Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Colegiado do Curso de Matemática
Monografia de Graduação

Classificação de algumas classes de álgebras não associativas de dimensão baixa

Juliana Medeiros Barbosa

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2025

Classificação de algumas classes de álgebras não associativas de dimensão baixa

Juliana Medeiros Barbosa

Monografia de Graduação apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharela em Matemática.

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Manuela da Silva Souza.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2025

Barbosa, Juliana Medeiros.

Classificação de algumas classes de álgebras não associativas de dimensão baixa / Juliana Medeiros Barbosa. – Salvador, 2025.

vii + 89 pp.

Orientação: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Manuela da Silva Souza.

Monografia (graduação) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Colegiado do Curso de Matemática, 202.

1. Álgebras de Leibniz. 2. Álgebras de Lie. 3.Álgebras de Jordan. 4. Álgebras genéticas. 5. Classificação. I. Souza, Manuela da Silva. II. Título.

JULIANA MEDEIROS BARBOSA

Classificação de algumas classes de álgebras não associativas de dimensão baixa

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharela em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Manuela da Silva Souza

Drª. Manuela da Silva Souza - Orientadora
IME/ UFBA

Igor Chagas Santos

Dr. Igor Chagas Santos
IME/UFBA

Dr. Marcelo Dias Passos
IME/UFBA

Marina Bonfim Santos

Drª. Marina Bonfim Santos
IBIO/UFBA

Salvador - BA
2025

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por apoiarem meus sonhos, terem me dado todas as oportunidades possíveis, por terem incentivado meus estudos e por me mostrar a importância disso na vida. Agradeço à minha mãe e à minha avó, Ceú, por terem me incentivado a estudar na UFBA e a cursar matemática e ao meu pai, por desde pequena me mostrar que a matemática ia além do que é visto na escola. À minha irmã, que sempre me ajuda e me atura, e por, nesses últimos anos, ter me feito tanta companhia. E, em especial, às minhas cachorrinhas, que trazem alegria até nos momentos mais difíceis: Caju, Amora e Nina.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação, Alan, Carla, Davi, Daniel, Laís, Maurício, Pedro e Tácio, vocês tornaram esse período muito mais leve e espero levar a amizade de vocês para o resto da vida. Obrigada por toda a ajuda que me deram. Em especial, a Pedro, por me apoiar sempre, nunca pensei que encontraria alguém com quem eu me sentisse tão confortável, obrigada por sempre estar comigo.

Agradeço aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da UFBA pelos quais eu passei, que me fizeram ter certeza de que a Matemática é algo que eu quero seguir para a minha vida. Principalmente aos professores Carmela, Maikel, Manuela e Marcelo, não poderia ter tido professores melhores do que vocês.

Agradeço à banca pelas ótimas sugestões que melhoraram esse trabalho, em especial à Marina pelo auxílio na parte de genética e disponibilidade. Agradeço sobretudo à minha orientadora, Manuela, por ter aceitado me orientar na IC, por sempre me incentivar a fazer coisas novas, por me apresentar a essa área que me instiga tanto, e, sobretudo, por acreditar em mim, mesmo quando eu não acreditava. Não tenho palavras para dizer o quanto sou grata, você me ajudou mais do que pode imaginar.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos a classificação de álgebras não associativas, com foco em três classes principais: álgebras de Leibniz, álgebras de Jordan e álgebras genéticas. O objetivo é classificar essas álgebras para dimensão baixa, considerando que a complexidade aumenta com o crescimento da dimensão. Sob o corpo dos números complexos, abordaremos a classificação das álgebras de Leibniz, em particular, de Lie, de dimensão menor ou igual a três, usando como base [4], e das álgebras genéticas de dimensão até dois, baseando-se em [16]. Finalmente, sob um corpo qualquer de característica diferente de dois, abordaremos a classificação das álgebras de Jordan de dimensão menor ou igual a dois, segundo [5].

Palavras-chave: Álgebras de Leibniz; Álgebras de Lie; Álgebras de Jordan; Álgebras genéticas; Álgebras não associativas; Classificação.

Abstract

In this work, we present the classification of non-associative algebras, focusing on three main classes: Leibniz algebras, Jordan algebras, and genetic algebras. The aim is to classify these algebras in low dimensions, considering that complexity increases as the dimension grows. Over the field of complex numbers, we will address the classification of Leibniz algebras, particularly Lie algebras, of dimension at most three, based on [4], and genetic algebras of dimension up to two, following [16]. Finally, over an arbitrary field of characteristic different from two, we discuss the classification of Jordan algebras of dimension at most two, using [5] as a reference.

Keywords: Leibniz algebras; Lie algebras; Jordan algebras; Genetic algebras; Non-associative algebras; Classification.

Conteúdo

Introdução

A matemática é frequentemente desenvolvida e estudada por seu próprio progresso interno, sem uma preocupação imediata com aplicações externas. No entanto, grande parte da teoria matemática está intrinsicamente ligada a outras áreas do conhecimento, como física e biologia, e muitos de seus conceitos surgiram para atender às necessidades dessas áreas. Quando se discute a aplicabilidade da matemática, costuma-se pensar nas áreas como geometria e equações diferenciais. No entanto, a álgebra também desempenha um papel nessas conexões, e neste trabalho tentaremos, em alguma medida, mostrar uma breve conexão com outras áreas do saber.

Durante as três primeiras décadas do século XX, a teoria dos anéis evoluiu predominantemente como a teoria dos anéis associativos. Todavia, em meados do século XIX, já se tinham registros de sistemas matemáticos que atendiam a todos os axiomas de um anel, exceto o da associatividade. Porém, essas estruturas não eram estudadas por não satisfazerem a essa propriedade que, na época, era necessária. Desde então, o estudo de estruturas não associativas tem sido um ambiente de grande interesse para a área. Nesse viés, este trabalho tem como objetivo analisar três distintas classes de álgebras não associativas: as álgebras de Leibniz, em particular as de Lie, as álgebras de Jordan e as álgebras genéticas, e apresentar diferentes técnicas de classificação de álgebras.

As álgebras de Lie originaram-se a partir do desenvolvimento da teoria de Lie aplicada a grupos contínuos, um conceito que começou a tomar forma por volta de 1870. Essa abordagem inovadora visava tratar equações diferenciais de maneira análoga à abordagem de Galois para equações algébricas. Por meio do trabalho colaborativo de Sophus Lie e Felix Klein, foi estabelecido um método que examina equações diferenciais através das simetrias associadas a elas. A motivação central para o aprofundamento no estudo dessas álgebras encontra-se na existência de uma teoria de (co)homologia, que, quando aplicada a álgebras de Lie, revela novos invariantes. Além disso, sua relação intrínseca com várias áreas do saber, incluindo Geometria Diferencial, Topologia Algébrica Clássica, Geometria não comutativa e outras, justificou tal investigação.

Dada a sua importância, as álgebras de Lie admitiram diversas generalizações ao longo dos anos, como por exemplo as álgebras de Leibniz. Loday introduziu essa generalização em seu trabalho, [15], "Une Version Non Commutative des Algèbres de Lie: Les Algèbres de Leibniz", em 1993, quando estudava fenômenos de periodicidade em $\mathbb{K}$-Teoria Algébrica, para $\mathbb{K}$ corpo. Elas são uma versão não anticomutativa das álgebras de Lie.

Outra classe de álgebras que estamos interessados em abordar neste trabalho é a das álgebras com significado para a genética. O entendimento contemporâneo da herança genética começou a se moldar a partir das teorias evolutivas propostas por Charles Darwin. Contudo, foi Gregor Mendel que, em 1856, deu os primeiros passos para revelar os padrões matemáticos subjacentes na genética. Mendel realizou experimentos que estabeleceram as leis da hereditariedade e, embora não aplicasse a álgebra formalmente, suas conclusões já sugeriam uma estrutura matemática subjacente. Décadas depois, na metade do século XX, o matemático britânico Ivor Etherington formalizou essa conexão entre genética e matemática ao introduzir o conceito de álgebras genéticas em seu artigo [6], intitulado "Genetic Algebras". O objetivo deste estudo foi desenvolver uma definição de álgebra genética que fosse suficientemente abrangente para incluir as várias estruturas algébricas que apareceram na genética, preservando a especificidade necessária para uma análise matemática detalhada e precisa das complexas relações nos processos de hereditariedade.

Por fim, estamos interessados na categoria das álgebras de Jordan, originalmente proposta por Pascual Jordan. Essa classe de álgebras foi concebida como um recurso analítico para a exploração dos fundamentos da mecânica quântica, que são interpretados com matrizes auto-adjuntas hermitianas. Além disso, existe uma ligação substantiva entre as álgebras de Jordan e a categoria das álgebras não associativas, a qual merece destaque na literatura. Historicamente, a primeira conexão das álgebras de Jordan com outra teoria matemática foi com a teoria das álgebras de Lie. A interação notavelmente produtiva entre as teorias de Jordan e de Lie continua a despertar interesse nas álgebras de Jordan.

O problema de classificação está presente em diversas áreas do saber, queremos agrupar determinado objeto analisando certa propriedade que temos interesse de estudar. No âmbito da álgebra abstrata, estamos interessados na classificação de estruturas a menos de isomorfismos, visto que esse preserva as características da estrutura, ou seja, preserva a(s) operação(ões). Um exemplo clássico de classificação é o Teorema dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados, um teorema da teoria de Grupos. Em especial, neste trabalho, descreveremos a classificação das famílias de álgebras mencionadas anteriormente, a menos de isomorfismos, para dimensão baixa, visto que, à medida que a dimensão da álgebra aumenta, o problema se torna mais desafiador. Veremos diferentes técnicas para classificar álgebras, onde queremos encontrar uma boa base para trabalhar. Podemos realizar mudanças de base, induzir isomorfismos ou, ainda, definir um certo funcional que nos dará ferramentas para classificação. Além disso, veremos que o corpo sobre o qual a álgebra é considerada influencia diretamente na complexidade do problema. Em certas classes, será necessário concretizar, e, portanto, fixar, um corpo para viabilizar a classificação de maneira mais precisa.

No primeiro capítulo serão apresentados os conceitos preliminares necessários para a compreensão do trabalho. Iremos apresentar o conceito de $\mathbb{K}$-álgebra, bem como as definições e resultados importantes para a classificação das classes de álgebras que serão estudadas. Na segunda seção desse capítulo, apresentaremos uma breve discussão sobre as álgebras com significado genético, visto que essa classe não é usualmente estudada. Além disso, mostraremos conexões com as álgebras de Jordan, bem como uma breve relação com o ponto de vista da biologia. No segundo capítulo, apresentaremos a classificação das álgebras de Lie para dimensões até três, sob o corpo dos números complexos, conforme feito em [4] e [14]. Já no terceiro capítulo, iremos apresentar a classificação proposta em [2], [21] e [4] para as álgebras de Leibniz, não Lie, de dimensão menor ou igual a três sobre o corpo dos números complexos. Por fim, no quarto capítulo, iremos apresentar uma classificação detalhada das álgebras genéticas, bem como das álgebras de Jordan, cada uma com dimensão menor ou igual a dois. Essas duas categorias de álgebras compartilham uma característica fundamental: ambas são álgebras que, apesar de serem não associativas, satisfazem a comutatividade. Isso nos motiva a classificá-las no mesmo capítulo e repercute numa interseção dessas classificações. A classificação das álgebras genéticas será feita sob o corpo dos complexos, como feito em [16], e as álgebras de Jordan sob um corpo qualquer de característica diferente de dois, como em [5].

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo serão introduzidas as principais definições e alguns resultados básicos sobre álgebras que serão utilizados ao longo do trabalho. É interessante que o leitor tenha um conhecimento básico sobre espaços vetoriais; para tal, o interessado pode consultar a referência [10]. Na primeira seção definimos a noção de $\mathbb{K}-$álgebra bem como o básico da teoria clássica deste assunto; para um maior aprofundamento referente a essa seção pode-se consultar as referências [22], [13] e [4]. A segunda seção, que trata das álgebras com significado genético, visa introduzir a noção de álgebras que modelam certas estruturas da genética, dando uma perspectiva tanto matemática quanto biológica de modo introdutório. Aos leitores que tiverem interesse de se aprofundar neste tópico, recomenda-se a leitura das referências [19], [20],[16] e [11]. Por fim, ao longo do texto, $\mathbb{K}$ denotará um corpo qualquer.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1. *O $\mathbb{K}$-espaço vetorial A é dito uma $\mathbb{K}$-**álgebra** se munido da operação bilinear $* : A \times A \to A$, chamada de produto, satisfaz para todo $a, b, c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:*

i) $(a + b) * c = a * c + b * c$,

ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$,

iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Para simplificar a notação, ao longo do trabalho escreveremos ab no lugar de $a * b$ e também usaremos o termo álgebra ao invés de $\mathbb{K}$-álgebra. Dada uma álgebra A, definiremos $a_1a_2 \cdots a_na_{n+1}$ como sendo $(a_1a_2 \cdots a_n)a_{n+1}$ para todo $a_i \in A$, com $i \in \mathbb{N}$. Quando quisermos evidenciar o produto da álgebra, denotaremos o par $(A, *)$. Dizemos que um subconjunto β de A é uma base para a álgebra se for uma base de A como espaço vetorial. Assim, a dimensão de uma álgebra é a sua dimensão como espaço vetorial.

Durante o trabalho, usamos em diversos momentos a característica do corpo, por isso definiremos a seguir a característica de um anel, sendo o corpo um caso particular de anel; a definição se aplica para corpos. O leitor interessado em aprofundar os estudos sobre a teoria de Grupos e Anéis pode verificar a referência [12].

Definição 1.1.2. *Seja A um anel. Dizemos que o menor inteiro positivo n tal que $na = 0$, para todo $a \in A$ é a característica do anel A, denotado por $char(A) = n$. Se não existe tal n, convencionamos que $char(A) = 0$.*

Observação 1.1.3. *Para teoria de corpos, podemos definir $char(\mathbb{K}) = n$, quando $n1 = 0$.*

De fato, se $n1 = 0$, tal que n é o menor inteiro onde isso ocorre,tome $x \in \mathbb{K}$ qualquer temos $nx = n(1x) = (n1)x = 0x = 0$. A recíproca segue imeditamante da definição, já que vale para todo $x \in \mathbb{K}$, vale, em particular, para 1.

Exemplo 1.1.4. *O corpo dos números complexos tem $char(\mathbb{C}) = 0$. O anel $\mathbb{Z}_n$, tem característica n, por definição, já que n é o menor inteiro positivo tal que $n\bar{z} = \bar{0}$, para todo $z \in \mathbb{Z}_n$.*

Definição 1.1.5. *Dizemos que uma álgebra A é:*

- ***associativa**, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$, isto é, o produto de A é associativo.*
- ***comutativa**, se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$.*
- ***com unidade** (ou unitária), se existe $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$ para todo $a \in A$.*

Seja A uma álgebra, e $x, y, z \in A$, definimos o **associador** de x, y, z, e denotamos por (x, y, z), como

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

Temos que uma álgebra é associativa se, e somente se, $(x, y, z) = 0$, para todo $x, y, z \in A$. Podemos interpretar o associador, como sendo uma maneira de medir a não associatividade da álgebra.

Proposição 1.1.6. *Seja A uma álgebra e S um subconjunto gerador, como espaço vetorial, de A. Então:*

i) A é associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.

ii) A é comutativa se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.

iii) A possui unidade se, e somente se, existe $1 \in A$ tal que $1v = v1 = v$ para todo $v \in S$.

Demonstração. Dados $a, b, c \in A$, temos que $a = \sum_{u \in S} \alpha_u u$, $b = \sum_{v \in S} \lambda_v v$ e $c = \sum_{w \in S} \gamma_w w$, com $\alpha_u, \lambda_v, \gamma_w \in \mathbb{K}$, em que apenas uma quantidade finita dos coeficientes α_u, λ_v e γ_w são não nulos, o que torna as somas finitas.

i) Supondo $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$, temos

$$\begin{aligned}
(ab)c &= \left(\sum_{u,v \in S} \alpha_u \lambda_v uv\right)\left(\sum_{w \in S} \gamma_w w\right) \\
&= \sum_{w \in S}\left(\sum_{u,v \in S} \alpha_u \lambda_v \gamma_w\right)(uv)w \\
&= \sum_{u,v,w \in S} \alpha_u \lambda_v \gamma_w u(vw) \\
&= \left(\sum_{u \in S} \alpha_u u\right)\left(\sum_{v,w \in S} \lambda_v \gamma_w vw\right) \\
&= a(bc).
\end{aligned}$$

Logo, A é associativa.

ii) Supondo $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$, temos

$$ab = \sum_{u,v \in S} (\alpha_u \lambda_v) uv = \sum_{u,v \in S} (\lambda_v \alpha_u) vu = ba.$$

Logo, A é comutativa.

iii) Supondo que existe $1 \in A$ tal que $1v = v1 = v$ para todo $v \in S$, temos que

$$1a = \sum_{u \in S} \alpha_u (1u) = \sum_{u \in S} \alpha_u u = a \quad \text{e} \quad a1 = \sum_{u \in S} \alpha_u (u1) = \sum_{u \in S} \alpha_u u = a.$$

Logo, 1 é unidade de A.

A recíproca dos itens, segue por definição, já que $S \subseteq A$ e se A possui uma certa propriedade, em particular, vale para os elementos de S.

□

Exemplo 1.1.7. *Considere $A = span\{e_1, e_2\}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que $char(\mathbb{K}) \neq 2$, com produto $e_1e_2 = e_1$, $e_2e_1 = -e_1$, $e_2e_2 = 0$ e $e_1e_1 = 0$. Podemos ver, usando a Proposição 1.1.6, que a álgebra não é comutativa, nem associativa, nem possui unidade.*

De fato, considere $S = \{e_1, e_2\}$, temos:

- *Não comutativa: $e_1e_2 = -e_2e_1$, como $char(\mathbb{K}) \neq 2$, temos que $e_1e_2 \neq e_2e_1$.*

- *Não associativa:* $(e_1e_2)e_2 \neq e_1(e_2e_2)$, *pois* $(e_1e_2)e_2 = e_1$ *enquanto* $e_1(e_2e_2) = 0$, *no entanto* $e_1 \neq 0$, *por definição.*

- *Não unitária: Se existisse* $1 \in A$, *digamos* $1 = \alpha e_1 + \beta e_2$ *para* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *teríamos* $1 \cdot e_1 = e_1$, *ou seja,* $\beta e_2 e_1 = e_1 \iff \beta = -1$. *Também,* $e_1 \cdot 1 = e_1 \iff \beta e_1 = e_1 \iff \beta = 1$. *Teríamos* $-1 = 1$, *o que é absurdo, já que* $char(\mathbb{K}) \neq 2$.

Exemplo 1.1.8. *Toda álgebra bidimensional com unidade é associativa e comutativa.*

Com efeito, como é bidimensional e com unidade, podemos considerar $\{1, a\}$ *uma base para a álgebra. Pela Proposição 1.1.6 temos que basta provar que tal álgebra é comutativa e associativa para os elementos da base, já que esses são também os geradores da álgebra. Assim, a comutatividade segue diretamente do fato de que a unidade comuta com todos os elementos, por definição, e a associatividade segue da definição da unidade, da comutatividade dos elementos e* $a^2 = (aa)$. *Por exemplo, podemos provar que* $(aa)a = (a^2)a = a(a^2) = a(aa)$. *Para os demais casos podemos fazer contas análogas.*

Vejamos alguns exemplos de álgebras importantes.

Definição 1.1.9. *Dizemos que* $\mathcal{L}$ *é uma* ***álgebra de Lie*** *se, para todos* $x, y, z \in \mathcal{L}$ *valem:*

i) $x^2 = 0$ *(anticomutatividade);*

ii) $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ *(identidade de Jacobi).*

Em geral, a álgebra de Lie não é associativa, pois $(xx)y = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{L}$, porém o produto $x(xy)$ não é necessariamente nulo.

Note que a propriedade $i)$ implica em $xy = -yx$, para quaisquer $x, y \in \mathcal{L}$. De fato,

$$0 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx.$$

Ainda, se $char(\mathbb{K}) \neq 2$, dado $xy = -yx$, em particular temos que

$$xx = -xx \Leftrightarrow 2xx = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0.$$

Logo, se $char(\mathbb{K}) \neq 2$ as propriedades $x^2 = 0$ e $xy = -yx$ são equivalentes.

Exemplo 1.1.10. *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto vetorial usual* $\times$ *é uma álgebra de Lie.*

De fato, considere a base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} := \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Sabemos que o produto na base é dado por* $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ *e* $e_3 \times e_1 = e_2$. *Sabemos, pelo produto vetorial usual, que* $v^2 = 0$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^3$. *Resta verificar que satisfaz a* *propriedade de Jacobi. Como a identidade de Jacobi é multilinear, ou seja, linear em todas as variáveis, usando os mesmos argumentos da Proposição 1.1.6, é suficiente verificar que a identidade é satisfeita para a base. Temos,*

$$(e_1 \times e_2) \times e_3 + (e_2 \times e_3) \times e_1 + (e_3 \times e_1) \times e_2 = e_3 \times e_3 + e_1 \times e_1 + e_2 \times e_2 = 0.$$

De forma análoga, é possível mostrar os outros casos.

Dada uma álgebra associativa A, podemos definir uma nova operação sobre essa álgebra que induzirá de forma natural uma álgebra de Lie, como veremos na definição a seguir.

Definição 1.1.11. *Seja A uma álgebra associativa com o produto dado por ab para todo $a, b \in A$. O* ***comutador*** *é definido por:*

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto [a,b] = ab - ba. \end{aligned}$$

Definimos indutivamente o comutador de comprimento n, como segue:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

para todo $a_i \in A$.

Da definição do comutador, é possível verificar que o mesmo satisfaz a propriedade de Jacobi e que é anticomutativo. Assim, a álgebra $(A, [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie, denotada por $A^{(-)}$.

Definição 1.1.12. *Dizemos que uma álgebra L, sobre um corpo $\mathbb{K}$, é uma* ***álgebra de Leibniz*** *se satisfaz à identidade de Leibniz, dada por*

$$(xy)z = (xz)y + x(yz), \ \forall\, x, y, z \in L.$$

Tal definição é a chamada álgebra de Leibniz à direita, podemos definir de forma análoga a álgebra de Leibniz à esquerda.

Note que a álgebra de Leibniz é uma generalização da álgebra de Lie. De fato, se A é de Lie, então, pela identidade de Jacobi, para $x, y, z \in A$, temos que

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0,$$

usando a anticomutatividade temos

$$(xy)z - x(yz) - (xz)y = 0.$$

Definição 1.1.13. *Seja A uma álgebra qualquer. Uma transformação linear $D : A \to A$ tal que para todo $a, b \in A$ satisfaz*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

é dita uma ***derivação*** *de A.*

As álgebras de Leibniz foram introduzidas por Loday [15] o qual as nomeou devido à "regra de Leibniz" da derivação. Se definirmos o operador multiplicação à direita, fixado $z \in L$ então teremos $R_z : L \to L$ tal que $R_z(x) := xz$ para todo $x \in L$. Daí, podemos ver que $R_z(xy)$ é uma derivação segundo a Definição 1.1.13. De fato,

$$R_z(xy) = (xy)z = (xz)y + x(yz) = R_z(x)y + xR_z(y).$$

Definição 1.1.14. *Dizemos que $\mathcal{J}$ é uma* ***álgebra de Jordan*** *se é uma álgebra comutativa e para quaisquer $x, y \in \mathcal{J}$, satisfaz*

$$(xy)x^2 = x(yx^2).$$

Observação 1.1.15. *Podemos definir a álgebra de Jordan em termos do associador e do comutador, como uma álgebra que satisfaz para todo x e y, as identidades $[x, y] = 0$ e $(x, y, x^2) = 0$.*

Exemplo 1.1.16. *Toda álgebra comutativa e associativa é de Jordan.*

De fato, se é associativa, vale $(x, y, z) = 0$, para todo $x, y, z \in A$, basta tomar $z = x^2$ e segue que a álgebra é de Jordan.

Dada A uma álgebra associativa sobre um corpo de característica diferente de 2, podemos definir uma nova operação sobre essa álgebra que induzirá uma álgebra de Jordan, como veremos a seguir.

Definição 1.1.17. *Seja A uma álgebra associativa com o produto dado por ab para todo $a, b \in A$. O* ***produto de Jordan*** *é definido por:*

$$\begin{aligned} \circ : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto a \circ b = \frac{ab + ba}{2}. \end{aligned}$$

Podemos provar que tal álgebra munida com o produto de Jordan é uma álgebra de Jordan. De fato, temos que a comutatividade do produto segue diretamente da definição do produto $\circ$. Já para a identidade de Jordan, consideremos $a, b \in A$ quaisquer. Como A é associativa com o produto ab, temos que

$$\begin{aligned}
(a \circ b) \circ a^2 &= \frac{(a \circ b)a^2 + a^2(a \circ b)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(ab+ba)a^2}{2} + \frac{a^2(ab+ba)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(a(ba^2) + baa^2 + a^2ab + a^2ba) \\
&= \frac{1}{4}((a(ba^2) + a^2ab) + (baa^2 + a^2ba)) \\
&= \frac{1}{4}(a(a^2b + ba^2) + (ba^2 + a^2b)a) \\
&= a \circ (b \circ a^2).
\end{aligned}$$

Definição 1.1.18. *Dizemos que a álgebra A é **nilpotente** de índice $n \geq 1$, se $A^{n-1} \neq 0$ e $A^n = 0$, ou seja, se n é o menor inteiro positivo que satisfaz $a_1a_2 \ldots a_n = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, em que $A^n = A^{n-1}A$.*

1.1.1 Subálgebras, ideais e homomorfismos

Definição 1.1.19. *Seja A uma álgebra. Dizemos que:*

1. *Um subespaço vetorial B de A é dito uma **subálgebra** de A, se é fechado com respeito ao produto, isto é, $xy \in B$ para todos $x, y \in B$.*

2. *Um subespaço I de A é um **ideal à esquerda** (respectivamente ideal à direita) de A se $AI \subseteq I$, isto é, $ai \in I$ (respectivamente $Ia \subseteq I$, isto é, $ia \in I$) para quaisquer $i \in I$ e $a \in A$. Se I é um ideal à esquerda e à direita simultâneamente, dizemos que I é um **ideal bilateral** (chamaremos apenas de ideal)de A.*

Definição 1.1.20. *Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo de característica diferente de 2. Denotamos por $A^{(+)}$ o espaço vetorial A com o produto $a \circ b$. Uma **álgebra de Jordan especial** é uma subálgebra J de uma álgebra $A^{(+)}$. As álgebras de Jordan que não são especiais são chamadas de **excepcionais**.*

Definição 1.1.21. *Definimos a **álgebra derivada**, denotada por A', como sendo a álgebra gerada por todas as multiplicações de dois elementos de A, isto é,*

$$A' = \langle \{xy \mid x, y \in A\} \rangle.$$

A álgebra derivada é um ideal de A. De fato, seja $x \in A'$, daí existem $x_1, x_2 \in A$ tais que $x = x_1x_2$ e seja $y \in A$. Em particular, $x \in A$ e temos $xy \in A'$ e $yx \in A'$, para quaisquer $x \in A'$ e $y \in A$.

