



JUBILEO  
Prof. Julio Ricaldoni

## SÍNTESE ESTRUTURAL E ANÁLISE MODAL DE PÓRTICOS ESPACIAIS COM DIFERENTES GRAUS DE REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

**Pedro Cláudio S. Vieira<sup>1</sup>, Eldon L. Mello<sup>2</sup>, Luciano M. Bezerra<sup>3</sup>**

Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

70.910-900 – Cx. Postal 04492 – Brasília, DF, Brasil

**e-mail: pcvieira@unb.br, lmbz@unb.br**

### SUMARIO

Neste trabalho, faz-se a redistribuição de esforços solicitantes usando um método alternativo, proposto por Mello (1995) que utiliza uma função convexa de redistribuição como uma combinação linear de duas soluções uma elástica e outra plástica para a obtenção de soluções redistribuídas condicionadas a solução elástica de forma que atendam aos dois estados limites de utilização e último. Para tanto, obtêm-se soluções elásticas baseadas no método de rigidez analítico que apresenta matrizes de equilíbrio (L), rigidez (K) e rotação (R) para o elemento desconexo. Duas soluções plásticas (regime rígido-plástico) são obtidas: a do critério de mínimo peso aplicando programação matemática linear (PL) e a da teoria das inversas generalizadas que utiliza uma função de mínima norma euclidiana. Considera-se a estrutura discretizada em elementos de barra de comprimento finito.

Para estudos sobre a segurança estrutural é feita a análise incremental (regime elasto-plástico) para detectar a ordem de formação das rótulas plásticas, fator de carga de colapso plástico, deslocamentos etc.; testando-se a capacidade de rotação plástica das seções comparando-a com os critérios de norma. Acompanhando a formação das rótulas plásticas faz-se a análise das frequências naturais e modos de vibração para a avaliação do comportamento dinâmico da estrutura projetada.

A formulação descrita foi implementada em programas computacionais e no final deste trabalho são apresentados e discutidos exemplos numéricos mostrando a eficácia da metodologia alternativa proposta.

**Palavras Chaves:** Estruturas, Estruturas de Concreto, Plasticidade, Síntese Estrutural, Concreto Armado, Redistribuição de Esforços Solicitantes, Otimização, Análise.

---

<sup>1</sup> MSc. – Universidade de Brasília (UnB);

<sup>2</sup> Prof. PhD – Universidade de Brasília (UnB);

<sup>3</sup> Prof. PhD – Universidade de Brasília (UnB).

## 1. INTRODUÇÃO

Estudos feitos sobre a redistribuição de momentos fletores mostram que em estruturas submetidas a carregamentos progressivos formam-se fissuras que alteram a rigidez das seções, fazendo com que os esforços atuantes nestas seções não possam ser mais resistidos em sua totalidade. A propriedade dúctil dos materiais empregados e a condição de serem estruturas hiperestáticas permitem que sejam redistribuídos os esforços de regiões mais solicitadas para outras menos solicitadas.

Nas pesquisas feitas por Leonhardt<sup>1</sup> podemos denotar o emprego da redistribuição de momentos. Prado<sup>2</sup> estudou a redistribuição de momentos em vigas de edifícios, onde apresentou estudos sobre as modificações possíveis na distribuição de momentos fletores, induzidas por um escolha adequada de relações entre as armaduras sobre os apoios e nos vãos. Geralmente empregam-se métodos iterativos na redistribuição de esforços, a partir da análise linear elástica de forma a encontrar uma nova configuração de equilíbrio com os carregamentos atuantes.

Mello<sup>3</sup> propôs uma função convexa de redistribuição de esforços solicitantes para dimensionamento de estruturas que pode ser aplicada a pórticos espaciais sem o uso de métodos iterativos. A redistribuição fornecerá uma nova configuração de equilíbrio, permitindo prever possíveis alterações dos esforços nas seções da estrutura, dando assim mais segurança ao projetista, com relação a prováveis falhas na fase construtiva e ao longo da vida útil da estrutura.

Para uma avaliação do comportamento das estruturas projetadas em função das soluções redistribuídas pelo critério de mínima norma euclidiana (por exemplo, Mello<sup>4</sup>) ou mínimo peso (por exemplo, Horne<sup>5</sup>), são feitas análises incrementais investigando a estrutura quanto ao processo de formação de rótulas plásticas e dinâmicas para o estudo das alterações ocorridas nas frequências naturais e modos de vibração, devido às mudanças das rigidezes das seções onde se formam as rótulas plásticas.

## 2. ESTÁTICA E CINEMÁTICA

A solução de problemas da mecânica estrutural requer a aplicação de três leis básicas: as leis da estática, da cinemática e as relações constitutivas do material. Podem ser utilizadas duas maneiras distintas para descrever estas leis, a saber, a descrição de malha e a nodal, sendo mostrada a seguir a descrição nodal (por exemplo, Harrison<sup>6</sup>).

- Descrição Nodal

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (2.1a,b)$$

Onde:  $\mathbf{a}$  é o vetor de cargas nodais,  $\mathbf{L}$  a matriz de equilíbrio,  $\mathbf{m}$  o vetor de esforços seccionais,  $\boldsymbol{\theta}$  o vetor das deformações seccionais associados às cargas nodais e  $\boldsymbol{\delta}$  o vetor dos deslocamentos da estrutura. A matriz de equilíbrio  $\mathbf{L}$  é unicamente determinada para uma estrutura, onde nenhum vínculo (interno ou externo) é violado na sua obtenção (por exemplo, Mello<sup>7</sup>).

## 3. ANÁLISE ELÁSTICA

O método utilizado neste presente trabalho foi o método de rigidez analítico que utiliza as matrizes de rigidez de membro  $\mathbf{K}$ , equilíbrio  $\mathbf{L}$  e rotação  $\mathbf{R}$  para cada elemento desconexo (por exemplo, Harrison<sup>6</sup>).

A matriz de rigidez  $\mathbf{S}$  da estrutura é:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{R}^T \quad (3.1)$$

Empregou-se o método de rigidez analítico porque a matriz  $\mathbf{L}$  é fundamental na síntese plástica por mínimo peso ou mínima norma euclidiana.

A discretização do contínuo em elementos de barra no sistema de eixos locais (m) segue a formulação baseada na figura 3.1 (por exemplo, Harrison<sup>6</sup>).

