de Metaponto apresentou não é conhecido, Aristóteles (IV a.C) disse posteriormente que Metaponto o teria feito por redução ao absurdo e apresentou uma demonstração para tal fato que essencialmente é a mesma que usamos hoje (Domingues, 2002).

Chegar à conclusão da irracionalidade da raiz quadrada de 2 – ou incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com o seu lado de medida 1 – só foi possível em razão do uso das estruturas de organização que faziam parte da prática da matemática dedutiva que estava presente no fazer matemática dos pitagóricos e, possivelmente, da prática de deduzir argumentos que era intrínseca à sociedade grega (Grabiner, 2012). A chegada a esse paradoxo é uma conquista do método dedutivo ante a intuição. O fato que pode ter lançado a sociedade pitagórica em completa desgraça é o mesmo que sustenta uma das mais fortes hipóteses sobre o porquê de os gregos desenvolverem o método hipotético-dedutivo, a tese internalista que discutiremos em outro momento.

Antes de chegarmos à obra magna que marca a forma como a matemática é feita e comunicada, *Os Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a.C), ainda devemos destacar as exitosas práticas de decomposição de problemas em outros mais simples ou ainda em outros nos quais a solução já é conhecida, que também eram comuns na Grécia antiga. Essa maneira contém semelhanças com a estrutura das demonstrações que praticamos hoje.

> Quando reduziram problemas difíceis em problemas mais simples, e então reduziram estes para problemas ainda mais simples, os matemáticos gregos estavam criando conjuntos de ideias relacionadas a partir das complexas para as simples. Agora, suponha que nós dominamos o conjunto dessas ideias relacionadas em ordem reversa. Isso nos dá a estrutura da prova: coisas simples nas quais estão coisas mais complexas nas quais estão coisas ainda mais complexas. As coisas mais simples no começo são os “elementos” e as coisas

> intermediárias são frutíferas, mas não finais, resultados que nós chamamos de “lemas” (Grabiner, 2012, p.150, tradução nossa)[3].

A Hipócrates de Chios (470-410 a.C) é creditada a percepção da distinção entre os tipos de problemas mais simples originados da decomposição de problemas mais complexos. Essa diferenciação é, o que hoje chamamos, de teorema e lema. Essa técnica de decomposição de problemas está presente no seu livro *Elementos de Geometria* que é uma obra elencada por Grabiner (2012, p. 150) como “[...] o melhor *Elementos de Geometria* logicamente estruturado até Euclides escrever o seu próprio *Elementos* [...]”[4] .

Ainda devemos destacar a obra de Autólico de Pitane (330 a.C) e o livro *On The Moving Sphere* [Sobre a esfera em movimento] que é um livro que trata de astronomia e também contém a mesma estrutura axiomática que foi usada por Euclides de Alexandria (300 a.C) em *Os Elementos* (Boyer, 1974 *apud* Nagafuchi, 2009). A existência dessa obra nos ajuda a perceber que o rigor nas ciências na Grécia Antiga não estava presente apenas na matemática.

Finalmente, alguns séculos após Hipócrates de Chios escrever os seus elementos, Euclides deu a sua contribuição. Seu livro, *Os Elementos*, possui 13 volumes que versam sobre geometria, aritmética e álgebra. Ele é o registro mais antigo que sobreviveu ao tempo e às pessoas em que se pode constatar o modo axiomático-dedutivo na matemática. O livro contém uma espécie de compilação das produções da matemática grega do período e é apresentada na obra por meio de uma estrutura: definição, postulados, proposições e demonstrações. Notadamente em *Os Elementos* Euclides não assume conceitos primitivos, todos os objetos são definidos desde os mais elementares. Os postulados do livro, com exceção do quinto, são de fácil percepção, autoevidentes, e todas as 465 proposições enunciadas foram demonstradas usando somente os postulados e as proposições previamente demonstradas (Eves, 2004; Domingues, 2002).

A obra de Euclides passou a ser referência de ideal de um trabalho matemático em razão do seu rigor. É bem verdade que o trabalho apresenta problemas como demonstrações de casos particulares ante a necessidade de generalidades e inclusão de fatos que não foram demonstrados nem incluídos como postulados como verdadeiros e usados nas demonstrações de proposições, mas isso não diminui o mérito do seu trabalho (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009).

As produções de Hipócrates de Chios e Autólico de Pitane nos mostram que possivelmente o grande mérito de Euclides não é ter decidido usar estrutura axiomática dedutiva, mas, sim, “A escolha particular de axiomas, o arranjo de teoremas e o rigor das provas” (Nagafuchi, 2009, p. 64). Até mesmo o uso do polêmico quinto postulado, que burlava a noção de autoevidência, notável nos demais, só é feito após extensas explanações e obtenção de resultados (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009).

---

[3] When they reduced hard problems to simpler problems, and then reduced these to yet simpler problems, the Greek mathematicians were creating sets of linked ideas, from the complex to the simple. Now, suppose we run such a set of linked ideas in reverse order. This gives us a proof structure: simple things on which rest more complex things on which rest yet more complex things. The simplest things at the beginning are the “elements, and the intermediate ones are the fruitful, but not final, results we now call “lemmas.”

[4] [...] the best logically structured Elements of Geometry until Euclides wrote his own Elements [...].

Grabiner (2012) escreve que houve várias tentativas de demonstrar o quinto postulado como um teorema partindo dos demais postulados de Euclides[5] . No século XVIII matemáticos como Johann Heinrich Lambert, Lagrange e Gerolamo Saccheri tentaram uma nova abordagem, provar o quinto postulado de modo indireto e, entre os resultados obtidos a partir dessa empreitada, incluíam retas paralelas que não eram equidistantes e quadrados com três ângulos retos e sem a necessidade de ter o quarto e último ângulo também reto. Um século mais tarde, no século XIX, Gauss[6] , Bolyai e Lobachevsky, de modo independente, concluíram que tais resultados eram perfeitamente factíveis em outras geometrias, nas geometrias não-euclidianas. Mas isso significava levar os métodos apresentados por Euclides a tal ponto, que a sua própria obra se torna a precursora e distante dos novos padrões. Grabiner (2012, p. 163) escreve a esse respeito:

> A geometria precisava do seu compromisso histórico com a prova lógica para os matemáticos serem capazes de superar seu compromisso intuitivo, psicológico e filosófico com a geometria euclidiana. Novamente, para entender as propriedades da não-visibilidade, não-intuitividade, ou a contra-intuitividade, matemáticos precisam de lógica; nós precisamos de prova. De fato, a geometria não-euclidiana é o triunfo máximo do método de prova euclidiano.[7]

Uma questão que naturalmente surge é por qual razão a Grécia teria sido o solo fértil no qual a matemática é construída como uma ciência hipotético-dedutiva. Grabiner (2012) aponta algumas razões:

(i) a necessidade de criar uma base comum que impedisse a multiplicidade de soluções para um mesmo problema;

(ii) em razão da prática dos filósofos de buscar uma única explicação ou um conjunto mínimo de elementos que justificasse todos os demais, a exemplo de tal temos a crença básica da sociedade pitagórica de que tudo é número;

(iii) em razão da forma de resolver problemas na qual eles eram fragmentados em problemas menores que eram mais fáceis de serem resolvidos ou ainda eram problemas de solução já conhecida, como o caso que descrevemos de Hipócrates de Chios;

(iv) outra hipótese está ancorada na cultura dos cidadãos das cidades gregas, em particular Atenas, de ouvir e proferir argumentos em razão de disputas em tribunais e assembleias públicas. Este hábito teria favorecido o desenvolvimento de habilidades de lógica da população;

(v) outro fator que é apontado por Grabiner (2012) é a influência que os filósofos gregos possuíam sobre a matemática. Os filósofos gregos eram muito argumentativos e, por exemplo, tinham

[5] Eves (2004) destaca que efetivamente o quinto postulado é independente dos demais enunciados por Euclides

[6] Gauss nunca chegou a publicar nada a respeito e por essa razão Eves (2004) defende o crédito da descoberta das geometrias não-euclidianas deve ser dividido entre Bolyai e Lobachevsky.

[7] Geometry needed its historical commitment to logical proof for mathematicians to be able to overcome their intuitive and psychological and philosophical commitment to Euclidean symmetry. Again, in order to understand the properties of the non-visible, the non-intuitive, or the counterintuitive, mathematicians need logic; we need proof. Indeed, non-Euclidean geometry is the ultimate triumph of the Euclidean method of proof.

como parte do seu processo de iniciação a análise criteriosa das produções dos filósofos ulteriores e a tentativa de refutação de suas teses. Esses filósofos até mesmo se envolviam com a produção de matemática, vide a demonstração de Aristóteles para a irracionalidade da raiz quadrada de 2.

(vi) por fim destaca a importância das provas indiretas, a redução ao absurdo. Para a autora essa técnica de demonstração não é apenas uma "prova destrutiva [8]", mas também como uma forma de testar conjecturas antes de enfrentar o processo de buscar uma demonstração para tal fato. Grabiner (2012) ainda exemplifica a importância do uso dessa técnica em outros contextos: no teorema das paralelas e na demonstração da irracionalidade de raiz quadrada de 2.

Claramente as ideias de Grabiner (2012) acerca do desenvolvimento da matemática na Grécia têm raízes em questões que são essencialmente externas à matemática e são baseadas em um conjunto de hábitos de um grupo, uma comunidade, elementos de uma cultura que reverberam nos mais diversos aspectos, até mesmo na Ciência. Arsac (1987) *apud* Garnica (1995) descreve essa concepção de origem da demonstração como externalista, aquela que se baseia em aspectos da cultura do local.

Arsac (1987) citado por Garnica (1995) descreve uma outra possibilidade, a hipótese internalista. Segundo essa tese, a questão da irracionalidade da raiz quadrada de 2 é o centro do debate, e ela teria sido o motivador do desenvolvimento da prova rigorosa.

Sobre a questão da incomensurabilidade da raiz quadrada, Arsac (1987) *apud* Garnica (1995) faz uma comparação: de um lado o ponto de vista geométrico e do outro o ponto de vista aritmético. Desse processo, conclui que não é possível verificar a incomensurabilidade única e exclusivamente a partir dos aspectos visuais. A figura seria suficiente para concluir pela comensurabilidade. Porém, as análises a partir da aritmética que permitiriam a conclusão da incomensurabilidade implicariam o uso do raciocínio por absurdo. Baseando-se no que foi exposto e na ausência de estudos sobre interferência mútua da matemática na sociedade grega e vice-versa, Arsac (1987) *apud* Garnica (1995) opta por uma tese que é um entrelugar entre a internalista e a externalista e o faz por meio das seguintes afirmações.

> - sem o problema da irracionalidade a transformação da matemática [em ciência hipotético-dedutiva] não seria produzida, mesmo dentro da sociedade grega; - num outro contexto de sociedade, mesmo se confrontados com o mesmo problema, a Matemática não seria transformada como o foi na Grécia (Arsac, 1987, p. 298 *apud* Garnica, 1995, p. 19).

Independentemente das razões sobre o surgimento enquanto ciência hipotético-dedutiva na Grécia antiga, a forma de fazer matemática nesse período reverbera como exemplo de rigor a ser seguido não apenas por ela, mas também por outras áreas do conhecimento humano como a teologia, a política, a filosofia e as ciências da natureza, como vemos em Grabiner (2012). Na matemática grega existem trabalhos como os *Sobre Equilíbrios de Figuras planas* e *Sobre os Corpos*

[8] But proof by contradiction is not merely destructive

Flutuantes de Arquimedes (287 a. C) que contam com a já concedida estrutura apresentada por Euclides (Eves, 2004); nas ciências naturais, Isaac Newton, escreveu o seu *Principia* sob a égide de três axiomas, as leis do movimento (Grabiner, 2012); na filosofia, Barush Spinoza escreveu em 1675 *Ethics Demonstrated in Geometrical Order* [Ética], seu texto contém definições iniciais básicas como Deus e Eternidade, além de apresentar axiomas de existência e causalidade entre os objetos definidos como "Deus, ou substância consistindo de uma infinidade de atributos, cada um que expressa uma eterna e infinita essência, necessariamente existe"[9] (Spinoza, 1953, prop. XI, *apud* Grabiner, 2012, p. 152).

Contudo, excetuando as produções da matemática grega, nos quase dois milênios que seguem a publicação de *Os Elementos* a forma de produzir e comunicar a matemática calcada no rigor grego quase não existiu. Na Idade Média europeia (476 – 1492) houve pouca produção de matemática e das demais ciências. Nesse período "Intelectuais e inventores deixaram de se interessar pela ciência pura e a matemática e voltaram as suas energias mais e mais para a engenharia e a religião" (Eves, 2004, p. 283). A igreja católica, que passou a ter um imenso poder com a ascensão do cristianismo, instituiu o latim como língua oficial das ciências, o que se transformou em um obstáculo para a construção da matemática, que se adicionaria a uma espécie de vigilância e onipresença dos dogmas e crenças religiosas sobre as universidades e a sociedade medieval. Ainda houve a caça às bruxas que, por exemplo, acusava de magia negra pessoas que fossem capazes de realizar cálculos mentais agilmente (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009).

Uma pequena parte do que se produziu na matemática grega chegou a Europa por meio das traduções. Um dos tradutores, Boécio (480-524), traduziu algumas obras do grego que versavam sobre geometria, aritmética e astronomia, dentre elas, parte de *Os Elementos*. Ele chegou a escrever um livro sobre geometria, contudo, não continha demonstrações, apenas definições e teoremas (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009). Os árabes, como veremos nos parágrafos seguintes, têm um papel importante em algumas traduções, como destaca Eves (2004).

Estando a Europa em baixa na produção, o epicentro de desenvolvimento da matemática passou para a Ásia, para os mundos árabe e hindu, que apesar de terem suas contribuições, como veremos, "não priorizaram a demonstração como os gregos do período clássico – longe disso" (Domingues, 2002, p. 61).

Diferentemente dos europeus, os hindus, na idade média europeia estavam mais interessados em astronomia do que em religião e, por vezes, a contribuição dos hindus para a matemática se revelava em obras sobre tal assunto por meio de alguns capítulos que eram dedicados aos aspectos matemáticos. Os hindus tinham a matemática como uma serva da Astronomia. Talvez, as contribuições mais notórias dos hindus sejam o sistema de numeração e a, equivocadamente chamada, fórmula Bhaskara. Também tiveram contribuições na geometria e trigonometria, mas o fizeram com pouca proficiência e a mesma era empírica e fortemente ligada a medição. Apesar da existência de provas visuais, as demonstrações eram incomuns e "inexistiam procedimentos

[9] God, or substance consisting of infinite attributes, each one of which expresses eternal and infinite essence, necessarily exists.

postulacionais (p.257)" (Eves, 2004).

Os intelectuais árabes, a quem se deve o grande mérito da preservação de parte do conhecimento que fora produzido pelos gregos e hindus, traduziram, "Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram laboriosamente traduzidos para o árabe e assim preservados para que posteriormente intelectuais europeus tivessem a condição de retraduzi-los para o latim ou outras línguas" (Eves, 2004, p. 260), dentre eles *Os Elementos*. Muito disso se deve aos califas que eram governantes esclarecidos que fomentavam a cultura e mantinham proximidade dos intelectuais junto às suas cortes. Assim como os hindus, eles se percebiam como astrônomos e, portanto, eram estudiosos da trigonometria; a eles é creditado o uso "[...] das seis funções trigonométricas e aprimoramento na dedução das fórmulas da trigonometria esférica" (Eves, 2004, p.265). Segundo Eves (2004), existem registros de demonstrações na matemática árabe, mas nada que indique uma sistematização, uma prática.

É na matemática árabe que se encontra a única tentativa de se demonstrar o quinto postulado de Euclides desde os gregos até o Renascimento (Eves, 2004). Os árabes pareciam ter algum tipo de interesse especial nesse postulado e alguns matemáticos empreenderam essa tarefa. Entre eles, Al-Hazen (965 – 1040) que conseguiu construir uma afirmação equivalente ao axioma das paralelas e Nasih Eddin Al-Tusi(1201-1274) que, apesar de não ter conseguido demonstrar a dependência do quinto postulado dos demais, teve nos seus escritos o que seria o embrião das geometrias não-euclidianas.Ainda existem outros registros de demonstrações de resultados famosos na matemática árabe, como um caso particular do último teorema de Fermat e uma prova inédita do teorema de Pitágoras, mas, como já havíamos assinalado, não demonstram a estrutura do rigor grego ou ainda evoluções (Eves, 2004)

O período histórico que vai do Renascimento (Sec. XIV - XVII) até o século XIX é denominado por Kline (1972, *apud* Domingues, 2002) como ilógico, nele há a publicação de grandes obras da matemática entre as mais relevantes estão o *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*[10] de Issac Newton (1643-1727) publicado em 1687, que chamaremos apenas de *Princípios*, e o terceiro apêndice do *Discurso*, *A Geometria*, de Descartes de 1637. Ambos foram escritos, e muitos outros, sem que existisse uma base matemática formal, por isso a caracterização como ilógico. Domingues (2002) destaca que Descartes valorizava extensamente o raciocínio dedutivo, contudo não fez uso na sua única obra matemática, por outro lado, Newton não estaria satisfeito com a sua própria criação, "fez três tentativas para passar a limpo suas ideias, nenhuma delas convincente, rigorosamente falando" (2002, p. 61). E segue argumentando que aos matemáticos que optaram por seguir produzindo de modo distante do rigor, não faltava capacidade, "A verdade é que os fundamentos da matemática, de um modo geral, careciam ainda de uma estruturação mais sólida e abrangente [...] (Domingues,

[10] Em outro momento do texto citamos o *Principia* como um exemplo de rigor euclidiano. Agora, nos referimos ao mesmo como uma obra que foge a esse padrão. Parece haver um paradoxo, mas não há. O rigor presente no livro justifica-se quando se observa do prisma da física, os três axiomas do movimento juntos as definições, teoremas e demonstrações, formam uma base neste aspecto, conforme vemos em Grabiner (2012). Contudo, a matemática que é usada para suportar as conclusões da física apresentavam um problema lógico, por exemplo, no que diz respeito a forma como as grandezas muito pequenas ou muito grandes eram abordadas (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi 2009)).

2002, p. 61)”.

Mas talvez a questão não seja haver ou não fundamentos sólidos, mas, sim, a percepção da necessidade de fundamentos rigorosos para matemática que, segundo Grabiner (2012) não era uma preocupação do século XVIII. A esse respeito, Grabiner (2012, p. 158, tradução nossa[11]) escreve:

> Os matemáticos do século XVIII não se preocupavam muito a respeito das bases lógicas do cálculo. O cálculo foi avançando por meio de argumentos plausíveis e derivações heurísticas sem o que matemáticos modernos poderiam considerar uma justificativa adequada. Existe, em particular, uma grande quantidade de raciocínios sobre infinitos e infinitésimos, [...] Newton usou a ideia de velocidade, que alguns críticos do século XVIII disseram ser parte da Física, para justificar conclusões matemáticas sobre derivadas e integrais.

Os critérios usados para validar o conhecimento matemático incluíam questões de ordem filosófica e até mesmo teológica, que, aliás, não aparecem somente neste momento da história. Desde a matemática grega há essa amalgama entre a ciência, filosofia e teologia. Assim como para os pitagóricos “tudo é número”, para os intelectuais do século XVII e XVIII existia uma conexão entre a razão e as leis da natureza (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009).

Em que se pese a ausência de rigor, esse foi um período de ouro para a matemática. Até essa ausência se transformou em uma importante força propulsora na busca por construir fundamentos axiomático-dedutivos.

> Mas, diga-se de passagem, esse período “ilógico” teve o seu lado positivo graças à intuição e ao trabalho ingente dos grandes matemáticos, a matemática evoluiu muito nesse período, senão com consciência plena pelo menos a passos confiantes que, no grosso, levaram ao caminho correto (Domingues, 2002, p.61).

Eves (2004, p. 462) ainda arremata,

> [...] podemos dizer, com fidelidade razoável aos fatos, que o século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo, que o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente, que uma das maiores ênfases do século XX tem sido a de generalizar, tanto quanto possível, os progressos já alcançados, e muitos matemáticos da atualidade estão envolvidos com problemas de fundamentos mais profundos ainda.

A busca por suster o cálculo de uma base sólida é um importante motivador de um processo que visa dar a matemática o rigor que, de certo modo, perdeu, ora por condições adversas à produtividade, ora por adesão a tese do design matemático do universo (Kline, 1972 *apud* Nagafuchi, 2009) – na Idade Média e no Renascimento, respectivamente. As críticas descritas por Grabiner (2012) do bispo George Berkley (1685-1753) ao trabalho de Newton expuseram as fragilidades matemáticas do *Princípios* e difundiram a dúvida e a percepção da necessidade de fundamentar tais ideias para além da assunção da obviedade dos fatos e de sua associação com o mundo físico.

[11] Eighteenth-century mathematicians therefore did not worry too much about the logical basis of the calculus. The calculus was advanced by means of plausible arguments and heuristic derivations without what modern mathematicians would consider adequate justifi cation. There was, in particular, a great deal of questionable reasoning about infi nites and infi nitesimals, [...] Newtonians used the idea of velocity, which some eighteenth-century critics said was part of physics, to justify mathematical conclusions about derivatives and integrals.

O fato de diversos matemáticos trabalharem no processo de formalização do cálculo em razão de não aceitarem os argumentos ou ainda pela necessidade de mais informações que expliquem o porquê certas manipulações são possíveis, por quais razões Berkley ou Newton estavam certos ou errados, revela alguns pontos de análise: a interferência cultural na aceitação de um argumento, a função de explicação de uma demonstração e, sobretudo, a mudança de padrão sobre o que é um argumento válido em matemática. Nesse momento da história, a demonstração está sendo requerida socialmente para a assunção da veracidade de um fato. A resposta dos matemáticos para isso extrapolou os limites instituídos pelo *Os Elementos*, como vemos a seguir.

Algumas questões levantadas pelo bispo Berkley acabariam por ser respondidas com a rigorização do cálculo ao surgir a abordagem de limite com uso do delta-épislon. Esse processo começou a ser construído por A. L Cauchy (1789-1854) 150 anos após a invenção do cálculo, é a ele a quem se deve "[...] grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários" (Eves, 2004, p.531). Mesmo não tendo conseguido concluir uma boa estruturação formal e rigorosa do cálculo, Cauchy deixou contribuições valorosas que podem ser constatadas, inclusive, nos diversos resultados que levam seu nome nos livros de análise. Contudo, a contribuição de Cauchy que para este trabalho é a mais valiosa se refere a "[...] grande preocupação com o rigor e, como tal, serviu para inspirar grandemente os outros matemáticos a eliminar da análise a manipulação formal cega e as demonstrações intuitivas" (Eves, 2004, p. 532).

As lacunas deixadas pelo trabalho de Cauchy foram sendo estudadas paulatinamente até que K. Weierstrass (1815-1897) e os weiertrassianos – que incluem, entre outros, G. Cantor (1845-1918) e B. Riemann (1826-1866) – que por volta de 1860 consolidaram a fundamentação do cálculo. Weierstrass percebeu que a teoria de limites proposta por Cauchy fora construída sobre noções muito intuitivas a respeito dos números reais. Dessa percepção, Weierstrass propôs um programa no qual o próprio conjunto dos números reais fosse suficientemente rigoroso. Esse processo, que ficou conhecido como aritmetização da análise, se consolidou e "[...] hoje a análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizam os números reais" (Eves, 2004, p. 611). Os matemáticos, além de conseguir uma boa axiomatização para os números reais, também conseguiram basear a geometria euclidiana no conjunto dos números reais por meio da sua interpretação analítica. Mais, conseguiram usar os números reais para interpretar uma parte da álgebra e muitas outras ramificações.

Uma vez que notado que o conjunto dos números reais pode ser tão importante a ponto de permitir a estruturação de outras áreas, foi natural a busca por uma fundamentação rigorosa desse conjunto. Os axiomas de G. Peano (1858-1932) surgem nesse contexto. Um conjunto de três afirmações a partir das quais pode-se construir o conjunto dos números naturais e, por conseguinte, o conjunto dos números reais e todas as proposições sabidas e demonstradas no processo de aritmetização da análise (Eves, 2004). Parte desse trabalho de buscar fundamentos para o cálculo irradiou para as demais áreas da matemática culminando no surgimento das geometrias não euclidianas (1829), das álgebras não convencionais (1840) e, ainda no século XIX, da axiomatização das noções de grupo, corpo e espaço vetorial (Domingues, 2002).

Nesse momento, a matemática já se mostrava autossuficiente, não havia mais a necessidade dos motivadores externos como os problemas de astronomia comuns no período medieval para os Árabes e Hindus ou ainda os problemas da natureza recorrentes para os matemáticos e físicos do renascimento europeu. A matemática passou a ter as suas próprias problemáticas, seus objetos e seus métodos que incluem a demonstração formal e rigorosa. A matemática Pura ganhou corpo com o fim dos argumentos intuitivos e axiomáticas auto-evidentes e o início das axiomáticas formais que por vezes são contra-intuitivas, parecem atentar contra princípios da matemática elementar e têm consequências que são capazes de embaralhar a intuição de quase qualquer um[12] . O trabalho empreendido para conferir rigor, trouxe um processo natural de abstração e generalização que acabariam por se transformar nas duas faces fundamentais de matemática no século XX o que implicou em uma revisão da matemática até então construída com a finalidade de lhe conferir fundamentos rigorosos (Eves, 2004).

No centro do movimento de axiomatização está o desenvolvimento de uma axiomática para a teoria dos conjuntos. Ela é particularmente importante dado o extensivo uso da teoria dos conjuntos nos mais diversos ramos da matemática, muito, ou quase tudo, pode ser traduzido para a linguagem dos conjuntos. G. Cantor (1845-1918) ainda em 1874 começou o processo de construção para os fundamentos da teoria dos conjuntos, porém os resultados que foram obtidos trouxeram uma série de paradoxos, inclusive, alguns em um nível muito elementar da teoria, como o chamado paradoxo de Russell. A primeira tentativa de peso no sentido da axiomatização foi feita por Ernest Zermelo (1871-1953) em 1902 e posteriormente aperfeiçoada por A. Frankel (1891-1965) em 1922. O sistema axiomático obtido, o Z-F, permite a construção do conjunto dos números naturais – e até mesmo os axiomas de Peano como teoremas nesse sistema – e, portanto, toda a análise. Contudo, a consistência[13] desse sistema ainda não foi demonstrada, o que nas palavras de Domingues (2002) deixa um "[...] buraco negro na teoria dos conjuntos (p. 64)". Esse sistema ainda inclui o "[...] chamado axioma da escolha, cuja aceitação para muitos é mais um ato de fé do que uma adoção matemática" (Domingues, 2002, p. 64).

Os problemas que circundam os paradoxos da teoria dos conjuntos de Cantor são considerados por Eves (2004) como a terceira crise nos fundamentos da matemática. As outras foram: a incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o seu lado e a problemática em torno da fundamentação do cálculo.

Antes de seguirmos para algumas breves notas sobre a filosofia da matemática, não podemos deixar de destacar o simbolismo e a necessidade do processo de reestruturação de *Os Elementos*. A construção de Euclides que fora precursora da construção da matemática enquanto ciência hipotético-dedutiva continha argumentos e estrutura que não eram mais compatíveis com a matemática hipotético-dedutiva a partir do século XIX (Domingues, 2002). Alguns matemáticos empreenderam

[12] Como um caso particular do paradoxo de Banach-Tarski que garante ser possível "[...] decompor uma superfície esférica em duas partes que podem ser recompostas de maneira a resultarem em duas novas superfícies esféricas, cada uma com raio igual ao da superfície inicial." (Domingues, 2002, p. 65).

[13] Um sistema S de axiomas é consistente se a partir dele não é possível chegar à demonstração de uma proposição e da sua negação. Ou seja, o sistema não produz contradições.

o trabalho de reestruturar *Os Elementos*. O primeiro deles foi, segundo Domingues (2002), M. Pash (1843-1931) que notou a necessidade de não definir os conceitos iniciais como Euclides o fizera e adotar o uso de conceitos primitivos a fim de evitar argumentos circulares e apelo a conceitos físicos. Todavia, a obra considerada mais bem-sucedida no processo de axiomatização da geometria foi feita por David Hilbert (1852-1943) "A ideia de Hilbert consistiu em aceitar três conceitos primitivos, ponto, reta e plano e definir as relações mútuas entre esses objetos única e exclusivamente por meio de axiomas. Nenhuma intuição geométrica deveria ser usada nessa etapa e, muito menos, nas demonstrações" (Domingues, 2002, p. 63-64).

Existem três principais correntes da filosofia da matemática que aglutinam ideias e seguidores que buscam conferir à matemática fundamentos sólidos: o logicismo capitaneado por B. Russel (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947) para os quais a matemática é um ramo da lógica e, portanto, todos os problemas de matemática devem ser formulados em termos desta; o intuicionismo que surge em 1908 com as ideias do holandês L. E. J. Brouwer (1881-1966) e para o qual todos os argumentos em matemática devem ser construtivos com uma quantidade de passos finitos e sem o uso da redução ao absurdo, também não é admitido o uso do axioma da escolha e a indução transfinita (Eves, 2004); e a formalista.

Por sua vez a terceira corrente da filosofia da matemática, a que prevaleceu sobre as demais durante o século passado, a formalista, foi capitaneada por David Hilbert. Após o seu célebre estudo postulacional da geometria em que conseguiu construir um conjunto de axiomas consistente – desde que a aritmética o fosse – e que lançou a matemática para as axiomáticas formais, Hilbert idealizou que algo similar poderia ser feito com toda a matemática (Domingues, 2002). Em resposta aos dois movimentos da filosofia da matemática já existentes, intuicionismo e logicismo, desenvolveu a visão formalista. Essa visão considera que a matemática é um sistema de símbolos formais que a priori não tem nenhum significado e os resultados são obtidos por meio das fórmulas que envolvem esses símbolos (Eves, 2004). Nessa perspectiva, Domingues (2002, p. 69) destaca que, para alcançar o objetivo de transformar a matemática na ciência das deduções formais, não poderia haver espaço para qualquer tipo de "conotação material". Entretanto, a ausência de elementos concretos, materialidade, traz uma forte dependência da demonstração de que os axiomas escolhidos são consistentes.

Hilbert queria abolir a abordagem relativa que transferia o problema da consistência de um conjunto axiomático de uma área para outra. Neste sentido, buscando se afastar de eventuais contestações ao seu trabalho, adotou uma linha próxima ao intuicionismo ao não usar demonstrações por absurdo, por indução transfinita ou ainda o axioma da escolha (Domingues, 2002). Juntamente com P. I. Bernays (1888-1977), planejaram uma exposição detalhada do projeto que tinha por finalidade estabelecer um método direto de análise de consistência de um conjunto de axiomas, a teoria da demonstração, em um livro, o *Grundlagen der Mathematik* que foi publicado em dois volumes – 1935 e 1939 – porém, as dificuldades que surgiram durante a construção limitaram bastante o alcance do trabalho e o pretendido detalhamento da teoria da demonstração não foi concluído (Eves, 2004).

Contudo, esse foi um trabalho natimorto no que tange seus objetivos, uma vez que, antes mesmo da publicação do livro, o matemático Kurt Gödel (1906 – 1978) provou, com argumentos irrefutáveis, até mesmo para os parâmetros da escola formalista,

> [...] que é impossível provar a consistência de um sistema dedutivo formalizado como o de Hilbert, rico e suficiente para abarcar toda a matemática clássica, com os seus próprios princípios lógicos. Esse resultado notável é consequência de um outro mais fundamental ainda; Gödel provou que o sistema de Hilbert não é completo, isto é, ele demonstrou que no sistema existem problemas "indecidíveis", sendo a consistência do sistema um deles (Eves, 2004, p. 683).

Esse resultado obtido por Gödel é considerado uma das grandes descobertas da matemática e revela as limitações dos métodos matemáticos formais e rigorosos e responde o porquê não se tem uma demonstração, nem terá, sobre a consistência do sistema Z-F e a consistência do sistema axiomático de Hilbert para geometria euclidiana(Eves, 2004).

Já no final do século XX as questões que envolviam a prova matemática chegaram ao computador com a sua grande capacidade de implementar algoritmos e fazer cálculos. O teorema das quatro cores foi demonstrado em 1976 por W. Haken (1928-2022) e K. Appel (1932-2013), eles usaram o computador para fazer uma gigantesca análise de dados que compunha a demonstração. As críticas a essa demonstração logo surgiram evocando o argumento que a matemática não é sobre acumular informações a respeito do mundo, mas, sim, sobre a compreensão dos objetos matemáticos (Domingues, 2002).

As discussões seguiram nas décadas seguintes enfatizando a possibilidade de erro da máquina e, sobretudo, a impossibilidade humana de verificar algumas demonstrações feitas pelo computador dada a sua extensão. Os matemáticos teriam que confiar em uma máquina passível de erro e com resultados não verificáveis. Para alguns, o uso do computador representaria o fim da demonstração e o início de uma cultura que denominaram de semirrigorosa, na qual a prova matemática estaria vinculada aos algoritmos, ao tempo de execução destes e, por consequência, aos recursos disponíveis (Hanna, 2007 *apud* Nagafuchi, 2009).

Quase em concomitância à demonstração do teorema das quatro cores, datam trabalhos sobre o uso da inteligência artificial (IA) na matemática como o *On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry* do chinês Wen-Tsün Wu de 1978. Algumas décadas mais tarde, em 2009, ganhamos a possibilidade de resolver problemas elementares da matemática, indo além da pesquisa e listagem de resultados, por intermédio da plataforma baseada em inteligência artificial, WolframAlpha[14]. Na atualidade, a inteligência artificial ganhou notoriedade com a forte exibição na grande mídia da chegada ao mercado do Chat GPT-4, que hoje incorpora as ferramentas do WolframAlpha, e outros afins. Jornais de grande circulação passaram a falar sobre as aplicações da inteligência artificial e até mesmo sobre inteligência artificial incorporada à matemática, destacando a complexidade e relevância de se obter um modelo de inteligência artificial que atenda aos padrões de produção do conhecimento matemático, que, como sabemos, perpassa pela demonstração (Garcia, 2023; Roberts, 2023).

[14] https://www.wolframalpha.com/

Em recente publicação na revista Nature, Trinh *et al*. (2024) divulgaram os resultados obtidos com uma ferramenta de inteligência artificial generativa, que, segundo os autores, atualiza o estado da arte com relação ao tema. O modelo criado por eles, o AlphaGeometry, é capaz de produzir demonstrações sem intervenção humana usando um sistema neurosimbólico baseado em um modelo de linguagem neural que foi treinado em uma grande quantidade de dados sintéticos com a finalidade de guiar um mecanismo de dedução simbólica e que atua em problemas da geometria euclidiana plana.

O AlphaGeometry pertence a

> [...] categoria de solucionadores, frequentemente descritos como métodos de busca/axiomáticos ou às vezes 'sintéticos'. Esses métodos tratam o problema de prova de teoremas como um problema de busca passo a passo usando um conjunto de axiomas geométricos. Graças a isso, eles normalmente retornam provas altamente interpretáveis e acessíveis aos leitores humanos (Trinh, *et al*., 2024, p.479, tradução nossa[15]).

O modelo não foi alimentado com exemplos de demonstrações humanas, ele constrói a demonstração do zero essencialmente usando o motor simbólico e o conjunto de regras lógicas que são permitidos. O AlphaGeometry traduz o problema para sua linguagem identificando quais são as premissas e a tese. A partir daí, o motor simbólico produz asserções logicamente verdadeiras a partir das premissas. Se este passo conduzir à tese, o programa conclui a sua tarefa, do contrário, ele constrói um objeto auxiliar como um ponto ou segmento e passa a produzir conclusões que envolvem esse novo objeto a fim de obter mais informações sobre o problema e encontrar uma demonstração (Trinh *et al*., 2024).

