Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Colegiado do Curso de Matemática
Dissertação de Mestrado

Funções cardinais e jogos topológicos

Marcelo Oliveira Dias

Salvador - Bahia
13 de março de 2025

Funções cardinais e jogos topológicos

Marcelo Oliveira Dias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva.

Salvador - Bahia

13 de março de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

D541 Dias, Marcelo Oliveira

Funções cardinais e jogos topológicos / Marcelo Oliveira Dias. – Salvador, 2025.

82 f.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Topologia. 2. Funções cardinais. 3. Jogos topológicos. 4. Submodelos elementares. I. Silva, Samuel Gomes da. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU: 515.1

Funções Cardinais e Jogos Topológicos

Marcelo Oliveira Dias

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora

Samuel Gomes da Silva

Profº Drº Samuel Gomes da Silva (orientador – UFBA)

Profº. Drº. Charles James Glyn Morgan (UCL, UK – Visitante UFBA)

Profº. Drº. Santi Domenico Spadaro (Universidade de Catania - Itália)

À minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, que priorizaram a minha educação ao longo de toda a minha vida, e continuaram me apoiando ainda na universidade, mesmo com a necessidade de estarmos tão distantes. Agradeço também à minha família estendida que não só participou da minha criação quando criança, mas também da minha trajetória desde a graduação até aqui. Agradeço à própria UFBA, que me permitiu contemplar a carreira acadêmica como uma possibilidade, assim como aos trabalhadores do Instituto de Matemática e Estatística, desde os professores pelo seu comprometimento com o ensino aos funcionários e técnicos que fazem esse ambiente funcionar tão bem. Gostaria também de agradecer ao meu orientador, Samuel Gomes da Silva, pelo acompanhamento durante a maior parte da minha trajetória acadêmica até o presente momento, pela compreensão ao longo de todo o processo, pela cobrança e pelas oportunidades proporcionadas. Agradecer aos professores Santi Spadaro e Charles Morgan por aceitarem compor a banca de avaliação dessa dissertação. Por fim, gostaria de agradecer à CAPES pela bolsa de Pós-Graduação, que permitiu que eu me dedicasse exclusivamente às atividades acadêmicas ao longo de todo o mestrado.

Resumo

Nessa dissertação, serão abordados aspectos recentes na teoria de invariantes cardinais topológicos, assim como suas motivações provenientes de resultados clássicos. Vamos apresentar a ferramenta dos submodelos elementares, que é amplamente utilizada na prova de resultados mais recentes, e usá-la não só para provar teoremas mais recentes, quanto para apresentar provas alternativas para os limitantes clássicos de Arhangel'skii e de Hajnal e Juhász para a cardinalidade de espaços topológicos. Veremos também como alguns jogos infinitos podem ser utilizados para definir propriedades topológicas que permitem responder parcialmente a pergunta de Arhangel'skii sobre a cardinalidade de espaços de Lindelöf com pontos G_δ.

Palavras-chave: Funções cardinais, Submodelos elementares, Jogos topológicos, Cardinality.

Abstract

In this dissertation, we will adress recent developments in the theory of topological cardinal invariants, as well as their motivations from classical results. We will introduce the elementary submodels, a tool that is widely used in the proof of recent theorems, and we intend to use them not only to prove these, but also to provide alternative proofs of classical results, such as the bounds on the cardinality of topological spaces by Arhangel'skii and by Hajnal and Juhász. We are also going to show how some infinite games can be employed to define topological properties that provide partial answers to Arhangel'skii's question about the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ.

Keywords: Cardinal functions, Elementary submodels, Topological games, Cardinality.

Sumário

Introdução

Na década de 1920, Alexandroff e Urysohn perguntaram se todo compacto T_2 primeiro-enumerável teria sua cardinalidade limitada por $2^{\aleph_0}$. Esse problema ficou em aberto por mais de 40 anos, até que, em 1969, Arhangel'skii publicou uma solução para o problema. O seu resultado foi ainda mais completo, provando que, para todo espaço Hausdorff X, $|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$, onde $L(X)$ é o grau de Lindelöf do espaço X e $\chi(X)$ é o seu caráter. Arhangel'skii perguntou se era possível limitar a cardinalidade de espaços com pontos G_δ de forma semelhante, mas alguns resultados de consistência, em particular o de Shelah [18], que mostrou que a existência de um espaço de Lindelöf com pontos G_δ de cardinalidade $\aleph_2$ é consistente com $ZFC + CH$, e o de Gorelic [11], que mostrou que também é consistente com $ZFC + CH$ que $2^{\aleph_1}$ seja arbitrariamente grande e que exista um espaço de Lindelöf com pontos G_δ de cardinalidade $2^{\aleph_1}$.

Apesar de ambos resultados responderem à pergunta de Arhangel'skii de forma negativa, ainda houve tentativas de apresentar resultados parciais para o problema, algumas delas utilizando jogos infinitos para definir propriedades topológicas relacionadas, mas possivelmente um pouco mais fortes que a de Lindelöf. Scheepers e Tall mostraram em [17] que todo espaço X com pontos G_δ em que $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ tem sua cardinalidade limitada por $2^{\aleph_0}$, e isso se generaliza para qualquer cardinalidade, como veremos.

Ao longo da dissertação, utilizamos a técnica de submodelos elementares em muitas demonstrações, inclusive na de resultados que foram originalmente provados de formas diferentes, pois é uma ferramenta muito empregada em resultados mais recentes. O leitor que venha a ter contato com outras provas dos resultados clássicos apresentados na seção **2** notará que a técnica de submodelos elementares torna as demonstrações bem mais acessíveis para aqueles que já possuem familiaridade com Lógica, e que os submodelos elementares ilustram a proximidade da Teoria dos Conjuntos com a Lógica para aqueles que não a possuem.

No primeiro capítulo dessa dissertação, introduzimos noções básicas de Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral que serão utilizadas ao longo do trabalho. Além disso, também definimos os jogos topológicos que investigaremos, assim como as relações de dualidade entre eles. Na última seção, apresentamos o suficiente da Teoria de Modelos para que possamos falar de submodelos elementares, enunciar e provar o teorema de Löwenhein-Skolem-Tarski e construir os submodelos adequados para as aplicações desejadas.

No segundo capítulo, definimos as funções cardinais que nos serão de interesse e provamos alguns resultados e relações entre elas. São ilustradas algumas aplicações de submodelos elementares em combinatória e, com mais destaque, na prova do teorema de Arhangel'skii e nos teoremas de Hajnal e Juhász que limitam a cardinalidade de determinados espaços topológicos.

No terceiro capítulo, abordamos resultados recentes na teoria de invariantes cardinais topológicos, que em sua maioria utilizam-se de propriedades topológicas definidas por jogos topológicos para limitar a cardinalidade de determinados espaços de forma semelhante ao teorema de Scheepers e Tall, ou então buscam generalizar o teorema de Arhangel'skii e os de Hajnal e Juhász.

A dissertação se encerra com um apêndice no qual são apresentadas duas demonstrações alternativas utilizando submodelos elementares para o teorema de Scheepers e Tall sobre o jogo $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, resultado que motivou a maioria dos teoremas recentes apresentados na seção **3**. A existência delas é de conhecimento geral dos pesquisadores da área, mas não foi encontrada uma prova publicada durante a revisão da literatura feita para a elaboração da dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria dos Conjuntos

Nessa seção, seguimos a linha das referências [15] e [16].

A linguagem da teoria dos conjuntos é dada por todas as fórmulas de primeira ordem sobre o léxico $\Sigma = \{\wedge, \neg, \exists, (,), =, \in\}$, assim como varíaveis x_n para cada número natural n. Uma sequência de símbolos de Σ é dita uma expressão, e definimos o conjunto das fórmulas entre essas expressões recursivamente a partir das seguintes regras:

- Se x_i, x_j são variáveis, então $x_i \in x_j$ e $x_i = x_j$ são fórmulas.
- Se φ e ψ são fórmulas, então $\neg(\varphi)$ e $(\varphi) \wedge (\psi)$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x_i é uma variável, então $\exists x_i(\varphi)$ é uma fórmula.

Além dos símbolos de conjunção ($\wedge$) e de negação ($\neg$), também podemos expressar a partir deles as noções lógicas de disjunção, implicação e bi-implicação, assim como o quantificador universal $\forall$.

- $\forall x_i(\varphi)$ é uma abreviação para $\neg(\exists x_i(\neg\varphi))$.
- $(\varphi) \vee (\psi)$ é uma abreviação para $\neg((\neg(\varphi)) \wedge (\neg(\psi)))$
- $(\varphi) \to (\psi)$ é uma abreviação para $(\neg(\varphi)) \vee (\psi)$.
- $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ é uma abreviação para $((\varphi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\varphi))$
- $x_i \neq x_j$ e $x_i \notin x_j$ são abreviações para $\neg(x_i = x_j)$ e $\neg(x_i \in x_j)$, respectivamente.
- $\exists x_1 \in x_2(\varphi)$ é uma abreviação para $\exists x_1((x_1 \in x_2) \wedge (\varphi))$
- $\exists! x(\varphi)$ é uma abreviação para $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to x = y))$

Em geral, quando não houver ambiguidade, vamos admitir os parênteses subentendidos e omiti-los.

Uma subfórmula de uma fórmula φ é uma sequência de símbolos consecutivos nessa fórmula que, por sua vez, formem uma fórmula. Por exemplo, se φ é a fórmula $\forall x_1((x_1 \in x_3) \leftrightarrow (x_1 \in x_2))$, $x_1 \in x_3$, $x_1 \in x_2$ e $(x_1 \in x_3) \leftrightarrow (x_1 \in x_2)$ são subfórmulas de φ, assim como a própria φ. O escopo de uma ocorrência de um quantificador $\exists x_i$ numa fórmula φ é a subfórmula de φ que começa com $\exists x_i$, e dizemos que a ocorrência de uma variável é livre em φ se ela não está no escopo de nenhum quantificador de φ. Aqui observa-se mais uma importância dos parênteses, pois na fórmula $\exists x_1(x_1 = x_1) \wedge \exists x_2(x_2 \in x_1)$, a última ocorrência de x_1 é livre. Poderíamos achar que a própria fórmula é uma subfórmula que começa com $\exists x_1$, mas, rigorosamente, essa fórmula deveria ser escrita como $(\exists x_1(x_1 = x_1)) \wedge (\exists x_2(x_2 \in x_1))$, começando com (.

A seguir, enunciaremos os axiomas de ZFC

1. (Axioma da Extensionalidade):

   $\forall x_1, x_2, x_3((x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$;

   Quaisquer dois conjuntos que tenham os mesmos elementos são iguais.

2. (Axioma da Regularidade):

   $\forall x_1(\exists x_2(x_2 \in x_1) \rightarrow \exists x_2 \in x_1\ \forall x_3 \in x_1(x_3 \notin x_2))$;

   Todo conjunto não-vazio x possui um elemento que não pertence a nenhum elemento de x.

3. (Axioma Esquema de Separação) Para cada fórmula φ com variáveis livres entre $x, x_1, ..., x_n$:

   $\forall w, x_1, ..., x_n\ \exists y\ \forall x((x \in y) \leftrightarrow ((x \in w) \wedge (\varphi(x, x_1, ..., x_n))))$;

   Se w é um conjunto, então os elementos de w que satisfazem uma propriedade φ também determinam um conjunto.

4. (Axioma do Par):

   $\forall x, y\ \exists z(x \in z \wedge y \in z)$;

   Se x, y são conjuntos, existe um conjunto que os tem como elementos.

5. (Axioma da União):

   $\forall z\ \exists w\ \forall x, y(x \in y \wedge y \in z \rightarrow x \in w)$;

   Se x é um conjunto, existe um conjunto que tem os elementos de seus elementos como elementos.

6. (Axioma Esquema da Substituição) Para cada fórmula φ com variáveis livres entre $x, y, x_1, ..., x_n$:

   $\forall w, x_1, ...x_n((\forall x \in w\ \exists! y(\varphi(x, y, x_1, ..., x_n))) \to \exists z(\forall x \in w\ \exists y \in z(\varphi(x, y, x_1, ..., x_n))))$;

   Se w é um conjunto e φ é uma fórmula funcional sobre w (i.e., $\forall x \in w\ \exists! y(\varphi(x, y, x_1, ..., x_n))$), então $\{y : \exists z \in w(\varphi(y, z))\}$ é um conjunto.

Para os três últimos axiomas, é conveniente definir algumas abreviações para que as fórmulas não fiquem tão extensas. Dados conjuntos x, y, w, definimos:

- $x \subseteq y \iff \forall z(z \in x \to z \in y)$
- $x = \emptyset \iff \forall z(z \notin x)$
- $y = x \cup \{x\} \iff \forall z(z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x))$
- $w = y \cap x \iff \forall z(z \in w \leftrightarrow (z \in y \wedge z \in x))$
- x é unitário $\iff \exists w \in x\ \forall v \in x(v = w)$
- x é indutivo $\iff \emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x)$

7. (Axioma do infinito):

   $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$;

   Existe um conjunto indutivo.

8. (Axioma das Partes):

   $\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$;

   Para cada conjunto x, existe um conjunto ao qual todos os subconjuntos de x pertencem.

9. (Axioma da Escolha):

   $\forall z((\emptyset \notin z \wedge \forall x, y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)) \to \exists w\ \forall x \in z(w \cap x \text{ é unitário}))$;

   Se F é uma família de conjuntos não-vazios, existe um conjunto que intersecta cada elemento de F num unitário.

Observação 1.1.1. *Em geral, dada uma fórmula φ, não temos garantia de que existe um conjunto cujos elementos são exatamente aqueles que satisfazem φ. Nesse caso, diremos que $C = \{x : \varphi(x)\}$ é uma classe, e $z \in C$ deverá ser entendido como $\varphi(z)$, já que C não seria um conjunto de fato.*

Definição 1.1.2. *Dados conjuntos a e b, o **par ordenado** $\langle a, b\rangle$ é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Ao longo desta seção, omitiremos as provas de que os objetos definidos são de fatos conjuntos, i.e., objetos cuja existência pode ser provada a partir dos axiomas de ZFC. Detalhes sobre a existência desses conjuntos podem ser encontrados em [15]

Definição 1.1.3. *Dados conjuntos a e b, o* ***produto cartesiano*** *entre eles é o conjunto* $a \times b = \{\langle x, y\rangle : x \in a \wedge y \in b\}$

Definição 1.1.4. *Dados conjuntos a e b, uma* ***relação binária*** *de a em b é um subconjunto $R \subseteq a \times b$. Se $\langle x, y\rangle \in R$, também dizemos xRy. Se $a = b$, R é dita ser uma relação sobre a.*

Definição 1.1.5. *Se R é uma relação entre os conjuntos a e b, definimos os conjuntos*

- $dom(R) = \{x \in a : \exists y \in b(\langle x, y\rangle \in R)\}$, *o* ***domínio*** *de R.*
- $im(R) = \{y \in b : \exists x \in a(\langle x, y\rangle \in R)\}$, *a* ***imagem*** *de R.*
- $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$, *a* ***relação inversa*** *de R.*

Definição 1.1.6. *Uma* ***função*** *de a em b é uma relação $f \subseteq a \times b$ tal que $\forall x \in a\ \exists! y \in b(\langle x, y\rangle \in f)$. Para especificar que f é uma função, é comum a notação $f : a \to b$. Devido à unicidade, se $\langle x, y\rangle \in f$, denotamos $y = f(x)$.*

- *Se $b = im(f)$, dizemos que f é sobre b, ou sobrejetora.*
- *Se $\forall x, y \in a(f(x) = f(y) \to x = y)$, dizemos que f é 1-1, ou injetora.*
- *Se $f : a \to b$ é injetora e sobrejetora, então dizemos que f é uma bijeção.*
- *Se $c \subseteq a$, a restrição de f a c é uma função de c em b dada por $f \restriction_c = \{\langle x, f(x)\rangle : x \in c\}$.*
- *Uma função g estende f se $f \subseteq g$.*
- *Se f, g são funções e $im(g) \subseteq dom(f)$, definimos a composição $f \circ g = \{\langle x, y\rangle : \exists z \in im(g)(\langle x, z\rangle \in g \wedge \langle z, y\rangle \in f)\}$*
- *Se $a \subseteq dom(f)$, então a imagem de a por f é o conjunto $f[a] = \{f(x) : x \in a\}$.*
- *Se $b \subseteq im(f)$, a pré-imagem ou imagem inversa de b por f é o conjunto $f^{-1}[b] = \{x \in dom(f) : f(x) \in b\}$*

Notação. *Se a e b são conjuntos, denotamos o conjunto das funções de a em b por ${}^a b$.*

Definição 1.1.7. *Se r é uma relação sobre um conjunto a, dizemos que $\langle a, r\rangle$ é um conjunto ordenado, ou simplesmente uma ordem, se:*

1. *r é reflexiva, i.e.,* $\forall x \in a(x\ r\ x)$,

2. *r é transitiva, i.e.,* $\forall x, y, z \in a(x\ r\ y \wedge y\ r\ z \to x\ r\ z)$,

3. *r é antissimétrica, i.e.,* $\forall x, y \in a(x\ r\ y \wedge y\ r\ x \to y = x)$.

Dizemos que $\langle a, r\rangle$ é uma ordem estrita se:

1. *r é irreflexiva, i.e.,* $\forall x \in a(x \not r\ x)$.

2. *r é transitiva.*

Em geral, ordens irreflexivas serão denotadas por $<$, enquanto ordens reflexivas serão denotadas por $\leq$, ou símbolos análogos. Ordens reflexivas e irreflexivas em um conjunto a diferem apenas pela relação $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in a\}$, logo é possível obter uma ordem reflexiva ao adicionar Δ a uma irreflexiva, assim como obtém-se uma ordem irreflexiva ao remover Δ de uma reflexiva.

Definição 1.1.8. *Se $\langle a, <\rangle$ é uma ordem e x, y são elementos de a, definimos os intervalos*

- $(x, y) = \{z \in a : x < z \ \wedge \ z < y\}$.
- $(-\infty, y) = \{z \in a : z < y\}$.
- $(x, +\infty) = \{z \in a : x < z\}$.

Notação. *Também denotamos $(-\infty, y)$ como $pred(a, y)$ em casos de possível ambiguidade.*

Definição 1.1.9. *Se $\langle a, <\rangle$ é uma ordem, dizemos que $x, y \in a$ são comparáveis de $x < y$, $y < x$ ou $x = y$. Se quaisquer dois elementos de a são comparáveis, dizemos que $<$ é tricotômica, total ou linear, ou que a está totalmente ordenado por $<$.*

Definição 1.1.10. *Uma cadeia numa ordem $\langle a, <\rangle$ é um subconjunto $b \subseteq a$ totalmente ordenado por $<$.*

Definição 1.1.11. *Seja $\langle a, <\rangle$ uma ordem parcial. Dados $b \subseteq a$ e $x \in a$:*

- *x é elemento maximal de b se $x \in b$ e* $\forall y \in b(x \not< y)$
- *x é uma cota superior de b se* $\forall y \in b(y = x \ \vee \ y < x)$
- *x é máximo de b se é uma cota superior de b e $x \in b$.*
- *x é o supremo de b se é a menor cota superior de b, denotado por $sup(b)$*

Respectivamente, definimos elemento minimal, cota inferior, mínimo e ínfimo como as propriedades duais às anteriores.

Definição 1.1.12. *Uma ordem $\langle a, < \rangle$ é uma boa ordem se todo subconjunto não-vazio de a possui elemento mínimo.*

Definição 1.1.13. *Dizemos que duas ordens $\langle a, s \rangle$ e $\langle b, r \rangle$ são **isomorfas** se existe uma bijeção $f : a \to b$ tal que $\forall x, y \in a(x \; s \; y \leftrightarrow f(x) \; r \; f(y))$.*

Definição 1.1.14. *Dado um conjunto $a = \{x_i : i \in I\}$, definimos o **produto cartesiano generalizado** $\prod\limits_{i \in I} x_i = \{f : I \to \bigcup a \mid \forall i \in I(f(i) \in x_i)\}$*

Definição 1.1.15. *Um conjunto x é **indutivo** se $\emptyset \in x$ e para todo $y \in x$, $y \cup \{y\} \in x$.*

Definição 1.1.16. *Um conjunto x é **transitivo** se $\forall y(y \in x \to y \subseteq x)$.*

Definição 1.1.17. *Um conjunto x é um **ordinal** se x é transitivo e $\langle x, \in\restriction_x \rangle$ é uma boa ordem.*

Observação 1.1.18. *Os ordinais formam uma classe própria, que será denotada por **ON**.*

Notação. *Se α e β são ordinais, $\alpha \leq \beta$ abrevia $\alpha < \beta \; \vee \; \alpha = \beta$.*

Definição 1.1.19. *Se α é um ordinal, o seu **sucessor** é o ordinal $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.*

Observação 1.1.20. *Se α é um ordinal, seus elementos também são ordinais. Além disso, para ordinais α e β, $\alpha < \beta$ e $\alpha \in \beta$ serão usados intercambiavelmente, pois a ordem entre ordinais é dada pelo pertencimento.*

Definição 1.1.21. *O conjunto dos **números naturais**, denotado por ω, é a intersecção de todos os conjuntos indutivos.*

Definição 1.1.22. *Se α é um ordinal, uma α-sequência é uma função de domínio α. Uma ω-sequência normalmente será chamada apenas de sequência. Em geral, uma α-sequência é denotada por $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$*

Notação. *Se α é um ordinal e x um conjunto qualquer, então ${}^{<\alpha}x$ denotará $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} {}^{\beta}x$, assim como ${}^{\leq\alpha}x$ denotará $\bigcup\limits_{\beta\leq\alpha} {}^{\beta}x$.*

Teorema 1.1.23.
1. *Toda boa ordem é isomorfa a exatamente um ordinal.*
2. *Se x é um ordinal e $y \in x$, então y é um ordinal e $y = pred(x, y)$.*
3. *Se x e y são ordinais isomorfos como boas ordens, então $x = y$.*

4. *Se x e y são ordinais, então vale um, e exatamente um entre $x = y$, $x \in y$ e $y \in x$.*

Observação 1.1.24. *Uma asserção equivalente ao Axioma da Escolha é a de que todo conjunto é bem-ordenável. Em particular, todo conjunto possui uma bijeção com algum ordinal.*

Definição 1.1.25. *Se $\langle x, < \rangle$ é uma boa ordem, então $type(x, <)$ é o único ordinal ao qual $\langle x, < \rangle$ é isomorfo.*

Definição 1.1.26. *Sejam α, β ordinais. Então $\alpha + \beta = type((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), R)$, onde R é a ordem lexicográfica, i.e., para todos $n_1, n_2 \in \{0, 1\}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \alpha \cup \beta$:*

$$\langle n_1, \gamma_1 \rangle R \langle n_2, \gamma_2 \rangle \text{ se, e somente se, } n_1 < n_2 \text{ ou } (n_1 = n_2 \text{ e } \gamma_1 < \gamma_2).$$

Notação. *Se α, β são ordinais, f é uma α-sequência e g é uma β-sequência, então $f^\frown g$ denota a $\alpha + \beta$-sequência dada por $\{\langle \gamma, f(\gamma) \rangle : \gamma < \alpha\} \cup \{\langle \alpha + \gamma, g(\gamma) \rangle : \gamma < \beta\}$. Em particular, se $g = \{\langle 0, a \rangle\}$, denotamos $f^\frown g$ por $f^\frown a$.*

Teorema 1.1.27 (Indução transfinita)**.** *Seja $C \subseteq \boldsymbol{ON}$ uma classe qualquer. Se $C \neq \emptyset$, então C possui elemento mínimo.*

Demonstração. Como $C \neq \emptyset$, então existe $\alpha \in C$. Se α é o mínimo de C, ótimo. Se não, $\alpha \neq 0$, logo $\alpha \cap C$ possui um elemento mínimo γ. Observe que γ também é um elemento mínimo de C, pois dado um $\beta \in C$ qualquer, temos três possibilidades:

1. $\alpha = \beta$:

   Como $\gamma \in \alpha$ e a ordem entre ordinais é a relação de pertencimento, então $\gamma < \alpha = \beta$, logo $\gamma < \beta$.

2. $\beta < \alpha$:

   Se $\beta < \alpha$, então $\beta \in \alpha \cap C$, e como $\gamma = min(\alpha \cap C)$, então $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

3. $\alpha < \beta$:

   Como $\gamma < \alpha < \beta$ e ordinais são transitivos, $\gamma < \beta$.

Como nos três casos vale $\gamma \leq \beta$, então $\gamma = min(C)$. □

Corolário 1.1.28. *Seja $C \subseteq \boldsymbol{ON}$ uma classe qualquer. Se $\forall \alpha \in \boldsymbol{ON}((\forall \beta < \alpha(\beta \in C)) \to \alpha \in C)$, então $C = \boldsymbol{ON}$.*

Demonstração. Se $C \neq \mathbf{ON}$, então $\in \mathbf{ON} \setminus C \neq \emptyset$, donde essa classe teria um elemento mínimo x. Daí, $\forall \beta < x(\beta \in C)$, logo, por hipótese, $x \in C$, o que é uma contradição. Portanto, $C = \mathbf{ON}$.

□

Teorema 1.1.29. *Recursão transfinita*

Se $\boldsymbol{F}$*:*$\boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ *é uma função-classe, então existe uma única* $\boldsymbol{G}$*:*$\boldsymbol{ON} \rightarrow \boldsymbol{V}$ *tal que* $\forall \alpha \in \boldsymbol{ON}(\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction_{\alpha}))$

Definição 1.1.30. *Se x é um conjunto, então sua **cardinalidade**, denotada $|x|$, é o menor ordinal α tal que existe uma bijeção entre α e x.*

Definição 1.1.31. *Um conjunto x é **finito** se $|x| < \omega$.*

Definição 1.1.32. *Um ordinal α é um **cardinal** se $\alpha = |\alpha|$. A classe de todos os cardinais infinitos é denotada por* $\boldsymbol{CARD}$.

Definição 1.1.33. *Se κ, λ são cardinais, então definimos*

1. $\kappa + \lambda = |k \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$.

2. $\kappa \times \lambda = |\kappa \times \lambda|$, *onde o segundo produto é o produto cartesiano.*

3. $\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$.

Lema 1.1.34. *Para todo cardinal infinito κ, $\kappa \times \kappa = \kappa$.*

Lema 1.1.35. *Se κ é um cardinal infinito e $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é tal que $|X_\alpha| \leq \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$, então $|\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Demonstração. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow \kappa$ uma função injetora. Para cada $x \in \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, seja $\alpha_x = min\{\alpha < \kappa : x \in X_\alpha\}$. Defina $f : \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha \rightarrow \kappa$ tomando $f(x) = \langle \alpha_x, f_{\alpha_x}(x) \rangle$. Se $f(x) = f(y)$, então $\alpha_x = \alpha_y$ e $f_{\alpha_x}(x) = f_{\alpha_y}(y)$. Como $\alpha_x = \alpha_y$, então $f_{\alpha_x}(x) = f_{\alpha_x}(y)$, e como f_{α_x} é 1-1, $x = y$. Logo, f é uma função 1-1 de $\bigcup\limits_{\alpha<\kappa}$ em $\kappa \times \kappa$, logo $|\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$. $\square$

Lema 1.1.36. *Se λ é um cardinal infinito e $2 \leq \kappa \leq \lambda$, então $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.*

Definição 1.1.37. *Se κ é um cardinal, então o **sucessor** de κ, denotado por κ^+, é o menor cardinal estritamente maior que κ.*

Definição 1.1.38. *Seja $\langle x, < \rangle$ uma ordem parcial. Dizemos que $a \subseteq x$ é **cofinal** em $\langle x, < \rangle$ se $\forall p \in x(p \in a \ \vee \ \exists q \in a(p < q))$.*

Definição 1.1.39. *Sejam $\langle x, < \rangle$ uma ordem parcial e a um conjunto qualquer. Dizemos que uma função $f : a \rightarrow x$ é **cofinal** se $im(f)$ é cofinal em $\langle x, < \rangle$.*

Definição 1.1.40. *Se β é um ordinal limite, a **cofinalidade** de β, denotada por $cf(\beta)$ é o menor ordinal α tal que existe uma função cofinal $f : \alpha \rightarrow \beta$.*

Observação 1.1.41. *A hipótese de ser um ordinal limite é uma questão de contexto, pois se $\beta = \alpha + 1$, a função $f = \{\langle 0, \alpha\rangle\}$ é cofinal, logo a cofinalidade de todo ordinal sucessor seria* 1.

