

SÍNTESE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS ESPACIAIS COM DIFERENTES GRAUS DE REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Pedro Cláudio dos Santos Vieira^{*}, Eldon Londe Mello[†] e Luciano Mendes Bezerra[†]

Departamento de Engenharia de Civil
Universidade de Brasília
UnB SG12
CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil
e-mail: pcvieira@unb.br^{*}, lmbz@unb.br[†]

Palavras chaves: Estruturas, Estruturas de Concreto, Plasticidade, Síntese Estrutural, Concreto Armado, Redistribuição de Esforços Solicitantes, Otimização, Análise.

Resumo. *Os métodos convencionais de redistribuição de esforços solicitantes envolvem simplificações estabelecidas para vigas contínuas e pórticos planos pelas normas vigentes. Geralmente são aplicados métodos iterativos para obtenção da redistribuição em estruturas com vários carregamentos, tornando o emprego da redistribuição trabalhoso. Neste trabalho, faz-se a redistribuição de esforços solicitantes usando um método alternativo aos iterativos, que utiliza uma função convexa de redistribuição como uma combinação linear de duas soluções, uma elástica e outra plástica para a obtenção de soluções redistribuídas condicionadas à solução elástica de forma que atendam aos dois estados limites, de utilização e último. Para tanto, obtêm-se soluções elásticas baseadas no método de rigidez analítico que apresenta matrizes de equilíbrio (L), rigidez (K) e rotação (R) para o elemento desconexo. Duas soluções plásticas são obtidas: a do critério de mínimo peso (regime rígido-plástico) aplicando programação matemática linear (PL) e a da teoria das inversas generalizadas que utiliza uma função de mínima norma euclidiana (regime elástico-plástico). Considera-se a estrutura discretizada em elementos de barra.*

É feita a análise incremental (regime elasto-plástico) para detectar a ordem de formação das rótulas plásticas, fator de carga de colapso plástico, deslocamentos e compara-se a capacidade de rotação plástica das seções com os critérios estabelecidos nas normas atuais. A formulação descrita foi implementada em programas computacionais, e posteriormente são apresentados e discutidos exemplos numéricos mostrando a eficácia da metodologia alternativa proposta.

1 INTRODUÇÃO

Estudos feitos sobre a redistribuição de momentos fletores mostram que em estruturas submetidas a carregamentos progressivos formam-se fissuras que alteram a rigidez das seções, fazendo com que os esforços atuantes nestas seções não possam ser mais resistidos em sua totalidade. A propriedade dúctil dos materiais empregados e a condição de serem estruturas hiperestáticas permitem que sejam redistribuídos os esforços de regiões mais solicitadas para outras menos solicitadas.

Nas pesquisas feitas por Leonhardt¹ podemos denotar o emprego da redistribuição de momentos. Prado² estudou a redistribuição de momentos em vigas de edifícios, onde apresentou estudos sobre as modificações possíveis na distribuição de momentos fletores, induzidas por um escolha adequada de relações entre as armaduras sobre os apoios e nos vãos. Geralmente empregam-se métodos iterativos na redistribuição de esforços, a partir da análise linear elástica de forma a encontrar uma nova configuração de equilíbrio com os carregamentos atuantes.

Mello³ propôs uma função convexa de redistribuição de esforços solicitantes para dimensionamento de estruturas que pode ser aplicada a pórticos espaciais sem o uso de métodos iterativos. A redistribuição fornecerá uma nova configuração de equilíbrio, permitindo prever possíveis alterações dos esforços nas seções da estrutura, dando assim mais segurança ao projetista, com relação a prováveis falhas na fase construtiva e ao longo da vida útil da estrutura.

Para uma avaliação do comportamento das estruturas projetadas em função das soluções redistribuídas pelo critério de mínima norma euclidiana (por exemplo, Mello⁴) ou mínimo peso (por exemplo, Horne⁵), são feitas análises incrementais investigando a estrutura quanto ao processo de formação de rótulas plásticas.

2 ESTÁTICA E CINEMÁTICA

A solução de problemas da mecânica estrutural requer a aplicação de três leis básicas: as leis da estática, da cinemática e as relações constitutivas do material. Podem ser utilizadas duas maneiras distintas para descrever estas leis, a saber, a descrição de malha e a nodal, sendo mostrada a seguir a descrição nodal (por exemplo, Harrison⁶).

Descrição Nodal

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \tag{2.1a,b}$$

Onde: \mathbf{a} é o vetor de cargas nodais, \mathbf{L} a matriz de equilíbrio, \mathbf{m} o vetor de esforços seccionais, $\boldsymbol{\theta}$ o vetor das deformações seccionais associados às cargas nodais e $\boldsymbol{\delta}$ o vetor dos deslocamentos da estrutura. A matriz de equilíbrio \mathbf{L} é unicamente determinada para uma estrutura, onde nenhum vínculo (interno ou externo) é violado na sua obtenção (por exemplo, Mello⁷).

3 ANÁLISE ELÁSTICA

O método utilizado neste presente trabalho foi o método de rigidez analítico que utiliza as matrizes de rigidez de membro \mathbf{K} , equilíbrio \mathbf{L} e rotação \mathbf{R} para cada elemento desconexo (por exemplo, Harrison⁶).

A matriz de rigidez \mathbf{S} da estrutura é:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{R}^T \quad (3.1)$$

Empregou-se o método de rigidez analítico porque a matriz \mathbf{L} é fundamental na síntese plástica por mínimo peso ou mínima norma euclidiana.

A discretização do contínuo em elementos de barra no sistema de eixos locais (m) segue a formulação baseada na figura 3.1 (por exemplo, Harrison⁶).