Esse modelo foi capaz de resolver 25 dos 30 problemas de nível de complexidade igual aos da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) ao qual foi submetido. O resultado foi próximo ao de um medalhista de ouro da competição que, em média, acerta 25,9 problemas. O AlphaGeometry foi o que apresentou melhor desempenho entre os desenvolvidos até o momento, inclusive o Chat GPT-4 e o modelo baseado em computação algébrica criado por Wu (1978) (Trinh *et al*., 2024).

Existem outros modelos de inteligência artificial que são desenvolvidos pelas maiores corporações do mundo. O AlphaGeometry é um modelo de IA da DeepMind, divisão da gigante Google para assuntos de inteligência artificial. A OpenAI, criadora do ChatGPT-4, controlada pela Microsoft, também está em busca de desenvolver uma inteligência artificial que seja capaz de raciocinar matematicamente, segundo Garcia (2023). Contudo, por ora, essa questão ainda é uma carta de intenções, um rascunho da história.

Os próximos passos do desenvolvimento da matemática são imprevisíveis, mas como podemos notar, desde que a demonstração foi inserida na Grécia antiga – com exceção da Idade Média e Renascimento europeus – a prova matemática, ou demonstração, tem-se mantido presente e de modo cada vez mais intenso. Ela se consolidou para além de um processo de validação.

15 category of solvers, often described as search/axiomatic or sometimes 'synthetic' methods. These methods treat the problem of theorem proving as a step-by-step Search problem using a set of geometry axioms. Thanks to this, they typically return highly interpretable proofs accessible to human readers.

2.2 Aspectos Conceituais

Na seção anterior, vimos uma história do desenvolvimento do rigor. Contudo, não nos interessamos em apresentar alguma concepção sobre o que é prova ou demonstração e, que se registre, por ora, assim como na matemática acadêmica, estamos usando essas palavras como sinônimos. Esta é uma atividade capciosa que será empreendida nesta seção, onde também vamos analisar as funções da demonstração [16] Apresentaremos uma tipologia das provas, quando marcaremos a distinção entre prova e demonstração, e a complexidade do processo de ensino e aprendizagem destas sob a ótica da matemática escolar.

Bicudo (2002) escreve que aprendemos a demonstrar porque vemos muitos exemplos de demonstração, mas, como bem sabemos, isso não define o objeto, apenas o exemplifica.

> Quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém, não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que apreender. Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa. Depois, o indivíduo torna-se um professor e passa o mesmo "know-how", sem o "saber o quê", que o professor ensinava (Bicudo, 2002, p. 06).

Um modo de iniciar as nossas reflexões sob essa premissa é analisando as notas sobre a história da demonstração que empreendemos na seção anterior.

Os fatos históricos, como vimos em Grabiner (2012), esculpiram aquilo que hoje entendemos como uma demonstração e revelam a influência das práticas culturais sobre o controle dos processos de validação que são construídos e utilizados em matemática. Em um primeiro momento, a cultura grega antiga moldada no tensionamento entre o público e o privado, requereu dos indivíduos contínuos processos de argumentação para que as suas asserções acerca de qualquer questão pudessem ser consideradas válidas. Em outro momento, as críticas dos matemáticos à fundamentação do cálculo nos seus primórdios sobre o distanciamento do modelo euclidiano desencadearam uma série de ações que culminaram na aritmetização do cálculo e, por conseguinte, no surgimento dos movimentos que buscam a fundamentação da matemática.

Esses dois fatos são pedras angulares na construção da demonstração tal qual conhecemos e ambos são exemplos de grande escala do processo de controle social sobre os processos de validação. Isso nos dá uma primeira camada de compreensão sobre a demonstração: ela se constrói na relação, de certo modo conflituosa, entre os especialistas no tensionamento entre as ideias de um indivíduo e a forma sob a qual ele comunica e defende as suas conclusões junto aos pares. Desse modo, a demonstração é um processo de obtenção da verdade em matemática, como afirma Tarski (1969), que foi socialmente demandada e transformada por especialistas no decorrer dos milênios. O padrão socialmente aceito de validação em matemática hoje é completamente diferente dos padrões aceitos

[16] Destacamos que nosso objetivo aqui consiste em definir e distinguir prova e demonstração. Prova do ponto de vista da matemática escolar e a demonstração do ponto de vista da matemática acadêmica. Além disso, também estendemos a discussão para as funções da demonstração como uma forma de buscar alternativas para a inserção do seu análogo na matemática escolar, a prova. Ao leitor interessado em seguir com uma análise sob uma ótica filosófica da demonstração sugerimos a consulta a Da Silva (2002), Bicudo (2002), Traski (1969) e, especialmente, Nagafuchi (2009), que faz uma discussão da demonstração do ponto de vista epistemológico, se aprofundando em temas nos quais, aqui, apenas mencionamos, e trazendo outros elementos para discussão.

pelos matemáticos contemporâneos a Euclides e até mesmo na era pré-euclideana, como vemos em Grabiner (2012) e Domingues (2002).

A respeito da aceitação entre os pares de um argumento enquanto prova, Bicudo (2002) afirma: "A demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não estando interessado o quão distante possa estar do ideal lógico" (p. 79). Essa afirmação vai contra o que muitos têm em mente sobre o que é demonstração, lança dúvidas acerca da ideia de que "[...] os resultados desejados decorrem infalivelmente de um processo puramente mecânico" (Davis e Hersh, 1985, p. 63) e ratifica o lugar da prova como um espaço de "negociação de significados" (Garnica, 1995, p. 25) entre os pares.

Seguindo na direção de discutir a complexidade de conceituar o que é uma prova, Bicudo (2002) escreve que quando um matemático está diante da necessidade de dizer o que é uma demonstração, deve responder o mesmo que Santo Agostinho quando inquerido a respeito do tempo "se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei" (p. 08). Bicudo (2002) ainda apresenta a pouco estimulante, para aqueles que buscam uma conceituação sobre a prova matemática, declaração de Hardy (1929):

> Se fôssemos até seu extremo, seríamos levados a uma conclusão bem paradoxal: que não existe, estritamente, uma tal coisa chamada DEMONSTRAÇÃO matemática; que não podemos, em última análise, fazer nada senão INDICAR; que as demonstrações, [...], são floreios retóricos designados a afetar a psicologia (Hardt, 1929 *apud* Bicudo, 2002, p.86, destaques do original).

No contexto no qual tais ideias são apresentadas, Bicudo (2002), há uma concepção de que existem tipos diferentes de demonstrações: as práticas e as teóricas. As práticas são aquelas executadas pelos matemáticos no cotidiano da profissão, sem os pequenos detalhes lógicos, mas que têm a capacidade de convencer o especialista cético acerca da validade da asserção mesmo diante da imprecisão formal dos argumentos. Já a demonstração teórica, a formal, é aquela que deve conter todos os passos lógicos seguidos rigorosamente, sem supressões e que, digamos, devem ser apresentados em publicações acadêmicas.

Na prática, destaca Bicudo (2002), essas demonstrações formais não existem. Hanna (1983, *apud* De Villiers 2001) faz referência ao mesmo fato narrando a experiência de um ex-editor da *Mathematical Reviews* que afirmou: "[...] metade das demonstrações aí publicadas estavam incompletas e/ou continham erros, embora os teoremas que pretendiam demonstrar fossem essencialmente verdadeiros" (Hanna, 1983, p. 71, *apud* De Villiers , 2001, p. 32) e De Villiers (2001, p. 32) complementa "Os investigadores matemáticos [...] raramente examinam em detalhes as demonstrações publicadas, mas confiam, em vez disso, na autoridade reconhecida do autor, na verificação em certos casos especiais e numa avaliação informal [...]". Desse modo, a prova teórica, na matemática real, se refere a uma prova ideal do ponto de vista lógico.

Apesar de sublinhar a complexidade e o desafio que é construir uma concepção de demonstração, Bicudo (2002) empreende esse trabalho. Para tal, inicialmente apresenta de modo simplificado o que vem a ser um sistema formal, sua parte sintática – que inclui a linguagem, os símbolos, as expressões e as fórmulas, os axiomas – que é uma fórmula dentro do sistema formal – e, por fim, as regras de inferência. Dados esses elementos, ele apresenta o que na sua concepção é uma demonstração sob a ótica da lógica:

> Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de A (Bicudo, 2002, p. 82).

De outro modo, sem a noção de sistema formal, Bicudo (2002) apresenta uma concepção menos formalizada e ligada à lógica do que é uma demonstração: "[...] demonstrar uma proposição [...] significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Sem recorrer aos círculos viciosos como fazem os dicionários [...]" (p. 81).

Essas definições vão ao encontro da concepção de Tarski (1969) que classifica a prova como uma ferramenta, um instrumento que permite chegar à verdade nas ciências. Ele define a prova rigorosa do seguinte modo:

> [...] uma prova formal de uma dada sentença consiste na construção de uma sequência finita de sentenças que: (1) a primeira sentença na sequência é um axioma, (2) cada uma das sentenças seguintes é um axioma ou é derivado diretamente de uma das sentenças que precedem na sequência, em virtude das regras de prova (3) a última sentença na sequência é a sentença a ser provada (Tarski, 1969, p. 75, tradução nossa[17]).

Já Fetissov (1995, *apud* Ferreira, 2016, p. 44) também aponta para uma concepção alinhada a Bicudo (2002) e Tarski (1969) "A demonstração como conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios por intermédio dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição".

As concepções acima beiram a sinonímia e descrevem a prova rigorosa sob uma perspectiva alinhada ao que Da Silva (2002) chama de lógico-epistemológico. Contudo, a título de compreender a prova sob uma ótica qualitativa necessária ao desenvolvimento deste trabalho, julgamos relevante incluir outras camadas de compreensão acerca da demonstração que são apresentadas por Da Silva (2002) que agrega ao analisar a demonstração sob três perspectivas: retórica, lógico-epistêmica e a heurística. O lógico-epistemológico diz respeito ao aspecto que apresenta a demonstração como um objeto lógico ideal, organizado no espaço lógico com relações de dependência e consequência; o retórico que diz respeito à capacidade de persuasão da demonstração em convencer o leitor do que está sendo exposto; e, por fim, o heurístico que revela a face da demonstração que auxilia na descoberta e criação da matemática.

Para Da Silva (2002, p. 77) "Pode-se dizer que, da perspectiva da teoria das demonstrações, uma demonstração não é aquilo que os matemáticos entendem como tal, mas uma imagem ideal

[17] a formal proof of a given sentence consists in con structing a finite sequence of sentences such that (1) the first sentence in the sequence is an axiom, (2) each of the following sentences either is an axiom or is directly derivable from some of the s entences that precede it in the sequence, by virtue of one of the rules of proof, and (3) the last sentence in the sequence is the sentence to be proved.

disso" e complementa afirmando que a prova está em um sistema formal que não necessariamente corresponde à realidade. Garnica (1995) vai além e destaca que "[...] as provas, como concebidas no seio de uma dominante matemática platônica, são uma espécie de ficção" (p.24), segue com a forte afirmação de que o rigor apresentado pelo programa de Euclides não é seguido rigorosamente na produção da matemática e arremata afirmando que o processo de aceitação de um resultado se dá em razão de "[...] *um processo social de negociação* de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pela proposta formal" (p.25, grifo nosso). Garnica (1995) ainda pontua que os próprios matemáticos concordam que provas completas seriam enfadonhas e que existem diferentes tipos de formalidade que geram o mesmo grau de aceitação. Também sublinham a necessidade de atentar ao significado dos objetos e o nível de compreensão sobre estes que a demonstração em questão pode agregar.

> A rigor, podemos fazer a seguinte distinção. Por um lado, uma demonstração é uma entidade objetivamente existente no espaço lógico, digamos assim. Vistas assim, demonstrações têm uma existência matemática ideal, independentemente de serem conhecidas, ou, sequer, passíveis de serem conhecidas, por agentes reais. Por outro, uma demonstração é algo capaz de induzir a uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático real (Da Silva, 2002, p. 71).

A convicção, acima referida, está ligada ao aspecto retórico da demonstração que, como sinalizado, passa pela subjetividade de cada indivíduo e pelas limitações cognitivas humanas. Uma implicação imediata desse fato, apontada por Da Silva (2002), é que uma demonstração deve ter um número finito de passos e, obviamente, não conter um número absurdo desses. Aqui podemos notar como as demonstrações assistidas por computador, como o teorema das quatro cores, geram questionamentos sobre a sua aceitação enquanto prova já que a maior parte da demonstração deste teorema sequer estava presente no texto publicado, sendo possível a verificação dos fatos apenas por meio do uso de um computador.

> Para que uma demonstração desempenhe a contento seu papel retórico é imprescindível que possamos *efetivamente* acompanhá-la em cada um de seus passos, é preciso que cada um deles seja *efetivamente* um objeto de consciência. Por isso, parece que, em verdade, nenhuma demonstração infinita pode desempenhar seu papel retórico de modo satisfatório (Da Silva, 2002, p. 72, destaque no original).

Este aspecto retórico posto por Da Silva (2002) apresenta ligações com as ideias de De Villiers (2001) quando se refere a função de verificação/convencimento da prova matemática. Notamos que ambos se referem a mesma dimensão da prova, contudo, De Villiers (2001) inclui novas camadas para análise, sobretudo em razão de caracterizar essa dimensão da prova no rol das suas funções. Uma primeira consideração a esse respeito reside no fato de que um matemático não idealizado, em sua prática, não se impõe o labor de construir uma demonstração para uma asserção que ele não acredita ser verdadeira. Essa colocação de De Villiers (2001) é central uma vez que nos lança a questão: quais razões sustentariam a crença dos matemáticos na veracidade de uma asserção sem a existência de uma prova que justificasse tal fato? De Villiers (2001) aponta para a observação, a intuição, para aquilo que ele chama de quase-empirismo e "A falta de êxito na rejeição empírica de conjecturas [que] desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva" (p.33).

De Villiers (2001) afirma que parece "[...] existir uma dimensão lógica, a par de uma dimensão psicológica [...]" (p.33) no que tange a criação da convicção da verdade sobre uma afirmação e segue explicitando "Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva". Essa validação empírica, inclusive, está presente na literatura em Educação Matemática no que tange ao ensino e aprendizagem da prova vide os trabalhos de Ferreira (2016) e De Villiers (2001) a título de exemplo.

No que se refere ao aspecto heurístico, Da Silva (2002) inicialmente afirma que uma demonstração só tem a função de descoberta, de contribuição para a construção de novos objetos na matemática se ela for logicamente incorreta.

> Em suma, uma demonstração não é uma demonstração propriamente dita, do aspecto lógico-epistemológico; se não for logicamente impecável, ela pode desempenhar sua função retórica, mesmo se for logicamente falha, mas não tem certamente, ou assim parece, nenhum papel heurístico, a menos que seja logicamente imperfeita (Da Silva, 2002, p. 70).

Contudo, o próprio faz um adendo ao seu argumento ao dizer que a demonstração pode ser condutora do progresso da matemática "[...] se for simultaneamente vista como um desafio, um edifício lógico a ser demolido pela variação *interessante* do significado dos termos ou conceitos nela envolvidos " (p.71, destaque no original) e segue exemplificando que uma das maneiras de tal realização seria pelas naturais generalizações dos conceitos presentes nas demonstrações.

Da Silva (2002) aponta as frustradas tentativas de demonstrar teoremas como a Conjectura de Goldbach e a Hipótese do Continuum como maneiras indutoras de produção de novos métodos, teorias e campos de atuação que, mesmo não sendo capazes de solucionar o problema em questão, contribuem para a criação da matemática. Para ele, a prova é o elemento central da matemática, uma vez que nela estão presentes os objetos, as ferramentas e as estratégias desta ciência.

> Parece, somando todos os aspectos que consideramos até aqui, que uma demonstração matematicamente perfeita deve ser logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações cognitivas humanas, e, ainda assim, heuristicamente estimulante. Um delicado equilíbrio de demandas quase inconciliáveis: correção lógica e riqueza heurística acessíveis a um agente severamente limitado em termos cognitivos (Da Silva, 2002, p. 72).

Parte do que se entende por demonstração em matemática se confunde com as suas funções. Por exemplo, quando Da Silva (2002) se refere ao aspecto heurístico da demonstração, ele está referindo-se à capacidade de descobrir matemática nova, sobretudo quando se trata de uma demonstração incorreta ou até mesmo aquelas que são somente tentativas como a conjectura de Goldbach. De Villiers (2001) salienta que as várias tentativas frustradas de demonstrar tal resultado desencadearam em novas descobertas e lista tal característica como a função de *descoberta* da demonstração. Este papel também engloba os processos de generalização que desencadeiam em resultados que não seriam possíveis de modo intuitivo, sem uma demonstração como é, provavelmente, o caso do teorema de Ceva (De Villiers , 2001). De modo indireto, as funções da demonstração auxiliam a conceituá-la.

De Villiers (2001; 2002) caracteriza a prova em termos de suas funções: verificação, explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual. De Villiers (2002) ainda menciona outras duas funções: a estética e a de desenvolvimento de algoritmos, mas essas não são alvo de aprofundamento.

A *verificação*, muitas vezes é a principal razão pela qual se demonstra, ter certeza da veracidade de uma asserção. Contudo, a verificação ou convencimento não pode ser vista como a principal função da demonstração uma vez que a "[...] convicção em matemática é muitas vezes 'inteiramente obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica'" (De Villiers , 2001, p.02). A convicção, na prática, é o motivador para a realização da demonstração. Um matemático não empreende o esforço de demonstrar uma conjectura que não acredita ser verdadeira, este comportamento fica reservado sobretudo para os casos de problemas que sejam contraintuitivos ou suficientemente técnicos (De Villiers, 2001).

Com relação a função de *explicação*, De Villiers (2001) se preocupa em destacar que, por alguma razão, essa função é psicologicamente solicitada e exemplifica com a Hipótese de Riemann, citando Davis e Hersh (1982, p. 368) ao dizer que "[...] parece claro que desejamos uma demonstração porque ... se algo é verdadeiro e não conseguimos demonstrá-lo, este é um sinal de que falta compreensão da nossa parte". A prova do teorema das 4 cores é um exemplo que deixa esse aspecto da explicação em aberto. De Villiers (2001) afirma estar convencido da validade do teorema, mas preferiria uma prova explicativa.

Por outro lado, a demonstração é um texto dirigido a outros matemáticos ou pessoas que tenham os conhecimentos prévios que o permitam compreender tais questões. Davis e Hersh (1988) classificam a demonstração como um processo de intercâmbio baseado em significados partilhados. De Villiers (2001; 2002) nomeia esse papel da demonstração como a sua função de *comunicação* e destaca que, enquanto um modo de interação social, a demonstração imbui uma negociação subjetiva dos conceitos e critérios que permitem alçar um argumento no lugar do aceitável. Essa interação também contribui para o processo de filtragem social que se desenrola em razão das comunicações, permitindo assim o seu refinamento ou ainda rejeição em razão da descoberta de um contraexemplo.

A função de *sistematização*, por sua vez, talvez seja a mais técnica e relacionada ao matemático profissional, ela se refere a organização de um conjunto de afirmações já sabidamente verdadeiras dentro de um sistema de tal modo que ela "[...] revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que nenhum número de testes quase-empíricos ou ainda a intuição pura seriam capazes de realizar" (De Villiers , 2001, p. 34).

Por fim a função de *desafio intelectual* está relacionada a forma como os matemáticos se sentem impelidos a demonstrar um resultado. Isso, contudo, não está relacionado ao convencimento sobre a veracidade de uma afirmação, mas, sim, sobre a satisfação em saber como chegar à conclusão sobre a validade ou não da asserção.

Essas funções não apenas ajudam a compreender o objeto demonstração, como também auxiliam no seu processo de ensino (De Villiers , 2001). Compreender que uma demonstração tem uma função de desafio, por exemplo, permite que os educadores se coloquem na busca e produção de atividades que tenham por finalidade auxiliar o desenvolvimento de argumentos cada vez mais formais, usando como estratégia a criação de problemas-desafios. Por outro lado, o aspecto heurístico pode ser um importante motivador para apreender técnicas que são apresentadas nas demonstrações.

Estas breves notas sobre a prova ou demonstração do ponto de vista do seu conceito, bem como as suas funções, agregam à análise histórica e reforçam a percepção do que se entende por prova ou demonstração como um elemento socialmente construído, distante de uma concepção platônica de uma matemática infalível, existente a priori e descoberta pelos matemáticos, e fortemente dependente das possibilidades e limitações de um tempo. Neste sentido, acompanhamos Davis e Hersh (1988, p. 78) ao afirmar que

> O mito da matemática totalmente rigorosa, totalmente formalizada é, de fato, um mito. A matemática da vida real é uma forma de interação social, onde a 'prova' é uma composição do formal e do informal, de cálculos e comentários incidentais, de argumento convincente e apelos à imaginação.

No que tange às concepções sobre a prova ou demonstração, não há razão de escolher esta ou aquela perspectiva entre as já expostas, uma vez que não estamos interessados especificamente na demonstração sob o ponto de vista da matemática acadêmica, mas, sim, sob o ponto de vista da matemática escolar. Desse modo, a reflexão do ponto de vista histórico e conceitual da prova, assim como a exposição sobre as funções da prova, ampliam as camadas de compreensão a respeito da demonstração de modo a evidenciar a existência de fatores alheios à lógica para sua criação e perpetuação como principal método de construção – validação, comunicação, descoberta, explicação e sistematização – da matemática acadêmica e para investigar quais e como os seus elementos, inclusive os de ordem lógicos e formais, podem ser usados na matemática escolar.

Antes de seguirmos é pertinente estabelecer alguns ajustes na linguagem. Na literatura em Educação Matemática, como sinaliza Ferreira (2016), é comum estabelecer uma distinção entre as palavras prova e demonstração. Balacheff (2000; 2022e) afirma que o uso dessas palavras como sinônimos, assim como os matemáticos o fazem, no âmbito da Educação Matemática acaba por fundir diferentes tipos de atividades desenvolvidas pelos estudantes. Além disso, Ordem (2015) sinaliza a existência de pesquisas que usam as palavras "prova", "demonstração" e "explicação" com significados diversos. Neste sentido, a fim de não causar ambiguidade e manter a capacidade de capturar as nuances dos processos de construção de provas e demonstrações enquanto processos distintos, vamos usar a concepção[18] de Balacheff (2000). A partir de agora, quando essas palavras surgirem no texto, já estarão sendo tratadas com as citadas distinções que apresentamos a seguir.

[18] As leituras de Balacheff (2022a; 2022b) nos apontam outra forma de definir esses termos. Porém, avaliamos que a distinção entre a classificação que adotamos e a apresentada nas obras que citadas estão no âmbito da relação entre explicação e prova ou demonstração o que não está diretamente relacionado aos nossos objetivos.

Para Balacheff (2000) a explicação está relacionada ao sujeito do qual emana o discurso e que tem como objetivo transmitir ao expectador a verdade acerca do conhecimento já adquirido pelo locutor sem que necessariamente seja apresentada por meio de uma cadeia dedutiva. Já a prova tem um aspecto social na medida em que ela se caracteriza em função da concordância da validade de uma explicação sobre uma asserção por um grupo, uma comunidade, mesmo que essa aceitação não seja definitiva. A demonstração, por sua vez, é uma série de declarações que segue uma organização previamente definida e socialmente aceita pela comunidade matemática.

Flexibilizar os significados de demonstração, segundo Ferreira (2016), acarreta aceitar argumentos não necessariamente formais como uma maneira legítima de validação a depender do contexto. Balacheff (2004, *apud* Ferreira, 2016) aponta que estudantes nas primeiras séries de ensino devem inicialmente ser postos em contato com atividades que os conduzam a percepção da necessidade de validação, não a prova propriamente dita. O nível da prova exigido deve depender do contexto e da complexidade do conteúdo em questão.

Neste sentido de ajustar o tipo de validação que é exigido do estudante às suas capacidades, Balacheff (2000; 2022a; 2022b; 2022d, 2022e) apresenta duas categorizações de provas por ele observadas e classificadas: as *provas pragmáticas* e as *provas intelectuais*.

As provas pragmáticas são aquelas em que o processo de validação de um argumento depende da ação sobre o objeto de estudo por meio de medições e cálculos para casos particulares de um desenho prototípico, por exemplo. Neste caso, o argumento que busca estabelecer a validade da asserção é baseado em ações materiais sobre um objeto. Já as provas intelectuais são marcadas pela percepção da existência de objetos que, na realidade, são representantes de classes e que o argumento que deve sustentar a afirmação acerca da veracidade deve se basear nas propriedades que são comuns aos objetos desta classe e não apenas às eventuais características próprias do representante.

As provas pragmáticas descritas por Balacheff (2022a, 2022e) englobam os seguintes tipos:

Empirismo ingênuo é o tipo de prova que consiste na verificação de uma propriedade a partir de ações como a medição e teste da validade em poucos casos particulares (Balacheff, 2022a). A sua origem pode ser imputada a dois fenômenos distintos: a evidência factual, que pode surgir em razão da necessidade de o estudante apresentar alguma solução em razão da situação – matemática – em que está sendo confrontado, e a crença cognitiva, que "[...] está fortemente relacionada com as concepções dos estudantes que eles não conseguem expressar ou analisar" (Balacheff, 2022e, p. 710).

Experimento crucial, neste tipo de prova começa a aparecer a percepção de que a verificação para muitos casos não é suficiente para assegurar a veracidade ou não de uma afirmação. É neste momento que surgem os primeiros indícios de necessidade de generalização, mas sem que o seja feito dadas as limitações cognitivas e de linguagem que não permitem que o estudante vá além e efetivamente apresente um argumento baseado em um objeto genérico. É típico neste tipo de prova que o uso da solução de um caso especial do problema que o estudante considera ser genérico como uma forma de validar asserção. Ao contrário do que acontece com o empirismo ingênuo, o experimento crucial se mantém como uma forma de fundamentar a crença dos estudantes acerca de uma dada asserção mesmo após a transição para provas intelectuais (Balacheff, 2022e).

O *exemplo genérico* é marcado pela consciência da necessidade em analisar objetos genéricos e não mais vários casos concretos. Nesse momento o estudante justifica as razões da validade de uma afirmação mediante a percepção de que o exemplo dado representa um conjunto de objetos dos quais o objeto sendo trabalhado é somente um representante de classe. As conclusões inferidas não se apoiam nas particularidades do objeto escolhido como representante. Este é o tipo de prova que está na fronteira entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais, o ponto de inflexão, neste sentido, é exatamente a percepção de que o objeto em questão somente representa uma família de objetos que têm uma certa característica em comum a todos eles (Balacheff, 2022a). Esse processo de abolição do particular no processo de prova se dá, dentre outros, no nível da linguagem e da cognição. Neste tipo de prova há a necessidade de habilidades cognitivas e construção de linguagem que permitam reconhecer os objetos envolvidos e as suas relações, e muitas vezes, essas habilidades, cognitivas e de linguagem, dependem de "[...] etapas intermediárias em um nível inferior da prova" (Balacheff, 2022a, p.713).

Já a *experiência mental*,o uma prova intelectual, é um tipo de prova em que ainda há a presença da ação sobre um objeto sem que, contudo, ele seja necessariamente representado materialmente. As ações são sobre representações mentais de suas propriedades. Um problema típico verificado na experiência mental é a representação de um objeto, suas relações e a expressão das razões de um fato ocorrer. É entre a experiência crucial e a experiência mental que há a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais e o marcador dessa transição é a evolução da forma de representar os objetos e a forma como os raciocínios são expressos, há, portanto, uma forte relação com a linguagem (Balacheff, 2022a, p.713).

Em que se pese a importância de reconhecer as produções dos estudantes, não se pode deixar de destacar que exemplos não garantem a validade de uma asserção e essas novas formas de validação não podem destituir o papel que a demonstração tem para assegurar a veracidade de uma sentença. A expectativa é, portanto, que o estudante saia das provas pragmáticas e caminhe no sentido das provas intelectuais, por mais complexo que seja esse processo (Ferreira, 2016). O estudante deve ser estimulado, como bem exemplifica Balacheff (2022b), a desacreditar das afirmações que são justificadas por meio de provas pragmáticas com a finalidade de que ele possa caminhar em direção a processos de validação cada vez mais formais. O professor, por sua vez, deve estar consciente da expansão do conceito de demonstração para prova com a finalidade de criar situações que conduzam o estudante a realizar demonstrações (Ferreira, 2016).

Aspectos sobre o ensino da prova bem como a sua complexidade e finalidade na Educação Básica serão objeto de reflexão na próxima seção.

2.3 A Prova e a Demonstração na Matemática escolar

Um tema relevante para a nossa pesquisa é o papel da prova e da demonstração na matemática escolar. Para tal, vamos recorrer à concepção de matemática escolar construída por Moreira e David (2005), na sequência, apresentamos algumas questões correlatas, como o cenário nas pesquisas sobre o tema, a presença dessas discussões nos documentos norteadores e a posição do professor nesse cenário. Encerramos indicando alguns obstáculos para a construção da prova na matemática escolar e analisando algumas questões que podem direcionar para uma possibilidade de superação dessas dificuldades.

Moreira e David (2005) apresentam duas concepções sobre a matemática escolar que são diametralmente opostas. Uma delas, a concepção de Chevallard (1991), coloca a matemática escolar como resultado da transposição didática da matemática acadêmica. Nesta perspectiva, a matemática escolar ocupa um lugar de inferioridade e é considerada um saber vulgarizado, distante do saber sábio – o mais próximo do conhecimento científico – e sendo desenvolvida sob forte vigilância epistêmica da matemática acadêmica, inclusive, importando os seus métodos e procedimentos. Por outro lado, temos a concepção de Chervel (1991), que coloca a matemática escolar como um saber com identidade própria que se constitui juntamente com a cultura escolar, em uma perspectiva em que esta é compreendida como um conhecimento relativamente independente dos conhecimentos externos à escola no qual não há uma hierarquia em relação à matemática acadêmica (Moreira; David, 2005).

Contudo, Moreira e David (2005) buscam uma concepção de matemática escolar que não seja científica didatizada ou uma construção autônoma da escola, como eles colocam, e afirmam:

> Para nós, no entanto, nenhuma dessas duas concepções se mostra satisfatória. Na noção de matemática Escolar que deriva da ideia de transposição didática de Chevallard há, ao que nos parece, um hiperdimensionamento do saber científico: a matemática Escolar é reduzida a uma espécie de didatização da matemática Científica e é minimizada a ação dos condicionantes da prática docente e da própria cultura escolar. Já Chervel, ao mesmo tempo que abre o caminho para se conceber a matemática Escolar como uma construção associada especificamente à instituição Escola, parece fechar as portas à consideração dos múltiplos mecanismos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do espaço escolar (Moreira; David, 2005, p.20).

A concepção adotada por Moreira e David (2005) distancia-se das perspectivas já citadas. Para eles, e para nós, a "[...] *matemática Escolar* referir-se-á ao conjunto dos saberes 'validados' associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (Moreira; David, 2005, p. 20, destaque no original). Desse modo, a matemática escolar inclui os saberes que são desenvolvidos pelos professores em sua prática docente e os resultados obtidos em pesquisas que investigam a aprendizagem e o ensino de matemática na Educação Básica. Note que esta concepção de matemática escolar a coloca mais próxima dos saberes associados à profissão docente do que de objetos e procedimentos próprios da matemática (Moreira; David, 2005).

Em que se pesem os aspectos sociais que circundam a produção da matemática escolar, em última análise a matemática escolar e acadêmica estão ancoradas nas práticas dos seus respectivos profissionais. Por um lado, o matemático profissional trabalha na fronteira do conhecimento com objetos abstratos produzindo resultados inéditos e apresentando-os em linguagem formal, precisa, baseada em argumentos lógico-dedutivos. Já o professor de matemática tem outros objetos de estudo e outras formas de defini-los e apresentá-los, assim como outras formas de validar argumentos em razão da natureza educativa do seu trabalho (Moreira; David, 2005).

Essa noção de matemática escolar e matemática acadêmica encontra paralelo em Garnica (2000) ao se referir à matemática científica e matemática pedagógica e destaca os diferentes papéis da argumentação em cada uma dessas manifestações. Ao discutir a matemática pedagógica, ele faz uma defesa quanto ao uso de modos não formais e semi formais de argumentação, bem como uma defesa de uma nova ótica para se pensar os processos de argumentação na Educação Básica sob a égide do pensamento de Pierce (1988) que propõe, para além dos argumentos por dedução e indução, os argumentos por abdução – que são argumentos ligados à intuição.

Garnica (1995; 2002) caminha no mesmo sentido de repensar o significado da prova matemática a partir do lugar em que ela é observada. Neste sentido, o ponto central é a existência do que ele chama de etnomatemáticas, cabendo assim, uma forma de compreender a prova matemática para cada etnomatemática existente. Sob o ponto de vista da Educação Matemática, a própria matemática deve ser percebida como uma das etnomatemáticas possíveis. Desse modo, o "regime da verdade" que é instituído por cada uma delas passa a ser uma questão de necessidade particular que pode ser socialmente negociada dentro do escopo de cada uma. Assim, a validade de uma afirmação é defendida por uma etnoargumentação, um processo de argumentação específico que tem a finalidade de convencer e que é socialmente aceito e compreendido no interior de uma etnomatemática (Garnica, 2002).

> A matemática da Educação Matemática, portanto, em seu regime de verdade, é uma outra matemática, radicalmente distinta daquela vista sob a perspectiva da prática profissional dos matemáticos. Distintos regimes de verdade falam de distintas matemáticas, não de uma única matemática, plena, onipresente, onipotente, onisciente, que pode ser atingida de diferentes formas (Garnica, 2002, p. 99-100).

Retomando Moreira e David (2005), sublinhamos um elemento importante na distinção entre a matemática acadêmica e a matemática escolar: o papel das definições e demonstrações. Na matemática escolar, os objetos e relações que são alvo dos estudos na Educação Básica já têm a validade garantida a *priori* pela matemática, que desempenha, por sua vez, uma vigilância epistêmica sobre o que é ensinado. Este fato esvazia da demonstração a sua função de verificação de um fato, dado que a validade já está garantida pela matemática. O próprio processo de validação passa a ter outra natureza, distinta daquela presente no modelo lógico-dedutivo. Um exemplo de processo de validação exemplificado por Moreira e David (2005) são as dobraduras em papel como instrumento de prova em geometria. Como já vimos na seção anterior, esse tipo de prova, na nomenclatura de Balacheff (2000), é uma prova pragmática, aquela que depende de experimentos factuais e da representação material do objeto em questão.

Essas formas alternativas de validação são defendidas por Moreira e David (2005) ao dizer que a questão fundamental para o processo de validação na matemática escolar não é o encadeamento lógico do argumento como ocorre na matemática acadêmica, mas, sim, "[...] a compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao estudante utilizá-lo de maneira coerente a sua vida escolar e extraescolar" (Moreira; David, 2005, p. 24). E vão além ao afirmar:

> Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições, conceitos primitivos de uma teoria e, no contexto educativo escolar, promover o desenvolvimento de um[a] convicção profunda a respeito da validade desse resultado (Moreira; David, 2005, p. 24) .

Em se tratando da matemática escolar, o processo de análise acerca da validade de uma afirmação perpassa por considerações de natureza didática, pedagógica e pela criação de processos outros que, muitas vezes, são alheios aos procedimentos da matemática formal e mais ligados às experiências dos próprios estudantes. Essas provas devem ser aceitas, mas não se pode perder de vista que elas podem produzir efeitos indesejados, como estímulo ao relaxamento na busca por argumentos progressivamente mais formais, fomento a concepções equivocadas sobre o papel e a importância desses processos de validação, e reforçar construções inadequadas que posteriormente podem agir como um obstáculo à aprendizagem (Moreira; David, 2005).