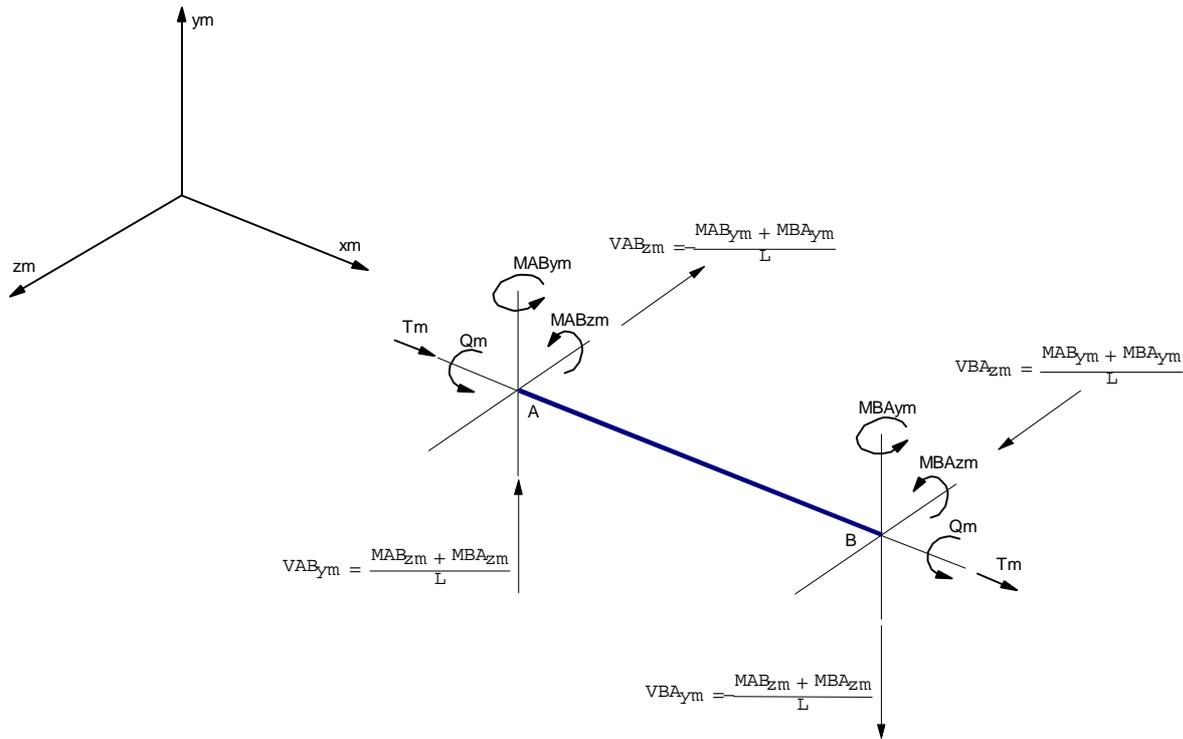


Fig. 3.1 - Tensões resultantes de membro e relações de equilíbrio -3D

A matriz de rigidez de membro  $\mathbf{K}$ , sem a inclusão de termos de deformação por cisalhamento, para uma estrutura espacial, segue na equação (3.2).

$$\begin{bmatrix} T_m \\ MAB_{zm} \\ MBA_{zm} \\ MAB_{ym} \\ MBA_{ym} \\ Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi BA_z \\ \phi AB_y \\ \phi BA_y \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

onde:

- “ $\boldsymbol{\theta}$ ” é o vetor de deformações seccionais;
- “ $e$ ”, “ $\phi$ ” e “ $\beta$ ” deformações dos membros.

A matriz de equilíbrio  $\mathbf{L}$ , da equação (3.3), contém as relações entre as ações de extremidades de membro, no sistema de coordenada do membro, e as tensões resultantes.

$$\begin{bmatrix} F A_{x m} \\ F A_{y m} \\ F A_{z m} \\ M A_{x m} \\ M A_{y m} \\ M A_{z m} \\ F B_{x m} \\ F B_{y m} \\ F B_{z m} \\ M B_{x m} \\ M B_{y m} \\ M B_{z m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ M A B_{z m} \\ M B A_{z m} \\ M A B_{y m} \\ M B A_{y m} \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}$$

Temos a seguir as matrizes de rotação para membros inclinados (3.4) e membros verticais (3.5) para para pórticos espaciais (por exemplo, Gere & Weaver<sup>8</sup>).

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos \alpha - C_Z \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \cos \alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos \alpha + C_X \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \\ \frac{C_X C_Y \operatorname{sen} \alpha - C_Z \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & -\sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \operatorname{sen} \alpha & \frac{C_Y C_Z \operatorname{sen} \alpha + C_X \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ C_Y \operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

As equações de equilíbrio dos nós (por exemplo, Harrison<sup>6</sup>), para uma estrutura completa, ou apenas um membro são:

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (3.8)$$

A matriz de equilíbrio  $\mathbf{L}$  tem as seguintes dimensões  $(\beta \times n)$ , onde  $\beta$  é o grau de indeterminação cinemática e  $n$  o número de esforços seccionais, com posto:  $r(\mathbf{L}) = \beta$ .

Substituindo-se as equações (3.8) e (3.7) em (3.6), obtém-se a equação (3.9):

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.9)$$

Os deslocamentos nodais  $\boldsymbol{\delta}$  são encontrados, calculando-se a inversa da matriz de rigidez da estrutura ( $\mathbf{S}$ ) e multiplicando-se esta pelo vetor de cargas nodais.

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0) \quad (3.10)$$

Os deslocamentos são encontrados primeiro (*Método dos deslocamentos*) e depois calculam-se as deformações seccionais vistas em (3.11).

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.11)$$

Os esforços seccionais elásticos (3.12) são obtidos substituindo (3.11) em (3.7), sendo estes necessários para a redistribuição da estrutura.

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.12)$$

#### 4.- PROJETO VIA CRITÉRIO DE MÍNIMO PESO

Existem três teoremas da plasticidade (por exemplo, Horne<sup>5</sup>) que são aplicados, ou seja, teorema do limite inferior; teorema do limite superior e teorema da unicidade.

Um projeto de mínimo peso tem que satisfazer as seguintes condições:

- *Equilíbrio.* Os momentos fletores necessitam representar um estado de equilíbrio entre os carregamentos internos e externos;
- *Escoamento.* O momento plástico de resistência, determinado pelo valor da tensão de escoamento, não pode ser excedido;
- *Mecanismo.* O momento plástico de resistência necessita ser alcançado para um número suficiente de seções, para a formação do mecanismo de colapso;
- *Rótulas plásticas.*

#### 4.1 - GERAÇÃO DOS MODELOS PARA A PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Adotou-se, para o desenvolvimento de projetos de mínimo peso, um dos modelos de PL mostrados por Mello<sup>7</sup> que usa o teorema estático com a descrição nodal. Na figura 4.1, descrevem-se as variáveis de projeto.

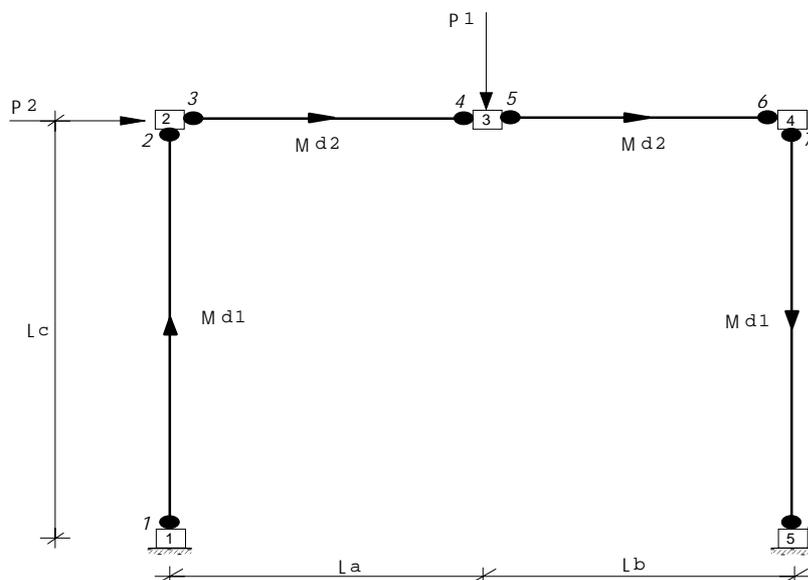


Fig. 4.1 - Exemplo de pórtico plano para a PL

O modelo de PL adotado para solução de mínimo peso foi o descrito para estruturas metálicas.

⇒ Para estruturas *metálicas*:

Deseja-se minimizar a função peso, vista na equação (4.1).

$$\mathbf{G} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{m}_d \quad (4.1)$$

onde:

- $\mathbf{k}$  - constante;
- $\mathbf{l}^T$  - vetor dos comprimentos da estrutura;
- $\mathbf{m}_d$  - vetor das variáveis de projeto.

