Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Cocaracteres e Identidades Graduadas da Álgebra de Lie sl_2

JOSELMA MAIA DOS SANTOS

Salvador-Bahia
Novembro de 2015

Cocaracteres e Identidades Graduadas da Álgebra de Lie sl_2

Joselma Maia dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Manuela da Silva Souza.

Salvador-Bahia

Novembro de 2015

Santos, Joselma Maia, 2015

Cocaracteres e Identidades Graduadas da Álgebra de Lie sl_2 / Joselma Maia dos Santos. –2016.

78 f.

Orientadora: Profa. Dra. Manuela da Silva Souza.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Instituto de Matemática, Salvador, 2015.

1. Lie, Álgebra de. 2. Álgebra. I. Souza, Manuela da Silva. - II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDD: 512.65

CDU : 512.554.3

COCARACTERES E IDENTIDADES GRADUADAS DA ÁLGEBRA DE LIE sl_2

JOSELMA MAIA DOS SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 23 de Novembro de 2015.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Manuela da Silva Souza (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior
UFCG

Prof. Dr. Júlio César dos Reis
UESB

À minha família e a todos aqueles que me acompanharam e apoiaram nesse percurso.

Agradecimentos

"Não sabendo que era impossível, ele foi lá e fez." Esta é a frase da minha epígrafe e uma frase que vem me acompanhando há anos. Mas em nenhuma outra fase da minha vida, ela teve tanto significado. No entanto, foi nas dificuldades deste percurso que aprendi que a bondade pode vim de pessoas que você não conhece.

É a essas pessoas que agradeço, a todas àquelas que me ajudaram, tanto fora da UFBA, como à minha família, que sempre está comigo e à Sandra Freitas pela disponibilidade em ajudar de todas as formas. E a todos os outros que torceram e e apoiaram com ações ou com palavras de incentivo.

Dentro da UFBA, que preferia não citar nomes, pra não esquecer de nenhum. Mas não posso deixar de citar dois: Obrigada Carol e Adriana, pelo abrigo, pela disponibilidade. E a todos àqueles com quem convivi na sala 18 e nas salas de aula, por tornarem o ambiente tão agradável.

Agradeço ainda, à minha orientadora, primeiro por ter me aceitado no último instante, quando outros disseram não. Segundo, por ter acreditado que eu podia começar do zero, e sobretudo, pela paciência e pela forma de me conduzir ao caminho certo, sem interferir na minha liberdade de escolha.

Obrigado à banca, pela presença e pela aprovação.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, que demorou, mas chegou.

"Não sabendo que era impossível, foi lá e fez."

Jean Cocteau/Mark Twain

Resumo

Seja K um corpo de característica zero e sl_2 a álgebra de Lie das matrizes de ordem 2 com traço zero sobre K. A menos de isomorfismo, a álgebra sl_2 pode ser munida de três G-graduações não triviais: $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$. Nesta dissertação é dada uma descrição completa dos cocaracteres graduados de sl_2 para as três graduações acima. Também é dada uma descrição das identidades graduadas de sl_2 para essas graduações. Exibimos ainda bases para essas identidades.
Palavras Chaves: Identidades graduadas, cocaracteres, álgebra de Lie, álgebra graduada.

Abstract

Let K be a field of characteristic zero and let sl_2 be the Lie algebra of traceless matrices of order 2 over K. Up to isomorphism the algebra sl_2 can be endowed with three non-trivial G-gradings: $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}$. In this work is given a complete description of graded cocharacters of sl_2 for above three gradings. Also a description of the graded identities of sl_2 is given for these gradings. We still exhibit bases for these identities
Keywords: Graded identities, cocharacters, Lie algebra, graded algebra.

Sumário

Introdução

Uma identidade polinomial, ou simplesmente identidade, de uma álgebra associativa A é um polinômio em variáveis não comutativas que se anula para qualquer conjunto de elementos de A. Uma álgebra que possui, pelo menos, uma identidade não trivial é chamada PI-álgebra. As álgebras comutativas são sempre PI-álgebras, já que satisfazem a identidade $f(x, y) = xy - yx$. Mas são elas as únicas álgebras associativas dessa classe? A resposta é não. Além das álgebras comutativas, várias álgebras associativas, como a álgebra das matrizes e a álgebra de Grassmann, também satisfazem a alguma identidade não trivial.

O conjunto das identidades satisfeitas por uma álgebra é um ideal invariante por endomorfismos da álgebra livre chamado T-ideal. Embora a descrição desse ideal seja, em geral, muito difícil, ele pode nos dá boas informações sobre a álgebra em questão.

O estudo das identidades polinomiais não se restringe às álgebras associativas. As álgebras de Lie e de Jordan muito usadas em outras áreas da Matemática e na Física são exemplos de álgebras não associativas definidas por identidades polinomiais. Retirando a hipótese de associatividade, muitas propriedades das PI-álgebras deixam de ser válidas. Por isso tornam-se relevantes perguntas como: "Quais propriedades de uma PI-álgebra dependem da associatividade?" Podemos afirmar, por exemplo, que a sequência de codimensões de uma álgebra associativa é exponencialmente limitada, porém isso não é, em geral, verdade quando retiramos a hipótese de associatividade. Outro exemplo é a chamada "Propriedade de Specth." Sabemos que toda álgebra associativa sobre um corpo de característica zero satisfaz esta propriedade, isto é, todas as subvariedades de uma variedade de álgebras associativas podem ser definidas por um sistema finito de identidades polinomiais. No entanto, nada pode ser afirmado em geral, quando se trata de uma variedade de álgebras não associativas.

Entre as álgebras não associativas destaca-se a álgebra de Lie $sl_2(\mathbb{K})$, isto é, o espaço vetorial das matrizes de ordem 2 com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ cujo traço é zero, munido do produto de Lie $[x, y] = xy - yx$. Razmyslov em 1973, em seu artigo [?], usou a descrição das identidades satisfeitas por essa álgebra para obter uma base das identidades satisfeitas por $M_2(\mathbb{K})$, quando $char(\mathbb{K}) = 0$, ou seja, um conjunto de geradores para o T-ideal das identidades desta álgebra.

Para facilitar o estudo de uma álgebra (associativa ou não) podemos "quebrála" em subespaços munidos de "pesos" que se comportam bem em relação ao produto e, quando unidos novamente, voltam a formar o espaço original. Esse processo chama-se graduação.

Após trabalhos de Kemer,[?] e [?], em 1987 e 1991, respectivamente, o estudo das identidades polinomiais graduadas tornou-se objeto de pesquisa de bastante interesse.

A álgebra $L = sl_2(\mathbb{K})$ admite, a menos de isomorfismo, quatro graduações:

1. $G = \{0\}$: (graduação trivial);
2. $G = \mathbb{Z}_2 \, : L_0 = Kh$ e $L_1 = Ke \oplus Kf$;
3. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 :$ $L_{(0,0)} = 0\,,\ L_{(0,1)} = Kh\,,\ L_{(1,0)} = K(e+f)$ e $L_{(1,1)} = K(e-f)\,;$
4. $G = \mathbb{Z}:$ $L_{-1} = Ke\,,\ L_0 = Kh\,,\ L_1 = Kf$ e $L_i = 0$ se $i \notin \{-1, 0, 1\}$;

onde

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A base das identidades graduadas para as graduações 2, 3 e 4 acima, quando $\mathbb{K}$ é infinito e $char(\mathbb{K}) \neq 2$, foram descritas por [?] em 2008 e por [?] em 2010, usando métodos mais elementares.

Neste trabalho, para $G = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$, é dada uma descrição dos cocaracteres graduados da álgebra de Lie sl_2 usando teoria de representações do grupo simétrico, em especial diagramas de Young. Também é dada uma descrição das identidades graduadas de sl_2 para essas graduações, quando a característica do corpo é zero. Exibimos ainda explicitamente as bases destas identidades.

Para isso, dividimos a dissertação em quatro capítulos. No primeiro damos algumas definições fundamentais ao entendimento dos capítulos posteriores. No capítulo dois apresentamos uma introdução a teoria de representações. No terceiro capítulo descrevemos os cocaracteres graduados utilizando a teoria apresentada no capítulo anterior. Para finalizar, no quarto capítulo exibimos uma base para as identidades graduadas de sl_2 considerando as graduações acima citadas.

Capítulo 1

Álgebras, Módulos sobre álgebras e PI-Álgebras

Neste capítulo, apresentamos as definições básicas e os principais resultados sobre a estrutura das PI-álgebras. Ao longo do texto, K sempre representará um corpo de característica zero.

1.1 Álgebras, álgebras livres e álgebras G-graduadas

Definição 1.1.1. *Seja K um corpo. Uma K-**álgebra** A é um espaço vetorial sobre K munido de uma operação binária $*$ chamada produto que obedece as seguintes propriedades:*

A1) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

A2) $(b + c) * a = b * a + c * a$;

A3) $\alpha(a * b) = a * (\alpha b) = (\alpha a) * b$;

*para todo $a, b, c \in A$ e $\alpha \in K$. A **dimensão** de uma álgebra é a sua dimensão como espaço vetorial.*

Para a facilidade da escrita, omitiremos o sinal $*$, representando o produto pela concatenação dos fatores, ou seja, em vez de $a * b$, escreveremos simplesmente ab.

Uma álgebra A é:

- Associativa, se $a(bc) = (ab)c$, para todo $a, b, c \in A$;
- Comutativa, se $ab = ba$ para todo $a, b \in A$;
- Com unidade, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$;
- De Lie, se $a^2 = 0$, para todo $a \in A$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ para todo $a, b, c \in A$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.2. *O conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$*, munido do produto usual é uma álgebra associativa, comutativa, bidimensional sobre* $\mathbb{R}$ *e com unidade.*

Exemplo 1.1.3. *O conjunto* $M_n(K)$ *das matrizes de ordem* $n \times n, n \geq 2$*, com coeficientes em* K*, é uma álgebra* n^2*-dimensional associativa, com unidade, mas não comutativa.*

Exemplo 1.1.4. *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto vetorial é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.5. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* K *e defina em* V *o produto* $v_i v_j = \dfrac{v_i + v_j}{2}$*. Munido desse produto* V *é uma álgebra comutativa, mas não associativa.*

Exemplo 1.1.6. *Sejam* G *um grupo e* K *um corpo. O espaço vetorial* KG *de todas as somas formais da forma* $\sum_i a_i g_i$ *com* $a_i \neq 0$ *apenas para uma quantidade finita de índices, munido da multiplicação*

$$(\sum_i a_i g_i)(\sum_j a_j g_j) = \sum_i (\sum_j a_i a_j g_k),$$

em que $g_k = g_i g_j$ *é uma álgebra associativa denominada* ***Álgebra do Grupo G****. Os elementos de* G *formam uma base para* KG*. A álgebra* KG *é comutativa se, e somente se,* G *é abeliano. A álgebra* KG *é uma álgebra com unidade.*

Exemplo 1.1.7. *O espaço vetorial* $K[x]$ *dos polinômios na variável* x *com coeficientes em* K*, munido do produto usual de polinômios, é um álgebra associativa, comutativa e com unidade. De maneira geral, considerando o conjunto* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *podemos definir a álgebra comutativa dos polinômios em* n *variáveis e denotamos por* $K[x_1, ..., x_n]$*.*

Definição 1.1.8. *Um subespaço* S *de* A *é chamado subálgebra se é fechado pela multiplicação. Se além disso,* $AS \subseteq S$*,* S *é chamado* ***ideal à esquerda*** *de* A*. Analogamente, se* $SA \subseteq S$*,* S *é um* ***ideal à direita*** *de* A*. Se* S *é ideal à direita e à esquerda dizemos que* S *é um* ***ideal bilateral*** *ou simplesmente* ***ideal*** *de* A*.*

Definição 1.1.9. *Sejam* A *uma álgebra e* I *um ideal de* A*. Consideremos o espaço vetorial quociente* A/I*. Para cada* $a \in A$*, vamos denotar o elemento* $a + I$ *de* A/I *por* $\bar{a}$*. Temos que as operações de soma e produto por escalar em* A/I *são definidas por*

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad e \quad \lambda\bar{a} = \overline{\lambda a}$$

para $a, b \in A, \lambda \in K$*. Consideremos o produto*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A/I \times A/I & \longrightarrow & A/I \\ & (\bar{a}, \bar{b}) & \longmapsto & \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}. \end{array}$$

*O espaço vetorial A/I munido deste produto é uma álgebra chamada **álgebra quociente de A por I**.*

Definição 1.1.10. *Sejam $\phi : A_1 \to A_2$ um homomorfismo de espaços vetoriais, sendo A_1, A_2 álgebras. Dizemos que ϕ é **homomorfismo de álgebras** se $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.*

Definimos automorfismo, endomorfismo e isomorfismo de álgebras de forma análoga àquela vista em teoria de grupos e anéis.

Definição 1.1.11. *Seja G um grupo. Uma álgebra A é dita ser **G-graduada** se existe uma família de subespaços $\{A_g : g \in G\}$ de A tal que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

em que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

Lembramos que para definir álgebra graduada não precisamos que o grupo seja abeliano, mas essa condição é importante quando trabalhamos com álgebra de Lie.

Exemplo 1.1.12. *Vejamos alguns exemplos:*

- *Sejam A uma álgebra, G um grupo e e_G o elemento neutro do grupos G. Considere $A_{e_G} = A, A_g = 0, \forall g \in G - \{e_G\}$. Toda álgebra A possui esta G-graduação, chamada graduação trivial.*

- *Uma subálgebra B de uma álgebra G-graduada A é dita homogênea se é gerada por elementos homogêneos. Temos que*

$$B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A_g), \text{ e } (B \cap A_g)(B \cap A_h) \subseteq (B \cap A_{gh}), g, h \in G.$$

  Portanto B é uma álgebra G-graduada com a graduação induzida de A.

- *Considere uma álgebra G-graduada e I um ideal de A. Observe que a álgebra $\frac{A}{I}$ será G-graduada quando I for um ideal homogêneo, isto é, uma subálgebra homogênea de A que é também um ideal.*

Vamos a um exemplo mais explícito.

Exemplo 1.1.13. *Seja $L = sl_2$ a álgebra de Lie das matrizes de ordem dois com traço 0, munida do produto $[x, y] = xy - yx$ e $G = \mathbb{Z}_2$. Temos que*

$$L = L_0 \oplus L_1,$$

em que L_0 *é o subespaço gerado pela matriz* $h = e_{11} - e_{22}$ *e* L_1 *é o subespaço gerado pelas matrizes* $e = e_{12}$ *e* $f = e_{21}$*, em que* e_{ij} *denota a matriz unitária com 1 na entrada* (i, j) *e zero nas demais entradas. Observe que* $[L_0, L_0] = 0, [L_0, L_1] = L_1$ *e* $[L_1, L_1] = L_0$*. Representaremos a álgebra* sl_2 *munida da* $\mathbb{Z}_2$*-graduação por* $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$*.*

Esta álgebra possui ainda outras duas graduações não triviais das quais falaremos mais tarde. Sempre que necessário denotaremos sl_2^G *para evidenciar a graduação utilizada.*

Definição 1.1.14. *Seja* A *uma álgebra* G*-graduada. O suporte de* A *com respeito a* G*-graduação é o seguinte subconjunto de* G*:*

$$Supp(A) = \{g \in G | A_g \neq 0\}.$$

Definição 1.1.15. *Sejam* A *e* B *duas álgebras* G*-graduadas e* $\phi : A \to B$ *um homomorfismo. Dizemos que* ϕ *é um* ***homomorfismo graduado*** *se* $\phi(A_g) \subseteq B_g, \forall g \in G$*.*

Se A é uma álgebra e $(A_g)_{g \in G}$ e $(A_{g'})_{g' \in G}$ são duas G-graduações em A, dizemos que estas graduações são **isomorfas** se existe um automorfismo φ de A tal que $\varphi(A_g) = A_{g'}, \forall g \in G$.

Definição 1.1.16. *Dizemos que* A *é uma* ***álgebra gerada*** *por um subconjunto* $S = \{s_i\}_{i \in I} \subseteq A$ *se todo elemento* $a \in A$ *pode ser escrito como uma combinação linear sobre* K *de produtos da forma* $s_{i_1} ... s_{i_t}$*, onde* $s_{i_j} \in S$*.*

Agora vamos construir o objeto com o qual trabalharemos: os polinômios.

Seja $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ um conjunto arbitrário, adicionamos a este conjunto mais dois símbolos de parênteses "(" e ")" e obtemos o conjunto $X^* = X \cup \{(,)\}$. Definimos indutivamente o conjunto $V[X]$ das sequências finitas de X^* que chamaremos **palavras** não associativas de elementos do conjunto X. Todos os elementos de X pertencem $V[X]$. Se $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X], u, v \notin X$, então as sequências $x_1 x_2, x_1(u), (v)x_2$ e $(u)(v)$ também pertencem a $V[X]$. Nenhuma outra sequência pertence a $V[X]$. O número de elementos do conjunto X que aparecem em uma sequência v é chamado comprimento da palavra não associativa v, e será denotado por $deg(v)$.

Proposição 1.1.17. *Seja* v *uma palavra não associativa de elementos de algum conjunto. Então*

(i) o número de símbolos "(" é igual ao número de símbolos ")";

(ii) em qualquer subsequência inicial de v *o número de símbolos "(" não é menor que o número de símbolos ")".*

Demonstração. Veja [?], pág. 2, Proposição 1. $\square$

Definimos no conjunto $V[X]$ uma operação binária denotada por $\cdot$, de acordo com as regras a seguir. Sejam $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in V[X], u, v \notin X$. Definimos

$$x_1 \cdot x_2 = x_1x_2;$$
$$x_1 \cdot u = x_1(u);$$
$$v \cdot x_2 = (v)x_2;$$
$$v \cdot u = (v)(u).$$

Proposição 1.1.18. *Toda palavra não associativa v com $deg(v) \geq 2$ tem uma única representação como produto de duas palavras não associativas de comprimento menor.*

Demonstração. Veja [?], pág. 4, Teorema 2. □

Consideramos agora o espaço vetorial $K\{X\}$ tendo como base o conjunto $V[X]$, estendemos a multiplicação em $V[X]$ para elementos de $K\{X\}$ através da regra

$$(\sum_i \alpha_i u_i) \cdot (\sum_j \beta_j v_j) = (\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i \cdot v_j)),$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in K$ e $u_i, v_j \in V[X]$. Com essa multiplicação $K\{X\}$ é uma álgebra chamada **álgebra livre com conjunto de geradores** X.

Toda álgebra livre satisfaz propriedade universal a seguir.

Definição 1.1.19. *Seja β uma* ***classe de álgebras*** *a qual pertence A gerada como álgebra por X. Dizemos que A é* ***livre na classe*** *β* ***livremente gerado por*** *X se, para qualquer álgebra $B \in \beta$ e qualquer $f : X \to B$ existir um homomorfismo $\phi : A \to B$ que estende f.*

A álgebra $K\{X\}$ é livre na classe das álgebras (não associativas) livremente gerada X.

Os elementos da álgebra $K\{X\}$ são chamados **polinômios não associativos**. Um elemento da forma $\alpha v, \alpha \in K, v \in V[X]$, é chamado **monômio** não associativo. O comprimento de v é chamado **grau do monômio**. O maior grau dos monômios cuja soma constitui um polinômio é chamado **grau do polinômio**.

Seja G um grupo e seja $X_g, g \in G$ uma coleção de conjuntos infinitos disjuntos e enumeráveis. A álgebra livre $K\{X\}$, onde $X = \bigcup_{g \in G} X_g$, possui uma G-graduação natural. Definimos o grau da variável $x \in X$ como sendo g, se $x \in X_g$. E o grau do monômio $\alpha(u)(v), \quad \alpha \in K, u, v \in V[X]$, como sendo $|u||v|$, em que $|u|$ é o grau do monômio u. Assim,

$$K\{X\} = \bigoplus_{g \in G} K\{X\}_g$$

em que $K\{X\}_g$ é o subespaço de $K\{X\}$ gerado pelos monômios de grau g, é uma G-graduação para $K\{X\}$. Com essa graduação $K\{X\}$ é chamada álgebra livre G-graduada.

Um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in K\{X\}$ é dito **homogêneo** se o grau total de cada um de seus monômios é constante. O polinômio $f(x_1, ..., x_n)$ é **multihomogêneo** de multigrau $(k_1, ..., k_n)$ se em todos os monômios que constituem f, e para todo $j \in \{1, ..., n\}$, a variável x_j tem grau k_j. Um polinômio multihomogêneo de multigrau $(1, ..., 1)$ é chamado **multilinear**.

Definição 1.1.20. *Um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in K\{X\}$ é dito uma **identidade polinomial** de uma K-álgebra A se $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, ..., a_n \in A$. Dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou uma **PI-álgebra** se satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Definição 1.1.21. *Dizemos que A_1 e A_2 são álgebras PI-equivalentes se $T(A_1) = T(A_2)$, onde $T(A)$ é o conjunto de todas as identidades polinomiais de A.*

Se $f \in K\{X\}$ é uma identidade de A, denotamos $f \equiv 0$.

Definição 1.1.22. *Seja A uma álgebra G-graduada. Um polinômio $f(x_1^{g_1}, ..., x_n^{g_n}) \in K\{X\}$ é uma **identidade polinomial graduada** de A se, para todo elemento homogêneo $a_i \in A_{g_i}$, com $i \in \{1, ..., n\}$ tem-se que*

$$f(a_1, ..., a_n) = 0.$$

Nesse caso dizemos que A é uma PI-álgebra G-graduada.

Em particular, se a graduação é trivial a definição coincide com a Definição **??**.

Dada uma álgebra G-graduada A, definimos

$$T_G(A) = \{g \in K\{X\} : g \equiv 0 \text{ em } A\}$$

como sendo o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de A.

No restante do texto falaremos simplesmente identidade, querendo dizer identidade polinomial G-graduada.

Exemplo 1.1.23. *Toda álgebra comutativa, não necessariamente associativa, é uma PI-álgebra já que satisfaz a identidade $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.*

Exemplo 1.1.24. *A álgebra $M_2(K)$ satisfaz as identidades $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$ e $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$.*

Definição 1.1.25. *Um ideal I de $K\{X\}$ é chamado **T-Ideal** se $\phi(I) \subseteq I$ para todos endomorfismos de $K\{X\}$. Neste caso dizemos que I é invariante por endomorfismos de $K\{X\}$. Se I é invariante por endomorfismos graduados, dizemos que I é um T_G**-ideal**.*

O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra é um T-ideal. O conjunto das identidades graduadas de A, denotado por $T_G(A)$, é um T_G-ideal.