Exemplo 1.1.22. *Seja A uma álgebra associativa. O subespaço vetorial*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \ \forall \ x \in A\}$$

*de A é uma subálgebra de A denominada **centro** de A.*

Observação 1.1.23. *Podemos sempre definir o centro de uma álgebra, porém se esta não for associativa, então o centro, em geral, não será uma subálgebra de A.*

Definição 1.1.24. *Dizemos que uma álgebra A é **abeliana** se $A = Z(A)$, isto é, quando a álgebra é comutativa.*

Observação 1.1.25. *Note que uma álgebra de Lie sob um corpo de característica diferente de 2, $\mathcal{L}$ é abeliana se, e somente se, $\mathcal{L}' = 0$.*

Provemos que, $y \in Z(\mathcal{L})$ se, e somente se, $xy = 0 \, \forall \, x \in \mathcal{L}$. Com efeito, se $xy = 0$ então, da anticomutatividade, temos $-yx = 0 \Leftrightarrow yx = 0 = xy$ e logo $y \in Z(\mathcal{L})$. Agora, se $y \in Z(\mathcal{L})$, então $xy = yx$ para todo $x \in \mathcal{L}$, mas como $\mathcal{L}$ é de Lie, temos da antissimetria que $yx = -xy$, e se $char(\mathbb{K}) \neq 2$, então $xy = 0$. Em particular, quando $\mathcal{L}' = 0$ todos os produtos são nulos e segue que $\mathcal{L}$ é abeliana.

Exemplo 1.1.26. *Seja A uma álgebra e I um ideal de A. Definimos a **álgebra quociente** de A por I pelo espaço vetorial quociente*

$$\frac{A}{I} = \{a + I \mid a \in A\}$$

munido do produto dado por $(a + I)(b + I) = (ab) + I$, para quaisquer $a, b \in A$. Podemos denotar um elemento da álgebra quociente por $\bar{a} := a + I$.

Definição 1.1.27. *Seja A uma álgebra, definimos o **anulador à direita de A** por*

$$Ann_D(A) = \{a \in A \mid ba = 0, \ \forall \ b \in A\}.$$

*Analogamente, definimos o **anulador à esquerda** por*

$$Ann_E(A) = \{a \in A \mid ab = 0, \ \forall \ b \in A\}.$$

O anulador à direita (respectivamente à esquerda) é um ideal à esquerda (respectivamente à direita) de A. De fato, $Ann_D(A)$ é subespaço de A e mais, dado $a \in Ann_D(A)$

temos $ba = 0$,$\forall$ $b \in A$ e $0 \in Ann_D(A)$, então $bAnn_D(A) \subset Ann_D(A)$. Analogamente para o anulador à esquerda.

Definição 1.1.28. *Sejam A e B álgebras. Dizemos que a transformação linear $\phi : A \to B$ é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se $\phi(a_1a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Se A e B possuem unidade, exigiremos que $\phi(1_A) = 1_B$. Dizemos que ϕ é um* ***epimorfismo*** *se ϕ é um homomorfismo sobrejetor e que é um* ***monomorfismo*** *se ϕ é um homomorfismo injetor. Quando ϕ é um homomorfismo bijetor, dizemos que ϕ é um* ***isomorfismo****, neste caso é dito que A e B são isomorfas e denotamos por $A \cong B$.*

Seja $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ uma base para álgebra A, enquanto álgebra vetorial. Definimos a multiplicação para elementos da base como sendo

$$e_ie_j = \sum_{k\in\Lambda} \alpha_{ijk}e_k$$

com $\alpha_{ijk} \in \mathbb{K}$, para i e j fixados, em que somente um número finito de α_{ijk} é não nulo. Usando a propriedade distributiva, podemos estender essa multiplicação para elementos da álgebra como segue

$$\sum_{i\in\Lambda} \beta_ie_i \sum_{j\in\Lambda} \gamma_je_j = \sum_{i,j\in\Lambda} \beta_i\gamma_je_ie_j.$$

Com isso, vemos que os produtos e_ie_j $\forall\, i, j \in \Lambda$ determinam completamente a álgebra A. As constantes α_{ijk} são chamadas de **constantes de estrutura** da álgebra A na base $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Essas constantes nos fornecem informações completas sobre as álgebras. Com isso, o resultado a seguir será utilizado frequentemente durante as classificações das álgebras a menos de isomorfismos.

Exemplo 1.1.29. *Considerando a álgebra $A = span\{e_1, e_2, e_3\}$, se definirmos o produto $e_3e_2 = e_2$,$e_2e_3 = -e_2$, $e_1e_3 = 2e_2$ $e_3e_1 = e_1 + e_2$ e demais produtos nulos. Podemos estender o produto, linearmente, para genéricos elementos, usando a noção apresentada acima sobre constantes de estrutura.*

Sejam $x = \alpha_1e_1 + \beta_1e_2 + \gamma_1e_3$ e $y = \alpha_2e_1 + \beta_2e_2 + \gamma_2e_3$ temos, por extensão linear, o produto

$$\begin{aligned} xy &= 2\alpha_1\gamma_2e_2 - \beta_1\gamma_2e_2 + \gamma_1\beta_2e_2 + \gamma_1\alpha_2(e_1 + e_2) \\ &= \gamma_1\alpha_2e_1 + (2\alpha_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2 + \gamma_1\alpha_2)e_2 \end{aligned}$$

Lema 1.1.30. *Duas álgebras de dimensão finita são isomorfas se, e somente se, existe uma base para a qual possuam as mesmas constantes de estrutura.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 duas álgebras de dimensão finita, digamos $A_1 = span\{e_1, \ldots, e_r\}$ e $A_2 = span\{m_1, \ldots, m_s\}$. Se elas possuem as mesmas constantes de estrutura, digamos c_{ijk}, como são as mesmas para ambas as álgebras, A_1 e A_2 devem ter a mesma dimensão, logo $r = s$. Temos, em particular, $e_ie_j = \sum c_{ijk}e_k$ e $m_im_j = \sum c_{ijk}m_k$. Considere a transformação linear bijetora $\psi : A_1 \to A_2$ tal que $\psi(e_i) = m_i$. Sejam $x = \sum a_ie_i$ e $y = \sum b_je_j$, temos:

$$
\begin{aligned}
\psi(xy) &= \psi\left(\sum_i a_ie_i \sum_j b_je_j\right)\\
&= \psi\left(\sum_{i,j} a_ib_je_ie_j\right)\\
&= \psi\left(\sum_{i,j} a_ib_j \sum_k c_{ijk}e_k\right)\\
&= \sum_{i,j,k} a_ib_jc_{ijk}\psi(e_k)\\
&= \sum_{i,j,k} a_ib_jc_{ijk}m_k\\
&= \sum_{i,j} a_ib_j \sum_k c_{ijk}m_k\\
&= \sum_{i,j} a_im_ib_jm_j\\
&= \psi(x)\psi(y).
\end{aligned}
$$

Donde A_1 e A_2 são isomorfas.

Suponha, agora, $\phi : A_1 \to A_2$ isomorfismo de álgebras, novamente $r = s$. A menos de mudança de base, podemos supor que $\phi(e_i) = m_i$ e dado o homomorfismo, temos $\phi(e_ie_j) = \phi(e_i)\phi(e_j) = m_im_j$. Agora, seja $e_ie_j = \sum c_{ijk}e_k$ e $m_im_j = \sum b_{ijk}m_k$. Por outro lado, podemos calcular, via isomorfismo, a seguinte

$$
\begin{aligned}
m_im_j &= \phi(e_ie_j)\\
&= \phi(\sum_k c_{ijk}e_k)\\
&= \sum_k c_{ijk}\phi(e_k)\\
&= \sum_k c_{ijk}m_k.
\end{aligned}
$$

Daí, $\sum c_{ijk}m_k = m_im_j = \sum b_{ijk}m_k$, e segue que $\sum(c_{ijk} - b_{ijk})m_k = 0$. Mas $\{m_1, \ldots, m_s\}$ é uma base, e logo $c_{ijk} - b_{ijk} = 0$. Portanto, $c_{ijk} = b_{ijk}$ e temos o resultado.

□

Exemplo 1.1.31. *Considere a álgebra* $A = span\{a_1, a_2, a_3\}$ *com produto na base dado por* $a_1a_3 = a_1 + a_2$*,* $a_2a_3 = a_2$ *e os demais produtos na base nulos. E considere a álgebra* $B = span\{b_1, b_2, b_3\}$ *com produto dado por* $b_1b_3 = b_1 + 3b_2$*,* $b_2b_3 = b_3$*, e os demais produtos na base nulos, num corpo de característica diferente de 3. As álgebras* A *e* B *são isomorfas.*

De fato, observe que do modo como está escrito elas não possuem as mesmas constantes de estrutura, porém podemos fazer uma mudança de base na álgebra B*, que torna as constantes de estrutura iguais. Tome* $b_1' = \dfrac{b_1}{3}$*, temos que o produto na base será* $b_1'b_3 = b_1' + b_2$ *e* $b_2b_3 = b_3$*, e segue pelo Lema 1.1.30, que são isomorfas.*

Exemplo 1.1.32. *A álgebra trivial é isomorfa apenas a si mesma.*

De fato, seja A *a álgebra trivial, isto é, uma álgebra com base* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *e com produto* $a_ia_j = 0$*, para todo* i *e* j*. Considere agora* B *uma álgebra de mesma dimensão com base* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *e produto dado por* $b_ib_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}b_k$*. Pelo lema anterior, temos que* A *e* B *são isomorfas se, e somente se, possuírem as mesmas constantes de estrutura, ou seja, se, e só se,* $\gamma_{ijk} = 0$*, para todos* $i, j, k \in \{1, \cdots, n\}$*.*

1.1.2 Produto tensorial

Definição 1.1.33. *Sejam* U*,* V *e* W *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Uma função* $f : V \times W \to U$ *é dita* ***bilinear*** *se:*

(i) $f(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2, w) = \alpha_1f(v_1, w) + \alpha_2f(v_2, w)$*;*

(ii) $f(v, \alpha_1w_1 + \alpha_2w_2) = \alpha_1f(v, w_1) + \alpha_2f(v, w_2)$*;*

para quaisquer $v, v_1, v_2 \in V$*;* $w, w_1, w_2 \in W$ *e* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$*.*

Definição 1.1.34 (Propriedade Universal)**.** *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Dizemos que um espaço vetorial* T *munido da aplicação bilinear* $f : V \times W \to T$ *é o produto tensorial de* V *e* W *se, dado* U *espaço vetorial e uma aplicação bilinear* $\Phi : V \times W \to U$*, existir uma única transformação linear* $h : T \to U$ *satisfazendo* $\Phi = h \circ f$*, ou seja, que faz o diagrama abaixo comutar.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & T \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.1.35. *O produto tensorial* (T, f) *é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Vamos supor que (T, f) e $(\tilde{T}, \tilde{f})$ são os produtos tensoriais de V por W. Assim, satisfazem a propriedade universal. Podemos, por um lado, considerar, para o produto tensorial (T, f), as aplicações $f : V \times W \to T$, $\tilde{f} : V \times W \to \tilde{T}$ e $h : T \to \tilde{T}$ tais que $\tilde{f} = h \circ f$. Por outro lado, consideramos o produto tensorial $(\tilde{T}, \tilde{f})$, e então existe uma única $\tilde{h} : \tilde{T} \to T$ tal que $f = \tilde{h} \circ \tilde{f}$. Daí, $\tilde{f} = h \circ \tilde{h} \circ \tilde{f}$ e $f = \tilde{h} \circ h \circ f$. Observe que podemos aplicar a propriedade universal considerando o produto tensorial (T, f) (respectivamente $(\tilde{T}, \tilde{f})$), o espaço vetorial T (respectivamente $\tilde{T}$) com a única transformação linear id_T (respectivamente $id_{\tilde{T}}$), e teremos $id_T \circ f = f$ e $id_{\tilde{T}} \circ \tilde{f} = \tilde{f}$.. Daí, segue da unicidade da propriedade universal que $h \circ \tilde{h} = id_T$ e $\tilde{h} \circ h = id_{\tilde{T}}$. Assim, h e $\tilde{h}$ são isomorfismos, e temos que $T \cong \tilde{T}$.

□

Notação. *Denotamos o produto tensorial de V por W por $V \otimes_{\mathbb{K}} W$*

Quando for necessário deixar explícita a função bilinear f, diremos que o par $(V \otimes_{\mathbb{K}} W, f)$ é o produto tensorial. Além disso, quando estiver claro qual corpo está sendo usado, utilizaremos apenas $V \otimes W$ ao invés de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

Dado $(v, w) \in V \times W$, vamos denotar por $v \otimes w$ o elemento (v, w) de $V \otimes W$. Chamamos os elementos da forma $v \otimes w$ de *tensores*. Temos então que $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ é um conjunto gerador de $V \otimes W$ e que

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= (v_1 \otimes w) + (v_2 \otimes w) \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= (v \otimes w_1) + (v \otimes w_2) \\
(\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) \\
v \otimes (\lambda w) &= \lambda(v \otimes w)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Concluímos então que todos os elementos de $V \otimes W$ são da forma $\sum(v_i \otimes w_j)$, com $v_i \in V$ e $w_j \in W$. Estamos interessados no produto tensorial de álgebras, acerca do qual temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.36. *Sejam V e W álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$. O produto tensorial $V \otimes W$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com o produto dado por*

$$(v_1 \otimes w_1)(v_2 \otimes w_2) = (v_1 v_2) \otimes (w_1 w_2)$$

quaisquer que sejam $v_i \in V$ e $w_j \in W$, $i = 1, 2$.

Demonstração. Consideremos agora V e W $\mathbb{K}$-álgebras. Dados $v \in V$ e $w \in W$, arbitrários, a aplicação

$$\begin{aligned} f_{v,w} : V \times W &\longrightarrow V \otimes W \\ (x,y) &\longmapsto vx \otimes wy, \end{aligned}$$

é bilinear. De fato, por (1.1) temos que

$$f_{v,w}(x + \lambda z, y) = v(x + \lambda z) \otimes wy = f_{v,w}(x,y) + \lambda f_{v,w}(z,y)$$

e

$$f_{v,w}(x, y + \lambda z) = vx \otimes w(y + \lambda z) = f_{v,w}(x,y) + \lambda f_{v,w}(x,z).$$

Assim considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V \times W &\longrightarrow \mathcal{L}(V \otimes W) \\ (v,w) &\longmapsto \Phi_{v,w}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_{v,w} : V \otimes W &\longrightarrow V \otimes W \\ x \otimes y &\longmapsto vx \otimes wy. \end{aligned}$$

Provamos de forma análoga, que Φ é também bilinear. Concluímos que, pela Propriedade Universal deve existir única transformação linear

$$\begin{aligned} h : V \otimes W &\longrightarrow \mathcal{L}(V \otimes W) \\ v \otimes w &\longmapsto \Phi_{v,w}, \end{aligned}$$

tal que $\Phi = h \circ f$. Logo, o produto definido por

$$\begin{aligned} \cdot : (V \otimes W) \times (V \otimes W) &\longrightarrow V \otimes W \\ (x,y) &\longmapsto x \cdot y = h(x)(y) \end{aligned}$$

está bem definido e é bilinear, pela propriedade universal, já que

$$\begin{aligned}
xy &= h(x)(y) \\
&= h\left(\sum_i v_i \otimes w_i\right)\left(\sum_j v_j \otimes w_j\right) \\
&= \sum_i h(v_i \otimes w_i)\left(\sum_j v_j \otimes w_j\right) \\
&= \sum_i f_{v_i,w_i}\left(\sum_j v_j \otimes w_j\right) \\
&= \sum_i \sum_j f_{v_i,w_i}(v_j \otimes w_j) \\
&= \sum_{i,j} v_i v_j \otimes w_i w_j.
\end{aligned}$$

O espaço vetorial $V \otimes W$, munido deste produto, é então uma álgebra. □

1.2 Álgebras com significado genético.

Nesta seção, falaremos brevemente sobre álgebras que possuem significado para genética, com o objetivo de chegar à definição de álgebra genética, a qual faz parte da classe de álgebras não associativas. No capítulo 4, iremos classificá-las, a menos de isomorfismo, sobre o corpo dos complexos, para dimensão menor ou igual a dois. Para termos uma compreensão melhor da parte genética deste trabalho, é essencial introduzir alguns conceitos fundamentais da biologia. A vida na Terra abrange todos os organismos atualmente existentes, desde bactérias até carvalhos. Uma das características mais notáveis dos seres vivos é a capacidade de regeneração, ou seja, a reprodução e transmissão da vida a partir de uma única célula. Esse processo ocorre desde a origem da vida e levou os biólogos a investigarem qual informação contida nessas células permite a reconstrução de organismos complexos, assim surgiu um questionamento *o que constitui a informação biológica?*

A **genética** é a área da biologia que estuda os genes e sua transmissão entre gerações. Os genes, por sua vez, são as unidades fundamentais da informação biológica. No início do século XX, cientistas observaram que essa informação estava nos cromossomos, pois eram transmitidos de forma precisa por meio dos processos de **meiose** e **mitose**.

A compreensão moderna da herança genética começou a se desenvolver a partir das teorias de Charles Darwin sobre evolução, mas foi Gregor Mendel quem deu o primeiro passo para descobrir os padrões matemáticos por trás da genética em 1856.

O primeiro modelo robusto para explicar os mecanismos da herança foi proposto por Mendel no século XIX. Seu trabalho experimental, [18], meticuloso com ervilhas permitiu identificar padrões na transmissão das características entre gerações. Embora Mendel não tenha se aprofundado na formulação matemática de sua teoria, ele analisou estatisticamente os resultados de milhares de cruzamentos, o que lhe permitiu estabelecer princípios fundamentais da genética.

Em sua época, a natureza da hereditariedade ainda era um mistério. Hipóteses anteriores sugeriam que os traços dos progenitores se misturavam nos descendentes, resultando em características intermediárias. No entanto, as observações de Mendel indicavam que certas características eram herdadas de maneira previsível, sem mistura entre os traços parentais. Ele propôs que a herança era determinada por unidades discretas, que chamou de *fatores*, posteriormente identificadas como genes.

A partir de seus experimentos, Mendel formulou três princípios fundamentais, conhecidos como as Leis de Mendel. Seus estudos lançaram as bases para a genética moderna, apesar de seu trabalho ter sido redescoberto e reconhecido apenas no início do século XX, quando a estrutura celular e os cromossomos foram melhor compreendidos.Na década de 1940, descobriu-se que o DNA é o principal componente dos cromossomos responsável por armazenar a informação genética. Em 1953, James Watson e Francis Crick descreveram sua estrutura molecular, demonstrando que a informação genética está codificada na sequência de quatro nucleotídeos. Esse código genético é replicado e transmitido para todas as células de um organismo, garantindo a continuidade da informação biológica entre gerações.

Mendel conduziu experimentos que revelaram as leis da hereditariedade e, embora ele não tenha utilizado formalmente a álgebra, o modo como descreveu seus resultados já sugeria uma estrutura matemática. Suas leis ainda são a base para o estudo da hereditariedade, sendo aplicadas em diversas áreas da biologia, incluindo genética de populações, biotecnologia e medicina.

Décadas depois, em meados do século XX, o matemático inglês Ivor Etherington formalizou essa conexão entre genética e matemática ao introduzir a ideia de álgebras genéticas em seu artigo, [6], intitulado “Genetic Algebras”. Esse trabalho teve como objetivo desenvolver uma definição de álgebra genética que fosse ao mesmo tempo ampla o suficiente para abranger a diversidade de álgebras que surgem no estudo genético e, ao mesmo tempo, especifica o suficiente para permitir uma análise matemática rigorosa das complexas estruturas envolvidas nos processos hereditários. Vamos agora estudar algumas classes de álgebras com significado genético.

Definição 1.2.1. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ =span$\{a_1, \dots, a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$ e tabela de multiplicação*

$$a_i \cdot a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k$$

de modo que $0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1$ e $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$, para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, é dita ***álgebra com realização genética****.*

O número real γ_{ijk} pode ser interepretado como a probabilidade de que o acasalamento aleatório dos a_i e a_j produza cada a_k.

Um elemento a numa álgebra com realização genética $\mathcal{A}$ representa uma população se é expresso como combinação linear dos elementos da base

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

satisfazendo $0 \leq \alpha_i \leq 1$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Geneticamente, os escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$ representam a porcentagem da população que carrega o a_i.

Da perspectiva biológica, cada gene pode apresentar diferentes formas, chamadas **alelos**. No caso do gene que determina o tipo sanguíneo humano, por exemplo, existem três alelos A, B e O.

Durante a fertilização, os **gametas**, células sexuais contendo um único conjunto de cromossomos, se combinam aleatoriamente, originando o **zigoto**, a primeira célula do novo organismo. O conjunto completo de genes de um organismo constitui seu **genoma**. Nos organismos **diploides**, cada célula contém duas cópias do genoma, uma herdada de cada progenitor. No nível populacional, a genética estuda a variação genética dentro de uma espécie e os fatores que influenciam essa diversidade. O **pool gênico** corresponde ao conjunto de todos os alelos presentes nos indivíduos reprodutivos de uma população. A variação pode ser analisada por meio das **frequências genotípicas e alélicas**, permitindo entender a dinâmica evolutiva das espécies.

A **genética mendeliana** é a base da genética clássica, estabelecida a partir dos experimentos de Mendel. Seus princípios fundamentais são:

1. **Lei da Segregação**: Cada gameta recebe apenas um alelo de um par, garantindo que a herança ocorra de forma independente para cada progenitor.

2. **Lei da Dominância**: Um alelo dominante se manifesta no fenótipo, enquanto o recessivo só aparece na ausência do dominante.

3. **Lei da Segregação Independente**: A transmissão de um gene ocorre de forma independente de outro, desde que estejam em cromossomos distintos ou distantes.

Esses princípios formam a base para o entendimento da transmissão genética e suas variações, permitindo avanços significativos na biologia e na medicina.

Algebricamente, quando temos uma álgebra com realização genética comutativa, isto é, onde $\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}$, recebe o nome de **álgebra gamética**. Um exemplo específico de álgebra gamética surge no contexto da herança mendeliana simples, em que os alelos são transmitidos para a próxima geração com frequências iguais, refletindo o comportamento clássico da segregação mendeliana. O leitor interessado em entender mais sobre a herança mendeliana pode consultar a referência [9].

Definição 1.2.2. *Uma **álgebra gamética** correspondente à herança mendeliana simples com* n *alelos para um gene, é uma* $\mathbb{R}$*-álgebra dada por* $\mathcal{G}_n = span\{g_1, \dots, g_n\}$ *com produto definido para base dado por*

$$g_i \cdot g_j = \frac{1}{2}(g_i + g_j)$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Dado um elemento $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in \mathcal{G}_n$, definimos **o peso de** x por $w(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Temos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} \alpha_i \alpha_j (g_i + g_j) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j} \alpha_j \sum_{i}^{n} \alpha_i g_i + \sum_{i} \alpha_i \sum_{j}^{n} \alpha_j g_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{1}{2} 2x \right) \\ &= w(x)x \end{aligned} \tag{1.2}$$

Conectando com a genética, ao analisar uma característica genética de um indivíduo, focamos em um cromossomo específico, onde a informação genética responsável por essa característica está localizada em uma região chamada *locus* genético. É no *locus* que encontramos os alelos, diferentes versões de um mesmo gene, que determinam como essa característica será expressa. Assim, a variação genética presente nos alelos, que representamos na álgebra genética, como os elementos da base, g_i, definem as possíveis manifestações dessa característica no organismo.

Exemplo 1.2.3. *A habilidade de enrolar a língua é uma característica genética humana influenciada por um único gene, com dois alelos. A forma dominante desse gene, representada pelo alelo* A*, confere ao indivíduo a capacidade de realizar esse movimento. Já o* *alelo recessivo, a, impede essa habilidade. A álgebra gamética, $\mathcal{G}_2 = span\{A, a\}$, associada a essa característica pode ser expressa com produto dado pela tabela abaixo.*

	A	a
A	A	$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$
a	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}A$	a

Tabela 1.1: Tabela de multiplicação da álgebra gamética $\mathcal{G}_2$.

Inicialmente, a genética proposta por Mendel se concentrava em características determinadas por apenas dois alelos, um dominante e um recessivo. No entanto, com a evolução das espécies e o surgimento de mutações genéticas, sabemos hoje que muitas características podem ter mais de duas variantes alélicas. Esses conjuntos de alelos são chamados de polialelos ou alelos múltiplos, nesse caso há a noção de alelos codominantes.

Em certos contextos, podemos assumir que quando estudamos uma característica específica em um indivíduo, em um dado momento, não há mutações relevantes ocorrendo e que os alelos estão distribuídos de forma homogênea na população. Ou seja, consideramos que a característica segue, localmente, as leis de Mendel, com a transmissão dos alelos ocorrendo em frequências iguais. Essa simplificação permite a aplicação dos princípios mendelianos para estudar a herança, mesmo em cenários onde a variabilidade genética é mais ampla. Essa simplificação é útil para modelos matemáticos e probabilísticos da genética, permitindo que as frequências alélicas permaneçam constantes ao longo do tempo.Isso está em conformidade com a hipótese de equilíbrio de Hardy-Weinberg, que estabelece um modelo teórico para populações ideais, onde as frequências genéticas permanecem constantes ao longo do tempo; um maior aprofundamento teórico sobre essa hipótese pode ser encontrado em [7] . Essa estabilidade é mantida sob condições ideais, na ausência de fatores evolutivos como seleção natural, mutação e fluxo gênico.

