



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO



Os grupos de tranças emolduradas e suas generalizações

Ênio Carlos da Silva Leite

SALVADOR, BA

2025

Ênio Carlos da Silva Leite

Os grupos de tranças emolduradas e suas generalizações

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: Oscar Ocampo

SALVADOR, BA

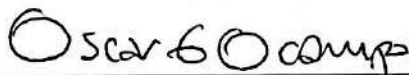
2025

Os grupos de tranças emolduradas e suas generalizações

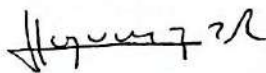
Ênio Carlos da Silva Leite

Tese apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

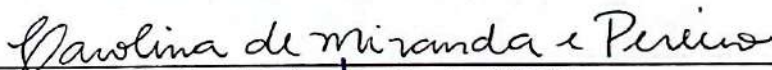
Banca Examinadora



Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (Orientador – UFBA)



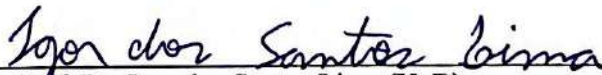
Prof. Dr. Jesús Juyumaya (UV)



Prof. Dr. Carolina de Miranda e Pereiro (UFES)



Prof. Dr. Daniel Juan Pineda (UNAM)



Prof. Dr. Igor dos Santos Lima (UnB)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

L533 Leite, Ênio Carlos da Silva

Os grupos de tranças emolduradas e suas generalizações / Ênio
Carlos da Silva Leite. – Salvador, 2025.

168 f.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Ocampo

Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de
Matemática e Estatística, 2025.

1. Grupos de tranças. 2. Grupos de tranças emolduradas. 3. Grupos
de tranças virtuais. 4. Grupos de tranças singulares. 5. Invariante de
nós. 6. Álgebra de Temperley-Lieb. 7. Traço de Markov. I. Ocampo,
Oscar. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU:512.54

Aos meus pais e familiares.

Agradecimentos

Chego ao fim de mais um ciclo acadêmico com o coração repleto de gratidão. Agradeço a Deus pela oportunidade de crescer e aprender, e por me mostrar, a cada dia, que somos capazes de trilhar caminhos diferentes e transformadores. Agradeço também aos santos gêmeos, São Cosme e São Damião, por estarem sempre ao meu lado, trazendo proteção e alegria mesmo nos dias difíceis. Ao meu pai Oxóssi, minha eterna reverência, por guiar meus passos e me ajudar a nunca me perder pelos caminhos da vida. E a toda espiritualidade amiga, meu sincero e profundo agradecimento.

Nada seria possível sem a base que é a minha família. Aos meus pais, Esteva e Antônio, minha eterna gratidão por serem exemplos de bondade, lealdade e fé. Obrigado por acreditarem em mim e sustentarem meus sonhos com amor incondicional. À minha avó Marieta, meu porto seguro, e às minhas irmãs Adneia e Adeane, por todo carinho, paciência e cuidado. Ao meu sobrinho Heitor, que ilumina nossos dias e nos lembra, com seu sorriso, o verdadeiro sentido do amor. À minha tia Júlia e à minha prima Adelice, obrigada por me acolherem sempre com tanto carinho e por me darem suporte para seguir estudando. Agradeço ainda à minha mãe de santo, Denise, que se tornou parte essencial da minha família, sempre pronta a me acolher e cuidar de mim nos momentos de maior vulnerabilidade.

Meu agradecimento mais sincero ao professor Oscar, meu orientador, cuja paciência, incentivo e confiança foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Que Deus e toda espiritualidade amiga estejam sempre ao seu lado, retribuindo o bem e a generosidade que dedica aos seus orientandos.

Aos meus amigos Adilon, Gilmário, Alexsandro, Ariana, Vanessa, Tâmara, Sandra, Paloma, Ricardo, Iracema, Simba e Maiane, obrigado por serem presenças constantes, por me apoiarem e acreditarem em mim, mesmo quando eu duvidava.

Ao meu companheiro Alex, toda minha gratidão pelo amor, carinho e compreensão, especialmente nos momentos de ausência e cansaço. É uma alegria e uma honra dividir a vida contigo.

Aos colegas da graduação — Jani, Luciano, Paula, Jaci, Luan, Zenilda, Leu, Nal, Emerson, Indiara, Júnior e Meiry —, minha gratidão por compartilharem comigo tantos aprendizados e desafios. Aos amigos que a UFBA me deu durante o mestrado e doutorado — Jonathas, Cleide, Rasta, Janara, Sávio,

Pedro, Rafael, Ana Carolina, Glaene, Danúzia, Crísia, Yure, Rosy, Joedson, João Roberto, Leidy, Bruna, Taís, Eduardo, Iago, Elivan, Leandro e Diego —, obrigado pela parceria, pelos risos e pela força nos momentos em que o cansaço parecia vencer. Aos companheiros de estudo Enathielle e Moacyr, meu carinho por me ajudarem a seguir firme e acreditar no processo.

Aos meus grandes amigos Paulo, Caio e Gustavo, minha mais profunda gratidão. Vocês são a prova viva do que é uma amizade verdadeira, aquela que acolhe, escuta e permanece.

Meu agradecimento especial à psicóloga Wivian, por sua escuta sensível e por me ajudar a compreender que é possível viver bem com o TAG, sem deixar que as questões emocionais limitem meus passos. Sua orientação foi essencial para que eu seguisse com serenidade.

Agradeço aos professores Carolina Pereiro, Igor Lima, Jesus Juyumaya e Daniel Pineda por aceitarem o convite para compor a banca examinadora desta tese. Suas leituras atentas, comentários e sugestões contribuíram de forma significativa para o aprimoramento deste trabalho.

À UFBA, pelo seu corpo docente, direção e equipe administrativa, meu reconhecimento por toda dedicação, profissionalismo e por promover um ambiente de aprendizado e transformação.

E, por fim, à FAPESB, pelo apoio financeiro que tornou possível mais esta conquista.

Encerrar este ciclo é, acima de tudo, reconhecer que cada passo foi guiado pelo amor, pela fé e pela força das pessoas que caminharam comigo. A todos, o meu muito obrigado.

"A vida é construída nos sonhos e caracterizada no amor."

Chico Xavier

★ 1910 — † 2002

Resumo

Sejam $n \geq 2$ e B_n o grupo de tranças de Artin, também conhecido como grupo de tranças do disco. Denotemos por FB_n o grupo de tranças emolduradas. Nesta tese estudamos grupos de tranças emolduradas e suas generalizações. Inicialmente, desenvolvemos uma análise estrutural do grupo FB_n , investigando diversas propriedades algébricas. Em particular, são determinados o seu centro, a sua série central inferior, o seu subgrupo comutador, bem como certos quocientes do tipo Coxeter e subgrupos de congruência associados. Em seguida, estendemos o estudo ao contexto de superfícies, considerando os grupos de tranças emolduradas $FB_n(M)$, em que M pode ser uma superfície orientável ou não, eventualmente com um número finito de perfurações. Posteriormente, introduzimos e analisamos duas generalizações do grupo de tranças emolduradas: o grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n e o grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n . Para ambos os casos, apresentamos descrições por geradores e relações e investigamos propriedades estruturais análogas às do grupo FB_n . Por fim, construímos um invariante para nós singulares, baseado na álgebra de Temperley–Lieb virtual e no traço de Markov, estabelecendo assim uma conexão entre a teoria algébrica das tranças e a teoria dos nós singulares.

Palavras-chave: Grupos de tranças; Grupos de tranças emolduradas; Grupos de tranças virtuais; Grupos de tranças singulares; Invariantes de nós; Álgebra de Temperley–Lieb; Traço de Markov.

Abstract

Let $n \geq 2$ and let B_n denote the Artin braid group, also known as the braid group of the disk. We denote by FB_n the framed braid group. In this thesis, we study framed braid groups and their generalizations. Initially, we develop a structural analysis of the group FB_n , investigating several algebraic properties. In particular, we determine its center, lower central series, commutator subgroup, as well as certain Coxeter-type quotients and associated congruence subgroups. Next, we extend our study to the context of surfaces, considering the framed braid groups $FB_n(M)$, where M may be an orientable or non-orientable surface, possibly with a finite number of punctures. Subsequently, we introduce and analyze two generalizations of the framed braid group: the framed virtual braid group FVB_n and the framed singular braid group FSG_n . For both cases, we present descriptions by generators and relations, and investigate structural properties analogous to those of FB_n . Finally, we construct an invariant for singular knots, based on the virtual Temperley–Lieb algebra and the Markov trace, thus establishing a connection between the algebraic theory of braids and the theory of singular knots.

Keywords: Braid groups; Framed braid groups; Virtual braid groups; Singular braid groups; Knot invariants; Temperley–Lieb algebra; Markov trace.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
RESUMO DOS RESULTADOS GERAIS	7
1 PRELIMINARES	11
1.1 Aspectos gerais da teoria de grupos	11
1.2 Grupo simplético	13
1.3 O grupo de tranças B_n	14
1.3.1 Grupos quocientes do grupo de tranças	17
1.3.2 Subgrupos de congruência do grupo de tranças	18
1.4 Grupos de tranças de superfícies	21
1.4.1 Os grupos de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$ e da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$	21
1.4.2 O grupo de tranças do toro $B_n(\mathbb{T}^2)$	24
1.4.3 O grupo de tranças do plano projetivo $B_n(\mathbb{R}P^2)$	26
1.4.4 O grupo de tranças da garrafa de Klein $B_n(\mathbb{K})$	27
1.4.5 Os grupos de tranças de superfícies orientáveis e orientáveis finitamente perfuradas	29
1.4.6 Os grupos de tranças de superfícies não orientáveis e não orientáveis finitamente perfuradas	31
1.5 O grupo de tranças emolduradas FB_n	33
2 CONTRIBUIÇÕES PARA O GRUPO DE TRANÇAS EMOLDURADAS FB_n	37
2.1 Homomorfismo do esquecimento	37
2.2 O centro de FB_n	39
2.3 Homomorfismos de FB_n em B_n	43
2.4 Residualmente finito e livre de torção	44
2.5 Série central inferior de FB_n	45
2.6 O subgrupo comutador de FB_n	46
2.7 Quociente do tipo Coxeter do grupo de tranças emolduradas	52
2.8 Subgrupo de congruência	53
3 OS GRUPOS DE TRANÇAS EMOLDURADAS DE SUPERFÍCIES	61
3.1 Os grupos de tranças emolduradas da esfera $FB_n(\mathbb{S}^2)$ e da esfera finitamente perfurada $FB_n(M_{0,p+1})$	61

3.2	O grupo de tranças emolduradas do toro $FB_n(\mathbb{T}^2)$	65
3.3	O grupo de tranças emolduradas do plano projetivo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$	67
3.4	O grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein $FB_n(\mathbb{K})$	70
3.5	Os grupos de tranças emolduradas de superfícies orientáveis e de superfícies orientáveis finitamente perfuradas	73
3.6	Os grupos de tranças emolduradas de superfícies não orientáveis e de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas	75
3.7	O centro de superfícies grandes	77
4	O GRUPO DE TRANÇAS VIRTUAIS EMOLDURADAS FVB_n	79
4.1	O grupo de tranças virtuais VB_n	79
4.2	Definição do grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n	84
4.3	O centro de FVB_n	93
4.4	Homomorfismos de FVB_n em S_n e VB_n	94
4.5	Série central inferior de FVB_n	97
4.6	O subgrupo comutador de FVB_n	99
4.7	Subgrupos característicos de FVB_n	108
4.8	Uma representação de Burau para VB_n	119
5	O GRUPO DE TRANÇAS SINGULARES SG_n E O GRUPO DE TRANÇAS SINGULARES EMOLDURADAS FSG_n	127
5.1	O grupo de tranças singulares SG_n e nós singulares	127
5.2	Definição do grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n	132
5.3	O centro de FSG_n	138
5.4	Série central inferior de SG_n e FSG_n	139
5.5	Subgrupo comutador de FSG_n	142
5.6	Um invariante de nós singulares	150
5.6.1	A álgebra Temperley-Lieb virtual VTL_n e o Traço de Markov	151
5.6.2	Construção do invariante	154
	REFERÊNCIAS	163

Introdução

Os grupos de tranças de Artin, também conhecidos como grupos de tranças do plano, são denotados por B_n . Eles foram introduzidos por Emil Artin em 1925, com uma abordagem mais geométrica e intuitiva. Mais tarde, em 1947, Artin aprofundou seu estudo, analisando-os de maneira mais rigorosa sob uma perspectiva algébrica, conforme documentado em (ARTIN, 1925), (ARTIN, 1947a) e (ARTIN, 1947b). Cada elemento de B_n possui uma interpretação geométrica como um trançado de n cordas com certas restrições. A cada trança com n cordas pode-se associar, de forma natural, uma permutação do grupo simétrico S_n . Isso define um homomorfismo sobrejetivo $\sigma: B_n \rightarrow S_n$. O núcleo desse homomorfismo é o grupo de tranças puras de Artin com n cordas, denotado por P_n .

Os grupos de tranças e as tranças em si tornaram-se objeto de investigação intensa, culminando no desenvolvimento de uma teoria complexa e ramificada. Um avanço significativo veio em 1983, quando Vaughan Jones, trabalhando com álgebras de operadores, identificou novas representações dos grupos de tranças, veja (JONES, 1985) e (JONES, 1987). Foi a partir destas que ele conseguiu estabelecer o que hoje é conhecido como polinômio de Jones, um importante invariante de nós e enlaçamentos.

Os teoremas de Alexander e Markov estabelecem a relação entre tranças e nós (ou enlaçamentos). O Teorema de Alexander afirma que todo nó orientado em \mathbb{R}^3 pode ser obtido como fecho de uma trança em algum B_n , como pode ser visto em (ALEXANDER, 1923). Já o teorema de Markov, cuja primeira demonstração publicada aparece em (BIRMAN, 1974), é que se $\alpha \in B_n$ e $\beta \in B_m$ têm fechos isotópicos, então há uma sequência finita de movimentos de Markov que leva α a β . Esse arcabouço permite a construção de invariantes de nós via representações de B_n . Em particular, o trabalho (JONES, 1987) mostra que, ao considerar uma representação de B_n na álgebra de Hecke e aplicar um traço satisfazendo as condições de Markov, obtém-se o famoso polinômio de Jones.

Existem várias generalizações do grupo de tranças de Artin B_n , do ponto de vista geométrico e do ponto de vista algébrico, por exemplo, grupos de tranças de superfície, grupos de tranças emolduradas, grupos de tranças virtuais e os grupos de tranças singulares.

Os grupos de tranças de superfícies $B_n(M)$ representam uma generalização dos grupos de tran-

ças clássicas de Artin, onde as n cordas se movem em uma superfície arbitrária M (em vez do plano \mathbb{R}^2 ou do disco D^2). A teoria é rica e interliga a topologia, a álgebra e a geometria. Topologicamente, o grupo de tranças em n cordas na superfície M é o grupo fundamental do espaço de configuração não ordenado de n pontos distintos em M . O estudo dos grupos de tranças de superfícies se desenvolveu notavelmente após os trabalhos iniciais de Artin. Nos aspectos topológico e algébrico pode-se destacar os trabalhos (FOX; NEUWIRTH, 1962), (FADELL; NEUWIRTH, 1962) e (FADELL; VAN BUSKIRK, 1961), em que esses formalizaram a visão dos grupos de tranças como grupos fundamentais de espaços de configuração, estabelecendo as bases da teoria em superfícies como o plano e a esfera \mathbb{S}^2 . Um foco importante tem sido encontrar apresentações (geradores e relações) para $B_n(M)$ para diversas superfícies, em (BELLINGERI, 2004) podem ser encontradas apresentações para grupos de tranças em superfícies fechadas, orientáveis (gênero $g \geq 1$) ou não orientáveis (gênero $g \geq 2$), e também apresentações para os grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas orientáveis e não orientáveis. Uma apresentação para os grupos de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$, do toro $B_n(\mathbb{T}^2)$, do plano projetivo $B_n(\mathbb{R}P^2)$ e da garrafa de Klein $B_n(\mathbb{K})$ pode ser encontrada nos trabalhos (FADELL; VAN BUSKIRK, 1961), (BIRMAN, 1969), (VAN BUSKIRK, 1966) e (PEREIRO, 2015), respectivamente.

No cenário virtual, o grupo de tranças virtuais desempenha, no contexto dos nós e enlaçamentos virtuais, o mesmo papel que o grupo de tranças de Artin exerce na teoria clássica dos nós. O conceito de nó virtual, que introduz um tipo de cruzamento adicional nos diagramas, foi estabelecido por Kauffman em (KAUFFMAN, 1999), artigo em que também se definiu o grupo de tranças virtuais como uma ferramenta fundamental para o estudo de nós e enlaçamentos virtuais. A importância de VB_n foi reforçada pela prova dos Teoremas de Alexander e Markov para tranças virtuais por Kamada em (KAMADA, 2007). A partir da construção da álgebra de Temperley-Lieb virtual, introduzida por Paris e Rabenda em (PARIS; RABENDA, 2021), foi possível definir um traço de Markov compatível com o grupo de tranças virtuais. Essa estrutura algébrica fornece, por meio desse traço, um novo invariante para nós e enlaçamentos virtuais, generalizando o papel desempenhado pela álgebra de Temperley-Lieb clássica e pelo polinômio de Jones na teoria usual dos nós.

Desde então, o grupo VB_n tem atraído intensa pesquisa, com diversos trabalhos abordando sua estrutura e suas relações. No trabalho (BARDAKOV, 2004) é investigado a estrutura algébrica do grupo de tranças virtuais VB_n , mostrando que ele pode ser descrito como um produto semidireto entre o grupo de tranças puras virtuais e o grupo simétrico, em que o grupo de tranças puras virtuais, denotado por VP_n , é o núcleo do homomorfismo $\pi_P: VB_n \rightarrow S_n$ definido por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = (i \ i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$. No artigo (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Bardakov e Bellingeri investigam as propriedades algébricas e combinatórias do grupo de tranças virtuais VB_n , os autores determinam a série central inferior do grupo VB_n e dos núcleos de duas projeções diferentes de VB_n em S_n , fornecendo informações sobre a estrutura interna do grupo. Bellingeri e Paris em (BELLINGERI; PARIS, 2020) investigam os homomorfismos entre o grupo de tranças virtuais VB_n e o grupo simétrico S_m , eles determinam todos os homomorfismos possíveis de VB_n para S_m , de S_n para VB_m e de VB_n para VB_m , onde $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $m \geq 2$ e $n \geq m$. Em (DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025) os

autores investigam subgrupos característicos e a propriedade R_∞ dos grupos de tranças virtuais, eles demonstram que o grupo de tranças puras virtuais VP_n é um subgrupo característico de VB_n se, e só se, $n \geq 4$, e o grupo KB_n é um subgrupo característico do grupo VB_n se, e só se, $n \geq 3$, onde o grupo KB_n é o núcleo do homomorfismo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ definido por $\pi_K(\sigma_i) = 1$, $\pi_K(v_i) = (i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$.

No contexto singular, a noção de tranças singulares foi introduzida independentemente por Baez em (BAEZ, 1992) e Birman em (BIRMAN, 1993). O conjunto de todas essas tranças possui uma estrutura de monoide. Foi demonstrado em (FENN; KEYMAN; ROURKE, 1998) que o monoide de Baez-Birman em n cordas está incluso em um grupo, denotado por SG_n . O grupo SG_n é atualmente conhecido como o grupo de tranças singulares em n cordas. O grupo SG_n contém o grupo clássico de tranças B_n como um subgrupo. A relação de SG_n com o universo dos nós é explorada em (GEMEIN, 1997), que estabelece um teorema de tipo Markov para nós e enlaçamento singulares. No trabalho (JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2009) foi introduzido um invariante do tipo Jones para nós singulares, usando um traço de Markov nas álgebras de Yokonuma-Hecke $Y_{d,n}(u)$ e a teoria de tranças singulares. O núcleo do homomorfismo $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ definido por $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$, chamado de grupo de tranças puras singulares, denotado por SP_n , é estudado em (BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2020) para $n = 2, 3$, onde foram encontrados os geradores e relações definidoras, bem como é provado que o grupo SP_3 admite uma decomposição como produto semidireto. Já em (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020) obtém-se uma apresentação para o grupo ST_n , núcleo do homomorfismo $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ definido por $\pi(\sigma_i) = (i \ i + 1)$ e $\pi(\tau_i) = 1$, $i = 1, \dots, n - 1$, e também é provado que $ST_3 \cong SP_3$ e que ST_3 se decompõe como um produto semidireto. Ainda sobre a investigação de subgrupos específicos, em (DEY; GONGOPADHYAY, 2022) estudou-se o subgrupo comutador de SG_n e mostrou-se que esse subgrupo é finitamente gerado e perfeito para $n \geq 5$.

O estudo das tranças emolduradas (framed braids) e do seu grupo associado, FB_n , estabelece uma conexão entre a Álgebra e a Topologia. Este conceito, cuja relevância topológica é derivada do trabalho (KIRBY, 1978) sobre a cirurgia de Dehn e a descrição de 3-variedades através de enlaces emoldurados, foi formalmente introduzido por Ko e Smolinsky no artigo (KO; SMOLINSKY, 1992), onde se demonstra um teorema do tipo Markov que revela que duas tranças emolduradas representam 3-variedades homeomorfas se, e somente se, elas estão relacionadas por um conjunto finito de movimentos. Um trabalho subsequente, (NATOV, 1997), aprofundou a compreensão das 3-variedades através do grupo das tranças puras emolduradas. No âmbito algébrico, a estrutura de FB_n gerou a Álgebra de Yokonuma-Hecke, que é definida a partir do quociente da álgebra do grupo FB_n . A importância desta álgebra se manifesta em (JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2007), que define um traço de Markov essencial, e em (CHMUTOV et al., 2016), onde este traço é aplicado, em conjunto com a teoria de tranças emolduradas, clássicas e singular, para a construção de um invariante do tipo Jones para nós emoldurados, clássicos e singulares. No que tange aos grupos de tranças emolduradas de superfícies, em (BELLINGERI; GERVAIS, 2012) é introduzido o grupo de tranças puras emolduradas em n cordas de uma superfície orientada, uma generalização topológica do grupo de tranças puras.

Tratando-se dos grupos de tranças emolduradas, estes ocupam um papel importante nos estudos de 3-variedades e a álgebra dos grupos de tranças emolduradas. Tais grupos podem ser vistos como extensões dos grupos de tranças clássicos de Artin, incorporando um parâmetro adicional que registra a torção individual de cada corda, chamado de moldura. Essa característica confere aos grupos de tranças emolduradas uma estrutura particularmente rica, permitindo a construção de novos invariantes de nós e enlaces, bem como a classificação de 3-variedades.

Diante da relevância dos grupos de tranças emolduradas, é natural considerar o estudo detalhado de suas propriedades algébricas, tais como a descrição do centro, da série central inferior e do subgrupo comutador. Além disso, a partir de sua construção, surge de forma igualmente natural a possibilidade de generalizar outras famílias conhecidas de grupos de tranças, como os grupos de tranças virtuais e os grupos de tranças singulares, para o contexto emoldurado. Nesta tese faremos contribuições na compreensão de propriedades combinatórias e estruturais de grupos de tranças generalizadas emolduradas, contribuindo assim na sua melhor compreensão.

A seguir, descrevemos em linhas gerais a divisão deste trabalho. Destacamos que um resumo, com os enunciados de resultados que são válidos tanto para o grupo de tranças emolduradas FB_n quanto para suas generalizações FGB_n , encontra-se depois desta introdução. Esses resultados estabelecem propriedades fundamentais comuns a essas estruturas.

O Capítulo 1 é dedicado às preliminares da tese, reunindo notações, definições e propriedades que serão utilizadas ao longo do texto. Nesse capítulo, também são apresentadas as descrições e apresentações dos principais grupos estudados neste trabalho, em particular, o grupo de tranças clássico B_n e o grupo de tranças emolduradas FB_n .

O Capítulo 2 da presente tese foi dedicado a aprofundar a estrutura algébrica e as propriedades do grupo de tranças emolduradas FB_n e seus quocientes. Inicialmente, no Teorema 2.2 demonstramos que o grupo FP_n pode ser visto como um produto semidireto de um grupo $\mathbb{Z} \oplus U_n$ pelo grupo FP_{n-1} . Em seguida, dirigimos nossa atenção aos elementos centrais e quocientes importantes, no Teorema 2.5 calculamos o centro de FB_n e, no Teorema 2.8, estabelecemos que, para $n = 3$, o grupo quociente de FB_n pelo seu centro é isomorfo ao produto semidireto do grupo \mathbb{Z}^2 com o grupo $PSL_2(\mathbb{Z})$. Complementarmente, no Teorema 2.9 descrevemos os possíveis homomorfismos de FB_n em B_n para $n \geq 6$. Estudando a série central inferior, no Teorema 2.15 provamos a igualdade $\Gamma_2(FB_n) = \Gamma_3(FB_n)$ para $n \geq 3$, e no Teorema 2.18 mostramos que o subgrupo comutador $\Gamma_2(FB_n)$ tem um conjunto infinito de geradores e perfeito para $n \geq 5$. Analisamos também quocientes importantes. No contexto dos quocientes do tipo Coxeter, o Teorema 2.19 caracteriza o grupo quociente $FB_n / \langle \sigma_1^k \rangle = FB_n(k)$ como isomorfo a $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n(k)$ quando k é par e a $\mathbb{Z}^n \oplus B_n(k)$ quando k é ímpar. Finalmente, para os subgrupos de congruência emoldurados $FB_n[m]$, no Teorema 2.23 estabelecemos uma estrutura algébrica do subgrupo $FB_n[m]$, e no Teorema 2.27 estudamos os quocientes do tipo Coxeter em $FB_n[m]$.

No Capítulo 3 focamos na generalização dos resultados obtidos, com a definição dos grupos

de tranças emolduradas de superfícies $FB_n(M)$. A parte central deste capítulo reside no cálculo do centro desses grupos. O centro foi calculado para diversas superfícies de interesse topológico: no Teorema 3.4 para a esfera ($M = \mathbb{S}^2$); no Teorema 3.8 para o toro ($M = \mathbb{T}^2$); no Teorema 3.12 para o plano projetivo ($M = \mathbb{R}P^2$); e no Teorema 3.16 para a garrafa de Klein ($M = \mathbb{K}$). Em termos de estrutura global, demonstramos que os grupos de tranças emolduradas de superfícies pode ser decomposto em um produto semidireto. Especificamente, o Teorema 3.18 prova que, se a superfície M for orientável, $FB_n(M)$ é um produto semidireto do grupo de tranças de superfície $B_n(M)$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n . A mesma decomposição pode ser vista no Teorema 3.22 para o caso M não orientável. Por fim, o Teorema 3.26 conclui o estudo ao calcular o centro do grupo de tranças emolduradas em superfícies grandes.

No Capítulo 4 introduzimos o grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n . Nos Teoremas 4.17 e 4.19, fornecemos apresentações explícitas para os subgrupos FVP_n (tranças puras virtuais emolduradas) e FKB_n , respectivamente. Uma distinção foi estabelecida no Teorema 4.21, onde provamos que estes subgrupos, FVP_n e FKB_n , não são isomorfos para $n \geq 2$. Em seguida, abordamos as propriedades globais do grupo, o Teorema 4.23 apresenta o cálculo do centro de FVB_n . O Teorema 4.24 descreve os possíveis homomorfismos de FVB_n no grupo simétrico S_n para $n \geq 5$, e o Teorema 4.25 caracteriza os homomorfismos de FVB_n no grupo de tranças virtuais VB_n para $n \geq 5$ e $n \neq 6$. Provamos no Teorema 4.29 que $\Gamma_2(FVB_n) = \Gamma_3(FVB_n)$ para $n \geq 4$. No Teorema 4.32 mostramos que $\Gamma_2(FVB_n)$ tem um conjunto infinito de geradores para $n \geq 5$, e no Teorema 4.33 provamos que $\Gamma_2(FVB_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. Provamos no Teorema 4.38 que os subgrupos FVP_n e FKB_n são subgrupos característicos de FVB_n para $n \geq 3$. Finalizando o capítulo, no Teorema 4.39 fornecemos uma representação de Burau para o grupo VB_n .

No Capítulo 5 introduzimos o grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n , assim como trazemos resultados sobre o grupo de tranças singulares que não estão presentes na literatura. No Teorema 5.13 fornecemos uma apresentação explícita para o grupo das tranças puras singulares emolduradas FSP_n . Em seguida, no Teorema 5.15 apresentamos decomposições para o grupo FST_n , $n = 2, 3$, e demonstramos que FSP_2 e FST_2 não são isomorfos, diferenciando suas estruturas. No Teorema 5.18 mostramos que o grupo singular SG_n não é residualmente nilpotente e que $\Gamma_2(SG_n) = \Gamma_3(SG_n)$ para $n \geq 3$. O resultado da igualdade da série central inferior foi estendido ao grupo emoldurado no Teorema 5.22, onde demonstramos que $\Gamma_2(FSG_n) = \Gamma_3(FSG_n)$ para $n \geq 3$. Provamos no Teorema 5.25 que o subgrupo comutador $\Gamma_2(FSG_n)$ tem um conjunto infinito de geradores para $n \geq 5$, e no Teorema 5.26 mostramos que esse subgrupo é perfeito para $n \geq 5$. Por fim, estabelecemos no Teorema 5.33 um homomorfismo da álgebra de grupo $R[SG_n]$ na Álgebra de Temperley-Lieb Virtual VTL_n , e utilizamos esta conexão no Teorema 5.36 onde trazemos um invariante de nós singulares.

Resumo dos resultados gerais

Os resultados apresentados aqui foram, em muitos casos, inicialmente obtidos em situações particulares. No entanto, a análise dos argumentos envolvidos revela que tais conclusões não dependem de maneira essencial das hipóteses específicas consideradas, admitindo formulações em um contexto mais geral. Dessa forma, optamos por reunir e enunciar aqui um conjunto de resultados de caráter geral.

Os grupos de tranças emolduradas generalizados

Aqui consideramos GB_n sendo **grupos de tranças generalizados**, grupos que generalizam o grupo clássico de tranças de Artin.

Existe um homomorfismo sobrejetor que associa a cada trança generalizada uma permutação correspondente:

$$\sigma: GB_n \longrightarrow S_n. \quad (1)$$

O conjunto

$$\{\alpha \in GB_n \mid \sigma(\alpha) = 1\}$$

é um subgrupo de GB_n , chamado **grupo de tranças puras generalizado**, que denotamos por GP_n . Exemplos de grupos de tranças generalizados incluem:

- grupos de tranças em superfícies,
- grupos de tranças virtuais e seus quocientes soldados e irrestritos,
- grupos de tranças multivirtuais,
- grupo de tranças virtuais torcidas,
- grupos de tranças singulares,
- grupos de tranças virtuais singulares.

Seja S_n o grupo simétrico que atua por permutação em $\{1, \dots, n\}$. Seja

$$\sigma: GB_n \longrightarrow S_n$$

a projeção canônica que envia $\beta \in GB_n$ para a permutação $\sigma(\beta)$. Há uma ação natural do grupo GB_n sobre o conjunto $\{1, \dots, n\}$ dada por

$$\beta(i) = \sigma(\beta)(i), \quad \text{para } \beta \in GB_n.$$

A ação do grupo de tranças generalizado GB_n no conjunto $\{1, \dots, n\}$ descrita acima será útil na definição dos grupos de tranças emolduradas generalizados.

Definição 0.1

Seja $n \geq 1$. Suponha que GB_n seja um grupo de tranças generalizado com uma apresentação finita dada por um conjunto de geradores \mathcal{S} e um conjunto de relações \mathcal{R} . O grupo de tranças emolduradas generalizado FGB_n é o grupo gerado por $\mathcal{S} \cup \{t_1, \dots, t_n\}$ com relações \mathcal{R} e as relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j, \quad \text{para todos } j, k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$s t_j s^{-1} = t_{s(j)}, \quad \text{para } s \in \mathcal{S}. \quad (3)$$

É uma consequência imediata da definição que

$$FGB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes GB_n,$$

onde a ação de GB_n sobre \mathbb{Z}^n é dada pela permutação dos índices:

$$\beta(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r_{\beta(1)}, r_{\beta(2)}, \dots, r_{\beta(n)}).$$

O homomorfismo de grupos $\sigma: GB_n \longrightarrow S_n$ pode ser estendido a um homomorfismo de grupos

$$\hat{\sigma}: FGB_n \longrightarrow S_n$$

enviando cada t_j para a identidade. Chamamos o núcleo de $\hat{\sigma}$ de **grupo de tranças puras emolduradas generalizado** e o denotamos por FGP_n . Assim, obtemos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow FGP_n \rightarrow FGB_n \rightarrow S_n \rightarrow 1. \quad (4)$$

Segue das definições que o grupo de tranças puras emolduradas generalizado é o grupo $\mathbb{Z}^n \oplus GP_n$, isto é,

$$FGP_n = \mathbb{Z}^n \oplus GP_n. \quad (5)$$

Recordemos que $FGB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes GB_n$. Também consideramos o homomorfismo

$$\mu: FGB_n \rightarrow GB_n \quad (6)$$

definido por $\mu(t \cdot \beta) = \beta$, onde $t \in \mathbb{Z}^n$ e $\beta \in GB_n$.

Proposição 0.2

Seja $n \geq 1$. O grupo GB_n é um subgrupo de FGB_n .

Demonstração. O grupo de tranças emolduradas generalizado FGB_n possui uma apresentação com geradores $\mathcal{S} \cup \{t_1, \dots, t_n\}$ e com relações \mathcal{R} e (2) e (3), onde $GB_n = \langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ é um grupo de tranças generalizado.

Considere o homomorfismo $\iota: GB_n \rightarrow FGB_n$ tal que $\iota(s) = s$, para todo $s \in \mathcal{S}$, e o homomorfismo $\mu: FGB_n \rightarrow GB_n$ dado em (6). A composição $\mu \circ \iota$ é o homomorfismo identidade, portanto ι é injetivo e o resultado segue. \square

Observação 0.3

Seja G um grupo, e seja $N \trianglelefteq G$ um subgrupo normal. Se N e G/N são livres de torção, então G também é livre de torção.

Proposição 0.4

Seja $n \geq 1$. Se GB_n é livre de torção, então FGB_n também é livre de torção.

Demonstração. Isso é uma consequência direta da decomposição $FGB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes GB_n$ e Observação 0.3. \square

Centro e abelianizado

O resultado a seguir generaliza os resultados sobre o centro dos grupos de tranças puras emolduradas, grupos de tranças emoldurados e o quociente dos grupos de tranças emolduradas pelo seus centros.

Teorema 0.5

Seja $n \geq 3$. Suponha que $Z(GB_n) = Z(GP_n)$.

- 1- $Z(FGP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus Z(GP_n)$.
- 2- $Z(FGB_n) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus Z(GB_n)$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n \in \mathbb{Z}^n$.
- 3- $FGB_n/Z(FGB_n) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes GB_n/Z(GB_n)$.

A prova do Teorema 0.5 pode ser vista de forma particular na Proposição 2.4 para o item 1, no Teorema 2.5 para o item 2 e no Teorema 2.8 para o item 3.

Sejam H e G grupos. Denotamos a abelianização de G por $(G)^{ab}$, isto é, $(G)^{ab} = G/[G, G]$, onde $[G, G] = \Gamma_2(G)$ é o subgrupo comutador de G . Considere o produto semidireto $H \rtimes_{\varphi} G$, onde $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(H)$ é uma ação de G sobre H . Seja $[H, G]$ o grupo

$$[H, G] = \langle \varphi(g)(h)h^{-1} \mid g \in G, h \in H \rangle \leq H. \quad (7)$$

Lema 0.6

Sejam H e G grupos e $H \rtimes_{\varphi} G$ um produto semidireto de grupos. Se H é abeliano, então $(H \rtimes_{\varphi} G)^{\text{ab}} \cong H/[H, G] \oplus G^{\text{ab}}$.

A descrição da abelianização de produtos semidiretos com núcleo abeliano fornece, neste caso, uma decomposição particularmente simples, como enunciado a seguir.

Teorema 0.7

Seja $n \geq 2$. Então $(FGB_n)^{\text{ab}} = \mathbb{Z} \oplus (GB_n)^{\text{ab}}$.

Uma prova particular do Teorema 0.7 pode ser vista na Proposição 2.13.

Propriedades residuais e o problema da seção

Dizemos que G é **residualmente** \mathcal{P} se, para todo elemento não trivial $g \in G$, existe um grupo H com a propriedade \mathcal{P} e um homomorfismo sobrejetivo $\varphi: G \rightarrow H$ tal que $\varphi(g) \neq 1$.

Teorema 0.8

Seja $n \geq 2$.

1. Suponha que GB_n seja residualmente finito. Então, FGB_n é residualmente finito e hopfiano.
2. Se GB_n não é residualmente nilpotente, então FGB_n também não é residualmente nilpotente.

Para o caso em que FGB_n é o grupo de tranças emolduradas FB_n , a prova do Teorema 0.8 pode ser vista nos Teorema 2.10 e Proposição 2.14.

O teorema a seguir estabelece uma equivalência precisa entre a existência de seções para o homomorfismo induzido (ψ_m, π_m) e a existência de seções para o homomorfismo geométrico π_m entre os grupos de tranças puras.

Teorema 0.9

Sejam $n, m \geq 1$, e seja $\psi_m: \mathbb{Z}^{n+m} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ o homomorfismo definido por

$$\psi_m(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = (z_1, \dots, z_n).$$

Seja $\pi_m: GP_{n+m} \rightarrow GP_n$ o homomorfismo que, geometricamente, dado uma trança generalizada em $n + m$ cordas, esquece suas últimas m cordas. Então a aplicação

$$(\psi_m, \pi_m): FGP_{n+m} \rightarrow FGP_n$$

admite uma seção se, e somente se, $\pi_m: GP_{n+m} \rightarrow GP_n$ admite uma seção.

Para FGP_{n+m} sendo o grupo de tranças puras emolduradas FP_n , damos uma prova para o Teorema 0.9 no Teorema 2.2.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de abordar os resultados e as contribuições específicas desta tese, é necessário estabelecer os conceitos básicos, as notações e os resultados preliminares que servirão como alicerce para o desenvolvimento subsequente.