Seguem-se, nas equações (4.2) e (4.3), as variáveis de projeto  $\mathbf{m}_d$  e a matriz de incidências  $\mathbf{J}_s$  para o exemplo dado na figura 4.1.

$$\bullet \Rightarrow \mathbf{m}_d = \begin{bmatrix} m_{d1} \\ m_{d2} \end{bmatrix} \geq 0; \quad (4.2)$$

$$\bullet \begin{bmatrix} m_p^{+1} \\ m_p^{+2} \\ m_p^{+3} \\ m_p^{+4} \\ m_p^{+5} \\ m_p^{+6} \\ m_p^{+7} \\ m_p^{+8} \end{bmatrix}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n \times nd)} \cdot \begin{bmatrix} m_{d1}^+ \\ m_{d2}^+ \end{bmatrix}_{(nd \times 1)} \Rightarrow \mathbf{m}_p^+ = \mathbf{J}_s^+ \cdot \mathbf{m}_d^+ \quad (4.3)$$

PERFIS LAMINADOS :

$$\mathbf{m}_p^+ = \mathbf{m}_p^- = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{m}_d$$

Na equação (4.4), é apresentado o modelo da PL aplicado no método.

$$\begin{aligned} & \text{MIN} \quad [\mathbf{l}^T : \mathbf{0}^T] \\ & \begin{matrix} n \\ n \\ \beta \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s & -\mathbf{I} \\ \mathbf{J}_s & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}_d \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \lambda_c \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} n_d & n \end{matrix} \\ & \mathbf{m}_d \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde:

- $n$  = numero de esforços seccionais independentes;
- $\beta$  = numero de graus de liberdade;
- $\mathbf{a}$  = vetor de ações solicitantes;
- $\mathbf{J}_s$  = matriz de incidência das exigências de projeto;
- $\mathbf{I}$  = matriz identidade;
- $\mathbf{L}$  = matriz de equilíbrio;

$\mathbf{m}$  = vetor de esforços solicitantes (sem restrição de valor)

## 5. – PROJETO VIA MÍNIMA NORMA EUCLIDIANA

A *Teoria de Inversas Generalizadas de Matrizes*, com suas aplicações para análise de estruturas, foi empregada por Mello<sup>4</sup> para a obtenção de esforços solicitantes. O método trabalha com uma matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  que é substituída por uma matriz identidade  $\mathbf{I}$ , de forma que ao projetar-se uma estrutura por mínima norma euclidiana não haverá a dependência das relações constitutivas do material.

O método determina uma inversa generalizada de mínima norma de um sistema de equações lineares visto na equação (5.1).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.1)$$

cuja solução, tenha a menor norma possível, sendo isto independente do vetor  $\mathbf{b}$  (por exemplo, Mello<sup>7</sup>) dada por (5.2a,b):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{b} \\ \|\mathbf{x}_0\| &= \|\mathbf{A}^- \cdot \mathbf{b}\| \end{aligned} \quad (5.2a,b)$$

onde:

$\mathbf{A}^-$  = inversa generalizada de  $\mathbf{A}$ .

A seguir, tem-se uma esquema das diferenças entre equações para as análises elástica e mínima norma euclidiana.

⇒ Elástica

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}\| &= (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{m})^{1/2} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{H}_e &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (5.3a-c)$$

⇒ Euclidiana

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}_f\| &= (\mathbf{m}_f^T \cdot \mathbf{m}_f)^{1/2} \\ \mathbf{m}_f &= \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{H}_f &= \mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (5.4a-c)$$

Deve-se observar que:

$\mathbf{H}_e$  = Inversa Generalizada Reflexiva de Mínima Norma Elástica de  $\mathbf{L}$ ;

$\mathbf{H}_f$  = Inversa Generalizada Reflexiva de Mínima Norma Euclidiana de  $\mathbf{L}$ ;

$\|\mathbf{m}\|$  = Norma dos esforços seccionais;

$\|\mathbf{m}_f\|$  = Norma dos esforços seccionais, equilibrados com as cargas ( $\mathbf{a}$ ), de menor módulo possível;

$\mathbf{F}$  = Matriz de flexibilidade dos elementos desconexos, sendo que  $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$ .

## 6. - ANÁLISE ESTÁTICA E MODAL DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DO ANSYS

A análise da frequência natural e modo de vibração, que são de interesse para evitar a ocorrência problemas estruturais como a ressonância, foi feita empregando o software ANSYS<sup>9</sup> que será utilizado também para a comparação dos esforços estáticos em regime elástico. A resolução do sistema de equações simultâneas linear é feita pelo método de

*solução frontal* ou *frente de onda* empregado no método dos elementos finitos. O número de equações que estão ativas depois de qualquer elemento ter sido processado durante a solução é chamado frente de onda (por exemplo, ANSYS<sup>9</sup>).

A formulação empregada pelo ANSYS na análise dinâmica modal é:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Emprega-se, para as vibrações livres, um harmônico apresentado na equação (6.2).

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_i \cdot \cos \omega_i t \quad (6.2)$$

onde:

$\boldsymbol{\phi}_i$  = autovetor representando o modo de forma da i-ésima frequência natural

$\omega_i$  = i-ésima frequência circular (radianos por unidade de tempo)

t = tempo

Substituindo-se (6.2) em (6.1), obtém-se a equação (6.3):

$$\left( -\omega_i^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) \cdot \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

A igualdade da equação (6.3) pode ser satisfeita se 1)  $\boldsymbol{\phi}_i$  é igual a zero ou 2) o determinante de  $\left| \mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M} \right| = 0$  for zero. Quando  $\boldsymbol{\phi}_i$  é igual a zero tem-se a solução trivial, não sendo de interesse para engenharia. Assim, o segundo caso é apresentado na equação seguinte.

$$\left| \mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M} \right| = 0 \quad (6.4)$$

Isto é um problema de autovalores que podem ser resolvidos para n valores de  $\omega^2$  e n autovetores  $\boldsymbol{\phi}_i$  que satisfazem a equação (6.3), onde n é o número de graus de liberdade.

As frequências naturais ( $f_i$ ), obtidas em função das frequências circulares naturais, estão relacionadas segundo a equação (6.5).

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (6.5)$$

onde :

$f_i$  = i-ésima frequência natural (ciclos por unidade de tempo)

O software utiliza o elemento chamado *BEAM4 - 3-D*, que possui dois nós por elemento, 3 translações e 3 rotações por nó do elemento, a saber:  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$ ,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$  que podem ser estudados em maiores detalhes no volume III dos manuais do ANSYS<sup>9</sup>.

Os problemas de autovalor e autovetor são resolvidos para modo e frequência, apresentando a seguinte forma.

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi}_i = \Lambda_i \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\phi}_i \quad (6.6)$$

onde:

$\mathbf{K}$  = matriz de rigidez da estrutura;

$\boldsymbol{\phi}_i$  = autovetor;

$\Lambda_i$  = autovalor;

$\mathbf{M}$  = matriz de massa da estrutura.

O método de iteração sub-espço (Bathe<sup>10</sup>) foi o empregado neste presente trabalho devido a dar soluções para qualquer situação, sendo também ideal para situações onde requeiram altas precisões nos resultados ou quando a seleção de graus de liberdade mestres for inviável.

A obtenção dos autovalores, ou seja, frequências naturais e autovalores, modos de vibração, é importante para evitar projetos de estruturas com frequências naturais próximas das frequências de excitação. A ressonância é um dos fenômenos que podem ocorrer devido a aproximação das frequências de excitação e natural, sendo que a estrutura apresentará desconforto até mesmo o colapso.

### 7. - FUNÇÃO CONVEXA DE REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

A função é uma combinação linear de duas soluções de esforços solicitantes em equilíbrio com as ações nodais, onde uma contempla o comportamento da estrutura em regime elástico e a outra no plástico. O método trabalha com parâmetros que permitem especificar qual o grau de redistribuição em relação à solução elástica, e as proporções das ações de cálculo que deverão ser resistidas em regime elástico e plástico (Mello<sup>3</sup>).

Através da função convexa pode-se combinar as soluções elásticas e plásticas de modo a satisfazer aos dois estados limites de utilização e último.

O método discretiza o contínuo em elementos finitos de modo a se definir n seções críticas para o dimensionamento da estrutura, com isso obtém-se dois vetores:  $\mathbf{m}_1$  esforços solicitantes em regime elástico e  $\mathbf{m}_2$  em regime plástico.