Lema 1.1.42. *Para todo ordinal limite β, existe uma função cofinal e estritamente crescente $f : cf(\beta) \to \beta$.*

Lema 1.1.43. *Se α é um ordinal limite e $f : \alpha \to \beta$ é uma função cofinal e estritamente crescente, então $cf(\alpha) = cf(\beta)$.*

Corolário 1.1.44. *Para todo ordinal limite α, $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.*

Definição 1.1.45. *Um ordinal limite α é* ***regular*** *se $cf(\alpha) = \alpha$. Caso contrário, α é dito singular.*

Lema 1.1.46. *Se β é regular, então β é um cardinal.*

Lema 1.1.47. *κ^+ é regular para todo cardinal κ.*

Demonstração. Suponha por absurdo que κ^+ é singular. Então existe $f : \alpha \to \kappa^+$ cofinal, donde $\kappa^+ = \bigcup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$. Como $\beta < \kappa^+$, então $|\beta| \leq \kappa$ para todo $\beta < \alpha$, assim como $|\alpha| \leq \kappa$. Pelo lema 1.1.35, $|\kappa^+| \leq \kappa$, o que é uma contradição. Portanto, κ^+ é regular. $\square$

Notação. *Seja M um conjunto qualquer e κ um cardinal. Então $[M]^\kappa$ denota o conjunto dos subconjuntos de M de cardinalidade κ, e $[M]^{<\kappa}$ ($[M]^{\leq\kappa}$) denota o conjunto dos subconjuntos de M de cardinalidade menor do que (menor ou igual a) κ.*

Definição 1.1.48. *Definimos a função-classe $\aleph : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{CARD}$ recursivamente, tomando $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\beta+1} = (\aleph_\beta)^+$ para todo ordinal β e, para todo ordinal limite γ, $\aleph_\gamma = \sup\limits_{\beta<\gamma} \aleph_\beta$.*

Para todo cardinal infinito κ, existe $\alpha \in \mathbf{ON}$ tal que $\kappa = \aleph_\alpha$. Em algumas situações também será comum denotar $\aleph_\alpha$ por ω_α, especialmente para α finito.

Notação. *O cardinal $2^{\aleph_0}$, que é a cardinalidade da reta real, também é denotado por $\mathfrak{c}$.*

1.2 Topologia Geral

A referência principal para esta seção é o livro de Topologia Geral do Engelking [8]

Definição 1.2.1. *Um* ***espaço topológico*** *é um par $\langle X, \tau\rangle$ em que X é um conjunto e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfazendo:*

1. *$\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$*

2. *Se $U \in \tau$ e $V \in \tau$, então $U \cap V \in \tau$.*

3. *Se $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.*

Os elementos de τ são chamados de abertos e τ é dita ser uma topologia sobre X. Segue do item 2 que intersecção finita de abertos também é um aberto.

Se não houver ambiguidade, é comum se referir a um espaço topológico apenas pelo conjunto de pontos, sem mencionar a topologia.

Definição 1.2.2. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico e $x \in X$, uma **vizinhança** de x é um conjunto A tal que existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$.*

Definição 1.2.3. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, uma **base** para τ é uma subfamília $\mathcal{B} \subseteq \tau$ se, dado $U \in \tau$, existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}'$.*

Lema 1.2.4. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, então $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base se, e somente se dado $x \in X$ e $U \in \tau$ com $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definição 1.2.5. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, uma **sub-base** para τ é uma subfamília $\mathcal{P} \subseteq \tau$ tal que $\{U_1 \cap ... \cap U_n : n < \omega, U_i \in \mathcal{P}\}$ é uma base de τ.*

A noção de sub-base é especialmente interessante quando desejamos gerar uma topologia sobre um espaço que tenha uma certa família de conjuntos como abertos. De fato, se X é um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de X, contanto que $\mathcal{A}$ cubra X, $\mathcal{A}$ pode gerar uma topologia sobre X. Para tal, considere $\mathcal{B}$ como o conjunto das intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ e $\tau = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$. τ não só é uma topologia sobre X, como também é a menor topologia que contém $\mathcal{A}$.

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;

   Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ cobre X, então $X \in \tau$, pois X é união de alguma subfamília de $\mathcal{A}$. Como $\emptyset \subseteq \mathcal{B}$, então $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \tau$.

2. Se $U \in \tau$ e $V \in \tau$, então $U \cap V \in \tau$;

   Se $U, V \in \tau$, então existem $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}$ tais que $\bigcup \mathcal{B}_U = U$ e $\bigcup \mathcal{B}_V = V$. Note que, para cada $W \in \mathcal{B}_U$, existe $\mathcal{A}_W \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $W = \bigcap \mathcal{A}_W$.

   Considere $\mathcal{C} = \{W_1 \cap W_2 : W_1 \in \mathcal{B}_U$ e $W_2 \in \mathcal{B}_V\}$. Como os elementos de $\mathcal{B}$ são exatamente as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}$, então cada elemento de $\mathcal{C}$ também o é, logo $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{C} = U \cap V$. De fato, dado $x \in X$, se $x \in \bigcup \mathcal{C}$, então existem $W_1 \in \mathcal{B}_U$ e $W_2 \in \mathcal{B}_V$ tais que $x \in W_1 \cap W_2$, logo $x \in \bigcup \mathcal{B}_U$ e $x \in \bigcup \mathcal{B}_V$, i.e. $x \in U \cap V$. Por outro lado, se $x \in U \cap V$, existem $W_1 \in \mathcal{B}_U$ e $W_2 \in \mathcal{B}_V$ tais que $x \in W_1$ e $x \in W_2$, logo $x \in W_1 \cap W_2 \in \mathcal{C}$, logo $x \in \bigcup \mathcal{C}$.

3. Se $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

   Cada U_i é da forma $\bigcup \mathcal{B}_i$, com $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$, logo se tomamos $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$, então $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ e $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \bigcup \mathcal{B}_i = \bigcup_{i\in I} U_i$, logo $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Definição 1.2.6. *Se X é um espaço topológico e $x \in X$, uma **base local** para X em x é um conjunto $\mathcal{B}$ de vizinhanças abertas de x tal que para todo aberto U de X existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

Definição 1.2.7. *Um subconjunto $F \subseteq X$ é **fechado** se $X \setminus F$ é aberto.*

Observação 1.2.8. *Pela definição de abertos, num espaço topológico $\langle X, \tau\rangle$, tem-se*

1. *$\emptyset$ e X são fechados.*
2. *Se F_1, F_2 são fechados, então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*
3. *Se $\{F_i : i \in I\}$ é uma família de fechados, então $\bigcap_{i\in I} F_i$ é fechado.*

Definição 1.2.9. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Definimos*

- *O **interior** de A, $int(A) = \bigcup\{U \subseteq X : U \text{ é aberto}\}$*
- *O **fecho** de A, $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq X : F \text{ é fechado}\}$*

Definição 1.2.10. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de A se toda vizinhança de x intersecta A num ponto diferente de x.*

Lema 1.2.11. *Se X é um espaço topológico, $A \subseteq X$ é fechado se, e somente se A contém todos os seus pontos de acumulação.*

Como união de abertos é aberta e intersecção de fechados é fechada, o interior de A é o maior aberto contido em A e, dualmente, o fecho de A é o menor fechado que o contém.

Observação 1.2.12. *Se X é um espaço topológico, A é um aberto e F é um fechado, então $A \setminus F$ é aberto e $F \setminus A$ é um fechado. Por um lado, $A \setminus F = A \cap (X \setminus F)$, que é uma intersecção de dois abertos, logo aberto. Por outro, $F \setminus A = F \cap X \setminus A$, que é a intersecção de dois fechados, logo fechado.*

Proposição 1.2.13. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, $x \in \overline{A}$ se, e somente se toda vizinhança de x intersecta A.*

Demonstração. Se $x \in \overline{A}$, então todo fechado que contém A tem x como elemento. Portanto, dada U vizinhança de x, como $x \notin A \setminus U$, então $A \nsubseteq A \setminus U$, donde $U \cap A \neq \emptyset$. Por outro lado, se qualquer vizinhança de x intersecta A, então dado um fechado F que contém A, tem-se $x \notin X \setminus F$, caso contrário $X \setminus F$ seria uma vizinhança de x que não intersecta A. □

Definição 1.2.14. *Se X é um espaço topológico, um subconjunto $A \subseteq X$ é **denso** se $\overline{A} = X$*

Lema 1.2.15. *Um subconjunto de um espaço topológico X é denso se, e somente se todo aberto não-vazio de X o intersecta.*

Definição 1.2.16. *(Axiomas de separação)*

Seja X um espaço topológico.

- *X é T_0 se para quaisquer x e y distintos em X, existe um aberto que contém exatamente um dos dois pontos.*
- *X é T_1 se para quaisquer x e y distintos em X, existem abertos distintos U_x e U_y tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$.*
- *X é T_2, ou Hausdorff, se para quaisquer x e y distintos em X, existem abertos disjuntos U_x e U_y tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$.*
- *X é Urysohn, ou $T_{2\frac{1}{2}}$ (T_2 e meio), se dados x e y distintos em X, existem vizinhanças fechadas F_x e F_y disjuntas tais que $x \in F_x$ e $y \in F_y$.*
- *X é T_3 ou regular se X é T_1 e para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$, existem U_1, U_2 abertos disjuntos tais que $x \in U_1$ e $F \subseteq U_2$.*
- *X é Tychonoff, $T_{3\frac{1}{2}}$ ou completamente regular se X é T_1 e para todos $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado tal que $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = \{1\}$.*
- *X é T_4 ou normal se X é T_1 e para quaisquer fechados disjuntos $A, B \subseteq X$, existem U_A, U_B abertos disjuntos tais que $A \subseteq U_A$ e $B \subseteq U_B$.*

Proposição 1.2.17. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

1. *X é T_1;*
2. *Para todo $x \in X$, se $\mathcal{B}_x$ é uma base local para X em x, então $\bigcap \mathcal{B}_x = \{x\}$;*
3. *Para todo $x \in X$, se $\mathcal{V}_x$ é o conjunto das vizinhanças de x, então $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.*

Proposição 1.2.18. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

1. *X é T_2;*
2. *Para todo $x \in X$, se $\mathcal{B}_x$ é uma base local para X em x, então $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}_x\} = \{x\}$;*
3. *Para todo $x \in X$, se $\mathcal{V}_x$ é o conjunto das vizinhanças de x, então $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}_x} \overline{U} = \{x\}$.*

Proposição 1.2.19. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

1. *X é T_3;*
2. *Para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta U de x, existe uma vizinhança aberta V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Definição 1.2.20. *(Axiomas de enumeração)*
Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico.

1. *Dizemos que X é primeiro-enumerável se para todo $x \in X$, existe uma base local enumerável para X em x.*
2. *Dizemos que X é segundo-enumerável se X possui uma base enumerável.*
3. *Dizemos que X é separável se X contém um denso enumerável.*

Observação 1.2.21. *Se $\mathcal{B} = \{U_n : n < \omega\}$ é uma base local enumerável para um espaço topológico X num ponto x, então $\{\bigcap\limits_{n \leq m} U_n : m < \omega\}$ é uma base local enumerável decrescente para X em x. Logo, para espaços primeiro-enumeráveis, podemos supor que todo ponto possui uma base local enumerável e decrescente.*

Definição 1.2.22. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que uma sequência $\langle x_n : n < \omega \rangle$ converge para x se para toda vizinhança U de x existe $n_0 < \omega$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > n_0$. Dizemos que uma sequência converge se ela converge para algum $x \in X$.*

Lema 1.2.23. *Se X é primeiro-enumerável e $A \subseteq X$, então dado $x \in X$, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência de pontos de A que converge para x.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{A}$ e fixe $\mathcal{B} = \{U_n : n < \omega\}$ uma base local decrescente para X em x. Se tomamos $x_n \in U_n \cap A$ para todo $n < \omega$, é evidente que $\langle x_n : n < \omega \rangle$ converge para x, pois dada V vizinhança aberta de x, existe $n < \omega$ tal que $U_n \subseteq V$, logo $x_m \in U_m \subseteq U_n$ para todo $m \geq n$.
Por outro lado, se existe uma sequência $\{x_n : n < \omega\}$ de pontos de A que converge para x, então dada uma vizinhança V qualquer de x, $x_n \in A \cap V$ para algum $n < \omega$, logo $A \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Lema 1.2.24. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço de Hausdorff, então limites de sequências são únicos.*

Demonstração. Seja $s : \omega \to X$ uma sequência que converge para os pontos x_1 e x_2 de X, e vamos mostrar que $x_1 = x_2$. Suponha por absurdo que $x_1 \neq x_2$. Como X é Hausdorff, existem abertos disjuntos V_1 e V_2 tais que $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$. Como s converge para x_1, existe $n_0 < \omega$ tal que $s(n) \in V_1$ para todo $n \geq n_0$. Como s converge para x_2, existe $n_1 < \omega$ tal que $s(n) \in V_2$ para todo $n \geq n_1$. Portanto, se $n \geq max\{n_0, n_1\}$, então $s(n) \in V_1 \cap V_2$, o que é um absurdo, pois V_1 e V_2 são disjuntos. Portanto, deve valer $x_1 = x_2$, logo s admite um único limite.

□

Definição 1.2.25. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico. Uma cobertura aberta de X é uma família $\mathcal{U} \subseteq \tau$ tal que $X = \bigcup \mathcal{U}$.*

Notação. *Denotamos o conjunto de todas as coberturas abertas de um espaço topológico X por $\mathcal{O}_X$.*

Definição 1.2.26. *Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ famílias de abertos de um espaço topológico X. Dizemos que $\mathcal{V}$ **refina** $\mathcal{U}$ se para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$.*

Definição 1.2.27. *Um espaço topológico X é **compacto** se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.*

Definição 1.2.28. *Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos possui a propriedade de intersecção finita (p.i.f.) se para todo $n < \omega$ e todos $A_0, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{i \leq n} A_i \neq \emptyset$*

Lema 1.2.29. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda família de fechados com a p.i.f. possui intersecção não-vazia.*

Demonstração. Se existe uma família $\mathcal{F}$ de fechados com a p.i.f. de intersecção vazia, então $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma cobertura aberta de X sem subcobertura finita, pois $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus F = X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = X$, mas para todos $F_0, ..., F_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i \leq n} X \setminus F_i = X \setminus \bigcap_{i \leq n} F_i \neq X$, pois $\mathcal{F}$ tem a propriedade da intersecção finita. Logo, se X é compacto, então X não admite famílias de fechados com a p.i.f. de intersecção vazia.

Por outro lado, se X não é compacto, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ sem subcobertura finita. Portanto, $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de fechados com a p.i.f com intersecção vazia, pois $\bigcap_{n \leq m} X \setminus U_n = X \setminus \bigcup_{n \leq m} U_n \neq \emptyset$ para todos $U_1, ..., U_m \in \mathcal{U}$ e $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$.

□

Definição 1.2.30. *Um espaço X é enumeravelmente compacto se toda cobertura enumerável admite subcobertura finita.*

Lema 1.2.31. *Um espaço T_1 é enumeravelmente compacto se, e somente se todos seus subconjuntos enumeráveis infinitos possuem ponto de acumulação.*

Como em qualquer área da matemática, há interesse em funções que de alguma forma preservam as propriedades de um espaço, ou que pelo menos interagem de alguma forma com elas. Para a topologia, as aplicações que interagem com propriedades topológicas são as funções contínuas e os homeomorfismos.

Definição 1.2.32. *Sejam $\langle X_1, \tau_1 \rangle$ e $\langle X_2, \tau_2 \rangle$ espaços topológicos. Então uma função $f : X_1 \to X_2$ é **contínua** se $f^{-1}[U] \in \tau_1$ para todo $U \in \tau_2$, i.e., se pré-imagens de conjuntos abertos em X_2 são abertos em X_1.*

Definição 1.2.33. *Sejam $\langle X_1, \tau_1 \rangle$ e $\langle X_2, \tau_2 \rangle$ espaços topológicos. Uma bijeção $f : X_1 \to X_2$ é um **homeomorfismo** se f e f^{-1} são funções contínuas.*

Definição 1.2.34. *Seja X um espaço topológico, $\{\langle Y_i, \tau_i \rangle : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos e $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ uma família de funções. A **topologia induzida** por $\mathcal{F}$ em X é a topologia que tem $\{f_i^{-1}[U] : U \in \tau_i, i \in I\}$ como sub-base.*

Observação 1.2.35. *Se consideramos a família das topologias sobre X ordenada pela inclusão, a topologia induzida por uma família $\mathcal{F}$ de funções é a menor topologia que torna todas essas funções contínuas.*

Definição 1.2.36. *Seja $\{\langle X_i, \tau_i \rangle : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos. Se $X = \prod_{i \in I} X_i$, a **topologia de Tychonoff** sobre X é a topologia induzida por $\{\pi_i : X \to X_i : I \in I\}$, onde π_i é a projeção sobre X_i, i.e., $\pi_i(\langle x_j : j \in I \rangle) = x_i$.*

Observação 1.2.37. *A topologia de Tychonoff sobre $\prod_{i \in I} X_i$ tem como base canônica abertos da forma $\prod_{i \in I} V_i$, onde $V_i \subseteq X_i$ é um aberto de X_i e $\{i \in I : X_i \setminus V_i \neq \emptyset\}$ é finito. A sub-base canônica é composta por abertos da forma $V_j \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$, onde V_j é um aberto de X_j. Estes também podem ser escritos como $\pi_j^{-1}[V_j]$.*

Teorema 1.2.38 (Teorema de Tychonoff). *Se $\{\langle X_i, \tau_i \rangle : i \in I\}$ é uma coleção de espaços topológicos compactos, então a topologia de Tychonoff sobre $\prod_{i \in I} X_i$ forma um espaço compacto.*

Definição 1.2.39. *Seja X um conjunto qualquer. Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um filtro sobre X se:*

1. $X \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} (A \cap B \in \mathcal{F})$

3. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in P(X)(A \subseteq B \to B \in \mathcal{F})$

Definição 1.2.40. *Dado um conjunto X, uma família $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de filtro sobre X se $\mathcal{G} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e $\forall A, B \in \mathcal{G}(A \cap B \in \mathcal{G})$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{G}(B \subseteq A)\}$ é o filtro gerado por $\mathcal{G}$.*

Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, dado $x \in X$, a família $\mathcal{V}_x = \{U \in \tau : x \in U\}$ das vizinhanças de x é um filtro, pois $\emptyset \notin \mathcal{V}_x$, $X \in \mathcal{V}_x$, intersecção finita de vizinhanças e qualquer conjunto que contém uma vizinhança também é uma vizinhança. Filtros são ferramentas muito frequentes em Teoria dos Conjuntos e em Topologia Geral, e uma de suas utilidades será a noção de convergência que eles fornecem.

Definição 1.2.41. *Dados X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X, dizemos que $\mathcal{F}$ converge para x (em $\langle X, \tau \rangle$) se $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$.*

Lema 1.2.42. *Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico, $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ uma base local para x e $Y \subseteq X$. Então $x \in \overline{Y}$ se, e somente se $\mathcal{G} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}_x\}$ é base de um filtro que converge para x.*

Demonstração. Se $x \in \overline{Y}$, então $\emptyset \notin \mathcal{G}$, pois toda vizinhança de x intersecta Y em algum ponto e, como $Y \neq \emptyset$, $X \in \mathcal{G}$. Além disso, dados $U_1 \cap Y, U_2 \cap Y \in \mathcal{G}$, tem-se $U_1 \cap U_2 \cap Y \in \mathcal{G}$, pois $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}_x$ se $U_1, U_2 \in \mathcal{V}_x$. Por outro lado, se $\mathcal{G}$ é base de um filtro que converge para x, é evidente que $x \in \overline{Y}$, pois como $\emptyset \notin \mathcal{G}$, toda vizinhança básica de x intersecta Y. □

Lema 1.2.43. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço de Hausdorff, então limites de filtro são únicos.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro que converge para x. Então dado $y \in X$ distinto de x, como X é Hausdorff, existem abertos disjuntos U, V de X tais que $x \in U$ e $y \in V$. Como $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$, então $U \in \mathcal{F}$ e $V \notin \mathcal{F}$, pois caso contrário teríamos $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$, mas o conjunto vazio não é elemento de nenhum filtro. Daí, concluímos que $\mathcal{V}_y \nsubseteq \mathcal{F}$, logo $\mathcal{F}$ admite um único limite. □

Esses lemas mostram que a convergência de filtros é um conceito que captura bem a ideia de convergência de sequências, mas que tem utilidade em uma classe mais ampla de espaços, pois conseguimos caracterizar conjuntos fechados em termos de filtros convergentes sem nenhum axioma de separação como hipótese.

1.3 Jogos Topológicos

A principal referência para esta seção é [3]

1.3.1 Jogos relacionados a princípios de seleção

Definição 1.3.1. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ famílias não-vazias de conjuntos não-vazios.*

- *Denotamos por $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a afirmação:*

  Para toda sequência $\langle A_n : n < \omega\rangle$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe uma sequência $\langle b_n : n < \omega\rangle$ tal que $b_n \in A_n$ para todo $n < \omega$ e $\{b_n : n < \omega\} \in \mathcal{B}$.

- *Denotamos por $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a afirmação:*

  Para toda sequência $\langle A_n : n < \omega\rangle$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe uma sequência $\langle B_n : n < \omega\rangle$ tal que $B_n \in [A_n]^{<\omega}$ para todo $n < \omega$ e $\bigcup\limits_{n<\omega} B_n \in \mathcal{B}$.

Definição 1.3.2. *Seja $\langle X, \tau\rangle$ um espaço topológico.*

1. *Dizemos que X é de **Rothberger** se vale $S_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*
2. *Dizemos que X é de **Menger** se vale $S_{fin}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.*

Os jogos a seguir são definidos baseados nesses princípios de seleção, mas as sequências de coleções de conjuntos não são dadas desde o começo, mas as coleções são construídas por um jogador enquanto o outro escolhe um conjunto na coleção anterior:

Definição 1.3.3. *Dados um ordinal α e duas famílias não-vazias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de conjuntos não-vazios, denotamos por $G_1^\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ o jogo disputado em α rodadas entre os jogadores UM e DOIS da seguinte forma:*

Na β-ésima rodada, para $\beta < \alpha$, o jogador UM joga um conjunto $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{A}$ e o jogador DOIS responde com um elemento $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$.

Uma partida $\langle \mathcal{U}_0, U_0, ..., \mathcal{U}_\beta, U_\beta, ...\rangle_{\beta<\alpha}$ é vencida por DOIS se $\{U_\beta : \beta < \alpha\} \in \mathcal{B}$. Caso contrário, UM vence.

- *Uma estratégia para UM em $G_1^\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é uma função $\varphi : {}^{<\alpha}\bigcup \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.*
- *Uma estratégia para DOIS em $G_1^\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é uma função $\psi : \bigcup\limits_{\beta<\alpha} {}^{\beta+1}\mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $\psi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle) \in \mathcal{U}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Quando X é um espaço topológico, o jogo $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ é chamado de jogo de Rothberger em α rodadas em X.

Definição 1.3.4. *Dados um ordinal α e duas famílias não-vazias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de conjuntos não-vazios, denotamos por $G_{fin}^\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ o jogo disputado em α rodadas entre os jogadores UM e DOIS da seguinte forma:*

Para cada $\beta < \alpha$, na β-ésima rodada o jogador UM joga um conjunto $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{A}$ e o jogador DOIS responde com um subconjunto finito $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

Uma partida $\langle \mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0, ..., \mathcal{U}_\beta, \mathcal{V}_\beta, ... \rangle_{\beta<\alpha}$ é vencida por DOIS se $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{V}_\alpha \in \mathcal{B}$. Caso contrário, UM vence.

- *Uma estratégia para UM em $G^\alpha_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é uma função $\varphi : {}^{<\alpha}[\bigcup \mathcal{A}]^{<\omega} \to \mathcal{A}$.*
- *Uma estratégia para DOIS em $G^\alpha_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é uma função $\psi : \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta+1}\mathcal{A} \to [\bigcup \mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $\psi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle) \in [\mathcal{U}_\beta]^{<\omega}$ para todo $\beta < \alpha$.*

Quando X é um espaço topológico, o jogo $G^\alpha_{fin}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ é chamado de jogo de Menger em α rodadas em X.

Em qualquer um dos jogos, dizemos que uma estratégia para um jogador é vencedora se toda partida em que tal jogador joga de acordo com ela resulta numa vitória sua. Denotaremos a existência (inexistência) de estratégias vencedoras para o jogador X no jogo G como $X \uparrow G$ ($X \not\uparrow G$).

1.3.2 Os jogos ponto-aberto e compacto-aberto

Definição 1.3.5. *Dado um ordinal α e um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, o jogo ponto-aberto em α rodadas, que denotaremos por $P^\alpha(X, \tau)$, é disputado entre os jogadores UM e DOIS da seguinte forma:*

Na β-ésima rodada, para $\beta < \alpha$, o jogador UM joga um ponto $x_\alpha \in X$ e o jogador DOIS escolhe uma vizinhança aberta $U_\alpha \in \tau$ de x_α.

Uma partida $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ... \rangle_{\beta<\alpha}$ do jogo ponto-aberto em α rodadas resulta numa vitória de UM se $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta = X$, e resulta numa vitória de DOIS caso contrário.

- *Uma estratégia para UM em $P^\alpha(X, \tau)$ é uma função $\varphi : \tau^{<\alpha} \to X$.*
- *Uma estratégia para DOIS em $P^\alpha(X, \tau)$ é uma função $\psi : X^{<\alpha} \to \tau$ tal que $x_\beta \in \psi(\langle x_0, ..., x_\beta \rangle)$ para toda sequência $\langle x_0, ..., x_\beta \rangle$ e todo $\beta < \alpha$.*

Definição 1.3.6. *Dado um ordinal α e um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, definimos uma variação do jogo ponto-aberto, denotada por $P^\alpha_D(X, \tau)$, que é disputada entre os jogadores UM e DOIS da mesma forma, mas com condições de vitória diferente.*

Uma partida $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ... \rangle_{\beta<\alpha}$ de $P^\alpha_D(X, \tau)$ resulta numa vitória de UM se $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ é denso em X. Caso contrário, DOIS vence.

As estratégias em $P^\alpha_D(X, \tau)$ são exatamente as estratégias em $P^\alpha(X, \tau)$, mas obviamente as vencedoras não são necessariamente preservadas.

Definição 1.3.7. *Dado um ordinal α e um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$, o jogo compacto-aberto em α rodadas, denotado por $K_D^\alpha(X, \tau)$ é disputado entre os jogadores UM e $DOIS$ da seguinte forma:*

Na β-ésima rodada, o jogador UM joga um compacto $K_\beta \subseteq X$ e o jogador $DOIS$ joga um aberto U_β que o contém. Ao final da partida, UM vence se $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta$ é denso em X. Caso contrário, $DOIS$ ganha.

As estratégias para UM e $DOIS$ em $K_D^\alpha(X, \tau)$ são definidas de forma análoga às do jogo ponto-aberto.

1.3.3 Jogos equivalentes e duais

Neste trabalho, estaremos interessados em propriedades topológicas que podem ser definidas em termos da existência (ou inexistência) de estratégias vencedoras para cada um dos jogadores em termos dos jogos previamente apresentados. Se G é um desses jogos, ele define quatro propriedades distintas que se relacionam entre si, a saber $UM \uparrow G$, $DOIS \uparrow G$, $UM \not\uparrow G$ e $DOIS \not\uparrow G$, sendo que $UM \uparrow G \rightarrow DOIS \not\uparrow G$, e vice-versa. Existem duas formas de dois jogos proverem as mesmas informações, sendo equivalentes ou duais:

Definição 1.3.8. *Sejam G_1 e G_2 dois jogos disputados entre os jogadores UM e $DOIS$. Dizemos que G_1 e G_2 são **equivalentes** se $UM \uparrow G_1 \Leftrightarrow UM \uparrow G_2$ e $DOIS \uparrow G_1 \Leftrightarrow DOIS \uparrow G_2$.*

Definição 1.3.9. *Sejam G_1 e G_2 dois jogos disputados entre os jogadores UM e $DOIS$. Dizemos que G_1 e G_2 são **duais** se $UM \uparrow G_1 \Leftrightarrow DOIS \uparrow G_2$ e $DOIS \uparrow G_1 \Leftrightarrow UM \uparrow G_2$.*

Teorema 1.3.10. *Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e α um ordinal. Então os jogos $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e $P^\alpha(X, \tau)$ são duais.*

A demonstração para o caso geral foi elaborada pelo autor da dissertação, mas o leitor pode encontrar a versão enumerável por Aurichi e Dias em [3].

Demonstração. $UM \uparrow G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \Rightarrow DOIS \uparrow P^\alpha(X, \tau)$:

Primeiramente, para cada $x \in X$, defina uma função escolha $f_x : \mathcal{O}_X \rightarrow \tau$ tal que $x \in f_x(\mathcal{U})$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$. Dada uma estratégia φ vencedora para UM em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, vamos construir uma estratégia ψ para $DOIS$ em $P^\alpha(X, \tau)$. Intuitivamente, se UM joga um ponto $x_0 \in X$, como $\varphi(\langle\rangle)$ é uma cobertura aberta, existiria um aberto U_0 ao qual x_0 pertenceria, e $DOIS$ responderia com U_0. Na rodada seguinte, se UM joga x_1, este ponto pertenceria a algum aberto $U_1 \in \varphi(\langle U_0 \rangle)$, com o qual $DOIS$ responderia.