Exemplo 1.2.4. *Podemos considerar o sistema ABO, sem considerar o sistema RH, esse sistema está relacionado com o tipo sanguíneo, e possui 3 alelos possíveis, I^A, I^B, e i. Os alelos I^A, I^B são co-dominantes, e são dominantes em relação ao alelo i. O alelo I^A é responsável pela presença do antígeno A na hemácia; o alelo I^B é responsável pela presença do antígeno B, e o alelo i é responsável pela ausência desses antígenos. Obtemos a tabela para álgebra gamética $\mathcal{G}_3 = span\{I^A,\ I^B,\ i\}$ dada por:*

	I^A	I^B	i
I^A	I^A	$\frac{1}{2}I^A + \frac{1}{2}I^B$	$\frac{1}{2}I^A + \frac{1}{2}i$
I^B	$\frac{1}{2}I^B + \frac{1}{2}I^A$	I^B	$\frac{1}{2}I^B + \frac{1}{2}i$
i	$\frac{1}{2}I^A + \frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}I^B + \frac{1}{2}i$	i

Tabela 1.2: Tabela de multiplicação da álgebra gamética $\mathcal{G}_3$.

Proposição 1.2.5. *Toda álgebra gamética é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração. Sejam $x = \sum_1^n \alpha_i g_i$ e $y = \sum_1^n \beta_j g_j$ em $\mathcal{G}_n$. A comutatividade segue imediatamente da definição do produto para álgebra gamética. De fato,

$$\begin{aligned} xy &= \sum_1^n \alpha_i g_i \sum_1^n \beta_j g_j \\ &= \sum_1^n \alpha_i \beta_j g_i g_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^n \beta_j \alpha_i (g_j + g_i) \\ &= \sum_1^n \beta_j g_j \alpha_i g_i \\ &= yx. \end{aligned}$$

Resta verificar que $(x^2 y)x = x^2(yx)$. Note que, usando a comutatividade e 1.2, temos

$$\begin{aligned} (x^2 y)x &= (w(x)xy)x \\ &= w(x)(xy)x \\ &= w(x)(yx)x \\ &= w(x)x(yx) \\ &= x^2(yx). \end{aligned}$$

□

Dada uma álgebra gamética $\mathcal{G}_k$, podemos construir uma nova álgebra a partir dela através do **processo de duplicação comutativa**. Tal processo consiste em, dada uma álgebra A inicial, calcular o tensor $A \otimes A$ com a multiplicação de um tensor puro dada por

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ab) \otimes (cd),$$

a qual estendemos linearmente para um genérico elemento da álgebra. Vamos indicar a duplicação de A, também, por $A \otimes A$. Agora, suponha que A seja uma álgebra comutativa. A duplicação de A é, em geral, não comutativa. No entanto, considerando o ideal de A gerado como um submódulo pelos elementos do tipo $a \otimes b - b \otimes a$, isto é, considere o ideal, I, gerado por $\{a \otimes b - b \otimes a \ : \ a\,, b \in A\}$. A álgebra quociente $(A \otimes A)/I$, é comutativa e é chamada de duplicação comutativa de A. Dada uma álgebra comutativa A de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, podemos obter a partir dela, a álgebra duplicada comutativa de dimensão

$$\binom{n}{2} + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Onde o produto é dado por

$$\left(\sum_{i \in J} \overline{x_i} \otimes \overline{y_i} \right) \left(\sum_{j \in J} \overline{x_j} \otimes \overline{y_j} \right) := \sum_{(i,j) \in J \times J} \overline{x_i y_i} \otimes \overline{x_j y_j}.$$

Onde $\overline{x_i} \otimes \overline{y_i} \in (A \otimes A)/I$ representa a classe de $x_i \otimes y_i \in A \otimes A$. Para simplificar as notações, identificaremos os elementos como sua classe, isto é, usaremos $\overline{x_i} \otimes \overline{y_i} = x_i \otimes y_i$.

Observação 1.2.6. *O produto definido na álgebra quociente é de fato comutativo. Podemos provar apenas para os tensores puros, ou seja, para $\overline{x_i} \otimes \overline{y_i} = (x_i \otimes y_i) + I$, como*

$$(\overline{x_i} \otimes \overline{y_i})(\overline{x_j} \otimes \overline{y_j}) = (\overline{x_j} \otimes \overline{y_j})(\overline{x_i} \otimes \overline{y_i}) \Leftrightarrow ((x_i y_i) \otimes (x_j y_j) - (x_j y_j) \otimes (x_i y_i)) \in I$$

segue a comutatividade.

Voltando a genética, quando dois gametas se fundem, temos que o resultado é um zigoto. Assim, se fundirmos os elementos da base de uma álgebra gamética, matematicamente dizemos que estamos duplicando comutativamente a álgebra e, obteremos a seguinte.

Definição 1.2.7. *Dizemos que uma álgebra $\mathcal{Z}_k = span\{z_{ij} = g_i \otimes g_j \ ; \ i \leq j\}$ é uma álgebra zigótica, se esta é uma duplicação comutativa de uma álgebra gamética $\mathcal{G}_k$.*

Na fecundação, quando dois gametas se fundem, formam um zigoto diploide, que possui duas cópias de cada gene. A combinação desses alelos no zigoto define seu genótipo, enquanto o fenótipo é a manifestação observável dessa informação genética, muitas vezes influenciada por fatores ambientais. Assim, a transmissão dos alelos pelos gametas garante a continuidade genética e as interações entre genótipo e ambiente moldam as características do organismo ao longo de gerações.

Exemplo 1.2.8. *Considerando novamente, o gene que confere a habilidade de dobrar a língua, na espécie humana, temos que os possíveis genótipos são AA, Aa e aa. Os* *genótipos AA e Aa estão associados ao fenótipo que confere a habilidade de enrolar a língua, enquanto o genótipo aa está associado ao fenótipo que não confere. A álgebra zigótica* $\mathcal{Z}_2 = span\{AA, Aa, aa\}$ *com produto dado pela tabela abaixo é um exemplo de duplicação da álgebra gamética* $\mathcal{G}_2$.

	AA	Aa	aa
AA	AA	$\frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}Aa$	Aa
Aa	$\frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}Aa$	$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$	$\frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}aa$
aa	Aa	$\frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}aa$	aa

Tabela 1.3: Tabela de multiplicação da álgebra zigótica $\mathcal{Z}_2$.

Exemplo 1.2.9. *Podemos considerar novamente o sistema ABO, o processo de fusão de cada dois gametas dá origem aos genótipos, que matematicamente são obtidos via duplicação, esses genótipos são* I^AI^A, I^AI^B, I^Ai, I^BI^B, I^Bi, ii. *Temos uma associação dos genótipos com os fenótipos, que no caso do sistema ABO, são os tipos sanguíneos, A, B, AB, O. Temos que os genótipos* I^AI^A *e* I^Ai *estão relacionados com o sangue do tipo A, os* I^BI^B *e* I^Bi *com o sangue do tipo B,* I^AI^B, *com o tipo AB e o genótipo ii com o sangue do tipo O. Por meio da duplicação obtemos a tabela da álgebra zigótica associada, cujos elementos da base serão os genótipos essa tabela é:*

	I^AI^A	I^AI^B	I^BI^B	I^Bi	I^Ai	ii
I^AI^A	I^AI^A	$\frac{1}{2}(I^AI^A + I^AI^B)$	I^AI^B	$\frac{1}{2}(I^AI^B + I^Ai)$	$\frac{1}{2}(I^AI^A + I^Ai)$	I^Ai
I^AI^B	$\frac{1}{2}(I^AI^A + I^AI^B)$	$\frac{1}{4}(I^AI^A + I^BI^B) + \frac{1}{2}I^AI^B$	$\frac{1}{2}(I^AI^B + I^BI^B)$	$\frac{1}{4}(I^AI^B + I^BI^B + I^Ai + I^Bi)$	$\frac{1}{4}(I^AI^A + I^Ai + I^Bi + I^AI^B)$	$\frac{1}{2}(I^Ai + I^Bi)$
I^BI^B	I^AI^B	$\frac{1}{2}(I^AI^B + I^BI^B)$	I^BI^B	$\frac{1}{2}(I^BI^B + I^Bi)$	$\frac{1}{2}(I^BI^A + I^Bi)$	I^Bi
I^Bi	$\frac{1}{2}(I^AI^B + I^Ai)$	$\frac{1}{4}(I^AI^B + I^BI^B + I^Ai + I^Bi)$	$\frac{1}{2}(I^BI^B + I^Bi)$	$\frac{1}{4}(I^BI^B + ii) + \frac{1}{2}I^Bi$	$\frac{1}{4}(I^AI^B + I^Ai + I^Bi + ii)$	$\frac{1}{2}(I^Bi + ii)$
I^Ai	$\frac{1}{2}(I^AI^A + I^Ai)$	$\frac{1}{4}(I^AI^A + I^Ai + I^Bi + I^AI^B)$	$\frac{1}{2}(I^BI^A + I^Bi)$	$\frac{1}{4}(I^AI^B + I^Ai + I^Bi + ii)$	$\frac{1}{4}(I^AI^A + ii) + \frac{1}{2}I^Ai$	$\frac{1}{2}(I^Ai + ii)$
ii	I^Ai	$\frac{1}{2}(I^Ai + I^Bi)$	I^Bi	$\frac{1}{2}(I^Bi + ii)$	$\frac{1}{2}(I^Ai + ii)$	ii

Tabela 1.4: Tabela de multiplicação da álgebra zigótica $\mathcal{Z}_3$.

Essa tabela representa todas as possibilidades de cruzamento entre dois genótipos, e dado dois genótipos indica qual a probabilidade da fecundação gerar determinado genótipo.

Podemos exemplificar: suponha que um genitor tenha um sangue do tipo A e o outro do tipo B; podemos verificar qual a probabilidade de um filho possuir cada tipo sanguíneo possível.

Vimos que para o fenótipo A estão atrelados os genótipos I^AI^A *e* I^Ai *e ao fenótipo do tipo sanguíneo B temos* I^BI^B *e* I^Bi*,; agora, usando a tabela obtida da álgebra zigótica,* *podemos verificar as possíveis combinações de genótipos dos pais. Daí,*

$$\begin{aligned} I^AI^A \times I^BI^B &= I^AI^B, \\ I^AI^A \times I^Bi &= \tfrac{1}{2}(I^AI^B) + \tfrac{1}{2}(I^Ai), \\ I^BI^B \times I^Ai &= \tfrac{1}{2}(I^BI^A + I^Bi), \\ I^Bi \times I^Ai &= \tfrac{1}{4}(I^AI^B + I^Ai + I^Bi + ii). \end{aligned}$$

Assim, vemos que pode gerar qualquer um dos 4 tipos sanguíneos, e se soubermos os genótipos dos genitores podemos dizer qual a probabilidade a acontecer cada tipo sanguíneo, por exemplo se forem I^BI^B e I^Ai temos 50% de chance de ser do tipo AB e 50% de ser do tipo B.

Podemos fazer a seguinte mudança de base para álgebra gamética $\mathcal{G}_n = span\{g_1, \ldots, g_n\}$, definimos $c_1 = g_1,\ c_i = g_1 - g_i\ \forall\ i \neq 1$. Obtemos a tabela multiplicativa para $\mathcal{G}_n$ dada por

$$c_1^2 = c_1,$$

$$\begin{aligned} c_1c_i &= g_1(g_1 - g_i) \\ &= g_1 - \frac{1}{2}(g_1 + g_i) \\ &= \frac{1}{2}c_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_ic_j &= (g_1 - g_i)(g_1 - g_j) \\ &= g_1 - \frac{1}{2}(-g_1 - g_j - g_1 - g_i + g_i + g_j) \\ &= 0,\ \forall\ i, j \neq 1. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.10. *A tabela dada no exemplo 1.2.3 com essa mudança de base será dada por*

	g_1	g_2
g_1	g_1	$\frac{1}{2}g_2$
g_2	$\frac{1}{2}g_2$	0

Tabela 1.5: Tabela de multiplicação da álgebra gamética $\mathcal{G}_2$ pós mudança de base.

Agora, aplicando o processo de duplicação comutativa, para álgebra gamética, considerando a base anterior, obtemos que a tabela multiplicativa para álgebra zigótica é dada por:

$$d_{11}^2 = d_{11},\ d_{11}d_{1i} = \frac{1}{2}d_{1i},\ \text{e}\ \ d_{1i}d_{1j} = \frac{1}{4}d_{ij},$$

com os demais produtos nulos.

Exemplo 1.2.11. *A tabela dada no exemplo 1.2.8 com essa mudança de base será dada por*

	d_{11}	d_{12}	d_{22}
d_{11}	d_{11}	$\frac{1}{2}d_{12}$	0
d_{12}	$\frac{1}{2}d_{12}$	$\frac{1}{4}d_{22}$	0
d_{22}	0	0	0

Tabela 1.6: Tabela de multiplicação da álgebra zigótica $\mathcal{Z}_2$ pós mudança de base.

Observe que essa álgebra é, de fato, isomorfa à álgebra $\mathcal{Z}_2$ obtida anteriormente no exemplo 1.2.8, podemos considerar a mudança de base, dada por $d_{11} = aa$, $d_{12} = \frac{3}{4}AA - \frac{1}{2}Aa - \frac{1}{2}aa$ e $d_{22} = -\frac{1}{2}AA + Aa - \frac{1}{2}aa$.
Dado $x \in \mathcal{Z}_n$, é da forma $x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}d_{ij}$, definimos o peso de x por $w(x) = \alpha_{11}$.

Proposição 1.2.12. *Todo elemento da forma $y = x^2 - w(x)x$, com $x \in \mathcal{Z}_n$ pertence ao anulador de $\mathcal{Z}_n$.*

Demonstração. Seja $x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}d_{ij}$. Note que,

$$\begin{aligned}
x^2 &= \sum_{i,j,r,s} \alpha_{ij}\alpha_{rs}d_{ij}d_{rs} \\
&= \sum_{j,s} \alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{1j}d_{1s} \\
&= \sum_{j=1} \alpha_{11}\alpha_{1s}d_{11}d_{1s} + \sum_{j\neq 1} \alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{1j}d_{1s} \\
&= \alpha_{11}^2 d_{11} + \frac{1}{2}\sum_{j,s\neq 1} \alpha_{1s}\alpha_{11}d_{1s} + \frac{1}{2}\sum_{j\neq 1,\ s=1} \alpha_{1j}\alpha_{11}d_{1j} + \frac{1}{4}\sum_{j,s\neq 1} \alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{js} \\
&= \alpha_{11}^2 d_{11} + \sum_{s\neq 1} \alpha_{1s}\alpha_{11}d_{1s} + \frac{1}{4}\sum_{j,s\neq 1} \alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{js}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$w(x)x = \alpha_{11}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}d_{ij}\right) = \alpha_{11}^2 d_{11} + \sum_{i,j\neq 1}^{n} \alpha_{11}\alpha_{ij}d_{ij}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
x^2 - w(x)x &= \left(\alpha_{11}^2 d_{11} + \sum_{s\neq 1} \alpha_{1s}\alpha_{11}d_{1s} + \frac{1}{4}\sum_{j,s\neq 1}\alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{js}\right) - \left(\alpha_{11}^2 d_{11} + \sum_{i,j\neq 1}^{n} \alpha_{11}\alpha_{ij}d_{ij}\right)\\
&= \sum_{s\neq 1} \alpha_{1s}\alpha_{11}d_{1s} + \frac{1}{4}\sum_{j,s\neq 1}\alpha_{1j}\alpha_{1s}d_{js} - \left(\sum_{s\neq 1}\alpha_{1s}\alpha_{11}d_{1s} + \sum_{i,j\neq 1}^{n}\alpha_{11}\alpha_{ij}d_{ij}\right)\\
&= \sum_{i,j\neq 1}^{n} (\frac{1}{4}\alpha_{1j}\alpha_{1s} - \alpha_{11}\alpha_{ij})d_{sj}
\end{aligned}
$$

Observe, que $d_{ij} \in Ann(\mathcal{Z}_n)$, para todo $i, j \neq 1$. Assim, $x^2 - w(x)x \in Ann(\mathcal{Z}_n)$.

□

Proposição 1.2.13. *Toda álgebra zigótica é de Jordan.*

Demonstração. Da proposição anterior, temos que $x^2 = u - w(x)x$, para $u \in Ann(\mathcal{Z}_n)$. Como a álgebra é zigótica, ela é comutativa. Daí, resta verificar que $(x^2y)x = x^2(yx)$. Note que, da comutatividade e de $u \in Ann(\mathcal{Z}_n)$, temos que $uy = 0 = u(yx)$, e segue que

$$
\begin{aligned}
(x^2y)x &= ((u - w(x)x)y)x\\
&= (uy - w(x)xy)x\\
&= u(yx) - w(x)(xy)x\\
&= u(yx) - w(x)x(yx)\\
&= (u - w(x)x)(yx)\\
&= x^2(yx).
\end{aligned}
$$

□

Veremos agora uma aplicação da álgebra zigótica. Se considerarmos um organismo diploide com herança mendeliana em um único lócus gênico, e uma característica que possua dois alelos possíveis, podemos, através, da autofecundação, verificar as futuras gerações. O processo de autofecundação acontece comumente em plantas, podemos considerar por exemplo o experimento realizado por G.Mendel, considerar na ervilha-de-cheiro, a característica de cor das sementes, que é determinada por um único gene com dois alelos Y, dominante, e y, o recessivo. O alelo Y está associada a cor amarela e y, a cor verde. Podemos agora, considerar uma população para álgebra zigótica, associada a esses genótipos, digamos

$$P = \alpha YY + \beta Yy + \gamma yy,$$

onde as constantes α, β, γ representam as probabilidades associadas à distribuição de cada genótipo na população, temos então que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Queremos entender o que acontece na n-ésima geração, obtida via autofertilização. Podemos calcular a primeira geração filial, F_1, obtida como segue, utilizando a tabela multiplicativa de $\mathscr{Z}_2$, calculada em 1.2.8,

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha(YY)^2 + \beta(Yy)^2 + \gamma(yy)^2 \\ &= \alpha YY + \frac{\beta}{4}YY + \frac{\beta}{2}Yy + \frac{\beta}{4}yy + \gamma yy \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) YY + \frac{\beta}{2}Yy + \left(\gamma + \frac{\beta}{4}\right) yy \\ &:= \alpha_1 YY + \beta_1 Yy + \gamma_1 yy, \end{aligned}$$

em que $\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta}{2^2}$, $\beta_1 = \frac{\beta}{2}$ e $\gamma_1 = \gamma + \frac{\beta}{2^2}$. Agora, considerando tal geração podemos calcular, repetindo o processo, a segunda geração, F_2, é dada por

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha_1(YY)^2 + \beta_1(Yy)^2 + \gamma_1(yy)^2 \\ &= \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{4}\right) YY + \frac{\beta_1}{2}Yy + \left(\gamma_1 + \frac{\beta_1}{4}\right) yy \\ &= \left(\alpha + \frac{3\beta}{8}\right) YY + \frac{\beta}{4}Yy + \left(\gamma + \frac{3\beta}{8}\right) yy \\ &= \alpha_2 YY + \beta_2 Yy + \gamma_2 yy. \end{aligned}$$

onde $\alpha_2 = \alpha + \frac{3\beta}{2^3}$, $\beta_2 = \frac{\beta}{2^2}$ e $\gamma_2 = \gamma + \frac{3\beta}{2^3}$. Queremos encontrar $F_n = \alpha_n YY + \beta_n Yy + \gamma_n yy$. Para isso vamos definir $F_0 = P$, e $u_i = F_i - F_{i-1}$, que representa o crescimento da porcentagem de cada genótipo na i-ésima geração em relação à $(i-1)$-ésima geração. Assim, temos que $F_n = F_{n-1} + u_n$. Ainda, observe que, usando a definição dos u_i para todo i, temos

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + u_n \\ &= (F_{n-2} + u_{n-1}) + u_n \\ &= \cdots \\ &= P + u_1 + \cdots + u_n \\ &= P + \sum_{i=1}^{n} u_i. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos encontrar a n-ésima geração como a soma entre a população inicial, P, e a soma total dos crescimentos até a n-ésima geração. Observe que,

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1 - P \\ &= \frac{1}{4}\beta YY - \frac{1}{2}\beta Yy + \frac{1}{4}\beta yy \\ &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right). \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} u_2 &= F_2 - F_1 \\ &= \frac{1}{8}\beta YY - \frac{1}{4}\beta Yy + \frac{1}{8}\beta yy \\ &= \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right). \end{aligned}$$

Indutivamente, temos que $u_n = \frac{1}{2^n}\beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right)$. Resta calcular a seguinte,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n}\beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right) \\ &= \beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^n} \\ &= \beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_n &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2^{n+1}}\right)YY + \left(\beta - \beta + \frac{\beta}{2^n}\right)Yy + \left(\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2^{n+1}}\right)yy \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2^{n+1}}\right)YY + + \frac{\beta}{2^n}Yy + \left(\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2^{n+1}}\right)yy. \end{aligned}$$

Com isso, dada a população inicial podemos calcular a n-ésima geração usando a fórmula acima. Ainda, podemos observar que quando o n cresce, F_n se aproxima de $\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)YY +$ $\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)yy$, já que $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Observe que à medida que a geração se afasta da população inicial, o termo heterozigótico tende a sumir e, mais, a probabilidade de ocorrência desse termo será redistribuída para os dois termos homozigóticos.

Podemos comparar tal comportamento, apresentado nas contas acima para autofecundação, com o problema que, biologicamente, pode ocorrer na endogamia. A endogamia, também chamada de consanguinidade, ocorre quando há acasalamento entre indivíduos geneticamente mais próximos do que a média da população, como no caso da espécie humana, onde podemos pensar, por exemplo, na relação entre primos. Esse aumento do grau de parentesco tem consequências diretas na constituição genética da população, principalmente ao elevar os níveis de homozigose e reduzir a heterozigose, como visto nas contas anteriores.

Um aspecto crucial a ser considerado é que genes recessivos associados a doenças genéticas só se manifestam quando estão em homozigose. Assim, a endogamia pode aumentar a frequência de distúrbios hereditários ao favorecer a expressão desses genes, tornando-se um fator de preocupação em programas de melhoramento genético e conservação de espécies, como retratado em [24]

Observação 1.2.14. *Da definição de F_i, e u_i podemos provar por indução que*

$$u_n = \frac{1}{2^n}\beta\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right).$$

Note que basta provar que $\beta_{n-1} = \dfrac{\beta}{2^{n-1}}$. Pois, podemos escrever

$$u_n = \frac{\beta_{n-1}}{2}\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right),$$

já que

$$\begin{aligned}
F_n - F_{n-1} &= \left(\alpha_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{4}\right)YY + \frac{\beta_{n-1}}{2}Yy + \left(\gamma_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{4}\right)yy \\
&\quad - \alpha_{n-1}YY - \beta_{n-1}Yy - \gamma_{n-1}yy \\
&= \frac{\beta_{n-1}}{4}YY - \frac{\beta_{n-1}}{2}Yy + \frac{\beta_{n-1}}{4}yy \\
&= \frac{\beta_{n-1}}{2}\left(\frac{1}{2}YY - Yy + \frac{1}{2}yy\right).
\end{aligned}$$

Resta ver que $\beta_n = \dfrac{\beta}{2^n}$. Note que vale para $n = 0$, $\beta_0 = \dfrac{\beta}{2^0} = \beta$. Suponha válido para β_i, com $0 \leq i < n$. Segue, por hipótese de indução, que $\beta_n = \dfrac{\beta_{n-1}}{2} = \dfrac{\frac{\beta}{2^{n-1}}}{2} = \dfrac{\beta}{2^n}$.

□

Para finalizar essa seção, veremos a definição para álgebra genética dada por H. Gonshor em [8], a qual é feita sobre o corpo dos números complexos. Tal definição pode ser dada para um corpo qualquer e definir a álgebra genética considerando a extensão desse, isso é feito para compatibilizar a definição com aquela dada por Schafer em [23]. A prova de tal equivalência pode ser vista em [16] e em [19].

Definição 1.2.15. *Seja $\mathfrak{G}$ uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa de dimensão finita. Então $\mathfrak{G}$ é uma* ***álgebra genética*** *se existir uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ com a seguinte tabela de multiplicação determinada por:*

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ijk} a_k, \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \lambda_{111} = 1, \\ \lambda_{ijk} = 0, \quad \text{para} \quad k < j, \\ \lambda_{ijk} = 0, \quad \text{para} \quad i, j > 1 \text{ e } k \leq \max\{i, j\}. \end{cases}$$

Tal base é chamada de base canônica de $\mathfrak{G}$.

Exemplo 1.2.16. *Toda álgebra gamética é genética. As constantes de estrutura satisfazem as condições acima. De fato, seja $\mathcal{G}_n = span\{g_1, \cdots, g_n\}$ uma álgebra gamética de dimensão n, com produtos na base $g_1^2 = g_1$, $g_1 g_i = \dfrac{g_i}{2}$ e $g_i g_j = 0$ para todo $i, j \in \{2, \cdots, n\}$. Da definição do produto, temos que as constantes de estrutura satisfazem as condições necessárias para formar uma álgebra genética.*

Exemplo 1.2.17. *Toda álgebra zigótica é genética.*

Com efeito, considere a álgebra zigótica $\mathcal{Z}_n = span\{z_{ij};\ i, j \in 1, \cdots, n \text{ e } i \leq j\}$ de dimensão $\dfrac{n^2 + n}{2}$ com produto na base $z_{11}^2 = z_{11}$, $z_{11} z_{1i} = \frac{1}{2} z_{1i}$, $z_{1i} z_{1j} = \frac{1}{4} z_{ij}$, e demais produtos nulos. Da definição do produto, temos que as constantes de estrutura satisfazem as condições necessárias para que esta seja uma base para a álgebra genética.