Neste capítulo, serão apresentados os fundamentos da teoria dos grupos de tranças, incluindo definições essenciais, exemplos e propriedades relevantes que guiarão as discussões futuras. O objetivo é garantir clareza, bem como oferecer ao leitor uma base sólida para compreender os tópicos mais avançados tratados nos capítulos posteriores.

1.1 Aspectos gerais da teoria de grupos

Consideramos S_n como sendo o grupo simétrico definido sobre um conjunto X de n símbolos. Podemos, para esse grupo, dar uma apresentação em termos de geradores e relações: sejam s_1, s_2, \dots, s_{n-1} geradores de S_n sujeitos às relações

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & \text{para todo, } i = 1, \dots, n-1, \\ s_i s_j &= s_j s_i, & \text{para } |i-j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{para todo } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Definição 1.1

Seja G um grupo. Dados os elementos x e y em G , o comutador de x e y é o elemento

$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y \in G.$$

Definimos o subgrupo comutador de G , denotado por G' , como

$$G' = \langle [x, y]; x, y \in G \rangle.$$

Estabelecemos, a seguir, um resultado clássico sobre o subgrupo comutador.

Proposição 1.2

Seja G um grupo. Então, o subgrupo comutador G' , é normal em G .

Demonstração. Dados $g \in G$ e $a = [x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_k, y_k] \in G'$, temos que

$$\begin{aligned} gag^{-1} &= g([x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_k, y_k])g^{-1} \\ &= (g[x_1, y_1]g^{-1})(g[x_2, y_2]g^{-1}) \cdots (g[x_k, y_k]g^{-1}) \\ &= [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}][gx_2g^{-1}, gy_2g^{-1}] \cdots [gx_kg^{-1}, gy_kg^{-1}] \in G'. \end{aligned}$$

Como os elementos g e a foram dados arbitrariamente, segue que G' é normal em G . □

Proposição 1.3

Seja G' o subgrupo comutador de um grupo G . Então o grupo quociente G/G' é abeliano.

Demonstração. Dados os elementos $x, y \in G$. Temos que

$$xG'yG' = xyG' = yx[x, y]G' = yxG' = yG'xG',$$

isto é, G/G' é abeliano. □

Definição 1.4

Seja G um grupo. Considere $\Gamma_1(G) = G$ e definimos

$$\Gamma_{n+1}(G) = [\Gamma_n(G), G],$$

para todo $n \geq 1$. Tais subgrupos formam uma série

$$G = \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \cdots \geq \Gamma_n(G) \geq \cdots,$$

de tal forma que $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \leq Z(G/\Gamma_{i+1}(G))$. Tal série é chamada de **série central inferior** de G .

A condição $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G) \leq Z(G/\Gamma_{i+1}(G))$ pode ser verificada através da definição, visto que qualquer elemento de $\Gamma_i(G)/\Gamma_{i+1}(G)$ é da forma $g\Gamma_{i+1}(G)$, onde $g \in \Gamma_i(G)$. Para qualquer $h \in G$, considere o comutador $[g, h]$. Como $g \in \Gamma_i(G)$, implica que $[g, h] \in \Gamma_{i+1}(G)$. Portanto, $[g\Gamma_{i+1}(G), h\Gamma_{i+1}(G)] = 1\Gamma_{i+1}(G)$ o que significa que $g\Gamma_{i+1}(G)$ comuta com todos os elementos de $G/\Gamma_{i+1}(G)$.

Vale também observar que, pela definição de série central inferior, $G' = \Gamma_2(G)$. Nesta tese utilizaremos $\Gamma_2(G)$ para designar o subgrupo comutador de G ao invés de G' .

Dado um grupo G , o **abelianizado** de G é obtido pelo quociente do grupo G pelo seu subgrupo comutador. Desta forma, podemos denotar o abelianizado do grupo G por uma das seguintes formas: G^{ab} , G/G' ou $G/\Gamma_2(G)$.

Considerando um grupo G , um **automorfismo** de G é um isomorfismo $\alpha: G \rightarrow G$. O conjunto de todos os automorfismos de G será denotado por $Aut(G)$. Pode-se verificar que a composição de dois automorfismos de G também resulta em um automorfismo de G , o que implica que $Aut(G)$ forma um grupo sob a operação de composição.

Definição 1.5

Sejam G, H dois grupos. Para cada $h \in H$ temos o automorfismo interno

$$c_h: H \longrightarrow H, \quad c_h(x) = hxh^{-1}.$$

Dizemos que dois homomorfismos $\psi_1, \psi_2: G \longrightarrow H$ são **conjugados**, e denotamos por $\psi_1 \sim_c \psi_2$, se existir um elemento $h \in H$ tal que $\psi_2 = c_h \circ \psi_1$. Isso significa que

$$\psi_2(g) = h\psi_1(g)h^{-1}, \quad \text{para todo } g \in G.$$

A relação \sim_c é de equivalência.

1.2 Grupo simplético

Esta seção baseia-se no estudo apresentado em (MURASUGI; KURPITA, 2012), cujo conteúdo encontra-se detalhado no Apêndice III da referência citada.

Consideremos o conjunto de todas as matrizes $2n \times 2n$ cujas entradas são elementos do corpo \mathbb{Z}_p , onde p é um número primo. Ademais, consideremos apenas as matrizes cujo determinante seja igual a 1. Desta forma, o conjunto considerado torna-se um grupo sob a multiplicação usual de matrizes e é geralmente chamado de **grupo especial linear** e denotado por $SL_{2n}(\mathbb{Z}_p)$.

Observação 1.6

Por conveniência, em \mathbb{Z}_p consideraremos o número $p-1$ como -1 (uma vez que $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$).

Definição 1.7

Uma matriz M , $2n \times 2n$, em $SL_{2n}(\mathbb{Z}_p)$, cuja transposta denotamos por M^T , é chamada de matriz simplética se $M^T J M = J$, onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

e I_n é a matriz identidade $n \times n$ usual, pois, pela Observação 1.6, podemos substituir $p-1$ por -1 .

Proposição 1.8 ((MURASUGI; KURPITA, 2012), Appendix III, Proposition 1.1)

O conjunto de todas as matrizes simpléticas $2n \times 2n$ forma um subgrupo de $SL_{2n}(\mathbb{Z}_p)$, chamado de grupo simplético e denotado por $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_p)$.

A seguinte proposição é bem conhecida, veja por exemplo (DICKSON; EUGENE, 1901).

Proposição 1.9

Para um primo $p \geq 2$, o centro de $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ é $\{I_{2n}, -I_{2n}\}$. Além disso, se $n \geq 2$ então $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_p)/Z(Sp_{2n}(\mathbb{Z}_p))$ é um grupo simples chamado grupo simplético projetivo e denotado por $Psp_{2n}(\mathbb{Z}_p)$.

Se $p \geq 3$, a ordem de $Psp_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ é dada por

$$|Psp_{2n}(\mathbb{Z}_p)| = \frac{1}{2} p^{n^2} (p^2 - 1)(p^4 - 1) \dots (p^{2n} - 1).$$

Exemplo 1.10

Para $p = 3$ e $n = 2$, a ordem de $Psp_4(\mathbb{Z}_3)$ é 25920.

Agora, vamos estudar $Sp_4(\mathbb{Z}_p)$. Definamos as matrizes A e B como

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Cálculos simples mostram que A pertence a $SL_4(\mathbb{Z}_p)$, $\det B = -1$ e $B^T AB = J$.

Proposição 1.11 ((MURASUGI; KURPITA, 2012), Appendix III, Proposition 1.3)

Seja W o conjunto de todas as matrizes, C , em $SL_4(\mathbb{Z}_p)$ tais que

$$C^T AC = A.$$

Então, W é um subgrupo de $Sp_4(\mathbb{Z}_p)$ e, além disso, o automorfismo interno $\varphi: SL_4(\mathbb{Z}_p) \rightarrow SL_4(\mathbb{Z}_p)$ definido, para M em $SL_4(\mathbb{Z}_p)$, por

$$\varphi(M) = B^{-1}MB$$

induz um isomorfismo de W em $Sp_4(\mathbb{Z}_p)$.

Assumindo $p = 3$ e considerando [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Appendix III, Example 1.2]], vale a seguinte proposição.

Proposição 1.12 ((MURASUGI; KURPITA, 2012), Appendix III, Proposition 1.5)

O grupo W , e portanto $Sp_4(\mathbb{Z}_3)$, é gerado por T_1, T_2, T_3 e T_4 e tem as seguintes quatro relações:

- (1) $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$ para $i = 1, 2, 3$.
- (2) $T_i T_j = T_j T_i$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$ e $|i - j| \geq 2$.
- (3) $T_i^3 = I_4$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
- (4) $(T_1 T_2 T_3 T_4)^{10} = I_4$.

Além disso, pode-se mostrar que $(T_1 T_2 T_3 T_4)^5$ gera o centro de $Sp_4(\mathbb{Z}_3)$. Portanto, se N é o fecho normal de $(T_1 T_2 T_3 T_4)^5$, então W/N é isomorfo ao grupo simplético projetivo $Psp_4(\mathbb{Z}_3)$ e tem ordem 25920.

1.3 O grupo de tranças B_n

Nesta seção, trazemos a definição do grupo de tranças, destacando algumas de suas propriedades. Daremos uma definição algébrica do grupo de tranças B_n para qualquer inteiro positivo n .

A definição será em termos de uma apresentação do grupo por geradores e relações como dada (ARTIN, 1947a).

Definição 1.13

Seja $n \geq 1$. O grupo de tranças B_n em n cordas pode ser apresentado (apresentação de Artin) com geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n - 2. \quad (1.2)$$

Geometricamente os cruzamentos clássicos podem ser vistos na Figura 1.

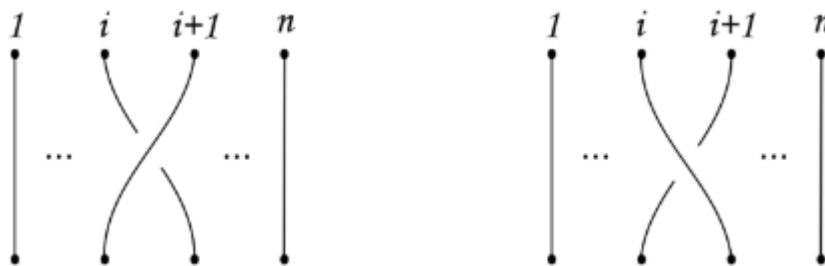


Figura 1 - Cruzamentos clássicos σ_i e σ_i^{-1} .

Existe um homomorfismo $\pi: B_n \rightarrow S_n$ que envia σ_i para a transposição $(i \ i + 1)$, com $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Para $\beta \in B_n$, tem-se

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix},$$

em que j é a função bijetora de permutação e $j(i)$ é a posição final da corda que começou na posição i . Dizemos que $\pi(\beta)$ é a **permutação associada** a β . Neste trabalho, convencionamos que o grupo simétrico atua à direita, de modo que $(\sigma\tau)(i) = \tau(\sigma(i))$ para $\sigma, \tau \in B_n$.

A partir do homomorfismo $\pi: B_n \rightarrow S_n$, define-se o **grupo de tranças puras** como o núcleo dessa projeção, o qual denotamos por P_n , isto é, $P_n = \text{Ker}(\pi)$. Os geradores de Artin desse grupo são as tranças $A_{i,j}$, com $1 \leq i < j \leq n$, que podem ser representadas em termos dos geradores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ de B_n por

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1},$$

que possuem representação geométrica dada pelo desenho da Figura 2.

Em relação à sua estrutura, o grupo de tranças puras pode ser decomposto como produto semidireto iterado de grupos livres. Para tanto, define-se o homomorfismo do esquecimento que possibilita ter essa decomposição. O **homomorfismo do esquecimento** $f_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ é definido retirando-se a n -ésima corda de uma trança pura. Esse homomorfismo de grupos satisfaz $f_n \circ \iota =$

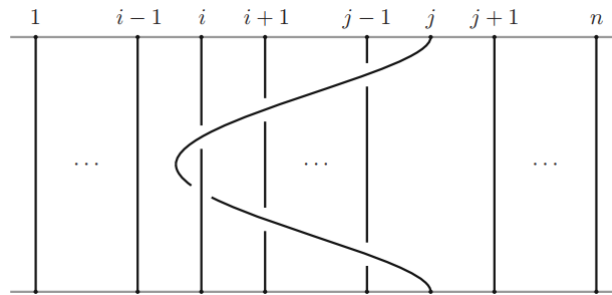


Figura 2 – Trança pura $A_{i,j}$ em P_n [(KASSEL; TURAEV, 2008), Figure 1.10].

$\text{id}_{P_{n-1}}$, onde ι é a inclusão $\iota: P_{n-1} \rightarrow P_n$, que em linguagem geométrica, ι adiciona a uma trança geométrica pura b em $n-1$ cordas uma corda vertical à sua direita completamente desvinculada de b . Disso segue que f_n é sobrejetivo e que ι é injetiva (ver [(KASSEL; TURAEV, 2008), Subsection 1.3.2, p. 19]).

Para $n \geq 2$, seja $U_n = \text{Ker}(f_n: P_n \rightarrow P_{n-1})$. O homomorfismo f_n possui uma seção, P_n é isomorfo ao produto semidireto $U_n \rtimes P_{n-1}$. O grupo U_n é livre em $n-1$ geradores $\{A_{i,n}\}_{i=1,\dots,n-1}$.

Teorema 1.14 ((DEHORNOY et al., 2008), Proposition 2.3)

Para cada $n \geq 2$, o grupo de tranças puras P_n é um produto semidireto de U_n e P_{n-1} .

O **centro** de um grupo G é o subgrupo de G consistindo de todo $g \in G$ tal que $gx = xg$ para cada $x \in G$. O centro de um grupo G é denotado por $Z(G)$.

Um dos resultados interessantes na teoria de tranças é sobre o centro do grupo B_n . No artigo (CHOW, 1948) é provado que o centro de B_n é gerado pelo elemento Δ_n^2 chamado de “full-twist”, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n,$$

em que a trança Δ_n chamada de “half-twist” (ou elemento de Garside) pode ser obtida a partir da trança trivial 1_n por uma meia torção obtida mantendo o topo da trança fixo e virando a fileira das extremidades inferiores em um ângulo de π . O seguinte resultado, originalmente demonstrado em (CHOW, 1948), pode ser encontrado em forma detalhada em (KASSEL; TURAEV, 2008).

Teorema 1.15 ((KASSEL; TURAEV, 2008), Theorem 1.24)

Se $n \geq 3$, então $Z(B_n) = Z(P_n)$ é um grupo cíclico infinito gerado por Δ_n^2 .

Além do centro, outro ponto relevante a ser explorado são os homomorfismos dos grupos de tranças. No estudo dos homomorfismos entre grupos de tranças as contribuições vêm dos trabalhos de (LIN, 1982) e (CASTEL, 2016). O resultado a seguir compila as contribuições dos autores no estudo desses homomorfismos.

Teorema 1.16 ((CASTEL, 2016); (LIN, 1982), Theorem 1.1.1)

Sejam m e n dois números inteiros tais que $n \geq 6$ e $3 \leq m \leq n+1$.

i) Caso onde $m < n$: qualquer homomorfismo φ de B_n em B_m é cíclico.

ii) Caso onde $m = n$: qualquer endomorfismo não cíclico φ de B_n é uma transvecção de automorfismo interno possivelmente pré-composta pela involução Inv : existem $\gamma \in B_{n+1}$, $\epsilon = \pm 1$, e $k \in \mathbb{Z}$ tais que para todo $i \geq n - 1$, temos

$$\varphi(\sigma_i) = \gamma \sigma_i^\epsilon \gamma^{-1} (\Delta_n^2)^k.$$

Tal homomorfismo φ é sempre injetivo e é um automorfismo se, e somente se, $k = 0$.

iii) Caso $m = n + 1$: consideremos o grupo B_n como o subgrupo de B_{n+1} gerado pelos $n - 1$ primeiros geradores de B_{n+1} . Então, qualquer homomorfismo φ de B_n a B_{n+1} é a restrição a B_n de um homomorfismo de B_{n+1} em si, a menos de transvecção. De acordo com o ii), se φ não é cíclico, então existem $\gamma \in B_{n+1}$, $\epsilon = \pm 1$ e $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que para todo $i \leq n - 1$, temos

$$\varphi(\sigma_i) = \gamma \sigma_i^\epsilon (\Delta_n^2)^k \gamma^{-1} (\Delta_n^2)^{2l}.$$

Tal homomorfismo φ é sempre injetivo (mas nunca sobrejetivo).

1.3.1 Grupos quocientes do grupo de tranças

Uma forma interessante de estudar o grupo B_n é através de seus quocientes, que preservam parte de sua estrutura, mas impõem novas relações. Seja $\langle\langle g \rangle\rangle$ o fecho normal de um elemento g em um grupo G . A partir da Definição 1.13, conclui-se que o quociente $B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$ é isomorfo ao grupo simétrico S_n , definido no início da Seção 1.1 (ver [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Chapter 5, Proposition 1.1]). Definimos então $B_n(2) = B_n / \langle\langle \sigma_i^2 \rangle\rangle$. Note que $B_n(2)$ é um grupo finito, enquanto o grupo de tranças B_n é infinito e livre de torção. Surge, portanto, um questionamento natural: os grupos $B_n(k) = B_n / \langle\langle \sigma_i^k \rangle\rangle$ são finitos para todo $k \geq 3$? Coxeter em (COXETER, 1959) respondeu a essa questão utilizando métodos de geometria clássica e revelando uma ligação surpreendente entre grupos de tranças e os sólidos platônicos (ver Figura 3). Ele demonstrou que $B_n(k)$ é finito se, e somente se, $(k - 2)(n - 2) < 4$. Esse resultado é detalhado no Teorema 1.17.

Pode-se codificar numericamente os 5 poliedros regulares, digamos P , por meio de um par de inteiros (n, p) , onde n é o número de arestas do polígono regular que é face de P , e p é o número de faces que se encontram em cada vértice de P . O par inteiro (n, p) é chamado de tipo de P .

A tabela a seguir fornece o tipo de cada um dos sólidos platônicos:

poliedro	tipo
tetraedro	(3, 3)
hexaedro (cubo)	(4, 3)
octaedro	(3, 4)
dodecaedro	(5, 3)
icosaedro	(3, 5)



Figura 3 – Os cinco poliedros regulares [(DINIZ; OCAMPO; SANTOS JÚNIOR, 2024), Figure 1].

Pelo disposto acima, apresentamos a seguir o teorema que caracteriza a finitude do grupo quociente $B_n(k)$. O seguinte resultado, é originalmente demonstrado em (COXETER, 1959), mas pode ser encontrado em forma detalhada em (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Teorema 1.17 ((MURASUGI; KURPITA, 2012), Chapter 5, Theorem 2.1)

Suponha que $p \geq 3$ e $B_n(p)$ seja o grupo quociente derivado dos grupos de n -tranças B_n pela adição de uma e somente uma relação σ_1^p .

Então, o grupo quociente $B_n(p)$ é um grupo finito se e somente se (n, p) corresponde ao tipo de um dos cinco sólidos platônicos (poliedros regulares).

Além disso, a ordem do grupo finito $B_n(p)$ é dada por

$$|B_n(p)| = \left(\frac{f}{2}\right)^{n-1} n!,$$

onde f é o número de faces do sólido platônico do tipo (n, p) .

A tabela a seguir resume os casos em que o quociente $B_n(k)$ é finito, exibindo a ordem dos quocientes e a respectiva descrição da estrutura, onde Q_8 denota o grupo dos quatérnios e $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ é o grupo projetivo simplético de matrizes 4×4 com entradas em \mathbb{Z}_3 .

Par (n, m)	Grupo quociente	Ordem	Descrição da Estrutura
(3, 3)	$B_3(3)$	24	$SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
(3, 4)	$B_3(4)$	96	$SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
(3, 5)	$B_3(5)$	600	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus SL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
(4, 3)	$B_4(3)$	648	$(((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})) \rtimes Q_8 \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$
(5, 3)	$B_5(3)$	155520	Extensão de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ por $PSp_4(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$

Tabela 1 – Quocientes finitos de B_n obtidos por Coxeter.

1.3.2 Subgrupos de congruência do grupo de tranças

A representação de Burau não reduzida $b: B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ é definida por:

$$b(\sigma_i) = I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1},$$

para $i = 1, \dots, n-1$, onde I_k representa a matriz identidade de dimensão k .

Ao especializar $t = -1$, obtemos uma representação simplética (ver [(GAMBAUDO; GHYS, 2005), Proposition 2.1]):

$$\rho: B_n \longrightarrow \begin{cases} Sp_{n-1}(\mathbb{Z}) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ (Sp_n(\mathbb{Z}))_u & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

onde $Sp_n(\mathbb{Z})$ denota o grupo simplético sobre \mathbb{Z} , e $(Sp_n(\mathbb{Z}))_u$ é o subgrupo de $Sp_n(\mathbb{Z})$ que fixa um vetor.

Reduzindo módulo m , obtemos:

$$\rho_m: B_n \longrightarrow \begin{cases} Sp_{n-1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ (Sp_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))_u & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

O núcleo de ρ_m ($m \geq 2$) é chamado de **subgrupo de congruência nível m** de B_n , denotado por $B_n[m]$. Para $m = 1$, $B_n[1]$ é o "Torelli Braid group", usualmente denotado por BI_n .

Arnol'd provou que o subgrupo de congruência nível 2 é o grupo de tranças puras P_n (ARNOL'D, 1968). Utilizando a teoria de **Mapping class groups**, somando o resultado de Arnol'd (ver (ARNOL'D, 1968)) com o de Artin (ver (ARTIN, 1947b)), temos o seguinte teorema, que pode ser encontrado em (BRENDLE, 2018).

Teorema 1.18 ((BRENDLE, 2018), Theorem 4.1)

O grupo de congruência $B_n[2]$ é normalmente gerado por Dehn-twists e assim $B_n[2] = P_n$.

Agora, seja G um grupo. Denota-se por G^2 o subgrupo de G gerado pelos quadrados de todos os elementos. Com essa notação, podemos enunciar a seguinte caracterização do grupo de congruência de tranças de nível 4 dada por Brendle e Margalit em (BRENDLE; MARGALIT, 2018).

Teorema 1.19 ((BRENDLE; MARGALIT, 2018), Proposition 3.1)

Para $n \geq 1$, temos $B_n[4] = P_n^2$.

No que cerne aos geradores do grupo $B_n[m]$, também utilizando mapping class groups, Banerjee e Huxford em (BANERJEE; HUXFORD, 2024) provam para $m \geq 1$ e $n \geq 5$ que o subgrupo de congruência do grupo de tranças B_n associado à representação de Burau $B_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ é gerado por m -ésimas potências de half-twists e pelo grupo de tranças de Torelli. Um **half-twist** é qualquer elemento de B_n que seja conjugado a σ_1 . Observe que os geradores de B_n são todos half-twists. Define-se o subgrupo da m -ésima potência de half-twists B_n^m como o fecho normal de σ_1^m em B_n :

$$B_n^m := \langle \sigma^m : \sigma \in B_n \text{ half-twists} \rangle.$$

Vale aqui uma observação a respeito do termo "half-twist" que tem significados diferentes na teoria de mapping class groups e na teoria de tranças.

Teorema 1.20 ((BANERJEE; HUXFORD, 2024), Theorem A)

Suponha $m \geq 1$, $n \geq 2$, e $m < 6$ se $n = 3, 4$. O subgrupo de congruência de nível m $B_n[m]$ é gerado pelo grupo de tranças de Torelli BI_n e B_n^m :

$$B_n[m] = \langle BI_n, B_n^m \rangle.$$

Brendle, Margalit e Putman provam que BI_n é gerado pelos quadrados das Dehn-twists em torno de curvas que circundam 3 ou 5 pontos (ver [(BRENDLE; MARGALIT; PUTMAN, 2015), Theorem C]). Combinando seus resultados com o Teorema 1.20, obtém-se um conjunto gerador de $B_n[m]$. Em particular, Banerjee e Huxford afirmam que $B_n[m]$ para $n \geq 5$ pode ser normalmente gerado por três elementos, como aponta o próximo resultado.

Corolário 1.21 ((BANERJEE; HUXFORD, 2024), Corollary B)

Suponha $m \geq 1$ e $n \geq 2$. O subgrupo de congruência de nível m $B_n[m]$ é normalmente gerado pelas seguintes tranças:

- σ_1^m , se $n = 2$;
- σ_1^m e $(\sigma_1\sigma_2)^6$, se $n = 3, 4$ e $m < 6$;
- σ_1^m , $(\sigma_1\sigma_2)^6$ e $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}$, se $n \geq 5$.

Bellingeri, Damiani, Ocampo e Stylianakis em (BELLINGERI et al., 2026) estudaram a relação entre os subgrupos de congruência $B_n[m]$ e $\mathcal{N}_n(\sigma_1^m)$ o fecho normal de σ_1^m em B_n , onde σ_1 é o gerador clássico de B_n . Os autores mostram sob quais condições $\mathcal{N}_n(\sigma_1^m)$ tem índice finito em $B_n[m]$ e forneceram geradores explícitos para os quocientes finitos, como aponta o resultado a seguir.

Teorema 1.22 ((BELLINGERI et al., 2026), Theorem 2.1)

Sejam $m, n \geq 3$.

i) O subgrupo de tranças de Coxeter $\mathcal{N}_n(\sigma_1^m)$ tem índice finito no subgrupo de congruência $B_n[m]$ se, e somente se, $(m-2)(n-2) < 4$.

ii) Nos casos finitos $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}$, os quocientes são os seguintes:

a) Para $(n, m) = (3, 3)$ e $(4, 3)$: $B_n[m]/\mathcal{N}_n(\sigma_1^m)$ é trivial.

b) Para $(n, m) = (3, 4)$: $B_3[4]/\mathcal{N}_3(\sigma_1^4) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, gerado por $\overline{[\sigma_1^2, \sigma_2^2]}$.

c) Para $(n, m) = (5, 3)$: $B_5[3]/\mathcal{N}_5(\sigma_1^3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, gerado por $\overline{(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 A \sigma_1^{-2} A^{-1}}$, onde $A = \sigma_4^{-1} \sigma_3^{-2} \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1}$.

d) Para $(n, m) = (3, 5)$: $B_3[5]/\mathcal{N}_3(\sigma_1^5) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, gerado por $\overline{\Delta_3^4}$.

1.4 Grupos de tranças de superfícies

O estudo dos grupos de tranças, iniciado com Emil Artin em 1925 (ARTIN, 1925) para descrever tranças no plano, mostrou-se um conceito profundamente interessante. Uma generalização natural desse conceito surge quando se substitui o plano euclidiano por uma superfície arbitrária. Nesta seção, estabeleceremos as definições, bem como discutiremos apresentações conhecidas para algumas superfícies específicas. Para mais informações sobre os grupos de tranças de superfícies elencamos algumas referências: (BELLINGERI, 2004), (MURASUGI; KURPITA, 2012), (PEREIRO, 2015), (LAMBROPOULOU, 2000), (HANSEN, 1989) e (DINIZ, 2020).

1.4.1 Os grupos de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$ e da esfera finitamente perfurada

$$B_n(M_{0,p+1})$$

Pode-se observar que os geradores de Artin σ_i de B_n também geram $B_n(\mathbb{S}^2)$ e então, por conveniência, usa-se os mesmos símbolos.

Sabe-se que, se uma trança estiver restrita ao interior de um cubo, existem apenas dois tipos de movimentos que podemos aplicar a ela. Porém, além dos movimentos convencionais, para tranças entre duas esferas, também podemos puxar uma corda sobre a esfera interior, como pode ser visto na sequência de diagramas na Figura 4.

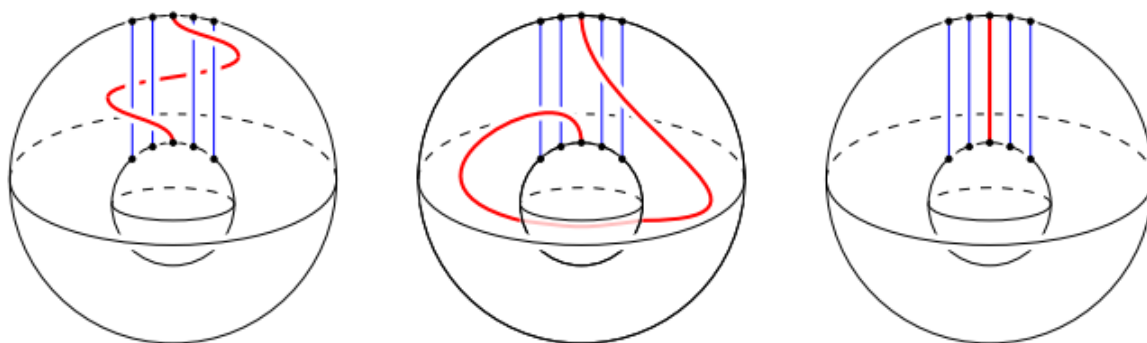


Figura 4 - Movimento.

Este novo tipo de movimento dá uma relação no grupo de tranças $B_n(\mathbb{S}^2)$. Essa nova relação que aparece devido a esse movimento é

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 = 1. \quad (1.3)$$

Portanto, uma apresentação do grupo de tranças $B_n(\mathbb{S}^2)$ tem exatamente os mesmos geradores e relações que a apresentação de B_n , mas com pelo menos uma relação extra da forma em (1.3).

Teorema 1.23 ((FADELL; VAN BUSKIRK, 1961), Section 4)

Uma apresentação de $B_n(\mathbb{S}^2)$ tem geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sujeitos às relações

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1 &= 1.\end{aligned}$$

Diante da apresentação para $B_n(\mathbb{S}^2)$ dada no Teorema 1.23 tem-se

$$\begin{aligned}B_1(\mathbb{S}^2) &= \{1\}, \\ B_2(\mathbb{S}^2) &= \langle \sigma_1 \mid \sigma_1^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2, \\ B_3(\mathbb{S}^2) &= \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4.\end{aligned}$$

Para $n \geq 4$, prova-se que o grupo $B_4(\mathbb{S}^2)$ é infinito (ver [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Chapter 11, Proposition 2.5]).

Existem diferenças entre os grupos $B_n(\mathbb{S}^2)$ e B_n . Provavelmente a distinção mais simples que podemos fazer entre $B_n(\mathbb{S}^2)$ e o grupo de tranças clássico B_n é que o primeiro é finito para $n = 1, 2$ e 3 , enquanto o grupo de tranças clássico é finito apenas para $n = 1$. Entretanto, uma diferença significativa entre os dois grupos de tranças é que B_n pode ser considerado como um subgrupo de B_{n+1} e $B_n(\mathbb{S}^2)$ não pode ser considerado como um subgrupo de $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$, pois a relação $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}^2 \dots \sigma_2 \sigma_1 = 1$ em $B_n(\mathbb{S}^2)$ não precisa ser uma relação em $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$. Por exemplo, $\sigma_1^2 = 1$ em $B_2(\mathbb{S}^2)$, mas $\sigma_1^2 \neq 1$ em $B_3(\mathbb{S}^2)$.

Um subgrupo importante do grupo de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$ é o grupo das tranças puras da esfera, denotado por $P_n(\mathbb{S}^2)$, que é definido como o núcleo do homomorfismo $\pi: B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow S_n$ tal que $\pi(\sigma_i) = s_i = (i \ i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$. Por [(GONÇALVES; GUASCHI, 2004), Theorem 4(i)], prova-se o seguinte isomorfismo:

$$P_n(\mathbb{S}^2) \cong P_{n-3}(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\}) \oplus \mathbb{Z}_2,$$

onde o fator \mathbb{Z}_2 é gerado por Δ_n^2 . Usando a apresentação dada em [(GONÇALVES; GUASCHI, 2005), Proposition 7], $P_{n-3}(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3\})$ admite um conjunto de geradores $X = \{A_{i,j} \mid 4 \leq j \leq n, 1 \leq i < j\}$ consistido de $(n-3)(n+2)/2$ elementos.

É conhecido que o centro do grupo das tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$ é um subgrupo cíclico de ordem dois, gerado pelo quadrado do elemento de Garside Δ_n . Mais precisamente, temos

$$Z(B_n(\mathbb{S}^2)) = \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

como aponta o próximo resultado.

Teorema 1.24 ((GILLETTE; VAN BUSKIRK, 1968))

Se $n \geq 2$, então $Z(B_n(\mathbb{S}^2))$ é o grupo cíclico de ordem 2 gerado pelo full twist Δ_n^2 .

No que tange ao grupo de tranças em n cordas da esfera finitamente perfurada, em 1998 Sofia Lambropoulou ([LAMBROPOULOU, 2000](#)) deu uma apresentação para esse grupo, que denotaremos por $B_n(M_{0,p+1})$, onde $M_{0,p+1} = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ é a esfera finitamente perfurada, $n, p \in \mathbb{Z}$ e $n, p \geq 1$. Anos depois, em 2005, Gonçalves e Guaschi ([GONÇALVES; GUASCHI, 2005](#)) também dão uma apresentação para o grupo $B_n(M_{0,p+1})$. Por questões técnicas, neste texto adotaremos apresentação atribuída por ([LAMBROPOULOU, 2000](#)).

Na apresentação dada por Sofia Lambropoulou ([LAMBROPOULOU, 2000](#)), além dos geradores clássicos de Artin $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n-1}$, o grupo $B_n(M_{0,p+1})$ tem outro tipo de gerador denotado por $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq p+n$, onde

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Teorema 1.25 ([LAMBROPOULOU, 2000](#)), Theorem 3)

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo de tranças da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$ possui a seguinte apresentação:

Geradores: $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \dots, \sigma_{p+n-1}, A_{1,p+1}, A_{2,p+1}, \dots, A_{p,p+1}$.

Relações:

(a) As relações de Artin

$$\begin{aligned} \sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k &= \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}, & \text{se } p+1 \leq k \leq p+n-2 \\ \sigma_k\sigma_i &= \sigma_i\sigma_k, & \text{se } |k-i| > 1. \end{aligned}$$

(b) Para todo $k \geq p+2$ e $1 \leq i \leq p$, $A_{i,p+1}\sigma_k = \sigma_k A_{i,p+1}$.

(c) $A_{i,p+1}\sigma_{p+1}A_{i,p+1}\sigma_{p+1} = \sigma_{p+1}A_{i,p+1}\sigma_{p+1}A_{i,p+1}$, se $1 \leq i \leq p$.

(d) $A_{i,p+1}(\sigma_{p+1}A_{r,p+1}\sigma_{p+1}^{-1}) = (\sigma_{p+1}A_{r,p+1}\sigma_{p+1}^{-1})A_{i,p+1}$, se $1 \leq r < i \leq p$.

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. Considere o conjunto $S = \{p+1, \dots, p+n\}$. Denotemos por S_n o grupo das permutações de S , cuja apresentação é dada por

$$S_n = \left\langle s_{p+1}, \dots, s_{p+n-1} \left| \begin{array}{l} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{para } p+1 \leq i \leq p+n-2 \\ s_j s_r = s_r s_j \quad \text{para } |j-r| \geq 2 \\ s_i^2 = 1, \quad p+1 \leq i \leq p+n-1 \end{array} \right. \right\rangle. \quad (1.4)$$

Seja

$$\pi: B_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow S_n, \quad (1.5)$$

o homomorfismo definido nos geradores do grupo de tranças da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$ no grupo simétrico S_n dado por

$$\pi(\sigma_{p+i}) = s_{p+i} = (p+i, p+i+1) \quad \text{e} \quad \pi(A_{k,p+1}) = 1,$$

para todo $1 \leq i \leq n-1$ e $1 \leq k \leq p$.

Como é sabido, o núcleo do homomorfismo π é precisamente o grupo das tranças puras da esfera finitamente perfurada, isto é,

$$\text{Ker}(\pi) = P_n(M_{0,p+1}).$$

Assim, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow P_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow B_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1. \quad (1.6)$$

De acordo com (LAMBROPOULOU, 2000), pode-se descrever uma apresentação explícita para o grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada.

Teorema 1.26 ((LAMBROPOULOU, 2000), Theorem 1)

Sejam $n, p \in \mathbb{Z}$, com $n, p \geq 1$. O grupo de tranças puras da esfera finitamente perfurada $P_n(M_{0,p+1})$, admite a seguinte apresentação:

Geradores: $A_{i,j}$, com $1 \leq i < j \leq p+n$ e $p+1 \leq j$;

Relações: As relações de Artin para o grupo de tranças puras, isto é,

$$A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} = \begin{cases} A_{r,s}, & \text{se } i < j < r < s \text{ ou } r < i < j < s, \\ A_{i,s} A_{r,s} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r = j < s, \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } r = i < j < s, \\ A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s}^{-1} A_{j,s}^{-1} A_{r,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}, & \text{se } i < r < j < s, \end{cases}$$

onde $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$.

1.4.2 O grupo de tranças do toro $B_n(\mathbb{T}^2)$

Para representar graficamente tranças sobre o toro \mathbb{T}^2 , consideremos primeiramente o produto $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, ou, de forma equivalente, pensemos em um toro menor \mathbb{T}_0^2 situado no interior de um toro maior \mathbb{T}_1^2 . O espaço compreendido entre esses dois toros é denotado por $R \times \mathbb{S}^1$, onde R é um *anel* (ou coroa circular). Em algumas situações, o toro interno \mathbb{T}_0^2 é denominado o *núcleo* de $R \times \mathbb{S}^1$.

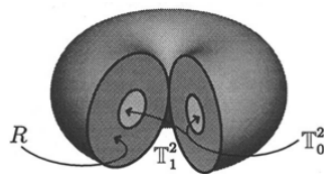


Figura 5 - Visualização do toro [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Figure 5.1].

Nesse contexto, as tranças podem ser vistas como fios contidos em $R \times \mathbb{S}^1$, que conectam os pontos A_1, A_2, \dots, A_n localizados em \mathbb{T}_1^2 aos pontos B_1, B_2, \dots, B_n pertencentes a \mathbb{T}_0^2 .

