



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Integrabilidade Segundo Darboux de Sistemas que Descrevem Aplicações Harmônicas

Igor Barbosa Arouca

SALVADOR, BA

2024

Igor Barbosa Arouca

**Integrabilidade Segundo Darboux de Sistemas que
Descrevem Aplicações Harmônicas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao colegiado do curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: Diego Catalano Ferraioli

SALVADOR, BA

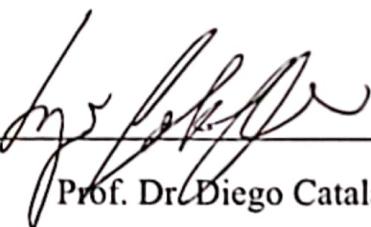
2024

Integrabilidade Segundo Darboux de Sistemas que Descrevem Aplicações Harmônicas

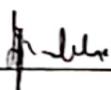
Igor Barbosa Arouca

Dissertação apresentada ao Colegiado do
Curso de Pós-graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia, como
requisito parcial para obtenção do Título
de Mestre em Matemática.

Banca examinadora



Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli (orientador - UFBA)



Prof. Dr. Andre Luis Godinho Mandolesi (UFBA)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva (UNB)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722c Arouca, Igor Barbosa

Integrabilidade Segundo Darboux de Sistemas que Descrevem Aplicações Harmônicas /
Igor Barbosa Arouca. – SALVADOR, BA, 2024
109 f. : il. color

Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de
Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, SALVADOR, BA, 2024.
Orientador: Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli

1. Integrabilidade segundo Darboux. 2. Aplicações harmônicas de tipo onda. 3. Sistemas
diferenciais exteiiores. 4. Espaços de jatos. 5. Geometria Diferencial. 6. Formalismo
variacional de Poincaré-Cartan.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Jesus Cristo por Sua condução perfeita e amor incondicional, que abriram portas e me permitiram chegar até aqui.

Aos meus pais, Luciene Souza Barbosa e Antonio Ribeiro Arouca, por todo apoio emocional, financeiro e moral ao longo da minha trajetória de vida. Eles são meu verdadeiro alicerce.

À Maria Clara Paixão Nunes por ser uma excelente companheira, me acolhendo nos piores momentos, celebrando os melhores e me ajudando a entender que eu estava à altura deste trabalho.

Ao meu orientador Diego Catalano Ferraioli, pela imensa contribuição à minha carreira profissional e por me guiar e auxiliar com sua vasta experiência acadêmica ao longo de mais de cinco anos.

Agradeço também ao professor Benigno Alves pela significativa contribuição à minha formação, assim como aos meus colegas de curso, João Augusto e Luiz Felipe, pelas inúmeras discussões que promoveram meu amadurecimento profissional.

Por fim, agradeço à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, e ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFBA pelo suporte durante minha carreira acadêmica.

"E conhecereis a verdade e a verdade vos libertará."

Jesus Cristo †

-∞ — +∞

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a integrabilidade segundo Darboux de alguns sistemas diferenciais exteriores de Euler-Lagrange que geometricamente descrevem aplicações harmônicas. Em particular, consideramos as aplicações harmônicas do espaço de Minkowski bidimensional para variedades Riemannianas bidimensionais e provamos que, localmente, e a menos de isometrias, os sistemas deste tipo que são integráveis segundo Darboux com até 1-prolongamento são somente 4. Classificamos portanto, a menos de transformações de ponto, os correspondentes sistemas hiperbólicos de equações diferenciais a derivadas parciais de Euler-Lagrange.

O trabalho se subdivide em cinco capítulos. No Capítulo 1, revisamos as principais preliminares, dentre as quais a teoria dos fibrados, dos espaços de jatos e dos sistemas diferenciais exteriores. Em particular, apresentamos a noção de integrabilidade segundo Darboux de um sistema diferencial exterior. No Capítulo 2, apresentamos o formalismo variacional de Poincaré-Cartan, introduzindo conceitos fundamentais para este estudo, dentre os quais a geometria de multicontato e a forma de Poincaré-Cartan. No Capítulo 3, calculamos o sistema diferencial exterior de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas entre variedades pseudo-Riemannianas. No Capítulo 4, restringimos e adaptamos os cálculos do Capítulo 3 às aplicações harmônicas do espaço de Minkowski bidimensional para variedades Riemannianas bidimensionais. Estudamos então a integrabilidade segundo Darboux dos sistemas diferenciais exteriores de Euler-Lagrange que descrevem essas aplicações, e encontramos assim condições para a integrabilidade segundo Darboux desses sistemas em termos da curvatura de Gauss das variedades de contradomínio das aplicações harmônicas. Finalmente, no Capítulo 5, elucidando os resultados de classificação obtidos por R. Ream, J.N. Clelland e P.J. Vassiliou, classificamos as métricas e os sistemas de equações diferenciais das correspondentes aplicações harmônicas, para os quais os sistemas diferenciais exteriores de Euler-Lagrange são integráveis segundo Darboux com até 1-prolongamento.

Palavras-chave: Integrabilidade segundo Darboux, Wave maps, Aplicações harmônicas, Sistemas diferenciais exteriores, Espaços de jatos, Geometria Diferencial, Formalismo variacional de Poincaré-Cartan.

Abstract

This work aims to study the Darboux integrability of some Euler-Lagrange exterior differential systems that geometrically describe harmonic maps. In particular, we consider harmonic maps from the 2-dimensional Minkowski space to 2-dimensional Riemannian manifolds and prove that locally and up to isometries, there are only four such systems that are Darboux integrable up to 1-prolongation. Therefore, we classify, up to point transformations, the corresponding hyperbolic systems of Euler-Lagrange partial differential equations.

The work is subdivided into five chapters. Chapter 1 reviews the main preliminaries, including the theory of bundles, jet spaces, and exterior differential systems. In particular, we present the notion of Darboux integrability of an exterior differential system. Chapter 2 presents the Poincaré-Cartan variational formalism, introducing fundamental concepts for this study, including multi-contact geometry and the Poincaré-Cartan form. In Chapter 3, we calculated the Euler-Lagrange exterior differential system for harmonic maps between pseudo-Riemannian manifolds. In Chapter 4, we restrict and adapt the calculations from Chapter 3 to harmonic maps from 2-dimensional Minkowski space to 2-dimensional Riemannian manifolds. We then study the Darboux integrability of Euler-Lagrange exterior differential systems describing such maps and find conditions for this kind of integrability in terms of the Gauss curvature of the codomain manifolds. Finally, in Chapter 5, elucidating the classification results obtained by R. Ream, J.N. Clelland and P.J. Vassiliou, we classify the metrics and systems of differential equations of the corresponding harmonic applications, whose Euler-Lagrange exterior differential systems are Darboux integrable up to 1-prolongation.

Keywords: Darboux Integrability, Wave-Maps, Harmonic maps, Exterior differential systems, Jet spaces, Differential Geometry, Poincaré-Cartan variational formalism.

Sumário

Introdução	17	
1	PRELIMINARES	23
1.1	Notações	23
1.2	Fibrados	24
1.2.1	Conexões em fibrados principais	29
1.2.2	Forma canônica θ de um fibrado dos referenciais $\mathcal{F}(M)$ e equações de estrutura	31
1.3	Espaços de Jatos	33
1.4	Sistemas diferenciais exteriores	36
1.4.1	Principais definições	37
1.4.2	Elementos integrais, variedades integrais admissíveis e prolongamento de um SDE	43
1.4.3	Redução por simetrias de um SDE	45
1.4.4	Integrabilidade segundo Darboux	48
2	FORMALISMO VARIACIONAL DE POINCARÉ-CARTAN	51
2.1	Variedades de contato	51
2.2	Funcionais Lagrangianos e forma de Poincaré-Cartan em variedades de contato	53
2.3	SDE Euler-Lagrange para uma variedade de contato	56
2.4	Geometria de multicontato	59
2.5	SDE de Euler-Lagrange para variedade de multicontato	61
3	SDE PARA APLICAÇÕES HARMÔNICAS	67
3.1	Preliminares	67
3.2	Pullback do sistema de multicontato para \mathcal{F}	71
3.3	Pullback da Lagrangiana para \mathcal{F}	72
3.4	SDE de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas	75
4	INTEGRABILIDADE DAS APLICAÇÕES HARMÔNICAS DE TIPO ONDA	79
4.1	SDE de Euler-Lagrange \mathcal{E}	79
4.2	Quociente de \mathcal{E} por $\mathcal{G} = \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$	82
4.2.1	SDE reduzido $\bar{\mathcal{E}}$ em coordenadas	86

4.3	Integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E}	88
4.4	SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$	90
4.5	Quociente de $\mathcal{E}^{(1)}$ por $\mathcal{G} = \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$	91
4.6	Integrabilidade segundo Darboux de $\mathcal{E}^{(1)}$	93
5	CLASSIFICAÇÃO DAS MÉTRICAS	97
5.1	Classificação a menos de isometrias	97
5.1.1	Caso $k = 0$	98
5.1.2	Caso k não constante	98
Referências		105

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a integrabilidade segundo Darboux de alguns sistemas hiperbólicos que geometricamente descrevem aplicações harmônicas. O estudo deste tipo de aplicação representa um tema importante na geometria diferencial moderna, com aspectos que são de grande interesse também para a Física Matemática e a teoria dos Sistemas Integráveis, como discutido nos trabalhos [15, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 42, 43, 50] e nas referências neles citadas.

De acordo com Eells e Sampson [20], a noção de aplicação harmônica, na forma atual, deve-se a J. Nash e independentemente F. B. Fuller [23]. Estas aplicações são descritas hoje como extremais de um certo funcional, mas desde os primórdios da Geometria Diferencial vários casos particulares, como por exemplo, as geodésicas e as superfícies mínimas, têm sido identificadas e amplamente estudadas.

Sejam P e Q duas variedades Riemannianas (ou pseudo-Riemannianas) de dimensões n e s com tensores métricos g e h , respectivamente. Dada uma aplicação suave $\varphi : P \rightarrow Q$, o pull-back $\varphi^*(h)$ (tal que $\varphi^*(h)_a(X_a, Y_a) = h_{\varphi(a)}(\varphi_*X_a, \varphi_*Y_a)$ para todo $a \in P$ e todo par de campos vetoriais X e Y em P) é chamado de primeira forma fundamental de φ enquanto sua densidade de energia $e(\varphi)$ é definida usando o traço tr_g da seguinte maneira

$$e(\varphi) := \frac{1}{2} tr_g \varphi^*(h).$$

Em termos de qualquer referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em P , podemos assim escrever que

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi^*(h)(e_i, e_i). \quad (1)$$

Com isto, se P for orientável e ν for sua forma de volume Riemanniana, a integral da densidade de energia sobre P define o funcional de energia

$$E[\varphi] := \int_P e(\varphi) \nu, \quad (2)$$

para aplicações $\varphi : P \rightarrow Q$. O valor $E[\varphi]$ pode ser infinito, mas se P for compacta (ou se as aplicações φ tiverem suporte compacto) este valor é certamente finito. Em termos de

coordenadas locais $\{x^i\}$ e $\{y^j\}$ em P e Q , se g e h tiverem representações coordenadas $g_{ij}dx^i dx^j$ e $h_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta$, respectivamente, então

$$\nu = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

$$e(\varphi) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta},$$

onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ e φ^α são as componentes de φ . Portanto em um domínio coordenado U com coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$, o funcional energia pode ser escrito como

$$E[\varphi] = \int_U \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta} \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3)$$

Note que este funcional é uma generalização do funcional energia (ou de Dirichlet) de uma imersão isométrica, usado em geometria Riemanniana no estudo de subvariedades mínimas, em particular de geodésicas. Assim, uma função $\varphi : P \rightarrow Q$ é uma aplicação harmônica, se for um ponto crítico do funcional energia, isto é, se satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais (EDP's) de Euler-Lagrange, que no caso do funcional $E[\varphi]$ podem ser escritas na forma

$$\Delta \varphi^\gamma + g^{ij} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad (4)$$

onde

$$\Delta \varphi^\gamma = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right)$$

são os Laplacianos em P das componentes φ^γ , Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel em P e $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ são os símbolos de Christoffel em Q .

Se P é uma variedade Riemanniana então (4) é um sistema de equações diferenciais parciais não linear elíptico. Em contrapartida, se P é uma variedade Lorentziana, ou seja, munida com uma métrica pseudo-Riemanniana com assinatura $(1, n-1)$, então (4) é um sistema de equações diferenciais parciais não linear hiperbólico.

Um exemplo de sistema elíptico é dado quando consideramos $P = \mathbb{R}^2$, o espaço Euclidiano bidimensional, e $Q = \mathbb{S}^2$, a esfera bidimensional unitária com a métrica induzida pelo espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . Neste caso, ao considerarmos $l = l(x^1, x^2)$ como uma aplicação de \mathbb{R}^2 para \mathbb{S}^2 , o sistema (4) se reduz a

$$l_{x^1 x^1} + l_{x^2 x^2} + (l_{x^1}^2 + l_{x^2}^2)l = 0.$$

Se, por outro lado, considerarmos $P = \mathbb{R}^{1,1}$, o plano de Minkowski, e $Q = \mathbb{S}^2$, o sistema (4) se transforma em

$$l_{x^1 x^1} - l_{x^2 x^2} + (l_{x^1}^2 - l_{x^2}^2)l = 0,$$

que configura um sistema hiperbólico.

Na literatura, quando o domínio é uma variedade pseudo-Riemanniana, a aplicação harmônica é frequentemente chamada de "wave map". Além disto, ainda existe na literatura

uma noção mais geral de aplicação harmônica, que é aquela de aplicação biharmônica, já presente no trabalho [21]. Para desenvolvimentos recentes sobre as aplicações harmônicas e ulteriores generalizações, o leitor pode consultar a referência [15].

Quando $n = 2$ e $P = \mathbb{R}^{1,1}$, com métrica $g = dx^1 \cdot dx^2$ (métrica de Minkowski em coordenadas de tipo luz), o sistema (4) é um sistema hiperbólico quasilinear da forma

$$\mathbf{u}_{x^1 x^2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \mathbf{u}_{x_2}) \quad (5)$$

onde $\mathbf{u} = (u^j)$ e $\mathbf{u}_{x^i} = (u_{x^i}^j)$ denotam as componentes de φ e suas derivadas em x^1, x^2 , respectivamente.

Sistemas deste tipo podem ser interpretados geometricamente como subvariedades $(2+6s)$ -dimensionais \mathcal{Y} de um espaço de jatos $(2+7s)$ -dimensional $J^2(\pi)$, por um fibrado $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(x^1, x^2, u^1, \dots, u^s) = (x^1, x^2)$. Desta forma, como subvariedade de $J^2(\pi)$, o sistema \mathcal{Y} é naturalmente equipado com a distribuição de Cartan induzida $\mathcal{C}^2(\mathcal{Y})$ e as soluções de \mathcal{Y} são seções de π cujos prolongamentos são variedades integrais de $\mathcal{C}^2(\mathcal{Y})$. Além disto, estes prolongamentos admitem uma folheação por dois sistemas de curvas chamadas de curvas características. Em todo ponto de \mathcal{Y} , os vetores tangentes às curvas características de soluções que passam pelo ponto, geram os espaços de duas distribuições Δ_1 e Δ_2 , ambas $(s+1)$ -dimensionais e não completamente integráveis, chamadas de distribuições características de \mathcal{Y} .

Nas coordenadas canônicas $\{x^i, u^j, u_{hk}^j\}$ de $J^2(\pi)$, estas distribuições podem ser descritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \langle \bar{D}_{x^1} + \bar{D}_{x^2}(f^j) \partial_{u_{22}^j}, \partial_{u_{11}^1}, \dots, \partial_{u_{11}^s} \rangle \\ &= \mathcal{C}^2(\mathcal{Y}) \cap \text{Ann}\{dx^2, du_{22}^1 - \bar{D}_{x^2}(f^1)dx^1, \dots, du_{22}^s - \bar{D}_{x^2}(f^s)dx^1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \langle \bar{D}_{x^2} + \bar{D}_{x^1}(f^j) \partial_{u_{11}^j}, \partial_{u_{22}^1}, \dots, \partial_{u_{22}^s} \rangle \\ &= \mathcal{C}^2(\mathcal{Y}) \cap \text{Ann}\{dx^1, du_{11}^1 - \bar{D}_{x^1}(f^1)dx^2, \dots, du_{11}^s - \bar{D}_{x^1}(f^s)dx^2\}, \end{aligned}$$

onde \bar{D}_{x^1} e \bar{D}_{x^2} são as derivadas totais em \mathcal{Y} , a saber

$$\begin{aligned} \bar{D}_{x^1} &= \partial_{x^1} + u_1^j \partial_{u^j} + u_{11}^j \partial_{u_1^j} + f^j \partial_{u_2^j}, \\ \bar{D}_{x^2} &= \partial_{x^2} + u_2^j \partial_{u^j} + f^j \partial_{u_1^j} + u_{22}^j \partial_{u_2^j}. \end{aligned}$$

Análogas considerações valem para os prolongamentos $\mathcal{Y}^{(h)}$ de \mathcal{Y} aos espaços de Jatos $J^{h+2}(\pi)$, $h = 1, 2, \dots$, em que de forma parecida podem ser definidas ainda distribuições características Δ_1^h, Δ_2^h . Note que $\mathcal{C}^2(\mathcal{Y}) = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, assim como $\mathcal{C}^{2+h}(\mathcal{Y}^h) = \Delta_1^h \oplus \Delta_2^h$ para todo $h = 1, 2, \dots$ Inclusive, considerando o prolongamento infinito $\mathcal{Y}^{(\infty)}$ de \mathcal{Y} em $J^\infty(\pi)$, Δ_1^∞ e Δ_2^∞ coincidem com as derivadas totais em $\mathcal{Y}^{(\infty)}$ que geram a distribuição de Cartan $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y}^{(\infty)})$, logo ainda $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y}^{(\infty)}) = \Delta_1^\infty \oplus \Delta_2^\infty$. Em particular, as integrais primeiras das distribuições características

Δ_1^h e Δ_2^h são sempre integrais primeiras da primeira e segunda derivada total em $\mathcal{Y}^{(\infty)}$, respectivamente. Na literatura estas integrais primeiras são às vezes chamadas de integrais intermediárias.

A noção de integrabilidade segundo Darboux nasceu no século XIX com as pesquisas de Darboux [18, 19] sobre as equações hiperbólicas escalares da segunda ordem, com base nas pesquisas de Monge e Ampère, que já tinham mostrado a existência das distribuições características para toda equação hiperbólica escalar da segunda ordem (não somente da forma $u_{12} = f$). Darboux, em particular, soube aproveitar das pesquisas de Monge relativas ao uso das integrais intermediárias mostrando que a integração de uma equação hiperbólica $\mathcal{Y} = \{F = 0\}$ pode se reduzir à integração de equações ordinárias quando existem dois sistemas de integrais intermediárias $\{I_1, \tilde{I}_1\}$ e $\{I_2, \tilde{I}_2\}$ de Δ_1 e Δ_2 , respectivamente, todas funcionalmente independentes. O motivo pelo qual isto acontece é que os gráficos de prolongamentos de soluções são 2-dimensionais, portanto sobre estas variedades devem valer relações funcionais do tipo $\tilde{I}_1 = \phi(I_1)$ e $\tilde{I}_2 = \psi(I_2)$. Disto se segue que as soluções de \mathcal{Y} são soluções de um sistema da forma $\tilde{\mathcal{Y}} = \{F = 0, \tilde{I}_1 = \phi(I_1), \tilde{I}_2 = \psi(I_2)\}$. Daí considerando as consequências diferenciais do sistema sobredeterminado \mathcal{Y} , escrito previamente em forma ortonômica (i.e., resolvido nas derivadas de ordem maior), obtém-se que o prolongamento infinito $\mathcal{Y}^{(\infty)}$ é de dimensão finita. Portanto a determinação das soluções da equação \mathcal{Y} é reduzida ao cálculo de variedades integrais de uma distribuição Frobenius em uma variedade de dimensão finita, o que é equivalente a resolver sistemas de equações ordinárias.

Um clássico exemplo de equação integrável segundo Darboux é aquele da equação de Liouville

$$u_{12} = e^u$$

onde $u = u(x^1, x^2)$. Neste caso, existem os seguintes invariantes intermediários

$$\begin{aligned} I_1 &= x^2, & \tilde{I}_1 &= u_{22} - \frac{u_2^2}{2}, \\ I_2 &= x^1, & \tilde{I}_2 &= u_{11} - \frac{u_1^2}{2}, \end{aligned}$$

em que o leitor pode pensar que $u_1 = u_{x^1}$, $u_2 = u_{x^2}$, $u_{11} = u_{x^1 x^1}$ e $u_{22} = u_{x^2 x^2}$. Assim, o sistema $\tilde{\mathcal{Y}}$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} u_{12} = e^u \\ u_{22} = \phi(x^2) + \frac{u_2^2}{2} \\ u_{11} = \psi(x^1) + \frac{u_1^2}{2} \end{cases}$$

com duas funções arbitrárias ϕ e ψ , e é fácil ver que $\tilde{\mathcal{Y}}$, assim como todo seu prolongamento, é 5-dimensional e com distribuição de Cartan completamente integrável.

Um outro exemplo de equação integrável segundo Darboux é representado pela equação

$$u_{12} = uu_1$$

que admite as seguintes integrais intermediárias

$$\begin{aligned} I_1 &= x^2, \quad \tilde{I}_1 = u_2 - \frac{u^2}{2}, \\ I_2 &= x^1, \quad \tilde{I}_2 = \frac{3u_{11}^2 - 2u_1 u_{111}}{2u_1^2}. \end{aligned}$$

Neste caso, o sistema $\tilde{\mathcal{Y}}$ é o seguinte

$$\begin{cases} u_{12} = uu_1 \\ u_2 = \phi(x^2) + \frac{u^2}{2} \\ u_{111} = \frac{3u_{11}^2 - 2u_1^2\psi(x^1)}{2u_1}, \end{cases}$$

com duas funções arbitrárias ϕ e ψ . Com isto é fácil verificar que, considerando as consequências diferenciais e as condições de compatibilidade de $\tilde{\mathcal{Y}}$, todas as derivadas de u podem ser escritas em termos de $\{x^1, x^2, u, u_1, u_{11}\}$. Disto se segue que os prolongamentos de $\tilde{\mathcal{Y}}$ são todos de dimensão 5, e com distribuição de Cartan completamente integrável.

Voltando ao caso de um sistema hiperbólico da forma (5), podemos aplicar um raciocínio análogo e concluir que a integração do sistema pode se reduzir a integrar um sistema de equações ordinárias quando existem $s + 1$ integrais intermediárias funcionalmente independentes para cada uma das distribuições características.

Agora, apesar de ser um tema clássico, ainda hoje não existe uma classificação das equações diferenciais integráveis segundo Darboux. Entretanto, nos últimos trinta anos, tivemos importantes avanços que tem produzido uma significativa retomada do interesse sobre este tema [1, 2, 4, 6, 7, 13, 16, 17, 30, 36].

A partir do trabalho de Bryant, Griffiths e Hsu [13], e sucessivamente aquele de Anderson, Fels e Vassiliou [4], a teoria das equações integráveis segundo Darboux tem sido abordada com o formalismo dos sistemas diferenciais exteriores, abrindo assim novos cenários também ao uso de sistemas diferenciais exteriores não Pfaffianos no estudo deste tipo de integrabilidade.

Com este trabalho queremos explorar alguns aspectos introdutórios a este âmbito de pesquisa, iniciando com um problema de classificação que na nossa opinião merece bastante atenção.

De fato, o objetivo principal deste trabalho foi estudar a classificação feita por Ream em [36] das aplicações harmônicas $\varphi : P \rightarrow Q$, em que (P, g) é o espaço de Minkowski bidimensional e (Q, h) uma variedade Riemanniana bidimensional, cujo sistema (4) é integrável segundo Darboux.

Usando em P coordenadas de tipo luz e coordenadas isotérmicas em Q , de forma tal que

$$g = dx^1 \cdot dx^2, \quad h = e^{2\rho(y^1, y^2)}((dy^1)^2 + (dy^2)^2),$$

o sistema (4) toma a forma

$$\begin{cases} y_{12}^1 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1}(y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2) - \frac{\partial \rho}{\partial y^2}(y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2), \\ y_{12}^2 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1}(y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2) + \frac{\partial \rho}{\partial y^2}(y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2), \end{cases}$$

onde $y_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j}$ e $y_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}$, $i, j, k = 1, 2$.

Ainda se conhecem poucos exemplos de sistemas integráveis segundo Darboux e é bastante natural esperar que exemplos importantes deste tipo possam aparecer no estudo de aplicações harmônicas, devido às importantes propriedades de integrabilidade descobertas para estas aplicações [15, 22, 25, 26, 28, 29].

Surpreende portanto o fato que [36] seja ainda a única tentativa de classificar sistemas integráveis segundo Darboux que descrevem aplicações harmônicas.

O trabalho se subdivide em cinco capítulos.

No Capítulo 1, revisamos as principais preliminares, dentre as quais a teoria dos fibrados, dos espaços de jatos e dos sistemas diferenciais exteriores. Em particular, apresentamos a noção de integrabilidade segundo Darboux de um sistema diferencial exterior.

No Capítulo 2, apresentamos o formalismo variacional de Poincaré-Cartan, introduzindo conceitos fundamentais para este estudo, dentre os quais a geometria de multicontato e a forma de Poincaré-Cartan.

No Capítulo 3, calculamos o sistema diferencial exterior de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas entre variedades pseudo-Riemannianas.

No Capítulo 4, restringimos e adaptamos os cálculos do Capítulo 3 às aplicações harmônicas do espaço de Minkowski bidimensional para variedades Riemannianas bidimensionais. Estudamos então a integrabilidade segundo Darboux dos sistemas diferenciais exteriores de Euler-Lagrange que descrevem essas aplicações, e encontramos assim condições para a integrabilidade segundo Darboux desses sistemas em termos da curvatura de Gauss das variedades de contradomínio das aplicações harmônicas.

Finalmente, no Capítulo 5, elucidando os resultados obtidos por R. Ream [36], J.N. Clelland e P.J. Vassiliou [17], classificamos as métricas e os sistemas de equações diferenciais das correspondentes aplicações harmônicas, para os quais os sistemas diferenciais exteriores de Euler-Lagrange são integráveis segundo Darboux com até 1-prolongamento.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso trabalho começará com uma revisão de algumas ferramentas básicas, dentre as quais a teoria dos fibrados, dos espaços de jatos e dos sistemas diferenciais exteriores. O leitor interessado em mais detalhes, pode consultar as referências [27, 34, 35, 40, 41].

1.1 Notações

Esta seção servirá de suporte ao leitor, elencando as principais notações empregadas ao longo deste trabalho. No elenco que segue, M é uma variedade diferenciável m -dimensional, \mathcal{I} um sistema diferencial exterior sobre M e \mathcal{Y} uma distribuição suave sobre M .

- $C^\infty(M)$ denotará a álgebra comutativa unitária das funções diferenciáveis sobre M ;
- $\mathcal{D}(M)$ denotará o $C^\infty(M)$ -módulo dos campos vetoriais sobre M ;
- $\Lambda^k(M)$ denotará o $C^\infty(M)$ -módulo das k -formas diferenciais sobre M ;
- $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(M)$ denotará a álgebra exterior de Grassmann sobre M ;
- $\theta^1 \cdot \theta^2$ denotará o produto simétrico entre 1-formas diferenciais θ^1 e θ^2 ;
- $\Lambda^k(M, \mathfrak{g})$ denotará o $C^\infty(M)$ -módulo das k -formas diferenciais sobre M a valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} ;
- $\Lambda^k(\theta_1, \dots, \theta_n)$ denotará o módulo das k -formas gerado pelas formas $\theta_1, \dots, \theta_n$;
- $\{\theta^1, \dots, \theta^h\}^\perp$ denotará a distribuição dos campos que anulam as 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^h$;
- \mathcal{I}^\perp denotará a distribuição dos campos que anulam as 1-formas que geram um SDE Pfaffiano (ou sistema Pfaffiano) \mathcal{I} ;
- I^\perp denotará a distribuição dos campos que anulam as formas de um módulo $I \subset \Lambda^1(M)$;

- Γ^\perp denotará o módulo gerado pelas 1-formas anuladas pelos campos inscritos numa distribuição Γ ;
- $\langle \theta^1, \dots, \theta^h \rangle$ denotará o módulo gerado pelas 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^h$;
- $\langle \theta^1, \dots, \theta^h \rangle_{alg}$ denotará o ideal algébrico gerado pelas 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^h$ (veja Seção 1.4);
- $\langle \theta^1, \dots, \theta^h \rangle_{dif}$ denotará o ideal diferencial gerado pelas 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^h$ (veja Seção 1.4);
- $\Lambda_{sb}^*(M)$ denotará a subálgebra de $\Lambda^*(M)$, das formas diferenciais semibásicas (veja Seção 1.4.3);
- \mathbb{I}_m denotará a matriz identidade de ordem m ;
- L_X denotará a derivada de Lie ao longo do campo X ;
- $\Gamma(\pi)$ denotará o conjunto das seções do fibrado π ;
- $\Gamma_U(\pi)$ denotará o conjunto das seções locais do fibrado π definidas em U ;
- $J^k(\pi)$ denotará o espaço de k -jatos das seções de um fibrado π , enquanto $J^k(M, E)$ denotará o espaço de k -jatos de aplicações diferenciáveis de uma variedade M em uma variedade E (veja a Seção 1.3).

1.2 Fibrados

A teoria dos fibrados será fundamental ao longo de todo este trabalho, desempenhando inclusive um papel crucial na teoria dos espaços de jatos e dos sistemas diferenciais exteriores. O leitor interessado em aprofundar seu conhecimento nesse tópico, pode consultar as referências [27, 33] e também [34, 35, 40, 41].

Definição 1.1. *Sejam E, M, F variedades topológicas. Um **fibrado** com fibra típica F , é uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$ tal que, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta U de x e um homeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ satisfazendo $pr_1 \circ \psi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, onde $pr_1 : M \times F \rightarrow M$ é a projeção no primeiro fator.*

De acordo com esta definição, toda **fibra** $\pi^{-1}(x) =: E_x$ em um ponto x é homeomorfa ao espaço topológico F , e a união $\bigcup_{x \in M} E_x$ coincide com E , que será chamado de **espaço total** do fibrado, enquanto M de **espaço base**. Além disso, π será denominada de **projeção**. Definimos também a **dimensão de um fibrado** π como sendo igual à dimensão de sua fibra típica F , portanto escrevemos $\dim \pi = \dim F$. Por fim, as aplicações ψ serão chamadas de **trivializações locais**, e quando $U = M$, dizemos que π é um **fibrado trivial**.

Quando E, M e F são variedades diferenciáveis, π é uma submersão e as trivializações locais ψ são difeomorfismos, dizemos que π é um **fibrado diferenciável**. A partir deste ponto, consideraremos apenas fibrados diferenciáveis, omitiremos o adjetivo diferenciável toda vez que mencionarmos um fibrado.

Exemplo 1.2. *Dadas duas variedades diferenciáveis M e F , a aplicação*

$$\begin{aligned}\pi : M \times F &\longrightarrow M \\ (p, q) &\mapsto p\end{aligned}$$

é um fibrado trivial com fibra típica F e espaço total a variedade produto $M \times F$.

Definição 1.3. *Um fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ com fibra típica F é chamado de **fibrado vetorial** se F é um espaço vetorial e toda trivialização local $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ induz um isomorfismo linear $\psi|_{E_x} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$ para cada $x \in U$.*

Observe que a condição mencionada acima carrega a informação que cada fibra E_x de um fibrado vetorial de dimensão k , possui uma estrutura intrínseca de espaço vetorial k -dimensional.

Definição 1.4. *Uma **seção local** de um fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ é uma aplicação suave $s : U \longrightarrow E$ definida em um aberto $U \subset M$, satisfazendo*

$$\pi \circ s = \text{Id}_U.$$

*Dizemos que s é uma **seção global** de π , ou apenas uma **seção** de π , quando $U = M$.*

Denotamos com $\Gamma(\pi)$ o conjunto das seções de π , enquanto $\Gamma_U(\pi)$ denotará o conjunto das seções locais definidas em U . Além disto, observamos que no caso de um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$, com as seguintes operações de soma $+$ de seções e produto \cdot de uma seção por um escalar

$$\begin{cases} (r + s)(p) = r(p) + s(p), \\ (\alpha \cdot r)(p) = \alpha r(p), \quad \forall r, s \in \Gamma(\pi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

o conjunto das seções $\Gamma(\pi)$ forma um \mathbb{R} -espaço vetorial, assim como o conjunto $\Gamma_U(\pi)$ das seções locais. Por outro lado, sempre no caso de um fibrado vetorial, definindo ainda o produto \cdot de uma seção por uma função na forma natural

$$(f \cdot s)(p) = f(p)s(p), \quad \forall s \in \Gamma(\pi), \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

o conjunto das seções $\Gamma(\pi)$ também pode ser visto como um módulo sobre a álgebra das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$. Análogas considerações valem para o conjunto das seções locais $\Gamma_U(\pi)$, quando $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial.