Definição 1.1.26. *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq K\{X\}$, a classe de todas as álgebras G-graduadas A tais que $g \equiv 0$ para todo $g \in S$ é chamada **variedade** $V = V(S)$ determinada por S. O conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma variedade V é um T_G-ideal de $K\{X\}$ e é denotado por $T_G(V)$. Se V é uma variedade e A é uma álgebra G-graduada tal que $T_G(A) = T_G(V)$, dizemos que V é a **variedade gerada por** A. Denotamos por $var^G(A)$ o conjunto de todas as variedades que satisfazem as mesma identidades graduadas da álgebra A.*

Definição 1.1.27. *Uma álgebra $F_Y\mathcal{B}$ na variedade $\mathcal{B}$ é chamada **álgebra relativamente livre** de $\mathcal{B}$ gerada por Y, se $\mathcal{B}$ é uma álgebra livre na classe $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.1.28. *Seja X um conjunto enumerável infinito, $K\{X\}$ uma álgebra livre, livremente gerada por X, V uma variedade e $T(V) \subseteq K\{X\}$. Então $\frac{K\{X\}}{T(V)}$ é uma álgebra relativamente livre sobre o conjunto $\bar{X} = \{x + T(V) | x \in X\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres com respeito a V de mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração. Veja [?] pág. 4, Teorema 1.2.4. □

Dado um conjunto $S \subseteq K\{X\}$, o T_G-ideal gerado por S, denotado por $\langle S \rangle^{T_G}$, é a interseção de todos os T_G-ideais de $K\{X\}$ que contém S. Se $S \subseteq T_G(A)$ é tal que $T_G(A) = \langle S \rangle^{T_G}$, dizemos que S é uma **base das identidades polinomiais graduadas de** A.

Denotamos por $K\langle X \rangle$ a álgebra relativamente livre gerada por

$$X = \{x_i^g : i \geq 0, g \in G\}$$

das variedades das álgebras associativas G-graduadas e por $L(X)$ a álgebra relativamente livre da variedades das álgebras de Lie G-graduadas. Se $Y = \{y_j^g : j \geq 0, g \in G\}$, então

$$K\langle X \rangle \cong \frac{K\{X\}}{\langle (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) : y_j \in X^g, \forall g \in G \rangle^{T_G}}$$

e

$$L(X) \cong \frac{K\{Y\}}{\langle y_1^2, (y_1y_2)y_3 + (y_2y_3)y_1 + (y_3y_1)y_2 : y_j \in Y^g, \forall g \in G \rangle^{T_G}}.$$

Embora todos os resultados enunciados abaixo valham em qualquer álgebra relativamente livre, em particular para $K\{X\}$, por conveniência trabalharemos com a álgebra $L(X)$.

Definição 1.1.29. *Um polinômio $g(x_1^{g_1}, ..., x_n^{g_n}) \in L(X)$ é dito uma **identidade polinomial graduada** de uma álgebra de Lie G-graduada $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$ se $g(l_1, ..., l_n) = 0$ para quaisquer $l_i \in L_{g_i}$.*

Teorema 1.1.30. *Seja K um corpo infinito. Se f é uma identidade para uma K-álgebra A, então cada componente multihomogênea de f é ainda uma identidade de A.*

Demonstração. Seja f um polinômio em n variáveis, para cada $x_t, 1 \leq t \leq n$, f pode ser escrito como
$$f = \sum_{i=0}^{m} f_i,$$
em que f_i é a soma de todos os monômios de grau i em x_t e m é o grau de f em x_t.

Considere $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ elementos distintos de K. Como f é invariante por endomorfismo, $f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) \equiv 0$ para cada $j = 1, ..., m$. Assim,

$$f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^j f_i(x_1, ..., x_n) \equiv 0. \tag{1.1}$$

Escrevendo a matriz de Vandermond dos coeficientes de f

$$\triangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & ... & \alpha_m \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & ... & \alpha_m^m \end{pmatrix}.$$

Seja $\bar{f_i} = f_i(a_1, ..., a_n)$, para $a_1, ..., a_n \in A$, por (**??**), temos que $\triangle(\bar{f_i}, ..., \bar{f_n}) = 0$. Como $det(\triangle) = \prod_{0 \leq i \leq j \leq m} \alpha_j - \alpha_1$ é não nulo, segue que $f_1, ..., f_m = 0$ são identidades em A. □

Observação 1. *Seja A uma álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto β. Se um polinômio multilinear f se anula sobre β, então f é uma identidade de A.*

Demonstração. Seja $a_1 = \sum \alpha_{1_i} u_i, ..., a_n = \sum \alpha_{n_i} u_i$ elementos de A, sendo os $u_i's$ elementos de β. Então, como f é linear em cada uma das variáveis

$$f(a_1, ..., a_n) = \sum \alpha_{1_i} ... \alpha_{n_{i_n}} f(u_{i_1}, ..., u_{i_n}) = 0.$$

□

Dessa observação, concluímos que para mostrar que um polinômio multilinear é identidade para determinada álgebra é suficiente mostrar que ele se anula numa base dessa álgebra.

Definição 1.1.31. *Sejam $f, g \in L(X)$ dois polinômios. Dizemos que f e g são* ***equivalentes*** *se eles geram o mesmo T_G-ideal. Dizemos que f é uma consequência de g (ou f segue de g) se $f \in \langle g \rangle^{T_G}$, em que $\langle g \rangle^{T_G}$ representa o T_G-ideal gerado por g.*

Teorema 1.1.32. *Se a álgebra A satisfaz uma identidade de grau k então ela satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leq k$.*

Demonstração. Seja $f(x_1, ..., x_n) \in L(X)$ uma identidade da álgebra A. Se cada variável x_i aparece com grau menor ou igual a 1, em cada monômio de f, então substituindo algumas das variáveis por zero obtemos o resultado. Então podemos assumir que existe uma variável, digamos x_1, tal que $gr_{x_1}(f) > 1$.

Considere o polinômio

$$h(y_1, y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) - f(y_2, x_2, ..., x_n) - f(y_1, x_2, ..., x_n).$$

O polinômio h é uma identidade para A. Suponha por absurdo, que $h \equiv 0$ e substitua $y_1 = y_2 = x_1$ em h, temos que

$$h(x_1, x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1 + x_1, x_2, ..., x_n) - 2f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Decompondo f como na demonstração do Teorema **??**, isto é, fazendo

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_r,$$

temos que

$$-f_0 + (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_2 = 0$$

uma contradição, pois $d > 1$. Logo $h \not\equiv 0$.

Como $gr_{y_1}h = d - 1 < gr_{x_1}(f)$ por indução obtemos um polinômio multilinear que é uma identidade para A. $\square$

A construção feita nesse teorema é chamada **processo de multilinearização** e será muito utilizada ao longo deste trabalho. Para deixar mais claro o processo vamos a um exemplo.

Exemplo 1.1.33. *Considere polinômio $f(x_1, x_2) = x_2x_1^2x_2 \in K\langle X\rangle$. Linearizando em relação à variável x_1, temos*

$$\begin{aligned} h_1(y_1, y_2, x_2) = \ & x_2(y_1 + y_2)^2x_2 - x_2y_1^2x_2 - x_2y_2^2x_2 \\ & = x_2y_1^2x_2 + x_2y_1y_2x_2 + x_2y_2y_1x_2 \\ & +x_2y_2^2x_2 - x_2y_1^2x_2 - x_2y_2^2x_2 \\ & = x_2y_1y_2x_2 + x_2y_2y_1x_2. \end{aligned}$$

Agora linearizando h_1 em relação a variável x_2 temos,

$$\begin{aligned}h_2(y_1,y_2,z_1,z_2) = &\quad (z_1+z_2)y_1y_2(z_1+z_2) - h_1(y_1,y_2,z_1)\\ &+(z_1+z_2)y_2y_1(z_1+z_2) - h_1(y_1,y_2,z_2)\\ h_2(y_1,y_2,z_1,z_2) = &\ z_1y_1y_2z_2 + z_2y_2y_1z_1 + z_2y_1y_2z_1 + z_1y_2y_1z_2.\end{aligned}$$

Se quisermos voltar ao polinômio original podemos fazer $y_1 = y_2 = x_1$ e $z_1 = z_2 = x_2$. Esse processo de identificação de variáveis será utilizado no capítulo 3.

O próximo teorema nos garante que em característica zero podemos nos preocupar apenas com as identidades multilineares.

Teorema 1.1.34. *Se $charK = 0$, toda identidade polinomial não nula é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomiais multilineares.*

Demonstração. Pelo Teorema **??** é suficiente mostrar para $f = f(x_1, ..., x_n)$ multihomôgenea. Vamos aplicar o processo de multilinearização em f. Se $gr(f) = d > 1$, podemos escrever

$$f(y_1+y_2, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, ..., x_n),$$

com $gr_{y_1}(g_i) = i$ e $gr_{y_2}(g_i) = d - i$. Como a característica do corpo é zero, $\binom{d}{i} \neq 0$ e f é consequência de algum $g_i, i = 1, .., d-1$.

Aplicando indução acabamos a prova. $\square$

Definição 1.1.35. *Seja $g = g(x_1, ..., x_n) \in L(X)$ um polinômio multilinear. Dizemos que g **é alternado nas variáveis** x_i, x_j se o polinômio se anula quando substituímos x_i no lugar de x_j. Se g é alternado em x_i e x_j então*

$$g(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -g(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n).$$

Além disso, escrevendo qualquer permutação de S_n como um produto de transposições, se $g(x_1, ...x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ é alternado nas variáveis $x_1, ..., x_k$, então

$$g(x_{\sigma(1)}, ...x_{\sigma(k)}, x_{k+1}, ..., x_n) = (-1)^{\sigma} g(x_1, ...x_k, x_{k+1}, ..., x_n),$$

com $\sigma \in S_k$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. Se g é alternado em todas as suas variáveis, dizemos simplesmente que g é alternado.

1.2 Identidades estáveis e elementos genéricos

Nesta seção vamos falar sobre os elementos genéricos de uma álgebra. Esses elementos são importantíssimos nos estudo das identidades polinomiais pois para provar que determinado polinômio se anula em uma álgebra, é suficiente mostrar que tal polinômio se anula para os elementos genéricos dessa álgebra. Para falarmos de elementos genéricos vamos definir produto tensorial de álgebras.

Definição 1.2.1. *Sejam V, W espaços vetoriais sobre K. Consideremos o K espaço vetorial $K(V \times W)$ com base $V \times W$, e o subespaço $\mathcal{U}$ de $K(V \times W)$ gerado pelos elementos dos tipos*

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w);$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2);$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w);$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w);$$

com $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in K$. Definimos o produto tensorial de V e W denotado por $V \otimes_K W$ como sendo o espaço vetorial quociente $K(V \times W)/\mathcal{U}$. Como sempre trabalharemos sobre o corpo K, omitiremos o índice.

Teorema 1.2.2. *(Propriedade Universal do Produto Tensorial) Sejam V, W e U espaços vetoriais sobre K e $f : V \times W \to U$ uma aplicação bilinear. Então existe uma única transformação linear $T_f : V \otimes W \to U$ tal que $T_f(v \otimes w) = f(v, w)$ para quaisquer $v \in V, w \in W$.*

Definição 1.2.3. *Sejam A e B álgebras sobre K e considere o produto bilinear definido por*

$$\begin{array}{rccl} * : & (A \otimes B) \times (A \otimes B) & \longrightarrow & A \otimes B \\ & ((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) & \longmapsto & ((a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2)) = \ a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{array}$$

Segue da Propriedade Universal de Produto Tensorial que esse produto é bem definido. O espaço vetorial $A \otimes B$, munido desse produto, possui estrutura de álgebra e é chamado ***produto tensorial das álgebras** A **e** B.*

Agora, podemos construir a álgebra dos elementos genéricos.

Se A é uma álgebra sobre um corpo K, ao estender os escalares, obtemos uma nova álgebra sobre K cujas identidades são satisfeitas por A. Se o corpo K for finito, a álgebra maior tem, em geral, um T-ideal diferente.

Definição 1.2.4. *Seja f uma identidade da K-álgebra A. Dizemos que f é uma* ***identidade estável*** *para A se para toda K-álgebra comutativa C, f é ainda uma identidade para $A \otimes C$.*

Lema 1.2.5. *Se K é um corpo infinito e A uma K-álgebra, então toda identidade de A é estável.*

Demonstração. Sejam $f(x_1, ..., x_n) \in L(X)$ uma identidade para A, C uma álgebra comutativa sobre K e $\bar{A} = A \otimes C$. Podemos assumir f multihomogênea de multigrau $(m_1, ..., m_n)$. Para $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n \in \bar{A}$, vamos mostrar que $f(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = 0$.

Suponha que $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, ..., \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$ então

$$f(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = f(a_1, ..., a_n) \otimes c_1^{m_1} ... c_n^{m_n} = 0$$

já que C é comutativa. Disso segue o resultado.

Agora seja $\bar{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \bar{a}_2 = a_2 \otimes c_2, ..., \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$. Então

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = {} & f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, ..., a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, ..., a_n \otimes c_n) \\ & - \sum_{i=1}^{m_i - 1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, ..., a_n \otimes c_n) \end{aligned}$$

e pela demonstração do Teorema **??**,

$$f(x_1 + y_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(y_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m_i - 1} f_i(x_1, y_1, x_2, ..., x_n),$$

em que f_i com $gr_{x_1}(f_i) = i$ é uma consequência de f. Pela parte 1, segue o resultado.

Generalizando o argumento para o caso

$$\bar{a}_1 = \sum a_{1_i} \otimes c_{1_i}, ..., \bar{a}_n = \sum a_{n_i} \otimes c_{n_i} \in \bar{A}, a_{i_j} \in A, c_{i_j} \in C,$$

escrevemos $f(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n)$ como soma de expressões da forma $\bar{g} = g(a_{i_i} \otimes c_{j_i}, ..., a_{i_k} \otimes c_{j_k})$ em que $g(x_1, ..., x_k)$ é uma consequência de f. Novamente pela parte 1, segue o resultado. □

Sejam A uma álgebra de dimensão finita m sobre K e $\{u_1, ..., u_m\}$ uma base de A. Considere $\xi_j^{(i)}, i \geq 1, 1 \leq j \leq m$ indeterminadas comutativas e seja $K[\xi_j^{(i)}], i \geq 1, 1 \leq j \leq m$ o anel de polinômios sobre K nessas indeterminadas. Construímos $B = A \otimes K[\xi_j^{(i)}]$, a álgebra produto tensorial de A e $K[\xi_j^{(i)}]$.

Definição 1.2.6. *Os elementos $\xi^i = \sum u_j \otimes {\xi_j}^{(i)}, i = 1, 2, ...$ são chamados* ***elementos genéricos****. A subálgebra $\tilde{A}$ de B gerada por $\xi^1, \xi^2, ...$ sobre K é chamada* ***álgebra dos elementos genéricos****.*

Teorema 1.2.7. *Se K é infinito, a álgebra $\tilde{A}$ é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade $var(A)$ das álgebras que satisfazem as mesmas identidades de A. Em outras palavras, $\tilde{A} \cong \dfrac{L(X)}{T(A)}$ onde X é um conjunto enumerável infinito.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ enumerável e infinito e seja $\psi : L(X) \to \tilde{A}$ o homomorfismo induzido pela função $x_i \to \xi^i, i = 1, 2, ...$ Vamos mostrar que $ker(\psi) =$

$T(A)$. Pelo lema anterior, $T(A \otimes K[\xi_j^{(i)}]) = T(A)$ e assim $T(A) \subseteq Ker(\psi)$. Suponha agora que $g = g(x_1, ..., x_n) \in ker(\psi)$, isto é, $g(\xi^1, ..., \xi^n) = 0$ em $\tilde{A}$ e sejam $a_1, ..., a_n$ elementos arbitrários de A. Escreva cada a_i como combinação dos elementos da base $\{u_1, ..., u_m\}$ de A, ou seja, $a_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(i)} u_j$, com $\lambda_1^{(i)}, ..., \lambda_m^{(i)} \in K$. Como $K[\xi_j^{(i)}]$ é uma álgebra comutativa livre de posto enumerável, qualquer função $\xi^i \to \lambda_j^{(i)}$ se estende a um homomorfismo $K[\xi_j^{(i)}] \to K$. Então pela propriedade universal de produto tensorial, a função

$$a \to a, \xi_j^{(i)} \to \lambda_j^{(i)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

se estende a um homomorfismo $\phi : A \otimes K[\xi_j^{(i)}] \to A$ de modo que $\phi(\xi_j^{(i)}) = a_i, 1 \leq i \leq n$.

Então,

$$0 = \phi(g(\xi^1, ..., \xi^n)) = g(\phi(\xi^1), ..., \phi(\xi^n)) = g(a_1, ..., a_n).$$

Como $a_1, ..., a_n$ são elementos arbitrário de A, $g(x_1, ..., x_n) = 0$ é uma identidade de A e $ker(\psi) = T(A)$. $\square$

Seja $A = M_k(K)$ a álgebra das matrizes $k \times k$ sobre K. Neste caso, escolhendo as matrizes unitárias e_{ij} como base para A temos a álgebra dos polinômios $K\{\xi_{ij}^{(t)}\}$ nas variáveis $\xi_{ij}^{(t)}, t \geq 1, 1 \leq i, j \leq k$. Então $M_k(K) \otimes_K K[\xi_{ij}^{(t)}] \cong M_k(K[\xi_{ij}^{(t)}])$ e $\xi^t = \sum \xi_{ij}^{(t)} e_{ij}$ é a matriz com entradas $\xi_{ij}^{(t)}$. Os elementos ξ^t são chamados matrizes genéricas $k \times k$ sobre K e a álgebra $K\{\xi^1, \xi^2, ...\}$, gerada por esses elementos, é chamada a álgebra das matrizes genéricas de ordem k sobre K.

Corolário 1.2.8. *A álgebra $K\{\xi^1, \xi^2, ...\}$ sobre o corpo infinito K é a álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade gerada por $M_k(K)$.*

Definição 1.2.9. *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma* ***álgebra simples*** *se A não possui ideais bilaterais não triviais.*

O teorema abaixo nos fornece uma relação entre K-álgebras simples de dimensão finita e álgebras de matrizes, que será importante no próximo capítulo.

Teorema 1.2.10. *Se K é um corpo algebricamente fechado e A é uma K-álgebra simples de dimensão finita, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \simeq M_n(K)$.*

Capítulo 2

Teoria de Representações

Neste capítulo falaremos sobre as representações de grupos simétricos e sua relação com as identidades polinomiais de uma álgebra. Para isso dividimos o capítulo em três seções: na primeira daremos as definições básicas de representações de grupos e alguns resultados importantes, sem demonstrá-los; na segunda falaremos sobre as representações do grupo simétrico; na última seção, apresentaremos alguns resultados das relações entre representações do grupo simétrico e as identidades polinomiais. Os resultados da última seção serão essenciais para o próximo capítulo.

As duas primeiras seções serão baseadas em [?], enquanto a última será baseada em [?].

2.1 Representações lineares de grupos

Definição 2.1.1. *Sejam K um corpo, V um K-espaço vetorial, $Gl(V)$ o grupo das transformações lineares inversíveis de V em V e G um grupo qualquer. Definimos uma* ***representação linear de G em V*** *como sendo um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ definida por $\phi(g) = \phi_g$. Sendo ϕ uma representação linear, definimos o grau desta representação como sendo a dimensão de V.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que uma representação é* ***fiel*** *se é injetora.*

No caso em que V tem dimensão finita n, podemos enxergar uma representação linear de G em V como sendo um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow Gl_n(K)$ uma vez que os grupos $Gl(V)$ e $Gl_n(K)$ são isomorfos. Quando quisermos deixar explícito o corpo em que estamos trabalhando diremos K-representação linear ou representação linear sobre K. A menos de menção contrária, sempre consideraremos o corpo K, G sempre denotará um grupo e V um K-espaço vetorial. Também falaremos apenas representação querendo dizer representação linear de G sobre V.

Definição 2.1.3. *Seja ϕ uma representação linear. Dizemos que um subespaço W de V é* ***ϕ-invariante*** *se $\phi_g(W) \subseteq W$, para todo $g \in G$. Se existe algum subespaço W ϕ-*

invariante de V tal que $\{0_V\} \neq W \neq V$ dizemos que ϕ é uma representação ***redutível****, caso contrário dizemos que ϕ é uma representação* ***irredutível****. A restrição de ϕ a W, $\phi_g|_W$, é chamada* ***subrepresentação****.*

Exemplo 2.1.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e V um K-espaço vetorial de dimensão n. Fixada uma base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, consideremos, para cada $\sigma \in S_n$, uma transformação linear $T_\sigma : V \longrightarrow V$ definida por $T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$. A representação linear, $\psi : S_n \longrightarrow Gl(V)$ definida por $\psi(\sigma) = T_\sigma$ é redutível. O subespaço $W = \langle v_1 + v_2 + \cdots + v_n \rangle$ de V é ψ-invariante. A representação $\psi|_W$ é irredutível.*

Definição 2.1.5. *Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais e ϕ e ψ representações de V e W respectivamente. Dizemos que ϕ e ψ são* ***representações equivalentes*** *se existe uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ bijetora tal que $\psi_g T = T\phi_g, \forall g \in G$.*

Definição 2.1.6. *Sejam G um grupo e ϕ uma representação linear. Dizemos que ϕ é* ***completamente redutível (ou semissimples)*** *se existem $W_1, W_2, ..., W_n$ subespaços ϕ-invariantes de V tais que:*

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$;

(ii) As restrições de ϕ aos W_i's são todas irredutíveis.

Definição 2.1.7. *A soma direta de duas representações ρ_1 e ρ_2 de um grupo G sobre os espaços vetoriais V_1 e V_2 é uma representação $\rho_1 \oplus \rho_2$ com a ação $\rho(x, y) = \rho_1(x) \oplus \rho_2(y)$.*

Consideremos um grupo G e duas representações lineares ϕ e ψ sobre V e W, respectivamente. Dado $g \in G$, consideremos a aplicação $F_g : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ definida por $F_g(v, w) = \phi_g(v) \otimes \psi(w)$. Como esta aplicação é bilinear, existe uma transformação linear $\rho_g : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$ tal que $\rho_g(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w), \rho_g \in Gl(V \otimes W)$. Podemos definir $\rho_g : G \longrightarrow Gl(V \otimes W), g \mapsto \rho_g$. Essa aplicação é uma representação linear de G em $V \otimes W$ e é chamada **produto tensorial de ϕ e ψ** e denotada por $\phi \otimes \psi$.

Existe uma estreita relação entre as representações lineares (sobre um corpo K) de um grupo e os KG-módulos.

Para estudar essas relações, vamos dá algumas definições sobre módulos.

Definição 2.1.8. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um grupo abeliano M é um* ***A-módulo à esquerda*** *(ou módulo à esquerda sobre A), daqui por diante simplesmente denominado módulo, se está munido de uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a, m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

que satisfaz

1. $(a_1 + a_2) \cdot m = (a_1 \cdot m) + (a_2 \cdot m)$;

2. $a \cdot (m_1 + m_2) = (a \cdot m_1) + (a \cdot m_2)$;

3. $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$;

4. $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 \cdot a_2)m$;

5. $1_A \cdot m = m$;

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A, m, m_1, m_2 \in M$ *e* $\lambda \in K$.

Definição 2.1.9. *Sejam* M, N *A-módulos. Uma aplicação* $\phi : M \to N$ *é um homomorfismo de A-módulos se for linear em A, isto é, se* $\phi(am + n) = a\phi(m) + \phi(n)$*. Se* ϕ *for uma bijeção então é chamado de isomorfismo.*

Definição 2.1.10. *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Dizemos que um subespaço vetorial N de M é um* ***submódulo*** *de M se* $a \cdot n \in M, \forall a \in A, n \in N$*. Um submódulo N é* ***minimal*** *se não existe submódulo* N_1 *de M tal que* $0 \neq N_1 \subset N$ *e* ***irredutível*** *(ou simples) se seus únicos submódulos são* $\{0\}$ *e M.*

O próximo resultado é de fácil verificação e nos fornece uma relação entre módulos e representações.