Ao trabalhar com o grupo de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$, utilizam-se os mesmos geradores do grupo de Artin B_n , acrescidos de certas relações adicionais. No entanto, no caso do grupo de tranças do toro $B_n(\mathbb{T}^2)$, surgem novos geradores além do conjunto clássico $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Denotaremos esses dois novos conjuntos de geradores por τ_1, \dots, τ_n e ρ_1, \dots, ρ_n .

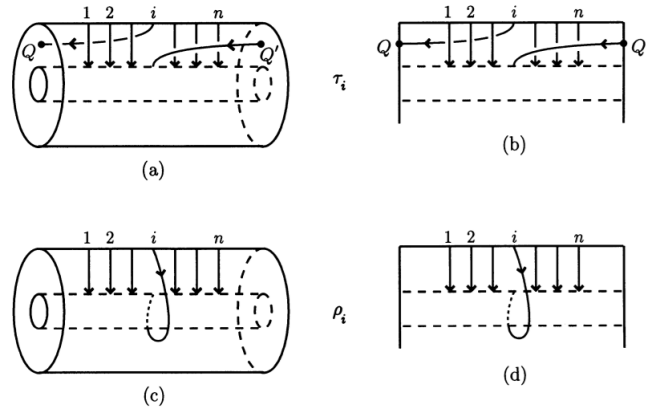


Figura 6 – Geradores no toro [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Figure 5.2].

Teorema 1.27 ((BIRMAN, 1969))

Para o toro \mathbb{T}^2 , o grupo de n -tranças $B_n(\mathbb{T}^2)$ admite a seguinte apresentação completa:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

Relações:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (1.7)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{se } |i-j| \geq 2 \quad \text{e } 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (1.8)$$

$$[\tau_i, \tau_j] = [\rho_i, \rho_j] = 1 \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n \quad (1.9)$$

$$\rho_{i+1} = \sigma_i \rho_i \sigma_i, \quad \tau_{i+1} = \sigma_i^{-1} \tau_i \sigma_i^{-1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.10)$$

$$\sigma_i^{-1} \rho_1 \sigma_i = \rho_1, \quad \sigma_i^{-1} \tau_1 \sigma_i = \tau_1, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (1.11)$$

$$[A_{j,k}, \tau_i] = [A_{j,k}, \rho_i] = 1 \quad \text{se } 1 \leq i < j < k \leq n \quad (1.12)$$

$$A_{i,j} = \rho_j \tau_i^{-1} \rho_j^{-1} \tau_i, \quad B_{i,j} = \rho_i^{-1} \tau_j \rho_i \tau_j^{-1} \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq n \quad (1.13)$$

$$A_{i,j} = (\tau_i^{-1} \tau_j^{-1}) B_{i,j} (\tau_j \tau_i), \quad B_{i,j} = (\rho_i^{-1} \rho_j^{-1}) A_{i,j} (\rho_j \rho_i) \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq n \quad (1.14)$$

$$A_{i,j} = (B_{j-1,j} B_{j-2,j} \dots B_{i+1,j}) B_{i,j} (B_{i+1,j}^{-1} B_{i+2,j}^{-1} \dots B_{j-1,j}^{-1}) \quad \text{se } 1 \leq i < j \leq n \quad (1.15)$$

$$\rho_1^{-1} \tau_1^{-1} \rho_1 \tau_1 = B_{1,n} B_{1,n-1} \dots B_{1,3} B_{1,2}, \quad (1.16)$$

onde para $1 \leq i < j \leq n$, $A_{i,j} = \sigma_j^{-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_j$ e $B_{i,j} = \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \dots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-1} \sigma_j$.

Existe um homomorfismo natural $\pi: B_n(\mathbb{T}^2) \rightarrow S_n$ que associa a cada trança β a uma permutação. O núcleo de π é definido como o **grupo de tranças puras do toro** $P_n(\mathbb{T}^2)$. Uma apresentação para o grupo $P_n(\mathbb{T}^2)$ pode ser vista em (PEREIRO, 2015).

Apresentamos a seguir o resultado sobre o centro dos grupos de tranças do toro, tanto no caso puro quanto no caso geral.

Teorema 1.28 ((BIRMAN, 1974), (PARIS; ROLFSEN, 1999))

Seja $M = \mathbb{T}^2$ o toro. Então $Z(B_n(M)) = Z(P_n(M))$ é o grupo abeliano livre de posto 2 gerado por $(\rho_1 \cdots \rho_n)$ e $(\tau_1 \cdots \tau_n)$.

1.4.3 O grupo de tranças do plano projetivo $B_n(\mathbb{R}P^2)$

Trazemos a seguir o grupo de tranças do plano projetivo $B_n(\mathbb{R}P^2)$, onde tomamos como referência (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Inicialmente, consideremos um ponto A_1 no disco superior de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ e um ponto P na fronteira de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ ao nível $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$. Unimos esses pontos por meio de um arco α_1 . Em seguida, tomemos um segundo ponto P' em $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$ de modo que P e P' sejam simétricos em relação ao centro do disco $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$. Finalmente, ligamos um ponto B_1 , situado no disco inferior de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$, ao ponto P' por um arco α'_1 (ver Figura 7 (a)).

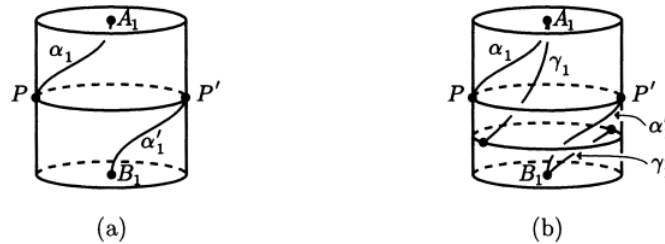


Figura 7 – Construção dos geradores [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Figure 4.1].

Após realizarmos a identificação que define o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, os pontos P e P' passam a representar o mesmo ponto. Assim, após essa identificação, o arco $\rho_1 = \alpha_1 \cup \alpha'_1$ se torna um caminho simples que conecta A_1 a B_1 no espaço $\mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$.

Esse método de construção do gerador ρ_1 pode ser generalizado para obter outros geradores do grupo de n -tranças sobre $\mathbb{R}P^2$. No total, existem n geradores dessa forma, denotados por $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ (ver Figura 8).

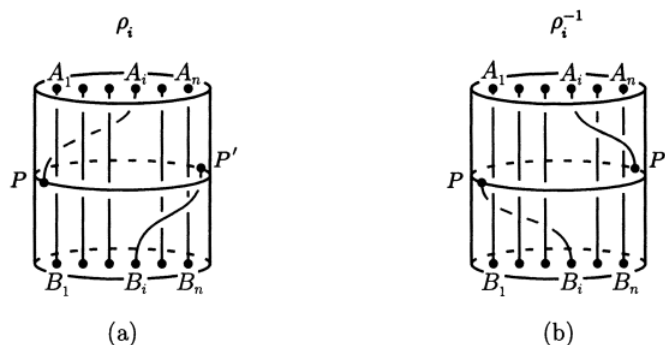


Figura 8 – Geradores ρ_i e ρ_i^{-1} [(MURASUGI; KURPITA, 2012), Figure 4.1].

Sabe-se que o grupo de tranças $B_n(\mathbb{R}P^2)$ não possui outros geradores além dos geradores convencionais $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ e dos n geradores adicionais $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, definidos anteriormente. Como é de se esperar, existem diversas relações entre esses geradores. As relações exatas, e portanto uma apresentação completa para o grupo $B_n(\mathbb{R}P^2)$, são estabelecidas no teorema a seguir.

Teorema 1.29 ((VAN BUSKIRK, 1966))

O grupo de tranças do plano projetivo, $B_n(\mathbb{R}P^2)$, tem a seguinte apresentação:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$.

Relações:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1.17)$$

$$\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \quad \text{para } |i - k| \geq 2 \quad \text{e } i, k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.18)$$

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \quad \text{se } j \neq i, i+1 \quad \text{e } 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.19)$$

$$\rho_i = \sigma_i \rho_{i+1} \sigma_i \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-1, \quad (1.20)$$

$$\rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_i^2 \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-1, \quad (1.21)$$

$$\rho_1^2 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1. \quad (1.22)$$

Teorema 1.30 ((MURASUGI, 1982), Section 6)

Se $n \geq 2$, então $Z(B_n(\mathbb{R}P^2))$ é o grupo cíclico de ordem 2 gerado pelo full twist Δ_n^2 .

1.4.4 O grupo de tranças da garrafa de Klein $B_n(\mathbb{K})$

Para a abordagem do grupo de tranças da garrafa de Klein $B_n(\mathbb{K})$ nesta subseção adotamos o exposto em (PEREIRO, 2015).

Iremos visualizar a garrafa de Klein $M = \mathbb{K}$ sendo o quadradado identificado como na Figura 9.

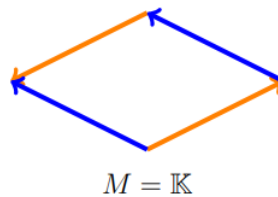


Figura 9 – Visualização da garrafa de Klein [(PEREIRO, 2015), Figura 1.6].

Por meio da sequência exata curta de Fadell-Neuwirth, da indução e do cálculo de apresentações de extensões de grupos (ver [(JOHNSON, 1997), Chapter 10]), Carolina Pereiro em (PEREIRO, 2015) dá uma apresentação para o grupo de tranças pura da garrafa de Klein $P_n(\mathbb{K})$. Os geradores do grupo $P_n(\mathbb{K})$ dados pela autora pode ser visto na Figura 10 a seguir

Aplicando o método de cálculo para extensões de grupo à sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_n(\mathbb{K}) \longrightarrow B_n(\mathbb{K}) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

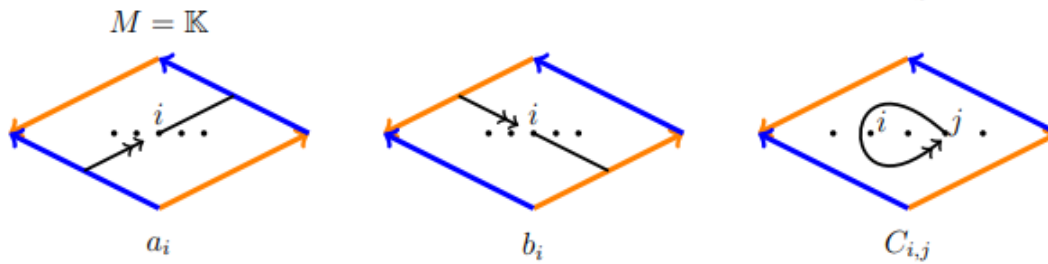


Figura 10 – Geradores de $P_n(\mathbb{K})$ [(PEREIRO, 2015), Figura 1.7].

obtém-se uma apresentação do grupo de tranças $B_n(\mathbb{K})$ a partir da apresentação do grupo $P_n(\mathbb{K})$.

O grupo $B_n(\mathbb{K})$ além dos geradores de Artin $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, possui outros geradores, chamados de geradores de superfície a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n que vêm da apresentação do grupo $P_n(\mathbb{K})$. A partir de relações válidas em $B_n(\mathbb{K})$ pode-se retirar todos $a_j, b_j, j = 2, \dots, n$, do conjunto de geradores, uma vez que

$$\begin{aligned} a_j &= (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_1) a_1 (\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}), \\ b_j &= (\sigma_{j-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) b_1 (\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}). \end{aligned}$$

O próximo resultado traz uma apresentação reduzida para o grupo $B_n(\mathbb{K})$.

Teorema 1.31 ((PEREIRO, 2015), Theorem 1.4.1)

Seja M a garrafa de Klein \mathbb{K} . O n -ésimo grupo de tranças, $B_n(M)$, admite a seguinte apresentação:

Geradores: a, b e $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$,

Relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{se } |i - j| > 1, \quad (1.23)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (1.24)$$

$$a \sigma_j = \sigma_j a, \quad j \geq 2, \quad (1.25)$$

$$b \sigma_j = \sigma_j b, \quad j \geq 2, \quad (1.26)$$

$$b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1, \quad (1.27)$$

$$a(\sigma_1 a \sigma_1) = (\sigma_1 a \sigma_1) a, \quad (1.28)$$

$$b \sigma_1^{-1} b \sigma_1 = \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b, \quad (1.29)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 = b a^{-1} b^{-1} a^{-1}. \quad (1.30)$$

Um fato interessante sobre o grupo $B_n(\mathbb{K})$ é a descrição do seu centro e foi dado em (PEREIRO, 2015), como vemos no resultado a seguir.

Proposição 1.32 ((PEREIRO, 2015), Proposition 2.2.4)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, o centro de $B_n(\mathbb{K})$ é igual a $\langle (b_n \cdots b_1)^2 \rangle$ e é isomorfo a \mathbb{Z} .

1.4.5 Os grupos de tranças de superfícies orientáveis e orientáveis finitamente perfuradas

Nesta seção serão exibidas apresentações dos grupos de tranças associados a superfícies orientáveis e não orientáveis. Consideraremos, em particular, os grupos de tranças sobre uma superfície orientável M_g de gênero $g \geq 1$, denotados por $B_n(M_g)$, e sobre uma superfície orientável $M_{g,p}$ com $g \geq 1$ e $p \geq 1$ furos, denotados por $B_n(M_{g,p})$. As apresentações desses grupos seguem as construções descritas por Paolo Bellingeri em (BELLINGERI, 2004).

A seguir, apresentamos um resultado que descreve explicitamente uma apresentação do grupo de tranças sobre uma superfície orientável M_g de gênero $g \geq 1$.

Teorema 1.33 ((BELLINGERI, 2004), Theorem 1.2)

Sejam $g, n \in \mathbb{Z}$, com $g, n \geq 1$. Então o grupo de n -tranças da superfície M_g , $B_n(M_g)$, admite a apresentação dada por:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g$.

Relações:

(A) As relações de Artin

$$\begin{aligned}\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad \text{se } 1 \leq k \leq n-2, \\ \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, \quad \text{se } |k-i| > 1.\end{aligned}$$

(B) As relações mistas

$$\begin{aligned}\text{(R1)} \quad a_r \sigma_i &= \sigma_i a_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1); \\ b_r \sigma_i &= \sigma_i b_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1); \\ \text{(R2)} \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g; \\ \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g; \\ \text{(R3)} \quad \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \text{(R4)} \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad (1 \leq r \leq g); \\ \text{(TR)} \quad [a_1, b_1^{-1}] \cdots [a_g, b_g^{-1}] &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1,\end{aligned}$$

onde $[a, b] := a^{-1} b^{-1} a b$.

A Figura 11 ilustra uma representação geométrica dos geradores do grupo de tranças associado à superfície orientável M_g .

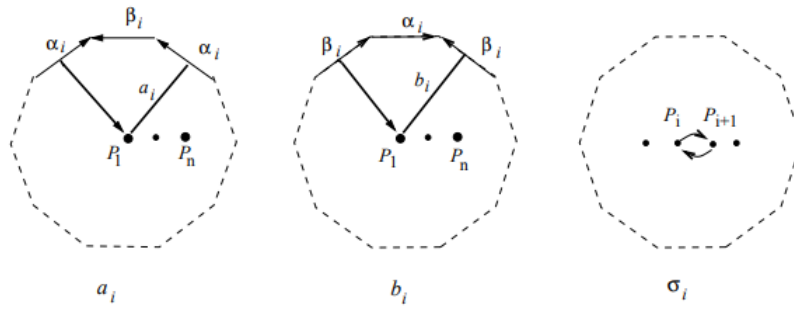


Figura 11 – Geradores como tranças em superfícies orientáveis [(BELLINGERI, 2004), Figure 1].

Prosseguindo, consideramos agora o caso das superfícies orientáveis finitamente perfuradas. Denotaremos por $M_{g,p}$ a superfície orientável de gênero $g \geq 1$ com $p \geq 1$ furos, e por $B_n(M_{g,p})$ o correspondente grupo de tranças.

Teorema 1.34 ((BELLINGERI, 2004), Theorem 1.1)

Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Então o grupo de n -tranças da superfície $M_{g,p}$, $B_n(M_{g,p})$, admite a apresentação dada por:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$.

Relações:

(A) As relações de Artin

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad \text{se } 1 \leq k \leq n-2, \\ \sigma_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_k, \quad \text{se } |k-i| > 1. \end{aligned}$$

(B) As relações mistas

$$\begin{aligned} \text{(R1)} \quad a_r \sigma_i &= \sigma_i a_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1); \\ b_r \sigma_i &= \sigma_i b_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1); \\ \text{(R2)} \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g; \\ \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_r \sigma_1^{-1}, \quad \text{se } 1 \leq r \leq g; \\ \text{(R3)} \quad \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} b_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \text{(R4)} \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} b_r &= b_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad (1 \leq r \leq g); \\ \text{(R5)} \quad z_j \sigma_i &= \sigma_i z_j, \quad (i \neq n-1, j = 1, \dots, p-1); \\ \text{(R6)} \quad \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1, \quad (1 \leq r \leq g, i = 1, \dots, p-1, n > 1); \\ \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 b_r &= b_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1, \quad (1 \leq r \leq g, i = 1, \dots, p-1, n > 1); \end{aligned}$$

$$(R7) \quad \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1 z_l = z_l \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1, \quad (j = 1, \dots, p-1, j < l);$$

$$(R8) \quad \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1^{-1} z_j = z_j \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1^{-1}, \quad (j = 1, \dots, p-1).$$

A Figura 12 apresenta uma representação geométrica dos geradores do grupo de tranças associado à superfície orientável finitamente perfurada $M_{g,p}$.

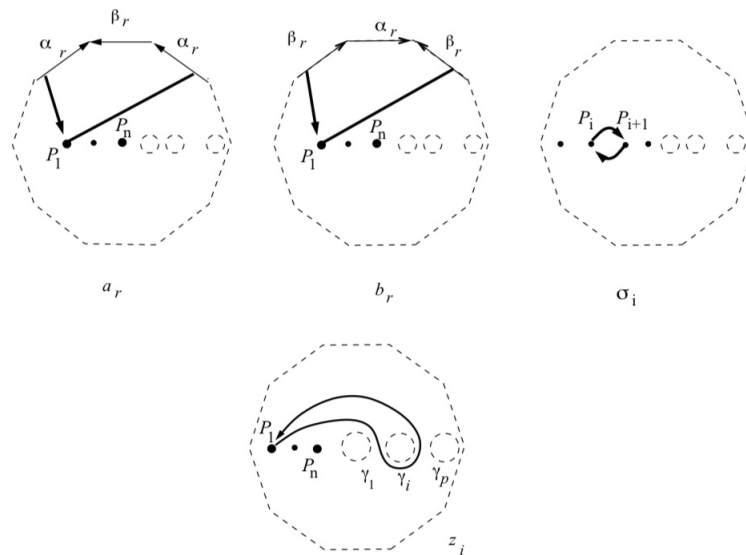


Figura 12 – Geradores como tranças em superfícies orientáveis finitamente perfuradas [(BELLINGERI, 2004), Figure 5].

1.4.6 Os grupos de tranças de superfícies não orientáveis e não orientáveis finitamente perfuradas

Nesta parte, serão introduzidas as definições por apresentação para os grupos de tranças de superfícies não orientáveis. Estudaremos especificamente dois casos: o grupo $B_n(N_g)$ de uma superfície fechada N_g de gênero $g \geq 2$, e o grupo $B_n(N_{g,p})$ de uma superfície com $p \geq 1$ perfurações. As relações que definem esses grupos seguem a construção estabelecida por Paolo Bellingeri em (BELLINGERI, 2004).

A seguir, apresentamos um resultado que fornece explicitamente uma apresentação do grupo de tranças sobre uma superfície não orientável fechada N_g de gênero $g \geq 2$.

Teorema 1.35 ((BELLINGERI, 2004), Theorem 5.3)

Sejam $g, n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 1$ e $g \geq 2$. Então o grupo de n -tranças da superfície N_g , $B_n(N_g)$, admite a apresentação dada por:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g$.

Relações:

(A) As relações de Artin

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad \text{se } |i-j| > 1.\end{aligned}$$

(B) As relações mistas

$$\begin{aligned}\text{(R1)} \quad a_r \sigma_i &= \sigma_i a_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1); \\ \text{(R2)} \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad (1 \leq r \leq g); \\ \text{(R3)} \quad \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r &= a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r); \\ \text{(R4)} \quad z_j \sigma_i &= \sigma_i z_j, \quad (i \neq n-1, j = 1, \dots, p-1); \\ \text{(R5)} \quad a_1 \cdots a_g &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1.\end{aligned}$$

A Figura 13 ilustra uma representação geométrica dos geradores do grupo de tranças associado à superfície não orientável N_g .

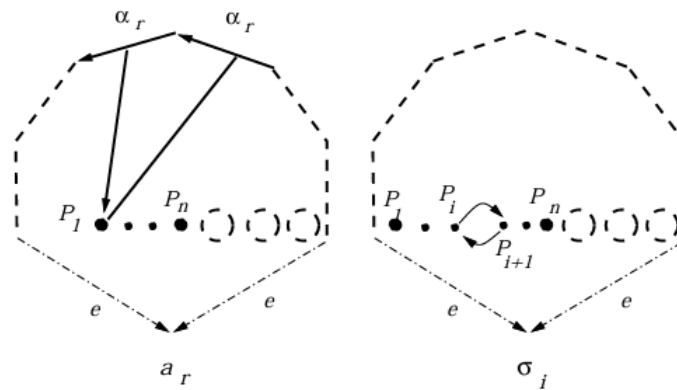


Figura 13 – Geradores como tranças em superfícies não orientáveis [(BELLINGERI, 2004), Figure 9].

Passamos agora ao estudo das superfícies não orientáveis finitamente perfuradas. Seja $N_{g,p}$ a superfície não orientável de gênero $g \geq 2$ com $p \geq 1$ perfurações, e seja $B_n(N_{g,p})$ o seu grupo de tranças. Este grupo estende a definição do grupo de tranças da superfície fechada $B_n(N_g)$, introduzindo interações adicionais entre as tranças e os contornos criados pelas perfurações.

Teorema 1.36 ((BELLINGERI, 2004), Theorem 5.2)

Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. Então o grupo de n -tranças da superfície $N_{g,p}$, $B_n(N_{g,p})$, admite a apresentação dada por:

Geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$.

Relações:

(A) As relações de Artin

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{se } 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \quad \text{se } |i-j| > 1.\end{aligned}$$

(B) As relações mistas

$$(R1) \quad a_r \sigma_i = \sigma_i a_r, \quad (1 \leq r \leq g; i \neq 1);$$

$$(R2) \quad \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1} a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_r \sigma_1^{-1}, \quad (1 \leq r \leq g);$$

$$(R3) \quad \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} a_s \sigma_1, \quad (s < r);$$

$$(R4) \quad z_j \sigma_i = \sigma_i z_j, \quad (i \neq n-1, j = 1, \dots, p-1);$$

$$(R5) \quad \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1 a_r = a_r \sigma_1^{-1} z_i \sigma_1, \quad (1 \leq r \leq g, i = 1, \dots, p-1, n > 1);$$

$$(R6) \quad \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1 z_l = z_l \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1, \quad (j = 1, \dots, p-1, j < l);$$

$$(R7) \quad \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1^{-1} z_j = z_j \sigma_1^{-1} z_j \sigma_1^{-1}, \quad (j = 1, \dots, p-1).$$

A Figura 14 apresenta uma representação geométrica dos geradores do grupo de tranças associado à superfície não orientável finitamente perfurada $N_{g,p}$.

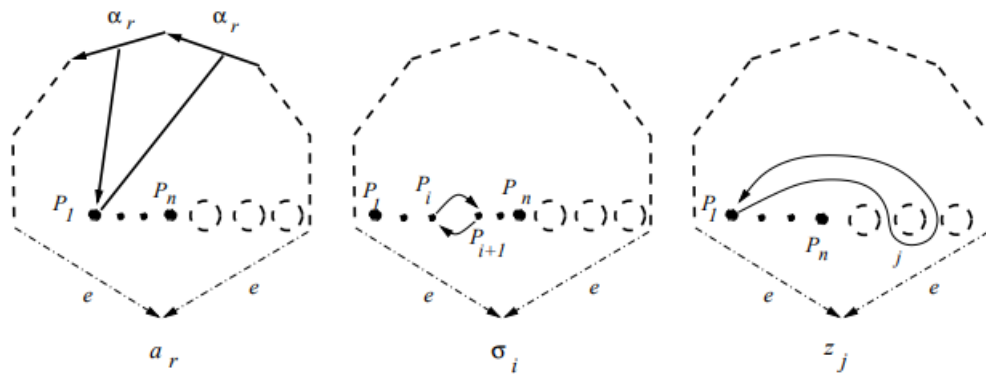


Figura 14 – Geradores como tranças em superfícies não orientáveis finitamente perfuradas [(BELLINGERI, 2004), Figure 9].

1.5 O grupo de tranças emolduradas FB_n

Definiremos, a seguir, o grupo de tranças emolduradas como feito em (KO; SMOLINSKY, 1992).

Definição 1.37

O grupo de tranças emolduradas FB_n é o grupo gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ com relações (1.1), (1.2) e relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j, \quad (1.31)$$

$$\sigma_i t_j = t_{\sigma_i(j)} \sigma_i. \quad (1.32)$$

para $j, k = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n-1$.

Enquanto no grupo de tranças B_n cada trança é composta apenas de cordas que cruzam entre si, no grupo de tranças emolduradas FB_n existe uma informação extra para cada corda: uma rotação específica. Em termos geométricos, um elemento de FB_n pode ser interpretado como uma trança clássica com n cordas, onde cada corda é associada a um número inteiro no topo, chamado de moldura.

Seja S_n o grupo simétrico agindo por permutação em $\{1, \dots, n\}$. Seja $\pi: B_n \rightarrow S_n$ a projeção canônica que envia σ_i para a transposição $(i \ i+1)$. O grupo B_n age em $\{1, \dots, n\}$ através de π , $\sigma(i) = \pi(\sigma)(i)$ para a $\sigma \in B_n$. O grupo FB_n é um produto semidireto $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, onde a ação de B_n em \mathbb{Z}^n é dado por permutação nos índices: $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r_{\sigma(1)}, r_{\sigma(2)}, \dots, r_{\sigma(n)})$. Qualquer palavra em FB_n , por construção, se divide na parte “emoldurada” e na parte da “trança”, ou seja, pode ser escrito na forma

$$t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_n^{r_n} \cdot \alpha, \text{ onde } r_i \in \mathbb{Z}, \alpha \in B_n.$$

O produto e o inverso nesta notação são dados como segue usando a ação de B_n em \mathbb{Z}^n :

$$(t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_n^{r_n} \cdot \alpha)(t_1^{s_1} t_2^{s_2} \cdots t_n^{s_n} \cdot \beta) = t_1^{r_1+s_{\alpha(1)}} t_2^{r_2+s_{\alpha(2)}} \cdots t_n^{r_n+s_{\alpha(n)}} \cdot \alpha\beta$$

e

$$(t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_n^{r_n} \cdot \alpha)^{-1} = t_1^{-r_{\alpha^{-1}(1)}} t_2^{-r_{\alpha^{-1}(2)}} \cdots t_n^{-r_{\alpha^{-1}(n)}} \cdot \alpha^{-1}.$$

Para ilustração do produto de tranças emolduradas, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.38

Considere as tranças emolduradas $t_1^{r_1} t_2^{r_2} t_3^{r_3} \cdot \sigma_1 \sigma_2$ e $t_1^{s_1} t_2^{s_2} t_3^{s_3} \cdot \sigma_1 \sigma_2^2$. Desta forma, temos o produto

$$\begin{aligned} (t_1^{r_1} t_2^{r_2} t_3^{r_3} \cdot \sigma_1 \sigma_2)(t_1^{s_1} t_2^{s_2} t_3^{s_3} \cdot \sigma_1 \sigma_2^2) &= t_1^{r_1+s_{\sigma_1 \sigma_2(1)}} t_2^{r_2+s_{\sigma_1 \sigma_2(2)}} t_3^{r_3+s_{\sigma_1 \sigma_2(3)}} \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \\ &= t_1^{r_1+s_{\sigma_2(2)}} t_2^{r_2+s_{\sigma_2(1)}} t_3^{r_3+s_{\sigma_2(3)}} \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \\ &= t_1^{r_1+s_3} t_2^{r_2+s_1} t_3^{r_3+s_2} \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Geometricamente,

As tranças puras emolduradas são introduzidas por (NATOV, 1997) que discute como as tranças puras emolduradas (uma variação das tranças puras com informações adicionais de emolduramento) estão ligadas à construção e compreensão de 3-variedades, especialmente no contexto da classificação e manipulação dessas estruturas em geometria e topologia.

O homomorfismo de grupo $\pi: B_n \rightarrow S_n$ pode ser estendido para um homomorfismo de grupo $\hat{\pi}: FB_n \rightarrow S_n$ enviando t_j para a identidade. Chamamos o núcleo de $\hat{\pi}$ de grupo de **tranças puras emolduradas** e denotamos por FP_n .

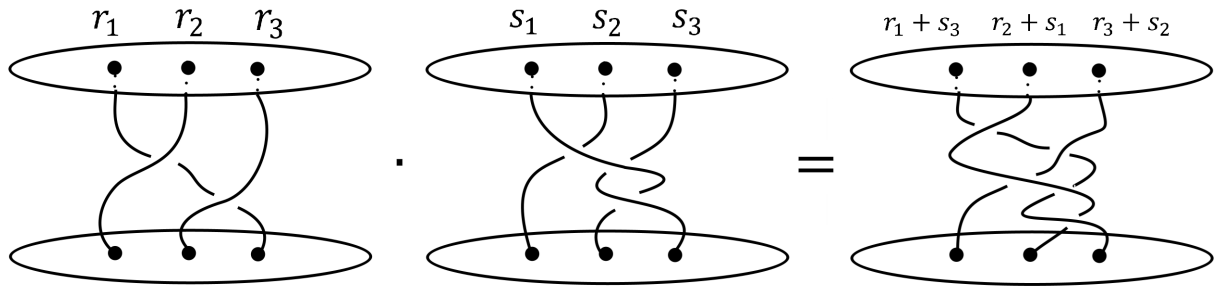


Figura 15 - Produto de tranças emolduradas.

O grupo de tranças puras emolduradas FP_n é o grupo de tranças puras onde as permutações de tranças são acompanhadas por um índice inteiro para cada corda, que pode ser visto como uma torção na corda, ou seja, FP_n é uma extensão de P_n por \mathbb{Z}^n .

Em estrutura, (NATOV, 1997) define que o grupo de tranças puras emolduradas é descrito como $FP_n = \mathbb{Z}^n \oplus P_n$, onde cada elemento de FP_n é dado por $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta$, com $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, o vetor que representa a torção em cada uma das cordas da trança pura, e $\beta \in P_n$.

Na Definição 1.37 é dada uma apresentação em termos de geradores e relações para FB_n . Porém, por comodidade, para a descrição do subgrupo comutador de FB_n na Seção 2.6, adotaremos a apresentação dada na Proposição 1 em (JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2007), que será descrita a seguir.

Observe agora que, em FB_n , os t_i podem ser deduzidos de t_1 , definido por exemplo:

$$t_i := \sigma_{i-1} \dots \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{i-1}^{-1}.$$

Então temos o seguinte.

Proposição 1.39 ((JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2007), Proposition 1)

O grupo FB_n tem uma apresentação reduzida com geradores $t_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \text{ para } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \\ \sigma_i t_1 &= t_1 \sigma_i, \text{ para } i > 1, \\ \sigma_i \dots \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \dots \sigma_1^{-1} t_1 \sigma_1 \dots \sigma_i, \text{ para todo } i, \\ t_1 \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} &= \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} t_1. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Contribuições para o grupo de tranças emolduradas FB_n

Neste capítulo, apresentamos contribuições relevantes para o estudo da estrutura do grupo de tranças emolduradas. Exploramos propriedades algébricas fundamentais, relações estruturais e aspectos específicos desse grupo. As análises desenvolvidas se baseiam em abordagens clássicas e recentes, com o objetivo de fornecer novas compreensões e consolidar resultados na literatura.

2.1 Homomorfismo do esquecimento

No estudo do grupo de tranças emolduradas também se pode falar sobre o homomorfismo esquecimento para o grupo de tranças puras emolduradas, assim como é feito no caso dos grupos de tranças puras de Artin.

Para $n \geq 2$, o homomorfismo do esquecimento no caso emoldurado $\varphi_n: FP_n \rightarrow FP_{n-1}$ é definido como a aplicação que envia uma trança pura emoldurada em n cordas a uma trança pura emoldurada em $n - 1$ cordas obtida pela remoção da n -ésima corda juntamente com a sua moldura.

Assim como no caso clássico, podemos decompor o grupo de tranças puras emolduradas FP_n como um produto semidireto. Para observarmos essa decomposição, trazemos a seguir um lema que nos ajudará nessa compreensão.

Lema 2.1

Sejam $\psi_1: A \rightarrow C$ e $\psi_2: B \rightarrow D$ homomorfismos de grupos. Seja o homomorfismo $\psi: A \oplus B \rightarrow C \oplus D$ definido por $\psi(a, b) = (\psi_1(a), \psi_2(b))$. Então o núcleo de ψ é dado por $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\psi_1) \oplus \text{Ker}(\psi_2)$.

Demonstração. Note que

$$\text{Ker}(\psi) = \{(a, b) \in A \oplus B \mid \psi(a, b) = (e_C, e_D)\}.$$

Porém, por definição de ψ , temos $\psi(a, b) = (\psi_1(a), \psi_2(b))$. Assim, $\psi(a, b) = (e_C, e_D)$ se, e só se, $\psi_1(a) = e_C$ e $\psi_2(b) = e_D$, ou seja

$$\text{Ker}(\psi) = \{(a, b) \in A \oplus B \mid \psi_1(a) = e_C \text{ e } \psi_2(b) = e_D\}.$$

Por outro lado, $\text{Ker}(\psi_1) = \{a \in A \mid \psi_1(a) = e_C\}$ e $\text{Ker}(\psi_2) = \{b \in B \mid \psi_2(b) = e_D\}$. Pela definição dos núcleos de ψ_1 e ψ_2 segue que $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\psi_1) \oplus \text{Ker}(\psi_2)$. \square

O próximo teorema estabelece uma decomposição do grupo de tranças emolduradas como um produto semidireto, elucidando a relação entre o homomorfismo do esquecimento e a estrutura interna deste grupo.

Teorema 2.2

Seja $n \geq 2$. O grupo $FP_n = \mathbb{Z}^n \oplus P_n$ é visto como o produto semidireto

$$FP_n = (\mathbb{Z} \oplus U_n) \rtimes FP_{n-1},$$

onde U_n é o grupo livre com $n - 1$ geradores $\{A_{i,n}\}_{i=1,2,\dots,n-1}$.

Demonstração. Seja o homomorfismo $\zeta_n: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ definido por $\zeta_n(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Note que

$$\text{Ker}(\zeta_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \zeta_n(a_1, \dots, a_n) = 0 \in \mathbb{Z}^{n-1}\} = \{(0, 0, \dots, 0, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Seja ainda o homomorfismo $\varphi_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ que envia cada trança pura de n cordas para a sua restrição às primeiras $n - 1$ cordas. Pelo Teorema 1.14 temos que o núcleo de φ_n é isomorfo ao grupo livre U_n .

Definindo $\varphi = (\zeta_n, \varphi_n): \mathbb{Z}^n \oplus P_n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1}$, pelo Lema 2.1, o núcleo de $\varphi = (\zeta_n, \varphi_n)$ é dado por

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\zeta_n) \oplus \text{Ker}(\varphi_n) \cong \mathbb{Z} \oplus U_n.$$

Como ζ_n e φ_n são sobrejetivos, então φ também é. Portanto, obtemos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus U_n \longrightarrow \mathbb{Z}^n \oplus P_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1} \longrightarrow 1.$$

Para provar que a sequência cinde, construiremos uma seção $s: \mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}^n \oplus P_n$ tal que $\varphi \circ s = \text{Id}_{\mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1}}$.

O homomorfismo $\zeta_n: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$ possui uma seção dada por $s_1(a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$, pois $\zeta_n \circ s_1(a_1, \dots, a_{n-1}) = \zeta_n(s_1(a_1, \dots, a_{n-1})) = \zeta_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = (a_1, \dots, a_{n-1})$, ou seja, $\zeta_n \circ s_1 = \text{Id}_{\mathbb{Z}^{n-1}}$. Por outro lado, o homomorfismo $\varphi_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ também possui uma seção,

pois tomando a inclusão $s_2: P_{n-1} \longrightarrow P_n$, que adiciona a uma trança geométrica pura b com $n-1$ cordas uma corda vertical à sua direita, não entrelaçada com b , temos $\varphi_n \circ s_2 = \text{Id}_{P_{n-1}}$.

Assim, definimos uma seção s de φ da seguinte forma

$$s(a, \beta) = (s_1(a), s_2(\beta)) = ((a_1, \dots, a_{n-1}, 0), s_2(\beta)),$$

para $(a, \beta) \in \mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1}$. Note que s é um homomorfismo, pois s_1 e s_2 são e, além disso, podemos ver que $\varphi(s(a, \beta)) = (\zeta_n(s_1(a)), \varphi_n(s_2(\beta))) = (a, \beta)$, isto é, $\varphi \circ s = \text{Id}_{\mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1}}$. A existência dessa seção implica que a sequência exata curta cinde e que

$$FP_n = (\mathbb{Z} \oplus U_n) \rtimes (\mathbb{Z}^{n-1} \oplus P_{n-1}) = (\mathbb{Z} \oplus U_n) \rtimes FP_{n-1}.$$

□

2.2 O centro de FB_n

Nesta seção, exploramos o conceito de centro do grupo de tranças emolduradas, tomando como ponto de partida o estudo do centro dos grupos clássicos de tranças, B_n , e de tranças puras, P_n .

Lema 2.3

Dada uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 1,$$

então $\rho(Z(B)) \subset Z(C)$.

Demonstração. Seja $h \in \rho(Z(B))$, então existe $g \in Z(B)$ tal que $\rho(g) = h$. Queremos mostrar que $h \in Z(C)$, ou seja, $hy = yh$ para todo $y \in C$. Como ρ é epimorfismo, existe $x \in B$ tal que $\rho(x) = y$. Assim,

$$hy = \rho(g)\rho(x) = \rho(gx) = \rho(xg) = \rho(x)\rho(g) = yh.$$

Portanto, concluímos que $h \in Z(C)$. □

O resultado a seguir nos permite determinar o centro do grupo de tranças puras emolduradas a partir do caso clássico.