Dados dois fibrados vetoriais sobre uma mesma variedade base M , é possível definir de forma natural outros fibrados vetoriais. Exemplos de fibrados deste tipo são dados pelas seguintes duas definições.

Definição 1.5. (Veja [37], página 22) Sejam $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrados sobre M com fibras típicas F_1 e F_2 , respectivamente. O fibrado produto é a aplicação

$$\begin{aligned}\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times_M E_2 &\longrightarrow M \\ (p, q) &\mapsto \pi_1(p) = \pi_2(q)\end{aligned}$$

onde $E_1 \times_M E_2 = \{(p, q) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(p) = \pi_2(q)\}$.

Observe que, para cada $x \in M$, a fibra em x é dada por $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(x) = (E_1)_x \times (E_2)_x$. Consequentemente, $F_1 \times F_2$ é a fibra típica de π .

Definição 1.6. Sejam $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrados vetoriais sobre M . O fibrado das aplicações lineares (em inglês comumente denominado "hom-bundle") é a aplicação $\mathfrak{h} : \text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow M$ tal que, para cada $x \in M$,

$$\mathfrak{h}^{-1}(x) = \text{Hom}(E_1, E_2)_x = \text{Hom}(E_{1x}, E_{2x}),$$

i.e., a fibra em $x \in M$ é o espaço das aplicações lineares de E_{1x} em E_{2x} .

Agora, introduziremos uma outra noção de fibrado que desempenhará um papel fundamental neste trabalho, a saber, a noção de fibrado principal.

Definição 1.7. Sejam P, M variedades diferenciáveis e G um **grupo de Lie**. Um **G-fibrado principal** sobre M é um fibrado $\pi : P \rightarrow M$ com fibra típica G , em que existe uma **ação à direita** de G em P

$$\begin{aligned}R : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\mapsto R(p, g) = pg\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- a ação R é **livre**;
- $M = P/G$ é o quociente de P com relação à relação de equivalência definida pela ação de G ;
- para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e uma trivialização $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ equivariante, i.e., $\psi(pg) = \psi(p) \cdot g$ para cada $p \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$, onde a ação à direita de G em $U \times G$ é dada por $(x, a) \cdot g = (x, a \cdot g)$.

Note que pelo fato que a ação R é livre, para todo $x \in M$ e $p \in P_x$ a aplicação

$$\begin{aligned}j_p : G &\longrightarrow P_x \\ g &\mapsto pg\end{aligned}$$

é um difeomorfismo que, pelo fato de R ser uma ação à direita, satisfaz a propriedade $j_p(gh) = j_p(g)h$, para todo $g, h \in G$.

Exemplo 1.8. Seja M uma variedade m -dimensional. Em todo ponto $x \in M$ podemos considerar o conjunto

$$Fr_{GL}(M)_x = \{(\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x)) \text{ base de } T_x M\}$$

de todas as bases $(\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x))$ de $T_x M$. Naturalmente, podemos identificar toda base $(\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x))$ de $T_x M$ com um isomorfismo linear

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^m &\longrightarrow T_x M \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) &\longmapsto \sum_i \alpha^i \mathbf{v}_i(x). \end{aligned}$$

Portanto $Fr_{GL}(M)_x$ pode ser pensado também como o conjunto destes isomorfismos lineares. Consideraremos então a união disjunta

$$Fr_{GL}(M) = \bigcup_{x \in M} Fr_{GL}(M)_x$$

e a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad Fr_{GL}(M) &\longrightarrow M \\ (\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x)) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

O grupo $GL(m, \mathbb{R})$ possui uma ação natural à direita sobre $Fr_{GL}(M)$:

$$\begin{aligned} Fr_{GL}(M) \times GL(m, \mathbb{R}) &\longrightarrow Fr_{GL}(M) \\ ((\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x)), A) &\mapsto (\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x)) \cdot A \end{aligned}$$

tal que

$$(\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_m(x)) \cdot A = \left(\sum_i \mathbf{v}_i(x) A_{i1}, \dots, \sum_i \mathbf{v}_i(x) A_{in} \right),$$

se $A = (A_{ij})$. Alternativamente, usando u no lugar de $(v_1(x), \dots, v_m(x))$, esta ação é simplesmente descrita pela "multiplicação" $uA := u \circ A$. Pode-se provar [27] que $Fr_{GL}(M)$ é uma variedade diferenciável e, além disto, a ação considerada de $GL(m, \mathbb{R})$ define em $\pi : Fr_{GL}(M) \longrightarrow M$ a estrutura de um $GL(m, \mathbb{R})$ -fibrado principal chamado de **fibrado dos referenciais** de M . Lembremos aqui que a álgebra de Lie de $GL(m, \mathbb{R})$ é simplesmente a álgebra das matrizes reais $m \times m$.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana com assinatura (m_1, m_2)), em cada ponto $x \in M$, no lugar de $Fr_{GL}(M)_x$ podemos considerar o conjunto $Fr_O(M)_x$ das bases ortonormais $(\mathbf{e}_1(x), \dots, \mathbf{e}_m(x))$ de $T_x M$, relativamente ao produto escalar g_x definido por g em $T_x M$. Portanto, podemos considerar a união disjunta

$$Fr_O(M) = \bigcup_{x \in M} Fr_O(M)_x$$

com a projeção (que ainda denotamos com π)

$$\begin{aligned} \pi : \quad Fr_O(M) &\longrightarrow M \\ (\mathbf{e}_1(x), \dots, \mathbf{e}_m(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

e a natural ação do grupo $O(m)$ (ou $O(m_1, m_2)$) se g for pseudo-Riemanniana com assinatura (m_1, m_2)) sobre $Fr_O(M)$, definida de forma análoga àquela considerada anteriormente. Também neste caso, $Fr_O(M)$ é uma variedade diferenciável e a ação de $O(m)$ (respectivamente, $O(m_1, m_2)$) define em $\pi : Fr_O(M) \rightarrow M$ a estrutura de um $O(m)$ -fibrado (respectivamente, $O(m_1, m_2)$ -fibrado) principal chamado de **fibrado dos referenciais ortonormais** de M .

Denotando com $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, a matriz de g num referencial ortonormal, e lembrando que $A \in O(m_1, m_2)$ se $A^T \eta A = \eta$, segue que a álgebra de Lie \mathfrak{g} de $G = O(m_1, m_2)$ é a subálgebra de matrizes $m \times m$ reais tais que $B^T \eta + \eta B = 0$. Analogamente para $O(m)$.

Em particular, se (M, g) for uma variedade Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana) orientável, considerando em todo $x \in M$ o conjunto $Fr_{SO}(M)_x$ das bases ortonormais orientadas positivamente (i.e., de acordo com uma orientação fixada de M), podemos considerar a união disjunta

$$Fr_{SO}(M) = \bigcup_{x \in M} Fr_{SO}(M)_x$$

a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad Fr_{SO}(M) &\longrightarrow M \\ (\mathbf{e}_1(x), \dots, \mathbf{e}_m(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

e a ação natural em $Fr_{SO}(M)$ do grupo $SO(m)$ (ou $SO(m_1, m_2)$) se g for pseudo-Riemanniana com assinatura (m_1, m_2) , que preserva a orientação das bases. Desta forma, obtemos um $SO(m)$ -fibrado (ou $SO(m_1, m_2)$ -fibrado) principal $\pi : Fr_{SO}(M) \rightarrow M$ chamado **fibrado dos referenciais ortonormais positivos** de M .

Dado um G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ e F uma variedade na qual G age à esquerda, definiremos uma ação à direita de G em $P \times F$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\longrightarrow P \times F \\ ((p, f), g) &\mapsto (p, f) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot f) \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde estamos denotando por \cdot tanto a ação de G em P quanto a ação de G em F . Denotaremos o espaço quociente de $P \times F$ pela ação (1.1) por

$$P \times_G F := (P \times F)/G.$$

Pode-se provar [15] que $P \times_G F$ é uma variedade diferenciável e a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : \quad P \times_G F &\longrightarrow M \\ [(p, f)] &\mapsto x = \pi(p) \end{aligned}$$

é um fibrado com fibras $\hat{\pi}^{-1}(x) = (P_x \times F)/G = \{[p, f] = (p, f) \cdot g : g \in G\}$, onde $p \in P_x$. Em particular, fixado $p \in P_x$, $f \mapsto [p, f]$ define um difeomorfismo entre $\hat{\pi}^{-1}(x)$ e F . O fibrado $\hat{\pi}$ é o **fibrado associado** a π , por meio da ação (1.1).

Aplicamos essa construção no caso em que a fibra F é um espaço vetorial no Capítulo 3.

1.2.1 Conexões em fibrados principais

Lembramos que para todo $X_e \in T_e G$, a translação à esquerda

$$\begin{aligned} l : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, a) &\longmapsto l_g a = g \cdot a \end{aligned}$$

permite definirmos um campo invariante à esquerda $X \in \mathcal{D}(G)$ tal que

$$X_g = (l_g)_* X_e \quad \forall g \in G.$$

Desta forma, existe uma correspondência 1 – 1 entre $T_e G$ e o espaço vetorial dos campos invariantes à esquerda em G . Por meio desta correspondência o comutador de campos invariantes à esquerda induz um colchete em $T_e G$, e pelas propriedades do push-forward este colchete define uma estrutura de álgebra de Lie em $T_e G$, que é portanto chamada de **álgebra de Lie** de G . Esta álgebra é naturalmente isomorfa à álgebra induzida pelo próprio comutador no espaço dos campos invariantes à esquerda. Portanto, os elementos da álgebra de Lie \mathfrak{g} de G podem ser equivalentemente pensados ou como vetores de $T_e G$ ou como campos invariantes à esquerda.

É possível provar que os campos invariantes à esquerda são completos e, portanto, seus fluxos podem ser usados para definir o mapa exponencial

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X_e &\mapsto \gamma_X(1) \end{aligned}$$

onde $\gamma_X(t)$ é a trajetória de X (invariante à esquerda) que passa por e quando $t = 0$, i.e., $\gamma_X(0) = e$. Em termos do fluxo $\{\phi_t\}$ de X , $\gamma_X(t) = \phi_t(e)$, e portanto $\gamma_X(1) = \phi_1(e)$.

Dado um G -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$, é possível então definir um homomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{D}(P) \\ \xi &\longmapsto \sigma(\xi) : C^\infty(P) \longrightarrow C^\infty(P) \\ f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\exp(t\xi)}^*(f) \end{aligned}$$

onde $R_{\exp(t\xi)} : P \longrightarrow P$ é tal que $R_{\exp(t\xi)}(p) = p \cdot \exp(t\xi)$. Em outras palavras, $\sigma(\xi)$ é o campo que tem como vetor tangente em p o vetor tangente à curva $p \cdot \exp(t\xi) = R_{\exp(t\xi)}(p)$. Na literatura o campo $\sigma(\xi)$ é chamado de **campo fundamental** correspondente a ξ . Daqui em diante, denotaremos $\sigma(\xi)$ com a notação mais conveniente X^ξ .

Por definição, os campos fundamentais têm a propriedade de serem tangentes às fibras de π e, portanto, são verticais. Denotando portanto com \mathcal{V} a distribuição dos vetores tangentes verticais, para todo $p \in P$, temos uma aplicação linear

$$\begin{aligned} j_p : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{V}_p \\ \xi &\mapsto X_p^\xi \end{aligned} \tag{1.2}$$

que resulta ser um isomorfismo linear.

Definição 1.9. Para cada $p \in P$, seja \mathcal{V}_p o subespaço dos vetores tangentes em p à fibra $P_{\pi(p)}$. Uma **conexão** em P consiste na escolha de uma distribuição $\mathcal{H} = \bigcup_{p \in P} \mathcal{H}_p$ de subespaços $\mathcal{H}_p \subset T_p P$, para cada $p \in P$, que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $T_p P = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p$;
- (ii) $\mathcal{H}_{pg} = (R_g)_* \mathcal{H}_p$ para cada $p \in P$ e $g \in G$, i.e., a distribuição \mathcal{H} é invariante sob a ação à direita de G em P ;
- (iii) \mathcal{H} é suave.

Definimos \mathcal{V}_p como o subespaço vertical de $T_p P$ e, consequentemente, \mathcal{H}_p como um subespaço horizontal de $T_p P$. A distribuição \mathcal{V} é então chamada de distribuição vertical, enquanto \mathcal{H} é chamada de distribuição horizontal. Assim, se de um lado a distribuição vertical \mathcal{V} consiste nos vetores tangentes à fibra passante por cada ponto $p \in P$, por outro lado a distribuição horizontal \mathcal{H} consiste de vetores transversais à fibra passante por cada ponto $p \in P$.

Pela (i) da Definição 1.9, qualquer vetor tangente $\mathbf{w} \in T_p P$ pode ser decomposto de forma única como $\mathbf{w} = \mathbf{w}^v + \mathbf{w}^h$, com $\mathbf{w}^v \in \mathcal{V}_p$ e $\mathbf{w}^h \in \mathcal{H}_p$. Analogamente, todo campo $X \in \mathcal{D}(P)$ admite uma decomposição única da forma $X = X^v + X^h$, com $X^v \in \mathcal{V}$ e $X^h \in \mathcal{H}$ (i.e. para todo $p \in P$, os vetores X_p^v e X_p^h pertencem a \mathcal{V}_p e \mathcal{H}_p , respectivamente).

Portanto, usando o isomorfismo j_p , definido em (1.2), para cada vetor $\mathbf{w} \in T_p P$, podemos associar um vetor $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $\xi = j_p^{-1}(\mathbf{w}^v)$. Disto se segue que, dada uma conexão Γ em P , podemos naturalmente definir a seguinte 1-forma ω em P a valores em \mathfrak{g} (i.e., $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$) de modo que $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) := j_p^{-1}(X_p^v)$, $\forall p \in P$, $\forall X \in \mathcal{D}(P)$. Segue da definição de ω que para cada campo $X \in \mathcal{D}(P)$, $\omega(X) = 0$ se, e somente se, X pertence a distribuição horizontal. A forma ω é chamada de **forma de conexão** de Γ .

Lembramos agora que, dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} , para cada $g \in G$ definimos a conjugação

$$\begin{aligned} c_g : \quad G &\longrightarrow \quad G \\ a &\mapsto \quad gag^{-1}. \end{aligned}$$

Pela definição de c_g segue imediatamente que $c_{g_1 g_2} = c_{g_1} \circ c_{g_2}$, para todo $g_1, g_2 \in G$.

Com isto, definimos a **representação adjunta** de G como

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ \xi &\mapsto (c_g)_{*,e}(\xi) \end{aligned}$$

onde estamos considerando $\mathfrak{g} = T_e G$. Em particular observamos que, pelas propriedades de push-forward segue portanto que

$$Ad(g_1 g_2) = (c_{g_1 g_2})_* = (c_{g_1} \circ c_{g_2})_* = Ad(g_1) \circ Ad(g_2).$$

Além disto, denotando com $gl(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie de $GL(\mathfrak{g})$, pode-se provar que a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} ad &:= (Ad)_{*,e} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \xi &\longmapsto ad(\xi) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ \eta &\longmapsto ad(\xi)(\eta) \end{aligned}$$

chamada de representação adjunta de \mathfrak{g} , satisfaz a seguinte propriedade

$$ad(\xi)(\eta) = [\xi, \eta], \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

A seguinte proposição fornece uma útil caracterização da noção de conexão em um fibrado principal (vide [9]).

Proposição 1.10. *Toda conexão em um G -fibrado principal determina uma forma de conexão $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ que satisfaz as seguintes duas propriedades*

$$(a) \quad \omega_p(X_p^\xi) = \xi \text{ para todo } \xi \in \mathfrak{g} \text{ e todo } p \in P;$$

$$(b) \quad (R_g)^* \omega = Ad(g^{-1}) \circ \omega, \text{ i.e., para cada } g \in G, \omega((R_g)_*(X_p)) = Ad(g^{-1})(\omega_p(X_p)) \text{ para todo } X \in \mathcal{D}(P) \text{ e todo } p \in P.$$

Reciprocamente, toda $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ que satisfaz (a) – (b) define uma conexão em que $\mathcal{H}_p = \{X_p \in T_p P : \omega_p(X_p) = 0\}$, para todo $p \in P$.

Portanto, por conexão em um fibrado principal, podemos simplesmente pensar na forma de conexão ω . Pode-se provar (veja por exemplo [33], vol. 1) que em todo G -fibrado principal, existe pelo menos uma conexão ω .

Definição 1.11. *A curvatura de uma conexão $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ é a 2-forma $\Omega \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g})$ tal que*

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^h, Y^h),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}(P)$.

Pode-se provar que (vide [9])

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)],$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}(P)$.

1.2.2 Forma canônica θ de um fibrado dos referenciais $\mathcal{F}(M)$ e equações de estrutura

Seja $\pi : \mathcal{F}(M) \longrightarrow M$ um G -fibrado principal dos referenciais sobre M . Por exemplo, pode ser $\mathcal{F}(M) = Fr_{GL}(M), Fr_O(M), Fr_{SO}(M)$ com $G = GL_n(\mathbb{R}), O(m_1, m_2), SO(m_1, m_2)$, respectivamente.

No caso de um fibrado dos referenciais $\mathcal{F}(M)$ sobre uma variedade m -dimensional M , uma conexão $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{F}(M), \mathfrak{g})$ é chamada de conexão linear. Sabemos que sempre existe uma conexão linear em qualquer fibrado dos referenciais, porém esta não é única.

Por outro lado, em $\pi : \mathcal{F}(M) \rightarrow M$ pensando os referenciais (pontos de $\mathcal{F}(M)$) como isomorfismos $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi(u)}M$ (veja o exemplo 1.8), podemos sempre definir a 1-forma canônica $\theta \in \Lambda^1(\mathcal{F}(M), \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\theta_u(X_u) = u^{-1}((\pi)_*(X_u)), \quad (1.3)$$

para todo $u \in \mathcal{F}(M)$ e todo campo vetorial X em $\mathcal{F}(M)$.

A forma canônica θ satisfaz, para cada $g \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (R_g^* \theta)_u(X_u) &= \theta_{u \circ g}((R_g)_*(X_u)) \\ &= (u \circ g)^{-1}((\pi)_*(R_g)_* X_u) \\ &= g^{-1}(u^{-1}((\pi \circ R_g)_* X_u)) \\ &= g^{-1}(u^{-1}(\pi_* X_u)), \end{aligned}$$

i.e., $R_g^* \theta = g^{-1} \circ \theta$, onde usamos o fato de que $\pi_*(X_u) = \pi_*((R_g)_*(X_u))$. Além disso, θ é horizontal, no sentido que $\theta(X) = 0$ para todo campo vertical X .

Num fibrado dos referenciais $\pi : \mathcal{F}(M) \rightarrow M$ com conexão linear ω , podemos também associar a cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, um campo horizontal $B(\xi)$ em $\mathcal{F}(M)$ da seguinte maneira: para cada $u \in \mathcal{F}(M)$, $B(\xi)_u$ é o único vetor horizontal em $T_u \mathcal{F}(M)$ tal que $\pi_*(B(\xi)_u) = u(\xi)$. Dessa forma

$$\theta(B(\xi)) = \xi,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. $B(\xi)$ é chamado de **campo horizontal canônico** correspondente a ξ .

Usando a 1-forma canônica $\theta \in \Lambda^1(\mathcal{F}(M), \mathbb{R}^m)$ num fibrado dos referenciais $\pi : \mathcal{F}(M) \rightarrow M$, com conexão linear $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{F}(M), \mathfrak{g})$ em uma variedade m -dimensional M , podemos também definir a 2-forma de torção Θ como

$$\Theta(X, Y) = d\theta(X^h, Y^h),$$

para todo campo X e Y em $\mathcal{F}(M)$.

O teorema fundamental da geometria pseudo-Riemanniana (veja por exemplo [33, 9]) afirma que no caso em que M é pseudo-Riemanniana, existe uma única conexão linear ω (conexão de Levi-Civita) em $\mathcal{F}(M) = Fr_O(M)$ com torção $\Theta = 0$. Um análogo resultado vale naturalmente para o caso Riemanniano.

Enunciaremos agora o teorema que introduz as equações de estrutura satisfeitas por ω e θ (veja por exemplo [33]).

Teorema 1.12. Considerando as bases $\{e_i\}$ e $\{E_i^j\}$ de \mathbb{R}^m e $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, respectivamente, e escrevendo

$$\theta = \theta^i e_i, \quad \omega = \omega_j^i E_i^j, \quad \Omega = \Omega_j^i E_i^j,$$

as seguintes equações de estrutura são válidas

$$\begin{aligned} d\theta^i &= -\omega_j^i \wedge \theta^j + \Theta^i, \\ d\omega_j^i &= -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, \dots, m$. De forma simplificada, estas equações podem ser expressas como

$$\begin{aligned} d\theta &= -\omega \wedge \theta + \Theta, \\ d\omega &= -\omega \wedge \omega + \Omega. \end{aligned}$$

As equações acima caracterizam completamente a estrutura da conexão linear e suas implicações geométricas são fundamentais para compreender como a geometria do fibrado principal é influenciada pela conexão linear.

Notemos que se $\{E_i\}$ denotarem os campos horizontais canônicos associados à base $\{e_i\}$ de \mathbb{R}^m , e se $\{\hat{E}_i^j\}$ denotarem os campos fundamentais correspondentes à base $\{E_i^j\}$ de \mathfrak{g} , é possível verificar que $\{E_i, \hat{E}_i^j\}$ e $\{\theta^i, \omega_j^i\}$ são duais, i.e.,

$$\begin{aligned} \theta^k(E_i) &= \delta_i^k, & \theta^k(\hat{E}_i^j) &= 0, \\ \omega_l^k(\hat{E}_i^j) &= \delta_i^k \delta_l^j, & \omega_l^k(E_i) &= 0. \end{aligned}$$

Os campos $\{E_i, \hat{E}_i^j\}$ definem um paralelismo absoluto em $\mathcal{F}(M)$, i.e., formam uma base de $T_u \mathcal{F}(M)$ para cada $u \in \mathcal{F}(M)$.

1.3 Espaços de Jatos

Nesta seção, estudaremos os espaços de jatos, que constituem um cenário ideal para o estudo de equações diferenciais de um ponto de vista geométrico. De fato, as equações diferenciais podem ser tratadas como subvariedades dos espaços de jatos e equipadas com uma distribuição específica, chamada de distribuição de Cartan. Além disto, sob oportunas condições de não degeneração, as soluções são descritas por variedades integrais dessa distribuição. Realizaremos aqui somente uma breve revisão de alguns aspectos gerais deste tópico, adiando a discussão de outros aspectos para outras seções. O leitor interessado numa tratação sistemática, pode consultar as referências [32, 37, 45, 46, 47, 48, 49].

Realizaremos agora uma breve revisão deste tópico. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado com $\dim M = n$ e $\dim E = n + m$. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $J^k(\pi)$ o **espaço de k -jatos** das seções de π e por $\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M$ o **fibrado de k -jatos** das seções de π . Por

definição, um ponto θ de $J^k(\pi)$ é uma classe de equivalência $\theta = [s]_a^k$ de seções suaves s de π cujos gráficos em $a \in M$ passam pelo mesmo ponto $s(a)$, onde elas têm o mesmo contato até a ordem k (isto é, as mesmas derivadas até a ordem k no ponto a). Em particular, pode-se identificar E com $J^0(\pi)$.

Portanto, qualquer seção s de π , juntamente com suas derivadas até a ordem k , determina uma seção $j_k(s)$ de π_k , que é chamada de **k -ésimo prolongamento** de s .

Para $h > k$, denotamos por $\pi_{h,k} : J^h(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ a **projeção natural** de $J^h(\pi)$ em $J^k(\pi)$, dada por $[s]_a^h \rightarrow [s]_a^k$.

Todo espaço de jatos $J^k(\pi)$ possui uma estrutura de variedade diferenciável, induzida naturalmente pelas estruturas de E e M .

De fato, toda carta definida num aberto $U \subset E$, com coordenadas $\{x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m\}$ em que $\{x_1, \dots, x_n\}$ são coordenadas locais em M e $\{u^1, \dots, u^m\}$ coordenadas locais nas correspondentes fibras de π , se estende a uma carta em $\pi_{k,0}^{-1}(U) \subset J^k(\pi)$ com coordenadas naturais $\{x_i, u_\sigma^j\}$, onde $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é um multi-índice de ordem $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ tal que $0 \leq |\sigma| \leq k$. Por definição, para todo $\theta = [s]_a^k \in \pi_{k,0}^{-1}(U)$, $\{x_i, u_\sigma^j\}$ são tais que

$$x_i(\theta) := x_i(a), \quad u_\sigma^j(\theta) = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}} \Big|_a u^j(s(x)).$$

Ao considerar o fibrado trivial $\tilde{\pi} : M \times E \rightarrow M$ e notando que uma seção $s(p) = (p, \varphi(p))$ é caracterizada pela aplicação $\varphi : M \rightarrow E$, podemos considerar o espaço de 1-jatos do fibrado $\tilde{\pi}$ como o espaço de 1-jatos das aplicações de M em E , denotado por $J^1(M, E) = J^1(\tilde{\pi})$. Analogamente, definimos $J^k(M, E) = J^k(\tilde{\pi})$.

O espaço de k -jatos $J^k(\pi)$ é naturalmente equipado com a *distribuição de Cartan* $\mathcal{C}^k(\pi)$, que é gerada pelos planos tangentes aos gráficos dos k -ésimos prolongamentos das seções de π .

Em coordenadas, $\mathcal{C}^k(\pi)$ pode ser descrita tanto como

$$\mathcal{C}^k(\pi) = \text{ann} \{ \theta_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_i u_{\sigma+1_i}^j dx_i : 0 \leq |\sigma| \leq k-1, j = 1, \dots, m \},$$

quanto como

$$\mathcal{C}^k(\pi) = \langle \partial_{u_{\sigma+1_i}^j}, D_i^{(k)} : 0 \leq |\sigma| \leq k-1, j = 1, \dots, m \rangle,$$

onde $D_i^{(k)}$ são os **operadores de derivada total truncados à ordem k** ,

$$D_i^{(k)} := \partial_{x_i} + \sum_{|\sigma| \leq k-1} u_{\sigma+1_i}^j \partial_{u_\sigma^j}.$$

Um sistema de equações diferenciais de ordem k

$$\begin{cases} F^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x})) = 0, \\ \vdots \\ F^r(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x})) = 0, \end{cases}$$

para uma função $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ de $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, sob hipóteses de regularidade para $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^r)$, pode ser tratado como uma subvariedade

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x})) = 0\}$$

do k -ésimo espaço de jatos $J^k(\pi)$ do fibrado

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\longmapsto \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Desta forma, as soluções $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ deste sistema podem ser geometricamente descritas pelas seções

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

cujo gráfico do k -ésimo prolongamento $j^k s$ está contido em \mathcal{Y} . Portanto as soluções de \mathcal{Y} descrevem variedades integrais da distribuição de Cartan induzida

$$C^k(\mathcal{Y}) := C^k(\pi) \cap T\mathcal{Y}.$$

Teorema 1.13. *Uma subvariedade n -dimensional $\Sigma \subset J^k(\pi)$ que satisfaz a condição de independência $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_\Sigma \neq 0$, é uma variedade integral de $C^k(\pi)$ se, e somente se, Σ é gráfico do k -ésimo prolongamento de uma seção local de π .*

Demonstração. Pela própria definição de $C^k(\pi)$ já sabemos que os prolongamentos de seções são variedades integrais de $C^k(\pi)$ que satisfazem a condição de independência $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \neq 0$. Portanto precisamos provar somente o recíproco.

Se $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_\Sigma \neq 0$, então $\{x^1, \dots, x^n\}$ podem ser usadas como coordenadas em Σ , que portanto admite uma parametrização da forma $u_\sigma^j = f_\sigma^j(x)$, $0 \leq |\sigma| \leq k$.

Por outro lado $C^k(\pi) = Ann\{\omega_\mu^j\}$, com $\omega_\mu^j = du_\mu^j - u_{\mu+1_i}^j dx^i$ e $0 \leq |\mu| \leq k-1$. Portanto, se Σ for variedade integral de $C^k(\pi)$, teremos que $\omega_\mu^j|_\Sigma = 0$, i.e.,

$$0 = (du^j - u_i^j dx^i)|_\Sigma = \frac{\partial f_0^j}{\partial x^i}(x) dx^i - f_i^j(x) dx^i = \left(\frac{\partial f_0^j}{\partial x^i}(x) - f_i^j(x) \right) dx^i$$

logo

$$f_i^j(x) = \frac{\partial f_0^j}{\partial x^i}(x).$$

Analogamente

$$0 = (du_h^j - u_{hi}^j dx^i)|_\Sigma = \frac{\partial f_h^j}{\partial x^i}(x) dx^i - f_{hi}^j(x) dx^i = \left(\frac{\partial f_h^j}{\partial x^i}(x) - f_{hi}^j(x) \right) dx^i$$

logo

$$f_{hi}^j(x) = \frac{\partial f_h^j}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial^2 f_0^j}{\partial x^i \partial x^h}(x).$$

Desta forma, iterativamente obtemos que

$$f_\sigma^j(x) = \frac{\partial^{| \sigma |} f_0^j}{\partial x^{\sigma_1} \dots \partial x^{\sigma_n}}(x).$$

Logo Σ é o prolongamento da seção local $(x) \longmapsto (x, f_0(x))$. \square

Exemplo 1.14. A equação do calor

$$u_{xx} = u_t,$$

para $u = u(x, t)$, descreve uma subvariedade 7-dimensional \mathcal{Y} do espaço de 2-jatos $J^2(\pi)$, onde $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que $\pi(x, t, u) = (x, t)$. Uma solução $u = f(x, t)$ de \mathcal{Y} define a seção s de π , $s(x, t) = (x, t, f(x, t))$, cujo segundo prolongamento

$$j^2 s(x, t) = (x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xt}(x, t), u_{tt}(x, t)),$$

descreve uma variedade integral da distribuição de Cartan induzida

$$C^2(\mathcal{Y}) = Ann\{du - u_x dx - u_t dt, du_x - u_t dx - u_{xt} dt, du_t - u_{tx} dx - u_{tt} dt\}.$$

Exemplo 1.15. A equação de Liouville

$$u_{xt} = e^u$$

para $u = u(x, t)$, descreve uma subvariedade 7-dimensional \mathcal{Y} do espaço de 2-jatos $J^2(\pi)$, onde $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que $\pi(x, t, u) = (x, t)$. Uma solução $u = f(x, t)$ de \mathcal{Y} define a seção s de π , $s(x, t) = (x, t, f(x, t))$, cujo segundo prolongamento

$$j^2 s(x, t) = (x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xt}(x, t), u_{tt}(x, t))$$

descreve uma variedade integral da distribuição de Cartan induzida

$$\mathcal{C}^2(\mathcal{Y}) = Ann\{du - u_x dx - u_t dt, du_x - u_{xx} dx - e^u dt, du_t - e^u dx - u_{tt} dt\}.$$

Entretanto, usando a teoria dos sistemas diferenciais exteriores, é possível também descrever as soluções de uma equação diferencial como variedades integrais de um sistema diferencial exterior definido em uma variedade que não é necessariamente a própria equação interpretada como uma subvariedade de um espaço de jatos. Veja por exemplo a abordagem alternativa para a equação de Liouville discutida no Exemplo 1.19.

1.4 Sistemas diferenciais exteriores

O estudo dos sistemas diferenciais exteriores é motivado pelo interesse em modelar problemas geométricos envolvendo equações diferenciais. Integrar estes sistemas buscando determinar suas subvariedades integrais seria o equivalente a encontrar as soluções de equações diferenciais. A teoria dos sistemas diferenciais exteriores também é uma forma de descrever e estudar equações diferenciais livre de coordenadas. O leitor interessado em aprofundar seu conhecimento neste tópico, pode consultar as referências [3, 11, 13].