Proposição 2.1.11. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.*

1. *Se* ϕ *é uma representação de G sobre V , então V é um KG-módulo com respeito ao produto*
$$(\sum_{g \in G} \lambda_g g)v = \sum_{g \in G} \lambda_g \phi_g(v).$$
Se W é um subespaço ϕ*-invariante de V então W é um submódulo do KG-módulo V.*

2. *Se V for um KG-módulo à esquerda, então a aplicação*
$$\begin{array}{rccl} \rho: & G & \to & Gl(V) \\ & g & \longmapsto & T_g : \quad V \to V \\ & & & \qquad v \quad \mapsto \; gv \end{array}$$
é uma representação de G sobre V.

Por abuso de notação, falaremos simplesmente G-módulo querendo dizer KG-módulo.

Proposição 2.1.12. *Sejam* ϕ *e* ψ *duas representações lineares de G. Então vale:*

(a) ϕ *e* ψ *são equivalentes se, e somente se, os respectivos* KG*-módulos,* V *e* W*, são isomorfos.*

(b) ϕ *é irredutível se, e somente se, o respectivo* KG*-módulo* V *é irredutível.*

Definição 2.1.13. *(Representação do produto direto) Sejam* K *um corpo,* G *um grupo expresso como produto direto* $G = H \times F$*,* ψ *e* ϕ *representações de* H *e* F*, respectivamente. Podemos construir uma* K*-representação de* G *usando o produto tensorial. Suponha que* ψ *e* ϕ *induzem um* KH*-módulo* M *e um* KF*-módulo* N*, respectivamente, considere o produto tensorial*

$$T = M \otimes_K N$$

e faça T *um* KG*-módulo à esquerda definindo*

$$(a, b)(x \otimes y) = (ax) \otimes (by),$$

$a \in M, x \in H, b \in N$ *e* $y \in F$*. Então* T *dá origem a uma representação* $\rho = \psi \# \phi$*, chamada* ***produto de Kronecker de*** ψ ***e*** ϕ*. O grau de* ρ *é o produto dos graus de* ϕ *e* ψ*.*

Teorema 2.1.14. *Se* K *é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito* G*, então o número de* K*-representações lineares irredutíveis de* G *é finito, a menos de equivalência, e é igual ao número de classes de conjugação de* G*.*

Teorema 2.1.15. *Sejam* K *um corpo algebricamente fechado e* $G = H \times F$

1. *Se* ϕ *e* ψ *são representações irredutíveis de* H *e* F*, então* ρ *é uma representação irredutível de* G*;*

2. *Assuma que* G *é finito e* K *um corpo cuja característica não divida a ordem de* G*. Se* $\{\psi_1, ..., \psi_h\}$ *e* $\{\phi_1, ..., \phi_f\}$ *são o conjunto de todas as* K*-representações irredutíveis de* H *e* F*, duas a duas não equivalentes, então* $\rho_{ij} = \psi_i \# \phi_j, 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq f$ *formam o conjunto de todas as* K*-representações irredutíveis duas a duas não equivalentes.*

Demonstração. Veja [?] pág.236. $\square$

Teorema 2.1.16. *(Maschke) Seja* G *um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica do corpo* K*. Se* $\phi : G \longrightarrow Gl(V)$ *é uma representação linear de grau finito e* W *é um subspaço* ϕ*-invariante de* V*, então existe um subespaço* ϕ*-invariante* W_1 *de* V *tal que* $V = W \oplus W_1$*. Consequentemente,* ϕ *é completamente redutível.*

Se a característica do corpo é zero sempre vale o teorema de Maschke.

Proposição 2.1.17. *Sejam A uma álgebra e M e N A-módulos isomorfos. Se $M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$ e $N = N_1 \oplus ... \oplus N_m$ onde M_i e N_j são submódulos minimais de M e N respectivamente, então $n = m$ e $M_i \simeq N_j$ para todo $i = 1, ..., n$, reordenando os $N_j's$ se necessário.*

Proposição 2.1.18. *Considere KG como um KG-módulo. Se K é um corpo algebricamente fechado, todo KG-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal de KG.*

Demonstração. Sejam V um G-módulo irredutível e um elemento $0 \neq v \in V$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & KG & \to & V \\ & \sum \alpha_g g & \mapsto & \sum \alpha_g g v. \end{array}$$

Temos que Φ é um homomorfismo de KG-módulos. Pelo Teorema de Maschke, $KG = ker\Phi \oplus W$, onde W é um KG-módulo e KG é completamente redutível. Obtemos $Im\Phi = V$, pois V é irredutível. Pelo Teorema do Isomorfismo $\dfrac{KG}{ker\Phi} \simeq W \simeq Im(\Phi) = V$, e W é um ideal minimal de KG isomorfo a V. □

Para cada $j = 1, ..., m$, consideremos o ideal bilateral $J_j = I_j KG$. Então J_j é exatamente a soma de todos os ideais minimais à esquerda de KG isomorfos à I_j.

Proposição 2.1.19. $KG = J_1 \oplus ... \oplus J_m$.

Supondo que K é algebricamente fechado, temos $J_j \simeq M_{d_j}(K)$, em que d_j é o grau da representação irredutível associada ao módulo I_j. Pelo Teorema **??**, segue então o próximo resultado.

Proposição 2.1.20. *Se K é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G então*

$$KG \simeq M_{d_1}(K) \oplus M_{d_2}(K) \oplus \cdots \oplus M_{d_m}(K)$$

onde $d_1, ..., d_m$ são os graus das K-representações irredutíveis de G.

Definição 2.1.21. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e $\phi : G \to Gl(V)$ uma representação linear. Definimos o* ***caracter*** *de ϕ como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \chi_\phi : & G & \longrightarrow & K \\ & g & \longmapsto & \chi_\phi(g) = tr(\phi_g) \end{array}.$$

Dizemos que χ_ϕ é um caracter irredutível de G se a representação ϕ é irredutível. Sendo $\phi : G \to Gl(V)$ e $\psi : G \to Gl(W)$ representações equivalentes, temos que existe uma transformação linear bijetora $T : V \to W$ tal que $\psi_g = T\phi_g T^{-1}$, para todo $g \in G$. Logo

$$\chi_\psi(g) = tr(\psi_g) = tr(T\phi_g T^{-1}) = tr(\phi_g) = \chi_\phi(g)$$

e portanto $\chi_\psi = \chi_\phi$.

Seja $G = H \times F$ e $\rho = \psi\#\phi$ uma K-representação de G, então o caracter de ρ é dado por

$$\chi_\rho(h, f) = \chi_\psi(h) \otimes \chi_\phi(f).$$

Teorema 2.1.22. *Todo caracter de um grupo G é uma soma de caracteres irredutíveis.*

Sendo G um grupo finito, temos que o número de K-caracteres irredutíveis de G é finito. Sendo $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m$ esses caracteres, segue do resultado anterior que dado χ um K-caracter de G, existem inteiros não negativos $n_1, n_2, ..., n_m$ tais que

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + ... + n_m\chi_m$$

em que pelo menos um dos $n_i's$ deve ser estritamente positivo.

Teorema 2.1.23. *Se K é um corpo de característica 0, então duas K-representações que têm o mesmo caracter são equivalentes.*

2.2 Representações do grupo simétrico

Nesta seção falaremos sobre as representações lineares tomando $G = S_n$, o grupo das permutações de n. Para isso precisaremos introduzir a Teoria de Young sobre as representações desse grupo.

Começaremos com as definições de partição, diagrama e tabela de Young. Em seguida construiremos os S_n-módulos irredutíveis e obteremos as principais propriedades destas representações.

No que segue, I_n denotará o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$.

Definição 2.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos uma **partição** de n como sendo uma sequência $\lambda = (n_1, n_2, ..., n_r)$ de inteiros positivos tais que $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_r > 0$ e $n_1+n_2+...+n_r = n$. O **comprimento** de λ é o número r e é denotado por $l(\lambda)$.*

Se λ é uma particão de n então denotaremos por $\lambda \vdash n$ e $p(n)$ denotará o número de partições de n que coincide com o número de classes de conjugação de S_n.

No restante desta seção, λ sempre denotará uma partição de n.

Definição 2.2.2. *Sejam λ uma partição de n e $l(\lambda)$ seu comprimento. Definimos o **diagrama de Young** $D(\lambda)$ da partição λ como sendo o conjunto*

$$D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \quad 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq n_i\}.$$

O diagrama de Young possui exatamente n elementos que costumam ser representados por quadrados (denominados células ou boxes) dispostos em $l(\lambda)$ linhas com n_j

colunas em cada linha. Da esquerda para a direita, as primeiras células de cada linha aparecem na mesma coluna. O número total de colunas é igual à n_1.

Exemplo 2.2.3. *Tomando* $\lambda = (4,3,2,1) \vdash 10$*, representamos o diagrama de* λ *por*

$$D(\lambda) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

ou por

$$D(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \\ \cline{1-3} \ & \times \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1}\end{array}$$

onde o $\times$ *está marcado na célula* $(3,2)$*, ou seja, na terceira linha e segunda coluna.*

Definição 2.2.4. *Dado* $\lambda \vdash n$*, definimos a* ***partição conjugada*** *de* λ *como sendo* $\lambda' \vdash n$ *tal que* $D(\lambda') = D(\lambda)^t = \{(j,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq n_i\}$*. Observe que* n_1 *será o número de linhas de* λ' *e* $l(\lambda)$ *o número de colunas.*

Exemplo 2.2.5. *Sendo* $\lambda = (4,2,2,2)$ *temos que* $\lambda' = (4,4,1,1)$ *e*

$$D(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2} \ & \ \\ \cline{1-2} \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad e \qquad D(\lambda') = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1} \ \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Por esse exemplo, podemos ver que a partição conjugada corresponde à partição cujo diagrama de Young é uma reflexão do diagrama de Young de λ em relação à diagonal principal. Observe ainda que o diagrama da partição conjugada consiste apenas em trocar linhas por colunas no diagrama original.

Exemplo 2.2.6. *Observe que se* $\lambda = (4,3,2,1)$ *pelo Exemplo* **??** *então* $\lambda = \lambda'$

Definição 2.2.7. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda = (n_1, ..., n_r) \vdash n$*. Uma* ***tabela de Young*** *é uma função bijetora* $T : D(\lambda) \to I_n$ *que consiste no preenchimento das células de* $D(\lambda)$ *com os números de 1 até* n *sem repeti-los. Dizemos que uma tabela de Young é* ***standard*** *se as células de* $D(\lambda)$ *são preenchidas de forma que os números nas linhas cresçam da esquerda para a direita e os números nas colunas cresçam de cima para baixo.*

Exemplo 2.2.8. *Se* $\lambda = (3,2,2) \vdash 7$ *e* T_1 *e* T_2 *são duas tabelas de Young de* λ *da seguinte forma:*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 3 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad e \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Temos que T_1 *é uma tabela standard mas* T_2 *não, pois a segunda coluna não está na ordem crescente.*

Quando trabalharmos com mais de uma partição, a fim de evitar possíveis confusões, uma tabela de uma partição λ será denotada por T_λ. Sendo λ uma partição de n existem exatamente $n!$ tabelas de Young do diagrama $D(\lambda)$. O conjunto de todas as tabelas de λ será denotado por Tab_λ.

Definição 2.2.9. *Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$ e $\sigma \in S_n$. Definimos a tabela $\sigma T \in Tab_\lambda$ pela composição $\sigma \circ T : D(\lambda) \to I_n$.*

Observe que $\sigma T = T$ se, e somente se, $\sigma = Id$. Observe também que dadas duas tabelas T_1 e T_2 do mesmo diagrama $D(\lambda)$, existe $\alpha \in S_n$ tal que $\alpha T_1 = T_2$.

Exemplo 2.2.10. *Considere as duas tabelas do exemplo anterior*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 3 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad e \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array} .$$

Observe que $T_2 = \sigma T_1$, sendo $\sigma = (35)$.

Exemplo 2.2.11. *Considere $\sigma = (123)$ e $T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$. Então $\sigma T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$.*

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash n$ e T uma tabela de Young do diagrama $D(\lambda)$. Para $k \in \{1, 2, ..., l(\lambda)\}$, definimos a k-ésima linha de T como sendo o conjunto $L_k = \{T(k, j) : 1 \leq j \leq n_k\}$. Para $k \in \{1, 2, ..., n_1\}$ definimos a k-ésima coluna de T como sendo o conjunto $C_k = \{T(i, k) : 1 \leq i \leq r, n_i \geq k\}$.

Considerando a tabela T_1 do exemplo anterior temos

$$L_1 = \{T(1,1), T(1,2), T(1,3)\} = \{1,4,3\}, L_2 = \{T(2,1), T(2,2)\} = \{2,5\}$$

e

$$C_1 = \{T(1,1), T(2,1)\} = \{1,2\}, C_2 = \{T(1,2), T(2,2)\} = \{4,5\} \text{ e } C_3 = \{T(1,3)\} = \{3\}.$$

Definição 2.2.12. *Dada uma tabela de Young T definimos o* ***grupo das permutações nas linhas*** *de T como sendo*

$$R_T = \{\sigma \in S_n : \sigma(L_i) = L_i, \text{ para toda linha } L_i \text{ de } T\}$$

e o ***grupo das permutações nas colunas*** *de T como sendo*

$$C_T = \{\sigma \in S_n : \sigma(C_i) = C_i, \text{ para toda coluna } C_i \text{ de } T\}.$$

Observe que se $\sigma \in R_T$ então σT e T tem as mesmas linhas. Da mesma forma se $\tau \in C_T$ então τT e T tem as mesmas colunas. Por esse motivo R_T e C_T são chamados de estabilizador de linha e estabilizador de coluna, respectivamente. Além disso, se $\sigma \in R_T \cap C_T$, então σT e T tem as mesmas linhas e as mesmas colunas. Segue que $\sigma T = T$ e portanto $\sigma = 1$.

Exemplo 2.2.13. *Sejam* $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$ *e* $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$ *temos que*
$R_T = \{1, (13), (14), (34), (134), (143), (25), (13)(25), (14)(25), (34)(25), (134)(25), (143)(25)\}$
é o estabilizador de linha e
$C_T = \{1, (12), (16), (26), (126), (162), (45), (12)(45), (16)(45), (26)(45), (126)(45), (162)(45)\}$.
é o estabilizador coluna.

Definição 2.2.14. *Para uma tabela de Young T, definimos os seguintes elementos de KS_n:*

$$P_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma; \quad Q_T = \sum_{\tau \in C_T} (-1)^{\tau} \tau; e_T = P_T Q_T = \sum_{\tau \in C_T, \sigma \in R_T} (-1)^{\tau} \sigma \tau$$

onde $(-1)^{\tau}$ denota o sinal da permutação τ. O elemento e_T é chamado simetrizador de Young.

Exemplo 2.2.15.

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

$R_T = \{1, (12), (34), (12)(34)\}$; $\quad C_T = \{1, (13), (24), (13)(24)\}$;
$P_T = 1 + (12) + (34) + (12)(34)$; $\quad Q_T = 1 - (13) - (24) + (13)(24)$;
$e_T = 1 + (12) + (34) + (12)(34) - (13) - (24) + (13)(24) - (132) - (143) - (1432) - (124) - (234) - (1234) + (14)(23) + (1324) + (1423)$.

Teorema 2.2.16. *O elemento e_T é semi-idempotente, isto é, existe um elemento $\beta \in K$, não nulo, tal que $e_T^2 = \beta e_T$.*

Definição 2.2.17. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_{\lambda}$. Definimos os submódulos de KS_n*

$$M_T = KS_n e_T = \{a e_T | a \in KS_n\}.$$

Proposição 2.2.18. *Se $e_T^2 = \beta e_T$ para $\beta \in K$, não nulo, então*

$$dim M_T = \frac{n!}{\beta}.$$

Proposição 2.2.19. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_1, T_2 \in Tab_{\lambda}$. Então $M_{T_1} \cong M_{T_2}$ como KS_n-submódulos.*

Proposição 2.2.20. *M_T é um S_n-módulo irredutível.*

Proposição 2.2.21. *$KS_n \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n} M_{d_\lambda}(K)$ e $n! = \sum_{\lambda\vdash n} d_\lambda^2$, em que d_λ é o grau da representação associada a partição λ*

Proposição 2.2.22. *Sejam K um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Então existe uma correspondência um a um entre os S_n-caracteres irredutíveis e partições de n. Seja $\{\chi_\lambda | \lambda \vdash n\}$. Então*

$$KS_n = \oplus I_\lambda \cong \oplus M_{d_\lambda}(K),$$

em que $I_\lambda = e_\lambda KS_n$ e $e_\lambda = \sum_{\sigma\in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ é, a menos de um escalar, a unidade de I_λ.

Proposição 2.2.23. *Se $T_1, ..., T_{d_\lambda}$ são todas as tabelas standard de $\lambda \vdash n$ então I_λ, o ideal bilateral minimal correspondente a partição λ, pode ser decomposto como*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} M_{T_i}.$$

Agora queremos explicitar uma base para os $M_T's$. A partir de agora Std_λ denotará o conjunto de todas as tabelas standard de uma partição λ.

Teorema 2.2.24. $\sum_{\lambda\vdash n} (\#Std_\lambda)^2 = n!^2$.

Teorema 2.2.25. *Se $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$ então $dim M_T = d_\lambda = \#Std_\lambda$.*

Demonstração. Seja $I_\lambda = M_T KS_n$, temos que $dim I_\lambda = d_\lambda^2$. Pela proposição **??** temos que para todo $T' \in Std_\lambda, M_{T'} \cong M_T$, existe $\sigma \in S_n$ tal que $M_{T'} = M_T\sigma^{-1} \subseteq I_\lambda$. Assim, $\bigoplus_{T'\in Std_\lambda} M_{T'} \subseteq I_\lambda$, portanto

$$dim \oplus_{T'} \in Std_\lambda M_{T'} \leq dim I_\lambda \Rightarrow dim M_T(\#Std_\lambda) \leq d_\lambda^2 \Rightarrow \#Std_\lambda \leq d_\lambda.$$

Mas $(\sum \#Std_\lambda)^2 = n! = \sum d_\lambda^2$, logo $\#Std_\lambda = d_\lambda$. □

Corolário 2.2.26. *A decomposição explícita de KS_n em soma direta de ideais minimais à esquerda é dada por $KS_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n}(\bigoplus_{T\in Std_\lambda} M_T)$.*

Definição 2.2.27. *Sejam $\lambda \vdash n, T \in Std_\lambda$. Definimos $\Sigma_T = \{\sigma \in S_n | \sigma T \in Std_\lambda\}$. Observamos que $\Sigma_T \neq \emptyset$ pois $1 \in \Sigma_T$.*

Teorema 2.2.28. *Sejam $\lambda \vdash n, T \in Std_\lambda$. O conjunto $B_T = \{\sigma e_T | \sigma \in \Sigma_T\}$ é uma base para M_T como espaço vetorial sobre K.*

Demonstração. Veja [?], pág.34. □

Definição 2.2.29. *Para qualquer célula $(i, j) \in D(\lambda)$ definimos o **gancho com extremidade em** (i, j) como sendo o conjunto*

$$\{(i, j); j \leq k \leq \lambda_i\} \cup \{(i, j); i \leq l \leq \lambda'_j\}.$$

Em outras palavras, o gancho com extremidade em (i, j) é o conjunto de células da linha i que estão à direita de (i, j), incluindo (i, j), unido ao conjunto de células da coluna j que estão abaixo de (i, j). Definimos o **comprimento do gancho** *por $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - j - i + 1$ e o produto dos ganchos de $D(\lambda)$ por $h(\lambda) = \prod_{1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_1} h_{ij}$.*

Lema 2.2.30. *Seja $\lambda \vdash n$. Para todo $T \in Tab_\lambda$ temos $e_T^2 = \beta_T e_T$, com $\beta_T = h(\lambda) = \frac{n!}{dim M_T}$.*

Teorema 2.2.31. *Seja $\lambda \vdash n$. Então*

$$\#Std_\lambda = \frac{n!}{h(\lambda)}.$$

Exemplo 2.2.32. $\lambda = (3, 2) \vdash 5, \lambda' = (2, 2, 1)$

$$D(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}, \quad D(\lambda') = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Vamos calcular o comprimento dos ganchos de λ.
$h_{11} = 3 + 2 - 1 - 1 + 1 = 4, \quad h_{21} = 2 + 2 - 2 - 1 + 1 = 2, \quad h_{12} = 3 + 2 - 1 - 2 + 1 = 3,$
$h_{13} = 3 + 1 - 1 - 3 + 1 = 1, \quad h_{22} = 2 + 2 - 2 - 2 + 1 = 1,$
$h(\lambda) = 4.2.3.1.1 = 4! = 24.$

$\#Std_\lambda = \frac{5!}{4!} = 5.$

$$Std_\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array} \right\}.$$

Na próxima seção vamos relacionar a teoria desta seção com o próximo capítulo.

2.3 S_n-representações sobre polinômios multilineares

Lema 2.3.1. *Seja M um S_n-módulo irredutível com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda, \lambda \vdash n$. Então M pode ser gerado como S_n-submódulo por um elemento da forma $e_T f$, para algum $f \in M$ e alguma tabela de Young T_λ da forma λ. Além disso, para qualquer tabela de Young T^*_λ da forma λ existe $f' \in M$ tal que $M = KS_n e_{T^*_\lambda} f'$.*

Demonstração. Lembre-se que $KS_n = \bigoplus I_\mu$, onde I_μ é um ideal bilateral de KS_n. Temos que

$$KS_n = \bigoplus_{\mu \vdash n, T \in Std_\mu} M_T.$$

Como $M = KS_n M$, existem $\mu \vdash n, T \in Std_\lambda$ e $f \in M$ tais que $0 \neq KS_n e_{T_\mu} f \subseteq M$. Pela irredutibilidade de M temos que $KS_n e_{T_\mu} f = M$. Também como $\chi(M) = \chi_\lambda$ obtemos

$\lambda = \mu$. Finalmente, se T_λ^* é outra tabela da mesma forma, então pela Proposição **??**, $e_{T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1}$ e $g = \sigma e_{T_\lambda^*} f'$, com $f' = \sigma^{-1} f$. □

Pela definição de R_T para qualquer $\sigma \in R_T$,temos que $\sigma e_{T_\lambda} f = e_{T_\lambda} f$, isto é, e_{T_λ} é estável sobre as R_T-representações. O número de elementos R_T-estáveis está intimamente ligado ao número de S_n-submódulos irredutíveis tendo caracter χ_λ.

Agora seja A uma PI-álgebra e $T(A)$ seu T-ideal de identidades. Sabemos que em característica zero $T(A)$ é determinado pelos seus polinômios multilineares.

Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios multilineares em $x_1, ..., x_n$ na álgebra livre $L(X)$.

A S_n-ação à esquerda sobre um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in P_n$, para $\sigma \in S_n$ é definida por $\sigma f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$, que é a permutação das variáveis de acordo com σ.