Proposição 2.4

Se $n \geq 3$, então $Z(FP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n.$$

Demonstração. Do Teorema 1.15, tem-se que $Z(P_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$ e, além disso, $FP_n = \mathbb{Z}^n \oplus P_n$, então

$$Z(FP_n) = Z(\mathbb{Z}^n \oplus P_n) = Z(\mathbb{Z}^n) \oplus Z(P_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle.$$

□

O próximo teorema fornece uma descrição precisa do centro do grupo de tranças emolduradas, evidenciando suas características distintivas e as relações com os elementos centrais do grupo clássico.

Teorema 2.5

Se $n \geq 3$, então $Z(FB_n) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow FP_n \longrightarrow FB_n \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

É bem conhecido que, para $n \geq 3$, temos $Z(S_n) = \{1\}$. Pelo Lema 2.3, segue que $\pi(Z(FB_n)) \subset Z(S_n)$, logo $Z(FB_n) \subset FP_n$ e, portanto, $Z(FB_n) \subset Z(FP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$.

Seja $z \in Z(FB_n)$. Como $Z(FB_n) \subset Z(FP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$, temos

$$z = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} (\Delta_n^2)^y.$$

Note que t_i , $i = 1, \dots, n$, e σ_k , para $k = 1, \dots, n-1$, comutam com Δ_n^2 . De fato, temos

$$\Delta_n^2 t_i = \Delta_n^2 t_i (\Delta_n^2)^{-1} \Delta_n^2 = t_{\Delta_n^2(i)} \Delta_n^2 = t_i \Delta_n^2,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, já que Δ_n^2 é uma trança pura e a permutação associada é trivial. Além disso, pelo Teorema 1.15 segue que

$$\sigma_j \Delta_n^2 = \Delta_n^2 \sigma_j,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n-1$. Portanto, $\Delta_n^2 \in Z(FB_n)$.

Por outro lado, analisemos quais elementos de FB_n comutam com o elemento $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$. Como $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$, temos que

$$\sigma_i (t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i},$$

e, para que a igualdade

$$t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i} = t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}$$

valha nos inteiros, é necessário que $x_i = x_{i+1}$. Como isso vale para todo i , concluímos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Portanto, $Z(FB_n)$ é o grupo abeliano livre de posto 2 gerado por $\theta = t_1 \cdots t_n$ e Δ_n^2 . □

Para $n = 3$ é possível estabelecer uma relação entre o **grupo modular** $PSL_2(\mathbb{Z})$ e o grupo de tranças emolduradas FB_n . Vale lembrar que o grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$ é o grupo quociente $SL_2(\mathbb{Z})/\langle -I_2 \rangle$, onde $SL_2(\mathbb{Z})$ é o grupo das matrizes $2 \oplus 2$ com entradas em \mathbb{Z} e determinante 1, e I_2 é a matriz unitária. Para $n = 3$, o resultado a seguir garante que ocorre um isomorfismo entre o grupo quociente $B_3/Z(B_3)$ e o grupo $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.6 ((KASSEL; TURAEV, 2008), Appendix A)

Os grupos $B_3/Z(B_3)$ e $PSL_2(\mathbb{Z})$ são isomorfos.

Considerando o exposto acima, o seguinte lema será uma ferramenta que utilizaremos para determinar o quociente $FB_n/Z(FB_n)$. Daremos uma prova do resultado a seguir, pois não encontramos na literatura uma demonstração explícita do mesmo.

Lema 2.7

Sejam G_1 e G_2 grupos, e sejam $N_1 \trianglelefteq G_1$ e $N_2 \trianglelefteq G_2$. Se

$$G = G_1 \times G_2$$

e $Z(G) = N_1 \oplus N_2$, então

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2},$$

onde a ação de G_2/N_2 sobre G_1/N_1 é induzida a partir da ação de G_2 sobre G_1 no produto semidireto $G = G_1 \times G_2$.

Demonstração. Sejam $(g_1, g_2) \in G$ e $(n_1, n_2) \in Z(G)$. Defina $\phi: \frac{G}{Z(G)} \longrightarrow \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}$ por $\phi((g_1, g_2)Z(G)) = (g_1N_1, g_2N_2)$.

Inicialmente, devemos mostrar que ϕ está bem definida. De fato, sejam $(g_1, g_2)Z(G), (g'_1, g'_2)Z(G) \in G/Z(G)$ tais que $(g_1, g_2)Z(G) = (g'_1, g'_2)Z(G)$. Se $(g_1, g_2)Z(G) = (g'_1, g'_2)Z(G)$, então existe $(n_1, n_2) \in Z(G) = N_1 \oplus N_2$ tal que

$$(g'_1, g'_2) = (g_1, g_2)(n_1, n_2) = (g_1\varphi(g_2)(n_1), g_2n_2),$$

com $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$. Além disso, como $(1, g_2) \in G$ e $(n_1, 1) \in Z(G)$, temos $(1, g_2)(n_1, 1) = (n_1, 1)(1, g_2)$, o que implica $(\varphi(g_2)(n_1), g_2) = (n_1, g_2)$, ou seja, $\varphi(g_2)(n_1) = n_1$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \phi((g'_1, g'_2)Z(G)) &= \phi((g_1\varphi(g_2)(n_1), g_2n_2)Z(G)) \\ &= (g_1\varphi(g_2)(n_1)N_1, g_2n_2N_2) \\ &= (g_1n_1N_1, g_2n_2N_2) \\ &= (g_1N_1, g_2N_2) \\ &= \phi((g_1, g_2)Z(G)) \end{aligned}$$

e $\phi((g_1, g_2)Z(G)) = (g_1N_1, g_2N_2)$. Logo, temos que ϕ está bem definida.

Agora, iremos verificar que ϕ é um homomorfismo. Dados $(g_1, g_2), (g'_1, g'_2) \in G$, temos $(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1\varphi(g_2)(g'_1), g_2g'_2)$. Então

$$\phi((g_1, g_2)(g'_1, g'_2)Z(G)) = (g_1\varphi(g_2)(g'_1)N_1, g_2g'_2N_2).$$

Por outro lado, no produto semidireto $(G_1/N_1) \rtimes (G_2/N_2)$, com a ação induzida $\bar{\varphi}: G_2/N_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1/N_1)$ definida por $\bar{\varphi}(g_2N_2)(g_1N_1) = \varphi(g_2)(g_1)N_1$, temos

$$\begin{aligned} \phi((g_1, g_2)Z(G)) \cdot \phi((g'_1, g'_2)Z(G)) &= (g_1N_1, g_2N_2) \cdot (g'_1N_1, g'_2N_2) \\ &= (g_1\bar{\varphi}(g_2N_2)(g'_1N_1), g_2g'_2N_2) \\ &= (g_1\varphi(g_2)(g'_1)N_1, g_2g'_2N_2). \end{aligned}$$

Desta forma, ϕ é um homomorfismo.

Para a injetividade, suponha que $\phi((g_1, g_2)Z(G)) = (N_1, N_2)$, ou seja, $g_1 \in N_1$ e $g_2 \in N_2$. Então, temos que $(g_1, g_2) \in N_1 \oplus N_2 = Z(G)$. Logo, $(g_1, g_2)Z(G) = Z(G)$, isto é, o representante está na classe do neutro de $G/Z(G)$. Portanto, o núcleo de ϕ é trivial, implicando na injetividade de ϕ .

Finalizando a nossa prova, vamos verificar que ϕ é sobrejetiva. Com efeito, para qualquer par $(g_1N_1, g_2N_2) \in (G_1/N_1) \rtimes (G_2/N_2)$, existe $(g_1, g_2) \in G$ tal que

$$\phi((g_1, g_2)Z(G)) = (g_1N_1, g_2N_2),$$

então ϕ é sobrejetiva e estamos finalizados. \square

Finalmente, no resultado a seguir provamos que o quociente $FB_n/Z(FB_n)$ é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{Z}^{n-1} \rtimes (B_n/Z(B_n))$.

Teorema 2.8

Seja FB_n o grupo das tranças emolduradas com n fios. Então

$$FB_n/Z(FB_n) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes (B_n/Z(B_n)).$$

Em particular, para $n = 3$, temos

$$FB_3/Z(FB_3) \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes PSL_2(\mathbb{Z}).$$

Demonstração. Recordemos que \mathbb{Z}^n é gerado pelo conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$. Pelo Teorema 2.5, temos

$$Z(FB_n) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle,$$

onde $\theta = t_1 \cdots t_n$. Como $FB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, com $\mathbb{Z}[\theta] \trianglelefteq \mathbb{Z}^n$ e $\langle \Delta_n^2 \rangle \trianglelefteq B_n$, segue do Lema 2.7 que

$$\frac{FB_n}{Z(FB_n)} \cong \frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}[\theta]} \rtimes \frac{B_n}{\langle \Delta_n^2 \rangle} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \frac{B_n}{\langle \Delta_n^2 \rangle}.$$

Para o caso particular $n = 3$, obtemos

$$\frac{FB_3}{Z(FB_3)} \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \frac{B_3}{\langle \Delta_3^2 \rangle}.$$

Pelo Teorema 2.6, temos que

$$B_3/Z(B_3) \cong PSL_2(\mathbb{Z}),$$

e, portanto,

$$FB_3/Z(FB_3) \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes PSL_2(\mathbb{Z}).$$

□

2.3 Homomorfismos de FB_n em B_n

A partir das apresentações de B_n e FB_n vemos que existe um homomorfismo $\iota: B_n \hookrightarrow FB_n$ tal que $\iota(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Nesta seção, serão explorados os homomorfismos do grupo de tranças emolduradas FB_n no grupo de tranças B_n .

No próximo resultado, com auxílio do Teorema 1.16, definiremos e analisaremos os possíveis homomorfismos de FB_n em B_n . Lembramos que a definição de homomorfismos conjugados encontra-se na Seção 1.1.

Teorema 2.9

Sejam $n \geq 6$ e $\psi: FB_n \rightarrow B_n$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, existem $\epsilon = \pm 1$ e $k \in \mathbb{Z}$ tais que $\psi(\sigma_i) = \sigma_i^\epsilon (\Delta_n^2)^k$ e $\psi(t_j) = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Seja o homomorfismo $\iota: B_n \rightarrow FB_n$ tal que $\iota(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Suponha que $\varphi = \psi \circ \iota: B_n \rightarrow B_n$ é um homomorfismo. Então pelo Teorema 1.16 tem-se $\varphi(\sigma_i) = \sigma_i^\epsilon (\Delta_n^2)^k$ para $\epsilon = \pm 1$ e $k \in \mathbb{Z}$. Desta forma, $\psi(\sigma_i) = \psi(\iota(\sigma_i)) = \varphi(\sigma_i)$, ou seja, $\psi(\sigma_i) = \sigma_i^\epsilon (\Delta_n^2)^k$. A partir da relação $t_1 = \sigma_i t_1 \sigma_i^{-1}$, $i > 1$, tem-se

$$\psi(t_1) = \psi(\sigma_i t_1 \sigma_i^{-1}) = \sigma_i^\epsilon (\Delta_n^2)^k \psi(t_1) \sigma_i^{-\epsilon} (\Delta_n^2)^{-k}.$$

O elemento Δ_n^2 é central em B_n , então $\psi(t_1)$ e $\sigma_i^{-\epsilon}$ comutam com Δ_n^2 e, por isso, $\psi(t_1) = \sigma_i^\epsilon \psi(t_1) \sigma_i^{-\epsilon}$. Para $\epsilon = 1$, segue que $\psi(t_1) = \sigma_i \psi(t_1) \sigma_i^{-1}$, isto é, $\psi(t_1)$ está no centralizador de $\langle \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ em B_n , que é $\langle \text{Id} \rangle = \{\text{Id}\}$, portanto, $\psi(t_1) = 1$. Se $\psi(t_j) = 1$, então $\psi(t_{j+1}) = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$. De fato, para $j = 1$, pelas relações definidoras de FB_n , tem-se

$$\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1.$$

Aplicando o homomorfismo ψ e usando a propriedade multiplicativa, obtemos

$$\psi(\sigma_1) \psi(t_1) = \psi(t_2) \psi(\sigma_1),$$

o que implica

$$\psi(t_2) = \psi(\sigma_1) \psi(t_1) \psi(\sigma_1)^{-1}.$$

Como $\psi(t_1) = 1$, segue que $\psi(t_2) = 1$.

Suponha, por hipótese de indução, que $\psi(t_l) = 1$ para algum $2 \leq l < n$. Então

$$\psi(t_{l+1}) = \psi(\sigma_l) \psi(t_l) \psi(\sigma_l)^{-1} = \psi(\sigma_l) 1 \psi(\sigma_l)^{-1} = 1.$$

Portanto, $\psi(t_j) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

□

2.4 Residualmente finito e livre de torção

Nesta seção, abordaremos propriedades importantes do grupo de tranças emolduradas FB_n . O primeiro resultado que será demonstrado afirma que esse grupo é residualmente finito e Hopfiano. A seguir, trazemos outro resultado que ratifica que FB_n é livre de torção.

Um grupo G é dito **residualmente finito** se para cada $\beta \in G - \{1\}$, existe um homomorfismo f para um grupo finito tal que $f(\beta) \neq 1$. Um grupo é **Hopfiano** se todos os seus endomorfismos sobrejetivos são injetivos.

Teorema 2.10

O grupo FB_n de tranças emolduradas é residualmente finito e Hopfiano.

Demonstração. Por ((KASSEL; TURAEV, 2008), Corollary 1.21) tem-se que B_n é residualmente finito e, além disso, \mathbb{Z}^n também é residualmente finito. Um produto semidireto de dois grupos residualmente finitos finitamente gerados é residualmente finito (MALCEV, 1940). Então, como $FB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, segue que FB_n é residualmente finito.

Ademais, pelo Teorema 4.10 em (LYNDON, 1977), um grupo residualmente finito e finitamente gerado é Hopfiano. Assim, tem-se que FB_n é Hopfiano. □

O teorema a seguir estabelece que o grupo FB_n é livre de torção. Relembrando, um grupo G é dito ser **livre de torção** (ou sem elementos de torção) se nenhum elemento não trivial de G tem ordem finita. Em outras palavras, para todo $g \in G$ que não seja o elemento trivial, a equação $g^n = 1$ não possui solução não trivial.

Teorema 2.11

O grupo FB_n de tranças emolduradas é livre de torção.

Demonstração. Pela Proposição 1 em (KO; SMOLINSKY, 1992), o grupo FB_n age livremente em um espaço localmente contrátil de dimensão finita. Desta forma, pelo Teorema 16.1 em (HU, 1959), segue que FB_n não tem elemento de ordem finita além do trivial. □

2.5 Série central inferior de FB_n

No trabalho (BARDAKOV; BELLINGERI, 2010) é estudado a série central inferior nos grupos de Artin-Tits e nos grupos de tranças de superfícies. Especificamente, na Proposição 3 em (BARDAKOV; BELLINGERI, 2010), é provado que $\Gamma_1(B_n)/\Gamma_2(B_n) \cong \mathbb{Z}$ e $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$ para $n \geq 3$. Motivados pelo trabalho supracitado, nesta seção fazemos um estudo da série central inferior do grupo FB_n .

Proposição 2.12

Seja FB_2 o grupo de tranças emolduradas com $n = 2$. Então FB_2 é isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$.

Demonstração. A partir da Definição 1.37, temos que $FB_2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes B_2$. Mas $B_2 = \langle \sigma_1 \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$. Portanto, $FB_2 \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}$. \square

No resultado a seguir, será apresentado o abelianizado do grupo FB_n . Vale lembrar aqui que o abelianizado de um grupo G é definido pelo grupo quociente $G^{ab} = G/\Gamma_2(G)$.

Proposição 2.13

Seja $n \geq 2$. Então o abelianizado de FB_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para determinarmos o abelianizado do grupo FB_n , analisemos as relações dadas na Definição 1.37 no quociente $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$. Analisando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ em $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$, segue que $\sigma_i = \sigma_{i+1}$. Além disso, da relação $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$ em $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$ obtemos $t_i = t_{i+1}$.

Portanto, $\frac{FB_n}{\Gamma_2(FB_n)} = \langle \sigma_1, t_1 \mid [\sigma_1, t_1] = 1 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. \square

Seja G um grupo e \mathcal{P} uma propriedade de grupos. Dizemos que o grupo é residualmente \mathcal{P} , se para algum elemento não trivial $g \in G$ existe um grupo H com a propriedade \mathcal{P} e um homomorfismo sobrejetor $\varphi: G \rightarrow H$ onde $\varphi(g) \neq 1$.

Proposição 2.14

Seja $n \geq 3$. Então o grupo FB_n não é residualmente nilpotente.

Demonstração. Observe que o grupo FB_n contém o grupo B_n , o qual não é residualmente nilpotente para $n \geq 3$, conforme indicado em (GORIN; LIN, 1969), pois nesse caso tem-se $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$, e ainda $\Gamma_2(B_n) = [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$ para $n \geq 5$. Como todo subgrupo de um grupo residualmente nilpotente também é residualmente nilpotente (ver (MAGNUS; KARRASS; SOLITAR, 1976), Section 2.5, p.116), conclui-se que o grupo FB_n não pode ser residualmente nilpotente para $n \geq 3$. \square

A seguir, apresentamos uma relação entre os primeiros termos da série central inferior do grupo FB_n .

Teorema 2.15

Seja $n \geq 3$. Então $\Gamma_2(FB_n) = \Gamma_3(FB_n)$.

Demonstração. Basta considerarmos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(FB_n)}{\Gamma_3(FB_n)} \longrightarrow \frac{FB_n}{\Gamma_3(FB_n)} \xrightarrow{p} \frac{FB_n}{\Gamma_2(FB_n)} \longrightarrow 1.$$

Sabemos pela Proposição 2.13 que

$$\frac{FB_n}{\Gamma_2(FB_n)} = \langle \sigma_1, t_1 \mid [\sigma_1, t_1] = 1 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Queremos mostrar que p é um isomorfismo. Como todos os $\sigma_i \in FB_n/\Gamma_3(FB_n)$ se projetam para o mesmo elemento de $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, existe $a_i \in \Gamma_2(FB_n)/\Gamma_3(FB_n)$ (onde $a_1 = 1$) tal que $\sigma_i = a_i \sigma_1$. Projetando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ em $FB_n/\Gamma_3(FB_n)$, vemos que $a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 = a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1$. Pela definição da série central inferior, os a_i são centrais em $FB_n/\Gamma_3(FB_n)$, então

$$\begin{aligned} a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 = a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 &\Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_i a_{i+1} a_i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow a_i = a_{i+1}, \end{aligned}$$

ou seja, como $a_1 = 1$, obtemos $\sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1}$. De forma análoga, os $t_j \in FB_n/\Gamma_3(FB_n)$ se projetam para o mesmo elemento de $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$ para cada, $j = 1, \dots, n$, então existe $b_i \in \Gamma_2(FB_n)/\Gamma_3(FB_n)$ (onde $b_1 = 1$) tal que $t_j = b_j t_1$. Projetando a relação $\sigma_j t_j = t_{j+1} \sigma_j$ em $FB_n/\Gamma_3(FB_n)$, vemos que $\sigma_j b_j t_1 = b_{j+1} t_1 \sigma_j$. Como $\sigma_j t_1 = t_1 \sigma_j$ se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 3$) e todos os b_j são centrais em $FB_n/\Gamma_3(FB_n)$, segue que

$$\sigma_j b_j t_1 = b_{j+1} t_1 \sigma_j \Leftrightarrow b_j \sigma_j t_1 = b_{j+1} \sigma_j t_1 \Leftrightarrow b_j = b_{j+1},$$

ou seja, como $b_1 = 1$, tem-se $t_1 = \dots = t_n$. Portanto, o homomorfismo sobrejetor p é de fato um isomorfismo e, assim, $\Gamma_2(FB_n) = \Gamma_3(FB_n)$. \square

2.6 O subgrupo comutador de FB_n

O subgrupo comutador $\Gamma_2(B_n)$ de B_n é conhecido pelo trabalho de Gorin e Lin (GORIN; LIN, 1969) que obteve uma apresentação finita para $\Gamma_2(B_n)$. Nesse mesmo sentido, nesta seção buscamos determinar uma apresentação para o subgrupo comutador $\Gamma_2(FB_n)$ de FB_n . Para tanto, utilizaremos o **método de Reidemeister-Schreier**, que consiste na determinação da apresentação de subgrupos a partir da apresentação do grupo. O método supracitado pode ser encontrado em (MURASUGI; KURPITA, 2012) no Apêndice 1, Seção 6. Para a análise do subgrupo comutador $\Gamma_2(FB_n)$, utilizaremos o abelianizado de FB_n dado na Proposição 2.13.

Vimos na Proposição 2.13 que o quociente $FB_n/\Gamma_2(FB_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pode-se definir o homomorfismo φ a partir da seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(FB_n) \longrightarrow FB_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

onde, para $i = 1, \dots, n-1$ e $j = 1, \dots, n$, $\varphi(\sigma_i) = \tilde{\sigma}_1$ e $\varphi(t_j) = \tilde{t}_1$. Aqui, $\tilde{\sigma}_1$ e \tilde{t}_1 são os geradores das duas cópias de \mathbb{Z} .

O lema a seguir nos diz quem são os geradores de $\Gamma_2(FB_n)$.

Lema 2.16

O subgrupo $\Gamma_2(FB_n)$ tem o seguinte conjunto de geradores:

$$\{\alpha_{m,k,1}, \alpha_{m,2}, \alpha_j \mid m, k \in \mathbb{Z}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

Demonstração. Considere o conjunto de Schreier de representantes de classe para $\Gamma_2(FB_n)$ em FB_n :

$$\Lambda = \{\sigma_1^m t_1^k \mid m, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Seguindo o algoritmo Reidemeister-Schreier, o subgrupo comutador $\Gamma_2(FB_n)$ é gerado pelas palavras

$$\{S_{\lambda,a} = (\lambda a)(\overline{\lambda a})^{-1} \mid \lambda \in \Lambda, a \in \{\sigma_j, t_1 \mid j = 1, 2, \dots, n-1\}\}.$$

Agora encontraremos os elementos $S_{\lambda,a}$. Para isso, tome $\lambda = \sigma_1^m t_1^k$ em Λ e considerando diferentes a , obteremos os seguintes casos:

1. Se $a = \sigma_1$, então

$$S_{\lambda,\sigma_1} = \sigma_1^m t_1^k \sigma_1 t_1^{-k} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

que denotaremos por $\alpha_{m,k,1}$.

2. Se $a = \sigma_2$, como $\sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_2} = \sigma_1^m t_1^k \sigma_2 t_1^{-k} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos este elemento por $\alpha_{m,2}$.

3. Se $a = \sigma_j$, $j > 2$, como $\sigma_j t_1 = t_1 \sigma_j$ e $\sigma_j \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_j$ para $j > 2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_j} = \sigma_1^m t_1^k \sigma_j t_1^{-k} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_j \sigma_1^{-1},$$

e denotaremos este elemento por α_j .

4. Se $a = t_1$, obtemos

$$S_{\lambda,a} = \sigma_1^m t_1^k t_1 (\overline{\sigma_1^m t_1^k t_1})^{-1} = 1.$$

Portanto, $\Gamma_2(FB_n)$ é gerado pelo conjunto a seguir

$$\{\alpha_{m,k,1}, \alpha_{m,2}, \alpha_j \mid m, k \in \mathbb{Z}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

□

Agora, consideraremos as relações definidoras de FB_n , reescreveremos as mesmas nos geradores de $\Gamma_2(FB_n)$ e, conjugando pelos elementos $\lambda \in \Lambda$, obteremos as relações definidoras de $\Gamma_2(FB_n)$.

Lema 2.17

O subgrupo $\Gamma_2(FB_n)$ tem o seguinte conjunto de relações: para $m, k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_{m,0,1} = 1, \quad (2.1)$$

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_j \alpha_{m+1,k,1}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (2.2)$$

$$\alpha_{m,2} \alpha_j \alpha_{m+1,2}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (2.3)$$

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i-j| > 1, \quad (2.4)$$

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_{m+1,2} \alpha_{m+2,k,1} \alpha_{m+2,2}^{-1} \alpha_{m+1,k,1}^{-1} \alpha_{m,2}^{-1} = 1, \quad (2.5)$$

$$\alpha_{m,2} \alpha_3 \alpha_{m+2,2} \alpha_3^{-1} \alpha_{m+2,2}^{-1} \alpha_3^{-1} = 1, \quad (2.6)$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (2.7)$$

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_{m,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,k,1} = 1, \quad (2.8)$$

$$\alpha_{m,2} \alpha_{m+1,k,1} \alpha_{m+1,k+1,1}^{-1} \alpha_{m,2}^{-1} \alpha_{m-1,2}^{-1} \alpha_{m-2,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-2,k,1} \alpha_{m-1,2} = 1, \quad (2.9)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,k,l+1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (2.10)$$

$$\alpha_{m,k+1,1} \alpha_{m,k+2,1}^{-1} \alpha_{m,k+1,1} \alpha_{m,k,1}^{-1} = 1. \quad (2.11)$$

Demonstração. Inicialmente, coletaremos as relações $S_{\lambda,a} = 1$. Consideramos todos os pares (λ, a) com $\lambda \in \Lambda = \{\sigma_1^m t_1^k \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$, $a \in S = \{\sigma_j, t_1 \mid j = 1, 2, \dots, n-1\}$. Precisamos encontrar os pares (λ, a) para os quais λa e $\overline{\lambda a}$ são iguais.

Note que $\sigma_1^m t_1^k \sigma_j$ e $\overline{\sigma_1^m t_1^k \sigma_j} = \sigma_1^{m+1} t_1^k$ são iguais se e somente se $k = 0$ e $j = 1$. Assim, obtemos a seguinte relação como uma das relações que definem $\Gamma_2(FB_n)$: $S_{\sigma_1^m, \sigma_1} = 1$, ou seja, $\alpha_{m,0,1} = 1$.

Agora, calculamos os termos $\tau(\lambda r_\mu \lambda^{-1})$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e para cada uma das relações defini-

doras $r_\mu = 1$ de FB_n , como segue:

$$\begin{aligned} r_1 &: \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1, \quad |i - j| > 1; \\ r_2 &: \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1; \\ r_3 &: \sigma_i t_1 \sigma_i^{-1} t_1^{-1} = 1, \quad i > 1; \\ r_4 &: \sigma_i \cdots \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_i = 1; \\ r_5 &: t_1 \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 t_1^{-1} \sigma_1^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Escolha qualquer elemento $\lambda = \sigma_1^m t_1^k \in \Lambda$. Deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned} \tau(\lambda r_1 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} t_1^k, \sigma_j} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_j}^{-1} \\ \tau(\lambda r_2 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} t_1^k, \sigma_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \\ \tau(\lambda r_3 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^{k+1}, \sigma_i}^{-1} \\ \tau(\lambda r_4 \lambda^{-1}) &= \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{m+l} t_1^k, \sigma_{i-l}} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m+i-1)-l} t_1^{k+1}, \sigma_{l+1}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-1)-l} t_1^{k+1}, \sigma_{i-l}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-i)+l} t_1^k, \sigma_{l+1}} \\ \tau(\lambda r_5 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^{k+2}, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m t_1^k, \sigma_1}^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte conjunto de relações definidoras para $\Gamma_2(FB_n)$:

$$\alpha_{m,0,1} = 1, \quad (2.12)$$

$$\alpha_{m,k,i} \alpha_{m+1,k,j} \alpha_{m+1,k,i}^{-1} \alpha_{m,k,j}^{-1} = 1, \quad |i - j| > 1, \quad (2.13)$$

$$\alpha_{m,k,i} \alpha_{m+1,k,i+1} \alpha_{m+2,k,i} \alpha_{m+2,k,i+1}^{-1} \alpha_{m+1,k,i}^{-1} \alpha_{m,k,i+1}^{-1} = 1, \quad (2.14)$$

$$\alpha_{m,k,i} \alpha_{m,k+1,i}^{-1} = 1, \quad i > 1, \quad (2.15)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,k,l+1} = 1, \quad (2.16)$$

$$\alpha_{m,k+1,1} \alpha_{m,k+2,1}^{-1} \alpha_{m,k+1,1} \alpha_{m,k,1}^{-1} = 1. \quad (2.17)$$

Para (2.13) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1, j \geq 3$; dá as relações: (2.2).

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_j \alpha_{m+1,k,1}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1.$$

Caso 2: $i = 2, j \geq 4$; dá as relações: (2.3).

$$\alpha_{m,2} \alpha_j \alpha_{m+1,2}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1.$$

Caso 3: $i, j \geq 3, |i - j| > 1$; dá as relações: (2.4).

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} = 1.$$

Para (2.14) temos os seguintes 3 casos

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (2.5).

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_{m+1,2} \alpha_{m+2,k,1} \alpha_{m+2,2}^{-1} \alpha_{m+1,k,1}^{-1} \alpha_{m,2}^{-1} = 1.$$

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (2.6).

$$\alpha_{m,2} \alpha_3 \alpha_{m+2,2} \alpha_3^{-1} \alpha_{m+1,2}^{-1} \alpha_3^{-1} = 1.$$

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (2.7).

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1} = 1.$$

Para (2.15) temos os seguintes casos possíveis:

Caso 1: $i = 2$; não fornece nenhuma relação não trivial.

$$\alpha_{m,2} \alpha_{m,2}^{-1} = 1.$$

Caso 2: $i \geq 3$; não fornece nenhuma relação não trivial.

$$\alpha_i \alpha_i^{-1} = 1.$$

Para (2.16) temos os seguintes casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (2.8).

$$\alpha_{m,k,1} \alpha_{m,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,k,1} = 1,$$

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (2.9).

$$\alpha_{m,2} \alpha_{m+1,k,1} \alpha_{m+1,k+1,1}^{-1} \alpha_{m,2}^{-1} \alpha_{m-1,2}^{-1} \alpha_{m-2,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-2,k,1} \alpha_{m-1,2} = 1,$$

Case 3: $i \geq 3$; dá as relações: (2.10).

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,k,i-l} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,k,l+1} = 1.$$

Na relação (2.17) não há casos a considerar, pois $i = 1$ fixo. Portanto, a prova do lema está completa. \square

Nosso próximo objetivo será provar que $\Gamma_2(FB_n)$ possui duas propriedades notáveis para $n \geq 5$: possui um conjunto infinito de geradores e é perfeito. Este resultado não apenas aprofunda a compreensão das propriedades internas de FB_n , mas também revela a complexidade algébrica do subgrupo comutador em números de cordas superiores. Vale lembrar que um grupo G é **perfeito** se G é igual ao seu subgrupo comutador, e um grupo G é **quase-perfeito** se seu subgrupo comutador é perfeito. Desta forma, do resultado a seguir, concluímos que o grupo FB_n é quase-perfeito.

Teorema 2.18

Seja $\Gamma_2(FB_n)$ o subgrupo comutador do grupo de tranças emolduradas FB_n .

(i) $\Gamma_2(FB_n)$ possui um conjunto infinito de geradores para todo $n \geq 5$.

(ii) $\Gamma_2(FB_n)$ é perfeito para $n \geq 5$.

Demonstração. Para provar o item (i), aplicaremos diferentes transformação de Tietze à apresentações de $\Gamma_2(FB_n)$, para $n \geq 5$, deduzidas dos Lemas 2.16 e 2.17.

De (2.2) obtemos

$$\alpha_{m+1,k,1} = \alpha_j^{-1} \alpha_{m,k,1} \alpha_j, \quad j \geq 3.$$

Note que $\alpha_{m,k,1} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,k,1} \alpha_j^m$, $j \geq 3$. Na verdade, temos que

$$\alpha_j^{-m} \alpha_{0,k,1} \alpha_j^m = \sigma_j^{-m} \sigma_1^m t^k \sigma_1 t^{-k} \sigma_1^{-1} \sigma_j^m \sigma_1^{-m}.$$

Como $j \geq 3$, temos que σ_j^{-m} e σ_j^m comutam com os outros elementos. Portanto,

$$\alpha_j^{-m} \alpha_{0,k,1} \alpha_j^m = \alpha_{m,k,1}, \quad j \geq 3,$$

e podemos remover todos os elementos $\alpha_{m,k,1}$ com $m \neq 0$ do conjunto de geradores.

De (2.3), como estamos supondo $n \geq 5$, obtemos

$$\alpha_{m+1,2} = \alpha_j^{-1} \alpha_{m,2} \alpha_j, \quad j \geq 4.$$

Como feito acima, podemos verificar que $\alpha_{m,2} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,2} \alpha_j^m$, $j \geq 4$. Podemos remover todos os elementos $\alpha_{m,2}$ com $m \neq 0$.

Assim, podemos gerar $\Gamma_2(FB_n)$ para todo $n \geq 5$, com o seguinte conjunto infinito de geradores:

$$\{\alpha_{0,k,1}, \alpha_{0,2}, \alpha_j \mid k \in \mathbb{Z}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

Para provar (ii), abelianizamos a apresentação de $\Gamma_2(FB_n)$ inserindo as relações do tipo $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ para todos os x, y no conjunto gerador, e obtemos uma apresentação para o abelianizado $(\Gamma_2(FB_n))^{ab}$. Agora mostraremos que $(\Gamma_2(FB_n))^{ab} \cong \langle 1 \rangle$.

Na apresentação abelianizada, observamos o seguinte:

(1) De (2.2) obtemos $\alpha_{m+1,k,1} = \alpha_{m,k,1}$ para todos os $m, k \in \mathbb{Z}$. Isso implica que $\alpha_{m,k,1} = \alpha_{0,k,1}$, $m, k \in \mathbb{Z}$.

(2) De (2.3) obtemos $\alpha_{m+1,2} = \alpha_{m,2}$ para todo $m, k \in \mathbb{Z}$. Isso implica que $\alpha_{m,2} = \alpha_{0,2}$, $m, k \in \mathbb{Z}$. Note que aqui é necessário $n \geq 5$.

(3) De (2.5) usando as 2 observações acima deduzimos: $\alpha_{0,k,1} = \alpha_{0,2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

(4) De (2.6) estabelecemos: $\alpha_3 = \alpha_{0,2}$.

(5) De (2.7) obtemos: $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ para todos os $3 \leq i \leq n-2$.

(6) De todas as observações acima, temos

$$\alpha_3 = \alpha_{0,2} = \alpha_{0,0,1} = 1 \Rightarrow \alpha_{m,k,1} = \alpha_{m,2} = \alpha_i = 1, \text{ para todos } m, k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, concluímos que, na apresentação para $(\Gamma_2(FB_n))^{ab}$, todos os geradores são iguais a 1. Então, $(\Gamma_2(FB_n))^{ab} \cong \langle 1 \rangle$. Assim, $\Gamma_2(FB_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. \square

2.7 Quociente do tipo Coxeter do grupo de tranças emolduradas

Uma maneira clássica de obter quocientes interessantes do grupo de tranças é considerar a introdução de relações adicionais na sua apresentação. Foi nesse sentido que Coxeter propôs o introdução da relação $\sigma_1^k = 1$, $k \geq 3$, à apresentação de B_n . Inspirados por essa abordagem, passamos agora a examinar o caso emoldurado, no qual investigaremos como a imposição da mesma relação $\sigma_1^k = 1$ se manifesta no contexto do grupo FB_n .

Ao introduzir a relação $\sigma_1^k = 1$ à apresentação do grupo de tranças emolduradas FB_n encontramos o resultado a seguir.

Teorema 2.19

Sejam $n, k \geq 2$. Então

$$FB_n(k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(k) & \text{se } k \text{ é par,} \\ \mathbb{Z} \oplus B_n(k) & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja $n \geq 2$ e considere $k \geq 2$ par. Introduzindo a relação $\sigma_1^k = 1$ à apresentação do grupo FB_n dada na Definição 1.37, como k é par, a permutação associada a σ_1^k é trivial, e portanto não surge nenhuma nova relação entre os geradores t_i . Além disso, a ação de B_n sobre \mathbb{Z}^n , dada pela permutação dos índices dos t_i , induz uma ação de $B_n(k)$ sobre \mathbb{Z}^n . Portanto, a estrutura de $FB_n(k)$ é a de um produto semidireto

$$FB_n(k) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(k).$$

Agora, seja $k \geq 2$ ímpar. Como k é ímpar, a permutação associada a σ_1^k é a transposição (1 2), e então temos que em FB_n as relações a seguir são válidas

$$\sigma_1^k t_1 \sigma_1^{-k} = t_2, \quad \sigma_i \cdots \sigma_2 \sigma_1^k \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} t_1 (\sigma_i \cdots \sigma_2 \sigma_1^k \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})^{-1} = t_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

No quociente $FB_n(k)$ essas relações implicam que $t_1 = t_2 = \dots = t_n$. Denotemos esse elemento comum por t . Como $\sigma_i t \sigma_i^{-1} = t$ para todo i , segue que t é central em $FB_n(k)$. Logo, a apresentação se reduz a

$$\langle t, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i t = t \sigma_i, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_1^k = 1 \rangle.$$

Portanto, $FB_n(k) \cong \mathbb{Z} \oplus B_n(k)$. □

A partir da descrição estrutural de $FB_n(k)$ obtida acima, podemos agora analisar situações particulares que revelam conexões interessantes com os quocientes de Coxeter. Em especial, o caso $k = 2$ permite relacionar o quociente $FB_n(k)$ com o grupo simétrico.

Corolário 2.20

Seja $FB_n(k)$ o quociente do tipo Coxeter do grupo de tranças emolduradas FB_n .

1. Se $k = 2$, então $FB_n(2) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes S_n$.
2. Nos casos $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$, os quocientes são os seguintes.
 - a) Para $(n, m) = (3, 3)$: $FB_3(3) \cong \mathbb{Z} \oplus SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
 - b) Para $(n, m) = (3, 4)$: $FB_3(4) \cong \mathbb{Z}^3 \rtimes (SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}))$.
 - c) Para $(n, m) = (3, 5)$: $FB_3(5) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus SL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}))$.
 - d) Para $(n, m) = (4, 3)$: $FB_3(5) \cong \mathbb{Z} \oplus (((((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})) \rtimes Q_8) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))$
 - e) Para $(n, m) = (5, 3)$: $FB_3(5) \cong \mathbb{Z} \oplus$ (extensão de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ por $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$).

onde Q_8 é o grupo dos quatérnios e $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ é o grupo projetivo simplético.