Esses processos de validação alternativos à demonstração podem ser associados aos tipos de provas elencados por Balacheff (2000), em especial às pragmáticas. Por isso, é pertinente destacarmos mais uma vez a ideia por ele expressa e com a qual concordamos: os estudantes devem ser confrontados com as limitações que as provas pragmáticas e as provas intelectuais apresentam, com a finalidade de que consigam alcançar níveis cada vez mais formais de prova.

Moreira e David (2005, p. 28-29) ainda defendem que a demonstração tem um papel essencialmente pedagógico na matemática escolar e pode:

> · contribuir para a construção de uma visão da disciplina na qual os resultados sejam tomados não como dados arbitrários, mas como elementos de saber socialmente construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação;
> · desenvolver a capacidade de argumentação. Por exemplo, a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros estudantes uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles [que] pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los.

A relação, portanto, da matemática escolar com os aspectos próprios da matemática, como as definições, axiomas, processos de validação e formalização, são flexíveis uma vez que se trata de uma matemática destinada a indivíduos em processo formativo, no qual os argumentos que surgem a partir de processos de negociação social podem convencer os membros da comunidade escolar, mas não necessariamente os membros da comunidade da matemática acadêmica.

Sob uma concepção do que é a matemática escolar naturalmente surge a questão: qual o lugar que a prova e a demonstração têm ocupado na matemática escolar? Tal reflexão perpassa por investigar de que modo ela se faz presente nas escolas e isso está diretamente ligado à presença do tema prova e demonstração nos documentos norteadores, na formação inicial dos professores e nas pesquisas acerca do tema. Também consideramos de suma importância, dado os nossos objetivos, incluir nessa lista ponderações sobre os obstáculos e a complexidade no processo de ensino e aprendizagem da prova e da demonstração na Educação Básica, uma vez que estes podem ser elementos que afastam o docente de abordagens que incluam provas e demonstrações em sua prática.

Pesquisas que investigam o raciocínio dedutivo ocorrem em Educação Matemática desde 1980. Um importante trabalho que teve influência na produção de pesquisas com essa temática nos Estados Unidos e em algumas partes do mundo foi a publicação da *National Council of Teachers of Mathematics* (NTCM), a associação dos professores de matemática dos Estados Unidos, *Principles and Standards for school mathematics* [princípios e padrões de prova para a matemática escolar], uma publicação que contém orientações sobre o trabalho com argumentações na matemática escolar desde as séries iniciais. O *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) tem dedicado grupos de trabalho para estudos e publicações sobre temas como: tipos de prova e o uso de softwares de geometria dinâmica como ferramenta para a construção da prova. No Brasil, temos pelo menos dois polos de referência para pesquisa com esses temas: os trabalhos oriundos da Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo, e outros oriundos do Projeto Fundão do Instituto de matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Especificamente na PUC-SP existe uma série de produções que versam sobre raciocínio dedutivo e que têm origem no grupo de pesquisa Processos de Ensino e de Aprendizagem Matemática (PEAMAT) coordenado pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (Ferreira, 2016). Trabalhos voltados a esse tema, como pontua Ferreira (2016), vêm em uma crescente, sobretudo, nos já referidos centros de pesquisa.

Ao refletir sobre as bases teóricas que versam sobre os estudos que envolvem prova e demonstração na Educação Básica, Matheus (2016) constata que parte significativa não é produção nacional. Nós usamos Balacheff (2022a; 2022d), De Villiers (2001; 2002), Sowder e Harel (1998, *apud* Orden, 2015) como uma base para nossas análises e reflexões. Precisamos destacar que os fundamentos desses teóricos são ancorados em outras realidades. Balacheff (2022a; 2022d), por exemplo, relata ostensivamente a presença de questões acerca de argumentação, prova e demonstração na Educação Básica nos documentos norteadores da França, já no Brasil esses temas não são diretamente abordados nesses documentos. A exemplo, podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que apesar de conterem referências ao aspecto dedutivo da matemática e fazer referências sutis ao que seria argumentação e prova, não é possível dizer que este é um tema de interesse, muito menos de destaque (Matheus, 2016). Pietropaolo (2005, *apud* Matheus, 2016), que participou da construção do documento, afirma que as discussões iniciais para a elaboração do PCN (Brasil, 1998) apontavam para uma convergência quanto a resolução de problemas como um princípio norteador, mas que não incluíam questões relativas à prova e demonstração. Estas questões foram pouco debatidas e aparecem de forma mais clara no documento no item Orientações Didáticas, mas apenas no que tange à geometria. Isso se deu em parte em razão do panorama de pesquisas sobre o tema à época.

Contudo, o fato de os pressupostos teóricos não estarem a priori ancorados em pesquisas nacionais não cria óbice ao seu uso, mas gera a necessidade de verificar em que medida essas teorias se adéquam a nossa realidade, no sentido de ser capaz de fornecer ferramentas para interpretar e produzir conhecimento sobre a nossa realidade. Por outro lado, vemos nessa questão uma possível resposta a nossa dificuldade em encontrar trabalhos que tratem diretamente de processos que conduzam à prova matemática em estudantes da Educação Básica. Atribuímos esta questão ao ponto de discussão coletiva em que estamos hoje no Brasil. Como tratar de processos que conduzam à prova matemática em estudantes sem antes despertar esse tema nos professores?

Sobretudo em virtude da ausência de diretrizes claras com relação à prova matemática e a demonstração na Educação Básica, o professor passa a ser o principal ator neste cenário e a sua concepção sobre a matemática, sobre a relevância que a demonstração tem nessa Ciência, e a forma como as concepções do professor se materializam em ação pedagógica na Educação Básica passam a ser questões centrais para definir os caminhos da prova e da demonstração na Educação Básica.

Os saberes mobilizados pelos professores estão arraigados nos seus processos formativos, em especial nos processos formativos formais como a formação inicial. O professor formador dos futuros educadores da Educação Básica, em geral, é matemático profissional e dá ênfase a uma concepção formalista, o que não inclui a percepção das distinções entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, produzindo assim um distanciamento de um cenário em que é possível investigar, conjecturar, demonstrar ou refutar, ao investir em um cenário que favorece a repetição de algoritmos e a resolução de problemas-modelo. Embora essas concepções ancoradas na abordagem tecnicista estejam, pelo menos, formalmente, em decadência, elas ainda fazem parte, mesmo que de modo híbrido, como outras correntes pedagógicas, das concepções e práticas dos professores – tanto do formador quanto do futuro professor da Educação Básica (Matheus, 2016).

O professor que opta por adotar uma postura que difere de sua formação inicial, escolhe quase que de modo autônomo burlar as concepções e práticas que foram reiteradamente inseridas no seu processo formativo (Matheus, 2016).

> [...] para que venha a desenvolver um trabalho significativo com argumentação e prova, seria necessário que esse futuro professor superasse, possivelmente de forma autônoma, o abismo entre o rigor com que a prova lhe é apresentada em sua própria formação e as reais possibilidades de argumentação de seus jovens estudantes (Matheus, 2016, p. 76).

Em pesquisa realizada com um grupo de professores do Ensino Fundamental com o objetivo de produzir reflexões acerca de prova e demonstrações em matemática, Almouloud (2007) pôde constatar o que vamos chamar de limitações da formação docente: diante de uma proposição matemática, parte dos professores não conseguiu distinguir as hipóteses da tese, tratam as palavras prova e demonstração como sinônimos e não conseguiram reconhecer uma demonstração no livro didático – quando foi requerido que identificassem uma demonstração, indicavam os "[...] textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração” (Almouloud, 2007, p.16).

Tais limitações da formação docente criam impactos na sua atuação e, por conseguinte, na forma como os próprios educandos veem a matemática e os processos de validação que lhe são próprios, gerando novos obstáculos que se somam às complexidades inerentes ao ensino da prova e demonstração. Um desses obstáculos inerentes pode ser observado em Balacheff (2022a): a complexidade na transição entre o experimental/manipulável e o teórico/abstrato – transição das provas pragmáticas para as provas intelectuais. Balacheff (2022a) alerta para a importância de criar situações que permitam a percepção da necessidade de afastamento entre os processos de validação já comumente usados na linguagem natural – como os processos de experimentação nas ciências naturais – para ingressar em um processo de argumentação teórico que caracteriza uma ruptura epistemológica com relação às suas argumentações de até então. Criar situações que permitam lidar com tal desligamento é o desafio a ser enfrentado até mesmo para estudantes do nível superior, como notamos nas considerações de Ferreira (2016, p. 46).

> O que se espera é que os estudantes partam das provas experimentais e consigam desenvolver provas conceituais. Mas isto não ocorre tão facilmente. Atingir o nível de rigor exigido pela matemática é muito raro entre estudantes, inclusive os universitários, como identificado por Nasser e Tinoco (2003), por Jahnke (2008) e por Knipping (2008).

Sowder e Harel (1998, *apud* Ordem, 2015) dão um passo atrás ao trazer para a cena a percepção do estudante sobre a necessidade de argumentar acerca da validade de um fato antes mesmo de analisar sobre a complexidade de transição entre tipos de provas. Qual a razão de explicitar o porquê o teorema de Pitágoras é verdadeiro? Por qual razão é necessário apresentar uma prova para uma afirmação apresentada pelo professor ou vista em um livro didático? Afinal, o que é provar e/ou demonstrar para um estudante da Educação Básica? Essas importantes questões sublinham uma ação que antecede a busca por uma prova e que é uma condição necessária. Este ponto abre espaço para pensar os impactos sobre o papel que o professor e os livros didáticos possuem ante os estudantes e os possíveis impactos no ensino da prova e demonstração.

A complexidade do ensino da prova e da demonstração foi constatada por Almouloud e Mello (2000, p. 15) que ao empreender uma pesquisa com o objetivo de estimular a produção de provas admitem ter sido pretensiosos nos objetivos e apontam a necessidade de um trabalho que seja desenvolvido a longo prazo para atingir tais objetivos.

> [...] [fomos] um pouco pretensiosos em admitir poder desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente em geometria, através de uma sequência didática, com oito sessões. Para desenvolver essa habilidade, precisa-se de um trabalho de longo prazo que começaria desde quinta série e tendo continuidade nas demais séries.

Acerca dessa pesquisa, Mello (1999) descreve que dos 10 estudantes participantes 2 conseguiram uma demonstração, os demais conseguiram apenas o que ela chamou de demonstrações parciais. Esse fato ilustra como é árduo o esforço em/de criar uma situação de prova. Para Balacheff (2022d) a criação de uma situação de prova requer, dentre outras questões, que o estudante assuma a responsabilidade de apresentar uma solução para o problema e deixe de esperar a solução do professor ou de outro estudante. Esse é “[...] o motor de aprendizagem das provas [...]” (Balacheff, 2022d, p.851). Mais geralmente acreditamos que essa é uma das questões mais relevantes na educação, conseguir o envolvimento efetivo dos educandos nos processos. Ideia similar é percebida em Skovsmose (2000) ao se referir ao convite e ao aceite à participação de uma atividade em um cenário de investigação matemática, que como veremos no capítulo seguinte, é um cenário que favorece a criação de uma situação de prova.

Ao investigar as dificuldades enfrentadas para a construção da prova e demonstração, Mello (1999) categoriza três obstáculos ao seu aprendizado, eles são de ordem epistemológica, didática e linguística.

Obstáculos epistemológicos são aqueles constituídos por saberes historicamente conflituosos e relevantes no desenvolvimento do conhecimento em questão e que por esta razão foram incorporados ao saber a ser transmitido. No caso concreto da matemática, a redução ao absurdo é um proeminente exemplo. Grabiner (2012) aponta que o uso das provas indiretas permitiu a criação de objetos que vão além da experiência e intuição, abrindo assim caminhos para a matemática efetivamente abstrata. Mello (1999) também coloca nesta categoria:

- o uso de diferentes registros de representação de um objeto: língua natural, representação algébrica e geométrica como um obstáculo inerente dado que a transição entre esses diversos modos de representação é uma constante nas demonstrações e comunicações da área;
- o uso de desenhos de um objeto que podem induzir a inclusão de propriedades que fazem parte do desenho prototípico e, não, do objeto em si;
- a concepção dos estudantes sobre a demonstração, que costumam considerar como algo inútil, em certos casos em razão da obviedade; e,
- a rede semântica, que contém muitas singularidades que dão contexto aos objetos e propriedades matemáticas investigados.

Os *obstáculos didáticos*, por sua vez, são aqueles que dependem essencialmente de escolhas relacionadas ao sistema educativo e as estratégias de ensino selecionadas que geram

> [...] no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. São inevitáveis, inerentes à necessidade da transposição didática (Mello, 1999, p. 20).

Exemplos desse tipo de obstáculo incluem a ausência de demonstrações nos livros didáticos, a escolha dos professores em não apresentar demonstrações em sala de aula e a inabilidade do professor em compreender as questões dedutivas relativas à própria geometria. Ainda podemos incluir o caso em que a prova é utilizada em sala de aula, contudo, de modo a produzir no estudante a percepção de que se trata de uma técnica que pode ser replicada em outras situações como fórmulas.

Já os *obstáculos linguísticos* se referem

> [...] a dificuldade dos estudantes em ler um texto de modo inteligente e a incapacidade de reproduzi-lo com o mínimo de vocábulos apropriados, resultam na falta de competência em

> compreender também os enunciados dos problemas em matemática e em elaborar uma resposta com argumentos articulados dentro de um texto coerente (Mello, 1999, p. 21).

Esses obstáculos se estendem até mesmo para estudantes de nível superior, como demonstra uma pesquisa realizada por Moore (1994, *apud* Orden, 2015) com estudantes de cursos de graduação em matemática e graduação em educação que lista:

> (D1) – Os estudantes não sabiam as definições, isto é, os estudantes com dificuldades não eram capazes de indicar definições; (D2) – Os estudantes tinham pouco entendimento intuitivo dos conceitos; (D3) – Imagens dos conceitos dos estudantes eram insuficientes para produzir provas; (D4) – Os estudantes com dificuldades eram incapazes de gerar e utilizar seus próprios exemplos; (D5) – Os estudantes não sabiam como usar definições para obter a estrutura de uma prova; (D6) – Os estudantes não eram capazes de compreender e utilizar a linguagem e notação matemática; e, finalmente, (D7) – os estudantes não sabiam como começar uma prova (Moore, 1994, *apud* Ordem, 2015, p. 59).

Um importante entrave ao ensino da prova e demonstração é descrito por Usiskin (1980, *apud* Orden 2015) – e pode ser categorizado segundo a classificação de Mello (1999) como um obstáculo didático – é o fato de não se analisar a circunstância na qual a demonstração é produzida pelos matemáticos e por quais motivações eles a produzem. A maior parte do trabalho do matemático se dá em um processo de investigação no qual são levantadas hipóteses sobre questões com validade até então desconhecida. Neste sentido, conduzir os estudantes a buscar provas ou demonstrações para asserções já conhecidas pode criar distorções na percepção do que é demonstração.

O contexto do processo de produção da demonstração também é sublinhado por Rosale (2018) ao refletir sobre os testes. Muito embora eles não possam ser apresentados como uma demonstração – a menos que seja para refutar um argumento – eles são relevantes para o processo de construção de conjecturas e formulação de teoremas que podem ser posteriormente demonstrados. Ainda a esse respeito Rosale (2018, p. 33, grifo nosso) adiciona:

> [...] a abordagem [para o ensino de provas e demonstrações] não deve ser a de exposição de uma demonstração em lousa, ou apresentação do produto final de uma prova, por exemplo. *O processo da prova deve ser valorizado* visando o desenvolvimento das habilidades de argumentação pelo estudante, e não somente a produção ou reprodução de demonstrações matemáticas como estão apresentadas em livros didáticos.

Ao passo em que os obstáculos caracterizam os pontos de atenção, eles também nos servem de balizadores que nos colocam em direção da construção de uma situação de prova. Alguns atores, por outro lado, apontam mais enfaticamente caminhos que conduzem à prova. Em pesquisa realizada por Boero (1996 *apud* Almouloud, 2007) na qual foi discutido o processo mental que está implícito à construção de afirmações matemáticas em estudantes da 8ª série – atual 9º ano. Foi constatado que o estudante pode efetivamente produzir conjecturas, provas e teoremas se

> [...] forem colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:
> • durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;

> • durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas ("argumentos") produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica (Boero, 1996 *apud* Almouloud, 2007, p.02).

De Villiers (2001) em pesquisa realizada em um ambiente de geometria dinâmica aponta como o uso das funções da prova associados a esse tipo de ambiente pode ser um fomentador da construção de provas. Os ambientes de geometria dinâmica, como veremos no capítulo a seguir, favorecem a realização de testes, criação de conjecturas, refutação de fatos e a construção de uma prova. Muito dessas possibilidades são criadas em razão da ferramenta arrastar que permite a manipulação dinâmica dos objetos.

Como podemos notar, são diversos os fatores que contribuem com a atual situação do ensino da prova e demonstração na matemática escolar, desde os documentos norteadores, passando pela formação docente, as suas concepções sobre prova e demonstração até finalmente chegarmos aos educandos e às barreiras específicas dada a complexidade de se construir uma situação que conduza à prova e/ou demonstração. Listamos ao final desta seção alguns obstáculos e pesquisas que investigaram a criação de situações que conduzam à prova. Para atuar na mitigação desses obstáculos, vamos empreender no próximo capítulo uma investigação sobre duas vertentes da Educação Matemática que as nossas leituras expostas até aqui fazem perceber que podem contribuir no sentido de criar uma situação de prova: as atividades de investigação e o uso de softwares de geometria dinâmica.

Capítulo 3

Geometria Dinâmica e Tarefas de Investigação matemática: um caminho para a prova e demonstração

Encerramos o capítulo anterior que apresenta o nosso objeto de estudo, a prova e demonstração na matemática escolar, apontando algumas questões que envolvem a complexidade do seu ensino. Neste capítulo, vamos apresentar as ferramentas que serão usadas com vistas a atingir os nossos objetivos: os ambientes de geometria dinâmica e os tipos de tarefas que serão desenvolvidas neste ambiente, as tarefas de investigação. No decorrer de todo o texto, buscamos evidenciar a interlocução dessas ferramentas com as situações de prova.

3.1 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

O uso do computador na educação no Brasil se iniciou a partir do movimento de alguns pesquisadores motivados pelas experiências internacionais de países como Estados Unidos da América (EUA) e França. A primeira experiência brasileira com o tema foi um seminário intensivo realizado na Universidade Federal de São Carlos em 1971 sobre o uso do computador no ensino de física e dirigido pelo professor E. Huggins da Universidade de Dartmouth, EUA (Souza, 1983). A partir desse momento, outras ações se multiplicaram nas universidades brasileiras como o uso de programas de simulação para o ensino e a criação de grupos de pesquisa (Valente, 1999).

A inserção do tema tecnologias digitais (TD), em linguagem atual, no ensino teve reflexos na Educação Matemática. Borba *et al.* (2021) apresentam um estudo que identifica quatro fases distintas, mas não disjuntas, sobre o uso das TD no âmbito da Educação Matemática. As fases são caracterizadas pelo surgimento de “[...] inovações tecnológicas [que] possibilitam a constituição de cenários qualitativamente diferenciados de investigação matemática; quando o uso pedagógico de um novo recurso tecnológico traz originalidade ao pensar-com-tecnologias” (Borba *et al.*,2021, p. 44, destaque do autor).

A primeira fase é iniciada no ano de 1985, tendo como elemento central o LOGO, um software que permite a construção de objetos geométricos a partir de um conjunto de instruções que guiam a trajetória de uma tartaruga na tela do computador. O trajeto percorrido pela tartaruga constrói objetos geométricos e permite, de modo simplificado, a exploração deles de uma perspectiva investigativa. O construcionismo de Papert (1980) é a principal linha teórica a respeito da linguagem LOGO. Também merecem destaque as ideias que permeiam o conceito de micromundos e as discussões sobre a presença de laboratórios de informática nas escolas. A linguagem LOGO, contudo, não se popularizou e hoje está em desuso (Borba *et al.*, 2021).

A segunda fase que tem início por volta da primeira metade dos anos 1990 é marcada pela expansão do uso dos computadores pessoais e das calculadoras gráficas. Eles chegaram às casas e espaços de trabalho, de alguns grupos de pessoas, gerando percepções bem distintas, desde aqueles que não se interessavam para os seus fins educacionais até os que se movimentaram para implementar programas com fins educativos como pesquisadores e até governos. Alguns programas são bem característicos desse período: o Winplot, um programa de representação de funções, o Cabri Géomètre, um programa de geometria dinâmica (GD) e o Maple, um software de computação algébrica. Nesta fase, se destacaram as tarefas que exigiam a investigação, exploração e demonstrações, usando em especial a ferramenta arrastar dos programas de GD (Borba *et al.*, 2021).

A terceira fase é caracterizada pela popularização da internet enquanto ferramenta de difusão da informação e de discussões on-line. Seu início é marcado em 1999 e tem como um dos seus elementos centrais os cursos de formação à distância, os mecanismos de busca como o Google e o uso do e-mail. Reflexões sobre a forma de organização de cursos online, assim como a natureza do pensamento matemático nesses cursos faziam parte das perspectivas teóricas. Além disso, também pode-se notar o uso de elementos característicos da segunda fase, como o Winplot, em atividades de cursos de formação à distância (Borba *et al.*, 2021).

A quarta fase é caracterizada pela internet rápida e tem seu marco inicial em 2004. É a fase na qual fundamentalmente estamos inseridos. São diversos elementos presentes que ajudam a delimitar esse momento desde ferramentas a procedimentos: o Geogebra; a multimodalidade de comunicação; novos designs e interatividade; tecnologias móveis ou portáteis e performances matemáticas digitais estão listadas por Borba *et al.* (2021). Apenas para exemplificar uma dessas questões e destacar elementos que estão contemplados nessa categoria teórica, quarta fase, as performances matemáticas digitais (PMD) incluem as atividades que mesclam a matemática e o campo das artes, o uso das linguagens verbais e não-verbais com a finalidade de comunicar a matemática. A divulgação dessas produções que, por vezes, são vídeos, é feita por meio das redes sociais.

É importante destacar que uma fase não suplanta a outra. Muitas das discussões que surgiram nas primeiras fases ainda são elementos de discussão na quarta, assim como questões que foram abertas nas primeiras fases têm suas análises aprofundadas e potencializadas em razão das novas ferramentas características das fases seguintes. Borba *et al.* (2021) compreende que cada fase está incluída na sua sucessora. Desse modo, a quarta fase agrega às ferramentas e discussões já existentes até a terceira fase a aquelas que são próprias aos marcos da quarta fase.

Este trabalho, a priori, usa elementos que são característicos da segunda fase – a GD como uma forma de estimular a produção de provas e demonstrações. Contudo, o software escolhido, o GeoGebra, foi concebido em 2002, em meio a terceira fase. Segundo Oliveira (2020), até 2017, junto com o Cabrí-Géomètre é o programa mais usado no Brasil, estando presente em diversas plataformas, desde celulares com múltiplos aplicativos que tratam de aspectos específicos da matemática – Geogebra Geometria, Calculadora Geogebra, Suíte Geogebra Calculadora, Calculadora Gráfica Geogebra, Geogebra 3D – até em espaços mais clássicos como programas para computador ou acesso ao programa online.

Hoje o ambiente no entorno do Geogebra que conta com uma biblioteca de tarefas e livros digitais construídos com os seus recursos e que permitem a integração de outras plataformas. Ou seja, o que inicialmente era um programa de GD, usando ferramentas características da chamada quarta fase, ampliou o alcance da sua marca criando um universo próprio que amplifica as suas potencialidades e abre novas frentes de investigação.

A seguir vamos apresentar algumas reflexões sobre os programas de geometria dinâmica com um olhar atento às suas potencialidades para a construção da prova e demonstração na matemática escolar.

3.2 Os Ambientes de Geometria Dinâmica

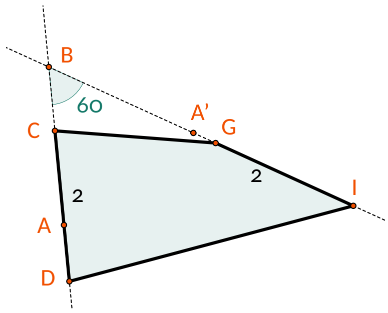
O primeiro programa do que hoje chamamos de geometria dinâmica surgiu na França, o Cabri-géomètre, em 1987. Contudo, o termo em si foi cunhado em 1990 por Nick Jackin e Steve Rasmussem que usaram tal denominação com a finalidade de estabelecer uma diferença com relação aos demais programas de geometria que não possibilitavam a manipulação do objeto de modo interativo (Oliveira, 2020). Os softwares de geometria dinâmica (SGD) oferecem régua e compasso virtuais de modo a possibilitar, a partir de conceitos primitivos e objetos básicos da geometria, construir qualquer objeto geométrico construtível em ambiente com lápis e papel e manipulá-los, criando assim famílias de objetos concreto-abstratos que se movimentam na tela sob o comando do usuário (Gravina, 2001).

A ideia de movimento na geometria não é algo que foi introduzido pelos SGD, ele apenas as potencializou. Existem registos que datam de 1741 de descrições e explicações de processos que se referem a descolamentos de pontos e até mesmo polígonos inteiros (Gravina, 2001). A ferramenta que inclui o movimento na rotina do fazer geometria atualmente é o arrastar – ou mover. Tamanha é a mudança que esta ferramenta promove nos processos de exploração, investigação e compreensão dos objetos que sua implementação no fazer geometria sugere uma mudança de compreensão do próprio objeto e da geometria em si. Janzen (2011, p. 49) afirma que os SGD

> [...]sugere[m] novas maneiras de raciocinar e operar e até mesmo de conceber a geometria, alterando sua ontologia, constituída agora não mais de objetos geométricos senão de relações geométricas, explicitando, então, o caráter relacional dos objetos geométricos.

Tal mudança de percepção fica clara com o exemplo extraído de Honsberquer (1982). Ele nos apresenta os quadriláteros equílicos: são quadriláteros convexos que têm dois lados opostos de medidas iguais e cujas direções formam um ângulo de 60°. Na Figura 01, os pontos A, A', B são pontos independentes que determinam as retas suportes dos lados CD e GI, essas retas têm um ângulo de 60°, assim como os pontos C e G que também são independentes. Sem perda de generalidade, escolhemos a medida dos referidos lados como 2 unidades. Note que, ao deslocar os pontos independentes do quadrilátero à esquerda, obtivemos à direita outro quadrilátero que representa também um quadrilátero equílico, a figura permanece estável e suas características definidoras foram mantidas.

Figura 1 – Quadrilátero equílico



Fonte: do autor.

Esse tipo de construção é o que Gravina (2001) chama de desenho por propriedades, aquele que impõe por meio de processos de construção euclidianos as propriedades do objeto e que ao ser manipulado não se descaracteriza como nos desenhos à mão livre [1] . O objeto geométrico na tela passa a ser uma família de figuras que mantém alguns fatos estáveis e a escolha de uma dessas figuras se refere, portanto, a escolha de um representante de classe, evidentemente, aquele que for mais conveniente para a solução do problema em questão. Assim, o quadrilátero equílico construído na figura 01 representa a classe dos quadriláteros equílicos de lados opostos de medida 2 unidades.

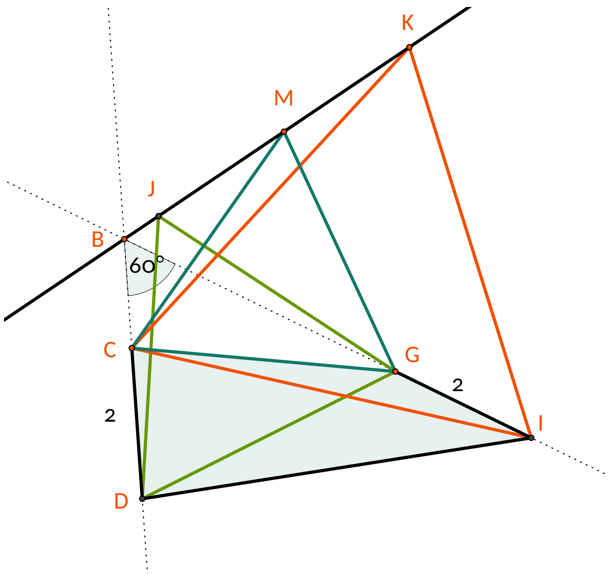
A compreensão do objeto geométrico, estando ou não em contexto de um SGD, se dá sob dois campos fundamentais: conceitual e figural. O campo figural se refere a imagem do objeto, ao escrever a palavra quadrado e pensar no objeto que ela representa, surge uma imagem, esta é a figura do quadrado. Por outro lado, o campo conceitual está relacionado às propriedades que o definem: um quadrado é um quadrilátero que possui lados opostos e ângulos internos de mesma medida (Fischbein, 1993). Gravina (1996; 2001) acompanha os argumentos de Fischbein (1993) ao afirmar que a correta percepção do objeto geométrico depende da compreensão do objeto a partir desses dois campos e ainda adverte que esta questão tem sido negligenciada quando em situação de ensino.

[1] Neste caso a noção de desenho à mão livre também se refere aos desenhos realizados em SGD, mas sem que o mesmo seja submetido a um processo de construção por propriedades. A construção à mão livre busca apenas representar a imagem que se tem do objeto sem que haja preocupação em usar um método que garanta as suas propriedades.

Janzen (2011) traz um ajuste de nomenclatura que também está presente em Gravina (2001) e Oliveiro (2002) de conceitos – que já está sendo adotada em todo o texto desta seção – para o objeto geométrico quando inserido em softwares de geometria dinâmica: desenho e figura. Janzen (2011) destaca que o desenho é uma representação – não é o objeto em si – que tem características do objeto geométrico que se pretende representar, contudo, essas características não se mantêm quando submetidas aos movimentos possibilitados pelo arrastar. A figura, por outro lado, também é um representante do objeto, contudo, é capaz de manter suas propriedades mesmo que sob a ação de movimento, a figura é um invariante geométrico. Gravina (2001, p. 88) destaca que o desenho "[...] refere-se a instância de representação do componente figural" enquanto a figura "[...] refere-se ao objeto matemático inserido no modelo euclidiano, dado pelas propriedades que lhe são impostas, por via de construção geométrica" e, portanto, relacionado ao campo conceitual de compreensão do objeto geométrico.

Os SGD promovem essa associação da figura com o seu respectivo conceito. Isso é feito por meio das possibilidades de construções e de ferramentas que são naturalmente importadas dos ambientes com lápis e papel e associadas a ferramenta arrastar – e as suas derivações: o controle deslizante, o rastro e as animações.

Figura 2 – Propriedade do quadrilátero equílico



Fonte: do autor.

As transformações geométricas realizadas em partes do objeto que tenham sido construídas de modo independente promovem uma modificação nos objetos dependentes, mantendo estáveis as propriedades que foram impostas na construção inicial da figura. As características que são decorrentes das propriedades inicialmente impostas também são preservadas (Gravina, 1996; 2001). Vide a interessante propriedade dos quadriláteros equílicos: se traçarmos triângulos equiláteros tomando como base os segmentos DG, CG e CI, de modo que os triângulos não tenham pontos internos em comum com o segmento DI, exceto possivelmente os seus extremos, os vértices desses triângulos que não pertencem a base estão em uma mesma reta. Este fato permanece estável, mesmo que sob ação do movimento e sem ter sido uma propriedade imposta na construção da figura. Veja a Figura 02.

Esses elementos que se mantém inalterados sob a ação do movimento são os já mencionados invariantes. E a respeito destes surgem naturalmente as seguintes questões: de fato isso sempre ocorre? Por qual razão essas características se mantêm? Gravina (2001) aponta que é o processo de demonstração que revela as razões de certos fatos permanecerem mesmo sob movimento. "É o processo de demonstração que explica os fatos estáveis implícitos que emergem sob movimento. O processo inicia, geralmente, com a plausibilidade de uma conjetura. Mas a construção de uma demonstração depende, sobretudo, de insight [...]"(Gravina, 2001, p. 92).

3.2.1 Prova e Demonstração entre as Potencialidades dos SGD

Os SGD introduziram novas formas de interagir com os objetos geométricos e permitiram alguns avanços. Alves e Soares (2005) listam as características/potencialidades desses softwares: criação de objetos com precisão e variedade, exploração e descoberta, visualização ou representação mental dos objetos geométricos que, em nossa perspectiva, juntas foram uma base para a quarta potencialidade destacada pelos autores: a prova.

A precisão e variedade na construção dos objetos geométricos favorece ao fim dos desenhos prototípicos, isto é, desenhos que são reiteradamente exibidos do mesmo modo. Um quadrado com os lados paralelos à folha do papel ou ainda um triângulo cuja altura sempre está contida em sua região interna. Por conseguinte, a compreensão do objeto geométrico fica mais refinada com o afastamento das particularidades que são importadas para a definição em razão do desenho prototípico (Gravina, 2001).

> Os desenhos deixam de ser prototípicos. E os alunos tornam-se mais hábeis na identificação, quando em processo de demonstração, de subconfigurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar da argumentação (Gravina, 2001, p. 89).

A este propósito, Gravina (1996) realizou uma pesquisa com estudantes do curso de licenciatura em matemática na qual os interpelou a respeito da definição de retângulo. Nas respostas, ela observou que 47% incluíam na definição alguma particularidade como a desnecessária característica de existirem dois lados opostos de medidas distintas e concluiu que o uso dos SGD pode auxiliar a mitigar esse problema. Alves e Soares (2005) indicam que dificuldades dessa natureza são reflexo do aspecto estático do desenho e do uso reiterado da posição prototípica nos livros e materiais didáticos que reforçam, assim, a percepção de que os SGD podem auxiliar nesse processo. A variedade das construções ainda auxilia na refutação ágil de uma proposição que não seja verdadeira e a precisão da construção associada a ferramenta arrastar é um gerador de conjecturas ao apresentar uma série de desenhos em movimento que permitem a percepção de padrões, isto é, a permanência de invariantes.

A *exploração e a descoberta* podem ser observadas nas atividades desenvolvidas com geometria dinâmica. Alves e Soares (2005) descrevem dois tipos distintos: atividades de expressão ou atividades de exploração – também chamadas de caixa preta. As atividades de expressão permitem a construção dos objetos enquanto as de exploração permitem apenas a manipulação da figura já construída. Em ambos os casos, os estudantes têm a possibilidade de movimentar os objetos independentes, analisar os resultados obtidos em busca dos invariantes geométricos. "Através da experimentação, **exploração** e análise das propriedades das figuras geométricas, ocorre um estímulo ao raciocínio e o favorecimento da **descoberta** de novas relações e conceitos geométricos" (Alves e Soares, 2005, p.10, destaque do autor).

Hanna (2000) defende que a prova e a exploração são elementos complementares que se reforçam mutuamente, permitem a construção de conjecturas e deixam espaço para uma futura confirmação das descobertas com a apresentação de uma prova.

> Ambos não apenas fazem parte da resolução de problemas em geral, mas também são necessários para o sucesso em matemática em particular. A exploração leva à descoberta, enquanto a prova é a confirmação. A exploração de um problema pode levar-nos a compreender a sua estrutura e as suas ramificações, mas não pode produzir uma compreensão explícita de cada ligação. Assim, a exploração pode levar a conclusões que, embora formuladas com precisão, devem permanecer provisórias. Embora a verdade de uma proposição possa parecer aparente a partir da exploração, ela ainda precisa, como aponta Giaquinto (1994), de uma "justificação demonstrável". Somente uma prova, ao fornecer uma derivação de premissas aceitas, pode fornecer isso (Hanna, 2000, p. 14, tradução nossa[2]).

A exploração e a descoberta criam uma situação de investigação que possibilita levantar hipóteses que explicitem as razões de um fato sempre ocorrer. Nesses ambientes, os estudantes trabalham de modo experimental até que investigações exibam construções que mantenham elementos que permaneçam estáveis sob ação do movimento. Gravina (1996) relata que sob essas condições os estudantes "[...] sentiram a necessidade de argumentar matematicamente sobre as evidências obtidas de modo experimental" (p. 12).