Vamos estudar $P_n \cap T(A)$. Como T-ideais são invariantes por permutação de variáveis de mesmo grau, obtemos que $P_n \cap T(A)$ é um S_n-submódulo à esquerda de P_n. Assim, $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}$ tem estrutura de módulo à esquerda induzida. Se $L(X)$ é a álgebra de Lie livre de posto enumerável sobre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ então $P_n(A)$ é o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ na álgebra relativamente livre $\frac{L(X)}{T(A)}$.

Definição 2.3.2. *Para $n \geq 1$, o S_n-caracter de $P_n(A)$ é chamado **n-ésimo cocaracter** de A (ou do T-ideal $T(A)$) e é denotado por $\chi(A)$. Podemos decompor o n-ésimo cocaracter em*

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde χ_λ é o caracter do S_n-módulo irredutível correspondente a λ e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente.

A definição anterior podem também ser escrita em termos de álgebras munidas de graduações não triviais. É este o caso que nos interessará nos próximos capítulos.

Para cada $n, n_1, ..., n_s \geq 0$ tal que $n = n_1 + ... + n_s$ defina $P_{n_1,...,n_s}$ como o espaço dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis

$$x_1^{g_1}, ..., x_{n_1}^{g_1}, ..., x_1^{g_s}, ..., x_{n_s}^{g_s},$$

$g_1, ..., g_s \in G$. O espaço $P_{n_1,...,n_s}$ é naturalmente equipado com uma estrutura $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo quando munido da ação

$$(\sigma_1, ..., \sigma_s) f(x_1^{g_1}, ..., x_{n_1}^{g_1}, ..., x_1^{g_s}, ..., x_{n_s}^{g_s}) = f(x_{\sigma_1(1)}^{g_1}, ..., x_{\sigma_1(n_1)}^{g_1}, ..., x_{\sigma_s(1)}^{g_s}, ..., x_{\sigma_s(n_s)}^{g_s})$$

para todo $(\sigma_1, ..., \sigma_s) \in S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$ e $f(x_1^{g_1}, ..., x_{n_1}^{g_1}, ..., x_1^{g_s}, ..., x_{n_s}^{g_s}) \in P_{n_1,...,n_s}$.

Seja $T_G(L)$ o ideal das identidades de uma álgebra de Lie graduada L munida de uma G-graduação. Denotamos por $P_{n_1,...,n_s}(L^G)$ o espaço dos polinômios multilineares em $\frac{L(X)}{T_G(L)}$ dependendo de n variáveis, em que $\lambda \vdash n$.

Como os T_G-ideais são invariantes pela permutação de variáveis de mesmo G-grau, $P_{n_1,...,n_s} \cap T_G(L)$ é um $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-submódulo de $P_{n_1,...,n_s}$, para toda álgebra de Lie graduada L. Além disso,

$$P_{n_1,...,n_s}(L) = \frac{P_{n_1,...,n_s}}{P_{n_1,...,n_s} \cap T_G(L)}.$$

também tem uma estrutura de $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-módulo à esquerda.

Teorema 2.3.3. *Seja A uma PI-álgebra com n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ dado na Definição* **??**. *Para a partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer polinômio $g = g(x_1, .., x_n) \in P_n$, a álgebra satisfaz a identidade $e_{T_\mu} g \equiv 0$.*

Demonstração. Considere as decomposições $KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda, P_n = Q \oplus J, Q = P_n \cap T(A)$ e $J \cong P_n(A)$. Fixe algum $\mu \vdash n$, então $m_\mu = 0$ em (2.2) se, e somente se, $I_\mu J = 0$. Em contrapartida, a igualdade $I_\mu J = 0$ é equivalente a inclusão $I_\mu P_n \subseteq Q$. Como I_μ é a soma de todos os ideais à esquerda M_{T_μ} e esta inclusão ocorre se, e somente se, $e_{T_\mu} f \in Q$ para qualquer $f \in P_n$, isto é, $e_{T_\mu} f \equiv 0$ é uma identidade de A. ☐

Existe também uma versão do teorema anterior no caso graduado.

Teorema 2.3.4. *Se A é uma PI-álgebra G-graduada com o $(n_1, ..., n_s)$-cocaracter denotado por $\chi_{n_1,...,n_s}(A)$ dado por*

$$\chi_{n_1,...,n_s}(A) = \sum_{(\lambda) \vdash (n_1,...,n_s)} m_{(\lambda)} \chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(s)}.$$

em que $\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(s)}$ é o $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$-caracter associado a partição $(\lambda) = (\lambda(1), ..., \lambda(s))$ com $\lambda(1) \vdash n_1, ..., \lambda(s) \vdash n_s$ e $m_{(\lambda)}$ é a multiplicidade correspondente. A multiplicidade $m_{(\lambda)}$ é igual a zero se, e somente se, para toda s-upla de tabelas $T_{\lambda(1)}, ..., T_{\lambda(s)}$ da forma $\lambda(1), ..., \lambda(s)$, respectivamente, e para todo $f(x_1^{g_1}, ..., x_{n_1}^{g_1}, ..., x_1^{g_s}, ..., x_{n_s}^{g_s}) \in P_{n_1,...,n_s}$ a álgebra A satisfaz a identidade $e_{(\lambda)} f \equiv 0$, em que $e_{(\lambda)} = e_{\lambda(1)} \cdots e_{\lambda(s)}$.

Abaixo apresentamos três lemas fundamentais ao próximo capítulo.

Lema 2.3.5. *Seja $X = Y \cup Z$ um conjunto enumerável infinito particionado em dois conjuntos enumeráveis e infinitos disjuntos Y e Z e seja $f = f(y, z_1, z_2) \in L(X)$, com $y \in Y, z_i \in Z$, um polinômio multihomogêneo em que o grau relativo a y é k, o grau relativo a z_1 é $q + r$ e o grau relativo a z_2 é q. Se f não é uma identidade de $sl_2^{\mathbb{Z}_2}$ (Veja o exemplo* **??***) e f é alternado em q pares distintos (z_1, z_2), então a linearização de f gera $(modT_{\mathbb{Z}_2}(sl_2))$ um $S_k \times S_{n-k}$-módulo irredutível cujo $S_k \times S_{n-k}$-caracter correspondente é $\chi_{(k)} \otimes \chi_{(q+r,q)}$.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [?] pág 34.

Exemplo 2.3.6. *O polinômio*

$$\begin{array}{rcl} g(x,y_1,y_2) & = & [x,y_1,y_1,y_2,y_2]-[x,y_2,y_1,y_2,y_1]-[x,y_1,y_2,y_1,y_2]+[x,y_2,y_2,y_1,y_1] \\ & = & [x,\bar{y}_1,\tilde{y}_1,\bar{y}_2,\tilde{y}_2] \end{array},$$

em que as barras e os tils sobre as variáveis significam que uma alternância é feita com respeito as mesmas, é alternado em dois pares distintos (y_1,y_2). *Definindo* $f(x_1,y_1,y_2,y_3,y_4)=[x_1,y_1,y_3,y_4,y_2]$,

$$T_{(1)}=\boxed{1}$$

e

$$T_{(2,2)}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

obtemos que $e_{T_{(1)}}e_{T_{(2,2)}}f$, *a menos da renomeação das variáveis, é a linearização de* g.

Lema 2.3.7. *Sejam* $X=X_{00}\cup X_{10}\cup X_{01}\cup X_{11}$ *conjunto enumerável infinito particionado em quatro conjuntos disjuntos infinitos e* $g=g(x,y,z)\in L(X)$, *com* $x\in X_{10},y\in X_{01},z\in X_{11}$ *um polinômio multihomogêneo em que* $gr_z(g)=p,gr_x(g)=q,gr_y(f)=r$. *Se* g *não é uma identidade de* $sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$ *então a linearização de* g *gera* $(modT_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2))$ *um* $S_p\times S_q\times S_r$-*módulo irredutível cujo* $S_p\times S_q\times S_r$-*caracter correspondente é* $\chi_{(p)}\otimes\chi_{(q)}\otimes\chi_{(r)}$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que existem um monômio $g(x,y,z)$ e uma permutação $\sigma\in S_n, n=p+q+r$ agindo à direita de g tal que

$$g(x,y,z)=(\underbrace{x\cdots x}_{p-vezes}\underbrace{y\cdots y}_{q-vezes}\underbrace{z\cdots z}_{r-vezes})\sigma.$$

Recordamos que S_n age à direita de um mônomio trocando a posição de suas variáveis. Defina $f=f(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r)\in P_{p,q,r}$ da seguinte forma: em g, troque as variáveis x das posições $1,...,p$, respectivamente, por $x_1,...,x_p$, as variáveis y das posições $1,...,q$, respectivamente, por $y_1,...,y_q$ e as variáveis z das posições $1,...,r$, respectivamente, por $z_1,...,z_r$. Agora defina

$$T_{(p)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & ... & \mathrm{p} \\ \hline\end{array},\quad T_{(q)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & ... & \mathrm{q} \\ \hline\end{array},\quad T_{(r)}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & ... & \mathrm{r} \\ \hline\end{array}$$

então $e_{T_{(p)}}e_{T_{(q)}}e_{T_{(r)}}g$ é a linearização de f em que $e_{T_{(p)}}$, $e_{T_{(q)}}$ e $e_{T_{(r)}}$ são os idempotentes essenciais de KS_p,KS_q e KS_r, respectivamente. Portanto, f gera um $S_p\times S_q\times S_r$-módulo irredutível.

Para generalizar esse argumento para um g arbitrário, podemos escrever $g=\alpha_1g_1+\cdots+\alpha_rg_r$, com $\alpha_i\in K$ e g_i como antes, e repetir o argumento para cada g_i, acrescentando ou ajustando a posição dos parênteses quando necessário. $\square$

Lema 2.3.8. *Seja* $X_i = \{x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i, ...\}$, $i \in \mathbb{Z}$, *uma família infinita e enumerável de conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos e seja* $g = f(x, y, z) \in L(X)$, *com* $x \in X_{-1}, y \in X_0, z \in X_1$, *um polinômio multihomogêneo em que* $gr_x(g) = p, gr_y(g) = q, gr_z(g) = r$. *Se* g *não é uma identidade de* $sl_2^{\mathbb{Z}}$, *então a linearização de* g *gera* $(modT_{\mathbb{Z}}(sl_2))$ *um* $S_p \times S_q \times S_r$-*módulo irredutível cujo* $S_p \times S_q \times S_r$-*caracter correspondente é* $\chi_{(p)} \otimes \chi_{(q)} \otimes \chi_{(r)}$.

Demonstração. A demonstração deste Lema é análogo ao caso anterior. $\square$

Capítulo 3

Cocaracteres Graduados de sl_2

Uma das maneiras de entender a estrutura de uma álgebra é descrevendo o conjunto das identidades polinomiais da mesma. Como não é uma tarefa simples descrever todas as identidades polinomiais de uma álgebra A, torna-se útil entender o espaço dos polinômios multilineares com um grau fixo módulo aqueles que são identidades de A. No caso da álgebra sl_2 podemos fazer as duas coisas. É isso que faremos nos próximos dois capítulos.

Neste capítulo aplicaremos a teoria de representações do grupo simétrico, vista no capítulo anterior, para estudar o espaço dos polinômios multilineares com um grau fixo módulo aqueles que são identidades graduadas de sl_2. Os resultados aqui apresentados são baseados no artigo [**?**].

Seja R um anel comutativo com unidade. A álgebra de Lie $sl_2(R)$ consiste do conjunto de todas as matrizes 2×2 de traço zero com entradas em R, munido do produto $[x, y] = xy - yx$, onde xy e yx representa o produto usual de matrizes. Os elementos,

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para sl_2 como um R-módulo. Da definição do produto obtemos que:

$$[h, e] = 2e, [e, f] = h, [h, f] = -2f. \tag{3.1}$$

Usaremos diversas vezes essas igualdades durante o texto.

Se K é um corpo de característica diferente de 2, então $sl_2(K)$, denotada simplesmente por sl_2, é uma álgebra simples, ou seja, não possui ideais não triviais.

Àqueles que tiverem curiosidade, podemos dar uma segunda definição da álgebra sl_2 usando grupos de Lie.

Recordamos que um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com estrutura de grupo de tal modo que a aplicação:

$$(x,y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$$

é diferenciável e que um campo X de vetores tangente a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto $p \in G$ corresponde um vetor X_p de T_pG, onde X_p denota o valor do campo X no ponto $p \in G$. O campo X é isomorfo ao espaço tangente de G.

Seja

$$SL_2(K) = \left\{ h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$$

o grupo de Lie das matrizes de ordem 2, e determinante igual a 1. Definimos $sl_2(K)$ como o espaço tangente à variedade de Lie SL_2.

Mais informações sobre a relação entre Grupo de Lie e Álgebra de Lie podem ser encontradas em [?].

Esta definição foge ao objetivo da dissertação e está posta aqui apenas como uma resposta a pergunta frequente sobre a relação entre grupo de Lie e álgebra de Lie. Foge também ao objetivo a utilização do espaço tangente na obtenção de informações sobre o grupo de Lie. Portanto, voltemos ao assunto.

Lembramos que uma álgebra de Lie é graduada se pode ser escrita como soma direta de subespaços indexados por elementos de um grupo abeliano que tem um bom comportamento sobre o produto.

Seja G um grupo qualquer e denote $L = sl_2$. A menos de isomorfismo, existem 4 graduações para L:

1. G = 0: a graduação trivial;

2. $G = \mathbb{Z}_2$:
   $L_0 = Kh, \quad L_1 = Ke \oplus Kf;$

3. $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$:
   $L_{00} = 0, \quad L_{10} = Kh, \quad L_{01} = K(e+f), \quad L_{11} = K(e-f);$

4. $G = \mathbb{Z}$:
   $L_{-1} = Ke, \quad L_0 = Kh, \quad L_1 = Kf, \quad L_i = 0, i \notin \{-1, 0, 1\}.$

Neste capítulo, para facilitar a escrita, abriremos mão dos colchetes e representaremos o produto $[a, \underbrace{b, ..., b}_{n-vezes}]$ simplesmente por $a \cdot b^n$. Note que esse produto não é associativo e portanto não é igual a zero.

3.1 Cocaracteres $\mathbb{Z}_2$-graduados de sl_2

Sejam $X = Y \cup Z$ um conjunto enumerável infinito particionado em dois conjuntos enumeráveis e infinitos disjuntos Y e Z, $I = T_2(sl_2)$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2, $\frac{L(X)}{I}$ a álgebra relativamente livre na variedade gerada por sl_2 munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação e $P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2}) = \frac{P_{k,n-k}}{P_{k,n-k} \bigcap I}, \forall n \geq 1, k > 0$ o espaço dos polinômios multilineares em $\frac{L(X)}{I}$ dependendo de n variáveis tais que as primeiras k variáveis, denominadas variáveis pares, pertencem a Y e as $n-k$ variáveis restantes, denominadas variáveis ímpares, pertencem a Z. Defina a ação a esquerda de $S_k \times S_{n-k}$ em $P_{k,n-k}$ por

$$(\tau_1, \tau_2) f(y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_{n-k}) = f(y_{\tau_1(1)}, ..., y_{\tau_1(k)}, z_{\tau_2(1)}, ..., z_{\tau_2(n-k)})$$

em que $\tau_1 \in S_k$ e $\tau_2 \in S_{n-k}$. Essa ação define uma estrutura $S_k \times S_{n-k}$-módulo em $P_{k,n-k}$. Uma vez que I é invariante pela permutação das variáveis de mesmo grau, $P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$ tem uma estrutura induzida de $S_k \times S_{n-k}$-módulo cujo caracter correspondente será denotado por $\chi_{k,n-k}(var^{\mathbb{Z}_2}(sl_2))$.

Para descrever $\chi_{k,n-k}(var^{\mathbb{Z}_2}(sl_2))$ precisamos de alguns resultados e definições.

Proposição 3.1.1. *Seja (λ, μ) um par de partições em que $\lambda \vdash k$ e $\mu \vdash n-k$. Se o diagrama correspondente a λ tem mais de uma linha ou o diagrama correspondente a μ tem mais de duas linhas então $m_{\lambda,\mu} = 0$.*

Demonstração. Suponha que o comprimento da primeira coluna do diagrama correspondente a λ é maior que um. Considere $f = e_{T_\lambda} e_{T_\mu} g$ o gerador do módulo irredutível correspondente ao par de partições (λ, μ).

Lembre-se que $R_{T_\lambda} \cap C_{T_\lambda} = 1$ e todo elemento de S_k pode ser, unicamente, escrito como um produto $r.c$ em que $r \in R_{T_\lambda}$ e $c \in C_{T_\lambda}$. Em outras palavras, ao aplicarmos o e_{T_λ} a g nenhum de seus monômios irá se anular. O mesmo acontece com os elementos de S_{n-k}. Então f é uma combinação linear de termos que contém pelo menos duas variáveis antissimétricas pertencente a Y e três variáveis antissimétricas pertencentes a Z.

É suficiente mostrar que em $L = sl_2$ qualquer polinômio que é antissimétrico em pelo menos duas variáveis da componente par ou é antissimétrico em pelo menos três variáveis da componente ímpar é identicamente nula. Mas a dimensão do componente par é igual a 1 e a dimensão da componente ímpar é igual a dois. Segue o resultado.

Se o diagrama correspondente a μ tem mais de duas linhas podemos provar de forma análoga. $\square$

Com esse resultado facilitaremos nossas contas, já que agora só precisamos mostrar os resultados para os casos em que polinômios dependem de três variáveis, uma das quais pertence a Y e as demais pertencem a Z. Dado um polinômio f gerador do módulo irredutível correspondente ao par de partições (λ, μ), podemos obter um polinômio h

equivalente a f dependendo apenas de três variáveis. O processo já descrito no Exemplo ?? consiste em identificar as variáveis correspondentes a uma mesma linha em cada um dos diagramas. Pela proposição anterior, como o primeiro diagrama tem uma linha e o segundo duas, h depende de três variáveis, uma de Y e duas de Z. O próximo resultado também facilitará nossas contas, no sentido de que com ele poderemos provar os resultados seguintes para a álgebra livre associativa e os mesmos continuarão válido para a álgebra livre de Lie.

Lema 3.1.2. *Seja $g = g(x_1, x_2, x_3)$ polinômio multihomogêneo na álgebra de Lie livre graduada $L(X)$ e denote por $\hat{g} = g(A, B, C)$ sua avaliação, nas matrizes $A, B, C \in M_2(R)$, em que R é um anel comutativo. Então existe um conjunto de polinômios f_i na álgebra associativa livre graduada $K\langle X \rangle$, tais que*

$$\hat{g} = \sum_{i}^{r} f_i(A, B, C)$$

onde cada f_i é um monômio associativo de mesmo multigrau de g.

Demonstração. O resultado segue do fato que se $A_1, A_2, ..., A_n \in M_k(R)$, para $k \geq 2$

$$[A_1, ..., A_n] = \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau A_{\sigma(1)}, ..., A_{\tau(n)},$$

$\alpha_\tau \in \{-1, 0, 1\}$, onde no máximo 2^{n-1} dos $\alpha_\tau' s$ são diferentes de zero. □

Exemplo 3.1.3. *Seja $g = [x_1, x_2, x_3] \in L(X)$. Definindo*
$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 x_1 x_2, f_3(x_1, x_2, x_3) = -x_2 x_1 x_3$ e $f_4(x_1, x_2, x_3) = x_3 x_2 x_1$ temos que

$$\hat{g} = [A, B, C] = \sum_{i=1}^{4} f_i(A, B, C).$$

O próximo lema e seu corolário serão utilizados na demonstração do principal resultado desta seção.

Lema 3.1.4. *Seja $f(x_1, x_2, x_3) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multihomogêneo de grau d_i em x_i e $d_i \equiv \sigma_i$(mod 2), $\sigma_i = 0, 1$ e $i = 1, 2, 3$. Então,*

$$f(h, e + f, e - f) = \epsilon h^{\sigma_1} (e + f)^{\sigma_2} (e - f)^{\sigma_3}, \epsilon \in K.$$

Demonstração. Escrevendo o polinômio em soma de monômios temos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_1, x_2, x_3).$$

Em seguida, substituindo x_1, x_2, x_3 por $h, e+f, e-f$, respectivamente, em cada monômio e usando que na álgebra associativa vale que $h(e+f) = -(e+f)h$, $h(e-f) = -(e-f)h$ e $(e+f)(e-f) = -(e-f)(e+f)$ podemos agrupar todos os $h's$ na frente, seguido de todos os $(e+f)'s$ e obteremos um monômio do tipo $f_i(h, e+f, e-f) = \epsilon_i h^{d_1}(e+f)^{d_2}(e-f)^{d_3}$.

Agora, observe o seguinte:

$$h^{d_1} = \begin{cases} Id, & \text{se } d_1 \equiv 0(mod\ 2\ ) \\ h, & \text{se } d_1 \equiv 1(mod\ 2\ ) \end{cases};$$

$$(e+f)^{d_2} = \begin{cases} Id, & \text{se } d_2 \equiv 0(mod\ 2\ ) \\ e+f, & \text{se } d_2 \equiv 1(mod\ 2\ ) \end{cases};$$

$$(e-f)^{d_3} = \begin{cases} \pm Id, & \text{se } d_3 \equiv 0(mod\ 2\ ) \\ \pm(e+f), & \text{se } d_3 \equiv 1(mod\ 2\ ) \end{cases}.$$

Dessa forma, obtemos

$$f_i(h, e+f, e-f) = \epsilon_i h^{\sigma_1}(e+f)^{\sigma_2}(e-f)^{\sigma_3}$$

e então

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i h^{\sigma_1}(e+f)^{\sigma_2}(e-f)^{\sigma_3} = \epsilon h^{\sigma_1}(e+f)^{\sigma_2}(e-f)^{\sigma_3}$$

em que $\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$. □

Corolário 3.1.5. *Seja $g(x_1, x_2, x_3) \in L(X)$ polinômio multihomogêneo de grau d_i em x_i na álgebra de Lie livre e $d_i \equiv \sigma_i(mod\ \ 2\ )$, $\sigma_i = 0, 1$ e $i = 1, 2, 3$. Então,*

$$g(h, e+f, e-f) = \varepsilon h^{\sigma_1}(e+f)^{\sigma_2}(e-f)^{\sigma_3}, \varepsilon \in K.$$

Demonstração. Pelo Lema **??** podemos escrever $g(h, e+f, e-f)$ como soma de $f_i(h, e+f, e-f)'s$ em que cada $f_i(x_1, x_2, x_3)$ é um monômio associativo de mesmo multigrau que g e aplicar o Lema **??**. □

Antes de provar o principal teorema desta seção apresentamos mais dois resultados que facilitarão nossas contas, seguidos de algumas definições.