Baseado nos conceitos anteriormente citados nos itens 3, 4 e 5 que trata do regime elástico e plástico respectivamente, adota-se que a matriz de equilíbrio  $\mathbf{L}$  seja submetida a ações nodais características  $\mathbf{f}$  com as equações elástica (7.1a) e plástica (7.1b).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_1 &= \mathbf{f} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_2 &= \mathbf{f} \end{aligned} \tag{7.1a,b}$$

Aplicando fatores de majoração nas equações (7.1a) e (7.1b), obtém-se os vetores de esforços de cálculo  $\mathbf{m}_{d1}$  e  $\mathbf{m}_{d2}$ , vistos em (7.2a,b).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{d1} &= \gamma_1 \cdot \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_{d2} &= \gamma_2 \cdot \mathbf{m}_2 \end{aligned} \tag{7.2a,b}$$

Adota-se um vetor  $\mathbf{m}_d$ , como vetor de esforços resistentes para o dimensionamento das seções críticas, definido por uma função convexa em função de  $\mathbf{m}_{d1}$  e  $\mathbf{m}_{d2}$ .

$$\mathbf{m}_d = p \cdot \mathbf{m}_{d1} + (1 - p) \cdot \mathbf{m}_{d2} \tag{7.3}$$

onde: p = parâmetro que especifica a taxa de resistida no regime elástico e plástico.

Segue na figura 7.1, as funções convexas adotadas:

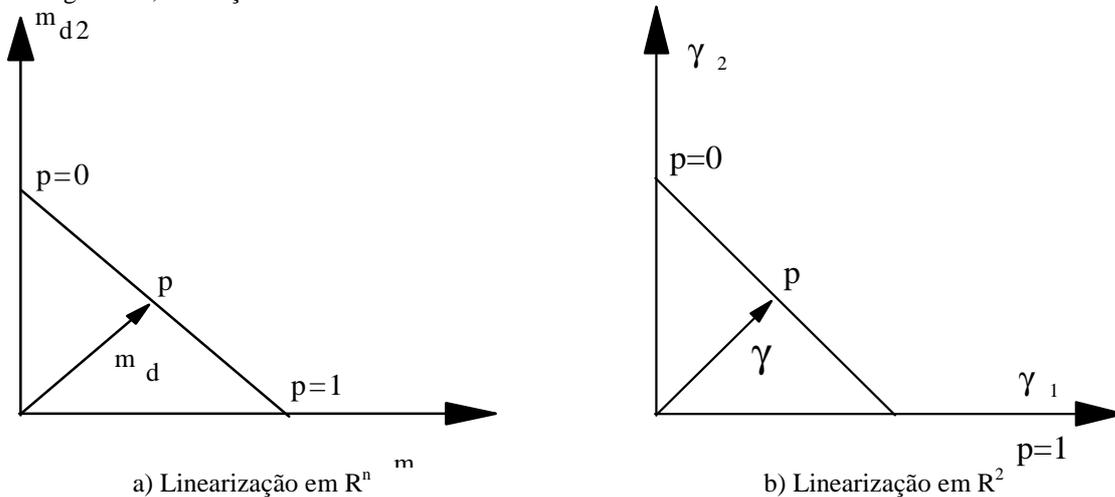


Fig.7.1- Funções convexas

Tomando-se (7.2a,b) e substituindo-se em (7.3), obtêm-se:

$$\mathbf{m}_d = p \cdot \gamma_1 \cdot \mathbf{m}_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \cdot \mathbf{m}_2 \quad (7.4)$$

Multiplicando-se a equação (7.4) pela matriz de equilíbrio  $\mathbf{L}$ , chega-se a :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_d = p \cdot \gamma_1 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_2 \quad (7.5)$$

Baseando-se nas equações: (7.1a,b) e (7.5), observa-se que:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_d = (p \cdot \gamma_1 + (1-p) \cdot \gamma_2) \cdot \mathbf{f} \quad (7.6)$$

onde  $\gamma$  em (7.7) é o fator de majoração das ações características  $\mathbf{f}$ , cujo valor é especificado por normas segundo a natureza e tipo de ações.

$$\gamma = p \cdot \gamma_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \quad (7.7)$$

Com estas relações Mello<sup>3</sup> aplica a redistribuição relativa à solução elástica em pórticos planos, sendo descrita a seguir.

Cria-se um vetor de diferenças entre a solução elástica e a solução de esforços resistentes para o dimensionamento das seções críticas, apresentado em (7.8):

$$\delta \mathbf{m}_d = \gamma \cdot \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_d \quad (7.8)$$

Baseando-se em (7.4 e (7.7), a equação (7.8) ficará com a seguinte forma:

$$\delta \mathbf{m}_d = (\gamma - p \cdot \gamma_1) \cdot (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \quad (7.9)$$

Adotando-se um vetor diferença entre a solução elástica  $\mathbf{m}_1$  e a plástica  $\mathbf{m}_2$ , obtêm-se a equação (7.10).

$$\delta \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \quad (7.10)$$

Adotando o índice  $k$  da componente de maior amplitude em (7.10) e tomando as equações (7.8), (7.9) e (7.10) são obtidas as seguintes equações vistas em (7.11a) e (7.11b).

$$\begin{aligned} \delta m_k &= m_{1k} - m_{2k} \\ \gamma \cdot m_{1k} - m_{dk} &= (\gamma - p \cdot \gamma_1) \cdot \delta m_k = \delta m_d \end{aligned} \quad (7.11a,b)$$

onde:

$k$  = índice da componente de maior amplitude do vetor  $\delta \mathbf{m}$ .

Com o desenvolvimento do método são obtidas as expressões usadas para redistribuição:

$$\begin{aligned} i_k &= (\gamma \cdot m_{1k} - m_{dk}) / (\gamma \cdot m_{1k}) \\ q_k &= (m_{1k} / \delta m_k) \cdot i_k \end{aligned} \quad (7.12a,b)$$

sendo:

$i_k$  = taxa correspondente a maior amplitude em relação a solução elástica.

Tomando-se as equações (7.11b) e (7.12a) chega-se a:

$$\begin{aligned} p \cdot \gamma_1 &= (1 - q_k) \cdot \gamma \\ (1 - p) \cdot \gamma_2 &= q_k \cdot \gamma \end{aligned} \quad (7.13a,b)$$

Substituindo-se (7.13a) e (7.13b) em (7.4) é obtida a equação (7.14):

$$\mathbf{m}_d = ((1 - q_k) \cdot \mathbf{m}_1 + q_k \cdot \mathbf{m}_2) \cdot \gamma \quad (7.14)$$

que deve atender as seguintes restrições em (7.15a,b):

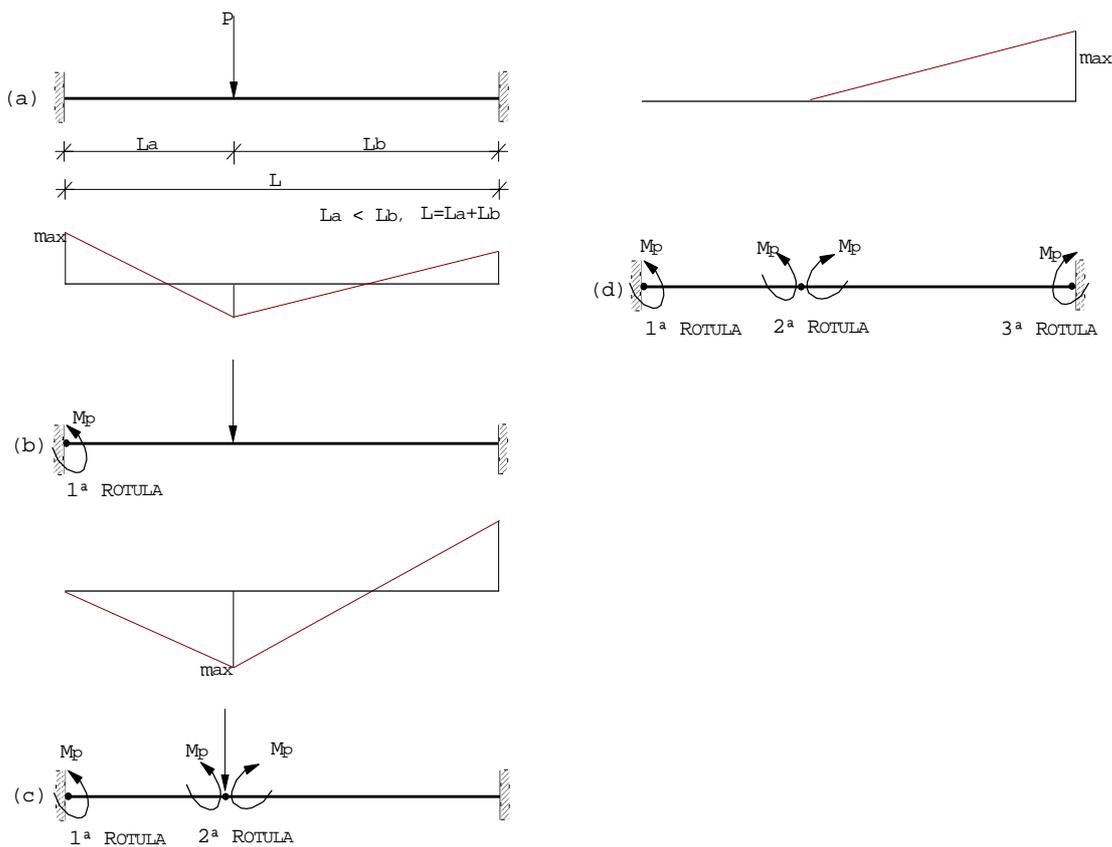
$$0 \leq q_k \leq 1, 0 \leq i_k \leq \delta \mathbf{m}_k / \mathbf{m}_1 k \quad (7.15a,b)$$