Observação 1.2.18. *Vimos que as álgebras gaméticas e zigóticas são de Jordan, mas observe que nem toda álgebra genética é de Jordan.*

De fato, considere a álgebra $\mathfrak{G} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ com produto dado por $p_1 p_1 = p_1$, $p_1 p_2 = \frac{1}{2} p_2$, $p_1 p_3 = \frac{1}{4} p_4$, $p_2 p_2 = \frac{1}{4} p_3$, $p_2 p_3 = \frac{1}{8} p_5$, e $p_3 p_3 = \frac{1}{16} p_6$, onde os demais produtos na base são nulos. Podemos verificar, pela definição do produto, que essa álgebra é genética. Porém, note que $(p_2, p_1, p_2^2) = \frac{1}{4}(p_2, p_1, p_3) \neq 0$, já que $(p_2, p_1, p_3) = \frac{1}{2} p_2 p_3 - \frac{1}{4} p_2 p_4 = \frac{1}{16} p_5$. Assim, $\mathfrak{G}$ não é de Jordan.

Capítulo 2

Álgebras de Lie

Vimos no capítulo anterior a definição de álgebra de Lie (1.1.9), sobre um corpo qualquer. Neste capítulo veremos a classificação das álgebras de Lie, de dimensão menor ou igual a três, sob o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Usamos como referências principais [4] e [14].

2.1 Classificação das álgebras de Lie unidimensionais e bidimensionais

Seja A uma álgebra de Lie unidimensional sobre $\mathbb{C}$. Considere A $=$ $span\{e_1\}$. Daí, como A é de Lie temos $e_1e_1 = 0$ e dados x, y elementos de A temos que são escritos como $x = \alpha\, e_1$ e $y = \beta\, e_1$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Com isso, $xy = (\alpha\beta)\, e_1e_1 = 0$, para todos $x, y \in A$. Daí, A é isomorfa à álgebra nula.

Teorema 2.1.1. *Toda álgebra de Lie $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}^2 \neq 0$, de dimensão 2 é isomorfa àquela onde $e_1e_2 = e_2$.*

Demonstração. Sejam A $=$ span$\{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{L}$ $=$ span$\{m_1, m_2\}$ álgebras de Lie tais que $e_1e_2 = e_2$ e $\mathcal{L}^2 \neq 0$.
Como $\mathcal{L}$ é Lie, temos $m_1^2 = m_2^2 = 0$ e $m_1m_2 = \alpha_1m_1 + \alpha_2m_2$. Como $\mathcal{L}^2 \neq 0$, o caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ não ocorre.

Suponha, sem perda de generalidade, $\alpha_2 = 0$. Então, tomando $\bar{m_1} = \frac{-1}{\alpha_1}m_2$ e $\bar{m_2} = m_1$, temos $\bar{m_1}\bar{m_2} = \frac{-1}{\alpha_1}m_2m_1 = m_1 = \bar{m_2}$, e segue $A \cong \mathcal{L}$.

Resta ver quando $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$. Considere a álgebra derivada, dada por $\mathcal{L}' = \langle \{xy, x, y \in \mathcal{L}\} \rangle$.
Temos que $dim(\mathcal{L}') \leqslant \binom{dim(\mathcal{L})}{2} = 1$.Vamos verificar, então, os dois casos:

(i) Se $dim(\mathcal{L}') = 0$, então $xy = 0, \forall x, y \in \mathcal{L}'$. Mas como $\mathcal{L}^2 \neq 0$, por hipótese, temos que $dim(\mathcal{L}') \neq 0$.

(ii) $dim(\mathcal{L}') = 1$. Seja $x = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2$ e $y = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2$. Daí,

$$xy = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j m_i m_j = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) m_1 m_2.$$

Como $\mathcal{L}' = span\{xy, x, y \in \mathcal{L}\}$, temos que $\mathcal{L}' = span\{m_1 m_2\}$. Daí, $\mathcal{L} = span\{\hat{m}_1, \hat{m}_2\}$ onde $\hat{m}_2 = m_1 m_2$ e $\hat{m}_1$ é tal que $\{\hat{m}_1, \hat{m}_2\}$ são linearmente independentes. Como $\hat{m}_1\hat{m}_2 \in \mathcal{L}'$ temos

$$\hat{m}_1\hat{m}_2 = \alpha m_1 m_2 = \alpha \hat{m}_2$$

Seja, agora, $\mathcal{L} = span\{\hat{\hat{m}}_1, \hat{m}_2\}$ onde $\hat{\hat{m}}_1 = \alpha^{-1}\hat{m}_1$. Daí,

$$\hat{\hat{m}}_1\hat{m}_2 = \alpha^{-1}\hat{m}_1\hat{m}_2 = \alpha^{-1}\alpha\hat{m}_2 = \hat{m}_2$$

Donde segue que A $\cong \mathcal{L}$.

$\square$

Observação 2.1.2. *Observe que para a classificação das álgebras de Lie de dimensão menor que dois, não usamos na demonstração o fato de o corpo ser o dos números complexos; no entanto, como para dimensão 3 usaremos tal corpo, o enunciado das dimensões inferiores foi feito para os complexos apenas para padronização.*

2.2 Classificação das álgebras de Lie tridimensionais

Assim como nos casos anteriores, vamos analisar a dimensão da álgebra derivada

$$dim(\mathcal{L}') \leqslant \binom{dim(\mathcal{L})}{2} = 3$$

.

Caso $\mathcal{L}' = 0$, temos que a álgebra $\mathcal{L}$ é abeliana, como vimos no Capítulo 1, na Observação 1.1.23.

Caso $\mathcal{L}' \neq 0$, temos três possibilidades:

- **Caso 1:** $dim(\mathcal{L}') = 1$. A classificação é feita em dois casos, quando $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{L})$ e quando $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$

Teorema 2.2.1. *Toda álgebra de Lie tridimensional com álgebra derivada unidimensional e $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{L})$ é isomorfa à álgebra $A = span\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_2e_3 = e_1$, $e_1e_2 = 0$ e $e_1e_3 = 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar com base nas constantes de estrutura que, dada $\mathcal{L}$, existe uma base de $\mathcal{L}$ cujos produtos nessa base funcionam como na álgebra A.

Seja $\mathcal{L}' = span\{m_1\}$ e $\mathcal{L} = span\{m_1, m_2, m_3\}$. Como $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{L})$, temos, pela Observação 1.1.23, que para todo $x \in \mathcal{L}'$ e $y \in \mathcal{L}$, $xy = 0$. Em particular, como $m_1 \in \mathcal{L}'$ e $m_2, m_3 \in \mathcal{L}$ então $m_1m_2 = 0$ e $m_1m_3 = 0$. Como $m_2m_3 \in \mathcal{L}'$ temos que existe $\alpha \in \mathbb{K}-\{0\}$ tal que $m_2m_3 = \alpha m_1$. De fato, $\alpha \neq 0$, pois caso contrário teríamos que dados $x, y \in \mathcal{L}$

$$xy = (\beta_1m_1 + \beta_2m_2 + \beta_3m_3)(\gamma_1m_1 + \gamma_2m_2 + \gamma_3m_3) = 0$$

já que neste caso todos os produtos na base seriam nulos e então como $xy \in \mathcal{L}'$ teríamos $\mathcal{L}' = 0$, o que é absurdo. Assim, sendo $\alpha \neq 0$ defina $\hat{m}_2 = \frac{1}{\alpha}m_2$. Daí, $\mathcal{L} = span\{m_1, \hat{m}_2, m_3\}$ tal que $m_1\hat{m}_2 = 0 = m_1m_3$ e $\hat{m}_2m_3 = \frac{1}{\alpha}m_2m_3 = m_1$, como queríamos. □

Para provarmos o caso $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$ precisamos de alguns resultados.

Lema 2.2.2. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional, com álgebra derivada, $\mathcal{L}'$, unidimensional. Se $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$, então existe subálgebra bidimensional de $\mathcal{L}$ não abeliana.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{L}' = span\{e_1\}$ e $\mathcal{L} = span\{e_1, \bar{e_2}, e_3\}$. Como $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$, então ou $e_1e_3 \neq 0$ ou $e_1\bar{e_2} \neq 0$, pois caso contrário, para todo $x \in \mathcal{L}$, teríamos $e_1x = 0$ e daí $\mathcal{L}' \subseteq Z(\mathcal{L})$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $e_1\bar{e_2} \neq 0$. Como $\mathcal{L}'$ é ideal de $\mathcal{L}$, temos que $e_1\bar{e_2} \in \mathcal{L}'$. Então, existe $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, tal que $e_1\bar{e_2} = \alpha e_1$. Defina $e_2 = \frac{1}{\alpha}\bar{e_2}$, segue que

$$e_1e_2 = \frac{1}{\alpha}e_1\bar{e_2} = e_1.$$

Portanto, a álgebra, B, gerada por $\{e_1, e_2\}$ com produto $e_1e_2 = e_1$ é a álgebra de Lie tal que $B^2 \neq 0$. Logo, B é uma subálgebra de $\mathcal{L}$ que não é abeliana, conforme Observação 1.1.23.

□

Lema 2.2.3. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional, com álgebra derivada $\mathcal{L}'$ unidimensional. Se $\mathcal{L}$ possui uma subálgebra B bidimensional, com $B^2 \neq 0$, então B é um ideal de $\mathcal{L}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}' = span\{e_1\}$. Como $B^2 \neq 0$, existem $u, w \in B \subset \mathcal{L}$ tal que $uw \neq 0$. Daí, como $uw \in \mathcal{L}'$ temos $uw = ae_1$, para algum $a \neq 0$. Como B é subálgebra de $\mathcal{L}$ temos que $ae_1 \in B$. Logo, $e_1 \in B$, e podemos completar a base, e obtemos $B = span\{e_1, e_2\}$ e

$\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$. Tome $x \in B$ e $y \in \mathcal{L}$, vamos provar que $xy \in B$, e como é de Lie e B é subálgebra teremos que $yx \in B$, pois $xy = -yx$.

Seja $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ e $y = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ com $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C},\ i \in \{1,2\}$ e $j \in \{1,2,3\}$. Temos que

$$\begin{aligned} xy &= (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)(\alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \\ &= \beta_1\alpha_1 e_1^2 + \beta_1\alpha_2 e_1 e_2 + \beta_1\alpha_3 e_1 e_3 + \beta_2\alpha_1 e_2 e_1 + \beta_2\alpha_2 e_2^2 + \beta_2 e_2 e_3 \\ &= (\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) e_1 e_2 + \beta_1\alpha_3 e_1 e_3 + \beta_2\alpha_3 e_2 e_3. \end{aligned}$$

Como $e_1e_3, e_2e_3 \in \mathcal{L}'$ existem $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ tais que $e_1e_3 = k_1e_1,\ e_2e_3 = k_2e_1$. Portanto,

$$\begin{aligned} xy &= (\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) e_1 e_2 + \beta_1\alpha_3 e_1 e_3 + \beta_2\alpha_3 e_2 e_3 \\ &= (\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) e_1 e_2 + \beta_1\alpha_3 k_1 e_1 + \beta_2\alpha_3 k_2 e_1 \\ &= (\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) e_1 e_2 + k e_1 \in B. \end{aligned}$$

Segue que B é um ideal de $\mathcal{L}$. □

Lema 2.2.4. *Dada uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, e fixado $v \in \mathcal{L}$, a representação adjunta dada por $ad_v : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $ad_v(u) = vu$ é uma derivação de $\mathcal{L}$. Tal derivação é chamada de* ***derivação interna.***

Demonstração. Queremos provar que, fixado $v \in \mathcal{L}$ para $u, w \in \mathcal{L}$, temos $ad_v(uw) = (ad_v(u))w + u(ad_v(w))$. Usando a anticomutatividade e a identidade de Jacobi, temos que

$$(uv)w + (vw)u + (wu)v = 0 \implies v(uw) = (vu)w - (vw)u,$$

e note que

$$\begin{aligned} ad_v(uw) &= v(uw) \\ &= (vu)w + u(vw) \\ &= (ad_v(u))w + u(ad_v(w)). \end{aligned}$$

Assim, ad_v é uma derivação. □

Note que nem toda derivação é interna. Se considerarmos uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ abeliana e definirmos $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $D_x(y) = xy$, uma derivação interna, como a álgebra é abeliana, teremos que a única derivação interna é a aplicação nula. Daí, qualquer outra derivação dessa álgebra, que não seja a nula, não será interna. Por exemplo, se considerarmos $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $D_x(y) = x + y$, não é interna, mas é uma derivação, já que $D_x(yz) = 0$ e $D_x(y)z + yD_x(z) = 0$, donde segue a igualdade.

Teorema 2.2.5. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie bidimensional não abeliana. Então, todas as derivações de $\mathcal{L}$ são internas.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie bidimensional não abeliana. Daí, por 2.1.1 temos que $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1e_2 = e_2$. Seja $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ uma derivação. Observe que

$$\begin{aligned} D(e_2) &= D(e_1e_2) \\ &= D(e_1)e_2 + e_1D(e_2) \\ &= (\alpha e_1 + \beta e_2)e_2 + e_1(\gamma e_1 + \eta e_2) \\ &= \alpha e_2 + \eta e_2 \\ &= \delta e_2 \end{aligned}$$

para $\alpha, \gamma, \beta, \eta, \delta \in \mathbb{C}$. Ainda,

$$ad_{\delta e_1}(e_2) = (\delta e_1)e_2 = \delta e_1e_2 = \delta e_2.$$

Agora, defina a derivação $E := D - ad_{\delta e_1}$. Temos

$$E(e_2) = D - ad_{\delta e_1}(e_2) = D(e_2) - ad_{\delta e_1}(e_2) = \delta e_1 - \delta e_1 = 0.$$

Daí,

$$0 = E(e_2) = E(e_1e_2) = E(e_1)e_2 + e_1E(e_2) \implies E(e_1)e_2 = 0.$$

Logo, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $E(e_1) = \mu e_2$. Note

$$ad_{-\mu e_2}(e_1) = -\mu e_2e_1 = \mu e_1e_2 = \mu e_2 = E(e_1)$$

e

$$ad_{-\mu e_2}(e_2) = -\mu e_2e_2 = 0 = E(e_2),$$

então $D - ad_{\delta e_1} = E = ad_{-\mu e_2} = 0$. Donde segue que $D = ad_{\delta e_1 - \mu e_2}$, sendo que $\delta e_1 - \mu e_2 \in \mathcal{L}$, o resultado segue.

□

Observação 2.2.6. *Observe que para álgebra de Lie o anulador à esquerda e à direita coincidem. E ainda, podemos considerar o anulador de um subconjunto S de $\mathcal{L}$ nesse caso diremos $Ann(S) = \{a \in \mathcal{L} \mid as = 0,\ \forall\ s \in S\}$.*

Proposição 2.2.7. *Se B é um ideal bidimensional de uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, não abeliana, então $\mathcal{L}$ é escrito como soma direta de espaços vetoriais dada por $\mathcal{L} = B \oplus Ann(B)$, onde*

$Ann(B)$ é o anulador de B.

Demonstração. Seja B um ideal de $\mathcal{L}$ e dados $v \in \mathcal{L}$ então $vw \in B$ para todo $w \in B$, já que B é um ideal de $\mathcal{L}$. Pelo Lema 2.2.4, a aplicação $ad_v : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $ad_v(w) = vw$ é uma derivação interna de $\mathcal{L}$. Ainda, pelo Teorema 2.2.5, existe $l \in B$ tal que $ad_v(w) = ad_l(w)$. Então $(v - l)w = 0$, para todo $w \in B$. Daí, $b := (v - l) \in Ann(B)$. Como $b \in Ann(B)$, $v \in \mathcal{L}$ e $l \in B$, temos $v = l + b \implies \mathcal{L} = B + Ann(B)$. Resta ver que, $B \cap Ann(B) = 0$. Seja $r \in B \cap Ann(B)$, se $B = span\{e_1, e_2\}$, então $r = ae_1 + be_2$, para $a, b \in \mathbb{C}$. Logo, como B é uma subálgebra de Lie, não abeliana e bidimensional, pela classificação anterior, podemos supor $e_1e_2 = e_2$. Daí,

$$0 = re_1 = (ae_1 + be_2) = be_2e_1 = -be_2.$$

Como e_2 está na base de B, segue que $b = 0$. Analogamente,

$$re_2 = (ae_1)e_2 = ae_2 = 0,$$

já que $r \in Ann(B)$, temos que $a = 0$ então $r = 0$. E segue o resultado.

□

Com esses resultados podemos classificar, a menos de isomorfismos, as álgebras de Lie tridimensional com álgebra derivada unidimensional, e $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$.

Teorema 2.2.8. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional com álgebra derivada, $\mathcal{L}'$, unidimensional. Se $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$, então existe uma mudança de base para $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_1e_2 = e_1$, $e_3e_1 = 0$ e $e_3e_2 = 0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional com álgebra derivada, $\mathcal{L}'$, unidimensional. Se $\mathcal{L}' \nsubseteq Z(\mathcal{L})$, então pelo Lema 2.2.2, existe B subálgebra não abeliana de $\mathcal{L}$, digamos $B = span\{e_1, e_2\}$ com $e_1e_2 = e_1$, tal produto é garantido pela classificação das álgebras de Lie bidimensionais. Agora, pelo Lema 2.2.3, tal B é um ideal de $\mathcal{L}$. Assim, podemos aplicar a Proposição 2.2.7, e temos $\mathcal{L} = B \oplus Ann(B)$. Portanto, $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$, como $B = span\{e_1, e_2\}$, temos $e_3 \notin B$. Segue que $e_3 \in Ann(B)$, então $e_3e_1 = 0$ e $e_3e_2 = 0$.

□

- <u>**Caso 2:** $dim(\mathcal{L}') = 2$.</u>

Note que neste caso, $(\mathcal{L}')^2 = 0$, ou seja, nesse caso $\mathcal{L}'$ é uma álgebra de Lie abeliana. De fato, se $\mathcal{L}'$ é uma álgebra de Lie não abeliana bidimensional, digamos, $\mathcal{L}' = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1e_2 = e_1$, isto é, $dim((\mathcal{L}')^2) = 1$.

Como $\mathcal{L}'$ é um ideal de $\mathcal{L}$, temos pela Proposição 2.2.7 que $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus Ann(\mathcal{L}')$. Como, $dim(\mathcal{L}') = 2$, e $dim(\mathcal{L}) = 3$, temos que $dim(Ann(\mathcal{L}')) = 1$, e sendo uma subálgebra de $\mathcal{L}$, é abeliano, isto é, $Ann(\mathcal{L}')^2 = 0$. Note,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L}^2 \\ &= (\mathcal{L}' \oplus Ann(\mathcal{L}'))(\mathcal{L}' \oplus Ann(\mathcal{L}')) \\ &= (\mathcal{L}')^2 + \mathcal{L}'(Ann(\mathcal{L}')) + Ann(\mathcal{L}')\mathcal{L}' + Ann(\mathcal{L}')^2 \\ &= (\mathcal{L}')^2 + Ann(\mathcal{L}')^2 \\ &= (\mathcal{L}')^2.\end{aligned}$$

Daí, teríamos que $\mathcal{L}'$ é unidimensional, o que é absurdo.

Lema 2.2.9. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional com álgebra derivada, $\mathcal{L}'$, bidimensional. Então, a derivação $ad_{e_3} : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$ é um isomorfismo, para todo $e_3 \in \mathcal{L} - \mathcal{L}'$.*

Demonstração. Sejam $e_1, e_2 \in \mathcal{L}'$. Como $\mathcal{L}'$ é abeliana, temos $e_1e_2 = 0$. Daí, como $\mathcal{L}'$ é ideal, temos

$$\begin{aligned}ad_{e_3}(e_1e_2) &= e_3(e_1e_2) \\ &= 0 \\ &= (e_3e_1)(e_3e_2) \\ &= ad_{e_3}(e_1)ad_{e_3}(e_1).\end{aligned}$$

Resta ver que ad_{e_3} é bijetora. Considere $\mathcal{L}' = span\{e_1, e_2\}$, como $e_3 \notin \mathcal{L}'$ podemos completar para uma base de $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$. Como $e_1e_2 = 0$ e $\mathcal{L}'$ é bidimensional, então $\{e_2e_3, e_1e_3\}$ geram uma base para $\mathcal{L}'$. De fato, dados $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathcal{L}$ e $y = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \in \mathcal{L}$, teremos que

$$\begin{aligned}xy &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)e_1e_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)e_1e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)e_1e_3.\end{aligned}$$

Agora, seja $z \in Ker(ad_{e_3})$, digamos $z = \alpha e_1 + \beta e_2$. Temos

$$\begin{aligned}0 &= ad_{e_3}(z) \\ &= e_3(\alpha e_1 + \beta e_2) \\ &= \alpha e_3e_1 + \beta e_3e_2.\end{aligned}$$

Como $\{e_2e_3, e_1e_3\}$ formam uma base para $\mathcal{L}'$, temos que $\alpha = \beta = 0$. Daí, $0 = Ker(ad_{e_3})$, donde segue que ad_{e_3} é injetora.

A sobrejetividade de ad_{e_3} segue do Teorema do Núcleo e da Imagem, pois, como $dim(Ker(ad_{e_3})) = 0$, temos que $dim(\mathcal{L}') = dim(Im(ad_{e_3}))$.

□

Teorema 2.2.10. *Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie tridimensional com álgebra derivada, $\mathcal{L}'$, bidimensional. Então, existe uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ para $\mathcal{L}$ tal que $e_1e_2 = 0$, $e_3e_1 = a_1e_1 + a_2e_2$ e $e_3e_2 = b_1e_1 + b_2e_2$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ e*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz inversível.

Demonstração. Seja $\mathcal{L}' = span\{e_1, e_2\}$ e estendendo para uma base de $\mathcal{L}$ temos $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$. Como $\mathcal{L}'$ é abeliana, temos que $e_1e_2 = 0$. Como visto na demonstração do Lema anterior, temos que $\{e_3e_1, e_3e_2\}$ formam também uma base para $\mathcal{L}'$. Daí, temos que existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, tais que $e_3e_1 = a_1e_1 + a_2e_2$ e $e_3e_2 = b_1e_1 + b_2e_2$ com $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ e $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$. Como ad_{e_3} é isomorfismo, pelo Lema 2.2.9, então a matriz

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

é inversível, e portanto sua transposta, $M = \tilde{M}^t$ também o é.

□

Queremos agora encontrar restrições para as constantes de estrutura da álgebra obtida no teorema anterior, para assim determinar sob quais condições duas álgebras são isomorfas. Vamos verificar a identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned}(e_1e_2)e_3 + (e_2e_3)e_1 + (e_3e_1)e_2 = 0 \\ &= 0e_3 - (b_1e_1 + b_2e_2)e_1 + (a_1e_1 + a_2e_2)e_2 \\ &= -b_2e_2e_1 - a_1e_2e_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Com isso não obtemos restrições sob as constantes a_1, a_2, b_1, b_2 do teorema anterior. Com isso, para verificar quando uma álgebra de Lie é isomorfa a álgebra definida no teorema anterior, vamos induzir um isomorfismo. Seja $\mathcal{L}$ a álgebra de Lie definida como no Teorema 2.2.10, e seja $M = span\{m_1, m_2, m_3\}$ outra álgebra de Lie, tal que $\{m_1, m_2\}$ formam uma base para B'. Considere $\varphi : \mathcal{L} \to B'$ um isomorfismo de álgebras. Podemos restringir φ

a um isomorfismo de $\mathcal{L}'$ em B'. Seja $b \in B'$, temos que $\varphi(e_3) = \gamma m_3 + b$, para algum $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$. Como φ é um homomorfismo, temos, para $l \in \mathcal{L}'$, que $\varphi(e_3)\varphi(l) = \varphi(e_3 l)$, mas $ad_{e_3}(l) = e_3 l$, daí $\varphi(e_3)\varphi(l) = \varphi(ad_{e_3}(l))$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi(e_3)\varphi(l) &= (\gamma m_3 + b)\varphi(l)\\ &= \gamma m_3 \varphi(l) + b\varphi(l)\\ &= ad_{\gamma m_3}(\varphi(l)) + ad_b(\varphi(l)).\end{aligned}$$

Mas $ad_b(\varphi(l)) = b\varphi(l) = 0$, já que $b \in B' = span\{m_1, m_2\}$, $l \in \mathcal{L} = span\{e_1, e_2\}$ e transportando b via isomorfismo temos que o produto de $\varphi^{-1}(b)l = 0$, pela tabela multiplicativa de 2.2.10. Obtemos assim que

$$\varphi(ad_{e_3}(l)) = \varphi(e_3)\varphi(l) = ad_{\gamma m_3}(\varphi(l)),\ \forall\, l \in \mathcal{L}'.$$

E temos

$$\varphi \circ ad_{e_3} = ad_{\gamma m_3} \circ \varphi \iff ad_{e_3} = \varphi^{-1} \circ ad_{\gamma m_3} \circ \varphi.$$

Portanto, ad_{e_3} e $ad_{\gamma m_3}$ têm matrizes semelhantes. Com isso, as álgebras de Lie isomorfas à álgebra obtida no teorema são aquelas cujas matrizes das adjuntas são semelhantes. Observe que a matriz M do Teorema 2.2.10 é a matriz correspondente a ad_{e_3}, como vista no Lema 2.2.9. Daí, obtemos que uma álgebra de Lie é isomorfa àquela obtida no teorema quando as matrizes forem semelhantes e inversíveis. Observe que até o Teorema 2.2.10, não usamos o fato de estarmos sob o corpo dos complexos; assim, a classificação apresentada até o momento pode ser usada para um corpo qualquer, só precisando ter atenção sobre a característica do corpo que será usado, como feito em [14]. Porém, como estamos sobre o corpo dos complexos, que é algebricamente fechado, sabemos, pela forma canônica de Jordan, quais matrizes são semelhantes. Analisando o polinômio característico de M temos duas possibilidades.

Se λ_1, λ_2 são duas raízes distintas, temos que a matriz M é diagonalizável e, portanto, semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Se possui $\lambda_1 = \lambda_2$, analisando o polinômio minimal, temos que a matriz M é semelhante à λI ou M é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}.$$

Como a matriz M é inversível, temos que os autovalores são não nulos. Assim, podemos reescrever os três casos, que são essencialmente dois, permitindo que a matriz diagonal, $diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$, seja um múltiplo da identidade, em

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, ao multiplicarmos as matrizes por λ_1^{-1}.

Observe que para a álgebra determinada por $e_1e_2 = 0,\ e_3e_2 = e_2$ e $e_3e_1 = e_1 + \beta e_2$ podemos tomar uma mudança de base dada por $\hat{e_1} = \frac{1}{\beta}e_1$ e teremos o produto na base como $\hat{e_1}e_2 = 0,\ e_3e_2 = e_2$ e $e_3\hat{e_1} = \hat{e_1} + e_2$.