1.4.1 Principais definições

Definição 1.16. Um **sistema diferencial exterior** é um par (M, \mathcal{I}) em que M é uma variedade e $\mathcal{I} \subset (\Lambda^*(M), +, \wedge)$ um ideal algébrico satis fazendo a condição $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Em outras palavras, as seguintes condições são satisfeitas

- \mathcal{I} é um subanel de $\Lambda^*(M)$,
- Se $\omega \in \Lambda^*(M)$ e $\theta \in \mathcal{I}$ então $\omega \wedge \theta \in \mathcal{I}$,
- $d\theta \in \mathcal{I}$, para cada $\theta \in \mathcal{I}$,

onde $\Lambda^*(M)$ representa a álgebra das formas diferenciais sobre M .

É comum nos referirmos a um sistema diferencial exterior (SDE) também como um ideal diferencial. Além disto, dado um SDE (M, \mathcal{I}) , diremos também que \mathcal{I} é um SDE em M . Evidentemente um SDE em uma variedade m -dimensional pode, em geral, conter formas de qualquer grau $k = 0, \dots, m$. Em particular, podemos portanto considerar as componentes homogêneas

$$\mathcal{I}^k = \mathcal{I} \cap \Lambda^k(M), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Dizemos que I é um ideal gerado algebricamente pelas formas $\theta^1, \dots, \theta^n$ em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, se qualquer elemento $\xi \in I$ puder ser escrito, nesta vizinhança, da seguinte maneira

$$\xi = \sum_{i=1}^n \gamma_i \wedge \theta^i, \quad \gamma_i \in \Lambda^*(M).$$

Dizemos que um ideal diferencial \mathcal{I} é diferencialmente gerado por $\theta^1, \dots, \theta^n$ em uma vizinhança de $p \in M$, se for algebricamente gerado por $\theta^1, \dots, \theta^n, d\theta^1, \dots, d\theta^n$ nesta vizinhança, ou seja, se qualquer elemento $\xi \in \mathcal{I}$ puder ser escrito, nesta vizinhança, da seguinte maneira

$$\xi = \sum_{i=1}^n \beta_i \wedge \theta^i + \sum_{i=1}^n \gamma_i \wedge d\theta^i, \quad \beta_i, \gamma_i \in \Lambda^*(M).$$

Utilizaremos a notação

$$\langle \{\theta^1, \dots, \theta^n\} \rangle_{alg} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n \rangle_{alg}$$

para denotar o ideal algébrico gerado por um sistema de formas $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$. Analogamente

$$\mathcal{I} = \langle \{\theta^1, \dots, \theta^n\} \rangle_{dif} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n \rangle_{dif}$$

denotará o ideal diferencial gerado por $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$. Notemos que

$$\mathcal{I} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n \rangle_{dif} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n, d\theta^1, \dots, d\theta^n \rangle_{alg}.$$

Note porém que, no caso de um sistema de 1-formas $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$, denotaremos também com $\langle \theta^1, \dots, \theta^n \rangle$ o módulo gerado em $\Lambda^1(M)$ por estas formas. Chamaremos de **sistema Pfaffiano** um módulo deste tipo. Um ideal diferencial \mathcal{I} é denominado **SDE Pfaffiano** se for gerado apenas por 1-formas diferenciais e é comum nos referirmos ao SDE Pfaffiano \mathcal{I} apenas pelo seu gerador I .

Além disto, diremos que um SDE Pfaffiano \mathcal{I} possui **posto** constante igual a $k \leq m$, se na vizinhança de todo ponto $p \in M$, \mathcal{I} é diferencialmente gerado por um sistema de k 1-formas linearmente independentes. Nesse contexto, o subespaço linear $I_p \subset T_p^*M$, gerado por essas formas, deve ter a mesma dimensão para cada ponto $p \in M$. Vale ressaltar que é possível interpretar I como um subfibrado de T^*M ou como um $C^\infty(M)$ -submódulo de $\Lambda^1(M)$. Conforme é comum na teoria dos sistemas diferenciais exteriores, a partir deste ponto, todo sistema Pfaffiano será considerado de posto constante.

Dado um sistema Pfaffiano $I = \langle \theta^1, \dots, \theta^k \rangle$ de posto k sobre M , um correferencial $\{\theta^1, \dots, \theta^k, \theta^{k+1}, \dots, \theta^m\}$ será chamado de **correferencial adaptado a I** . Desta forma, para cada $\theta^i \in I$ valem as equações

$$d\theta^i = \sum_{a,b=1}^m A_{ab}^i \theta^a \wedge \theta^b,$$

onde $A_{ab}^i \in C^\infty(M)$. Estas são as equações de estrutura do sistema Pfaffiano $I = \langle \theta^1, \dots, \theta^k \rangle$ em relação ao correferencial adaptado $\{\theta^1, \dots, \theta^k, \theta^{k+1}, \dots, \theta^m\}$. Usando um correferencial adaptado podemos dizer que duas formas $\alpha, \beta \in \Lambda^*(M)$ são congruentes módulo I e escrever

$$\alpha \equiv \beta \pmod{I}$$

se $\alpha - \beta \in \langle I \rangle_{alg}$ (i.e., $\alpha - \beta$ pertence ao ideal algebricamente gerado por I). Observamos, portanto, que $\alpha \equiv \beta \pmod{I}$ se, e somente se,

$$(\alpha - \beta) \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k = 0.$$

Além disso, notamos que usando esta noção de congruência, as equações de estrutura de I podem ser equivalentemente escritas na forma seguinte

$$d\theta^i = \sum_{a,b=k+1}^m A_{ab}^i \theta^a \wedge \theta^b \pmod{I}.$$

A derivada exterior de formas induz uma aplicação $C^\infty(M)$ -linear

$$\begin{aligned} \delta : I &\longrightarrow \Lambda^2(M)/\langle I \rangle_{alg} \\ \theta &\longmapsto [d\theta] \end{aligned}$$

Definimos, portanto, o **primeiro sistema derivado** do sistema Pfaffiano I por $I^{(1)} = \ker \delta$. De maneira recursiva, estabelecemos a definição do **k-ésimo sistema derivado** como $I^{(k)} = (I^{(k-1)})^{(1)}$. Notemos então que podemos expressar o primeiro sistema derivado da seguinte maneira

$$I^{(1)} = \langle \theta \in I : d\theta \equiv 0 \pmod{I} \rangle.$$

Analogamente,

$$I^{(k)} = \langle \theta \in I^{(k-1)} : d\theta \equiv 0 \pmod{I^{(k-1)}} \rangle.$$

A condição $d\theta \equiv 0 \pmod{I}$ é conhecida como condição de Frobenius. Quando vale esta condição, $I = I^{(1)}$ e o sistema é completamente integrável pelo teorema de Frobenius. Introduzimos a notação $I^{(\infty)} := I^{(k)}$ quando k é o menor inteiro positivo para o qual $I^{(k)} = I^{(k+1)}$. Nesse contexto, k é denominado **comprimento da sequência dos sistemas Pfaffianos derivados**. Adotamos a convenção de que $I^{(0)} = I$. Portanto, temos a sequência

$$I = I^{(0)} \supset I^{(1)} \supset \dots \supset I^{(\infty)}.$$

O termo $I^{(\infty)}$ representa o maior subfibrado integrável de I e o posto de $I^{(\infty)}$ fornece o número de integrais primeiras funcionalmente independentes para I .

Além disto, considerando as dimensões dos sistemas Pfaffianos derivados não triviais $I^{(0)} = I, I^{(1)}, \dots, I^{(N)}$, chamamos

$$DT(I) = [\dim I, \dim I^{(1)}, \dots, \dim I^{(N)}]$$

de **tipo de derivação** de I .

Quando trabalhamos com formas diferenciais, frequentemente recorremos ao seguinte lema, conhecido como Lema de Cartan.

Lema 1.17. *Sejam $\theta^1, \dots, \theta^p$ 1-formas tais que $\Theta = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^p \neq 0$. Então para qualquer outro sistema de 1-formas $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

- $\varphi_1 \wedge \theta^1 + \dots + \varphi_p \wedge \theta^p = 0$,
- para todo $i = 1, \dots, p$, existem funções c_{ik} tais que $\varphi_i = c_{ik}\theta^k$ e $c_{ik} = c_{ki}$.

Demonstração. Suponha que

$$\varphi_1 \wedge \theta^1 + \dots + \varphi_p \wedge \theta^p = 0. \quad (1.4)$$

Então, realizando o produto exterior de ambos os membros desta equação por $\Theta_{(i)} = (-1)^{i-1}\theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta^i} \wedge \dots \wedge \theta^p$ (onde o circunflexo sobre um termo representa a ausência do mesmo), para cada $i = 1, \dots, p$, obtemos

$$\varphi_i \wedge \Theta = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Isso implica que

$$\varphi_i = c_{ik}\theta^k, \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (1.5)$$

Substituindo (1.5) em (1.4) segue que

$$c_{1k}\theta^k \wedge \theta^1 + \dots + c_{pk}\theta^k \wedge \theta^p = 0,$$

i.e.,

$$(c_{21} - c_{12})\theta^1 \wedge \theta^2 + (c_{31} - c_{13})\theta^1 \wedge \theta^3 + \dots + (c_{p(p-1)} - c_{(p-1)p})\theta^{(p-1)} \wedge \theta^p = 0, \quad (1.6)$$

o que implica $c_{ik} = c_{ki}$, para todo $i, k = 1, \dots, p$.

Reciprocamente, se $c_{ik} = c_{ki}$, então a equação (1.6) é satisfeita, e portanto,

$$\varphi_1 \wedge \theta^1 + \dots + \varphi_p \wedge \theta^p = 0.$$

□

Definição 1.18. Uma **variedade integral** de um sistema diferencial exterior (M, \mathcal{I}) é uma subvariedade imersa $f : N \rightarrow M$ que satisfaz $f^*(\mathcal{I}) = 0$, i.e., $f^*(\theta) = 0$ para cada $\theta \in \mathcal{I}$.

Tendo em vista que $\theta \in \mathcal{I}^0$ deve ser zero ao longo das variedades integrais, iremos nos restringir, daqui por diante, ao caso $\mathcal{I}^0 = 0$.

Usando a noção de variedade integral de um SDE podemos descrever geometricamente as soluções de uma equação diferencial não somente como variedades integrais da distribuição de Cartan sobre a equação diferencial interpretada como subvariedade de um espaço de jatos. No exemplo a seguir, ilustraremos este aspecto considerando a equação de Liouville.

Exemplo 1.19. Numa variedade 5-dimensional M , que pode ser pensada como \mathbb{R}^5 (ou também o espaço de 1-jatos $J^1(\pi)$ do fibrado $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, u) = (x, y)$), consideramos as coordenadas $\{x, y, u, p, q\}$ e o SDE não Pfaffiano

$$\mathcal{I} = \langle du - pdx - qdy, dy \wedge (dq - e^u dx), dx \wedge (dp - e^u dy) \rangle_{alg}.$$

É fácil provar que as variedades integrais de \mathcal{I} , sobre as quais $dx \wedge dy \neq 0$ (condição de independência) admitem parametrizações da forma

$$(x, y) \rightarrow \left(x, y, u = f(x, y), p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

onde $u = f(x, y)$ é uma solução da equação de Liouville.

Definição 1.20. Uma **simetria finita** de um SDE (M, \mathcal{I}) é um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ que satisfaz $\phi^*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Uma **simetria infinitesimal** de um SDE (M, \mathcal{I}) é um campo vetorial $X \in \mathcal{D}(M)$ tal que $\mathcal{L}_X \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

Definimos o **grupo de simetrias finitas** de \mathcal{I} como o subgrupo $G \subset \text{Diff}(M)$ cujos elementos são simetrias finitas de \mathcal{I} . Por outro lado, as simetrias infinitesimais formam uma álgebra de Lie, comumente chamada de **álgebra de Lie das simetrias de \mathcal{I}** e denotada com $\text{Sym}(\mathcal{I})$.

Note que se ϕ é uma simetria de \mathcal{I} e $f : N \rightarrow M$ é uma variedade integral de \mathcal{I} então $\phi \circ f$ é uma variedade integral de \mathcal{I} .

No caso de um espaço de jatos $J^k(\pi)$, as formas de Cartan geram um SDE, aqui denotado como $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$, que é comumente chamado de SDE de Cartan. Este SDE é particularmente importante no estudo das equações diferenciais.

As simetrias de $\mathcal{C}_{sde}^k(\pi)$, evidentemente coincidentes com aquelas de $\mathcal{C}^k(\pi)$, são chamadas de **simetrias de contato**. Em particular, as simetrias finitas são também chamadas de **transformações de contato**.

Analogamente, quando uma equação diferencial for uma subvariedade $\mathcal{Y} \subset J^k(\pi)$, as formas de Cartan restritas definem o **SDE de Cartan induzido** em \mathcal{Y} , que denotamos com $\mathcal{C}_{sde}^k(\mathcal{Y})$. As simetrias deste SDE são por definição as simetrias da equação.

Dado um SDE, surge a questão de saber se existe um sistema de coordenadas no qual o SDE é gerado por formas diferenciais em um número reduzido de coordenadas. A resposta para essa pergunta é dada pelas características de Cauchy.

Seja (M, \mathcal{I}) um SDE. Um campo vetorial $X \in \mathcal{D}(M)$ é denominado **campo característico de Cauchy** de \mathcal{I} se satisfizer $X \lrcorner \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Segue portanto que todo campo de Cauchy é uma simetria infinitesimal de \mathcal{I} .

Desta forma, pode ser introduzida a **distribuição característica de Cauchy** $Char(\mathcal{I})$, definida ponto a ponto pelos vetores dos campos característicos de Cauchy. Explicitamente, para $p \in M$

$$Char(\mathcal{I})_p = \{X_p \in T_p M : X_p \lrcorner \mathcal{I}_p \subset \mathcal{I}_p\}.$$

No caso particular em que \mathcal{I} for gerado por um sistema Pfaffiano I , no lugar de $Char(\mathcal{I})$ escrevemos também $Char(I)$. As variedades integrais de $Char(\mathcal{I})$ são chamadas de **características de Cauchy**. Observamos que se \mathcal{I} for um sistema Pfaffiano então $Char(\mathcal{I}) = \{X \in \mathcal{I}^\perp : [X, Y] \in \mathcal{I}^\perp \forall Y \in \mathcal{I}^\perp\}$, onde \mathcal{I}^\perp denota a distribuição dos campos que anulam os geradores de \mathcal{I} .

O leitor interessado nas demonstrações da proposição e dos teoremas subsequentes, bem como mais detalhes sobre este tópico, pode consultar a referência [11].

Proposição 1.21. *Char(\mathcal{I}) é uma distribuição completamente integrável.*

Esta proposição segue das propriedades da derivada de Lie, e em particular, do fato que os campos característicos de Cauchy são simetrias de \mathcal{I} .

Denominamos de **espaço de retração** de \mathcal{I} o subfibrado $C(\mathcal{I}) \subset T^*M$ das 1-formas que se anulam sobre os campos característicos. Dado $p \in M$,

$$C(\mathcal{I})_p = Char(\mathcal{I})_p^\perp.$$

Chamamos de classe de \mathcal{I} em $p \in M$ a dimensão de $C(\mathcal{I})_p$. No caso em que \mathcal{I} for gerado por um sistema Pfaffiano I , chamaremos classe de I a classe de \mathcal{I} .

Teorema 1.22 (Teorema de retração). *O espaço de retração $C(\mathcal{I})$ é o menor subfibrado de $\Lambda^1(M)$ tal que $\Lambda^*C(\mathcal{I})$ contém um sistema de geradores do SDE \mathcal{I} .*

Uma útil consequência deste teorema é o seguinte outro

Teorema 1.23. *Seja \mathcal{I} um SDE sobre uma variedade k -dimensional M , tal que seu espaço de retração $C(\mathcal{I})$ possui dimensão $s = k - r$ (classe de \mathcal{I}). Então para todo $p \in M$ existe uma vizinhança coordenada $(\xi^1, \dots, \xi^r, v^1, \dots, v^s)$ de p , tal que \mathcal{I} possui um conjunto de geradores que são formas em v^1, \dots, v^s .*

Com este teorema concluímos que, a classe de \mathcal{I} é igual ao número mínimo de coordenadas necessárias para descrever \mathcal{I} .

Dado um sistema Pfaffiano I , em uma variedade m -dimensional M , além da distribuição característica de Cauchy $Char(I)$, podemos considerar também o **posto de Cartan**, denotado com $Car(I)$, que por definição é o menor inteiro r de 1-formas $\rho^1, \dots, \rho^r \in \Lambda^1(M)/I$ tais que $d\theta \wedge \rho^1 \wedge \dots \wedge \rho^r = 0 \pmod{I}$, para todo $\theta \in I$. Este é um invariante numérico, assim como o **posto de Engel** $Eng(I)$, definido como o menor inteiro r tal que $(d\theta)^{r+1} = 0 \pmod{I}$, para todo $\theta \in I$. Daí, considerando a sequência de sistemas Pfaffianos derivados não triviais

$$I^{(0)} = I, I^{(1)}, \dots, I^{(N)}$$

podem ser definidos os seguintes outros invariantes numéricos:

- **Tipo de derivação** de I

$$DT(I) = [\dim I, \dim I^{(1)}, \dots, \dim I^{(N)}];$$

- **Tipo de Cauchy** de I

$$CauT(I) = [\dim Char(I), \dim Char(I^{(1)}), \dots, \dim Char(I^{(N)})];$$

- **Tipo de Cartan** de I

$$CarT(I) = [Car(I), Car(I^{(1)}), \dots, Car(I^{(N)})];$$

- **Tipo de Engel** de I

$$EngT(I) = [Eng(I), Eng(I^{(1)}), \dots, Eng(I^{(N)})].$$

É comum se restringir a considerar somente sistemas Pfaffianos para os quais estes invariantes numéricos são constantes. R. Bryant provou em [10] o seguinte teorema.

Teorema 1.24 (Forma normal de Bryant). *Seja I um sistema Pfaffiano de posto h em uma variedade m -dimensional M . Se $h \geq 3$ e além disto*

$$\begin{aligned} DT(I) &= [h, 0], \\ CarT(I) &= EngT(I) = [r, 0], \\ CauT(I) &= [m - (h + rh + r), m], \end{aligned}$$

então em todo ponto existe uma vizinhança coordenada $U \subset M$ e uma submersão $\psi : U \rightarrow J^1(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^h)$ tal que $I|_U$ é o pullback por meio de ψ do sistema Pfaffiano de Cartan em $J^1(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^h)$.

1.4.2 Elementos integrais, variedades integrais admissíveis e prolongamento de um SDE

Seja \mathcal{I} um SDE sobre uma variedade $(n+m)$ -dimensional M . A variedade dos pontos integrais de \mathcal{I} é

$$Z = \{z \in M : f(z) = 0, \forall f \in \mathcal{I}^0\}.$$

Como estamos assumindo que $\mathcal{I}^0 = 0$, então $Z = M$. Neste caso, todo ponto de M é um ponto integral de \mathcal{I} .

Seja $\pi_{1,0} : G_n(M) \rightarrow M$ o fibrado Grassmanniano dos subespaços n -dimensionais dos espaços tangentes de M . Os elementos de $G_n(M)$, chamados de n -planos, são pares (a, V) onde $a \in M$ e V é um subespaço n -dimensional de $T_a M$. Também usaremos a notação (a, V_a) , ou simplesmente V_a , para denotar um n -plano no ponto a .

Um n -plano V_a , em um ponto $a \in M$, é um **elemento integral** n -dimensional de \mathcal{I} (também chamado de n -elemento integral) em a se $\theta_a|_{V_a} = 0$, para toda $\theta \in \mathcal{I}$. Note que as variedades integrais de \mathcal{I} são subvariedades de M cujos espaços tangentes são elementos integrais de \mathcal{I} .

Pode-se provar que a estrutura diferencial de M induz naturalmente uma estrutura diferencial em $G_n(M)$. Isto pode ser feito identificando $G_n(M)$ com o espaço $J^1(M, n)$ dos 1-jatos de subvariedades n -dimensionais de M . De fato, $J^1(M, n)$ e $G_n(M)$ são a mesma variedade (veja por exemplo [48]).

Podemos definir em $J^1(M, n) = G_n(M)$ o módulo das 1-formas de Cartan \mathcal{C}^1 como segue: em cada ponto $V_a \in J^1(M, n)$

$$\mathcal{C}_{V_a}^1(M, n) = \pi_{1,0}^*(V_a^\perp),$$

onde $V_a^\perp \subset T_a^* M$ denota o módulo das 1-formas que anulam V_a . Desta forma definimos o SDE de Cartan por

$$\mathcal{C}_{\text{sde}}^1(M, n) = \langle \mathcal{C}^1(M, n) \rangle_{\text{dif.}}$$

Nas coordenadas $(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)$ de $J^1(M, n)$ em que $\pi_{1,0} : J^1(M, n) \rightarrow M$ é tal que $\pi_{1,0}(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha) = (x^i, z^\alpha)$, podemos escrever que

$$\mathcal{C}_{\text{sde}}^1(M, n) = \langle dz^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha dx^i : \alpha = 1, \dots, m \rangle_{\text{dif.}}$$

Definição 1.25. Um SDE com condição de independência em M é um par (\mathcal{I}, Ω) em que \mathcal{I} é um SDE em M e $\Omega \neq 0$ (condição de independência) é uma n -forma decomponível (i.e., localmente da forma $\Omega = \chi^1 \wedge \dots \wedge \chi^n$) tal que $\Omega_x \notin \mathcal{I}_x \forall x \in M$.

Dada um SDE com condição de independência (\mathcal{I}, Ω) , diremos que um n -elemento integral V_a é admissível se $\Omega_a|_{V_a} \neq 0$. Analogamente, diremos que uma variedade integral n -dimensional N é **admissível** se $\Omega|_N \neq 0$.

Exemplo 1.26. Como exposto na seção anterior, toda equação $\mathcal{Y} \subset J^k(\pi)$ é uma variedade munida de um SDE Pfaffiano $\mathcal{I} = \mathcal{C}_{\text{sde}}^k(\mathcal{Y})$. Se $\{x^1, \dots, x^n\}$ forem coordenadas locais na base do fibrado π , então $\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \neq 0$ é uma condição de independência. É fácil provar que as variedades integrais admissíveis, neste caso, são prolongamentos de seções locais de π que descrevem soluções de \mathcal{Y} .

Dada localmente uma condição de independência $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \neq 0$, usando o Teorema 1.23 (com $k = n + m$) temos que $s \geq n$, e sem perda de generalidade, podemos dizer que as variedades integrais admissíveis admitem parametrizações locais da forma

$$\begin{cases} v^i = x^i, & i = 1, \dots, n, \\ v^j = f^j(x), & j = n + 1, \dots, s, \\ \xi^h = z^h(x), & h = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde $f^j(x)$ devem satisfazer algum conjunto de equações diferenciais, enquanto $z^h(x)$ são funções arbitrárias. Portanto o problema em encontrar variedades integrais de \mathcal{I} consiste em resolver as equações diferenciais para as funções $f^j(x)$. A análise destas equações passa tipicamente pela determinação e uso de suas consequências diferenciais (ou prolongamentos), pois estas juntamente com as equações iniciais podem fornecer úteis condições de compatibilidade.

Com a noção de prolongamento de um SDE \mathcal{I} , Cartan indicou um procedimento que permite construir uma sequência de SDE $\mathcal{I}^{(1)}, \mathcal{I}^{(2)}, \dots$ para os quais procurando variedades admissíveis da forma (1.7), se obtém não somente as equações diferenciais anteriores, mas também suas consequências diferenciais.

De um ponto de vista formal, o 1º prolongamento de um SDE (M, \mathcal{I}) é um SDE $(M^{(1)}, \mathcal{I}^{(1)})$, portanto para definir o prolongamento é preciso definir primeiro $M^{(1)}$.

Definição 1.27. O 1º prolongamento $M^{(1)}$ de M é, por definição, o subconjunto de $J^1(M, n)$ formado pelos $V_a \in J^1(M, n)$ tais que:

- (i) V_a é n -elemento integral admissível de \mathcal{I} ;
- (ii) V_a não contém vetores característicos de Cauchy.

Em geral, quando $Char(\mathcal{I}) \neq 0$, a condição (ii) assegura que dentre as consequências diferenciais não aparecem as derivadas das funções arbitrárias $z^h(x)$.

Além disto, é importante evidenciar que $M^{(1)}$ pode não ser uma subvariedade diferenciável de $J^1(M, n)$, assim como que $\pi_{1,0} : M^{(1)} \rightarrow M$ pode não ser sobrejetora (por exemplo, pode não existir um n -elemento integral em todo ponto de M).

Assumindo que $M^{(1)}$ seja uma subvariedade de $J^1(M, n)$, denotamos com $i : M^{(1)} \rightarrow J^1(M, n)$ a inclusão e definimos o 1º prolongamento de \mathcal{I} como

$$\mathcal{I}^{(1)} = i^*(\mathcal{C}_{sde}^1(M, n)) = (\mathcal{C}_{sde}^1(M, n))|_{M^{(1)}}.$$

Portanto, $\mathcal{I}^{(1)}$ é sempre Pfaffiano, mesmo se \mathcal{I} não for Pfaffiano. No entanto, caso \mathcal{I} seja Pfaffiano e $\pi_{1,0} : M^{(1)} \rightarrow M$ sobrejetora, pode-se verificar que $\pi_{1,0}^*(I) \subset \mathcal{I}^{(1)}$, denotando com I o módulo das 1-formas que geram \mathcal{I} .

Exemplo 1.28. Consideremos aqui o SDE (M, \mathcal{I}) discutido no Exemplo 1.19 com condição de independência $dx \wedge dy \neq 0$. Neste caso, $M^{(1)}$ é a subvariedade de $J^2(\pi)$ descrita pela própria equação de Liouville

$$\mathcal{Y} = \{u_{xy} = e^u\} \subset J^2(\pi)$$

e $\mathcal{I}^{(1)}$ é o SDE de Cartan

$$\mathcal{C}_{sde}^2(\mathcal{Y}) = \langle du - u_x dx - u_y dy, du_x - u_{xx} dx - e^u dy, du_y - e^u dx - u_{yy} dy \rangle_{dif}.$$

1.4.3 Redução por simetrias de um SDE

Com o intuito de facilitar a procura por variedades integrais, introduziremos a definição de SDE reduzido $\bar{\mathcal{I}}$ de um SDE \mathcal{I} . Em alguns casos, $\bar{\mathcal{I}}$ pode ter estrutura mais simples e, portanto, obter suas variedades integrais pode ser mais fácil. Considerando um grupo de simetrias de \mathcal{I} satisfazendo certas condições de transversalidade, então a projeção canônica projeta toda a órbita de uma variedade integral de \mathcal{I} numa única variedade integral para $\bar{\mathcal{I}}$. Por outro lado, dada uma variedade integral para o SDE reduzido $\bar{\mathcal{I}}$, é possível reconstruir soluções para o sistema original, e essas soluções formam a órbita de soluções não invariantes.

Seja M uma variedade diferenciável m dimensional e G um grupo de Lie. Dizemos que uma ação de G em M é regular se o espaço quociente $\bar{M} := M/G$ é uma variedade diferenciável e a projeção canônica $q : M \rightarrow \bar{M}$ é uma submersão. A partir de agora, consideraremos apenas ações regulares.

Definição 1.29. Sejam (M, \mathcal{I}) um SDE e G um grupo de simetrias de \mathcal{I} que age regularmente em M . O **sistema diferencial exterior reduzido** $\bar{\mathcal{I}} \subset \Omega^*(\bar{M})$ é dado por

$$\bar{\mathcal{I}} = \{\bar{\theta} \in \Omega^*(\bar{M}) \mid q^*\bar{\theta} \in \mathcal{I}\}.$$

As propriedades do sistema reduzido não são imediatas, por exemplo, se \mathcal{I} é Pfaffiano não necessariamente o sistema reduzido $\bar{\mathcal{I}}$ é Pfaffiano. Para estudar as propriedades do sistema reduzido é preciso introduzir a subálgebra das **formas diferenciais semibásicas** de \mathcal{I}

$$\mathcal{A}_{sb} = \{\theta \in \mathcal{I} \mid X \lrcorner \theta = 0, \quad \forall X \in \Gamma\} = \mathcal{I} \cap \Lambda_{sb}^*(M),$$

onde Γ é a distribuição gerada pelos campos da álgebra de Lie Γ dos geradores infinitesimais da ação $\mu : M \times G \rightarrow M$ de G em M

$$\Gamma = \{X \in \mathcal{D}(M) \mid \mu_{p*}(\xi_e) = X_p, \quad \forall p \in M, \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

A distribuição Γ é completamente integrável, e as fibras de $q : M \rightarrow \bar{M}$ são suas variedades integrais maximais. Portanto podemos também pensar em Γ como a distribuição vertical do fibrado q . Lembremos também que, com relação à fibração $q : M \rightarrow \bar{M}$, $\Lambda_{sb}^*(M)$ é a subálgebra de $\Lambda^*(M)$, das formas anuladas pelos campos verticais, e portanto, inscritos em Γ . Segue então que, dado um correferencial $\{\theta^1, \dots, \theta^r\}$ de Γ^\perp , pode-se escrever que

$$\Lambda_{sb}^*(M) = \langle \theta^1, \dots, \theta^r \rangle_{alg}.$$

Notemos também que \mathcal{A}_{sb} é a soma direta das componentes homogêneas

$$\mathcal{A}_{sb}^k = \{\theta \in \mathcal{I}^k \mid X \lrcorner \theta = 0, \quad \forall X \in \Gamma\} = \mathcal{I}^k \cap \Lambda_{sb}^*(M),$$

onde $k \geq 0$. Assim, quando for dado um correferencial $\{\theta^1, \dots, \theta^r\}$ de Γ^\perp , pode-se também escrever que

$$\mathcal{A}_{sb}^k = \mathcal{I}^k \cap \langle \theta^1, \dots, \theta^r \rangle_{alg}.$$

Pode-se provar a seguinte proposição (veja [3]).

Proposição 1.30. Seja $U \subset M$ um aberto admitindo uma seção $s : \bar{U} \rightarrow U$ de q , e portanto tal que $\bar{U} = q(U)$. Se $\theta \in \mathcal{A}_{sb}^k(U)$ então $s^*\theta \in \bar{\mathcal{I}}^k(\bar{U})$. Além disso, $s^*(\mathcal{A}_{sb}^k(U)) = \bar{\mathcal{I}}^k(\bar{U})$.

Dessa forma, podemos definir o seguinte ideal diferencial gerado algebraicamente pelas componentes homogêneas de $\mathcal{A}_{sb}(U)$

$$\mathcal{I}_A = \langle \mathcal{A}_{sb}^1(U), \mathcal{A}_{sb}^2(U), \dots \rangle_{alg}.$$

Logo, para alguma seção local genérica $s : \bar{U} \rightarrow U$ de q

$$\bar{\mathcal{I}} = s^*\mathcal{I}_A.$$

Sendo assim, com o intuito de obtermos o sistema reduzido localmente, devemos realizar o pullback das componentes homogêneas da álgebra das formas diferenciais semibásicas por meio de uma seção local gênerica.

Agora, apresentaremos a condição de transversalidade a qual nos possibilitará enunciar uma proposição que garante que cada órbita de uma variedade integral para \mathcal{I} corresponde a uma variedade integral para $\bar{\mathcal{I}}$, e além disto, fornece uma condição suficiente para \mathcal{I} ser Pfaffiano. Começamos com a definição de uma condição técnica particularmente útil.

Definição 1.31. *Seja \mathcal{I} um SDE e G um grupo de simetrias de \mathcal{I} que age regularmente em M . A ação de G é transversal a \mathcal{I}^1 se $\Gamma \cap (\mathcal{I}^1)^\perp = 0$.*

Pode-se demonstrar a seguinte proposição (consulte [3]).

Proposição 1.32. *Se a ação de G é transversal a \mathcal{I}^1 e $s : N \rightarrow M$ é uma variedade integral de \mathcal{I} , então $q \circ s$ é uma variedade integral de $\bar{\mathcal{I}} \subset \Lambda^*(\bar{M})$. Além disso, se \mathcal{I} é Pfaffiano, então $\bar{\mathcal{I}}$ é Pfaffiano.*

Os sistemas diferenciais exteriores que estudaremos no Capítulo 4 não satisfazem essa condição de transversalidade. Sendo assim, enunciaremos alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 4, os quais garantem que os sistemas quocientes deste capítulo serão Pfaffianos ou gerados por 1 e 2-formas. As demonstrações destes resultados podem ser consultadas em [36].