Em geral, dado um ordinal $\beta < \alpha$, supondo que para todo $\gamma < \beta$ e toda sequência $\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle$ está definido $\psi(\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle)$ satisfazendo

$$x_\gamma \in \psi(\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle) \in \varphi(\langle \psi(\langle x_\varepsilon : \varepsilon \leq \delta \rangle) : \delta < \gamma \rangle),$$

vamos definir ψ em todas as β^+-sequências. De fato, para cada β^+-sequência $\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle$, $\varphi(\langle \psi(\langle x_\varepsilon : \varepsilon \leq \delta \rangle : \delta < \beta \rangle))$ é uma cobertura aberta, donde existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x_\beta \in U$. Portanto, definimos $\psi(\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle) = f_{x_\beta}(\varphi(\langle \psi(\langle x_\varepsilon : \varepsilon \leq \delta \rangle) : \delta < \beta \rangle))$, ou seja, a resposta de ψ a $\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle$ é uma vizinhança de x_β que está na cobertura que φ joga em função das jogadas anteriores de $DOIS$. Em particular, para qualquer β^+-sequência $\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle$ de elementos de X, ψ satisfaz

$$x_\beta \in \psi(\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle) \in \varphi(\langle \psi(\langle x_\varepsilon : \varepsilon \leq \delta \rangle) : \delta < \beta \rangle)).$$

Portanto, por recursão transfinita, ψ está definida satisfazendo essa condição para todas as β^+-sequências de pontos de X, para todo $\beta < \alpha$.

Daí, se $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ... \rangle$ é uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que $DOIS$ joga de acordo com ψ, i.e., $U_\beta = \psi(\langle x_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$ para todo $\beta < \alpha$, então $\langle \phi(\langle \rangle), U_0, ..., \phi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle), U_\beta, ... \rangle$ é uma partida de $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que UM joga de acordo com φ, já que, para todo $\beta < \alpha$, $U_\beta = \psi(\langle x_\delta : \delta \leq \beta \rangle) \in \varphi(\langle \psi(\langle x_\xi : \xi \leq \delta \rangle) : \delta < \beta \rangle) = \varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle)$, i.e. U_β é um elemento de $\varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle)$. Como φ é vencedora para UM em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, então $\bigcup\limits_{\beta < \alpha} U_\beta \neq X$, donde $DOIS$ vence em $P^\alpha(X, \tau)$, logo ψ é de fato uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $P^\alpha(X, \tau)$.

$DOIS \uparrow G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \Rightarrow UM \uparrow P^\alpha(X, \tau)$:

Seja φ uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Note que, dados $\beta < \alpha$ e $\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ uma β-sequência de coberturas abertas de X, existe $x \in X$ tal que para toda vizinhança U de x, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $U = \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown \mathcal{U})$. Intuitivamente, podemos "forçar" $DOIS$ a responder com a vizinhança de x que quisermos naquele momento do jogo.

De fato, supondo por contradição que isso não fosse verdade, para todo $x \in X$, existiria uma vizinhança U de x tal que $U \neq \varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown \mathcal{U})$ para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$. Assim, fixando com o Axioma da Escolha uma tal vizinhança U_x para cada $x \in X$, o conjunto $\mathcal{W} = \{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, logo existe $x \in X$ tal que $U_x = \varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown \mathcal{W})$, o que contradiz a escolha de U_x, que é uma vizinhança que nunca é escolhida por φ nessa situação.

Daí, dada f uma sequência qualquer de coberturas abertas, fixaremos com o Axioma da Escolha um ponto x_f como na observação acima, assim como $\mathcal{U}_{f,U}$ sendo uma cobertura aberta tal que $\varphi(f^\frown \mathcal{U}_{f,U}) = U$. Com isso, podemos definir uma estratégia ψ para UM em $P^\alpha(X,\tau)$. UM começa jogando o ponto $x_{\langle\rangle}$, e se $DOIS$ responde com U_0, nós consideramos, no jogo $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, que a primeira rodada foi $\langle \mathcal{U}_{\langle\rangle,U_0}, U_0\rangle$. Nesse caso, $DOIS$ estaria jogando em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de acordo com φ, pois a cobertura aberta que foi jogada na primeira rodada é exatamente a que faz com que φ responda com U_0.

Em geral, dados um ordinal $\beta < \alpha$ e uma sequência $\langle U_\delta : \delta < \beta\rangle$ de abertos, se $U_\delta = \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \delta\rangle)$ para todo $\delta < \beta$, então definimos $\psi(\langle U_\delta : \delta < \beta\rangle) = x_{\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta\rangle}$, i.e.

$$\psi(\langle \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \delta\rangle) : \delta < \beta\rangle) = x_{\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta\rangle}.$$

Se $\langle U_\delta : \delta < \beta\rangle$ não for dessa forma, fazemos $\psi(\langle U_\delta : \delta < \beta\rangle) = p$, para algum $p \in X$ fixo, pois em partidas em que UM joga de acordo com ψ, isso nunca acontecerá. De fato, se UM joga a partida $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ...\rangle$ de acordo com ψ, então $\langle \mathcal{U}_0, U_0, ..., \mathcal{U}_\beta, U_\beta, ...\rangle$, com $\mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}_{\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta\rangle, U_\beta}$ para todo $\beta < \alpha$, é uma partida de $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que $DOIS$ joga de acordo com φ, já que, pela escolha das coberturas $\mathcal{U}_{f,U}$, $\varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta\rangle^\frown \mathcal{U}_{\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma < \beta\rangle, U_\beta}) = U_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como φ é vencedora para $DOIS$, então $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta = X$ e, por outro lado, UM vence em $P^\alpha(X,\tau)$, logo ψ é uma estratégia vencedora.

$UM \uparrow P^\alpha(X,\tau) \Rightarrow DOIS \uparrow G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:

Seja φ uma estratégia vencedora para UM em $P^\alpha(X,\tau)$. Definiremos uma estratégia ψ para $DOIS$ em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de forma que, se UM começa com $\mathcal{U}_0$, então $\psi(\langle \mathcal{U}_0\rangle)$ é uma vizinhança de $\varphi(\langle\rangle)$ que esteja em $\mathcal{U}_0$. Em seguida, se UM joga $\mathcal{U}_1$ na segunda rodada, tomaríamos $\psi(\langle \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1\rangle)$ como uma vizinhança de $\varphi(\langle \psi(\langle \mathcal{U}_0\rangle)\rangle)$ que está em $\mathcal{U}_1$. Em geral, dado $\beta < \alpha$, supondo que $\psi(\langle \mathcal{U}_\delta : \delta \leq \gamma\rangle)$ está definida para todo $\gamma < \beta$ e toda γ^+-sequência $\mathcal{U}_\delta : \delta \leq \gamma\rangle$ de coberturas abertas de X satisfazendo

$$\varphi(\langle \psi(\langle \mathcal{U}_\xi : \xi \leq \delta\rangle) : \delta < \gamma\rangle)) \in \psi(\langle \mathcal{U}_\delta : \delta \leq \gamma\rangle) \in \mathcal{U}_\gamma,$$

mostraremos que ψ pode ser definida para toda $\beta + 1$-sequência de coberturas abertas de X. De fato, dada uma sequência $\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle$ de coberturas abertas, basta tomarmos $v = \varphi(\langle \langle \psi(\langle \mathcal{U}_\xi : \xi \leq \gamma\rangle) : \gamma < \beta\rangle))$ e definirmos $\psi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle) = f_v(\mathcal{U}_\beta)$, onde f_v é a função escolha definida anteriormente, que associa uma vizinhança de v a cada cobertura aberta. Dessa forma,

$$\varphi(\langle \psi(\langle \mathcal{U}_\xi : \xi \leq \delta\rangle) : \delta < \beta\rangle)) \in \psi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta\rangle) \in \mathcal{U}_\beta \ (*),$$

e, por recursão transfinita, ψ está definida satisfazendo essa fórmula para toda β^+-sequência de coberturas abertas, para todo $\beta < \alpha$. Agora, se $\langle \mathcal{U}_0, U_0, ..., \mathcal{U}_\beta, U_\beta, ...\rangle$ é uma partida de $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que $DOIS$ joga de acordo com ψ, então $U_\beta = \psi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$ para todo $\beta < \alpha$. Por $(*)$, temos $\varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle) \in U_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, logo $\langle \varphi(\langle\rangle), U_0, ..., \varphi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle), U_\beta, ... \rangle$ é uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ, donde $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta = X$ e $DOIS$ vence a partida $\langle \mathcal{U}_0, U_0, ..., \mathcal{U}_\beta, U_\beta, ... \rangle$. Como qualquer partida de $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que $DOIS$ joga de acordo com ψ resulta numa vitória sua, então ψ é uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

$DOIS \uparrow P^\alpha(X, \tau) \Rightarrow UM \uparrow G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:

Seja φ uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $P^\alpha(X, \tau)$. Note que, dado $\beta < \alpha$ e uma sequência $\langle x_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ de pontos de X, o conjunto $\{\varphi(\langle x_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown x) : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, pois cada um desses elementos é uma vizinhança do ponto que lhe serve de índice, e os índices percorrem todo o conjunto X. Com isso, definiremos ψ vencedora para UM em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ tal que, na primeira rodada, UM joga $\{\phi(\langle x \rangle) : x \in X\}$ e, se $DOIS$ responde com $\phi(\langle x_0 \rangle)$, então UM joga $\{\phi(\langle x_0, x \rangle) : x \in X\}$. Em geral, dados $\beta < \alpha$ e uma sequência $\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ de abertos, se existe uma sequência $\langle x_\gamma : \gamma < \beta \rangle$ tal que $U_\gamma = \varphi(\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle)$ para todo $\gamma < \beta$, então definimos $\psi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle) = \{\varphi(\langle x_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown x) : x \in X\}$. Caso contrário, definimos $\psi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle) = \{X\}$, o que é irrelevante, pois em partidas em que UM joga de acordo com ψ, isso nunca acontecerá. De fato, se $\langle \mathcal{U}_0, U_0, ..., \mathcal{U}_\beta, U_\beta, ... \rangle$ é uma partida de $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que UM joga de acordo com ψ, conseguimos construir uma sequência $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ tal que $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ... \rangle$ é uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que $DOIS$ joga de acordo com φ. Para construir tal sequência, seja $\beta < \alpha$ e suponha que, para todo $\gamma < \beta$, está definida $\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle$ tal que $U_\gamma = \varphi(\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle)$. Daí, $\mathcal{U}_\beta = \psi(\langle U_\gamma : \gamma < \beta \rangle)$, ou seja, $\mathcal{U}_\beta = \psi(\langle \varphi(\langle x_\delta : \delta \leq \gamma \rangle) : \gamma < \beta \rangle) = \{\varphi(\langle x_\gamma : \gamma < \beta \rangle ^\frown x) : x \in X\}$. Como $U_\beta \in \mathcal{U}_\beta$, existe $x_\beta \in X$ tal que $U_\beta = \varphi(\langle x_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$. Portanto, por indução transfinita, existe a sequência $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ que torna $\langle x_0, U_0, ..., x_\beta, U_\beta, ... \rangle$ uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que $DOIS$ joga de acordo com φ. Como φ é uma estratégia vencedora para $DOIS$, então $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \neq X$, logo UM vence em $G_1^\alpha(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e ψ é vencedora.

$\square$

Notação. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, denotamos o conjunto de todas as famílias de abertos de união densa em X por $\mathcal{O}_D$.*

Proposição 1.3.11. *Se α é um ordinal, $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, então o jogo $P_D^\alpha(X, \tau)$ é dual ao jogo $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$.*

Definição 1.3.12. *Uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ é uma **K-cobertura** se para todo compacto $K \subseteq X$ existe um aberto $U \in \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq U$. O* *conjunto de todas as K-coberturas de X será denotado por $\mathcal{O}_K$.*

Proposição 1.3.13. *Se α é um ordinal e $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, então os jogos $K_D^\alpha(X, \tau)$ e $G_1^\alpha(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_D)$ são duais.*

As provas de 1.3.11 e 1.3.13 seguem de forma totalmente análoga à de 1.3.10.

1.4 Submodelos elementares

A referência para as definições e notações dessa seção é a seção **1.15** de [16].

Definição 1.4.1. *Um $\in$-modelo é um par $\mathfrak{A} = (A, E)$, onde A é um conjunto qualquer e $E \subseteq A \times A$. Para nosso interesse, E será sempre a relação $\{\langle x, y \rangle : x, y \in A, x \in y\}$, e muitas vezes iremos nos referir ao modelo $\mathfrak{A}$ apenas pelo conjunto A.*

Definição 1.4.2. *Se A é um conjunto e φ é uma fórmula da teoria dos conjuntos, σ é uma substituição para φ em A se σ é uma função cujo domínio contém todas as variáveis livres de φ e cuja imagem está contida em A.*

É comum o uso da notação $(x_1/a_1, ..., x_n/a_n)$ para a substituição $\{\langle x_1, a_1 \rangle, ..., \langle x_n, a_n \rangle\}$.

Definição 1.4.3. *Sejam σ_1, σ_2 substituições. Então $\sigma_1 + \sigma_2$ é a substituição dada por*

$$\sigma_1 + \sigma_2(x_i) = \begin{cases} \sigma_2(x_i), & \text{se } x_i \in dom(\sigma_2) \\ \sigma_1(x_i), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, definiremos recursivamente a noção de um conjunto A satisfazer uma fórmula φ com parâmetros em A.

Definição 1.4.4. *Sejam $\mathfrak{A} = (A, E)$ é um $\in$-modelo, x, y variáveis, φ a fórmula $x \in y$ e σ uma substituição para φ em A. Então,*

$$val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = \begin{cases} 1, & \text{se } (\sigma(x), \sigma(y)) \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se φ é a fórmula $x = y$, então

$$val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(x) = \sigma(y), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.4.5. *Se $\mathfrak{A} = (A, E)$ é um $\in$-modelo, φ, ψ são fórmulas e σ é uma substituição para φ em A, definimos $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ recursivamente, tomando*

- $val_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$

- $val_{\mathfrak{A}}(\varphi \wedge \psi)[\sigma] = val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] \cdot val_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$

- $val_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = \begin{cases} 1, & se\ val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = 1\ para\ algum\ a \in A, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

Interpretando o resultado da valoração ser 1 como a fórmula ser verdadeira com os parâmetros dados pela substituição, conseguimos estabelecer a noção de um conjunto A modelar uma sentença ou uma fórmula com parâmetros em A. Em geral, se $\mathfrak{A} = (A, E)$ é um $\in$-modelo, $a_1, ..., a_n \in A$, φ é uma fórmula com variáveis livres $x_1, ..., x_n$ e $\sigma = \{(x_1, a_1), ..., (x_n, a_n)\}$, então denotaremos $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = 1$ como $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, ou, mais frequentemente, $A \models \varphi[a_1, ..., a_n]$.

Definição 1.4.6 (Submodelos elementares)**.** *Sejam M, N conjuntos com $M \subseteq N$. Se φ é uma fórmula da teoria dos conjuntos com variáveis livres entre $x_1, ..., x_n$, dizemos que φ é elementar para M e N, denotado por $M \preccurlyeq_\varphi N$, se, para todos $a_1, ..., a_n \in M$, $M \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e somente se, $N \models \varphi[a_1, ..., a_n]$. Dizemos que M é um submodelo elementar de N, denotado por $M \preccurlyeq N$, se toda fórmula φ é elementar para M e N.*

1.4.1 O Critério de Tarski-Vaught e o Teorema de Lowenheim-Skolem-Tarski

Para que seja possível utilizar os submodelos elementares como ferramenta para provar resultados, é necessário que existam estruturas que satisfaçam o suficiente de ZFC para permitir as construções básicas da teoria dos conjuntos, assim como é necessário poder tomar submodelos de qualquer uma dessas estruturas. Nessa seção, vamos abordar os teoremas clássicos que permitem construir submodelos elementares de qualquer conjunto.

Lema 1.4.7. *Se φ é uma fórmula livre de quantificadores e A, B são conjuntos com $A \subseteq B$, então $A \preccurlyeq_\varphi B$.*

Demonstração. Primeiramente, é imediato das definições que, se φ é uma fórmula atômica, então $A \preccurlyeq_\varphi B$. Sejam, portanto, φ e ψ fórmulas livres de quantificadores tais que $A \preccurlyeq_\varphi B$ e $A \preccurlyeq_\psi B$, e mostraremos que $A \preccurlyeq_{\neg\varphi} B$ e $A \preccurlyeq_{\varphi\wedge\psi} B$, começando por $\neg\varphi$. De fato, se $a_1, ..., a_n \in A$, as variáveis livres de φ são $x_1, ..., x_n$ e $\sigma = \{(x_1, a_1), ..., (x_n, a_n)\}$,

$$val_A(\varphi)[\sigma] = 1 \iff val_B(\varphi)[\sigma] = 1.$$

Daí, como a valoração só assume os valores 0 e 1,

$$val_A(\varphi)[\sigma] = 0 \iff val_B(\varphi)[\sigma] = 0,$$

logo

$$val_A(\neg\varphi)[\sigma] = 1 \iff val_A(\varphi)[\sigma] = 0 \iff val_B(\varphi)[\sigma] = 0 \iff val_B(\neg\varphi)[\sigma] = 1.$$

Em outras palavras, $A \models \neg\varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e só se $B \models \neg\varphi[a_1, ..., a_n]$, portanto $A \preccurlyeq_{\neg\varphi} B$.

Para $\varphi \wedge \psi$, se as variáveis livres de φ e ψ estão entre $x_1, ..., x_m$ e $a_1, ..., a_m \in A$, definindo $\sigma = \{(x_1, a_1), ..., (x_m, a_m)\}$,

$$\begin{aligned}
val_A(\varphi \wedge \psi)[\sigma] = 1 &\iff val_A(\varphi)[\sigma] \cdot val_A(\psi)[\sigma] = 1 \\
&\iff val_A(\psi)[\sigma] = 1 \wedge val_A(\varphi)[\sigma] = 1 \\
&\iff val_B(\varphi)[\sigma] = 1 \wedge val_B(\varphi)[\sigma] = 1 \\
&\iff val_B(\varphi)[\sigma] \cdot val_B(\varphi)[\sigma] = 1 \\
&\iff val_B(\varphi \wedge \psi)[\sigma] = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $A \models \varphi \wedge \psi[a_1, ..., a_m]$ se, e somente se $B \models \varphi \wedge \psi[a_1, ..., a_m]$.
Como toda fórmula livre de quantificadores é definida recursivamente a partir de fórmulas atômicas e conjunções e negações de fórmulas livres de quantificadores previamente definidas, podemos concluir que todas elas são elementares para A e B.

$\square$

Esse resultado nos indica que a verificação de que um $\in$-modelo é um submodelo elementar de outro se reduz, de alguma forma, apenas à verificação de fórmulas quantificadas. Isso é expresso de forma mais concreta pelo critério de Tarski-Vaught. A demonstração a seguir não se encontra na referência [16], mas foi apresentada pelo autor da dissertação.

Lema 1.4.8 (Critério de Tarski-Vaught). *Sejam M, N conjuntos com $M \subseteq N$. São equivalentes:*

(1) M é submodelo elementar de N.

(2) Para toda fórmula da forma $\exists x(\varphi(x, x_1, ..., x_n))$ e todos $a_1, ..., a_n \in M$, se $N \models \exists x\varphi[a_1, ..., a_n]$, então existe $a \in M$ tal que $N \models \varphi[a, a_1, ..., a_n]$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) :

Dada uma fórmula da forma $\exists x\varphi(x, x_1, ..., x_n)$, $a_1, ..., a_n$ são elementos de M e $N \models \exists x\varphi[a_1, ..., a_n]$, então, por elementaridade, $M \models \exists x\varphi[a_1, ..., a_n]$. Daí, por definição, existe $a \in M$ tal que $M \models \varphi[a, a_1, ..., a_n]$. Novamente por elementaridade, $N \models \varphi[a, a_1, ..., a_n]$.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Vamos mostrar que $M \preccurlyeq N$ por indução na complexidade das fórmulas. Primeiramente, por 1.4.7, se φ é uma fórmula livre de quantificadores (o que inclui as atômicas), então $M \preccurlyeq_\varphi N$. Agora, se φ e ψ são fórmulas tais que $M \preccurlyeq_\varphi N$, $M \preccurlyeq_\psi N$ e cujas variáveis livres estão entre $x_1, ..., x_n$, então dados $a_1, ..., a_n \in M$, então

$$\begin{aligned} M \models (\psi \wedge \varphi)[a_1, ..., a_n] &\iff M \models \varphi[a_1, ..., a_n] \wedge M \models \psi[a_1, ..., a_n]. \\ &\iff N \models \varphi[a_1, ..., a_n] \wedge N \models \psi[a_1, ..., a_n] \text{ (Por indução)} \\ &\iff N \models \varphi \wedge \psi[a_1, ..., a_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \models \neg\varphi[a_1, ..., a_n] &\iff \neg M \models \varphi[a_1, ..., a_n] \\ &\iff \neg N \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ (Pela hipótese de indução)} \\ &\iff N \models \neg\varphi[a_1, ..., a_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \models \exists x_1 \varphi[a_2, ..., a_n] &\iff M \models \varphi[a, a_2, ..., a_n] \text{ para algum } a \in M \\ &\iff N \models \varphi[a, a_2, ..., a_n] \text{ para algum } a \in M \text{, por indução} \\ &\iff N \models \exists x_1 \varphi[a_2, ..., a_n]. \end{aligned}$$

Note que, em geral, a equivalência $M \models \exists x_1 \varphi[a_2, ..., a_n] \iff N \models \exists x_1 \varphi[a_2, ..., a_n]$ seria apenas uma implicação, pois o elemento de N que testemunha a validade da fórmula existencial pode estar em $N \setminus M$. No entanto, (2) é exatamente a implicação contrária (que aparece na última linha da sequência de equivalências acima), resultando na equivalência. Com isso, concluímos as fórmulas atômicas são elementares para M e N, assim como as conjunções, negações, e quantificações de fórmulas elementares para M e N continuam sendo elementares. Portanto, todas as fórmulas da teoria dos conjuntos são elementares para M e N, i.e., $M \preccurlyeq N$. $\square$

Teorema 1.4.9 (Löwenheim-Skolem-Tarski)**.** *Sejam N um conjunto e $A \subseteq N$. Então existe $M \subseteq N$ tal que $A \subseteq M$, $M \preccurlyeq N$ e $|M| = max\{\aleph_0, |A|\}$.*

Demonstração. Para cada fórmula da $\varphi(x_1, ..., x_n)$ da forma $\exists x \psi(x, x_1, ..., x_n)$, definiremos uma função de Skolem $f_\varphi : N^n \to N$ da seguinte forma: dados $a_1, ..., a_n \in N$, se $N \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, então, por definição, existe $a \in N$ tal que $N \models \psi[a, a_1, ..., a_n]$, portanto podemos usar o Axioma da Escolha para fixar uma enumeração de N $\{k_\alpha : \alpha < |N|\}$, e se $\gamma = min\{\alpha < |N| : N \models \varphi[k_\alpha, a_1, ..., a_n]\}$, então definimos $f_\varphi(a_1, ..., a_n) = k_\gamma$. Fixe $p \in N$, e caso $N \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$, definimos $f_\varphi(a_1, ..., a_n) = p$. Seja $\mathcal{F}$ a família das funções de Skolem f_φ para toda fórmula existencial $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e defina $M_0 = A$, $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup\{f[M_n] : f \in \mathcal{F}\}$ para todo $n < \omega$ e $M = \bigcup\limits_{n<\omega} M_n$ (em outras palavras, M é o fecho de A por $\mathcal{F}$). Como a linguagem possui uma quantidade enumerável de fórmulas, $\mathcal{F}$ é enumerável e, para todo $n < \omega$, $|M_{n+1}| \leq |M_n| + \sum_{f \in \mathcal{F}} |f[M_n]| \leq \aleph_0 \times M_n$. Como $M_0 = A$, então $|M_n| \leq \aleph_0 \times |A|$ para todo $n < \omega$, logo $|M| = \aleph_0 \times |A|$.

Por fim, usamos o critério de Tarski-Vaught para concluir que $M \preccurlyeq N$, pois dados $a_1, ..., a_n \in M$, podemos tomar $m_1, ..., m_n$ tais que $a_i \in M_{m_i}$, e se $m = max\{m_i : 1 \leq i \leq n\}$, então $a_1, ..., a_n \in M_m$. Daí, dada uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ da forma $\exists x \psi(x, x_1, ..., x_n)$, se $N \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, então $f_\varphi(a_1, ..., a_n) \in M_{m+1} \subseteq M$ e $N \models \psi[f_\varphi(a_1, ..., a_n), a_1, ..., a_n]$, pela definição das funções de Skolem. □

Como queríamos, o teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski permite a construção de um submodelo elementar de qualquer conjunto, e que ainda contém tantos parâmetros quanto forem necessários.

É importante observar que o argumento para o conjunto das fórmulas ser enumerável não é feito dentro de ZFC mas sim numa metateoria, pois o "conjunto das fórmulas" não é um objeto da teoria dos conjuntos. No entanto, seria possível codificar o conjunto das fórmulas dentro de ZFC como uma árvore indexada por ${}^{<\omega}\omega$, que é enumerável.

1.4.2 $H(\theta)$ e submodelos melhores

Definição 1.4.10. *Dado x conjunto, definimos o fecho transitivo de x, $trcl(x) = \bigcup\{\bigcup^n(x) : n < \omega\}$, onde*

$$\bigcup^n(x) = \begin{cases} x, & se\ n = 0, \\ \bigcup\bigcup^{n-1}(x), & \boldsymbol{se}\ 0 < n < \omega. \end{cases}$$

Definição 1.4.11. *Dado κ um cardinal infinito, definimos o conjunto dos conjuntos hereditariamente menores que κ, $H(\kappa) = \{x : |trcl(x)| < \kappa\}$.*

Teorema 1.4.12. *Se κ é um cardinal regular e não-enumerável, então $H(\kappa)$ satisfaz todos os axiomas de ZFC, exceto possivelmente o Axioma das Partes.*

Demonstração. Todos os axiomas, com exceção do Axioma da Extensionalidade, atestam a existência de determinados conjuntos. Para mostrar que $H(\kappa)$ satisfaz esses axiomas, basta mostrarmos que esses conjuntos existem em $H(\kappa)$ quando os parâmetros são tomados em $H(\kappa)$, i.e., que dado $x \in H(\kappa)$, $\mathcal{P}(X) \subseteq H(\kappa)$, $\bigcup x \in H(\kappa)$, etc..

- Axioma da Extensionalidade $(\forall x \forall y \forall z (z \in x \iff z \in y) \rightarrow x = y)$:

  Note que, dado $x \in H(\kappa)$, se $y \in x$, então $y \in H(\kappa)$, pois $trcl(y) \subseteq trcl(x)$ (ou seja, $H(\kappa)$ é transitivo). Logo, dados $x_1, x_2 \in H(\kappa)$, se $z \in x_1 \iff z \in x_2$ para todo $z \in H(\kappa)$, então dado z qualquer no universo, $z \in x_1 \iff z \in x_1 \wedge z \in H(\kappa) \iff z \in x_2 \wedge z \in H(\kappa) \iff z \in x_2$. Como vale o Axioma da Extensionalidade no universo, $x_1 = x_2$.

- Axioma da Separação (Para cada fórmula $\varphi(z)$, $\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \in x \wedge \varphi(z)))$:

  Se $x \in H(\kappa)$ e $\varphi(v_1)$ é uma fórmula com v_1 livre, então, pelo Axioma da Separação no universo, existe $y = \{z \in x : \varphi(z)\}$. Como $y \subseteq x$, $|trcl(y)| \leq |trcl(x)| < \kappa$, logo $y \in H(\kappa)$.

- Axioma do Par $(\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z))$:

  Dados $x, y \in H(\kappa)$, pelo Axioma do Par no universo, existe o conjunto $z = \{x, y\}$. Daí, $trcl(z) = z \cup trcl(x) \cup trcl(y)$, logo $|trcl(z)| \leq 2 + |trcl(x)| + |trcl(y)| = max\{2, |trcl(x)|, |trcl(y)|\} < \kappa$, logo $z \in H(\kappa)$ e $x, y \in z$.

- Axioma da União $(\forall x \exists y \forall z \forall w (w \in z \wedge z \in x \to w \in y))$:

  Dado $x \in H(\kappa)$, pelo Axioma da União no universo, existe o conjunto $\bigcup x$. Como $\bigcup x \subseteq trcl(x)$, então $trcl(\bigcup x) \subseteq trcl(trcl(x)) = trcl(x)$, logo $|trcl(\bigcup x)| \leq |trcl(x)| < \kappa$, logo $\bigcup x \in H(\kappa)$.