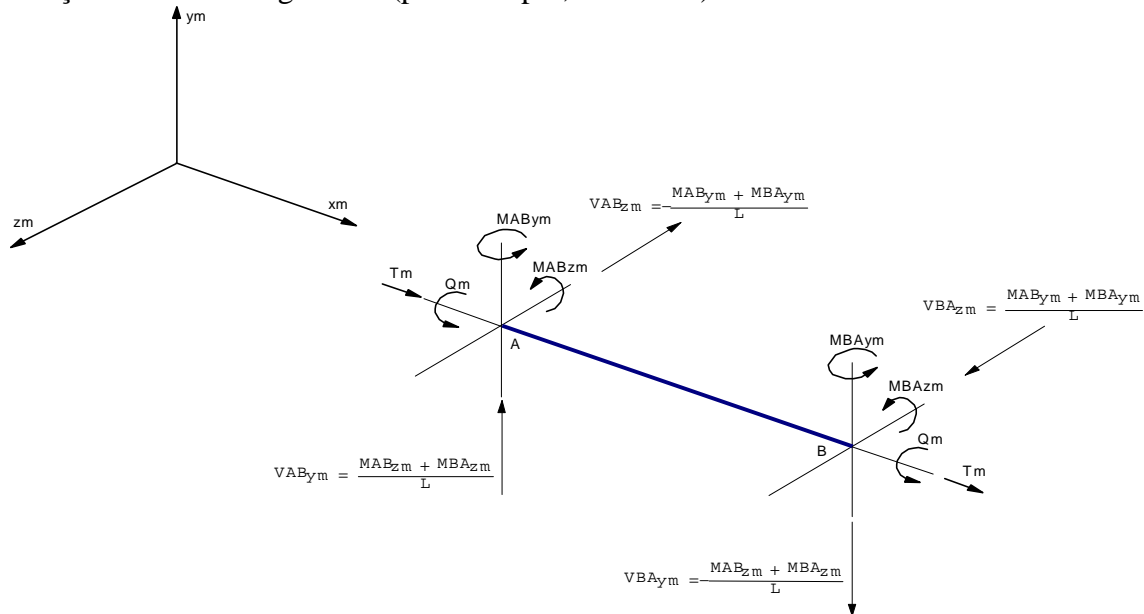


Fig. 3.1 - Tensões resultantes de membro e relações de equilíbrio -3D

A matriz de rigidez de membro \mathbf{K} , sem a inclusão de termos de deformação por cisalhamento, para uma estrutura espacial, segue na equação (3.2).

$$\begin{bmatrix} T_m \\ MAB_{zm} \\ MBA_{zm} \\ MAB_{ym} \\ MBA_{ym} \\ Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ \phi AB_z \\ \phi BA_z \\ \phi AB_y \\ \phi BA_y \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}$$

onde:

“ θ ” é o vetor de deformações seccionais;

“ e ”, “ ϕ ” e “ β ” deformações dos membros.

A matriz de equilíbrio L , da equação (3.3), contém as relações entre as ações de extremidades de membro, no sistema de coordenada do membro, e as tensões resultantes.

$$\begin{bmatrix} F A_{x m} \\ F A_{y m} \\ F A_{z m} \\ M A_{x m} \\ M A_{y m} \\ M A_{z m} \\ F B_{x m} \\ F B_{y m} \\ F B_{z m} \\ M B_{x m} \\ M B_{y m} \\ M B_{z m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ M A B_{z m} \\ M B A_{z m} \\ M A B_{y m} \\ M B A_{y m} \\ Q_m \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$a = L \cdot m$$

Temos a seguir as matrizes de rotação para membros inclinados (3.4) e membros verticais (3.5) para para pórticos espaciais (por exemplo, Gere & Weaver⁸).

$$R = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos \alpha - C_Z \sin \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \cos \alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos \alpha + C_X \sin \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \\ \frac{C_X C_Y \sin \alpha - C_Z \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & -\sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \sin \alpha & \frac{C_Y C_Z \sin \alpha + C_X \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_Y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

As equações de equilíbrio dos nós (por exemplo, Harrison⁶), para uma estrutura completa, ou apenas um membro são:

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (3.8)$$

A matriz de equilíbrio \mathbf{L} tem as seguintes dimensões ($\beta \times n$), onde β é o grau de indeterminação cinemática e n o número de esforços seccionais, com posto: $r(\mathbf{L}) = \beta$.

Substituindo-se as equações (3.8) e (3.7) em (3.6), obtém-se a equação (3.9):

$$\mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\delta} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.9)$$

Os deslocamentos nodais $\boldsymbol{\delta}$ são encontrados, calculando-se a inversa da matriz de rigidez da estrutura (\mathbf{S}) e multiplicando-se esta pelo vetor de cargas nodais.

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}^{-1} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0) \quad (3.10)$$

Os deslocamentos são encontrados primeiro (*Método dos deslocamentos*) e depois calculam-se as deformações seccionais vistas em (3.11).

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.11)$$

Os esforços seccionais elásticos (3.12) são obtidos substituindo (3.11) em (3.7), sendo estes necessários para a redistribuição da estrutura.

$$\mathbf{m} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 \quad (3.12)$$

4.- PROJETO VIA CRITÉRIO DE MÍNIMO PESO

Existem três teoremas da plasticidade (por exemplo, Horne⁵) que são aplicados, ou seja, teorema do limite inferior; teorema do limite superior e teorema da unicidade.

Um projeto de mínimo peso tem que satisfazer as seguintes condições:

Equilíbrio. Os momentos fletores necessitam representar um estado de equilíbrio entre os carregamentos internos e externos;

Escoamento. O momento plástico de resistência, determinado pelo valor da tensão de escoamento, não pode ser excedido;

Mecanismo. O momento plástico de resistência necessita ser alcançado para um número suficiente de seções, para a formação do mecanismo de colapso;

Rótulas plásticas.

4.1 - GERAÇÃO DOS MODELOS PARA A PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Adotou-se, para o desenvolvimento de projetos de mínimo peso, um dos modelos de PL mostrados por Mello⁷ que usa o teorema estático com a descrição nodal. Na figura 4.1, descrevem-se as variáveis de projeto.

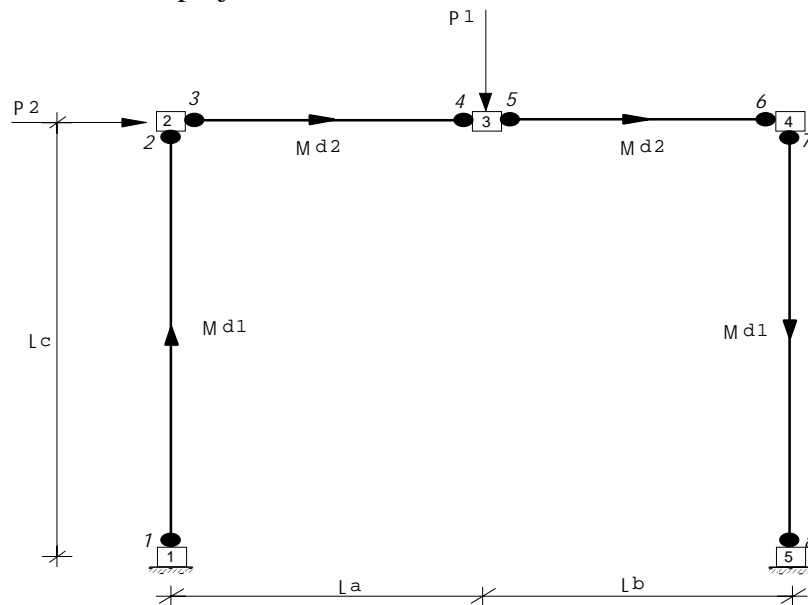


Fig. 4.1 - Exemplo de pórtico plano para a PL

O modelo de PL adotado para solução de mínimo peso foi o descrito para estruturas metálicas.