Demonstração. Inicialmente, vamos analisar o item 1. Para $k = 2$, pelo Teorema 2.19 segue que $FB_n(2) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(2)$. Por outro lado, $B_n(2) \cong S_n$, então $FB_n(2) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes S_n$.

Para o item 2, pelo Teorema 2.19, para $(n, m) = (3, 4)$, temos $FB_3(4) \cong \mathbb{Z}^3 \rtimes B_3(4)$ e pela Tabela 1 segue que $FB_3(4) \cong \mathbb{Z}^3 \rtimes (SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}))$. Para $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$, segue do Teorema 2.19 que $FB_n(m) \cong \mathbb{Z} \oplus B_n(m)$ e pela Tabela 1 segue o desejado. □

2.8 Subgrupo de congruência

Nesta seção nos dedicamos a introduzir o conceito de subgrupo de congruência no contexto do grupo de tranças emolduradas. Nos debruçamos a entender a estrutura deste subgrupo e também os quocientes do tipo Coxeter desses subgrupos.

Seja $\psi: FB_n \longrightarrow B_n$ o epimorfismo definido por $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, e $\psi(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$. A composição

$$\rho_m \circ \psi: FB_n \longrightarrow \begin{cases} Sp_{n-1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ (Sp_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))_u & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

define uma representação de FB_n em um grupo simplético, onde ρ_m é uma representação simplética de B_n . A definição de grupo simplético encontra-se na Seção 1.2.

Definição 2.21

Define-se o **subgrupo de congruência de nível m** de FB_n , denotado por

$$FB_n[m] := \ker(\rho_m \circ \psi) \subset FB_n.$$

Explicitamente, $FB_n[m] = \{\beta \in FB_n \mid \rho_m(\psi(\beta)) = I\}$.

Uma vez estabelecida a definição de $FB_n[m]$ como subgrupo de congruência de nível m , é natural investigar como ele se relaciona com o subgrupo de congruência correspondente no grupo de tranças clássico B_n . Como $\psi: FB_n \rightarrow B_n$ é o homomorfismo que “esquece” o emolduramento, a estrutura de $FB_n[m]$ pode ser descrita a partir da pré-imagem do subgrupo $B_n[m]$ por ψ , como podemos ver no resultado a seguir.

Teorema 2.22

Seja $FB_n[m]$ o subgrupo de congruência de nível m de FB_n . Então $FB_n[m] = \psi^{-1}(B_n[m])$, onde $\psi: FB_n \longrightarrow B_n$ é o epimorfismo definido por $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, e $\psi(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$

Demonstração. Seja $\psi: FB_n \longrightarrow B_n$ o epimorfismo definido por $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$ e $\psi(t_i) = 1$. Note que

$$\begin{aligned} \beta \in \ker(\rho_m \circ \psi) &\iff (\rho_m \circ \psi)(\beta) = I \iff \rho_m(\psi(\beta)) = I \iff \psi(\beta) \in \ker(\rho_m) \\ &\iff \beta \in \psi^{-1}(\ker(\rho_m)). \end{aligned}$$

Por definição $\ker(\rho_m) = B_n[m]$, então $FB_n[m] = \psi^{-1}(B_n[m])$. Observe que

$$\psi^{-1}(B_n[m]) = \{t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \alpha \in \mathbb{Z}^n \rtimes B_n \mid \psi(t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \alpha) = \alpha \in B_n[m]\},$$

ou seja, a pré-imagem de $B_n[m]$ consiste nos elementos $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \alpha$ tais que $\alpha \in B_n[m]$ e $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \in \mathbb{Z}^n$. Logo,

$$\psi^{-1}(B_n[m]) = \{t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \alpha \in \mathbb{Z}^n \rtimes B_n \mid \alpha \in B_n[m]\}.$$

□

Tendo estabelecido que $FB_n[m] = \psi^{-1}(B_n[m])$, desejamos buscar uma descrição mais detalhada da estrutura de $FB_n[m]$ em termos dos componentes de FB_n .

Recordando que o grupo de tranças emolduradas FB_n admite uma decomposição como produto semidireto $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, uma questão natural é pensar que o subgrupo de congruência $FB_n[m]$ também reflita essa estrutura, envolvendo o subgrupo $B_n[m]$ do grupo de tranças clássico e a parte abeliana livre \mathbb{Z}^n correspondente à moldura.

O resultado a seguir fornece uma descrição explícita de $FB_n[m]$ em termos dessa decomposição, distinguindo os casos segundo a paridade de m e os valores específicos de n .

Teorema 2.23

Seja $FB_n[m]$ o subgrupo de congruência de nível m de FB_n .

i) Se $n \geq 2$, $n \neq 3, 4$, para todo $m \geq 1$, então $FB_n[m] = \begin{cases} \mathbb{Z}^n \oplus B_n[m] & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}^n \rtimes B_2[m] & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$

ii) Se $n = 3, 4$, $m < 6$, então $FB_n[m] = \begin{cases} \mathbb{Z}^n \oplus B_n[m] & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}^n \rtimes B_n[m] & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Demonstração. i) Seja $t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \alpha \in FB_n[m]$. Pelo Teorema 2.22, concluímos que $\alpha \in B_n[m]$.

Consideremos inicialmente o caso $n = 2$. Temos $\alpha \in B_2[m]$ e, pelo Corolário 1.21, segue que $\alpha = \sigma_1^m$. Assim, $FB_2[m]$ é gerado por t_1, t_2 e σ_1^m . O subgrupo de congruência $B_2[m]$ herda a ação de B_2 sobre \mathbb{Z}^2 , pois $B_2[m]$ é subgrupo de B_2 .

Se m é par, a permutação associada a σ_1^m é trivial. Portanto,

$$\sigma_1^m t_1 \sigma_1^{-m} = t_{\sigma_1^m(1)} = t_1 \quad \text{e} \quad \sigma_1^m t_2 \sigma_1^{-m} = t_{\sigma_1^m(2)} = t_2.$$

Dessa forma,

$$FB_2[m] = \langle t_1, t_2, \sigma_1^m \mid t_1 t_2 = t_2 t_1, \sigma_1^m t_1 = t_1 \sigma_1^m, \sigma_1^m t_2 = t_2 \sigma_1^m \rangle = \mathbb{Z}^2 \oplus B_2[m]. \quad (2.18)$$

Se m é ímpar, a permutação associada a σ_1^m é $(1 \ 2)$. Assim,

$$\sigma_1^m t_1 \sigma_1^{-m} = t_{\sigma_1^m(1)} = t_2 \quad \text{e} \quad \sigma_1^m t_2 \sigma_1^{-m} = t_{\sigma_1^m(2)} = t_1.$$

Logo,

$$FB_2[m] = \langle t_1, t_2, \sigma_1^m \mid t_1 t_2 = t_2 t_1, \sigma_1^m t_1 = t_2 \sigma_1^m, \sigma_1^m t_2 = t_1 \sigma_1^m \rangle = \mathbb{Z}^2 \rtimes B_2[m]. \quad (2.19)$$

Portanto,

$$FB_2[m] = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 \oplus B_2[m], & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}^2 \rtimes B_2[m], & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Passemos agora ao caso $n \geq 5$. Pelo Corolário 1.21, $B_n[m]$ é normalmente gerado por

$$\sigma_1^m, \quad (\sigma_1 \sigma_2)^6, \quad (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^{10}.$$

Como $\alpha \in B_n[m]$, segue que $FB_n[m]$ é gerado pelo conjunto

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}, g(\sigma_1\sigma_2)^6g^{-1}, g\sigma_1^m g^{-1} \mid g \in B_n\}.$$

As tranças $(\sigma_1\sigma_2)^6$ e $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}$ possuem permutação associada trivial, de modo que

$$g(\sigma_1\sigma_2)^6g^{-1}t_i = t_i g(\sigma_1\sigma_2)^6g^{-1}, \quad (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10}t_i = t_i(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{10},$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Se m é par, a permutação associada a σ_1^m é trivial, e portanto

$$g\sigma_1^m g^{-1}t_i = t_i g\sigma_1^m g^{-1}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, 5.$$

Se m é ímpar, a permutação associada a σ_1^m é $(1\ 2)$, e assim

$$g\sigma_1^m g^{-1}t_1 = t_{g\sigma_1^m g^{-1}(1)} g\sigma_1^m g^{-1}.$$

Concluimos, portanto, que para $n \geq 5$,

$$FB_n[m] = \begin{cases} \mathbb{Z}^n \oplus B_n[m], & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}^n \rtimes B_n[m], & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

ii) Se $n = 3$, pelo Corolário 1.20, o subgrupo de congruência $B_3[m]$, $m < 6$, é normalmente gerado por σ_1^m e $(\sigma_1\sigma_2)^6$. Dessa forma, como $\alpha \in B_3[m]$, temos que $FB_3[m]$ é gerado pelo conjunto

$$\{t_1, t_2, t_3, (\sigma_1\sigma_2)^6, g\sigma_1^3 g^{-1} \mid g \in B_3\}.$$

Se $n = 4$, $m < 6$, temos que $FB_4[m]$ é gerado pelo conjunto

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4, g(\sigma_1\sigma_2)^6g^{-1}, g\sigma_1^3 g^{-1} \mid g \in B_4\}.$$

De forma análoga ao feito no caso $n \geq 5$, se $n = 3, 4$, $m < 6$, temos

$$FB_n[m] = \begin{cases} \mathbb{Z}^n \oplus B_n[m], & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}^n \rtimes B_n[m], & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

□

Como consequência direta da caracterização estrutural apresentada no Teorema 2.23, é possível identificar casos particulares em que o subgrupo de congruência $FB_n[m]$ coincide com grupos já conhecidos. O grupo P_n^2 é o subgrupo do grupo de tranças puras P_n gerado pelos quadrados de todos os elementos [ver (BRENDLE; MARGALIT, 2018), Proposition 3.1].

Corolário 2.24

Seja $FB_n[m]$ o subgrupo de congruência de nível m de FB_n .

i) Se $n \geq 2$, $m = 2$, então $FB_n[2] = FP_n$,

ii) Se $n \geq 2$, $m = 4$, então $FB_n[4] = \mathbb{Z}^n \oplus P_n^2$.

Demonstração. i) Pelo Teorema 2.23, para $n \geq 2$, $m = 2$, temos que $FB_n[2] = \mathbb{Z}^n \oplus B_n[2]$. Pelo Teorema 1.18, $B_n[2] = P_n$. Logo,

$$FB_n[2] = \mathbb{Z}^n \oplus B_n[2] = \mathbb{Z}^n \oplus P_n = FP_n.$$

ii) Novamente pelo Teorema 2.23, para $n \geq 2$, $m = 4$, temos que $FB_n[4] = \mathbb{Z}^n \oplus B_n[4]$. Pelo Teorema 1.19, $B_n[4] = P_n^2$. Logo,

$$FB_n[4] = \mathbb{Z}^n \oplus B_n[4] = \mathbb{Z}^n \oplus P_n^2.$$

□

No estudo de quocientes do tipo Coxeter, vemos que (BELLINGERI et al., 2026) estudaram esses quocientes para o subgrupo de congruência do grupo de tranças B_n . No contexto emoldurado, uma abordagem análoga pode ser realizada, embora os efeitos da torção individual de cada corda modifiquem a estrutura resultante.

A proposição a seguir descreve explicitamente os quocientes correspondentes ao caso $n = 2$.

Proposição 2.25

Sejam $m \geq 1$ e $FB_n[m]$ o subgrupo de congruência de FB_n . Então

$$FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{se } m \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. No quociente $FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle$ temos $\sigma_1^m = 1$. Então, analisemos esse quociente para m par e m ímpar.

Para m par, considerando a apresentação de $FB_2[m]$ dada em (2.18), das relações $\sigma_1^m t_1 = t_1 \sigma_1^m$ e $\sigma_1^m t_2 = t_2 \sigma_1^m$ em $FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle$ obtemos as identidades $t_1 = t_1$ e $t_2 = t_2$, respectivamente. Logo,

$$FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle \cong \langle t_1, t_2 \mid t_1 t_2 = t_2 t_1 \rangle = \mathbb{Z}^2.$$

No caso m ímpar, pela apresentação de $FB_2[m]$ dada (2.19), as relações $\sigma_1^m t_1 = t_2 \sigma_1^m$ e $\sigma_1^m t_2 = t_2 \sigma_1^m$ no quociente $FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle$ se tornam, respectivamente, $t_1 = t_2$ e $t_2 = t_1$. Assim,

$$FB_2[m]/\langle\langle\sigma_1^m\rangle\rangle \cong \langle t_1 \mid - \rangle = \mathbb{Z}.$$

□

Antes de enunciar o resultado principal sobre os quocientes do tipo Coxeter associados aos subgrupos de congruência no caso emoldurado, passaremos por um lema que será útil na análise dos quocientes. O lema é um resultado já conhecido na literatura, mas damos uma prova.

Lema 2.26

Sejam G_1 e G_2 grupos e sejam H_1 e H_2 subgrupos normais de G_1 e G_2 , respectivamente. Então $G_1 \oplus G_2 / H_1 \oplus H_2 \cong (G_1 / H_1) \oplus (G_2 / H_2)$.

Demonstração. Seja a aplicação $\varphi: G_1 \oplus G_2 \longrightarrow (G_1/H_1) \oplus (G_2/H_2)$ definida por $\varphi(g_1, g_2) = (g_1 H_1, g_2 H_2)$.

Note que φ é um homomorfismo. De fato, sejam $(g_1, g_2), (k_1, k_2) \in G_1 \oplus G_2$, então

$$\varphi((g_1, g_2) \cdot (k_1, k_2)) = \varphi(g_1 k_1, g_2 k_2) = (g_1 k_1 H_1, g_2 k_2 H_2).$$

Por outro lado

$$\varphi(g_1, g_2) \cdot \varphi(k_1, k_2) = (g_1 H_1, g_2 H_2) \cdot (k_1 H_1, k_2 H_2) = (g_1 H_1 \cdot k_1 H_1, g_2 H_2 \cdot k_2 H_2).$$

Como H_1 e H_2 são subgrupos normais, então $(g_1 H_1)(k_1 H_1) = g_1(H_1 k_1)H_1 = g_1(k_1 H_1)H_1 = g_1 k_1 H_1$ e $(g_2 H_2)(k_2 H_2) = g_2(H_2 k_2)H_2 = g_2(k_2 H_2)H_2 = g_2 k_2 H_2$. Dessa forma, $\varphi(g_1, g_2) \cdot \varphi(k_1, k_2) = (g_1 k_1 H_1, g_2 k_2 H_2)$. Logo, $\varphi((g_1, g_2) \cdot (k_1, k_2)) = \varphi(g_1, g_2) \cdot \varphi(k_1, k_2)$.

O núcleo de φ consiste em todos os elementos $(g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2$ tais que $\varphi((g_1, g_2)) = (H_1, H_2)$, ou seja, $g_1 H_1 = H_1$ e $g_2 H_2 = H_2$. Isso implica que $g_1 \in H_1$ e $g_2 \in H_2$. Logo, o núcleo de φ é $\text{Ker}(\varphi) = H_1 \oplus H_2$.

O homomorfismo φ é sobrejetor, pois para qualquer $(g_1 H_1, g_2 H_2) \in (G_1/H_1) \oplus (G_2/H_2)$, existe $(g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2$ tal que $\varphi(g_1, g_2) = (g_1 H_1, g_2 H_2)$.

Pelo Teorema do Isomorfismo temos que $G_1 \oplus G_2 / H_1 \oplus H_2 \cong (G_1/H_1) \oplus (G_2/H_2)$. □

Diante do exposto acima, podemos agora enunciar uma versão do Teorema 1.22 adaptada ao contexto dos subgrupos de congruência do grupo de tranças emolduradas $FB_n[m]$. O teorema a seguir generaliza a perspectiva de (BELLINGERI et al., 2026) ao incorporar o componente de emolduramento.

Teorema 2.27

Sejam $n, m \geq 3$. Nos casos $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)\}$, os quocientes são os seguintes.

- i) Para $(n, m) = (3, 3)$ e $(4, 3)$: $FB_n[m] / \langle\langle \sigma_1^m \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}$,
- ii) Para $(n, m) = (3, 4)$: $FB_3[4] / \langle\langle \sigma_1^4 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$,
- iii) Para $(n, m) = (5, 3)$: $FB_5[3] / \langle\langle \sigma_1^3 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$,
- iv) Para $(n, m) = (3, 5)$: $FB_3[5] / \langle\langle \sigma_1^5 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5$.

Demonstração. i) Inicialmente, vamos considerar o caso $(n, m) = (3, 3)$. Pelo Corolário 1.20, temos que $B_3[3]$ é normamente gerado por σ_1^3 e $(\sigma_1 \sigma_2)^6$. A partir do Teorema 2.23 temos que $FB_3[3]$ é gerado pelo conjunto $\{t_1, t_2, t_3, (\sigma_1 \sigma_2)^6, g \sigma_1^3 g^{-1} \mid g \in B_3\}$, onde podemos notar que $(\sigma_1 \sigma_2)^6$ é um elemento central em B_3 , pois $(\sigma_1 \sigma_2)^6 = \Delta_3^4$.

Vamos entender o quociente $FB_3[3] / \langle\langle \sigma_1^3 \rangle\rangle$. Dentre as relações válidas em $FB_3[3]$ temos

$$\sigma_1^3 t_1 = t_2 \sigma_1^3 \quad \text{e} \quad \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} t_1 = t_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1}.$$

Essas relações no quociente $FB_3[3] / \langle\langle \sigma_1^3 \rangle\rangle$ se tornam $t_1 = t_2$ e $t_1 = t_3$, respectivamente. Além disso, em $FB_3[3] / \langle\langle \sigma_1^3 \rangle\rangle$ temos $(\sigma_1 \sigma_2)^6 = 1$, pois considerando as relações $\sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} =$

$\sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}$ e $\sigma_1^3 = 1$ ($\sigma_1^2 = \sigma_1^{-1}$), temos que

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \sigma_2)^6 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \\
&= \sigma_1^3 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Desta forma, a partir das informações acima e analisando o conjunto gerador de $FB_3[3]$, temos que $FB_3[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$ é gerado pela classe do t_1 , ou seja,

$$FB_3[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Para o caso (4,3), pelo Teorema 2.23, o conjunto $\{t_1, t_2, t_3, t_4, g(\sigma_1 \sigma_2)^6 g^{-1}, g \sigma_1^3 g^{-1} \mid g \in B_4\}$ é o gerador de $FB_4[3]$. Em $FB_4[3]$ temos que as seguintes relações são válidas:

$$\sigma_1^3 t_1 = t_2 \sigma_1^3, \quad \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} t_1 = t_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \quad \text{e} \quad \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} t_1 = t_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}.$$

Essas relações no quociente $FB_4[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$ se tornam $t_1 = t_2$, $t_1 = t_3$ e $t_1 = t_4$, respectivamente. Pelo caso (3,3), no quociente $B_4[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$, temos $(\sigma_1 \sigma_2)^6 = 1$. A partir dessas informações, $FB_4[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$ é gerado pela classe do t_1 e, assim,

$$FB_4[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle \cong \mathbb{Z}.$$

ii) Considerando $(n, m) = (3, 4)$, pelo Teorema 2.23, temos que $FB_3[4] = \mathbb{Z}^3 \oplus B_3[4]$. Sabendo que do Teorema 1.22 tem-se $B_3[4]/\langle\langle\sigma_1^4\rangle\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, pelo Lema 2.26 temos

$$\frac{FB_3[4]}{\langle\langle\sigma_1^4\rangle\rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}^3 \oplus B_3[4]}{\{1\} \oplus \langle\langle\sigma_1^4\rangle\rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\{1\}} \oplus \frac{B_3[4]}{\langle\langle\sigma_1^4\rangle\rangle} \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

iii) Pelo Corolário 1.20, o subgrupo $B_5[3]$ é normalmente gerado por σ_1^3 , $(\sigma_1 \sigma_2)^6$ e $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^{10}$. O elemento $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^{10}$ é central, pois $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^{10} = \Delta_5^4$. Então o subgrupo $FB_5[3]$ é gerado pelo conjunto $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)^{10}, g(\sigma_1 \sigma_2)^6 g^{-1}, g \sigma_1^3 g^{-1} \mid g \in B_5\}$. As relações a seguir são válidas em $FB_5[3]$:

1. $\sigma_1^3 t_1 = t_2 \sigma_1^3$,
2. $\sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} t_1 = t_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1}$,
3. $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} t_1 = t_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1}$,
4. $\sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1} t_1 = t_5 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}$.

No quociente $FB_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$, as relações acima se tornam $t_1 = t_2$, $t_1 = t_3$, $t_1 = t_4$ e $t_1 = t_5$, respectivamente. De forma análoga ao feito no item i), temos que $(\sigma_1\sigma_2)^6 = 1$ em $FB_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$, então também temos $g(\sigma_1\sigma_2)^6g^{-1} = 1$ no quociente. Dessa forma, o quociente $FB_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$ é gerado pela classe do t_1 e pela classe do Δ_5^4 . Por [(BANERJEE; HUXFORD, 2024), Introduction, p.3], Δ_5^4 tem ordem 3 em $B_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$, então Δ_5^4 também tem ordem 3 em $FB_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle$. Como t_1 comuta com Δ_5^4 , temos que

$$FB_5[3]/\langle\langle\sigma_1^3\rangle\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3.$$

iv) Pelo Corolário 1.20, sabemos que $B_3[5]$ é normalmente gerado por σ_1^5 e $(\sigma_1\sigma_2)^6$. Assim, o subgrupo $FB_3[5]$ é gerado pelo conjunto $\{t_1, t_2, t_3, (\sigma_1\sigma_2)^6, g\sigma_1^5g^{-1} \mid g \in B_3\}$, onde podemos notar que $(\sigma_1\sigma_2)^6$ é um elemento central em B_3 , pois $(\sigma_1\sigma_2)^6 = \Delta_3^4$. Em $FB_3[5]$ as relações a seguir são válidas:

$$\sigma_1^5 t_1 = t_2 \sigma_1^5 \quad \text{e} \quad \sigma_2 \sigma_1^5 \sigma_2^{-1} t_1 = t_3 \sigma_2 \sigma_1^5 \sigma_2^{-1}.$$

Essas relações no quociente $FB_3[5]/\langle\langle\sigma_1^5\rangle\rangle$ se tornam $t_1 = t_2$ e $t_1 = t_3$, respectivamente. Então, o quociente $FB_3[5]/\langle\langle\sigma_1^5\rangle\rangle$ é gerado pela classe do t_1 e pela classe do $(\sigma_1\sigma_2)^6 = \Delta_3^4$. Pelo Teorema 1.22, Δ_3^4 tem ordem 5 em $B_3[5]/\langle\langle\sigma_1^5\rangle\rangle$, então Δ_3^4 também tem ordem 5 em $FB_3[5]/\langle\langle\sigma_1^5\rangle\rangle$. Como t_1 comuta com Δ_3^4 , temos que

$$FB_3[5]/\langle\langle\sigma_1^5\rangle\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5.$$

□

Capítulo 3

Os grupos de tranças emolduradas de superfícies

Neste capítulo, introduzimos e definimos os grupos de tranças emolduradas associados a superfícies. Esses grupos podem ser vistos como uma generalização dos grupos de tranças clássicos de superfícies, incorporando informações adicionais sobre a moldura das cordas.

Uma definição importante desses grupos foi apresentada por Bellingeri e Gervais no trabalho (BELLINGERI; GERVAIS, 2012), onde são descritos a partir da teoria de espaços de configuração de superfícies. No entanto, neste trabalho, adotaremos uma abordagem alternativa para definir os grupos de tranças emolduradas de superfícies. Em vez de utilizar diretamente a teoria de espaços de configuração, construiremos esses grupos a partir de uma abordagem algébrica, que será detalhada ao longo do capítulo.

Para a construção dos grupos de tranças emolduradas sobre uma superfície M , denotados por $FB_n(M)$, parte-se do grupo de tranças clássico $B_n(M)$ e associa-se a cada corda um número inteiro no topo, denominado de moldura. Este inteiro codifica o número de torções da corda em torno do seu próprio eixo.

3.1 Os grupos de tranças emolduradas da esfera $FB_n(\mathbb{S}^2)$ e da esfera finitamente perfurada $FB_n(M_{0,p+1})$

Nesta seção, introduzimos o grupo de tranças emolduradas da esfera $FB_n(\mathbb{S}^2)$, uma extensão do grupo de tranças da esfera $B_n(\mathbb{S}^2)$ (ver (FADELL; VAN BUSKIRK, 1961)) que incorpora informações adicionais. Em seguida, definimos o grupo de tranças emolduradas da esfera finitamente perfurada $FB_n(M_{0,p+1})$, onde $M_{0,p+1} = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, $n, p \in \mathbb{Z}$, $n, p \geq 1$, que generaliza essa estrutura para o caso em que a esfera possui um número finito de perfurações, constituindo também uma extensão do respectivo grupo de tranças da esfera finitamente perfurada $B_n(M_{0,p+1})$ (ver (LAMBROPOULOU,

2000)).

Definição 3.1

O grupo de tranças emolduradas da esfera $FB_n(\mathbb{S}^2)$ é gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ com relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| > 1, \quad (3.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad (3.2)$$

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1 = 1, \quad (3.3)$$

$$t_k t_l = t_l t_k, \quad (3.4)$$

$$\sigma_i t_k \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } k = i, \\ t_i, & \text{se } k = i + 1, \\ t_k, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $i, j = 1, \dots, n-1$ e $k, l = 1, \dots, n$.

Uma trança emoldurada na esfera pode ser vista como uma generalização de uma trança usual em que cada corda, além de poder entrelaçar-se com as demais, também possui uma orientação interna, onde a corda pode girar em torno de seu próprio eixo. Assim, o grupo resultante codifica dois tipos de movimentos: os cruzamentos entre as cordas, descritos pelos geradores σ_i , e a moldura da j -ésima corda, descrita pelo gerador t_j .

O grupo $FB_n(\mathbb{S}^2)$ é uma extensão do grupo $B_n(\mathbb{S}^2)$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , como produto semidireto, ou seja, $FB_n(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{S}^2)$. De fato, considere o homomorfismo $\pi: FB_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow B_n(\mathbb{S}^2)$ definido por $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, e $\pi(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$. Pelas relações da apresentação, π é sobrejetivo e seu núcleo é o subgrupo abeliano livre gerado por t_1, \dots, t_n , isto é, $\text{Ker}(\pi) \cong \mathbb{Z}^n$. Assim obtemos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow FB_n(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\pi} B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow 1. \quad (3.6)$$

A inclusão $s: B_n(\mathbb{S}^2) \hookrightarrow FB_n(\mathbb{S}^2)$ definida por $s(\sigma_i) = \sigma_i$ é uma seção para a sequência exata curta (3.6), pois $\pi \circ s = \text{Id}_{B_n(\mathbb{S}^2)}$, o que mostra que a sequência (3.6) cinde. A ação de $B_n(\mathbb{S}^2)$ em \mathbb{Z}^n é descrita pela relação (3.5), onde vemos que $\sigma_i t_i \sigma_i^{-1} = t_{\sigma_i(i)} = t_{i+1}$ e $\sigma_i t_{i+1} \sigma_i^{-1} = t_{\sigma_i(i+1)} = t_i$. Portanto,

$$FB_n(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{S}^2).$$

Podemos definir o grupo de tranças puras emoldurada da esfera de maneira similar ao do grupo de tranças puras da esfera $P_n(\mathbb{S}^2)$. Estendemos o homomorfismo $\pi: B_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow S_n$ definido por $\pi(\sigma_i) = s_i$, $i = 1, \dots, n-1$, ao homomorfismo $\hat{\pi}: FB_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow S_n$ definido por $\hat{\pi}(\sigma_i) = s_i$, $i = 1, \dots, n-1$, e $\hat{\pi}(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$. Definimos o **grupo de tranças puras emolduradas da esfera** $FP_n(\mathbb{S}^2)$ como o núcleo de $\hat{\pi}$. Em estrutura, o grupo $FP_n(\mathbb{S}^2)$ é visto como $\mathbb{Z}^n \oplus P_n(\mathbb{S}^2)$, pois por [(GONÇALVES; GUASCHI, 2004), Theorem 4(i)] e [(GONÇALVES; GUASCHI, 2005), Proposition 7] o

grupo $P_n(\mathbb{S}^2)$ é gerado por Δ_n^2 e o conjunto $X = \{A_{i,j} \mid 4 \leq j \leq n, 1 \leq i < j\}$ e Δ_n^2 , e os elementos do conjunto X têm permutação associada trivial e, então, agem em \mathbb{Z}^n de forma trivial.

Após descrevermos a estrutura do grupo das tranças puras emolduradas na esfera, voltamo-nos a nossa atenção agora para o estudo do abelianizado de $FB_n(\mathbb{S}^2)$ e série central inferior.

Proposição 3.2

1- Seja $n \geq 2$. Então $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2(n-1)}$.

2- Seja $n \geq 3$. Então $\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2)) = \Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$.

Demonstração. Para o item 1, a partir da relação (3.2) em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))$, segue que $\sigma_i = \sigma_{i+1}$. Além disso, pela relação (3.3) em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))$, obtemos:

$$\sigma_1 \sigma_1 \cdots \sigma_1 \sigma_1^2 \sigma_1 \cdots \sigma_1 \sigma_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1^{2(n-1)} = 1.$$

Temos ainda pela relação (3.5) em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))$, que $t_i = t_{i+1}$. Portanto,

$$\frac{FB_n(\mathbb{S}^2)}{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))} = \langle \sigma_1, t_1 \mid \sigma_1^{2(n-1)} = 1, [\sigma_1, t_1] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2(n-1)}.$$

Para ver o item 2, consideremos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))}{\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))} \longrightarrow \frac{FB_n(\mathbb{S}^2)}{\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))} \xrightarrow{p} \frac{FB_n(\mathbb{S}^2)}{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))} \longrightarrow 1.$$

Sabe-se pelo item 1 que

$$\frac{FB_n(\mathbb{S}^2)}{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))} = \langle \sigma_1, t_1 \mid [\sigma_1, t_1] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2(n-1)}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o homomorfismo p é um isomorfismo.

Como qualquer gerador σ_i em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$ é projetado no mesmo elemento em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))$, existe $a_i \in \Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$ (com $a_1 = 1$) tal que $\sigma_i = a_i \sigma_1$. Projetando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$, obtemos

$$a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 = a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1.$$

Pela definição da série central inferior os elementos do núcleo de p são centrais em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$, segue que

$$\sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_i a_i a_{i+1} = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_{i+1} a_i a_{i+1}$$

e, portanto, $a_i = a_{i+1}$. Como $a_1 = 1$, deduzimos que $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{n-1}$.

De modo análogo, cada gerador $t_j \in FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$ se projeta na mesma classe de $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))$, assim, existe $b_j \in \Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2))/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$ (com $b_1 = 1$) tal que $t_j = b_j t_1$. Projetando a relação $\sigma_j t_j = t_{j+1} \sigma_j$ em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$, temos

$$\sigma_j b_j t_1 = b_{j+1} t_1 \sigma_j.$$

Como $\sigma_j t_1 = t_1 \sigma_j$ para $j > 1$ (supondo $n \geq 3$) e os elementos do núcleo de p são centrais, segue que

$$b_j = b_{j+1}.$$

Consequentemente, $b_1 = 1$ implica $t_1 = \cdots = t_n$.

Note que a classe de σ_i comuta com a classe de t_j em $FB_n(\mathbb{S}^2)/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$, pois $\sigma_i t_1 = t_1 \sigma_i$ para $i > 1$. Portanto, p é um isomorfismo. Logo, $\Gamma_2(FB_n(\mathbb{S}^2)) = \Gamma_3(FB_n(\mathbb{S}^2))$. \square

Após a análise da série central inferior de $FB_n(\mathbb{S}^2)$, voltamos agora nossa atenção para a descrição de seu centro.

Proposição 3.3

Seja $n \geq 3$. Então $Z(FP_n(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_2$, onde \mathbb{Z}_2 é gerado Δ_n^2 .

Demonstração. Sabemos que $FP_n(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}^n \oplus P_n(\mathbb{S}^2)$. Como $Z(P_n(\mathbb{S}^2)) = \langle \Delta_n^2 \rangle$, então

$$Z(FP_n(\mathbb{S}^2)) = Z(\mathbb{Z}^n) \oplus Z(P_n(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_2.$$

\square

Teorema 3.4

Seja $n \geq 3$. Então $Z(FB_n(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, onde \mathbb{Z} é gerado por $t_1 \cdots t_n$ e \mathbb{Z}_2 é gerado Δ_n^2 .

Demonstração. Sabe-se pelo Teorema 1.24 que $Z(B_n(\mathbb{S}^2)) = \langle \Delta_n^2 \rangle$. De forma análoga a prova do Teorema 2.5, obtemos que $Z(FB_n(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z} \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$. O elemento Δ_n^2 tem ordem 2 em $B_n(\mathbb{S}^2)$ (ver (GILLETTE; VAN BUSKIRK, 1968)), então

$$Z(FB_n(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

\square

Definido o grupo de tranças emolduradas da esfera $FB_n(\mathbb{S}^2)$, podemos também definir o grupo de tranças emolduradas da esfera finitamente perfurada $FB_n(M_{0,p+1})$, $n, p \in \mathbb{Z}$, $n, p \geq 1$.

Definição 3.5

O grupo de tranças emolduradas da esfera finitamente perfurada $FB_n(M_{0,p+1})$ é o grupo gerado por $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \dots, \sigma_{p+n-1}, A_{1,p+1}, A_{2,p+1}, \dots, A_{p,p+1}, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{p+n}$ com as relações do Teorema 1.25 e relações adicionais

$$\begin{aligned} t_j t_k &= t_k t_j \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n, \\ \sigma_i t_j \sigma_i^{-1} &= \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i+1, \\ t_i, & \text{se } j = i, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i+1, \end{cases} \\ A_{i,p+1} t_j A_{i,p+1}^{-1} &= t_j \quad 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+n. \end{aligned}$$

O gerador $A_{i,j}$ é escrito como $A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$ e tem permutação associada trivial, por isso a ação nos geradores da moldura é trivial, ou seja,

$$A_{i,p+1}t_kA_{i,p+1}^{-1} = t_k \quad 1 \leq i \leq p, \quad p+1 \leq k \leq p+n.$$

O grupo $FB_n(M_{0,p+1})$ é uma extensão do grupo $B_n(M_{0,p+1})$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , como produto semidireto. De fato, considerando a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow FB_n(M_{0,p+1}) \xrightarrow{\pi} B_n(M_{0,p+1}) \longrightarrow 1, \quad (3.7)$$

temos que a inclusão $s: B_n(M_{0,p+1}) \hookrightarrow FB_n(M_{0,p+1})$ definida por $s(\sigma_i) = \sigma_i$ e $s(A_{j,l}) = A_{j,l}$ é uma seção para π , pois $\pi \circ s = \text{Id}_{B_n(M_{0,p+1})}$, ou seja, a sequência (3.7) cinde. Portanto,

$$FB_n(M_{0,p+1}) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(M_{0,p+1}).$$

3.2 O grupo de tranças emolduradas do toro $FB_n(\mathbb{T}^2)$

Nesta seção, introduziremos o grupo de tranças emolduradas do toro, denotado por $FB_n(\mathbb{T}^2)$. Este grupo é uma extensão do grupo de tranças $B_n(\mathbb{T}^2)$.

Definição 3.6

O grupo de tranças emolduradas do toro com n cordas, $FB_n(\mathbb{T}^2)$, é gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e t_1, \dots, t_n , sujeitos às relações (1.7)-(1.16) e relações adicionais

$$t_k t_l = t_l t_k, \quad (3.8)$$

$$\sigma_i t_k \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & k = i+1, \\ t_i, & k = i, \\ t_k, & k \neq i, i+1. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\rho_l t_k \rho_l^{-1} = t_k, \quad (3.10)$$

$$\tau_l t_k \tau_l^{-1} = t_k, \quad (3.11)$$

onde $k, l = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n-1$.

Este grupo pode ser descrito como uma extensão do grupo de tranças do toro $B_n(\mathbb{T}^2)$ por um grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow FB_n(\mathbb{T}^2) \longrightarrow B_n(\mathbb{T}^2) \longrightarrow 1,$$

isto é,

$$FB_n(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{T}^2),$$

onde a ação de $B_n(\mathbb{T}^2)$ sobre \mathbb{Z}^n é induzida pela ação da trança na moldura. Os geradores σ_i agem trocando t_i e t_{i+1} , enquanto os geradores ρ_l e τ_k agem trivialmente nos geradores da moldura, pois, como mencionado acima, a permutação associada a esses geradores (ρ_l e τ_k) é a trivial.

O homomorfismo de grupos $\pi: B_n(\mathbb{T}^2) \rightarrow S_n$ pode ser estendido a um homomorfismo de grupos $\hat{\pi}: FB_n(\mathbb{T}^2) \rightarrow S_n$ enviando cada t_j para a identidade. Chamamos o núcleo de $\hat{\pi}$ de grupo de **tranças puras emolduradas do toro** e o denotamos por $FP_n(\mathbb{T}^2)$.

O grupo de tranças puras emolduradas no toro $FP_n(\mathbb{T}^2)$ é o grupo de tranças puras onde as permutações das tranças são acompanhadas por um índice inteiro para cada corda, que pode ser visto como uma "torção" na corda. Isto é, $FP_n(\mathbb{T}^2)$ é uma extensão de $P_n(\mathbb{T}^2)$ por \mathbb{Z}^n .

Estruturalmente, sabendo que a permutação associada às tranças em $P_n(\mathbb{T}^2)$ é a trivial, o grupo de tranças puras emolduradas no toro é descrito como $FP_n(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^n \oplus P_n(\mathbb{T}^2)$, onde cada elemento de $FP_n(\mathbb{T}^2)$ é dado por $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n} \cdot \beta$, com $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ o vetor que representa a moldura em cada corda da trança pura, e $\beta \in P_n(\mathbb{T}^2)$.