> Os ambientes de geometria dinâmica também incentivam o espírito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações / operações, conjeturam e testam a validade das conjeturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica — medidas, oráculo, sobreposição de objetos geométricos? Num segundo momento, coloca-se à eles o problema de explicar as regularidades que 'saltam aos olhos' nos "desenhos em movimento", ou seja, de engajarem- se na construção de demonstrações. (Gravina, 2001, p. 89-90)

Neste cenário, o desafio para a construção da prova passa a ser a natureza da atividade proposta ao estudante, que deve aproveitar o prazer desencadeado pela exploração, com a finalidade de motivá-los a produzirem uma prova para os fatos descobertos (Hanna, 2000).

[2] Not only are they both part of problem solving in general, they are both needed for success in mathematics in particular. Exploration leads to discovery, while proof is confirmation. Exploration of a problem can lead one to grasp its structure and its ramifications, but cannot yield an explicit understanding of every link. Thus exploration can lead to conclusions which, though precisely formulated, must remain tentative. Though the truth of a proposition may seem apparent from exploration, it still needs, as Giaquinto (1994) points out, 'demonstrable justification'. Only a proof, by providing a derivation from accepted premises, can provide this.

Em se tratando da *visualização ou representação mental dos objetos geométricos*, Alves e Soares (2005) citam uma pesquisa realizada por Laborde (1998) com adultos que já tinham conhecimentos de geometria. Uma conclusão dessa pesquisa foi que a percepção visual cria e resolve questionamentos a partir da perspectiva geométrica, e que a percepção geométrica cria situações que podem ser exploradas sob uma perspectiva empírica através de SGD. Contudo, pessoas que já têm conhecimento em geometria, como os especialistas, têm facilidade em realizar conjecturas a partir da evidência visual em razão de seu arcabouço de conhecimentos, a questão posta por Alves e Soares (2005) é como estimular essa habilidade de criar conjecturas em pessoas iniciantes na geometria. A este respeito eles retomam a potencialidade dos SGD de exploração e descoberta dos fatos estáveis implícitos das figuras, os invariantes, e afirmam que tais descobertas ocorrem por meio de experiências visuais possibilitadas pelo ambiente, são atividades de cunho exploratório que "[...] possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos e levam à representação mental correta destes conceitos por parte do estudante, isto é, acabam auxiliando no processo de visualização." (Alves e Soares, 2005, p.11).

Essa possibilidade de visualização dos objetos torna-se uma característica de grande valor, pois para a concretização da aprendizagem em geometria é necessário que o estudante seja "[...] capaz de relacionar os fenômenos visuais aos fatos geométricos, reconhecer visualmente as propriedades geométricas, interpretar os desenhos em termos geométricos e saber realizar construções de configurações geométricas" (Laborde, 1998 *apud*, Alves; Soares, 2005, p.11).

Neste cenário, Gravina (2001) destaca que as atividades propostas devem promover a relação entre a percepção visual e o raciocínio geométrico. Esta situação de aprendizagem tem o desafio de

> [...] capacita[r] o estudante a utilizar o desenho como um auxílio ao seu raciocínio num nível abstrato, selecionando as informações relevantes extraídas de representações visuais e distinguindo as verdadeiras propriedades dos objetos geométricos daquelas encontradas em representações prototípicas ou contingentes (Alves e Soares, 2005, p.11).

A *prova* é a última potencialidade listada por Alves e Soares (2005). Essa potencialidade ecoa nas mais diversas publicações que versam sobre o tema. Os autores consultados convergem que os SGD favorecem a situação de prova.

Gravina (1996) atribui a possibilidade de construção da prova ao equilíbrio entre os campos conceitual e figural do objeto geométrico propiciado por esses ambientes.

> Nestes ambientes, conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas leva à descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto as atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, 'o desenho em movimento', passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático (Gravina, 1996, p. 13).

Já Marioti (2000) citado por Zulatto (2002) atribui essa potencialidade a necessidade de explicação da solução de um problema. Para o autor justificar a razão de algumas construções funcionarem e de outras não, abre a possibilidade de uma justificativa teórica. Nesta circunstância, Marioti (2000) está evocando a função de explicação de uma prova, o que encontra paralelo com De Villiers (2001) que traz para a cena as funções da prova como uma forma de estimular a produção de argumentos para estudantes da Educação Básica e relata em trabalho empírico a eficácia dessa alternativa quando em ambiente de geometria dinâmica.

Marradez e Gutiérrez (2000) convergem com os autores já citados e explicita algumas das razões da dificuldade em provar e demonstrar na Educação Básica.

> Um SGD como o Cabri pode muito bem ajudar os alunos do ensino secundário a entenderem a necessidade de justificativas abstratas e provas formais em matemática. Os alunos do ensino secundário não conseguem fazer uma transição rápida da formas empíricas a abstratas de conjectura e justificação. Tal transição é muito lenta e deve estar baseada em métodos empíricos usados pelos alunos até agora. Neste contexto, o SGD leva os estudantes a fazerem explorações empíricas antes de tentar produzir uma justificação dedutiva, por fazer representações significativas de problemas, experimentar e obtendo feedback imediato (Marradez; Gutiérrez, 2000, p. 119, tradução nossa[3]).

Por outro lado, as condições para uma situação de prova podem emergir dos SGD à medida em que eles ofertam alternativas para obstáculos à construção da prova. Janzen (2011) relata a dificuldade dos estudantes em "[...] enxergar a figura como uma classe de figuras geométricas, que pode ser explicitada e entendida através de um representante adequado chamado de 'exemplo genérico'; isto é, tirar a singularidade da figura e ficar com o aspecto geral." (p.51). Como vimos, os SGD trazem a possibilidade de facilitar a compreensão do objeto geométrico como um representante de classe. Outra dificuldade, relatada por Gravina (2001), notada nos estudantes quando em situação de prova é a transição das validações empíricas para processos de validação dedutivos, baseados em modelos teóricos. Os SGD podem contribuir pelo fato "[...] de permitirem a produção de construções auxiliares, casos extremos e por darem suporte a perguntas do tipo 'e se' e 'e se não', possuem o potencial de promover um elo entre o raciocínio empírico e o dedutivo (Hoyles; Jones, 1998, *apud* Janzen, 2011, p.52).

Parte das evidências sobre a eficácia do SGD na produção da prova e demonstração no Ensino Básico se sustenta no tipo de ambiente que ele permite que seja construído e que a literatura já aponta como elementos necessários para a construção da prova ou demonstração. Um elemento sabidamente importante, como temos visto, é a construção de um ambiente de natureza investigativa, exploratória, que engaje o educando no processo de busca e permita ao estudante desenvolver uma atividade similar a do matemático em seu processo de produção. Esse suporte é ofertado pelos SGD, neles os estudantes formam conjecturas e "[...] com o *feedback* constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em movimento", passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática (Gravina, 1996, p. 2).

---

[3] A DGS like Cabri my well help secondary school students understand the need for abstract justifications and formal proofs in mathematics. Secondary school students cannot make a fast transition from empirical to abstract ways of conjecture and justification. Such transition is very slow, and has to be rooted on empirical methods used by students so far. In this contexto, DGS lets students make empircal explorations before trying to produce a deductive justification by making meaningful representations of problems, experimenting, and getting immediate feedback.

Notar o que resiste ao movimento é o ponto chave para a construção de uma conjectura. Os elementos iniciais da construção, os objetos independentes, impõem a figura algumas propriedades iniciais e, partir dela, surgem outras propriedades que podem ser descobertas por meio da experimentação ofertada pelo SGD. Os fatos explícitos, hipóteses, são inicialmente ditos e expostos visualmente na figura, e deles decorrem os fatos invariantes implícitos, que a priori são conjecturas, e que podem tornar-se teses mediante uma correta argumentação matemática (Gravina, 2001).

> O recurso de 'estabilidade sob ação de movimento' revela aos alunos o grau de controle que eles exercem sobre os objetos concreto-abstratos, e obter uma construção estável torna-se um problema genuíno. Para um mesmo objeto geométrico são múltiplas as construções possíveis e assim os alunos passam a compreender que, a partir de certos fatos declarados (ou seja, hipóteses de um teorema), outros destes decorrem – os fatos estáveis implícitos (ou seja, a tese do teorema) —, então passíveis de explicação. Dir-se-ia que esta compreensão é parte da gênesis cognitiva da demonstração (Gravina, 2001, p. 89).

A construção de uma conjetura não é garantia de busca de uma prova ou demonstração e tampouco a busca garante a sua construção. Gravina (2001) salienta que a demonstração começa, em geral, com a construção de uma conjectura, mas a sua efetivação depende sobretudo de um insight e destaca, assim como De Villiers (2001) e Olivero (2002), que o próprio SGD pode ser um obstáculo a depender do modo em que é usado, já que as evidências empíricas podem facilmente convencer e acomodar o estudante, o impedindo assim de buscar uma prova.

De Villiers (2001) relata a desmotivação dos educandos para buscar a prova para uma conjectura quando a mesma já havia sido verificada empiricamente usando um SGD, contudo, o convite para justificar a razão da validade da afirmação, que não é ofertado pelo SGD, se concretizou como um desafio que os estudantes aceitaram e se lançaram na busca da prova. Balacheff (2022b) faz referência à necessidade desse engajamento, à luz da didática francesa, nomeia tal situação de devolução, o momento em que o estudante toma para si a responsabilidade de solucionar o problema proposto, e destaca que essa é uma condição sem a qual não é possível a produção de uma prova.

Ademais, embora os argumentos que advertem sobre o risco de uma eventual comodidade quanto a construção de provas e demonstrações em razão do uso dos SGD, lembramos, em contraposição, as considerações de Davis e Hersh (1985) ao apontar que a certeza intuitiva da veracidade de uma determinada conjectura precede o processo de busca de um argumento formal para justificar a sua validade. Desse modo, entendemos que o convencimento promovido pelo SGD se constitui como uma etapa cumprida no processo de busca por uma prova ou demonstração. De Villiers (2001) ainda acrescenta que, historicamente, a demonstração sucede o convencimento intuitivo, não o contrário.

Gravina e Santarosa (1998) listam algumas habilidades que, segundo as autoras, fazem parte do fazer matemática: testar, analisar, induzir, conjecturar e, por fim, demonstrar. Para nós, essa lista pode ser lida em ordem crescente de complexidade de processos que criam uma situação de prova e demonstração, e o elemento empírico dos SGD nos conduzem eficientemente até o ponto da construção de uma boa conjectura e auxiliam na criação de situações que permitem parte da gênese cognitiva da demonstração.

Para que não se tenha o efeito contrário ao desejado, Janzen (2011) sublinha a necessidade de ser criterioso nas tarefas propostas em SGD, já que a sua eficácia em desenvolver tais potencialidades listadas reside na natureza da tarefa. A este respeito, Zulatto (2001) afirma:

> [...] para que seu uso não seja um obstáculo à demonstração, é preciso não mais enfatizar o convencimento, que é adquirido, muitas vezes, com o manuseio do software, e sim, instigar os alunos a explicarem o porquê da veracidade de suas conjecturas, evitando, assim, deixar as demonstrações esquecidas, relegadas a segundo plano (Zulatto, 2001, p.29).

Como vimos, os SGD permitem a construção de um ambiente que é propício a construção da gênese cognitiva da prova pelo fato de possibilitar ao estudante compreender o objeto de estudo, levantar hipóteses, fazer explorações, testar a validade de afirmações e eventualmente argumentar sobre a sua validade ou não. Para que o seu uso não se transforme em um obstáculo a prova e a demonstração, a natureza das atividades que serão desenvolvidas sob sua égide deve motivar o educando a buscar as razões da validade de um fato. Entendemos que as tarefas de investigação são uma alternativa que contribui, nesses termos, para a construção de uma situação de prova. Na seção a seguir demonstraremos como essas tarefas de investigação favorecem a construção da prova.

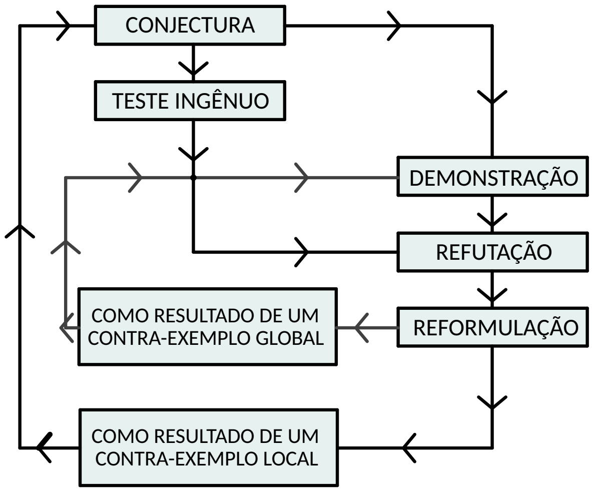
3.3 Tarefas de Investigação Matemática

A matemática enquanto ciência possui seus objetos e métodos próprios que permitem a construção e incorporação no seu escopo de novos objetos e técnicas. A natureza do labor empregado nesse processo emana da prática dos matemáticos profissionais que, em seus relatos, descrevem uma ciência não-linear cheia de idas e vindas, e em alguns aspectos, intuitiva, experimental e investigativa.

Lakatos e Marconi (2003) classificam a Matemática e a Lógica como ciências formais e abstratas, em razão das particularidades do seu processo de validação. Singh (2011) acrescenta que outras áreas do saber, como a Física, consideram a experimentação como um processo legítimo de validação, o que não acontece com a matemática. Contudo, a experimentação tem um importante papel no processo de construção dessa ciência, quer seja no refino ou refutação de conjecturas. Poincaré (1996, *apud* Ponte *et al.* 2019) lista, juntamente com a compilação dos dados, a experimentação como parte de uma primeira etapa do processo de investigação matemática que é seguida pela iluminação súbita e, por fim, pela verificação e sistematização dos resultados.

Imre Lakatos (1976), no livro *A Lógica das Provas e Refutações*, apresenta uma matemática que é construída através de processos de provas formais, as demonstrações, e refutações e conjecturas construídas por meio de observação e experimentação. Uma vez diante de um problema, o matemático observa, coleta dados e os analisa, isso permite a construção de conjecturas que, após serem testadas, podem ser refutadas ou refinadas quando se percebe que a conjectura se mantém estável após ajustes em algumas hipóteses ou no seu escopo, ou, ainda, a conjectura pode ganhar o estatuto de teorema ao ser demonstrada. Para Brocardo (2001), isso caracteriza uma investigação: uma atividade que envolve exploração, formulação de conjecturas e busca de argumentos que validem as descobertas.

Figura 3 – Diagrama a lógica das provas e refutações



Fonte: Extraído de Davis e Hersh (1985, p. 329) e modificado pelo autor.

A Figura 3 ilustra a concepção de Lakatos (1976) sobre a forma como a matemática é construída e retrata um processo que reinicia continuamente dando origem ao conhecimento matemático historicamente construído. Esse processo é eivado de incertezas, pavimentado pela intuição e vigiado pelo atento olhar da lógica que permite a refutação de conjecturas e validação de teoremas.

Uma investigação em matemática inclui a formulação de questões que se transformam à medida que o trabalho avança, assim como a produção, a análise e o refinamento das conjecturas, bem como a comunicação dos resultados obtidos (Ponte, 2010). Ao contrário do que pode parecer, uma investigação não se trata necessariamente de um processo extremamente complexo que busca respostas para problemas que podem trazer revoluções, as investigações apenas devem versar acerca de problemas que são de interesse do pesquisador (Ponte *et al.*, 2019). Uma investigação, por sua vez, não é construída a partir da aplicação mecânica de conjuntos de técnicas, procedimentos e recolhimento de informações para posterior análise de informações. Investigar

> [...] pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Ao investigarmos, sabemos que esse trabalho tem as suas potencialidades, mas também tem os seus limites (Ponte, 2010, p. 28).

Além disso, Ponte (2010) também afirma que uma investigação matemática contém processos que são de ordem inconsciente e que envolvem a "[...] sensibilidade estética, conexões e analogias com problemas matemáticos e situações não matemáticas" (Ponte, 2010, p. 15). Esse aspecto é ilustrado por Poincaré (1996, *apud* Ponte *et. al*, 2019) ao relatar que durante certo período de estudos julgava não existirem um conjunto de funções, mas depois de um café e a seguinte dificuldade para adormecer, conseguiu repentinamente construir uma série delas, as funções fuchsianas.

Davis e Hersh (1985) convergem com os autores já citados ao criticar a forma como a matemática é apresentada. Eles argumentam que o modelo definição-lema-teorema-demonstração esconde todo o processo de criação – que inclui a experimentação, a tentativa e erro – que contém dúvidas, incertezas e erros. G. Polya (2006) em *A Arte de Resolver Problemas* aponta que a matemática em processo de construção em muito se parece com uma ciência experimental, cheia de dúvidas e hesitações.

Uma investigação matemática pode ser dividida em quatro etapas segundo Ponte *et al.* (2010): i) exploração e formulação de questões: que contempla a compreensão da situação-problema, a exploração e a formulação das primeiras questões; ii) produção de conjecturas: momento em que há a organização dos dados, a percepção dos primeiros invariantes e a construção das primeiras afirmações; iii) testes e reformulações: compreende o momento em que a conjectura é submetida a testes ingênuos e que permite a sua refutação ou a sua reformulação que também será submetida a testes de mesma natureza; e, iv) justificação e avaliação: é o momento em que se apresenta uma justificativa para a conjectura que resistiu aos testes empíricos.

O fazer matemática como expusemos não é linear e tem a investigação como um elemento central. A experimentação, o uso da intuição e a ação por tentativa e erro são práticas que usualmente não estão presentes na forma como a matemática é comunicada e ensinada. Contudo, esses são elementos fundantes na busca da verdade pelos matemáticos. As nuances da construção da Ciência que revelam a sua face investigativa e até mesmo inexata são suprimidas em homenagem à formalidade e a elegância das poucas linhas de uma demonstração.

Este trabalho investigativo empreendido pelos matemáticos que contempla a "[...] formulação de questões, elaboração de conjecturas, teste, refinamento, das questões e conjecturas anteriores, demonstração, refinamento da demonstração e comunicação dos resultados aos seus pares está ao alcance dos alunos na sala de aula de matemática" (Ponte *et al.*, 2019, p. 22). Brocardo (2001) vai ao encontro da colocação de Ponte *et al.* (2019) e em sua tese de doutorado mostra que essas atividades podem ser desenvolvidas com estudantes nas séries iniciais tendo efeitos não apenas sobre o ensino de habilidades matemáticas, mas também na própria concepção que os estudantes têm da matemática. Segurado e Ponte (1998) em um estudo de caso realizado com um estudante do 6° ano (no sistema educacional português) em que o mesmo foi submetido junto a sua turma a atividades de investigação, obtiveram resultados positivos que levaram o estudante de uma inicial dificuldade em criar conjeturas a uma postura ativa, confiante, com raciocínios ousados – nas palavras dos autores – que permitiam a construção e o teste de conjecturas.

Uma investigação matemática se desenvolve usualmente em volta de um ou mais problemas. O primeiro passo de uma investigação é determinar claramente qual o problema que se pretende resolver. Por essa razão as investigações matemáticas, assim como a resolução de problemas, têm uma relação próxima (Ponte *et al.*, 2019). Ambas têm espaço no processo de ensino da matemática, contudo, existem claras distinções entre elas apontadas por Brocardo (2001) e Ponte (2010).

Ponte (2010) apresenta tipos de tarefas matemáticas estruturadas em quatro dimensões: a complexidade, a estrutura, o contexto e o tempo para a solução da tarefa. A conjugação das duas primeiras dimensões aponta 4 possibilidades de tarefas: as tarefas de estrutura fechada que são os exercícios e os problemas, que se distinguem, segundo a complexidade, sendo a segunda de maior dificuldade; e, as tarefas de natureza aberta que são as tarefas de investigação e de exploração, sendo a primeira delas considerada a de maior complexidade.

A estruturação de uma tarefa de investigação deve ser equacionada levando em consideração as habilidades que os estudantes já possuem, assim como a sua expertise com as atividades investigativas.

> Uma tarefa mais estruturada, pode ser mais adequada para alunos que começam a ter as suas primeiras experiências de investigação, sem que isso signifique uma menor qualidade da tarefa como proposta de actividade de investigação. De facto, uma tarefa mais estruturada, pode originar explorações e discussões extremamente interessantes. Por outro lado, uma proposta muito aberta, pode parecer de tal forma vaga aos alunos que estes não se sintam desafiados a começar qualquer exploração (Porfirio e Oliveira, 1999 *apud* Brocardo, 2001, p. 2001).

Brocardo (2001) aponta os problemas, um reconhecido elemento fundamental da matemática, como uma forma de caracterizar as tarefas de investigação por meio da comparação. As tarefas investigativas estão mais voltadas aos processos desenvolvidos na busca da solução de um problema do que a solução em si. A própria ideia do que é o problema a ser solucionado em uma atividade de investigação é borrada, já que o enunciado, o ponto de partida, não deixa claro o que deve ser executado. A este respeito Brocardo (2001, p. 94) diz "[...] numa abordagem pedagógica de investigação, o professor pode escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno, mas é a este que cabe a formulação de questões, definindo assim os seus próprios problemas dentro da situação proposta.". As atividades de investigação podem ainda ser caracterizadas em função do objetivo da situação e da situação de partida. Com relação a esses aspectos uma tarefa de investigação é desenvolvida a partir de atividades com objetivos abertos e com situação de partida fechada (Perhkonon, 1997 *apud* Brocardo, 2001).

A possibilidade de inserir na sala de aula da Educação Básica uma metodologia de ensino que transpõe aspectos do trabalho do matemático profissional para o trabalho do estudante requer reflexões acerca dos procedimentos, das implicações para professores e estudantes, dos recursos cognitivos e, por assim dizer, das atitudes dos personagens envolvidos nesse processo. Alguns desses temas são discutidos por Ponte *et al.* (2019), que faz em sua obra *Investigações matemáticas em Sala de Aula* uma abrangente reflexão sobre essas atividades. Ponte *et. al* (2019) considera que uma tarefa de investigação em sala de aula da Educação Básica usualmente se divide em três momentos: a introdução da tarefa, a realização da investigação e a discussão dos resultados.

A *introdução da tarefa* é uma etapa crítica e dela dependem todas as demais fases, ela desempenha um papel mais relevante caso os estudantes não estejam habituados a desenvolver tarefas de investigação. Este é o momento em que o professor apresenta a atividade de modo mais estimulante possível, além disso, ainda no início da atividade, o professor deve garantir que os estudantes compreendam o papel que eles próprios têm: são os formuladores dos problemas, dos objetivos e eles mesmos devem escolher as ferramentas que pretendem usar nesse processo; os estudantes devem ter ciência de que serão eles os protagonistas do processo.

Contudo, nesta etapa e nas demais, a liberdade dos estudantes no desenvolvimento das atividades não significa que o professor não pode fazer intervenções, mas, sim, que as intervenções devem seguir outras diretrizes como convidar o estudante a repensar algo, a analisar eventualmente a exclusão de algum fato, ou ainda sugerir atenção a algum aspecto do problema em investigação. O professor pode intervir diante de um impasse, para indicar possibilidades de enriquecer a investigação. Em especial, quando se trata de uma investigação suficientemente rica com estudantes que sejam iniciantes nessas atividades "[...] não existe o perigo de que o professor limite a possibilidade de os alunos estabelecerem as suas próprias conjecturas, se der algumas pistas de exploração ou pedir a eles algumas sugestões" (Ponte *et al.*, 2019, p.28). Essa conduta contribui para o andamento da própria atividade.

Outros elementos devem ser observados nesta etapa: aspectos que dizem respeito à comunicação da tarefa de investigação como a interpretação da situação que por si é um objetivo e não pode ser deixado em segundo plano; e, a importância da ciência do estudante do produto que será derivado dessa atividade: uma comunicação para os demais acerca das suas conjecturas assim como a eventual defesa da sua validade. É importante destacar que é este momento de socialização que "[...] confere ao seu trabalho um carácter público [...]" (Ponte *et al.*, 2019, p. 28), uma importante etapa que aproxima o trabalho do estudante com a do matemático em sua comunidade.

A etapa seguinte, a *realização da investigação*, é quando ocorre efetivamente o desenvolvimento das atividades. Neste momento os estudantes já foram apresentados à tarefa e começam a exploração inicial do problema, um momento decisivo da tarefa de investigação que pode parecer pouco produtivo ou ainda que os estudantes estejam com dificuldades. É quando o estudante amplia a compreensão da situação e vai se "[...] embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente no sentido da tarefa" (Ponte *et al.*, 2019, p. 30). As conjecturas começam a ser formadas e surgem de diversas maneiras, observação direta, analogia ou manipulação dos dados. Contudo, a formulação de uma conjectura não necessariamente implica que esta será comunicada, algumas delas podem nem mesmo ser verbalizadas por falta de recursos retóricos para explicar a sua formulação, outras, contudo, são expressas de modo verbal e com complementos gestuais.

Junto a construção das conjecturas segue o natural processo de verificação. Uma forma recorrente de verificação usada, inclusive com facilidade, pelos estudantes, é o teste. O desafio é como lidar com o convencimento que surge após a verificação empírica, inclusive, com um número pequeno de casos. "Essa forma de encarar o teste de conjecturas pode ser combatida pelo professor, quer no apoio que concede aos grupos, quer na fase de discussão em que os alunos podem ser estimulados a procurar contraexemplos" (Ponte *et al.*, 2019, p. 33). O registro escrito dessas atividades constitui um elemento complicador dado a pouca familiaridade com os tipos de representação dos objetos, contudo, deve ser estimulada dado que a "[...] escrita dos resultados ajuda aos alunos a clarificarem as suas ideias, nomeadamente a explicitar as suas conjecturas, e favorece o estabelecimento de consensos e de um entendimento comum quanto às suas realizações" (Ponte *et al.*, 2019, p. 35).

A justificativa dessas conjecturas tende a ser relegada a segundo plano. É necessário que o professor estimule o estudante a compreender o caráter provisório das conjecturas obtidas na investigação por meio de contraexemplos ou ainda na construção da percepção de que a manutenção da conjectura após sucessivos testes não é confirmada em razão das tentativas verificadas (Ponte *et al.*, 2019).

> A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificativa aceitável, que se baseie em um raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida em que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas (Ponte *et al.*, 2019, p. 37).

O processo de justificar a validade de uma conjectura não é usual, por essa razão é comum que os estudantes não compreendam o que está sendo solicitado pelo professor e entendam tal solicitação como uma exigência desnecessária, como destaca Brocardo (2001). Contudo, Brocardo (2001) ainda sinaliza que os estudantes podem perceber o que significa justificar uma conjectura, em sua pesquisa os estudantes se colocavam em processo de buscar uma justificativa quando era "[...] explicitamente pedido pela professora ou pelo enunciado da tarefa" (Ponte *et al.*, 2019, p. 544).

Por fim, na última etapa, a *discussão dos resultados*, o ponto central é a comunicação dos resultados obtidos pelos estudantes em seus processos investigativos. Segundo Ponte *et al.* (2019), são elementos indispensáveis desta etapa: o aprofundamento da conjectura e a conclusão por justa maioria. O aprofundamento da conjectura acontece a partir da sua submissão à crítica dos demais grupos ou indivíduos que participam da investigação. Eles podem contribuir identificando eventuais erros e trazendo novas conjecturas e informações que não tenham sido inicialmente notadas, compreendidas ou ainda justificadas. A conclusão por justa maioria, por sua vez, se dá em razão das limitações de ferramentas que permitam ao estudante justificar, isto é, os estudantes são convencidos da validade da conjectura, mas não percebem a necessidade de justificar e não o fazem. O aceite da conjectura como verdadeira sem um processo mais elaborado de validação é a dita conclusão por justa maioria (Ponte *et al.*,2019).

A etapa de discussão dos resultados é momento propício para que o professor estimule os estudantes a apresentarem as suas produções sobre a investigação argumentando acerca das suas conjecturas. Esta é uma oportunidade para que os estudantes exercitem a sua capacidade de argumentar e produzir provas em matemática. Nesta etapa, naturalmente, as dúvidas acerca das afirmações estabelecidas constituem um momento rico no qual os estudantes poderão vivenciar um momento de validação social do que está sendo comunicado ao defender a validade dos fatos afirmados. Por outro lado, podem ser postos em uma situação em que a conjectura pode ser refinada ou totalmente refutada. O professor, nessa circunstância, deve estimular a partilha de informações, o questionamento entre os estudantes e atuar inquirindo para direcionar algum tipo de análise (Ponte *et al.*, 2019).

A construção de um ambiente que favoreça à investigação não é trivial, Skovsmose (2000) sublinha a noção de convite a uma situação de investigação e entende que uma situação só pode ser entendida como um cenário para investigação se os estudantes aceitarem o convite. Aceitar o convite, neste contexto, significa se engajar no processo formulando questões e procurando explicações para os fatos observados.

> O convite é simbolizado pelo 'O que acontece se ... T' do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se ... T". Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O 'Por que isto ...?' do professor representa um desafio e os 'Sim, por que isto ... T' dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e que estão procurando explicações (Skovsmose , 2000, p. 06).

Skovsmose (2000) caracteriza três possíveis cenários para investigação: os ambientes de realidade, que são aportados por uma situação real; os ambientes de semirrealidade, que são as atividades que simulam situações do cotidiano, com dados que são irreais; e as situações de investigação em ambiente de matemática pura, aquelas em que não existe uma aplicação, imediata, fora da matemática. Todos esses cenários são possíveis de serem aplicados em sala de aula. O autor, e nós também, não defende um ou outro ambiente, nem mesmo entre aqueles que estão ancorados no paradigma do exercício: "Sustento que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes [...]. Particularmente, não considero a ideia de abandonar por completo os exercícios da educação matemática (Skovsmose , 2000, p. 14). Desse modo, a efetividade da aplicação de uma tarefa de investigação está ligada a como o problema será apresentado aos estudantes e a forma como eles vão se engajar na investigação.

O uso das tarefas de investigação se mostram como uma alternativa desafiadora à prática docente uma vez que rompe paradigmas e lança o professor e estudantes a uma terra até então, por eles, pouco, ou até mesmo, inexplorada. Embora mais complexas, como sublinhou Ponte (2010), essas tarefas trazem a possibilidade de aproximar o trabalho dos estudantes em sala de aula ao trabalho do matemático profissional expondo, assim, a face investigativa da ciência que, por sua vez, se transforma em uma importante ferramenta didática para o ensino de matemática, pois que além de ensinar sobre os objetos e relações próprias da matemática, permite a construção de uma nova concepção dessa ciência que revela e cria espaços para a necessidade da prática de argumentos, provas e demonstrações.

Capítulo 4

Fundamentos Matemáticos: as desigualdades no triângulo

Neste capítulo apresentamos definições e resultados relativos às desigualdades no triângulo. Nele, o leitor encontrará as demonstrações dos problemas apresentados no Produto Educacional e as principais proposições e definições que dão suporte a estes resultados. Para a construção desse capítulo, usamos como referências Neto (2013), Barbosa (2012), Lima (2011) e Dolce e Pompeo (2019). Iniciamos apresentando alguns resultados sobre desigualdades e congruência de triângulos antes de apresentar os resultados relativos às desigualdades no triângulo.

4.1 Desigualdades

Dados dois números reais a e b dizemos que $a < b$ se existir $c \in \mathbb{R}^*$ tal que $a + c = b$. Do mesmo modo $a > b \iff \exists d \in \mathbb{R}^*$ tal que $a = b + d$. Dessa definição podemos verificar a decorrência de algumas propriedades, dentre elas as presentes na proposição abaixo.

Proposição 1
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, então valem:

(i) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ (Transitividade);

(ii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então ocorre exatamente uma das das três opções: $a < b$, $a > b$ ou $a = b$ (Tricotomia);

(iii) Se $a < b$, então $a + c < b + c$ (Monotonicidade da adição).

Demonstração

(i) Suponha que $a < b$, então $\exists p \in \mathbb{R}$ para o qual $a + p = b$. Por outro lado, como $b < c$, então $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $b + t = c$. Substituindo a última igualdade na primeira, temos: $(a + p) + t = c$. Como $p + t \in \mathbb{R}$, temos $a < c$. Isto prova a transitividade.

(ii) A demonstração desse fato requer elementos que são distantes do escopo do nosso trabalho, sugerimos a leitura de Lima (2011) capítulo 3 ao leitor interessando.

(iii) Se $a < b$ então, $\exists p \in \mathbb{R}$ tal que $a + p = b$. Somando um número real c a ambos membro da igualdade, temos: $a + p + c = b + c$ e, portanto, pela definição de desigualdade, $a + c < b + c$.

4.2 Congruência de Triângulos

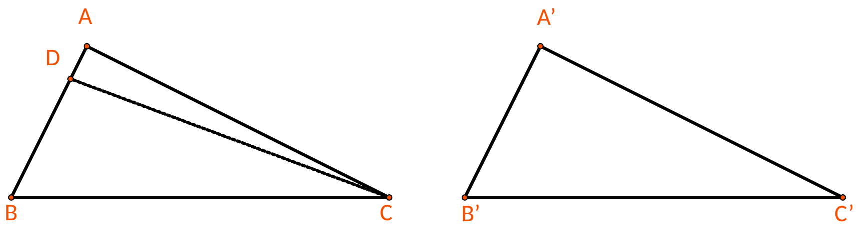
Diremos que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os lados e ângulos correspondentes tenham as mesmas medidas. Denotaremos essa relação do seguinte modo $ABC \equiv A'B'C'$. Note que tal relação é simétrica, reflexiva e transitiva.

Uma vez definida a relação de congruência, é de nosso interesse obter critérios que nos auxiliem a determinar quando dois triângulos são ou não congruentes sem precisar recorrer a definição. O axioma a e o teorema a seguir nos apresentam dois critérios que nos auxiliam nesse aspecto.

Axioma 1 (Caso LAL)
Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ se tivermos $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $C\hat{A}B = C'\hat{A}'C$, então $ABC \equiv A'B'C'$.

Teorema 2 (Caso ALA)
Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$ e $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$, então $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura 4 – Caso de congruência ALA



Fonte: do autor.

Demonstração Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$ e $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$. Sobre a semirreta de origem em B e que passa por A tome um ponto D tal que o segmento $\overline{BD} = \overline{B'A'}$ (caso tenhamos $\overline{BA} < \overline{B'A'}$, basta tomar um ponto D' na semirreta de origem em B' e que passa por A' e seguir com o mesmo argumento). Note que pelo axioma 1 o triângulo $DBC \equiv A'B'C'$, pois $\overline{BD} = \overline{B'A'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $D\hat{B}C = B'\hat{C}'A'$. Este fato implica que os ângulos $B\hat{C}D$ e $B'\hat{C}'A'$ têm a mesma medida e como, por hipótese, $B\hat{C}A = B'\hat{C}'A'$, então $B\hat{C}D = B\hat{C}A$. Daí, o ponto D coincide com o ponto A e, portanto, os triângulos ABC e DBC coincidem. Logo, como $DBC \equiv A'B'C'$, segue, pela transitividade da relação de congruência, que $ABC \equiv A'B'C'$.

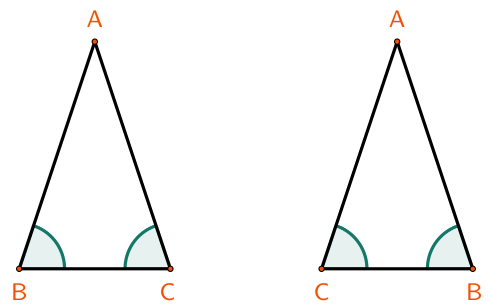
Existem outros casos de congruência de triângulos, como o caso, LLL, que afirma que dois triângulos são congruentes se três lados de um são, em alguma ordem, congruentes aos lados dos outro. Essa condição pode ser imposta como um axioma, como notamos em Neto (2013), ou obtida como um teorema a partir dos resultados que enunciamos e demonstramos acima. O leitor interessado neste último caso recomendamos consulta a Barbosa (2012) ou Dolce e Pompeo (2019). De qualquer modo esta afirmação não será necessária para a estruturação lógica das demonstrações dos problemas apresentados no nosso RE, por isso não aprofundaremos a discussão.