Para estruturas *metálicas*:

Deseja-se minimizar a função peso, vista na equação (4.1).

$$G = k \cdot \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{m}_d \quad (4.1)$$

onde:

k - constante;

\mathbf{l}^T - vetor dos comprimentos da estrutura;

\mathbf{m}_d - vetor das variáveis de projeto.

Seguem-se, nas equações (4.2) e (4.3), as variáveis de projeto \mathbf{m}_d e a matriz de incidências \mathbf{J}_s para o exemplo dado na figura 4.1.

$$\Rightarrow \mathbf{m}_d = \begin{bmatrix} m_{d1} \\ m_{d2} \end{bmatrix} \geq 0; \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} m_p^{+1} \\ m_p^{+2} \\ m_p^{+3} \\ m_p^{+4} \\ m_p^{+5} \\ m_p^{+6} \\ m_p^{+7} \\ m_p^{+8} \end{bmatrix}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n \times nd)} \cdot \begin{bmatrix} m_{d1}^+ \\ m_{d2}^+ \end{bmatrix}_{(nd \times 1)} \Rightarrow \mathbf{m}_p^+ = \mathbf{J}_s^+ \cdot \mathbf{m}_d^+ \quad (4.3)$$

PERFIS LAMINADOS :

$$\mathbf{m}_p^+ = \mathbf{m}_p^- = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{m}_d$$

Na equação (4.4), é apresentado o modelo da PL aplicado no método.

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad [\mathbf{I}^T : \mathbf{0}^T] \\
 & \begin{matrix} n \\ n \\ \beta \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s & -\mathbf{I} \\ \mathbf{J}_s & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}_d \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}\lambda_c \end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} n_d & n \end{matrix} \\
 & \mathbf{m}_d \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde:

n = numero de esforços seccionais independentes;

β = numero de graus de liberdade;

\mathbf{a} = vetor de ações solicitantes;

\mathbf{J}_s = matriz de incidência das exigências de projeto;

\mathbf{I} = matriz identidade;

\mathbf{L} = matriz de equilíbrio;

\mathbf{m} = vetor de esforços solicitantes (sem restrição de valor)

5. – PROJETO VIA MÍNIMA NORMA EUCLIDIANA

A *Teoria de Inversas Generalizadas de Matrizes*, com suas aplicações para análise de estruturas, foi empregada por Mello⁴ para a obtenção de esforços solicitantes. O método trabalha com uma matriz de rigidez \mathbf{K} que é substituída por uma matriz identidade \mathbf{I} , de forma que ao projetar-se uma estrutura por mínima norma euclidiana não haverá a dependência das relações constitutivas do material.

O método determina uma inversa generalizada de mínima norma de um sistema de equações lineares visto na equação (5.1).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.1)$$

cuja solução, tenha a menor norma possível, sendo isto independente do vetor \mathbf{b} (por exemplo, Mello⁷) dada por (5.2a,b):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{b} \\ \|\mathbf{x}_0\| &= \|\mathbf{A}^- \cdot \mathbf{b}\| \end{aligned} \quad (5.2a,b)$$

onde:

\mathbf{A}^- = inversa generalizada de \mathbf{A} .

A seguir, tem-se uma esquema das diferenças entre equações para as análises elástica e mínima norma euclidiana.

Elástica

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}\| &= (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{m})^{1/2} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{H}_e &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (5.3a-c)$$

Euclidiana

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}_f\| &= (\mathbf{m}_f^T \cdot \mathbf{m}_f)^{1/2} \\ \mathbf{m}_f &= \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{H}_f &= \mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (5.4a-c)$$

Deve-se observar que:

\mathbf{H}_e = Inversa Generalizada Reflexiva de Mínima Norma Elástica de \mathbf{L} ;

\mathbf{H}_f = Inversa Generalizada Reflexiva de Mínima Norma Euclidiana de \mathbf{L} ;

$\|\mathbf{m}\|$ = Norma dos esforços seccionais;

$\|\mathbf{m}_f\|$ = Norma dos esforços seccionais, equilibrados com as cargas (\mathbf{a}), de menor módulo possível;

\mathbf{F} = Matriz de flexibilidade dos elementos desconexos, sendo que $\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}$.

6. - FUNÇÃO CONVEXA DE REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

A função é uma combinação linear de duas soluções de esforços solicitantes em equilíbrio com as ações nodais, onde uma contempla o comportamento da estrutura em regime elástico e a outra no plástico. O método trabalha com parâmetros que permitem especificar qual o grau de redistribuição em relação à solução elástica, e as proporções das ações de cálculo que deverão ser resistidas em regime elástico e plástico (Mello³).

Através da função convexa pode-se combinar as soluções elásticas e plásticas de modo a satisfazer aos dois estados limites de utilização e último.

O método discretiza o contínuo em elementos finitos de modo a se definir n seções críticas para o dimensionamento da estrutura, com isso obtém-se dois vetores: \mathbf{m}_1 esforços solicitantes em regime elástico e \mathbf{m}_2 em regime plástico.

Baseado nos conceitos anteriormente citados nos itens 3, 4 e 5 que trata do regime elástico e plástico respectivamente, adota-se que a matriz de equilíbrio \mathbf{L} seja submetida a ações nodais características \mathbf{f} com as equações elástica (6.1a) e plástica (6.1b).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_1 &= \mathbf{f} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_2 &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (6.1a,b)$$

Aplicando fatores de majoração nas equações (6.1a) e (6.1b), obtêm-se os vetores de esforços de cálculo \mathbf{m}_{d1} e \mathbf{m}_{d2} , vistos em (6.2a,b).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{d1} &= \gamma_1 \cdot \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_{d2} &= \gamma_2 \cdot \mathbf{m}_2 \end{aligned} \quad (6.2a,b)$$

Adota-se um vetor \mathbf{m}_d , como vetor de esforços resistentes para o dimensionamento das seções críticas, definido por uma função convexa em função de \mathbf{m}_{d1} e \mathbf{m}_{d2} .

$$\mathbf{m}_d = p \cdot \mathbf{m}_{d1} + (1-p) \cdot \mathbf{m}_{d2} \quad (6.3)$$

onde: p = parâmetro que especifica a taxa de resistida no regime elástico e plástico.