- Axioma da Substituição (Para cada fórmula $\varphi(y, z)$,

  $(\forall x (\forall y \in x \exists ! z \varphi(y, z) \to \exists w \forall y \in x \exists z \in w (\varphi(y, z))))$:

  Dados $x \in H(\kappa)$ e $\varphi(y, z)$ uma fórmula tal que para todo $y \in x \cap H(\kappa)$ existe um único $z \in H(\kappa)$ tal que $\varphi(y, z)$, definimos $\psi(y, z) := \varphi(y, z) \wedge z \in H(\kappa)$, e é evidente que, para todo $y \in x$, existe um único z tal que $\psi(y, z)$. Aplicando o Axioma da Substituição no universo para x e $\psi(y, z)$, existe o conjunto $w = \{z : \exists y \in x(\psi(y, z))\} = \{z \in H(\kappa) : \exists y \in x(\varphi(y, z))\}$. Além disso, $|trcl(w)| = |w \cup \bigcup \{trcl(z) : z \in w\}| \leq |w| + \sum_{z \in w} |trcl(z)|$. Como para cada $y \in x$ existe um único $z \in H(\kappa)$ tal que $\varphi(y, z)$, então w está indexado por x, donde $|w| \leq |x| < \kappa$. Como κ é regular, $\sum_{z \in w} |trcl(z)| < \kappa$, pois $|trcl(z)| < \kappa$ para todo $z \in w$, já que $w \subseteq H(\kappa)$.

- Axioma do Infinito $(\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)))$:

  ω é hereditariamente enumerável, logo $\omega \in H(\kappa)$ e $\omega \subseteq H(\kappa)$. Além disso, $\emptyset \in \omega$ e ω é fechado para o operador de sucessor.

- Axioma da Escolha $(\forall F (\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F (x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \exists C \forall x \in F (\exists w (w \in C \cap x \wedge \forall z \in C \cap x (z = w)))))$:

  Essa versão do Axioma da Escolha diz que dada uma família de conjuntos disjuntos e não-vazios, existe um conjunto que intersecta os elementos dessa família em exatamente um elemento.

  Dada uma família $x \in H(\kappa)$ de conjuntos disjuntos e não-vazios, pelo Axioma da Escolha no universo, existe um conjunto y tal que $y \cap z$ é um unitário para todo $z \in x$. Nesse caso, $y \cap \bigcup x$ satisfaz o mesmo e também temos $y \cap \bigcup x \in H(\kappa)$.

□

Apesar de $H(\kappa)$ não necessariamente satisfazer o Axioma das Partes, isto não é um problema nas aplicações que faremos, pois podemos tomar κ grande o suficiente de forma que as famílias de subconjuntos das quais precisarmos já são elementos de $H(\kappa)$, pois não nos preocuparemos com coleções de conjuntos de cardinalidades arbitrariamente grandes. No entanto, ainda teremos interesse em tomar submodelos elementares de $H(\kappa)$ e falar sobre sequências de elementos desses submodelos, assim como sobre alguns subconjuntos. O lema a seguir nos dá uma solução satisfatória para esse problema, nos permitindo supor que tomamos esses submodelos fechados para sequências de determinados comprimentos.

Para mais detalhes sobre $H(\kappa)$, o leitor pode se referir a [15]. Os resultados e definições sobre submodelos elementares a seguir podem ser consultados nas referências [10] e [9].

Definição 1.4.13. *Dizemos que um conjunto M é κ-fechado se $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$, i.e., subconjuntos de cardinalidade menor que ou igual a κ de M são elementos de M.*

Lema 1.4.14. *Se κ e θ são cardinais com $\kappa < \theta$ e M é um submodelo elementar κ-fechado de $H(\theta)$, então $\kappa^+ \subseteq M$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe $\alpha = min\{\beta < \kappa^+ : \beta \notin M\}$. No entanto, $\alpha \subseteq M$, $|\alpha| \leq \kappa$ e, como M é κ-fechado, $\alpha \in M$, contradizendo a definição de α. □

Lema 1.4.15. *Sejam θ, κ cardinais tais que $2^\kappa < \theta$ (ou seja, $2^\kappa \in H(\theta)$). Dado $A \subseteq H(\theta)$ com $|A| \leq 2^\kappa$, existe $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $A \subseteq M$, $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$ e $|M| = 2^\kappa$.*

Demonstração. Seja $M_0 = A$ e, dado $\alpha \in (0, \kappa^+)$, supondo que $|M_\beta| \leq 2^\kappa$ para todo $\beta < \alpha$, tem-se $|\bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta \cup [M_\beta]^{\leq\kappa}| \leq |\alpha| \times (2^\kappa + (2^\kappa)^\kappa) = |\alpha| \times 2^\kappa = 2^\kappa$. Portanto, por 1.4.9, podemos tomar um submodelo elementar M_α de $H(\theta)$ tal que $M_\alpha \leq 2^\kappa$ e $M_\beta \cup [M_\beta]^{\leq\kappa} \subseteq M_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$. Se tomamos $M = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa^+} M_\alpha$, então $M \preccurlyeq H(\theta), |M| \leq 2^\kappa$ e $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$.

- $M \preccurlyeq H(\theta)$:

  Dada uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ da forma $\exists x(\psi(x, x_1, ..., x_n))$ e $a_1, ..., a_n \in M$, existe $\alpha < \kappa^+$ tal que $a_1, ..., a_n \subseteq M_\alpha$. Daí, se $H(\theta) \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, como $M_\alpha \preccurlyeq H(\theta)$, então, por Tarski-Vaught, existe $a \in M_\alpha$ tal que $H(\theta) \models \psi[a, a_1, ..., a_n]$. Como $M_\alpha \subseteq M$, então existe $a \in M$ tal que $H(\theta) \models \psi[a, a_1, ..., a_n]$, logo, novamente por Tarski-Vaught, pela arbitariedade de φ, $M \preccurlyeq H(\theta)$.

- $|M| \leq 2^\kappa$:

  Como $M = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa^+} M_\alpha$, então $|M| \leq \sum\limits_{\alpha<\kappa^+} 2^\kappa \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$.

- $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$:

  Seja $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um subconjunto de M de cardinalidade menor ou igual a κ. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $\beta_\alpha = min\{\beta < \kappa^+ : x_\alpha \in M_\beta\}$. Como κ^+ é regular, se $\beta = \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \kappa\}$, então $\beta < \kappa^+$, logo $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq M_\beta$. Daí, $A \subseteq M_\beta$ e $|A| \leq \kappa$, donde $A \in M_{\beta+1} \subseteq M$, i.e. $A \in M$.

□

Em geral, os submodelos elementares não serão transitivos, pois muitas vezes toma-se um submodelo M de cardinalidade fixada, mas com alguns elementos cuja cardinalidade não é conhecida a priori. Apesar disso, ainda vamos querer falar de elementos de elementos de M dentro de M em alguns casos. Para isso, observamos que os submodelos elementares podem ser tomados "transitivos até determinadas cardinalidades", se forem construídos de maneira oportuna.

Lema 1.4.16. *Se θ é um ordinal regular e não-enumerável, $M \preccurlyeq H(\theta)$ e κ é um cardinal tal que $\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$, então dado $A \in M$ com $|A| \leq \kappa$, tem-se $A \subseteq M$.*

Demonstração. Observemos que, se $|A| \leq \kappa$, então "M sabe disso", no sentido de que existe $f : \kappa \to A$ sobrejetora com $f \in M$. De fato, considere $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ como uma fórmula que diz que "x_1 é uma função sobrejetora de x_2 em x_3". Como $\kappa, A \in M$ e $M \subseteq H(\theta)$, então $\kappa, A \in H(\theta)$, donde qualquer função de κ em A também é hereditariamente menor que κ, logo elemento de $H(\theta)$. Ou seja, como $|A| \leq \kappa$, $H(\theta) \models \exists x_1 \varphi[\kappa, A]$. Por Tarski-Vaught, como $\kappa, A \in M$, existe $f \in M$ tal que $H(\theta) \models \varphi[f, \kappa, A]$. Além disso, considerando $\psi(x_1, x_2, x_3)$ como uma fórmula que diz "x_3 é função e $(x_1, x_2) \in x_3$", para cada $\alpha < \kappa$, $H(\theta) \models \exists x_2 \psi[\alpha, f]$, e, como $\alpha \in M$ e $f \in M$, existe $a \in M$ tal que $H(\theta) \models \psi[\alpha, a, f]$, e, em particular, como $A = im(f)$ e $f(\alpha) \in M$ para todo $\alpha < \kappa$, $A \subseteq M$. □

Segue do fato de $H(\theta)$ modelar $ZFC - P$ que os submodelos elementares de $H(\theta)$ contém o ordinal $\omega + 1$, mas em geral podemos construir esses submodelos já supondo que $\omega + 1$ está contido neles. Em geral, se queremos construir um submodelo M de tamanho κ, podemos supor $\kappa \cup \{\kappa\} \subseteq M$, e imediatamente obtemos M transitivo para elementos de tamanho até κ, i.e., se $B \in M$ com $|B| \leq \kappa$, então $B \subseteq M$.

Lema 1.4.17. *Seja N um conjunto e $\{M_i : i \in I\}$ uma $\subseteq$-cadeia de submodelos elementares de N. Se $M = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, então $M \preccurlyeq N$.*

Demonstração. Como $M_i \subseteq N$ para todo $i \in I$, então $M \subseteq N$. Além disso, dados uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ da forma $\exists\psi(x, x_1, ..., x_n)$ e $a_1, ..., a_n \in M$ tais que $N \models \varphi[a_1, ..., a_n]$, existem $i_1, ..., i_n \in I$ tais que $a_j \in M_{i_j}$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Como $\{M_{i_j} : 1 \leq j \leq n\}$ é uma cadeia finita, existe $i \in I$ tal que $M_{i_j} \subseteq M_i$ para todo $j \leq n$. Daí, como $M_i \preccurlyeq N$, existe $a \in M_i$ tal que $N \models \psi[a, a_1, ..., a_n]$. Em particular, $a \in M$, logo $M \preccurlyeq N$ pelo critério de Tarski-Vaught. □

Corolário 1.4.18. *Se θ, κ são cardinais tais que $2^{<\kappa} < \theta$ e $A \subseteq H(\theta)$ com $|A| \leq 2^{<\kappa}$, então existe $M \preccurlyeq H(\theta)$ com $A \subseteq M$, $[M]^{<\kappa} \subseteq M$ e $|M| = 2^{<\kappa}$.*

Demonstração. Para cada $\alpha < \kappa$, supondo que definimos $M_\beta \preccurlyeq H(\theta)$ para todo $\beta < \alpha$ com $|M_\beta| \leq 2^{|\beta|}$, basta tomarmos M_α contendo $A \cup \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ com $[M_\alpha]^{\leq|\alpha|} \subseteq M_\alpha$ e $|M_\alpha| = 2^{|\alpha|}$. Nesse caso, $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ está é um submodelo $<\kappa$-fechado de $H(\theta)$ que contém M e cuja cardinalidade é $2^{<\kappa}$. □

Capítulo 2

A teoria de invariantes cardinais e alguns teoremas clássicos

2.1 Funções cardinais

A menos de menção contrária, a referência [13] é a principal para as definições e resultados apresentados nessa seção.

Uma função cardinal é uma função-classe φ de alguma subclasse da classe de todos os espaços topológicos em **CARD** que é invariante por homeomorfismos. Apesar de existirem espaços topológicos finitos ou com alguns invariantes cardinais finitos, o interesse dessa teoria é nos espaços infinitos e em invariantes maiores ou iguais a $\aleph_0$. A função cardinal mais óbvia, e muitas vezes a que procuramos limitar em função de outras, é a cardinalidade. Ao longo dessa seção, $\langle X, \tau \rangle$ sempre será um espaço topológico.

Definição 2.1.1. *Definimos o cardinal $o(X)$ como menor cardinal infinito que domina a topologia de X, i.e., $o(X) = |\tau| + \aleph_0$.*

Definição 2.1.2. *O **peso** de X é definido por*

$$w(X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base para } X\} + \aleph_0.$$

Em geral, o peso de um espaço topológico não limita nem é limitado pela sua cardinalidade, mas se X satisfaz alguns axiomas de enumerabilidade, então $w(X)$ e $|X|$ estão limitados por uma potência do outro, a saber:

Teorema 2.1.3. *1. $w(X) \leq o(X) \leq 2^{|X|}$*

2. $o(X) \leq 2^{w(X)}$

3. Se X é T_0, então $|X| \leq o(X) \leq 2^{w(X)}$.

Demonstração. O item 1 é óbvio, pois $w(X) \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

O item 2 segue do fato de que se $\mathcal{B}$ é uma base, então todo aberto de X é união de uma subfamília de $\mathcal{B}$. Logo, se fixamos uma base $\mathcal{B}$ com $|\mathcal{B}| \leq w(X)$, então a função $\varphi : \mathcal{B} \to \tau$ definida com $\varphi(\mathcal{S}) = \bigcup \mathcal{S}$ é sobrejetora, donde $|\tau| \leq |\mathcal{B}| \leq w(X)$.

Para o item 3, considere $g : X \to \tau$ com $g(x) = X \setminus \overline{\{x\}}$. Como X é T_0, dados $x, y \in X$ distintos, existe um aberto que contém exatamente um dos dois, logo ou $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$, i.e., $x \in g(y)$ ou $y \in g(x)$. Como $x \notin g(x)$ e $y \notin g(y)$, então $g(x) \neq g(y)$, logo g é injetora e $|X| \leq |\tau|$. A última desigualdade segue do item 2. □

Definição 2.1.4. *A **densidade** de X é o cardinal definido por:*

$$d(X) = min\{|D| : D \subseteq X \ \wedge \ \overline{D} = X\} + \aleph_0,$$

i.e., a menor cardinalidade de um subconjunto denso de X.

Lema 2.1.5. *Se X é Hausdorff e primeiro-enumerável e $d(X) \leq 2^{\aleph_0}$, então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Seja D um denso de X com $|D| \leq 2^{\aleph_0}$. Como X é primeiro enumerável e $X = \overline{D}$, para cada $x \in X$, existe uma sequência $\langle d_{x,n} : n < \omega \rangle$ de elementos de D que converge para x. Como X é Hausdorff, os limites de sequências são únicos. Logo, podemos definir uma função injetora $\varphi : X \to {}^{\omega}D$ tomando $\varphi(x) = \langle d_{x_n} : n < \omega \rangle$, donde $|X| \leq |{}^{\omega}D| = |D|^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

□

A seguir, vamos provar o clássico teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, que garante a preservação da densidade de espaços topológicos por produtos cartesianos até certa cardinalidade.

Lema 2.1.6. *Se κ é um cardinal infinito e I é um conjunto com $|I| \leq 2^{\kappa}$, então existe uma cobertura $\mathcal{A}$ tal que*

1. *$|\mathcal{A}| \leq \kappa$;*
2. *Para todos $i_1, ..., i_n \in I$ distintos, existem $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ dois-a-dois disjuntos tais que $i_j \in A_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstração. Apesar de ser um resultado estritamente combinatório, vamos construir uma cobertura satisfazendo 1 e 2 para o espaço topológico 2^{κ}, i.e., $\prod\limits_{\alpha<\kappa} \{0, 1\}$, onde $\{0, 1\}$ está munido da topologia discreta. Dessa forma, essa cobertura induz coberturas satisfazendo 1 e 2 para cada subconjunto de 2^{κ}, e, consequentemente, para qualquer conjunto de cardinalidade menor ou igual a 2^{κ}.

Utilizaremos da topologia de 2^κ pois, como $\{0,1\}$ é Hausdorff, 2^κ também o é, logo dados $i_1, ..., i_n \in 2^\kappa$, existem $A_1, ..., A_n$ abertos disjuntos tais que $i_j \in A_j$ para todo $i \leq n$, e cada um desses abertos contém uma vizinhança básica dos respectivos pontos.

Portanto, qualquer base de 2^κ satisfaz o item 2. Além disso, uma base para 2^κ é o conjunto $\mathcal{B} = \{[s] : s \in Fn(\kappa, 2)\}$, onde $Fn(\kappa, 2)$ é o conjunto das funções $f : A \to \{0,1\}$, onde A é um subconjunto finito de κ e $[s] = \{f : \kappa \to \{0,1\} : s \subseteq f\}$, i.e., o conjunto de todas as extensões de s a κ. Como $|\mathcal{B}| = |Fn(\kappa, 2)| = \kappa$, então essa base é uma cobertura de 2^κ que satisfaz 1 e 2.

$\square$

Teorema 2.1.7. *(Hewitt, Marczewski, Pondiczery). Seja κ um cardinal infinito. Se $X = \prod_{i \in I} X_i$ com $|I| \leq 2^\kappa$ e $d(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in I$, então $d(X) \leq \kappa$. Em particular, o produto de $\mathfrak{c}$ espaços separáveis é separável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura de I como no lema anterior. Para cada $i \in I$, seja $\{x_{i,\alpha} : \alpha < \kappa\}$ um conjunto denso em X_i. Para cada $n < \omega$, cada sequência finita $\Sigma = \langle A_i, ..., A_n \rangle$ de elementos dois-a-dois disjuntos de $\mathcal{A}$ e cada sequência finita $\Delta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ de ordinais em κ, defina

$$f(n, \Sigma, \Delta)(i) = \begin{cases} x(i, \beta_j), & \textbf{se } t \in A_j \\ x(t, 0), & \textbf{se } t \notin \bigcup_{j=1}^{n} A_j \end{cases}$$

Seja $S = \{f(n, \Sigma, \Delta) : n < \omega, \Delta \in {}^{<\omega}\kappa, \Sigma \in {}^{<\omega}\mathcal{A}$ e $(i \neq j \to \Sigma_i \cap \Sigma j = \emptyset)\}$. Claramente, $|S| \leq \aleph_0 \cdot \kappa^{<\omega} \cdot \kappa^{<\omega} = \kappa$. Para mostrar a densidade de S, seja $V = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}[V_{j_i}]$ um aberto básico de X (ou seja, cada V_{j_i} é um aberto não-vazio de X_{j_i}). Seja $\Sigma = \langle A_1, ..., A_n \rangle$ uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos tais que $j_i \in A_i$ para todo $i \leq n$. Para cada $i \leq n$, como $\{x_{j_i,\alpha} : \alpha < \kappa\}$ é denso em X_{j_i}, podemos tomar $x_{j_i,\beta_i} \in V_{j_i}$. Se $\Delta = \langle \beta_1, ..., \beta_n \rangle$, então $f(n, \Sigma, \Delta)(j_i) = x(j_i, \beta_i) \in V_{j_i}$ para todo $i \leq n$, i.e. $f(n, \Sigma, \Delta) \in \pi_{j_i}^{-1}[V_{j_i}]$ para todo $i \leq n$, logo $f(n, \Sigma, \Delta) \in S \cap V$. Com isso, concluímos que $S \subseteq X$ intersecta qualquer aberto não-vazio, logo é um denso de cardinalidade κ, donde $d(X) \leq \kappa$. $\square$

Definição 2.1.8. *O **spread** de X é definido como $s(X) = sup\{|D| : D \subseteq X,\ D$ é discreto$\} + \aleph_0$.*

Definição 2.1.9. *O **extent** de X é definido como o cardinal $e(X) = sup\{|D| : D \subseteq X,$ D é fechado e discreto$\} + \aleph_0$.*

Teorema 2.1.10. *(Lema de Jones) Se X é normal e $D \subseteq X$ é um subconjunto fechado e discreto, então $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$.*

Demonstração. Sejam $D \subseteq X$ um subconjunto fechado e discreto e $S \subseteq X$ um denso de X com $|S| \leq d(X)$. Como todo subconjunto de um conjunto fechado e discreto também é fechado e discreto, dado $E \subseteq D$, como X é normal, podemos tomar $U_E \subseteq X$ aberto tal que $E \subseteq U_E$ e $\overline{U_E} \cap (D \setminus E) = \emptyset$. Definimos, então $\varphi : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(S)$ com $\varphi(E) = U_E \cap S$ para cada $E \subseteq D$. Note que se E_1, E_2 são subconjuntos distintos de D com $E_1 \not\subseteq E_2$, então ou U_{E_1} e U_{E_2} são disjuntos, ou $U_{E_1} \setminus \overline{U_{E_2}} \neq \emptyset$, pois $E_1 \setminus E_2 \subseteq U_{E_1} \setminus \overline{U_{E_2}}$. Se eles são disjuntos, então $\varphi(E_1)$ e $\varphi(E_2)$ são conjuntos não-vazios e disjuntos, logo distintos. No segundo caso, $\varphi(E_1) \supseteq (U_{E_1} \setminus \overline{U_{E_2}}) \cap S \neq \emptyset$ e $(U_{E_1} \setminus \overline{U_{E_2}}) \cap S \cap U_{E_2} = \emptyset$, logo $\varphi(E_1) \neq \varphi(E_2)$. $\square$

Esse teorema é frequentemente utilizado para mostrar que determinados espaços não são normais, como o quadrado da reta de Sorgenfrey e o plano de Niemytzki, pois estes são espaços separáveis (ou seja, com densidade enumerável) e que contém fechados e discretos de cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

Definição 2.1.11. *O **grau de Lindelöf** de X é o cardinal definido por*

$$L(X) = min\{\kappa \in \boldsymbol{CARD} : \text{Toda cobertura aberta de } X \text{ possui subcobertura de cardinalidade menor ou igual a } \kappa\}.$$

Observação 2.1.12. *É fácil ver que o grau de Lindelöf de um espaço topológico X é hereditário para subconjuntos fechados de X, i.e., se $F \subseteq X$ é fechado, então $L(F) \leq L(X)$. De fato, se $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura aberta de F com U aberto em X para cada $U \in \mathcal{U}$, então $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta de X, logo admitiria uma subcobertura de cardinalidade menor ou igual a $L(X)$.*

Definição 2.1.13. *O **grau de Lindelöf fraco** de X é o cardinal definido por*

$$wL(X) = min\{\kappa \in \boldsymbol{CARD} : \forall \mathcal{U} \in \mathcal{O}_X \exists \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}(|\mathcal{W}| \leq \kappa \ \wedge \ \overline{\bigcup \mathcal{W}} = X)\}.$$

Em outras palavras, $wL(X)$ é o menor cardinal tal que toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X contém uma subfamília $\mathcal{W}$ de união densa tal que $|\mathcal{W}| \leq \kappa$.

Definição 2.1.14. *Dado $p \in X$, o **caráter local** de p em X é o cardinal definido por*

$$\chi(X, p) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base local para } X \text{ em } p\} + \aleph_0.$$

*O **caráter** de X é o definido como*

$$\chi(X) = sup\{\chi(X, p) : p \in X\}.$$

Em outras palavras, o caráter é o menor cardinal infinito κ tal que todo ponto de X admite uma base local de cardinalidade menor ou igual a κ.

Definição 2.1.15. *Dado $p \in X$, a **tightness** de X em p é definida por*

$$t(p, X) = min\{\kappa \in CARD : \text{para todo } Y \subseteq X \text{ com } p \in \overline{Y}, \text{ existe } A \subseteq Y \text{ com } |A| \leq \kappa \text{ e } p \in \overline{A}\}.$$

*A **tightness** de X é definida por*

$$t(X) = sup\{t(p, X) : p \in X\}.$$

Alternativamente, também podemos definir a tightness de X como

$$t(X) = min\{\kappa \in CARD : \forall Y \subseteq X(\overline{Y} = \bigcup\{\overline{A} : A \in [Y]^{\leq\kappa}\})\}.$$

Definição 2.1.16. *Seja $\langle X, \tau\rangle$ um espaço T_1 e $p \in X$. Uma pseudo-base local para X em p é uma família $\mathcal{V}$ de abertos tal que $\bigcap \mathcal{V} = \{p\}$. O **pseudo-caráter local** de X em p, denotado por $\psi(X, p)$ é a menor cardinalidade de uma pseudo-base local de X em p. O **pseudo-caráter** de X é dado por $\psi(X) = sup\{\psi(X, p) : p \in X\}$.*

Definição 2.1.17. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço topológico Hausdorff e $p \in X$, o **pseudo-caráter fechado local** de X em p é o cardinal $\psi_c(X, p) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \tau \text{ e } \bigcap_{V \in \mathcal{A}} \overline{V} = \{p\}\}$. O **pseudo-caráter fechado** de X é o cardinal $\psi_c(X) = sup\{\psi_c(X, p) : p \in X\}$.*

É quase imediato observar que o tightness é limitado superiormente pelo caráter e que, em espaços T_1, bases são pseudo-bases, donde o pseudo-caráter também é limitado superiormente pelo caráter.

Lema 2.1.18. *Se X é T_1, então $\psi(X) \cdot t(X) \leq \chi(X)$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base local para X em x com $|\mathcal{B}| \leq \chi(X)$. Se X é T_1, então 1.2.17 garante que $\bigcap \mathcal{B} = \{x\}$, logo $\mathcal{B}$ é uma pseudo-base e $\psi(X) \leq |\mathcal{B}| \leq \chi(X)$.

Dados $A \subseteq X$ e $p \in \overline{A}$, se $\mathcal{B}$ é uma base local para X em com $|\mathcal{B}| \leq \chi(X)$, então podemos tomar um ponto $p_B \in A \cap B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Daí, $p \in \overline{A \cap B}$, pois dada uma vizinhança U qualquer de p, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$, donde $p_B \in A \cap B \subseteq A \cap U$ e $A \cap U$ é não-vazio. □

O lema a seguir foi adaptado de [14], em que Hodel prova uma versão para espaços de Urysohn com uma função cardinal possivelmente menor que $L(X)$.

Lema 2.1.19. *Seja X um espaço Hausdorff. Então $\psi_c(X) \leq \psi(X) \cdot L(X)$.*

Demonstração. Sejam $\psi(X) \cdot L(X) = \kappa$, $x \in X$ e $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma pseudo-base para X em x. Fixe $\alpha < \kappa$ e considere $H = X \setminus V_\alpha$. Para cada $y \in H$, sejam U_y, V_y abertos disjuntos tais que $x \in U_y$ e $y \in V_y$. Como $\{V_y : y \in H\}$ é uma família de abertos que cobre H, H é fechado e $L(X) \leq \kappa$, então existe $A \in [H]^{\leq\kappa}$ tal que $\{V_y : y \in A\}$ ainda cobre H. Note que se $p \in V_y$, então $p \notin \overline{U_y}$, pois V_y é uma vizinhança de p disjunta de U_y. Dessa forma, $(\bigcap_{y\in A} \overline{U_y}) \cap (\bigcup_{y\in A} V_y) = \emptyset$, donde $(\bigcap_{y\in A} \overline{U_y}) \cap H = \emptyset$, logo $\bigcap_{y\in A} \overline{U_y} \subseteq V_\alpha$. Em outras palavras, para cada $\alpha < \kappa$, existe uma família $\mathcal{U}_\alpha$ de abertos tal que $\bigcap_{U\in\mathcal{U}_\alpha} \overline{U} \subseteq V_\alpha$ e $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \kappa$. Logo, tomando $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha$, tem-se $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ e $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} \overline{U} \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \{x\}$, logo $\psi_c(X) \leq \kappa$. □

Definição 2.1.20. *Dizemos que $\mathcal{C} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ é uma **família celular** se $U \cap V = \emptyset$ para todos U e V elementos distintos de $\mathcal{C}$.*

Lema 2.1.21. *Seja $\mathbb{P}$ a ordem das famílias celulares de X ordenada pela inclusão. Então $\mathcal{U} \in \mathbb{P}$ é maximal se, e somente se possui união densa.*

Demonstração. Se $\mathcal{U} \in \mathbb{P}$ é maximal, então dado U aberto não-vazio de X, se $U \in \mathcal{U}$, então U intersecta $\bigcup\mathcal{U}$ em si mesmo. Por outro lado, se $U \notin \mathcal{U}$, então $\{U\} \cup \mathcal{U}$ estende propriamente $\mathcal{U}$, logo não é uma família celular, donde $U \cap V \neq \emptyset$ para algum $V \in \mathcal{U}$, logo U intersecta $\bigcup\mathcal{U}$.

Por outro lado, se $\mathcal{U} \in \mathbb{P}$ possui união densa, então dado U um aberto não-vazio de X tal que $U \notin \mathcal{U}$, $U \cap \bigcup\mathcal{U} \neq \emptyset$, logo existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Portanto, nenhuma extensão própria de $\mathcal{U}$ pode ser uma família celular, donde $\mathcal{U}$ é maximal em P. □

Definição 2.1.22. *A **celularidade** de X é definida por*

$$c(X) = sup\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ é uma família celular}\} + \aleph_0.$$

Proposição 2.1.23. *Se $\mathcal{V}$ é uma família de abertos de X, então existe uma subfamília $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{W}| \leq c(X)$ e $\bigcup\mathcal{V} \subseteq \overline{\bigcup\mathcal{W}}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todos os abertos não-vazios de X que estão contidos em algum elemento de $\mathcal{V}$. $\mathbb{P} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ é uma família celular$\}$, pelo Lema de Zorn, podemos tomar $\mathcal{M} \in \mathbb{P}$ maximal. Para cada $O \in \mathcal{M}$, podemos tomar $V_O \in \mathcal{V}$ tal que $O \subseteq V_O$. Assim, se $\mathcal{W} = \{V_O : O \in \mathcal{M}\}$, então $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $|\mathcal{W}| \leq |\mathcal{M}| \leq c(X)$ e $\bigcup\mathcal{V} \subseteq \overline{\bigcup\mathcal{W}}$. Para este último, note que se houvesse um aberto $V \subseteq \bigcup\mathcal{V}$ disjunto de $\bigcup\mathcal{W}$, então teríamos $V \cap U \neq \emptyset$ para algum aberto $U \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} \cup \{V \cap U\} \in \mathbb{P}$, contradizendo a maximalidade de $\mathcal{M}$. □

Um corolário imediato dessa proposição é que $wL(X) \leq c(X)$, se $\mathcal{V}$ é tomada como uma cobertura aberta.