Proposição 1.33. *Seja \mathcal{I} um SDE sobre uma variedade M e G um grupo de simetria de \mathcal{I} que age regularmente sobre M . Então existe um correferencial $\{\alpha^{i_1}, \eta^{i_2}, \beta^{i_3}, \theta^{i_4}, \omega^{i_5}, \phi^{i_6}\}$ tal que*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha^{i_1}, \eta^{i_2}, \beta^{i_3}, \theta^{i_4} \rangle_{\text{dif}}, \quad \Gamma^\perp = \Lambda^1(\beta^{i_3}, \theta^{i_4}, \omega^{i_5}),$$

com equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\alpha^{i_1} &= 0 \pmod{I}, \\ d\eta^{i_2} &= B_{j_5 k_5}^{i_5} \omega^{j_5} \wedge \omega^{k_5} + C_{l_5 m_5}^{i_5} \omega^{l_5} \wedge \phi^{m_5} + D_{p_5 q_5}^{i_5} \phi^{p_5} \wedge \phi^{q_5} \pmod{I}, \\ d\beta^{i_3} &= 0 \pmod{I}, \\ d\theta^{i_4} &= A_{j_2 k_2}^{i_2} \omega^{j_2} \wedge \omega^{k_2} \pmod{I}. \end{aligned}$$

Proposição 1.34. *Se existe um correferencial como na Proposição 1.33 com $B_{j_5 k_5}^{i_5} = 0$, então o SDE reduzido $\bar{\mathcal{I}}$ é Pfaffiano.*

Proposição 1.35. *Seja (M, \mathcal{I}) um SDE e $\{\theta^{i_1}, \omega^{i_2}, \eta^{i_3}, \phi^{i_4}\}$ um correferencial em M tal que*

$$\mathcal{I} = \langle \theta^{i_1}, \eta^{i_3}, A_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, C_{lm}^r \omega^l \wedge \phi^m + D_{pq}^r \phi^p \wedge \phi^q \rangle_{\text{alg}}, \quad \Gamma^\perp = \langle \theta^{i_1}, \omega^{i_2} \rangle.$$

Então

$$\mathcal{I}_A = \langle \theta^{i_1}, A_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \rangle_{\text{alg}}$$

e $\bar{\mathcal{I}}$ é gerado por 1 e 2-formas, localmente obtidas via pullback dos geradores de \mathcal{I}_A por meio de seções locais de q .

1.4.4 Integrabilidade segundo Darboux

Continuaremos agora com a definição de SDE decomponível, estabelecendo assim a base para a definição de um SDE integrável segundo Darboux.

Definição 1.36. Um SDE (M, \mathcal{I}) é **decomponível** do tipo $[p, q]$, $p, q \geq 2$, se na vizinhança de todo ponto existe um correferencial local para o espaço de retração $C(\mathcal{I})$ (que coincide com T^*M quando $\text{Char}(\mathcal{I}) = 0$)

$$\theta^1, \dots, \theta^r, \hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p, \check{\sigma}^1, \dots, \check{\sigma}^q \quad (1.8)$$

tal que \mathcal{I} é algebricamente gerado por 1-formas e 2-formas

$$\mathcal{I} = \langle \theta^1, \dots, \theta^r, \hat{\Omega}^1, \dots, \hat{\Omega}^s, \check{\Omega}^1, \dots, \check{\Omega}^t \rangle_{\text{alg}} \quad (1.9)$$

onde $s, t \geq 1$, $\hat{\Omega}^a \in \Lambda^2(\hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p)$ e $\check{\Omega}^b \in \Lambda^2(\check{\sigma}^1, \dots, \check{\sigma}^q)$. Os módulos

$$\hat{V} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n, \hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p \rangle, \quad \check{V} = \langle \theta^1, \dots, \theta^n, \check{\sigma}^1, \dots, \check{\sigma}^p \rangle,$$

são então chamados de sistemas Pfaffianos singulares associados a \mathcal{I} .

Além disso, os sistemas diferenciais algebricamente gerados

$$\hat{\mathcal{V}} = \langle \theta^1, \dots, \theta^r, \hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p, \check{\Omega}^1, \dots, \check{\Omega}^s \rangle_{\text{alg}}, \quad \check{\mathcal{V}} = \langle \theta^1, \dots, \theta^r, \check{\sigma}^1, \dots, \check{\sigma}^q, \hat{\Omega}^1, \dots, \hat{\Omega}^t \rangle_{\text{alg}},$$

são chamados de SDE singulares associados a \mathcal{I} .

Por fim, um sistema decomponível do tipo $[2, 2]$ sobre uma variedade $s + 4$ -dimensional é chamado de **sistema hiperbólico de classe s**.

Exemplo 1.37. O SDE de Cartan $\mathcal{I} = \mathcal{C}_{\text{sde}}^2(\mathcal{Y})$, sobre a variedade $M = \mathcal{Y}$ definida pela equação de Liouville no Exemplo 1.15, é diferencialmente gerado por

$$\begin{aligned} \theta^1 &= du - u_x dx - u_y dy, \\ \theta^2 &= du_x - u_{xx} dx - e^u dy, \\ \theta^3 &= du_y - e^u dx - u_{yy} dy. \end{aligned}$$

Neste caso, $\text{Char}(\mathcal{I}) = 0$, portanto $C(\mathcal{I}) = T^*M$ e calculando os diferenciais exteiros de $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ obtemos

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= 0 \pmod{I}, \\ d\theta^2 &= \hat{\sigma}^1 \wedge \hat{\sigma}^2 \pmod{I}, \\ d\theta^3 &= \check{\sigma}^1 \wedge \check{\sigma}^2 \pmod{I}, \end{aligned}$$

com $\hat{\sigma}^1 = dx, \hat{\sigma}^2 = du_{xx} - e^u u_x dy, \check{\sigma}^1 = dy$ e $\check{\sigma}^2 = du_{yy} - e^u u_y dx$. Temos então um correferencial $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \check{\sigma}^1, \check{\sigma}^2\}$ de $C(\mathcal{I}) = T^*M$ que satisfaz a Definição 1.36, com $\hat{\Omega}^1 = \hat{\sigma}^1 \wedge \hat{\sigma}^2$ e $\check{\Omega}^1 = \check{\sigma}^1 \wedge \check{\sigma}^2$, configurando assim um sistema decomponível do tipo $[2, 2]$.

Exemplo 1.38. O SDE (M, \mathcal{I}) não Pfaffiano considerado no Exemplo 1.19, possui $\text{Char}(\mathcal{I}) = 0$ e admite um correferencial para $T^*M = C(\mathcal{I})$ dado pelas 1-formas

$$\begin{aligned}\theta &= du - pdx - qdy, \\ \hat{\sigma}^1 &= dy, \\ \hat{\sigma}^2 &= dq - e^u dx, \\ \check{\sigma}^1 &= dx, \\ \check{\sigma}^2 &= dp - e^u dy.\end{aligned}$$

Logo (M, \mathcal{I}) satisfaaz a Definição 1.36 com $\hat{\Omega}^1 = \hat{\sigma}^1 \wedge \hat{\sigma}^2$ e $\check{\Omega}^1 = \check{\sigma}^1 \wedge \check{\sigma}^2$, configurando assim um sistema decomponível do tipo $[2, 2]$.

Definição 1.39. Seja (M, \mathcal{I}) um SDE decomponível com sistemas Pfaffianos singulares associados \hat{V} e \check{V} . Dizemos que \mathcal{I} é um sistema **integrável segundo Darboux** se $\{\hat{V}, \check{V}\}$ satisfaaz as seguintes duas condições (onde $C(\mathcal{I}) = T^*M$ quando $\text{Char}(\mathcal{I}) = 0$):

1. $\hat{V} + \check{V}^{(\infty)} = C(\mathcal{I}), \quad \hat{V}^{(\infty)} + \check{V} = C(\mathcal{I});$
2. $\hat{V}^{(\infty)} \cap \check{V}^{(\infty)} = 0.$

A primeira propriedade garante que existirá um número suficiente de integrais primeiras. A segunda condição afirma que os sistemas singulares não compartilham integrais primeiras.

Neste ponto é oportuno fazer a seguinte

Observação 1.40. No lugar da Definição 1.36 na literatura (veja por exemplo [4] e também [1, 2, 16, 17, 30]) encontra-se normalmente uma outra definição em que no lugar de um correferencial (1.8) de $C(\mathcal{I})$ é considerado um correferencial de T^*M , mesmo quando $\text{Char}(\mathcal{I}) \neq 0$. De fato, sendo a distribuição característica de Cauchy completamente integrável, M é localmente folheada por variedades integrais de $\text{Char}(\mathcal{I})$. O Teorema 1.23 mostra que localmente existem coordenadas $\{\xi^i, v^j\}$ em M , adaptadas às folhas, em que ξ^i são coordenadas nas folhas enquanto v^j são integrais primeiras de $\text{Char}(\mathcal{I})$. Neste caso, se h for a dimensão das folhas, pode-se ampliar o correferencial (1.8) de $C(\mathcal{I})$ a um referencial de T^*M incluindo as 1-formas exatas $d\xi^1, \dots, d\xi^h$. Assim, pondo por exemplo (alternativamente $\check{\sigma}^{q+1} = d\xi^1, \dots, \check{\sigma}^{q+h} = d\xi^h$)

$$\hat{\sigma}^{q+1} = d\xi^1, \dots, \hat{\sigma}^{q+h} = d\xi^h$$

obtemos um correferencial local de T^*M

$$\theta^1, \dots, \theta^r, \hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^{p+h}, \check{\sigma}^1, \dots, \check{\sigma}^q$$

tal que \mathcal{I} ainda é algebricamente gerado como em (1.9).

Daí pode-se definir \hat{V} e \check{V} , e analogamente \hat{V} e \check{V} , usando desta vez o sistema estendido $\hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^{p+h}$ no lugar de $\hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p$. Desta forma, obtém-se que (M, \mathcal{I}) é também decomponível

do tipo $[p+h, q]$, segundo a definição adotada em [1, 2, 4, 16, 17, 30]. Além disto, se (M, \mathcal{I}) for integrável segundo Darboux no sentido da Definição 1.36, então, considerando o sistema \hat{V} definido usando $\hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^{p+h}$ no lugar de $\hat{\sigma}^1, \dots, \hat{\sigma}^p$, obtém-se que

$$\hat{V} + \check{V}^{(\infty)} = \hat{V}^{(\infty)} + \check{V} = T^*M$$

e assim, (M, \mathcal{I}) é também integrável segundo Darboux no sentido da definição adotada nas referências citadas acima.

Em geral, dado um SDE (M, \mathcal{I}) , pode acontecer que a integrabilidade segundo Darboux seja não válida para este SDE, mas sim, para algum de seu prolongamento $(M^{(k)}, \mathcal{I}^{(k)})$. Por isto, podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 1.41. Um SDE (M, \mathcal{I}) é integrável segundo Darboux com até k prolongamentos se seu k -ésimo prolongamento $(M^{(k)}, \mathcal{I}^{(k)})$ for integrável segundo Darboux.

Exemplo 1.42. O SDE (M, \mathcal{I}) do Exemplo 1.37 é integrável segundo Darboux sem prolongamento. De fato, os sistemas Pfaffianos singulares

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \langle \theta^1, \theta^2, \theta^3, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2 \rangle, \\ \check{V} &= \langle \theta^1, \theta^2, \theta^3, \check{\sigma}^1, \check{\sigma}^2 \rangle.\end{aligned}$$

são tais que

$$\begin{aligned}\hat{V}^{(\infty)} &= \langle \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2 - u_x \theta^2 \rangle, \\ \check{V}^{(\infty)} &= \langle \check{\sigma}^1, \check{\sigma}^2 - u_y \theta^3 \rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{V} + \check{V}^{(\infty)} = T^*M, \quad \hat{V}^{(\infty)} + \check{V} = T^*M, \quad \hat{V}^{(\infty)} \cap \check{V}^{(\infty)} = 0.$$

Exemplo 1.43. O SDE (M, \mathcal{I}) considerado no Exemplo 1.38 não é integrável segundo Darboux, mas seu primeiro prolongamento coincide com o SDE do Exemplo 1.37, logo (M, \mathcal{I}) é integrável segundo Darboux com até 1 prolongamento.

Capítulo 2

Formalismo Variacional de Poincaré-Cartan

Neste capítulo será abordado o formalismo de Poincaré-Cartan para o cálculo variacional. Visando este objetivo iniciaremos com uma discussão da geometria de contato, um cenário geométrico fundamental para o estudo dos funcionais Lagrangianos. Sucessivamente, por meio da forma de Poincaré-Cartan, calcularemos a variação do funcional Lagrangiano e derivaremos assim o sistema de Euler-Lagrange, um sistema diferencial exterior cujas variedades integrais são exatamente os extremais do funcional Lagrangiano. Essa abordagem nos permitirá deduzir explicitamente as equações de Euler-Lagrange, o sistema de equações classicamente usado no cálculo variacional para descrever os extremais de um funcional Lagrangiano. O leitor interessado em mais detalhes sobre o formalismo de Poincaré-Cartan pode consultar a referência [12].

2.1 Variedades de contato

Definição 2.1. *Uma variedade de contato* (M, I) é uma variedade suave M de dimensão $2n + 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, com um subfibrado 1-dimensional $I \subset T^*M$, tal que para qualquer 1-forma local ϕ gerando I , tem-se que

$$\phi \wedge (d\phi)^n \neq 0, \quad (2.1)$$

em todo ponto em que ϕ estiver definida.

Chamamos o fibrado I de sistema de contato e o ideal diferencial $\mathcal{I} = \langle I, dI \rangle_{alg}$ de **ideal de contato**. Note que a condição (2.1), denominada critério de não-degeneração, independe da escolha de ϕ , pois se $\bar{\phi} = f\phi$, $f \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \wedge (d\bar{\phi})^n &= f\phi \wedge (df \wedge \phi + fd\phi)^n \\ &= f^{n+1}\phi \wedge (d\phi)^n \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. $M = \mathbb{R}^3$, com coordenadas (x, y, z) , e $\phi = dz - ydx$ gerando I , forma uma variedade de contato, pois é fácil ver que

$$\phi \wedge d\phi = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0.$$

Exemplo 2.3. Um outro exemplo de variedade de contato é dado pelo espaço de 1-jatos: $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, com coordenadas locais (x^i, z, p_i) e $\phi = dz - \sum p_i dx^i$ gerando I localmente.

Em geral, em uma variedade M , dado um subfibrado 1-dimensional $I = \langle \alpha \rangle \subset T^*M$, definimos o menor inteiro r tal que

$$(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0, (d\alpha)^{r+1} \wedge \alpha = 0,$$

de **posto de Engel** de I e denotaremos este posto por $Eng(I)$. Analogamente ao caso do critério de não-degeneração, esta definição independe da escolha do gerador α .

Pode-se então provar que vale o seguinte teorema [11].

Teorema 2.4 (Teorema de Pfaff). *Seja $I \subset T^*M$ um subfibrado 1-dimensional em uma variedade m -dimensional M . Se $Eng(I) = r$ então existem coordenadas locais $(x^1, \dots, x^r, z, p_1, \dots, p_r, y^1, \dots, y^{m-(2r+1)})$ tais que*

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^r p_i dx^i.$$

Este teorema implica que toda variedade de contato (M, I) com $I = \langle \phi \rangle$, possui coordenadas locais (x^i, z, p_i) , tais que $\phi = dz - p_i dx^i$. Essas coordenadas são conhecidas como **coordenadas de contato**, e pelo que vimos sobre os espaços de jatos, este teorema prova que toda variedade de contato é localmente difeomorfa ao espaço de 1-jatos $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Definição 2.5. Uma **subvariedade de Legendre** de uma variedade de contato (M, I) é uma subvariedade n -dimensional N de M , tal que $\phi|_N = 0$ para cada $\phi \in I$. Em outras palavras, uma subvariedade de Legendre é uma variedade integral n -dimensional do ideal diferencial gerado por I .

Denotando com $i : N \rightarrow M$ a inclusão de N em M , a condição $\phi|_N = 0$ equivale a $i^*\phi = 0$. Em coordenadas de contato, um exemplo de subvariedade de Legendre é dado por

$$N = \{z = p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0\},$$

pois é fácil notar que N é n -dimensional e $i^*\phi = \phi|_N = 0$ para cada $\phi \in I$.

De forma análoga ao que já observamos discutindo as variedades integrais da distribuição de Cartan $C^k(\pi)$, podemos dizer que as subvariedades de Legendre N que satisfazem a propriedade $dx|_N \neq 0$, chamadas de **subvariedades de Legendre transversais (ou horizontais)**,

são sempre localmente da forma

$$(x^i) \longrightarrow \left(x^i, z(x), \frac{\partial z}{\partial x^i}(x) \right),$$

para alguma função $z = z(x)$. Em geral, considerando $\sigma = \{i_1, \dots, i_h\}$ e $\rho = \{j_1, \dots, j_k\}$ com $h + k = n$ (em particular, pode ser $\sigma = \emptyset$ ou $\rho = \emptyset$), pode-se provar (vide [5]) que localmente toda subvariedade de Legendre admite uma parametrização da forma

$$x^i = -\frac{\partial S}{\partial p_i}, p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}, z = S - \sum_{i \in \sigma} p_i \frac{\partial S}{\partial p_i}, \quad (2.2)$$

onde $S = S(x_\sigma, p_\rho)$ e $i \in \sigma, j \in \rho$.

Por exemplo, se $\rho = \{1, \dots, n\}$, $\sigma = \emptyset$ e $S = S(x^1, \dots, x^n)$, obtemos a parametrização de uma subvariedade de Legendre transversal. Por outro lado, se $\rho = \emptyset$, $\sigma = \{1, \dots, n\}$ e $S = S(p_1, \dots, p_n)$, obtemos a parametrização

$$x^i = -\frac{\partial S}{\partial p_i}, z = S - \sum_{i \in I} p_i \frac{\partial S}{\partial p_i}.$$

Em particular, toda variedade de nível do conjunto de funções $\{x^1, \dots, x^n, z\}$ é uma subvariedade de Legendre não transversal.

2.2 Funcionais Lagrangianos e forma de Poincaré-Cartan em variedades de contato

Para toda $\mathbf{L} \in \Lambda^n(M)$, que em coordenadas de contato pode ser localmente descrita como

$$\mathbf{L} = L(x, z, p)dx = L(x^i, z, p_i)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

definimos o seguinte funcional no conjunto das subvariedades de Legendre transversais, compactas e orientáveis $i : N \longrightarrow M$, denominado **funcional Lagrangiano**,

$$\mathcal{L}(N) = \int_N i^* \mathbf{L}.$$

A n -forma \mathbf{L} , assim como a função L , são chamadas de **Lagrangiana** do funcional \mathcal{L} .

Notamos porém que Lagrangianas distintas podem definir um mesmo funcional, por exemplo, se \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 são duas Lagrangianas tais que $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \in \mathcal{I}$, então

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2.$$

Além disso, se \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 são duas Lagrangianas tais que $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = d\alpha$, então

$$\mathcal{L}_1(N) = \mathcal{L}_2(N) + \int_{\partial N} i^* \alpha.$$

Entretanto, como nosso objetivo é estudar variações do funcional Lagrangiano ao longo de famílias a 1-parâmetro de variedades integrais N_t com bordo fixo, a integral

$$\int_{\partial N} i^* \alpha$$

independe da variável t , portanto, conforme veremos na próxima seção, apesar de serem distintos, os funcionais \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 determinarão as mesmas equações de Euler-Lagrange.

Portanto, devido a estas considerações, daqui por diante, consideraremos equivalentes duas Lagrangianas $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ tais que $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \in \mathcal{I}$ ou $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = d\varphi$.

Essa noção de equivalência sugere que consideremos a classe de Lagrangianas

$$[\mathbf{L}] \in \frac{\Lambda^n(M)}{\mathcal{I}^n + d\Lambda^{n-1}(M)}.$$

Conforme demonstrado em [12], usando coordenadas de contato, é possível mostrar que para $k \geq n + 1$,

$$\Lambda^k(M) = \mathcal{I}^k,$$

i.e., todas as formas em M de grau maior que n pertencem ao ideal de contato \mathcal{I} . Portanto não podem existir variedades integrais de \mathcal{I} que tenham dimensão maior que n , porque uma variedade desta não admitiria nenhuma forma de volume nem mesmo localmente, o que é impossível.

Este fato nos permite estabelecer uma identificação entre $\Lambda^n(M)/(\mathcal{I}^n + d\Lambda^{n-1}(M))$ e o espaço de cohomologia característica

$$\bar{H}^n := H^n(\bar{\Lambda}^*, \bar{d}) = \frac{\{\omega \in \bar{\Lambda}^n(M) \mid \bar{d}\omega = 0\}}{\{\omega \in \bar{\Lambda}^n(M) \mid \omega = \bar{d}\phi, \phi \in \bar{\Lambda}^{n-1}(M)\}},$$

em que $\bar{\Lambda}^n(M) = \Lambda^n(M)/\mathcal{I}^n$ e \bar{d} é o operador de derivação exterior em $\bar{\Lambda}^*(M)$. Dessa maneira, definimos a aplicação $\delta : \bar{H}^n \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{I})$ tal que $\delta([w]) = [dw]$, onde

$$H^{n+1}(\mathcal{I}) = \frac{\{\omega \in \mathcal{I}^{n+1} \mid d\omega = 0\}}{\{\omega \in \mathcal{I}^{n+1} \mid \omega = d\phi, \phi \in \mathcal{I}^n(M)\}},$$

que em essência representa a derivada exterior no quociente. Sendo assim, podemos introduzir o teorema que servirá de base para definir um elemento importante em nosso estudo: a forma de Poincaré-Cartan.

Teorema 2.6. *Qualquer classe $[\tilde{\Pi}] \in H^{n+1}(\mathcal{I})$ possui uma única forma representativa definida globalmente $\Pi \in \mathcal{I}^{n+1}$, que satisfaaz $\Pi \equiv 0 \pmod{I}$.*

Demonstração. Qualquer forma $\tilde{\Pi} \in [\tilde{\Pi}]$ pode ser expressa localmente por

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \phi \wedge \alpha + d\phi \wedge \beta \\ &= \phi \wedge (\alpha + d\beta) + d(\phi \wedge \beta), \end{aligned}$$

onde $\alpha \in \Lambda^n(M)$, $\beta \in \Lambda^{n-1}(M)$.

Seja $\Pi := \tilde{\Pi} - d(\phi \wedge \beta)$. Note que $\Pi = \phi \wedge (\alpha + d\beta) \equiv 0 \pmod{I}$. Como $\tilde{\Pi} - \Pi = d(\phi \wedge \beta)$ e $\phi \wedge \beta \in \mathcal{I}^n$, segue que $\Pi \in [\tilde{\Pi}]$, concluindo então a existência local.

Para verificar a unicidade, suponha que Π_1 e Π_2 pertencem a mesma classe e são tais que $\Pi_1 \equiv 0 \pmod{I}$ e $\Pi_2 \equiv 0 \pmod{I}$. Logo, pela definição de $H^{n+1}(\mathcal{I})$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = d(\phi \wedge \gamma).$$

Para garantir a unicidade, provaremos que $\gamma \equiv 0 \pmod{I}$. Observe que, em coordenadas de contato (x^i, z, p_i) , podemos escrever

$$\begin{cases} \phi = dz - p_i dx^i, \\ d\phi = dx^i \wedge dp_i, \\ \gamma = \alpha \wedge \phi + \beta_I dx_I + \gamma_J dp_J + \rho_{AB} dx_A \wedge dp_B, \end{cases}$$

onde I, J, A e B são multi-índices com $|I| = |J| = |A| + |B| = n - 1$.

Note também que, em decorrência de $\phi \wedge \Pi_1 = \phi \wedge \Pi_2 = 0$, temos que $\phi \wedge (\Pi_1 - \Pi_2) = 0$, i.e., $\phi \wedge d\phi \wedge \gamma = 0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 = \phi \wedge d\phi \wedge \gamma &= (dz - p_i dx^i) \wedge (dx^j \wedge dp_j) \wedge (\alpha \wedge \phi + \beta_I dx_I + \gamma_J dp_J + \rho_{AB} dx_A \wedge dp_B) \\ &= (dz - p_i dx^i) \wedge (dx^j \wedge dp_j) \wedge (\beta_I dx_I + \gamma_J dp_J + \rho_{AB} dx_A \wedge dp_B) \\ &= (dz \wedge dx^i \wedge dp_i - p_i dx^i \wedge dx^j \wedge dp_j) \wedge (\beta_I dx_I + \gamma_J dp_J + \rho_{AB} dx_A \wedge dp_B) \\ &= \beta_I dz \wedge dx^i \wedge dp_i \wedge dx_I + \gamma_J dz \wedge dx^i \wedge dp_i \wedge dp_J \\ &\quad + \rho_{AB} dz \wedge dx^i \wedge dp_i \wedge dx_A \wedge dp_B - p_i \gamma_J dx^i \wedge dx^j \wedge dp_j \wedge dp_J \\ &\quad - p_i \rho_{AB} dx^i \wedge dx^j \wedge dp_j \wedge dx_A \wedge dp_B \end{aligned}$$

implica que $\beta_I = 0$, $\gamma_J = 0$, $\rho_{AB} = 0$. Portanto $\gamma \equiv 0 \pmod{I}$, o que garante a unicidade.

Da existência local e unicidade, asseguramos a existência global do resultado.

□

Definição 2.7. Seja (M, I) uma variedade de contato com Lagrangiana $\mathbf{L} \in \Lambda^n(M)$. A única forma representativa $\Pi \in \mathcal{I}^{n+1}$ de $\delta([\mathbf{L}])$ satis fazendo $\Pi \equiv 0 \pmod{I}$ é chamada de **forma de Poincaré-Cartan** de \mathbf{L} .

Para calcular a forma de Poincaré-Cartan Π a partir de uma Lagrangiana representativa \mathbf{L} , pode-se primeiro expressar $d\mathbf{L}$ localmente como

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= \phi \wedge \alpha + d\phi \wedge \beta \\ &= \phi \wedge (\alpha + d\beta) + d(\phi \wedge \beta), \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\alpha \in \Lambda^n(M)$, $\beta \in \Lambda^{n-1}(M)$. Disto resultará que

$$\Pi = \phi \wedge (\alpha + d\beta). \tag{2.4}$$

Por outro lado, substituindo (2.4) em (2.3), deduzimos que $\Pi = \phi \wedge (\alpha + d\beta) = d\mathbf{L} - d(\phi \wedge \beta)$, isto é

$$\Pi = d(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta). \quad (2.5)$$

2.3 SDE Euler-Lagrange para uma variedade de contato

Queremos encontrar agora condições para que uma subvariedade de Legendre $g : N \rightarrow M$, com bordo, compacta e orientável, seja ponto crítico do funcional \mathcal{L} .

Portanto consideraremos uma variação de g formada por subvariedades de Legendre, i.e., uma aplicação suave

$$\begin{aligned} G : N \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (p, t) &\longmapsto G_t(p) \end{aligned}$$

tal que $G_0 = g$, $G_t(\partial N) = g(\partial N)$ (variação de g com bordo fixo) e além disto, para todo valor de t , $G_t : N \rightarrow M$ é uma subvariedade compacta e orientável.

De fato, lembramos que g é dita ponto crítico (ou extremal) para \mathcal{L} se para toda variação G temos que

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \int_N G_t^*(\mathbf{L}) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \int_{G_t(N)} \mathbf{L} = 0. \quad (2.6)$$

Em particular, introduzindo a notação $N_t = G_t(N)$, podemos escrever

$$\mathcal{L}[N_t] = \int_{N_t} \mathbf{L}$$

e assim (2.6) pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mathcal{L}[N_t] = 0. \quad (2.7)$$

Além disto, lembramos que as curvas $\gamma_p(t) := G_t(p)$, transversais a $g(N) = G_0(N)$ em todo ponto $G_0(p)$, definem com seus vetores tangentes um campo vetorial X em M (campo de variação). Portanto denotando com $\{A_t\}$ o fluxo de X , teremos que

$$G_t = A_t \circ G_0,$$

então $G_t^* = G_0^* \circ A_t^*$, e assim

$$\frac{d}{dt} G_t^* = G_0^* \circ \frac{d}{dt} A_t^*. \quad (2.8)$$

Em particular, se

$$X = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} A_t^*$$

deduzimos que

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} G_t^* = G_0^* \circ X.$$

Logo, usando as propriedades de derivada de Lie L_X (derivada de Lie ao longo do campo X) e a identidade (2.8) deduzimos que

$$\frac{d}{dt} G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) = (G_0^* \circ A_t^*)(L_X(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)),$$

i.e.,

$$\frac{d}{dt} G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) = G_t^*(L_X(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)).$$

Por outro lado, lembrando que $\Pi = d(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)$, para alguma $(n-1)$ -forma $\beta \in \Lambda^{n-1}(M)$, teremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{N_t} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \int_{N_t} \mathbf{L} - \phi \wedge \beta \\ &= \frac{d}{dt} \int_N G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) \\ &= \int_N \frac{d}{dt} G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade utilizamos o teorema de mudança de variáveis. No entanto,

$$\frac{d}{dt} G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) = G_t^*(L_X(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_N \frac{d}{dt} G_t^*(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) &= \int_N G_t^*(L_X(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)) \\ &= \int_{N_t} L_X(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) \\ &= \int_{N_t} (X \lrcorner d(\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)) + \int_{N_t} d(X \lrcorner (\mathbf{L} - \phi \wedge \beta)) \\ &= \int_{N_t} X \lrcorner \Pi + \int_{\partial N_0} X \lrcorner (\mathbf{L} - \phi \wedge \beta) \\ &= \int_{N_t} X \lrcorner \Pi. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, aplicamos o teorema de mudança de variáveis, na terceira, utilizamos a fórmula mágica de Cartan, na quarta, aplicamos o teorema de Stokes e, na quinta, consideramos o fato de que X se anula sobre o bordo de $N_0 = G_0(N)$. Agora, como $\Pi \equiv \phi \wedge \psi$ para alguma n -forma ψ , decorre que

$$\begin{aligned} \int_{N_t} X \lrcorner \Pi &= \int_{N_t} X \lrcorner (\phi \wedge \psi) \\ &= \int_{N_t} (X \lrcorner \phi) \psi - \phi \wedge (X \lrcorner \psi) \\ &= \int_N G_t^*(X \lrcorner \phi) G_t^* \psi, \end{aligned}$$

pois $\phi|_{N_t} = 0$, sendo N_t subvariedade de Legendre. Logo, expressando $(G_t^*(X \lrcorner \phi))_{t=0} = \beta$, em $t = 0$,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{N_t} \mathbf{L} = \int_N \beta g^* \psi.$$

Concluímos assim que $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f_{N_t} \mathbf{L}) = 0$ se, e somente se, $g^* \psi = 0$ pois, pela arbitrariedade da variação G , β é arbitrária.

Considerando então o fato de que $\mathcal{I} = \langle \phi \rangle_{dif}$ e $\Lambda^k(M) = \mathcal{I}^k$ se $k \geq n+1$, podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 2.8. *O SDE de Euler-Lagrange da Lagrangiana \mathbf{L} é o ideal diferencial em M gerado algebraicamente por $\phi, d\phi$ e ψ , i.e.,*

$$\mathcal{E} = \langle \phi, d\phi, \psi \rangle_{alg}.$$

Assim, concluímos que a subvariedade $g : N \rightarrow M$ é um ponto crítico de \mathcal{L} se, e somente se, $g : N \rightarrow M$ é uma variedade integral de \mathcal{E} .

Iremos agora obter uma expressão local para a forma de Poincaré Cartan e as equações de Euler-Lagrange.

Considere $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, com coordenadas locais (x^i, z, p_i) , $\phi = dz - p_i dx^i$ gerando o ideal de contato localmente, e uma Lagrangiana \mathbf{L} em M , dada localmente por $\mathbf{L} = L(x^i, z, p_i) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =: L dx$. Temos que

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= dL \wedge dx \\ &= (L_{x^i} dx^i + L_z dz + L_{p_i} dp_i) \wedge dx \\ &= (L_{x^i} dx^i + L_z(\phi + p_i dx^i) + L_{p_i} dp_i) \wedge dx \\ &= L_z \phi \wedge dx + L_{p_i} dp_i \wedge dx \\ &= \phi \wedge L_z dx + dp_i \wedge L_{p_i} dx \\ &= \phi \wedge L_z dx + dp_i \wedge dx^i \wedge L_{p_i} dx^{(i)} \\ &= \phi \wedge L_z dx - d\phi \wedge L_{p_i} dx^{(i)} \end{aligned}$$

onde $L_{x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}$, $L_z = \frac{\partial L}{\partial z}$, $L_{p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i}$, $dx^{(i)} = (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$ e o circunflexo sobre dx^i representa a ausência do termo. Temos então que $\Pi = \phi \wedge (L_z dx + d(-L_{p_i} dx^{(i)}))$. Agora, seja

$$\psi := L_z dx - d(L_{p_i} dx^{(i)}),$$

e consideremos N uma subvariedade de Legendre transversal de (M, I) . Sabemos que, localmente, é possível representar N como

$$N = \{(x^i, z(x), p_i(x))\},$$

onde $p_i(x) = \frac{\partial z}{\partial x^i}(x)$.