Segue na figura 7.1, as funções convexas adotadas:

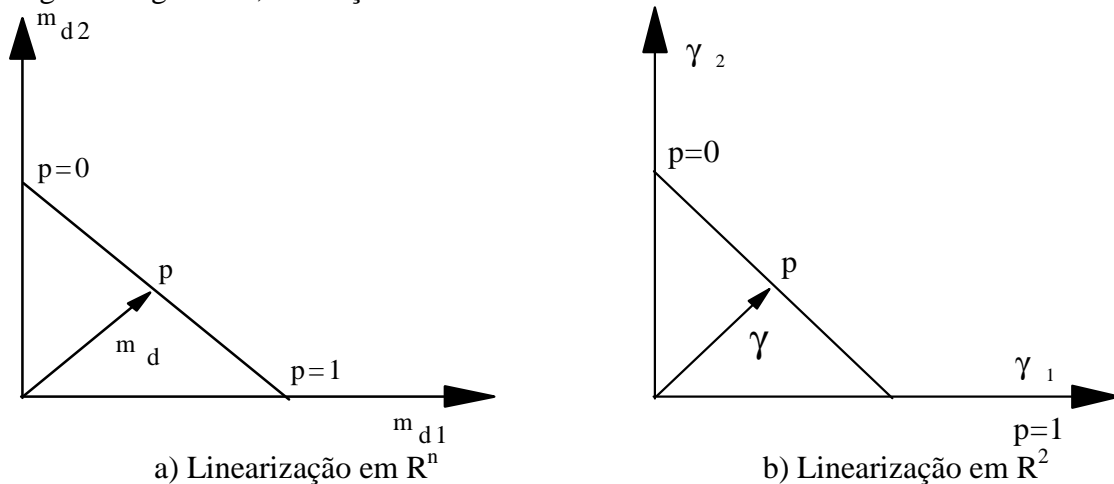


Fig.6.1- Funções convexas

Tomando-se (6.2a,b) e substituindo-se em (6.3), obtêm-se:

$$\mathbf{m}_d = p \cdot \gamma_1 \cdot \mathbf{m}_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \cdot \mathbf{m}_2 \quad (6.4)$$

Multiplicando-se a equação (6.4) pela matriz de equilíbrio \mathbf{L} , chega-se a :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_d = p \cdot \gamma_1 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_2 \quad (6.5)$$

Baseando-se nas equações: (6.1a,b) e (6.5), observa-se que:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{m}_d = (p \cdot \gamma_1 + (1-p) \cdot \gamma_2) \cdot \mathbf{f} \quad (6.6)$$

onde γ em (6.7) é o fator de majoração das ações características \mathbf{f} , cujo valor é especificado por normas segundo a natureza e tipo de ações.

$$\gamma = p \cdot \gamma_1 + (1-p) \cdot \gamma_2 \quad (6.7)$$

Com estas relações Mello³ aplica a redistribuição relativa à solução elástica em pórticos planos, sendo descrita a seguir.

Cria-se um vetor de diferenças entre a solução elástica e a solução de esforços resistentes para o dimensionamento das seções críticas, apresentado em (6.8):

$$\delta \mathbf{m}_d = \gamma \cdot \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_d \quad (6.8)$$

Baseando-se em (6.4 e (6.7), a equação (6.8) ficará com a seguinte forma:

$$\delta \mathbf{m}_d = (\gamma - p \cdot \gamma_1) \cdot (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \quad (6.9)$$

Adotando-se um vetor diferença entre a solução elástica \mathbf{m}_1 e a plástica \mathbf{m}_2 , obtêm-se a equação (6.10).

$$\delta \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \quad (6.10)$$

Adotando o índice k da componente de maior amplitude em (6.10) e tomando as equações (6.8), (6.9) e (6.10) são obtidas as seguintes equações vistas em (6.11a) e (6.11b).

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_{1k} - \mathbf{m}_{2k} \\ \gamma \cdot \mathbf{m}_{1k} - \mathbf{m}_{dk} &= (\gamma - p \cdot \gamma_1) \cdot \delta \mathbf{m}_k = \delta \mathbf{m}_d \end{aligned} \quad (6.11a,b)$$

onde:

k = índice da componente de maior amplitude do vetor $\delta \mathbf{m}$.

Com o desenvolvimento do método são obtidas as expressões usadas para redistribuição:

$$\begin{aligned} i_k &= (\gamma \cdot \mathbf{m}_{1k} - \mathbf{m}_{dk}) / (\gamma \cdot \mathbf{m}_{1k}) \\ q_k &= (\mathbf{m}_{1k} / \delta \mathbf{m}_k) \cdot i_k \end{aligned} \quad (6.12a,b)$$

sendo:

i_k = taxa correspondente a maior amplitude em relação a solução elástica.

Tomando-se as equações (6.11b) e (6.12a) chega-se a:

$$\begin{aligned} p \cdot \gamma_1 &= (1 - q_k) \cdot \gamma \\ (1 - p) \cdot \gamma_2 &= q_k \cdot \gamma \end{aligned} \quad (6.13a,b)$$

Substituindo-se (6.13a) e (6.13b) em (6.4) é obtida a equação (6.14):

$$\mathbf{m}_d = ((1 - q_k) \cdot \mathbf{m}_1 + q_k \cdot \mathbf{m}_2) \cdot \gamma \quad (6.14)$$

que deve atender as seguintes restrições em (6.15a,b):

$$0 \leq q_k \leq 1, \quad 0 \leq i_k \leq \delta \mathbf{m}_k / \mathbf{m}_{1k} \quad (6.15a,b)$$

A equação (6.14) foi aplicada neste presente trabalho, não considerando fatores de majoração das cargas diferentes para a solução elástica e plástica, mostrados na equação (6.7).

7. - ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA - MÉTODO INCREMENTAL

O método de análise elasto-plástica incremental determina o fator de carga de colapso plástico por sucessivas análises elásticas, onde para cada incremento verifica-se a ordem de formação das rótulas e suas respectivas seções. O aparecimento de cada rótula, modifica a rigidez do membro, ou seja, a matriz \mathbf{K} que terá o mesmo tamanho, mas com alguns elementos alterados; porém as matrizes de equilíbrio \mathbf{L} e rotação \mathbf{R} não são alteradas. Desta maneira é utilizado o modelo de análise elástica analítico mostrado no item 3, que pode facilmente fazer as modificações na matriz de rigidez do elemento.