O axioma 1 e o teorema 4, que acabamos de ver, nos ajudam a obter informações acerca de triângulos isósceles, aqueles que têm dois lados de mesma medida. Veja os resultados que seguem.

Proposição 3

Em um triângulo isósceles, as medidas dos ângulos da base são iguais.

Figura 5 – Triângulos Isósceles



Fonte: do autor.

Demonstração Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Podemos analisar a congruência desse triângulo com ele mesmo fazendo os seus vértices se corresponderem do seguinte modo: A correspondendo a A, B correspondendo a C e C correspondendo a B. Por hipótese temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $B\hat{A}C = C\hat{A}B$, pelo axioma 1, segue $BAC \equiv CAB$. Logo, os ângulos correspondentes têm a mesma medida e, portanto, $A\hat{B}C = A\hat{C}B$.

A recíproca do resultado demonstrado acima também é verdadeira como veremos no que se segue.

Proposição 4

Se um triângulo tem os ângulos da base com a mesma medida, então esse triângulo tem dois lados de mesma medida.

Demonstração Seja ABC um triângulo para o qual os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ têm a mesma medida. Vamos fazer corresponder os ângulos do seguinte modo: A corresponde a A, B corresponde a C e C corresponde a B. Note que o lado $\overline{BC} = \overline{CB}$. Pelo teorema 4 segue que os triângulos BAC e CAB são equivalentes. Logo, os seus lados correspondentes têm a mesma medida e, portanto, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Proposição 5
Em um triângulo, se dois de seus lados não são congruentes, então seus ângulos opostos também não são.

Demonstração Seja ABC um triângulo para o qual os lados AB e AC têm medidas diferentes. Suponha, por absurdo, que $A\hat{C}B = A\hat{B}C$. Desse modo, pela proposição 4, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$, um absurdo. Logo, ângulos opostos a lados de medidas diferentes têm medidas diferentes.

Na próxima seção vamos refinar esse resultado e ver, mais precisamente, que ao maior desses lados se opõe o maior desses ângulos. O mesmo será feito com o resultado abaixo concluindo, contudo, que ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

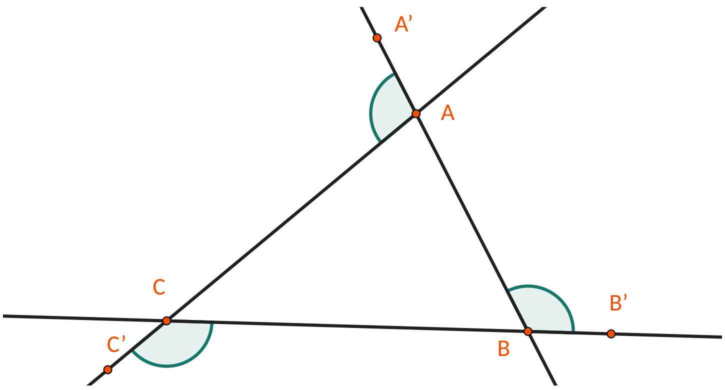
Proposição 6
Em um triângulo, se dois de seus ângulos não têm a mesma medida, então seus lados opostos também não têm a mesma medida.

Demonstração Seja ABC um triângulo para o qual os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ têm medidas distintas. Suponha que os lados opostos a estes ângulos sejam congruentes. Pela proposição 4 os ângulos opostos a estes lados devem ter a mesma medida. Um absurdo, pois a nossa hipótese nos diz o oposto. Logo, os lados opostos a estes ângulos têm medidas distintas.

4.3 Teorema do Ângulo Externo

Um importante elemento de um triângulo são os seus ângulos externos. Podemos definí-los do seguinte modo: dado um triângulo ABC, os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}D$ são os seus ângulos internos; os ângulos externos são aqueles cuja medida suplementa a medida dos ângulos internos.

Figura 6 – Definição de ângulo externo

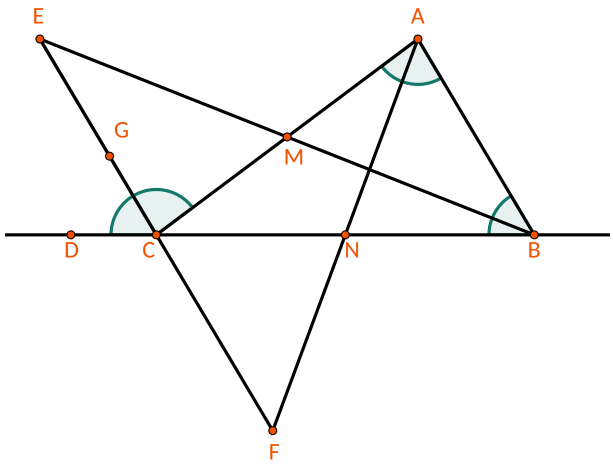


Fonte: do autor.

A Figura 06 ilustra os ângulos externos de um triângulo. Neste exemplo, eles são: $B'BA$, $A'AB$ e $C'CB$. Na sequência, apresentamos os resultados que foram transformados em problemas de natureza investigativa no nosso RE, o teorema 7, a proposição 8 e o teorema 10.

Teorema 7 (Teorema do ângulo externo de um triângulo)
O ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer ângulo interno que não seja adjacente a ele.

Figura 7 – Teorema do ângulo externo



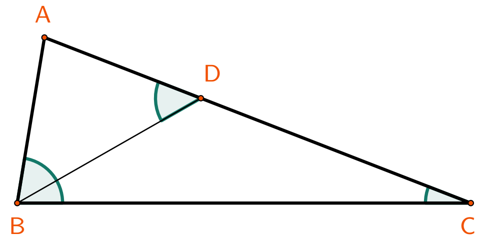
Fonte: do autor.

Demonstração Seja ABC um triângulo. Sobre a reta que contém os pontos C e B tome um ponto D de modo que C esteja entre B e D. Vamos mostrar que o ângulo $A\hat{C}D > B\hat{A}C$ e que $A\hat{C}D > A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio do segmento AC. Trace a semirreta de origem em B e que passa por M. Sobre esta semirreta, tome um ponto E tal que $\overline{BM} = \overline{ME}$. Observe que, agora, temos os triângulos MEC e ABM. Esses triângulos são congruentes, pois: $\overline{BM} = \overline{ME}$, $C\hat{M}E = A\hat{M}B$ e $\overline{CM} = \overline{MA}$ (caso LAL). Desse fato decorre que $A\hat{C}D = D\hat{C}M > E\hat{C}M = M\hat{A}B$ e, portanto, $A\hat{C}D > B\hat{A}C$. Isso mostra a primeira desigualdade. Agora, trace o ponto médio do lado CB, o ponto N, e trace a semirreta de origem em A e que passa por N. Nesta semirreta, tome o ponto F de modo que $\overline{AN} = \overline{NF}$. Note que os triângulos BFN e ABN são congruentes pelo caso LAL já que: $\overline{CN} = \overline{NB}$, $A\hat{N}B = B\hat{N}F$ e $\overline{AN} = \overline{NF}$. Deste fato decorre que $B\hat{C}F = A\hat{B}C$. Trace a semirreta de origem em F e que passa por C e, nela, tome um ponto G tal que o ponto C esteja entre G e F. Note que o ângulo $D\hat{C}A > D\hat{C}G = F\hat{B}N = A\hat{B}C$. Segue que $A\hat{C}D > A\hat{B}C$. De modo análogo, mostramos que o resultado também vale para os outros dois ângulos externos do triângulo ABC.

Proposição 8
Em um triângulo que possui dois lados de medidas distintas, os ângulos opostos a esses lados possuem medidas distintas e ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Demonstração Note que a proposição acima contém duas afirmações, a primeira delas é demonstrada na proposição 3. No mais, seja ABC um triângulo para o qual dois lados têm medidas distintas, sejam AB e AC tais lados. Suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} < \overline{AC}$. Tome sobre o segmento AC um ponto D tal que $\overline{AB} = \overline{AD}$. Perceba que o triângulo ABD é isósceles de base BD e, portanto,

Figura 8 – Ao maior lado opõe-se o maior ângulo



Fonte: do autor.

$A\hat{B}D = A\hat{D}B$. Agora, note que o ângulo $A\hat{D}B > A\hat{C}B$, pois $A\hat{D}B$ é ângulo externo ao triângulo BCD. Por outro lado, $A\hat{D}B = A\hat{B}D < A\hat{B}C$, pois D está entre A e C. Desse modo, $A\hat{B}C > A\hat{D}B > A\hat{C}B$. Logo, $A\hat{B}C > A\hat{C}B$, ao maior lado, AC, se opõe o maior ângulo, $A\hat{B}C$.

Analogamente, podemos enunciar um resultado que nos permite ter informações a respeito das medidas dos lados a partir das medidas dos ângulos opostos a estes.

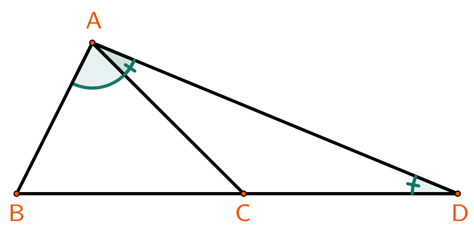
Proposição 9
Se um triângulo tem dois ângulos de medidas distintas, então o lado que se opõe a esses ângulos tem medidas distintas e ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

Demonstração Perceba que a primeira afirmação dessa proposição já foi demonstrada na proposição 4 na seção anterior. Agora, vamos supor que em um triângulo ABC, $A\hat{B}C > A\hat{C}B$. Estamos interessados em analisar as possibilidades para as relações entre as medidas dos segmentos AB e AC, que, pela tricotomia, proposição 1, ocorre exatamente uma das seguintes possibilidades: $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\overline{AB} < \overline{AC}$. Se ocorrer $\overline{AB} = \overline{BC}$ teríamos, pela proposição 3, os ângulos da base com a mesma medida. Absurdo, pois nossa hipótese expressa o oposto. Por outro lado, se $\overline{AB} > \overline{AC}$, pela proposição anterior, devemos ter $A\hat{C}B > A\hat{B}C$, o que também contraria a nossa hipótese. Logo, $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Por fim, esses resultados nos permitem enunciar e demonstrar a já conhecida desigualdade triangular.

Teorema 10
Em qualquer triângulo, a soma das medidas de dois de seus lados é maior que a medida do outro.

Figura 9 – Desigualdade Triangular



Fonte: do autor.

Demonstração Seja ABC um triângulo. Sobre a semirreta de origem em B e que contém C tome um ponto D tal que $\overline{CD} = \overline{AC}$ conforme ilustrado na Figura 09. Trace o triângulo ACD e note que ele é isósceles de base AD e, portanto, pela proposição 3, $C\hat{D}A = C\hat{A}D$. Agora, note que $B\hat{A}D > C\hat{A}D = C\hat{D}A$, pois C é um ponto do segmento BD. Desse modo, como $B\hat{A}D > C\hat{D}A$, então, pela proposição 8, $\overline{AB} < \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AC}$. Analogamente demonstramos $\overline{AC} < \overline{BC} + \overline{AC}$ e $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. Logo, a soma das medidas de quaisquer dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado.

Capítulo 5

Metodologia

Neste capítulo caracterizamos a pesquisa, o grupo com o qual foi aplicada e apresentamos alguns elementos do nosso Produto Educacional, uma sequência didática.

5.1 Caracterização da Pesquisa

Na Educação Básica é lugar comum a crítica ao que chamam de distanciamento entre a teoria e a prática, relatam que as discussões a nível acadêmico são demasiadamente teóricas e não apresentam soluções para os problemas enfrentados no "chão da sala de aula". Pelo menos parte dessa percepção é notada por Barbosa e Oliveira (2015) ao apontar a chamada pesquisa de desenvolvimento como uma resposta à crítica, também de origem internacional, "[...] de que a pesquisa educacional tem tido pouca relevância para enfrentar os problemas educacionais"(p. 527).

A pesquisa de desenvolvimento tem a característica de aproximar os saberes profissionais dos saberes acadêmicos ao propor soluções e interpretações a problemas observados em campo por meio de intervenções com soluções que podem ser usadas ou adaptadas por outros pesquisadores ou profissionais da área de pesquisa/desenvolvimento para fins semelhantes. Tal tipo de pesquisa tem como elemento central a interação entre o desenvolvimento de produtos e a teoria, de tal modo que ambos se alimentem reciprocamente (Barbosa; Oliveira, 2015).

> De maneira geral, podemos dizer que uma pesquisa de desenvolvimento refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões (Barbosa; Oliveira, 2015, p. 527).

Embora não seja um elemento exclusivo da pesquisa de desenvolvimento, o Produto Educacional é um importante eixo organizador do trabalho, uma vez que ele é, em si, um dos objetivos desse tipo de pesquisa. O desenvolvimento do PE é, a *priori*, produzido a partir de um entendimento teórico e passa por sucessivos processos de testagem e aprimoramentos que, por sua vez, produzem novos entendimentos teóricos que motivam novas adequações ao PE. O período de duração desse ciclo está ligado à saturação do processo e às demandas pragmáticas de uma pesquisa como o tempo.

Ao final do processo de uma pesquisa de desenvolvimento, temos como resultado um Produto Educacional e um entendimento teórico acerca do problema observado (Barbosa; Oliveira, 2015).

Gil (2017) lista um tipo de pesquisa com características semelhantes e nomeia como pesquisa de desenvolvimento experimental, que é por ele descrita, como um

> Trabalho sistemático, que utiliza conhecimentos derivados da pesquisa ou experiência prática com vistas à produção de novos materiais, equipamentos, políticas e comportamentos, ou à instalação ou melhoria de novos sistemas e serviços (p. 33).

As características citadas guardam estreita relação com nosso trabalho de pesquisa que tem como um dos seus objetivos a construção de um PE. A primeira versão desse PE surge a partir das possibilidades de mitigação do problema identificadas durante a construção do quadro teórico. A aplicação desse recurso, por sua vez, permitiu uma avaliação de suas potencialidades em atingir os seus objetivos, sinalizando ajustes para promover maior eficácia, assim como a produção de conhecimentos a respeito do objeto de pesquisa. O produto desenvolvido será disponibilizado por meio do portal eduCAPES permitindo assim o acesso a profissionais e pesquisadores para uso e readequações. Desse modo, consideremos este trabalho, do ponto de vista da natureza, como uma pesquisa de desenvolvimento.

Por outro lado, uma análise do problema proposto, o qual introduz a questão norteadora da pesquisa com a expressão "de que modo [...]", sugere uma pesquisa de abordagem qualitativa, uma vez que elementos que contribuam para uma resposta a essa questão devem ser de cunho descritivo, intrinsecamente ligados ao quadro teórico escolhido pelo pesquisador a partir de sua própria, e subjetiva, cosmovisão de mundo. Além de como a pergunta é colocada, devemos atentar, como destacam Borba (2004), para os procedimentos mobilizados com a finalidade de respondê-la, em nosso caso, diário de campo, observação direta, gravação de áudio e material escrito pelos estudantes no desenvolvimento da sequência didática. O uso desses diversos recursos, característicos de pesquisas qualitativas, nos permitiu confrontar os dados coletados por intermédio de recursos distintos, o processo de triangulação, que ampliou a confiabilidade dos dados obtidos e, sobretudo, a sua interpretação (Borba; Araújo, 2023).

5.2 Uma Breve Descrição dos Sujeitos da Pesquisa

O produto educacional desenvolvido foi aplicado com um grupo de 5 estudantes do Colégio Estadual de Tempo Integral Antônio da Costa Brito (CETIACB), situado na cidade de Acajutiba-BA. Foram escolhidos estudantes que participam do programa de monitoria de ensino Mais Estudo, um programa do Governo do Estado da Bahia que seleciona estudantes com bom desempenho para atuarem em um programa de reforço escolar com os colegas que apresentam baixo rendimento. Esses 5 estudantes são monitores de matemática e o autor deste trabalho é o professor supervisor do grupo de matemática na unidade escolar.

Os estudantes que aceitaram participar da pesquisa apresentam bom desempenho escolar e têm participação ativa em atividades extraclasse, como olimpíadas de matemática e astronomia e atividades de cunho artístico e cultural. Um dos estudantes participantes estava no 3° ano e os demais no 2° ano do Ensino Médio regular e tinham idades entre 16 e 18 anos.

5.3 A Sequência Didática

O nosso Produto Educacional, uma sequência didática[1], é composta por três tarefas investigativas que foram aplicadas, pelo autor deste trabalho, em três sessões com intervalos de uma semana entre a primeira e a segunda e de duas semanas entre a segunda e a última. A sequência foi organizada de tal modo que os resultados fundamentais para a construção de uma prova dos resultados a partir da tarefa 02 foram discutidos nas tarefas anteriores. Desse modo, os resultados fundamentais para a construção de uma prova para a desigualdade triangular (tarefa 03) foram discutidos nas tarefas 01 e 02. Elas versam sobre conhecidos resultados da geometria euclidiana plana, como vemos a seguir:

- Tarefa 01 - O teorema do ângulo externo que afirma que o ângulo externo de um triângulo tem medida superior a medida de qualquer ângulo interno não adjacente (teorema 7 do capítulo anterior);
- Tarefa 02 - Em um triângulo, o lado de maior medida se opõe ao ângulo de maior medida, além disso, se dois lados tem a mesma medida, então os ângulos opostos também tem (proposições 8 e 9 do capítulo anterior);
- Tarefa 03 - A desigualdade triangular: em um triângulo a soma das medidas de dois de seus lados é sempre maior que a medida do terceiro lado (teorema 10 do capítulo anterior).

Esses resultados foram adaptados para tarefas investigativas dentro de um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, em tarefas do tipo caixa preta, aquelas em que não é possível realizar novas construções dentro do *applet* disponibilizado, é possível apenas manipular os objetos que foram previamente construídos. Cada uma delas contém uma estrutura para nortear a investigação em forma de dicas e perguntas sobre elementos, como a medida de ângulos e lados, da figura em análise. Os estudantes têm acesso a essas dicas a qualquer momento, podendo optar por usá-las ou não em seus processos de exploração.

As produções realizadas pelos estudantes durante o processo de aplicação da sequência didática foram registradas, como já sinalizamos, pelo diário de campo do pesquisador, gravação de áudio, material escrito pelos estudantes e *printscreens* . Os resultados obtidos são apresentados no capítulo a seguir.

[1] Sequência didática disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jtqqnfpc>

Capítulo 6

Discussão dos Resultados

Neste capítulo apresentamos os dados obtidos na nossa pesquisa ao passo que os interpretamos à luz do nosso quadro teórico. Analisaremos cada uma das sessões de aplicação das tarefas investigativas com ênfase em duas ações desempenhadas pelos estudantes: a construção das conjecturas e a produção de provas. Usamos como fio condutor para essa análise as fases das tarefas de investigação descritas por Ponte *et al.* (2019): introdução da tarefa, realização da investigação e a discussão dos resultados.

6.1 Tarefa 01 - Teorema do Ângulo Externo

A primeira sessão de aplicação das tarefas foi realizada com um conjunto de 3 estudantes que não foram organizados em grupos como previsto no planejamento em razão da quantidade inferior ao esperado. Cada um deles teve à disposição um *tablet* com o qual teve acesso à tarefa investigativa[1] . Além disso, uma TV conectada a um computador passou a ser utilizada como uma forma de fomentar a discussão em grupo, dado que os estudantes fizeram a investigação inicialmente sozinhos.

Antes da apresentação da tarefa de investigação foi realizada uma curta exposição do professor acerca de algumas definições e resultados básicos sobre desigualdades e congruência de triângulos. Os resultados e definições abordados estão presentes nas seções 3.1 e 3.2 deste trabalho. Contudo, destacamos que os formalismos presentes na construção dessas seções não foram reverberados na exposição para os estudantes durante a intervenção. A aula introdutória seguiu o padrão aula expositiva-dialogada com apresentação de definições e exemplos.

Como vimos no quadro teórico, Balacheff (2022a) aponta a linguagem como um dos elementos que constituem um obstáculo à construção de provas intelectuais e Mello (1999), em convergência com essa percepção, sublinha as especificidades da rede semântica da matemática como um dos obstáculos à construção da prova. Por esta razão, o primeiro momento da sessão de aplicação teve o objetivo de ampliar o repertório de objetos e resultados dos estudantes com a apresentação de objetos e resultados que eventualmente pudessem auxiliá-los na produção de provas. Nossa

[1] Tarefa disponível em: <https://www.geogebra.org/m/fynpvsnj>

experiência mostrava que, embora eles tivessem familiaridade com objetos e técnicas relativas à geometria plana, por vezes desconheciam ou não lembravam definições e resultados como, por exemplo, os casos de congruência de triângulos que são elementos fundamentais para a construção de argumentos formais que validem alguns dos resultados que adaptamos para as nossas tarefas investigativas. Essa aula introdutória também contribuiu para posicionar os estudantes com relação aos objetos que seriam investigados, as desigualdades e os triângulos.

Percebemos que neste primeiro momento os estudantes atentos e, às vezes, demonstrando surpresa com a forma de definir os objetos, como é o caso da definição de desigualdade, que eles consideraram estranha e caracterizaram como "coisas de Pitágoras". Contudo, os objetos de conhecimento apresentados não foram estranhos a eles. Relataram já ter estudado em algum momento, embora não se recordassem, por exemplo, de todos os casos de congruência de um triângulo.

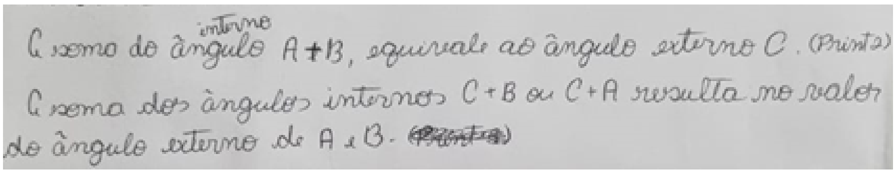
Encerrada a exposição inicial, iniciamos a aplicação da tarefa de investigação. Na introdução da tarefa, conforme Ponte *et al.* (2019) sugere, os estudantes devem ser apresentados e motivados a desenvolver a tarefa. Ao propor a tarefa, explicitamos a natureza distinta das tarefas que eles empreendem costumeiramente na unidade escolar e destacamos a eventual dificuldade em razão dessa mudança. Ao contrário do que adverte Ponte *et al.* (2019) quanto à forma motivadora de apresentar a tarefa aos estudantes, optamos por apresentar a tarefa lendo-a e orientando os primeiros passos dos estudantes no uso do *applet*. Contudo, destacamos que a escolha dessa opção se deu em razão do perfil desse grupo de estudantes que sempre demonstram ser curiosos com problemas de matemática. Essa foi, inclusive, uma das razões da escolha desse grupo e o fizemos motivados pelas considerações de Balacheff (2022a) ao destacar o engajamento do estudante como um elemento fundamental no processo de produção da prova. O estudante precisa tomar a necessidade de apresentar uma solução para o problema para si e não o deixar como uma prerrogativa do professor ou ainda dos colegas.

Ainda no escopo da introdução da tarefa, explicamos que o produto esperado ao final da sessão era uma exposição oral ou registro escrito sobre as conclusões obtidas nas suas respectivas investigações, assim como a justificação do por quê as observações são verdadeiras ou não. Objetivamos com isso usar uma das funções da prova, como salienta De Villiers (2001), a de explicação, como um elemento motivador para a sua construção. Também conversamos sobre a postura que era esperada deles, proativa, e a postura do professor, que durante toda a sessão iria lançar perguntas e evitar respostas. Como esperado, os estudantes não se mostraram intimidados com a necessidade de uma postura mais ativa, pelo contrário, demonstravam empolgação com o fato de participar de uma pesquisa e ainda mais que a mesma estava sendo desenvolvida em ambiente informatizado. Logo ao iniciar a manipulação do *applet* os estudantes vocalizaram "bacana"e "legal"se referindo à tarefa.

Rapidamente os estudantes começaram a manipular o *applet* e não demonstraram dificuldades em operar o dispositivo, mas relataram dúvidas sobre o que fazer. Conversavam entre si e faziam piadas sobre não saberem exatamente o que a tarefa estava requisitando deles. Entre uma conversa e outra, às vezes alheias ao tema, os estudantes a exploravam e criavam as primeiras conjecturas a cerca da situação em tela. Um deles afirmava que o triângulo da tarefa presente no *applet* jamais poderia ser equilátero. A esta formulação seguiu a tentativa dos estudantes de construir um triângulo equilátero e a refutação com a construção e exibição de um triângulo com todos os lados com mesma medida. Eram explorações iniciais que, como pondera Ponte *et al.* (2019), faziam parte da compreensão da tarefa. Foi um momento em que eles ainda tentavam entender o que deveria ser feito, traçar eles próprios os objetivos e os métodos a serem utilizados.

As dicas presentes nas tarefas foram fundamentais para o desenvolvimento das atividades. Elas são, na prática, uma opção do professor por tarefas investigativas mais estruturadas, tendo em vista que os estudantes não estão habituados com o desenvolvimento de atividades dessa natureza. Este tipo de tarefa investigativa auxilia no desenvolvimento das atividades (Brocardo, 2001). Inicialmente, para os estudantes, elas foram um comando, deram uma orientação sobre o que fazer. Ao ler a primeira dica, os estudantes discutiram e começaram a escrever e vocalizar fatos que conheciam sobre triângulos, como verificamos na Figura 10.

Figura 10 – Listagem de propriedades feita pelo estudante B



A soma do ângulo interno A+B, equivale ao ângulo externo C. (Print)
A soma dos ângulos internos C+B ou C+A resulta no valor do ângulo externo de A e B. (~~Print~~)

Fonte: anotações do estudante B.

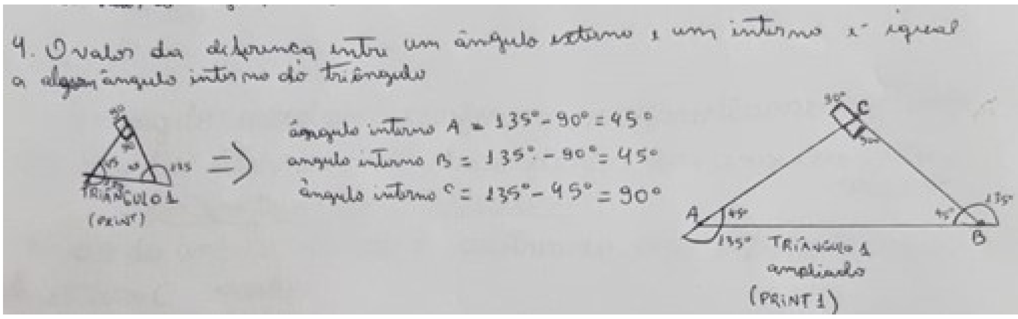
Quando questionados se os fatos que apresentavam foram concluídos a partir da interação com o *applet*, os estudantes afirmaram que já sabiam desses fatos. O professor optou por não estimular a investigação questionando os motivos dessas afirmações serem verdadeiras, já que havia uma maior possibilidade de que os argumentos apresentados fossem igualmente já conhecidos, o que não é de interesse da nossa investigação.

Os estudantes foram orientados a buscar novas relações, fatos que eles desconheciam e que a interação com o *applet* pudesse sugerir que fossem verdadeiras. Outras conjecturas começaram a emergir. Uma delas é similar ao conhecido resultado que afirma "a medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes". O estudante B concluiu que a diferença entre a medida do ângulo externo e a medida de um ângulo interno é igual à medida de algum ângulo externo do triângulo. Questionado se a afirmação era sempre verdadeira, o estudante exibiu na tela do *tablet* uma configuração do triângulo em que a relação era verificada. O professor sugeriu que o estudante realizasse o registro da construção dessa conjectura e do processo de validação que seguiu. O registro pode ser observado na Figura 11.

Para fazer a validação da conjectura, o estudante recorreu a um desenho, o que, na classificação de Balacheff (2022e) é uma forma de prova pragmática, um empirismo ingênuo, aquele em que a validação se baseia na verificação de um ou poucos casos particulares.

Após o estudante concluir a escrita do registro do seu argumento de validação, o professor

Figura 11 – Estudante B enuncia resultado e faz uma verificação empírica.



Fonte: anotações do estudante B.

inquiriu se essa afirmação permanecia verdadeira para outros triângulos. Rapidamente, usando o *applet* o estudante notou que a afirmação não permanecia verdadeira e demonstrou uma certa insatisfação. O surgimento dessa conjectura foi de grande importância no desenvolvimento dessa sessão, pois abriu o precedente para que os estudantes usassem essa situação como contra-exemplo para o uso do empirismo ingênuo como processo legítimo de verificação. Neste ponto, notamos que o processo de negociação social da verdade, como destaca Garnica (1995) estava instalado e a validação por meio do empirismo ingênuo não era aceita para validar uma conjectura.

Diante da refutação da conjectura, optamos por não estimular um eventual refino para manter o nosso objetivo de buscar a formulação e validação de uma conjectura sobre o objeto de estudo em questão, as desigualdades no triângulo. A essa refutação seguiu um momento de marasmo na investigação que foi quebrado com a intervenção do professor com uma pergunta que colocava o objeto *desigualdade* novamente em pauta, como veremos na transcrição a seguir.

> ***Professor****: Vocês conseguiriam perceber alguma relação de desigualdade aí? Entre os ângulos internos e os ângulos externos?*
> ***Estudante A****: Desigualdade?*
> ***Estudante C****: Geralmente os internos são menores.*
> ***Professor****: Qual?*
> ***Estudante C****: Geralmente os internos são menores do que os externos.*
> ***Professor****: Os internos são menores do que os externos?*
> ***Estudante A****: Não. Porque se movimentar, a depender do movimento, o externo, ele fica menor do que o interno.*
> ***Estudante C****: Aqui não.*
> ***Estudante A****: Eu fiz um movimento que teve um lado[ângulo] do externo menor do que o interno.*

Como podemos perceber, o estudante C faz uma conjectura que de imediato é refutada pelo estudante A usando um argumento típico dos ambientes de geometria dinâmica, o movimento do desenho. Neste momento, com a intenção de estimular o refino da conjectura, o professor questionou por qual razão a afirmação não era verdadeira. Em tentativa de apresentar uma resposta, os estudantes fizeram diversas manipulações nos desenhos para tentar explicar por quê essa afirmação era falsa. A maior parte da sessão de investigação foi investida neste momento, que foi marcada por conversas digressivas e comentários que indicavam falta de estratégia e de objetivos na investigação. Nesse contexto, o professor interveio pouco, participou das conversas digressivas, auxiliou com a linguagem na comunicação entre os estudantes a respeito das suas investigações antes de chamar novamente a atenção para a segunda dica que sugeria a escolha de um ângulo externo e a comparação de sua medida com a medida de dois ângulos internos.

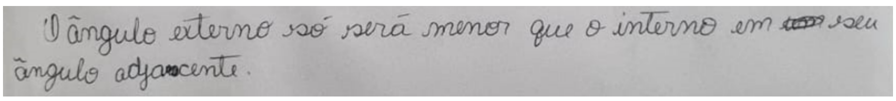
Após a leitura da segunda dica e algumas explorações, o estudante A notou que a manutenção da medida do ângulo externo maior do que a medida do interno adjacente dependia da medida do ângulo externo. Abaixo vemos o momento em que ele externaliza essa percepção.

> ***Estudante A***: *[...] o ângulo externo se mantém sempre maior que o interno a depender do movimento que a gente faça com os vértices ele fica menor que o interno.*
> ***Professor***: *Qual interno? Qual externo?*
> ***Estudante A***: *Por exemplo, o externo A fica menor que o interno A.*

O que vemos acima é o princípio do processo de refino da conjectura que é bem tipificado por Lakatos (1976). O estudante notou um contra-exemplo local e, agora, há a possibilidade de enunciar mais uma vez a conjectura inicial, modificando o seu escopo, excluindo os casos que foram refutados, e verificando mais uma vez a validade.

É importante salientar que o professor estimulou a permanência nesse caminho de investigação e auxiliou na comunicação do resultado. Notamos a dificuldade do estudante em escrever o que havia verbalizado e, em razão disso, relembramos a definição de ângulo adjacente. Desse modo, ao invés de se referir aos vértices e usar a linguagem corporal para indicar na tela do *tablet* ao que se referia, ele substitui essas ações pelo conceito que nomeia o objeto. Na Figura 12 vemos o registro do estudante A sobre a conjectura na qual há o emprego do vocabulário. Esta questão também segue em consonância com nosso quadro teórico, Ponte *et al.* (2019) afirma que a limitação da linguagem induz os estudantes a utilizarem a linguagem não verbal para comunicar as suas conclusões sobre a investigação realizada. Para além disso, notamos que o desconhecimento de conceitos dificulta a comunicação entre os estudantes, o que prejudica a construção da conjectura e a construção de provas.

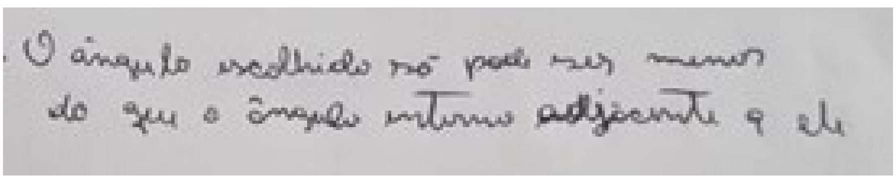
Figura 12 – Estudante A incia o processo de refino de uma conjectura


O ângulo externo só será menor que o interno em seu ângulo adjacente.

Fonte: anotações do estudante A.

Após essa observação do estudante A, a conjectura foi ajustada mais uma vez pelo estudante B, que comunicou aos demais a sua percepção e fez o registro, como podemos verificar na Figura 13.

Figura 13 – Estudante B registra a nossa conjectura de interesse


O ângulo escolhido não pode ser menor do que o ângulo interno adjacente a ele

Fonte: anotações do estudante B.

Uma vez que os estudantes chegaram a uma conjectura que julgavam estável, o que surgia como objetivo da sessão era a apresentação de alguma prova, a mais formal possível. A experiência que os estudantes tiveram com a conjectura presente na Figura 11 foi de grande importância, pois isso os levou a fazer uma série de testes de configurações possíveis do triângulo. Com essa ação, imaginávamos que eles iriam apresentar um argumento com base nas diversas verificações que fizeram, justificando que elas seriam suficientes. Mas eles apenas estavam se convencendo da veracidade da conjectura, tinham consciência de que as verificações eram insuficientes para atestar a validade. Com isso, percebemos que, na classificação de Balacheff (2022e), os estudantes também já haviam se distanciado do experimento crucial. A transcrição abaixo exemplifica essa situação.

> ***Professor***: *Então, como é que você garante que não existe algum caso em que isso fura?*
> ***Estudante B***: *Eu não garanto.*
> ***Professor***: *Você não garante?*
> ***Estudante B***: *Não.*
> ***Estudante A***: *Então diria que seria, tipo, 98%. Ainda é um número alto. Eu garanto que é altíssimo.*
> ***Estudante B***: *Eu garanto que no triângulo em que eu estou resolvendo essa regra se aplica para. Agora, para os outros, eu já não sei.*

Como podemos perceber no diálogo, os estudantes não consideram o argumento baseado na manipulação do triângulo no *applet* como uma forma legítima de validação, mesmo tendo testado em uma grande quantidade de verificações. Além desse afastamento, notamos na fala do estudante A a sugestão de que o argumento para que resolvesse todos os casos não poderia ter as medidas dos ângulos, o que, para nós, sugere um princípio de generalização no argumento. Também notamos que o distanciamento das propriedades dos desenhos prototípicos os estimulou a procurar características do desenho que permanecem estáveis sob a ação do movimento e que pudessem ajudar a justificar a validade da afirmação. Encontrar essas características pode ser a gênese de uma demonstração, como sinaliza Gravina (2001).