A referência para as definições e resultados a seguir é [10]. Essa é a primeira aplicação de submodelos elementares a ser apresentada na dissertação, e essa técnica será mais explorada a partir da seção **2.2**.

Definição 2.1.24. *Uma **network** para X é uma família de subconjuntos $\mathcal{N}$ tal que, para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta U de x, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.*

Definição 2.1.25. *O **network weight** de X é definido por*

$$nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ é uma network para } X\} + \aleph_0.$$

Lema 2.1.26. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma sobrejeção contínua. Então $nw(Y) \leq nw(X)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{N}$ uma network para X com $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$. Vamos mostrar que $\mathcal{N}' = \{f[N] : N \in \mathcal{N}\}$ é uma network para Y. De fato, dados $y \in Y$ e uma vizinhança V de y, temos que $f^{-1}[V]$ é um aberto de X, já que f é contínua. Daí, fixamos $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e tomamos $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq f^{-1}[V]$. Portanto, $y \in f[N] \subseteq f[f^{-1}[V]]$ e, como f é sobrejetora, $f[f^{-1}[V]] = V$. Portanto, $\mathcal{N}'$ é uma network de Y, donde $nw(Y) \leq |\mathcal{N}'| \leq |\mathcal{N}| \leq nw(X)$. □

Lema 2.1.27. *Se X é um espaço topológico compacto Hausdorff, então $w(X) = nw(X)$.*

Demonstração. Sejam τ a topologia de X e θ um cardinal regular e não-enumerável tal que $\langle X, \tau \rangle \in H(\theta)$, assim como $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \in H(\theta)$. Sejam N uma network de X com $|N| = nw(X) = \kappa$ e $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $\kappa + 1 \cup N \cup \{N, X, \tau\} \subseteq M$, $[M]^{<\omega} \subseteq M$ e $|M| = \kappa$. Mostraremos que $\tau \cap M$ é uma base para X.

De fato, dados um aberto U de X e $p \in U$, para cada $q \in X \setminus U$, existem abertos U_q, V_q disjuntos tais que $p \in U_q$ e $q \in V_q$. Como N é uma network de X, existem $A_q, B_q \in N$ tais que $p \in A_q \subseteq U_q$ e $q \in B_q \subseteq U_q$. Daí,

$$H(\theta) \models \exists x_1, x_2 \in \tau(x_1 \cap x_2 = \emptyset \wedge A_q \subseteq x_1 \wedge B_q \subseteq x_2).$$

Como $\tau, \emptyset, A_q, B_q \in M$, temos por elementaridade que

$$M \models \exists x_1, x_2 \in \tau(x_1 \cap x_2 = \emptyset \wedge A_q \subseteq x_1 \wedge B_q \subseteq x_2).$$

Portanto, existem $U'_q, V'_q \in \tau \cap M$ tais que $p \in A_q \subseteq U'_q$ e $q \in B_q \subseteq V'_q$. No entanto, ainda não temos garantia de que $U'_q \subseteq U$. Por outro lado, como $X \setminus U$ é compacto, existem $m < \omega$ e $\{y_n : n < m\} \subseteq X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{n<m} V'_{y_n}$, donde $U' = \bigcap_{n<m} U'_{y_n} \subseteq U$. Como $\{U'_{y_n} : n < m\}$ é um subconjunto finito de M e $[M]^{<\omega} \subseteq M$, então esse subconjunto também é um elemento de M. Portanto, $U' = \bigcap\{U'_{y_n} : n < m\} \in \tau \cap M \cap$ e $p \in U' \subseteq U$, donde $\tau \cap M$ é uma base para X, cuja cardinalidade é limitada por $|M| = \kappa = nw(X)$. □

Teorema 2.1.28 (Arhangel'skii). *Sejam X e Y espaços compactos e Hausdorff. Se existe uma função contínua de X em Y sobrejetora, então $w(Y) \leq w(X)$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, $w(Y) = nw(Y)$ e $w(X) = nw(X)$, e já vimos que a desigualdade $nw(Y) \leq nw(X)$ vale em geral, pois funções contínuas sobrejetoras preservam networks. □

2.2 Aplicações de submodelos elementares

2.2.1 Resultados clássicos de combinatória infinitária

Para ilustrar a aplicabilidade da técnica de submodelos elementares, iniciaremos essa seção provando alguns resultados clássicos em combinatória infinita utilizando essa ferramenta. Primeiro, apresentaremos duas versões do Lema dos Δ-sistemas, que possui diversas aplicações na teoria de forcing. As provas desses resultados seguem as apresentadas por Soukup em [19].

Definição 2.2.1. *Um conjunto X é um Δ-sistema se existe um conjunto c tal que $a \cap b = c$ para todos $a, b \in X$ distintos. Nesse caso, c é chamado de raiz do Δ-sistema X.*

Teorema 2.2.2 (Lema dos Δ-sistemas). *Se $\mathcal{A}$ é uma família não-enumerável de conjuntos finitos, então $\mathcal{A}$ contém um Δ-sistema não-enumerável.*

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $A \subseteq \omega_1$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Daí, tomamos θ um cardinal regular grande o suficiente e um submodelo elementar $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $\omega + 1 \cup \{\mathcal{A}\} \subseteq M$ e $|M| = \aleph_0$. Como $\mathcal{A}$ é não-enumerável, podemos tomar $A \in \mathcal{A} \setminus M$. Daí, definindo $D = M \cap A$, como $\omega \subseteq M$, segue que $[M]^{<\omega} \subseteq M$, logo $D \in M$, pois D é um subconjunto finito de M. Note que $H(\theta) \models \exists x(x \in \mathcal{A} \wedge D \subseteq x)$, pois $A \in \mathcal{A}$ e $D \subseteq A$. Por elementaridade, como $D \in M$ e $\mathcal{A} \in M$, $M \models \exists x(x \in \mathcal{A} \wedge D \subseteq x)$. Portanto, existe $B \in M$ tal que $B \in \mathcal{A}$ e $D \subseteq B$. Daí, $\{A, B\}$ é um Δ-sistema de raiz D, pois $D \subseteq A \cap B \subseteq A \cap M = D$ ($B \subseteq M$ pois, como $\omega + 1 \subseteq M$, M é transitivo para enumeráveis). Tomamos, então,

$$\mathbb{P} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{B} \text{ é um } \Delta\text{-sistema de raiz } D\}.$$

Como $\mathcal{A}$ e D são elementos de M, $\mathbb{P}$ também o é, pois

$$H(\theta) \models \exists x(\forall y \in x(y \subseteq \mathcal{A} \wedge \forall w, z \in y(w \neq z \rightarrow w \cap z = D))).$$

Por elementaridade, temos

$$M \models \exists x(\forall y \in x(y \subseteq \mathcal{A} \wedge \forall w, z \in y(w \neq z \rightarrow w \cap z = D))).$$

Pelo lema de Zorn, $\mathbb{P}$ possui um elemento maximal, logo

$$H(\theta) \models \exists x(x \text{ é um elemento } \subseteq\text{-maximal de } \mathbb{P}).$$

Daí, pelo critério de Tarski-Vaught, existe $\mathcal{B} \in M$ tal que

$$H(\theta) \models \mathcal{B} \text{ é um elemento } \subseteq\text{-maximal de } \mathbb{P}.$$

Afirmação: $\mathcal{B}$ é não-enumerável.

De fato, se $\mathcal{B}$ fosse enumerável, como $\mathcal{B} \in M$ e $\omega \in M$, teríamos $\mathcal{B} \subseteq M$ pelo Lema 1.4.16. Daí, poderíamos definir $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{A\}$, e dado $B \in \mathcal{B}$, temos $D \subseteq A \cap B \subseteq A \cap M = D$. Como $\mathcal{B} \subseteq M$ e $A \notin M$, $\mathcal{C}$ é um Δ-sistema de raiz D que é uma extensão própria de $\mathcal{B}$, contradizendo a sua maximalidade. □

Em geral, essa versão do Lema dos Δ-sistemas é o suficiente para a maioria das aplicações, mas ainda podemos provar uma versão um pouco mais precisa.

Lema 2.2.3. *Se κ, θ são cardinais regulares não-enumeráveis e $\kappa < \theta$, então para todo $A \subseteq H(\theta)$ com $|A| < \kappa$ existe $M \preccurlyeq H(\theta)$ com $A \subseteq M$, $|M| < \kappa$ e $M \cap \kappa \in \kappa$.*

Demonstração. Vamos utilizar recursivamente o Teorema de Löwenheim-Skolem. Primeiramente, tomamos $M_0 \preccurlyeq H(\theta)$ com $A \subseteq M_0$ e $|M_0| = |A| \cdot \aleph_0 < \kappa$. Agora, dado $n < \omega$, se M_n está definido com $|M_n| < \kappa$ e $M_m \subseteq M_n$ para todo $m \leq n$, definimos $\alpha_n = sup(M_n \cap \kappa)$. Como κ é regular e $|M_n| < \kappa$, então $\alpha_n < \kappa$. Daí, tomamos $M_{n+1} \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $M_n \cup \alpha_n \subseteq M_{n+1}$ e $|M_{n+1}| = |M_n| \cdot |\alpha_n| < \kappa$. Portanto, se $M = \bigcup_{n<\omega} M_n$, então $M \preccurlyeq H(\theta)$ e $M \cap \kappa = \sup_{n<\omega} \alpha_n \in \kappa$, pois κ é regular. □

Teorema 2.2.4. *Se κ é um cardinal de cofinalidade não enumerável e $\theta = cf(\kappa)$, então toda família de conjuntos finitos de cardinalidade κ contém um Δ-sistema de cardinalidade θ.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$. Tome λ um cardinal regular grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\lambda)$ tal que $\mathcal{A} \in M$, $|M| < \theta$, $[M]^{<\omega} \subseteq M$ e $M \cap \theta \in \theta$. Como $|\mathcal{A}| = \kappa \geq \theta$ e $|M| = \theta$, existe $A \in \mathcal{A} \setminus M$. Tomando $D = M \cap A$, como $[M]^{<\omega} \subseteq M$, $D \in M$. Daí, como no Lema dos Δ-sistemas,

$$H(\lambda) \models \exists \mathcal{B}(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ é um } \Delta\text{-sistema que de raiz } D \text{ maximal}).$$

Por elementaridade, como D e $\mathcal{A}$ são elementos de M, existe $\mathcal{B} \in M$ tal que

$$M \models \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ é um } \Delta\text{-sistema de raiz } D \text{ maximal}.$$

Novamente por elementaridade, $\mathcal{B}$ é de fato maximal entre os Δ-sistemas de raiz D contidos em $\mathcal{A}$.

Afirmação: $|\mathcal{B}| \geq \theta$.

Supondo por absurdo que $|\mathcal{B}| < \theta$, como $\mathcal{B} \in M$, temos $|\mathcal{B}| \in M$ e, como $M \cap \theta \in \theta$, $|\mathcal{B}| \subseteq M$, logo $\mathcal{B} \subseteq M$. Dessa forma, se consideramos $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{A\}$, então $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C}$ e dado $B \in \mathcal{B}$, $D \subseteq B \cap A \subseteq M \cap A = D$. Portanto, $\mathcal{C}$ é um Δ-sistema de raiz D que estende $\mathcal{B}$ propriamente, contradizendo sua maximalidade. $\square$

Definição 2.2.5. *Seja A um conjunto e $\mathcal{C}$ uma cobertura de A. Dizemos que $\mathcal{C}$ é* ***ponto-enumerável*** *se, para todo $a \in A$, $\{C \in \mathcal{C} : a \in C\}$ é enumerável.*

Em [7], Dow provou o conhecido Teorema de Miscenko para espaços enumeravelmente compactos T_1 com uma aplicação de submodelos elementares.

Proposição 2.2.6. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico que possui uma base ponto-enumerável, $\mathcal{B}$ é uma base qualquer de X e M é um submodelo elementar de $H(\theta)$ para θ regular grande o suficiente com $\langle X, \tau \rangle, \mathcal{B} \in M$, então $\mathcal{B} \cap M$ contém uma base local para cada ponto de $\overline{X \cap M}$.*

Demonstração. Seja $M \preccurlyeq H(\theta)$ com $\langle X, \tau \rangle, \mathcal{B} \in M$. Como

$$H(\theta) \models \langle X, \tau \rangle \text{ possui uma base ponto-enumerável,}$$

por elementaridade, existe $\mathcal{C} \in M$ tal que

$$M \models \mathcal{C} \text{ é uma base ponto-enumerável para } \langle X, \tau \rangle.$$

Novamente por elementaridade, $\mathcal{C}$ é de fato uma base ponto-enumerável para X. Agora, sejam $x \in \overline{X \cap M}$ e $C \in \mathcal{C}$. Tome $U \in \mathcal{B}$ e $W \in \mathcal{C}$ tais que $x \in W \subseteq U \subseteq C$, que existem pois cada um desses conjuntos contém bases locais para X em x. Como $x \in \overline{X \cap M}$, podemos tomar $y \in W \cap M$. Como $y, \mathcal{C} \in M$, então $\{C \in \mathcal{C} : y \in C\} \in M$. Como $\mathcal{C}$ é ponto enumerável e $\omega + 1 \subseteq M$, então $\{C \in \mathcal{C} : y \in C\}$ é enumerável e $\{C \in \mathcal{C} : y \in C\} \subseteq M$. Como C e W são elementos desse conjunto, tem-se em particular que $C, W \in M$. Além disso, como $U \in \mathcal{B}$ e $W \subseteq U \subseteq C$, segue que

$$M \models \exists x_1 \in \mathcal{B}(W \subseteq x_1 \subseteq C).$$

Portanto, existe $V \in \mathcal{B} \cap M$ tal que $x \in V \subseteq C$, logo $\mathcal{B} \cap M$ contém uma base local para X em x. $\square$

Proposição 2.2.7. *Sejam $\langle X, \tau\rangle$ um espaço enumeravelmente compacto T_1, $\mathcal{B}$ uma base de X e M um submodelo elementar de $H(\theta)$ para θ regular grande o suficiente tal que $\langle X, \tau\rangle, \mathcal{B} \in M$ e $|M| = \aleph_0$. Se $\mathcal{B} \cap M$ não é uma base para X, então existe $z \in \overline{X \cap M}$ tal que $\mathcal{B} \cap M$ não contém uma base local para X em z.*

Demonstração. Vamos assumir que $X \cap M$ não é denso em X, pois caso contrário a conclusão é imediata. Seja $x \in X \setminus \overline{X \cap M}$ e suponha por absurdo que $\mathcal{B} \cap M$ contém uma base local para todo elemento de $\overline{X \cap M}$. Logo, para cada $y \in \overline{X \cap M}$, existe um aberto $U_y \in \mathcal{B} \cap M$ tal que $z \notin U_y$, e como $\mathcal{B} \cap M$ contém uma base local para y, podemos tomar uma cobertura $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \cap M$ de $\overline{X \cap M}$ que não cobre z. Como $\overline{X \cap M}$ é enumeravelmente compacto e $\mathcal{U}$ é uma cobertura enumerável desse espaço, existe uma subcobertura finita $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{W} \subseteq M$ e $\mathcal{W}$ é finito, então $\mathcal{W} \in M$ e $M \models \forall x_1 \in X \exists x_2 \in \mathcal{W}(x_1 \in x_2)$, mas $H(\theta) \models \forall x_2 \in \mathcal{W}(z \notin x_2)$, contradizendo a elementaridade de M em relação a $H(\theta)$. □

Combinando essas duas proposições, chegamos ao célebre teorema de Miscenko:

Teorema 2.2.8 (Miscenko, 1962)**.** *Seja $\langle X, \tau\rangle$ um espaço T_1 e enumeravelmente compacto. Se X possui uma base ponto-enumerável, então X possui uma base enumerável.*

Demonstração. Se X possui uma base ponto-enumerável, tomamos um cardinal regular θ grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\theta)$ com $\langle X, \tau\rangle \in M$ e $|M| = \aleph_0$. Daí, $\tau \cap M$ contém uma base local para cada ponto de $\overline{X \cap M}$. Como X é enumeravelmente compacto e T_1, então pela proposição 2.2.7, $\tau \cap M$ é uma base para X. Como M é enumerável, $\tau \cap M$ também o é, e concluímos que X admite uma base enumerável. □

2.2.2 Limitantes para a cardinalidade de espaços topológicos

Nesta subseção, serão provados o célebre teorema de Arhangel'skii, assim como os teoremas de Hajnal e Juhász sobre a cardinalidade de determinadas classes de espaços topológicos. A redação das demonstrações é original, mas foi inspirada pelas provas apresentadas por Hodel em [13] que utilizavam o método de closing-off de Pol e Sapirovskii.

Os textos que abordam submodelos elementares, como por exemplo [10], costumam apresentar provas da versão enumerável do Teorema de Arhangel'skii (para espaços primeiro-enumeráveis compactos ou de Lindelöf), mas nessa dissertação foram utilizados filtros para generalizar a convergência de sequências que normalmente é utilizada em espaços primeiro-enumeráveis.

Teorema 2.2.9 (Arhangel'skii, 1969)**.** *Se X é Hausdorff. Então $|X| \leq 2^{L(X)\cdot\chi(X)}$.*

Demonstração. Sejam $\langle X, \tau\rangle$ um espaço topológico Hausdorff, $\kappa = L(X) \cdot \chi(X)$ e θ um cardinal tal que $\langle X, \tau\rangle \in H(\theta)$ e $\beta \in H(\theta)$, onde β é uma função que a cada $x \in X$ associa β_x, uma base local para x de cardinalidade menor ou igual a κ. Seja M submodelo elementar de $H(\theta)$ tal que $|M| = 2^\kappa$, $\langle X, \tau\rangle \in M$, $\beta \in M$, $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$ e $\kappa + 1 \subseteq M$.

Afirmação 1: $X \cap M$ é um subespaço fechado de X.

Tome $x \in \overline{X \cap M}$. Como $t(X) \leq \chi(X) \leq \kappa$, existe $Y \subseteq X \cap M$ tal que $|Y| \leq \kappa$ e $x \in \overline{Y}$. Como $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$, $Y \in M$. Além disso, $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, $\mathcal{B} = \{U \cap Y : U \in \beta_x\}$ é base de um filtro que converge para x. Como $U \cap Y \subseteq Y$ para todo $U \in \beta_x$, então $|U \cap Y| \leq \kappa$ e $U \cap Y \in M$ para todo $U \in \beta_x$, donde $\mathcal{B} \in M$, já que $|\mathcal{B}| \leq |\beta_x| \leq \kappa$. Daí, obtemos:

$$H(\theta) \models \mathcal{B} \text{ é base de um filtro que converge para } x.$$

Em particular,

$$H(\theta) \models \mathcal{B} \text{ é base de um filtro que converge em } \langle X, \tau\rangle.$$

Como $\mathcal{B} \in M$ e $\langle X, \tau\rangle \in M$, por elementaridade,

$$M \models \mathcal{B} \text{ é base de um filtro que converge em } \langle X, \tau\rangle.$$

Portanto, existe $y \in X \cap M$ tal que

$$M \models \mathcal{B} \text{ é base de um filtro que converge para } y.$$

Novamente por elementaridade,

$$H(\theta) \models \mathcal{B} \text{ é base de um filtro que converge para } y.$$

Como $\mathcal{B}$ gera um único filtro, que por sua vez converge simultaneamente para x e para y, então $x = y$ pois X é Hausdorff. Portanto, $x \in X \cap M$, donde $\overline{X \cap M} = X \cap M$, i.e., $X \cap M$ é um subconjunto fechado de X.

Afirmação 2: $X \cap M = X$.

Suponha por absurdo que existe $x \in X \setminus M$. Para cada $y \in X \cap M$, tome $U_y \in \beta_y$ tal que $x \notin U_y$. Como $X \cap M$ é fechado, $L(X \cap M) \leq \kappa$, logo existe $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que $\{U_{y_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ cobre $X \cap M$. Note que, como $\beta \in M$, então $\beta_y \in M$ para todo $y \in X \cap M$, e como $|\beta_y| \leq \kappa$, $\beta_y \subseteq M$ para todo $y \in X \cap M$. Como M é κ-fechado, $\{U_{y_\alpha} : \alpha < \kappa\} \in M$. Portanto:

$$M \models \{U_{y_\alpha} : \alpha < \kappa\} \text{ cobre } X.$$

Por elementaridade,

$$H(\theta) \models \{U_{y_\alpha} : \alpha < \kappa\} \text{ cobre } X.$$

No entanto, isso é uma contradição pois

$$H(\theta) \models \forall \alpha < \kappa (x \in X \setminus U_{y_\alpha}).$$

Daí, podemos concluir que $X \cap M = X$, donde $X \subseteq M$ e $|X| \leq |M| \leq 2^\kappa$.

□

Em particular, o teorema de Arhangel'skii respondeu uma pergunta que estava em aberto há mais de 40 anos, que era se todo espaço T_2 compacto e primeiro-enumerável teria sua cardinalidade limitada por $2^{\aleph_0}$. Arhangel'skii provou que, para X regular, $|X| \leq 2^{L(X)\cdot\psi(X)\cdot t(X)}$, e esse resultado foi posteriormente provado para espaços T_2 por Sapirovskii.

Teorema 2.2.10 (Arhangel'skii, Sapirovskii; 1974)**.** *Se X é Hausdorff, então $|X| \leq 2^{L(X)\cdot\psi(X)\cdot t(X)}$.*

Demonstração. Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico Hausdorff, $\kappa = L(X) \cdot \psi(X) \cdot t(X)$, θ um cardinal grande o suficiente e M um submodelo elementar κ-fechado de $H(\theta)$ tal que $X, \tau \in M$, $\kappa + 1 \subseteq M$ e $|M| = 2^\kappa$.

Afirmação 1: $X \cap M$ é um subespaço fechado de X.

Tome $x \in \overline{X \cap M}$. Como $t(X) \leq \kappa$, existe $Y \subseteq X \cap M$ tal que $|Y| \leq \kappa$ e $x \in \overline{Y}$. Como M é κ-fechado, $Y \in M$. Além disso, como $L(X) \cdot \psi(X) \leq \kappa$, então $\psi_c(X) \leq \kappa$ e existe uma família $\mathcal{U}$ de vizinhanças de x tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \{x\}$. Inicialmente, não podemos dizer que $\mathcal{U} \in M$ ou que $\mathcal{U} \subseteq M$, mas sabemos que, para todo $U \in \mathcal{U}$, $x \in \overline{Y \cap U}$. De fato, dados V vizinhança de x e $U \in \mathcal{U}$, $V \cap U$ é uma vizinhança de x. Como $V \cap U$ é uma vizinhança de x e $x \in \overline{Y}$, então $V \cap (U \cap Y) = (V \cap U) \cap Y \neq \emptyset$. Portanto, para todo $U \in \mathcal{U}$, tem-se que $Y \cap U \subseteq M$ e $|Y \cap U| \leq |Y| \leq \kappa$, logo $Y \cap U \in M$ e $\overline{Y \cap U} \in M$. Definindo $\mathcal{W} = \{\overline{Y \cap U} : U \in \mathcal{U}\} \subseteq M$, tem-se $\mathcal{W} \subseteq M$, $|\mathcal{W}| \leq |\mathcal{U}| \leq \kappa$ e M κ-fechado, logo $\mathcal{W} \in M$. Além disso, $\{x\} = \bigcap \mathcal{W}$. Segue que

$$H(\theta) \models \exists x_2 \in X (\forall x_1 \in \mathcal{W}(x_2 \in x_1)),$$

e como $X, \mathcal{W} \in M$, por elementaridade,

$$M \models \exists x_2 \in X (\forall x_1 \in \mathcal{W}(x_2 \in x_1)).$$

Portanto $y \in \bigcap \mathcal{W}$ para algum $y \in M$, e como $\bigcap \mathcal{W} = \{x\}$, então $x = y$ e $x \in M$. Dessa forma, $\overline{X \cap M} = X \cap M$ e $X \cap M$ é fechado.

Afirmação 2: $X \cap M = X$.

Suponha por absurdo que existe $x \in X \setminus M$. Para cada $y \in X \cap M$, existe uma pseudo-base $\{U(y,\alpha) : \alpha < \kappa\}$ para X em y, que podemos supor ser um elemento de M por elementaridade (em particular, $U(y,\alpha) \in M$ para todo $y \in X \cap M$ e todo $\alpha < \kappa$). Logo, para cada $y \in X \cap M$, existe $\alpha_y < \kappa$ tal que $x \notin U(y,\alpha_y)$. Daí, $\{U(y,\alpha_y) : y \in X \cap M\}$ é uma família de abertos que cobre $X \cap M$. Como $X \cap M$ é fechado, $L(X \cap M) \leq \kappa$ e existe $A \subseteq X \cap M$ com $|A| \leq \kappa$ tal que $\{U(y,\alpha_y) : y \in A\}$ cobre $X \cap M$. Como $\{U(y,\alpha_y) : y \in A\} \subseteq M$ e $|A| \leq \kappa$, então $\{U(y,\alpha_y) : y \in A\} \in M$. Portanto,

$$M \models \{U(y,\alpha_y) : y \in A\} \text{ cobre } X.$$

Como X e $\{\{U(y,\alpha_y) : y \in A\}\}$ são elementos de M, por elementaridade,

$$H(\theta) \models \{U(y,\alpha_y) : y \in A\} \text{ cobre } X.$$

No entanto, isso é uma contradição, pois $x \notin U(y,\alpha_y)$ para todo $y \in X \cap M$. Dessa forma, $X \cap M = X$, o que implica $|X| \leq |M| = 2^\kappa$. □

Vale observar que essa prova também serviria para o enunciado original do teorema de Arhangel'skii, já que $\psi(X) \cdot t(X) \leq \chi(X)$ para X T_1.

Outros resultados que combinam uma função cardinal global com uma local para limitar a cardinalidade de espaços topológicos são os teoremas de Hajnal-Juhász para espaços T_2 e T_1, publicados poucos anos antes do teorema de Arhangel'skii. A seguir, apresentaremos demonstrações para esses resultados utilizando submodelo elementares. O primeiro deles se aplica a espaços de Hausdorff, assim como o teorema de Arhangel'skii, e limita a cardinalidade desses espaços com base na sua celularidade e seu caráter. O segundo se aplica a espaços T_1, e curiosamente utiliza uma função cardinal possivelmente maior e outra possivelmente menor do que o primeiro resultado, o spread e o pseudo-caráter.

Teorema 2.2.11 (Hajnal, Juhász; 1967). *Se X é Hausdorff, então $|X| \leq 2^{c(X)\cdot\chi(X)}$*

Demonstração. Sejam $\kappa = c(x) \cdot \chi(X)$, θ um cardinal regular grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $X, \tau \in M$, $\kappa + 1 \subseteq M$, M é κ-fechado e $|M| = 2^\kappa$. Além disso, para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ uma base local para X em x tal que $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$.

Afirmação: $X \cap M = X$.