A equação (7.14) foi aplicada neste presente trabalho, não considerando fatores de majoração das cargas diferentes para a solução elástica e plástica, mostrados na equação (7.7).

### 8. - ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA - MÉTODO INCREMENTAL

O método de análise elasto-plástica incremental determina o fator de carga de colapso plástico por sucessivas análises elásticas, onde para cada incremento verifica-se a ordem de formação das rótulas e suas respectivas seções. O aparecimento de cada rótula, modifica a rigidez do membro, ou seja, a matriz **K** que terá o mesmo tamanho, mas com alguns elementos alterados; porém as matrizes de equilíbrio **L** e rotação **R** não são alteradas. Desta maneira é utilizado o modelo de análise elástica analítico mostrado no item 3, que pode facilmente fazer as modificações na matriz de rigidez do elemento.

Wang (por exemplo, Harrison<sup>6</sup>) descreveu um modelo de análise para pórticos planos demonstrando a aplicação do método. A descrição deste segue:



**Fig.8.1** - Modelo de análise elasto-plástica incremental

Descrição dos passos mostrados na figura 8.1:

- Ao aplicar-se uma carga  $P$  (passo a), faz-se a 1ª análise elástica da estrutura, determinando-se os esforços. Nos locais onde ocorrerem os momentos máximos formar-se-ão as rótulas, visto no passo b;
- Nesta fase, fazem-se as mudanças das rigidezes nos elementos onde se formaram as rótulas e depois aplica-se a 2ª análise elástica na estrutura modificada (passo b), então formam-se novos diagramas de esforços;
- Detectam-se os novos esforços máximos, as novas rótulas e fazem-se as novas alterações na matriz de rigidez **K**, nos elementos onde se formaram as rótulas (passo c);

- O processo segue com novas análises elásticas para determinação dos esforços, rótulas e mudanças na matriz de rigidez do elementos até que a estrutura fique hipostática.

Os processos que podem ser empregados para controlar a quantidade de análises desenvolvidas são:

- Atingir grandes deformações;
- Matriz de rigidez torna-se singular;
- Fator de carga muito pequeno, sendo que este envolve um fator de carga mínimo.

Como o presente trabalho envolve estruturas de pórticos espaciais com seis esforços agindo na seção do elemento visto na figura 2.1, ou seja, 2 momentos fletores, 1 momento torçor, 2 esforços cortantes e 1 esforço axial; ocorrem interações entre os esforços, porém devido ao não conhecimento das curvas de interações para todos os esforços, será adotado o modelo de flexão oblíqua composta para pilares que é transformado em flexão normal composta segundo o item 4.1.1.3-A da norma NB1<sup>11</sup>, sendo mostrado na figura 8.2.

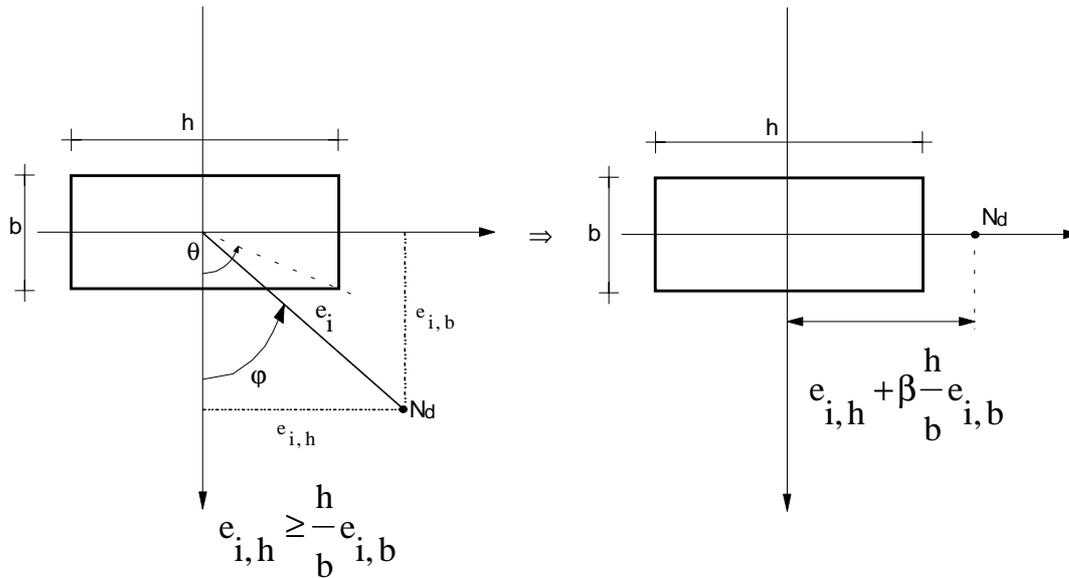


Fig. 8.2 - Transformação da flexão oblíqua composta em normal composta

No modelo adotado na figura 8.2, as armaduras terão que ser iguais nas 4 faces, sendo testado em cada passo da análise elasto-plástica incremental, o estado de flexão normal composta equivalente. Para as vigas adota-se a flexão simples ou normal composta.

Vemos a sequência dos passos em (8.1a,b) necessários para análise, sendo que o coeficiente  $\beta$  está tabelado na figura 10 da NB1<sup>11</sup>.

$$e_{h,eq} = e_h + \beta \frac{h}{b} e_b \quad (8.1a,b)$$

$$\omega \rightarrow \beta \rightarrow e_{h,eq} \rightarrow M_d = N_d \cdot e_{h,eq} \rightarrow A_s \rightarrow \rho \rightarrow \omega$$

↑ ----- ↓

A implementação computacional da análise como flexão normal composta será feita segundo o modelo que trabalha com equações das curvas de resistência do concreto aos esforços  $\sigma - \mu$ , região estaticamente admissível para a seção retangular não-armada e as equações das curvas de resistência equivalentes para a seção armada que foi apresentado por Mello<sup>12</sup>. Posteriormente, verifica-se a capacidade de rotação plástica da estrutura segundo os critérios de norma como por exemplo: NB1<sup>11</sup> e CEB<sup>14</sup>, sendo empregado o modelo, desenvolvido por Mello<sup>13</sup>, que aborda o assunto do ponto de vista cinemático, em conformidade com os encurtamentos do concreto e alongamento da armadura previstos nos domínios de dimensionamento do CEB e NB1.

## 9. – EXEMPLOS NUMÉRICOS

É apresentado um exemplo numérico retirado da literatura e foram feitas alterações e inclusões em algumas propriedades como seções, carregamentos, resistências características, módulo de elasticidade do aço, módulo de elasticidade do concreto para padronizar os valores das estruturas projetadas. A hipótese básica, adotada, é de projetar

estruturas baseadas na solução redistribuída para desenvolvimento de projetos mais econômicos determinando o fator de carga de colapso plástico desta estrutura, limitado pela capacidade de rotação plástica; e as frequências naturais e modos de vibração ao longo do processo de formação das rótulas (Vieira<sup>32</sup>).