Para nós, a percepção da limitação do teste ingênuo associada a busca por um argumento sem o uso de valores numéricos e o afastamento das propriedades dos desenhos prototípicos, aponta para uma prova do tipo exemplo genérico. De fato, esses elementos são evidências de que os estudantes viam o desenho como um representante de classe, um elemento fundamental para a construção de uma prova do tipo exemplo genérico, contudo, eles não conseguiram avançar no sentido de produzir por meio da linguagem verbal ou, até mesmo, da não verbal, uma prova, algum argumento.

Diante dessa limitação o professor, então, sugeriu que eles retornassem ao *applet* e tentassem explicar a razão da conjectura ser verdadeira. Porém, essa ação não foi suficiente e as dificuldades persistiram como vemos no trecho transcrito a seguir.

> ***Estudante A***: *(...) o que faz com que o ângulo externo fique menor que o interno é exatamente aaa... Não é bem a extremidade, mas a forma como nós colocamos ele. Só que para poder o interno ficar maior que o externo, a gente precisa dar mais espaço para o interno e diminuir o espaço no externo. Mas não é bem esse argumento.*

Nesta fala percebemos, mais uma vez, a limitação na linguagem o que significaria "[...] dar mais espaço para o interno e diminuir o espaço para o externo[...]"? Seria aumentar a medida do ângulo? Essa opção foi sugerida e exibida no *tablet* para o estudante, mas não era a isso que ele se referia, segundo o próprio. O que seria? Neste aspecto, notamos, mais uma vez, a limitação imposta pela linguagem e possivelmente pelo desconhecimento de objetos e técnicas próprias da matemática. Houve outras tentativas de formulação de uma prova, mas nenhuma delas apresentou um argumento que fosse estável e, em alguns casos, que fizesse sentido. Os estudantes pareciam manipular o desenho procurando por algo, um achado que surgiria repentinamente e resolveria o problema.

Essa, inclusive, é uma situação comum, recorrente, para, por exemplo, estudantes de graduação que em muitos momentos se deparam com demonstrações com argumentos que "são tirados do bolso"ou até mesmo para matemáticos em sua atividade, como relata Poincaré (1996) *apud* Ponte *et al.* (2019) . Consideramos positiva essa procura, vemos que os estudantes estão em uma situação mais próxima do fazer matemática e mais próximos de uma situação de prova. A questão relevante nesse contexto passa a ser: como auxiliar os estudantes a construírem um argumento quando os mesmos já estão distantes de argumentos com bases empíricas? E, em especial, como construir uma situação que permita ao estudante explorar e descobrir o fato que causa uma "iluminação súbita"e o deixa mais próximo da construção de uma prova?

Vemos que parte da dificuldade em construir provas e demonstrações está associada a ausência do hábito de investigar e de provar. Essa é uma barreira que Mello (1999) classifica como um obstáculo didático, uma vez que está associada às escolhas que as redes de ensino e os professores fazem sobre o currículo e os métodos. Como vimos no quadro teórico, as referências a práticas que conduzem à produção de argumentos são raras nos documentos norteadores, o que implica em uma atuação docente mais distante desses elementos e em estudantes sem referências sobre processos investigativos e argumentação em matemática.

A tarefa de investigação não teve um momento dedicado especialmente para a comunicação dos resultados em razão da quantidade de estudantes ser inferior ao planejado. Além disso, um dos estudantes se retirou da sessão antes da conclusão. Os estudantes que permaneceram comunicavam os resultados obtidos uns com os outros à medida em que avançavam na exploração. Isso contribuiu para a construção de um ambiente de socialização, crítica, argumentação e construção coletiva sobre os fatos descobertos. Desse modo, compreendemos que a fase de discussão dos resultados ocorreu de modo paulatino durante toda a investigação.

Concluída a tarefa de investigação, apresentamos aos estudantes uma demonstração da conjectura que na prática é conhecida como teorema do ângulo externo. Realizamos o passo a passo da extensão do desenho no GGB explicitando os detalhes. Usamos os valores das medidas dos ângulos para que eles pudessem ter um entendimento inicial da construção e, na sequência, removemos esses elementos para que eles pudessem notar que o argumento se mantinha sem a necessidade de elementos particulares. Percebemos que os estudantes acompanharam o raciocínio, mas é difícil precisar até que ponto eles compreenderam. Se mostraram satisfeitos no sentido de ter um argumento que não usa os números para a justificativa, mas disseram que jamais pensariam no que foi feito. Nesse ponto, entendemos que a ausência de tarefas investigativas anteriores a esta formam um obstáculo para uma compreensão mais profunda.

Consideramos a aplicação da primeira sessão positiva, não tínhamos a pretensão de conseguir a busca por um processo de validação distante do empirismo ingênuo. Neste aspecto, entendemos que a nossa tarefa atingiu o objetivo. Além disso, avaliamos que a estrutura da tarefa com dicas foi um elemento fundamental para o desenvolvimento da investigação.

6.2 Tarefa 02 - Ao Maior Lado de um Triângulo Opõe-se o Maior Ângulo

O desenvolvimento das atividades da segunda sessão teve duração de cerca de duas horas e meia e contou com a participação de 3 estudantes: o estudante A, que já havia participado da primeira sessão, e outros dois estudantes, D e E, que participaram pela primeira vez. Eles se organizaram espontaneamente em uma dupla, formada pelos estudantes D e E, e o estudante A, que desenvolveu a atividade individualmente. Assim como na primeira sessão, o acesso à atividade se deu por meio do uso de *tablets* e *TV*, sendo a tarefa[2] desenvolvida no ambiente do GGB.

A sessão 2 começou com uma síntese do que foi realizado na sessão anterior, com ênfase para a exibição da conjectura que fora formulada e demonstrada. A mesma foi escrita no quadro e permaneceu nele durante toda a sessão. Na sequência foi apresentada a tarefa do dia com a leitura das orientações e a exemplificação de como os vértices do triângulo podem ser movimentados no ambiente do GGB. O estudante A, que havia participado da primeira sessão, já havia iniciado a exploração antes mesmo da apresentação.

Os estudantes D e E apresentaram o mesmo comportamento que os colegas na primeira sessão, se preocuparam em listar o maior número de propriedades conhecidas sobre o triângulo. Já o estudante A que participou da primeira sessão foi mais assertivo, passou muito rapidamente a procurar fatos que não fossem, nas palavras dele, “óbvias”. Ele foi orientado pelo professor a escrever todas as conjecturas que conseguisse notar no desenho, mas sem incluir aquelas que ele já tinha conhecimento prévio.

A dupla e o estudante A seguiram linhas de trabalho distintas, poucos foram os momentos em que eles se comunicaram para falar sobre as suas conclusões. Nesse cenário, o estudante A desenvolveu a investigação praticamente sozinho e as dicas foram um importante norteador para as suas explorações. Em ambos os casos notamos que os estudantes tiveram problemas com relação ao desenvolvimento da linguagem. Em mais de um momento eles buscavam palavras e mesmo depois de algum tempo elaborando, ao verbalizar, exprimiram algo que eles mesmos se mostravam descontentes com o que fora dito e ao escrever geravam textos sem coerência. Mello (1999) já havia advertido sobre esse tipo de obstáculo, o epistemológico e o linguístico: uma dificuldade em conhecer e utilizar a rede de significados de objetos matemáticos para a construção de uma comunicação eficiente.

[2] Tarefa disponível em:<https://www.geogebra.org/m/jtqqnfpc#material/wksxubmb>

Notamos que essa dificuldade, além de constituir um limitador para a produção de argumentos, é um obstáculo para a comunicação de modo mais abrangente. O processo de reflexão do estudante fica comprometido, já que não consegue relacionar o que vê e manipula na tela com os conceitos e objetos conhecidos, e nem exprimir o que efetivamente pensam a respeito destes. Nesta sessão, essa limitação foi notada de forma recorrente, desde a interpretação do problema, passando pela formulação das primeiras conjecturas e seus processos de refinamento e, principalmente, no processo de argumentação.

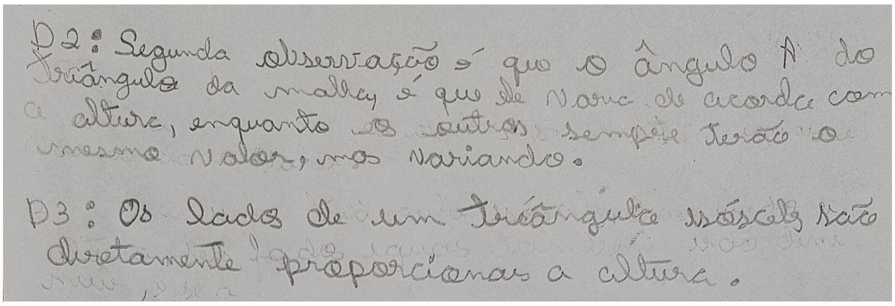
Na fase inicial de exploração da tarefa, os estudantes D e E se preocuparam em verificar se era possível ou não transformar o triângulo que viam na tela em equilátero. Essa verificação também surgiu com os estudantes na primeira sessão, atribuímos esta ocorrência ao fato de a classificação de triângulos ser um tópico mais conhecido entre os estudantes da Educação Básica. Rapidamente eles chegaram à conclusão de que era possível, contudo, não perceberam de que modo isso poderia ofertar uma "resposta"à primeira dica e seguiram movimentando os vértices e fazendo observações.

As dicas foram encaradas, inclusive por estímulo do professor, como uma espécie de questionário que, além de apontar um caminho para a investigação, também demandou a escrita do que era observado a partir daquela sugestão. A dupla de estudantes "respondeu"à primeira dica do seguinte modo: "*A primeira relação que observamos é que o que determina o tipo de triângulo são os ângulos internos*". Um dos estudantes da dupla afirmou que já conhecia esse fato e que o desenho apenas o lembrou disso. Aproveitamos essa situação para sugerir que eles se preocupassem em buscar relações, até então por eles desconhecidas, que surgissem a partir da observação do desenho.

Essas ações, que também ocorreram na primeira sessão, são parte das explorações iniciais e estão associadas ao processo de compreensão do problema, como destaca Ponte *et al.* (2019). É por meio dessas primeiras incursões que os estudantes traçam seus objetivos e estratégias em tarefas investigativas.

A dupla de estudantes seguiu uma linha de investigação divergente da que havíamos imaginado quando as atividades foram construídas. Eles passaram a observar a altura do triângulo com relação à base BC e a formar conjecturas envolvendo esse objeto à medida que liam cada dica nova, como ilustra a Figura 14 abaixo.

Figura 14 – Primeiras observações e conjecturas dos estudantes D e E


D2: Segunda observação é que o ângulo A do triângulo da malha, é que se varia de acordo com a altura, enquanto os outros sempre terão o mesmo valor, mas variando.

D3: Os lados de um triângulo isósceles são diretamente proporcionais a altura.

Fonte: anotações do estudante D e E.

Na prática, a dupla de estudantes avançou quase que com a mesma conjectura durante toda a investigação, apenas fazendo ajustes para os casos particulares (triângulos equiláteros, isósceles e escalenos) que estavam presentes nas dicas. Uma das variações foi verbalizada pelo estudante D: "*Eu posso dizer que os lados iguais do triângulo isósceles são diretamente... diretamente proporcionais à altura então, porque quando eu aumento a altura[relativa ao lado BC], eles aumentam também*". Para eles, essa conjectura se mantinha mesmo quando se tratava de triângulos escalenos.

Notamos que os estudantes esbarraram nas questões da linguagem, ao não interpretar corretamente as dicas que sugeriam observar a relação entre medidas dos lados e dos ângulos, além de problemas de semântica que podem ter prejudicado a estratégia de investigação. A dupla usou reiteradamente a noção de proporcionalidade, contudo, notamos que, na prática, eles se referiam apenas a uma relação funcional entre os objetos dependentes e independentes do desenho, como destaca Gravina (2001), mas que não necessariamente configuram uma proporção entre a medida da altura e a medida de lados AC e AB.

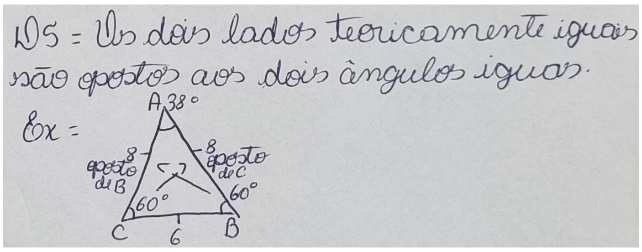
Essa limitação no vocabulário também pode ter sido potencializada pela estrutura da tarefa investigativa já que o *applet* não permitia a construção de objetos acessórios, como a altura e a sua medida que tinham o potencial de auxiliar os estudantes na verificação da validade dessa conjectura. Neste contexto, conforme tipificação de Mello (1999), além do obstáculo linguístico também houve um obstáculo didático à medida em que a opção do professor na elaboração do *applet* foi a de utilizar tarefas do tipo caixa preta, conforme Gravina (2001), e, portanto, não contemplou a possibilidade de que os estudantes construíssem objetos que não tenham sido desenhados inicialmente.

Embora os estudantes tenham sido reiteradamente provocados sobre a validade da afirmação e sobre o uso da palavra "proporcionalidade", se mantiveram nessa linha de investigação. A conjectura, portanto, não passou por processos de refino em razão da necessidade de ajuste de domínio de validade ou similares, como vimos ocorrer na sessão 01.

A dificuldade com a linguagem não ocorreu apenas no desenvolvimento da conjectura, ele foi notório durante todo o processo, desde as primeiras construções passando pela formulação da conjectura até as tentativas de desenvolvimento de provas e foi observada em todos os estudantes. Eles tiveram auxílio em diversos momentos com relação a essas questões. Algumas palavras ou expressões eram verbalizadas ou escritas, mas os estudantes queriam se referir a outros objetos/conceitos, como é o caso das palavras “teoria” e "proporcional"e da expressão “tamanho do vértice”, quando, na verdade, desejavam se referir a "argumento", a uma função que não necessariamente é uma proporção e a medida do lado do triângulo, respectivamente. Nesses e outros casos semelhantes, eles foram auxiliados e as palavras e/ou expressões mais precisas foram apresentadas pelo professor. Em alguns casos, quando apenas haviam esquecido o vocábulo, os estudantes reagiram de modo enérgico a sugestão do professor com a expressão “*[...]isso!*”.

Um exemplo de tal situação ocorreu com o estudante A que não conseguia se referir aos lados opostos aos ângulos da base de um triângulo isósceles de modo assertivo. Consideramos que era momento de intervir e entregar uma solução para essa questão a fim de não comprometer a construção da conjectura que desejávamos. Apenas dissemos o que é um lado oposto a um ângulo em um triângulo. Como resultado, podemos notar a aplicação do vocabulário no argumento presente na Figura 15.

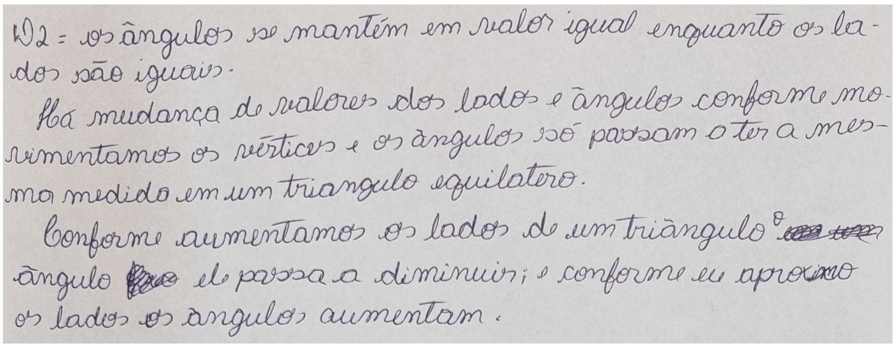
Figura 15 – Estudante usa vocabulário novo em anotação



Fonte: anotações do estudante A.

Embora o estudante A tenha apresentado problemas com a semântica, ele foi mais objetivo com relação a construção da conjectura. Ao ser apresentado a tarefa, ele passou quase que de modo imediato a buscar "*[...] coisas que não fossem óbvias*"e investiu bastante tempo compreendendo a situação, lendo as dicas e manipulando os vértices do triângulo antes de iniciar as anotações e comentários. Nos seus registros relativos à segunda dica, começaram a surgir ideias do que viriam a se concretizar como a produção de uma conjetura que, ao final, seria verificada como verdadeira. Na Figura 16, verificamos como o uso do movimento do desenho na interface do GGB permitiu a exploração de diversas situações e, por conseguinte, a observação da existência de uma relação entre as medidas dos lados e a medida dos ângulos.

Figura 16 – Estudante A registra observações que conduzem a construção de conjectura


D2 = os ângulos se mantém em valor igual enquanto os lados são iguais.
Há mudança de valores dos lados e ângulos conforme movimentamos os vértices e os ângulos só passam a ter a mesma medida em um triangulo equilatero.
Conforme aumentamos os lados de um triângulo o ângulo ele passa a diminuir; e conforme eu aproximo os lados os ângulos aumentam.

Fonte: anotações do estudante A.

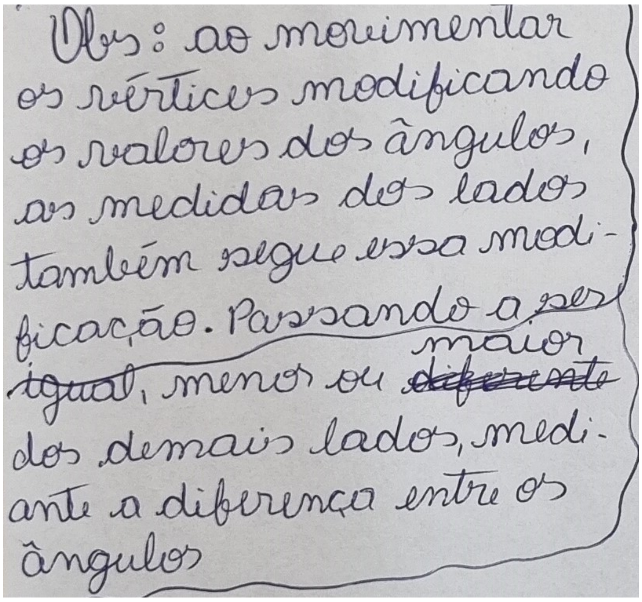
Ao responder os questionamentos presentes nas dicas, ele foi observando o comportamento das medidas dos ângulos e das medidas dos lados conforme movimentava os vértices dos triângulos e executava as orientações. Após ter notado ou relembrado que: em triângulos equiláteros, os ângulos têm a mesma medida; em triângulos isósceles, os ângulos opostos aos lados de mesma medida também têm a mesma medida; e que, em um triângulo escaleno, os ângulos internos têm sempre medidas distintas; o estudante começou a construir a conjectura.

> *Os lados eles também ficam com números diferentes e o que acontece é ... o lado... Como é que fala? Oposto. Tipo, ele vai seguindo a mesma teoria do ... Deixa eu tentar organizar aqui minha frase. Vamos supor que eu tenho três números um 40, um 60 e um 30. O lado que vai ter o número maior será o lado oposto ao ângulo de 60, que é o número maior no triângulo. É algo que se adéqua a todo e qualquer triângulo? Não sabemos ainda. Mas foi algo que eu ob-*

servei aqui, nesse que eu fiz.

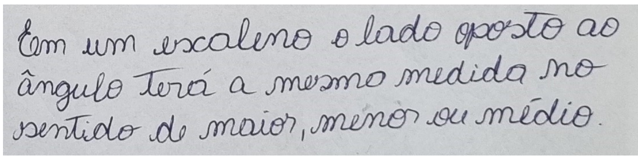
Na formulação do estudante A há de modo implícito uma necessidade de validação para a conjectura que ainda está em formulação, o que indica um nível de compreensão mais refinado conforme Sowder e Harel (1998, *apud* Orden, 2015). Foram muitas as tentativas de exprimir o que pretendia de forma assertiva antes de chegar a uma combinação coerente e matematicamente estável. Veja a Figura 17 e 19 que contêm os registros parciais de tentativas do estudante A.

Figura 17 – Início da formulação de uma conjectura


Obs: ao movimentar
os vértices modificando
os valores dos ângulos,
as medidas dos lados
também segue essa modi-
ficação. Passando a ~~ser~~
~~igual~~, menor ou maior ~~diferente~~
dos demais lados, medi-
ante a diferença entre os
ângulos

Fonte: danotações do estudante A.

Figura 18 – Formulação de uma conjectura


Em um escaleno o lado oposto ao
ângulo terá a mesma medida no
sentido de maior, menor ou médio.

Fonte: anotações do estudante A.

Além da escrita destacada nas Figuras 18 e 19, o estudante exemplificou a sua conjectura em diversos triângulos, mostrando que o lado maior é oposto ao ângulo maior, que "lado médio"é oposto ao "ângulo médio"e que o lado menor é oposto ao menor ângulo. Essa argumentação e os registros escritos formam, em nossa percepção, o juízo de que o estudante já tinha uma conjectura em mente, mas não conseguia ordenar as palavras de modo a produzir um texto que fosse mais formal. Optamos, diante da situação, por apresentar uma possibilidade de formulação: o lado de maior valor opõe-se ao ângulo de maior valor. Após um período de reflexão, o estudante assentiu que essa formulação também exprimia o que ele pretendia no registro exposto na Figura 18.

Com o fim das formulações das conjecturas, iniciamos o processo de tentativa de validação. A dupla composta pelos estudantes D e E se ativeram aos movimentos na tela do *tablet* para defender a validade da conjectura que formularam. Eles, contudo, consideraram a conjectura verdadeira já que as medidas dos lados AC ou AB de fato aumentavam ou diminuíam, mas não de modo proporcional, de acordo com a variação da altura relativa ao lado BC. Uma prova do tipo empirismo ingênuo, conforme tipificado por Balacheff (2022e). Por outro lado, o estudante A, quando questionado sobre a validade da sua conjectura, respondeu:

> Não. Sim. Ele acompanha a mesma medida do ângulo. Por exemplo, se nós estamos falando de um triângulo com ângulos iguais, o lado oposto a ele vai... ele vai seguir essa mesma coisa de que vai ser todos iguais também, entendeu? Então o lado eu não sei se é o lado ou se é o outro que acompanha, porém eles tem essa ligação. Eles dependem um do outro. Então o ângulo oposto, o ângulo não, o lado oposto, vamos supor que ele é dependente do seu ângulo oposto para poder ele... Sabe? Essa é uma teoria verificada? Não. É uma teoria que (inaudível) observou mediante alguns triângulos que ela viu aí, que é como eu te disse, conforme eu vou puxando a linhazinha aí um lado ele acaba ficando mais... Não, segue a mesma teoria. Deixa eu te mostrar.

Após essa colocação, o estudante chama o professor e mostra que, se ele movimentar os vértices, a relação se mantém e conclui que a conjectura deve ser verdadeira para todos os triângulos. Neste caso, notamos que o estudante A também se ateve a representação concreto-abstrato do objeto na tela do *tablet* e não percebeu a necessidade de se afastar das particularidades do desenho prototípico para formular um argumento. O mesmo circunscreveu-se ao uso de verificações empíricas em diversas quantidades para o processo de validação: uma prova do tipo empirismo ingênuo.

Nesta sessão, como os estudantes estiveram em estações de trabalho distintas, consideramos indispensável que eles apresentassem as conclusões aos demais colegas. O estudante A foi ao quadro, escreveu a conjectura e, com auxílio do TV, exibiu para os colegas várias configurações do desenho prototípico que sustentavam a sua conjectura. A dupla de colegas não o interpelou e, após serem questionados pelo professor, disseram que concordavam com o estudante A. De modo análogo, o estudante D apresentou as conclusões no quadro e usou a TV para expor várias configurações do desenho prototípico que sustentavam a sua conjectura. O estudante A, após ser questionado pelo professor, mostrou-se convencido pelos argumentos do colega e considerou a conjectura verdadeira.

A nós, chamou atenção o fato do estudante A, que participou da primeira sessão, aceitar um argumento baseado em testes como válido. Tínhamos a expectativa de que ele percebesse a limitação do próprio argumento e do argumento dos colegas, como já havia feito na sessão 01, o que não ocorreu.

Ao final da sessão, após a exposição dos estudantes, o professor analisou as duas conjecturas.

A primeira delas que afirmava que ao fixar o lado BC a variação da medida da altura é proporcional à medida dos demais lados, é falsa. Verificamos tal fato por meio de uma construção no GGB. A partir do triângulo do *applet*, destacamos a altura de interesse na conjectura e a medida dos lados, na sequência definimos proporção e aproveitamos para questionar os estudantes se era a isso que se referiam quando falavam em proporção. Eles afirmaram que não. Queriam se referir ao fato de que um lado aumenta quando o outro aumenta. Após a construção e apresentação da definição, um contra-exemplo convenceu os estudantes de que a afirmação não era verdadeira. Sugerimos aos estudantes que tentassem exprimir aquilo que chamaram de proporção em outros termos e trouxessem na sessão seguinte.

A segunda conjectura, que afirma que em um triângulo o maior lado opõe-se ao maior ângulo, realizamos as construções necessárias também no GGB. Usamos o processo construtivo da proposição 9 na seção 3.3. Durante o processo relembramos o teorema 7, objeto de estudo da sessão 01, e mostramos como ele poderia ser usado para sustentar um argumento formal que justificasse a validade da proposição. Os estudantes, mais uma vez, mostraram surpresa e voltaram a afirmar que não pensariam em apresentar um argumento nesses moldes.

Ao fim, consideramos que esta sessão foi efetiva no desenvolvimento de provas pragmáticas, contudo, não conseguimos nos afastar da prova do tipo empirismo ingênuo e aproximar da experiência mental como foi feito na primeira sessão. Tal fato parece estar relacionado com a dificuldade dos estudantes em conhecer os objetos matemáticos, nomeá-los e representá-los. Não se trata de apenas ser apresentado às limitações das provas pragmáticas, parece haver algo em cada objeto de conhecimento que interfere na produção de provas.

6.3 Tarefa 03 - A Desigualdade Triangular

A terceira e última sessão de aplicação de nossa sequência didática foi realizada duas semanas após a aplicação da segunda sessão e durou aproximadamente uma hora e meia. Apenas os estudantes A e B compareceram. Eles desenvolveram a tarefa em dupla, trocando informações continuamente durante toda a sessão. Assim como nas demais sessões, a tarefa [3] foi alocada no ambiente do GGB e foi acessada pelos estudantes por meio de um *tablet*.

A sessão foi iniciada com o professor apresentando uma síntese do que foi realizado nas duas sessões anteriores, enfatizando as proposições que foram estudadas - teorema 7 e as proposições 8 e 9. Os resultados foram anotados na lousa e permaneceram até o final da sessão. A expectativa era que a disponibilidade e fácil acesso aos resultados e a experiência vivenciada nas duas primeiras sessões, em especial pelo estudante A, o único que participou de todas as sessões, pudesse servir como um estímulo ao uso desses resultados na produção de uma prova para a desigualdade triangular.

Neste sentido, buscávamos usar uma das funções da prova tipificada por De Villiers (2001), a sistematização, como uma forma de estímulo à produção de provas além da função de explicação que reiteradamente vínhamos utilizando. Mas não tivemos êxito, os estudantes não fizeram menção de usar esses resultados ou outros que fossem conhecidos com a finalidade de auxiliar o encadeamento de argumentos para construir uma prova. Consideramos que esse deve ser um trabalho desenvolvido com uma maior disponibilidade de tempo e com outra estrutura de tarefas que contemplem a construção de uma rede semântica de significados relativos aos objetos matemáticos estudados e quando os estudantes estiverem com uma maior familiaridade com a construção de provas.

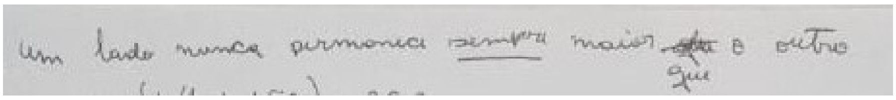
A introdução da tarefa foi feita quase automaticamente, os estudantes já conheciam o ambiente e já sabiam como utilizá-lo. A questão passou a ser, objetivamente, a busca de relações entre os

[3] Tarefa disponível em: <https://www.geogebra.org/u9jnq5hz>

elementos do triângulo. Nesta sessão, eles não listaram propriedades já conhecidas como nas demais, produziram poucas afirmações e foram mais introspectivos, até mesmo na conversa entre eles. A busca por verificar se o triângulo poderia se tornar equilátero estava, mais uma vez, presente, mas não desencadeou grandes discussões.

Na fase das explorações iniciais, um dos estudantes formulou a primeira conjectura que rapidamente foi refutada pelo colega. Ela afirmava que no triângulo ABC ao se fixar um lado, nenhum dos outros lados poderia ter uma medida maior do que a medida do lado fixado. A refutação dessa conjectura veio por meio de um contra-exemplo exibido na tela do *tablet*, uma forma esperada de refutação de argumento em ambientes de geometria dinâmica, como destaca Gravina (2001). Um dos estudantes registrou a síntese dessa observação como vemos na Figura 19.

Figura 19 – Estudante B faz observação na fase de inicial da tarefa



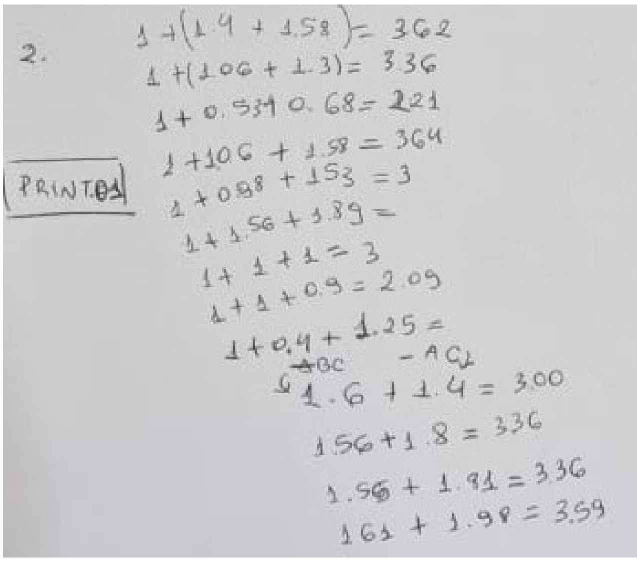
Fonte: anotações do estudante B.

A esta primeira formulação seguiu um longo período de observação sem produções significativas. Um momento que nós já havíamos notado nas demais sessões e já estávamos advertidos pela leitura de Ponte *et al.* (2019) sobre a importância desse momento de aparente calmaria para o avanço no recolhimento dos dados e familiarização com o problema. Neste momento, os estudantes tinham conversas digressivas, falavam de amenidades e situações cotidianas ao passo que manipulavam o *applet*. Um deles se arriscou a comentar sobre a tarefa proposta para aquele dia, ele relatou que essa tarefa foi a mais difícil das três sessões e classificou esse fato como desestimulante.

Em meio às conversas alheias ao tema, surgiu a observação que desencadeou o início das formulações mais estáveis e próximas de afirmações verdadeiras. O estudante B trouxe a tarefa de volta para a pauta e disse que para encontrar uma relação entre as medidas dos lados do triângulo só seria possível "*vendo os lados como um só, como parte de um triângulo*". Essa afirmação foi reiterada outras vezes, mas sem produzir efeitos imediatos no sentido de produção de conjecturas ou de decisão de estratégia ou método de exploração. O *insight* do estudante B veio com a leitura da terceira dica que sugeria a fixação de um dos lados e, por consequência, da sua medida. O estudante B, por sugestão do professor, fixou o lado AB com a medida 1, e, por iniciativa própria, passou a fazer as somas das medidas dos lados dos triângulos que obtinha ao variar o vértice C como uma forma de "*ver o triângulo como um só*". A Figura 20 exibe o registro do estudante nesse processo.

Como vemos na Figura 21, o estudante B fez vários testes somando as medidas dos lados do triângulo, mas, a partir de um momento, ele deixou de realizar a soma das medidas de todos os lados e passou a somar somente as medidas dos lados que não estavam fixos. A certa altura da investigação, inclusive quando estávamos em uma conversa alheia ao tema da aula, o estudante B tomou a palavra e formulou o resultado provisório transcrito a seguir:

Figura 20 – Estudante B soma as medidas dos lados dos triângulos que obtém ao arrastar o vértice de um triângulo no GGB



Fonte: anotações do estudante B.

> **Estudante B**: *Primeiro eu tinha pensado que a soma das medidas desses dois lados sempre acabavam sendo maiores do que o ponto fixo.*
> **Estudante A**: *Mas não, não é isso.*
> **Professor**: *Como é rapaz? Repete aí.*
> **Estudante B** : *Por exemplo: o meu ponto fixo é o AB. O AB mede 1. A minha teoria era que a soma de BC mais AC sempre acabaria sendo maior do que 1, o que é algo a AB.*

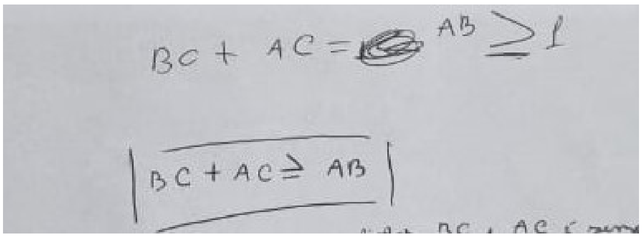
Na transcrição acima notamos que o estudante tem uma dificuldade em usar as expressões corretas, usa a expressão "ponto fixo"para se referir ao segmento AB, mais uma vez, o obstáculo epistemológico (Mello, 1999). Contudo, isso não inviabilizou a construção da conjectura e nem mesmo a generalização que começa a ser ensaiada pela estudante B na última frase.

O estudante B havia acabado de formular a conjectura que desejávamos: "a soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro", em escrita mais formal. Contudo, a *priori* a formulação não teve a concordância do colega. Para persuadir o estudante A da validade de sua conjectura, o estudante B usou os seus escritos, os mesmos expostos na Figura 21, para defender a validade. Essa forma de validação é uma prova pragmática do tipo empirismo ingênuo (Balacheff, 2022a) tendo em vista que o estudante fez vários testes que apontam que a conjectura é verdadeira, concentrando o argumento na ação sobre o objeto. O argumento não convenceu. O estudante A demonstrou uma certa desconfiança da prova apresentada e passou a verificar outros casos, aqueles em que a medida de AB é diferente de 1, uma aparente tentativa de generalização. O estudante A, após a sua própria experimentação, concluiu que a afirmação permanecia verdadeira e afirmou "*isso ocorre em todos os triângulos independente* [*sic*] *de sua medida fixa*".

Notamos que o elemento do argumento que causou desconfiança não foi o uso de testes na tela do *tablet* e nos cálculos registrados na Figura 21, mas, sim, o uso da particularidade da medida de um dos lados ser continuamente 1. O estudante B, estava, portanto, buscando uma maior variedade de casos do triângulo, não necessariamente uma discordância do tipo de prova apresentado. Contudo, destacamos que essa ação de buscar mais casos aponta para a percepção de que a afirmação se refere a um conjunto de triângulos maiores do que aqueles representados na tela, um tipo de raciocínio que o aproxima da percepção do triângulo como um representante de classe. De todo modo, a validação do estudante A a respeito da conjectura ainda se apoia sobre ações concretas, testes realizados na tela do *tablet* e dos cálculos realizados com o auxílio de uma calculadora, isso caracteriza o seu argumento como uma prova pragmática do tipo empirismo ingênuo.