Assim, existe uma família paramétrica e uma álgebra de Lie tridimensionais com álgebra derivada bidimensional que são dadas pelos produtos:

$$\mathcal{L}_3 : \ e_1e_2 = 0,\ e_3e_1 = e_1 \text{ e } e_3e_2 = \alpha e_2,$$

e

$$\mathcal{L}_4 : \ e_1e_2 = 0,\ e_3e_1 = e_1 + e_2 \text{ e } e_3e_2 = e_2.$$

Observação 2.2.11. *Note que para $\beta = 0$,as álgebras determinadas pelas matrizes anteriores são isomorfas para $\alpha = 1$.*

Observação 2.2.12. *Observe que as álgebras $\mathcal{L}_3$ e $\mathcal{L}_4$ não são isomorfas.*
De fato, suponha, por absurdo, que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}_3 &\longrightarrow \mathcal{L}_4 \\ e_1' &\longmapsto a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ e_2' &\longmapsto b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ e_3' &\longmapsto c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}$$

seja um isomorfismo de álgebras e T a matriz associada a essa transformação. Note que,

$$\begin{aligned} \varphi(e_1'e_2') &= -a_1b_3(e_1 + e_2) - a_2b_3e_2 + a_3b_1(e_1 + e_2) + a_3b_2e_2 \\ &= \varphi(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$a_3b_1 - a_1b_3 = 0 \text{ e } a_3b_2 + a_2b_3 = 0.$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\varphi(e_3'e_1') &= -c_1a_3(e_1+e_2) - c_2a_3e_2 + c_3a_1(e_1+e_2) + c_3a_2e_2 \\ &= \varphi(e_1') \\ &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3.\end{aligned}$$

Logo,

$$a_3 = 0,\ a_1 = c_3a_1 \ e \ a_2 = c_3a_1 + c_3a_2.$$

Assim,

$$c_3 = 1,\ b_3 = 0 \ e \ a_1 = 0. \tag{2.1}$$

Também,

$$\begin{aligned}\varphi(e_3'e_2') &= b_1(e_1+e_2) + b_2e_2 \\ &= \varphi(\alpha e_2') \\ &= \alpha(b_1e_1 + b_2e_2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$b_2 = \alpha(b_2 - b_1) \ e \ b_1 = \alpha b_1.$$

Como $\alpha \neq 0$, por hipótese, temos dois casos para verificar, se $\alpha = 1$ e se $b_2 = 0$. Quando $\alpha = 1$, temos $b_1 = 0$ e assim, $det(T) = -b_1a_2 = 0$, o que é absurdo, já que φ é bijetora. E no caso em que $b_2 = 0$, novamente $b_1 = 0$ e segue novamente o absurdo. Assim, $\mathcal{L}_3$ e $\mathcal{L}_4$ não podem ser isomorfas.

- **Caso 3:** $dim(\mathcal{L}') = 3$.

Para classificação desse caso, vamos introduzir a noção de matrizes cogradientes.

Definição 2.2.13. *Sejam $A,B \in M_n(\mathbb{K})$, dizemos que A e B são cogradientes, ou multiplicativamente cogradientes, se existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversível e $\rho \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $A = \rho P^tBP$. Denotaremos que A e B são cogradientes por $A \sim_C B$.*

Quando não houver possibilidade de confusão com o símbolo de equivalência para matrizes, denotaremos apenas $\sim$.

Teorema 2.2.14 ([10],Corolário do Teorema 3,p.369)**.** *Seja $\mathbb{F}$ subcorpo de $\mathbb{C}$, e seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ simétrica. Então existe $P \in M_n(\mathbb{F})$ inversível tal que P^tAP é diagonal.*

Proposição 2.2.15. *Se $A \in M_3(\mathbb{C})$ é simétrica e inversível, então A é cogradiente com a matriz $diag\{\alpha, \beta, 1\}$.*

Demonstração. Seja $A \in M_3(\mathbb{C})$ simétrica, pelo Teorema 2.2.14, existe $P \in M_3(\mathbb{C})$ inversível tal que P^tAP é diagonal, digamos

$$P^tAP = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

para $\alpha', \beta', \gamma \in \mathbb{C}$. Agora, como A e P são inversível, temos que $\alpha', \beta', \gamma \neq 0$ daí, definindo $\alpha = \gamma^{-1}\alpha'$ e $\beta = \gamma^{-1}\beta'$ temos que

$$\gamma^{-1}P^tAP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde segue que $A \sim diag\{\alpha, \beta, 1\}$.

□

Teorema 2.2.16. *Seja $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$ uma álgebra de Lie tridimensional com sua álgebra derivada de mesma dimensão. Então existe uma mudança de base $\mathcal{L} = span\{e_1', e_2', e_3'\}$ tal que o produto na base é dado por $e_1'e_2' = e_3'$, $e_2'e_3' = e_1'$ e $e_3'e_1' = e_2'$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L} = span\{e_1, e_2, e_3\}$, digamos $\beta_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Note que, como $dim(\mathcal{L}) = dim(\mathcal{L}')$ e álgebra derivada é um ideal de $\mathcal{L}$, segue que $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

Agora, defina $f_1 = e_2e_3$, $f_2 = e_3e_1$ e $f_3 = e_1e_2$, formando assim uma base para $\mathcal{L}'$ e portanto para $\mathcal{L}$, chamemos de $\beta_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ a base de $\mathcal{L}$ e seja $f_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}e_j$ então $A = (\alpha_{ij})_{3x3}$ a matriz mudança de base de β_1 para β_2. Seja, ainda, $\beta_3 = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$ outra base de $\mathcal{L}$ onde $\bar{e_i} = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij}e_j$ de modo que $M = (\mu_{ij})_{3x3}$ seja a matriz mudança de base de β_1 para β_3. Defina $\bar{f_1} = \bar{e_2}\bar{e_3}$, $\bar{f_2} = \bar{e_3}\bar{e_1}$ e $\bar{f_3} = \bar{e_1}\bar{e_2}$, formando uma nova base para álgebra derivada, e portanto para $\mathcal{L}$, digamos $\beta_4 = \{\bar{f_1}, \bar{f_2}, \bar{f_3}\}$. Então, $\bar{f_i} = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij}\bar{e_j}$, tal que $\bar{A} = (\gamma_{ij})_{3\times 3}$ é matriz mudança de base de β_3 para β_4. Note que,

$$\begin{aligned}
\bar{f_1} &= \bar{e_2}\bar{e_3} \\
&= (\sum_{j=1}^{3} \mu_{2j}e_j)(\sum_{k=1}^{3} \mu_{3k}e_k) \\
&= (\mu_{21}e_1 + \mu_{22}e_2 + \mu_{23}e_3)(\mu_{31}e_1 + \mu_{32}e_2 + \mu_{33}e_3) \\
&= (\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32})f_1 + (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}\mu_{33})f_2 + (\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31})f_3 \\
&:= \nu_{11}f_1 + \nu_{12}f_2 + \nu_{13}f_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f_2} &= \bar{e_3}\bar{e_1} \\
&= (\sum_{j=1}^{3} \mu_{3j} e_j)(\sum_{k=1}^{3} \mu_{1k} e_k) \\
&= (\mu_{31}e_1 + \mu_{32}e_2 + \mu_{33}e_3)(\mu_{11}e_1 + \mu_{12}e_2 + \mu_{13}e_3) \\
&= (\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33})f_1 + (\mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}\mu_{31})f_2 + (\mu_{12}\mu_{31} - \mu_{11}\mu_{32})f_3 \\
&:= \nu_{21}f_1 + \nu_{22}f_2 + \nu_{23}f_3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{f_3} &= \bar{e_1}\bar{e_2} \\
&= (\sum_{j=1}^{3} \mu_{1j} e_j)(\sum_{k=1}^{3} \mu_{2k} e_k) \\
&= (\mu_{11}e_1 + \mu_{12}e_2 + \mu_{13}e_3)(\mu_{21}e_1 + \mu_{22}e_2 + \mu_{23}e_3) \\
&= (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})f_1 + (\mu_{13}\mu_{21} - \mu_{11}\mu_{23})f_2 + (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21})f_3 \\
&:= \nu_{31}f_1 + \nu_{32}f_2 + \nu_{33}f_3.
\end{aligned}$$

Daí, $N = (\nu_{ij})_{3\times 3}$ é a matriz mudança de base de β_2 para β_4 e $N = adj(M^t) = det(M^t)(M^t)^{-1}$. De fato,

$$\operatorname{adj}(M^t) = \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} \mu_{22} & \mu_{32} \\ \mu_{23} & \mu_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \mu_{12} & \mu_{32} \\ \mu_{13} & \mu_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mu_{12} & \mu_{22} \\ \mu_{13} & \mu_{23} \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{23} & \mu_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{31} \\ \mu_{13} & \mu_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} \\ \mu_{13} & \mu_{23} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{22} & \mu_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{31} \\ \mu_{12} & \mu_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} \\ \mu_{12} & \mu_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32} & \mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33} & \mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22} \\ \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}\mu_{33} & \mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}\mu_{31} & \mu_{13}\mu_{21} - \mu_{11}\mu_{23} \\ \mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31} & \mu_{12}\mu_{31} - \mu_{11}\mu_{32} & \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}\mu_{32} & \mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}\mu_{33} & \mu_{21}\mu_{32} - \mu_{22}\mu_{31} \\ \mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}\mu_{33} & \mu_{11}\mu_{33} - \mu_{13}\mu_{31} & \mu_{12}\mu_{31} - \mu_{11}\mu_{32} \\ \mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22} & \mu_{13}\mu_{21} - \mu_{11}\mu_{23} & \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{pmatrix} := \det(M^t) \cdot (M^t)^{-1}.$$

Agora, como temos que M é a matriz mudança de base de β_1 para β_3, então M^{-1} é a de β_3 para β_1. Ainda, A é a matriz mudança de base de β_1 para β_2, e N é a de β_2 para β_4. Como $\bar{A}$ é matriz mudança de base de β_3 para β_4, podemos calcular $\bar{A}$, como sendo

$$\begin{aligned} \bar{A} &= NAM^{-1} \\ &= \det(M^t)(M^t)^{-1}AM^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vamos agora verificar que a matriz A, definida anteriormente como $A = (\alpha_{ij})_{3\times 3}$ a matriz mudança de base de $\beta_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ para $\beta_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ é simétrica. Pela identidade de Jacobi temos,

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1e_2)e_3 + (e_2e_3)e_1 + (e_3e_1)e_2 \\ &= f_3e_3 + f_1e_1 + f_2e_2 \\ &= (\alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3)e_3 + (\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3)e_1 + (\alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3)e_2 \\ &= -\alpha_{31}f_2 + \alpha_{32}f_1 - \alpha_{12}f_3 + \alpha_{13}f_2 + \alpha_{21}f_3 - \alpha_{23}f_1 \\ &= (\alpha_{32} - \alpha_{23})f_1 + (\alpha_{13} - \alpha_{31})f_2 + (\alpha_{21} - \alpha_{12})f_3. \end{aligned}$$

Daí, $\alpha_{32} - \alpha_{23} = 0$, $\alpha_{13} - \alpha_{31} = 0$ e $\alpha_{21} - \alpha_{12} = 0$. Logo, a matriz A é simétrica. Ainda, como A é mudança de base, é também inversível. Podemos, então aplicar a Proposição 2.2.15. Daí, existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversível e $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$ tais que $diag(\alpha, \beta, 1) = \rho P^t A P$. Seja $\sigma \in \mathbb{C} - \{0\}$ temos

$$\begin{aligned} diag(\alpha, \beta, 1) &= \rho P^t A P \\ &= \rho\sigma^2(\sigma^{-1}P)^t A(\sigma^{-1}P). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Lembre que definimos $M = (\mu_{ij})_{3x3}$ de modo que fosse a matriz mudança de base de β_1 para β_3, daí tome $M = \sigma P^{-1}$. Logo, $M^{-1} = \sigma^{-1}P$. Seja $\sigma = \frac{det((P^{-1})^t)}{\rho}$, temos que

$$\begin{aligned} \rho\sigma^2 &= \rho\left(\frac{\det\left((P^{-1})^t\right)}{\rho}\right)^2 \\ &= \frac{\det\left((P^{-1})^t\right)}{\rho} \cdot \det\left((P^{-1})^t\right) \\ &= \sigma \cdot \det\left((P^{-1})^t\right) \\ &= \det\left(\sigma \cdot (P^{-1})^t\right) \\ &= \det\left(M^t\right). \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever a igualdade 2.3 como, $diag(\alpha, \beta, 1) = det(M^t)(M^{-1})^t A(M^{-}1)$. Temos que $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$, pois $M^t((M^{-1})^t) = (M^{-1}M)^t = I^t$. Daí, segue por 2.2 que $diag(\alpha, \beta, 1) = \bar{A}$.

Agora, como $\bar{A} = (\gamma_{ij})_{3\times3}$ é matriz mudança de base de β_3 para β_4, tal que $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij}\bar{e}_j$ e como $\bar{f}_1 = \bar{e_2}\bar{e_3}$, $\bar{f}_2 = \bar{e_3}\bar{e_1}$ e $\bar{f}_3 = \bar{e_1}\bar{e_2}$, temos que

$\bar{e_2}\bar{e_3} = \bar{f}_1 = \alpha\bar{e_1}$,

$\bar{e_3}\bar{e_1} = \bar{f}_2 = \beta\bar{e_2}$, e

$\bar{e_1}\bar{e_2} = \bar{f}_3 = \bar{e_3}$.

Por fim, como por 2.2.15 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ e sendo $\mathbb{C}$ um corpo algebricamente fechado, considere a mudança de base dada por $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,\bar{e_1}$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\bar{e_2}$ e $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{\beta\alpha}}\,\bar{e_3}$. Temos,

$$e'_1e'_2 = \tfrac{1}{\sqrt{\beta}}\,\bar{e_1}\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\bar{e_2} = \tfrac{1}{\sqrt{\beta\alpha}}\,\bar{e_3} = e'_3,$$

$$e'_2e'_3 = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\bar{e_2}\tfrac{1}{\sqrt{\beta\alpha}}\,\bar{e_3} = \tfrac{\alpha}{\alpha\sqrt{\beta}}\,\bar{e_1} = e'_1,$$

$$e'_3e'_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\beta\alpha}}\,\bar{e_3}\tfrac{1}{\sqrt{\beta}}\,\bar{e_1} = \tfrac{\beta}{\beta\sqrt{\alpha}}\,\bar{e_2} = e'_2.$$

Assim, conseguimos uma mudança de base onde a álgebra $\mathcal{L}$ tem produto na base dado por $e'_1e'_2 = e'_3$, $e'_2e'_3 = e'_1$ e $e'_3e'_1 = e'_2$. □

Concluímos, assim, que as álgebras de Lie tridimensionais são, a menos de isomorfismo, uma das seguintes:

	$\dim(\mathcal{L}')$	Produto
$\mathcal{L}_0$	$\mathcal{L}' = 0$	abeliana
$\mathcal{L}_1$	1	$e_1e_2 = e_1$, $e_1e_3 = e_1$,
$\mathcal{L}_2$	1	$e_1e_2 = e_1$,
$\mathcal{L}_3$	2	$e_3e_1 = e_1$, $e_3e_2 = \alpha e_2$ com $\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}_4$	2	$e_3e_2 = e_2$, $e_3e_1 = e_1 + e_2$
$\mathcal{L}_5$	3	$e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$

Observação 2.2.17. *Quando $\alpha = 0$, a álgebra tridimensional pode ser decomposta como soma direta da álgebra de Lie bidimensional, gerada por e_1, e_3 e a álgebra de Lie unidimensional, gerada por e_2.*

Exemplo 2.2.18. *A álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, composta por todas as matrizes 2×2 com traço zero sobre $\mathbb{C}$. As matrizes*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

formam uma base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, que é uma álgebra de Lie quando definimos o colchete de Lie, visto no Capítulo 1. Temos que $[e,f] = h$, $[e,h] = -2e$, e $[f,h] = -2f$. Note que a álgebra derivada de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ é tridimensional. De fato, dados $x = \alpha_1 e + \alpha_2 f + \alpha_3 h$ e $y = \beta_1 e + \beta_2 f + \beta_3 h$ e

$$\begin{aligned} [x,y] &= [\alpha_1 e + \alpha_2 f + \alpha_3 h, \beta_1 e + \beta_2 f + \beta_3 h] \\ &= [\alpha_1 e, \beta_2 f] + [\alpha_1 e, \beta_3 h] + [\alpha_2 f, \beta_1 e] + [\alpha_2 f, \beta_3 h] + [\alpha_3 h, \beta_2 f] + [\alpha_3 h, \beta_1 e] \\ &= \alpha_1\beta_2 h - 2\alpha_1\beta_3 e - \alpha_2\beta_1 h - 2\alpha_2\beta_3 f + 2\alpha_3\beta_2 f + 2\alpha_3\beta_1 e \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)h + 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e + 2(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)f. \end{aligned}$$

Assim, a álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ é, a menos de isomorfismo, a álgebra de Lie tridimensional com produto $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$.

Capítulo 3

Álgebras de Leibniz

Nesse capítulo, vamos determinar a menos de isomorfismos as álgebras de Leibniz não Lie de dimensão menor ou igual a três sobre o corpo dos complexos, $\mathbb{C}$. Os resultados aqui apresentados foram baseados, em [4], que por sua vez usou como referência principal [21]; usamos também [2]. Recomenda-se a leitura dessa última àqueles que quiserem aprofundar seus estudos sobre álgebras de Leibniz.

3.1 Classificação das álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a dois

Seja L uma álgebra de Leibniz não Lie sobre um corpo $\mathbb{C}$. Suponha $dim(L) = 1$. Seja $a \in L$, como L não é Lie temos $a^2 \neq 0$, daí, existe $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $a^2 = \beta a$. Pela identidade de Leibniz temos que

$$(aa)a = (aa)a + a(aa) \Leftrightarrow 0 = \beta(aa),$$

donde segue que $a^2 = 0$ o que é uma contradição. Portanto, a única álgebra de Leibniz unidimensional é a álgebra de Lie abeliana de mesma dimensão .

Teorema 3.1.1. *As álgebras de Leibniz bidimensionais, tais que $L^2 \neq 0$ são isomorfas a:*

$A_2 = span\{e_1, e_2\}; e_1e_2 = e_1 = -e_2e_1$

$A_3 = span\{e_1, e_2\}; e_1e_1 = e_2$

$A_4 = span\{e_1, e_2\}; e_1e_1 = e_2, e_2e_1 = e_2$

Demonstração. Seja L a álgebra de Leibniz tal que $dim(L) = 2$. Se L for de Lie, vimos, no capítulo anterior, em 2.1.1 que L $\cong A_2$. Suponha então que L é não Lie. Daí, existe $m_1 \in L$ não nulo tal que $m_1^2 \neq 0$ e mais, para todo $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $m_1^2 \neq \beta m_1$. De fato, se $m_1^2 = \beta m_1$, então

$$\begin{aligned}(m_1m_1)m_1 &= m_1(m_1m_1) + (m_1m_1)m_1\\ 0 &= m_1(m_1m_1)\\ 0 &= m_1(\beta m_1)\\ 0 &= \beta^2 m_1\end{aligned}$$

sendo $\beta \neq 0$ chegaríamos $m_1 = 0$, o que é absurdo.

Seja $m_2 = m_1^2$, temos que $L = span\{m_1, m_2\}$. Daí, pela identidade de Leibniz

$$(m_2m_1)m_1 = (m_2m_1)m_1 + m_2(m_1m_1) \Leftrightarrow 0 = m_2^2.$$

Ainda,

$$(m_1m_1)m_1 = m_1(m_1m_1) + (m_1m_1)m_1 \Leftrightarrow m_1m_2 = 0.$$

Suponha que existem $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $m_2m_1 = am_1 + bm_2$. Segue que,

$$(m_1m_2)m_1 = (m_1m_1)m_2 + m_1(m_2m_1) \Rightarrow 0 = 0 + (am_1^2 + bm_1m_2) \Rightarrow am_1^2 = 0.$$

Como $m_1^2 = m_2$, segue que $a = 0$ e portanto $m_2m_1 = bm_2$. Temos, então, dois casos:

(i) Se $b = 0$, $L = span\{m_1, m_2\}$ tal que $m_2^2 = m_1m_2 = m_2m_1 = 0$ e $m_1^2 = m_2$, é isomorfa a álgebra A_3.

(ii) Se $b \neq 0$, daí, $L = span\{\hat{m_1}, \hat{m_2}\}$, onde $\hat{m_1} = b^{-1}m_1$ e $\hat{m_2} = b^{-2}m_2$. Logo, $\hat{m_2}\hat{m_1} = \hat{m_2}$, $\hat{m_1}^2 = \hat{m_2}$ e $\hat{m_2}^2 = 0 = \hat{m_1}\hat{m_2}$, é isomorfa a A_4.

Note ainda que as álgebras não são duas a duas isomorfas. Como A_2 é a álgebra de Lie de dimensão 2 e as demais são não Lie temos que A_2 não é isomorfa a A_3 nem a A_4. Resta ver que A_3 e A_4 não são isomorfas. Suponha que $A_3 \cong A_4$, tais que $A_3 = span\{m_1, m_2\}$ e $A_4 = span\{\hat{m_1}, \hat{m_2}\}$. Teríamos então o isomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\varphi : A_3 &\to A_4\\ m_1 &\mapsto \varphi(m_1) = \alpha_1\hat{m_1} + \alpha_2\hat{m_2}\\ m_2 &\mapsto \varphi(m_2) = \beta_1\hat{m_1} + \beta_2\hat{m_2},\end{aligned}$$

tal que $\{\varphi(m_1), \varphi(m_2)\}$ é uma base de A_4, então $\varphi(m_1)\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ e $\varphi(m_2)\varphi(m_1) =$

$\varphi(m_2)$. Ainda,

$$
\begin{aligned}
\varphi(m_1)\varphi(m_1) &= \varphi(m_2)\\
(\alpha_1\hat{m}_1 + \alpha_2\hat{m}_2)(\alpha_1\hat{m}_1 + \alpha_2\hat{m}_2) &= \beta_1\hat{m}_1 + \beta_2\hat{m}_2\\
(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2)\hat{m}_2 &= \beta_1\hat{m}_1 + \beta_2\hat{m}_2.
\end{aligned}
$$

Logo, $\beta_1 = 0$. Ainda,

$$
\begin{aligned}
\varphi(m_2)\varphi(m_1) &= \varphi(m_2)\\
\varphi(m_2m_1) &= \varphi(m_2)\\
\varphi(0) &= \varphi(m_2)\\
0 &= \beta_2\hat{m}_2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\beta_2 = 0$ concluindo assim que $\varphi(m_2) = 0$, o que é uma contradição, já que m_2 está na base. Assim, A_3 e A_4 não são isomorfas.

□

Observação 3.1.2. *A classificação feita para dimensão um e dois para as álgebras de Leibniz, como apresentada, é sobre o corpo dos complexos, porém a classificação permanece a mesma se tratando de um corpo qualquer. A escolha de trabalhar sobre os complexos foi para manter a coerência em relação aos resultados apresentados para dimensão 3, nos quais em diversos momentos é utilizado o fato de estarmos sobre o corpo dos complexos.*

3.2 Classificação das álgebras de Leibniz não Lie de dimensão três

Classificaremos agora as álgebras de Leibniz não Lie tridimensionais. Tal classificação é feita a partir da dimensão do anulador à direita da álgebra L. Note que $Ann_D(L) \neq 0$ e $dim(Ann_D(L)) \neq 3$. De fato $Ann_D(L) \neq 0$, pois como L não é Lie, tome $y \in L$ tal que $y^2 \neq 0$. Pela identidade de Leibniz, $(xy)y = (xy)y + x(yy)$, temos $x(yy) = 0$ e, portanto, $y^2 = yy \in Ann_D(L)$. Ainda, se $dim(Ann_D(L)) = 3$, estaríamos trivializando a álgebra. Assim, vamos avaliar dois casos: quando $dim(Ann_D(L)) = 1$ e quando $dim(Ann_D(L)) = 2$.

- **<u>Caso 1:</u>** $dim(Ann_D(L)) = 1$.

Seja $\{e_1\}$ uma base para o anulador à direita de L. Considere $L = span\{e_1, e_2, e_3\}$. Pela identidade de Leibniz, temos que $e_i(e_je_j) = (e_ie_j)e_j - (e_ie_j)e_j = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Daí, $e_j^2 \in Ann_D(L)$. Como $Ann_D(L)$ é um ideal da álgebra de Leibniz L, encontramos os produtos, para a base, abaixo:

Como $e_1 \in Ann_D(L)$ temos $e_1e_1 = 0$, $e_2e_1 = 0$ e $e_3e_1 = 0$. Ainda, como $e_j^2 \in Ann_D(L)$ temos $e_2e_2 = \alpha_2e_1$ e $e_3e_3 = \alpha_4e_1$.

Sejam $e_3e_2 = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3$ e $e_2e_3 = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3$. Daí, pela propriedade de Leibniz podemos obter $e_1e_3 = \alpha_3e_1$ já que

$$\begin{aligned} e_3(e_1e_3) &= (e_3e_1)e_3 - (e_3e_3)e_1 \\ ae_3e_1 + be_3e_2 + ce_3e_3 &= 0 \Rightarrow b = c = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos $e_1e_2 = \alpha_1e_1$. Ainda,

$$\begin{aligned} e_1(e_3e_2) &= (e_1e_3)e_2 - (e_1e_2)e_3 \\ e_1(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3) &= \alpha_3(e_1e_2) - \alpha_1(e_1e_3) \\ \beta_2(e_1e_2) + \beta_3(e_1e_3) &= \alpha_3(e_1e_2) - \alpha_1(e_1e_3) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} e_1(e_2e_3) &= (e_1e_2)e_3 - (e_1e_3)e_2 \\ e_1(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3) &= \alpha_1(e_1e_3) - \alpha_3(e_1e_2) \\ \gamma_2(e_1e_2) + \gamma_3(e_1e_3) &= -\alpha_3(e_1e_2) + \alpha_1(e_1e_3) \end{aligned}$$

Das igualdades temos $\gamma_2 = -\beta_2$ e $\gamma_3 = -\beta_3$.