Wang (por exemplo, Harrison⁶) descreveu um modelo de análise para pórticos planos demonstrando a aplicação do método. A descrição deste segue:

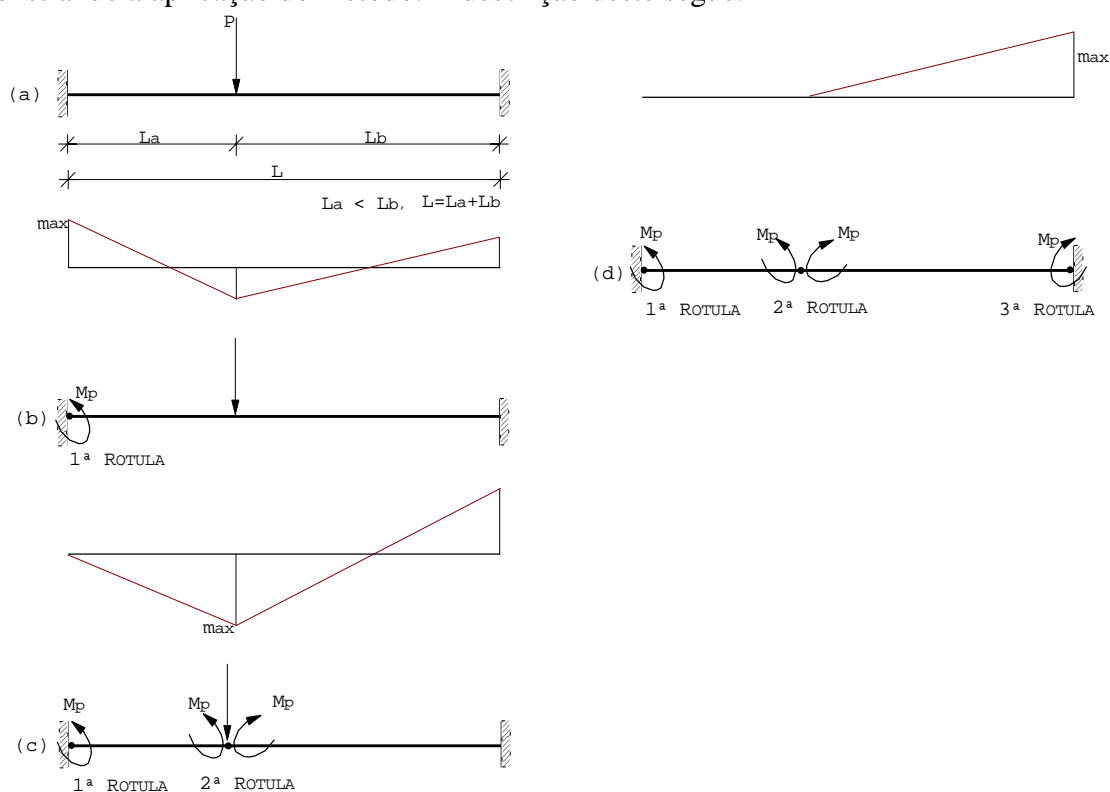


Fig.7.1 - Modelo de análise elasto-plástica incremental

Descrição dos passos mostrados na figura 7.1:

Ao aplicar-se uma carga P (passo a), faz-se a 1ª análise elástica da estrutura, determinando-se os esforços. Nos locais onde ocorrerem os momentos máximos formar-se-ão as rótulas, visto no passo b;

Nesta fase, fazem-se as mudanças das rigidezes nos elementos onde se formaram as rótulas e depois aplica-se a 2ª análise elástica na estrutura modificada (passo b), então formam-se novos diagramas de esforços;

Detectam-se os novos esforços máximos, as novas rótulas e fazem-se as novas alterações na matriz de rigidez \mathbf{K} , nos elementos onde se formaram as rótulas (passo c);

O processo segue com novas análises elásticas para determinação dos esforços, rótulas e mudanças na matriz de rigidez do elementos até que a estrutura fique hipostática.

Os processos que podem ser empregados para controlar a quantidade de análises desenvolvidas são:

1. Atingir grandes deformações;
2. Matriz de rigidez torna-se singular;
3. Fator de carga muito pequeno, sendo que este envolve um fator de carga mínimo.

Como o presente trabalho envolve estruturas de pórticos espaciais com seis esforços agindo na seção do elemento visto na figura 2.1, ou seja, 2 momentos fletores, 1 momento torçor, 2 esforços cortantes e 1 esforço axial; ocorrem interações entre os esforços, porém devido ao não conhecimento das curvas de interações para todos os esforços, será adotado o modelo de flexão oblíqua composta para pilares que é transformado em flexão normal composta segundo o item 4.1.1.3-A da norma NB1, sendo mostrado na figura 7.2.

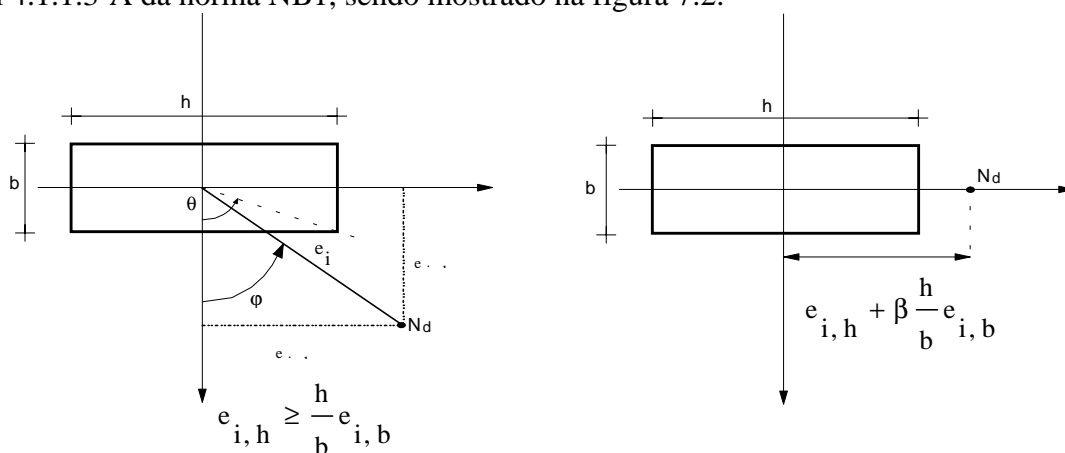


Fig. 7.2 - Transformação da flexão oblíqua composta em normal composta

No modelo adotado na figura 7.2, as armaduras terão que ser iguais nas 4 faces, sendo testado em cada passo da análise elasto-plástica incremental, o estado de flexão normal composta equivalente. Para as vigas adota-se a flexão simples ou normal composta.

Vemos a sequência dos passos em (7.1a,b) necessários para análise, sendo que o coeficiente β está tabelado na figura 10 da NB1¹⁰.

$$e_{h,eq} = e_h + \beta \frac{h}{b} e_b$$

$$\omega \rightarrow \beta \rightarrow e_{h,eq} \rightarrow M_d = N_d \cdot e_{h,eq} \rightarrow A_s \rightarrow \rho \rightarrow \omega \quad (7.1a,b)$$

↑ _____ ↓

A implementação computacional da análise como flexão normal composta será feita segundo o modelo que trabalha com equações das curvas de resistência do concreto aos esforços $\nu - \mu$, região estaticamente admissível para a seção retangular não-armada e as equações das curvas de resistência equivalentes para a seção armada que foi apresentado por Mello¹¹. Posteriormente, verifica-se a capacidade de rotação plástica da estrutura segundo os critérios de norma como por exemplo: NB1¹⁰ e CEB¹³, sendo empregado o modelo, desenvolvido por Mello¹², que aborda o assunto do ponto de vista cinemático, em conformidade com os encurtamentos do concreto e alongamento da armadura previstos nos domínios de dimensionamento do CEB e NB1.