A partir dessas formulações a investigação se concentrou na busca por uma validação da conjectura. O estudante B, já convencido pela verificação empírica da validade, passou a buscar, por iniciativa própria, uma forma de algebrizar e escreveu o que segue exposto na Figura 21.

Figura 21 – Estudante B escreve representação algébrica de conjectura próxima a desigualdade triangular



Fonte: anotações do estudante B.

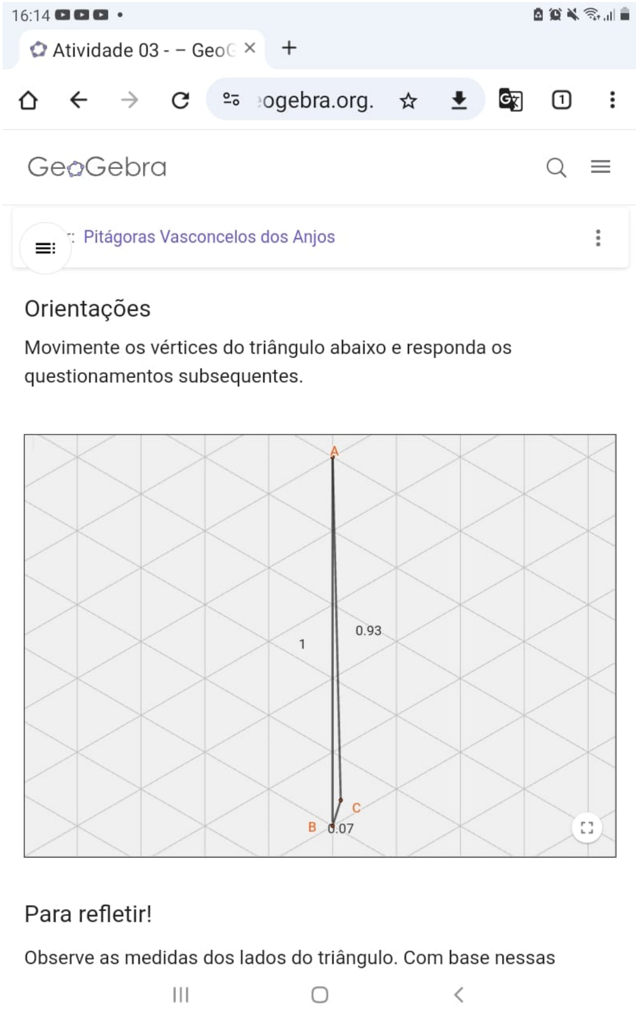
A Figura 22 retrata uma algebrização coerente, contudo incluiu uma afirmação que até então não havia sido discutida, a igualdade. Questionamos o estudante B sobre as motivações para incluir a igualdade e o estudante respondeu afirmando que era uma combinação possível que ele notou ao interagir com o *applet* no GGB. A afirmação nos causou estranhamento e sugerimos ao estudante que verificasse mais uma vez se tal fato era possível. Após um longo período, o estudante B apresentou a seguinte imagem, Figura 22, na tela do *tablet*.

A Figura 22 exibe um dos casos que justificou o estudante B incluir a possibilidade de igualdade na sua conjectura. Essa possibilidade só ocorre em razão da aproximação que o GGB faz para as medidas. Essa situação, na prática, induziu o estudante B ao erro. Observada essa circunstância redirecionamos a discussão para reformulação da conjectura ao questionar o estudante A a respeito dessa questão: A pergunta era: há a possibilidade de igualdade?

A reflexão do estudante A foi mais assertiva, mas seus argumentos foram igualmente baseados na experimentação no ambiente do GGB. A primeira reação do estudante foi de discordância, afirmando que nas suas explorações ele não havia encontrado nada nesse sentido. Após outras investigações, ele afirmou que quando a igualdade ocorria, não existia um triângulo e, sim, uma "reta", um segmento de reta. Do mesmo modo, ele apoiou a sua conclusão na manipulação do triângulo no GGB e no fato de ele próprio não ter conseguido obter um triângulo com as mesmas características do estudante B. Vejamos o que ele escreveu a esse respeito na Figura 23.

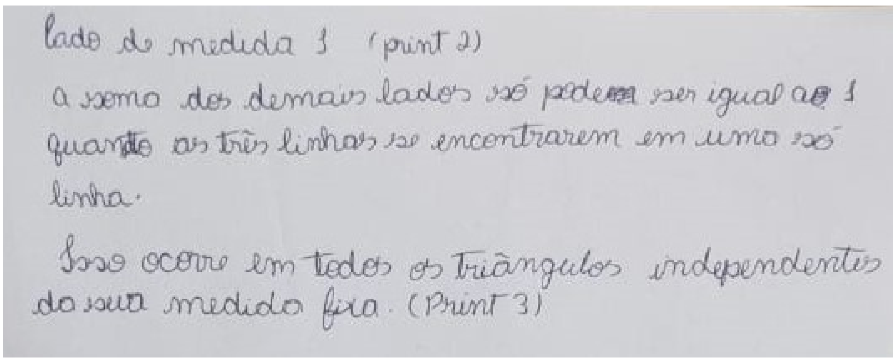
A essa altura da sessão tínhamos duas conjecturas construídas: uma defendida pelo estudante B que dizia que a soma das medidas de dois lados de um triângulo é maior ou igual que a medida do

Figura 22 – *Printscreen* do estudante B mostrando que um triângulo cuja soma das medidas de dois de seus lados é igual a medida do terceiro lado.



Fonte: anotações do estudante B.

Figura 23 – Estudante A refina a conjetura do estudante B de modo a obter um caso particular da desigualdade triangular



lado de medida 1 (print 2)
a soma dos demais lados só podem ser igual a 1
quando as três linhas se encontrarem em uma só
linha.
Isso ocorre em todos os triângulos independentes
da sua medida fixa. (Print 3)

Fonte: anotações do estudante A.

terceiro lado; e, a conjectura defendida pelo estudante A, que afirma que a soma das medidas de dois lados de um triângulo é maior que o terceiro e a igualdade ocorre quando os três pontos são colineares. Evidentemente, na última conjectura, o detalhe da colinearidade descaracteriza o fato de ser um triângulo. Contudo, esse fato não foi observado pelo estudante A.

O estudante A justificou a sua formulação apenas com argumentos de natureza empírica, não trouxe elementos de generalização. O estudante se apoiou nos cálculos realizados pelo estudante B, aqueles presentes na Figura 21, para justificar o fato de a soma das medidas de dois lados ser superior a medida do outro lado. Além disso, também incluiu as observações realizadas no GGB. Ou seja, um argumento que pode ser classificado em uma prova pragmática do tipo empirismo ingênuo. Já a igualdade foi justificada apresentando uma sequência de configurações do desenho nas quais se podia constatar a validade da afirmação na tela do *tablet*, uma prova do tipo empirismo ingênuo.

Por outro lado, o estudante B usou claramente uma verificação empírica, conforme exposto na Figura 21, em um primeiro momento, e iniciou o processo de transferir o resultado da linguagem natural para a linguagem algébrica, o que desencadeou a generalização do resultado, como exposto na Figura 22. Vemos nesses elementos o avanço de um empirismo ingênuo para uma prova pragmática do tipo experimento crucial. Defendemos essa percepção em razão da grande quantidade de verificações empíricas no ambiente com lápis e papel e no ambiente de geometria dinâmica, e pela busca e efetivação de uma representação algébrica para o que se afirma. Entendemos que a escrita algébrica do estudante B indica o momento em que ele passou a observar o triângulo como um representante de classe. Embora o estudante ainda esteja apoiado em ações baseadas em objetos concreto-abstratos, ele busca a generalização em razão da percepção da insuficiência de argumentos empíricos e transita entre as linguagens natural e algébrica com assertividade. Consideramos que este estudante se aproxima de uma prova do tipo exemplo genérico, mas ainda pela perspectiva da prova pragmática dada a necessidade de representação do objeto e pela necessidade de ação sobre o objeto concreto-abstrato.

A sessão foi interrompida em função de problemas de logística logo após as anotações do estudante A presentes na Figura 23, os estudantes envolvidos não puderam permanecer na sessão. Desse modo, não pudemos seguir na análise das conjecturas e na apresentação das demonstrações para aquelas que fossem pertinentes ou contra-exemplos quando necessário. Quanto à fase de discussão, conforme as fases de Ponte *et al.* (2019), avaliamos que esta foi feita de modo contínuo, assim como na primeira sessão, em que os estudantes compartilharam frequentemente as suas conclusões.

Em nossa percepção, a tarefa atingiu os seus objetivos. Conseguimos estimular a produção de provas e os estudantes se afastaram das provas do tipo empirismo ingênuo e caminharam em direção a níveis de provas mais formais, mas ainda sem conseguir materializar por meio da escrita ou ainda da verbalização uma prova efetivamente intelectual. Nesse sentido, notamos apenas indícios de que os mesmos percebem essa necessidade e, em alguma medida, até têm ferramentas para esse tipo de construção, vide passagem da linguagem natural para a algébrica do estudante B.

Por outro lado, esbarramos em um elemento que não havíamos identificado na literatura: os erros induzidos pelo GGB. Nosso quadro teórico destaca a precisão da construção dos objetos em ambientes de geometria dinâmica (Alves e Soares, 2005), mas não inclui as possibilidades de indução ao erro. Notamos que o estudante B fez inicialmente uma conjectura verdadeira, contudo, a manipulação do objeto no ambiente do GGB o fez incluir um novo fato que comprometeu a validade da asserção. Esse problema poderia ser resolvido com um processo de refino da conjectura induzido pelo professor, como fizemos na primeira sessão, porém, não foi possível em razão da já referida necessidade de interrupção da aplicação.

Capítulo 7

Considerações Finais e Perspectivas

Nossa pesquisa se debruçou sobre a demonstração e o seu análogo na matemática escolar, a prova, enquanto objeto de ensino da matemática escolar. Notamos, a partir do levantamento bibliográfico, que este é um tema que desperta pouco interesse do ponto de vista da pesquisa acadêmica, da prática docente ou até mesmo de normas/orientações de Estado. Na expectativa de contribuir com a construção do conhecimento acerca do tema, empreendemos a pesquisa que objetivou discutir de que modo tarefas de natureza investigativa desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo.

Para tal, ampliamos a nossa compreensão sobre o significado da demonstração e discutimos a sua pertinência na Educação Básica. Construímos um quadro teórico que destacou os obstáculos e a complexidade em se abordar tal tema em razão, dentre outras, da pouca produção nacional e da dificuldade em desenvolver situações de prova até mesmo para estudantes de nível superior. Por outro lado, vimos que os ambientes de geometria dinâmica favorecem a exploração e formulação de conjecturas, elementos importantes para a construção de uma situação de prova e, além disso, quando associados a tarefas de natureza investigativa, têm as suas características potencializadas e ampliam as possibilidades de validação de conjecturas.

Na combinação desses elementos, o objeto de estudo, a prova, e as metodologias de ensino, o uso dos SGD e as tarefas de investigação, construímos a nossa sequência didática versando sobre desigualdades no triângulo. Nos propusemos a trazer elementos que pudessem auxiliar na compreensão do problema norteador: de que modo sequências didáticas produzidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática?

Os resultados apontam que essa associação de recursos efetivamente contribui para a construção de situações de prova. Notamos que a sequência didática contribuiu com a construção de provas de vários tipos, em especial, o empirismo ingênuo. Além disso, também auxiliou os estudantes na percepção da necessidade da busca por um tipo de prova mais abstrato, permitindo que alguns estudantes participantes da pesquisa apresentassem provas próximas ao do tipo exemplo genérico.

Podemos analisar o desempenho da sequência didática a partir de dois elementos fundamentais: a formulação de conjecturas, que foi o caminho escolhido para estimular a construção de provas; e a produção de provas.

A sequência didática favoreceu a construção de conjecturas e os recursos do GGB foram fundamentais nesse sentido. A formulação de uma conjectura estável perpassa por diversas pequenas verificações, provas, geralmente baseadas no empirismo ingênuo e que são possíveis em razão do *feedback* instantâneo dado pela ferramenta arrastar. Ela permitiu que vários testes fossem realizados muito rapidamente, apresentando, assim, ao estudante, configurações do objeto geométrico que não foram imaginadas, mas que se constituem como um contra-exemplo para a conjectura inicial que pôde ser progressivamente reformulada ou refutada.

Notamos essa situação, por exemplo, no desenvolvimento da tarefa 01 quando o estudante reformula a conjectura *"em um triângulo o ângulo externo é sempre maior que os internos"* para *"em um triângulo o ângulo externo é sempre maior que os internos não adjacentes"*. A construção de uma conjectura estável perpassa pela capacidade da formulação se manter percebida como verdadeira para uma grande quantidade de casos. Essa foi uma ação recorrente dos estudantes nessa pesquisa, eles verificavam em uma grande quantidade de casos até perceberem que algo se mantinha em todos eles. Essa percepção da necessidade de verificar vários casos revela que o estudante percebe a limitação do empirismo ingênuo e, para realizar uma afirmação, ele precisa de, pelo menos, um argumento do tipo exemplo genérico. Com isso, percebemos que até a formulação de uma conjectura estável, de maior complexidade, o estudante é confrontado com a necessidade de argumentar a cerca da validade de uma afirmação, em geral, essa prova, por nossas observações, ocorre por contra-exemplo sustentada em um empirismo ingênuo ou experimento crucial.

O elemento fundamental desse trabalho é estimular a produção de provas, em especial, deslocar o estudante das provas pragmáticas às provas intelectuais. Avaliamos que fomos assertivos quanto a essa questão, verificamos a produção de provas do tipo empirismo ingênuo e exemplo crucial. Apesar dos estudantes, quando em contato com a necessidade de argumentação, utilizarem quase que de modo automático uma prova do tipo empirismo ingênuo como forma de validação, eles notaram, por meio de provocações do professor e das explorações no GGB, as limitações que esse tipo de argumento apresenta e passaram a buscar e efetivamente produzir provas de outros tipos. Notadamente, as provas do tipo empirismo ingênuo foram as mais recorrentes quando os estudantes eram provocados a produzir provas da validade de conjecturas estáveis, em alguns casos, eles notaram a limitação desse tipo de argumento e buscaram construir uma prova do tipo exemplo genérico, inclusive apresentando elementos de generalização, notando o objeto geométrico enquanto um representante de classe, mas sem efetivamente produzir um argumento escrito ou oral que pudesse ser classificado como uma prova do tipo exemplo genérico.

Consideramos que instigar a percepção do limite da prova, até que ponto ela consegue garantir validade de uma dada asserção, foi uma estratégia eficaz para mostrar a necessidade de buscar outro argumento, outra prova. Contudo, notamos que isso não é suficiente para o avanço a um tipo de prova mais abstrato, as provas intelectuais, existem as limitações dos estudantes sobre o conhecimento do objeto matemático, a linguagem e, sobretudo, o nível do pensamento algébrico.

Esses elementos criam uma barreira à produção de provas e esse foi o nosso maior entrave. Além disso, nossa sequência não contemplou um estudo estruturado em maior período de tempo - foram apenas 3 sessões - que previsse atuar para mitigar essas dificuldades que requerem maior tempo e, certamente, uma outra estrutura de sequência.

De todo modo, conseguimos verificar empiricamente que as tarefas investigativas desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica, criam uma situação de exploração de objetos de modo a permitir observação de padrões, o teste de hipóteses, a refutação e refino de conjecturas, a comunicação e a defesa da validade das afirmações observadas. A particularidade da ferramenta arrastar, permite que as verificações sejam realizadas de modo ágil, permitindo, assim, que o estudante seja confrontado rapidamente com uma conjectura virtualmente verdadeira para a qual precisa-se construir uma prova.

Embora consideremos que o uso de um ambiente de geometria dinâmica tenha sido fundamental para alcançar nossos objetivos, não podemos deixar de destacar as suas limitações, como vimos na tarefa 03, quando o estudante foi induzido a concluir que a soma das medidas de dois lados de um triângulo pode ter a mesma medida que o terceiro. Situações como essa, que não foram previstas na fase de elaboração das tarefas, podem ser exploradas de modo a ampliar a compreensão dos estudantes sobre outras questões da matemática. Neste caso, a percepção de que toda medida empírica é aproximada.

Essa questão se relaciona diretamente com outra: o papel do professor em tarefas que tenham a pretensão de criar situações de prova. O professor precisa ter uma postura investigativa e atenta às possibilidades que a situação e os estudantes apresentam para não perder oportunidades que instiguem e direcionem à produção de provas e à compreensão da matemática de modo amplo. Além disso, nos referimos também não apenas ao papel que pode ser descrito e sugerido, mas aos aspectos de relacionamento com os estudantes que permitem, por exemplo, que eles se sintam à vontade com o erro, com a exposição oral das ideias, com a construção do próprio registro escrito e em apresentar discordância do professor (e dos colegas).

No mais, durante o desenvolvimento desta pesquisa, notamos, como já nos referimos, a pouca produção a respeito do tema, em especial, notamos a ausência de pesquisas que se debrucem sobre os documentos de referência, destacadamente a Base Nacional Comum Curricular e o Documento de Referência Curricular da Bahia (DCRB) que são, naturalmente, temas que podem fomentar novas pesquisas. Outras investigações também podem se concentrar sobre a relação entre a linguagem e a produção de provas; a influência da relação entre professor e estudantes na produção de provas; e em pesquisas que esbocem um estado da arte sobre esse tema, em especial nas últimas duas décadas.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. *Grupo de Educação Matemática GT*, v. 19, 2007. Disponível em: <https://anped.org.br/wp-content/uploads/2024/05/gt19-2957-int.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2024.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos. *Grupo de Educação Matemática GT*, v. 23, 2000. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2024.

ALVES, G. d. S.; SOARES, A. B. Um estudo sobre os recursos, as potencialidades e as limitações dos softwares de geometria dinâica. *Relatório Técnico NCE*, Brasil, 2005.

ANJOS, P. V. d. *Atividades de Investigação Matemática em Ambientes de Geometria Dinâmica: suas potencialidades para a construção da prova matemática*. 2016. Monografia de Especialização. Universidade do Estado da Bahia.

BALACHEFF, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colômbia: una empressa docente, 2000. Disponível em: <https://hal.science/hal-00520133v1/document>. Acesso em: 04 jan. 2025.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1, p. 770–815, 2022a. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57664/39411>. Acesso em: 24 mar. 2024.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. A devolução de um problema e a construção de uma conjectura, o caso da soma dos ângulos de um triângulo. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1, p. 872–950, 2022b. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57669/39413>. Acesso em: 24 mar. 2024.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. Controle, prova e demonstração: três regimes de validação. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1, p. 816–871, 2022d. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668/39412>. Acesso em: 24 mar. 2024.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. Estudo dos processos de prova dos alunos no colégio. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1, p. 698–721, 2022e. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57663/39409>. Acesso em: 24 mar. 2024.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a pesquisa de desenvolvimento na educação matemática? *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8, n. 18, 2015.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BERLINGHOF, W. P.; GOUVêA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia prático para professores e entusiastas*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 79–90, 2002. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10595/6984>. Acesso em: 18 jan. 2024.

BORBA, M. C. Pesquisa qualitativa em educação matemática. In: *Anais da 27ª reunião anual da Anped*. [s.n.], 2004. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/228889292_A_PESQUISA_QUALITATIVA_EM_EDUCACAO_MATEMATICA>. Acesso em: 30 abr. 2024.

BORBA, M. C.; ARAúJO, J. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2023.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2021.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Secretaria de Educação Básica. MEC/SEB, 2018.

BROCARDO, J. *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano*. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa, 2001.

COSTA, V. M. Utilizando argumentações, provas e refutações em sala de aula de geometria como contribuições ao desenvolvimento do senso crítico do educando. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 37, n. 75, p. 352–370, 2023.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A. *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A. *O Sonho de Decartes*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Atual, 2019. v. 9.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10593/6982>. Acesso em: 18 jan. 2024.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, M. B. C. *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Tese (Doutorado) — PUC, São Paulo-SP, 2016.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993.

GARCIA, R. Q*: Por que a nova corrida por ia matemática intriga e assusta? *O Globo*, Rio de Janeiro-RJ, 2023. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/economia/tecnologia/noticia/2023/12/03/q-por-que-a-nova-corrida-pela-ia-matematica-intriga-e-assusta.ghtml>.

GARNICA, A. V. M. É necessário ser preciso? é preciso ser exato? "um estudo sobre argumentação matemática"ou "uma investigação sobre a possibilidade de investigação". In: *Formação de Professores de Matemática: Um visão multifacetada*. ediPUCRS, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Vicente2.pdf>. Acesso em: 03 dez. 2023.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 91–99, 2002. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10596/6985>. Acesso em: 03 dez. 2023.

GARNICA, A. V. M. G. *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. Tese (Doutorado) — Unesp, Rio Claro-SP, 1995.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas SA, 2017.

GRABINER, J. V. Why proof? a historian's perspective. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*, Springer Netherlands, p. 147–167, 2012. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-94-007-2129-6.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2023.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1–13, 1996.

GRAVINA, M. A. *Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: *Anais do IV congresso Brasileiro de informática na educação*. [s.n.], 1998. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/malice-lsantarosa_aprend-mat-amb-inform_1998-iv_ribie.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2025.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, v. 44, p. 5–23, 12 2000.

HONSBERGER, R. *Gens III*. USA: The Mathematical Association of America, 1985.

JANZEN, E. A. *O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LAKATOS, I. *A Lógica do descobrimento matemático*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

LIMA, E. L. *Curso de Análise Vol. 1*. 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MARCONI, A. M.; LAKATOS, E. *Fundamentos da metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2003.

MARRADES, R.; GUTIÉRREZ, Á. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 44, p. 87–125, 2000.

MATHEUS A., R. *Argumentação e prova na matemática escolar*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo-SP, 2016.

MELLO, E. *Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria*. Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo, 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NAGAFUCHI, T. *Um Estudo Histórico-filosófico Acerca do Papel das Demonstrações em Cursos de Bacharelado em Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2009.

NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, J. C. *O estado do conhecimento sobre geometria plana no Ensino Médio utilizando softwares de geometria dinâmica (1987 a 2017)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiania, 2020.

OLIVERO, F. *The proving process within a dynamic geometry environment*. Tese (Doutorado) — Universidade de Bristol, Inglaterra, 2002.

ORDEM, J. *Prova e Demonstração em Geometria Plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique*. Tese (Doutorado) — PUC, São Paulo-SP, 2015.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

PONTE, J. P. da. Explorar e investigar em matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 6, n. 21, p. 13–30, 2010.

REID, D.; KNIPPING, C. *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Brill, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kXofEAAAQBAJ>. Acesso em: 04 jan. 2025.

ROBERTS, S. A inteligência artificial está chegando também à matemática. *Folha de São Paulo*, São Paulo, 2023. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2023/07/a-inteligencia-artificial-esta-chegando-tambem-a-matematica.shtml>.

ROSALE, A. R. *Argumentação e prova matemática na Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo-SP, 2018.

SEGURADO, I.; PONTE, J. P. da. Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, v. 7, n. 2, p. 5–40, 1998.

SILVA, J. J. da. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10594/6983>. Acesso em: 18 jan. 2024.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 18. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

SOUZA, H. Informática na educação e ensino de informática: algumas questões. *Em Aberto*, v. 2, n. 17, 1983.

TARSKI, A. Truth and proof. *Scientific American*, JSTOR, v. 220, n. 6, p. 63–77, 1969.

TRINH, T. H. et al. Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 625, n. 7995, p. 476–482, 2024.

VALENTE, J. A. A.informática na educação do brasil: análise e contextualização da história. In: *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas-SP: UNICAMP/NIED, 1999.

VILLIERS, M. d. Papel e funções da demonstração no trabalho com o shetchpad. *Educação e Matemática*, n. 63, p. 31–36, 2001.

VILLIERS, M. de. Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica. *Trad. Rita Bastos. ProfMat*, v. 10, 2002.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP, 2002.

APÊNDICE A

Produto Educacional

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos
Marina Cassol

Desigualdades no Triângulo: uma proposta de investigações que conduzam à prova

Salvador-Ba, 2025

Desigualdades no Triângulo

Uma proposta de investigações que conduzam à prova

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos
Mariana Cassol

Conteúdo

Apresentação

O presente trabalho, uma sequência didática, é uma das produções resultantes da pesquisa de dissertação de mestrado do primeiro autor. Foi desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT) vinculado ao Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA). A pesquisa teve o objetivo de desenvolver tarefas de natureza investigativa em ambientes de geometria dinâmica de modo a contribuir com a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo. Nela, apresentamos, discutimos e analisamos os resultados obtidos na aplicação desta sequência didática, assim como desenvolvemos o quadro teórico que nos orienta na interpretação dos dados coletados.

O leitor interessado em uma breve análise dos resultados dessa pesquisa pode consultar Anjos e Cassol (2024) e, aqueles interessados em uma análise completa, Anjos (2025). Aqui, temos o objetivo de apresentar a sequência didática em questão e alguns elementos teóricos que a fundamentam, em especial, aos professores da Educação Básica que têm interesse em abordar a prova e/ou a demonstração em sala de aula. Esta sequência também pode ser relevante para aqueles que buscam tarefas de natureza investigativa, atividades de geometria dinâmica ou ainda àqueles que pretendem abordar as desigualdades no triângulo. Evidentemente, esta sequência não é definitiva sobre o tema, cabe ao professor avaliar a sua pertinência para aplicação com os seus estudantes, assim como eventuais ajustes com vistas a adequar a realidade de seus educandos.

Precisamos destacar, ao leitor, que nosso objeto de interesse é a prova e/ou a demonstração, que, como veremos, não entendemos como sinônimos. Desse modo, o objeto de conhecimento matemático, as desigualdades no triângulo, é apenas um fio condutor para o que pretendemos estimular, a prova. O critério de escolha do conteúdo matemático foi quase pessoal, mas há evidências de que a geometria é uma área fértil ao desenvolvimento de provas e demonstrações em razão do seu apelo visual.

Estruturamos este trabalho do seguinte modo. No primeiro capítulo, apresentamos o nosso objeto de estudo: a demonstração. Discutimos o que é uma demonstração, as suas funções e investigamos a sua origem. Encerramos o capítulo aproximando o tema demonstração da sala de aula, apresentando e classificando formas mais simples de argumentação que podem ser consideradas válidas para os estudantes da Educação Básica: a prova. As estratégias que usamos para criar uma situação de prova: o uso dos ambientes de Geometria Dinâmica (GD) e as tarefas investigativas, são discutidas no segundo capítulo, onde conceituamos cada uma das metodologias de ensino e discutimos brevemente as suas relações com a criação de uma situação de prova. Encerramos o trabalho, no terceiro capítulo, apresentando a sequência didática, tarefa a tarefa, sinalizando as habilidades e competências às quais podem ser relacionadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e tecendo alguns comentários gerais sobre a aplicação a partir de nossa experiência.

Capítulo 1

Demonstração: da origem à sala de aula

1.1 O que é demonstrar e qual a sua função?

É lugar comum o relato dos estudantes de licenciatura em matemática sobre o impacto da mudança de paradigma entre a matemática que é vista na Educação Básica e aquela que é apresentada no nível superior. A demonstração é o cerne dessas questões, visto que não costuma ser um objeto de estudo da Educação Básica, na prática, nem do nível superior, que se preocupa mais em ensinar a demonstrar do que ensinar sobre ela. Quando estudantes, não fomos apresentados a uma definição de demonstração, aprendemos vendo o que é feito pelos professores e replicando as mesmas ações (Bicudo, 2002). Um estudo da demonstração, diga-se de passagem, está mais próximo da filosofia e da epistemologia, como podemos ver em Nagafuchi (2009), do que da matemática propriamente dita, ela não é um objeto matemático, mas, sim, uma ferramenta com a qual se estuda os objetos dessa ciência.

Uma análise do conceito de demonstração a partir de sua função lógico-epistemológica, como posto por Da Silva (2002) nos permite compreendê-la como um objeto lógico ideal, estruturado como "[...]árvores ou seqüências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou conseqüência, lógica"(p. 69). Outros autores, ao definir uma demonstração, também evidenciam essa função. Para Tarski (1969) a demonstração de uma dada afirmação consiste no encadeamento finito de afirmações de tal modo que a primeira afirmação na sequência é um axioma, as afirmações seguintes são axiomas ou são consequências diretas das afirmações que antecedem aquela que se deseja demonstrar, e a última afirmação é exatamente aquela que se pretende demonstrar.

Essas noções estão de acordo com os exemplos de demonstrações que vemos nos livros e aulas. Contudo, existem outros aspectos que também estão presentes nos livros e aulas, mas em menor intensidade, que nos ajudam a compreender a demonstração de um modo mais completo: a função retórica e a heurística, também categorizadas por Da Silva (2002).

A função retórica destaca a capacidade da demonstração de convencer um grupo de pessoas que tenham conhecimento em matemática sobre a tese defendida. Da Silva (2002, p. 71) diz "[...] uma demonstração é algo capaz de induzir uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático". Bicudo (2002) também destaca a função retórica ao conceber a demonstração como um argumento que tem por finalidade gerar *aceitação da validade* de uma afirmação a partir de outras asserções que já tenham sido previamente demonstradas, mas sem entrar em ciclos como vemos nos dicionários. De Villiers (2001) ao contribuir com a discussão sobre a função retórica da demonstração, aponta elementos que auxiliam nesse processo de convencimento, o empirismo "[...] Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva".

Os aspectos lógico-epistemológico e retórico podem coexistir de modo independente, contudo, Da Silva (2002) pontua que não é possível que o lógico-epistemológico coexista com a função heurística. O autor defende que a demonstração é um condutor da descoberta matemática quando ela contém erros lógicos que desencadeiam um novo processo de busca e compreensão do objeto matemático em questão.

Outros autores também apresentam uma análise da demonstração a partir de suas funções, para De Villiers (2001), por exemplo, existem 5: verificação, explicação, comunicação, sistematização e descoberta. Conhecer as funções da demonstração não é apenas uma necessidade teórica, ela orienta a prática como notamos em De Villiers (2001) ao descrever o uso das funções da demonstração como uma forma de estimular os estudantes a buscarem uma demonstração. Ele descreve uma atividade desenvolvida em um ambiente de geometria dinâmica com o *software Sketchpad* na qual ressalta que a função de verificação, quando analisada neste, fica fragilizada, uma vez que o usuário do software pode ser impelido a não ver a necessidade de demonstrar, já que a manipulação dos objetos no ecrã cria, de modo empírico, a convicção da validade. Neste caso, o uso da função de desafio intelectual foi determinante para impelir os estudantes a demonstrarem, eles foram desafiados a explicar, usando argumentos dedutivos, as razões de tal fato ser verdadeiro.

Pesquisas em Educação Matemática,como Ferreira (2016), que convergem para a necessidade de abordar a demonstração em sala de aula optam por estabelecer uma distinção entre provar e demonstrar. Essa distinção se dá pela necessidade de nomear os distintos processos de validação que são usados pelos estudantes e que devem ser considerados como uma forma válida de argumentar e que não são demonstrações tais como as concebemos na matemática acadêmica. Dessa forma, para nós, prova é: uma explicação que tem como finalidade convencer um determinado grupo de pessoas sobre a validade de uma afirmação, já a demonstração: é uma prova na qual o grupo de pessoas é a comunidade dos matemáticos. Nesses termos, a prova é uma generalização da demonstração nos termos que anunciamos ao longo desta seção.

1.2 As origens da demonstração e seu desenvolvimento

Os processos de validação em matemática nem sempre foram organizados e sistematizados do modo que expusemos, em forma de demonstração. As validações ocorriam por verificação prática ou ainda por meio de provas visuais. Contudo, isso não foi um impeditivo ao desenvolvimento da matemática, civilizações da antiguidade, como a egípcia e a babilônica, desenvolveram sistemas de numeração próprios, aritmética, algoritmos para a solução de sistemas lineares, assim como noções de área e volume (Berlinghoff; Gouveia, 2010). Também determinaram, de modo independente, aproximações para o valor de π: 3,16, os egípcios, e 3,125, os babilônios.

Situações como essa teriam levado os gregos a buscarem uma forma de evitar a multiplicidade de respostas a um mesmo problema, admitindo apenas como argumento plausível aqueles que se baseavam em suposições que fossem evidentes a todos e, a partir delas, deduzir as demais (Grabiner, 2012). Essa pode ter sido a gênese dos axiomas. Outras contribuições dos gregos antigos podem ser observadas em alguns personagens famosos e livros igualmente reconhecidos. Tales de Mileto (600 a.C) foi o primeiro a produzir uma demonstração e Pitágoras de Samos (532 a.C) junto a sua irmandade pitagórica, teriam sido os responsáveis por introduzir em suas pesquisas temas de natureza abstrata e o tratamento dedutivo (Proclo, sec. V *apud* Domingues, 2002). Segundo Domingues (2002) os pitagóricos teriam encadeado "[...] raciocínios para estabelecer propriedades e encadear[am] propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria (p.57-58).

O personagem que, individualmente, é o ponto de inflexão é Euclides de Alexandria (300 a.C). *Os Elementos* na prática são um conjunto de 13 volumes que apresentam um estudo lógico-dedutivo sobre geometria e aritmética, é a obra mais antiga que sobreviveu ao tempo e às pessoas que retratam a matemática desse prisma. Juntos, os 13 volumes apresentam 465 proposições que são resultado de um trabalho de compilação e organização dos conhecimentos de geometria e aritmética gregos existentes até então. Os conteúdos são apresentados seguindo o padrão: definição, postulados, proposições, demonstração e sem a noção de conceito primitivo, elemento só viria a surgir quase 2 milênios depois (Eves, 2004).

Por volta do século XIX, o tempo já apontava as fragilidades de *Os Elementos*, que apesar de nos milênios que seguem a sua construção ter influenciado obras de grandes nomes como Isaac Newton e Barush Spinoza que seguiram o seu parâmetro de rigor (Grabiner, 2012), precisava de uma reestruturação para atender os novos padrões de demonstração. Quem melhor empreendeu esse trabalho foi David Hilbert que em sua abordagem incluiu os conceitos primitivos de ponto, reta e plano como os elementos iniciais a partir dos quais todos os demais fatos decorrem sem uso de qualquer intuição geométrica (Domingues, 2002). Essa reestruturação segue até os dias de hoje.

Possivelmente o próximo paradigma que envolve a demonstração está relacionado ao computador e às provas por ele assistidas, quer seja por meio de cálculos auxiliares ou, mais recentemente, pelo uso das Inteligências Artificiais (IA). A primeira prova assistida por computador foi a do teorema das quatro cores em 1976, na qual o computador foi usado para fazer uma quantidade gigante de cálculos que auxiliaram na construção da demonstração (Domingues, 2002). Quase em concomitância, vemos os primeiros estudos sobre o uso de IA na demonstração de teoremas. Hoje, a IA com melhor desempenho, o AlphaGeometry, é capaz de criar demonstrações sem a intervenção humana e sem ter como exemplo em sua base de dados uma demonstração. Ela opera usando um motor simbólico e um conjunto de regras lógicas que são previamente informadas como permitidas. Uma vez diante de um problema, a IA o traduz da linguagem corrente para a sua linguagem, separando a hipótese da tese e usa o motor lógico para produzir afirmações que sejam logicamente verdadeiras. Se alguma das afirmações produzidas for a tese, o problema está demonstrado, se não, a IA cria um elemento geométrico, como um ponto ou segmento, e repete o processo, produzindo conclusões que envolvem esse novo objeto. Esse modelo de IA generativa se mostrou eficiente para resolver problemas olímpicos de matemática, tendo um índice de acerto próximo ao de um medalhista de ouro da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) (Trinh *et al.*, 2024).