Portanto, suprimindo os produtos nulos, temos a seguinte tabela multiplicativa:

$$\begin{aligned} e_1e_2 &= \alpha_1e_1 \\ e_2e_2 &= \alpha_2e_1 \\ e_1e_3 &= \alpha_3e_1 \\ e_3e_3 &= \alpha_4e_1 \\ e_3e_2 &= \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3 \\ e_2e_3 &= \gamma_1e_1 - \beta_2e_2 - \beta_3e_3. \end{aligned}$$

- **<u>Caso 1.1:</u>** Seja $dim(L^2) = 2$.

Note que $dim(L^2) = 2$ se, e somente se, $(\beta_2, \beta_3) \neq (0,0)$. De fato, da tabela acima temos

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 + \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $\gamma_1 + \beta_1 \neq 0$, já que L não é Lie, daí $dim(L^2) = 2 \Leftrightarrow (\beta_2, \beta_3) \neq (0,0)$.

Vamos assumir que $\beta_2 \neq 0$, pois, caso contrário, conseguimos uma mudança de base em que o coeficiente de $e_2^{'}$ não se anula. De fato, suponha $\beta_2 = 0$ e seja $e_1^{'} = e_1, e_2^{'} = e_3, e_3^{'} = -e_2$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} e_3^{'}e_2^{'} &= -e_2e_3 \\ &= -\gamma_1 e_1 + \beta_3 e_3, \\ &= -\gamma_1 e_1^{'} + \beta_3 e_2^{'} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_2^{'}e_3^{'} &= -e_3e_2 \\ &= -\beta_1 e_1 + \beta_3 e_3 \\ &= -\beta_1 e_1^{'} + \beta_3 e_2^{'}. \end{aligned}$$

Agora, com $\beta_2 \neq 0$ temos, a menos da mudança de base dada por $e_1^{'} = e_1, e_2^{'} = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, e_3^{'} = \frac{1}{\beta_2} e_3$, que β_3, o coeficiente de $e_3^{'}$ é zero. De fato,

$$\begin{aligned} e_3^{'}e_2^{'} &= e_3e_2 + \frac{\alpha_4\beta_3}{\beta_2}e_1 \\ &= (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) + \frac{\alpha_4\beta_3}{\beta_2}e_1^{'} \\ &= \frac{\alpha_4\beta_3 + \beta_2\beta_1}{\beta_2}e_1^{'} + (e_2^{'} - \beta_3 e_3) + \beta_3 e_3 \\ &= \beta_1^{'} e_1^{'} + e_2^{'}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} e_2^{'}e_3^{'} &= e_2e_3 + \frac{\alpha_4\beta_3}{\beta_2}e_1 \\ &= \gamma_1^{'} e_1^{'} - e_2^{'}. \end{aligned}$$

Chamando $\{e_1', e_2', e_3'\}$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\beta_1' = \beta_1$ e γ_1' de γ_1 (faremos isso sempre que fizermos uma mudança de base), temos que a tabela de multiplicação de L tem a forma

$$\begin{aligned}
e_1e_2 &= \alpha_1 e_1,\\
e_2e_2 &= \alpha_2 e_1,\\
e_1e_3 &= \alpha_3 e_1,\\
e_3e_3 &= \alpha_4 e_1,\\
e_3e_2 &= \beta_1 e_1 + e_2,\\
e_2e_3 &= \gamma_1 e_1 - e_2.
\end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Leibniz,

$$\begin{aligned}
(e_1e_2)e_3 &= (e_1e_3)e_2 + e_1(e_2e_3)\\
\alpha_1(e_1e_3) &= \alpha_3(e_1e_2) + e_1(\gamma_1e_1 - e_2)\\
\alpha_1\alpha_3e_1 &= \alpha_1\alpha_3e_1 + \gamma_1(e_1e_1) - e_1e_2\\
0 &= -\alpha_1e_1.
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha_1 = 0$. Ainda,

$$\begin{aligned}
(e_2e_2)e_3 &= (e_2e_3)e_2 + e_2(e_2e_3)\\
\alpha_2(e_1e_3) &= (\gamma_1e_1 - e_2)e_2 + e_2(\gamma_1e_1 - e_2)\\
\alpha_2\alpha_3e_1 &= \gamma_1\alpha_1e_1 - 2\alpha_2e_1\\
\alpha_2\alpha_3e_1 &= -2\alpha_2e_1.
\end{aligned}$$

Segue que $\alpha_2(\alpha_3 + 2)e_1 = 0$. E mais,

$$\begin{aligned}
(e_3e_3)e_2 &= (e_3e_2)e_3 + e_3(e_3e_2)\\
\alpha_2(e_1e_2) &= (\beta_1e_1 + e_2)e_3 + e_3(\beta_1e_1 + e_2)\\
0 &= \beta_1(e_1e_3) + e_2e_3 + \beta_1(e_3e_1) + e_3e_2\\
0 &= \beta_1\alpha_3e_1 + \gamma_1e_1 - e_2 + \beta_1e_1 + e_2\\
0 &= (\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1)e_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 = 0$. E temos as seguintes relações para as constantes

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2(2 + \alpha_3) = 0, \quad \gamma_1 = -\beta_1(1 + \alpha_3). \tag{3.1}$$

Vamos analisar os casos em relação às constantes.

<u>**Caso 1.1.1:**</u> $\alpha_2 \neq 0$

De (3.1), temos que $\alpha_3 = -2$ e $\gamma_1 = \beta_1$. A tabela multiplicativa de L se reduz em:

$$\begin{aligned}
e_2e_2 &= \alpha_2 e_1,\\
e_1e_3 &= -2e_1,\\
e_3e_3 &= \alpha_4 e_1,\\
e_3e_2 &= \beta_1 e_1 + e_2,\\
e_2e_3 &= \beta_1 e_1 - e_2.
\end{aligned}$$

Aplicando a mudança de base dada por $e_1^{'} = \alpha_2 e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = \dfrac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2}e_1 - \dfrac{\beta_1}{\alpha_2}e_2 + e_3$. Obtemos,

$$e_2^{'}e_2^{'} = e_2e_2 = \alpha_2e_1 = e_1^{'}.$$

Também,

$$\begin{aligned}
e_1^{'}e_3^{'} &= \alpha_2 e_1\left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2}e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2 + e_3\right)\\
&= -\beta_1(e_1e_2) + \alpha_2(e_1e_3)\\
&= -2\alpha_2e_1\\
&= -2e_1^{'}.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
e_3^{'}e_2^{'} &= \left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2}e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2 + e_3\right)e_2\\
&= -\frac{\beta_1}{\alpha_2}(e_2e_2) + (e_3e_2)\\
&= -\frac{\beta_1}{\alpha_2}\alpha_2e_1 + \beta_1e_1 + e_2\\
&= e_2\\
&= e_2^{'}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
e_3^{'}e_3^{'} &= \left(\frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}e_1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2+e_3\right)\left(\frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}e_1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2+e_3\right)\\
&= \frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}(e_1e_3)+\frac{\beta_1^2}{\alpha_2^2}(e_2e_2)-\frac{\beta_1}{\alpha_2}(e_2e_3)-\frac{\beta_1}{\alpha_2}(e_3e_2)+e_3e_3\\
&= -\frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}e_1++\frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}(\beta_1e_1-e_2)-\frac{\beta_1}{\alpha_2}(\beta_1e_1+e_2)+\alpha_4e_1\\
&= -\frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}e_1-\frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1+\alpha_4e_1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
e_2^{'}e_3^{'} &= e_2\left(\frac{\alpha_2\alpha_4-\beta_1^2}{2\alpha_2}e_1-\frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2+e_3\right)\\
&= -\frac{\beta_1}{\alpha_2}(e_2e_2)+(e_2e_3)\\
&= -\frac{\beta_1}{\alpha_2}\alpha_2e_1+\beta_1e_1-e_2\\
&= -e_2\\
&= -e_2^{'}.
\end{aligned}
$$

Obtemos assim a álgebra dada por:

$$
\begin{aligned}
e_2e_2 &= e_1,\\
e_1e_3 &= -2e_1,\\
e_3e_2 &= e_2,\\
e_2e_3 &= -e_2,
\end{aligned}
$$

a qual denotaremos como RR_1.

<u>Caso 1.1.2:</u> Seja $\alpha_2 = 0$. Temos:

$$
\begin{aligned}
e_1e_3 &= \alpha_3e_1,\\
e_3e_3 &= \alpha_4e_1,\\
e_3e_2 &= \beta_1e_1+e_2,\\
e_2e_3 &= -\beta_1(1+\alpha_3)e_1-e_2.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Caso 1.1.2.1: Suponha que $\alpha_4 = 0$, então necessariamente $\alpha_3 \neq 0$, pois caso contrário, teríamos que $e_3e_2 = -e_2e_3$ e os demais nulos, ou seja, teríamos uma álgebra de Lie. Temos assim:

$$\begin{aligned} e_1e_3 &= \alpha_3e_1, \\ e_3e_2 &= \beta_1e_1 + e_2, \\ e_2e_3 &= -\beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Caso 1.1.2.1.1: Seja, agora, $\beta_1 = 0$. Então temos a seguinte tabela de multiplicação:

$$\begin{aligned} e_1e_3 &= \alpha_3e_1, \\ e_3e_2 &= e_2, \\ e_2e_3 &= -e_2. \end{aligned}$$

Esta classe de álgebras será denotada por RR_2.

Caso 1.1.2.1.2: Agora, seja $\beta_1 \neq 0$. Como $\alpha_3 \neq 0$ fazemos a mudança de base dada por $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = \frac{1}{\alpha_3}e_1 + e_3$, obtemos os produtos

$$\begin{aligned} e_1^{'}e_3^{'} &= \alpha_3e_1^{'}, \\ e_3^{'}e_2^{'} &= (\tfrac{1}{\alpha_3}e_1 + e_3)e_2 = \beta_1e_1^{'} + e_2^{'}, \\ e_2^{'}e_3^{'} &= e_2(\tfrac{1}{\alpha_3}e_1 + e_3) = -\beta_1(1+\alpha_3)e_1^{'} - e_2^{'}, \end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned} e_3^{'}e_3^{'} &= (\tfrac{1}{\alpha_3}e_1 + e_3)(\tfrac{1}{\alpha_3}e_1 + e_3) \\ &= \tfrac{1}{\alpha_3}(e_1e_3) + (e_3e_3) \\ &= e_1 + \alpha_4e_1 \\ &= e_1^{'}. \end{aligned}$$

Obtemos a tábua:

$$\begin{aligned} e_1e_3 &= \alpha_3 e_1, \\ e_3e_3 &= e_1, \\ e_3e_2 &= \beta_1 e_1 + e_2, \\ e_2e_3 &= -\beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A partir dessa, tomando $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = \beta_1 e_1 + e_2$ e $e_3^{'} = e_3$ temos que:

$$\begin{aligned} e_1^{'}e_3^{'} &= e_1e_3 = \alpha_3 e_1^{'}, \\ e_2^{'}e_3^{'} &= (\beta_1 e_1 + e_2)e_3 \\ &= \beta_1\alpha_3 e_1 - \beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2 \\ &= -\beta_1 e_1 - e_2 \\ &= -\beta_1 e_1 - (e_2^{'} - \beta_1 e_1) \\ &= -e_2^{'}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_3^{'}e_2^{'} &= e_3(\beta_1 e_1 + e_2) \\ &= e_3e_2 \\ &= \beta_1 e_1 + e_2 \\ &= \beta_1 e_1 + (e_2^{'} - \beta_1 e_1) \\ &= e_2^{'}, \end{aligned}$$

fornecendo a tabela

$$\begin{aligned} e_1e_3 &= \alpha_3 e_1, \\ e_3e_3 &= e_1, \\ e_3e_2 &= e_2, \\ e_2e_3 &= -e_2. \end{aligned}$$

Note que com essa mudança de base recuperamos o produto e_3e_3 daí não temos mais a restrição de que $\alpha_3 \neq 0$ pois, como $e_3e_3 \neq 0$, temos que a álgebra não será de Lie. Temos novamente dois casos para analisar.
Se $\alpha_3 \neq 0$, podemos aplicar a seguinte mudança de base $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = \frac{-1}{\alpha_3}e_1 + e_2 + e_3$ obtemos $e_1^{'}e_3^{'} = \alpha_3 e_1^{'}$, $e_3^{'}e_2^{'} = e_2^{'}$, $e_2^{'}e_3^{'} = -e_2^{'}$ e

$$\begin{aligned}
e_3^{'}e_3^{'} &= (\tfrac{-1}{\alpha_3}e_1 + e_2 + e_3)(\tfrac{-1}{\alpha_3}e_1 + e_2 + e_3) \\
&= -\frac{1}{\alpha_3}(e_1e_3) + e_2e_3 + e_3e_2 + e_3e_3 \\
&= -e_1 - e_2 + e_2 + e_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

obtendo assim a álgebra RR_2.
Se $\alpha_3 = 0$, obtemos a álgebra RR_3 dada por:

$$\begin{aligned}
e_3e_3 &= e_1, \\
e_3e_2 &= e_2, \\
e_2e_3 &= -e_2.
\end{aligned}$$

Caso 1.1.2.2: Agora, se $\alpha_4 \neq 0$ em 3.2. E através da mudança de base dada por $e_1^{'} = \alpha_4 e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = e_3$ temos $e_3^{'}e_3^{'} = e_3e_3 = \alpha_4 e_1 = e_1^{'}$ assim, obtemos a tábua dada por 3.3.

- **Caso 1.2:**

Considere agora $dim(L^2) = 1$, temos então que $(\beta_2, \beta_3) = (0, 0)$. Com isso, obtemos que a tabela multiplicativa de L se reduz a:

$$\begin{aligned}
e_1e_2 &= \alpha_1 e_1, \\
e_2e_2 &= \alpha_2 e_1, \\
e_1e_3 &= \alpha_3 e_1, \\
e_3e_3 &= \alpha_4 e_1, \\
e_3e_2 &= \beta_1 e_1, \\
e_2e_3 &= \gamma_1 e_1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim como no Caso 1.1, vamos usar a identidade de Leibniz para encontrar as restrições para estas constantes. Temos:

$$\begin{aligned}
(e_3e_3)e_2 &= (e_3e_2)e_3 + e_3(e_3e_2)\\
\alpha_4(e_1e_2) &= \beta_1(e_1e_3) + \beta_1(e_3e_1)\\
\alpha_4\alpha_1e_1 &= \beta_1\alpha_3e_1,
\end{aligned}$$

também,

$$\begin{aligned}
(e_2e_2)e_3 &= (e_2e_3)e_2 + e_2(e_2e_3)\\
\alpha_2(e_1e_3) &= \gamma_1(e_1e_2) + \gamma_1(e_2e_1)\\
\alpha_2\alpha_3e_1 &= \gamma_1\alpha_1e_1.
\end{aligned}$$

Então, $\alpha_4\alpha_1 = \beta_1\alpha_3$ e $\alpha_2\alpha_3 = \gamma_1\alpha_1$. Reduzimos essas relações a analisar dois casos:

Caso 1.2.1: Se $(\alpha_1, \alpha_3) = (0, 0)$ a tabela multiplicativa de L será:

$$\begin{aligned}
e_2e_2 &= \alpha_2e_1,\\
e_3e_3 &= \alpha_4e_1,\\
e_3e_2 &= \beta_1e_1,\\
e_2e_3 &= \gamma_1e_1.
\end{aligned}$$

Como L não é de Lie, temos que $(\alpha_2, \alpha_4, \beta_1 + \gamma_1) \neq (0, 0, 0)$. Note que podemos supor que $\alpha_2 \neq 0$, pois dada a mudança de base $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = Xe_2 + Ye_3$ e $e_3^{'} = e_3$ para algum $X, Y \in \mathbb{C}$, obtemos que o coeficiente de $e_2^{'}e_2^{'}$ é não nulo. De fato,

$$\begin{aligned}
e_2'e_2' &= (Xe_2 + Ye_3)(Xe_2 + Ye_3)\\
&= X^2(\alpha_2e_1) + XY(\gamma_1e_1) + YX(\beta_1e_1) + Y^2(\alpha_4e_1)\\
&= (X^2\alpha_2 + XY\gamma_1 + YX\beta_1 + Y^2\alpha_4)e_1.
\end{aligned}$$

Se para todo $X, Y \in \mathbb{C}$, tivéssemos que $\tilde{\alpha_2} = X^2\alpha_2 + XY(\gamma_1 + bb_1) + Y^2\alpha_4 = 0$, teríamos um polinômio de grau menor ou igual a 2, não nulo, com infinitas raízes. Como estamos em $\mathbb{C}$, ou seja, em um corpo infinito, temos que isso é absurdo. Daí, $\tilde{\alpha_2} \neq 0$.

Assim, supondo $\alpha_2 \neq 0$, considere a mudança de base dada por $e_1^{'} = \alpha_2e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2$ obtemos $e_2'e_2' = \alpha_2e_2 = e_1'$.

Ainda,

$$\begin{aligned} e_3'e_2' &= (= e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2)e_2 \\ &= \beta_1 e_1 \frac{-\beta_1\alpha_2}{\alpha_2}e_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} e_2'e_3' &= e_2(e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2) \\ &= \gamma_1 e_1 - \beta_1 e_1 \\ &= \frac{\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_2}e_1' \\ &:= \gamma_1' e_1', \end{aligned}$$

e por fim,

$$\begin{aligned} e_3'e_3' &= (e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2)(e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2) \\ &= \frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1 - \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_2}e_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1 + \alpha_4 e_1 \\ &= \frac{(\alpha_4\alpha_2 - \beta_1\gamma_1)}{\alpha_2}e_1 \\ &= \frac{(\alpha_4\alpha_2 - \beta_1\gamma_1)}{\alpha_2^2}e_1' \\ &= \alpha_4' e_1'. \end{aligned}$$

Temos a seguinte tabela multiplicativa

$$e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_3 = \alpha_4 e_1, \quad e_2e_3 = \gamma_1 e_1. \tag{3.5}$$

Note que $(\alpha_4, \gamma_1) \neq (0,0)$ pois caso contrário $e_3 \in Ann_D(L)$, e esse seria bidimensional, o que contradiz o fato de estarmos analisando o caso em que $dim(Ann_D(L)) = 1$.

Se $\alpha_4 = 0$ em 3.5, então $e_2 - \frac{1}{\gamma_1}e_3 \in \mathrm{Ann}_D(L)$, pois

$$e_1(e_2 - \frac{1}{\gamma_1}e_3) = 0,$$

$$e_2(e_2 - \frac{1}{\gamma_1}e_3) = e_2e_2 - \frac{1}{\gamma_1}(e_2e_3) = e_1 - e_1 = 0$$

e

$$e_3(e_2 - \frac{1}{\gamma_1}e_3) = e_3e_2 - \frac{1}{\gamma_1}(e_3e_3) = 0,$$

mas novamente $\mathrm{Ann}_D(L)$ é unidimensional, e temos uma contradição. Portanto, $\alpha_4 \neq 0$. Daí, considere dois casos: $\gamma_1 \neq 0$ e $\gamma_1 = 0$.

No caso $\gamma_1 \neq 0$, podemos fazer a seguinte mudança de base $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = \frac{1}{\gamma_1}e_3$, e obtemos que o coeficiente do produto de $e_2'e_3'$ é um. Com efeito,

$$\begin{aligned}
&e_2'e_2' = e_1',\\
&e_3'e_3' = \tfrac{\alpha_4}{\gamma_1^2} = \alpha_4'e_1', \quad \text{com} \quad \alpha_4' \neq 0,\\
&e_2'e_3' = \tfrac{1}{\gamma_1}e_2e_1 = e_1'.
\end{aligned}$$

Chamaremos essa álgebra de RR_4.

No caso em que $\gamma_1 = 0$, temos que em 3.5, $\alpha_4 \neq 0$, novamente devido a dimensão do anulador. Daí, temos:

$$\begin{aligned}
&e_2e_2 = e_1,\\
&e_3e_3 = \alpha_4e_1, \quad \text{com} \quad \alpha_4 \neq 0.
\end{aligned}$$

Como estamos sob o corpo dos complexos que além de infinito é também algebricamente fechado, podemos fazer a seguinte mudança de base:

$$\begin{aligned}
&e_1' = \alpha_4e_1,\\
&e_2' = e_1 + e_3,\\
&e_3' = e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
e_3'e_3' &= (e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2)(e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2)\\
&= e_1^2 + \sqrt{\alpha_4}(e_2e_1) + \sqrt{\alpha_4}(e_1e_2) + \alpha_4e_2^2\\
&= \alpha_4e_1 = e_1',
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} e_2'e_2' &= (e_1+e_3)(e_1+e_3) \\ &= e_1e_1 + e_1e_3 + e_3e_1 + e_3e_3 \\ &= \alpha_4 e_1 = e_1'. \end{aligned}$$

E denotaremos por RR_5 a álgebra com tabela multiplicativa dada por

$$\begin{aligned} e_2e_2 &= e_1, \\ e_3e_3 &= e_1. \end{aligned}$$

<u>Caso 1.2.2:</u> Se $(\alpha_1, \alpha_3) \neq (0,0)$, de $\alpha_1\alpha_4 = \beta_1\alpha_3$ e $\alpha_2\alpha_3 = \gamma_1\alpha_1$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_3 \neq 0$. Pois, se $\alpha_3 = 0$, então $\alpha_1 \neq 0$ e daí, $\alpha_4 = \gamma_1 = 0$, e teríamos

$$e_1e_2 = \alpha_1e_1, \quad e_2e_2 = \alpha_2e_1, \quad e_3e_2 = \beta_1e_1.$$

Mas $e_3 \in Ann_D(L)$, que é unidimensional, uma contradição. Como $\alpha_3 \neq 0$, a tabela 3.4 pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} e_1e_2 &= \alpha_1e_1, \\ e_2e_2 &= \frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha_3}e_1, \\ e_1e_3 &= \alpha_3e_1, \\ e_3e_3 &= \alpha_4e_1, \\ e_3e_2 &= \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3}e_1, \\ e_2e_3 &= \gamma_1e_1. \end{aligned}$$

Teríamos

$$\begin{aligned} e_1\left(e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}e_3\right) &= e_1e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(e_1e_3) = (\alpha_1-\alpha_1)e_1 = 0, \\ e_2\left(e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}e_3\right) &= e_2e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(e_2e_3) = \left(\frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_3} - \frac{\gamma_1\alpha_1}{\alpha_3}\right)e_1 = 0, \\ e_3\left(e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}e_3\right) &= e_3e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(e_3e_3) = \left(\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3} - \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3}\right)e_1 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\left(e_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}e_3\right) \in Ann_D(L)$, o que é uma contradição com a dimensão do anulador. Note que, se supormos $\alpha_1 \neq 0$, obtemos de forma análoga uma contradição em que

$\left(e_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e_2\right) \in Ann_D(L)$. Com isso, o caso $(\alpha_1, \alpha_3) \neq (0,0)$ não ocorre.

- **<u>Caso 2:</u>**

Seja $\dim(\mathrm{Ann}_D(L)) = 2$ e $\{e_1, e_2\}$ uma base de $\mathrm{Ann}_D(L)$. Como

$$e_i e_j = 0, \quad \text{para } j \in \{1,2\} \text{ e } i \in \{1,2,3\}.$$

Pela identidade de Leibniz, os elementos do tipo $e_i e_3 \in \mathrm{Ann}_D(L)$, $i \in \{1,2,3\}$. De fato,

$$e_k(e_i e_3) = (e_k e_i)e_3 - (e_k e_3)e_i = 0 \quad \text{para } i,k \in \{1,2,3\},$$

Então a tabela de multiplicação de L na base $\{e_1, e_2, e_3\}$ é dada do seguinte modo:

$$e_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$e_1 e_3 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2,$$
$$e_2 e_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2.$$

Caso todas as constantes sejam nulas, temos a álgebra nula. Vamos então considerar dois casos, quando $dim(L^2) = 1$ e $dim(L^2) = 2$.

- **<u>Caso 2.1:</u>**

Se $dim(L^2) = 1$, temos que $e_3 e_3$, $e_1 e_3$, e $e_2 e_3$ estão em L^2 unidimensional, logo, podemos considerar uma mudança de base em $Ann_D(L)$ tal que os coeficientes de e_2 se anulam, então podemos considerar a tabela de L dada por :

$$e_3 e_3 = \alpha_1 e_1, \quad e_1 e_3 = \beta_1 e_1, \quad e_2 e_3 = \gamma_1 e_1.$$

Se $\gamma_1 = 0$, temos que a álgebra de Leibniz será uma soma direta de álgebras, sendo uma bidimensional e outra unidimensional, nesse caso $L = \langle e_1, e_3 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$ e temos que cada uma das parcelas já foi classificada anteriormente, sendo a bidimensional uma álgebra de Leibniz, não Lie, e a unidimensional a de Lie.

Vamos nos concentrar então, no caso $\gamma_1 \neq 0$. Considere a mudança de base

$e_1' = \gamma_1 e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2$, ficamos com

$$\begin{aligned} e_1'e_3' &= \gamma_1 e_1 \left(e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 \right) \\ &= \gamma_1(e_1e_3) - \alpha_1(e_1e_2) \\ &= \gamma_1\beta_1 e_1 \\ &= \beta e_1', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3'e_3' &= \left(e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 \right)\left(e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 \right) \\ &= e_3e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}(e_2e_3) \\ &= \alpha_1 e_1 - \alpha_1 e_1 = 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} e_2'e_3' &= e_2 \left(e_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 \right) \\ &= e_2e_3 \\ &= \gamma_1 e_1 = e_1'. \end{aligned}$$

Temos a álgebra dada por $e_1e_3 = \beta_1 e_1$ e $e_2e_3 = e_1$. Temos dois casos se $\beta_1 = 0$ ou se $\beta_1 \neq 0$. Quando $\beta_1 = 0$, com a mudança de base dada por $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2 + e_3$ e $e_3' = e_3 + \alpha e_2$ obtemos novamente a álgebra RR_4. De fato,

$$\begin{aligned} e_2'e_2' &= (e_2 + e_3)(e_2 + e_3) = e_1', \\ e_2'e_3' &= (e_2 + e_3)(e_3 + \alpha e_2) = e_1 + \alpha e_2e_2 + e_3e_3 + \alpha e_3e_2 = e_1', \\ e_3'e_3' &= (e_3 + \alpha e_2)(e_3 + \alpha e_2) = \alpha e_2e_3 = \alpha e_1'. \end{aligned}$$

Quando $\beta_1 \neq 0$, então a mudança de base $e_1' = e_1, e_2' = \beta_1 e_2, e_3' = \frac{1}{\beta_1} e_3$ nos dá

$$\begin{aligned} e_1'e_3' &= \frac{1}{\beta_1}(e_1e_3) \\ &= \frac{1}{\beta_1}\beta_1 e_1 \\ &= e_1 = e_1' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e'_2e'_3 &= \beta_1\frac{1}{\beta_1}(e_2e_3) \\ &= e'_1. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} e_1e_3 &= e_1, \\ e_2e_3 &= e_1. \end{aligned}$$

Chamemos essa álgebra de A, veremos que é isomorfa a um caso particular da álgebra do tipo RR_7, que encontraremos mais adiante, quando o parâmetro desta for nulo.