Lema 3.1.6. *Sejam $g(x_1, x_2, x_3) \in L(X), C, \delta, \eta, \zeta$ matrizes genéricas. Então*

$$Cg(\delta, \eta, \zeta)C^{-1} = g(C\delta C^{-1}, C\eta C^{-1}, C\zeta C^{-1}).$$

Demonstração. Seja f um polinômio associativo. Denote por $f(\delta,\eta,\zeta)^C = Cf(\delta,\eta,\zeta)C^{-1}$. Escrevendo f como soma de monômios obtemos,

$$f(\delta,\eta,\zeta)^C = (\sum_{i=1}^{k}(f^i(\delta,\eta,\zeta)))^C = \sum_{i=1}^{k}(f^i(\delta,\eta,\zeta)^C).$$

Observe que entre quaisquer dois fatores do produto de matrizes sempre podemos introduzir o produto $C^{-1}C = Id$. Assim, por exemplo

$$(\delta\eta)^C = C\delta\eta C^{-1} = C\delta C^{-1}C\eta C^{-1} = \delta^C\eta^C.$$

Agindo dessa forma em cada monômios f^i obtemos

$$f(\delta,\eta,\zeta)^C = \sum_{i=1}^{k}(f^i(\delta,\eta,\zeta)^C) = f(C\delta C^{-1}, C\eta C^{-1}, C\zeta C^{-1}).$$

Usando o Lema **??** é possível provar que este resultado continua válido na álgebra de Lie livre. □

Definição 3.1.7. *Seja A uma álgebra de Lie sobre um corpo K. Uma **derivação** $D : A \to A$ é uma função linear tal que a regra de Leibniz é satisfeita, isto é,*

$$D([a,b]) = [D(a),b] + [a,D(b)], \forall a,b \in A.$$

A seguir damos duas definições que serão usadas no próximo resultado.

Definição 3.1.8. *Seja $a \in A$. Chamamos **operador adjunto** de c a função $ad_c : A \to A$ definida por $ad_c(b) = [c,b], \forall c,b \in A$.*

A função ad_c é uma derivação. Se V é um espaço vetorial então (V, ad_c) é uma representação.

Definição 3.1.9. *Seja $gl(A)$ o conjunto de todos endomorfismo de A. Definimos o **homomorfismo adjunto** de A como $ad : A \to gl(A)$ dado por $ad(a) = ad_a, \forall a \in A$.*

Para a demonstração do próximo resultado consideremos as seguintes notações:

$$g_0(z_1,z_2) = z_1 \cdot z_2, z_1, z_2 \in Z,$$

$$Z_i = ad(z_i),$$

$$d(z_1,z_2) = \overline{Z_1}\widetilde{Z_1}\widetilde{Z_2}\overline{Z_2} = Z_1Z_1Z_2Z_2 - Z_2Z_1Z_2Z_1 - Z_1Z_2Z_1Z_2 + Z_2Z_2Z_1Z_1,$$

em outras palavras a barra e o til sobre as variáveis significa que uma alternância é efetuada sobre elas. Defina indutivamente para todo $l \geq 1$

$$g_l(z_1, z_2) = g_0(z_1, z_2) \cdot [d(z_1, z_2)]^l.$$

Recordamos que $a \cdot b = [a, b]$ e que $a \cdot b^r = [a, \underbrace{b, ..., b}_{r-vezes}]$.

Observação 2. *Valem as seguintes igualdades:*

1. $h \cdot \bar{e} \cdot \tilde{e} \cdot \tilde{f} \cdot \bar{f} = -8h$
2. $h \cdot (e+f)^r = \begin{cases} 4^s 2(e-f), & se\ r = 2s+1; \\ 4^s h, & se\ r = 2s. \end{cases}$
3. $h \cdot (e-f)^t = \begin{cases} 2^t(e+f), & se\ r = 2s+1; \\ -2^t h, & se\ r = 2s. \end{cases}$
4. $g_l(e+f, f) = g_0(e+f, f) \cdot [d(e+f, f)]^l = h \cdot [d(e, f)]^l = (-8)^l h.$

Vamos ao principal resultado desta seção, no qual descreveremos a estrutura de $S_k \times S_{n-k}$-módulo de $P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$. Descreveremos a multiplicidade de cada módulo irredutível, mostrando que tal multiplicidade só poderá ser zero ou um, sendo um apenas quando respeitar determinadas condições.

Teorema 3.1.10. *Para cada $n \geq 1, k \geq 0$, $P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$ decompõe-se na soma de $S_k \times S_{n-k}$-módulos irredutíveis correspondente as partições $\lambda \vdash k$ e $\mu \vdash n-k$ onde $\lambda = (k), \mu = (q+r, q)$ tais que $m_{\lambda,\mu} \leq 1$. Além disso, $m_{\lambda,\mu} = 1$ se, e somente se, k, r, q satisfazem as seguintes condições:*

1. $k \neq n$;
2. $r \neq n$;
3. $r \equiv 1$*(mod 2) ou* $k + q \equiv 1$ *(mod 2).*

Demonstração. Sejam T_λ, T_μ tabelas correspondentes as partições $\lambda = (k)$, $\mu = (q + r, q)$ e $h(y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_{n-k})$ um polinômio multilinear gerador do módulo irredutível correspondente a $T_\lambda \otimes T_\mu$. Identificando o conjunto de variáveis de h que aparece em cada uma das linhas das tabelas obtemos um polinômio equivalente a h, denotado por $f(y, z_1, z_2)$, em três variáveis em que $y \in Y$ e $z_1, z_2 \in Z$.

Considere a álgebra das matrizes 2×2, $M_2(\mathbb{F})$, sobre o fecho algébrico $\mathbb{F}$ do corpo das funções racionais nas variáveis comutativas $\delta_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij}, i, j = 1, 2$. O polinômio

$f(y, z_1, z_2) = 0$ é uma identidade em sl_2 se, e somente se, $f(\delta, \eta, \zeta) = 0$ para quaisquer matrizes genéricas

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & -\delta_{11} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} \\ \eta_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Denotando por $A^c = CAC^{-1}$ onde $C = c_{11}e_{11} + c_{22}e_{22}$, $c_{11}, c_{22} \in \mathbb{F}$ temos:

$$h^C = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h,$$

$$\eta^C = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} \\ \eta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{11}^{-1}\eta_{12} \\ c_{22}^{-1}\eta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{22}}{c_{11}}\eta_{12} \\ \frac{c_{11}}{c_{22}}\eta_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\zeta^C = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{11}^{-1}\zeta_{12} \\ c_{22}^{-1}\zeta_{21} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{22}}{c_{11}}\zeta_{12} \\ \frac{c_{11}}{c_{22}}\zeta_{21} & \end{pmatrix}.$$

Tomando c_{11}, c_{22} tais que $\frac{c_{11}}{c_{22}} = \sqrt{\frac{\eta_{12}}{\eta_{21}}}$ e definindo $\alpha = \delta_{11}$, $\beta = \frac{c_{22}}{c_{11}}\eta_{12}, \gamma_1 = \sqrt{\frac{\eta_{21}}{\eta_{12}}}\zeta_{12} + \sqrt{\frac{\eta_{12}}{\eta_{21}}}\zeta_{21}$ e $\gamma = \sqrt{\frac{\eta_{21}}{\eta_{12}}}\zeta_{12} - \sqrt{\frac{\eta_{12}}{\eta_{21}}}\zeta_{21}$ segue que $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma$ são algebricamente independentes. Temos

$$\delta^C = \alpha h, \quad \eta^C = \beta(e+f) \quad \text{e } \zeta^C = \gamma_1(e+f) + \gamma(e-f).$$

Para quaisquer dois pares de tabelas T_λ, T_μ e $\tilde{T_\lambda}, \tilde{T_\mu}$ correspondentes ao mesmo par de partições (λ, μ), $f_{T_\lambda,T_\mu}(y, z_1, z_2)$ e $f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}}(y, z_1, z_2)$ são linearmente dependentes módulo o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2. De fato,

$$\begin{aligned}
&(\epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} f_{T_\lambda,T_\mu}(\delta, \eta, \zeta) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}}(\delta, \eta, \zeta))^C = \\
&\qquad \epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} f_{T_\lambda,T_\mu}(\delta^C, \eta^C, \zeta^C) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}}(\delta^C, \eta^C, \zeta^C) = \\
&\quad \epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} f_{T_\lambda,T_\mu}(\alpha h, \beta(e+f), \gamma(e-f)) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}}(\alpha h, \beta(e+f), \gamma(e-f)) = \\
&\epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} \alpha^k \beta^{q+r} \gamma^q h^{\sigma_1} (e+f)^{\sigma_2} (e-f)^{\sigma_3} - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} \epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} \alpha^k \beta^{q+r} \gamma^q h^{\sigma_1} (e+f)^{\sigma_2} (e-f)^{\sigma_3} = 0.
\end{aligned}$$

em que $\sigma_1 \equiv k (\text{mod } 2)$, $\sigma_2 \equiv q + r (\text{mod } 2)$ e $\sigma_3 \equiv q (\text{mod } 2)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\}$. Portanto $\epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}} f_{T_\lambda,T_\mu}(\delta, \eta, \zeta) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu} f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu}}(\delta, \eta, \zeta) = 0$, para quaisquer matrizes genéricas δ, η, ζ. Logo $P_{k,n-k}(sl_2^{\mathbb{Z}_2})$ decompõe-se na soma não isomorfa de $S_k \times S_{n-k}$-módulos irredutíveis, daí $m_{\lambda,\mu} \leq 1$.

Pela anticomutatividade, os polinômios correspondentes a $T_\lambda \otimes \emptyset$ ou $\emptyset \otimes T_\mu$ com $\lambda = (n)$ ou $\mu = (n)$, respectivamente, são nulos em qualquer álgebra de Lie. Consequentemente, $m_{\lambda,\mu} = 0$ se $k = n$ ou $r = n$.

Sejam $k, q \equiv 1(\text{mod } 2)$ e $r \equiv 0(\text{mod } 2)$. Considere o polinômio $f_{T_\lambda, T_\mu}(y, z_1, z_2)$ correspondente ao par de partições $\lambda = (k), \mu = (q + r, q)$ com $2q + r + k = n$. Os graus relativos a $y, z_1,$ e z_2 são respectivamente $k, q + r, q$. Pelo Lema **??** e pelo Corolário **??** obtemos

$$f(\delta, \eta, \zeta)^C = Cf(\delta, \eta, \zeta)C^{-1} = f(\alpha h, \beta(e + f), \gamma(e - f)) =$$
$$\alpha^k \beta^{q+r} \gamma^q f(h, e + f, e - f) = \epsilon \alpha^k \beta^{q+r} \gamma^q h(e + f)(e - f) = \epsilon Id$$

para quaisquer matrizes genéricas. Observe que f é um polinômio multihomogêneo e portanto $f(0, 0, 0) = 0$. Logo, temos que $\epsilon = 0$. Pelo Lema **??**, $m_{\lambda,\mu} = 0$

Analogamente chegamos à mesma conclusão para $k, q, r \equiv 0(\text{mod } 2)$.

Agora vamos encontrar um polinômio não nulo gerador do módulo irredutível correspondente ao par de partições (λ, μ) quando $k \neq n$, $r \neq n$ e $r \equiv 1(\text{mod } 2)$ ou $k + q \equiv 1(\text{mod } 2)$. Para isso, basta encontrar um polinômio $f(y, z_1, z_2)$ multihomogêneo cujo grau em y é k, em z_1 é $q + r$ e em z_2 é q, alternado em q pares distintos que não seja uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para sl_2. Esses polinômios são chamados vetores de peso máximo[1]. A multilinearização completa de $f(y, z_1, z_2)$ será um gerador do módulo irredutível associado a (λ, μ).

Procedendo como no Lema **??** obtemos os seguintes vetores de peso máximo:

1. $k = 0$
   (a) q=2l+1, r qualquer
   $f_{0qr}(y, z_1, z_2) = g_l(z_1, z_2) \cdot z_1^r$;
   (b) $q = 2l, r = 2s + 1, l \neq 0,$
   $f_{0qr}(y, z_1, z_2) = g_{l-1}(z_1, z_2) \cdot z_1^r \cdot \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;
2. k>0, r=2s+1:
   (a) q=2l-1,
   $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = g_l(z_1, z_2) \cdot z_1^r \cdot y^k$;
   (b) q=2l,
   $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = y \cdot [d(z_1, z_2)]^l \cdot z_1^r \cdot y^{k-1}$;
3. r=2s:
   (a) q=2l+1, k par,
   $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = y \cdot [d(z_1, z_2)]^l \cdot \bar{z_1^r} \cdot y^{k-1} \bar{z_2} \cdot z_1^r$;
   (b) q=2l, k ímpar,
   $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = g_{l-1} z_1, z_2)]^l \cdot \bar{z_1^r} \cdot y^k \cdot \bar{z_2} \cdot z_1^r$;

[1]Mais sobre vetores de peso máximo pode ser encontrada em [**?**]

(c) q=0, k ímpar,
$f_{k0r}(y, z_1) = y \cdot z_1 \cdot y^{k-1} \cdot z_1^{r-1}$.

Para mostrar que esses polinômios não são identidades basta encontrarmos elementos de sl_2 para os quais eles não se anulam. Para isso basta usar a Observação **??** que pode ser facilmente demonstrada usando (**??**):

Nos polinômios acima, substituindo $y = h, z_1 = e + f$ e $z_2 = f$ e utilizando as igualdades da Observação **??** obtemos:

1. $k = 0$

   (a) q=2l+1 e r=2s $f_{0qr}(h, e+f, f) = g_l(e+f, f) \cdot (e+f)^r = (-8)^l h \cdot (e+f)^r = (-8)^l 4^s h$;

   (b) para q=2l+1 e r=2s+1
   $f_{0qr}(h, e+f, f) = g_l(e+f, f) \cdot (e+f)^r = (-8)^l h \cdot (e+f)^r == (-8)^l 4^s 2(e-f) \neq 0$;

   (c) q=2l, r=2s+1

$$f_{0qr}(h, e+f, f) = g_{l-1}(e+f, f) \cdot (e+f)^r \cdot \overline{(e+f)} \cdot \overline{f} =$$
$$g_{l-1}(e+f, f) \cdot (e+f)^r \cdot (e+f)f - g_{l-1}(e+f, f) \cdot (e+f)^r \cdot f(e+f) =$$
$$(-8)^{l-1} 4^s 2((e-f) \cdot (e+f)f - (e-f) \cdot f \cdot (e+f) \neq 0;$$

2. k>0, r=2s+1

   (a) q=2l+1, k par

$$f_{kqr}(h, e+f, f) = g_l(e+f, f) \cdot (e+f)^r \cdot h^k = h \cdot [d(e+f, f)]^l \cdot (e+f)^r \cdot h^k =$$
$$(-8)^l 4^s 2(e-f) \cdot h^k = (-8)^l 4^s 2(-2)^k (e-f) \neq 0$$

   (b) q=2l+1, k ímpar

$$f_{kqr}(h, e+f, f) = g_l(e+f, f) \cdot (e+f)^r \cdot h^k = h \cdot [d(e+f, f)]^l \cdot (e+f)^r \cdot h^k =$$
$$(-8)^l 4^s 2(-2)^k (e+f) \neq 0;$$

   (c) q=2l, k par

$$f_{kqr}(h, e+f, f) = h \cdot [d(e+f, f)]^l \cdot (e+f)^r \cdot h^{k-1} = (-8)^l 4^s 2(e-f) \cdot h^{k-1} =$$
$$(-8)^l 4^s 2(-2)^{k-1} (e+f) \neq 0$$

(d) q=2l, k ímpar

$$f_{kqr}(h,e+f,f)=h\cdot[d(e+f,f)]^l(e+f)^r\cdot h^{k-1}=(-8)^l4^s2(e-f)\cdot h^{k-1}=$$
$$(-8)^l4^s2(-2)^{k-1}(e-f)\neq 0;$$

3. r=2s

(a) q=2l+1, k par,

$$f_{kqr}(h,e{+}f,f)=h{\cdot}[d(e{+}f,f)]^l{\cdot}(ef){\cdot}h^{k-1}{\cdot}\bar{f}{\cdot}(e{+}f)^r=(8)^lh{\cdot}(e{\mp}f){\cdot}h^{k-1}{\cdot}\bar{f}{\cdot}(e{+}f)^r$$
$$=(-8)^l(-2)2^{k+1}h\cdot(e+f)^r(-8)^l(-2)2^24^sh\neq 0;$$

(b) q=2l, k ímpar,

$$f_{kqr}(h,e{+}f,f)=g_{l-1}(e{+}f,f){\cdot}(e{\cdot}\bar{+}f){\cdot}h^k\bar{f}{\cdot}(e{+}f)^r=(-8)^{l-1}(e{\cdot}\bar{+}f){\cdot}h^k\bar{f}{\cdot}(e{+}f)^r=$$
$$(-8)^{l-1}(-2)2^{k+1}h\cdot(e+f)=(-8)^{l-1}(-2)2^{k+1}4^sh\neq 0;$$

(c) q=0, k ímpar
$f_{k0r}(h,e+f,f)=h\cdot(e+f)\cdot h^{k-1}\cdot(e+f)^{r-1}=2(e-f)\cdot h^{k-1}\cdot(e+f)^{r-1}$
$=-2^k4^s2h=2^{k-1}4^sh\neq 0.$

□

Nas próximas seções agiremos de forma análoga para descrever a estrutura dos cocaracteres graduados do espaço dos polinômios multilineares nas demais graduações não triviais de sl_2. Lembramos que os resultados demonstrados antes do teorema principal continuam válidos nas próximas seções.

3.2 Cocaracteres $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-graduados de sl_2

Nesta seção descreveremos os cocaracteres graduados de sl_2 na $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-graduação utilizando as representações de produtos cartesianos de grupos simétricos. Para isso, procederemos de forma análoga à seção anterior.

Sejam $X=X_{00}\cup X_{10}\cup X_{01}\cup X_{11}$ um conjunto enumerável infinito particionado em quatro conjuntos disjuntos infinitos, $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra sl_2, $\frac{L(X)}{T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2(sl_2)}}$, a álgebra relativamente livre na variedade $var^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ gerada por sl_2 munida da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação. Como $Supp(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, vamos apenas trabalhar com as variáveis destas componentes. Considere $P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}) = \dfrac{P_{p,q,r}}{P_{p,q,r}\cap T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)}$ o espaço dos polinômios multilineares em $\frac{L(X)}{T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2)}$ dependendo de n variáveis $x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...z_r$ com $x_i \in X_{10}, y_i \in X_{01}, z_i \in X_{11}$ e $p+q+r = n, p,q,r \geq 0$.

Defina em $P_{p,q,r}$ a ação do grupo $S_p \times S_q \times S_r$ tal que S_p age nas variáveis $x_1,...,x_p$, S_q age nas variáveis $y_1,...,y_q$ e S_r age nas variáveis $z_1,...,z_r$ da seguinte forma:

$$(\tau_1,\tau_2,\tau_3)f(x_1,...,x_p,y_1,...,y_p,z_1,...,z_r) = f(x_{\tau_1(1)},...,x_{\tau_1(p)},y_{\tau_2(1)},...,y_{\tau_2(p)},z_{\tau_3(1)},...,z_{\tau_3(r)})$$

com $\tau_1 \in S_p, \tau_2 \in S_q$ e $\tau_3 \in S_r$.

Como a maioria dos resultados já foi provado na seção anterior, aqui provaremos apenas o resultado principal, no qual mostraremos que a multiplicidade dos módulos irredutíveis é ≤ 1 e descrevemos as condições em que as multiplicidades desses módulos são diferentes de zero. Antes fazemos uma observação.

Observação 3. : *As seguintes igualdades são verdadeiras:*

1. $(e-f)\cdot(e+f)^q = \begin{cases} 2^{s+1}h & se\ q = 2s+1, \\ 2^{s+1}(e-f), & se\ q = 2s, \end{cases}$

2. $h\cdot(e-f)^r = \begin{cases} 2^{m+1}2(e+f, & se\ r = 2m+1, \\ -2^{s+1}h, & se\ r = 2m, \end{cases}$

em que $a\cdot b^r = [a, \underbrace{b,\cdots,b}_{r-vezes}]$.

Vamos ao principal teorema desta seção.

Teorema 3.2.1. *Para cada* $p,q,r \geq 0, n = p+q+r \geq 1, P_{q,r,t}(sl_2^{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2})$ *decompõe-se em* $S_p \times S_q \times S_r$*-módulos irredutíveis correspondente a três partições* $\lambda \vdash p, \mu \vdash q, \nu \vdash r$ *com* $m_{\lambda,\mu,\nu} \leq 1$. *Além disso,* $m_{\lambda,\mu,\nu} = 1$ *se, e somente se, p, q e r satisfazem as seguintes condições:*

1. $p \neq n, \quad r \neq n, \quad t \neq n$;

2. $p - q \equiv 1 (mod\ 2)$ *ou* $q - r \equiv 1 (mod\ 2)$.

Em outros casos, $m_{\lambda,\mu,\nu} = 0$.

Demonstração. A dimensão de cada uma das componentes não nulas da graduação é igual a 1, por isso é suficiente analisar polinômios nas três variáveis x, y, z onde $x \in X_{10}, y \in X_{01}$ e $z \in X_{11}$.

Considere três tabelas T_λ, T_μ, T_ν correspondentes as partições $(p), (q), (r)$ e o polinômio multilinear $h_{p,q,r}$ que gera o módulo irredutível correspondente a estas três partições. Identificando as variáveis da mesma linha como na demostração do Lema **??** obtemos um polinômio $g_{p,q,r}(x, y, z)$ de grau homogêneo p em x, grau q em y e grau r em z.

O polinômio $g_{p,q,r}(x, y, z)$ é uma identidade em sl_2 se, e somente se, $g_{p,q,r}(\delta, \eta, \zeta) = 0$, para quaisquer matrizes genéricas da forma:

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

com coeficientes algebricamente independentes.

Pelo Corolário **??** obtemos

$$g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(\delta, \eta, \zeta) = g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(\alpha h, \beta(e+f), \gamma(e-f)) = \epsilon_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}\alpha^p\beta^q\gamma^r h^{\sigma_1}(e+f)^{\sigma_2}(e-f)^{\sigma_3}. \tag{3.2}$$

em que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\}$ e $\sigma_1 \equiv p(\text{mod } 2)$, $\sigma_2 \equiv q(\text{mod } 2)$ e $\sigma_3 \equiv r(\text{mod } 2)$. Para duas triplas de tabelas $(T_\lambda, T_\mu, T_\nu)$ e $(\tilde{T_\lambda}, \tilde{T_\mu}, \tilde{T_\nu})$ correspondentes a tripla de partições λ, μ, ν em que $\lambda \vdash p, \mu \vdash q, \nu \vdash r$ temos que

$$\epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu}}(g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(g_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu}}) = g(x, y, z)$$

é identidade em sl_2. Portanto, $g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}$ e $g_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu}}$ são linearmente dependentes módulo as identidades de sl_2. Logo $m_{\lambda,\mu,\nu} \leq 1$.

Provemos que se uma das condições na formulação do teorema não é satisfeita então $m_{\lambda,\mu,\nu} = 0$.

Os casos $p = n, q = n,$ ou $r = n$ decorre de que as partições de (n) no caso da álgebra de Lie corresponde ao módulo nulo.

Considere agora p, q, r tais que $p - q \equiv 0$ (mod 2) e $q - r \equiv 0$ (mod 2), ou seja, p, q, r com a mesma paridade. Tome o polinômio $g_{p,q,r}(x, y, z)$, correspondente as partições $(p), (q), (r)$. Suponha p, q, r pares. Então pelo Corolário **??** temos:

$$g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) = \epsilon h^0(e+f)^0(e-f)^0 = \epsilon Id$$

Consequentemente $\epsilon = 0$ e a multiplicidade do módulo correspondente é igual a zero. Da mesma forma se p, q, r são ímpares encontramos novamente a multiplicidade igual a zero.