Desde que foi concebida na Grécia Antiga, a demonstração é uma presença constante na matemática que assume os mais diversos papéis. É difícil precisar quais os próximos passos dos processos de validação em matemática, mas acreditamos que isso passa por discutir o papel que o computador e as IAs têm na produção de demonstrações. Para além, a nós, educadores, há uma questão mais preeminente: dada a relevância, pelo menos histórica, na matemática, qual o papel que a demonstração tem desempenhado na Educação Básica?

1.3 A demonstração na sala de aula: a prova

A demonstração é um elemento central do desenvolvimento da matemática ocidental, ela não apenas acompanha esse desenvolvimento como também o motiva. A par dessa importância, podemos discutir o papel que a demonstração tem ou poderia ter em sala de aula da Educação Básica.

Moreira e David (2005) trazem uma importante discussão sobre matemática acadêmica e matemática escolar que nos auxiliam nessa tarefa. Há concepções de matemática acadêmica que a colocam em um lugar hierarquicamente superior a matemática escolar e outros constroem a ideia de matemática escolar como campo independente da matemática. Contudo, assim como nós, Moreira e David (2005) buscam uma concepção que não seja científica didatizada ou uma construção autônoma e definem "[...] *matemática Escolar* referir-se-á ao conjunto de saberes 'validados' associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica no ensino de matemática"(p. 20, destaque no original). Desse modo, a sua concepção engloba, a um só tempo, a necessidade de validação dos saberes discutidos na Educação Básica e as práticas profissionais do professor de matemática.

A matemática escolar, assim como a matemática acadêmica, está ancorada na prática dos seus respectivos profissionais. O matemático profissional desenvolve o seu trabalho na fronteira do conhecimento, produzindo resultados inéditos com métodos de pesquisa e procedimentos de validação próprios e os comunica de modo formal e rigoroso. Por outro lado, o professor de matemática da Educação Básica, tem outros objetivos e objetos e, portanto, em sua prática surgem outras formas de definir objetos, investigar relações e validar argumentos em razão da natureza educativa do seu trabalho.

Observada sob o prisma da matemática escolar, a função de verificação da demonstração, por exemplo, passa a ter uma existência questionável, dado que os objetos de conhecimento da matemática escolar já passaram pelo processo de verificação da matemática acadêmica antes de compor as estruturas curriculares. Por essa e outras questões, a validação deve ter uma forma distinta daquela presente no modelo lógico-dedutivo. Nesse sentido, as dobraduras em papel podem ser aceitas como uma validação de uma conjectura sobre um objeto geométrico (Moreira; David, 2005). O fundamental na demonstração, quando observada sob a ótica da matemática escolar, não é o encadeamento dedutivo associado à função de sistematização da demonstração, mas, sim, a construção de argumentos que possibilitem ao estudante usar o fato demonstrado de modo coerente na vida, inclusive, extraescolar.

> Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições, conceitos primitivos de uma teoria e, no contexto educativo escolar, promover o desenvolvimento

> de um[a] convicção profunda a respeito da validade desse resultado (Moreira; David, 2005, p. 24) .

Partindo da premissa de observar os processos de validação que são usados na matemática escolar, Balacheff (2022a) classificou os processos de argumentação em duas grandes categorias: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. As provas pragmáticas, são aquelas cujos argumentos são baseados na experimentação, na ação concreta, como medições do objeto e cálculos, ela é dividida em três tipos de provas: empirismo ingênuo, experimento crucial e exemplo genérico. As provas intelectuais, por sua vez, são baseadas em argumentos distantes da ação sobre os objetos, o argumento considera o objeto como um representante de classe, têm um maior nível de abstração, encadeamento lógico e domínio da linguagem; elas podem ser do tipo: exemplo genérico e experiência mental. Abaixo descrevemos os tipos de prova descritos por Balacheff (2022a)

- *Empirismo ingênuo*: um tipo de argumento no qual a validade de uma conjectura é garantida por meio da verificações como medições e testes em uma quantidade pequena de situações e/ou objetos.

- *Experimento crucial*: o argumento nesse caso parte da percepção empírica, mas o próprio estudante nota que é uma ação limitada. É esperado que os argumentos nessa etapa contenham uma grande quantidade de testes, mas com a percepção de que eles são suficientes apenas quando conseguem verificá-los em um caso particular do problema que julgam como caso extremo. Nesta fase as limitações de linguagem impedem a construção de uma prova mais complexa.

- *Exemplo genérico*: os argumentos que se enquadram nessa categoria contêm formulações que indicam generalização e o princípio da percepção dos objetos matemáticos enquanto representante de classe. Esse tipo de argumento é visto como um ponto de inflexão entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais, estando ora classificado como prova pragmática, ora como prova intelectual a depender da relação do argumento apresentado com a representação e a ação sobre o objeto de estudo. É importante destacar que para abandonar a representação material, os estudantes devem ter uma linguagem bem desenvolvida.

- *Experiência mental*: os argumentos neste tipo de prova não precisam da representação material e a ação acontece sobre as representações mentais do objeto matemático. É entre este tipo de prova e a anterior, exemplo genérico, que acontece a transição das provas pragmáticas às intelectuais, a partir do desenvolvimento da linguagem, cognição e capacidade de abstração.

Essa tipologia de provas nos apresenta uma importante ferramenta para classificar os processos de validação que são oferecidos pelos nossos estudantes e também por apontar caminhos que podem nos auxiliar a elevá-los a níveis progressivamente superiores de prova. Nesse processo de estímulo à produção de provas, existem, naturalmente, alguns obstáculos. Mello (1999) destaca alguns deles: os epistemológicos, os didáticos e os linguísticos.

- *Epistemológicos*: se referem aos saberes historicamente conflituosos que foram encorporados à matemática. Por exemplo, a prova por absurdo, o uso de desenhos prototípicos, os diferentes registros de representação de um objeto e a rede semântica.
- *Didáticos*: são aqueles que se referem a escolhas a nível de Estado como a construção de documentos norteadores e presença do tema em livros didáticos. Também é percebido a nível de sala de aula com a incorporação ou não de processos de validação nas atividades desenvolvidas Ou seja, são obstáculos presentes no sistema educativo como um todo e nas escolhas metodológicas do professor.
- *Linguísticas*: se refere a capacidade do estuante de ler um texto e poder interpretá-lo. Também se estende a possibilidade de compor uma solução articulado argumentos distintos dentro de um texto com coerência.

Uma vez decididos a abordar a prova e demonstração na sala de aula, cientes dos obstáculos e dos tipos de prova, existem possibilidades metodológicas que podem nos auxiliar a mitigar os obstáculos e criar uma situação de prova: as tarefas investigativas e os *softwares* de geometria dinâmica (SGD). Juntas, elas oferecem um ambiente atrativo que possibilita a exploração e investigação, e fomenta a produção de conjecturas e provas, como veremos a seguir.

Capítulo 2

Metodologias de ensino que contribuem com a construção da prova

Criar uma situação na qual seja possível estimular o estudante a demonstrar não é algo simples. A literatura apresenta, inclusive, casos em que os autores avaliam a empreitada como "pretensiosa"e destacam como um dos obstáculos a necessidade de um trabalho de longo prazo, como vemos em Mello (1999) e Mello e Almouloud (2000). Contudo, destacamos o recente crescimento das pesquisas com relação a esse tema e a inclusão dessa demanda em documentos normativos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A tipificação das provas de Balacheff (2022a) e os obstáculos percebidos por Mello (1999) já nos ofertam alguns elementos que podem nos nortear no sentido de construir uma situação de prova. Outras percepções acrescidas a estas. Rosale (2007) aponta que uma abordagem a prova e demonstração não pode ser baseada na exibição da demonstração na lousa, deve ser valorizado o processo visando a construção de habilidades de argumentação no educando. Por outro lado, de modo mais enfático, Boero (1996, *apud* Almouloud 2007) coloca algumas condições sob as quais conseguiu criar uma situação de prova com estudantes de 9º ano:

> [...] colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:
>
> • durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;
>
> • durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas ("argumentos") produzidas

> durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica (Boero, 1996 *apud* Almouloud, 2007, p.02).

Identificamos que as tarefas de investigação matemática e os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir com as condições observadas por Boero (1996) de modo a criar situações de prova. Além disso, também notamos em Ponte *et al.* (2019) as potencialidades das tarefas investigativas e em Gravina (1996; 2001) as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica em criar uma situação de prova. Em Anjos e Cassol (2024) e Anjos (2025) vemos como a integração dessas metodologias pode ser um aliada na construção de situações de prova.

2.1 A Geometria dinâmica

Os programas de geometria dinâmica se diferenciam dos demais programas de geometria por permitirem a manipulação dos objetos de modo interativo (Oliveira, 2020). Eles oferecem recursos que são compatíveis com régua e compasso digitais e a possibilidade de modificar esses elementos por meio da ferramenta arrastar, permitindo assim a construção de uma infinidade de objetos que possuem um conjunto de características fixas, no mínimo, aquelas que os definem e que foram impostas na construção inicial. O objeto geométrico em um ambiente de geometria dinâmica é, portanto, um representante de classe cuja escolha por este ou aquele representante é uma questão de conveniência para a solução do problema em questão (Gravina, 2001).

Alves e Soares (2005) listam algumas características dos *softwares* de geometria dinâmica: a construção de objetos com precisão e variedade, exploração e descoberta, visualização e representação, e a prova.

A *precisão na construção de objetos* favorece o fim dos desenhos prototípicos, aqueles que são costumeiramente desenhados para exemplificar uma forma geométrica, como um quadrado com os lados paralelos aos lados da lousa. Os desenhos prototípicos podem contribuir para uma compreensão equivocada do objeto ao permitir, não intencionalmente, a inclusão de particularidades do desenho na definição do objeto. Gravina (2001) agrega que o fim dos desenhos prototípicos permite que os estudantes observem subconfigurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, auxiliando no desenvolvimento de uma argumentação.

A *exploração e a descoberta* é possibilitada por meio das atividades que são disponibilizadas nesses ambientes que podem ser de dois tipos: as atividades de exploração, também chamadas de caixa preta, quando não há possibilidade de inclusão de novos elementos, o estudante pode manipular apenas o que já está posto na tarefa, e as atividades de expressão, aquelas em que o estudante pode fazer construções conforme sinta vontade ou necessidade. Em ambos os casos, os estudantes têm a possibilidade de movimentar os objetos independentes, de modo a visualizar uma família de subconfigurações dos objetos desenhados em tela, essa manipulação é uma forma de exploração que pode permitir a observação de relações, a formulação de conjecturas e a criação de novas questões de exploração.

A *visualização ou representação mental* dos objetos geométricos é um importante recurso dos SGD e é por meio dela que os fatos estáveis implícitos, as características que permanecem invariantes mesmo que sob ação do movimento, emergem em uma situação de exploração. As experiências visuais possibilitam a formação de conceitos e conduzem a representação mental correta do objeto (Gravina, 2001).

As potencialidades dos SGD até aqui elencadas, como podemos notar, permitem a construção de habilidades que favorecem a construção da prova. Alves e Sores (2005), contudo, destacam a *prova* como a quarta e última potencialidade identificada por eles. Diversos autores convergem com essa percepção e atribuem essa potencialidade aos mais diversos fatores. A título de exemplo, Gravina (1996) afirma que a prova é favorecida em razão do equilíbrio entre os campos conceitual e figural do objeto geométrico, e Marioti (2000, *apud* Zulatto 2002) aponta que a prova surge em razão da demanda por uma explicação do porquê alguns fatos funcionam e outros não.

Desse modo, já cientes das possibilidades que os SGD possuem, precisamos discutir a natureza das tarefas que devem ser construídas nesse ambiente, já que tarefas exploratórias, que engajem o educando no processo de investigação, são um elemento fundamental na construção da prova.

2.2 As Tarefas de Investigação

Ao contrário do que pode parecer, uma investigação não necessariamente é um processo altamente complexo, com diversas etapas que podem ser realizadas apenas por um seleto grupo de pessoas com inteligência acima da média e que conduzem a grandes revoluções. Investigar trata-se da busca de respostas para um problema de interesse do pesquisador (Ponte *et al.*, 2019). Evidentemente a complexidade desse processo está ligada aos problemas que são formulados pelo pesquisador e a forma com a qual ele opta por abordar o problema.

A matemática, assim como as demais ciências, tem os seus próprios objetos e métodos de investigação. Contudo, Lakatos e Marconi (2003) classificam a matemática, juntamente com a lógica, como uma ciência formal, uma classificação completamente diferente das demais em razão das particularidades do seu processo de validação. Por exemplo, na física, os experimentos têm o status de um processo de validação legítimo, aceitos pelos pares, o que não acontece com a matemática (Singh, 2011). O experimento em matemática é um elemento forte e relevante como um contra-exemplo e, em especial, como um contra-exemplo, que auxilia em um processo de investigação que conduz a um refino de uma conjectura. No mais, a experimentação e o teste têm um aspecto secundário na matemática acadêmica. Mas para nós, do ponto de vista da matemática escolar, é um primeiro processo de validação que deve ser, ao seu tempo, estimulado e confrontado com os próprios limites.

A matemática é construída por meio dessa dialética entre provas - no sentido de demonstração, apenas para manter a nomenclatura original do autor, Imre Lakatos (1976) - e refutações. Diante de um problema, o matemático observa, coleta informações e as analisa, permitindo assim a observação de padrões, a criação de conjecturas e, posteriormente, a demonstração. Caso a demonstração não seja possível, a investigação tem dois caminhos ainda possíveis: a refutação em razão da falsidade da afirmação ou ainda o refinamento da conjectura em razão de um problema no domínio de validade da asserção, podendo posteriormente, a depender de mais um processo de tentativa de demonstração, conseguir o status de teorema.

Importar essa prática do matemático profissional para o estudante da Educação Básica é um desafio, mas, como podemos constatar em Ponte *et al.* (2019) e Brocardo (2001), é possível até mesmo com estudantes em séries iniciais.

A investigação em sala de aula de matemática da Educação Básica ganha forma como um tipo de tarefa na qual o estudante é apresentado a uma situação em que não há um objetivo claro a ser alcançado, pelo menos da perspectiva do estudante. O professor, ou outro lado, deve ter objetivos claros e não pode deixar de considerar que uma investigação pode tomar caminhos inesperados. O próprio estudante é quem define o objetivo e os métodos que serão empregados em uma atividade onde o processo é mais relevante do que o resultado. Uma tarefa de investigação tem três fases: introdução à tarefa, realização da investigação e a discussão dos resultados. A seguir falamos sobre cada uma delas na perspectiva de Ponte *et al.* (2019)

Na *introdução à tarefa*, o professor deve apresentar a situação de investigação do modo mais estimulante possível. Além disso, os estudantes precisam ter clareza sobre a postura que é esperada deles e a postura que o professor terá. Aos estudantes cabem a definição dos objetivos, dos problemas e as escolhas dos métodos, por exemplo, e ao professor, orientar nos caminhos escolhidos, sempre tendo em vista que ele deve fomentar a investigação, não ofertar respostas ou controlar as escolhas dos estudantes. Esses papéis não são necessariamente assim, tão regulados, mas o fundamental é permitir que os estudantes explorem a situação e consigam produzir conjecturas e justificá-las. Nesta fase também deve ficar claro para os estudantes qual o produto esperado ao final da investigação: uma comunicação para os colegas e para o professor das descobertas que fizeram durante a investigação, apresentando, caso tenham desenvolvido, justificativas para as eventuais conjecturas formuladas.

Na segunda fase descrita por Ponte *et al.* (2019) a *realização da investigação*, é quando efetivamente se dá o desenvolvimento dos trabalhos. Quando os estudantes já foram apresentados a tarefa, eles realizam explorações iniciais nas quais coletam dados, observam padrões, vão se familiarizando com os problemas e subproblemas percebidos. Contudo, isso não acontece necessariamente de modo sistematizado, organizado e de modo a ser percebido pelo professor e até mesmo pelos demais colegas, podendo, inclusive, parecer um momento de improdutividade, mas não, é quando o estudante está se familiarizando com a tarefa. A formulação de conjecturas segue naturalmente esse processo, elas costumam surgir por observação direta ou analogia, por exemplo. Porém, a justificação delas é comumente deixada em segundo plano e, quando ocorre, costuma ser um empirismo ingênuo. Entendemos, contudo, que o professor deve estimular de modo gradual a construção de justificativas, mesmo que por meio do empirismo, e posteriormente, também de modo gradual, mostrar os limites que esse tipo de argumento possui.

Encerrando a aplicação da tarefa investigativa, a *discussão dos resultados* é a etapa na qual os estudantes compartilham as suas descobertas e apresentam os seus argumentos sobre o porquê suas conjecturas são verdadeiras ou falsas. É neste momento que o trabalho do estudante, ou do seu pequeno grupo, ganha um caráter público ao ser exposto à crítica dos demais colegas e do professor. Os argumentos ofertados podem não ser aceitos pelos demais colegas ou ainda, algum deles pode encontrar um contraexemplo para a conjectura que está sendo defendida. Neste contexto, duas situações são consideradas por Ponte *et al.* (2019) como fundamentais: o *aprofundamento da conjectura*, que ocorre quando se ajusta o domínio de validade dela à medida em que vão sendo observados casos particulares que não são verificados e a *conclusão por justa maioria* que é o aceite do grupo aos argumentos que foram apresentados e que não precisam ser necessariamente lógico-dedutivos, basta convencer o grupo.

A construção de uma situação que conduza a exploração não é trivial e depende muito do aceite ao convite a investigação, como destaca Skovsmose (2000), e da postura do professor. Optar por usar as tarefas de investigação requer uma postura de mudança de paradigma para professores e estudantes, que são lançados em tarefas de natureza diversa ao que comumente é feito em sala de aula. Porém, essa complexidade traz a possibilidade de aproximar o trabalho do estudante em sala de aula ao trabalho do matemático, permitindo, assim, a construção de uma concepção da matemática enquanto ciência e, principalmente, dados os nossos objetivos, criando situações que deixam os estudantes mais próximos de prova ao serem submetidos a tarefas ricas de possibilidades de explorações.

Capítulo 3

As tarefas e os recursos desenvolvidos

A nossa sequência didática* é composta de três tarefas investigativas que foram desenvolvidas em um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra (GGB), e estão armazenadas em seu domínio em forma de livro digital. Inclusive, recomendamos que a aplicação seja efetuada usando o ambiente do GGB. As tarefas versam sobre fatos já conhecidos da geometria plana, como listamos abaixo:

- **Tarefa 01 -** O teorema do ângulo externo que afirma que o ângulo externo de um triângulo tem medida superior a medida de qualquer ângulo interno não adjacente;
- **Tarefa 02 -** Em um triângulo, o lado de maior medida se opõe ao ângulo de maior medida, além disso, se dois lados têm a mesma medida, então os ângulos opostos também têm;
- **Tarefa 03 -** A desigualdade triangular: em um triângulo a soma das medidas de dois de seus lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

As tarefas foram organizadas de modo que o resultado obtido na primeira tarefa é um argumento para a demonstração da conjectura da segunda tarefa, e os resultados obtidos na primeira e segunda tarefas são importantes na demonstração do resultado da terceira. Essa foi uma maneira de organizar a sequência de modo a evidenciar a função da sistematização da prova. Outras funções como a da explicação e o desafio intelectual podem ser reiteradamente solicitados pelo professor no decorrer da aplicação como uma estratégia para fomentar a construção de argumentos.

* Sequência disponível em: https://www.geogebra.org/m/jtqqnfpc

Imaginamos que o estudante que será público dessa sequência não está habituado com tarefas investigativas, por essa razão, optamos por uma tarefa mais estruturada. Isto é, a tarefa aponta caminhos para os quais o estudante pode dirigir a sua atenção caso não consiga vislumbrar nenhuma outra forma de investigação. As dicas fazem esse papel. Recomendamos ao professor que oriente os estudantes a não lerem todas de uma vez e depois executarem a tarefa, o ideal é que só leiam uma dica quando esgotarem as possibilidades da dica anterior ou da orientação inicial.

Importante destacar ao professor interessado, que esta sequência contempla a BNCC na competência específica 5 de matemática e suas tecnologias:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 532).

E a habilidade EM13MAT512:

> Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (Brasil, 2018, p. 533).

Recomendamos que a sequência seja aplicada em grupos de estudantes, pelo menos em duplas. A dinâmica entre dois favorece a construção de argumentos, já que um deve explicar ao outro a razão pela qual acredita que o argumento é verdadeiro ou não. Em nosso caso, essa sequência foi aplicada em um grupo de cinco estudantes do Ensino Médio do segundo e terceiro anos selecionados dentre um conjunto de estudantes que participavam do projeto Mais Estudo, mas consideramos que o professor pode avaliar a possibilidade de aplicá-la também com estudantes do Ensino Fundamental, apenas adequando o nível de prova que será requerido. Entendemos que, para o público do Ensino Fundamental, a validação de conjecturas por meio de provas pragmáticas é suficiente. Para a aplicação da sequência, sugerimos o uso de duas aulas (100 minutos) para cada uma das três tarefas, tempo aproximado ao que disponibilizamos nas nossas sessões de aplicação.

Outra orientação ao professor que consideramos fundamental é a comunicação aos estudantes sobre a natureza da sequência, a postura que é esperada deles e o produto requerido ao final de cada tarefa. É importante que, ao introduzir a sequência, o professor reforce aos estudantes que a tarefa apresentada foge do paradigma do exercício, sendo ela uma tarefa que eles, possivelmente, não tiveram contato (como ocorre com os exercícios-tipo) e que os objetivos, assim como as ferramentas para alcançá-los, são atribuições deles, os estudantes. Além disso, é relevante destacar o papel que a argumentação tem nessas atividades e orientar os estudantes a escreverem, do modo que for possível, as conjecturas formuladas, assim como os argumentos que eles usam para justificá-las.

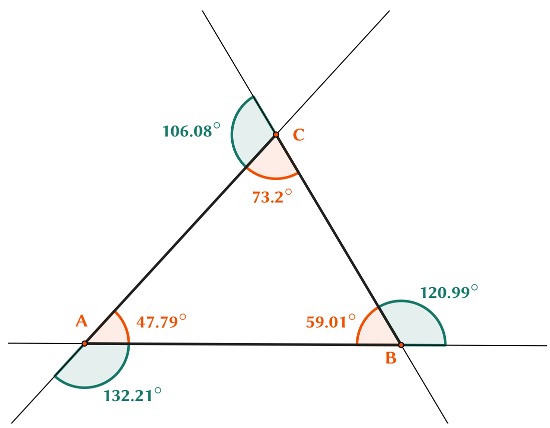
Por fim, ao final da apresentação das tarefas que fazemos a seguir, incluímos uma seção com comentários sobre o desenvolvimento das tarefas com sugestões baseadas na nossa experiência de aplicação. Contudo, recomendamos a leitura da discussão dos resultados de Anjos (2025); se não, de Anjos e Cassol (2024) que é um texto mais sintético. Eles contêm um relato mais abrangente sobre os caminhos da investigação que podem ser usados como a referência para *um possível caminho de investigação.*

3.1 Tarefa 01 - O Teorema do Ângulo Externo

Orientações

Analise o triângulo abaixo, dando uma atenção especial aos ângulos internos e externos. Os vértices do triângulo podem ser arrastados, essa funcionalidade poderá ser bastante útil na análise. Na sequência, leia a primeira dica. (Veja a Figura 3.1).

Figura 3.1: Tarefa 01 - Ao maior lado, opõe-se o maior ângulo



Dica 01 - Para Refletir!

Qual relação você observa entre as medidas dos ângulos internos e externos do triângulo acima?

Dica 02 - Uma Outra Dica!

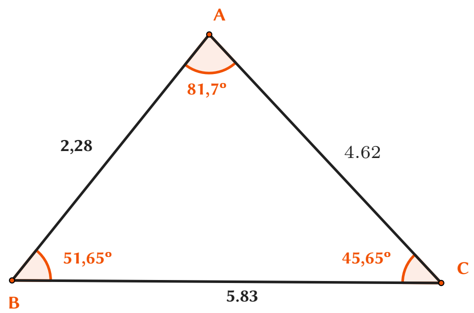
Escolha um ângulo externo e compare a sua medida com as medidas de dois ângulos internos do triângulo. Quais relações você nota? Essa relação continua válida, caso você movimente os vértices do triângulo? Justifique a sua resposta.

3.2 Tarefa 02 - Ao maior lado, o maior ângulo

Orientações

Observe o triângulo abaixo e concentre a sua atenção sobre as medidas dos lados e dos ângulos dele. Note que os vértices do triângulo podem ser movimentados (Veja a Figura 3.2). Na sequência, leia a primeira dica.

Figura 3.2: Tarefa 02 - Ao maior lado, o maior ângulo



Dica 01 - Para Refletir

Após mover os vértices do triângulo na tela, quais relações você observou?

Dica 02 - Outra Dica!

Caso não tenha observado nenhuma relação, use a malha quadriculada para arrastar os vértices dos triângulos para coincidirem com os vértices dos quadrados maiores da malha. Depois, volte a buscar relações entre as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos.

Dica 03 - Caso Particular 1 (Triângulo Isósceles)

Desloque os vértices dos triângulos de modo a obter um triângulo isósceles (que tem dois lados de mesma medida). Agora, observe a relação entre as medidas dos lados do triângulo e as medidas dos ângulos. O que você observa?

Dica 04 - Caso Particular 2 (Triângulo Equilátero)

Desloque os vértices dos triângulos de modo a obter um triângulo equilátero (que tem todos os lados de mesma medida). Agora, observe a relação entre as medidas dos lados do triângulo e as medidas dos ângulos. O que você observa?

Dica 05 - Uma Provocação

O que você observou no caso particular é verdade sempre? Funciona para qualquer triângulo que seja isósceles? Justifique.

Dica 06 - Uma Outra Provocação

O mesmo fato que foi observado no caso particular 1 foi observado no Caso Particular 2? E o fato que foi observado no Caso Particular 02 também pode ser observado no Caso Particular 01? Explique!

Dica 07 - A Última Provocação

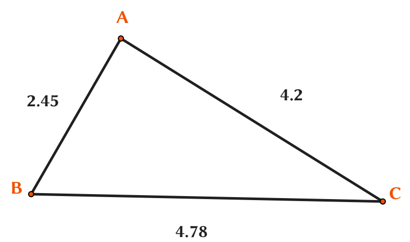
Os mesmos fatos observados até agora poderiam servir para um triângulo que não atende a nenhum dos dois casos particulares que vimos. Isto é, os fatos observados continuam verdadeiros para triângulos escalenos?

3.3 Tarefa 03 - A desigualdade triangular

Orientações

Movimente os vértices do triângulo abaixo. Na sequência, leia a primeira dica. (Veja a Figura 3.3).

Figura 3.3: Tarefa 03 - Desigualdade triangular



Dica 01 - Para Refletir!

Observe as medidas dos lados do triângulo. Com base nessas observações, o que é possível afirmar sobre a relação entre as medidas dos lados desse triângulo?

Dica 02 - Será Verdade?

A relação que você encontrou permanece estável mesmo após o movimento dos vértices do triângulo nas mais diversas posições possíveis? Por qual razão você acha que isso acontece?

Dica 03 - Fixe um Lado

Escolha qualquer um dos lados do triângulo e não o mova, mantenha-o fixo. Para isso também não movo os vértices que definem esse lado. Agora, movimente apenas o vértice que não faz parte desse lado. O que você observa agora?

3.4 Considerações dos autores

Ao ter contato com a primeira tarefa da sequência, é esperado que os estudantes demonstrem alguma desorientação em razão da falta de objetivo claro. Neste momento, entendemos que a melhor conduta é focar nas tarefas e auxiliar os estudantes com entendimento dos enunciados, inclusive apresentando conceitos e explicando os vocábulos. Em nossa aplicação, os estudantes reagiram às dicas listando propriedades já conhecidas. É possível que isso ocorra também em outras sessões de aplicação e, embora não seja o desejado, vemos como o início da interação do estudante com a sequência.

Ao ler as dicas, o estudante pode apresentar relações diferentes das imaginadas e, às vezes, até relações falsas. Isso não é ruim, pelo contrário, ele está criando relações. Agora, devemos encorajar o teste e a verificação com vistas a estimular a produção de uma prova empírica. Por exemplo, na primeira tarefa eles podem listar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180, que o ângulo externo é igual a soma dos internos não adjacentes e outros resultados que não têm relação direta com os ângulos. Outras questões podem surgir como: esse triângulo pode ser equilátero? ou ainda uma afirmação: esse triângulo nunca é equilátero. Responder a pergunta ou ainda justificar a afirmação pode ser uma oportunidade de iniciar o processo de argumentação com vistas a desenvolver uma prova. Desse modo, sugerimos que o professor encoraje a investigação, mesmo não sendo esse o caminho inicialmente imaginado. Não vemos como uma condição para o desenvolvimento da sequência que o professor saiba cada um dos caminhos que a investigação pode tomar, até porque isso não nos parece possível.

Um fato que pode ser muito útil, quase um curinga da investigação, são as afirmações falsas, descobrimos isso na nossa aplicação de modo não intencional. Diante de uma conjectura falsa, em um primeiro momento, foi conveniente ao professor apenas perguntar o porquê de o estudante acreditar que a afirmação é verdadeira. Isso o coloca em uma posição que requer a produção natural de um argumento. Percebemos que esses argumentos geralmente vinham em forma de um empirismo ingênuo, uma verificação da validade da conjectura em alguns poucos casos. Ao apresentar um argumento para defender a sua conjectura, o estudante abre espaço para que colegas avaliem o que foi apresentado a partir de seus próprios critérios e, principalmente, pelo que foi experimentado no GGB. Em nossa aplicação isso ocorreu algumas vezes, e o contra-argumento dos colegas vinha de modo gestual com GGB, eles exibiam a tela com um contra-exemplo e movimentavam os objetos independentes exibindo casos em que a conjectura não era válida.

Esse processo pode ser uma forma do professor destacar as limitações do empirismo ingênuo, enquanto um processo de validação, e também pode ser o princípio de um processo de refino da conjectura em questão, caso ela possa ser reformulada, modificando, por exemplo, o seu domínio de validade.

As conjecturas que são parcialmente falsas podem ser interessantes, pois o processo de refino faz com que elas passem por sucessivos testes empíricos, criando a percepção ainda maior de que são verdadeiras. Em nossa experiência de aplicação, vimos a formulação da conjectura: a medida de um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que a medida de qualquer ângulo interno. Do ponto de vista lógico, essa afirmação é falsa, mas ela contém uma verdade, por assim dizer, e é exatamente a que havíamos vislumbrado quando construímos a tarefa: a medida de um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente a ele. Essa reformulação surge após uma sequência de investigações empíricas e após a percepção de limitações do empirismo ingênuo. Solicitar do estudante uma explicação para esse fato o faz já partir de uma grande quantidade de casos testados como plano de fundo para o seu argumento. A situação de prova, neste caso, dá suporte amplo para uma possível prova do tipo experiência crucial com possibilidades de avanço para exemplo genérico.

O avanço do estudante para uma prova intelectual, um exemplo genérico ou experiência de pensamento depende do nível de construção de linguagem do estudante. Notamos, por exemplo, que eles não estavam familiarizados com a expressão “lado oposto a um ângulo”, isso cria mais obstáculos à produção de provas. Em razão disso, destacamos a necessidade de um esforço para entender o que eles querem dizer, não exatamente aquilo que eles dizem. Na tarefa 2 vimos um estudante usar reiteradamente a palavra “proporcionais”ao dizer que a medida da altura do triângulo era proporcional aos lados que não contêm o pé dessa altura. A conjectura é falsa, mas apenas após a conclusão da aplicação notamos que, na prática, ele se referia apenas a percepção de que, quando a altura aumenta, as medidas desses lados também aumentam. Perceber isso durante a aplicação poderia ter movido o professor no sentido de ajudar no ajuste de linguagem e, por consequência, no caminho da investigação.

Consideramos improvável que os estudantes cheguem à conjectura que inicialmente desejamos de modo rápido ou ainda que sejam algumas das conjecturas que listaram inicialmente, por isso a ideia de usar as desigualdades no triângulo, esse não é um resultado muito abordado. Mas, caso tivessem listado, não seria um problema. O ambiente de geometria dinâmica favorece a percepção dos chamados fatos estáveis implícitos, que são, ao fim, os fatos que justificam a validade de uma conjectura. A ideia de usar um conteúdo menos abordado é deixar um espaço aberto para que eles preencham com afirmações que nunca ouviram falar e possam verificar se elas são falsas ou não a partir de sua própria interação com as tarefas no ambiente do GGB. Não é um problema que os estudantes fiquem um curto tempo sem orientação clara em alguma das tarefas, ou até mesmo em todas elas. Caso não surja nenhuma observação deles, peça que eles releiam as dicas e tentem ofertar alguma resposta a cada uma delas. Note que a dica deixa uma questão em aberto, mas ainda assim aponta um caminho. Se necessário, ajude os estudantes com a compreensão do que é dito, até reformule a dica em outros termos, mas evite apontar alguma relação que seja relacionada ao objeto de estudo.

Por fim, dizemos ao professor que o trabalho com vistas ao desenvolvimento de provas vai além de ensinar matemática ou sobre a matemática, é um trabalho que ensina a investigar, a questionar, a ser crítico. É uma atividade que requer evidências, e coloca o pensamento além das crenças. As convicções até podem ditar o rumo da investigação, mas não mudam o status de conjectura. Trabalhar com argumentações, portanto, envolve o desenvolvimento de uma estrutura de raciocínios que até pode começar na matemática, mas vai para muito além dela.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos. *Grupo de Educação Matemática GT*, v. 23, 2000.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Um estudo sobre os recursos, as potencialidades e as limitações dos softwares de geometria dinâmica. *Relatório Técnico NCE*, Brasil, 2005.

ANJOS, P. V. *Prova e demonstração: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica.* Dissertação de Mestrado – UFBA, 2025.

ANJOS, P. V.; CASSOL, M. Prova e demonstração: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica no estudo de desigualdades no triângulo. In: *Anais do Encontro Mineiro do Profmat*, 2024.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1 , p. 770–815, 2022a.

BERLINGHOF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia prático para professores e entusiastas.* 2 ed. Blucher, São Paulo, 2010.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, 79–90, 2002.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Secretaria de Educação Básica. MEC/SEB, Brasília-DF, 2018.

BROCARDO, J. *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano.* Tese de Doutorado – Universidade de Lisboa, 2001.

DA SILVA, J. J. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A. *A Experiência Matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002.

EVES, H. *Intraodução à História da Matemática.* Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, M. B. C. *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.* Tese de Doutorado – PUC, São Paulo-SP, 2016.

GRABINER, J. V. Why proof? a historian's perspective. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*, Springer Netherlands, p. 147–167, 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1–13, 1996.

GRAVINA, M. A. *Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo.* Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

LAKATOS, I. *A Lógica do descobrimento matemático.* Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

MARCONI, L.; LAKATOS, E.M. *Fundamentos da metodologia científica.* 5 ed. São Paulo: Atlas S.A., 2003.

MELLO, E. *Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria.* Dissertação de Mestrado – PUC, São Paulo, 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escolar.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NAFAGUCHI, T. *Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática.* Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Londrina, 2009.

OLIVEIRA, J. C. *O estado do conhecimento sobre geometria plana no ensino médio utilizando softwares de geometria dinâmica (1987 a 2017).* Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020.

PONTE, J. P.; Brocardo, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

ROSALE, A. R. *Argumentação e prova matemática na Educação Básica*. Dissertação de Mestrado – USP, São Paulo-SP, 2018.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 18 ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

TARSKI, A. Truth and proof. *Scientific American*, v. 220, n. 6 , p. 63–77, 1969.

TRINH, T. H., WU, Y., LE, Q. V., HE, H., and LUONG, T. Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, v. 625, n. 7995, p. 476–482, 2024.

VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o shetchpad. *Educação e Matemática*, v. 63, p. 31–36, 2001.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP, 2002.

Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística / Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Campus Universitário de Ondina, Av. Milton Santos s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110
www.pgmat.ufba.br