Verificaremos então que $i^* \psi = 0$ se, e somente se, ao longo de N ,

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \sum D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i} \right) = 0,$$

onde $i : N \rightarrow M$ é a inclusão de N em M e $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + z_{x^i} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_j z_{x^i x^j} \frac{\partial}{\partial p_j}$ é a derivada total. Esta EDP, de segunda ordem, é conhecida como equação de Euler-Lagrange da Lagrangiana \mathbf{L} .

Por fim, calcularemos a restrição $i^*\psi$, omitindo o pull-back por simplicidade.

$$\begin{aligned}
L_z dx - d(L_{p_i} dx^{(i)}) &= L_z dx - \left(\frac{\partial L_{p_i}}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial L_{p_i}}{\partial z} dz + \frac{\partial L_{p_i}}{\partial p_j} dp_j \right) \wedge dx^{(i)} \\
&= L_z dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{(i)} - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial z} dz \wedge dx^{(i)} - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial p_j} dp_j \wedge dx^{(i)} \\
&= L_z dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial x^i} dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial z} z_{x^k} dx^k \wedge dx^{(i)} - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial p_j} z_{x^j x^l} dx^l \wedge dx^{(i)} \\
&= L_z dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial x^i} dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial z} z_{x^i} dx - \frac{\partial L_{p_i}}{\partial p_j} z_{x^j x^i} dx \\
&= L_z dx - \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + z_{x^i} \frac{\partial}{\partial z} + z_{x^j x^i} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) (L_{p_i}) dx \\
&= \frac{\partial L}{\partial z} dx - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i} \right) dx.
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$i^*\psi = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial z} - \sum D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i} \right) = 0.$$

2.4 Geometria de multicontato

No início deste capítulo vimos que toda variedade de contato localmente pode ser identificada com $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. De fato, podemos pensar que a própria definição de variedade de contato tenha sido modelada sobre o exemplo de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e seu ideal de Cartan. Aqui trataremos de uma noção que generaliza aquela de variedade de contato que, de forma análoga, pode ser motivada por $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ equipado com seu ideal de Cartan, gerado por

$$I = \langle \phi^j = dz^j - p_i^j dx^i \rangle.$$

Neste caso, $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ é uma variedade de dimensão $n + s + ns$ equipada com $I = \langle \phi^1, \dots, \phi^s \rangle$ de posto s e tal que

$$d\phi^j = -\pi_i^j \wedge \omega^i \pmod{I}$$

onde $\omega^i = dx^i$ e $\pi_i^j = dp_i^j$ são 1-formas tais que

$$J = \langle \phi^1, \dots, \phi^s, \omega^1, \dots, \omega^n \rangle$$

é integrável e π_i^j são não nulas sobre as variedades integrais de J . Se pode ver que, mesmo atuando com transformações de contato e mudando as ϕ^1, \dots, ϕ^s , J continua bem definida e também as propriedades de ω^i e π_i^j permanecem. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.9. Uma **variedade de multicontato** é uma variedade $n+s+ns$ -dimensional M , com dois sistemas Pfaffianos $I = \langle \phi^1, \dots, \phi^s \rangle$ e $J = \langle \phi^1, \dots, \phi^s, \omega^1, \dots, \omega^n \rangle$, onde J é integrável e

existem coreferenciais locais $(\phi^\alpha, \omega^i, \pi_i^\alpha)$ de M tais que

$$d\phi^\alpha \equiv -\pi_i^\alpha \wedge \omega^i \pmod{I} \quad (2.9)$$

e π_i^j são não nulas sobre as variedades integrais de J .

É possível demonstrar a unicidade do sistema Pfaffiano J em relação ao sistema Pfaffiano I , quando $s \geq 2$. Além disso, quando $s \geq 3$, não é necessário assumir a condição de integrabilidade de J , já que essa propriedade é implicada pela equação (2.9). Em discussões relacionadas a variedades de multi-contato, podemos, portanto, referir-nos unicamente a (M, I) , levando em conta as ressalvas previamente mencionadas.

Exemplo 2.10. Seja X uma variedade $n+s$ -dimensional e $\pi : G_n(TX) \rightarrow X$ o fibrado Grassmanniano dos subespaços n -dimensionais dos espaços tangentes de X , i.e., se $m \in G_n(TX)$ então $m = (p, E)$ onde $p \in X$ e E é um subespaço n -dimensional de $T_p X$.

Definimos em $G_n(TX)$ dois sistemas Pfaffianos $I \subset J \subset T^*(G_n(TX))$ de posto s e $n+s$, respectivamente. O sistema Pfaffiano J é dado por

$$J = \pi^*(T^*X).$$

J é integrável e suas subvariedades integrais maximais são as fibras de $\pi : G_n(TX) \rightarrow X$. Já o sistema Pfaffiano I é dado em cada ponto $(p, E) \in G_n(TX)$ por

$$I_{(p,E)} = \pi^*(E^\perp),$$

onde $E^\perp \subset T_p^*X$ é o anulador s -dimensional do subespaço E de $T_p X$. I é um sistema não integrável e pode-se demonstrar que existem coordenadas locais $(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)$ em $G_n(TX)$ tais que

$$J = \langle dx^i, dz^\alpha \rangle,$$

$$I = \langle dz^\alpha - p_i^\alpha dx^i \rangle.$$

Desta forma, é facilmente verificável que $(G_n(TX), I, J)$ satisfaz a equação (2.9), com correferencial local $(dz^\alpha - p_i^\alpha dx^i, dx^i, dp_i^\alpha)$, configurando assim uma variedade de multicontato.

Temos agora a intenção de trabalhar com funcionais Lagrangianos associados a Lagrangianas da forma (em coordenadas locais) $L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx$.

Como qualquer n -forma congruente a esta, módulo I , gera o mesmo funcional Lagrangiano, isso sugere a seguinte definição.

Definição 2.11. Seja (M, I, J) uma variedade de multicontato. Uma **Lagrangiana** em M é uma n -forma diferenciável $\mathbf{L} \in \Lambda^n(J) \subset \Lambda^n(M)$.

Definimos, assim como no caso escalar, o seguinte funcional no conjunto das subvariedades de Legendre orientáveis e compactas $N \subset M$,

$$\mathcal{L}(N) = \int_N i^* \mathbf{L}.$$

Notamos neste caso também que Lagrangianas distintas podem definir um mesmo funcional, por exemplo, se \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 são duas Lagrangianas tais que $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \in \mathcal{I}$, então

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2.$$

Note então que, como mencionado anteriormente, de acordo com a definição que adotamos de Lagrangiana, qualquer Lagrangiana é congruente, em coordenadas locais, a $L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx$ módulo I e, portanto, possuem os mesmos funcionais Lagrangianos associados. Isso sugere trabalharmos com classes de Lagrangianas $[\mathbf{L}] \in \Lambda^n(J/I)$.

Nosso objetivo é associar para qualquer classe $[\mathbf{L}] \in \Lambda^n(J/I)$, uma Lagrangiana $\mathbf{L} \in \Lambda^n(J)$, não necessariamente unicamente determinada, tal que o SDE de Euler-Lagrange seja univocamente determinado por $\Pi = d\mathbf{L}$ (veja a Definição 2.13 e a discussão subsequente).

Definição 2.12. *Um levantamento admissível para $[\mathbf{L}] \in \Lambda^n(J/I)$, é uma Lagrangiana $\mathbf{L} \in \Lambda^n(J)$, representando a classe $[\mathbf{L}]$ e satisfazendo $d\mathbf{L} \equiv 0 \pmod{I}$.*

Como mencionado anteriormente, todo representante de $[\mathbf{L}] \in \Lambda^n(J/I)$ é congruente, em coordenadas locais, a alguma n -forma $L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx$ módulo I . Então consideremos o representante \mathbf{L} tal que, localmente, $\mathbf{L} = L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx + \phi^\alpha \wedge \frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} dx^{(i)}$. Notemos que

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= dL \wedge dx + d\phi^\alpha \wedge \frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} dx^{(i)} - \phi^\alpha \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha}\right) \wedge dx^{(i)} \\ &= \phi^\alpha \wedge \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx + \frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} dp_i^\alpha \wedge dx - \frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} dp_i^\alpha \wedge dx^i \wedge dx^{(i)} - \phi^\alpha \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha}\right) \wedge dx^{(i)} \\ &= \phi^\alpha \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha}\right) \wedge dx^{(i)}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Este cálculo mostra que toda classe $[\mathbf{L}] \in \Lambda^n(J/I)$ possui um levantamento admissível. Observamos que, em geral, a derivada $d\mathbf{L}$ deste levantamento admissível não é única. No caso escalar, temos o Teorema 2.6, que garante que existe e é único o levantamento admissível (a forma de Poincaré-Cartan). Decorre do cálculo acima, que podemos expressar

$$\Pi = d\mathbf{L} = \phi^\alpha \wedge \psi_\alpha,$$

com $\psi_\alpha \in \Lambda^n(M)$.

2.5 SDE de Euler-Lagrange para variedade de multicontato

Com o intuito de obter também neste caso mais geral o SDE de Euler-Lagrange para variedade de multicontato, consideraremos novamente uma variação suave de subvariedades de

Legendre orientáveis compactas N_t , com bordo fixo

$$G : N \times [0, 1] \longrightarrow M,$$

de uma variedade de Legendre $g : N \longrightarrow M$, tal que $G_0(N) = g(N)$. Assim como no caso escalar, queremos encontrar condições para que uma subvariedade de Legendre $g : N \longrightarrow M$ seja ponto crítico do funcional \mathcal{L} para toda variação G com bordo fixo. Nesse contexto, isso quer dizer que $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\int_N G_t^* \mathbf{L}) = 0$ para toda variação G , com bordo fixo, tal que $G|_{t=0} = g$. De modo inteiramente análogo ao caso escalar, temos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{N_t} \mathbf{L} = \sum \int_N \beta_\alpha g^* \psi_\alpha,$$

onde $\beta_\alpha = (G_t^*(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^\alpha))|_{t=0}$. Também neste caso, pela arbitrariedade da variação, concluímos que $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{N_t} \mathbf{L} = 0$ se, e somente se, $g^* \psi_\alpha = 0$, para cada $\alpha = 1, \dots, s$.

Introduzimos então a seguinte definição.

Definição 2.13. *O SDE de Euler-Lagrange da Lagrangiana \mathbf{L} , é o ideal diferencial em M gerado algebraicamente por $\phi^\alpha, d\phi^\alpha$ e ψ_α , i.e.*

$$\mathcal{E} = \langle \phi^\alpha, d\phi^\alpha, \psi_\alpha \rangle_{alg},$$

onde \mathbf{L} é qualquer levantamento admissível e $d\mathbf{L} = \phi^\alpha \wedge \psi_\alpha$.

O SDE de Euler-Lagrange, a princípio, pode não ser unicamente determinado por $[\mathbf{L}]$. No entanto, isso não ocorre, como ficará evidente na discussão abaixo.

Com efeito, começamos observando que dois levantamentos admissíveis $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in [\mathbf{L}]$ são congruentes módulo $\Lambda^2(I)$. De fato, se $s = 1$, então $\Lambda^2(I) = 0$, e pelo Teorema 2.6 existe um único levantamento admissível. Se $s \geq 2$, a condição $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \equiv 0 \pmod{I}$ nos permite expressar $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = \phi^\alpha \wedge \gamma_\alpha$. Além disso, o fato de $d\mathbf{L}_1 - d\mathbf{L}_2 \equiv 0 \pmod{I}$, juntamente com as equações $d\phi^\alpha \equiv -\pi_i^\alpha \wedge \omega^i \pmod{I}$, nos possibilita calcular

$$\begin{aligned} 0 &\equiv d\mathbf{L}_1 - d\mathbf{L}_2 \\ &= d(\phi^\alpha \wedge \gamma_\alpha) \\ &\equiv d\phi^\alpha \wedge \gamma_\alpha \\ &\equiv -\pi_i^\alpha \wedge \omega^i \wedge \gamma_\alpha \pmod{I}. \end{aligned}$$

Isso implica que $\gamma_\alpha \equiv 0 \pmod{I}$, em virtude de ϕ^α, ω^i e π_i^α serem formas linearmente independentes. Portanto, $\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = \phi^\alpha \wedge \gamma_\alpha \equiv 0 \pmod{\Lambda^2(I)}$.

Podemos então, expressar

$$\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = \frac{1}{2} \phi^\alpha \wedge \phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta},$$

onde $\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha}$, logo

$$\begin{aligned}
 \phi^\alpha \wedge (\psi_\alpha^1 - \psi_\alpha^2) &= d(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2), \quad (\text{com } d\mathbf{L}_i = \phi^\alpha \wedge \psi_\alpha^i) \\
 &= \frac{1}{2}d\phi^\alpha \wedge \phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\phi^\alpha \wedge \phi^\beta \wedge d\gamma_{\alpha\beta}, \\
 &= -\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\phi^\alpha \wedge \phi^\beta \wedge d\gamma_{\alpha\beta} \\
 &\equiv -\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta} \pmod{\Lambda^2(I)},
 \end{aligned}$$

o que implica que $(\psi_\alpha^1 - \psi_\alpha^2) + d\phi^\beta \wedge \gamma_{\alpha\beta} \equiv 0 \pmod{I}$ e, portanto, $(\psi_\alpha^1 - \psi_\alpha^2) \in \mathcal{I}$, para cada $\alpha = 1, \dots, s$.

Assim, podemos concluir que o SDE de Euler-Lagrange para uma Lagrangiana $[\mathbf{L}]$ é independente do levantamento admissível escolhido.

Analogamente ao caso das variedades de contato, iremos agora obter uma expressão local para as equações de Euler-Lagrange. Considere $M = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$, com coordenadas locais $(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)$, ideal de multicontato gerado por $I = \langle \phi^\alpha = dz^\alpha - p_i^\alpha dx^i \rangle$, e uma Lagrangiana $\tilde{\mathbf{L}}$ em M , dada localmente por $\tilde{\mathbf{L}} = L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =: Ldx$.

Seja $\mathbf{L} = L(x^i, z^\alpha, p_i^\alpha)dx + \phi^\alpha \wedge \frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha}dx^{(i)}$ um levantamento admissível para $\tilde{\mathbf{L}}$. Por (2.10) temos que

$$d\mathbf{L} = \phi^\alpha \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial z^\alpha}dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} \right) \wedge dx^{(i)} \right).$$

Logo,

$$\psi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial z^\alpha}dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} \right) \wedge dx^{(i)}.$$

Agora, considere N uma subvariedade de Legendre transversal de (M, I) representada localmente por

$$N = \{(x^i, z^\alpha(x), p_i^\alpha(x))\},$$

onde $p_i^\alpha(x) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}(x)$.

Verificaremos que $i^*\psi^\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, s$ se, e somente se, ao longo de N ,

$$\frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \sum D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} \right) = 0,$$

onde $i : N \rightarrow M$ é a inclusão de N em M e $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + z_{x^i}^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \sum_{j,\alpha} z_{x^i x^j}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_j^\alpha}$ é a derivada total. Este sistema, de segunda ordem, é conhecido como sistema de equações de Euler-Lagrange da Lagrangiana \mathbf{L} .

Por fim, calcularemos a restrição $i^*\psi^\alpha$, omitindo o pull-back por simplicidade.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha}\right) \wedge dx^{(i)} &= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - \left(\frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial z^\alpha} dz^\alpha + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial p_j^\alpha} dp_j^\alpha \right) \wedge dx^{(i)} \\
&= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{(i)} + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial z^\alpha} dz^\alpha \wedge dx^{(i)} + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial p_j^\alpha} dp_j^\alpha \wedge dx^{(i)} \\
&= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial x^i} dx + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial z^\alpha} z_{x^k}^\alpha dx^k \wedge dx^{(i)} + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial p_j^\alpha} z_{x^j x^l}^\alpha dx^l \wedge dx^{(i)} \\
&= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial x^i} dx + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial z^\alpha} z_{x^i}^\alpha dx + \frac{\partial L_{p_i^\alpha}}{\partial p_j^\alpha} z_{x^j x^i}^\alpha dx \\
&= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + z_{x^i}^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + z_{x^j x^i}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_j^\alpha} \right) (L_{p_i^\alpha}) dx \\
&= \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} dx - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} \right) dx.
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$i^*\psi^\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, s \iff \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} - \sum D_i \left(\frac{\partial L}{\partial p_i^\alpha} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.14. A *sine-Gordon* é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$\mathcal{L}(u) = \int \int \left(\frac{1}{2} u_x u_t - \cos u \right) dx dt.$$

De fato, observando que $L = \frac{1}{2} u_x u_t - \cos u$, a equação (2.11) se reduz a

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_t \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \right) = 0.$$

Logo,

$$\sin u - \frac{1}{2} u_{xt} - \frac{1}{2} u_{tx} = 0,$$

i.e.,

$$u_{xt} = \sin u.$$

Exemplo 2.15. O *pêndulo simples ideal* consiste de uma massa pequena (sem atrito com ar) preso a um fio de massa desprezível e comprimento l , formando um ângulo θ com a vertical e uma altura h com relação ao ponto onde o fio está fixo. A Lagrangiana neste sistema é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial, i.e.,

$$L = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Em coordenadas polares, notando que $h = l \cos \theta$ e que a velocidade tangencial em função do tempo é dada por $v(t) = l \cos \theta(t)$, temos que

$$L = \frac{ml^2}{2} \theta'^2 + mgl \cos \theta,$$

onde $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$.

Portanto, a equação (2.11) se transforma em

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = 0,$$

i.e.,

$$-mgl \sin \theta - ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Esta equação, que governa o movimento do pêndulo, é chamada de equação do pêndulo ou equação de Mathieu.

Exemplo 2.16. No Capítulo 4, trabalharemos com a Lagrangiana energia dada em (3) e com as variedades $(\mathbb{R}^{1,1}, g)$ e (Q, h) tais que $g = dx^1 \cdot dx^2$ e $h = e^{2\rho(y^1, y^2)}((dy^1)^2 + (dy^2)^2)$ onde ρ é uma função real e \cdot denota o produto simétrico entre formas diferenciais. Neste contexto, encontraremos as equações de Euler-Lagrange.

Notemos que os símbolos de Christoffel em Q são dados por

$$\underline{\Gamma}_{12}^2 = \underline{\Gamma}_{21}^2 = \underline{\Gamma}_{11}^1 = \frac{\partial \rho}{\partial y^1} = -\underline{\Gamma}_{22}^1, \quad \underline{\Gamma}_{12}^1 = \underline{\Gamma}_{21}^1 = \underline{\Gamma}_{22}^2 = \frac{\partial \rho}{\partial y^2} = -\underline{\Gamma}_{11}^2.$$

Em $\mathbb{R}^{1,1}$, os símbolos de Christoffel são dados por $\Gamma_i^j = 0$, $i, j = 1, 2$. Logo, os laplacianos $\Delta y^\gamma = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} \right)$ de $\varphi(x^1, x^2) = (y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2))$ em P são dados por

$$\Delta y^1 = 4 \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad \Delta y^2 = \frac{\partial^2 y^2}{\partial x^1 \partial x^2}.$$

Portanto, o sistema (4) se reduz a

$$\begin{cases} y_{12}^1 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1} (y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2) - \frac{\partial \rho}{\partial y^2} (y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2), \\ y_{12}^2 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1} (y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2) + \frac{\partial \rho}{\partial y^2} (y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2), \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $y_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j}$ e $y_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}$, $i, j, k = 1, 2$.

Capítulo 3

SDE para aplicações harmônicas

O sistema de equações de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas $\varphi : P \rightarrow Q$ define uma subvariedade de $J^2(P, Q)$. A restrição do ideal de contato sobre $J^2(P, Q)$ a essa subvariedade fornece um SDE cujas variedades integrais com condição de independência $dx^1 \wedge dx^2 \neq 0$, são prolongamentos de aplicações harmônicas. Entretanto, a descrição explícita (4), das equações de Euler-Lagrange para estas aplicações, depende da escolha de coordenadas locais. Em [12], foi proposto um SDE em $J^1(P, Q)$, em termos do qual é possível estudar as aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas de um ponto de vista global usando o formalismo de Poincaré-Cartan. Esta abordagem, posteriormente, foi oportunamente adaptada ao caso de variedades pseudo-Riemannianas em [36]. O nosso objetivo aqui será aquele de apresentar a abordagem adotada em [36].

Neste capítulo, consideraremos duas variedades pseudo-Riemannianas (P, g) e (Q, h) com assinaturas (n_1, n_2) e (s_1, s_2) , respectivamente, onde $n_1 + n_2 = n$ e $s_1 + s_2 = s$.

3.1 Preliminares

Começamos observando que em $J^1(P, Q)$ todo ponto é uma classe de equivalência $[\varphi]_p^1$ que pode ser identificada com a tripla $(p, \varphi(p), \varphi_{*,p})$ ou mais simplesmente com o próprio push-forward $\varphi_{*,p} : T_p P \rightarrow T_{\varphi(p)} Q$. Portanto o fibrado $J^1(P, Q) \rightarrow P \times Q$ pode ser identificado com o fibrado $\text{Hom}(TP, TQ) \rightarrow P \times Q$, de forma tal que $[\varphi]_p^1$ corresponde ao elemento $L_{[\varphi]_p^1} = \varphi_{*,p}$ de $\text{Hom}(T_p P, T_{\varphi(p)} Q)$, também denotado mais simplesmente com L .

Usando coordenadas locais $\{x^i\}$ em P e $\{y^\alpha\}$ em Q , denotaremos com $\{x^i, y^\alpha, y_i^\alpha\}$ as coordenadas canônicas em $J^1(P, Q)$. Lembramos em particular que $x^i([\varphi]_p^1) = x^i(p)$, $y^\alpha([\varphi]_p^1) = y^\alpha(\varphi(p))$ e $y_i^\alpha([\varphi]_p^1) = \varphi_i^\alpha(x(p))$, onde denotamos com $\varphi^\alpha(x)$ as componentes da representação coordenada de φ .

Usando estas coordenadas, temos que $L_{[\varphi]_p^1}(\partial_{x^i}|_{x(p)}) = \varphi_{*,p}(\partial_{x^i}|_{x(p)}) = y_i^\alpha([\varphi]_p^1)\partial_{y^\alpha}|_{y(\varphi(p))}$, i.e., $L(\partial_{x^i}) = y_i^\alpha\partial_{y^\alpha}$.

Desta forma, introduzindo a notação

$$M := \text{Hom}(TP, TQ),$$

é fácil verificar que a distribuição de Cartan em $J^1(P, Q)$ pode ser identificada com a distribuição dos vetores que anulam a forma (a valores vetoriais) $\tilde{\phi}$ definida por

$$\tilde{\phi}(X) = (\pi_Q^M)_*(X) - L((\pi_P^M)_*(X)),$$

onde $X \in T_{(x,y,L)}M$ e

$$\begin{aligned}\pi_Q^M : M &\longrightarrow Q, \\ \pi_P^M : M &\longrightarrow P,\end{aligned}$$

são as projeções canônicas de M em Q e P , respectivamente.

Em coordenadas locais $(x^i, y^\alpha, y_i^\alpha)$ em M , podemos expressar $\tilde{\phi}$ da seguinte maneira

$$\tilde{\phi} = (dy^\alpha - y_i^\alpha dx^i) \otimes \partial_{y^\alpha}.$$

Usaremos também as seguintes notações para os fibrados dos referenciais

$$\mathcal{F}(P) = Fr_{SO}(P), \quad \mathcal{F}(Q) = Fr_O(Q).$$

Portanto $\mathcal{F}(P)$ denotará o conjunto dos pares (x, u) , em que $x \in P$ e u é um referencial ortonormal orientado em x e $\mathcal{F}(Q)$ denotará o conjunto dos pares (y, v) , em que $y \in Q$ e v é um referencial ortonormal em y . Formalmente trataremos um referencial u como um isomorfismo $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x P$, que transforma a base canônica de \mathbb{R}^n numa base ortonormal orientada positivamente de $T_x P$, relativamente ao produto escalar g_x definido por g em $T_x P$ e à orientação positiva de P . De forma análoga, v será um isomorfismo $v : \mathbb{R}^s \longrightarrow T_y Q$, que transforma a base canônica de \mathbb{R}^s numa base ortonormal de $T_y Q$.

Sabemos que $\mathcal{F}(P)$ é o $SO(n_1, n_2)$ -fibrado principal dos referenciais ortonormais positivos de P . Analogamente, $\mathcal{F}(Q)$ é o $O(s_1, s_2)$ -fibrado principal dos referenciais ortonormais de Q .

A partir destes dois fibrados podemos considerar também

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) &\longrightarrow P \times Q \\ ((x, u), (y, v)) &\longmapsto (x, y)\end{aligned}$$

que, com a ação à direita natural de $G = SO(n_1, n_2) \times O(s_1, s_2)$, definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) \times G &\longrightarrow \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) \\ ((x, u, y, v), (a, b)) &\longmapsto (x, u \cdot a, y, v \cdot b),\end{aligned}$$

possui estrutura de G -fibrado principal.

Por outro lado, G também pode agir à esquerda sobre o espaço vetorial das matrizes $M_{s \times n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}G \times M_{s \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{s \times n}(\mathbb{R}) \\ ((a, b), p) &\longmapsto b \cdot p \cdot a^{-1}\end{aligned}$$

onde $n = n_1 + n_2$, $s = s_1 + s_2$. Portanto, definindo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) \times M_{s \times n}(\mathbb{R}) \quad (3.1)$$

e considerando a ação à direita

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \times G &\longrightarrow \mathcal{F} \\ ((x, u, y, v, p), (a, b)) &\longmapsto (x, u \cdot a, y, v \cdot b, b^{-1} \cdot p \cdot a), \end{aligned}$$

podemos introduzir o fibrado vetorial

$$\mathcal{F}/G = \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) \times_G M_{s \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow P \times Q$$

associado ao fibrado principal $\mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(Q) \longrightarrow P \times Q$, relativamente à ação considerada de G em $M_{s \times n}(\mathbb{R})$.

Este fibrado associado pode ser identificado com $\text{Hom}(TP, TQ)$, por meio do isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}/G &\longrightarrow \text{Hom}(TP, TQ) \\ [x, u, y, v, p] &\longmapsto (x, y, v \cdot p \cdot u^{-1}). \end{aligned}$$

Note que, a definição desta aplicação independe do representante escolhido para $[x, u, y, v, p]$ em \mathcal{F}/G :

$$(x, u \cdot a, y, v \cdot b, b^{-1} \cdot p \cdot a) \longmapsto (x, y, (v \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot p \cdot a) \cdot (u \cdot a)^{-1}) = (x, y, v \cdot p \cdot u^{-1}).$$

Em virtude deste isomorfismo, daqui por diante, usaremos M para denotar não somente $J^1(P, Q)$, ou $\text{Hom}(TP, TQ)$, mas também \mathcal{F}/G .

Além disto, usaremos as seguintes submersões

$$\begin{aligned} \pi_M^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} &\longrightarrow M, \\ \pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}(P), \\ \pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}(Q). \end{aligned}$$

Sejam então:

- $\tilde{\theta}$ a forma canônica de $\mathcal{F}(P)$ a valores em \mathbb{R}^n ,
- $\tilde{\omega}$ a forma de conexão de $\mathcal{F}(P)$ a valores em $\mathfrak{so}(n_1, n_2)$,
- $\tilde{\Omega}$ a 2-forma de curvatura de $\tilde{\omega}$ a valores em $\mathfrak{so}(n_1, n_2)$.

Analogamente, sejam:

- $\tilde{\underline{\theta}}$ a forma canônica de $\mathcal{F}(Q)$ a valores em \mathbb{R}^s ,
- $\tilde{\omega}$ a forma de conexão de $\mathcal{F}(Q)$ a valores em $\mathfrak{o}(s_1, s_2)$,

- $\tilde{\Omega}$ a forma de curvatura de $\tilde{\omega}$ a valores em $\mathfrak{o}(s_1, s_2)$.

Realizando o pull-back destas formas por meio das submersões $\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}}$ e $\pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}}$, obtemos

$$\begin{aligned}\theta &= (\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\theta}, \\ \omega &= (\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\omega}, \\ \Omega &= (\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\Omega}, \\ \underline{\theta} &= (\pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\underline{\theta}}, \\ \underline{\omega} &= (\pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\underline{\omega}}, \\ \underline{\Omega} &= (\pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\underline{\Omega}}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.12, seguem as equações de estrutura

$$\begin{cases} d\tilde{\theta}^i = -\tilde{\omega}_j^i \wedge \tilde{\theta}^j, \\ d\tilde{\omega}_j^i = -\tilde{\omega}_k^i \wedge \tilde{\omega}_j^k + \tilde{\Omega}_j^i, \\ d\tilde{\underline{\theta}}^\alpha = -\tilde{\underline{\omega}}_\beta^\alpha \wedge \tilde{\underline{\theta}}^\beta, \\ d\tilde{\underline{\omega}}_\beta^\alpha = -\tilde{\underline{\omega}}_\gamma^\alpha \wedge \tilde{\underline{\omega}}_\beta^\gamma + \tilde{\underline{\Omega}}_\beta^\alpha, \end{cases}\tag{3.3}$$

com

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^i e_i, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_j^i E_i^j, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_j^i E_i^j, \quad \tilde{\underline{\theta}} = \tilde{\underline{\theta}}^\alpha e_\alpha, \quad \tilde{\underline{\omega}} = \tilde{\underline{\omega}}_\beta^\alpha E_\alpha^\beta, \quad \tilde{\underline{\Omega}} = \tilde{\underline{\Omega}}_\beta^\alpha E_\alpha^\beta,$$

onde $\{e_i\}$, $\{e_\alpha\}$, $\{E_i^j\}$ e $\{E_\alpha^\beta\}$ são as bases canônicas de \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^s , $\mathfrak{so}(n_1, n_2)$ e $\mathfrak{o}(s_1, s_2)$, respectivamente.

Logo, realizando o pull-back da primeira e segunda equações pela projeção $\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}}$ e da terceira e quarta pela projeção $\pi_{\mathcal{F}(Q)}^{\mathcal{F}}$, obtemos as equações de estrutura

$$\begin{cases} d\theta^i = -\omega_j^i \wedge \theta^j, \\ d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \\ d\underline{\theta}^\alpha = -\underline{\omega}_\beta^\alpha \wedge \underline{\theta}^\beta, \\ d\underline{\omega}_\beta^\alpha = -\underline{\omega}_\gamma^\alpha \wedge \underline{\omega}_\beta^\gamma + \underline{\Omega}_\beta^\alpha, \end{cases}\tag{3.4}$$

onde

$$\theta = \theta^i e_i, \quad \omega = \omega_j^i E_i^j, \quad \Omega = \Omega_j^i E_i^j, \quad \underline{\theta} = \underline{\theta}^\alpha e_\alpha, \quad \underline{\omega} = \underline{\omega}_\beta^\alpha E_\alpha^\beta, \quad \underline{\Omega} = \underline{\Omega}_\beta^\alpha E_\alpha^\beta.$$

Em \mathcal{F} podemos completar a um correferencial o sistema $\{\theta^i, \omega_j^i, \underline{\theta}^\alpha, \underline{\omega}_\beta^\alpha\}$, adicionando as formas dp_i^α , onde $\{p_i^\alpha\}$ são as coordenadas canônicas em $M_{s \times n}(\mathbb{R})$, ou melhor ainda, as formas

$$\pi_i^\alpha = dp_i^\alpha + \underline{\omega}_\beta^\alpha p_i^\beta - p_j^\alpha \omega_i^j,\tag{3.5}$$

que descrevem a derivada covariante de uma seção de $Hom(TP, TQ) \rightarrow P \times Q$.