8. – EXEMPLOS NUMÉRICOS

É apresentado um exemplo numérico retirado da literatura e foram feitas alterações e inclusões em algumas propriedades como seções, carregamentos, resistências características, módulo de elasticidade do aço, módulo de elasticidade do concreto para padronizar os valores das estruturas projetadas. A hipótese básica, adotada, é de projetar estruturas baseadas na solução redistribuída para desenvolvimento de projetos mais econômicos determinando o fator de carga de colapso plástico desta estrutura, limitado pela capacidade de rotação plástica. (Vieira¹⁴).

Foram aplicados os critérios da norma NB1¹⁰, item 4.2.3.1, alínea c e sub-item a para deslocamentos máximos vertical, onde a flecha máxima, medida a partir do plano que contém os apoios, para vãos sem balanços é $L/300$ e com balanços é $L/150$, sendo L o comprimento do vão; para o deslocamento horizontal adotou-se $H/400$, usado normalmente para estruturas de aço, sendo aplicado neste trabalho para estruturas de concreto devido não existir um critério segundo a NB1.

Para a obtenção do fator de carga de estruturas de concreto depende-se das armaduras das seções que são dimensionadas pelo esforços de cálculo, com k variando de 1 a n (número total de esforços), onde γ é fator de majoração da ações, cujo valor é 1,4, não levando diferentes fatores para as soluções plástica e elástica (ver equação (6.7)).

$$M_{d_k} = \gamma \cdot M_k \quad (8.1)$$

Foram calculadas as armaduras para as seções do elemento em função dos esforços de cálculo e arbitrada a de maior valor para todo o elemento.

8.1 - Exemplo 8.1

Considera-se um pórtico espacial apresentado por Harrison (1973), com 3 elementos e 4 nós discretizados na figura 8.1, com carregamento concentrado, apresentando seção retangular representados por largura b e altura h . As propriedades da estrutura são mostradas na tabela 8.1.

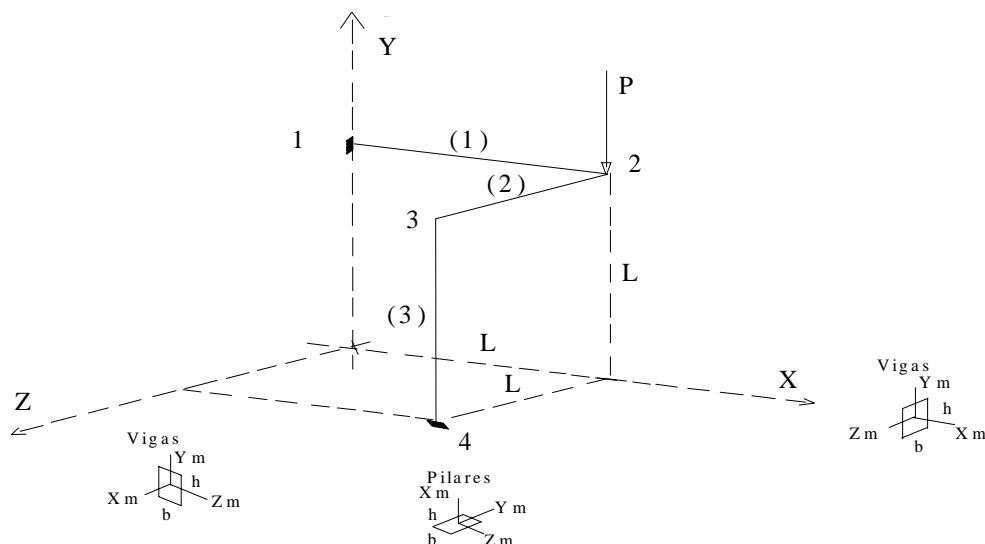


Fig. 8.1 - Pórtico espacial Harrison

Tabela 8.1- Propriedades da estrutura (exemplo 8.1)

Discretização dos elementos		
ELEMENTO	NÓ INICIAL (A)	NÓ FINAL (B)
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4
Características da estrutura		
Descrição	Valor adotado	Unidade
E_s (Módulo de Elasticidade do aço) - CA50A	$201,037 \times 10^6$	kN/m^2
E_c (Módulo de deformação longitudinal do concreto)	$31,57 \times 10^6$	kN/m^2
G_c (Módulo de Elasticidade transversal do concreto)	$12,628 \times 10^6$	kN/m^2
F_{c_k} (Resistência característica do concreto)	19613,40	kN/m^2
F_{y_k} (Resistência característica do aço)	$490,335 \times 10^3$	kN/m^2
b (Largura da seção)	0,30	m
h (Altura total da seção)	0,60	m
d (Altura útil da seção)	0,585	m
I_y (Inércia em torno do eixo Y_m local)	$1350,00 \times 10^{-6}$	m^4
I_z (Inércia em torno do eixo Z_m local)	$5400,00 \times 10^{-6}$	m^4
I_x (Inércia em torno do eixo X_m local)	$3710,00 \times 10^{-6}$	m^4

A (área da seção)	0,18	m ²
P (Carga concentrada)	9,807	kN
L (Comprimento total do vão)	12,00	m

Mostra-se, na tabela 8.2, os resultados elásticos dos deslocamentos nodais.

Tabela 8.2 - Deslocamentos nodais (exemplo 8.1)

NÓ	UX	UY	UZ
	RX	RY	RZ
1	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,000000	-0,022129	-0,007634
	-0,001945	0,000868	-0,002676
3	0,008048	-0,000006	-0,007636
	-0,001374	0,000449	-0,001366
4	0,000000	0,000000	0,000000
	0,000000	0,000000	0,000000

Na tabela 8.3, tem-se a comparação dos deslocamentos nodais da estrutura com as especificações de norma.

Tabela 8.3 - Deslocamentos máximos (exemplo 8.1)

Nó	Deslocamento horizontal - Uz			
3	máximo	0,007636	norma	0,024000
Nó	Deslocamento horizontal - Ux			
3	máximo	0,008048	norma	0,024000
Nó	Deslocamento vertical - Uy			
2	máximo	0,022129	norma	0,040000

Para a solução plástica via mínimo peso, testou-se 2 tipos de casos adotando-se as variáveis de projeto na tabela 8.4, para pórtico espacial¹⁴, segundo o modelo mostrado na equação (4.4).