Agora vamos encontrar um polinômio não nulo gerador do módulo irredutível correspondente para cada trio de partições (λ, μ, ν) que satisfazem as condições do enunciado.

1. $p = 0$:

(a) Se q for ímpar, como $q \neq n$ temos $r > 0$. Neste caso, defina

$$g_{0,q,r}(x,y,z) = z \cdot y^q \cdot z^{r-1};$$

(b) q par, $q > 0$, consequentemente $r \neq 0$. Tome,

$$g_{0,q,r} = y \cdot z^r \cdot y^{q-1}.$$

2. $p > 0$ par:

(a) q ímpar e r qualquer

$$g_{p,q,r}(x,y,z) = x \cdot y^q \cdot x^{p-1} \cdot y^r;$$

(b) Se q par e r ímpar

$$g_{p,q,r}(x,y,z) = x \cdot z^r \cdot x^{p-1} \cdot y^q;$$

3. p ímpar:

(a) Se $q = 0$ como $p \neq n$ então $r > 0$. Considere

$$g_{p,q,r}(x,y,z) = z \cdot x^p \cdot z^{r-1};$$

(b) $r > 0$ par, r qualquer

$$g_{p,q,r}(x,y,z) = y \cdot x^p \cdot y^q \cdot x^{p-1};$$

(c) r ímpar e t par

$$g_{p,q,r}(x,y,z) = x \cdot z^r \cdot y^q \cdot x^{p-1}.$$

Para provar que estes polinômios não são identidades vamos substituir as variáveis x, y, z pelos elementos da base $h, e+f, e-f$, respectivamente. Pela Observação **??** obtemos que se $p = 0$, q=2s+1, r>0,

$$g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) = (e-f) \cdot (e+f)^q \cdot (e-f)^{r-1} =$$

$$4^s 2h(e-f)^{r-1} = \begin{cases} (-2)^m 2 \cdot (e+f), \text{ se } r = 2m+1; \\ (-2)^m 2h, \text{ se } r = 2m. \end{cases}$$

Considerando p=0, q=2s, r=2m+1, obtemos:

$$g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) = (e+f) \cdot (e-f)^r \cdot (e+f)^{r-1} = -4^m (e-f) \cdot (e+f)^{q-1} = 4^s \cdot (e-f) \neq 0.$$

Suponha agora $p = 2l \neq 0$, q=2s+1, nesse caso, temos:

$$g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) = h(e+f)^q h^{p-1}(e+f)^r =$$

$$4^s(e-f) \cdot h^{p-1} \cdot (e+f)^r = \begin{cases} 4^{m+s}2(e-f), \text{ se } r = 2m+1; \\ 4^s 2^{p-1}2h = 4^s 2^p h, \text{ se } r = 2m \end{cases}.$$

Por último, temos o caso $p = 2l \neq 0$, q=2s, r=2m+1. Segue que

$$g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) = h \cdot (e-f)^r \cdot h^{p-1} \cdot (e+f)^q = \pm 2^r(e+f) \cdot h^{p-1} \cdot (e+f)^q = \pm 2^{r+s+1}h.$$

Assim, em todos os casos obtemos $g_{p,q,r}(h, e+f, e-f) \neq 0$ e portanto $g_{p,q,r}(x, y, z)$ não é identidade para L e o resultado está provado. □

3.3 Cocaracteres $\mathbb{Z}$-graduados de sl_2

Seja $X_i = \{x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i, ...\}$, $i \in \mathbb{Z}$, uma família infinita e enumerável de conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos, seja $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} X_i$ e a álgebra relativamente livre $\frac{L(X)}{T_{\mathbb{Z}}(sl_2)}$, onde $T_{\mathbb{Z}}(sl_2)$ é o $T_{\mathbb{Z}}$-ideal das identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de sl_2, na variedade $var^{\mathbb{Z}}(sl_2)$. Como $Supp(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \{-1, 0, 1\}$, vamos trabalhar apenas com variáveis dessas componentes homogêneas. Para todo $p, q, r \geq 0, n = p+q+r \geq 1$, denote por $P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}}) = \frac{P_{p,q,r}}{P_{p,q,r} \cap T_{\mathbb{Z}}(sl_2)}$ o espaço dos polinômios multilineares na álgebra $\frac{L(X)}{T_{\mathbb{Z}}(sl_2)}$ nas variáveis $x_1, ..., x_p \in X_{-1}, y_1, ..., y_q \in X_0, z_1, ..., z_r \in X_1$.

O grupo $S_p \times S_q \times S_r$ define naturalmente uma ação no espaço $P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})$ da seguinte forma:

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3)g(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q, z_1, ..., z_r) = g(x_{\tau_1(1)}, ..., x_{\tau_1(p)}, y_{\tau_2(1)}, ..., y_{\tau_2(q)}, z_{\tau_3(1)}, ..., z_{\tau_3(r)})$$

com $\tau_1 \in S_p, \tau_2 \in S_q, \tau_3 \in S_r$.

Para encontrar a decomposição do módulo $P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})$ em módulos irredutíveis precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.3.1. *Seja $g(x_1, x_2, x_3) \in L(X)$ um polinômio de grau homogêneo d_i em x_i. Então:*

$$g(h, e, f) = \begin{cases} 0, & se \quad |d_1 - d_3| > 1; \\ \epsilon_1 e, & se \quad d_1 - d_3 = 1; \\ \epsilon_2 f, & se \quad d_3 - d_1 = 1; \\ \epsilon_3 e_{11} + \epsilon_4 e_{22}, & se \quad d_1 = d_3; \end{cases}$$

em que e_{ij} é a matriz com 1 na entrada (i, j) e zero nas demais.

Demonstração. Pelo Lema **??** é suficiente mostrar o caso associativo. Seja $f(x_1, x_2, x_3) \in K\langle X\rangle$ um polinômio de mesmo multigrau de g. Escrevemos nosso polinômio em soma de monômios e obtemos

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_1, x_2, x_3).$$

Como $he = -eh, hf = -fh$ podemos agrupar todos $h's$ na frente. Substituindo x_1, x_2, x_3 por e, h, f, respectivamente, em cada f_i obtemos:

$$f_i(e, h, f) = \alpha_i \underbrace{h...h}_{d_2} \omega_i$$

onde $\alpha_i \in K$ e ω_i é um monômio contendo somente $e's$ e $f's$. Como $h^2 = Id$ então h^{d_2} é igual a Id ou a h dependendo da paridade de d_2. Note que $(Id)e = he$ e $(Id)f = -hf = f$. Disso, $h^{d_2}\omega_i = \pm\omega_i$. Portanto,

$$f(e, h, f) = \sum_{i=1}^{k} f_i(e, h, f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h^{d_2}\omega_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\omega_i.$$

com $\beta_i = \alpha_i h^{d_2}$.

Considere todos os casos mencionados na formulação do lema. Se $|d_1 - d_3|>1$, então ω_i atende a uma das duas identidades consecutivas $e^2 = 0$ ou $f^2 = 0$ o que implica em $f_i(e, h, f) = 0$, para qualquer $i \in \{1, ..., k\}$. Portanto, $f(e, h, f) = 0$.

Considere o seguinte caso. Se $d_1 - d_3 = 1$, então o número de $e's$ é maior que o número de $f's$. Dá pra notar que $f_i(e, h, f) \neq 0$ se, somente se, ω_i tem a seguinte forma:

$$\omega_i = ef...efe.$$

Em qualquer outro caso, $f_i(e, h, f) = 0$, já que em ω_i aparecerá pelo menos dois $e's$ consecutivos. Obviamente que

$$\omega_i = ef...efe = e_{11}...e_{11}e = e.$$

Denotemos por I o conjunto de índices. Para os quais $f_i(e, h, f) \neq 0$, obtemos

$$f(e, h, f) = \sum_{i\in I} f_i(e, h, f) = \sum_{i\in I} \beta_i\omega_i = \sum_{i\in I} \beta_i ef...efe = \sum_{i\in I} \beta_i e = \varepsilon_1 e,$$

em que ε_1 é a soma dos $\beta_i' s$.

Suponha agora que $d_3 - d_1 = 1$. De forma análoga ao caso anterior obtemos que $f_i(e, h, f) \neq 0$ quando ω_i tem a seguinte forma:

$$\omega_i = fe...fef.$$

Caso contrário aparece pelo menos dois f consecutivas em ω_i e então $f_i(e,h,f) = 0$.

Já que

$$\omega_i = fe...fef = e_{22}...e_{22}f = f,$$

temos

$$f(e,h,f) = \sum_{i\in I} f_i(e,h,f) = \sum_{i\in I} \beta_i\omega_i = \sum_{i\in I} \beta_i fe...fef = \sum_{i\in I}^{k} \beta_i f = \varepsilon_2 f.$$

Seja $d_1 = d_3$. Das identidades $e^2 = 0$ e $f^2 = 0$ obtemos que $f_i(e,h,f) \neq 0$ se, e somente se, ω_i tem uma das seguintes formas:

$$\omega_i = ef...ef \text{ ou } \omega_i = fe...fe.$$

Denotemos por I_1 o conjunto desses índices para os quais ω_i assume a 1ª forma acima e por I_2 o conjunto de de índices para os quais ω_i assume a 2ªforma. Assim:

$$f(e,h,f) = \sum_{i=1}^{k} f_i(e,h,f) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\omega_i = \sum_{i\in I_1}(\beta_i ef...ef) + \sum_{i\in I_2} \beta_i fe...fe =$$
$$= \sum_{i\in I_1}(\beta_i e_{11}...e_{11}) + \sum_{i\in I_2} \beta_i e_{22}...e_{22} = \sum_{i\in I_1} e_{11} + \sum_{i\in I_2} \beta_i e_{22} = \varepsilon_3 e_{11} + \varepsilon_4 e_{22}.$$

□

Vamos ao resultado principal.

Teorema 3.3.2. *Para cada $p,q,r \geq 0, n = p+q+r \geq 1$, $P_{p,q,r}(sl_2^{\mathbb{Z}})$ decompõe-se na soma de $S_p \times S_q \times S_r$-módulos irredutíveis correspondente as partições $\lambda \vdash p, \mu \vdash q, \nu \vdash r$ tais que $m_{\lambda,\mu,\nu} \leq 1$. Além disso, $m_{\lambda,\mu,\nu} = 1$ se, e somente se, satisfazem as seguintes condições:*

1. *$p \neq n, q \neq n, r \neq n$;*
2. *$|p-r| \leq 1$.*

Demonstração. Como a dimensão de cada componente é igual a 1 é suficiente considerar apenas os polinômios de três variáveis x,y,z onde $x \in X_{-1}, y \in X_0, z \in X_1$. Sejam T_λ, T_μ, T_ν três tabelas correspondente as três partições $(p),(q),(r)$, e $f_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(x,y,z)$ um polinômio correspondente ao módulo irredutível associado a $T_\lambda \otimes T_\mu \otimes T_\nu$.

O polinômio $g(x,y,z)$ é uma identidade em sl_2 se e somente se $f(\delta,\eta,\zeta) = 0$, para quaisquer matrizes δ,η,ζ, da seguinte forma:

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

com coeficientes algebricamente independentes.

Pelo lema anterior temos:

$$g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(\delta,\eta,\zeta) = g_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(\alpha e,\beta h,\gamma f) = \alpha^p\beta^q\gamma^r\epsilon_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}\omega, \tag{3.3}$$

em que $\omega = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |p-r|>1, \\ \epsilon_1 e, & \text{se} \quad p-r=1, \\ \epsilon_2 f, & \text{se} \quad r-p=1, \\ \epsilon_3 h, & \text{se} \quad p=h. \end{cases}$.

Para qualquer duas tripla de tabelas (T_λ,T_μ,T_ν) e $(\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu})$ correspondente as mesmas três partições $(\lambda.\mu,\nu)$ temos que

$$\epsilon_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu}} f_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu}(x,y,z) - \epsilon_{T_\lambda,T_\mu,T_\nu} f_{\tilde{T_\lambda},\tilde{T_\mu},\tilde{T_\nu}}(x,y,z) = f(x,y,z)$$

é uma identidade em sl_2. Consequentemente $m_{\lambda,\mu,\nu} \leq 1$.

Vamos provar que $m_{\lambda,\mu,\nu} = 0$, se pelo menos uma das condições do teorema não é satisfeita. Se $p = n$ segue facilmente da lei anticomutativa e do fato que a dimensão da componente L_{-1} é igual a 1. Os casos $q = n$ e $r = n$ são semelhantes. Se $|p-r| > 1$, consideramos o polinômio $g_{p,q,r}(x,y,z)$ correspondente às partições $(p),(q),(r)$. De (**??**) segue que $g_{p,q,r}(x,y,z) \equiv 0$. Consequentemente a multiplicidade é igual a zero.

Agora vamos encontrar um polinômio não nulo gerador do módulo irredutível correspondente a tripla de partições (λ,μ,ν) quando $p \neq n, q \neq n, r \neq n$ e $|p-r| \leq 1$. Para isso, basta encontrar um polinômio $f(x,y,z)$ multihomogêneo cujo grau em x é p, em y é q e em z é r, que não seja uma identidade $\mathbb{Z}$-graduada para sl_2.

1. $p-r=1$. Temos
$$g_{p,q,r}(x,y,z) = x\cdot(xz)^r\cdot y^q;$$

2. $p-r=0$. Como $q \neq 0$ para $p = q \neq 0$, tome
$$g_{p,q,r}(x,y,z) = x\cdot(xz)^{p-1}\cdot y^q z;$$

3. $r-p=1$. Temos
$$g_{p,q,r}(x,y,z) = z\cdot(xz)^p\cdot y^q.$$

Substituindo os elementos da base e,h,f encontramos que se $p-r=1$,

$$g_{p,q,r}(e,h,f) = e\cdot(ef)^r\cdot h^q = -2^r e\cdot h^q = 2^r 2^q e = 2^{r+q}e \neq 0;$$

se $p-r=0$
$$g_{p,q,r}(e,h,f) = e\cdot(ef)^p\cdot h^q\cdot f = 2^{p+q}e\cdot f = 2^{p+q}h \neq 0;$$

e se $r - p = 1$

$$g_{p,q,r}(e,h,f) = f \cdot (ef)^p \cdot h^q = -2^p f \cdot h^q = 2^p 2^q f = 2^{p+q} f \neq 0.$$

Em todos os casos temos que $g_{p,q,r}(e,h,f) \neq 0$, e portanto $g_{p,q,r}(x,y,z)$ não é uma identidade na álgebra relativamente livre da variedade $var^{\mathbb{Z}}(sl_2)$. Desta forma provamos o resultado. □

Assim, descrevemos os cocaracteres graduados para a álgebra sl_2. Esta descrição, no entanto, não esgota as perguntas sobre os ideais das identidades graduadas desta álgebra. Resta-nos ainda responder um dos principais problemas quando se trata de descrever as identidades graduadas de uma álgebra que é a determinação de uma base para ideal de suas identidades graduadas. É isso que faremos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Identidades Graduadas de sl_2

No capítulo anterior descrevemos os cocaracteres graduados de sl_2 para os grupos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$. O objetivo deste capítulo é apresentar uma base finita para as identidades graduadas de sl_2 também considerando os grupos acima, uma vez que a menos de isomorfismo graduado todas as graduações se resumem a estas. Os resultados aqui apresentado baseiam-se no artigo [**?**].

Neste capítulo voltaremos a usar os colchetes para denotar o produto de Lie. Lembramos que K é um corpo de característica zero e que, salvo menção contrária, o colchete será normado à esquerda. Ressaltamos ainda que, embora adotemos a característica do corpo como zero a maioria dos resultados deste capítulo é válida no caso em que K é infinito e $char K \neq 2$.

4.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2

Assim como no capítulo anterior, considere $X = Y \cup Z$ conjunto enumerável infinito particionado em dois conjuntos disjuntos enumeráveis e infinitos. Denominaremos pares as variáveis pertencentes a Y e ímpares as variáveis pertencentes a Z.

É possível mostrar que o polinômio

$$f(y_1, y_2) = [y_1, y_2] \tag{4.1}$$

é uma identidade graduada de sl_2, já que $f(\alpha h, \beta h) = \alpha\beta[h, h] = 0, \forall \alpha, \beta \in K$.

Sejam $I = T_{\mathbb{Z}_2}(sl_2)$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2 e J o ideal das identidades graduadas de sl_2 gerado pelo polinômio (**??**).

Seja $M \in \frac{L(X)}{I}$ um polinômio homogêneo na $\mathbb{Z}_2$-graduação e denote por $d(M)$ o grau homogêneo de M na $\mathbb{Z}_2-$graduação. Dizemos que $d(M) = 1$ se a paridade do grau de cada monômio de M nas variáveis Z é ímpar e que $d(M) = 0$, caso contrário. Para ficar claro, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 4.1.1. *Sejam* $M_1 = [y, z, z], M_2 = [y, z_1, z_2], M_3 = [y, z], \quad M_4 = [y, z_1, z_2, z_2]$.

Então $d(M_1) = d(M_2) = 0$ pois o grau total desses monômios nas variáveis ímpares é 2. Já $d(M_3) = d(M_4) = 1$ pois o grau total desses monômios nas variáveis da componente Z são congruentes a 1(mod 2).

Definição 4.1.2. *Seja $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in \frac{L(X)}{I}$. A n-upla $S = (m_1, ..., m_n)$ tal que $m_i \in \{h, e, f\}$ e o grau de m_i, para todo $i \in \{1, .., n\}$, é igual ao grau de x_i, é chamada uma substituição elementar para f e $f_S \in sl_2$ denota o resultado da substituição de $(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ por $(m_1, ..., m_n)$.*

Seja $M \in L(X)$ um monômio multilinear tal que $M \notin I$. A menos do sinal, assumimos que a primeira variável de M seja ímpar. Então M é da forma:

$$M = [z_1, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_a, z_2, z_3, \hat{y}_{a+1}, ..., \hat{y}_b, z_4, z_5, ..., z_{2k}, \hat{z}_{2k+1}, \hat{y}_c, ..., \widehat{y_d}] \tag{4.2}$$

onde o chapéu sobre a variável significa que ela pode ou não aparecer, e a variável z_{2k+1} aparecerá ou não dependendo de $d(M)$ ser 0 ou 1. Observe que se a primeira variável de M for par então a segunda será ímpar e poderemos usar a anticomutatividade para reorganizar M.

Denotemos por v_j o conjunto $\{z_{2j-1}, z_{2j}\}, 1 \leq j \leq k$, e por n_j o número de variáveis pares que aparecem entre z_{2j-1} e z_{2j}. Se o grau de $d(M) = 1$, então z_{2k+1} aparece e n_{k+1} indica o número de variáveis pares que aparecem à direita de z_{2k+1}. Seja $\tilde{M}$ um monômio de mesmo multigrau de M denote por $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ as variáveis de $\tilde{M}$ e defina $\tilde{v}_i$ e $\tilde{n}_i$ analogamente.

Observe agora o seguinte: como $[z_1, z_2] \in Y$, e $[y_1, z_1] = -[z_1, y_1] \in Z$, se tivermos o produto de uma quantidade par de variáveis da componente Z, intercalados ou não por variáveis da componente Y, o resultado pertencerá a Y. Assim, se $d(M) = 0$, a última variável de M não pode ser de grau zero pois nesse caso $M \in J$.

Temos o seguinte resultado:

Lema 4.1.3. *Se M é como em (**??**) e S é uma substituição elementar para M, então $M_S \neq 0$ se, e somente se, $(v_i)_S = \{e, f\}$, não necessariamente nesta ordem.*

Demonstração. Suponha $M = [z_1, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_a, z_2]$. Temos que

$$M_S = [m_1, \hat{h}, ..., \hat{h}, m_2] = \pm 2^a [m_1, m_2] = \pm 2^a h \neq 0$$

se, e somente se, $m_1 \neq m_2$, com $m_1, m_2 \in \{e, f\}$. O resultado segue por indução. □

Lema 4.1.4. *Os seguintes polinômios são identidades graduadas em J*

1. $[z_1, y, z_2] - [z_2, y, z_1]$;

2. $[y_1, z, y_2] - [y_2, z, y_1]$;

3. $[z_1, y_1, y_2, y_3, z_2] - [z_1, y_2, y_1, y_3, z_2]$;
$[z_1, y_2, y_1, y_3, z_2] - [z_1, y_1, y_3, y_2, z_2]$;
$[z_1, y_1, y_3, y_2, z_2] - [z_1, y_2, y_3, y_1, z_2]$;

4. $[z_1, y_1, ..., y_n, z_2] - (-1)^{n-1}[z_2, y_1, ..., y_n, z_1], \forall n \in \mathbb{N}$;

5. $[z_1, z_2, z_3, y_1, y_2] - [z_1, y_1, y_2, z_2, z_3]$;

6. $[x_1, ..., x_a, y_b, y_c, ..., x_d] - [x_1, ..., x_a, y_c, y_b, ..., x_d]$;

7. $[y_1, z_1, y_2, ..., y_n] - [y_1, [z_1, y_2, ..., y_t], y_{t+1}, ..., y_n], \forall t \geq 2$;

8. $[y_1, z_1, z_2, z_3, z_4] - [y_1, z_3, z_4, z_1, z_2]$;

9. $[z_1, z_2, z_3, y_1, z_4] - [z_3, z_4, z_1, y_1, z_2]$;

10. $[y_1, z_1, z_2, z_3, y_2] - [y_2, z_1, z_2, z_3, y_1]$;

11. $[z_1, y_1, z_2, z_3, y_2] - [z_1, y_2, z_2, z_3, y_1]$.

Demonstração. Para mostrar esses resultados usaremos essencialmente a identidade de Jacobi e o princípio de indução.

1. $[z_1, y, z_2] = -[y, z_2, z_1] - [z_2, z_1, y] = [z_2, y, z_1]$
   Usando novamente a identidade de Jacobi podemos obter ainda que

$$[y, z_2, z_1] = [y, z_1, z_2].$$

2. $[y_1, z, y_2] = -[z, y_2, y_1] - [y_2, y_1, z] = [y_2, z, y_1]$.

3. Vamos mostrar apenas a última igualdade, as outras são facilmente obtidas pela identidade de Jacobi. Temos que:
   $[z_1, y_1, y_2, y_3, z_2] = -[y_1, y_2, z_1, y_3, z_2] - [y_2, z_1, y_1, y_3, z_2] = [z_1, y_2, y_1, y_3, z_2]$
   $= -[y_1, y_3, [z_1, y_2], z_2] - [y_3, [z_1, y_2], y_1, z_2] = [z_1, y_2, y_3, y_1, z_2]$.