Em particular, com o intuito de facilitar os cálculos, podemos expressar as formas (3.5) da seguinte maneira

$$\pi = dp + \underline{\omega}p - p\omega.$$

Deste modo, completaremos as equações de estrutura (3.4) para \mathcal{F} com

$$\begin{aligned} d\pi &= d\underline{\omega}p - \underline{\omega} \wedge dp - dp \wedge \omega - pd\omega \\ &= (-\underline{\omega} \wedge \underline{\omega} + \underline{\Omega})p - \underline{\omega} \wedge (\pi - \underline{\omega}p + p\omega) - (\pi - \underline{\omega}p + p\omega) \wedge \omega - p(-\omega \wedge \omega + \underline{\Omega}) \\ &= -\underline{\omega} \wedge \underline{\omega}p + \underline{\Omega}p - \underline{\omega} \wedge \pi + \underline{\omega} \wedge \underline{\omega}p - \underline{\omega} \wedge p\omega - \pi \wedge \omega + \underline{\omega}p \wedge \omega - p\omega \wedge \omega + p\omega \wedge \omega - p\underline{\Omega} \\ &= \underline{\Omega}p - p\underline{\Omega} - \underline{\omega} \wedge \pi - \pi \wedge \omega, \end{aligned}$$

i.e.,

$$d\pi_i^\alpha = \underline{\Omega}_\beta^\alpha p_i^\beta - p_j^\alpha \underline{\Omega}_i^j - \underline{\omega}_\beta^\alpha \wedge \pi_i^\beta - \pi_j^\alpha \wedge \omega_i^j. \quad (3.6)$$

Provamos portanto a seguinte proposição.

Proposição 3.1. A variedade \mathcal{F} definida em (3.1) admite o correferencial $\{\theta^i, \omega_j^i, \underline{\theta}^\alpha, \underline{\omega}_\beta^\alpha, \pi_i^\alpha\}$, em que $\theta^i, \omega_j^i, \underline{\theta}^\alpha, \underline{\omega}_\beta^\alpha$ são as formas (3.2), enquanto π_i^α são as formas (3.5), com equações de estrutura (3.4) e (3.6).

3.2 Pullback do sistema de multicontato para \mathcal{F}

A seguir, realizaremos o pullback do sistema de multicontato $I = \langle dy^\alpha - y_i^\alpha dx^i \rangle$ de M para \mathcal{F} .

Seja $\phi = (\pi_M^\mathcal{F})^*(\tilde{\phi})$. Em virtude da definição de $\tilde{\phi}$, para todo $X \in T_{(x,u,y,v,p)}\mathcal{F}$ obtemos que

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \tilde{\phi}((\pi_M^\mathcal{F})_*X) \\ &= (\pi_Q^M)_*(\pi_M^\mathcal{F})_*X - L((\pi_P^M)_*(\pi_M^\mathcal{F})_*X). \end{aligned}$$

Logo, uma vez que $\pi_Q^M \circ \pi_M^\mathcal{F} = \pi_Q^\mathcal{F}$, $\pi_P^M \circ \pi_M^\mathcal{F} = \pi_P^\mathcal{F}$ e $\pi_M^\mathcal{F}(x, u, y, v, p) = (x, y, vpu^{-1})$, segue-se que

$$\begin{aligned} \phi(X) &= (\pi_Q^\mathcal{F})_*X - vpu^{-1}((\pi_P^\mathcal{F})_*X) \\ &= v(v^{-1}(\pi_Q^\mathcal{F})_*X - pu^{-1}((\pi_P^\mathcal{F})_*X)). \end{aligned}$$

Então, identificando $T_y Q$ com \mathbb{R}^s através do isomorfismo v^{-1} , podemos considerar ϕ como uma forma a valores em \mathbb{R}^s

$$\phi(X) = v^{-1}(\pi_Q^\mathcal{F})_*X - pu^{-1}((\pi_P^\mathcal{F})_*X).$$

Assim, de (1.3), temos que

$$\phi(X) = \underline{\theta}(X) - p\theta(X),$$

i.e.,

$$\phi = \underline{\theta} - p\theta.$$

Portanto, o sistema de multicontato em \mathcal{F} é dado por

$$I = \langle \phi^\alpha = \underline{\theta}^\alpha - p_i^\alpha \theta^i \rangle. \quad (3.7)$$

Além disto, utilizando as equações (3.4), obtemos as equações de estrutura para I

$$\begin{aligned} d\phi &= d\underline{\theta} - dp \wedge \theta - pd\theta \\ &= -\underline{\omega} \wedge \underline{\theta} - (\pi - \underline{\omega}p + p\omega) \wedge \theta + p\omega \wedge \theta \\ &= -\pi \wedge \theta - \underline{\omega} \wedge \phi, \end{aligned}$$

i.e.,

$$d\phi^\alpha = -\pi_i^\alpha \wedge \theta^i - \underline{\omega}_\beta^\alpha \wedge \phi^\beta. \quad (3.8)$$

3.3 Pullback da Lagrangiana para \mathcal{F}

Nesta seção, realizando pullback, transformaremos a Lagrangiana energia $e(\varphi)\nu$, dada em (1), de P para M , e em seguida para \mathcal{F} .

Com este intuito, consideramos primeiro uma aplicação $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i^* \lambda = (\pi_U^{N_\varphi})^* e(\varphi)$$

onde $N_\varphi = \{(x, \varphi(x), \varphi_*) \mid \varphi : U \subset P \rightarrow Q\}$, $\pi_U^{N_\varphi} = \pi_P^M \circ i$ é a restrição de π_P^M à N_φ e $i : N_\varphi \rightarrow M$ a inclusão de N_φ em M . Sendo assim, a Lagrangiana energia em M será dada por

$$i^* \mathbf{L} = (\pi_U^{N_\varphi})^* (e(\varphi)\nu),$$

i.e., com o abuso de notação $(\pi_P^M)^* \nu = \nu$,

$$\mathbf{L} = \lambda \nu.$$

Finalmente, obteremos a Lagrangiana em \mathcal{F}

$$\tilde{\mathbf{L}} = (\pi_M^{\mathcal{F}})^* (\mathbf{L}).$$

Para definir λ , primeiro introduzimos uma 2-forma em M . Seja \hat{h} a 2-forma em M dada por

$$\hat{h}(X, Y) = h(L((\pi_P^M)_* X), L((\pi_P^M)_* Y)),$$

onde $X, Y \in T_{(x, y, L)} M$. Temos então que, para $X, Y \in T_{(x, \varphi(x), \varphi_*)} N_\varphi$

$$\begin{aligned} (i^* \hat{h})(X, Y) &= \hat{h}(i_* X, i_* Y) \\ &= h(L|_{(x, \varphi(x), \varphi_*)} ((\pi_P^M)_* i_* X), L|_{(x, \varphi(x), \varphi_*)} ((\pi_P^M)_* i_* Y)) \\ &= h(L|_{(x, \varphi(x), \varphi_*)} ((\pi_U^{N_\varphi})_* X), L|_{(x, \varphi(x), \varphi_*)} ((\pi_U^{N_\varphi})_* Y)) \\ &= h(\varphi_* (\pi_U^{N_\varphi})_* X, \varphi_* (\pi_U^{N_\varphi})_* Y) \\ &= \varphi^* h((\pi_U^{N_\varphi})_* X, (\pi_U^{N_\varphi})_* Y) \\ &= (\pi_U^{N_\varphi})^* \varphi^* h(X, Y), \end{aligned}$$

e assim

$$i^* \hat{h} = (\pi_U^{N_\varphi})^* \varphi^* h.$$

Note que, ao definir $\hat{g} = (\pi_P^M)^* g$ e $\lambda = \frac{1}{2} \text{tr}_{\hat{g}}(\hat{h})$ obtemos

$$\begin{aligned} i^* \lambda &= \frac{1}{2} \text{tr}_{(i^* \hat{g})}(i^* \hat{h}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}_{(i^* (\pi_P^M)^* \hat{g})}((\pi_U^{N_\varphi})^* \varphi^* h) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}_{((\pi_U^{N_\varphi})^* \hat{g})}((\pi_U^{N_\varphi})^* \varphi^* h) \\ &= (\pi_U^{N_\varphi})^* \left(\frac{1}{2} \text{tr}_g(\varphi^* h) \right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$i^* \lambda = (\pi_U^{N_f})^* (e(\varphi)).$$

Agora, realizaremos o pullback da Lagrangiana $\mathbf{L} = \lambda \nu$ para \mathcal{F} . Com este intuito, calcularemos $(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \lambda$ e $(\pi_M^{\mathcal{F}})^* (\pi_P^M)^* \nu = (\pi_P^{\mathcal{F}})^* \nu$. Primeiramente, note que

$$(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \lambda = \frac{1}{2} \text{tr}_{(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{g}}((\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{h}).$$

Para $X, Y \in T_{(x,u,y,v,p)} \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} (\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{h}(X, Y) &= \hat{h}((\pi_M^{\mathcal{F}})_* X, (\pi_M^{\mathcal{F}})_* Y) \\ &= h(L|_{\pi_M^{\mathcal{F}}(x,u,y,v,p)}((\pi_P^M)_* X), L|_{\pi_M^{\mathcal{F}}(x,u,y,v,p)}((\pi_P^M)_* Y)) \\ &= h(v p u^{-1}((\pi_P^M)_* X), v p u^{-1}((\pi_P^M)_* Y)). \end{aligned}$$

Em decorrência de $\theta = (\pi_{\mathcal{F}(P)}^{\mathcal{F}})^* \tilde{\theta}$ e $\tilde{\theta} = u^{-1} \circ (\pi_P^{\mathcal{F}(P)})_*$ conclui-se que $\theta = u^{-1} \circ (\pi_P^{\mathcal{F}})_*$. Deste fato e da linearidade das aplicações v e p , segue que

$$\begin{aligned} (\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{h}(X, Y) &= h(v p \theta(X), v p \theta(Y)) \\ &= h(v p(\theta^i(X) e_i), v p(\theta^j(Y) e_j)) \\ &= h(v p(e_i), v p(e_j)) \theta^i(X) \theta^j(Y) \\ &= h(v(p_i^\alpha e_\alpha), v(p_j^\beta e_\beta)) \theta^i(X) \theta^j(Y) \\ &= h(v(e_\alpha), v(e_\beta)) p_i^\alpha p_j^\beta \theta^i(X) \theta^j(Y) \\ &= \tilde{h}_{\alpha\beta} p_i^\alpha p_j^\beta \theta^i(X) \theta^j(Y), \end{aligned}$$

onde $(\tilde{h}_{\alpha\beta})$ é a matriz de h com respeito a base $\{v(e_\alpha)\}_{\alpha=1,\dots,s}$. Portanto, concluímos que

$$(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{h} = \tilde{h}_{\alpha\beta} p_i^\alpha p_j^\beta \theta^i \cdot \theta^j,$$

onde \cdot denota o produto simétrico entre formas diferenciais. Observa-se também que, da definição de θ e da linearidade da aplicação u

$$\begin{aligned}
(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{g}(X, Y) &= (\pi_M^{\mathcal{F}})^*(\pi_P^M)^* g(X, Y) \\
&= (\pi_P^{\mathcal{F}})^* g(X, Y) \\
&= g((\pi_P^{\mathcal{F}})_* X, (\pi_P^{\mathcal{F}})_* Y) \\
&= g(uu^{-1}(\pi_P^{\mathcal{F}})_* X, uu^{-1}(\pi_P^{\mathcal{F}})_* Y) \\
&= g(u(\theta(X)), u(\theta(Y))) \\
&= g(u(\theta^i(X)e_i), u(\theta^j(Y)e_j)) \\
&= g(u(e_i), u(e_j))\theta^i(X)\theta^j(Y) \\
&= \tilde{g}_{ij}\theta^i(X)\theta^j(Y),
\end{aligned}$$

onde (\tilde{g}_{ij}) é a matriz de g com respeito à base $\{u(e_i)\}_{i=1,\dots,n}$. Portanto,

$$(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{g} = \tilde{g}_{ij}\theta^i \cdot \theta^j.$$

Finalmente, em virtude da definição de tr ,

$$\begin{aligned}
(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \lambda &= \frac{1}{2}tr_{(\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{g}}((\pi_M^{\mathcal{F}})^* \hat{h}) \\
&= \frac{1}{2}tr_{(\tilde{g}_{ij}\theta^i \cdot \theta^j)}(\tilde{h}_{\alpha\beta}p_i^\alpha p_j^\beta \theta^i \cdot \theta^j) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

onde \tilde{g}^{ij} é a inversa de \tilde{g} .

Calcularemos agora o pullback da forma de volume ν para \mathcal{F} . Dados $X_1, \dots, X_n \in T_{(x,u,y,v,p)}\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
(\pi_P^{\mathcal{F}})^* \nu(X_1, \dots, X_n) &= \nu((\pi_P^{\mathcal{F}})_* X_1, \dots, (\pi_P^{\mathcal{F}})_* X_n) \\
&= \nu(u(\theta(X_1)), \dots, u(\theta(X_n))) \\
&= \nu(u(\theta^{i_1}(X_1)e_{i_1}), \dots, u(\theta^{i_n}(X_n)e_{i_n})) \\
&= \nu(u(e_{i_1}), \dots, u(e_{i_n}))\theta^{i_1}(X_1) \dots \theta^{i_n}(X_n).
\end{aligned}$$

Como $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ é base ortonormal orientada e ν é a forma de volume induzida por g , segue que $\nu(u(e_1), \dots, u(e_n)) = 1$. Assim, considerando que ν é uma forma alternada e usando a definição de produto exterior de formas diferenciais, temos que

$$(\pi_P^{\mathcal{F}})^* \nu = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n.$$

Finalmente, definindo $\Theta = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ e $\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}$, a Lagrangiana em \mathcal{F} é dada por

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\lambda}\Theta. \tag{3.9}$$

Provamos portanto a seguinte

Proposição 3.2. *O pullback da Lagrangiana energia $e(f)\nu$ de P para \mathcal{F} é dado por*

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\lambda}\Theta,$$

$$\text{com } \Theta = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \text{ e } \tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}.$$

3.4 SDE de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas

Procederemos de modo análogo ao realizado na Seção 2.5 para obter o SDE de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas. Conforme observado na Seção 2.4, a Lagrangiana

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} + \phi^\alpha \wedge \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial p_i^\alpha} \Theta_{(i)}$$

é um levantamento admissível para $[\tilde{\mathbf{L}}]$, onde $\Theta_{(i)} = Z_i \lrcorner \Theta = (-1)^{i-1}\theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \dots \wedge \theta^n$ e Z_i é o campo dual a θ^i com respeito as formas $\theta^1, \dots, \theta^n$. Então, localmente

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}\Theta + \phi^\alpha \wedge \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial p_i^\alpha} \Theta_{(i)} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}\Theta + \phi^\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} \left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \right) \Theta_{(i)} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}\Theta + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta}\phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Com o intuito de calcular $d\mathbf{L}$, calcularemos agora $d\Theta$ e $d\Theta_{(i)}$. De fato,

$$\begin{aligned} d\Theta &= d(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\theta^1 \wedge \dots \wedge d\theta^i \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}d\theta^i \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \hat{\theta}^i \wedge \dots \wedge \theta^n \\ &= d\theta^i \wedge \Theta_{(i)}. \end{aligned}$$

Utilizando as equações de estrutura (3.4), temos que

$$\begin{aligned} d\Theta &= -\omega_j^i \wedge \theta^j \wedge \Theta_{(i)} \\ &= -\omega_j^i \wedge (\delta_{ji}\Theta) \\ &= -\delta_{ji}\omega_j^i \wedge \Theta. \end{aligned}$$

Como $\omega = \omega_j^i E_i^j$ é uma forma a valores em $\mathfrak{so}(n_1, n_2)$, a matriz (ω_j^i) possui traço nulo, logo

$$d\Theta = 0. \tag{3.11}$$

Analogamente, definindo $\Theta_{(ij)} = (\Theta_{(i)})_{(j)}$, obtém-se

$$\begin{aligned} d\Theta_{(i)} &= d\theta^j \wedge (\Theta_{(i)})_{(j)} \\ &= d\theta^j \wedge \Theta_{(ij)}. \end{aligned}$$

Pelas equações de estrutura (3.4)

$$d\Theta_{(i)} = -\omega_k^j \wedge \theta^k \wedge \Theta_{(ij)}.$$

Observa-se agora que $\theta^k \wedge \Theta_{(ij)} = \delta_j^k \Theta_{(i)} - \delta_i^k \Theta_{(j)}$. Com efeito, da equação $\theta^j \wedge \Theta_{(i)} = \delta_{ji} \Theta$, tem-se que

$$\begin{aligned} \theta^k \wedge \Theta_{(ij)} &= \theta^k \wedge (Z_j \lrcorner \Theta_{(i)}) \\ &= (Z_j \lrcorner \theta^k) \wedge \Theta_{(i)} - Z_j \lrcorner (\theta^k \wedge \Theta_{(i)}) \\ &= \delta_j^k \Theta_{(i)} - Z_j \lrcorner \delta_i^k \Theta \\ &= \delta_j^k \Theta_{(i)} - \delta_i^k \Theta_{(j)}, \end{aligned}$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned} d\Theta_{(i)} &= -\omega_k^j \wedge (\delta_j^k \Theta_{(i)} - \delta_i^k \Theta_{(j)}) \\ &= -\delta_j^k \omega_k^j \wedge \Theta_{(i)} + \delta_i^k \omega_k^j \wedge \Theta_{(j)} \\ &= \omega_i^j \wedge \Theta_{(j)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Logo, utilizando as equações (3.11) e (3.12)

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= d\left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \Theta + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}dp_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta + \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha dp_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij}dp_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} d\phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \phi^\alpha \wedge d\Theta_{(i)} \\ &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}dp_i^\alpha p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta + \frac{1}{2}\tilde{g}^{ji}p_j^\beta dp_i^\alpha \tilde{h}_{\beta\alpha} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij}dp_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge d\phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \phi^\alpha \wedge \omega_i^j \wedge \Theta_{(j)}. \end{aligned}$$

Tendo em vista que \tilde{g}^{ij} e $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ são simétricos, temos que

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= \tilde{g}^{ij}p_i^\alpha dp_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij}dp_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge d\phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \phi^\alpha \wedge \omega_i^j \wedge \Theta_{(j)}. \end{aligned}$$

Das expressões (3.5) e das equações de estrutura (3.8), obtém-se

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= \tilde{g}^{ij}p_i^\alpha(\pi_j^\beta - \underline{\omega}_\gamma^\beta p_j^\gamma + p_k^\beta \omega_j^k) \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij}(\pi_j^\beta - \underline{\omega}_\gamma^\beta p_j^\gamma + p_k^\beta \omega_j^k) \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad + \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge (-\pi_i^\alpha \wedge \theta^i - \underline{\omega}_\beta^\alpha \wedge \phi^\beta) \wedge \Theta_{(i)} - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \phi^\alpha \wedge \omega_i^j \wedge \Theta_{(j)}. \end{aligned}$$

Usando que $\tilde{g}^{ij}\omega_j^k = \omega^{ik}$, $\tilde{h}_{\alpha\beta}\underline{\omega}_\gamma^\beta = \underline{\omega}_{\alpha\gamma}$, temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{L} &= \tilde{g}^{ij}p_i^\alpha \pi_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \wedge \Theta - \tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\gamma \underline{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \Theta + p_i^\alpha p_k^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \omega^{ik} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_j^\beta \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad - \tilde{g}^{ij}p_j^\gamma \underline{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} + p_k^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \omega^{ik} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_k^\alpha \wedge \theta^k \wedge \Theta_{(i)} - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \underline{\omega}_{\beta\gamma} \wedge \phi^\gamma \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \phi^\alpha \wedge \omega_i^k \wedge \Theta_{(k)} \\ &= -\tilde{g}^{ij}p_i^\alpha p_j^\gamma \underline{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \Theta + p_i^\alpha p_k^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \omega^{ik} \wedge \Theta + \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_j^\beta \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} - \tilde{g}^{ij}p_j^\gamma \underline{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} \\ &\quad + p_k^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \omega^{ik} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(i)} - \tilde{g}^{ij}p_j^\beta \underline{\omega}_{\beta\gamma} \wedge \phi^\gamma \wedge \Theta_{(i)} + p_j^\beta \tilde{h}_{\alpha\beta} \omega^{jk} \wedge \phi^\alpha \wedge \Theta_{(k)}. \end{aligned}$$

Finalmente, da antissimetria de $\tilde{g}^{ij}\omega_j^k = \omega^{ik}$ e $\tilde{h}_{\alpha\beta}\underline{\omega}_\gamma^\beta = \underline{\omega}_{\alpha\gamma}$ decorre

$$d\mathbf{L} = -\phi^\alpha \wedge (\tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_i^\beta \wedge \Theta_{(j)}). \tag{3.13}$$

Portanto, levando em consideração (3.8) e (3.13), deduzimos que o SDE no qual as variedades integrais são os pontos críticos do funcional $\int_P \mathbf{L}$ é dado por

$$\mathcal{E} = \langle \phi^\alpha, \pi_i^\alpha \wedge \theta^i, \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_i^\beta \wedge \Theta_{(j)} \rangle_{alg}. \quad (3.14)$$

Assim, provamos a seguinte

Proposição 3.3. *O SDE de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas é dado por*

$$\mathcal{E} = \langle \phi^\alpha, \pi_i^\alpha \wedge \theta^i, \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{\alpha\beta} \pi_i^\beta \wedge \Theta_{(j)} \rangle_{alg}. \quad (3.15)$$

Capítulo 4

Integrabilidade das aplicações harmônicas de tipo onda

Neste capítulo, restringiremos o nosso estudo às aplicações harmônicas $\varphi : P \rightarrow Q$, em que (P, g) é o espaço de Minkowski bidimensional e (Q, h) uma variedade Riemanniana bidimensional. Essas aplicações são conhecidas como aplicações harmônicas bidimensionais de tipo onda ("wave maps"), ou ainda σ -modelos.

Primeiramente, calcularemos o SDE de Euler-Lagrange \mathcal{E} que descreve aplicações de tipo onda. Logo após, considerando que \mathcal{E} é invariante sob a ação do grupo das transformações conformes que preservam a orientação do espaço de Minkowski, calcularemos a redução $\bar{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} por este grupo. Em seguida, encontraremos condições para a integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E} em termos de propriedades de $\bar{\mathcal{E}}$. Isso implicará em condições para a integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E} em termos da curvatura de Gauss k de Q .

Finalmente, estudaremos a integrabilidade segundo Darboux do SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$. De forma semelhante ao procedimento realizado com o SDE \mathcal{E} , calcularemos o sistema reduzido de $\mathcal{E}^{(1)}$ pelas transformações conformes que preservam a orientação. Em seguida, encontraremos condições para integrabilidade segundo Darboux de $\mathcal{E}^{(1)}$ em termos de propriedades de $\bar{\mathcal{E}}^{(1)}$.

4.1 SDE de Euler-Lagrange \mathcal{E}

Denotamos com (x^1, x^2) as coordenadas globais de tipo luz em $P = \mathbb{R}^{1,1}$, nas quais a métrica g se escreve na forma

$$g = dx^1 \cdot dx^2,$$

e com $\{y^1, y^2\}$ coordenadas locais isotérmicas em Q , nas quais a métrica h possui a expressão (conforme)

$$h = e^{2\rho(y^1, y^2)}((dy^1)^2 + (dy^2)^2),$$

com $\rho = \rho(y^1, y^2)$. Note que o uso de coordenadas isotérmicas (ou conformes) não é restritivo, pois localmente sempre existem tais coordenadas (veja [38, 39] e [14]).

O motivo pelo qual consideraremos coordenadas de tipo luz em P é que nestas coordenadas as isometrias lineares se tornam mais simples quando comparadas com aquelas da métrica em sua forma canônica. De fato, no caso em que $g = dx^1 \cdot dx^2$, o grupo das isometrias lineares que preservam a orientação é o seguinte subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Já no caso de coordenadas $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\}$ da forma canônica $\tilde{g} = (d\tilde{x}^1)^2 - (d\tilde{x}^2)^2$, o grupo das isometrias lineares que preservam a orientação é

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Além disto, com as escolhas feitas para as expressões coordenadas de g e h , as equações de Euler-Lagrange para uma aplicação $\varphi : P \rightarrow Q$ são, exatamente aquelas descritas no Exemplo 2.16

$$\begin{cases} y_{12}^1 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1}(y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2) - \frac{\partial \rho}{\partial y^2}(y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2), \\ y_{12}^2 = -\frac{\partial \rho}{\partial y^1}(y_1^1 y_2^2 + y_2^1 y_1^2) + \frac{\partial \rho}{\partial y^2}(y_1^1 y_2^1 - y_1^2 y_2^2), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $y_{ij}^k = \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x^i \partial x^j}$ e $y_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}$, $i, j, k = 1, 2$.

Note porém que $g = dx^1 \cdot dx^2$, logo o correferencial $\{dx^1, dx^2\}$ não é ortonormal, contrariamente ao que assumimos no Capítulo 3, onde determinamos em geral o SDE de Euler-Lagrange para aplicações harmônicas.

Portanto, ao trabalhar com um correferencial não ortonormal em P , será necessário realizar cálculos específicos para determinar a forma do SDE de Euler-Lagrange no caso atual.

Contudo, apesar de termos que fazer um cálculo "ad hoc" de \mathcal{E} , neste caso específico haverá importantes simplificações que vêm do fato de que $P = \mathbb{R}^{1,1}$ possui um referencial globalmente definido, e portanto, uma seção global $s : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^{1,1})$, por meio da qual podemos identificar $\mathbb{R}^{1,1}$ com $s(\mathbb{R}^{1,1})$. Isso nos permite restringir as formas definidas no Capítulo 3 em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{1,1})$ à $\mathbb{R}^{1,1}$, sem a necessidade de introduzir o fibrado $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{1,1})$ nos cálculos deste capítulo. Notemos também que, neste caso, em que $\dim Q = 2$, podemos parametrizar os referenciais ortonormais em um ponto de Q com apenas um parâmetro, um ângulo de rotação v .

A seguir, restringiremos portanto os cálculos realizados no Capítulo 3, com o intuito de obter o SDE de Euler-Lagrange para o caso particular em que estamos interessados.

Começamos observando que, com base nas considerações feitas acima, a variedade \mathcal{F} em (3.1) assume a seguinte forma

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathcal{F}(Q) \times M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

com coordenadas locais $\{x^1, x^2, y^1, y^2, v, p_1^1, p_1^2, p_2^1, p_2^2\}$. Além disto, as formas canônicas $\{\theta^i\}$, $\{\underline{\theta}^i\}$ e de conexão ω_2^1 , $\underline{\omega}_2^1$ são

$$\begin{aligned} \theta^1 &= dx^1, \\ \theta^2 &= dx^2, \\ \omega_2^1 &= 0, \\ \underline{\theta}^1 &= \cos(v)(e^{\rho(y^1, y^2)}dy^1) + \sin(v)(e^{\rho(y^1, y^2)}dy^2), \\ \underline{\theta}^2 &= -\sin(v)(e^{\rho(y^1, y^2)}dy^1) + \cos(v)(e^{\rho(y^1, y^2)}dy^2), \\ \underline{\omega}_2^1 &= \frac{\partial \rho}{\partial y^2}dy^1 - \frac{\partial \rho}{\partial y^1}dy^2 + dv, \end{aligned} \tag{4.2}$$

com equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= 0, \\ d\theta^2 &= 0, \\ d\omega_2^1 &= 0, \\ d\underline{\theta}^1 &= -\underline{\omega}_2^1 \wedge \underline{\theta}^2, \\ d\underline{\theta}^2 &= \underline{\omega}_2^1 \wedge \underline{\theta}^1, \\ d\underline{\omega}_2^1 &= k\underline{\theta}^1 \wedge \underline{\theta}^2, \end{aligned}$$

onde k é a curvatura de Gauss de Q .

Portanto, o sistema de multicontato (3.7)

$$I = \langle \phi^1, \phi^2 \rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \underline{\theta}^1 - p_1^1 \theta^1 - p_2^1 \theta^2, \\ \phi^2 &= \underline{\theta}^2 - p_1^2 \theta^1 - p_2^2 \theta^2, \end{aligned}$$

possui as seguintes equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\phi^1 &= -\underline{\omega}_2^1 \wedge \phi^2 - \pi_1^1 \wedge \theta^1 - \pi_2^1 \wedge \theta^2, \\ d\phi^2 &= \underline{\omega}_2^1 \wedge \phi^1 - \pi_1^2 \wedge \theta^1 - \pi_2^2 \wedge \theta^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde, por (3.5)

$$\begin{cases} \pi_1^1 = dp_1^1 + p_1^2 \underline{\omega}_2^1, \\ \pi_1^2 = dp_1^2 - p_1^1 \underline{\omega}_2^1, \\ \pi_2^1 = dp_2^1 + p_2^2 \underline{\omega}_2^1, \\ \pi_2^2 = dp_2^2 - p_2^1 \underline{\omega}_2^1. \end{cases}$$

Desta forma, fica determinado o correferencial

$$\{\theta^1, \theta^2, \underline{\theta}^1, \underline{\theta}^2, \underline{\omega}_2^1, \pi_1^1, \pi_1^2, \pi_2^1, \pi_2^2\}. \tag{4.4}$$

Por outro lado, a Lagrangiana (3.9) neste caso, se reduz à seguinte

$$\tilde{\mathbf{L}} = (p_1^1 p_2^1 + p_1^2 p_2^2) \theta^1 \wedge \theta^2, \quad (4.5)$$

logo, (3.10) fornece

$$\mathbf{L} = (p_1^1 p_2^1 + p_1^2 p_2^2) \theta^1 \wedge \theta^2 - p_1^1 \phi^1 \wedge \theta^1 + p_2^1 \phi^1 \wedge \theta^2 - p_1^2 \phi^2 \wedge \theta^1 + p_2^2 \phi^2 \wedge \theta^2.$$

Por conseguinte,

$$d\mathbf{L} = \phi^1 \wedge (\pi_1^1 \wedge \theta^1 - \pi_2^1 \wedge \theta^2) + \phi^2 \wedge (\pi_1^2 \wedge \theta^1 - \pi_2^2 \wedge \theta^2), \quad (4.6)$$

e levando em consideração (4.3) e (4.6) deduz-se que o SDE de Euler-Lagrange, neste caso, assume a forma seguinte

$$\mathcal{E} = \langle \phi^1, \phi^2, \pi_1^1 \wedge \theta^1, \pi_2^1 \wedge \theta^2, \pi_1^2 \wedge \theta^1, \pi_2^2 \wedge \theta^2 \rangle_{alg}, \quad (4.7)$$

com condição de independência $\theta^1 \wedge \theta^2 \neq 0$.

Em particular \mathcal{E} possui uma distribuição característica de Cauchy 1-dimensional gerada pelo campo vetorial $\partial_{\underline{\omega}_2^1}$ dual da 1-forma $\underline{\omega}_2^1$, em relação ao correferencial (4.4), i.e., $\partial_{\underline{\omega}_2^1}$ é o campo único e completamente determinado pelas condições

$$\partial_{\underline{\omega}_2^1} \lrcorner \underline{\omega}_2^1 = 1,$$

$$\partial_{\underline{\omega}_2^1} \lrcorner \theta^i = \partial_{\underline{\omega}_2^1} \lrcorner \underline{\theta}^i = \partial_{\underline{\omega}_2^1} \lrcorner \pi_j^i = 0.$$

Usando as representações coordenadas (4.2) é imediato verificar que $\partial_{\underline{\omega}_2^1} = \partial_v$. Com isto se segue também que, usando a Definição 1.36, \mathcal{E} é decomponível do tipo [3, 3] com sistemas singulares associados

$$\hat{V} = \langle \phi^1, \phi^2, \pi_2^1, \pi_2^2, \theta^2 \rangle, \quad \check{V} = \langle \phi^1, \phi^2, \pi_1^1, \pi_1^2, \theta^1 \rangle.$$

4.2 Quociente de \mathcal{E} por $\mathcal{G} = Conf^+(\mathbb{R}^{1,1})$

Inicialmente, notemos que a Lagrangiana em (4.5) é invariante com respeito ao grupo das transformações conformes do espaço de Minkowski

$$Conf(\mathbb{R}^{1,1}) = \{ \psi : \mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,1} \text{ difeomorfismo} \mid \psi^* g = e^{2\mu} g, \quad \mu \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,1}) \}.$$

De fato, se por efeito de uma transformação conforme $\psi^*(g) = e^{2\mu} g$, então

$$\psi^*(\theta^i) = e^\mu \theta^i,$$

portanto, analisando $\psi^*(\phi^i)$, se deduz facilmente que

$$\psi^*(\tilde{\mathbf{L}}) = \tilde{\mathbf{L}}.$$

Prolongaremos agora a ação de $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ a \mathcal{F} de tal forma que o prolongamento preserve o ideal de contato I . Assim, uma vez que a ação preserva I e a Lagrangiana, também preservará o SDE \mathcal{E} . Em seguida, consideraremos o grupo das transformações conformes que preservam a orientação e procederemos com o cálculo do SDE reduzido.