Suponha por absurdo que existe $p \in X \setminus M$. Seja $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma base local para X em p. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $\mathcal{W}_\alpha = \{V \in \tau : V \in \mathcal{V}_x, x \in X \cap M, V \cap U_\alpha = \emptyset\}$. Como X é Hausdorff, para cada $x \in X \cap M$ e cada $\alpha < \kappa$, existe $V \in \mathcal{W}_\alpha$ tal que $x \in V$. Pela proposição anterior, para cada $\alpha < \kappa$, existe $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{W}_\alpha$ tal que $|\mathcal{G}_\alpha| \leq \kappa$ e $\bigcup \mathcal{W}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{G}_\alpha}$. Note que para todo $x \in X \cap M$ tem-se $\mathcal{V}_x \in M$, logo $\mathcal{W}_\alpha \subseteq M$ para todo

$\alpha < \kappa$, donde $\mathcal{G}_\alpha \subseteq M$ e $|\mathcal{G}_\alpha| \leq \kappa$. Como M é κ-fechado, $\mathcal{G}_\alpha \in M$ para todo $\alpha < \kappa$. Portanto, $X \cap M \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{W}_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{G_\alpha}$, i.e.,

$$M \models \{\overline{\bigcup G_\alpha} : \alpha < \kappa\} \text{ cobre } X.$$

Por elementaridade,

$$H(\theta) \models \{\overline{\bigcup G_\alpha} : \alpha < \kappa\} \text{ cobre } X.$$

No entanto, $p \notin \overline{\bigcup G_\alpha}$ para todo $\alpha < \kappa$, pois $\bigcup G_\alpha \cap U_\alpha = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $X \cap M = X$. □

Para provarmos o teorema de Hajnal e Juhász para espaços T_1, precisamos de um resultado intermediário:

Proposição 2.2.12 (Sapirovskii). *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço topológico X com $s(X) \leq \kappa$. Então existem $A \subseteq X$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{V}| \cdot |A| \leq \kappa$ e $X = \overline{A} \cup (\bigcup \mathcal{V})$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que não. Portanto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ tal que, para cada $A \subseteq X$ com $|A| \leq \kappa$ e toda subfamília $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ com $|\mathcal{V}| \leq \kappa$, existe $x \in X \setminus (\overline{A} \cup (\bigcup \mathcal{V}))$. Daqui, procedemos por indução. Supondo que para cada $\alpha < \kappa^+$ construímos um conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ de pontos de X e $\{\mathcal{V}_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $x_\beta \in V_\beta \setminus (\overline{\{x_\gamma : \gamma < \beta\}} \cup (\bigcup_{\gamma<\beta} V_\beta))$, temos que $|\{x_\beta : \beta < \alpha\}| \leq \kappa$ e $|\{V_\beta : \beta < \alpha\}| \leq \kappa$, logo podemos tomar $x_\alpha \in X$ tal que $x_\alpha \notin ((\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta) \cup (\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}))$. Como $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de X, podemos tomar algum $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$, donde $x_\alpha \in V_\alpha \setminus ((\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta) \cup (\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}))$.

Portanto, por indução transfinita, podemos realizar essa construção para obter $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. No entanto, $V_\alpha \cap \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\} = \{x_\alpha\}$, logo X contém um conjunto discreto de cardinalidade κ^+, contradizendo $s(X) \leq \kappa$. □

Teorema 2.2.13 (Hajnal, Juhász; 1967). *Se X é um espaço T_1, então $|X| \leq 2^{s(x)\cdot\psi(X)}$.*

Demonstração. Seja $s(X) \cdot \psi(X) = \kappa$. Tome θ grande o suficiente e considere um submodelo elementar $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $X, \tau \in M$, $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$ e $|M| = 2^\kappa$.

Afirmação: $X \cap M = X$

Suponha por absurdo que existe $p \in X \setminus M$. Como $\psi(X) \leq \kappa$, existe $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que $X \setminus \{p\} = \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $G_\alpha = F_\alpha \cap M$, e, para cada $x \in G_\alpha$, tome $U_{x,\alpha} \in M$ tal que $x \in U_{x,\alpha}$ e $p \notin U_{x,\alpha}$. Essa vizinhança existe pois, para cada $x \in M$, podemos tomar uma pseudo-base $\mathcal{V}_x \in M$ para X em x com $\mathcal{V}_x \leq \kappa$, já que, por elementaridade, $M \models \psi(X) = \kappa$. Além disso, como $\kappa + 1 \subseteq M$ por M ser κ-fechado e $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$, temos $\mathcal{V}_x \subseteq M$.

Como $p \notin M$, então $X \cap M = (X \setminus \{p\}) \cap M = (\bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha) \cap M = \bigcup_{\alpha<\kappa} (F_\alpha \cap M) = \bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha$. Aplicando a proposição 2.2.12 ao espaço G_α e à cobertura $\{U_{x,\alpha} : x \in G_\alpha\}$, existem $X_\alpha, Y_\alpha \subseteq G_\alpha$ tais que $G_\alpha \subseteq \overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\})$. Como $V_{x,\alpha} \in M$ e $|Y_\alpha| \leq \kappa$, então $\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\} \in M$. Como $X_\alpha \subseteq M$ e $|X_\alpha| \leq \kappa$, então $X_\alpha \in M$, donde $\overline{X_\alpha} \in M$ e então $\overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\}) \in M$, pois M satisfaz o axioma do par. Por fim, $\bigcup_{\alpha<\kappa} (\overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\}) : \alpha < \kappa) \in M$.

Como $X \cap M = \bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha$ e $G_\alpha \subseteq \overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\})$, então

$$M \models X \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} (\overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\}).$$

Por elementaridade,

$$H(\theta) \models X \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} (\overline{X_\alpha} \cup (\bigcup\{U_{x,\alpha} : x \in Y_\alpha\}).$$

Como $p \notin U_{x,\alpha}$ para todo $\alpha < \kappa$ e todo $x \in Y_\alpha$, resta p pertencer a $\overline{X_\alpha}$ para algum $\alpha < \kappa$. Por outro lado, $X_\alpha \subseteq G_\alpha \subseteq F_\alpha$ e F_α é um subconjunto fechado de X, logo $\overline{X_\alpha} \subseteq F_\alpha$ e $p \notin F_\alpha$, donde $p \notin \overline{X_\alpha}$ para todo $\alpha < \kappa$ e chegamos numa contradição.

Dessa forma, temos $X \cap M = X$, donde $|X| \leq |M| = 2^\kappa$. □

Um teorema clássico que generaliza simultaneamente os teoremas de Arhangel'skii e Hajnal-Juhász na classe dos espaços normais é o seguinte por Bell, Ginsburg e Woods:

Teorema 2.2.14 (Bell, Ginsburg, Woods; 1978)**.** *Se $\langle X, \tau \rangle$ é normal, então $|X| \leq 2^{wL(X)\cdot\chi(X)}$.*

Demonstração. Seja $\kappa = wL(X) \cdot \chi(X)$. Sejam θ grande o suficiente e M um submodelo elementar κ-fechado de $H(\theta)$ tal que $X, \tau \in M$ e $|M| = 2^\kappa$.

Afirmação: $X \cap M = X$.

Como M é κ-fechado e $\chi(X) \leq \kappa$, então $X \cap M$ é fechado, vide a prova do teorema de Arhangel'skii.

Agora, suponha por absurdo que existe $p \in X \setminus M$. Como X é normal, em particular é regular, logo existe um aberto U de X tal que $X \cap M \subseteq U$ e $p \notin \overline{U}$. Como $H(\theta) \models \chi(X) \leq \kappa$, então $M \models \chi(X) \leq \kappa$, logo para todo $x \in X \cap M$, existe uma base local $\mathcal{V}_x \in M$ para X em x com $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$, donde $\mathcal{V}_x \subseteq M$. Tomando $\mathcal{G} = \{V : V \subseteq U \ \wedge\ \exists x \in X \cap M(V \in \mathcal{V}_x)\}$ e $G = \bigcup \mathcal{G}$, temos que $X \cap M \subseteq G$ e $p \notin G$. Como $X \cap M$ é fechado, G é aberto e X é normal, existe um aberto H tal que $X \cap M \subseteq H$ e $\overline{H} \subseteq G$. Daí, $\mathcal{G} \cup \{X \setminus \overline{H}\}$ é uma cobertura aberta de X, e como $wL(X) \leq \kappa$, existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{G}$ com $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ tal que $X = \overline{\bigcup \mathcal{W}} \cup \overline{X \setminus \overline{H}}$. Como $X \cap M \cap \overline{X \cap \overline{H}} = \emptyset$, então $X \cap M \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$. No entanto, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{G} \subseteq M$ e $|\mathcal{W}| \leq \kappa$, logo $\mathcal{W} \in M$. Como $X \cap M \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$, dado $x \in X \cap M$ e uma vizinhança V de x que está em M, existe $W \in \mathcal{W} \subseteq M$ tal que $V \cap W \neq \emptyset$. Portanto,

$$H(\theta) \models \exists x_1(x_1 \in V \ \wedge \ x_1 \in W).$$

Por elementaridade,

$$M \models \exists x_1(x_1 \in V \ \wedge \ x_1 \in W).$$

Portanto, conclui-se que

$$M \models \forall x_1 \in X(\forall x_2 \in \tau \setminus \{\emptyset\}(x_1 \in x_2 \rightarrow \exists x_3 \in \mathcal{W}(x_2 \cap x_1 \neq \emptyset))).$$

Novamente por elementaridade,

$$H(\theta) \models \forall x_1 \in X(\forall x_2 \in \tau \setminus \{\emptyset\}(x_1 \in x_2 \rightarrow \exists x_3 \in \mathcal{W}(x_2 \cap x_1 \neq \emptyset))).$$

Em outras palavras, $X \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$. Com isso, chegamos numa contradição, pois $p \notin \overline{G} \supseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$, e concluímos que não pode valer $X \setminus M \neq \emptyset$. □

Capítulo 3

Resultados recentes

3.1 O jogo de Rothberger e variações

Apesar do resultado de Gorelic sobre a consistência da existência de espaço de Lindelöf com pontos G_δ de cardinalidade $2^{\aleph_1}$, com $2^{\aleph_1}$ arbitrariamente grande, ainda houve tentativas de obter respostas parciais para a pergunta de Arhangel'skii. Em [21], Tall definiu a noção de espaços indestrutivelmente Lindelöf, que são espaços de Lindelöf que não deixam de ser Lindelöf sob forcing enumeravelmente fechado. Em [17], os autores observaram que, para um espaço X que já é de Lindelöf, ser indestrutivelmente Lindelöf é equivalente à inexistência de estratégias vencedoras para UM em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Além disso, os autores também observaram que uma propriedade um pouco mais restrita, a existência de estratégia vencedora para $DOIS$ no mesmo jogo, podia substituir a hipótese de ser Lindelöf para limitar a cardinalidade de espaços com pontos G_δ. No seu artigo, os autores provaram a versão enumerável do seguinte teorema, mas a demonstração é facilmente generalizada para qualquer cardinal κ.

Teorema 3.1.1 (Scheepers-Tall, 2010 [17])**.** *Se κ é um cardinal e $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço tal que $\psi(X) \leq \kappa$ e $DOIS$ tem uma estratégia vencedora no jogo $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, então $|X| \leq 2^\kappa$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, fixe $\{U_\alpha(x) : \alpha < \kappa\}$ uma pseudobase de para x.

Afirmação 1: Se φ é uma estratégia para $DOIS$ (não necessariamente vencedora) e $\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle$ é uma sequência de coberturas com $\alpha < \kappa^+$, existe $x \in X$ tal que para toda vizinhança U de x, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tal que $\varphi(\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle^\frown \mathcal{U}) = U$.

Supondo por absurdo que a afirmação não seja verdade, então existe uma estratégia φ para DOIS e uma sequência $\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle$ com $\alpha < \kappa^+$ tal que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U_x de x tal que, para toda cobertura $\mathcal{U}$ de X, $\varphi(\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle^\frown \mathcal{U}) \neq U_x$.

Em particular, isso vale para $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$, mas $\varphi(\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha \rangle^\frown \mathcal{U}) \in \mathcal{U}$, logo $\varphi(\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha \rangle^\frown \mathcal{U}) = U_x$ para algum $x \in X$, o que contradiz nossa suposição sobre U_x.

Agora, seja φ uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Use a afirmação 1 para tomar $x_\emptyset$ considerando a sequência vazia de coberturas abertas e, para cada $\alpha < \kappa$, tome $\mathcal{U}_{\langle \alpha \rangle}$ como uma cobertura tal que $\varphi(\langle U_{\langle \alpha \rangle} \rangle) = U_\alpha(x_\emptyset)$.

Em geral, dado $\alpha < \kappa^+$, assumindo que para cada sequência $f \in \bigcup\limits_{\beta < \alpha} {}^\beta\kappa$ e para cada $\gamma < \kappa$ foram tomados pontos $x_f \in X$ e coberturas abertas $\mathcal{U}_{f^\frown \gamma}$ de X tais que para todo $\beta < \alpha$, $f \in {}^\beta\kappa$ e todo $\gamma < \kappa$,

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{f \restriction_\delta} : \delta < \beta \rangle^\frown \langle \mathcal{U}_{f^\frown \gamma} \rangle) = U_\gamma(x_f),$$

dada $g : \alpha \to \kappa$ qualquer, usamos a afirmação 1 aplicada à sequência $\langle \mathcal{U}_{g \restriction_\beta : \beta < \alpha} \rangle$ para tomar $x_g \in X$ e, para cada $\gamma < \kappa$, $\mathcal{U}_{g^\frown \gamma}$ como a cobertura aberta que satisfaz

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{g \restriction_\beta} : \beta < \alpha \rangle^\frown \mathcal{U}_{g^\frown \gamma}) = U_\gamma(x_g).$$

Portanto, ao fim da indução, teremos construído x_f e $\mathcal{U}_{f^\frown \delta}$ para todo $f \in {}^{<\kappa^+}\kappa$ e todo $\delta < \kappa$ satisfazendo

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{f \restriction_\beta} : \beta < \alpha \rangle^\frown \mathcal{U}_{f^\frown \gamma}) = U_\gamma(x_f).$$

Afirmação 2: $X = \{x_f : f \in \bigcup\limits_{\alpha < \kappa^+} {}^\alpha\kappa\}$

Suponha por absurdo que existe $p \in X \setminus \{x_f : f \in \bigcup\limits_{\alpha < \kappa^+} {}^\alpha\kappa\}$. Como $p \neq x_\emptyset$, existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $p \notin U_{\alpha_0}(x_\emptyset)$, logo podemos supor que UM começa jogando $\mathcal{U}_{\langle \alpha_0 \rangle}$ e $DOIS$ é obrigado a responder com $U_{\alpha_0}(x_\emptyset)$. Novamente, $p \neq x_{\langle \alpha_0 \rangle}$, logo existe $\alpha_1 < \kappa$ tal que $p \notin U_{\alpha_1}(x_{\langle \alpha_0 \rangle})$, logo UM joga $\mathcal{U}_{\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle}$ e $DOIS$ joga de acordo com φ, respondendo com $U_{\alpha_1}(x_{\langle \alpha_0 \rangle})$. Em geral, supondo que UM jogou $\langle U_{f \restriction_\beta} : \beta \leq \gamma \rangle$ até a γ-ésima rodada, então $p \neq x_f$, logo existe $\alpha_\gamma < \kappa$ tal que $p \notin U_{\alpha_\gamma}(x_f)$ e UM pode jogar $\mathcal{U}_{f^\frown \alpha_\gamma}$, donde $DOIS$ responde com $U_{\alpha_\gamma}(x_f)$. Dessa forma, construímos uma partida de $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que $DOIS$ joga de acordo com φ mas não vence, pois p não é coberto por nenhuma de suas jogadas, o que contradiz o fato de φ ser uma estratégia vencedora.

Portanto, $X = \{x_f : f \in \bigcup\limits_{\alpha < \kappa^+} {}^\alpha\kappa\}$, donde $|X| \leq |\bigcup\limits_{\alpha < \kappa^+} {}^\alpha\kappa| = \sum\limits_{\alpha < \kappa^+} \kappa^\kappa = \kappa^+ \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$, ou seja, $|X| \leq 2^\kappa$. □

Curiosamente, as hipóteses do caso enumerável desse teorema não incluem o espaço ser de Lindelöf, pois a existência de estratégia vencedora para $DOIS$ em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ apenas implica que $L(X) \leq \aleph_1$, mas de certa forma a propriedade definida em termos do jogo de Rothberger em ω_1 rodadas se apresenta consideravelmente mais forte do que ser de Lindelöf no quesito de limitar a cardinalidade do espaço.

Em [5], Angelo Bella e Santi Spadaro provaram duas versões do teorema de Scheepers e Tall sobre o jogo de Rothberger, dessa vez relacionadas a versões mais fracas da propriedade de Lindelöf, mas com invariantes cardinais mais "fortes"do que o pseudo-caráter.

Nesta dissertação, optou-se por uma redação própria da prova do teorema 3.1.2 que difere da que foi apresentada em [5], mas a demonstração de 3.1.4 foi mantida de acordo com a referência. A mudança foi devida ao fato de que as duas demonstrações seguiam a mesma ideia e esta pareceu uma oportunidade interessante de ilustrar como submodelos elementares podem simplificar algumas demonstrações.

Notação. *Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, denotamos por $\overline{\mathcal{O}}_X$ o conjunto das famílias de abertos $\mathcal{U}$ tais que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$.*

Teorema 3.1.2 (Bella, Spadaro; 2015 [5])**.** *Seja X um espaço topológico tal que $\psi_c(X) \leq \kappa$. Se DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \overline{\mathcal{O}}_X)$, então $|X| \leq 2^\kappa$.*

Demonstração. Seja $P_{\overline{\mathcal{O}}}^{\kappa}(X, \tau)$ o jogo disputado em κ rodadas entre os jogadores UM e $DOIS$ em que, na α-ésima rodada, UM joga um ponto $x \in X$ e $DOIS$ joga uma vizinhança aberta U de x. UM vence uma partida em que $DOIS$ jogou $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ se $\bigcup\{\overline{U_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ cobre X. Caso contrário, $DOIS$ vence. Nas linhas do Teorema 1.3.10, é fácil ver que $P_{\overline{\mathcal{O}}}^{\kappa}(X, \tau)$ e $G_1^{\kappa}(\mathcal{O}_X, \overline{\mathcal{O}}_X)$ são duais.
Agora seja φ uma estratégia vencedora para UM em $P_{\overline{\mathcal{O}}}^{\kappa^+}(X, \tau)$, θ um cardinal regular grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $\tau, X, \varphi \in M$, $\kappa + 1 \subseteq M$, $[M]^{\leq \kappa} \subseteq M$ e $|M| = 2^\kappa$.

Afirmação: $X \cap M = X$.

Suponha por absurdo que existe $p \in X \setminus M$. Para cada $x \in X \cap M$, seja $\{U_\alpha(x) : \alpha < \kappa\} \in M$ uma família de vizinhanças abertas de x tal que $\{x\} = \bigcap_{\alpha < \kappa} \overline{U_\alpha(x)}$. Como $\kappa + 1 \subseteq M$, $\{U_\alpha(x) : \alpha < \kappa\} \subseteq M$ para todo $x \in X \cap M$. Agora, vamos jogar um jogo de $P_{\overline{\mathcal{O}}}^{\kappa^+}(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ, mas ainda perde. Considere $x_0 = \varphi(\langle\rangle)$. Como $\varphi, \langle\rangle \in M$, então $x_0 \in M$. Daí, como $p \notin M$, existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $p \notin \overline{U_{\alpha_0}(x_0)}$. Então, $DOIS$ pode jogar $U_0 = U_{\alpha_0}(x_0)$, que está em M pois $x_0 \in M$. Em geral, supondo que $DOIS$ jogou $\langle U_\beta : \beta < \gamma \rangle$ até a γ-ésima rodada de forma que $U_\beta \in M$ e $p \notin \overline{U_\beta}$ para todo $\beta < \gamma$. Como M é κ-fechado e $\gamma < \kappa^+$, $\langle U_\beta : \beta < \gamma \rangle \in M$, logo $x_\gamma = \varphi(\langle U_\beta : \beta < \alpha \rangle) \in M$. Portanto, existe $\alpha_\gamma < \kappa$ tal que $p \notin \overline{U_{\alpha_\gamma}(x_\gamma)}$ e $DOIS$ pode jogar $U_\gamma = U_{\alpha_\gamma}(x_\gamma)$, que também é um elemento de M, pois $x_\gamma \in M$. Ao fim da indução, teremos uma partida $\langle x_0, U_0, ..., x_\alpha, U_\alpha, ... \rangle$ de $P_{\overline{\mathcal{O}}}^{\kappa}(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ, mas $p \notin \{\overline{U_\alpha} : \alpha < \kappa^+\}$, o que é uma contradição.

Portanto, $X \cap M = X$ e então $|X| \leq |M| = 2^\kappa$. □

A outra variação do teorema de Scheepers e Tall provada por Bella e Spadaro, mencionada anteriormente, limita a cardinalidade de espaços de Hausdorff quase regulares e primeiro-enumeráveis em que $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, onde $\mathcal{O}_D$ é o conjunto das famílias de abertos de união densa.

Definição 3.1.3. *Um espaço X é* ***quase regular*** *se o conjunto dos fechados regulares não-vazios de X formam uma π-network para X. Em outras palavras, X é quase regular se para todo aberto não-vazio U, existe um aberto não-vazio V tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Teorema 3.1.4 (Bella, Spadaro; 2015 [5])**.** *Seja $\langle X, \tau\rangle$ um espaço T_2 quase regular e primeiro-enumerável. Se $DOIS$ possui uma estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, fixe uma base local $\{U_\alpha(x) : \alpha < \omega\}$ para X em x e seja φ uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$.

Afirmação 1: Para cada $\alpha < \omega_1$ e cada sequência $\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle$ de coberturas abertas, existe x tal que, para toda vizinhança de U de x, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ tal que $\varphi(\langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha\rangle^\frown \mathcal{U}) = U$.

A prova dessa afirmação segue exatamente como no teorema 3.1.1.

Fixe $x_{\langle\rangle}$ aplicando a afirmação 1 à sequência vazia e, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, defina $\mathcal{U}_{\langle\alpha\rangle}$ como a cobertura aberta tal que $\varphi(\langle \mathcal{U}_{\langle\alpha\rangle}\rangle) = U_\alpha(x_{\langle\rangle})$. Em geral, dado $\alpha < \omega_1$, suponha que para toda $f \in {}^{<\alpha}\mathfrak{c}$ e todo $\gamma < \mathfrak{c}$ foram tomados $x_f \in X$ e coberturas $\mathcal{U}_{f^\frown\gamma}$ tais que

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{f\restriction\delta+1} : \delta < \beta\rangle^\frown \mathcal{U}_{f^\frown\gamma}) = U_\gamma(x_f).$$

Dada $f \in {}^\alpha\mathfrak{c}$ e $\gamma < \mathfrak{c}$, fixamos x_f como um ponto dado pela afirmação 1 aplicada à sequência $\langle \mathcal{U}_{f\restriction\beta+1} : \beta < \alpha\rangle$ e $\mathcal{U}_{f^\frown\gamma}$ como uma cobertura aberta tal que

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{f\restriction\beta+1} : \beta < \alpha\rangle^\frown \mathcal{U}_{f^\frown\gamma}) = U_\gamma(x_f).$$

Ao fim da indução, para cada $f \in {}^{<\omega_1}\mathfrak{c}$ e cada $\gamma < \mathfrak{c}$, teremos pontos x_f e coberturas $\mathcal{U}_{f^\frown\gamma}$ tal que, para cada $\alpha < \omega_1$, $\gamma < \mathfrak{c}$ e $f : \alpha \to \mathfrak{c}$,

$$\varphi(\langle \mathcal{U}_{f\restriction\beta+1} : \beta < \alpha\rangle^\frown \mathcal{U}_{f^\frown\gamma}) = U_\gamma(x_f).$$

Defina $D = \{x_f : f \in {}^{<\omega_1}\mathfrak{c}\}$ e note que $|D| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} {}^\alpha\mathfrak{c}| = \omega_1 \times \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Afirmação 2: D é denso em X.

Demonstração. Suponha por absurdo que $X \setminus \overline{D} \neq \emptyset$. Então, como X é quase regular, existe um aberto não-vazio $V \subseteq X \setminus \overline{D}$ tal que $\overline{V} \subseteq X \setminus \overline{D}$. Como $x_{\langle\rangle} \in X \setminus \overline{V}$, existe γ_0 tal que $U_{\gamma_0}(x_{\langle\rangle}) \cap \overline{V} = \emptyset$. Logo, UM pode jogar $\mathcal{U}_{\langle\gamma_0\rangle}$, e $DOIS$ obrigatoriamente responderia com $U_0 = \varphi(\mathcal{U}_{\langle\gamma_0\rangle}) = U_{\gamma_0}(x_{\langle\rangle})$. Em geral, dado $\alpha < \omega_1$, supondo que UM jogou $\langle \mathcal{U}_{f\restriction\beta+1} : \beta < \alpha\rangle$ para alguma $f : \alpha \to \mathfrak{c}$ e $DOIS$ jogou de acordo com φ, podemos escolher γ_α tal que $U_{\gamma_\alpha}(x_f) \cap \overline{V} = \emptyset$, e então UM pode jogar $\mathcal{U}_{f^\frown\gamma_\alpha}$, ao qual $DOIS$ responderia com $U_\alpha = U_{\gamma_\alpha}(x_f)$. Ao fim da partida, teríamos que $V \cap \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha = \emptyset$, logo $DOIS$ perderia, o que contradiz o fato de φ ser vencedora. □

Portanto, X é um espaço T_2 e primeiro-enumerável que possui um denso de tamanho $\mathfrak{c}$, donde $|X| = \mathfrak{c}$. □

Na ausência de quaisquer axiomas de separação, a prova desse teorema mostra que se X é um espaço quase regular tal que $\chi(X) \leq \mathfrak{c}$ e $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, então $d(X) \leq 2^{\aleph_0}$. No entanto, para provarmos que espaços primeiro-enumeráveis quase regulares que contém um denso de cardinalidade até $\mathfrak{c}$ também tem sua cardinalidade limitada por $\mathfrak{c}$, é necessário algum grau de separação, como observamos no exemplo a seguir, de autoria própria.

Exemplo 3.1.5. *Seja κ um cardinal qualquer. Considere $X = \omega \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\}$. Defina uma topologia em X gerada pela base $\mathcal{B} = \{\{\langle n, 0\rangle\} : n < \omega\} \cup \{X \setminus (F \times \{0\}) : F \in [\omega]^{<\omega}\}$. Em outras palavras, os elementos de $\omega \times \{0\}$ são tomados como pontos isolados e as vizinhanças dos elementos de $\kappa \times \{1\}$ são da forma $X \setminus (F \times \{0\})$ para algum subconjunto finito F de ω. Esse espaço não é sequer T_0, pois os elementos de $\kappa \times \{1\}$ são topologicamente indistinguíveis, mas é claramente primeiro-enumerável e quase regular, assim como $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$. Na verdade, $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, o que é muito mais forte.*

- *X é primeiro enumerável:*

  Dado $x \in X$, se $x = \langle n, 0\rangle$ com $n < \omega$, então $\{\langle n, 0\rangle\}$ é uma base local para X em x, já que esse ponto é isolado. Se $x = \langle \alpha, 1\rangle$, com $\alpha < \kappa$, então $\{(\kappa \times \{1\} \cup \{n < \omega : n \geq m\} \times \{0\}) : m < \omega\}$ é uma base local para X em x.

- *X é quase regular:*

  A base $\mathcal{B}$ já é uma base de abertos fechados, pois $F \times \{0\}$ é um aberto para todo $F \subseteq \omega$, inclusive os finitos. Isso faz com que as vizinhanças de elementos de $\kappa \times \{1\}$ sejam fechadas. Os unitários da forma $\{\langle n, 0\rangle\}$ são fechados pois seus complementares são vizinhanças dos pontos de $\kappa \times \{1\}$.

- *DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$:*

  Basta que, na n-ésima rodada, DOIS escolha um aberto que cobre $\langle n, 0\rangle$, pois ao fim de qualquer partida o conjunto $\omega \times \{0\}$ teria sido coberto, e $\omega \times \{0\}$ é denso em X.

O exemplo a seguir, construído em [4], mostra que a hipótese de quase regularidade no teorema 3.1.4 também é necessária.

Exemplo 3.1.6 ([4])**.** *Para cada cardinal κ, existe um espaço Hausdorff X primeiro enumerável tal que $|X| = \kappa$ e DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$.*

Demonstração. Seja κ um cardinal não-enumerável. Considere $\mathbb{Q}$ o conjunto dos irracionais e seja $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ um outro denso enumerável. Então $\langle X, \tau\rangle$ é o espaço topológico em que $X = (\mathbb{Q} \times \kappa) \cup A$, para cada $\langle q, \alpha\rangle$ com $q \in \mathbb{Q}$ e $\alpha < \kappa$, uma base local para X em $\langle q, \alpha\rangle \in \mathbb{Q} \times \kappa$ é $\{(\mathbb{Q} \cap B(q, \frac{1}{n})) \times \{\alpha\} : n \geq 1\}$ e uma base local para X em $a \in A$ é $\{(A \cap B(a, \frac{1}{n})) \cup ((\mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{n})) \times \kappa) : n \geq 1\}$, onde $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\}$. X é claramente primeiro enumerável, pois todo ponto possui uma base local enumerável, e X é Hausdorff pois os abertos que separam os pontos em $\mathbb{R}$ induzem abertos que separam os pontos em X.

Agora, vamos mostrar que todo aberto que contém A é denso em X. Seja U um aberto de X tal que $A \subseteq U$. Dados $q \in \mathbb{Q}, \alpha < \kappa$ e $n < \omega$, como A é denso, existe $a \in A$ tal que $a \in B(q, \frac{1}{n})$. Como U é aberto, existe $m < \omega$ tal que $A \cap B(a, m) \subseteq U$ e $(\mathbb{Q} \cap B(a, m)) \times \kappa \subseteq U$. Seja $k < \omega$ tal que $k > m$ e $\frac{1}{k} < \frac{1}{n} - |a - q|$. Se $p \in \mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{k})$, então $\langle p, \alpha\rangle \in G \cap (B(q, \frac{1}{n}) \times \{\alpha\})$, pois $|p - q| \leq |p - a| + |a - q| < \frac{1}{n} + |a - q| < \frac{1}{n} - |a - q| + |a - q| = \frac{1}{n}$.