4. A igualdade é válida para n=2 por (1).

   Agora suponha que a afirmação é válida para n e vamos mostrar que ela é válida para $n + 1$. Temos que:
   $[z_1, y_1, ..., y_n, z_2, y_{n+1}] = 0$
   $-[z_2, y_{n+1}, [z_1, y_1, ..., y_n]] - [y_{n+1}, [z_1, y_1, ..., y_n], z_2] = 0$
   $[z_1, y_1, ..., y_n, y_{n+1}, z_2] = [z_1, y_1, ..., y_n, [z_2, y_{n+1}]]$.
   De onde, aplicando a hipótese de indução obtemos,

$$[z_1, y_1, ..., y_n, y_{n+1}, z_2] = (-1)^{n-1}[z_2, y_{n+1}, y_1, ..., y_n, z_1]. \tag{4.3}$$

Associando como conveniente e aplicando 3 tantas vezes quantas forem necessárias para reorganizar as variáveis pares do segundo membro de (??) obtemos o resultado.

5. Usando a identidade de Jacobi e o item 2 temos:

$$\begin{aligned}
[[z_1,z_2],z_3,y_1,y_2] &= [y_1,z_3,[z_1,z_2],y_2]-[y_2,y_1,z_3,[z_1,z_2]]\\
&= -[z_1,z_2,[y_1,z_3],y_2]\\
&= -[y_2,[y_1,z_3],[z_1,z_2]]\\
&= [y_1,z_3,y_2,[z_1,z_2]]\\
&= -[z_3,y_1,y_2,[z_1,z_2]]\\
&= [z_1,z_2,[z_3,y_1,y_2]]\\
&= -[z_2,[z_3,y_1,y_2],z_1]-[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2]\\
&= [z_3,y_1,y_2,z_2,z_1]-[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2].
\end{aligned}$$

Como por (4) $[z_3,y_1,y_2,z_2]=-[z_2,y_1,y_2,z_3]$ obtemos:

- $[z_1,z_2,z_3,y_1,y_2]=-[z_2,y_1,y_2,z_3,z_1]-[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2]$
- $[z_2,z_3,z_1,y_1,y_2]=-[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2]-[z_1,y_1,y_2,z_2,z_3]$
- $[z_3,z_1,z_2,y_1,y_2]=-[z_1,y_1,y_2,z_2,z_3]-[z_2,y_1,y_2,z_3,z_1]$

Somando as três identidades:

$$\begin{aligned}
[z_1,z_2,z_3,y_1,y_2]+[z_2,z_3,z_1,y_1,y_2]+[z_3,z_1,z_2,y_1,y_2] &= \\
-2\underbrace{([z_1,y_1,y_2,z_2,z_3]+[z_2,y_1,y_2,z_3,z_1]+[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2])}_{S} & \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Observe que o primeiro membro é a identidade de Jacobi, então:

$$-2S=0\Rightarrow S=0$$

Considere agora a identidade:

$$\begin{aligned}
[z_1,z_2,z_3,y_1,y_2]-[z_1,y_1,y_2,z_2,z_3] &= -([z_1,y_1,y_2,z_2,z_3]+\\
&[z_2,y_1,y_2,z_3,z_1]+[z_3,y_1,y_2,z_1,z_2])=-S=0
\end{aligned}$$

6. Segue imediatamente da identidade de Jacobi.

$$\begin{aligned}
[x_1,...,x_a,y_b,y_c,...,x_d] = \quad & -[y_b,y_c,[x_1,...,x_a],...,x_d]\\
& -[y_c,[x_1,...,x_a],y_b,...,x_d]=\\
& =[x_1,...,x_a,y_c,y_b,...,x_d].
\end{aligned}$$

7. Primeiro vamos mostrar que a igualdade é válida para t=2

$$\begin{aligned}[y_1, z_1, y_2, y_3, ..., y_n] = \; & -[z_1, y_2, y_1, y_3, ..., y_n] \\ & -[y_2, y_1, z_1, y_3, ..., y_n] \\ & = [y_1, [z_1, y_2], y_3, ..., y_n].\end{aligned}$$

Agora vamos usar indução para mostrar que a afirmação é válida para qualquer t. Suponha que a igualdade é válida para t. Temos que:

$$\begin{aligned}[y_1, z_1, y_2, ..., y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, ..., y_n] = \; & [y_1, [z_1, y_2, ..., y_{t-1}], y_t, y_{t+1}, ..., y_n] = \\ -[z_1, y_2, ..., y_{t-1}, y_t, y_1, y_{t+1}, ..., y_n] - \; & [y_t, y_1, [z_1, y_2, ..., y_{t-1}], y_{t+1}, ..., y_n] = \\ & [y_1, [z_1, y_2, ..., y_{t-1}, y_t], y_{t+1}, ..., y_n].\end{aligned}$$

E a igualdade é válida para todo $t \geq 2$.

8. Observe que por (1) deste lema $[y, z_1, z_2] = [y, z_2, z_1]$, então:

$$\begin{aligned}[y, z_1, z_2, z_3, z_4] = [[y, z_1, z_2], z_4, z_3] = \; & -[z_2, z_4, [y, z_1], z_3] - [z_4, [y, z_1], z_2, z_3] \\ & = [y, z_1, [z_2, z_4], z_3] + [y, z_1, z_4, z_2, z_3] \\ & = -[z_2, z_4, z_3, [y, z_1]] - [z_3, [y, z_1], [z_2, z_4]] \\ & +[y, z_1, z_4, z_2, z_3] \\ = [y, z_1, [z_2, z_4, z_3]] + [y, z_1, z_4, z_2, z_3] \; & = -[z_1, y, [z_2, z_4, z_3]] + [y, z_1, z_4, z_2, z_3] \\ = -[z_2, z_4, z_3, y, z_1] + [y, z_1, z_4, z_2, z_3] \; & = [y, z_4, z_1, z_3, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&[y, z_1, z_2, z_3, z_4] = [y, z_4, z_1, z_3, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1] = \\ &- [[z_1, z_3], [y, z_4], z_2] - [z_3, [y, z_4], z_1, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1] = \\ &[y, z_4, [z_1, z_3], z_2] + [y, z_4, z_3, z_1, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1] = \\ &- [z_4, y, [z_1, z_3], z_2] + [y, z_4, z_3, z_1, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1] = \\ &[z_1, z_3, z_4, y, z_2] + [y, z_4, z_3, z_1, z_2] - [z_2, z_4, z_3, y, z_1].\end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$[y, z_2, z_1, z_3, z_4] = [z_2, z_3, z_4, y, z_1] + [y, z_4, z_3, z_2, z_1] - [z_1, z_4, z_3, y, z_2]$.

Mas,

$$[y, z_2, z_1, z_3, z_4] = [y, z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Somando os dois membros, obtemos:

$2[y,z_1,z_2,z_3,z_4] = [z_1,z_3,z_4,y,z_2]+[y,z_4,z_3,z_1,z_2]-[z_2,z_4,z_3,y,z_1]+[z_2,z_3,z_4,y,z_1]+[y,z_4,z_3,z_2,z_1]-[z_1,z_4,z_3,y,z_2] = [z_1,z_3,z_4,y,z_2]+[y,z_3,z_4,z_1,z_2]-[z_2,z_4,z_3,y,z_1]+[z_2,z_3,z_4,y,z_1]+[y,z_3,z_4,z_2,z_1]-[z_1,z_4,z_3,y,z_2] = [z_1,z_3,z_4,y,z_2]-[z_2,z_4,z_3,y,z_1]+[z_2,z_3,z_4,y,z_1]+2[y,z_3,z_4,z_2,z_1]-[z_1,z_4,z_3,y,z_2]$.

Assim,

$$\begin{aligned}2([y,z_1,z_2,z_3,z_4]-[y,z_3,z_4,z_2,z_1]) &= -[z_3,z_1,z_4,y,z_2]\\ &+[z_4,z_2,z_3,y,z_1]-[z_3,z_2,z_4,y,z_1]+[z_4,z_1,z_3,y,z_2] =\\ &[z_4,z_3,z_1,y,z_2]-[z_3,z_4,z_2,y,z_1]+[z_4,z_3,z_2,y,z_1]\\ &-[z_3,z_4,z_1,y,z_2] = [z_2,[z_3,z_4],y,z_1]+[z_1,[z_3,z_4],y,z_2]=0.\end{aligned}$$

9. Usando o item anterior e a identidade de Jacobi

$$\begin{aligned}[z_1,z_2,z_3,y_1,z_4] = & -[y_1,z_1,z_2,z_3,z_4] = & -[y_1,z_3,z_4,z_1,z_2]\\ = [z_1,y_1,z_3,z_4,z_2] = & -[z_4,z_1,y_1,z_3,z_2] = & [z_3,z_4,z_1,y_1,z_2].\end{aligned}$$

   Está provado o resultado.

10. Como $[[y_1,z_1,z_2],z_3,y_2] = -[z_3,y_2,[y_1,z_1,z_2]] = [y_2,z_3,[y_1,z_1,z_2]]$, temos que

$$\begin{aligned}[y_1,z_1,z_2,z_3,y_2] = & [y_2,z_3,y_1,z_1,z_2] & +[y_2,z_2,z_3,y_1,z_1]\\ = & [y_2,z_3,y_1,z_1,z_2] & +[y_1,z_3,z_1,z_2,y_2] & +[y_2,z_1,y_1,z_2,z_3]\\ = & [y_2,z_1,z_2,z_3,y_1]\\ + & [y_2,z_3,y_1,z_1,z_2] & +[y_2,z_1,y_1,z_2,z_3] & +[y_2,z_2,y_1,z_3,z_1].\end{aligned}$$

   Mas a última igualdade é zero devido a (**??**).

11. $[z_1,y_1,z_2,z_3,y_2] = -[y_1,z_1,z_2,z_3,y_2] = -[y_2,z_1,z_2,z_3,y_1] = [z_1,y_2,z_2,z_3,y_1]$.

□

Lema 4.1.5. *Suponha que M e $\tilde{M}$ são dois monômios de mesmo multigrau e do tipo (**??**). Se $M+\lambda\tilde{M} \in I$, $\lambda \neq 0$, então:*

1. *existe uma permutação $\alpha \in S_k$ tal que $\tilde{v}_{\alpha(j)} = v_j$ e se $d(M) = d(\tilde{M}) = 1$ então $y_{2k+1} = \tilde{y}_{2k+1}$.*

2. *$n_i - \delta(i,1) \equiv n_i - \delta(\alpha(i),1)$(mod 2) onde $\delta(i,1)$ é o delta de Kronecker.*

Demonstração. Vamos provar a primeira parte do lema por absurdo.

1. Suponha que não exista tal permutação. Então existe j_0 tal que $y_{2j_0-1} \in \tilde{v}_a$ e $y_{2j_0} \in \tilde{v}_b, a \neq b$ e assim existe uma substituição S tal que y_{2j_0-1} e y_{2j_0} são substituídos

pelo mesmo elemento, suponhamos e e $\tilde{v}_{i_S} = \{e, f\}, \quad i = 1, ..., k$. Pelo Lema **??**, $M_S = 0$ e $\tilde{M}_S \neq 0$, absurdo pois $\lambda \neq 0$

2. Pelo item 4 de **??**

$$(*)[z_1, y_1, ..., y_t, z_2] - (-1)^{t-1}[z_2, y_1, ..., y_t, z_1] \in J$$

Fixe $i \in \{1, ..., k\}$ e considere uma substituição elementar S_1 tal que os $z'_{2j-1}s$ são substituídos por e e os $z'_{2j}s$ são substituídos por $f, \forall j \in \{1, ..., k\}$. A substituicão elementar S_2 é obtida de S_1 por substituição das variáveis z_{2i-1} e z_{2i} por f e e respectivamente mantendo as demais como em S_1. Pela Lema **??** temos $M_{S_1} \neq 0$.

Observe que se $i \neq 1$ obteremos que $[z_1, y_1, ..., z_{2i-2}]$ é um monômio par. Por $(*)$:

$$\begin{aligned} &[z_1, y_1, ..., y_{n_{i-1}}, z_{2i-2}], z_{2i-1}, y_{n_{i-1}+1}, ..., y_{n_i - n_{i-1}}, z_{2i}, ...] \\ &= -[z_{2i-1}, [z_1, y_1, ..., y_{n_{i-1}}, z_{2i-2}], y_{n_{i-1}+1}, ..., y_{n_i - n_{i-1}}, z_{2i}, ...] \\ &= (-1)^{n_i}[z_{2i}, [z_1, y_1, ..., y_{n_{i-1}}, z_{2i-2}], y_{n_{i-1}+1}, ..., y_{n_i - n_{i-1}}, z_{2i-1}, ...]. \end{aligned}$$

Daí $M_{S_1} = (-1)^{n_i - \delta(i,1)} M_{S_2} \neq 0$ e $\widetilde{M}_{S_1} = (-1)^{\tilde{n}_i - \delta(\alpha(i),1)} M_{S_2} \neq 0$. Já que $M + \lambda\tilde{M} \in I$ a mudança de sinal que ocorre de M_{S_1} para M_{S_2} é a mesma que ocorre de $\widetilde{M}_{S_1}$ para $\widetilde{M}_{S_2}$. Segue que $n_i - \delta(i, 1) \equiv n_i - \delta(\alpha(i), 1)(\mathrm{mod}\ 2)$, $1 \leq i \leq k$.

Se $d(M) = d(\tilde{M}) = 1$, juntando as congruências dos monômios acima obtemos $\sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i = \sum_{i=1}^{k} n_i(\mathrm{mod}\ 2)$. Como os dois monômios tem o mesmo multigrau temos que $\sum_{i=1}^{k+1} \tilde{n}_i = \sum_{i=1}^{k+1} n_i(\mathrm{mod}\ 2)$ e então $n_{k+1} \equiv \tilde{n}_{k+1}(\mathrm{mod}\ 2)$.

□

Lema 4.1.6. *Se $M + \lambda\tilde{M} \in I$ onde M e $\tilde{M}$ são do tipo (**??**), então $M + \lambda\tilde{M} \in J$.*

Demonstração. A demonstração desse fato consiste apenas da reorganização do monômio $\tilde{M}$ utilizando o Lema **??**. Observe que pelo lema anterior, para que $M + \lambda\tilde{M} \in I$ precisamos encontrar uma α tal que $\tilde{v}_i = v_{\alpha(i)}$.

Usando os itens 7, 8, 9 do Lema **??**, podemos rearranjar $\tilde{M}$ para obtermos $\alpha = id$. Usando os itens 5 e 7 do mesmo lema podemos manter a primeira variável fixa e pelo lema anterior obtemos $n_i = \tilde{n}_i$. Usando 6 e 10 podemos reorganizar as variáveis pares conforme conveniente. Por 4 e pelo lema anterior podemos reorganizar as variáveis ímpares multiplicando por (-1), se necessário. Assim, obtemos $M + \lambda\tilde{M} \equiv (1 \pm \lambda)M$ (mod J), com $\lambda = \mp 1$. Portanto $M + \lambda\tilde{M} \in J$. □

Lema 4.1.7. *Se $M + \lambda\tilde{M} \in I$, onde $M = [x_1, ..., x_n]$ e $\tilde{M} = [\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m]$ tem o mesmo multigrau então $M + \lambda\tilde{M} \in J$.*

Demonstração. Se $[x_1, ..., x_n] \in I$ tome o maior m tal que $[x_1, ..., x_m] \notin I$. Então, $[x_1, ..., x_m, x_{m+1}] \in I$. Se $d(x_0) = d([x_1, ..., x_m])$ então $[x_0, x_{m+1}] \in I$ e $[x_1, ..., x_n]$ segue desse polinômio. Mas $[x_0, x_{m+1}] \in I$ implica que $d(x_0) = d(x_{m+1}) = 0$ e então $[x_0, x_{m+1}] \in J$.

Se $M, \tilde{M} \notin I$, então M e $\tilde{M}$ são do tipo (**??**) e podemos aplicar o lema anterior para reordenar as suas variáveis. $\square$

Seja $\Omega = K[A \cup B]$ o anel de polinômios nas variáveis comutativas $A = \{a_1, a_2, ...,\}$ e $B = \{b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2, ...\}$. Denote por G a subálgebra gerada por $M(\Omega)^-$ gerada pelas matrizes $A_i = a_i h$ e $B_i = (b_i^1 e + b_i^2 f)$ munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Então o homomorfismo

$$\phi : L(Z) \to G$$

tal que $\phi(y_i) = A_i$ e $\phi(z_i) = B_i$ induz um isomorfismo da álgebra $\frac{L(Z)}{I}$ na álgebra G.

Lema 4.1.8. *Se M_1 e M_2 são dois monômios, tais que $d(M_1) = d(M_2)$ e a primeira linha da matriz $\phi(M_1 - \lambda M_2)$ se anula então $M_1 - \lambda M_2 \in J$.*

Demonstração. Se $d(M_1) = d(M_2) = 0$ então $\phi(M_1 - \lambda M_2) = \phi(M_1) - \lambda\phi(M_2) = 0$ já que $\phi(M_1), \phi(M_2)$ são matrizes diagonais de traço zero.

Seja agora que $d(M_1) = d(M_2) = 1$. Suponha que a segunda linha de $\varphi(M_1 - \lambda M_2)$ seja não nula. Então $\phi(M_1 - \lambda M_2) \notin I$ e $(M_1)_S - \lambda(M_2)_S$ é um múltiplo não nulo da matriz f para qualquer substituição S, não necessariamente elementar. Mas $\rho : sl_2 \to sl_2$ definida por $\rho(m) = m^T$ é um automorfismo de sl_2 tal que $\rho(\langle f \rangle) = \rho(\langle e \rangle)$. Se $0 \neq (M_1)_{S'} - \lambda(M_1)_{S'} = \rho((M_1)_S - \lambda(M_2)_S) \in \langle e \rangle$, onde $S' = \{\rho(m_1, ..., m_k)\}$ o que contradiz a hipótese de que a primeira linha de $\phi(M_1 - \lambda M_2)$ é igual a zero. Assim, $\phi(M_1 - \lambda M_2) = 0$ e $M_1 - \lambda M_2 \in I$. Segue do lema anterior que $M_1 - \lambda M_2 \in J$. $\square$

Temos que $[B_i, B_j] = (b_i^1 b_j^2 - b_i^2 b_j^1)h$ e $[A_i, B_j] = 2(a_i b_j^1 e - a_i b_j^2 f)$. Assim, obtemos que $[B_1, A_1, ..., A_n, B_2] = (-2)^n a_1 ... a_n [B_1, B_2]$. Daqui temos que qualquer monômio pode ser escrito dependendo exclusivamente de matrizes da forma B_i. Além disso, a entrada não nula na primeira linha de $[B_i, B_j]$ é igual ao determinante da matriz $M_{i,j} = b_i^1 e_{11} + b_i^2 e_{12} + b_j^2 e_{22} + b_j^1 e_{21}$. Consequentemente, a entrada não nula da primeira linha de $[B_1, B_2, ..., B_{2k-1}, B_{2k}]$ é igual a 2^{k-1} vezes o produto de determinantes de matrizes do tipo $M_{12}, M_{34}, ..., M_{(2k-1)(2k)}$. Observe que se tivermos uma quantidade t ímpar de matrizes da forma B_i a entrada não nula da primeira linha de $[B_1, ..., B_t]$ será o produto de $2b_t^1$ pela primeira linha da matriz $[B_1, ..., B_{t-1}]$, ou seja, os colchetes de tamanho ímpar são linearmente dependentes dos colchetes de tamanho par. Lembramos que o produto de uma quantidade par de matrizes da forma B_i será uma matriz diagonal em que o elemento não nulo da segunda linha difere do elemento não nulo da primeira linha apenas pelo sinal.

O próximo lema é na verdade uma generalização do Lema **??**. O que queremos dizer é que se uma combinação linear de monômios (um polinômio) é nulo em $\frac{L(X)}{I}$, então um desses monômios, a menos de uma reorganização das variáveis, deve ser múltiplo dos demais módulo J. Em outras palavras, essa combinação é linearmente dependente módulo J.

Lema 4.1.9. *Sejam $M_1, ..., M_k$ monômios multilineares tais que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \in I$. Então existe $j \in \{2, ..., k\}$ tal que a primeira linha de $\phi(M_1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1} M_j)$ se anula.*

Demonstração. É suficiente provar que os polinômios que são produtos de determinantes da forma M_{ij} são linearmente independentes em Ω. Denote o conjunto desses polinômios de D. Como a característica do corpo é zero, é suficiente mostrar para os subconjuntos por D consistindo de polinômios multihomogêneos de mesmo multigrau. Vamos fazer indução sobre o número n de variáveis aparecendo em cada polinômio.

Se $n \leq 2$ a afirmação é verdadeira. Suponha que a afirmação vale para um número $< n$ de variáveis. Seja $\sum c_i P_i = 0, c_i \neq 0, \forall i, P_i \in D$, todos de mesmo multigrau com n variáveis aparecendo. Substitua b_1^l por $b_1^l + \sum_{i=2}^{k} b_i^l, l = 1, 2$. Então considere a combinação $\sum P_{h_2,...,h_k}$, em que $P_{h_2,...,h_k}$ é a soma de polinômios obtidos substituindo h_2 vezes b_1^l por b_2^l em alguma $detM_{1a}, a \neq 2$, em seguida substituindo h_3 vezes b_1^l por b_3^l em alguma $detM_{1a}, a \neq 3$, e assim sucessivamente. Se $detM_{12}$ divide cada P_i então temos que $\dfrac{\sum c_i P_i}{detM_{12}} = 0$ e podemos aplicar a hipótese de indução.

Agora considere a combinação $\sum c_i \tilde{P}_i = 0, c_i \neq 0$ tal que pelo menos um dos $\tilde{P}_i$ não é divisível por $detM_{12}$. Denote por P_m o maior polinômio $P_{h_2,...,h_k}$ na ordem lexicográfica da sequência $(h_2, ..., h_k)$. Então P_m é a soma de polinômios obtidos pela substituição de b_1^l por b_2^l em todos os polinômios do tipo $detM_{1a}$ que divide P_i, em que P_i não é múltiplo de $detM_{12}$. Assim, $P_m = 0$ e o número de variáveis de P_m é menor que n, uma contradição. □

Lema 4.1.10. *Sejam J e I T_2-ideais, tais que $J \subseteq I$. Se $C = \{M_i\}_{i \in \tilde{I}}$ é uma base de $\frac{L(X)}{J}$, então C é uma base em $\frac{L(X)}{I}$.*

Demonstração. Seja C uma base de $\frac{L(X)}{J}$. Assuma que $f \in I$ e tome o menor k tal que $f \equiv_J \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \in I, M_i \in C, \forall i \in \{1, ..., k\}$. Segue que $\phi(f) = 0$. Se $k \neq 0$ temos $\lambda_1 \neq 0$ pela minimalidade de k. Pelo Lema **??**, existe $j \in \{2, ..., k\}$ tal que a primeira linha de $\phi(M_1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1} M_j) \in J$. Pelo Lema **??** segue que $M_1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_1} M_j \in J$. Isso contradiz a minimalidade de k, então $k = 0$. Assim, $f \equiv_I \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i$ e C é uma base de $\frac{L(X)}{I}$ □

Teorema 4.1.11. *Seja $charK = 0$, então a identidade graduada $[y_1, y_2]$ é uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2, isto é, $T_{\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \langle [y_1, y_2] \rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}}$.*

Demonstração. Suponha $I \not\subset J$, isto é, existe $f \in I, f \notin J$. Como $J \subseteq I$ podemos escrever $f \equiv_J \sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$ com $\alpha_j \neq 0$ para algum j e $\{M_i\}_{i \in \tilde{I}}$ uma base de $\frac{L(X)}{J}$ como espaço vetorial. Por outro lado, como $f \in I$ temos que $f \equiv_I \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \equiv_I 0$. Pelo Lema **??**, $\lambda_i = 0, \forall i \in \{1, ..., k\}$. Mas, f deve ser escrito da mesma forma em $\frac{L(X)}{I}$ e em $\frac{L(X)}{J}$, o que é uma contradição. Então $I \subseteq J$ e portanto $I = J$. □

4.2 Identidades $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de sl_2

Sejam $P = \{p_1, p_2, ...\}, Q = \{q_1, q_2, ...\}$, $R = \{r_1, r_2, ...\}$ e $T = \{t_1, t_2, ...\}$ quatro conjuntos disjuntos enumeráveis e $X = P \cup Q \cup R \cup T$. A álgebra de Lie $L(X)$ tem uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação natural se definimos $d(p_i) = (0,0)$, $d(q_i) = (1,0)$, $d(r_i) = (0,1)$ e $d(t_i) = (1,1)$.