Proposição 4.1. *O grupo das transformações conformes $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ é o produto semi-direto entre \mathbb{Z}_2 e o grupo $\mathcal{G} := \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$ das transformações conformes que preservam a orientação, ou seja,*

$$\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1}).$$

Demonastração. Todo difeomorfismo $(x^1, x^2) \mapsto (\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, com $\bar{x}^i = F^i(x^1, x^2)$ é conforme se, e somente se,

$$d\bar{x}^1 \cdot d\bar{x}^2 = e^{2\mu} dx^1 \cdot dx^2,$$

i.e.,

$$F_{,x^1}^1 F_{,x^1}^2 = F_{,x^2}^1 F_{,x^2}^2 = 0, \quad F_{,x^1}^1 F_{,x^2}^2 + F_{,x^2}^1 F_{,x^1}^2 = e^{2\mu}.$$

Portanto, são possíveis somente os dois casos:

- (i) $F^1 = F^1(x^1)$, $F^2 = F^2(x^2)$;
- (ii) $F^1 = F^1(x^2)$, $F^2 = F^2(x^1)$.

Destes, o primeiro preserva a orientação, descrevendo assim o grupo $\text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$, enquanto o segundo inverte a orientação e resulta ser a composição de um elemento de $\text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$ com a permutação $h(x^1, x^2) = (x^2, x^1)$, que inverte a orientação.

Logo, todo elemento de $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ pode ser escrito de forma única como produto de um elemento do subgrupo normal $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, h\}$ com um elemento do subgrupo $\text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$. Assim, valem as condições

$$\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbb{Z}_2 \cdot \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1}), \quad \mathbb{Z}_2 \cap \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1}) = 1,$$

que caracterizam o produto semidireto

$$\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1}).$$

□

Por outro lado, a ação de \mathcal{G} em $\mathbb{R}^{1,1}$ se estende naturalmente à \mathcal{F} de tal maneira que I seja preservado:

$$(x^1, x^2, y, v, p_1^1, p_1^2, p_2^1, p_2^2) \mapsto \left(F(x^1), G(x^2), y, v, \frac{p_1^1}{F'(x^1)}, \frac{p_1^2}{F'(x^1)}, \frac{p_2^1}{G'(x^2)}, \frac{p_2^2}{G'(x^2)} \right).$$

Segue uma descrição infinitesimal desta ação:

Proposição 4.2. A álgebra dos geradores infinitesimais da ação de \mathcal{G} em \mathcal{F} admite a seguinte representação

$$\Gamma = \langle \partial_{x^1}, \partial_{x^2}, p_1^1 \partial_{p_1^1} + p_1^2 \partial_{p_1^2}, p_2^1 \partial_{p_2^1} + p_2^2 \partial_{p_2^2} \rangle. \quad (4.8)$$

Demonstração. Um campo $Z = f\partial_{x^1} + g\partial_{x^2}$ em P é um gerador infinitesimal de transformações conformes se, e somente se,

$$L_Z(dx^1 \cdot dx^2) = \lambda dx^1 \cdot dx^2,$$

para alguma função $\lambda > 0$. Logo, em virtude de

$$\begin{aligned} L_Z(dx^1 \cdot dx^2) &= L_Z dx^1 \cdot dx^2 + dx^1 \cdot L_Z dx^2 \\ &= df \cdot dx^2 + dx^1 \cdot dg, \end{aligned}$$

segue que $f = f(x^1)$ e $g = g(x^2)$, conforme esperado. Considerando então uma extensão de Z à \mathcal{F}

$$\tilde{Z} = Z + a_1 \partial_{p_1^1} + a_2 \partial_{p_1^2} + a_3 \partial_{p_2^1} + a_4 \partial_{p_2^2},$$

a condição de invariância $L_{\tilde{Z}}I \subset I$ do sistema de multicontato $I = \langle \phi^1, \phi^2 \rangle$, leva às seguintes condições

$$\begin{cases} L_{\tilde{Z}}\phi^1 = -(a_1 - p_1^1 \frac{\partial f}{\partial x^1})dx^1 - (a_3 - p_2^1 \frac{\partial g}{\partial x^2})dx^2 \in I, \\ L_{\tilde{Z}}\phi^2 = -(a_2 - p_1^2 \frac{\partial f}{\partial x^1})dx^1 - (a_4 - p_2^2 \frac{\partial g}{\partial x^2})dx^2 \in I, \end{cases}$$

pelas quais deduzimos que

$$\tilde{Z} = f\partial_{x^1} + g\partial_{x^2} - \frac{\partial f}{\partial x^1}p_1^1 \partial_{p_1^1} - \frac{\partial f}{\partial x^1}p_1^2 \partial_{p_1^2} - \frac{\partial g}{\partial x^2}p_2^1 \partial_{p_2^1} - \frac{\partial g}{\partial x^2}p_2^2 \partial_{p_2^2}. \quad (4.9)$$

Logo, a álgebra dos geradores infinitesimais da ação de \mathcal{G} em \mathcal{F} é dada por

$$\Gamma = \langle \partial_{x^1}, \partial_{x^2}, p_1^1 \partial_{p_1^1} + p_1^2 \partial_{p_1^2}, p_2^1 \partial_{p_2^1} + p_2^2 \partial_{p_2^2} \rangle. \quad (4.10)$$

□

Notemos que a órbita de um ponto $(x_0, y_0, v_0, \tilde{p}) \in \mathcal{F}$ é dada por

$$O_{(x_0, y_0, v_0, \tilde{p})} = \{(x, y_0, v_0, p) \mid x \in \mathbb{R}^{1,1}, p_1^1 = \lambda \tilde{p}_1^1, p_1^2 = \lambda \tilde{p}_1^2, p_2^1 = \mu \tilde{p}_2^1, p_2^2 = \mu \tilde{p}_2^2\},$$

onde $\lambda, \mu \neq 0$. A seguir, restringiremos a ação de \mathcal{G} a um subconjunto $U \subset \mathcal{F}$ com o intuito de preservar a dimensão das órbitas e tornar a ação regular, visto que ao considerarmos $p_1^1 = p_1^2 = 0$ ou $p_2^1 = p_2^2 = 0$ obtemos órbitas de dimensões diferentes.

Proposição 4.3. O grupo \mathcal{G} age regularmente em

$$U = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathcal{F}(Q) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}),$$

e o quociente de U por \mathcal{G} é dado por

$$\bar{U} = \mathcal{F}(Q) \times \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1.$$

Demonastração. Primeiramente, note que \mathbb{RP}^1 pode ser identificado com $]-\pi, \pi]$. Seja $q : U \rightarrow \mathcal{F}(Q) \times \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ a aplicação dada por

$$q(x, y, v, p) = \begin{cases} \left(y, v, s_0 = \arctg\left(\frac{p_1^2}{p_1^1}\right), t_0 = \arctg\left(\frac{p_2^2}{p_2^1}\right) \right), & \text{se } p_1^1, p_2^1 \neq 0, \\ \left(y, v, s_0 = \pi/2, t_0 = \arctg\left(\frac{p_2^2}{p_2^1}\right) \right), & \text{se } p_1^1 = 0, p_2^1 \neq 0, \\ \left(y, v, s_0 = \arctg\left(\frac{p_1^2}{p_1^1}\right), t_0 = \pi/2 \right), & \text{se } p_1^1 \neq 0, p_2^1 = 0, \\ \left(y, v, s_0 = \pi/2, t_0 = \pi/2 \right), & \text{se } p_1^1 = 0, p_2^1 = 0. \end{cases}$$

Observa-se que a pré-imagem de um ponto $\left(y, v, s_0 = \arctg\left(\frac{p_1^2}{p_1^1}\right), t_0 = \arctg\left(\frac{p_2^2}{p_2^1}\right) \right) \in \mathcal{F}(Q) \times \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ coincide com a órbita $O_{(x,y,v,p)}$. Portanto,

$$\bar{U} = \mathcal{F}(Q) \times \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1.$$

Em virtude de q ser uma submersão, concluímos que \mathcal{G} age regularmente em U . \square

Para calcular o SDE reduzido, encontraremos um correferencial que satisfaça a Proposição 1.35. Primeiramente, notemos que o módulo das 1-formas diferenciais semibásicas é dado por

$$\Gamma^\perp = \langle \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, \underline{\omega}_2^1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1 \rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{p_2^1}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^2 - \frac{p_2^2}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^1, \\ \tilde{\tau} &= \frac{p_1^2}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^1 - \frac{p_1^1}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^2, \\ \tilde{\xi}_1 &= p_1^1 dp_1^2 - p_1^2 dp_1^1 - ((p_1^1)^2 + (p_1^2)^2) \underline{\omega}_2^1, \\ \tilde{\eta}_1 &= p_2^1 dp_2^2 - p_2^2 dp_2^1 - ((p_2^1)^2 + (p_2^2)^2) \underline{\omega}_2^1. \end{aligned}$$

Completaremos estas formas diferenciais a um correferencial adaptado a Γ^\perp , dual aos campos vetoriais em Γ , como segue

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{p_2^1}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^2 - \frac{p_2^2}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^1 + \theta^1, \\ \beta_2 &= \frac{p_1^2}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^1 - \frac{p_1^1}{p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2} \theta^2 + \theta^2, \\ \tilde{\zeta}_1 &= \frac{1}{(p_1^1)^2 + (p_1^2)^2} (p_1^1 dp_1^1 + p_1^2 dp_1^2), \\ \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{(p_2^1)^2 + (p_2^2)^2} (p_2^1 dp_2^1 + p_2^2 dp_2^2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ao considerarmos este novo referencial, devemos realizar a restrição de U a um subconjunto aberto, de modo que $p_1^1 p_2^2 - p_2^1 p_1^2 \neq 0$, i.e., $\det(p) \neq 0$. Com um abuso de notação, chamaremos este conjunto ainda de U . Em \bar{U} , isso é o mesmo que $s_0 \neq t_0$. Neste correferencial, o SDE (4.7) é dado por

$$\mathcal{E} = \langle \beta_1, \beta_2, \tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\tau}, \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\tau}, \tilde{\zeta}_1 \wedge \tilde{\sigma}, \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\sigma} \rangle_{alg}, \tag{4.12}$$

com condição de independência $\tilde{\sigma} \wedge \tilde{\tau} \neq 0$.

Proposição 4.4. Seja \mathcal{E} o SDE dado acima e $q : U \longrightarrow \bar{U}$ a aplicação quociente. Então $\bar{\mathcal{E}}$ é um sistema hiperbólico de classe $s = 0$.

Demonstração. As formas semibásicas sobre \mathcal{E} são

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{sb}^1 &= \mathcal{E} \cap \Lambda^1(\Gamma^\perp) = \{0\}, \\ \mathcal{A}_{sb}^2 &= \mathcal{E} \cap \Lambda^2(\Gamma^\perp) = \langle \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\tau}, \tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\sigma} \rangle.\end{aligned}$$

Note que \mathcal{E} satisfaz as hipóteses da Proposição 1.35, logo $\bar{\mathcal{E}}$ é gerado algebraicamente por 1 e 2-formas. Para uma seção genérica $\mathfrak{s} : \bar{U} \longrightarrow U$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}} &= \langle \mathfrak{s}^*(\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\tau}), \mathfrak{s}^*(\tilde{\xi}_1 \wedge \tilde{\sigma}) \rangle_{alg} \\ &= \langle \mathfrak{s}^*(\tilde{\eta}_1) \wedge \mathfrak{s}^*(\tilde{\tau}), \mathfrak{s}^*(\tilde{\xi}_1) \wedge \mathfrak{s}^*(\tilde{\sigma}) \rangle_{alg}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Este sistema é hiperbólico, conforme a Definição 1.36. \square

4.2.1 SDE reduzido $\bar{\mathcal{E}}$ em coordenadas

Nesta seção, introduziremos um correferencial que será utilizado de agora em diante, calcularemos suas equações de estrutura e expressaremos o SDE reduzido $\bar{\mathcal{E}}$ em coordenadas. Seja $\mathfrak{s} : \bar{U} \longrightarrow U$ uma seção dada por

$$\mathfrak{s}(y, v, s_0, t_0) = (0, 0, y, v, \cos(s_0), \sin(s_0), \cos(t_0), \sin(t_0)).\tag{4.14}$$

Esta seção induz coordenadas G -adaptadas $\gamma : \mathbb{R}^{1,1} \times \mathcal{F}(Q) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \longrightarrow U$ em U dadas por

$$\gamma(x, y, v, q_0, r_0, s_0, t_0) = (x, y, v, p_1^1 = e^{q_0} \cos(s_0), p_1^2 = e^{q_0} \sin(s_0), p_2^1 = e^{r_0} \cos(t_0), p_2^2 = e^{r_0} \sin(t_0)),$$

ou seja, coordenadas para as quais a aplicação quociente é expressa por

$$q(x, y, v, q_0, r_0, s_0, t_0) = (y, v, s_0, t_0).$$

Nessas coordenadas, o campo \tilde{Z} em (4.9) é dado por

$$\tilde{Z} = f\partial_{x^1} + g\partial_{x^2} - \frac{\partial f}{\partial x^1}\partial_{q_0} - \frac{\partial g}{\partial x^2}\partial_{r_0},\tag{4.15}$$

e a álgebra dos geradores infinitesimais (4.10) corresponde a

$$\Gamma = \langle \partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{q_0}, \partial_{r_0} \rangle.$$

Realizando o pullback de Γ^\perp pela seção \mathfrak{s} na equação (4.14), obtemos que

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathfrak{s}^*\tilde{\sigma} = -\frac{\sin(t_0)}{\sin(\delta)}\theta^1 + \frac{\cos(t_0)}{\sin(\delta)}\theta^2, \\ \tau &= \mathfrak{s}^*\tilde{\tau} = \frac{\sin(s_0)}{\sin(\delta)}\theta^1 - \frac{\cos(s_0)}{\sin(\delta)}\theta^2, \\ \tilde{\xi}_1 &= \mathfrak{s}^*\tilde{\xi}_1 = ds_0 - \underline{\omega}_2^1, \\ \tilde{\eta}_1 &= \mathfrak{s}^*\tilde{\eta}_1 = dt_0 - \underline{\omega}_2^1,\end{aligned}\tag{4.16}$$

onde $\delta = t_0 - s_0$. Logo, da equação (4.13), obtemos o SDE reduzido

$$\bar{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma \rangle_{\text{alg}},$$

com condição de independência $\sigma \wedge \tau \neq 0$.

Realizando o pullback das formas em (4.16) pela aplicação quociente $q : U \rightarrow \bar{U}$, obtemos as formas \mathcal{G} -básicas em U (vide [3]), que, por abuso de notação, escrevemos

$$\begin{aligned} \sigma &= q^* \sigma = -\frac{\sin(t_0)}{\sin(\delta)} \underline{\theta}^1 + \frac{\cos(t_0)}{\sin(\delta)} \underline{\theta}^2, \\ \tau &= q^* \tau = \frac{\sin(s_0)}{\sin(\delta)} \underline{\theta}^1 - \frac{\cos(s_0)}{\sin(\delta)} \underline{\theta}^2, \\ \tilde{\xi}_1 &= q^* \tilde{\xi}_1 = ds_0 - \underline{\omega}_2^1, \\ \tilde{\eta}_1 &= q^* \tilde{\eta}_1 = dt_0 - \underline{\omega}_2^1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Logo, as formas para completar o correferencial dual a Γ em (4.11) são dadas por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\sin(t_0)}{e^{q_0} \sin(\delta)} \underline{\theta}^1 + \frac{\cos(t_0)}{e^{q_0} \sin(\delta)} \underline{\theta}^2 + \theta^1, \\ \beta_2 &= \frac{\sin(s_0)}{e^{r_0} \sin(\delta)} \underline{\theta}^1 - \frac{\cos(s_0)}{e^{r_0} \sin(\delta)} \underline{\theta}^2 + \theta^2, \\ \tilde{\zeta}_1 &= dq_0, \\ \tilde{\alpha}_1 &= dr_0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sendo assim, no seguinte correferencial em U

$$\{\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \underline{\omega}_2^1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1\}, \quad (4.19)$$

o sistema de multicontato é dado por $I = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ e o SDE de Euler-Lagrange é expresso por

$$\mathcal{E} = \langle \beta_1, \beta_2, \tilde{\alpha}_1 \wedge \tau, \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \tilde{\zeta}_1 \wedge \sigma, \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma \rangle_{\text{alg}}, \quad (4.20)$$

com condição de independência $\sigma \wedge \tau \neq 0$.

Derivando as equações (4.17) e (4.18), obtemos as equações de estrutura para o correferencial (4.19)

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \frac{1}{e^{q_0} \sin(\delta)} \tilde{\eta}_1 \wedge \tau - \frac{1}{e^{q_0}} \tilde{\zeta}_1 \wedge \sigma + \frac{\cos(\delta)}{e^{q_0} \sin(\delta)} \tilde{\xi}_1 \wedge \tau, \\ d\beta_2 &= -\frac{1}{e^{r_0} \sin(\delta)} \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma - \frac{1}{e^{r_0}} \tilde{\alpha}_1 \wedge \tau - \frac{\cos(\delta)}{e^{r_0} \sin(\delta)} \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \\ d\sigma &= \frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma + \frac{1}{\sin(\delta)} \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \\ d\tau &= -\frac{1}{\sin(\delta)} \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma - \frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)} \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \\ d\underline{\omega}_2^1 &= k(\sin(\delta)) \sigma \wedge \tau, \\ d\tilde{\zeta}_1 &= 0, \\ d\tilde{\alpha}_1 &= 0, \\ d\tilde{\xi}_1 &= -k \sin(\delta) \sigma \wedge \tau, \\ d\tilde{\eta}_1 &= -k \sin(\delta) \sigma \wedge \tau. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, utilizando as equações (4.2) e (4.16), obtemos o SDE reduzido em coordenadas locais

$$\bar{\mathcal{E}} = \left\langle \left(dt_0 - \frac{\partial \rho}{\partial y^2} dy^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y^1} dy^2 \right) \wedge (\sin(s_0) dy^1 - \cos(s_0) dy^2), \right. \\ \left. \left(ds_0 - \frac{\partial \rho}{\partial y^2} dy^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y^1} dy^2 \right) \wedge (-\sin(t_0) dy^1 + \cos(t_0) dy^2) \right\rangle_{alg}$$

com condição de independência $dy^1 \wedge dy^2$.

Este SDE descreve o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \cos(s_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^2} - \frac{\partial t_0}{\partial y^1} \right) - \sin(s_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^1} + \frac{\partial t_0}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \cos(t_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^2} - \frac{\partial s_0}{\partial y^1} \right) - \sin(t_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^1} + \frac{\partial s_0}{\partial y^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Proposição 4.5. *O SDE reduzido $\bar{\mathcal{E}}$ em coordenadas locais é dado por*

$$\bar{\mathcal{E}} = \left\langle \left(dt_0 - \frac{\partial \rho}{\partial y^2} dy^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y^1} dy^2 \right) \wedge (\sin(s_0) dy^1 - \cos(s_0) dy^2), \right. \\ \left. \left(ds_0 - \frac{\partial \rho}{\partial y^2} dy^1 + \frac{\partial \rho}{\partial y^1} dy^2 \right) \wedge (-\sin(t_0) dy^1 + \cos(t_0) dy^2) \right\rangle_{alg}$$

com condição de independência $dy^1 \wedge dy^2$.

4.3 Integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E}

Nesta seção, caracterizaremos a integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E} em termos de propriedades de $\bar{\mathcal{E}}$. Isso implicará em condições para a integrabilidade segundo Darboux de \mathcal{E} em termos da curvatura de Gauss k de Q .

Notemos inicialmente que no correferencial (4.19) o SDE

$$\mathcal{E} = \langle \beta_1, \beta_2, \tilde{\alpha}_1 \wedge \tau, \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \tilde{\zeta}_1 \wedge \sigma, \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma \rangle_{alg}$$

possui sistemas singulares

$$\hat{V} = \langle \beta_1, \beta_2, \tau, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\eta}_1 \rangle, \quad \check{V} = \langle \beta_1, \beta_2, \sigma, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\xi}_1 \rangle.$$

Por sua vez, o sistema reduzido

$$\bar{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma \rangle_{alg},$$

é decomponível do tipo $[2, 2]$ com sistemas singulares

$$\hat{W} = \langle \tau, \tilde{\eta}_1 \rangle, \quad \check{W} = \langle \sigma, \tilde{\xi}_1 \rangle.$$

Teorema 4.6. \mathcal{E} é integrável segundo Darboux se, e somente se, $\hat{W}^{(\infty)} \neq \{0\}$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{E} é integrável segundo Darboux. Pela Definição 1.39 e em virtude de $Char(\mathcal{E}) = \langle \partial_{\omega_2^1} \rangle$

$$\begin{aligned}\hat{V}^{(\infty)} + \check{V} &= C(\mathcal{E}) \\ &= \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Por outro lado, das equações de estrutura (4.21), o primeiro sistema derivado de \hat{V} é dado por

$$\hat{V}^{(1)} = \langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\eta}_1, \beta_2 - e^{-r_0} \tau \rangle.$$

Decorre então que

$$\hat{V}^{(1)} \oplus \check{V} = \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1).$$

Portanto, em razão de $\hat{V}^{(\infty)} \subset \hat{V}^{(1)}$ e da equação (4.22), segue que

$$\hat{V}^{(\infty)} = \hat{V}^{(1)}.\tag{4.23}$$

Observa-se também que o sistema \hat{V} satisfaz a hipótese da Proposição 1.34, logo, o sistema reduzido \hat{V}/\mathcal{G} é Pfaffiano. Como as 1-formas semi-básicas em \hat{V} são dadas por

$$\hat{V} \cap \mathbf{\Gamma}^\perp = \langle \tau, \tilde{\eta}_1 \rangle,$$

conclui-se que $\hat{W} = \hat{V}/\mathcal{G}$, o que por sua vez, implica que $\hat{W}^{(\infty)} = \hat{V}^{(\infty)}/\mathcal{G}$. Por meio da equação (4.23), temos

$$\begin{aligned}\hat{W}^{(1)} &= V^{(1)}/\mathcal{G} \\ &= V^{(\infty)}/\mathcal{G} \\ &= \hat{W}^{(\infty)}.\end{aligned}$$

Por outro lado, a partir das equações de estrutura (4.21), conclui-se que $\hat{W}^{(1)} = \langle \tilde{\eta}_1 \rangle$. Portanto $\hat{W}^{(\infty)}$ é não trivial.

Suponha agora que $\hat{W}^{(\infty)}$ é não trivial. Pelas equações de estrutura (4.21)

$$d\tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_1 = k \sin(\delta) \tilde{\eta}_1 \wedge \tau \wedge \sigma,$$

o que implica $k = 0$. Portanto, $\tilde{\eta}_1$ é uma forma fechada. Notemos também que o pullback $q^*(\tilde{\eta}_1) \in \hat{V}$ é uma forma fechada e, portanto, pertence a $\hat{V}^{(\infty)}$. Sendo assim,

$$\hat{V}^{(\infty)} + \check{V} = \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1).$$

Realizando o pullback desta equação pela aplicação

$$\psi(x^1, x^2, y, v, q_0, r_0, s_0, t_0) = (x^2, x^1, y, v, r_0, q_0, t_0, s_0),$$

obtemos

$$\hat{V} + \check{V}^{(\infty)} = \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1).$$

Portanto \mathcal{E} satisfaz o item 1 de 1.39. Para provar o item 2 desta definição, note que

$$\check{V}^{(1)} = \langle \beta_1 - e^{-q_0} \sigma, dr_0, \tilde{\xi}_1 \rangle.$$

Assim, como $\hat{V}^{(\infty)} \subset \hat{V}^{(1)}$ e $\check{V}^{(\infty)} \subset \check{V}^{(1)}$, segue que

$$\hat{V}^{(\infty)} \cap \check{V}^{(\infty)} = 0.$$

Concluindo assim que \mathcal{E} é integrável segundo Darboux. \square

Como corolário imediato deste teorema segue o principal resultado deste capítulo, o qual afirma que o SDE \mathcal{E} que descreve wave-maps $\varphi : P \rightarrow Q$, é integrável segundo Darboux se, e somente se, a variedade Q possui curvatura nula.

Teorema 4.7. *O SDE \mathcal{E} é integrável segundo Darboux se, e somente se, $k = 0$.*

4.4 SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$

A partir desta seção começaremos a investigar a integrabilidade segundo Darboux do SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$. Calcularemos portanto agora o SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$.

A fim de calcular o sistema prolongado de

$$\mathcal{E} = \langle \beta_1, \beta_2, \tilde{\alpha}_1 \wedge \tau, \tilde{\eta}_1 \wedge \tau, \tilde{\zeta}_1 \wedge \sigma, \tilde{\xi}_1 \wedge \sigma \rangle_{alg},$$

utilizaremos o correferencial da equação (4.19)

$$\{\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \underline{\omega}_2^1, \tilde{\zeta}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1\},$$

e seu referencial dual

$$\{\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, X, Y, \partial_{\underline{\omega}_2^1}, \partial_{q_0}, \partial_{r_0}, \partial_{s_0}, \partial_{t_0}\}.$$

Teorema 4.8. *A variedade prolongada e o SDE prolongado são dados por*

$$U^{(1)} = U \times \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{E}^{(1)} = \langle \beta_1, \beta_2, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1 \rangle_{dif},$$

respectivamente, onde

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= dq_0 - q_1 \sigma, \\ \alpha_1 &= dr_0 - r_1 \tau, \\ \xi_1 &= ds_0 - \underline{\omega}_2^1 - s_1 \sigma, \\ \eta_1 &= dt_0 - \underline{\omega}_2^1 - t_1 \tau. \end{aligned}$$

Além disso, $\mathcal{E}^{(1)}$ é decomponível do tipo [3, 3].

Demonstração. Os 2-planos integrais de \mathcal{E} , com condição de independência $\sigma \wedge \tau \neq 0$, e sem campos característicos de Cauchy, são dados por

$$V_{(q_1, r_1, s_1, t_1)} = \langle X + q_1 \partial_{q_0} + s_1 \partial_{s_0}, Y + r_1 \partial_{r_0} + t_1 \partial_{t_0} \rangle \quad (4.24)$$

onde $q_1, r_1, s_1, t_1 \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$U^{(1)} = U \times \mathbb{R}^4.$$

Com o intuito de calcular o SDE prolongado $\mathcal{E}^{(1)}$, calcularemos as 1-formas que anulam os planos integrais dados por (4.24), e realizaremos o pullback destas formas pela aplicação $\pi : U^{(1)} \rightarrow U$. Sendo assim,

$$\mathcal{E}^{(1)} = \langle \pi^* V^\perp \rangle_{\text{dif}} = \langle \beta_1, \beta_2, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1 \rangle_{\text{dif}}.$$

Logo, as equações de estrutura para $\mathcal{E}^{(1)}$ são dadas por

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \sigma \wedge \left(\frac{1}{e^{q_0}} \zeta_1 - \frac{\cos(\delta)}{e^{q_0} \sin(\delta)} \xi_1 \right) - \tau \wedge \frac{1}{e^{q_0} \sin(\delta)} \eta_1, \\ d\beta_2 &= \sigma \wedge \frac{1}{e^{r_0} \sin(\delta)} \xi_1 + \tau \wedge \left(\frac{1}{e^{r_0}} \alpha_1 + \frac{\cos(\delta)}{e^{r_0} \sin(\delta)} \eta_1 \right), \\ d\zeta_1 &= \sigma \wedge \left(\zeta_2 + \frac{q_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \xi_1 \right) + \tau \wedge \frac{q_1}{\sin(\delta)} \eta_1, \\ d\alpha_1 &= \sigma \wedge \frac{-r_1}{\sin(\delta)} \xi_1 + \tau \wedge \left(\alpha_2 - \frac{r_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \eta_1 \right), \\ d\xi_1 &= \sigma \wedge \xi_2 + \tau \wedge \frac{s_1}{\sin(\delta)} \eta_1, \\ d\eta_1 &= \sigma \wedge \frac{-t_1}{\sin(\delta)} \xi_1 + \tau \wedge \eta_2, \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= dq_1, \\ \alpha_2 &= dr_1, \\ \xi_2 &= ds_1 - k \sin(\delta) \tau + \frac{s_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \xi_1, \\ \eta_2 &= dt_1 + k \sin(\delta) \sigma - \frac{t_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \eta_1. \end{aligned}$$

Sendo assim, $\mathcal{E}^{(1)}$ é decomponível do tipo $[3, 3]$ com sistemas singulares associados

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \langle \beta_1, \beta_2, \tau, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1, \alpha_2, \eta_2 \rangle, \\ \check{V}_1 &= \langle \beta_1, \beta_2, \sigma, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_2, \xi_2 \rangle. \end{aligned} \tag{4.26}$$

□

É importante observar que $\mathcal{E}^{(1)}$, apesar de estar escrito numa forma diferente, é equivalente ao SDE de Cartan na subvariedade definida pelo sistema (2.12) $\mathcal{Y} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

4.5 Quociente de $\mathcal{E}^{(1)}$ por $\mathcal{G} = \text{Conf}^+(\mathbb{R}^{1,1})$

Com o intuito de calcular o SDE reduzido $\overline{\mathcal{E}^{(1)}}$, realizaremos o prolongamento da ação de \mathcal{G} para $U^{(1)}$. Para tal, consideremos o seguinte prolongamento do gerador infinitesimal dado em (4.15)

$$\tilde{Z}^{(1)} = f \partial_{x^1} + g \partial_{x^2} - f' \partial_{q_0} - g' \partial_{r_0} + a_1 \partial_{q_1} + a_2 \partial_{r_1} + a_3 \partial_{s_1} + a_4 \partial_{t_1}. \tag{4.27}$$

É fácil ver que este campo é uma simetria infinitesimal de $\mathcal{E}^{(1)}$ se for da forma

$$\tilde{Z}^{(1)} = f\partial_{x^1} + g\partial_{x^2} - f'\partial_{q_0} - g'\partial_{r_0} + f''e^{-q_0}\partial_{q_1} + g''e^{-r_0}\partial_{r_1}.$$

Logo, a álgebra dos geradores infinitesimais da ação prolongada resulta ser

$$\mathbf{\Gamma}^{(1)} = \langle \partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{q_0}, \partial_{r_0}, \partial_{q_1}, \partial_{r_1} \rangle.$$

Teorema 4.9. *O quociente de $U^{(1)}$ pela ação prolongada e o SDE reduzido são dados por*

$$\overline{U^{(1)}} = \bar{U} \times \mathbb{R}^2, \quad \overline{\mathcal{E}^{(1)}} = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_{dif},$$

respectivamente. Além disso,

$$\overline{\mathcal{E}^{(1)}} = \langle \xi_1, \eta_1, \sigma \wedge \xi_2, \tau \wedge \eta_2 \rangle_{alg}$$

é um sistema hiperbólico de classe $s = 2$, com sistemas singulares

$$\hat{W}_1 = \langle \tau, \xi_1, \eta_1, \eta_2 \rangle, \quad \check{W}_1 = \langle \sigma, \xi_1, \eta_1, \xi_2 \rangle.$$

Demonastração. Primeiramente note que $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ pode ser pensada como a distribuição vertical da aplicação quociente $q : U \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \bar{U} \times \mathbb{R}^2$. Sendo assim, é fácil ver que

$$q(x, y, v, q_0, r_0, s_0, t_0, q_1, r_1, s_1, t_1) = (y, v, s_0, t_0, s_1, t_1),$$

o que demonstra

$$\overline{U^{(1)}} = \bar{U} \times \mathbb{R}^2.$$

Observe agora que o seguinte correferencial para $U^{(1)}$

$$\{\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \underline{\omega}_2^1, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_2, \alpha_2, \xi_2, \eta_2\},$$

satisfaz as hipóteses da Proposição 1.34, o que implica que o SDE reduzido $\overline{\mathcal{E}^{(1)}}$ é Pfaffiano. Logo, realizando o pullback das 1-formas semibásicas em $\mathcal{E}^{(1)}$

$$\mathcal{E}^{(1)} \cap (\mathbf{\Gamma}^{(1)})^\perp = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle,$$

por meio da seção

$$\mathfrak{s}(y, v, s_0, t_0, s_1, t_1) = (0, 0, y, v, 0, 0, s_0, t_0, 0, 0, s_1, t_1),$$

obtemos o sistema reduzido

$$\overline{\mathcal{E}^{(1)}} = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_{dif}.$$

Este sistema é hiperbólico de classe $s = 2$, conforme a Definição 1.36. Com efeito, das equações de estrutura (4.25), observamos que

$$\overline{\mathcal{E}^{(1)}} = \langle \xi_1, \eta_1, \sigma \wedge \xi_2, \tau \wedge \eta_2 \rangle_{alg}$$

com sistemas singulares

$$\hat{W}_1 = \langle \tau, \xi_1, \eta_1, \eta_2 \rangle, \quad \check{W}_1 = \langle \sigma, \xi_1, \eta_1, \xi_2 \rangle.$$

□

4.6 Integrabilidade segundo Darboux de $\mathcal{E}^{(1)}$

A seguir enunciaremos o teorema que relaciona a integrabilidade segundo Darboux do sistema prolongado com uma condição a respeito do sistema reduzido.