Em outras palavras, G intersecta toda vizinhança básica de $\langle q, \alpha\rangle$, logo G é denso em X. Com isso, provamos que X todo aberto que contém A é denso e é evidente que *DOIS* possui estratégia vencedora em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$. De fato, basta fixar uma enumeração $A = \{a_n : n < \omega\}$ e tomar um aberto que cobre a_n na n-ésima rodada. Como *DOIS* possui estratégia vencedora em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, então obviamente possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, pois *DOIS* já vence nas primeiras ω rodadas. □

Como os teoremas apresentados são muito semelhantes ao teorema de Arhangel'skii, pelo menos em seus enunciados, é razoável nos perguntarmos se a generalização obtida por Sapirovskii substituindo o caráter por pseudocaráter e tightness também teria um análogo nesse contexto. No entanto, o exemplo a seguir, também apresentado por Bell, Ginsburg e Woods em [4] dá uma resposta negativa.

Exemplo 3.1.7 ([4])**.** *Para cada cardinal κ, existe um espaço regular X tal que $|X| = \kappa$, $\psi(X) = \aleph_0$, $t(X) = \aleph_0$ e DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$.*

Demonstração. Seja $\langle X, \tau' \rangle$ o espaço topológico formado tomando X como no exemplo 3.1.6, mas de forma que as vizinhanças básicas de pontos de A são da forma $(A \cap B(a, \frac{1}{n})) \cup ((\mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{n})) \times K)$, onde $a \in A$, $n < \omega$ e K é um subconjunto cofinito de κ. Assim, uma base local para X em $a \in A$ seria $\{(A \cap B(a, \frac{1}{n})) \cup ((\mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{n})) \times (\kappa \setminus F)) : n < \omega, F \in [\kappa]^{<\omega}\}$. As vizinhanças básicas de elementos de $\mathbb{Q} \times \kappa$ são mantidas as mesmas. De imediato, já sabemos que $\psi(X) \leq \aleph_0$ e que X é Hausdorff, pois τ' refina uma topologia que já era Hausdorff sobre X e que já tinha pontos G_δ. Inclusive, sob a topologia τ', todos os abertos básicos são abertos-fechados, logo X é regular sob essa topologia. Agora vamos mostrar que todo aberto que contém A possui fecho coenumerável, o que garante a vitória de *DOIS* em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ em $\omega + \omega$ rodadas, pois *DOIS* apenas precisaria cobrir A nas primeiras ω rodadas, depois cobrir os pontos restantes nas seguintes.

De fato, seja U um aberto de X que contém A e suponha que $X \setminus \overline{U}$ é não-enumerável. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, pelo princípio da casa dos pombos, existe $q \in \mathbb{Q}$ e um $S \subseteq \kappa$ tais que $|S| = \aleph_1$ e $\{q\} \times S \subseteq X \setminus \overline{U}$. Para cada $\alpha \in S$, existe $n_\alpha < \omega$ tal que $(B(q, \frac{1}{n_\alpha}) \times \{\alpha\}) \cap U = \emptyset$. Novamente, pelo princípio da casa dos pombos, existe $T \subseteq S$ e $n < \omega$ tais que $|T| = \aleph_1$ e $(B(q, \frac{1}{n}) \times T) \cap G = \emptyset$. Como A é denso em $\mathbb{R}$, existe $a \in A$ tal que $|a - q| < \frac{1}{n}$. Daí, se V é uma vizinhança básica de a, então $V \cap (B(q, \frac{1}{n}) \times T) \supset (\mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{m}) \times \kappa \setminus F) \cap (B(q, \frac{1}{n}) \times T) = (Q \cap B(a, \frac{1}{m}) \cap B(q, \frac{1}{n})) \times (T \cap \kappa \setminus F)$. Como T é não-enumerável, $T \setminus F \neq \emptyset$ e como Q é denso e $a \in B(q, \frac{1}{n})$, então $Q \cap B(a, \frac{1}{m}) \cap B(q, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$, logo V intersecta $B(q, \frac{1}{n}) \times T$, mas G é um aberto disjunto de $B(q, \frac{1}{n}) \times T$ tal que $a \in G$, logo G deveria conter uma vizinhança básica de a disjunta de $B(q, \frac{1}{n}) \times T$, o que é uma contradição.

Agora, falta mostrarmos que $\psi(X), t(X) \leq \aleph_0$. Para $\psi(X) \leq \aleph_0$, basta observar que isso já valia no exemplo 3.1.6, e pseudo-bases são preservadas em topologias mais finas. Para $t(X) \leq \aleph_0$, observe que $\chi(\langle q, \alpha \rangle, X) = \aleph_0$ para todos $q \in \mathbb{Q}$ e $\alpha < \kappa$. Para $a \in A$, seja $S \subseteq X$ e suponha que $a \in \overline{S}$. Se $a \in \overline{S \cap A}$, então ótimo, pois $S \cap A$ já é enumerável. Se não, $a \in \overline{S \cap (\mathbb{Q} \times \kappa)}$, logo podemos escolher indutivamente $S' = \{\langle q_n, \alpha_n \rangle : n \in \omega\}$ tal que $|a - q_n| < \frac{1}{n}$ e $n < m \to \alpha_n < \alpha_m$. Claramente S' é enumerável e, dada uma vizinhança W qualquer de a, existe $n < \omega$ e $F \subseteq \kappa$ finito tal que $\mathbb{Q} \cap B(a, \frac{1}{n}) \times (\kappa \setminus F) \subseteq W$, portanto se $m < \omega$ é tal que $m > n$ e $\{\alpha_k : k < \omega\} \cap F \subseteq \{\alpha_0, ..., \alpha_{m-1}\}$, então $\langle q_m, \alpha_m \rangle \in W$, logo $a \in \overline{S'}$. Com isso, podemos concluir que $t(a, X) \leq \aleph_0$ para todo $a \in A$ e, por fim, $t(X) \leq \aleph_0$. $\square$

Assumindo axiomas de separação um pouco mais fortes do que apenas Hausdorff, Aurichi, Bella e Spadaro conseguiram limitar a cardinalidade de espaços topológicos em termos do caráter e de uma propriedade topológica definida por $\mathcal{G}_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$. Como veremos no exemplo 3.1.10, também construído por eles em [2], essa limitação realmente demanda axiomas de separação além do de Hausdorff.

Definição 3.1.8. *Se X é um espaço topológico e $A \subseteq X$, dizemos que $x \in X$ é um θ-limite de A se $F \cap A \neq \emptyset$ para toda vizinhança fechada F de x. Definimos o θ-fecho de A como $Cl_\theta(A) = \{x \in X : x \text{ é } \theta\text{-limite de } A\}$. Dizemos que A é θ-fechado se $Cl_\theta(A) = A$ e que A é θ-denso se $Cl_\theta(A) = X$*

Teorema 3.1.9 (Aurichi, Bella, Spadaro; 2022 [2])**.** *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço de Urysohn tal que $\chi(X) < \kappa$ e considere $\mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{P}(\tau)$ o conjunto das famílias de união densa em X. Se DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, então $|X| \leq 2^{<\kappa}$.*

Demonstração. Como $P_D^\alpha(X, \tau)$ e $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ são duais, fixe uma estratégia vencedora φ para UM em $P_D^\kappa(X, \tau)$. Seja λ um cardinal regular grande o suficiente e M um submodelo elementar de $H(\lambda)$ tal que $[M]^{<\kappa} \subseteq M$, $|M| = 2^{<\kappa}$, $X, \tau, \varphi \in M$ e $\kappa + 1 \subseteq M$.

Afirmação 1: $X \cap M$ é θ-fechado.

Dado $x \in Cl_\theta(X \cap M)$, tome uma base local para X em x $\{U_\alpha : \alpha < \mu\}$, com $\mu < \kappa$. Para cada $\alpha < \mu$, tome $x_\alpha \in \overline{U_\alpha} \cap M$ e seja $S = \{x_\alpha < \alpha < \mu\}$. Obviamente, $x \in Cl_\theta(S)$, pois dada V vizinhança aberta de x, existe $\alpha < \mu$ tal que $x \in U_\alpha \subseteq V$, logo $x_\alpha \in \overline{U_\alpha} \cap S \subseteq \overline{V} \cap S$. Como $[M]^{<\kappa} \subseteq M$, então $S \cap \overline{U_\alpha} \in M$ e $Cl_\theta(S \cap \overline{U_\alpha}) \in M$ para todo $\alpha < \mu$. Como X é Urysohn, $\bigcap\{Cl_\theta(\overline{U_\alpha} \cap S) : \alpha < \mu\} = \{x\}$, já que se $y \neq x$, então existem vizinhanças fechadas F_y e F_x disjuntas com $x \in F_x$ e $y \in F_y$, logo $F_y \cap U_\alpha = \emptyset$ para algum $\alpha < \mu$. Daí, $\{x\} \in M$ e $x \in M$, portanto $X \cap M$ é θ-fechado.

Afirmação 2: $X \cap M$ é θ-denso.

Suponha por absurdo que existe um aberto não-vazio V tal que $\overline{V}$ é disjunto de $X \cap M$. Considere uma partida de $P_D^\kappa(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ, começando com $x_0 = \varphi(\emptyset)$. Como $\emptyset \in M$ e $\varphi \in M$, então $x_0 \in M$. Como $\chi(X) < \kappa$, tomamos uma base local de X em x_0 $\mathcal{V}_0 = \{V_{\alpha,0} : \alpha < \mu\} \in M$, que também está contida em M pois $\kappa + 1 \subseteq M$. Daí, como $x_0 \notin \overline{V}$, podemos tomar $\alpha_0 < \mu$ tal que $V_{\alpha_0} \cap V = \emptyset$. Então, consideramos que o jogador $DOIS$ jogou $V_0 = V_{\alpha_0}$. Agora seja $\alpha < \kappa$ e suponha que, para todo $\beta < \alpha$, $DOIS$ jogou um aberto $U_\beta \in M$ tal que $U_\beta \cap V = \emptyset$. Como M é $<\kappa$-fechado, $\langle U_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M$, logo $x_\beta = \varphi(\langle U_\beta : \beta < \alpha \rangle) \in M$, logo podemos tomar uma base local $\mathcal{V}_\beta = \{V_{\gamma,\beta} : \gamma < \mu\}$ para X em x_β e uma vizinhança $V_\beta \in \mathcal{V}_\beta$ tal que $V_\beta \cap V = \emptyset$. Ao fim do jogo, $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ deveria ter união densa em X, pois UM jogou de acordo com a estratégia vencedora φ, mas $V_\alpha \cap V = \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.
Como $X \cap M$ é θ-fechado e θ-denso, então $X \cap M = X$, logo $|X| = |X \cap M| \leq 2^{<\kappa}$. □

Como comentado anteriomente, o exemplo a seguir, apresentado em [2], mostra que a hipótese de o espaço ser Urysohn não pode ser enfraquecida para Hausdorff.

Exemplo 3.1.10 ([2]). *Para cada cardinal κ, existe um espaço X Hausdorff e primeiro-enumerável tal que $|X| = \kappa$ e $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$.*

Demonstração. Sejam $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ um denso enumerável da reta e $D_2 = \mathbb{R} \setminus D_1$. Tome $X = D_1 \cup (D_2 \times \kappa)$ e defina uma topologia em X de forma que uma vizinhança básica de um ponto $\langle x, \alpha \rangle \in D_2 \times \kappa$ é da forma $U \cap D_2 \times \{\alpha\}$, para alguma vizinhança de $x \in D_2$ na reta e algum ordinal $\alpha < \kappa$, e uma vizinhança básica de $x \in D_1$ é da forma $(U \cap D_1) \cup ((U \cap D_2) \times \kappa)$, para alguma vizinhança U de $x \in D_1$. Como a reta é Hausdorff e primeiro-enumerável, é fácil ver que X também o é.
Além disso, qualquer aberto de X que contenha D_1 é denso. De fato, se O é aberto e $D_1 \subseteq O$, então dados $\langle x, \alpha \rangle \in D_2 \times \kappa$ e $(U \cap D_2) \times \{\alpha\}$ uma de suas vizinhanças abertas, sabemos que $U \cap D_1 \neq \emptyset$. Portanto, existe um aberto não-vazio V da reta tal que $V \subseteq U$ e $(V \cap D_1) \cup ((V \cap D_2) \times \kappa) \subseteq O$. Portanto, $((V \cap U) \cap D_2) \times \{\alpha\} = (V \cap D_2) \times \{\alpha\} \subseteq O \cap ((U \cap D_2) \times \{\alpha\})$. Como D_2 é coenumerável, então $V \cap D_2 \neq \emptyset$, logo $O \cap ((U \cap D_2) \times \{\alpha\}) \neq \emptyset$ e $D_2 \times \kappa \subseteq \overline{O}$. Como $D_1 \subseteq O$, então $\overline{O} = X$.

Uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G_1^\omega(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ pode ser construída tomando uma enumeração $\{x_n : n < \omega\}$ de D_1 e fazendo o jogador $DOIS$ escolher uma vizinhança de x_n na n-ésima rodada. Ao fim de uma partida em que $DOIS$ jogue de acordo com essa estratégia, escolhendo um aberto U_n na n-ésima rodada, $\bigcup\{U_n : n < \omega\}$ é um aberto que contém D_1, portanto é denso. □

Apesar de o teorema anterior exigir axiomas de separação mais fortes, é possível provar um resultado semelhante para espaços de Hausdorff, mas assumindo que também sejam enumeravelmente compactos.

Teorema 3.1.11 (Aurichi, Bella, Spadaro; 2022 [2]). *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço T_2, primeiro enumerável e enumeravelmente compacto. Se $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\omega_1}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$, então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Sejam φ uma estratégia vencedora para UM em $P_D^{\omega_1}(X, \tau)$ e λ cardinal regular grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\lambda)$ tal que $[M]^{\leq\omega} \subseteq M$, $|M| \leq 2^{\aleph_0}$ tal que $X, \tau, \varphi \in M$ e $\omega + 1 \subseteq M$.

Afirmação 1: $X \cap M$ é enumeravelmente compacto.

Seja A um subconjunto enumerável de $X \cap M$. Como X é enumeravelmente compacto, A possui um ponto de acumulação a. Como M é enumeravelmente fechado, $A \in M$. Dessa forma,

$$H(\theta) \models \exists x_1 (\forall x_2 \in \tau (x_1 \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{x_1\} \neq \emptyset)).$$

Por elementaridade,

$$M \models \exists x_1(\forall x_2 \in \tau(x_1 \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{x_1\} \neq \emptyset)).$$

Portanto, existe $p \in M$ tal que

$$M \models \forall x_2 \in \tau(p \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset).$$

E, por elementaridade,

$$H(\theta) \models \forall x_2 \in \tau(p \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset).$$

Portanto, A possui um ponto de acumulação em $X \cap M$.

Afirmação 2: $X \cap M = X$.

De fato, suponha que existe $p \in X \setminus M$. Tome $\{U_n : n < \omega\}$ uma base local decrescente para X em p e, para cada $x \in X \cap M$, fixe $\mathcal{U}_x = \{U_n^x : n < \omega\}$ uma base local decrescente para X em x. Por elementaridade, podemos supor que $\mathcal{U}_x \in M$ para todo $x \in X \cap M$, e como $\omega + 1 \subseteq M$, também tem-se $\mathcal{U}_x \subseteq M$. Como X é Hausdorff e as bases são decrescentes, para cada $x \in X \cap M$, existe $n_x < \omega$ tal que $U^x_{n_x} \cap V_{n_x} = \emptyset$, donde $\{U^x_{n_x} : x \in X \cap M\}$ é uma cobertura de $X \cap M$. Além disso, definindo $O_n = \bigcup\{U^x_{n_x} : n_x = n\}$ para cada $n < \omega$, $\{O_n : n < \omega\}$ também é uma cobertura aberta de $X \cap M$. Como $X \cap M$ é enumeravelmente compacto, existe $n_0 < \omega$ tal que $X \cap M \subseteq \bigcup\limits_{n \leq n_0} O_n$. Daí, $\mathcal{U} = \{U^x_{n_x} : n_x \leq n_0\}$ é uma coleção de abertos que cobre $X \cap M$ tal que $p \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}}$.

Agora, vamos jogar um jogo de $P_D^{\omega_1}(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ. Na primeira rodada, UM joga $x_0 = \varphi(\emptyset)$, e como $\varphi, \emptyset \in M$, então $x_0 \in M$. Daí, podemos considerar que o jogador $DOIS$ respondeu com algum aberto $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_0$. Na α-ésima rodada, supondo que para todo $\beta < \alpha$ $DOIS$ jogou $U_\beta \in \mathcal{U}$, então $x_\alpha = \varphi(\langle U_\beta : \beta < \alpha\rangle) \in M$, logo $DOIS$ pode responder com $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $x_\alpha \in U_\alpha$. Ao final do jogo, como a partida foi jogada por UM de acordo com φ, então $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ deveria ser denso, mas $p \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}}$, logo $p \notin \overline{\bigcup\limits_{\alpha < \omega_1} U_\alpha}$. Portanto, $X \setminus M = \emptyset$, logo $X \subseteq M$ e $|X| \leq |M| = 2^{\aleph_0}$. □

Num paper anterior a esses resultados, Santi Spadaro [20] já havia investigado a propriedade de $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ para espaços regulares enumeravelmente compactos.

Definição 3.1.12. *Seja X um espaço topológico qualquer. A modificação G_κ de X, denotada por X_κ, é o espaço topológico cujos abertos são gerados pelos subconjuntos G_κ de X, i.e., os subconjuntos escritos da forma $\bigcap\limits_{\alpha < \kappa} U_\alpha$, para alguma família $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abertos. Se $\kappa = \aleph_0$, dizemos que X_κ é a modificação G_δ de X, e denotamo-os por X_δ.*

Teorema 3.1.13 (Spadaro, 2016 [20]). *Seja κ um cardinal não-enumerável e X um espaço regular enumeravelmente compacto em que DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$. Então $wL(X_\delta) \leq 2^{<\kappa}$*

Demonstração. Seja τ a topologia sobre X. Fixe uma estratégia vencedora φ para X em $P^\kappa(X, \tau)$ e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X_δ. Para cada $U \in \mathcal{U}$, como U é um G_δ, podemos fixar $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \tau$ tal que $U = \bigcap_{n<\omega} U_n$. Como X é regular, podemos supor sem perda de generalidade que $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ para todo $n < \omega$, donde $U = \bigcap_{n<\omega} \overline{U_n}$. Seja θ um cardinal regular grande o suficiente e M um submodelo elementar $<\kappa$-fechado de $H(\theta)$ tal que $X, \tau, \varphi, \mathcal{U} \in M$, $|M| = 2^{<\kappa}$, $2^{<\kappa} + 1 \subseteq M$.

Afirmação 1: $X \cap M$ é enumeravelmente compacto.

Seja $A \subseteq X \cap M$ um subconjunto enumerável. Como X é enumeravelmente compacto, A possui um ponto de acumulação em X, i.e.,

$$H(\theta) \models \exists x_1 \in X(\forall x_2 \in \tau)(x_1 \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{x_1\} \neq \emptyset).$$

Como κ é não-enumerável e M é $<\kappa$-fechado, então $A \in M$. Como A, τ e X são os únicos parâmetros da fórmula acima e todos são elementos de M, temos por elementaridade que

$$M \models \exists x_1 \in X(\forall x_2 \in \tau)(x_1 \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{x_1\} \neq \emptyset).$$

Logo, existe $p \in X \cap M$ tal que

$$M \models (\forall x_2 \in \tau)(p \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset),$$

e, por elementaridade:

$$H(\theta) \models (\forall x_2 \in \tau)(p \in x_2 \to (x_2 \cap A) \setminus \{p\} \neq \emptyset).$$

Logo, A possui um ponto de acumulação em $X \cap M$ e como A é um subconjunto arbitrário de $X \cap M$, o espaço é enumeravelmente compacto.

Afirmação 2: $\mathcal{U} \cap M$ é tem união densa em X_δ.

Suponha que não. Então, podemos tomar um aberto V de X_δ tal que $V \cap \bigcup(\mathcal{U} \cap M) = \emptyset$. Assim como anteriormente, podemos assumir que $V = \bigcap_{n<\omega} \overline{V_n}$ para alguma família $\{V_n : n < \omega\}$ decrescente de abertos de X. Para cada $x \in X \cap M$, existe $\mathcal{B}_x \in \mathcal{U} \cap M$ tal que $x \in B_x$, donde $B_x \cap V = \emptyset$. Como $B_x \in M$, existe $\{B_n^x : n < \omega\} \subseteq M \cap \tau$ tal que $B_x = \bigcap_{n<\omega} \overline{B_n^x}$.

Fixe $x \in X \cap M$. Por compacidade enumerável, como $(\bigcap_{n<\omega} \overline{B_n^x}) \cap (\bigcap_{n<\omega} \overline{V_n}) = B_x \cap V = \emptyset$, então existem $n_x, m_x < \omega$ tais que $B_{n_x}^x \cap V_{m_x} = \emptyset$. Sejam $\mathcal{B} = \{B_{n(x)}^x : x \in X \cap M\}$, $\mathcal{B}_n = \{B \in \mathcal{B} : B \cap V_n = \emptyset\}$ e $B_n = \bigcup \mathcal{B}_n$. Daí, $\{B_n : n < \omega\}$ é uma cobertura aberta de $X \cap M$ e, pela Afirmação 1, existe $k < \omega$ tal que $\{B_n : n \leq k\}$ cobre $X \cap M$. Tomando $\mathcal{B}' = \bigcup \{\mathcal{B}_n : n \leq k\}$, obtemos que $\mathcal{B}'$ também cobre $X \cap M$.

Agora, vamos jogar um jogo de $P^\kappa(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ e $DOIS$ joga elementos de $\mathcal{B}'$. Na primeira rodada, UM joga $x_0 = \varphi(\emptyset)$, que é um elemento de M pois $\varphi, \emptyset \in M$. Daí, existe $B_0 \in \mathcal{B}'$ tal que $x_0 \in B_0$, com o qual $DOIS$ pode responder. Em geral, se $\alpha < \kappa$ e $DOIS$ jogou $\langle B_\beta : \beta < \alpha \rangle$ com $B_\beta \in M$ para todo $\beta < \alpha$ até a α-ésima rodada, como M é $<\kappa$-fechado, $\langle B_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M$, donde $x_\alpha = \varphi(\langle B_\beta : \beta < \alpha \rangle) \in M$, e então existe $B_\alpha \in \mathcal{B}'$ tal que $x_\alpha \in B_\alpha$, e então $DOIS$ joga B_α. Ao fim da partida, UM jogou de acordo com a estratégia vencedora φ, logo $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ deveria ter união densa, mas $B_\alpha \cap V_k = \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$, já que $\{V_n : n < \omega\}$ é decrescente, o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{U} \cap M$ deve ter união densa, logo $wL(X_\delta) \leq |\mathcal{U} \cap M| \leq 2^{<\kappa}$. $\square$

Vale observar que se adicionamos a hipótese de pseudo-caráter enumerável a esse teorema, também limitamos $|X|$, pois X_δ seria discreto e teríamos $wL(X_\delta) = |X_\delta|$.

3.2 Os jogos $G_{fin}^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ e $G_1^\kappa(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_D)$

Uma forma de enfraquecer as propriedades definidas pela existência de estratégias vencedoras para $DOIS$ em $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_D)$ é considerar versões desse jogo em que o jogador $DOIS$ escolhe mais de um aberto a cada rodada, ou em que UM joga coberturas abertas de uma classe específica.

Teorema 3.2.1 (Aurichi, Bella, Spadaro; 2022 [2]). *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço regular tal que $\chi(X) \leq \kappa$ e $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_D)$. Então $|X| \leq 2^\kappa$.*

Demonstração. Primeiramente, se $K \subseteq X$ é compacto, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base exterior para K se $\mathcal{B}$ é uma família de abertos que contém K tal que, para todo aberto U que contém K, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $K \subseteq V \subseteq U$. Afirmamos que todo compacto K de X possui uma base exterior de cardinalidade menor ou igual a 2^κ. De fato, pelo Teorema de Arhangel'skii, como $\chi(X) \leq \kappa$, se $K \subseteq X$ é compacto, então $|K| \leq 2^\kappa$, pois $L(K) = \aleph_0$. Daí, fixamos para cada $x \in X$ uma base local $\mathcal{B}_x$ com $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$. Dado um compacto K, se $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}_x$, então $|\mathcal{B}| = |K| \cdot 2^\kappa = 2^\kappa$. Tomando $\mathcal{B}_K = \{\bigcup F : F \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$, obtém-se $|\mathcal{B}_K| = 2^\kappa$ e afirmamos que $\mathcal{B}_K$ é uma base exterior para K. De fato, se U é um aberto que contém K, então para cada $p \in K$, existe $U_p \in \mathcal{B}_p$ tal que $p \in U_p \subseteq U$, logo $\{U_p : p \in K\}$

é uma família de abertos que cobre K. Como K é compacto, existem $p_1, ..., p_n$ tais que $K \subseteq \bigcup_{m \leq n} U_{p_m} \in \mathcal{B}_K$.

Portanto, para cada compacto $K \subseteq X$, seja $\mathcal{B}_K$ uma base exterior para K tal que $|\mathcal{B}_K| \leq 2^\kappa$. Fixe φ uma estratégia vencedora para UM em $K_D^{\kappa^+}(X, \tau)$ e seja θ grande o suficiente e $M \preccurlyeq H(\theta)$ tal que $\varphi, X, \tau \in M$, $2^\kappa + 1 \subseteq M$, $[M]^{\leq \kappa} \subseteq M$ e $|M| \leq 2^\kappa$. Como na prova do Teorema 2.2.9, como X é Hausdorff e $\chi(X) \leq \kappa$, $X \cap M$ é fechado. Mostraremos que $X \cap M$ é denso, donde $X \cap M = \overline{X \cap M} = X$ e $|X| \leq |M| \leq 2^\kappa$.

Supondo por absurdo que $X \cap M$ não é denso, como X é regular, existe um fechado de interior não-vazio F tal que $F \cap (X \cap M) = \emptyset$. Seja $K \subseteq X$ um compacto que pertence a M. Note também que como $|K| \leq 2^\kappa$ e $2^\kappa + 1 \subseteq M$, então $K \subseteq M$. Por elementaridade, podemos supor sem perda de generalidade que $\mathcal{B}_K \in M$ e, como $|\mathcal{B}_K| \leq 2^\kappa$, $\mathcal{B}_K \subseteq M$.

Agora jogamos um jogo de $K_D^{\kappa^+}(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ. Se, na α-ésima rodada, UM jogou $\{\langle K_\beta : \beta \leq \alpha \rangle\}$, tal que $K_\beta \in M$ para todo $\beta \leq \alpha$, então $K_\alpha \subseteq M$, logo podemos tomar $V_\alpha \in \mathcal{B}_{K_\alpha}$ tal que $K \subseteq V_\alpha \subseteq X \setminus F$, ou seja, $V_\alpha \cap F = \emptyset$. Como todas as jogadas de $DOIS$ são tomadas em M, como $\varphi \in M$ e M é κ-fechado, todas as jogadas de UM também são elementos de M e o jogo pode seguir dessa maneira por todas as rodadas. No entanto, ao fim da partida, $\bigcup_{\alpha < \kappa^+} V_\alpha \cap F = \emptyset$, donde $\bigcup_{\alpha < \kappa^+} V_\alpha \cap int(F) = \emptyset$. Com isso, o conjunto das jogadas de $DOIS$ não possui união densa em X, contradizendo o fato de φ ser uma estratégia vencedora para UM em $K_D^{\kappa^+}(X, \tau)$. $\square$

Em [1], Aurichi e Bella provaram uma versão do teorema 3.1.1 com uma hipótese de separação mais forte, mas com uma propriedade muito mais fraca em termos de jogos topológicos.

Definição 3.2.2. *Seja κ um cardinal infinito e φ uma estratégia vencedora para $DOIS$ em $G^\kappa_{fin}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Dizemos que $K \subseteq X$ é* ***adequado*** *para φ se existem $\beta < \kappa$ e uma sequência $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \beta\}$ de coberturas abertas tais que $K = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X} \overline{\bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U})}$*

Lema 3.2.3. *Todo subconjunto adequado para uma estratégia vencedora para $DOIS$ num espaço regular é compacto.*

Demonstração. Seja $K = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X} \overline{\bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U})}$ e seja $\mathcal{V}$ uma coleção de abertos de X que cobre K. Para cada $x \in K$, tome V_x como uma vizinhança aberta de x tal que $\overline{V_x} \subseteq U_x$ para algum $U_x \in \mathcal{V}$. Para cada $x \in X \setminus K$, tome V_x como uma vizinhança aberta de x tal que $\overline{V_x} \cap K = \emptyset$. Tomando $\mathcal{W} = \{V_x : x \in X\}$, temos que $K \subseteq \overline{\varphi(s^\frown \mathcal{W})}$. Como existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $\varphi(s^\frown \mathcal{W}) = \{V_{x_1}, ..., V_{x_n}\}$, então $K \subseteq \bigcup \{\overline{V_{x_i}} : i \leq n, x_i \in K\} \subseteq \bigcup \{U_{x_i} : i \leq n, x_i \in K\}$.