Foram aplicados os critérios da norma NB1<sup>11</sup>, item 4.2.3.1, alínea c e sub-item a para deslocamentos máximos vertical, onde a flecha máxima, medida a partir do plano que contém os apoios, para vãos sem balanços é L/300 e com balanços é L/150, sendo L o comprimento do vão; para o deslocamento horizontal adotou-se H/400, usado normalmente para estruturas de aço, sendo aplicado neste trabalho para estruturas de concreto devido não existir um critério segundo a NB1.

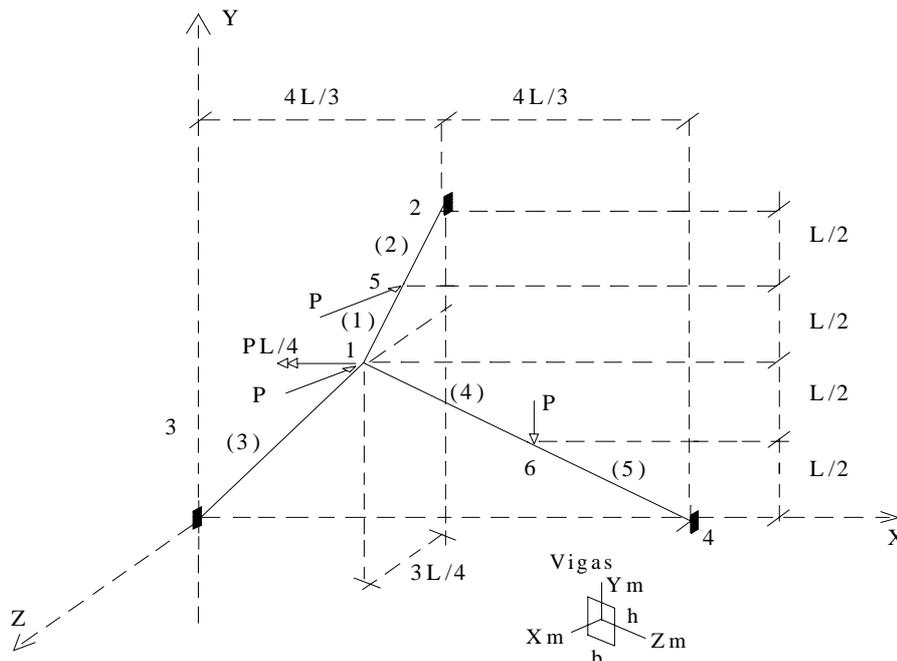
Para a obtenção do fator de carga de estruturas de concreto depende-se das armaduras das seções que são dimensionadas pelo esforços de cálculo, com k variando de 1 a n (número total de esforços), onde  $\gamma$  é fator de majoração da ações, cujo valor é 1,4, não levando diferentes fatores para as soluções plástica e elástica (ver equação (7.7)).

$$M_{d_k} = \gamma \cdot M_k \tag{9.1}$$

Foram calculadas as armaduras para as seções do elemento em função dos esforços de cálculo e arbitrada a de maior valor para todo o elemento.

**9.1 - Exemplo 9.1**

Considere o pórtico espacial apresentado por Gere & Wever<sup>8</sup>, com 5 elementos e 6 nós discretizados na figura 9.1, com carregamentos concentrados e momentos, apresentando seção retangular representados por largura b e altura h. As propriedades da estrutura são motradas na tabela 9.1 .



**Fig. 9.1-** Pórtico espacial Gere & Wever

**Tabela 9.1 -** Propriedades da estrutura

Discretização dos elementos		
ELEMENTO	NÓ INICIAL (A)	NÓ FINAL (B)
(1)	1	5
(2)	5	2
(3)	3	1
(4)	1	6
(5)	6	4
Características da estrutura		
Descrição	Valor adotado	Unidade
E <sub>s</sub> (Módulo de Elasticidade do aço)- CA50A	201,037 x 10 <sup>6</sup>	kN/m <sup>2</sup>

$E_c$ (Módulo de Elasticidade longitudinal do concreto)	$31,57 \times 10^6$	$\text{kN/m}^2$
$G_c$ (Módulo de Elasticidade transversal do concreto)	$12,628 \times 10^6$	$\text{kN/m}^2$
$F_{c_k}$ (Resistência característica do concreto)	19613,40	$\text{kN/m}^2$
$F_{y_k}$ (Resistência característica do aço)	$490,335 \times 10^3$	$\text{kN/m}^2$
b (Largura da seção)	0,20	m
h (Altura total da seção)	0,40	m
d (Altura útil da seção)	0,385	m
$I_y$ (Inércia em torno do eixo $Y_m$ local)	$266,667 \times 10^{-6}$	$\text{m}^4$
$I_z$ (Inércia em torno do eixo $Z_m$ local)	$1066,667 \times 10^{-6}$	$\text{m}^4$
$I_x$ (Inércia em torno do eixo $X_m$ local)	$732,80 \times 10^{-6}$	$\text{m}^4$
A (área da seção)	0,08	$\text{m}^2$
P (Carga concentrada)	22,2411	kN
L (Comprimento total do vão)	3,00	m

Na tabela 9.2, tem-se a comparação dos deslocamentos nodais da estrutura com as especificações da norma NB1, sendo assim, atendido o estado limite de utilização.

**Tabela 9.2 - Deslocamentos máximos**

Nó	Deslocamento horizontal - $U_z$			
5	máximo	0,000363	norma	0,009000
Nó	Deslocamento horizontal - $U_x$			
6	máximo	0,001284	norma	0,003000
Nó	Deslocamento vertical - $U_y$			
6	máximo	0,001972	norma	0,026667

Para a solução plástica via mínimo peso, testou-se 3 tipos de casos adotando-se as variáveis de projeto, tipo pórtico espacial, segundo o modelo mostrado na equação (4.4) .

A tabela 9.3, mostra o peso total da estrutura e a as características da redistribuição.

**Tabela 9.3 - Peso total e características de redistribuição**

Tipo	Peso total	Região de redistribuição*	Taxa de redistribuição ( $i_k$ )
Caso 1	118,7196	[0,00%; 208,34%]	20,00%
Caso 2	118,7196	[0,00%; 208,34%]	20,00%
Caso 3	302,1773	[0,00%; 206,70%]	20,00%

(\*) ver equação (7.12a)

O critério para a escolha do caso via mínimo peso é o que tenha o menor peso. Como, neste caso, existem duas soluções com pesos iguais, definiu-se por aquela que tenha o maior número de variáveis de projeto, ou seja, caso 1. É mostrado, na tabela 9.4, os valores da variáveis de projeto e na tabela 9.5, a comparação dos resultados obtidos para a solução elástica (E), redistribuída (RMP) e plástica via mínima peso (PMP), respectivamente.

**Tabela 9.4 – Valores das variáveis de projeto da estrutura – RMP**

Elemento	Variáveis de projeto			
	$T_m$	$MA_{z_m}$ $MB_{z_m}$	$MA_{y_m}$ $MB_{y_m}$	$Q_m$
1	31,1790	8,3400 8,3400	0,0000 0,0000	0,0000
2	31,4883	8,3400 8,3400	0,0000 0,0000	0,0000
3	31,4883	0,0000 0,0000	0,0000 0,0000	0,0000
4	31,4883	3,7542 3,7542	12,1941 12,1941	0,0000
5	31,4883	3,7542 3,7542	12,1941 12,1941	0,0000

Neste exemplo, o processo de redistribuição é mostrado na tabela 9.7. Os esforços axiais das barras não foram levados em conta no dimensionamento das armaduras.