Uma vez estabelecida a estrutura do grupo de tranças puras emolduradas do toro, $FP_n(\mathbb{T}^2)$, podemos investigar suas propriedades internas, em particular, interessa-nos determinar o seu centro. O resultado a seguir descreve precisamente o centro desse grupo.

Proposição 3.7

Seja $M = \mathbb{T}^2$, o toro, então $Z(FP_n(M)) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração. Sabemos que $FP_n(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^n \oplus P_n(\mathbb{T}^2)$. Por (PARIS; ROLFSEN, 1999) tem-se que $Z(P_n(\mathbb{T}^2)) = \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle$, logo

$$Z(FP_n(\mathbb{T}^2)) = Z(\mathbb{Z}^n) \oplus Z(P_n(\mathbb{T}^2)) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

□

A partir do centro de $FP_n(\mathbb{T}^2)$, passamos agora ao estudo do centro do grupo de tranças emolduradas do toro $FB_n(\mathbb{T}^2)$.

Teorema 3.8

Se $n \geq 3$, então

$$Z(FB_n(\mathbb{T}^2)) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle \cong \mathbb{Z}[\theta] \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow FP_n(\mathbb{T}^2) \longrightarrow FB_n(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

Sabe-se que para $n \geq 3$, temos $Z(S_n) = \{1\}$. Pelo Lema 2.3, segue que $\pi(Z(FB_n(\mathbb{T}^2))) \subset Z(S_n)$, logo $Z(FB_n(\mathbb{T}^2)) \subset FP_n(\mathbb{T}^2)$ e assim $Z(FB_n(\mathbb{T}^2)) \subset Z(FP_n(\mathbb{T}^2)) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle$.

Seja $z \in Z(FB_n(\mathbb{T}^2))$. Como $Z(FB_n(\mathbb{T}^2)) \subset Z(FP_n(\mathbb{T}^2)) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle$, então

$$z = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} (\rho_1 \cdots \rho_n)^{y_1} (\tau_1 \cdots \tau_n)^{y_2}.$$

Note que ρ_j , τ_j e σ_k , para $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-1$, comutam com $(\rho_1 \cdots \rho_n)$ e $(\tau_1 \cdots \tau_n)$, pois pelo Teorema 1.28 tem-se $Z(B_n(\mathbb{T}^2)) = \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle$. Além disso, $\rho_i t_j = t_j \rho_i$ e $\tau_i t_j = t_j \tau_i$ para todos i, j . Portanto, tanto $(\rho_1 \cdots \rho_n)$ quanto $(\tau_1 \cdots \tau_n)$ comutam com t_j para $i, j = 1, \dots, n$.

Por outro lado, como $\rho_i t_j = t_j \rho_i$ e $\tau_i t_j = t_j \tau_i$ para todos i, j , segue que $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$ comuta com ambos ρ_i e τ_i , para todos $i = 1, \dots, n$. No entanto, sabemos que

$$\sigma_i(t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i},$$

e para que a igualdade

$$t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i} = t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}$$

se mantenha nos inteiros, é necessário que $x_i = x_{i+1}$. Como isso deve valer para todo i , concluímos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Portanto, $Z(FB_n(\mathbb{T}^2))$ é o grupo abeliano livre de posto 3 gerado por $(t_1 \cdots t_n)$, $(\rho_1 \cdots \rho_n)$, e $(\tau_1 \cdots \tau_n)$. \square

Após a determinação do centro de $FB_n(\mathbb{T}^2)$, examinaremos o quociente desse grupo pelo seu centro no próximo resultado.

Teorema 3.9

Seja $FB_n(\mathbb{T}^2)$ o grupo de tranças emolduradas no toro com n cordas. Então

$$\frac{FB_n(\mathbb{T}^2)}{Z(FB_n(\mathbb{T}^2))} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \frac{B_n(\mathbb{T}^2)}{Z(B_n(\mathbb{T}^2))}.$$

Demonstração. Lembre-se que \mathbb{Z}^n é gerado pelo conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$. Pelo Teorema 3.8, temos que

$$Z(FB_n(\mathbb{T}^2)) = \langle (t_1 \cdots t_n) \rangle \oplus \langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle,$$

onde a cópia de \mathbb{Z} é gerada pelo elemento $t_1 \cdots t_n$.

Assim, como $FB_n(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{T}^2)$, $\langle (t_1 \cdots t_n) \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}^n$ e $\langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle \trianglelefteq B_n(\mathbb{T}^2)$, pelo Lema 2.7 temos:

$$\frac{FB_n(\mathbb{T}^2)}{Z(FB_n(\mathbb{T}^2))} \cong \frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}} \rtimes \frac{B_n(\mathbb{T}^2)}{\langle (\rho_1 \cdots \rho_n), (\tau_1 \cdots \tau_n) \rangle} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes \frac{B_n(\mathbb{T}^2)}{Z(B_n(\mathbb{T}^2))}.$$

\square

3.3 O grupo de tranças emolduradas do plano projetivo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$

Nesta seção, será introduzido o grupo de tranças emolduradas do plano projetivo, denotado por $FB_n(\mathbb{R}P^2)$. Daremos uma apresentação para esse grupo descrevendo seus geradores e relações, bem como investigamos questões estruturais.

Definição 3.10

O grupo de tranças emolduradas do plano projetivo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$ é gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_n, t_1, \dots, t_n$ com as seguintes relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1, \quad (3.12)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad (3.13)$$

$$\sigma_i \rho_k = \rho_k \sigma_i, \quad k \neq i, i+1, \quad (3.14)$$

$$\rho_i = \sigma_i \rho_{i+1} \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (3.15)$$

$$\rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_i^2, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (3.16)$$

$$\rho_1^2 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1, \quad (3.17)$$

$$t_k t_l = t_l t_k, \quad (3.18)$$

$$\sigma_i t_k \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } k = i, \\ t_i, & \text{se } k = i+1, \\ t_j, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\rho_i t_j \rho_i^{-1} = t_j, \quad (3.20)$$

onde $i, j = 1, \dots, n-1$ e $k, l = 1, \dots, n$.

Analisando a apresentação do grupo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$ na Definição 3.10, observamos que a apresentação mostra que o grupo de tranças emolduradas do plano projetivo é uma extensão do grupo de tranças do plano projetivo pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n . De fato, considerando o homomorfismo $\pi: FB_n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow B_n(\mathbb{R}P^2)$ definido por $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $\pi(\rho_j) = \rho_j$, $j = 1, \dots, n$, e $\pi(t_k) = 1$, $k = 1, \dots, n$, vemos que a imagem de π é o grupo $B_n(\mathbb{R}P^2)$ e que $\text{Ker}(\pi) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \cong \mathbb{Z}^n$. Assim existe uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow FB_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 1.$$

O grupo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$ é uma extensão de grupo $B_n(\mathbb{R}P^2)$ pelo grupo \mathbb{Z}^n como produto semidireto, em que σ_i age trocando as coordenadas i e $i+1$ e ρ_j age trivialmente nos geradores da moldura t_k , pois a permutação associada ao gerador ρ_j é a trivial, portanto, $FB_n(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{R}P^2)$.

O próximo resultado trata da estrutura do abelianizado do grupo de tranças emolduradas do plano projetivo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$.

Proposição 3.11

Seja $n \geq 2$. Então $(FB_n(\mathbb{R}P^2))^{ab} \cong FB_n(\mathbb{R}P^2)/\Gamma_1(FB_n(\mathbb{R}P^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Demonstração. Analisando as relações do grupo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$ em $(FB_n(\mathbb{R}P^2))^{ab}$, vemos que a partir da relação (3.13), segue que $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ e, da relação (3.16), tem-se $\sigma_i^2 = 1$. Da relação (3.15), temos $\rho_i = \rho_{i+1}$, e a partir da relação (3.17), obtemos $\rho_1^2 = 1$. Da relação (3.19), segue que $t_i = t_{i+1}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} (FB_n(\mathbb{R}P^2))^{ab} &= FB_n(\mathbb{R}P^2)/\Gamma_1(FB_n(\mathbb{R}P^2)) \\ &\cong \langle \sigma_1, \rho_1, t_1 \mid [\sigma_1, \rho_1] = [\sigma_1, t_1] = [\rho_1, t_1] = \sigma_1^2 = \rho_1^2 = 1 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

□

Apesar da complexidade imposta pelo plano projetivo por ser uma superfície não orientável, a seguir apresentamos o resultado em que calculamos o centro do grupo $FB_n(\mathbb{R}P^2)$.

Teorema 3.12

Seja $n \geq 2$. então $Z(FB_n(\mathbb{R}P^2)) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}[\theta] \oplus \mathbb{Z}_2$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Seja $z \in Z(FB_n(\mathbb{R}P^2))$. Podemos escrever

$$z = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n} \beta,$$

com $\beta \in B_n(\mathbb{R}P^2)$ e $a_i \in \mathbb{Z}$. Note que

$$z t_j = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \beta t_j = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} (\beta t_j \beta^{-1}) \beta.$$

Assim, para que $z t_j = t_j z$, é necessário

$$\beta t_j \beta^{-1} = t_j, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n-1.$$

No entanto, a ação de $B_n(\mathbb{R}P^2)$ sobre \mathbb{Z}^n é não trivial, pois os geradores σ_i permutam t_i e t_{i+1} . Logo, para que as igualdades acima se verifiquem, β deve agir trivialmente sobre \mathbb{Z}^n . Além disso, deve-se ter $\beta h = h \beta$ para todo $h \in B_n(\mathbb{R}P^2)$, ou seja, $\beta \in Z(B_n(\mathbb{R}P^2))$. Pelo Teorema 1.30, sabe-se que $Z(B_n(\mathbb{R}P^2)) = \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Como, pelo Teorema 2.5, temos que $\Delta_n^2 t_j = t_j \Delta_n^2$ para todo $j = 1, \dots, n$, segue que $\beta = \Delta_n^{2k}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Note que se k é par, então β é o elemento trivial.

Dessa forma, podemos escrever

$$z = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \Delta_n^{2k}.$$

Note que $z \rho_j = \rho_j z$, pois $\rho_j t_k = t_k \rho_j$ para todo $j, k = 1, \dots, n$. Resta verificar sob quais condições se tem $\sigma_i z \sigma_i^{-1} = z$. Como σ_i permuta t_i e t_{i+1} , deixando os demais fixos, segue que

$$\sigma_i(t_i^{a_i} t_{i+1}^{a_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{a_{i+1}} t_{i+1}^{a_i}.$$

Para que $t_i^{a_{i+1}} t_{i+1}^{a_i} = t_i^{a_i} t_{i+1}^{a_{i+1}}$, é necessário $a_i = a_{i+1}$. Como isso vale para todo $i = 1, \dots, n-1$, conclui-se

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a.$$

Portanto, qualquer elemento do centro $Z(FB_n(\mathbb{R}P^2))$ tem a forma

$$z = (t_1 \cdots t_n)^a \Delta_n^{2k}.$$

Consequentemente,

$$Z(FB_n(\mathbb{R}P^2)) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle \cong \mathbb{Z}[\theta] \oplus \mathbb{Z}_2.$$

□

3.4 O grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein $FB_n(\mathbb{K})$

Nesta seção, definimos o grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein, denotado por $FB_n(\mathbb{K})$. São conhecidas na literatura diversas apresentações do grupo de tranças da garrafa de Klein e podem ser vistas em (BELLINGERI, 2004), (BIRMAN, 1969) e (GONZÁLEZ-MENESES, 2001). Para definir o grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein iremos considerar a apresentação do grupo de tranças da garrafa de Klein dada em (PEREIRO, 2015). Apresentamos uma descrição do grupo $FB_n(\mathbb{K})$ por meio de seus geradores e relações, e discutimos aspectos estruturais relevantes.

Definição 3.13

O grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein $FB_n(\mathbb{K})$ é gerado por $a, b, t_1, \dots, t_n, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, com as seguintes relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{se } |i - j| > 1, \quad (3.21)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (3.22)$$

$$a \sigma_j = \sigma_j a, \quad j \geq 2, \quad (3.23)$$

$$b \sigma_j = \sigma_j b, \quad j \geq 2, \quad (3.24)$$

$$b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1, \quad (3.25)$$

$$a(\sigma_1 a \sigma_1) = (\sigma_1 a \sigma_1) a, \quad (3.26)$$

$$b \sigma_1^{-1} b \sigma_1 = \sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1} b, \quad (3.27)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 = b a^{-1} b^{-1} a^{-1}, \quad (3.28)$$

$$t_k t_l = t_l t_k, \quad (3.29)$$

$$\sigma_i t_k \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } k = i, \\ t_i, & \text{se } k = i + 1, \\ t_j, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$a t_k a^{-1} = t_k, \quad (3.31)$$

$$b t_k b^{-1} = t_k. \quad (3.32)$$

Analogamente ao caso da esfera, toro e do plano projetivo, existe um homomorfismo de esquecimento da moldura

$$\pi: FB_n(\mathbb{K}) \longrightarrow B_n(\mathbb{K}),$$

definido por $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$, $\pi(a) = a$, $\pi(b) = b$ e $\pi(t_j) = 1$. O núcleo de π é o grupo abeliano livre \mathbb{Z}^n , gerado pelos t_1, \dots, t_n , de modo que obtemos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow FB_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\pi} B_n(\mathbb{K}) \longrightarrow 1. \quad (3.33)$$

A inclusão $s: B_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow FB_n(\mathbb{K})$ definida por $s(\sigma_i) = \sigma_i$, $s(a) = a$, $s(b) = b$ é uma seção para a sequência exata curta (3.33), pois $\pi \circ s = Id_{B_n(\mathbb{K})}$, o que mostra que a sequência (3.33) cinde. A ação de $B_n(\mathbb{K})$ sobre \mathbb{Z}^n é a seguinte: os geradores σ_i trocam os geradores t_i e t_{i+1} :

$$\sigma_i t_i = t_{\sigma_i(i)} \sigma_i = t_{i+1} \sigma_i \quad \text{e} \quad \sigma_i t_{i+1} = t_{\sigma_i(i+1)} \sigma_i = t_i \sigma_i,$$

enquanto os demais t_j permanecem inalterados. Os geradores a e b têm permutação associada trivial, então a ação desses geradores sobre os geradores da moldura é trivial, ou seja,

$$a t_k = t_{a(k)} a = t_k a, \quad \text{e} \quad b t_k = t_{b(k)} b = t_k b \quad \text{para todo} \quad k = 1, \dots, n.$$

Portanto,

$$FB_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(\mathbb{K}).$$

O próximo resultado tem como objetivo descrever a estrutura algébrica do abelianizado do grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein, $FB_n(\mathbb{K})$.

Proposição 3.14

Seja $n \geq 2$. Então

$$(FB_n(\mathbb{K}))^{ab} \cong FB_n(\mathbb{K}) / \Gamma_2(FB_n(\mathbb{K})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Demonstração. Analisaremos as relações dadas na Definição 3.13 do grupo $FB_n(\mathbb{K})$ em $(FB_n(\mathbb{K}))^{ab}$. A partir da relação (3.22) obtemos $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-2$, denotamos a classe desse elemento por σ_1 . Da relação (3.25) segue que $\sigma_1^2 = 1$. Sabendo que $\sigma_1^2 = 1$, temos da relação (3.28) que $a^2 = 1$. Da relação (3.24) segue que $t_i = t_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n$, e denotamos a classe desse elemento por t_1 . Portanto,

$$\begin{aligned} (FB_n(\mathbb{T}))^{ab} &= \langle a, b, t_1, \sigma_1 \mid [a, b] = [a, t_1] = [a, \sigma_1] = [b, t_1] = [b, \sigma_1] = [t_1, \sigma_1] = 1, a^2 = \sigma_1^2 = 1 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos um estudo da série central inferior.

Proposição 3.15

Para $n \geq 3$, $\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K})) = \Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$.

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))}{\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))} \longrightarrow \frac{FB_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))} \xrightarrow{p} \frac{FB_n(\mathbb{K})}{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))} \longrightarrow 1.$$

Sabemos pela Proposição 3.14 que

$$\frac{FB_n(\mathbb{K})}{\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Desejamos mostrar que p é um isomorfismo. Os $\sigma_i \in FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$ se projetam para o mesmo elemento de $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))$ para cada $i = 1, \dots, n-1$, então existe $c_i \in \Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$ (onde $c_1 = 1$) tal que $\sigma_i = c_i \sigma_1$. Projetando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, vemos que $c_i \sigma_1 c_{i+1} \sigma_1 c_i \sigma_1 = c_{i+1} \sigma_1 c_i \sigma_1 c_{i+1} \sigma_1$. A partir da definição de série central inferior, os elementos do núcleo de p são centrais em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, assim

$$\begin{aligned} c_i \sigma_1 c_{i+1} \sigma_1 c_i \sigma_1 = c_{i+1} \sigma_1 c_i \sigma_1 c_{i+1} \sigma_1 &\Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 c_i c_{i+1} c_i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 c_{i+1} c_i c_{i+1} \\ &\Leftrightarrow c_i c_{i+1} c_i = c_{i+1} c_i c_{i+1} \\ &\Leftrightarrow c_i = c_{i+1}, \end{aligned}$$

isto é, como $c_1 = 1$, obtemos $\sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1} = \sigma$. Temos que σ comuta com as classes de a e b em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, pois σ_j comuta com a e b (relações (3.23) e (3.24)) em $FB_n(\mathbb{K})$ se $j \geq 2$ (estamos usando $n \geq 3$).

De forma similar, os $t_j \in FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$ se projetam para o mesmo elemento em $FB_n/\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))$ para cada, $j = 1, \dots, n$, então existe $d_i \in \Gamma_2(FB_n(\mathbb{K}))/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$ (onde $d_1 = 1$) tal que $t_j = b_j t_1$. Projetando a relação $\sigma_j t_j = t_{j+1} \sigma_j$ em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, vemos que $\sigma_j d_j t_1 = d_{j+1} t_1 \sigma_j$. Como $\sigma_j t_1 = t_1 \sigma_j$ se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 3$) e todos os elementos do núcleo de p são centrais em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, segue que

$$\sigma_j d_j t_1 = d_{j+1} t_1 \sigma_j \Leftrightarrow d_j \sigma_j t_1 = d_{j+1} \sigma_j t_1 \Leftrightarrow d_j = d_{j+1},$$

ou seja, como $d_1 = 1$, tem-se $t_1 = \dots = t_n = t$. Temos que a classe t comuta com a classe de a , b e σ_i em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, pois $at_j = t_j a$ e $bt_k = t_k b$ para todo $j = 1, \dots, n$, e $\sigma_i t_1 = t_1 \sigma_i$ para todo $i \geq 2$ em $FB_n(\mathbb{T})$.

Usando as demais relações do grupo $FB_n(\mathbb{K})$ dadas pela Definição 3.13, temos outras relações em $FB_n(\mathbb{K})/\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$, como vemos a seguir.

Da relação $b(\sigma_1^{-1} b \sigma_1) = (\sigma_1^{-1} b \sigma_1^{-1}) b$, obtemos $\sigma^2 = 1$. A partir da relação $b^{-1} \sigma_1 a = \sigma_1 a \sigma_1 b^{-1} \sigma_1$ segue que $b^{-1} a = ab^{-1} \sigma^2$, e como $\sigma^2 = 1$ temos que $ab = ba$. Da relação

$$ba^{-1} b^{-1} a^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}^2 \dots \sigma_2 \sigma_1$$

vemos que $a^{-2} = \sigma^{2(n-1)}$, sendo $\sigma^2 = 1$ obtemos $a^2 = 1$.

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{FB_n(\mathbb{K})}{\Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))} &= \langle a, b, t, \sigma \mid [a, b] = [a, t] = [a, \sigma] = [b, t] = [b, \sigma] = [t, \sigma] = 1, a^2 = \sigma^2 = 1 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

e, portanto, o homomorfismo sobrejetor p é de fato um isomorfismo, assim, $\Gamma_2(FB_n(\mathbb{K})) = \Gamma_3(FB_n(\mathbb{K}))$. □

Encerramos esta seção com o cálculo do centro do grupo de tranças emolduradas da garrafa de Klein $FB_n(\mathbb{K})$.

Teorema 3.16

Seja $n \geq 2$. Então $Z(FB_n(\mathbb{K})) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle (b_n \cdots b_1)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}[\theta] \oplus \mathbb{Z}$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Seja $z \in Z(FB_n(\mathbb{K}))$. Podemos escrevê-lo como

$$z = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} \beta,$$

com $\beta \in B_n(\mathbb{K})$ e $x_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, \dots, n$. Note que

$$zt_j = t_1^{x_1} \cdots t_n^{x_n} \beta t_j = t_1^{x_1} \cdots t_n^{x_n} (\beta t_j \beta^{-1}) \beta.$$

Para que tenhamos a igualdade $zt_j = t_j z$, é necessário que

$$\beta t_j \beta^{-1} = t_j, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n,$$

Vamos verificar sob quais condições $\sigma_i z = z \sigma_i$. Sabemos que σ_i troca t_i e t_{i+1} e deixa os demais fixos. Assim, $\sigma_i(t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i}$, mas para que seja igual a $t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}$, é necessário que $x_i = x_{i+1}$. Isso vale para todo $i = 1, \dots, n-1$, logo $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. Temos ainda que $at_j = t_j a$ e $bt_j = t_j b$ para todo $j = 1, \dots, n$,

Portanto, $z = (t_1 \cdots t_n)^x (b_n \cdots b_1)^{2k}$. Concluimos que

$$Z(FB_n(\mathbb{K})) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle (b_n \cdots b_1)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}[\theta] \oplus \mathbb{Z}.$$

□

3.5 Os grupos de tranças emolduradas de superfícies orientáveis e de superfícies orientáveis finitamente perfuradas

Nesta seção, introduziremos os grupos de tranças emolduradas associados a superfícies orientáveis. Seja M_g uma superfície orientável fechada de gênero $g \geq 2$. O **grupo de tranças emolduradas em M_g** com n cordas, denotado por $FB_n(M_g)$, é definido como uma generalização do grupo de tranças de superfícies orientáveis $B_n(M_g)$.

Mais geralmente, se considerarmos a superfície $M_{g,p}$, obtida a partir de M_g pela remoção de p pontos distintos, teremos o **grupo de tranças emolduradas em superfícies orientáveis finitamente perfuradas**, denotado por $FB_n(M_{g,p})$. Este grupo também pode ser interpretado como uma generalização do grupo de tranças de superfícies orientáveis finitamente perfuradas $B_n(M_{g,p})$.

A partir dos geradores do grupo de tranças de superfícies orientáveis, ilustrados na Figura 11, podemos construir o grupo de tranças emolduradas adicionando um novo conjunto de geradores.

Mais precisamente, acrescentamos n geradores, denotados por t_j , $j = 1, \dots, n$, cada um responsável por gerar a moldura da j -ésima corda da trança.

Desta forma, trazemos a seguir uma apresentação para o grupo de tranças emolduradas de superfícies orientáveis.

Definição 3.17

Sejam $g, n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 1$ e $g \geq 2$. O grupo de tranças emolduradas da superfície M_g , $FB_n(M_g)$, é o grupo gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, a_1, a_2, \dots, a_g , b_1, b_2, \dots, b_g , t_1, t_2, \dots, t_n , com as relações do Teorema 1.33 e relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n, \quad (3.34)$$

$$\sigma_i t_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i + 1, \\ t_i, & \text{se } j = i, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases} \quad (3.35)$$

$$a_r t_k = t_k a_r \quad 1 \leq r \leq g, k = 1, \dots, n, \quad (3.36)$$

$$b_r t_k = t_k b_r \quad 1 \leq r \leq g, k = 1, \dots, n. \quad (3.37)$$

A partir da Definição 3.17, vemos que o grupo $FB_n(M_g)$ é um produto semidireta do grupo $B_n(M_g)$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , como pode ser ratificado no próximo resultado.

Teorema 3.18

Seja $n \geq 2$. Então $FB_n(M_g) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(M_g)$, $g \geq 2$.

Demonstração. Definamos $\pi: FB_n(M_g) \rightarrow B_n(M_g)$ definido por $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$, $\pi(a_r) = a_r$, $\pi(b_r) = b_r$ e $\pi(t_j) = 1$.

Pelas relações dadas no Definição 3.17, π é bem definido e é sobrejetor, pois σ_i, a_r, b_r geram $B_n(M_g)$. Note ainda que $\text{Ker}(\pi) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \cong \mathbb{Z}^n$. Desta forma, obtemos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow FB_n(M_g) \xrightarrow{\pi} B_n(M_g) \longrightarrow 1. \quad (3.38)$$

As relações (3.35) mostram que a conjugação pelos geradores σ_i permuta os geradores t_j trocando t_i com t_{i+1} e fixando os demais, enquanto as relações (3.36) e (3.37) mostram que a_r e b_r atuam trivialmente sobre os t_j , pois a permutação associada aos geradores a_r e b_r é a trivial. Portanto a conjugação em $FB_n(M_g)$ define uma ação do grupo $B_n(M_g)$ no grupo \mathbb{Z}^n , onde cada σ_i atua pela permutação das coordenadas i e $i + 1$, enquanto cada a_r, b_r age como a identidade em \mathbb{Z}^n , pois a permutação associada a esses geradores é trivial.

Para ver que a sequência em (3.38) cinde, note que a inclusão $s: B_n(M_g) \hookrightarrow FB_n(M_g)$ definida por $s(\sigma_i) = \sigma_i$, $s(a_r) = a_r$, $s(b_r) = b_r$ é uma seção para a sequência (3.38), pois $\pi \circ s = \text{Id}_{B_n(M_g)}$. Portanto, concluímos que $FB_n(M_g) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(M_g)$.



Para o caso de superfícies orientáveis finitamente perfuradas, temos a seguinte apresentação.

Definição 3.19

Sejam $g, n, p \in \mathbb{Z}$, com $g, n, p \geq 1$. O grupo de tranças emolduradas da superfície $M_{g,p}$, $FB_n(M_{g,p})$, é o grupo gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, a_1, a_2, \dots, a_g , b_1, b_2, \dots, b_g , z_1, z_2, \dots, z_{p-1} , t_1, t_2, \dots, t_n , com as relações do Teorema 1.34 e relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n, \tag{3.39}$$

$$\sigma_i t_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i + 1, \\ t_i, & \text{se } j = i, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$a_r t_j = t_j a_r \quad 1 \leq r \leq g, j = 1, \dots, n, \tag{3.41}$$

$$b_r t_j = t_j b_r \quad 1 \leq r \leq g, j = 1, \dots, n, \tag{3.42}$$

$$z_j t_j = t_j z_j \quad j = 1, \dots, p - 1, j = 1, \dots, n. \tag{3.43}$$

Assim como o grupo $FB_n(M_g)$, vemos que o grupo $FB_n(M_{g,p})$ é um produto semidireto do grupo $B_n(M_{g,p})$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , comprovado no resultado a seguir.

Teorema 3.20

Seja $n \geq 2$. Então $FB_n(M_{g,p}) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(M_{g,p})$, $g, p \geq 1$.

Demonstração. A prova é similar à prova do Teorema 3.18.



3.6 Os grupos de tranças emolduradas de superfícies não orientáveis e de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas

Nesta seção, introduziremos os grupos de tranças emolduradas associados a superfícies não orientáveis.

Seja N_g uma superfície não orientável fechada de gênero $g \geq 3$. O **grupo de tranças emolduradas** em N_g com n cordas, denotado por $FB_n(N_g)$, é definido como uma generalização do grupo de tranças em superfícies não orientáveis $B_n(N_g)$.

De modo mais geral, ao considerarmos a superfície $N_{g,p}$, $g, p \geq 1$, obtida a partir de N_g pela remoção de p pontos distintos, teremos o **grupo de tranças emolduradas em superfícies não orientáveis finitamente perfuradas**, denotado por $FB_n(N_{g,p})$. Este grupo também pode ser interpretado como uma generalização do grupo de tranças $B_n(N_{g,p})$ definido para superfícies não orientáveis com um número finito perfurações.

A partir dos geradores do grupo de tranças de superfícies não orientáveis, ilustrados na Figura 13, podemos construir o grupo de tranças emolduradas mediante a adição de um novo conjunto de geradores. Especificamente, introduzimos n geradores adicionais, denotados por t_j , $j = 1, \dots, n$, sendo que cada um representa o gerador da moldura da j -ésima corda da trança.

Definição 3.21

Sejam $g, n \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 1$ e $g \geq 3$. O grupo de tranças emolduradas da superfície N_g , $FB_n(N_g)$, é o grupo gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, a_1, a_2, \dots, a_g , t_1, t_2, \dots, t_n , com as relações do Teorema 1.35 e relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j, \quad (3.44)$$

$$\sigma_i t_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i, \\ t_i, & \text{se } j = i + 1, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

$$a_l t_j a_l^{-1} = t_j, \quad (3.46)$$

onde $j, k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n - 1$ e $l = 1, \dots, g$.

A partir da Definição 3.21, vemos que o grupo $FB_n(N_g)$ é uma extensão do grupo $B_n(N_g)$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , como será evidenciado no resultado a seguir.

Teorema 3.22

Seja $n \geq 2$. Então $FB_n(N_g) = \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(N_g)$, $g \geq 3$.

Demonstração. Definamos o homomorfismo $\pi : FB_n(N_g) \rightarrow B_n(N_g)$ por $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n - 1$, $\pi(a_r) = a_r$, $r = 1, \dots, g$, e $\pi(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Pelas relações que definem $FB_n(N_g)$ verifica-se que π está bem definido e é sobrejetivo, pois as imagens dos geradores σ_i e a_r geram $B_n(N_g)$. Além disso, temos que $\text{Ker}(\pi) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \cong \mathbb{Z}^n$. Assim obtemos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow FB_n(N_g) \xrightarrow{\pi} B_n(N_g) \rightarrow 1. \quad (3.47)$$

A inclusão $s : B_n(N_g) \hookrightarrow FB_n(N_g)$ define uma seção para a sequência (3.47), pois $\pi \circ s = \text{id}_{B_n(N_g)}$, ou seja, a sequência (3.47) cinde. A ação por conjugação de $B_n(N_g)$ em \mathbb{Z}^n é descrita pelas relações (3.45) e (3.46), respectivamente, onde vemos que $\sigma_i t_i \sigma_i^{-1} = t_{\sigma_i(i)} = t_{i+1}$ e $\sigma_i t_{i+1} \sigma_i^{-1} = t_{\sigma_i(i+1)} = t_i$, e $a_r t_k a_r^{-1} = t_{a_r(k)} = t_k$, pois permutação associada a cada gerador a_r é a trivial. Portanto,

$$FB_n(N_g) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(N_g).$$

□

Para o caso de superfícies não orientáveis finitamente perfuradas, temos a seguinte apresentação.

Definição 3.23

Sejam $n, g, p \in \mathbb{Z}$, com $n, g, p \geq 1$. O grupo de tranças emolduradas da superfície $N_{g,p}$, $FB_n(N_{g,p})$, é gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, $a_1, a_2, \dots, a_g, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$, t_1, t_2, \dots, t_n , com as relações do Teorema 1.36 e relações adicionais

$$t_j t_k = t_k t_j, \quad (3.48)$$

$$\sigma_i t_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i + 1, \\ t_i, & \text{se } j = i, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases} \quad (3.49)$$

$$a_l t_j a_l^{-1} = t_j, \quad (3.50)$$

$$z_r t_j z_r^{-1} = t_j, \quad (3.51)$$

para $j, k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n - 1$, $l = 1, \dots, g$, $r = 1, \dots, p - 1$.

Assim como no caso do grupo $FB_n(N_g)$, vemos que o grupo $FB_n(N_{g,p})$ é um produto semidireto do grupo $B_n(N_{g,p})$ pelo grupo abeliano livre de posto n , \mathbb{Z}^n , como pode ser visto no resultado a seguir.

Teorema 3.24

Seja $n \geq 2$. Então $FB_n(N_{g,p}) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(N_{g,p})$, com $g, p \geq 1$.

Demonstração. A prova é análoga à do Teorema 3.22. □

3.7 O centro de superfícies grandes

Uma questão clássica na teoria dos grupos de tranças consiste em determinar a estrutura do centro desses grupos. Em (CHOW, 1948) provou-se o grupo de tranças clássico B_n , definido no plano, tem centro cíclico infinito para $n \geq 2$. Alguns outros grupos de tranças de superfícies também têm centros não triviais, como o da esfera (ver (GILLETTE; VAN BUSKIRK, 1968)) e plano projetivo (ver (VAN BUSKIRK, 1966)). Uma superfície compacta M será chamada **grande** se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2, \mathbb{D}^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{S}^1 \times I$, faixa de Möbius, ou garrafa de Klein.

Proposição 3.25 ((PARIS; ROLFSEN, 1999), Proposition 1.6)

Seja M uma superfície compacta grande. Então, o centro $Z(B_n(M))$ é um grupo trivial.

A seguir, trazemos um resultado acerca do centro dos grupos de tranças emolduradas em superfícies grandes.

Teorema 3.26

Seja M uma superfície compacta grande. Se $n \geq 2$, então $Z(FB_n(M)) = \mathbb{Z}[\theta]$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Seja $FB_n(M) \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n(M)$ o grupo de tranças emolduradas sobre uma superfície compacta grande M .

Seja $z \in Z(FB_n(M))$. Podemos escrever

$$z = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} \cdot \beta,$$

com $\beta \in B_n(M)$ e $x_i \in \mathbb{Z}$. Note que

$$zt_j = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} \cdot \beta t_j = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n} \cdot (\beta t_j \beta^{-1}) \beta.$$

Para que $zt_j = t_j z$, devemos ter

$$\beta t_j \beta^{-1} = t_j \quad j = 1, \dots, n,$$

ou seja, β fixa todos os geradores t_j por conjugação. Sendo M uma superfície, os geradores de superfícies do grupo $B_n(M)$ agem trivialmente sobre \mathbb{Z}^n , veja Definição 3.17 e Definição 3.21. Mas a ação dos geradores de Artin σ_i sobre \mathbb{Z}^n é não trivial, pois trocam t_i e t_{i+1} . Além disso, devemos ter $\beta h = h \beta$ para todo $h \in B_n(M)$, ou seja, $\beta \in Z(B_n(M))$. Pela Proposição 3.25, $Z(B_n(M))$ é trivial. Portanto, $\beta = 1$.

Pelo feito acima, então $z = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$. Como supracitado, os geradores de superfícies comutam com os geradores t_j . Ademais, vamos verificar sob quais condições temos a igualdade $\sigma_i z = z \sigma_i$. Sabemos que $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$, então $\sigma(t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{x_{i+1}} t_{i+1}^{x_i}$. Porém, para que $\sigma(t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}) \sigma_i^{-1} = t_i^{x_i} t_{i+1}^{x_{i+1}}$, devemos ter $x_i = x_{i+1}$, e como vale para todo i , $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. Portanto, $z = (t_1 \cdots t_n)^x$, ou seja, $Z(FB_n(M)) = \langle (t_1 \cdots t_n) \rangle \cong \mathbb{Z}$. \square

De maneira geral, para os grupos de tranças emolduradas de superfícies $FB_n(M)$, é percebido que

$$Z(FB_n(M)) = \langle (t_1 \cdots t_n) \rangle \oplus Z(B_n(M)) \cong \mathbb{Z} \oplus Z(B_n(M)).$$

Como proposta de estudos futuros acerca dos grupos de tranças emolduradas de superfícies $FB_n(M)$, pretendemos fazer uma comparação detalhada dos grupos definidos aqui e os grupos definidos por (BELLINGERI; GERVAIS, 2012). Além disso, fazer uma descrição do "splitting problem" (problema da cisão) para os grupos de tranças puras emolduradas $FP_n(M)$, para qualquer superfície M , seguindo a resposta dada nos trabalhos (GONÇALVES; GUASCHI, 2005), (GONÇALVES; GUASCHI, 2007) e (GONÇALVES; GUASCHI et al., 2025) no caso clássico. Temos ainda a perspectiva de estudar a relação entre os grupos de tranças emolduradas $FB_n(M)$ e os grupos cristalográficos.

Capítulo 4

O grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n

Neste capítulo, introduzimos o grupo de tranças virtuais emolduradas, uma nova construção na literatura matemática, que amplia e generaliza conceitos existentes na teoria de grupos de tranças. Nosso objetivo é definir formalmente esse grupo, estabelecer seus geradores e relações, e investigar sua estrutura algébrica em profundidade.

Nessa primeira seção, abordaremos o grupo de tranças virtuais, que constitui a base para o estudo apresentado neste capítulo. A compreensão da estrutura e das propriedades desse grupo é muito importante, uma vez que o grupo de tranças virtuais emolduradas pode ser visto como uma generalização do grupo de tranças virtuais. Assim, essa primeira seção tem como objetivo introduzir os conceitos e resultados necessários que servirão de suporte para a análise do grupo de tranças virtuais emolduradas, apresentada na seção seguinte.

4.1 O grupo de tranças virtuais VB_n

O grupo de tranças virtuais, denotado por VB_n , foi introduzido por (KAUFFMAN, 1999), como uma generalização do grupo de tranças clássico. A motivação inicial para estudar tranças virtuais veio do estudo de nós virtuais, que também foram propostos por Kauffman no mesmo período.

As tranças virtuais estão associadas a diagramas que permitem cruzamentos clássicos e virtuais, ampliando as possibilidades e abrindo novas conexões com a topologia e a álgebra. Para mais detalhes, recomendamos (NANDA; SINGH, 2020) e (KAMADA, 2007). Tal grupo possui uma estrutura que pode ser caracterizada por meio de geradores e relações. A seguir, apresentamos uma forma de descrever essa estrutura para o grupo VB_n , e tal apresentação pode ser encontrada em (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009).

Definição 4.1

Seja $n \geq 2$. O grupo de tranças virtuais em n cordas, denotado por VB_n , é o grupo gerado por σ_i

(geradores clássicos) e v_i (geradores virtuais), para $i = 1, 2, \dots, n-1$, com relações

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1 \quad (4.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.2)$$

$$v_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

$$v_i v_j = v_j v_i, \quad |i-j| > 1 \quad (4.4)$$

$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (4.5)$$

$$\sigma_i v_j = v_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1 \quad (4.6)$$

$$v_i v_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} v_i v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (4.7)$$

Geometricamente o cruzamento virtual entre as cordas i e $i+1$ pode ser visto na Figura 16.