- **Caso 2.2:**

Se $\dim(L^2) = 2$. Então temos

$$\begin{aligned} e_3e_3 &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \\ e_1e_3 &= \beta_1e_1 + \beta_2e_2, \\ e_2e_3 &= \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2, \end{aligned}$$

onde o posto de

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

é igual a dois, pois considerando a transformação $L \to L^2$ dada pela álgebra acima, é uma transformação sobrejetora, e temos que a dimensão da imagem é dois. Vamos analisar dois casos, referentes ao determinante.

Caso 2.2.1: Seja $\det \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Ou seja, $\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 \neq 0$.

Caso 2.2.1.1: Se $\beta_1 = 0$, temos $\beta_2 \neq 0$ e $\gamma_1 \neq 0$. Obtemos a mudança $e'_1 = \frac{1}{\beta_2}e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_3$. Daí,

$$\begin{aligned} e_3e_3 &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \\ e_1e_3 &= e_2, \\ e_2e_3 &= \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2. \end{aligned}$$

Podemos fazer outra mudança de base, dada por:

$$\begin{aligned}
e_1' &= e_1,\\
e_2' &= e_2,\\
e_3' &= \left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right) e_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 + e_3,
\end{aligned}$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
e_3'e_3' &= \left(\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right) e_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 + e_3\right)\left(\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right) e_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 + e_3\right)\\
&= \left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right)(e_1e_3) - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}(e_2e_3) + e_3e_3\\
&= \frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} e_2 - \alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1 - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1'e_3' &= e_1\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right) e_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 + e_3\\
&= e_1e_3 = e_2',
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
e_2'e_3' &= e_2\left(\frac{\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2\right) e_1 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} e_2 + e_3\\
&= e_2e_3\\
&= \gamma_1 e_1' + \gamma_2 e_2',\ \text{com } \gamma_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Temos agora dois casos. Se $\gamma_2 = 0$, então,

$$\begin{aligned}
e_1e_3 &= e_2,\\
e_2e_3 &= \gamma_1 e_1,\ \text{com } \gamma_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Tomando a mudança de base, $e_1' = \sqrt{\gamma_1}e_1, e_2' = e_2, e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_1}}e_3$, temos

$$\begin{aligned}
e_1'e_3' &= (\sqrt{\gamma_1}e_1)\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}e_3\right)\\
&= \sqrt{\gamma_1}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}(e_1e_3)\\
&= e_2 = e_2',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2'e_3' &= e_2\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}e_3\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\gamma_1 e_1\\
&= \frac{\gamma_1\sqrt{\gamma_1}}{\gamma_1}e_1\\
&= e_1'.
\end{aligned}$$

E temos a álgebra RR_6 dada pelo produto

$$\begin{aligned}
e_1e_3 &= e_2,\\
e_2e_3 &= e_1.
\end{aligned}$$

Se $\gamma_2 \neq 0$, fazendo $e_1' = \gamma_2^2 e_1$, $e_2' = \gamma_2 e_2$ e $e_3' = \frac{1}{\gamma_2}e_3$, temos:

$$\begin{aligned}
e_1'e_3' &= \gamma_2 e_1e_3 = \gamma_2 e_2 = e_2',\\
e_2'e_3' &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2}e_1' + e_2' := \tilde{\gamma}_1 e_1 + e_2 \text{ com } \tilde{\gamma}_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Note que a álgebra A, obtida anteriormente, onde $e_1e_3 = e_1$ e $e_2e_3 = e_1$, é isomorfa à álgebra acima se $\tilde{\gamma}_1$ fosse nulo e tomando uma mudança de base dada por $e_1' = e_2$ e $e_2' = e_1$. Chamaremos a álgebra acima, incluindo o caso $\gamma_1 = 0$, de RR_7, que é dada por:

$$\begin{aligned}
e_1e_3 &= e_2\\
e_2e_3 &= \gamma_1 e_1 + e_2.
\end{aligned}$$

<u>Caso 2.2.1.2</u>: Se $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$, temos $\gamma_2 \neq 0$. Tomando $e_1' = \frac{1}{\beta_1}e_1, e_2' = e_2, e_3' = e_3$, temos

$$\begin{aligned}
e_3'e_3' &= \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2',\\
e_1'e_3' &= e_1',\\
e_2'e_3' &= \gamma_1 e_1' + \gamma_2 e_2'.
\end{aligned}$$

Agora, considere a mudança de base

$$\bar{e_1} = e_1', \quad \bar{e_2} = e_2', \quad \bar{e_3} = \left(\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2} - \alpha_1\right) e_1' - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} e_2' + e_3'.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\bar{e_1}\bar{e_3} &= e_1'e_3' = \bar{e_1},\\
\bar{e_2}\bar{e_3} &= e_2'e_3' = \gamma_1\bar{e_1} + \gamma_2\bar{e_2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{e_3}\bar{e_3} &= (\left(\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2} - \alpha_1\right) e_1' - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} e_2' + e_3')\left(\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2} - \alpha_1\right) e_1' - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} e_2' + e_3'\\
&= \left(\frac{\alpha_2\gamma_1}{\gamma_2} - \alpha_1\right) e_1'e_3' - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} e_2'e_3' + e_3'e_3'\\
&= 0
\end{aligned}$$

Note que como $\gamma_2 \neq 0$, podemos tomar $\hat{e_2} = \dfrac{1}{\gamma_2}\bar{e_2}$, e temos que o coeficiente de $\bar{e_2}$ será 1 no produto $\bar{e_2}\bar{e_3}$. Daí, temos dois casos para verificar, se $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 1)$ ou $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$.

Suponha $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 1)$, então existem $X, Y \in \mathbb{C}$ tais que $XY(\gamma_2 - 1) - Y^2\gamma_1 \neq 0$. Pois caso contrário, $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$ então $XY(\gamma_2 - 1) - Y^2\gamma_1 = 0$, para todo X e Y. Assim, podemos considerar $e_1' = X\bar{e_1} + Y\bar{e_2}, \quad e_2' = \bar{e_2}, \quad e_3' = \bar{e_3}, \quad$ com $X \neq 0$. Agora, obtemos:

$$\begin{aligned}
e_1'e_3' &= (X\bar{e_1} + Y\bar{e_2})\bar{e_3}\\
&= X\bar{e_1} + Y\gamma_1\bar{e_1} + B\gamma_2\bar{e_2}\\
&= X\bar{e_1} + Y\gamma_1\bar{e_1} + B\gamma_2\bar{e_2} + Y\bar{e_2} - Y\bar{e_2} + \frac{Y^2\gamma_1}{X}\bar{e_2} - \frac{Y^2\gamma_1}{X}\bar{e_2}\\
&= \left(1 + \frac{Y\gamma_1}{X}\right)\bar{e_1}' + \left(Y\gamma_2 - \left(Y + \frac{Y^2\gamma_1}{X}\right)\right)\bar{e_2}'.
\end{aligned}$$

Então, com a mudança de base

$$
\begin{aligned}
e_1'' &= e_1' \\
e_2'' &= \left(1 + \frac{Y\gamma_1}{X}\right) e_1' + \left(Y\gamma_2 - \left(Y + \frac{Y^2\gamma_1}{X}\right)\right) e_2' \\
e_3'' &= e_3'
\end{aligned}
$$

teríamos o Caso 2.2.1.1, com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ que já foi estudado, pois $e_1''e_3'' = e_2''$, $e_3''e_3'' = 0$ e $e_2''e_3'' = \gamma_1'e_1'' + \gamma_2'e_2''$.

Agora, ao supormos $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$, isto dá origem à álgebra RR_8, com produto

$$
\begin{aligned}
e_1e_3 &= e_1 \\
e_2e_3 &= e_2
\end{aligned}
$$

<u>**Caso 2.2.2:**</u> Temos det $\left(\begin{smallmatrix}\beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2\end{smallmatrix}\right) = 0$. Ou seja, $\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 = 0$. Daí, existe uma certa simetria, podemos escrever $k_1(\beta_1, \beta_2) = k_2(\gamma_1, \gamma_2)$. Temos que a tabela multiplicativa de L é dada por

$$
\begin{aligned}
e_3e_3 &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \\
e_1e_3 &= k_1(\beta_1e_1 + \beta_2e_2), \\
e_2e_3 &= k_2(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2).
\end{aligned}
$$

Da simetria de e_1 e e_2 podemos supor, sem perda de generalidade, $k_2 \neq 0$. Logo,

$$
\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta_1 & \dfrac{k_1}{k_2}\gamma_1 \\ \beta_2 & \dfrac{k_1}{k_2}\gamma_2 \end{pmatrix}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
e_3e_3 &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2, \\
e_1e_3 &= \beta_1e_1 + \beta_2e_2, \\
e_2e_3 &= \frac{k_1}{k_2}(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2).
\end{aligned}
$$

Tomando a mudança de base $e_1' = e_1$, $e_2' = \dfrac{k_1}{k_2}e_1 - e_2$ e $e_3' = e_3$, temos

$$
\begin{aligned}
e'_3e'_3 &= e_3e_3 \\
&= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 \\
&= \alpha_1e_1 + \frac{\alpha_2k_1}{k_2}e_1 - \alpha_2e'_2 \\
&= \alpha'_1e'_1 + \alpha'_2e'_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_1e'_3 &= e_1e_3 \\
&= \beta_1e_1 + \beta_2e_2 \\
&= \beta_1e_1 + \frac{\beta_2k_1}{k_2}e_1 - \beta_2e'_2 \\
&= \beta'_1e'_1 + \beta'_2e'_2,
\end{aligned}
$$

e

$$e'_2e'_3 = \frac{k_1}{k_2}e_1e_3 - e_2e_3 = 0.$$

Fazendo $e'_1 = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$, $e'_2 = e_2$, e $e'_3 = e_3$ temos:

$$e'_3e'_3 = e_3e_3 = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 = e'_1,$$

e

$$
\begin{aligned}
e'_1e'_3 &= (\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2)e_3 \\
&= \alpha_1(\beta_1e_1 + \beta_2e_2) \\
&= \beta_1(e'_1 - \alpha_2e_2) + \alpha_1\beta_2e'_2 \\
&= \beta_1e'_1 + \beta'_2e'_2.
\end{aligned}
$$

Agora, se tomamos $e''_1 = e'_1$, $e''_2 = \beta'_2e'_2$ e $e''_3 = e'_3$. Temos:

$$e_3''e_3'' = e_3'e_3' = e_1'',$$
$$e_1''e_3'' = \beta_1 e_1' + \beta_2' e_2' = \beta_1 e_1'' + e_2''.$$

Assim, vamos analisar dois casos, quando $\beta_1 = 0$ e quando $\beta_1 \neq 0$.

(i) Se $\beta_1 = 0$, temos a álgebra RR_9, dada por

$$e_3e_3 = e_1,$$
$$e_1e_3 = e_2.$$

(ii) Se $\beta_1 \neq 0$, tomando $e_1' = \dfrac{1}{\beta_1^2}e_1$, $e_2' = \dfrac{1}{\beta_1^3}e_2$ e $e_3' = \dfrac{1}{\beta_1}e_3$, obtemos a álgebra RR_{10} dada por

$$e_3'e_3' = \frac{1}{\beta_1^2}e_3e_3 = e_1',$$
$$e_1'e_3' = \frac{1}{\beta_1^3}e_1e_3 = \frac{1}{\beta_1^3}(\beta_1 e_1 + e_2) = e_1' + e_2'.$$

Assim, provamos o resultado abaixo, para álgebras de Leibniz, não Lie, sem considerarmos o caso em que a álgebra seja uma soma direta, visto que essa situação já está classificada.

Teorema 3.2.1. *A menos de isomorfismo, existem três famílias paramétricas e sete representações explícitas de álgebras de Leibniz não Lie de dimensão três:*

i) $dim(Ann_D(L)) = 1, dim(L^2) = 2$

RR_1: $e_1e_3 = -2e_1, \quad e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2$;

RR_2: $e_1e_3 = \alpha e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}$;

RR_3: $e_3e_3 = e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2$;

ii) $dim(Ann_D(L)) = 1, dim(L^2) = 1$

RR_4: $e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_3 = \beta e_1, \quad e_2e_3 = e_1, \quad \beta \in \mathbb{C}$;

RR_5: $e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_3 = e_1$;

iii) $dim(Ann_D(L)) = 2, dim(L^2) = 2$

RR_6: $e_1e_3 = e_2, \quad e_2e_3 = e_1$;

RR_7: $e_1e_3 = e_2, \quad e_2e_3 = \gamma e_1 + e_2, \quad \gamma \in \mathbb{C}$;

RR_8: $e_1e_3 = e_1, \; e_2e_3 = e_2$

RR_9: $e_3e_3 = e_1, \quad e_1e_3 = e_2$;

RR_{10}: $e_3e_3 = e_1, \quad e_1e_3 = e_1 + e_2.$

Observação 3.2.2. *No caso em que $\gamma = 0$, na álgebra RR_7 a álgebra, na verdade, tem $dim(L^2) = 1$.*

Observe que, durante o texto, usamos o fato de que o corpo sobre o qual definimos a álgebra é um corpo algebricamente fechado, não usamos necessariamente o corpo dos complexos.

Observação 3.2.3. *Note que cada álgebras de blocos (i,ii,iii) diferentes, do teorema anterior, não são isomorfas.*

- *Duas álgebras cujos anuladores possuem dimensões diferentes não são isomorfas.*

  De fato, suponha que A e B são isomorfas, então existe um isomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ tal que, para todo $x \in A$, temos que para todo $a \in Ann_D(A)$,

  $$xa = 0, \ \forall\, x \in A \implies \phi(x)\phi(a) = \phi(xa) = 0, \ \forall\, \phi(x) \in B$$

  Daí, $dim(Ann_D(A)) \leq dim(Ann_D(B))$. Segue da bijeção de ϕ que a recíproca da implicação acima também é válida, logo $\dim(Ann_D(A)) = \dim(Ann_D(B))$. Segue da contrapositiva que $\dim(Ann_D(A)) \neq \dim(Ann_D(B))$ implica que A e B não são isomorfas.

- *Se $\dim(L^2) \neq \dim(A^2)$, então L e A não podem ser isomorfas.*

  Com efeito, considere o isomorfismo de álgebras $\phi : L \to A$. Sejam $x, y \in L$, então $\phi(xy) \in A^2$ já que $\phi(x), \phi(y) \in A$ e $\phi(x)\phi(y) \in A^2$. Logo, ϕ induz um isomorfismo entre os subespaços L^2 e A^2, o que implica que $\dim(L^2) = \dim(A^2)$.

Exemplo 3.2.4. *As álgebras nos mesmos blocos (i,ii,iii) não são duas a duas isomorfas. Podemos verificar isso tentando exibir um isomorfismo entre duas álgebras. Por exemplo, se considerarmos as álgebras RR_6 e RR_8 não são isomorfas.*

De fato, suponha, por absurdo, que

$$\begin{aligned} \varphi : RR_6 &\longrightarrow RR_8 \\ e_1' &\longmapsto a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ e_2' &\longmapsto b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ e_3' &\longmapsto c_1e_1 + c_2e_2 + c3e_3 \end{aligned}$$

seja um isomorfismo de álgebras e T *a matriz associada a essa transformação. Por um lado, temos que*

$$\begin{aligned}\varphi(e_1'e_3') &= \varphi(e_2') \\ &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3.\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}\varphi(e_1'e_3') &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)c_1e_1 + c_2e_2 + c3e_3 \\ &= a_1c_3e_1 + a_2c_3e_2.\end{aligned}$$

Daí,

$$b_3 = 0, \quad a_1c_3 = b_1 \quad e \quad a_2c_3 = b_2.$$

Teríamos,

$$a_1c_3b_2 = a_2c_3b_1. \tag{3.6}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\varphi(e_2'e_3') &= \varphi(e_1') \\ &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3.\end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned}\varphi(e_2'e_3') &= (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)c_1e_1 + c_2e_2 + c3e_3 \\ &= b_1c_3e_1 + b_2c_3e_2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_3 = 0, \quad b_1c_3 = a_1 \quad e \quad b_2c_3 = a_2.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\varphi(e_3'e_3') &= (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \\ &= c_1c_3e_1 + c_2c_3e_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $c_1 = 0 = c_2$*. Daí, por* $c_1 = c_2 = b_3 = a_3 = 0$ *e 3.6, teríamos que* $det(T) = 0$*, o que é absurdo já que* φ *bijetora.*

Podemos repetir essa ideia para provar que as demais álgebras não são duas a duas isomorfas.

Observação 3.2.5. *A decisão de selecionar essas álgebras para ilustrar o processo de demonstrar que as álgebras do Teorema 3.2.1 não são duas a duas isomorfas está diretamente relacionada ao fato de que, na referência adotada como base para este trabalho [21], essas mesmas álgebras foram apresentadas como isomorfas, o que torna a análise ainda mais relevante e interessante do ponto de vista teórico.*

Capítulo 4

Álgebras comutativas não associativas

Neste capítulo trabalharemos com duas classes de álgebras comutativas e não associativas; são essas as álgebras genéticas e as álgebras de Jordan. Faremos a classificação para dimensões menores ou iguais a dois, para ambas as classes, com base em [16] e em [5], respectivamente. Para os leitores com interesse em aprofundar-se na área de álgebras de Jordan, recomenda-se a leitura da referência [17], e para o aprofundamento sobre álgebras genéticas a referência [19].

4.1 Classificação das álgebras genéticas

Nesta seção classificaremos, a menos de isomorfismos, as álgebras genéticas de dimensões um e dois sobre o corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$.

Teorema 4.1.1. *Toda álgebra genética unidimensional é da forma $\mathfrak{G} = span\{g_1\}$ tal que $g_1g_1 = g_1$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{G} = span\{g_1\}$ uma álgebra genética. Pela definição de álgebra genética,1.2.15, $g_1g_1 = \lambda_{111}g_1$ e ainda, $\lambda_{111} = 1$ como queríamos. □

Teorema 4.1.2. *Toda álgebra genética bidimensional é isomorfa a uma das seguintes:*

1. *a classe $\mathfrak{G}_\beta = span\{g_1, g_2\}$ tal que $g_1g_1 = g_1$, $g_1g_2 = \beta g_2$ e $g_2g_2 = 0$, para $\beta \in \mathbb{C}$.*
2. *$\tilde{\mathfrak{G}} = span\{g_1, g_2\}$ tal que $g_1g_1 = g_1 + g_2$, $g_1g_2 = \frac{1}{2}g_2$ e $g_2g_2 = 0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra genética gerada por $\{g_1, g_2\}$. Temos que $g_1g_1 = \lambda_{111}g_1 + \lambda_{112}g_2$, $g_1g_2 = \lambda_{121}g_1 + \lambda_{122}g_2$ e $g_2g_2 = \lambda_{221}g_1 + \lambda_{222}g_2$. Por definição, de álgebra genética temos, $\lambda_{111} = 1,\ \lambda_{121} = 0,\ \lambda_{221} = 0,$ e $\lambda_{222} = 0$. O que nos dá a seguinte tabela multiplicativa, renomeando as constantes estruturais por simplicidade de escrita:

$$\begin{aligned}
g_1g_1 &= g_1 + \lambda_{121}g_2 := g_1 + \alpha g_2,\\
g_1g_2 &= \lambda_{122}g_2 := \beta g_2,\\
g_2g_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Seja então $\mathfrak{B}$ uma outra álgebra genética com produto na base, $\{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2\}$, dado por $\tilde{g}_1\tilde{g}_1 = \tilde{g}_1 + \tilde{\alpha}\tilde{g}_2, \quad \tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \tilde{\beta}\tilde{g}_2, \quad \tilde{g}_2\tilde{g}_2 = 0.$

Vamos encontrar para quais $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ essas álgebras são isomorfas. Considere o seguinte isomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathcal{A} &\to \mathfrak{B}\\
g_1 &\mapsto \alpha_1\tilde{g}_1 + \alpha_2\tilde{g}_2\\
g_2 &\mapsto \beta_1\tilde{g}_1 + \beta_2\tilde{g}_2
\end{aligned}$$

Segue do homomorfismo que

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1g_1) &= \varphi(g_1)\varphi(g_1)\\
&= (\alpha_1\tilde{g}_1 + \alpha_2\tilde{g}_2)(\alpha_1\tilde{g}_1 + \alpha_2\tilde{g}_2)\\
&= \alpha_1^2\tilde{g}_1 + (2\alpha_1\alpha_2\tilde{\beta} + \alpha_1^2\tilde{\alpha})\tilde{g}_2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(g_1g_1) &= \varphi(g_1 + \alpha g_2)\\
&= \varphi(g_1) + \alpha\varphi(g_2)\\
&= (\alpha_1 + \alpha\beta_1)\tilde{g}_1 + (\alpha_2 + \alpha\beta_2)\tilde{g}_2\\
&= (\alpha_1 + \alpha\beta_1)\tilde{g}_1 + (\alpha_2 + \alpha\beta_2)\tilde{g}_2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_1^2 = \alpha_1 + \alpha\beta_1, \ \text{ e } \ 2\alpha_1\alpha_2\tilde{\beta} + \alpha_1^2\tilde{\alpha} = \alpha_2 + \alpha\beta_2. \tag{4.1}$$

Também,

$$\begin{aligned}\varphi(g_1g_2) &= \varphi(g_1)\varphi(g_2)\\ &= (\alpha_1\tilde{g}_1 + \alpha_2\tilde{g}_2)(\beta_1\tilde{g}_1 + \beta_2\tilde{g}_2)\\ &= \alpha_1\beta_1\tilde{g}_1 + \alpha_1\beta_1\tilde{\alpha}\tilde{g}_2 + \alpha_1\beta_2\tilde{\beta}\tilde{g}_2 + \alpha_2\beta_1\tilde{\beta}\tilde{g}_2.\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\varphi(g_1g_2) &= \varphi(\beta g_2)\\ &= \beta\varphi(g_2)\\ &= \beta(\beta_1\tilde{g}_1 + \beta_2\tilde{g}_2)\\ &= \tilde{\beta}\beta_1\tilde{g}_1 + \beta\beta_2\tilde{g}_2.\end{aligned}$$

Segue que,

$$\alpha_1\beta_1 = \beta\beta_1, \;\text{ e }\; \alpha_1\beta_1\tilde{\alpha} + \alpha_1\beta_2\tilde{\beta} + \alpha_2\beta_1\tilde{\beta} = \beta\beta_2. \tag{4.2}$$

E,

$$\begin{aligned}\varphi(g_2g_2) &= \varphi(g_2)\varphi(g_2)\\ &= (\beta_1\tilde{g}_1 + \beta_2\tilde{g}_2)(\beta_1\tilde{g}_1 + \beta_2\tilde{g}_2)\\ &= \beta_1^2\tilde{g}_1 + (2\beta_1\beta_2\tilde{\beta} + \beta_1^2\tilde{\alpha})\tilde{g}_2.\end{aligned}$$

Mas também $\varphi(g_2g_2) = \varphi(0)$, e então

$$\beta_1^2 = 0 \;\text{ e }\; 2\beta_1\beta_2\tilde{\beta} + \beta_1^2\tilde{\alpha} = 0. \tag{4.3}$$

Assim, $\beta_1 = 0$. Ainda, como queremos que φ seja bijetora, a matriz da transformação deve ser inversível, ou seja, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Temos que $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, e de 4.1, $\alpha_1 = 1$. Por 4.2, por $\beta_1 = 0$, e por $\beta_2 \neq 0$, temos $\tilde{\beta} = \beta$. E, de 4.1 $\tilde{\alpha} = \alpha_2(1 - 2\tilde{\beta}) + \alpha\beta_2$. Temos dois casos para verificar, se $\tilde{\beta} = \dfrac{1}{2}$ e se $\tilde{\beta} \neq \dfrac{1}{2}$.

Se $\beta = \tilde{\beta} = \dfrac{1}{2}$, temos $\tilde{\alpha} = \alpha\beta_2$. Caso, $\alpha = 0$, temos $\tilde{\alpha} = 0$ e as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{B}$ são iguais, e mais são a álgebra $\mathfrak{G}_\beta$ para $\beta = \dfrac{1}{2}$. Caso, $\alpha \neq 0$ podemos tomar $\beta_2 = \alpha^{-1}$. Obtemos, assim, $\tilde{\alpha} = 1$, obtemos que a álgebra $\mathcal{A}$ é isomorfa à $\mathfrak{B}$ quando $\tilde{\beta} = \dfrac{1}{2}$, *e* $\tilde{\alpha} = 1$, ou seja, isomorfa à $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Se $\tilde{\beta} \neq \frac{1}{2}$, podemos fazer $\beta_2 = 1$ e $\alpha_2 = \frac{\alpha}{1-2\tilde{\beta}}$. Assim, $\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\alpha}{1-2\tilde{\beta}}(1-2\tilde{\beta}) = 0$. Portanto, isomorfa à $\mathfrak{G}_\beta$.