Denotaremos por I o ideal das identidades graduadas de sl_2 nesta graduação e por J o ideal graduado em $L(X)$, gerado pelo polinômio x, $d(x) = (0,0)$.

A $\mathbb{Z}_2$-graduação é uma graduação quociente desta graduação já que $(sl_2)_{(0)} = (sl_2)_{(0,0)} + (sl_2)_{(1,0)}$ e $(sl_2)_{(1)} = (sl_2)_{(0,1)} + (sl_2)_{(1,1)}$, assim, cada identidade graduada da seção anterior gera um conjunto de identidades nesta graduação.

Denotaremos por y_i as variáveis de grau (0,0) ou (1,0) e por z_i as variáveis de grau (0,1) ou (1,1). Se um monômio $M \notin I$ então, a menos de um sinal ele pode ser escrito da forma

$$M = [z_1, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_a, z_2, z_3, \hat{y}_{a+1}, ..., \hat{y}_b, z_4, z_5, ..., z_{2k}, \hat{z}_{2k+1}, \hat{y}_c, ..., \hat{y}_d]. \tag{4.5}$$

Como $[h, e+f] = 2(e-f), [h, e-f] = 2(e+f)$ e $[e+f, e-f] = 2h$, para qualquer $1 \leq j \leq k$, $d(z_{2j}) = d(z_{2j-1})$ se, e somente se, n_j for ímpar, em que n_j é o número de variáveis para que aparecem entre z_{2j-1} e z_{2j}.

Para demonstrar o próximo resultado desta seção, iremos associar a cada variável z_i um sinal, $s(z_i) = 1,$ se $d(z_i) = (0,1)$ e $s(z_i) = -1,$ se $d(z_i) = (1,1)$.

Sejam $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, ..., b_n, ...\}$ dois conjuntos disjuntos de variáveis comutativas. Sejam G a álgebra gerada pelas matrizes $A_i = a_i h$, $B_j^+ = b_j(e+f)$ e $B_j^- = b_j(e-f)$, e seja $\Omega = K[A \cup B]$. Esta álgebra tem uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação natural e o homomorfismo $\phi : L(X) \to G$ definido por $\phi(p_i) = 0$, $\phi(q_i) = A_i$, $\phi(r_i) = B_i^+$ e $\phi(t_i) = B_i^-$ induz um isomorfismo graduado entre $\frac{L(X)}{I}$ e G, onde $I = ker(\phi)$.

Agora se M é como em (**??**) com grau total de M igual a n, no qual aparecem m variáveis de grau (1,0) e tal que y_{2k+1} não aparece, então:

$$\phi(M) = (-2)^{n-1} \prod_{i=2}^{k} (s(z_{2i}) a_1 ... a_m b_1 ... b_{2k}) h \tag{4.6}$$

Se M é como em **??** com grau total de M igual a n, no qual aparecem m variáveis de grau (1,0) e tal que y_{2k+1} aparece, então:

$$\phi(M) = (-2)^{n-1} \prod_{i=2}^{k} (s(z_{2i}) a_1 ... a_m b_1 ... b_{2k}) \phi(y_{2k+1}) \tag{4.7}$$

Lema 4.2.1. *Os monômios*

$$[..., y_1, z_1, y_2, ..., y_a, z_2, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, ...]$$

e

$$[..., y_1, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, z_1, y_2, ..., y_a, z_2, ...]$$

são congruentes módulo J.

Demonstração. Observe que antes do y_1 pode ter:

1. Um colchete que está na componente 1: neste caso se anula;

2. Um colchete que está na componente 0: neste caso basta renomear a variável y_1 para $\tilde{y_1}$.

Portanto é suficiente mostrar o resultado para monômios da forma

$$[y_1, z_1, y_2, ..., y_a, z_2, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, ...].$$

Aplicando os itens (7) e (8) do Lema **??** e obtemos:

$$\begin{aligned}
[y_1, z_1, y_2, ..., y_a, z_2, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, ...] = {} & -[y_1, z_1, y_2, ..., y_a, z_2, [z_3, y_{a+1}, ..., y_b], z_4, ...] \\
= [y_1, [z_1, y_2, ..., y_a], z_2, [z_3, y_{a+1}, ..., y_b], z_4, ...] = {} & [y_1, [z_3, y_{a+1}, ..., y_b], z_4, [z_1, y_2, ..., y_a], , z_2, ...] \\
= [y_1, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, [z_1, y_2, ..., y_a], , z_2, ...] = {} & [[y_1, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4], z_1, y_2, ..., y_a, , z_2, ...] \\
& = [y_1, z_3, y_{a+1}, ..., y_b, z_4, z_1, y_2, ..., y_a, , z_2, ...]
\end{aligned}$$

□

Definição 4.2.2. *Seja $\alpha \in S_n$, onde n é o grau total de um monômio $M = [x_1, ..., x_n]$. Denotaremos por M_α o monômio $M = [x_{\alpha(1)}, ..., x_{\alpha(n)}]$*

Lema 4.2.3. *Seja $M = [x_1, ..., x_n]$. Se $d(x_i) = d(x_j)$ e $\alpha = (ij)$, então $M \equiv_J M_\alpha$*

Demonstração. Segue do Lema **??** e das identidades da seção anterior que é suficiente considerar os casos $M = [z_1, y_2, ..., y_{n-1}, z_n], \alpha = (1n)$ e $M = [..., x_1, x_2, ...], \alpha = (12)$. Esses casos seguem diretamente de $[x_1, x_2] = 0$ se $d(x_1) = d(x_2)$ e dos itens 4 e 6 do Lema **??** que nos permitem trocar duas variáveis de mesmo grau. Como essas identidades estão em J, segue o resultado. □

Lema 4.2.4. *Os monômios*

$$[..., z_{2j-1}, y_1, ..., y_n, z_{2j}, z_{2j+1}, y_{n_j+1}, ..., y_{n_j+n_{j+1}}, z_{2j+2}, ...]$$

e

$$s(z_{2j+2})[\ldots, z_{2j-1}, y_2, \ldots, y_{n_j}, z_{2j}, z_{2j+1}, y_1, y_{n_j+1}, \ldots, y_{n_j+n_{j+1}}, z_{2j+2}, \ldots]$$

são congruentes módulo J.

Demonstração. Usando as identidades do Lema **??** é suficiente provar que

$$[\ldots, z_{2j-1}, y, z_{2j}, z_{2j+1}, z_{2j+2}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, \ldots].$$

Usando o Lema **??** podemos trocar as variáveis $\{y_{2j-1}, y_{2j}\}$ pelas variáveis $\{y_{2j+1}, y_{2j+2}\}$. Temos dois casos possíveis:
Caso I: Se as variáveis z_{2j-1} e z_{2j+1} têm o mesmo grau, aplicamos os Lemas **??** e **??** e temos:

$$[\ldots, z_{2j-1}, y, z_{2j}, z_{2j+1}, z_{2j+2}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, \ldots]$$

Caso II: Se as variáveis z_{2j-1} e z_{2j+1} têm grau diferente, pelo Lema **??** segue que:

$$[\ldots, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j+2}, y, z_{2j+1}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots]$$

pelo item (4) de **??** e pelo Lema **??**,

$$[\ldots, z_{2j+2}, y, z_{2j+1}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots] \equiv -[\ldots, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots] \equiv - [\ldots, z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, \ldots]$$

e o resultado está provado. □

Lema 4.2.5. *Sejam M um monômio do tipo (**??**), tal que z_{2k+1} não aparece e $\tilde{M}$ um monômio de mesmo multigrau de M. Se a primeira linha de $\phi(M - \lambda\tilde{M})$ é zero então $M - \lambda\tilde{M} \in J$.*

Demonstração. Seja $\tilde{M}$ um monômio do mesmo multigrau de M, então a quantidade de variáveis de grau (1,0), em cada monômio, é o mesmo. Pelos itens 6 e 10 do Lema **??**, podemos colocá-las na ordem certa. Se $d(\tilde{z}_{2j-1}) = d(\tilde{z}_{2j})$ pelo Lema **??**, podemos reorganizá-las conforme o conveniente; se $d(\tilde{z}_{2j-1}) \neq d(\tilde{z}_{2j})$, observamos que $[z_1, y, z_2] = [z_2, y, z_1] = [z_1, z_2, y]$ e em qualquer dos casos, podemos assumir $\{\tilde{z}_{2j-1}, \tilde{z}_{2j}\} = \{z_{2j-1}, z_{2j}\}$ e temos $M \equiv_J \lambda\tilde{M}$. Mas a primeira linha de $\phi(M - \lambda\tilde{M})$ é nula, portanto $|\lambda| = 1$ e $M \equiv_J \pm\tilde{M}$. □

Teorema 4.2.6. *Se o corpo K tem característica zero então $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2) = J$, isto é, $T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}(sl_2) = \langle x\rangle^{T_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}}$ em que x é uma variável de grau $(0,0)$.*

Demonstração. Seja $f \in I$ polinômio multihomogêneo de grau total n e considere o menor k tal que podemos escrever

$$f \equiv_J \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \in I,$$

$M_i \in C, \quad C = \{[x_{\alpha(1)}, ..., x_{\alpha(n)}] | \alpha \in S_n, \alpha(1) = 1\}$. Se $d(f) = (0,1)$ ou $d(f) = (1,1)$ segue de (**??**) que as últimas variavéis dos $M_i's$ são todas de mesmo tipo. Usando o Lema **??**, podemos assumir que a última variável em cada M_i é a mesma, digamos z_{2k+1}. Se escrevermos $M_i = [N_i, z_{2k+1}]$, temos que

$$[\sum_{i=1}^{k} N_i, z_{2k+1}] \in I$$

e por **??** podemos concluir que $\sum_{i=1}^{k} N_i \in I$. Assim é suficiente mostrar o caso $d(f) = (1,0)$

Neste caso, $\phi(f) = 0$ e o primeiro elemento não nulo da primeira linha em cada $\phi(M_i)$ é um monômio em Ω. Supondo $k \neq 0$, concluímos que $\lambda_1 \neq 0$ devido a minimalidade de k. Então pelo Lema **??**, existe j tal que a primeira linha de $\phi(M_1 - \lambda_j/\lambda_1 M_j)$ é nula, segue que $M_1 - \lambda_j/\lambda_1 M_j \in J$, uma contradição. □

4.3 Identidades $\mathbb{Z}$-graduadas de sl_2

Seja $L(X)$, $X = \cup_{i \in \mathbb{Z}} X^i$, a álgebra de Lie livre munida da $\mathbb{Z}$-graduação descrita na seção 3 do capítulo anterior. Assim como no capítulo 3 trabalharemos apenas como o $supp(X) = \{-1, 0, 1\}$. Denotaremos por x, com ou sem índice, uma variável de X, por y uma variável de X^0 e por z uma variável de $X^{-1} \cup X^1$. A $\mathbb{Z}$-graduação é uma graduação quociente da $\mathbb{Z}_2$-graduação uma vez que $(sl_2)_0 = (sl_2)_0$, $(sl_2)_1 = (sl_2)_{-1} + (sl_2)_1$.

Sejam $A = \{a_1, ..., a_n, ...\}, B = \{b_1, ..., b_n, ...\}$ e $C = \{c_1, ..., c_n, ...\}$ três conjuntos infinitos, enumeráveis e disjuntos de variáveis comutativas e G a subálgebra de Lie de $M(\Omega)$ gerada pelas matrizes $A_i = a_i h, B_i = b_i e$ e $C_i = c_i f$, em que $\Omega = K[A \cup B \cup C]$. A álgebra G tem uma $\mathbb{Z}$-graduação natural se definimos $d(A_i) = 0, d(B_i) = 1$ e $d(C_i) = -1$. O homomorfismo $\phi : L(X) \to G$ determinado por $\phi(x_i^0) = A_i, \phi(x_i^1) = B_i, \phi(x_i^{-1}) = C_i$ e $\phi(x_i^j) = 0$, se $|j| \geq 2$, induz um isomorfismo graduado entre as álgebras $\frac{L(X)}{I}$ e G, com $I = T_{\mathbb{Z}}(sl_2)$ o núcleo de ϕ.

Denotaremos por J o ideal das identidades geradas por $[x_1, x_2], d(x_1) = d(x_2) = 0, 1, -1$ e $x = 0, |d(x)| \geq 2$. Como nas secções anteriores deste capítulo, se um monômio M não pertence a $I = T_{\mathbb{Z}}(sl_2)$ então ele é, a menos do sinal, do seguinte tipo:

$$M = [z_1, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_a, z_2, z_3, \hat{y}_b, ..., z_{2k}, z_{2\hat{k}-1}, \hat{y}_c, ..., \hat{y}_d] \tag{4.8}$$

em que o chapéu sobre a variável significa que ela pode não aparecer, z_{2k-1} aparece dependendo do grau do monômio ser 0 ou ± 1. Definimos v_j e n_j analogamente. Se $M \notin I$ então $d(y_{2j-1}) = -d(y_{2j})$.

Das igualdades

$$[A_i, B_j] = 2a_i B_j; \quad [A_i, C_j] = 2a_i C_j; \quad [B_i, C_j] = b_i c_j h$$

segue que

$$\phi(M) = \lambda(M) a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_{2k} h \tag{4.9}$$

onde M é como em (**??**), $d(M) = 0$ e

$$\lambda(M) = d(z_1)(-2d(z_1))^{n_1} \prod_{i=2}^{k} (-d(z_{2j-1}))(-2d(z_i))^{n_i+1}.$$

Se $d(M) = \pm 1$ então

$$\phi(M) = -2d(z_{2k+1}) \lambda(M) a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_{2k} \phi z_{2k+1} \tag{4.10}$$

Lema 4.3.1. *Seja $M = [x_1, \ldots, x_n]$. Se $d(x_i) = d(x_j)$ e $\alpha = (i, j)$ então $M \equiv_J M_\alpha$*

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Lema **??** □

Lema 4.3.2. *Os monômios*

$$[\ldots, z_{2j-1}, y_1, \ldots, y_n, z_{2j}, z_{2j+1}, y_{n_j+1}, \ldots, y_{n_j+n_{j+1}}, z_{2j+2}, \ldots]$$

e

$$d(y_{2j-1}) d(y_{2j+1}) [\ldots, z_{2j-1}, y_2, \ldots, y_{n_j}, z_{2j}, z_{2j+1}, y_1, y_{n_j+1}, \ldots, y_{n_j+n_{j+1}}, z_{2j+2}, \ldots]$$

são congruentes módulo J.

Demonstração. Usando as identidades do Lema **??** é suficiente provar que $[\ldots, z_{2j-1}, y, z_{2j}, z_{2j+1}, z_{2j+2}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, \ldots]$. Usando o Lema **??** podemos trocar as variáveis $\{y_{2j-1}, y_{2j}\}$ pelas variáveis $\{y_{2j+1}, y_{2j+2}\}$. Temos dois casos possíveis:

Caso I: Se as variáveis z_{2j-1} e z_{2j+1} têm o mesmo grau, aplicamos os Lemas **??** e **??** e temos:

$$[\ldots, z_{2j-1}, y, z_{2j}, z_{2j+1}, z_{2j+2}, \ldots] \equiv [\ldots, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, \ldots] \equiv \\ [\ldots, z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, \ldots]$$

Caso II: Se as variáveis z_{2j-1} e z_{2j+1} têm graus diferentes, neste caso $d(z_{2j-1}) d(z_{2j+1}) = -1$ e pelo Lema **??** segue que:

$$[..., z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, ...] \equiv [..., z_{2j+2}, y, z_{2j+1}, z_{2j-1}, z_{2j}, ...].$$

Pelo item 4 do Lema **??** e pelo Lema **??**,

$$\begin{aligned} [..., z_{2j+2}, y, z_{2j+1}, z_{2j-1}, z_{2j}, ...] &\equiv -[..., z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, z_{2j-1}, z_{2j}, ...] \\ &\equiv -[..., z_{2j-1}, z_{2j}, z_{2j+1}, y, z_{2j+2}, ...] \end{aligned}$$

e o resultado está provado. □

Lema 4.3.3. *Se M é um monômio de grau 0 como em (**??**), com m variáveis de grau 0 aparecendo nele, então M é congruente módulo J a*

$$s(M)[z_1, z_2, z_3, ..., z_{2k-3}, z_{2k-2}, z_{2k-1}, y_1, ..., y_m, z_{2k}]$$

e

$$s(M) = \prod_{i=2}^{k}(-d(y_{2i-1})^{n_i})(-d(y_{2k-1})^m).$$

Demonstração. Para demonstrar, basta aplicar várias vezes o lema anterior, colocando as variáveis de grau 0 onde quisermos, observando apenas o sinal das variáveis z. □

Lema 4.3.4. *Se M e $\tilde{M}$ são monômios de mesmo multigrau, $d(M) = d(\tilde{M}) = 0$, e a primeira linha de $\phi(M - \lambda\tilde{M})$ é zero, então $M - \lambda\tilde{M} \in J$.*

Demonstração. Seja m o número total de variáveis de grau 0 nos monômios. Pelo lema anterior, podemos reordenar as variáveis de grau 0 em $\tilde{M}$ para obter $\tilde{M} \equiv_J s(\tilde{M})N$, em que

$$N = [\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_1, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m, \tilde{z}_{2k}],$$

pelo Lema **??**, podemos assumir que $\{\tilde{z}_{2j-1}, \tilde{z}_{2j}\} = \{z_{2j-1}, z_{2j}\}, j = 1, 2, ..., k$. Também podemos assumir, módulo J, que $\tilde{z}_{2j-1} = z_{2j-1}$ e $\tilde{z}_{2j} = z_{2j}$. Se $\tilde{z}_1 = z_2$, neste caso, $d(z_1)d(\tilde{z}_1) = -1$ e então

$$N = -[z_1, z_2, ..., z_{2j-1}, y_1, ..., y_m, z_{2j}]$$

e portanto

$$N = d(z_1)d(\tilde{z}_1)[z_1, z_2, ..., z_{2j-1}, y_1, ..., y_m, z_{2j}]$$

temos

$$\tilde{M} \equiv s(\tilde{M})d(z_1)d(\tilde{z}_1)[z_1, z_2, ..., z_{2j-1}, y_1, ..., y_m, z_{2j}].$$

Como a primeira linha de $\phi(M - \lambda(\tilde{M}))$ é nula, segue de **??** que $|\lambda| = 1$ e $s(M) = s(\tilde{M})d(z_1)d(\tilde{z}_1)$, e podemos concluir que M e $\tilde{M}$ são congruentes ao mesmo monômio e portanto $M \equiv \tilde{M}$. □

Teorema 4.3.5. *Se o corpo K tem característica zero então $T_{\mathbb{Z}}(sl_2) = J$, isto é, $T_{\mathbb{Z}}(sl_2) = \langle [x_1, x_2], w\rangle^{T_{\mathbb{Z}}}$ em que x_1, x_2 tem grau 0 e w tem grau $i \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$.*

Demonstração. Seja $f \in I$ um polinômio multihomogêneo e considere o menor k tal que podemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_i \in I,$$

$M_i \in C, C = \{[x_{\alpha(1)}, ..., x_{\alpha(n)}] | \alpha \in S_n, \alpha(1) = 1\}$. Se $d(f) = \pm 1$ segue de **??** que a última variável de cada M_i têm todas os mesmos grau e podemos assumir, pelo Lema **??**, que módulo J, a última variável é a mesma, digamos z_{2k+1}. Escrevendo

$$M_i = [N_i, z_{2k+1}]$$

segue que

$$[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i N_i, z_{2k+1}] \in I$$

e por **??** podemos concluir que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i N_i \in I$. Assim basta considerar o caso $d(f) = 0$ e proceder como no Teorema **??**. $\square$

Referências

[1] Alves, S. T. *Identidades Polinomiais Graduadas para Álgebra de Matrizes*, 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2012.

[2] Drensky, V. *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[3] Fonseca, M. P. *Representações dos grupos Simétricos e Alternante e Aplicação às Identidades Polinomiais*, 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

[4] Galvão, I. B. *Identidades Polinomiais para o Produto Tensorial de PI-Álgebras*, 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2012.

[5] Giambruno, A. e Zaicev, M.:*Polinomial Identities and Asymptotic Methods,*, Math.Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.

[6] Kemer, A. R. *Finite bases property of identities of associatives algebras,* Algebra and Logic 5, 362-397(1987).

[7] Kemer, A. R. *Ideals of identities of associative algebras,*, Translations of Math. Monographs 87, AMS, Providence, RI (1991).

[8] Koshlukov, P. Krasilnikov, A.Diniz, D. *Graded Identities for Lie Algebra.* Contmporary Mathematics, Providence, RI:Amareican Mathematical Society,2009,v499,181-188.

[9] Koshlukov, P. *Graded polynomial identities for the Lie algebra* sl_2. J. Algebra. **18 (5)** (2008), 825-836.

[10] Razmyslov, Y. *Finite basing of the identities of matrix algebra of second order over a field of characteristic zero,* Algebra i Logika 12, n.1, 83-1113(1973)(in Russian);Algebra and Logic 12,47-3 (1973)(Engl. transl.).

[11] Razmyslov, Y. *Identities of Algebras and their Represatations,* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence, RI (1994).

[12] Repin, D. V.:*Graded identities of a simple three-dimensional simple Lie algebra*, Vestn.Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser. 2004, Special Issue 2, 5-16 (Russian).

[13] Robinson, D. J. S. *A course in the theory of groups*,Graduate Texts in Mathematics 80, Springer, 1991.

[14] Semensato, M. T *Álgebra de Lie, grupos de Lie e aplicações à teoria de ações de semigrupo.*, 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

[15] Souza, M. da S. Giambruno, A. *Graded polynomial identities and Specht property of the Lie algebra* sl_2. J. Algebra (2013), 9-22.

[16] Silva, D. D. P. S. e. *Identidades Graduadas em Álgebra não-Associativa*, 2010. Tese (Doutorado em Matemática) Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

[17] Vasconcelos, A. da C. *Crescimento polinomial das codimensões e $*$-codimensões*, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

[18] Zhevlakov, K. A. Slink'ko, A. M. Shestakov, I. P. Shirshov, A.I, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, Inc.,1982. J. London Math. Soc. (2) 11, 263-266 (1975).