Tabela 8.4 - Variáveis de projeto da estrutura (exemplo 8.1)

Elemento	Caso	Variáveis de projeto					
		T _m	MA _{zm}	MB _{zm}	MA _{ym}	MB _{ym}	Q _m
1	1	7	1	1	2	2	8
	2	3	1	1	2	2	4
2	1	7	3	3	4	4	8
	2	3	1	1	2	2	4
3	1	7	5	5	6	6	8
	2	3	1	1	2	2	4

A tabela 8.5, mostra o peso total da estrutura e a as características da redistribuição.

Tabela 8.5 - Peso total e características de redistribuição (exemplo 8.1)

Tipo	Peso total	Região de redistribuição*	Taxa de redistribuição (i_k)
Caso 1	1412,773	[0,00%; 100,00%]	20,00%
Caso 2	1412,773	[0,00%; 51,64%]	20,00%

(*) ver equação (6.12a)

Neste caso, existem duas soluções com pesos iguais e definiu-se por analisar as duas devido a peculiaridade do exemplo. As variáveis de projeto do caso 1 são vistas na tabela 8.4. É mostrado, na tabela 8.6, os valores das variáveis de projeto e na tabela 8.7, a comparação dos resultados obtidos para a solução elástica (E), redistribuída (RMP1) e plástica via mínima peso (PMP1) para o caso 1, respectivamente.

Tabela 8.6 – Valores das variáveis de projeto da estrutura (exemplo 8.1) – RMP1

Elemento	Variáveis de projeto			
	Tm	MA _{zm} MB _{zm}	MA _{ym} MB _{ym}	Qm
1	0,000	117,731	0,000	0,000
	0,000	117,731	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 8.7-Esforços solicitantes elásticos, redistribuídos e plásticos (exemplo 8.1)-RMP1

ELEMENTO	NÓ	TIPO	T _m	M _{ym}	M _{zm}
1	1	E	-0,04382	-7,39145	81,15151
		RMP1	-0,03506	-5,91316	88,46740
		PMP1	0,00000	0,00000	117,73100
	2	E	0,04382	-1,22605	5,11469
		RMP1	0,03506	-0,98084	27,63790
		PMP1	0,00000	0,00000	117,73100
2	2	E	0,71813	1,22605	-7,59343
		RMP1	0,57450	0,98084	-6,07475
		PMP1	0,00000	0,00000	0,00000
	3	E	-0,71813	-1,751909	-23,82437
		RMP1	-0,57450	-1,40153	-19,05950
		PMP1	0,00000	0,00000	0,00000
3	3*	E	2,61815	-5,11469	23,82437
		RMP1	2,09452	-4,09175	19,05950

		PMP1	0,00000	0,00000	0,00000
	4	E	-2,61815	4,58883	-15,20689
		RMP1	-2,09452	3,67106	-12,16550
		PMP1	0,00000	0,00000	0,00000

(*) Seção de controle do valor máximo da redistribuição

A solução plástica obtida, para o caso 1, apresentou esforços solicitantes não nulos, somente para o elemento 1, portanto, maximizou a solução como se existisse somente este elemento. Para a solução redistribuída não ocorreu a inversão do sinal dos esforços, apresentando os valores redistribuídos próximos da solução elástica (ver tabela 8.7), devido a taxa de redistribuição ser pequena comparada com o seu valor máximo permitido.

As variáveis de projeto do caso 2 são apresentadas na tabela 8.4. É mostrado, na tabela 8.8, os valores das variáveis de projeto para o caso 2 e na tabela 8.9, a comparação dos resultados obtidos para a solução elástica (E), redistribuída (RMP2) e plástica via mínima peso (PMP2) para o caso 2, respectivamente.

Tabela 8.8 – Valores das variáveis de projeto da estrutura (exemplo 8.1) – RMP2

Elemento	Variáveis de projeto			
	T _m	MA _{zm} MB _{zm}	MA _{ym} MB _{ym}	Q _m
1	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000
	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000
2	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000
	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000
3	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000
	6,5380	39,2437	0,0000	0,0000

Tabela 8.9-Esforços solicitantes elásticos, redistribuídos e plásticos (exemplo 8.1)–RMP2

ELEMENTO	NÓ	TIPO	T _m	M _{ym}	M _{zm}
1	1*	E	-0,04382	-7,39145	81,15151
		RMP2	2,50522	-4,52884	64,92120
		PMP2	6,53800	0,0000	39,24370
	2	E	0,04382	-1,22605	5,11469
		RMP2	2,53020	-0,75122	18,33240
		PMP2	6,53800	0,00000	39,24370
2	2	E	0,71813	1,22605	-7,59343
		RMP2	2,97208	0,75122	-19,85110
		PMP2	6,53800	0,00000	-39,24370
	3	E	-0,71813	-1,75191	-23,82437
		RMP2	2,08999	-1,07342	-29,79610

		PMP2	6,53800	0,00000	-39,24370
3	3	E	2,61815	-5,11469	23,82437
		RMP2	-0,92790	-3,13384	29,79610
		PMP2	-6,53800	0,00000	39,24370
	4	E	-2,61815	4,58883	-15,20688
		RMP2	-4,13513	2,81164	-24,51600
		PMP2	-6,53800	0,00000	-39,24370

(*) Seção de controle do valor máximo da redistribuição

Para a solução redistribuída não ocorreu a inversão do sinal dos esforços em relação aos momentos, apresentando os valores redistribuídos intermediários entre a solução elástica e plástica (ver tabela 8.9), devido a taxa de redistribuição ser próxima do valor médio da região de redistribuição.

Na tabela 8.10, tem-se a comparação dos resultados obtidos para a solução elástica (E), redistribuída (RMN) e plástica via mínima norma euclidiana (PMN), respectivamente. A região permissível de redistribuição obtida foi de 0,00% a 33,08%, e a taxa de redistribuição (i_k) adotada de 20,00%.