□

Exemplo 4.1.3. *A álgebra gamética $\mathcal{G}_2$, do Exemplo 1.2.3 é a álgebra $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$, depois de considerar a mudança de base dada por dada por $\hat{A} = A$ e $\hat{a} = A - a$.*

Observação 4.1.4. *Note que, em geral, a álgebra $\mathfrak{G}_\beta$ não é associativa, mas se $\beta = 1$ ou $\beta = 0$, teremos a associatividade.*

Vimos que uma álgebra é associativa se, e somente se, $(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in A$. Como o associador é multilinear, basta provar para os elementos da base. Agora, note que, pela definição dos produtos da classe de álgebras $\mathfrak{G}_\beta = span\{g_1, g_2\}$, o produto é $g_1g_1 = g_1$, $g_1g_2 = \beta g_2$ e $g_2g_2 = 0$, sempre que tivermos g_2 em duas posições do associador vale a identidade. Como a álgebra é comutativa, temos que $(x, y, z) = -(z, y, x)$. De fato,

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (xy)z - x(yz)\\ &= z(xy) - (yz)x\\ &= -[(zy)x - z(yx)]\\ &= -(z, y, x).\end{aligned}$$

Com isso, percebemos que o único caso interessante a se avaliar, é, a menos do sinal, (g_1, g_1, g_2). Já que, no caso comutativo temos $(x, y, x) = 0$, para todos x, y na álgebra. Note que

$$\begin{aligned}&(g_1, g_1, g_2) = 0\\ \iff &(g_1g_1)g_2 - g_1(g_1g_2) = 0\\ \iff &g_1g_2 - \beta g_1g_2 = 0\\ \iff &\beta g_2 - \beta^2 g_2 = 0\\ \iff &\beta = \beta^2\\ \iff &\beta = 0, \text{ ou } \beta = 1.\end{aligned}$$

4.2 Classificação das álgebras de Jordan

Nesta seção, nos dedicamos à classificação, a menos de isomorfismos, das álgebras de Jordan de dimensões um e dois sobre um corpo de característica diferente de dois, seguindo como base a referência [5]. O resultado para os corpos dos complexos e dos reais decorre diretamente destes teoremas. No caso específico dos reais, o leitor interessado pode consultar a referência [1] para uma abordagem alternativa. O teorema apresentado na principal referência desta seção,[5], é formulado para álgebras comutativas de potência associativa, de dimensão dois, sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. As demonstrações realizadas nesta seção são suficientes para estabelecer esse resultado. Como consequência, obtém-se a classificação das álgebras de Jordan de dimensão dois sobre $\mathbb{K}$, provando que, a menos de isomorfismos, existe apenas uma única álgebra de Jordan não associativa de dimensão dois.

Teorema 4.2.1. *Duas álgebras de Jordan unidimensionais, com produto não triviais, são sempre isomorfas.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{J} = \langle e_1 \rangle$ e $J = \langle m_1 \rangle$, duas álgebras de Jordan com $J^2 \neq 0$, $\mathcal{J}^2 \neq 0$ e defina os produtos $e_1e_1 = \alpha e_1$ e $m_1m_1 = \beta m_1$, com $\alpha, \beta \neq 0$. Tome a mudança de base dada por $\hat{m_1} = \dfrac{\alpha}{\beta} m_1$. Daí,

$$\hat{m_1}\hat{m_1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\beta m_1 = \alpha\hat{m_1}$$

e temos que $\mathcal{J}$ e J são sempre isomorfas.

$\square$

Observação 4.2.2. *Do teorema anterior, concluímos que, a menos de isomorfismo, existe uma única álgebra de Jordan unidimensional não trivial. Tal álgebra, digamos $\mathcal{J}_1 = span\{\bar{m_1}\}$, tem como produto na base $\bar{m_1}\bar{m_1} = \bar{m_1}$.*

Podemos tomar a mudança de base $\bar{m_1} = \frac{1}{\alpha}\hat{m_1}$, na álgebra J do teorema acima, e o produto na nova base será $\bar{m_1}\bar{m_1} = \frac{1}{\alpha^2}\hat{m_1}\hat{m_1} = \frac{1}{\alpha}\hat{m_1} = \bar{m_1}$. Lembre que $\alpha \neq 0$, já que consideramos que a álgebra não tem produto trivial.

Assim, a álgebra de Jordan de dimensão um, não trivial, é a álgebra Genética de mesma dimensão, obtida no Teorema 4.1.1.

Lema 4.2.3. *Seja $\mathcal{D}$ uma álgebra de Jordan sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2, tal que $\mathcal{D}^2 \neq 0$. Se $\{u, u^2\}$ é um conjunto linearmente dependente, para todo $u \in \mathcal{D}$, então existe um único homomorfismo não nulo de $\mathbb{K}$-álgebras $\psi : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ tal que $u^2 = \psi(u)u$.*

Demonstração. Seja u $\in \mathcal{D} - \{0\}$, tal que existe $\psi(u) \in \mathbb{K}$ com $u^2 = \psi(u)u$, e temos que $\{u, u^2\}$ é linearmente dependente. Defina $\psi(0) = 0$ mostremos que $\psi : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ é homomorfismo.

a) Sejam $u \in \mathcal{D}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, se $u = 0$ ou $\alpha = 0$ temos que $\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u)$. Suponha $u \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, daí

$$\psi(\alpha u)(\alpha u) = (\alpha u)^2 = \alpha^2 u^2 = \alpha^2\psi(u)u,$$

logo
$$\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u).$$

b) Sejam $u, v \in \mathcal{D}$.

(i) Se $\{u, v\}$ é linearmente dependente, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $v \neq 0$ temos que existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u = \alpha v$ e segue pelo item a) que $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$.

(ii) Se $\{u, v\}$ é linearmente independente, então $u + v \in \mathcal{D} - \{0\}$. Temos,

$$\begin{aligned}\psi(u+v)(u+v) &= u^2 + 2uv + v^2 \\ &= \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi(u-v)(u-v) &= u^2 - 2uv + v^2 \\ &= \psi(u)u - 2uv + \psi(v)v.\end{aligned}$$

Portanto, somando as duas equações obtemos

$$(\psi(u+v) + \psi(u-v))u + (\psi(u+v) - \psi(u-v))v = 2\psi(u)u + 2\psi(v)v.$$

Segue,
$$\begin{cases}\psi(u+v) + \psi(u-v) = 2\psi(u) \\ \psi(u+v) - \psi(u-v) = 2\psi(v).\end{cases}$$
Daí, como $char(\mathbb{K}) \neq 2$ temos que $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$.

c) Sejam $u, v \in \mathcal{D}$ temos que,

$$\begin{aligned}\psi(u)u + \psi(u)v + \psi(v)u + \psi(v)v &= \psi(u+v)(u+v) \\ &= \psi(u)u + 2uv + \psi(v)v\end{aligned}$$

então,
$$2uv = \psi(u)v + \psi(v)u$$

Segue dessa igualdade e de $\mathcal{D}^2 \neq 0$ que $\psi \not\equiv 0$. Ainda, como $char(\mathbb{K}) \neq 2$, temos que
$$\psi(uv) = \psi(\frac{1}{2}(\psi(u)v + \psi(v)u)) = \frac{1}{2}(\psi(u)\psi(v) + \psi(v)\psi(u)).$$

Como $\mathcal{D}$ é Jordan, em particular é comutativa, segue

$$\psi(uv) = \psi(u)\psi(v).$$

$\square$

Observação 4.2.4. *Note que no Lema 4.2.3, usamos apenas que a álgebra $\mathcal{D}$ é comutativa. Assim, como é feito em [5], o lema pode ser enunciado para uma álgebra $\mathcal{D}$ comutativa e, como consequência, obtemos que a álgebra é de Jordan. De fato, suponha $\mathcal{D}$, como em 4.2.3. Então,*

$$\begin{aligned}(u^2v)u &= ((\psi(u)u)v)u \\ &= \psi(u)(uv)u \\ &= \psi(u)u(uv) \\ &= (u^2)uv.\end{aligned}$$

Teorema 4.2.5. *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan bidimensional, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. Se $\mathcal{J}^2 \neq 0$, então $\mathcal{J}$ é isomorfa a uma das álgebras a seguir:*

(i) $N = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_1e_2 = 0$;

(ii) $M = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$ e $e_2^2 = 0 = e_1e_2$;

(iii) $M_\lambda = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = \lambda e_1$ e $e_1e_2 = e_2$;

(iv) $D_2 = span\{e_1, e_2\}$ tal que $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = 0$ e $e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2$.

Ainda, M_λ e $M_{\lambda'}$ são isomorfas se, e somente se, existe um elemento não nulo $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda = \beta^2\lambda'$.

Demonstração. Seja $\mathcal{J}$ álgebra de Jordan bidimensional tal que $\mathcal{J}^2 \neq 0$ e $u \in \mathcal{J} - \{0\}$. Temos dois casos:

<u>Caso 1:</u> Suponha que $\{u, u^2\}$ é linearmente independente. Daí, $\mathcal{J} = span\{u, u^2\}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $u^3 = \alpha u^2 + \beta u$. Temos 3 casos:

(i) Se $\alpha = \beta = 0$ temos $u^3 = 0$. Daí, $\mathcal{J}$ é isomorfa a N.

(ii) Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$. Seja $v = \alpha^{-1}u$, temos $\mathcal{J} = span\{v, v^2\}$ já que

$$v^3 = \alpha^{-1}u\alpha^{-2}u^2 = \alpha^{-3}u^3 = \alpha^{-3}\alpha u^2 = \alpha^{-2}u^2 = v^2.$$

Daí, faça a mudança de base onde $w_1 = v^2$ e $w_2 = v^2 - v$. Temos que $\mathcal{J} = span\{w_1, w_2\}$ e

$$\begin{aligned} w_1w_1 &= v^2v^2 \\ &= v^3v \\ &= v^2 = w_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2w_2 &= v^4 - 2v^3 + v^2 \\ &= v^2 - 2v^2 + v^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w_1w_2 &= v^4 - v^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{J}$ é isomorfa a M.

(iii) Se $\beta \neq 0$, como $u^3 = \alpha u^2 + \beta u$ temos que $1 = -\alpha\beta^{-1}u + \beta^{-1}u^2$. Daí $\mathcal{J} = span\{1, u\}$. Seja $w = u - \frac{\alpha}{2}1$ temos que

$$\begin{aligned} w^2 &= (u - \frac{\alpha}{2})^2 \\ &= u^2 - \alpha u + \frac{\alpha^2}{4} \\ &= \beta + \frac{\alpha^2}{4} \\ &= \lambda 1, \end{aligned}$$

onde $\lambda = \beta + \frac{\alpha^2}{4}$. Daí, $\mathcal{J} = span\{1, w\}$. E segue que $\mathcal{J}$ é isomorfa a M_λ.

<u>Caso 2:</u> Se $\{u, u^2\}$ é linearmente dependente, para todo $u \in \mathcal{J}$, pelo Lema 4.2.3 existe único homomorfismo $\psi : \mathcal{J} \to \mathbb{K}$ tal que $u^2 = \psi(u)u$, com $\psi \not\equiv 0$, pois $\mathcal{J}^2 \neq 0$. Daí, existe $v \in \mathcal{J}$ tal que $\psi(v) \neq 0$, então $\mathcal{J}$ é sobrejetora.
Mas como $dim(\mathcal{J}) > dim(\mathbb{K}) = 1$, temos que ψ não é injetora. Logo, $Ker\psi \neq \{0\}$, daí existe $\hat{v} \in \mathcal{J}$, $\hat{v} \neq 0$, tal que $\psi(\hat{v}) = 0$. Ainda, como $\psi(v) \neq 0$, existe $u \in \mathcal{J}$ tal que $\psi(u) \neq 0$. Seja $\hat{u} = \frac{1}{\psi(u)}u$. Note que $\hat{u}^2 = \hat{u}$. Seja $\mathcal{J} = span\{\hat{u}, \hat{v}\}$, note $\hat{v}^2 = 0$, já que

$\psi(\hat{v}) = 0$, temos

$$(\hat{u} + \hat{v})^2 = \hat{u}^2 + 2\hat{u}\hat{v} + \hat{v}^2 = \psi(\hat{u})\hat{u} + 2\hat{u}\hat{v}. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como ψ é homomorfismo segue que

$$(\hat{u} + \hat{v})^2 = (\hat{u} + \hat{v})\psi(\hat{u} + \hat{v}) = (\hat{u} + \hat{v})(\psi(\hat{u}) + \psi(\hat{v})). \tag{4.5}$$

Note que $\psi(\hat{u}) = \psi(\dfrac{1}{\psi(u)}u) = \dfrac{1}{\psi(u)}\psi(u) = 1$, $\psi(\hat{v}) = 0$. Assim, usando isso, 4.4 e 4.5 temos $\hat{u} + \hat{v} = \hat{u} + 2\hat{u}\hat{v}$ e como $char(\mathbb{K}) \neq 2$, $\hat{u}\hat{v} = \frac{1}{2}\hat{v}$. Daí, $\phi : \mathcal{J} \to D_2$ tal que $\phi(\hat{u}) = e_1$ e $\phi(\hat{v}) = e_2$ é isomorfismo.

Note que N, M, M_λ e D_2 não são duas a duas isomorfas. Podemos verificar isso observando características próprias de cada álgebra.

Observe que a álgebra N é a única nilpotente. De fato, a álgebra N é nilpotente de indíce 3, como por definição do produto na base, só possui produto não nulo e_1^2, temos que basta verificar $e_1^2 e_2$ e e_1^3, os demais são trivialmente nulos, e como $e_1^2 e_2 = e_2^2 = 0$ e $e_1^3 = e_2 e_1 = 0$, segue que é nilpotente. Vemos que D_2, M e M_λ não são nilpotentes, já que $e_1^n \neq 0$, para todo n. Logo, N não pode ser isomorfa a nenhuma das outras.

Ainda, D_2 é a única não asssociativa. De fato, podemos verificar o associador, e usando que $char(\mathbb{K}) \neq 2$, temos

$$(e_1, e_1, e_2) = \frac{e_2}{2} - \frac{e_2}{4} \neq 0.$$

Enquanto, podemos verificar que M_λ e M são associativas. Para a álgebra M, podemos observar que é associativa, já que o único produto não nulo são as potências de e_1, mas e_1 é de potência associativa, e segue que M é associativa. Para álgebra M_λ, basta veirificar os associadores (e_1, e_2, e_1) , (e_2, e_1, e_2) , (e_1, e_1, e_2) e (e_1, e_2, e_2), já que por definição do produto os demais associadores são trivialmente nulos. Temos

$$(e_1, e_2, e_1) = e_2 e_1 - e_1 e_2 = 0,$$

$$(e_2, e_1, e_2) = e_2 e_2 - e_2 e_2 = 0,$$

$$(e_1, e_1, e_2) = e_1 e_2 - e_1 e_2 = 0,$$

e

$$(e_1, e_2, e_2) = e_2 e_2 - \lambda e_1 e_1 = \lambda e_1 - \lambda e_1.$$

Assim, resta ver que M e M_λ não são isomorfas. Observe que e_1 é a unidade da álgebra M_λ. Porém M não tem unidade, e assim elas não isomorfas. Vejamos que M de fato não tem unidade, como $e_2 \in Ann(M)$, não pode ser unidade, pois caso contrário teríamos que um é igual a zero. Então, e_1 deveria ser a unidade, porém, $e_1e_2 = 0 \neq e_2$, já que e_2 é elemento da base.

Por fim, vejamos quando M_λ e $M_{\lambda'}$ são isomorfas. Seja $\varphi : M_\lambda \to M_{\lambda'}$ isomorfismo. Note que em M_λ, e_1 é a unidade de M_λ, daí $\varphi(e_1) = e_1^{'}$. Ainda, segue da bijetividade que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $\beta \neq 0$ tais que

$$\varphi(\alpha e_1 + \beta e_2) = e_2^{'}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha e_1 + \beta e_2)^2 &= \alpha^2\varphi(e_1^2) + 2\alpha\beta\varphi(e_1e_2) + \beta^2\varphi(e_2^2) \\
&= (\alpha^2 + \beta^2\lambda)\varphi(e_1) + 2\alpha\beta\varphi(e_2) \\
&= (e_2^{'})^2 \\
&= \lambda^{'}\varphi(e_1)
\end{aligned}$$

e temos que $\alpha^2 + \beta^2\lambda = \lambda'$ e $2\alpha\beta = 0$, então, como $char(\mathbb{K}) \neq 2$ e $\beta \neq 0$, segue que $\alpha = 0$ e $\beta^2\lambda = \lambda^{'}$.

□

Observação 4.2.6. *Uma álgebra é chamada de* ***potência associativa*** *se a subálgebra gerada por qualquer elemento for associativa. Note que, assim como no Lema 4.2.3, podemos enunciar o Teorema 4.2.5 para álgebras comutativas de potência associativa, assim como é feito em [5], e obtemos como consequência que as álgebras dessa classificação são de Jordan.*

De fato, como as álgebras M, M_λ e N são associativas e comutativas, segue que são de Jordan. Resta verificar para a álgebra D_2, porém, podemos observar que a álgebra D_2 satisfaz as hipóteses do Lema 4.2.3, e, portanto, é também de Jordan.

Observação 4.2.7. *É um resultado bem conhecido na literatura que as álgebras de Jordan são de potência associativa, como pode ser visto em [23]. Com a classificação obtida para álgebras comutativas de potência associativa bidimensionais, temos, assim, a equivalência dessa classe com as álgebras de Jordan para tal dimensão.*

Exemplo 4.2.8. *A álgebra genética $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}$, do Teorema 4.1.2, é a álgebra D_2.*

Capítulo 5

Considerações Finais

De modo geral, este trabalho teve como objetivo reunir e organizar classificações já existentes de quatro classes de álgebras: Lie, Leibniz, Jordan e Genética. Neste capítulo, apresentamos uma síntese estruturada de todas as classificações discutidas ao longo do texto, oferecendo uma visão clara e acessível do conteúdo. O objetivo é facilitar consultas e referências futuras, permitindo uma compreensão mais objetiva e rápida das classificações abordadas, servindo como um material de apoio para eventuais pesquisas e aprofundamentos no tema. A classificação para as álgebras expressas como soma direta não foram acrescentadas, já que escrevemos essas de acordo com a classificação obtida para as ordens menores e, nesse caso, não obtemos um ganho efetivo para a classificação.

5.1 Tabela multiplicativa das Álgebras de Lie

Considerando $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$, temos a seguinte tabela de classificação para dimensões um, dois e três:

		Produto na base
$dim(\mathcal{L}) = 1$	A	trivial
$dim(\mathcal{L}) = 2$	$\tilde{\mathcal{L}}$	$e_1e_2 = e_2$
$dim(\mathcal{L}) = 3$	$\mathcal{L}_0$	abeliana
	$\mathcal{L}_1$	$e_1e_2 = e_1$, $e_1e_3 = e_1$,
	$\mathcal{L}_2$	$e_1e_2 = e_1$,
	$\mathcal{L}_3$	$e_3e_1 = e_1$, $e_3e_2 = \alpha e_2$ com $\alpha \in \mathbb{C}$
	$\mathcal{L}_4$	$e_3e_2 = e_2$, $e_3e_1 = e_1 + e_2$
	$\mathcal{L}_5$	$e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$

Tabela 5.1: Tabela de classificação das álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$.

Observe que os produtos que não estão explicitados na tabela são nulos. Vale ressaltar que as álgebras unidimensionais e bidimensionais, a classificação independe do corpo sobre o qual a álgebra é considerada.

5.2 Tabela multiplicativa das Álgebras de Leibniz não Lie

Considerando L uma álgebra de Leibniz, não Lie, sobre o corpo dos números complexos, $\mathbb{C}$, temos a seguinte tabela de classificação para dimensões de um a três:

		Produto na base
$dim(L) = 1$	A_1	trivial
$dim(L) = 2$	A_3	$e_1e_1 = e_2$
	A_4	$e_1e_1 = e_2, e_2e_1 = e_2$
$dim(L) = 3$	RR_1	$e_1e_3 = -2e_1, \quad e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2$
	RR_2	$e_1e_3 = \alpha e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}$
	RR_3	$e_3e_3 = e_1, \quad e_3e_2 = e_2, \quad e_2e_3 = -e_2$
	RR_4	$e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_3 = \beta e_1 \quad e_2e_3 = e_1, \quad \beta \in \mathbb{C}$
	RR_5	$e_2e_2 = e_1, \quad e_3e_3 = e_1$
	RR_6	$e_1e_3 = e_2, \quad e_2e_3 = e_1$
	RR_7	$e_1e_3 = e_2, \quad e_2e_3 = \gamma e_1 + e_2, \quad \gamma \in \mathbb{C},$
	RR_8	$e_1e_3 = e_1, \ e_2e_3 = e_2$
	RR_9	$e_3e_3 = e_1, \quad e_1e_3 = e_2$
	RR_{10}	$e_3e_3 = e_1, \quad e_1e_3 = e_1 + e_2$

Tabela 5.2: Tabela de classificação das álgebra de Liebniz, não Lie, sobre $\mathbb{C}$.

Note que os produtos não explicitados na tabela são iguais a zero. Assim como no caso das álgebras de Lie, os casos unidimensionais e bidimensionais da classificação independem do corpo sobre o qual a álgebra é considerada.

5.3 Tabela multiplicativa das Álgebras Genéticas

Considerando $\mathfrak{G}$ uma álgebra Genética, temos a seguinte tabela de classificação para dimensões um e dois:

		Produto na base
$dim(\mathfrak{G}) = 1$	$\mathfrak{G}_1$	$e_1e_1 = e_1$
$dim(\mathfrak{G}) = 2$	$\mathfrak{G}_\beta$	$e_1e_1 = e_1$ e $e_1e_2 = \beta e_2$ para $\beta \in \mathbb{C}$
	$\tilde{\mathfrak{G}}$	$e_1e_1 = e_1 + e_2$, e $e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2$

Tabela 5.3: Tabela de classificação das álgebra Genéticas.

Os produtos na base que não aparecem na tabela são nulos.

5.4 Tabela multiplicativa das Álgebras de Jordan

Considerando $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan sobre um corpo qualquer, $\mathbb{K}$, de característica diferente de dois, temos a seguinte tabela de classificação para dimensões um e dois:

		Produto na base
$dim(\mathcal{J}) = 1$	$\mathcal{J}_1$	$e_1e_1 = e_1$
$dim(\mathcal{J}) = 2$	N	$e_1^2 = e_2$
	M	$e_1^2 = e_1$
	M_λ	$e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = \lambda e_1$ e $e_1e_2 = e_2$ com $\lambda \in \mathbb{K}$
	D_2	$e_1^2 = e_1$ e $e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2$

Tabela 5.4: Tabela de classificação das álgebra de Jordan sobre $\mathbb{K}$.

Observe que os produtos não especificados na tabela são nulos. Além disso, a classificação apresentada, para $dim(\mathcal{J}) = 2$, é equivalente para as álgebras comutativas de potência associativa.

Bibliografia

[1] ANCOCHEA BERMÚDEZ, J. M.; CAMPOAMOR-STURSBERG, R.; GARCÍA VERGNOLLE, L.; SÁNCHEZ HERNÁNDEZ, J. **Contractions d'algèbres de Jordan en dimension 2.** Journal of Algebra, v. 319, n. 6, p. 2395–2409, 2008.

[2] AYUPOV, S.; OMIROV, B.; RAKHIMOV, I. **Leibniz algebras: structure and classification.** 1ªed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2019

[3] BARROS, C.J.B.; SANTANA, A. J. **Estruturas Algébricas com Ênfase em Elementos da Teoria de Lie**. Paraná: Universidade Estadual de Maringá, 2011. 173p.

[4] DE MELO JÚNIOR, A. F. **Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, Salvador, 2017.

[5] DINIZ, D., GONÇALVES, D. J., DA SILVA, V. R. T., SOUZA, M. **Two-dimensional Jordan algebras: Their classification and polynomial identities**. Linear Algebra and its Applications, 664, 104-125, 2023.

[6] ETHERINGTON, I. M. H. **Genetic algebras.** Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, v. 59, p. 242-258, 1939.

[7] GILLESPIE, John H. **Population Genetics: A Concise Guide.** Edição ilustrada. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1998. p.174.

[8] GONSHOR, H. **Contributions to genetic algebras.** Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Cambridge University Press, v. 17, n. 4, p. 289–298, 1969.

[9] HARTL, Daniel L.; JONES, Elizabeth W. **Genética: Princípios e Aplicações.** 4. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

[10] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971.

[11] HOLGATE, P. **Jordan algebras arising in population genetics**, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 15, p. 291–294, 1967.

[12] HUNGERFORD, T. W. **Algebra.** New York: Springer, 1974. (Graduate Texts in Mathematics, v. 73).

[13] JACOBSON, N. **Basic algebra**. New York: W. H. Freeman, 1980. 2 v. ISBN 0716704536 (v.1) (broch.).

[14] JACOBSON, N. **Lie algebras**. New York, USA: Interscience, c1962. p.331. (Tracts in mathematics, 10).

[15] LODAY, J.L. **Une version non commutative des algêbres de Lie : les algêbres de Leibniz.** In: Séminaire Bourbaki, n. 44, p. 127-139, 1993.

[16] LOPES, Ana Flavia. **Álgebras genéticas.** 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

[17] MCCRIMMON, K. **A taste of Jordan algebras.** New York: Springer, 2004.

[18] MENDEL, Gregor. **Experiments in Plant Hybridization.** Versuche über Pflanzenhybriden em Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn, v. 4, p. 3–47, 1866.

[19] WÖRZ-BUSEKROS, Angelika. **Algebras in Genetics.** [S.l.]: Springer-Verlag, 1980. (Lecture notes in biomathematics).

[20] REED, Mary Lynn. **Algebraic structure of genetic inheritance.** Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, v. 34, n. 2, p. 107-130, 1997.

[21] RIKHSIBOEV, I.; RAKHIMOV, I. **Classification of three dimensional complex Leibniz algebras**. AIP Conference Proceedings. 1450, 358, 2012.

[22] SCHAFER,R.D. **An Introduction to Nonassociative Algebras**, Department of Mathematics at Oklahoma State University, 1961.

[23] SCHAFER, R. D. **Structure of genetic algebras.** American Journal of Mathematics, JSTOR, v. 71, n. 1, p. 121–135, 1949.

[24] SOUZA, M. A. F.; BENZECRY, D.; GURGEL, R. Q.; ALVES, J. G. B.; LEAL, M. C. **A endogamia explicaria a elevada prevalência de deficiências em populações do Nordeste brasileiro?** Ciência & Saúde Coletiva, Rio de Janeiro, v. 18, n. 4, p. 1149-1156, abr. 2013.

[25] ZHEVLAKOV, K. A. **Rings that are nearly associative.** Transl. of: Kol'k blizkie k associativnym. (Pure and Applied Mathematics).