□

Lema 3.2.4. *Seja X um espaço qualquer. Se K é adequado para uma estratégia vencedora φ, i.e., se existe uma sequência s de coberturas abertas de X tal que $K = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X} \overline{\varphi(s^\frown \mathcal{U})}$, e $K = \bigcap_{\xi < \lambda} V_\xi$ com V_ξ aberto para todo $\xi < \lambda$, então existe $\mathcal{O}'_X \subseteq \mathcal{O}_X$ tal que $K = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}'_X} \overline{\bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U})}$ e $|\mathcal{O}'_X| \leq \lambda + \kappa$.*

Demonstração. Como $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G^\kappa_{fin}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, então $L(X) \leq \kappa$. Daí, $L(X \setminus K) \leq \lambda + \kappa$, pois se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de $X \setminus K$, então, para cada $\xi < \lambda$, $\{V_\xi\} \cup \mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X, logo admite uma subcobertura $\mathcal{U}_\xi$ de cardinalidade menor ou igual a κ. Daí, $\bigcup_{\xi < \lambda} \mathcal{U}_\xi \cap \mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de $X \setminus K$ e $|\bigcup_{\xi<\lambda} \mathcal{U}_\xi \cap \mathcal{U}| \leq \lambda \cdot \kappa$. Como $\{X \setminus \overline{\bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}_X}\}$ é uma cobertura aberta de $X \setminus K$, então existe $\mathcal{O}'_X \subseteq \mathcal{O}_X$ com $|\mathcal{O}'_X| \leq \lambda \cdot \kappa$ tal que $\{X \setminus \overline{\varphi(s^\frown \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}'_X}\}$ é cobertura aberta de $X \setminus K$, logo $K \subseteq \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}'_X} \overline{\bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U})}$. □

Lema 3.2.5. *Seja X um espaço com pontos G_δ. Então para cada compacto $K \subseteq X$, existe uma sequência $\langle V_\xi : \xi < 2^{\aleph_0} \rangle$ de abertos tal que $K = \bigcap_{\xi < 2^{\aleph_0}} V_\xi$.*

Demonstração. Devido a um resultado de Gryzlov em [12], cada compacto $K \subseteq X$ tem cardinalidade no máximo $2^{\aleph_0}$. Para cada $x \in K$, seja $\{V^x_n : n < \omega\}$ uma pseudo-base local em x. Se $\mathcal{B} = \{V : V = \bigcup_{i=0}^{k} V^{x_i}_{n_i}, K \subseteq X, x_0, ..., x_k \in K, n_0, ..., n_k < \omega\}$, então $\mathcal{B} \leq |K| \leq 2^{\aleph_0}$ e $\bigcap \mathcal{B} = K$, pois dado $x \notin K$, podemos tomar, para cada $y \in K$, $n_y < \omega$ tal que $x \notin V^x_{n_y}$, e $\{V^x_{n_y} : y \in K\}$ é uma família de abertos que cobre K, logo possui alguma subfamília finita que ainda cobre K e cuja união é elemento de $\mathcal{B}$. Como y não pertence a nenhum dos elementos dessa subfamília, então $y \notin \bigcap \mathcal{B}$. Além disso, por este mesmo argumento, $\mathcal{B}$ não é vazio. □

Teorema 3.2.6 (Aurichi, Bella; 2018 [1])**.** *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço regular com pontos G_δ tal que $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G^{\omega_1}_{fin}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Fixe uma estratégia vencedora φ para $DOIS$. Seja θ um cardinal regular grande o suficiente e M um submodelo elementar enumeravelmente fechado de $H(\theta)$ tal que $|M| = 2^{\aleph_0}$, $X, \varphi, \tau, \mathcal{O}_X \in M$ e $\mathfrak{c} + 1 \subseteq M$.

Seja $\mathcal{K} = \{K \subseteq X : K \in M$ e K é adequado para $\varphi\}$. Como $\mathcal{K} \subseteq M$, então $|\mathcal{K}| \leq |M|$. Portanto, se mostrarmos que $X = \bigcup \mathcal{K}$ e $|K| \leq \mathfrak{c}$ para todo $K \in \mathcal{K}$, então $|X| \leq |K| \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Suponha por absurdo que existe $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{K}$. Seja $K_0 = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X} \overline{\bigcup \varphi(\langle \mathcal{U} \rangle)}$.

$$H(\theta) \models \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \iff \forall x_3 \in \mathcal{O}_X (x_2 \in \overline{\bigcup \varphi(\langle x_3 \rangle)})).$$

Por elementaridade, existe $K \in M$ tal que

$$M \models \forall x_2 (x_2 \in K \iff \forall x_3 \in \mathcal{O}_X (x_2 \in \overline{\bigcup \varphi(\langle x_3 \rangle)})).$$

Novamente por elementaridade, como $K, O_X, \varphi \in M$:

$$H(\theta) \models \forall x_2 (x_2 \in K \iff \forall x_3 \in \mathcal{O}_X (x_2 \in \overline{\bigcup \varphi(\langle x_3 \rangle)})).$$

Como $H(\theta)$ satisfaz o Axioma da Extensionalidade, então $K = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X} \overline{\bigcup \varphi(\langle \mathcal{U} \rangle)} = K_0$, donde $K_0 \in M$. Como K_0 é um subconjunto adequado que está em M, então $K_0 \in \mathcal{K}$. Aplicando 3.2.4 a K_0, existe $\mathcal{O}'_X \in M$ tal que $|\mathcal{O}'_X| \leq 2^{\aleph_0}$ e $K_0 = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}'_X} \overline{\varphi(\langle \mathcal{U} \rangle)}$. Como $\mathfrak{c} + 1 \subseteq M$, tem-se também $\mathcal{O}'_X \subseteq M$, logo existe $\mathcal{U}_0 \in M$ tal que $x \notin \bigcup \varphi(\mathcal{U}_0)$.

Agora, dado $\alpha < \omega_1$ e supondo que para todo $\beta < \alpha$ e todo $\gamma \leq \beta$ estão definidos $\mathcal{U}_\gamma$ de forma que $x \notin \bigcup \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$. Definindo $s : \alpha \to \mathcal{O}_X$ com $s(\beta) = \mathcal{U}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, como M é enumeravelmente fechado, tem-se $s \in M$. Portanto, definindo $K_\alpha = \bigcap\limits_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{\varphi(s^\frown \mathcal{U})}$, temos que $K_\alpha \in M$, donde $K_\alpha \in \mathcal{K}$ e pelo mesmo argumento anterior, existe $\mathcal{U}_\alpha \in M \cap \mathcal{O}_X$ tal que $x \notin \bigcup \varphi(s^\frown \mathcal{U}_\alpha)$.

Dessa forma, foi construída uma partida em que $DOIS$ joga de acordo com a estratégia vencedora φ mas ainda perde, pois nenhuma jogada de $DOIS$ cobre x, o que é uma contradição.

Portanto, $X = \bigcup \mathcal{K}$, logo $|X| \leq |\bigcup \mathcal{K}| \leq |\mathcal{K}| \cdot \sup\limits_{K \in \mathcal{K}} |K| \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, pois cada elemento de $\mathcal{K}$ é um compacto com pontos G_δ. □

3.3 Uma generalização dos teoremas de Arhangel'skii e Hajnal-Juhász

Nesta seção, vamos apresentar um resultado de Bella e Spadaro [6] que generaliza os teoremas de Arhangel'skii e Hajnal-Juhász para espaços de Hausdorff primeiro-enumeráveis.

Definição 3.3.1. *Seja X um espaço topológico. Denotamos por X^c_κ o espaço topológico cujos abertos são gerados pelos subconjuntos G^c_κ de X, i.e., os subconjuntos A tais que existe uma família $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abertos com $A = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} \overline{U_\alpha}$.*

Definição 3.3.2.
- *O **grau de Lindelöf fraco por partes** de X, denotado por $pwL(X)$, é o menor cardinal κ tal que para toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X e toda decomposição $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{U}$ existem $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$ para cada $i \in I$ tal que $|\mathcal{V}_i| \leq \kappa$ e $X \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_i} : i \in I\}$*

- *O **grau de Lindelöf fraco por partes para subconjuntos fechados** de X, denotado por $pwL_c(X)$, é o menor cardinal κ tal que para todo fechado $F \subseteq X$, toda família de abertos $\mathcal{U}$ cobrindo F e toda decomposição $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ de $\mathcal{U}$ existem $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}_i$ com $|\mathcal{V}_i| \leq \kappa$ e $F \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_i} : i \in I\}$*

Proposição 3.3.3. *Para qualquer espaço X, valem:*

1. $pwL(X) \leq pwL_c(X)$;
2. $pwL_c(X) \leq L(X)$;
3. $pwL_c(X) \leq c(X)$
4. *Se X é regular,* $wL_c(X) \leq pwL(X)$.

Demonstração. O item 1 é óbvio pois X é um subconjunto fechado de X.

Para o item 2, se $\kappa = L(X)$, então dado $F \subseteq X$ fechado, $L(F) \leq X$. Daí, se $\mathcal{U}$ é uma família de abertos de X que cobre F e $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ uma decomposição de $\mathcal{U}$, basta tomar uma subfamília $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ que cobre F com $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ e tomar $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}$. Daí, $|\mathcal{V}_i| \leq \kappa$ para todo $i \in I$ e $F \subseteq X \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_i} : i \in I\}$. Logo, $pwL_c(X) \leq L(X)$.

Para o item 3, sejam $F \subseteq X$ fechado, $\mathcal{U}$ uma família de abertos que cobre F e $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ uma decomposição de $\mathcal{U}$. Se $c(X) = \kappa$, tomamos, para cada $i \in I$, $\mathcal{C}_i$ família celular maximal entre as que refinam $\mathcal{U}_i$. Pela maximalidade de $\mathcal{C}_i$, tem-se $\overline{\bigcup \mathcal{U}_i} = \overline{\bigcup \mathcal{C}_i}$ para todo $i \in I$, e por $c(X) = \kappa$, tem-se $|\mathcal{C}_i| \leq \kappa$ para todo $i \in I$. Assim, para cada $C \in \mathcal{C}_i$, podemos fixar $U_C \in \mathcal{U}_i$ tal que $C \subseteq U_C$ e tomar $\mathcal{V}_i = \{\mathcal{U}_C : C \in \mathcal{C}_i\}$. Com isso, $\bigcup \mathcal{V}_i \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}_i}$ e $|\mathcal{V}_i| \leq |\mathcal{C}_i| \leq \kappa$ para todo $i \in I$. Como $F \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{\bigcup \mathcal{U}_i}$, então $F \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{\bigcup \mathcal{V}_i}$. Portanto, $pwL_c(X) \leq \kappa = c(X)$.

Para o item 4, seja X um espaço regular e $\kappa = pwL(X)$. Dado $F \subseteq X$ um subconjunto fechado de X e $\mathcal{U}$ uma família de abertos de X que cobre F. Se $\mathcal{U}$ for uma cobertura de X, ótimo. Senão, para cada $p \in X \setminus F$, tome uma vizinhança U_p de p tal que $\overline{U_p} \cap F = \emptyset$. Daí, $\mathcal{U} \cup \{U_p : p \in X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta de X, e como $pwL(X) = \kappa$, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}} \cup \bigcup_{p \in X \setminus F} \overline{U_p}$, donde $F \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$, logo $wL_c(X) \leq \kappa = pwL(X)$. □

Teorema 3.3.4 (Bella, Spadaro; 2020 [6])**.** *Seja X um espaço T_2 tal que $t(X).pwL_c(X) \leq \kappa$ e que contém um denso D tal que $\chi(p, X) \leq \kappa$ para todo $p \in D$. Então $wL(X^c_\kappa) \leq 2^\kappa$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma cobertura de X^c_κ, i.e., uma cobertura de X por conjuntos G^c_κ. Tome θ grande o suficiente tal que $X, \tau, \mathcal{F}, \kappa \in H(\theta)$, onde τ é a topologia original sobre X, e considere M um submodelo elementar de $H(\theta)$ com $X, \tau, \mathcal{F} \in M$, $\kappa+1 \subseteq M$, $[M]^{\leq\kappa} \subseteq M$

e $|M| \leq 2^\kappa$. Para cada $F \in \mathcal{F}$, seja $\mathcal{U}_F = \{U_{F,\alpha} : \alpha < \kappa\}$ tal que $F = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_{F,\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} \overline{U_{F,\alpha}}$.

Afirmação 1: $\mathcal{F} \cap M$ cobre $\overline{X \cap M}$.

Seja $x \in \overline{X \cap M}$. Como $\mathcal{F}$ cobre X, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in F$. Além disso, como $t(X) \leq \kappa$, existe $S \subseteq X \cap M$, com $|S| \leq \kappa$, tal que $x \in \overline{S}$. Dados $\alpha < \kappa$ e U vizinhança de x, $U \cap U_{F,\alpha}$ também é vizinhança de x, pois $x \in F \subseteq U_{F,\alpha}$, logo $U \cap U_{F,\alpha}$ intersecta S. Daí, $x \in \overline{U_{F,\alpha} \cap S}$ para todo $\alpha < \kappa$. Como M é κ-fechado, $S \subseteq M$ $|S| \leq \kappa$, então $U_{F,\alpha} \cap S \in M$ para todo $\alpha < \kappa$.

Tomando $B = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} \overline{U_{F,\alpha} \cap S}$, tem-se $x \in B \subseteq F$. Daí:

$$H(\theta) \models \exists G \in \mathcal{F}(B \subseteq G).$$

Como os únicos parâmetros livres na fórmula são $\mathcal{F}$ e B, ambos elementos de M, temos, por elementaridade, que:

$$M \models \exists G \in \mathcal{F}(B \subseteq G).$$

Daí, B está contido em algum elemento $G \in \mathcal{F} \cap M$, que por sua vez também cobre x, pois $x \in B \subseteq G$.

Afirmação 2: $\mathcal{F} \cap M$ tem união densa em X.

Suponha por absurdo que $X \setminus \bigcup(\mathcal{F} \cap M)$ tem interior não-vazio. Como X contém um denso D de pontos cujo caráter é menor ou igual a κ, tome $p \in D \setminus \bigcup(\mathcal{F} \cap M)$ e $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ base local para X em p. Note que, para todo $F \in \mathcal{F} \cap M$, existe $\{V_{F,\alpha} : \alpha < \kappa\} \in M$ tal que $F = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} V_{F,\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} \overline{V_{F,\alpha}}$, pois

$$H(\theta) \models F \text{ é um conjunto } G_\kappa^c,$$

logo, por elementaridade,

$$M \models F \text{ é um conjunto } G_\kappa^c.$$

Além disso, como $\kappa + 1 \subseteq M$, $\{V_{F,\alpha} : \alpha < \kappa\} \subseteq M$. Seja $\mathcal{C} = \{U_{F,\alpha} : \alpha < \kappa, F \in \mathcal{F} \cap M\}$. $\mathcal{C} \subseteq M$ e $\mathcal{C}$ cobre F para todo $F \in \mathcal{F} \cap M$, logo $\mathcal{C}$ cobre $\overline{X \cap M}$.

Para cada $x \in \overline{X \cap M}$, tomamos $F_x \in \mathcal{F} \cap M$ tal que $x \in F_x$. Como $p \notin F_x$, podemos tomar $\alpha_x < \kappa$ tal que $p \notin \overline{V_{F_x,\alpha_x}}$. Logo, existe $\beta_x < \kappa$ tal que $U_{\beta_x} \cap V_{F_x,\alpha_x} = \emptyset$. Portanto, $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{C} : \exists \beta < \kappa(U \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset)\}$ cobre $\overline{X \cap M}$, pois, para cada $x \in \overline{X \cap M}$, $V_{F_x,\alpha,x}$ é uma vizinhança de x que está em $\mathcal{U}$. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $\mathcal{U}_\alpha = \{V \in \mathcal{U} : V \cap U_\alpha = \emptyset\}$. Como $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma decomposição de $\mathcal{U}$ e $pwL_c(X) \leq \kappa$, existe $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que, para todo $\alpha < \kappa$, $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, $|\mathcal{V}_\alpha| \leq \kappa$ e $\overline{X \cap M} \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} : \alpha < \kappa\}$. Como $\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} : \alpha < \kappa\} \in M$,

$$M \models X \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} : \alpha < \kappa\},$$

donde

$$H(\theta) \models X \subseteq \bigcup\{\overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha} : \alpha < \kappa\}.$$

No entanto, $p \notin \overline{\bigcup \mathcal{V}_\alpha}$ para todo $\alpha < \kappa$, pois $\bigcup \mathcal{V}_\alpha$ é disjunto da vizinhança U_α de p, por definição. Como chegamos a uma contradição a partir da hipótese de $X \setminus \bigcup(\mathcal{F} \cap M)$ ter interior não-vazio, então $\mathcal{F} \cap M \subseteq \mathcal{F}$ tem união densa e $|\mathcal{F} \cap M| \leq |M| \leq 2^\kappa$. $\square$

Esse resultado tem como corolário o seguinte teorema, que pode ser utilizado junto com a proposição 3.3.3 para generalizar os teoremas 2.2.9 e 2.2.11, pois $pwL_c(X) \leq min\{L(X), c(X)\}$.

Teorema 3.3.5 (Bella, Spadaro; 2020 [6]). *Se X é um espaço Hausdorff, então $|X| \leq 2^{pwL_c(X) \cdot \chi(X)}$*

Demonstração. Em espaços T_2, $\psi_c(X) \cdot t(X) \leq \chi(X)$. Portanto, se $\kappa = pwL_c(X) \cdot \chi(X)$, então $t(X) \cdot pwL_c(X) \leq \kappa$ e o próprio X é um denso de caráter menor ou igual a κ. Mais ainda, X^c_κ é um espaço discreto porque X é T_2 e $\psi_c(X) \leq \kappa$, logo $|X| = wL(X^c_\kappa) \leq 2^\kappa$. $\square$

Apêndice A

Duas demonstrações do teorema de Scheepers e Tall com submodelos elementares

Nesse apêndice, vamos mostrar duas possíveis provas alternativas para o teorema 3.1.1, uma para o jogo $G_1^{\kappa}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ e outra para o jogo dual $P^{\kappa}(X, \tau)$. A prova original é essencialmente combinatória, mas é de conhecimento geral dos pesquisadores da área que existe uma prova por submodelos elementares. No entanto, não encontramos uma prova durante a revisão da literatura feita para a elaboração desta dissertação, então como uma contribuição à literatura, especialmente em português, decidiu-se registrar uma demonstração original elaborada pelo autor da dissertação. A prova de A.0.2, que utiliza o jogo dual, foi cedida em comunicação direta por Santi Spadaro.

Teorema A.0.1. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico tal que $\psi(X) \leq \kappa$ e DOIS possui estratégia vencedora em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Seja φ uma estratégia para $DOIS$. Como na prova de 3.1.1, dados um ordinal $\beta < \kappa^+$ e uma sequência $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \beta \rangle$, existe $x \in X$ tal que, para toda vizinhança U, de x existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \beta \rangle ^\frown \mathcal{U}) = U$.

Tome θ um cardinal regular grande o suficiente e M um submodelo elementar κ-fechado de $H(\theta)$ com $|M| = 2^\kappa$ e $\{\varphi, X, \tau, \mathcal{O}_X\} \subseteq M$.

Afirmamos que se φ é vencedora, então $X \cap M = X$. De fato, suponha que existe $p \in X \setminus M$. Como $H(\theta) \models \psi(X)\kappa$ e $X \in M$, então $M \models \psi(X) \leq \kappa$, logo para cada $x \in X \cap M$, existe $\mathcal{V}_x \in M$ tal que $M \models |\mathcal{V}_x| \leq \kappa \ \wedge \ \bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$. Por elementaridade, $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ e, por isso, $\mathcal{V}_x \subseteq M$, e novamente por elementaridade, $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

Daí, considere $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ como uma fórmula que diz que "x_1 é um ordinal, x_2 é uma sequência de domínio x_1 e contradomínio x_3 e existe $x \in x_4$ tal que, para todo

$U \in x_5$ com $x \in U$, existe $\mathcal{U} \in x_3$ tal que $\varphi(x_2^\frown \mathcal{U}) = U$". Pela observação anterior, para todo $\alpha < \kappa^+$ e toda α-sequência $s = \langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ com $\mathcal{U}_\beta \in M$ para todo $\beta < \alpha$:

$$H(\theta) \models \varphi[\alpha, s, \mathcal{O}_X, X, \tau,].$$

Como M é κ-fechado, $\kappa^+ \subseteq M$, logo $\alpha \in M$. Como $\mathcal{U}_\beta \in M$ para todo $\beta < \alpha$, então $s \in M$. Além disso, já temos $\mathcal{O}_X, X, \tau, \varphi \in M$. Logo, por elementaridade:

$$M = \models \varphi[\alpha, s, \mathcal{O}_X, X, \tau,].$$

Agora, procedemos indutivamente. Supondo que dado um certo $\alpha < \kappa^+$ temos definidos $s = \langle \mathcal{U}_\beta : \beta < \alpha \rangle$ de forma que $\mathcal{U}_\beta \in M$ e $p \notin \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$ para todo $\beta < \alpha$, então

$$M \models \varphi[\alpha, s, \mathcal{O}_X, X, \tau],$$

logo existe $x \in M$ tal que para $V \in \tau \cap M$ com $x \in V$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X \cap M$ tal que $\varphi(s^\frown \mathcal{U}) = V$. Como $p \notin M$, então $p \neq x$, logo existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $p \notin W$, donde existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_X \cap M$ tal que $\varphi(s^\frown \mathcal{W}) = W$. Portanto, tomamos $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{W}$, e temos definido $s = \langle \mathcal{U}_\beta : \beta \leq \alpha \rangle$ com $p \notin \varphi(\langle \mathcal{U}_\gamma : \gamma \leq \beta \rangle)$ para todo $\beta \leq \alpha < \kappa^+$. Dessa forma, $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ é uma sequência de jogadas de UM em uma partida de $G_1^\kappa(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ em que $DOIS$ joga de acordo com φ, mas nunca cobre o ponto p, donde φ não é vencedora.

Logo, se $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, então podemos construir o submodelo M tendo uma dessas estratégias como elemento e teremos $X \cap M = M$, donde $|X| \leq |M| = 2^\kappa$. □

Teorema A.0.2. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico tal que $\psi(X) \leq \kappa$ e $DOIS$ possui estratégia vencedora em $G_1^{\kappa^+}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Vamos considerar que UM possui estratégia vencedora φ no jogo dual $P^{\kappa^+}(X, \tau)$. Sejam θ um cardinal regular grande o suficiente e M um submodelo elementar κ-fechado de $H(\theta)$ com $X, \tau, \mathcal{O}_X, \varphi \in M$ e $|M| = 2^\kappa$.

Afirmamos que $X \cap M = X$. Caso contrário, podemos tomar $p \in X \setminus M$ e jogar uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ. Como φ e $\langle \rangle$ são elementos de M, então $x_0 = \varphi(\langle \rangle) \in M$. Como $\psi(X) \leq \kappa$, por elementaridade existe uma pseudo-base $\mathcal{V}_x \in M$ com $|\mathcal{V}_x| \leq \kappa$ para cada $x \in X \cap M$. Além disso, como $\kappa^+ \subseteq M$, $\mathcal{V}_x \subseteq M$ para todo $x \in X \cap M$. Como $x_0 \in M$, existe $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ tal que $p \notin V_0$, logo $DOIS$ pode jogar V_0 na rodada 0.

Em geral, supondo que até a rodada α $DOIS$ jogou $\langle V_\beta : \beta < \alpha \rangle$ tal que $V_\beta \in M$ e $p \notin V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, como M é κ-fechado, $\langle V_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M$, logo $x_\alpha = \varphi(\langle V_\beta : \beta < \alpha \rangle) \in M$. Daí, V_{x_α} está contido em e é um elemento de M, logo existe

$V_\alpha \in M$ tal que $p \notin V_\alpha$, e $DOIS$ pode jogar V_α na α-ésima rodada. Procedendo indutivamente, construímos uam sequência $\langle V_\alpha : \alpha < \kappa^+ \rangle$ de jogadas de $DOIS$ em uma partida de $P^\alpha(X, \tau)$ em que UM joga de acordo com φ, mas tal que $p \notin \bigcup_{\alpha<\kappa^+} V_\alpha$, contradizendo o fato de que φ é uma estratégia vencedora para UM.

Dessa forma, concluímos que $X \cap M = X$, donde $|X| \leq |M| = 2^\kappa$. $\square$

Apesar da primeira prova ser um pouco mais complicada do que a segunda, ambas demonstrações são mais simples e mais fáceis de serem acompanhadas do que a apresentada na seção **3.1**, o que serve como exemplo da força da técnica dos submodelos elementares e mostra um motivo de dar atenção separadamente a jogos que dão as mesmas informações, como o jogo de Rothberger e o jogo ponto-aberto.

Referências Bibliográficas

[1] Aurichi L. F., Bella A., **A definitive improvement of a game-theoretic bound and the long tightness game**, Acta Mathematica Hungarica 155, No. 2, 458-465 (2018; Zbl 1413.54036).

[2] Aurichi, L. F.; Bella, A.; Spadaro, S. **Cardinal estimates involving the weak Lindelöf game**, RACSAM 116, No. 1, Paper No. 5, 10p; (2022; Zbl 1479.54018).

[3] Aurichi, L. F.; Dias, R. R. **A minicourse on topological games**, Topology and its Applications 258, 305-335 (2019; Zbl 1411.91151).

[4] Bell M., Ginsburg J., Woods G., **Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak Lindelöf number**, Pacific J. Math. 79, 37-45 (1979; Zbl 0367.54003).

[5] Bella, A.; Spadaro, S. **Infinite games and cardinal properties of topological spaces**, Houston Journal of Mathematics 41, No. 3, 1063-1077 (2015; Zbl 1342.54003).

[6] Bella, A.; Spadaro, S. **A common extension of Arhangel'skii's theorem and the Hajnal-Juhász inequality**, Canadian Mathematical Bulletin 63, No. 1, 197-203 (2020; Zbl 1437.54004).

[7] Dow, A. **An introduction to applications of elementary submodels to topology**, Topology Proceedings 13, No. 1, 17-72 (1988; Zbl 0696.03024).

[8] Engelking R., **General Topology. Revised and completed edition.** Berlin: Heldermann Verlag (1989; Zbl 0684.54001).

[9] Fedeli, A.; Watson, F. **Elementary submodels and cardinal functions**, Topology Proceedings 20, 91-110 (1995; Zbl 0894.54008).

[10] Geschke, S. **Applications of Elementary Submodels in General Topology.** Synthese 133, No. 1-2, 31-41 (2002; Zbl 1027.54005).

[11] Gorelic I., **The Baire category and forcing large Lindelöf spaces with points $\mathbf{G}_\delta$**, Proceedings of the American Mathematical Society 118, No. 2, 603-607 (1993; Zbl 0783.03028).

[12] Gryzlov, A. A., **Two theorems on the cardinality of topological spaces**, Soviet Mathemattics. Doklady 21, 506-509 (1980; Zbl 0449.54005).

[13] Hodel, R. **Cardinal functions. I.**, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984: 1-61.

[14] Hodel, R. **Arhangel'skii's solution to Alexandroff's problem: A survey**, Topology and its Applications 15, No. 13, 2199-2217 (2006; Zbl 1099.54001).

[15] Kunen, K. **Set Theory - An Introduction to Independence Proofs**, North-Holland, Amsterdam, **xvi** + 313 pp. (1983).

[16] Kunen, K. **Set Theory**. London: College Publications (2011; Zbl 1262.03001).

[17] Scheepers, M.; Tall, F. D. **Lindelöf indestructibility, topological games and selection principles**, Fundamenta Mathematicae 210, No. 1, 1-46 (2010; Zbl 1229.54031).

[18] Shelah, S., **On some problems in general topology**, Contemporary Mathematics 192, 91-101 (1996; Zbl 0847.54004).

[19] Soukup, L. **Elementary submodels in infinite combinatorics**, Discrete Mathematics 311, No. 15, 1585-1598 (2011; Zbl 1408.05110).

[20] Spadaro, S. **Infinite games and chain conditions**, Fundamenta Mathematicae 234, No3, 229-239 (2016; Zbl 1360.54010).

[21] Tall, F. D., **On the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ**, Topology and its Applications 63, No. 1, 21-38 (1995; Zbl 0824.54015).