Tabela 8.10- Esforços solicitantes elásticos, redistribuídos e plásticos (exemplo 8.1)-RMN

ELEMENTO	NÓ	TIPO	Tm	M _{ym}	M _{zm}
1	1*	E	-0,04382	-7,39145	81,15151
		RMN	-0,25434	-9,34784	64,92120
		PMN	-0,39197	-10,62692	54,30985
	2	E	0,04382	-1,22605	5,11469
		RMN	0,25434	-0,66907	10,94290
		PMN	0,39197	-0,30492	14,75337
2	2	E	0,71813	1,22605	-7,59343
		RMN	0,83474	0,66907	-19,31960
		PMN	0,91099	0,30492	-26,98610
	3	E	-0,71813	-1,75191	-23,82437
		RMN	-0,83474	-3,72109	-22,50030
		PMN	-0,91099	-5,00854	-21,63468
3	3	E	2,61815	-5,11469	23,82437
		RMN	3,48499	-10,94290	22,50030
		PMN	4,05173	-14,75337	21,63468
	4	E	-2,61815	4,58883	-15,20688
		RMN	-3,48499	7,89087	-12,48340
		PMN	-4,05173	10,04975	-10,70284

(*) Seção de controle do valor máximo da redistribuição

Na redistribuição, via mínima norma euclidiana (RMN), vista na tabela 8.10, com a taxa de 20%, não acontece a inversão dos sinais dos esforços solicitantes, sendo que neste caso em nenhuma situação ocorrerá a inversão do sinal dos esforços, devido as soluções, elástica e plástica terem os mesmos sinais.

As análises incrementais da estrutura redistribuída, ora por solução plástica via mínima norma euclidiana ora por mínimo peso, com o teste da capacidade de rotação plástica da seção, são vistos na tabela 8.11.

Tabela 8.11 - Resultados da análise incremental (exemplo 8.1)

Rotula Plástica	Tipo	λ_c	Nó	Uy (m)	Capacidade de rotação plástica			
					Elem.	Nó	Cálc.	Norma
1	RMN	1,000	3	-0,00001	3	3	0,00137	0,01300
			4	0,00000				
	RMP1	1,000	3	-0,00001	3	3	0,00137	0,01300
			4	0,00000				
	RMP2	1,000	3	-0,00001	3	3	0,00137	0,01300
			4	0,00000				
2	RMN	1,812	1	0,00000	1	1	0,00000	0,01400
	RMP1	2,239	1	0,00000	1	1	0,00000	0,01400
	RMP2	1,812	1	0,00000	1	1	0,00000	0,01400

O gráfico da figura 8.2 representa o fator de carga x deslocamentos verticais para o nó 2

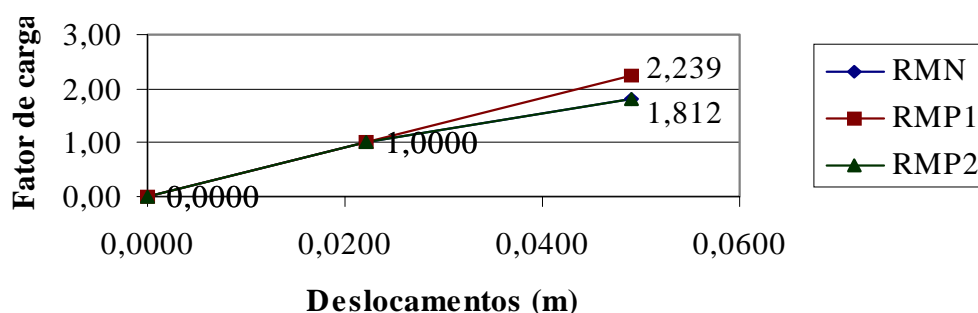


Fig. 8.2 - Gráfico carga x deslocamentos verticais (Uy) do nó 2 (exemplo 8.1)

O fator de carga λ_c é maior que o fator de majoração γ , com a estrutura dentro dos limites estabelecidos para o projeto. Os fatores de carga da estrutura redistribuída via mínima norma euclidiana e mínimo peso (caso 2) foram iguais devido a necessidade da adequação das armaduras de acordo com os critérios da norma, já para o caso 1 a diferença foi devido o dimensionamento das armaduras, onde o elemento 1 tem a armação principal e os outros armaduras mínimas estabelecidas por norma (NB1/78).

As plastificações da estrutura ocorreram nas mesmas seções para as três soluções redistribuídas e como não houve alteração das dimensões das seções para cada solução redistribuída; as propriedades da matriz de massa da estrutura foram as mesmas, portanto as

frequências naturais foram as mesmas para os dois tipos. Pode-se concluir que a estrutura atendeu aos estados limite, de utilização e último

9. – CONCLUSÕES

Como os modelos de redistribuição geralmente são aplicados para vigas e pórticos planos, seguindo critérios de norma, o critério adotado na pesquisa foi bastante satisfatório porque permite várias taxas de redistribuição independentes da existência de vários ou poucos carregamentos atuantes, podendo ser empregado também em pórticos espaciais. O método empregado não é iterativo. Apresenta novas configurações de equilíbrio com as ações solicitantes e atende os dois estados limites, ou seja, de utilização e último (Vieira¹⁴).

10. – REFERÊNCIAS

1. LEONHARDT, F.; MÖNNIG., E., *Construções de Concreto*, 2 ed., Springer, Berlim, v. 4., 1978.
2. PRADO, J. F. M. A.; GIONGO, J. S., Redistribuição de Momentos Fletores em Vigas de Edifícios, XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos, São Paulo, Brasil, Vol. 14 pp. 1555-563, 1997.
3. MELLO, E. L., *Função Convexa de Redistribuição de Esforços Solicitantes para Dimensionamento de Estruturas*, XVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Brasília, Brasil, Vol. 1, pp. 185-191, 1997.
4. MELLO, E. L., *Some Applications of Generalised Inverse Theory to Structural Problems*, Phd Thesis, Imperial College, London, 1980.
5. HORNE, M. R., *Plastic Theory of Structures*, 2ed., Pergamon international library, 1979.
6. HARRISON, H. B., *Computer Methods in Structural Analysis*, Prentice-Hall, 1973.
7. MELLO, E. L.; SAHLIT, C. L., *Análise Elástica e Elasto-Plástica de Estruturas*, Apostilas do Curso em Extensão em Engenharia Civil, Universidade de Brasília, 1983.
8. GERE, J. M.; WEAVER, W. JR., *Análise de Estruturas reticulares*, Guanabara S.A., 1987.
9. BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
10. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NB1, *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*, Rio de Janeiro (NBR-6118), 1978.
11. MELLO, E. L., *Flexão Normal Composta em Concreto Armado - Curvas Analíticas de Interação $\mu - v$* , Revista IBRACON, ano II, N^o 4, p. 63-68, 1992.
12. MELLO, E. L., *Sobre a Capacidade de Rotação das Seções de Concreto Armado*, XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Tucumán-Argentina, v. 2, p. 141-148, 1995.
13. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, CEB-FIP MODEL CODE 1990, *Bulletin D'information N^o 203*, Lausanne, Switzerland, 1991.

14. VIEIRA, P. C. dos S., *Síntese Estrutural e Análise Modal de Pórticos Espaciais com Diferentes Graus de Redistribuição de Esforços Solicitantes*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 1999.