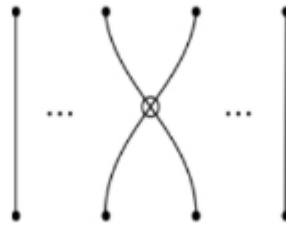


Figura 16 – Cruzamento virtual v_i .

O grupo de tranças virtuais, introduzido por (KAUFFMAN, 1999), estende o grupo de tranças clássico ao incorporar cruzamentos virtuais. A partir dessa generalização, em (BARDAKOV, 2004) definiu-se um subgrupo análogo ao das tranças puras: o grupo das tranças puras virtuais. Esse subgrupo é formado pelas tranças virtuais que possuem permutação associada trivial. De acordo com (BARDAKOV, 2004), a partir da apresentação de VB_n pode-se definir um homomorfismo sobrejetivo $\pi_P: VB_n \rightarrow S_n$ tal que $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = s_i = (i \ i+1)$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. O núcleo $\text{Ker}(\pi_P)$ desse homomorfismo é chamado de **grupo das tranças puras virtuais** e é denotado por VP_n . O grupo VP_n é um subgrupo normal de VB_n . Além disso, como $VP_n \cap S_n = e$ e $VB_n = VP_n \cdot S_n$, então $VB_n = VP_n \times S_n$.

Consideremos os seguintes elementos de VP_n :

$$\lambda_{i,i+1} = v_i \sigma_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda_{i+1,i} = v_i \lambda_{i,i+1} v_i = \sigma_i^{-1} v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda_{i,j} = v_{j-1} v_{j-2} \cdots v_{i+1} \lambda_{i,i+1} v_{i+1} \cdots v_{j-2} v_{j-1}, \quad 1 \leq i < j-1 \leq n-1,$$

$$\lambda_{j,i} = v_{j-1} v_{j-2} \cdots v_{i+1} \lambda_{i+1,i} v_{i+1} \cdots v_{j-2} v_{j-1}, \quad 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

Teorema 4.2 ((BARDAKOV, 2004), Theorem 1)

O grupo VP_n admite uma apresentação com os geradores do tipo $\{\lambda_{k,l}\}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, e as seguintes

relações:

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \quad (4.8)$$

$$\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i}, \quad (4.9)$$

onde as letras distintas representam índices distintos.

Assim como o núcleo do homomorfismo π_P foi definido e estudado em (BARDAKOV, 2004), no trabalho (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009) é introduzido e explorado o núcleo de outro homomorfismo do grupo de tranças virtuais VB_n no grupo simétrico S_n . Bardakov e Bellingeri definem o homomorfismo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ dado por $\pi_K(\sigma_i) = 1$ e $\pi_K(v_i) = s_i = (i \ i+1)$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. O núcleo de π_K é denotado por H_n em (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), mas usualmente é utilizada a notação KB_n . Também em (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009) é dada uma apresentação para o grupo KB_n . O grupo KB_n é gerado pelos elementos:

$$\begin{aligned} x_{i,i+1} &= \sigma_i, \\ x_{i+1,i} &= v_i \sigma_i v_i, \\ x_{i,j} &= v_{j-1} \cdots v_{i+1} \sigma_i v_{i+1} \cdots v_{j-1}, \\ x_{j,i} &= v_{j-1} \cdots v_{i+1} v_i \sigma_i v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1}, \end{aligned}$$

para $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

Proposição 4.3 ((BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Proposition 17)

O grupo KB_n admite uma apresentação com geradores $\{x_{k,l}\}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, e as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_{i,j}x_{k,l} &= x_{k,l}x_{i,j} \\ x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} &= x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}, \end{aligned}$$

onde as letras distintas representam índices distintos.

A partir do grupo KB_n é dada uma outra decomposição do grupo VB_n como produto semidireto, como afirma o resultado a seguir.

Corolário 4.4 ((BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Corollary 18)

O grupo VB_n é isomorfo a $KB_n \rtimes S_n$, onde S_n age por permutação dos índices.

A seguir, apresentamos um resultado importante que evidencia uma distinção fundamental entre os grupos VP_n e KB_n .

Proposição 4.5 ((BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Proposition 21)

Os grupos VP_n e KB_n não são isomorfos para $n \geq 3$.

A partir do grupo VB_n , podemos obter outros grupos realizando quocientes ou, equivalentemente, adicionando uma relação à apresentação de VB_n . Apresentaremos alguns desses grupos.

O grupo de tranças soldadas (**welded**) WB_n é obtido adicionando a relação $\sigma_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i \sigma_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n-2$ ao grupo VB_n . No Teorema 4.6, é dada uma apresentação para o WB_n . Em (DAMIANI, 2017), o grupo WB_n é denotado por LB_n .

Teorema 4.6

O grupo WB_n admite a seguinte apresentação com geradores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, sujeitos às relações

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{para } |i - j| > 1 \quad (4.10)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.11)$$

$$v_i v_j = v_j v_i, \quad \text{para } |i - j| > 1 \quad (4.12)$$

$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.13)$$

$$v_i^2 = 1, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.14)$$

$$\sigma_i v_j = v_j \sigma_i, \quad \text{para } |i - j| > 1 \quad (4.15)$$

$$v_i v_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} v_i v_{i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (4.16)$$

O grupo WB_n admite outras definições equivalentes. Por exemplo, foi mostrado em (FENN; RIMÁNYI; ROURKE, 1997) que o grupo WB_n é isomorfo ao grupo de tranças de permutação BP_n , o qual é um subgrupo do grupo de automorfismos de um grupo livre de posto n , $\text{Aut}(F_n)$, e em (DAMIANI, 2017) o grupo WB_n é chamado de grupo de tranças de loop LB_n .

Podemos definir um homomorfismo $\pi_P: WB_n \rightarrow S_n$ dado por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = (i \ i+1)$. O núcleo $\text{Ker}(\pi_P)$ é chamado de **grupo de tranças soldadas puras** e é denotado por WP_n . Uma apresentação para WP_n é dada no Corolário 3.19 em (DAMIANI, 2017). O grupo WP_n é denotado por PLB_n em (DAMIANI, 2017).

O grupo de tranças irrestrita (**unrestricted**) virtuais UVB_n pode ser visto como um quociente do grupo VB_n pelo subgrupo normal gerado pelas relações $v_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i v_{i+1}$ e $v_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} v_i$ para $i = 1, \dots, n-2$. Na Definição 2.3 de (BARDAKOV; BELLINGERI; DAMIANI, 2015) é dada uma apresentação para UVB_n . O núcleo do homomorfismo $\pi_P: UVB_n \rightarrow S_n$, dado por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = (i \ i+1)$ é chamado de **grupo de tranças irrestrita puras virtuais** e é denotado por UVP_n . Uma apresentação de UVP_n é dada no Teorema 2.7 de (BARDAKOV; BELLINGERI; DAMIANI, 2015). Os grupos UVB_n e UVP_n são estudados com mais detalhes em (MAKRI, 2022).

Para os grupos WB_n e UVB_n não podemos definir homomorfismos similares ao homomorfismo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ já que para uma função ser um homomorfismo ela deve respeitar as relações do grupo do seu domínio.

É conhecido para $n \geq 5$ que VP_n e KB_n são subgrupos característicos de VB_n [ver (BELLINGERI; PARIS, 2020), Corollary 2.7]. Para menos cordas, (DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025) completam o conhecimento acerca dos subgrupos puros que são característicos em seus respectivos grupos de tranças virtuais, como podemos ver no teorema a seguir. Vale lembrar que um subgrupo K de um

grupo G é um **subgrupo característico** se $\varphi(K) = K$ para cada automorfismo φ de G .

Teorema 4.7 ((DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025), Theorem 2)

Seja $n \geq 2$.

- (a) O grupo de tranças puras virtuais VP_n é subgrupo característico de VB_n se, e somente se, $n \geq 4$ e o grupo KB_n é um subgrupo característico do grupo de tranças virtuais VB_n se, e somente se, $n \geq 3$.
- (b) O grupo de tranças puras soldadas WP_n é subgrupo característico do grupo de tranças soldadas WB_n se, e somente se, $n \geq 3$
- (c) O grupo de tranças puras virtuais irrestrito UVP_n é subgrupo característico do grupo de tranças virtuais irrestritos UVB_n se, e somente se, $n \geq 3$

Para provar o resultado acima, uma das ferramentas utilizadas pelos autores é o resultado que enunciaremos a seguir, que também será utilizado por nós numa versão do Teorema 4.7 para o caso das tranças virtuais emolduradas, que serão definidas neste capítulo. Recordemos que dois homomorfismos $\varphi, \psi: G \rightarrow H$ são ditos conjugados quando existe $h \in H$ tal que $\psi(g) = h\varphi(g)h^{-1}$ para todo $g \in G$, e escrevemos $\varphi \sim_c \psi$, onde \sim_c é uma relação de equivalência.

Teorema 4.8 ((DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025), Theorem 1)

Sejam G e Q dois grupos. Seja Σ o conjunto de todos os homomorfismos sobrejetivos de G para Q , seja $\mathfrak{T} = \Sigma / \sim_c$ o conjunto de classes de equivalência de Σ por \sim_c e seja Λ um conjunto de representantes de \mathfrak{T} . Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que, para todo $\omega \in \Lambda$ tal que $\text{Ker}(\omega)$ é isomorfo a $\text{Ker}(\lambda)$, $\text{Ker}(\lambda) = \text{Ker}(\omega)$. Então, $\text{Ker}(\lambda)$ é um subgrupo característico de G .

No que tange aos homomorfismos do grupo de tranças virtuais VB_n no grupo simétrico S_n , usando as apresentações de S_n e VB_n , vemos que existe um homomorfismo $\iota: S_n \rightarrow VB_n$ que envia s_i para v_i para todo $1 \leq i \leq n-1$. Baseados no artigo (BELLINGERI; PARIS, 2020), vamos definir os automorfismos $\xi_1, \xi_2: VB_n \rightarrow VB_n$ por

$$\xi_1(\sigma_i) = v_i \sigma_i v_i \quad \xi_1(v_i) = v_i \quad \xi_2(\sigma_i) = \sigma_i^{-1} \quad \xi_2(v_i) = v_i$$

e o homomorfismo $\nu_6: S_6 \rightarrow S_6$

$$\begin{aligned} \nu_6(1) &= (1), & \nu_6(s_1) &= (12)(34)(56), & \nu_6(s_2) &= (23)(15)(46), \\ \nu_6(s_3) &= (13)(24)(56), & \nu_6(s_4) &= (12)(35)(46), & \nu_6(s_5) &= (23)(14)(56). \end{aligned}$$

Definição 4.9

Sejam G e H dois grupos e ψ um homomorfismo de G em H . Dizemos que ψ é **abeliano** se sua imagem é um subgrupo abeliano de H .

A proposição a seguir pode ser deduzido de (ARTIN, 1947a) e (LIN, 2004), e pode ser encontrada em (BELLINGERI; PARIS, 2020).

Proposição 4.10 ((BELLINGERI; PARIS, 2020), Proposition 4.1)

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq 5$, $m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\varphi: S_n \rightarrow S_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades:

- 1- φ é abeliano;
- 2- $n = m$ e $\varphi = \text{Id}$;
- 3- $n = m = 6$ e $\varphi = \nu_6$.

A Proposição 4.10 acima foi utilizada em (BELLINGERI; PARIS, 2020) para provar um teorema acerca dos homomorfismos de VB_n em S_m para $n \geq 5$, $m \geq 2$ e $n \geq m$.

Teorema 4.11 ((BELLINGERI; PARIS, 2020), Theorem 2.3)

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$, $m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\psi: VB_n \rightarrow VB_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, uma das seguintes possibilidades é válida:

- 1- ψ é abeliano;
- 2- $n = m$ e $\psi \in \{\iota \circ \pi_B, \iota \circ \pi_P\}$;
- 3- $n = m = 6$ e $\psi \in \{\iota \circ \nu_6 \circ \pi_B, \iota \circ \nu_6 \circ \pi_P\}$;
- 4- $n = m$ e $\psi \in \{\text{Id}, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \circ \xi_2\} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$.

Um aspecto importante dentro da teoria do grupo de tranças virtuais que pode ser destacado é o estudo do centro desse grupo. Em (DIES; NICAS, 2014) estuda-se o centro do grupo de tranças virtuais.

Teorema 4.12 ((DIES; NICAS, 2014), Theorem 11)

Para $n \geq 2$, o centro de VB_n é trivial.

O resultado sobre a trivialidade do centro do grupo de tranças virtuais revela uma característica fundamental da estrutura algébrica desse grupo, destacando a ausência de elementos centrais não triviais que comutem com todos os demais. O mesmo ocorre ao grupo de tranças puras virtuais como é visto em (DIES; NICAS, 2014).

Teorema 4.13 ((DIES; NICAS, 2014), Theorem 6)

Para $n \geq 2$, o centro de VP_n é trivial.

4.2 Definição do grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n

O grupo de tranças virtuais emolduradas será definido de maneira análoga à abordagem utilizada por (KO; SMOLINSKY, 1992) na definição do grupo de tranças emolduradas. Seguindo essa linha, daremos uma apresentação para o grupo de tranças virtuais emolduradas adaptando a construção de (KO; SMOLINSKY, 1992) para o contexto das tranças virtuais, de forma a garantir uma generalização consistente e bem fundamentada.

Definição 4.14

Seja $n \geq 2$. O grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n é o grupo gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ com relações (4.1)-(4.7) e relações adicionais

$$t_i t_j = t_j t_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (4.17)$$

$$\eta_k t_i = t_{\eta_k(i)} \eta_k, \quad (4.18)$$

onde $\eta_k \in \{\sigma_k, \nu_k\}$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Seja o grupo simétrico S_n agindo sobre $\{1, 2, \dots, n\}$. Seja a projeção $\pi: VB_n \rightarrow S_n$ definida por $\pi(\sigma_i) = \pi(\nu_i) = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. O grupo de tranças virtuais VB_n atua no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ a partir do homomorfismo π , ou seja, $\eta(i) = \pi(\eta)(i)$, $\eta \in VB_n$. Por convenção, $(\eta\gamma)(i) = \gamma(\eta(i))$. Assim, definimos o grupo de tranças virtuais emolduradas como

$$FVB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes VB_n,$$

onde a ação de VB_n em \mathbb{Z}^n é dada pela permutação dos índices

$$\eta(a) = (a_{\eta(1)}, \dots, a_{\eta(n)}) \quad (\eta \in VB_n).$$

Na notação acima, a ação de VB_n em \mathbb{Z}^n é dada pela fórmula multiplicativa

$$\eta(t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n}) = t_1^{a_{\eta(1)}} t_2^{a_{\eta(2)}} \dots t_n^{a_{\eta(n)}} \quad (\eta \in VB_n).$$

Qualquer palavra em FVB_n se divide, por construção, na parte da moldura e na parte de trança. Ou seja, pode ser escrito na forma

$$t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n} \cdot \beta, \quad \text{onde } a_i \in \mathbb{Z}, \beta \in VB_n.$$

A multiplicação e o inverso em FVB_n são definidos usando a ação de VB_n em \mathbb{Z}^n como segue

$$(t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \cdot \beta)(t_1^{b_1} \dots t_n^{b_n} \cdot \gamma) := t_1^{a_1+b_{\beta(1)}} \dots t_n^{a_n+b_{\beta(n)}} \cdot \beta\gamma$$

e

$$(t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n} \cdot \beta)^{-1} = t_1^{-a_{\beta^{-1}(1)}} t_2^{-a_{\beta^{-1}(2)}} \dots t_n^{-a_{\beta^{-1}(n)}} \cdot \beta^{-1}.$$

Note agora que em FVB_n os t_i 's podem ser deduzidos de t_1 , definindo por exemplo:

$$t_i = \eta_{i-1} \dots \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} \dots \eta_{i-1}^{-1}, \quad (4.19)$$

onde, para cada $i = 1, \dots, n-1$, $\eta_i \in \{\sigma_i, \nu_i\}$.

Proposição 4.15

Seja $n \geq 2$. O grupo FVB_n tem uma apresentação reduzida com geradores $t_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$, e relações (4.1)-(4.7) e relações adicionais:

$$t_1 \eta_j = \eta_j t_1, \quad j > 1, \quad (4.20)$$

$$t_1 \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} = \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} t_1, \quad (4.21)$$

$$\eta_i \cdots \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} \cdots \eta_i^{-1} = \eta_i^{-1} \cdots \eta_1^{-1} t_1 \eta_1 \cdots \eta_i, \quad (4.22)$$

onde, para cada $i = 1, \dots, n-1$, $\eta_i \in \{\sigma_i, v_i\}$.

Demonstração. Por FVB_n ser um produto semidireto de VB_n e \mathbb{Z}^n , temos uma apresentação para FVB_n com geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ e relações (4.1)-(4.7) para σ_i e v_i , (4.17) para t_j e as seguintes relações mistas

$$\eta_i^{-1} t_j \eta_i = \omega(\eta_i, t_j),$$

onde $\eta_i \in \{\sigma_i, v_i\}$, e $\omega(\eta_i, t_j)$ é uma palavra nos t_j 's (ver [(JOHNSON, 1997), Corollary 1, Chap. 10]). Mas é simples ver que essa última família de relações pode ser escrita como a família de relações constituída pelas relações (4.20), (4.22) e

$$\eta_i t_j \eta_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i, \\ t_i, & \text{se } j = i + 1, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases} \quad (4.23)$$

para $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$.

A relação (4.19) define t_i ($i \geq 1$) em termos de t_1 e η_i . Assim, obtém-se que FVB_n pode ser apresentado por $t_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ com as relações (4.20), (4.21), (4.22) e com as relações (4.23), e

$$t_i t_j = t_j t_i. \quad (4.24)$$

Para finalizar a demonstração da proposição, precisamos mostrar que as relações (4.24) e (4.23) são consequências das relações (4.20), (4.21) e (4.22).

Usando indução, vemos que (4.24) é uma consequência das relações (4.20), (4.21) e (4.22). Assim, se $i = 1$, é preciso provar que $t_1 t_j = t_j t_1$ para todo j . para $j = 1$ é trivial e para $j = 2$ segue da relação (4.21), pois $\eta_1 t_1 \eta_1^{-1} = t_2$. Vamos supor que $j \geq 2$. Temos

$$t_1 t_j = t_1 \eta_{j-1} t_{j-1} \eta_{j-1}^{-1} = \eta_{j-1} t_1 t_{j-1} \eta_{j-1}^{-1} = \eta_{j-1} t_{j-1} t_1 \eta_{j-1}^{-1} = \eta_{j-1} t_{j-1} \eta_{j-1}^{-1} t_1 = t_j t_1,$$

ou seja, $t_1 t_j = t_j t_1$ para todo j .

Agora suponha que a afirmação seja verdadeira para todo i . Devemos provar que para todo j : $t_{i+1} t_j = t_j t_{i+1}$. Usando o mesmo argumento acima, pode-se verificar facilmente que ele se mantém

para $j \neq i + 2$. No caso $j = i + 2$, tem-se

$$\begin{aligned}
t_{i+1}t_{i+2} &= (\eta_i t_i \eta_i^{-1})(\eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1}) \\
&= \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \\
&= \eta_i t_i \eta_{i+1} \eta_i \eta_{i+1}^{-1} t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \\
&= \eta_i \eta_{i+1} t_i \eta_i t_i \eta_{i+1}^{-1} \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \\
&= \eta_i \eta_{i+1} t_i \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \eta_i^{-1} \\
&= \eta_i \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} t_i \eta_{i+1}^{-1} \eta_i^{-1} \\
&= \eta_{i+1} \eta_i \eta_{i+1} t_i \eta_i^{-1} t_i \eta_{i+1}^{-1} \eta_i^{-1} \\
&= \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_{i+1} \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} t_i \eta_i^{-1} \\
&= \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \\
&= (\eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1})(\eta_i t_i \eta_i^{-1}) \\
&= t_{i+2} t_{i+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, em (4.23) os casos $j = i$ e $j = i + 1$ seguem diretamente da definição de t_i . Para $j < i$ segue da definição de t_i e da relação (4.20). Agora, para o caso $j > i + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\eta_i t_j \eta_i^{-1} &= \eta_{j-1} \cdots \eta_i \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \eta_i^{-1} \cdots \eta_{j-1} \\
&= \eta_{j-1} \cdots \eta_{i+1} \eta_i (\eta_{i+1} t_i \eta_{i+1}^{-1}) \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \cdots \eta_{j-1} \\
&= \eta_{j-1} \cdots \eta_{i+1} \eta_i t_i \eta_i^{-1} \eta_{i+1}^{-1} \cdots \eta_{j-1} \\
&= t_j.
\end{aligned}$$

□

Geometricamente, um elemento de FVB_n é uma trança com cruzamentos clássicos e virtuais em n cordas, com cada corda decorada no topo por um inteiro, sua moldura. Um elemento de \mathbb{Z}^n , quando esse é visto como um subgrupo de FVB_n , é identificado com a trança identidade em n cordas, sendo cada corda decorada pelo inteiro correspondente do elemento. Por outro lado, uma trança em VB_n , quando esse é visto como um subgrupo de FVB_n , é entendida como uma trança emoldurada com todos os elementos da moldura iguais a zero. Geometricamente, a multiplicação no grupo FVB_n é a concatenação usual em VB_n juntamente com a coleta da moldura de cada corda para o topo da trança final. Veja o Exemplo 4.16 para uma ilustração.

Exemplo 4.16

Considere as tranças virtuais emolduradas $t_1^{a_1} t_2^{a_2} t_3^{a_3} \cdot \nu_1 \sigma_2$ e $t_1^{b_1} t_2^{b_2} t_3^{b_3} \cdot \sigma_1 \nu_2 \sigma_2$. Tem-se o produto

$$\begin{aligned}
(t_1^{a_1} t_2^{a_2} t_3^{a_3} \cdot \nu_1 \sigma_2)(t_1^{b_1} t_2^{b_2} t_3^{b_3} \cdot \sigma_1 \nu_2 \sigma_2) &= t_1^{a_1+b_{\nu_1 \sigma_2(1)}} t_2^{a_2+b_{\nu_1 \sigma_2(2)}} t_3^{a_3+b_{\nu_1 \sigma_2(3)}} \cdot \nu_1 \sigma_2 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2 \\
&= t_1^{a_1+b_{\sigma_2(\nu_1(1))}} t_2^{a_2+b_{\sigma_2(\nu_1(2))}} t_3^{a_3+b_{\sigma_2(\nu_1(3))}} \cdot \nu_1 \sigma_2 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2 \\
&= t_1^{a_1+b_{\sigma_2(2)}} t_2^{a_2+b_{\sigma_2(1)}} t_3^{a_3+b_{\sigma_2(3)}} \cdot \nu_1 \sigma_2 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2 \\
&= t_1^{a_1+b_3} t_2^{a_2+b_1} t_3^{a_3+b_2} \cdot \nu_1 \sigma_2 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2.
\end{aligned}$$

Geometricamente,

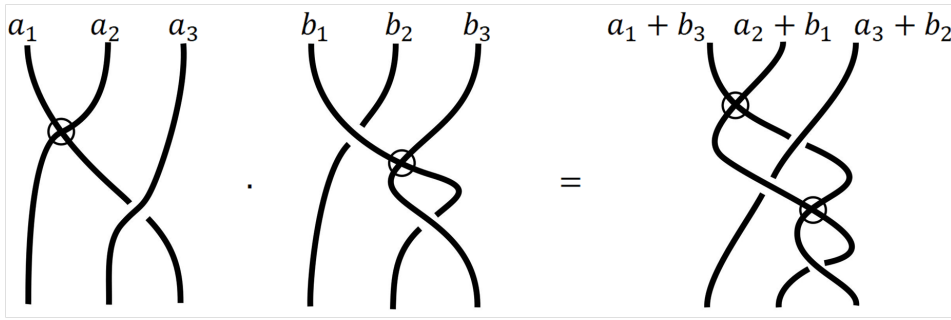


Figura 17 – Multiplicação das tranças virtuais emolduradas.

Sendo um subgrupo importante, o grupo das tranças puras virtuais emolduradas, denotado por FVP_n , é construído de maneira similar à definição do grupo das tranças puras emolduradas apresentada por (NATOV, 1997).

O homomorfismo de grupo $\pi_P: VB_n \rightarrow S_n$ tal que $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = s_i$, para $i = 1, \dots, n-1$, pode ser estendido para um homomorfismo de grupo $\pi_{FP}: FVB_n \rightarrow S_n$ enviando t_j para a identidade. Chamamos o núcleo de π_{FP} de grupo de **tranças puras virtuais emolduradas** e denotamos por FVP_n .

O grupo das tranças puras virtuais emolduradas é uma extensão do grupo das tranças puras virtuais VP_n pelo grupo abeliano livre \mathbb{Z}^n . Nessa construção, cada corda da trança pura virtual é associada a um elemento adicional em \mathbb{Z} , que representa sua moldura. Essa definição permite capturar tanto a estrutura combinatória das tranças puras virtuais quanto a nova informação introduzida pelas molduras, proporcionando uma descrição algébrica completa do grupo. Como as tranças puras virtuais têm permutação associada trivial, então as mesmas comutam com os geradores da moldura. Desta maneira, tem-se que o grupo de tranças puras virtuais emolduradas FVP_n é definido por

$$FVP_n = \mathbb{Z}^n \oplus VP_n,$$

onde \mathbb{Z}^n representa o grupo abeliano livre associado às torções das cordas, e VP_n é o grupo de tranças puras virtuais em n cordas, que incorpora cruzamentos virtuais e segue as relações do grupo de tranças puras virtuais.

Em se tratando das operações em FVP_n , para quaisquer dois elementos $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta$ e $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n} \cdot \gamma$ em FVP_n , tem-se

$$\begin{aligned} (t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta)(t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n} \cdot \gamma) &= t_1^{k_1+m_{\beta(1)}} t_2^{k_2+m_{\beta(2)}} \dots t_n^{k_n+m_{\beta(n)}} \cdot \beta\gamma \\ &= t_1^{k_1+m_1} t_2^{k_2+m_2} \dots t_n^{k_n+m_n} \cdot \beta\gamma, \end{aligned}$$

pois como $\beta \in VP_n$, a sua permutação associada é trivial. Isso mostra que a multiplicação de elementos de FVP_n corresponde à multiplicação em VP_n e a adição em \mathbb{Z}^n , o que é característico em um produto direto.

Teorema 4.17

O grupo FVP_n admite uma apresentação com geradores $\{\lambda_{k,l}\}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, t_1, t_2, \dots, t_n , e as relações definidoras

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j}, \quad (4.25)$$

$$\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i}, \quad (4.26)$$

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad (4.27)$$

$$\lambda_{k,l} t_i = t_i \lambda_{k,l}. \quad (4.28)$$

Demonstração. A partir do Teorema 4.2 vemos que o grupo VP_n tem uma apresentação com geradores $\{\lambda_{k,l}\}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, sujeitos às relações

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j},$$

$$\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i}.$$

Por outro lado, temos que $\mathbb{Z}^n = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \mid [t_i, t_j] = 1 \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq n \rangle$.

Como o grupo FVP_n é um produto direto dos grupos \mathbb{Z}^n e VP_n , a apresentação de FVP_n é dada pelos geradores $t_1, t_2, \dots, t_n, \{\lambda_{k,l}\}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, com as relações de \mathbb{Z}^n e VP_n e a família de relações de comutatividade entre os geradores de \mathbb{Z}^n e VP_n (ver [(JOHNSON, 1997), Proposition 4, Chap. 4]). \square

Análogo ao feito com o homomorfismo π_P , o homomorfismo de grupo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ tal que $\pi_K(\sigma_i) = 1$ e $\pi_K(v_i) = s_i$, $i = 1, \dots, n-1$ pode ser estendido para um homomorfismo de grupo $\pi_{FK}: FVB_n \rightarrow S_n$ enviando t_j para a identidade, $j = 1, \dots, n$. Denotamos o núcleo de π_{FK} por FKB_n . O núcleo do homomorfismo π_{FK} apresenta uma estrutura de produto semidireto como aponta o próximo resultado.

Teorema 4.18

Seja $n \geq 2$. O grupo FKB_n é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{Z}^n \rtimes KB_n$.

Demonstração. Seja $\pi_{FK}: FVB_n \rightarrow S_n$ o homomorfismo definido por $\pi_{FK}(\sigma_i) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$, $\pi_{FK}(v_i) = s_i$, $1 \leq i \leq n-1$, e $\pi_{FK}(t_j) = 1$, $1 \leq j \leq n$.

Note que os elementos t_1, \dots, t_n pertencem ao $\text{Ker}(\pi_{FK})$. Temos ainda que σ_i , $1 \leq i \leq n-1$, também pertencem ao núcleo de π_{FK} e, além disso, os conjugados de σ_i pelos v_i , $1 \leq i \leq n-1$, que são $x_{i,i+1} = \sigma_i$, $x_{i+1,i} = v_i \sigma_i v_i$, $x_{i,j} = v_{j-1} \cdots v_{i+1} \sigma_i v_{i+1} \cdots v_{j-1}$, para $1 \leq i < j-1 \leq n-1$, $x_{j,i} = v_{j-1} \cdots v_{i+1} v_i \sigma_i v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1}$, para $1 \leq i < j-1 \leq n-1$, estão no núcleo de π_{FK} , onde esses elementos geram KB_n . Logo, os subgrupos $\mathbb{Z}^n = \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ e KB_n estão contidos em $\text{Ker}(\pi_{FK})$, então $\mathbb{Z}^n \cdot KB_n \subseteq \text{Ker}(\pi_{FK})$. Agora, Seja $g \in \text{Ker}(\pi_{FK})$. Como $\text{Ker}(\pi_{FK}) \subset FVB_n$ e $FVB_n \cong \mathbb{Z}^n \rtimes VB_n$ podemos escrever $g = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \beta$, $\beta \in VB_n$. Note que os elementos t_j pertencem ao núcleo de π_{FK} , logo $\pi_{FK}(g) = \pi_{FK}(t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \beta) = \pi_{FK}(\beta)$. Como $g \in \text{Ker}(\pi_{FK})$, segue que $\pi_{FK}(g) = 1$, isto é,

$\pi_{FK}(\beta) = 1$. Assim $\beta \in \text{Ker}(\pi_{FK}|_{VB_n}) = KB_n$, ou seja, $g \in \mathbb{Z}^n \cdot KB_n$. Então, $\text{Ker}(\pi_{FK}) \subseteq \mathbb{Z}^n \cdot KB_n$ e, portanto, $\text{Ker}(\pi_{FK}) = \mathbb{Z}^n \cdot KB_n$.

Ademais, os subgrupos \mathbb{Z}^n e KB_n têm interseção trivial. Com efeito, os t_j não aparecem nas expressões dos elementos de KB_n , os elementos KB_n são palavras apenas nos σ_i e ν_i , logo $\mathbb{Z}^n \cap KB_n = \{1\}$.

Finalmente, os elementos de KB_n agem em \mathbb{Z}^n por permutação dos índices. Sabendo que $x_{i,i+1} = \sigma_i$ e $x_{i+1,i} = \nu_i \sigma_i \nu_i$, utilizando as relações $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$ e $\nu_i t_i = t_{i+1} \nu_i$ observe que

- $x_{i,i+1} t_i = \sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i = t_{i+1} x_{i,i+1}$,
- $x_{i,i+1} t_{i+1} = \sigma_i t_{i+1} = t_i \sigma_i = t_i x_{i,i+1}$,
- $x_{i,i+1} t_j = \sigma_i t_j = t_j \sigma_i = t_j x_{i,i+1}$, para $j \neq i, i+1$,

e

- $x_{i+1,i} t_i = \nu_i \sigma_i \nu_i t_i = \nu_i \sigma_i t_{i+1} \nu_i = \nu_i t_i \sigma_i \nu_i = t_{i+1} \nu_i \sigma_i \nu_i = t_{i+1} x_{i+1,i}$,
- $x_{i+1,i} t_{i+1} = \nu_i \sigma_i \nu_i t_{i+1} = \nu_i \sigma_i t_i \nu_i = \nu_i t_{i+1} \sigma_i \nu_i = t_i \nu_i \sigma_i \nu_i = t_i x_{i+1,i}$,
- $x_{i+1,i} t_j = \nu_i \sigma_i \nu_i t_j = t_j \nu_i \sigma_i \nu_i = t_j x_{i+1,i}$, para $j \neq i, i+1$.

Para os elementos $x_{i,j}$ e $x_{j,i}$, fixando i e fazendo $j = i+2, i+3, \dots, n$, utilizando as relações do grupo FVB_n , temos

$$\begin{aligned} x_{i,j} t_i &= t_j x_{i,j}, \\ x_{i,j} t_j &= t_i x_{i,j}, \\ x_{i,j} t_k &= t_k x_{i,j}, \quad \text{para } k \neq i, j, \end{aligned}$$

e o mesmo acontece com o elemento $x_{j,i}$. Assim,

$$x_{i,j} t_k x_{i,j}^{-1} = \begin{cases} t_i & \text{se } k = j, \\ t_j & \text{se } k = i, \\ t_k & \text{se } k \neq i, j. \end{cases}$$

Portanto, $FKB_n = \mathbb{Z}^n \rtimes KB_n$. □

Teorema 4.19

O grupo FKB_n admite uma apresentação com geradores $t_1, t_2, \dots, t_n, \{x_{k,l} \mid 1 \leq k \neq l \leq n\}$, e as

relações definidoras

$$x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j}, \quad (4.29)$$

$$x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}, \quad (4.30)$$

$$t_i t_j = t_j t_i, \quad (4.31)$$

$$x_{i,j} t_k x_{i,j}^{-1} = \begin{cases} t_i & \text{se } k = j, \\ t_j & \text{se } k = i, \\ t_k & \text{se } k \neq i, j. \end{cases} \quad (4.32)$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.18 segue que $FKB_n = \mathbb{Z}^n \times KB_n$. Dessa forma, (ver [(JOHNSON, 1997), Corollary 1, Chap. 10]), o grupo FKB_n admite uma apresentação com geradores $t_1, \dots, t_n, \{x_{k,l}\}, 1 \leq k \neq l \leq n$, sujeitos às relações

$$x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j},$$

$$x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j},$$

$$t_i t_j = t_j t_i,$$

$$x_{i,j} t_k x_{i,j}^{-1} = \begin{cases} t_i & \text{se } k = j, \\ t_j & \text{se } k = i, \\ t_k & \text{se } k \neq i, j, \end{cases}$$

como queríamos. □

Para analisar a estrutura dos grupos FVP_n e FKB_n e demonstrar que eles não são isomorfos para $n \geq 2$, é necessário primeiramente estabelecer um resultado auxiliar que será essencial na demonstração. Considerando G grupo, vale lembrar que utilizamos a notação G^{ab} para denotar o abelianizado do grupo G .

Lema 4.20

(i) Se os grupos G e H são isomorfos, então G^{ab} é isomorfo a H^{ab} .

(ii) Sejam H e K grupos. Se $G = H \oplus K$, então $G^{ab} \cong H^{ab} \oplus K^{ab}$.

Demonstração. i) Como os grupos G e H são isomorfos, então existe um isomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$. Assim, temos que φ leva comutadores de G em comutadores de H , pois tendo $\varphi(G) = H$, obtemos $\varphi(\Gamma_2(G)) = \Gamma_2(\varphi(G)) = \Gamma_2(H)$.

Defina $\bar{\varphi}: G^{ab} = G/\Gamma_2(G) \rightarrow H/\Gamma_2(H) = H^{ab}$ tal que $\bar{\varphi}(g\Gamma_2(G)) = \varphi(g)\Gamma_2(H)$.

Note que $\bar{\varphi}$ está bem definido. Temos que garantir que se $g_1\Gamma_2(G) = g_2\Gamma_2(G)$, então $\bar{\varphi}(g_1\Gamma_2(G)) = \bar{\varphi}(g_2\Gamma_2(G))$, ou seja, se $g_1^{-1}g_2 \in \Gamma_2(G)$, então $\varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) \in \Gamma_2(H)$. Com efeito, se $g_1^{-1}g_2 \in \Gamma_2(G)$, então $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) \in \Gamma_2(H)$, logo $\varphi(g_1)\Gamma_2(H) = \varphi(g_2)\Gamma_2(H)$, ou seja, $\bar{\varphi}(g_1\Gamma_2(G)) = \bar{\varphi}(g_2\Gamma_2(G))$.

Sejam $g_1, g_2 \in G$. Usando que φ é um homomorfismo, temos

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(g_1\Gamma_2(G) \cdot g_2\Gamma_2(G)) &= \bar{\varphi}(g_1g_2\Gamma_2(G)) = \varphi(g_1g_2)\Gamma_2(H) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\Gamma_2(H) \\ &= \varphi(g_1)\Gamma_2(H) \cdot \varphi(g_2)\Gamma_2(H) = \bar{\varphi}(g_1\Gamma_2(G)) \cdot \bar{\varphi}(g_2\Gamma_2(G)),\end{aligned}$$

ou seja, $\bar{\varphi}$ é um homomorfismo.

Para a injetividade de $\bar{\varphi}$, devemos mostrar que $\text{Ker}(\bar{\varphi})$ é trivial. Temos que $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{g\Gamma_2(G) \in G^{ab} \mid \bar{\varphi}(g\Gamma_2(G)) = \Gamma_2(H)\}$. Porém, $\bar{\varphi}(g\Gamma_2(G)) = \varphi(g)\Gamma_2(H) = \Gamma_2(H)$ se, e somente se, $\varphi(g) \in \Gamma_2(H)$. Como φ é um isomorfismo, $g \in \varphi^{-1}(\Gamma_2(H)) = \Gamma_2(G)$. Dessa forma, $g\Gamma_2(G) = \Gamma_2(G)$ e, assim, $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{\Gamma_2(G)\}$, ou seja, o núcleo é trivial.

Para a sobrejetividade, seja $h\Gamma_2(H) \in H^{ab}$. Como φ é sobrejetiva, existe $g \in G$ tal que $\varphi(g) = h$. Então $\bar{\varphi}(g\Gamma_2(G)) = \varphi(g)\Gamma_2(H) = h\Gamma_2(H)$. Logo, $\bar{\varphi}$ é sobrejetiva.