**Tabela 9.5**-Esforços solicitantes elásticos, redistribuídos e plásticos - RMP

ELEMENTO	NÓ	TIPO	T <sub>m</sub>	M <sub>ym</sub>	M <sub>zm</sub>
1	1	E	15,72066	-4,49045	-12,2197
		RMP	11,21840	-4,05940	-10,2460
		PMP	-31,17900	0,00000	8,34000
	5	E	-15,72066	1,123606	13,20106
		RMP	-17,20460	1,01570	12,73440
		PMP	-31,17900	0,00000	8,34000
2	5*	E	29,06526	-1,12361	-13,20110
		RMP	23,25220	-1,01570	-12,73440
		PMP	-31,48830	0,00000	-8,34000
	2	E	-29,06526	-2,24324	-19,1790
		RMP	-29,29790	-2,0279	-18,1385
		PMP	-31,48830	0,0000	-8,34000
3	3	E	20,95790	1,234045	3,705783
		RMP	15,92310	1,1156	3,35000
		PMP	-31,48830	0,0000	0,00000
	1	E	-20,95790	2,493937	7,879484
		RMP	-21,96880	2,2545	7,12310
		PMP	-31,48830	0,0000	0,00000
4	1	E	14,12923	-7,46395	-3,38386
		RMP	9,75001	-7,9180	-2,69860
		PMP	-31,48830	-12,1941	3,75420
	6	E	-14,12923	-13,3702	5,655626
		RMP	-15,79570	-13,2573	5,47310
		PMP	-31,48830	-12,1941	3,75420
5	6	E	26,29845	13,37022	-5,65563
		RMP	20,75100	13,2573	-5,47310
		PMP	-31,48830	12,1941	-3,75420
	4	E	-26,29845	14,57393	-7,08530
		RMP	-26,79670	14,3455	-6,76550
		PMP	-31,48830	12,1941	-3,75420

(\*) Seção de controle do valor máximo da redistribuição

Na solução redistribuída, baseada na solução plástica via mínimo peso, não ocorreu a inversão dos sinais dos esforços. Como a região de redistribuição é grande (ver tabela 9.3) comparada com a taxa de redistribuição de 20%, os valores redistribuídos são próximos da solução elástica (ver tabela 9.5).

Na tabela 9.6, tem-se a comparação dos resultados obtidos para a solução elástica (E), redistribuída (RMN) e plástica via mínima norma euclidiana (PMN), respectivamente. A região permissível de redistribuição obtida foi de 0,00% a 354,79%, e a taxa de redistribuição ( $i_k$ ) adotada de 20,00%.

**Tabela 9.6**-Esforços solicitantes elásticos, redistribuídos e plásticos - RMN

ELEMENTO	NÓ	TIPO	Tm	M <sub>ym</sub>	M <sub>zm</sub>
1	1	E	15,72066	-4,490447	-12,219661
		RMN	15,33030	-4,4692	-12,2601
		PMN	8,79584	-4,113467	-12,937529
	5	E	-15,72066	1,123606	13,201061
		RMN	-15,33030	1,09263	13,1046
		PMN	-8,79584	0,57414	11,490525
2	5	E	29,06526	-1,123606	-13,201061
		RMN	28,67490	-1,09263	-13,1046
		PMN	22,14044	-0,57414	-11,490525
	2	E	-29,06526	-2,243235	-19,179038
		RMN	-28,67490	-2,28393	-19,4124
		PMN	-22,14044	-2,965188	-23,317978
3	3*	E	20,95790	1,234045	3,705783
		RMN	20,71540	1,09385	2,96463
		PMN	16,65566	-1,252991	-9,441846
	1	E	-20,95790	2,493937	7,879484
		RMN	-20,71540	2,29684	7,41502
		PMN	-16,65566	-1,002498	-0,359755
4	1	E	14,12923	-7,463954	-3,383856
		RMN	13,82790	-7,41024	-2,76511
		PMN	8,78456	-6,511113	7,592306
	6	E	-14,12923	-13,370217	5,655626
		RMN	-13,82790	-13,4241	5,63348
		PMN	-8,78456	-14,32554	5,262826
5	6	E	26,29845	13,370217	-5,655626
		RMN	25,99720	13,4241	-5,63348
		PMN	20,95379	14,32554	-5,262826
	4	E	-26,29845	14,573933	-7,085279
		RMN	-25,99720	14,5199	-6,51082
		PMN	-20,95379	13,616127	3,105284

(\*) Seção de controle do valor máximo da redistribuição

Na redistribuição via mínima norma euclidiana (RMN), vista na tabela 9.6, com a taxa de 20%, não acontece a inversão dos sinais dos esforços solicitantes, porém isto pode ocorrer ao aproximar-se a solução redistribuída da solução plástica. Neste exemplo, o valor máximo de redistribuição para a solução via mínima norma euclidiana é maior que o de mínimo peso.

As análises incrementais da estrutura redistribuída, ora por solução plástica via mínima norma euclidiana ora por mínimo peso, com o teste da capacidade de rotação plástica da seção, são vistos na tabela 9.7.

**Tabela 9.7** - Resultados da análise incremental

Rotula Plástica	Tipo	Fator de carga	Nó	Desl. (m)	Capacidade de rotação plástica			
					Elemento	Nó	Cálculo	Norma
1	RMN	1,598	6	-0,00315	5	4	0,00000	0,01540
	RMP	1,598	6	-0,00315	5	4	0,00000	0,01540
2	RMN	2,100	6	-0,00602	2	2	0,00000	0,01420
	RMP	2,100	6	-0,00602	2	2	0,00000	0,01420

3	RMN	2,557	6	-0,01033	1	1	0,00260	0,01420
	RMP	2,557	6	-0,01033	1	1	0,00260	0,01420

O gráfico da figura 9.2 representa o fator de carga x deslocamentos verticais para o nó 6

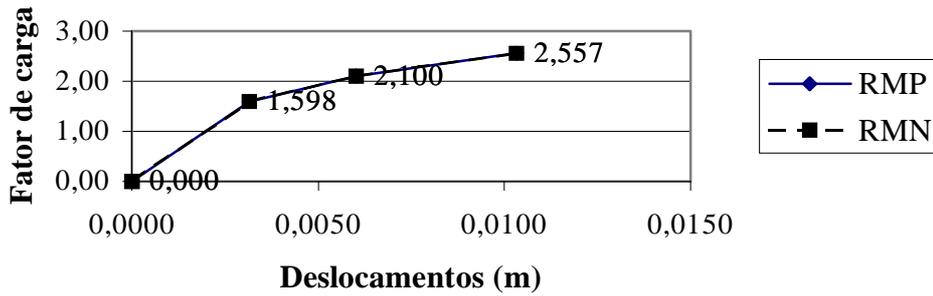


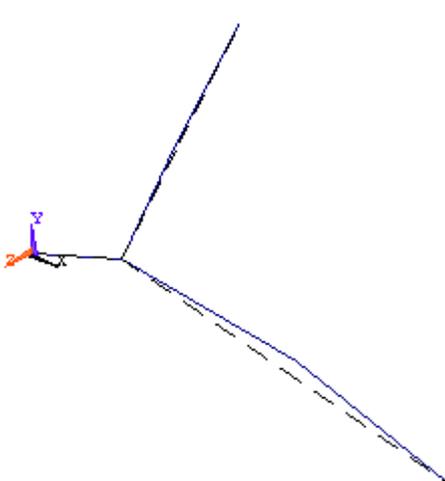
Fig. 9.2 - Gráfico carga x deslocamentos verticais (Uy) do nó 6 (exemplo 4.3)

O fator de carga  $\lambda_c$  é maior que o fator de majoração  $\gamma$ , ficando a estrutura esta dentro dos limites estabelecidos para o projeto. Os fatores de carga da estrutura redistribuída via mínima norma euclidiana e mínimo peso foram iguais devido a necessidade da adequação das armaduras de acordo com os critérios da norma NB1.

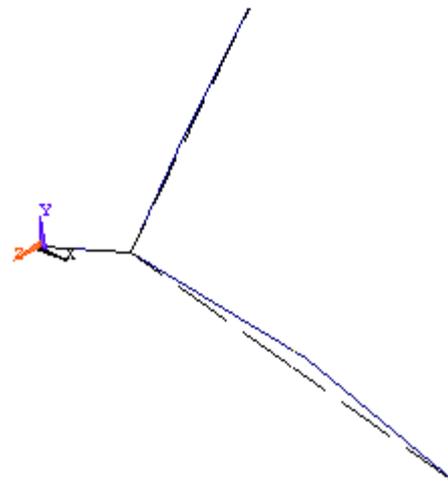
A análise das frequências naturais foi feita para acompanhar o processo de formação das rótulas plásticas e os resultados são vistos na tabela 9.8. Os 1º modos de vibração (figura 9.2) são representados até antes do colapso plástico.