Teorema 4.10. *O SDE $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux se, e somente se, $\hat{W}_1^{(\infty)} \neq \{0\}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux. Pela Definição 1.39, temos que

$$\hat{V}_1^{(\infty)} + \check{V}_1 = \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_2, \alpha_2, \xi_2, \eta_2), \quad (4.28)$$

logo, tendo em vista que

$$dk = k_1 \underline{\theta}^1 + k_2 \underline{\theta}^2 = k_\sigma \sigma + k_\tau \tau,$$

onde

$$\begin{aligned} k_\sigma &= -(k_1 \cos(s_0) + k_2 \sin(s_0)), \\ k_\tau &= -(k_1 \cos(t_0) + k_2 \sin(t_0)), \end{aligned}$$

obtemos as seguintes equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\zeta_2 &= 0, \\ d\alpha_2 &= 0, \\ d\xi_2 &= \sigma \wedge (-k\xi_1) + \tau \wedge (-k \cos(\delta)\xi_1) - (\sin(\delta)k_\sigma - ks_1 \cos(\delta))\sigma \wedge \tau, \\ d\eta_2 &= \sigma \wedge (-k \cos(\delta)\eta_1) + \tau \wedge (-k\eta_1) - (\sin(\delta)k_\tau + kt_1 \cos(\delta))\sigma \wedge \tau. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sendo assim, é fácil ver que o sistema singular dado em (4.26), possui sistemas derivados

$$\begin{aligned} \hat{V}_1^{(1)} &= \langle \beta_1, \beta_2, \tau, \alpha_1, \eta_1, \alpha_2, \eta_2 \rangle, \\ \hat{V}_1^{(2)} &= \langle e^{-r_0}\tau - \beta_2, \alpha_1 + r_1\tau, \eta_1 + t_1\tau, \alpha_2, \eta_2 + \frac{t_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)}\eta_1 \rangle \\ &= \langle \theta^2, dr_0, dt_0 - \underline{\omega}_2^1, dr_1, dt_1 + k \sin(\delta)\sigma \rangle. \end{aligned}$$

Logo, em razão das 1-formas dr_0, dr_1, θ^2 serem fechadas, e por meio da equação (4.28), temos que

$$dr_0, dr_1, \theta^2, \eta_2 \in \hat{V}_1^{(\infty)}.$$

Assim, existem funções suaves $a_1, a_2 : U^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$, com $a_2 \neq 0$, tais que

$$\{dr_0, dr_1, a_1(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + a_2(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma), \theta^2\} \subset \hat{V}_1^{(\infty)}. \quad (4.30)$$

Observe agora que o sistema Pfaffiano \hat{V}_1 satisfaz as hipóteses da Proposição 1.34, e portanto, o sistema reduzido \hat{V}_1/\mathcal{G} é Pfaffiano. Como as 1-formas semi-básicas em \hat{V}_1 são dadas por

$$\hat{V}_1 \cap (\Gamma^{(1)})^\perp = \langle \tau, \xi_1, \eta_1, \eta_2 \rangle,$$

conclui-se que $\hat{W}_1 = \hat{V}_1/\mathcal{G}$, o que por sua vez, resulta em $\hat{W}_1^{(\infty)} = \hat{V}_1^{(\infty)}/\mathcal{G}$.

Logo, em decorrência de

$$a_1(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + a_2(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma) \in \hat{V}_1^{(\infty)} \cap (\mathbf{T}^{(1)})^\perp,$$

segue que

$$\mathfrak{s}^*(a_1(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + a_2(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma)) = (a_1 \circ \mathfrak{s})(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + (a_2 \circ \mathfrak{s})(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma) \in \hat{W}_1^{(\infty)}.$$

Suponha agora que $\hat{W}_1^{(\infty)}$ é não trivial. Utilizando as equações de estrutura (4.21), (4.25) e (4.29), calculamos os sistemas derivados

$$\begin{aligned} \hat{W}_1^{(1)} &= \langle \tau, \eta_1, \eta_2 \rangle, \\ \hat{W}_1^{(2)} &= \langle \eta_1 + t_1 \tau, \eta_2 + \frac{t_1 \cos(\delta)}{\sin(\delta)} \eta_1 \rangle \\ &= \langle dt_0 - \underline{\omega}_2^1, dt_1 + k \sin(\delta)\sigma \rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Isso implica que existem funções suaves $a_1, a_2 : \bar{U}^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que, $a_1(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + a_2(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma)$ é uma forma fechada, e portanto, pertence a $\hat{W}_1^{(\infty)} = \hat{V}_1^{(\infty)} / \mathcal{G}$.

Temos então que

$$q^*(a_1(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + a_2(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma)) = (a_1 \circ q)(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + (a_2 \circ q)(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma)$$

é uma forma fechada, e portanto, pertence a $\check{V}_1^{(\infty)}$. Isso demonstra a equação (4.28).

Por outro lado, realizando o pullback desta equação pela aplicação

$$\psi(x^1, x^2, y, v, q_0, r_0, s_0, t_0) = (x^2, x^1, y, v, r_0, q_0, t_0, s_0),$$

obtém-se

$$\hat{V}_1^{(\infty)} + \check{V}_1 = \Lambda^1(\beta_1, \beta_2, \sigma, \tau, \zeta_1, \alpha_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_2, \alpha_2, \xi_2, \eta_2). \quad (4.32)$$

Constatando que

$$\psi^*(\hat{V}_1^{(2)}) = \check{V}_1^{(2)} = \langle \theta^1, dq_0, ds_0 - \underline{\omega}_2^1, dq_1, ds_1 - k \sin(\delta)\tau \rangle,$$

e tendo em vista que $\hat{V}_1^{(\infty)} \subset \hat{V}_1^{(2)}$ e $\check{V}_1^{(\infty)} \subset \check{V}_1^{(2)}$, obtém-se

$$\hat{V}_1^{(\infty)} \cap \check{V}_1^{(\infty)} = 0,$$

concluindo assim que $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux. \square

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção, que caracteriza a integrabilidade segundo Darboux de $\mathcal{E}^{(1)}$. No capítulo seguinte, fazendo uso deste teorema, buscaremos a forma mais geral da aplicação $\rho = \rho(y^1, y^2)$ pela qual $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux.

Note antes que assumindo $k \neq 0$, a equação (4.31) implica que

$$\hat{W}_1^{(3)} = \langle \chi = -k\tau(dt_0 - \underline{\omega}_2^1) + k(dt_1 + k \sin(\delta)\sigma) \rangle.$$

Teorema 4.11. Suponha que $k \neq 0$. $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux se, e somente se, $d\chi \wedge \chi = 0$.

Demonstração. Supondo que $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux, o Teorema 4.10 garante que $\hat{W}_1^{(\infty)}$ é não trivial, ou seja, $\hat{W}_1^{(3)} = \hat{W}_1^{(\infty)}$. Isso implica que $d\chi \wedge \chi = 0$.

Por outro lado, se $d\chi \wedge \chi = 0$ então $\hat{W}_1^{(3)} = \hat{W}_1^{(\infty)}$, logo, pelo Teorema 4.10, $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux. \square

Concluímos, então, que a condição $d\chi \wedge \chi = 0$ caracteriza a integrabilidade segundo Darboux de $\mathcal{E}^{(1)}$. Desta forma, no capítulo seguinte, buscaremos a forma mais geral da aplicação $\rho = \rho(y^1, y^2)$ pela qual $d\chi \wedge \chi = 0$, e assim, classificaremos as métricas pelas quais $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux.

Capítulo 5

Classificação das métricas

Com base nos resultados do último capítulo podemos agora apresentar a classificação, obtida por Ream em [36], das métricas $h = e^{2\rho}((dy^1)^2 + (dy^2)^2)$ para as quais as correspondentes aplicações harmônicas são descritas por um SDE \mathcal{E} integrável segundo Darboux com até 1-prolongamento. Ao resultado original de Ream será acrescentado um caso extra, inicialmente não identificado por Ream mas sucessivamente descrito por J. N. Clelland e P. J. Vassiliou em [17].

5.1 Classificação a menos de isometrias

Com o intuito de classificar as métricas para as quais o sistema $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux, notemos inicialmente que

$$dk = k_1 \underline{\theta}^1 + k_2 \underline{\theta}^2,$$

isso implica que

$$\begin{aligned} 0 &= dk_1 \wedge \underline{\theta}^1 + k_1 \wedge d\underline{\theta}^1 + dk_2 \wedge \underline{\theta}^2 + k_2 d\underline{\theta}^2 \\ &= (dk_1 + k_2 \underline{\omega}_2^1) \wedge \underline{\theta}^1 + (dk_2 - k_1 \underline{\omega}_2^1) \wedge \underline{\theta}^2, \end{aligned}$$

logo, pelo Lema de Cartan 1.17

$$\begin{cases} dk_1 + k_2 \underline{\omega}_2^1 = k_{11} \underline{\theta}^1 + k_{12} \underline{\theta}^2, \\ dk_2 - k_1 \underline{\omega}_2^1 = k_{21} \underline{\theta}^1 + k_{22} \underline{\theta}^2, \end{cases}$$

com $k_{12} = k_{21}$. As funções $k, k_1, k_2, k_{11}, k_{12}$ e k_{22} podem ser descritas localmente por

$$\begin{cases} k = -e^{-2\rho}(\rho_{y^1 y^1} + \rho_{y^2 y^2}), & k_1 = e^{-\rho} k_{y^1}, & k_2 = e^{-\rho} k_{y^2}, \\ k_{11} = e^{-2\rho}(k_{y^1 y^1} - \rho_{y^1} k_{y^1} + \rho_{y^2} k_{y^2}), \\ k_{12} = e^{-2\rho}(k_{y^1 y^2} - \rho_{y^1} k_{y^2} - \rho_{y^2} k_{y^1}), \\ k_{22} = e^{-2\rho}(k_{y^2 y^2} + \rho_{y^1} k_{y^1} - \rho_{y^2} k_{y^2}). \end{cases} \quad (5.1)$$

A seguinte proposição se revelará útil daqui por diante.

Proposição 5.1. *Em termos das funções dadas em (5.1), a condição $d\chi \wedge \chi = 0$ é expressa como*

$$\begin{aligned} 0 = d\chi \wedge \chi &= ke^{2\rho} \{ -[k(k_{11} - k_{22}) - k_1^2 + k_2^2] \cos^2(t_0) - 2(kk_{12} - k_1 k_2) \cos(t_0) \sin(t_0) \\ &\quad - (kk_{22} - k_2^2 + k^3) \} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dt_0 + e^\rho \{ [\rho_{y^1}(k^3 + kk_{11} - k_1^2) + \rho_{y^2}(kk_{12} - k_1 k_2)] \cos(t_0) \\ &\quad + [\rho_{y^1}(kk_{12} - k_1 k_2) + \rho_{y^2}(k^3 + kk_{22} - k_2^2)] \sin(t_0) \} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dt_1 \\ &\quad + e^\rho [(k^3 + kk_{11} - k_1^2) \cos(t_0) + (kk_{12} - k_1 k_2) \cos(t_0)] dy^1 \wedge dt_0 \wedge dt_1 \\ &\quad e^\rho [(kk_{12} - k_1 k_2) \cos(t_0) + (k^3 + kk_{22} - k_2^2) \sin(t_0)] dy^2 \wedge dt_0 \wedge dt_1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Podemos portanto, distinguir dois casos principais: k constante e k não constante. Note que, o caso k constante se reduz ao caso $k = 0$. De fato, se k é constante, usando a equação (5.2) obtemos que $d\chi \wedge \chi = 0$ se, e somente se, $k = 0$.

5.1.1 Caso $k = 0$

Analisaremos primeiramente quando $k = 0$. Neste caso, é fácil ver que $\hat{W}_1^{(2)} = \hat{W}_1^{(\infty)}$. Logo, pelo Teorema 4.10, $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux e pela (5.1) a métrica h tem a forma

$$h = e^{2\rho}((dy^1)^2 + (dy^2)^2)$$

com $\rho = \rho(y^1, y^2)$ função harmônica. Neste caso, sendo $k = 0$, é bem conhecido que h é localmente isométrica à métrica Euclidiana.

Provamos assim o seguinte

Teorema 5.2. *Quando $k = 0$, (Q, h) é localmente isométrica ao plano Euclidiano e o sistema (2.12) é localmente equivalente ao sistema*

$$\begin{cases} y_{12}^1 = 0, \\ y_{12}^2 = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

5.1.2 Caso k não constante

Utilizando a equação (5.2), podemos demonstrar a seguinte proposição para o caso k não constante.

Proposição 5.3. *Suponha que k é não constante. Então $d\chi \wedge \chi = 0$ equivale às seguintes condições*

$$\begin{cases} kk_{11} - k_1^2 + k^3 = 0, \\ kk_{12} - k_1 k_2 = 0, \\ kk_{22} - k_2^2 + k^3 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

De agora em diante, iremos supor k não constante. Neste caso, também é conveniente descrever explicitamente somente os representantes de classes de equivalência de métricas que correspondem a sistemas integráveis segundo Darboux. Para isto, usaremos o método descrito por Bianchi, no Capítulo VII do Volume I de seu tratado [7].

De acordo com Bianchi, no caso de métricas

$$h = e^{2\rho}((dy^1)^2 + (dy^2)^2), \quad h = e^{2\bar{\rho}}((d\bar{y}^1)^2 + (d\bar{y}^2)^2),$$

com curvaturas de Gauss não constantes

$$k = -e^{-2\rho}(\rho_{y^1 y^1} + \rho_{y^2 y^2}), \quad \bar{k} = -e^{-2\bar{\rho}}(\bar{\rho}_{\bar{y}^1 \bar{y}^1} + \bar{\rho}_{\bar{y}^2 \bar{y}^2}),$$

o problema de equivalência pode ser resolvido considerando, além de k e \bar{k} , também os invariantes diferenciais de ordem superior que Bianchi descreve aplicando a k e \bar{k} , certos operadores invariantes $\nabla, \Delta_1, \Delta_2$ e $\bar{\nabla}, \bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$, respectivamente.

No nosso caso, $\nabla, \Delta_1, \Delta_2$, podem ser descritos como segue

$$\begin{aligned} \nabla(U, V) &= e^{-2\rho}(\partial_{y^1} U \partial_{y^1} V + \partial_{y^2} U \partial_{y^2} V), \\ \Delta_1(U) &= \nabla(U, U), \\ \Delta_2(U) &= e^{-2\rho}(\partial_{y^1}^2 U + \partial_{y^2}^2 U), \end{aligned}$$

para toda função $U = U(y^1, y^2)$, $V = V(y^1, y^2)$. Análogas fórmulas valem para $\bar{\nabla}, \bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$.

De acordo com a análise feita por Bianchi, se h e \bar{h} são equivalentes, então, além da igualdade

$$k(y^1, y^2) = \bar{k}(\bar{y}^1, \bar{y}^2), \quad (5.5)$$

assegurada pelo Teorema egregium de Gauss, qualquer outro invariante diferencial de ordem superior de h , deve ser igual ao correspondente invariante diferencial de \bar{h} . Assim, considerando em primeiro lugar

$$\Delta_1 k = \bar{\Delta}_1 \bar{k}, \quad (5.6)$$

esta relação, juntamente com $k = \bar{k}$, leva a analisar 3 casos.

Caso 1. (5.5) e (5.6) são contraditórios.

Neste caso, h e \bar{h} são não equivalentes.

Caso 2. (5.5) e (5.6) são compatíveis e distintos.

Neste caso, pode-se provar que as métricas são equivalentes se, e somente se,

$$\begin{cases} \nabla(k, \Delta_1 k) = \bar{\nabla}(\bar{k}, \bar{\Delta}_1 \bar{k}), \\ \nabla(\Delta_1 k, \Delta_1 k) = \bar{\nabla}(\bar{\Delta}_1 \bar{k}, \bar{\Delta}_1 \bar{k}), \end{cases}$$

o que pode ser verificado por meio de cálculos algébricos.

Caso 3. (5.5) e (5.6) são um consequência do outro.

Neste caso, existe uma função f tal que

$$\begin{cases} \Delta_1 k = f(k), \\ \bar{\Delta}_1 \bar{k} = f(\bar{k}), \end{cases} \quad (5.7)$$

e considerando

$$\Delta_2 k = \bar{\Delta}_2 \bar{k}, \quad (5.8)$$

no lugar de (5.6), podemos continuar analisando, de maneira análoga à anterior, o sistema de condições (5.5)-(5.8). Novamente, teremos que analisar 3 casos.

Subcaso 3.1. (5.5)-(5.8) são contraditórios

Neste caso, h e \bar{h} são não equivalentes.

Subcaso 3.2. (5.5)-(5.8) são compatíveis e distintas.

Neste caso, pode-se provar que h e \bar{h} são equivalentes se, e somente se,

$$\begin{cases} \nabla(k, \Delta_2 k) = \bar{\nabla}(\bar{k}, \bar{\Delta}_2 \bar{k}), \\ \nabla(\Delta_2 k, \Delta_2 k) = \bar{\nabla}(\bar{\Delta}_2 \bar{k}, \bar{\Delta}_2 \bar{k}), \end{cases}$$

o que pode ser verificado com um cálculo algébrico.

Subcaso 3.3. (5.5)-(5.8) são um consequência do outro.

Neste caso, existe outra função φ tal que

$$\begin{cases} \Delta_2 k = \varphi(k), \\ \bar{\Delta}_2 \bar{k} = \varphi(\bar{k}). \end{cases} \quad (5.9)$$

Portanto, teremos que, para h e \bar{h} , valem (5.7) e (5.9). Neste caso, Bianchi prova que as curvas de níveis das funções $k(y^1, y^2)$ e $\psi(y^1, y^2)$, com ψ definida por

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y^1} = -\frac{\partial k}{\partial y^2} e^{-\int \frac{\varphi}{f} dk}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial k}{\partial y^1} e^{-\int \frac{\varphi}{f} dk}, \end{cases}$$

definem um sistema de coordenadas ortogonais para h , em que

$$h = \frac{dk^2}{f} + \frac{e^{2 \int \frac{\varphi}{f} dk}}{f} d\psi^2 = \frac{e^{2 \int \frac{\varphi}{f} dk}}{f} \left(\left(e^{-\int \frac{\varphi}{f} dk} dk \right)^2 + d\psi^2 \right).$$

Analogamente para \bar{h} , logo h e \bar{h} são equivalentes. De fato, se h e \bar{h} têm a mesma forma nas coordenadas ortogonais $\{k, \psi\}$ e $\{\bar{k}, \bar{\psi}\}$, logo $\bar{k} = k$ e $\bar{\psi} = \psi$ estabelece uma isometria entre h e \bar{h} .

Além disto, usando as coordenadas $\{w = \int (e^{-\int \frac{\varphi}{f} dk}) dk, z = \psi\}$ e introduzindo $\rho(w) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^{2 \int \frac{\varphi}{f} dk}}{f} \right)$, h pode ser escrita na forma

$$h = e^{2\rho(w)} (dw^2 + dz^2),$$

que é também equivalente à métrica de uma superfície de rotação.

Lembre-se que, a métrica de uma superfície de rotação em \mathbb{R}^3 , obtida rotacionando uma curva $(a(u), 0, b(u))$ de um ângulo v em torno do terceiro eixo, tem a forma

$$((a')^2 + (b')^2)du^2 + a^2dv^2 = e^{2\rho(w)}(dw^2 + dz^2),$$

onde

$$w(u) = \int \frac{\sqrt{((a')^2 + (b')^2)du}}{a}, \quad z = v,$$

e considerando a inversa $u = u(w)$, a função $\rho = \rho(w)$ é tal que

$$\rho = \ln(a(u(w))).$$

Análogo discurso vale para \bar{h} .

Agora, no caso das métricas $h = e^{2\rho}((dy^1)^2 + (dy^2)^2)$, temos que

$$\begin{cases} \Delta_1 k = e^{-2\rho}((\partial_{y^1} k)^2 + (\partial_{y^2} k)^2) = k_1^2 + k_2^2 \\ \Delta_2 k = e^{-2\rho}(\partial_{y^1}^2 k + \partial_{y^2}^2 k) = k_{11} + k_{22}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Em particular, para as métricas desta forma que satisfazem (5.4), vale

$$d(\Delta_1 k) = 2k_1 dk_1 + 2k_2 dk_2 = \frac{2(k_1^2 + k_2^2 - k^3)}{k} dk,$$

logo

$$\frac{d}{dk}(\Delta_1 k) = \frac{2(\Delta_1 k - k^3)}{k},$$

e assim

$$\Delta_1 k = -2k^2(k - c), \quad (5.11)$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Além disto,

$$\Delta_2 k = k_{11} + k_{22},$$

e usando as equações (5.1), (5.4) e (5.10) obtemos que

$$\Delta_2 k = 2k(c - 2k). \quad (5.12)$$

Portanto, estamos no Subcaso 3.3 com

$$\begin{cases} f(k) = -2k^2(k - c), \\ \varphi(k) = 2k(c - 2k). \end{cases}$$

Logo, as métricas correspondentes são todas isométricas a uma métrica da forma

$$h = e^{2\rho(y^1)}((dy^1)^2 + (dy^2)^2).$$

Segue-se que as soluções de (5.4) da forma $\rho = \rho(y^1)$ descrevem todas as possíveis classes de equivalência de métricas correspondentes a sistemas integráveis segundo Darboux.

Um cálculo direto prova agora que quando $\rho = \rho(y^1)$, o sistema (5.4) se reduz à equação

$$\rho' \rho''' - (\rho'')^2 - 2(\rho')^2 \rho'' = 0.$$

Logo, integrando esta equação obtemos as duas famílias de soluções

$$\rho_1(y^1) = -\frac{1}{2} \ln(a_1 y^1 + a_2), \quad a_1 \neq 0, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

$$\rho_2(y^1) = -\frac{1}{2} \ln(a_2 e^{a_1 y^1} + a_3), \quad a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \in \mathbb{R}, \quad (5.14)$$

chegando assim ao principal teorema deste trabalho.

Teorema 5.4. *Suponha que k é não constante. Então $\mathcal{E}^{(1)}$ é integrável segundo Darboux se, e somente se, a métrica h é isométrica a uma das seguintes*

$$h_1 = \frac{1}{2w}(dw^2 + dz^2), \quad h_2 = \frac{a}{1 \pm e^w}(dw^2 + dz^2), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e o sistema correspondente (2.12) de h é equivalente, a menos de transformações de ponto, ao correspondente sistema de h_1 e h_2

$$\begin{cases} w_{12} = \frac{1}{2w}(w_1 w_2 - z_1 z_2), \\ z_{12} = \frac{1}{2w}(w_1 z_2 + w_2 z_1), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_{12} = \frac{1}{2(1 \pm e^{-w})}(w_1 w_2 - z_1 z_2), \\ z_{12} = \frac{1}{2(1 \pm e^{-w})}(w_1 z_2 + w_2 z_1), \end{cases}$$

respectivamente.

Demonstração. No caso em que $\rho = \rho(y^1)$ é da forma (5.13), temos que o fator conforme é dado por

$$e^{2\rho} = \frac{1}{a_1 y^1 + a_2},$$

e portanto, a métrica h tem a seguinte forma

$$h_1 = \frac{1}{a_1 y^1 + a_2}((dy^1)^2 + (dy^2)^2),$$

com curvatura de Gauss

$$k = -\frac{a_1^2}{2(a_1 w + a_2)}.$$

Logo, introduzindo novas coordenadas (w, z) tais que

$$\begin{cases} y^1 = \frac{a_1}{2}w - \frac{a_2}{a_1}, \\ y^2 = \frac{a_1}{2}z, \end{cases}$$

h_1 pode ser escrita na forma

$$h_1 = \frac{1}{2w}(dw^2 + dz^2).$$

Logo, considerando que para h_1 temos $\rho_1 = -\frac{1}{2}\ln(2w)$, segue-se que o correspondente sistema de Euler-Lagrange (2.12), para as aplicações harmônicas

$$(x^1, x^2) \longrightarrow (w(x^1, x^2), z(x^1, x^2)),$$

se escreve na forma

$$\begin{cases} w_{12} = \frac{1}{2w}(w_1w_2 - z_1z_2), \\ z_{12} = \frac{1}{2w}(w_1z_2 + w_2z_1). \end{cases}$$

No caso em que $\rho = \rho(y^1)$ é da forma (5.14), o fator conforme é dado por

$$e^{2\rho} = \frac{1}{a_2 e^{a_1 y^1} + a_3},$$

e portanto, a métrica h tem a forma

$$h = \frac{1}{a_2 e^{a_1 y^1} + a_3}((dy^1)^2 + (dy^2)^2),$$

com curvatura de Gauss

$$k = \frac{a_1^2 a_2 a_3 e^{a_1 y^1}}{2(a_2 e^{a_1 y^1} + a_3)}.$$

Logo, se $a_3 = 0$, então $k = 0$. Neste caso, as métricas correspondem ao sistema previamente descrito (5.3).

Podemos então assumir também $a_3 \neq 0$, e introduzindo novas coordenadas (w, z) tais que

$$\begin{cases} y^1 = \frac{w}{a_1} + \frac{1}{a_1} \ln \left(\left| \frac{a_3}{a_2} \right| \right) \\ y^2 = \frac{z}{a_1}, \end{cases}$$

a métrica h pode ser escrita na forma

$$h_2 = \frac{a}{1 + \epsilon e^w}(dw^2 + dz^2),$$

onde $a = \frac{1}{(a_1^2 a_3)}$ e $\epsilon = \operatorname{sgn}(\frac{a_3}{a_2})$.

Logo, considerando que para h_2 temos $\rho_2 = -\frac{1}{2}\ln(1 \pm e^w)$, segue que o correspondente sistema de Euler-Lagrange (2.12), para as aplicações harmônicas

$$(x^1, x^2) \longrightarrow (w(x^1, x^2), z(x^1, x^2)),$$

se escreve na forma

$$\begin{cases} w_{12} = \frac{1}{2(1 \pm e^{-w})}(w_1w_2 - z_1z_2), \\ z_{12} = \frac{1}{2(1 \pm e^{-w})}(w_1z_2 + w_2z_1), \end{cases}$$

□

Observa-se que a métrica

$$h_2 = \frac{a}{1 + \epsilon e^w} (dw^2 + dz^2),$$

do Teorema 5.4, difere daquela descrita por Ream em [36], pois as equações de Euler-Lagrange independem da constante $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e portanto, Ream se reduziu ao caso $a = 1$, considerando uma transformação conforme.

Referências

- [1] I. M. Anderson and M. E. Fels, *Bäcklund transformations for Darboux integrable differential systems: Examples and applications*, Journal of Geometry and Physics 102 (2016), 1-31.
- [2] I. M. Anderson and M. E. Fels, *Bäcklund transformations for Darboux integrable differential systems*, Sel. Math. New Ser. 21 (2015), 379-448.
- [3] I. M. Anderson and M. E. Fels, *Exterior differential systems with symmetry*, Acta. Appl. Math., 87 (2005), 3-31.
- [4] I. M. Anderson, M. E. Fels and P. J. Vassiliou, *Superposition formulas for exterior differential systems*, Advances in Mathematics 221 (2009), 1910–1963.
- [5] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1976.
- [6] B. P. Ashley, *Transformation groups and the method of Darboux* (2021), Ph.D. thesis, Utah State University, 2021.
- [7] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Enrico Spoerri, Pisa, 1894.
- [8] M. Biesecker, *Geometric studies in hyperbolic systems in the plane*, PhD thesis, Utah State University, 2004.
- [9] D. Bleecker, *Gauge theory and variational principles*, Addison-Wesley, 1981.
- [10] R. Bryant, *Some aspects of the local and global theory of Pfaffian systems*, Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 1979.
- [11] R. Bryant, S. Chern, R. Gardner and P. Griffiths, *Exterior differential systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [12] R. Bryant, P. Griffiths and D. Grossman, *Exterior differential systems and Euler-Lagrange partial differential equations*, University of Chicago Press, 2008.
- [13] R. Bryant, P. A. Griffiths and L. Hsu, *Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws, part I*, Selecta Math., New Series 1 (1995), 21-112.

- [14] S. S. Chern, An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface, *Proceedings of the American Mathematical Society* (1955), 771-782.
- [15] Y. J. Chiang, *Developments of harmonic maps, wave maps and Yang-Mills fields into biharmonic maps, biwave maps and Bi-Yang-Mills fields*, Birkhäuser, 2013.
- [16] J. N. Clelland, T. A. Ivey, N. Tehseen and P. J. Vassiliou, *Isometric embedding and Darboux integrability*, *Geometriae Dedicata* 203 (2019), 353-388.
- [17] J. N. Clelland and P. J. Vassiliou, *A solvable string on a Lorentzian surface*, *Differ. Geom. Appl.* 33 (2014), 177-198.
- [18] G. Darboux, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 7 (1870), 163-173.
- [19] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Gauthier-Villars, Paris, 1915.
- [20] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, *American Journal of Mathematics*, 86. (1964), 109-160.
- [21] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS Regional Conference Series 50, American Mathematical Society, 1983.
- [22] A. P. Fordy and J. C. Wood, *Harmonic maps and integrable systems*, Vieweg, 1994.
- [23] F. B. Fuller, *Harmonic maps*, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, vol. 40. (1983), 987-991.
- [24] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre à deux variables indépendent*, Tome II, Hermann, Paris, 1898.
- [25] M. A. Guest, *From quantum cohomology to integrable systems*, Oxford, 2008.
- [26] M. A. Guest, *Harmonic Maps, loop groups, and integrable systems*, London Mathematical Society, 1997.
- [27] M. Hamilton, *Mathematical Gauge theory, with applications to the standard model of particle physics*, Springer, 2017.
- [28] F. Hélein, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge, 2003.
- [29] H. Hu, "Soliton and differential geometry", in "Soliton theory and its applications", G. Chaohao (Ed.), Springer-Verlag, 1995.
- [30] T. A. Ivey and J. M. Landsberg, *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, vol. 175, American Mathematical Society Providence, 2010.

- [31] M. Juráš, *Geometric aspects of the second-order scalar hyperbolic partial differential equations in the plane*, PhD thesis, Utah State University, 1997.
- [32] N. Kamran, *Selected topics in the geometrical study of differential equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2002.
- [33] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1, Wiley-Interscience, 1996.
- [34] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013.
- [35] S. Morita, *Geometry of differential forms*, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 201, American Mathematical Society, 2001.
- [36] R. Ream, *Darboux Integrability of wave maps into 2-dimensional Riemannian manifolds*, Utah State University, All Graduate Theses and Dissertations, 2008.
- [37] D. J. Saunders, *The geometry of jet bundles*, Cambridge University Press, 1989.
- [38] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume I, Publish or Perish, Wilmington, Del., 1979.
- [39] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume IV, Publish or Perish, Wilmington, Del., 1979.
- [40] L. Tu, *Differential Geometry: connections, curvature, and characteristic classes*, Springer, 2017.
- [41] L. Tu, *An introduction to manifolds*, Springer, 2010.
- [42] H. Urakawa, *Calculus of variations and harmonic maps*, *Translations of Mathematical monographs*, vol. 132, American Mathematical Society, 1993.
- [43] H. Urakawa, *Geometry of biharmonic mappings*, *Differential Geometry of variational methods*, World Scientific, 2018.
- [44] P. J. Vassiliou, *Cauchy problem for a Darboux integrable wave map system and equations of Lie type*, University of Canberra, 2013.
- [45] A. M. Vinogradov, *Category of nonlinear differential equations*, *In Global Analysis - Studies and Applications I*, Springer, 77-102, 1984.
- [46] A. M. Vinogradov, *Geometry of nonlinear differential equations*, *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 17. (1981), 1624-1649.
- [47] A. M. Vinogradov, *Local symmetries and conservation laws*, *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 2. (1984), 21-78.

- [48] A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'schchik and V. V. Lychagin, *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
- [49] A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik, et al., *Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1999.
- [50] Y. Xin, *Geometry of Harmonic Maps*, Birkhäuser, 1995.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br