Tabela 9.8-Resultados da análise de frequências naturais (exemplo 4.3)

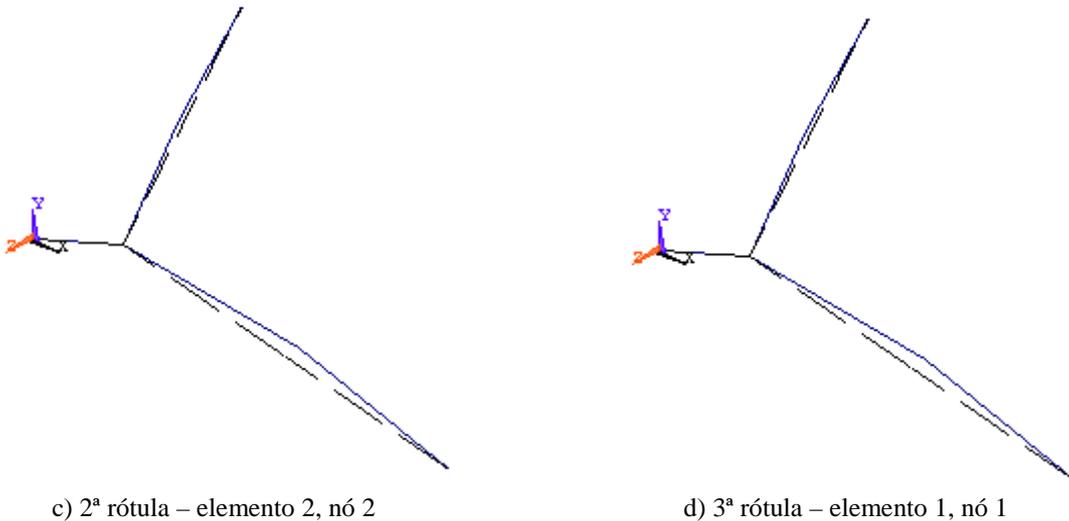
Número de Rótulas plásticas	Tipo	Elemento	Nó	Frequência (Hz)
0	RMN	-	-	20,113
	RMP	-	-	20,113
1	RMN	5	4	14,039
	RMP	5	4	14,039
2	RMN	2	2	13,531
	RMP	2	2	13,531
3	RMN	1	1	12,297
	RMP	1	1	12,297
4	RMN	1	5	0,000
	RMP	1	5	0,000



a) Geometria inicial



b) 1ª rótula – elemento 5, nó 4



**Fig. 9.3-** Gráfico do 1º modo de vibração da estrutura - (RMN e RMP)

As plastificações da estrutura ocorreram nas mesmas seções para as duas soluções redistribuídas e não houve alteração da massa da estrutura em relação à solução via mínimo peso e via mínima norma euclidiana, portanto as frequências naturais foram as mesmas para os dois tipos. Conclui-se, para este exemplo que a estrutura atendeu aos dois estados limites, de utilização e último. As frequências naturais obtidas, foram satisfatórias em relação às frequências de excitação dos movimentos humanos, porém, observa-se que as frequências naturais em relação às de excitação promovidas por máquinas ficaram dentro da faixa estipulada (CEB<sup>15</sup>)

## 10. – CONCLUSÕES

Como os modelos de redistribuição geralmente são aplicados para vigas e pórticos planos, seguindo critérios de norma, o critério adotado na pesquisa foi bastante satisfatório porque permite várias taxas de redistribuição independentes da existência de vários ou poucos carregamentos atuantes, podendo ser empregado também em pórticos espaciais. O método empregado não é iterativo. Apresenta novas configurações de equilíbrio com as ações solicitantes e atende os dois estados limites, ou seja, de utilização e último (Vieira<sup>32</sup>).

## 11. – REFERÊNCIAS

1. LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E., *Construções de Concreto*, 2 ed., Springer, Berlim, v. 4., 1978.
2. PRADO, J. F. M. A.; GIONGO, J. S., Redistribuição de Momentos Fletores em Vigas de Edifícios, XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos, São Paulo, Brasil, Vol. 14 pp. 1555-563, 1997.
3. MELLO, E. L., *Função Convexa de Redistribuição de Esforços Solicitantes para Dimensionamento de Estruturas*, XVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Brasília, Brasil, Vol. 1, pp. 185-191, 1997.
4. MELLO, E. L., *Some Applications of Generalised Inverse Theory to Structural Problems*, Phd Thesis, Imperial College, London, 1980.
5. HORNE, M. R., *Plastic Theory of Structures*, 2ed., Pergamon international library, 1979.
6. HARRISON, H. B., *Computer Methods in Structural Analysis*, Prentice-Hall, 1973.
7. MELLO, E. L.; SAHLIT, C. L., *Análise Elástica e Elasto-Plástica de Estruturas*, Apostilas do Curso em Extensão em Engenharia Civil, Universidade de Brasília, 1983.
8. GERE, J. M.; WEAVER, W. JR., *Análise de Estruturas reticulares*, Guanabara S.A., 1987.
9. ANSYS Revision 5.2, *User's Manual*, Vol IV (Theory), Vol III (Elements), 1995.
10. BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
11. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NB1, *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*, Rio de Janeiro (NBR-6118), 1978.
12. MELLO, E. L., *Flexão Normal Composta em Concreto Armado - Curvas Analíticas de Interação  $\mu - v$* , Revista IBRACON, ano II, Nº 4, p. 63-68, 1992.
13. MELLO, E. L., *Sobre a Capacidade de Rotação das Seções de Concreto Armado*, XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán-Argentina, v. 2, p. 141-148, 1995.
14. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, CEB-FIP MODEL CODE 1990, *Bulletin D'information Nº 203*, Lausanne, Switzerland, 1991.

15. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, VIBRATION PROBLEMS IN STRUCTURES, *Bulletin D'information N° 209*, Lausanne, Switzerland, 1991.
16. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações*, NB5, Rio de Janeiro, 1978.
17. BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J., *Computational Methods for the Solution of Engineering Problems*, Pentech Press, London, 1986.
18. FREITAS, S. D. M., *Estudo Teórico-experimental da Capacidade de Rotação Plástica em Vigas de Concreto Armado*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 1997.
19. FUSCO, B. P., *Estruturas de Concreto Armado, Solicitações Normais, Estados limites últimos, Teoria e Aplicações*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 1981.
20. MORAES, M. C., *Concreto Armado*, editora MacGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1982.
21. NEAL, B. G., *Plastic Methods of Structural Analysis*, 1ed., Chapman & Hall Ltd and Science Paperbacks, 1970.
22. OLIVEIRA, A. C. J., *Estimativa do Índice Global de Esbeltez de Edifícios Altos de Concreto Armado*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 1998.
23. PRESS, W. H., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2ed, Library of Congress, 1992.
24. RAO, C. R.; MITRA, S. K., *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, Wiley, 1971.
25. SHAMES, I. H., *Mechanics of Deformable Solids*, Prentice-Hall, 1964.
26. SÜSSEKIND, J. C., *Curso de Análise Estrutural*, vol. III, Editora Globo, São Paulo, 1991
27. WILSON, E. L.; HABIBULLAH A., *SAP90 – A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, User's Manual*, Computers & Structures, Inc, Berkeley, California, 1988.
29. GHALI; NEVILLE, A.M., *Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach*, 3ed, Chapman & Hall Ltd., London, 1989.
30. HORNE, M. R.; MERCHANT, W., *The Stability of Frames*, 1ed., Pergamon Press Ltd., Oxford, 1965.
31. GALAMBOS, T. V., *Structural Members and Frames*, Prentice Hall, Inc., Toronto, 1968.
32. VIEIRA, P. C. dos S., *Síntese Estrutural e Análise Modal de Pórticos Espaciais com Diferentes Graus de Redistribuição de Esforços Solicitantes*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 1999.