Portanto, $\bar{\varphi}$ é um isomorfismo.

ii) Seja $G = H \oplus K$. Sejam $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \oplus K$. Assim,

$$\begin{aligned}[(h_1, k_1), (h_2, k_2)] &= (h_1, k_1)(h_2, k_2)(h_1, k_1)^{-1}(h_2, k_2)^{-1} = (h_1, k_1)(h_2, k_2)(h_1^{-1}, k_1^{-1})(h_2^{-1}, k_2^{-1}) \\ &= (h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}, k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1}) = [(h_1, h_2), (k_1, k_2)],\end{aligned}$$

ou seja, $\Gamma_2(G) = \Gamma_2(H) \oplus \Gamma_2(K)$. Logo, como o subgrupo comutador é um subgrupo normal, segue que

$$G/\Gamma_2(G) = H \oplus K/\Gamma_2(H) \oplus \Gamma_2(K) \cong (H/\Gamma_2(H)) \oplus (K/\Gamma_2(K)),$$

isto é, $G^{ab} \cong H^{ab} \oplus K^{ab}$, como queríamos. □

Com base no Lema 4.20, vamos provar o resultado a seguir que estabelece que os grupos FVP_n e FKB_n não são isomorfos para $n \geq 2$.

Teorema 4.21

Os grupos FVP_n e FKB_n não são isomorfos para $n \geq 2$.

Demonstração. Para mostrar que os grupos FVP_n e FKB_n não são isomorfos para $n \geq 2$, basta comparar seus abelianizados.

Inicialmente, vamos analisar o abelianizado do grupo FVP_n para $n \geq 2$. Sabe-se que $FVP_n = \mathbb{Z} \oplus VP_n$, então pelo Lema 4.20, item (ii), $(FVP_n)^{ab} = (\mathbb{Z}^n)^{ab} \oplus (VP_n)^{ab}$. Temos $(VP_n)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n(n-1)}$ (ver [(BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Proposition 21]). Como $(\mathbb{Z}^n)^{ab} = \mathbb{Z}^n$, então $(FVP_n)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{n^2}$.

Agora, iremos analisar o abelianizado do grupo FKB_n . Para $n = 2$, temos que FKB_2 tem geradores $t_1, t_2, x_{1,2}$ e $x_{2,1}$ e da relação $x_{1,2}t_1 = t_2x_{1,2}$ no quociente $FKB_2/\Gamma_2(FKB_2)$ tem-se $t_1 = t_2$ e, assim, $FKB_2/\Gamma_2(FKB_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Para $n = 3$, considerando a apresentação de FKB_n dada no

Teorema 4.3, no quociente $FKB_3/\Gamma_2(FKB_3)$, as relações que são do tipo $x_{i,k} = x_{k,j}$ com índices distintos e $x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j}$ para todo índice, obtemos

$$x_{1,2} = x_{2,3} = x_{3,1}$$

$$x_{1,3} = x_{3,2} = x_{2,1},$$

e das relações $x_{1,2}t_1x_{1,2}^{-1} = t_2$ e $x_{2,3}t_2x_{2,3}^{-1} = t_3$ no quociente $FKB_3/\Gamma_2(FKB_3)$, obtemos $t_1 = t_2 = t_3$ e, portanto, $FKB_3/\Gamma_2(FKB_3)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Agora, para $n \geq 4$, no quociente $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$, dados dois elementos $x_{i,j}$ e $x_{k,l}$ temos os seguintes casos:

- i) Se $j = k$ e $i \neq l$, a partir da relação $x_{i,j}x_{j,l}x_{i,j} = x_{j,l}x_{i,j}x_{j,l}$ deduz-se que $x_{i,j} = x_{j,l}$ em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.
- ii) Se $j \neq k$ e $i = l$, concluímos como acima que $x_{k,i} = x_{i,j}$ em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.
- iii) Se $j = l$ e $i = k$, então existe $1 \leq m \leq n$ distinto de j e l tal que $x_{k,j} = x_{j,m} = x_{m,k} = x_{k,l}$ em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.
- iv) Se $i \neq k$ e $j = l$, procedemos como no caso anterior e obtemos que $x_{i,j} = x_{k,j}$ em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.
- v) Se i, j, k, l são distintos, usando o elemento $x_{j,k}$ fica claro que $x_{i,j} = x_{k,l}$ em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.
- vi) Finalmente, se $i = l$ e $j = k$, escolhemos $1 \leq m, p \leq n$ distintos de i e j e obtemos a seguinte sequência de identidades:

$$x_{i,j} = x_{j,m} = x_{m,p} = x_{p,j} = x_{j,i}$$

válida em $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$.

Além disso, a partir da relação 4.32 no quociente $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n)$ obtemos $t_1 = t_2 = \dots = t_n$. Logo, para $n \geq 4$, $FKB_n/\Gamma_2(FKB_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Portanto, como os abelianizados de FVP_n e FKB_n não são isomorfos para $n \geq 3$, segue pelo Lema 4.20, item (i) que FVP_n e FKB_n não são isomorfos para $n \geq 3$, como queríamos. \square

4.3 O centro de FVB_n

Nesta seção, exploraremos o centro do grupo de tranças virtuais emolduradas e do grupo de tranças puras virtuais emolduradas. A análise será conduzida com base nos resultados previamente discutidos para o centro do grupo de tranças virtuais e do grupo de tranças puras virtuais, estabelecendo conexões e estendendo as conclusões para os casos emoldurados.

Proposição 4.22

Se $n \geq 2$, então $Z(FVP_n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Demonstração. Temos que $FVP_n = \mathbb{Z}^n \oplus VP_n$, então

$$Z(FVP_n) = Z(\mathbb{Z}^n \oplus VP_n) = Z(\mathbb{Z}^n) \oplus Z(VP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \{1\} \cong \mathbb{Z}^n.$$

□

O teorema a seguir caracteriza a estrutura do centro do grupo de tranças virtuais emolduradas, estendendo o estudo do grupo de tranças virtuais.

Teorema 4.23

Se $n \geq 3$, então $Z(FVB_n) = \mathbb{Z}[\theta]$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Considere a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow FVP_n \longrightarrow FVB_n \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1.$$

Sabe-se que para $n \geq 3$, tem-se $Z(S_n) = \{1\}$. Pelo Lema 2.3 conclui-se que $\pi(Z(FVB_n)) \subset Z(S_n)$, então $Z(FVB_n) \subset FVP_n$ e, assim, $Z(FVB_n) \subset Z(FVP_n) = \mathbb{Z}^n$.

A seguir, analisaremos quais são os elementos de \mathbb{Z}^n que comutam com os do grupo FVB_n . A partir da demonstração do Teorema 2.5, tem-se que $t_1 t_2 \cdots t_n \in \mathbb{Z}^n$ comuta com $t_i, \sigma_j \in FVB_n$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n-1$, onde os t_i 's são os geradores de \mathbb{Z}^n . De forma análoga ao feito no Teorema 2.5, podemos concluir que $t_1 t_2 \cdots t_n \in \mathbb{Z}^n$ comuta com v_j para $j = 1, \dots, n-1$. Desta forma, $t_1 t_2 \cdots t_n \in Z(FVB_n)$.

Afirmamos que $Z(FVB_n) = \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é gerado pelo produto $t_1 t_2 \cdots t_n$. Com efeito, note que $\mathbb{Z} \subset Z(FVB_n)$, pois $t_1 t_2 \cdots t_n$ comuta com os geradores de FVB_n . Agora, seja $\alpha \in Z(FVB_n)$. Como $Z(FVB_n) \subset \mathbb{Z}^n$, então $\alpha = t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$. Devemos mostrar que $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$ pertence à cópia de \mathbb{Z} gerada por $t_1 t_2 \cdots t_n$ e, para isso, precisamos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ e daí concluiremos que $\alpha \in \mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, $Z(FVB_n) \subset \mathbb{Z}$. De forma análoga ao feito no Teorema 2.5, segue que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ e concluímos que $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_n^{x_n}$ pertence à cópia de \mathbb{Z} gerada por $t_1 t_2 \cdots t_n$.

Portanto, $Z(FVB_n) = \mathbb{Z}[\theta]$.

□

4.4 Homomorfismos de FVB_n em S_n e VB_n

Dedicamo-nos nesta seção ao estudo dos homomorfismos entre o grupo de tranças virtuais emolduradas e outros grupos de relevância na teoria de tranças. Em particular, investigaremos os homomorfismos do FVB_n no grupo simétrico e no grupo de tranças virtuais. Lembremos a existência de um homomorfismo de inclusão natural $\iota: S_n \longrightarrow FVB_n$, de forma que $\iota(s_i) = v_i$, o qual estabelece uma importante relação entre essas estruturas algébricas.

Nosso primeiro resultado estabelece, a menos de conjugação, os homomorfismos entre FVB_n e S_n . Recordemos que o homomorfismo v_6 foi definido na Seção 4.1, página 73.

Teorema 4.24

Sejam $n \geq 5$ e $\psi: FVB_n \rightarrow S_n$ um homomorfismo. Então, a menos conjugação, uma das seguintes possibilidades ocorre.

- i) $\psi \in \{\pi_{FP}, \pi_{FK}\}$,
- ii) $n = 6$ e $\psi \in \{\nu_6 \circ \pi_{FP}, \nu_6 \circ \pi_{FK}\}$.

Demonstração. i) Seja $n \geq 5$. Suponha que $\psi \circ \iota: S_n \rightarrow S_n$. Pela Proposição 4.10, $\psi(v_i) = \psi(\iota(s_i)) = s_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Da relação $\sigma_1 v_i = v_i \sigma_1$, $i \geq 3$, temos $\psi(\sigma_1) = \psi(v_i \sigma_1 v_i^{-1}) = s_i \psi(\sigma_1) s_i^{-1}$, isto é, $\psi(\sigma_1)$ está no centralizador $\langle s_3, \dots, s_{n-1} \rangle$ em S_n , que é igual a $\langle s_1 \rangle = \{1, s_1\}$. Desta forma, temos duas possibilidades para $\psi(\sigma_1)$: $\psi(\sigma_1) = 1$ ou $\psi(\sigma_1) = s_1$.

Se $\psi(\sigma_1) = 1$, da relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, podemos concluir que $\psi(\sigma_i) = 1$.

Se $\psi(\sigma_1) = s_1$, vamos mostrar por indução que $\psi(\sigma_i) = s_i$. Com efeito, para $i = 1$ o resultado é válido. Suponha que $i \geq 2$ e $\psi(\sigma_{i-1}) = s_{i-1}$. Seja $\psi(\sigma_1) = s_1$. Demonstraremos, por indução sobre i , que $\psi(\sigma_i) = s_i$ para todo $i \geq 1$. O caso $i = 1$ é imediato. Suponha agora que $i \geq 2$ e que a hipótese indutiva $\psi(\sigma_{i-1}) = s_{i-1}$ seja verdadeira. Da relação $v_{i-1} v_i \sigma_{i-1} = \sigma_i v_{i-1} v_i$, segue que

$$\sigma_i = v_{i-1} v_i \sigma_{i-1} v_i^{-1} v_{i-1}^{-1}$$

Aplicando o homomorfismo ψ a ambos os lados e utilizando a hipótese indutiva, obtemos

$$\psi(\sigma_i) = \psi(v_{i-1}) \psi(v_i) \psi(\sigma_{i-1}) \psi(v_i)^{-1} \psi(v_{i-1})^{-1}.$$

Substituindo as imagens conhecidas de $\psi(v_j)$, a expressão anterior se reduz à conjugação de s_{i-1} por $s_{i-1} s_i$, isto é,

$$\psi(\sigma_i) = s_{i-1} s_i s_{i-1} s_i s_{i-1} = s_{i-1} s_{i-1} s_i s_{i-1} s_{i-1} = s_i.$$

Por outro lado, da relação $v_i t_1 = t_1 v_i$ para $i > 1$, aplicando ψ , vemos que $\psi(t_1)$ comuta com cada $\psi(v_i) = s_i$, ou seja, $\psi(t_1)$ pertence ao centralizador de $\langle s_2, \dots, s_{n-1} \rangle$ em S_n . Como esse centralizador é trivial, concluímos que $\psi(t_1) = 1$.

Se $\psi(t_1) = 1$, então $\psi(t_i) = 1$. Para $i = 2$ da relação $v_1 t_1 = t_2 v_1$, quando aplicada ψ , mostra que $\psi(t_2)$ é um conjugado de $\psi(t_1)$ por $\psi(v_1)$. Como $\psi(t_1) = 1$, obtemos $\psi(t_2) = 1$.

De forma geral, suponhamos para algum k , com $2 \leq k \leq n-1$, que $\psi(t_k) = 1$. A relação $v_k t_k = t_{k+1} v_k$ garante que $\psi(t_{k+1})$ é conjugado de $\psi(t_k)$ por $\psi(v_k)$. Mas, como $\psi(t_k) = 1$, concluímos que $\psi(t_{k+1})$ também é 1. Dessa maneira, por indução, todos os $\psi(t_i)$ são iguais a 1, como queríamos mostrar.

Portanto, concluímos que $\psi(v_i) = s_i$, $\psi(t_j) = 1$ e $\psi(\sigma_i) = s_i$ ou $\psi(\sigma_i) = 1$, para $1 \leq i \leq n-1$ e $1 \leq j \leq n$.

ii) Suponha $n = 6$. Pelo Teorema 4.10 segue que $\psi \circ \iota = \nu_6$. Então $\nu_6^{-1} \circ \psi \circ \iota = \text{Id}$. Pelo caso i), temos $\nu_6^{-1} \circ \psi = \pi_{FP}$ ou $\nu_6^{-1} \circ \psi = \pi_{FK}$ e, portanto, $\psi = \nu_6 \circ \pi_{FP}$ ou $\psi = \nu_6 \circ \pi_{FK}$.

□

Os homomorfismos do grupo de tranças virtuais emolduradas para o grupo de tranças virtuais revelam compreensão sobre como os geradores e relações no primeiro grupo se traduzem no segundo, preservando a estrutura algébrica. O resultado a seguir estabelece explicitamente a existência, a construção e as propriedades principais desses homomorfismos. Seja o homomorfismo $\tau: VB_n \hookrightarrow FVB_n$ tal que $\tau(\sigma_i) = \sigma_i$ e $\tau(v_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Teorema 4.25

Sejam $n \geq 5$, $n \neq 6$, e $\psi: FVB_n \longrightarrow VB_n$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades:

1. $\psi(\sigma_i) = \psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
2. $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(\sigma_i) = \psi(t_j) = 1$,
3. $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
4. $\psi(\sigma_i) = v_i \sigma_i v_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
5. $\psi(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
6. $\psi(\sigma_i) = v_i \sigma_i^{-1} v_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,

para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Seja $n \geq 5$, $n \neq 6$. Note que $\varphi = \psi \circ \tau: VB_n \longrightarrow VB_n$ é um homomorfismo. Portanto, pelo Teorema 4.11 temos que $\varphi \in \{\iota \circ \pi_P, \iota \circ \pi_K\}$ ou $\varphi \in \{\text{Id}, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \circ \xi_2\}$.

Inicialmente, vamos considerar $\varphi \in \{\iota \circ \pi_P, \iota \circ \pi_K\}$. Para $\varphi = \iota \circ \pi_P$, temos

$$\psi(\sigma_i) = \psi(\tau(\sigma_i)) = \iota \circ \pi_P(\sigma_i) = \iota(s_i) = v_i \quad \text{e} \quad \psi(v_i) = \psi(\tau(v_i)) = \iota \circ \pi_P(v_i) = \iota(s_i) = v_i.$$

Da relação $\sigma_i t_1 = t_1 \sigma_i$ para $i > 1$, temos que

$$\psi(t_1) = \psi(\sigma_i) \psi(t_1) \psi(\sigma_i)^{-1} = v_i \psi(t_1) v_i^{-1},$$

ou seja, $\psi(t_1)$ pertence ao centralizador de $\langle v_2, v_3, \dots, v_{n-1} \rangle$ em VB_n que é $\{\text{Id}\}$. Portanto, $\psi(t_1) = 1$.

Da relação $\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1$ segue que $\psi(t_2) = 1$. De forma indutiva, concluímos $\psi(t_j) = 1$ para $j = 1, 2, \dots, n$.

Agora, vamos considerar $\varphi = \iota \circ \pi_K$. Então

$$\psi(\sigma_i) = \psi(\tau(\sigma_i)) = \iota \circ \pi_K(\sigma_i) = \iota(1) = 1 \quad \text{e} \quad \psi(v_i) = \psi(\tau(v_i)) = \iota \circ \pi_K(v_i) = \iota(s_i) = v_i.$$

Da relação $v_i t_1 = t_1 v_i$ para $i > 1$, assim como feito acima, temos que $\psi(t_j) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Portanto, $\psi(\sigma_i) = \psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$ ou $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(\sigma_i) = \psi(t_j) = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Consideremos agora $\varphi \in \{\text{Id}, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \circ \xi_2\}$. Como em (BELLINGERI; PARIS, 2020), considere os homomorfismos $\xi_1, \xi_2: VB_n \rightarrow VB_n$ como definidos na Seção 4.1, página 73. Então temos as seguintes possibilidades: $\psi = \psi \circ \tau = \text{Id}$, $\psi = \psi \circ \tau = \xi_1$, $\psi = \psi \circ \tau = \xi_2$ ou $\psi = \psi \circ \tau = \xi_1 \circ \xi_2$. Note que para todas as possibilidades, temos $\psi(v_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Em todas as possibilidades, da relação $v_i t_1 = t_1 v_i$ para $i > 1$, obtemos

$$\psi(t_1) = \psi(v_i)\psi(t_1)\psi(v_i)^{-1} = v_i\psi(t_1)v_i^{-1},$$

isto é, $\psi(t_1)$ pertence ao centralizador de $\langle v_2, v_3, \dots, v_{n-1} \rangle$ em VB_n que é $\{\text{Id}\}$. Logo, $\psi(t_1) = 1$. Da relação $v_1 t_1 = t_2 v_1$, obtemos $\psi(t_2) = 1$. Agora, supondo que $\psi(t_k) = 1$ para $k = 2, \dots, n-1$, vemos pela relação $v_k t_k = t_{k+1} v_k$ que $\psi(t_{k+1}) = 1$.

Portanto, temos as seguintes possibilidades

- $\psi(\sigma_i) = \sigma_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
- $\psi(\sigma_i) = v_i \sigma_i v_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
- $\psi(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,
- $\psi(\sigma_i) = v_i \sigma_i^{-1} v_i$, $\psi(v_i) = v_i$ e $\psi(t_j) = 1$,

para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $j = 1, 2, \dots, n$. □

4.5 Série central inferior de FVB_n

Uma análise detalhada da série central inferior no grupo de tranças virtuais é dada por (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), que oferece novas perspectivas sobre a extensão das propriedades dos grupos de tranças clássicos para seus análogos virtuais, enriquecendo a compreensão. Recordemos que a série central inferior de um grupo G é a sequência descendente de subgrupos dada por

$$\Gamma_1(G) = G \quad \text{e} \quad \Gamma_{i+1}(G) = [\Gamma_i(G), G] \quad \text{para} \quad i \geq 1,$$

onde $[G, \Gamma_i(G)]$ denota o subgrupo gerado por todos os comutadores $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, com $x \in \Gamma_i(G)$ e $y \in G$.

Nesta mesma direção, direcionamos nosso foco para o estudo da série central inferior do grupo de tranças virtuais emolduradas.

Proposição 4.26

Seja FVB_n o grupo de tranças virtuais emolduradas com $n = 2$. Então FVB_2 é isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)$.

Demonstração. Pela Definição 4.14 temos que $FVB_2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes VB_2$. Porém, por ((BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Proposition 7) é visto que $VB_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Portanto, $FVB_2 \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)$. □

Apresentamos a seguir a determinação do abelianizado do grupo de tranças virtuais emolduradas.

Proposição 4.27

Seja $n \geq 2$. Então o abelianizado de FVB_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Demonstração. Para encontrarmos o abelianizado de FVB_n , $FVB_n/\Gamma_2(FVB_n)$, é suficiente inserir a relação $xy = yx$ para todos os x, y no conjunto gerador. Temos da relação (4.18) que $\sigma_i t_j = t_{i+1} \sigma_i$ e $v_i t_j = t_{i+1} v_i$ se $j = i$, então $t_i = t_{i+1}$. Para a relação (4.2), temos

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \Leftrightarrow \sigma_i \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \Leftrightarrow \sigma_i = \sigma_{i+1}.$$

Para relação (4.5), temos

$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \Leftrightarrow v_i v_i v_{i+1} = v_{i+1} v_i v_{i+1} \Leftrightarrow v_i = v_{i+1}.$$

Portanto, $\frac{FVB_n}{\Gamma_2(FVB_n)} = \langle t_1, \sigma_1, v_1 \mid [t_1, \sigma_1] = [t_1, v_1] = [\sigma_1, v_1] = v_1^2 = 1 \rangle$. Note que a classe de t_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} , a classe de σ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} e a classe de v_1 gera uma cópia de \mathbb{Z}_2 , fazendo com que $\frac{FVB_n}{\Gamma_2(FVB_n)}$ seja isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. \square

Abordamos agora a questão que o grupo de tranças virtuais emolduradas não é residualmente nilpotente.

Proposição 4.28

Seja FVB_n , com $n \geq 3$. Então o grupo FVB_n não é residualmente nilpotente.

Demonstração. Seja $n \geq 3$. Note que o grupo FVB_n contém VB_n , que é um grupo que não é residualmente nilpotente (veja (BARDAKOV; BELLINGERI, 2009), Proposition 7), e como todo subgrupo de um grupo residualmente nilpotente é residualmente nilpotente, então o grupo FVB_n não é residualmente nilpotente. \square

Teorema 4.29

Seja FVB_n , $n \geq 4$. Então $\Gamma_2(FVB_n) = \Gamma_3(FVB_n)$.

Demonstração. Seja $n \geq 4$. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(FVB_n)}{\Gamma_3(FVB_n)} \longrightarrow \frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)} \xrightarrow{p} \frac{FVB_n}{\Gamma_2(FVB_n)} \longrightarrow 1.$$

Pela Proposição 4.27, temos que o abelianizado de FVB_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ gerados pelas classes de t_1, σ_1 e v_1 respectivamente. Assim, temos que todos os t_j se projetam em t_1 , σ_i se projetam em σ_1 e v_i se projetam em v_1 por p em $\frac{FVB_n}{\Gamma_2(FVB_n)}$, para $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n-1$, então vai existir $a_i \in \frac{\Gamma_2(FVB_n)}{\Gamma_3(FVB_n)}$, onde $\sigma_i = a_i \sigma_1$ com $a_1 = 1$. Ao tomarmos a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

em FVB_n vemos que $a_i\sigma_1 a_{i+1}\sigma_1 a_i\sigma_1 = a_{i+1}\sigma_1 a_i\sigma_1 a_{i+1}\sigma_1$. Mas os a_i são centrais em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$, então

$$\begin{aligned} a_i\sigma_1 a_{i+1}\sigma_1 a_i\sigma_1 = a_{i+1}\sigma_1 a_i\sigma_1 a_{i+1}\sigma_1 &\Leftrightarrow \sigma_1\sigma_1\sigma_1 a_i a_{i+1} a_i = \sigma_1\sigma_1\sigma_1 a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow a_i a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow a_i = a_{i+1}, \end{aligned}$$

ou seja, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$. Segue que, por $\sigma_i = a_i\sigma_1$ obtemos $\sigma_i = \sigma_1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Assim, todos os σ_i representam a mesma classe em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$.

De forma análoga, vai existir $b_i \in \frac{\Gamma_2(FVB_n)}{\Gamma_3(FVB_n)}$, onde $v_i = b_i v_1$ com $b_1 = 1$. Ao tomarmos a relação $v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1}$ em FVB_n vemos que $b_i v_1 b_{i+1} v_1 b_i v_1 = b_{i+1} v_1 b_i v_1 b_{i+1} v_1$. Porém, b_i são centrais em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$, logo

$$\begin{aligned} b_i v_1 b_{i+1} v_1 b_i v_1 = b_{i+1} v_1 b_i v_1 b_{i+1} v_1 &\Leftrightarrow v_1 v_1 v_1 b_i b_{i+1} b_i = v_1 v_1 v_1 b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ &\Leftrightarrow b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ &\Leftrightarrow b_i b_i b_{i+1} = b_{i+1} b_i b_{i+1} \\ &\Leftrightarrow b_i b_{i+1}, \end{aligned}$$

isto é, $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 1$. Dessa forma, por $v_i = b_i v_1$ obtemos $v_i = v_1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Dessa forma, todos os v_i representam a mesma classe em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$.

Para o caso t_i , existe $c_i \in \frac{\Gamma_2(FVB_n)}{\Gamma_3(FVB_n)}$, onde $t_i = c_i t_1$ com $c_1 = 1$ para $i = 1, \dots, n$. A partir da relação (4.18) e que $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$ em FVB_n , obtemos $\sigma_i c_i t_1 = c_{i+1} t_1 \sigma_i$. Como os c_i são centrais e que os σ_i representam a mesma classe em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$ e, além disso, $\sigma_i t_1 = t_1 \sigma_i$ se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 4$), então

$$\sigma_i c_i t_1 = c_{i+1} t_1 \sigma_i \Leftrightarrow c_i t_1 \sigma_i = c_{i+1} t_1 \sigma_i \Leftrightarrow c_i = c_{i+1},$$

ou seja, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$. Assim, por $t_i = c_i t_1$ tem-se que $t_i = t_1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, todos os t_i representam a mesma classe em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$.

Observe que as classes de σ_i e v_i comutam com a classe de t_j em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$, pois $\alpha_i t_1 = t_1 \alpha_i$, $\alpha_i \in \{\sigma_i, v_i\}$, se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 4$). Ademais, a classe de σ_i comuta com a classe de v_i em $\frac{FVB_n}{\Gamma_3(FVB_n)}$, pois $\sigma_i v_j = v_j \sigma_i$ para $|i - j| > 1$. Então, para $n \geq 4$, p é um isomorfismo e, conseqüentemente, $\Gamma_2(FVB_n) = \Gamma_3(FVB_n)$. \square

4.6 O subgrupo comutador de FVB_n

Em (BARDAKOV; GONGOPADHYAY; NESHCHADIM, 2019) foi estudado o subgrupo comutador do grupo de tranças virtuais. Neste contexto, apresentaremos nosso estudo sobre o subgrupo

comutador do grupo de tranças virtuais emolduradas. Para o estudo do subgrupo comutador $\Gamma_2(FVB_n)$, utilizaremos a apresentação de FVB_n dada na Proposição 4.15.

Pela Proposição 4.27, segue-se que o quociente $FVB_n/\Gamma_2(FVB_n)$ é isomorfo a soma direta $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Pode-se definir o homomorfismo φ a partir da seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(FVB_n) \longrightarrow FVB_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1,$$

onde, para $i = 1, \dots, n-1$, $\varphi(\sigma_i)$ é o gerador de \mathbb{Z} , $\varphi(v_i)$ é o gerador de \mathbb{Z}_2 e $\varphi(t_1)$ é o gerador de \mathbb{Z} respectivamente quando visualizado como $FVB_n/\Gamma_2(FVB_n)$.

Lema 4.30

O subgrupo comutador $\Gamma_2(FVB_n)$ tem o seguinte conjunto de geradores:

$$\{\alpha_{m,q,k,1}, \beta_{m,q,k,1}, \alpha_{m,q,2}, \beta_{m,q,2}, \alpha_j, \beta_{m,j} \mid m, k \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n-1\}.$$

Demonstração. Considere o conjunto de Schreier de representantes de classe para $\Gamma_2(FVB_n)$ em FVB_n :

$$\Lambda = \{\sigma_1^m v_1^q t_1^k \mid m, k \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1\}\}.$$

Seguindo o algoritmo Reidemeister-Schreier, o subgrupo comutador $\Gamma_2(FVB_n)$ é gerado pelas palavras

$$\{S_{\lambda,a} = (\lambda a)(\overline{\lambda a})^{-1} \mid \lambda \in \Lambda, a \in \{\sigma_i, v_i, t_1\} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Agora encontraremos os elementos $S_{\lambda,a}$. Para isso, tome $\lambda = \sigma_1^m v_1^q t_1^k$ em Λ e considerando diferentes a , obteremos os seguintes casos:

1. Se $a = \sigma_1$, então

$$S_{\lambda,\sigma_1} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k \sigma_1 t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

que denotaremos por $\alpha_{m,q,k,1}$.

2. Se $a = \sigma_2$, como $\sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_2} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k \sigma_2 t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m v_1^q \sigma_2 v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos esse elemento por $\alpha_{m,q,2}$.

3. Se $a = \sigma_j$, $j > 2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_j} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k \sigma_j t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_j \sigma_1^{-1},$$

e denotaremos esse elemento por α_j .

4. Se $a = v_1$, então

$$S_{\lambda, v_1} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k v_1 t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos por $\beta_{m,q,k,1}$.

5. Se $a = v_2$, como $v_2 t_1 = t_1 v_2$, então

$$S_{\lambda, v_2} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k v_2 t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m v_1^q v_2 v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos esse elemento por $\beta_{m,q,2}$.

6. Se $a = v_j$, $j > 2$, então

$$S_{\lambda, v_j} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k v_j t_1^{-k} v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m v_j v_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos esse elemento por $\beta_{m,j}$.

7. Se $a = t_1$, temos $S_{\lambda, a} = \sigma_1^m v_1^q t_1^k t_1 (\sigma_1^m v_1^q t_1^k t_1)^{-1} = 1$.

□

Consideraremos, agora, as relações definidoras de FVB_n , reescreveremos elas nos geradores de $\Gamma_2(FVB_n)$ e conjugando por elementos $\lambda \in \Lambda$, obtemos as relações definidoras de $\Gamma_2(FVB_n)$.

Lema 4.31

O subgrupo $\Gamma_2(FVB_n)$ tem o seguinte conjunto de relações: para $m, k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0, 1\}$

$$\alpha_{m,0,0,1} = 1, \quad (4.33)$$

$$\beta_{m,q,0,1} = 1, \quad (4.34)$$

$$\beta_{m,q,k,1}^2 = 1, \quad (4.35)$$

$$\beta_{m,q,2}^2 = 1, \quad (4.36)$$

$$\beta_{m,j}^2 = 1, \quad (4.37)$$

$$\alpha_{m,q,k,1} \alpha_j \alpha_{m+1,q,k,1}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (4.38)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_j \alpha_{m+1,q,2}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (4.39)$$

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i - j| > 1, \quad (4.40)$$

$$\beta_{m,q,k,1} \beta_{m,j} \beta_{m,q+1,k,1}^{-1} \beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (4.41)$$

$$\beta_{m,q,2} \beta_{m,j} \beta_{m,q+1,2}^{-1} \beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (4.42)$$

$$\beta_{m,i} \beta_{m,j} \beta_{m,i}^{-1} \beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i - j| > 1, \quad (4.43)$$

$$\alpha_{m,q,k,1}\beta_{m+1,j}\alpha_{m,q+1,k,1}^{-1}\beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (4.44)$$

$$\alpha_i\beta_{m+1,q,k,1}\alpha_i^{-1}\beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.45)$$

$$\alpha_{m,q,2}\beta_{m+1,j}\alpha_{m,q+1,2}^{-1}\beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (4.46)$$

$$\alpha_i\beta_{m+1,q,2}\alpha_i^{-1}\beta_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad i \geq 4, \quad (4.47)$$

$$\alpha_i\beta_{m+1,j}\alpha_i^{-1}\beta_{m,j}^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i-j| > 1, \quad (4.48)$$

$$\alpha_{m,q,k,1}\alpha_{m+1,q,2}\alpha_{m+2,q,k,1}\alpha_{m+2,q,2}^{-1}\alpha_{m+1,q,k,1}^{-1}\alpha_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (4.49)$$

$$\alpha_{m,q,2}\alpha_3\alpha_{m+2,q,2}\alpha_3^{-1}\alpha_{m+2,q,2}^{-1}\alpha_3^{-1} = 1, \quad (4.50)$$

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1}^{-1}\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.51)$$

$$\beta_{m,q,k,1}\beta_{m,q+1,2}\beta_{m,q+2,k,1}\beta_{m,q+2,2}^{-1}\beta_{m,q+1,k,1}^{-1}\beta_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (4.52)$$

$$\beta_{m,q,2}\beta_{m,3}\beta_{m,q+2,2}\beta_{m,3}^{-1}\beta_{m,q+1,2}^{-1}\beta_{m,3}^{-1} = 1, \quad (4.53)$$

$$\beta_{m,i}\beta_{m,i+1}\beta_{m,i}\beta_{m,i+1}^{-1}\beta_{m,i}^{-1}\beta_{m,i+1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.54)$$

$$\beta_{m,q,k,1}\beta_{m,q+1,2}\alpha_{m,q+2,k,1}\beta_{m+1,q+1,2}^{-1}\beta_{m+1,q,k,1}^{-1}\alpha_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (4.55)$$

$$\beta_{m,q,2}\beta_{m,3}\alpha_{m,q+2,2}\beta_{m+1,3}^{-1}\beta_{m+1,q,2}^{-1}\alpha_3^{-1} = 1, \quad (4.56)$$

$$\beta_{m,i}\beta_{m,i+1}\alpha_i\beta_{m+1,i+1}^{-1}\beta_{m+1,i}^{-1}\alpha_i^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.57)$$

$$\alpha_{m,q,k,1}\alpha_{m,q,k+1,1}^{-1}\alpha_{m-1,q,k+1,1}^{-1}\alpha_{m-1,q,k,1} = 1, \quad (4.58)$$

$$\alpha_{m,q,2}\alpha_{m+1,q,k,1}\alpha_{m+1,q,k+1,1}^{-1}\alpha_{m,q,2}^{-1}\alpha_{m-1,q,2}^{-1}\alpha_{m-2,q,k+1,1}^{-1}\alpha_{m-2,q,k,1}\alpha_{m-1,q,2} = 1, \quad (4.59)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1}\alpha_{m+l,q,k,i-l}\prod_{l=0}^{i-1}\alpha_{(m+i-1)-l,q,k+1,l+1}^{-1}\prod_{l=0}^{i-1}\alpha_{(m-1)-l,q,k+1,i-l}^{-1}\prod_{l=0}^{i-1}\alpha_{(m-i)+l,q,k,l+1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.60)$$

$$\beta_{m,q,k,1}\beta_{m,q,k+1,1}^{-1}\beta_{m,q-1,k+1,1}^{-1}\beta_{m,q-1,k,1} = 1, \quad (4.61)$$

$$\beta_{m,q,2}\beta_{m,q+1,k,1}\beta_{m,q+1,k+1,1}^{-1}\beta_{m,q,2}^{-1}\beta_{m,q-1,2}^{-1}\beta_{m,q-2,k+1,1}^{-1}\beta_{m,q-2,k,1}\beta_{m,q-1,2} = 1, \quad (4.62)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1}\beta_{m,q+l,k,i-l}\prod_{l=0}^{i-1}\beta_{m,(q+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1}\prod_{l=0}^{i-1}\beta_{m,(q-1)-l,k+1,i-l}^{-1}\prod_{l=0}^{i-1}\beta_{m,(q-i)+l,k,l+1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (4.63)$$

$$\alpha_{m,q,k+1,1}\alpha_{m,q,k+2,1}^{-1}\alpha_{m,q,k+1,1}\alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (4.64)$$

$$\beta_{m,q,k+1,1}\beta_{m,q,k+2,1}^{-1}\beta_{m,q,k+1,1}\beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1. \quad (4.65)$$

Demonstração. Inicialmente, coletaremos as relações $S_{\lambda,a} = 1$. Consideramos todos os pares (λ, a) com $\lambda \in \Lambda = \{\sigma_1^m v_1^q t_1^k \mid m, k \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1\}\}$, $a \in S = \{\sigma_i, v_i, t_1 \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Precisamos encontrar os pares (λ, a) para os quais λa e $\overline{\lambda a}$ são livremente iguais.

Note que, $\sigma_1^m v_1^q t_1^k \sigma_i$ e $\overline{\sigma_1^m v_1^q t_1^k \sigma_i} = \sigma_1^{m+1} v_1^q t_1^k$ são livres se e somente se $q = k = 0$ e $i = 1$. Agora, $\sigma_1^m v_1^q t_1^k v_i$ e $\overline{\sigma_1^m v_1^q t_1^k v_i} = \sigma_1^m v_1^{q+1} t_1^k$ são livres se e somente se $k = 0$ e $i = 1$. Portanto, obtemos as seguintes relações como algumas das relações definidoras para FVB'_n :

$$S_{\sigma_1^m, \sigma_1} = 1, \quad \text{i.e. } \alpha_{m,0,0,1} = 1,$$

$$S_{\sigma_1^m v_1^q, v_1} = 1, \quad \text{i.e. } \beta_{m,q,0,1} = 1.$$

Além disso, $\beta_{m,q,k,1}^2 = \beta_{m,q,2}^2 = \beta_{m,j}^2 = 1$ para $m, k \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1\}$ e $j = 3, \dots, n-1$.

Agora, calculamos os termos $\tau(\lambda r_\mu \lambda^{-1})$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e para cada uma das relações definidoras $r_\mu = 1$ de FVB_n , como segue:

$$\begin{aligned}
r_1 & : \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1, \quad |i - j| > 1, \\
r_2 & : \nu_i \nu_j \nu_i^{-1} \nu_j^{-1} = 1, \quad |i - j| > 1, \\
r_3 & : \sigma_i \nu_j \sigma_i^{-1} \nu_j^{-1} = 1, \quad |i - j| > 1, \\
r_4 & : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1, \\
r_5 & : \nu_i \nu_{i+1} \nu_i \nu_{i+1}^{-1} \nu_i^{-1} \nu_{i+1}^{-1} = 1, \\
r_6 & : \nu_i \nu_{i+1} \sigma_i \nu_{i+1}^{-1} \nu_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1, \\
r_7 & : \nu_i^2 = 1, \\
r_8 & : \sigma_i t_1 \sigma_i^{-1} t_1^{-1} = 1, \quad i > 1, \\
r_9 & : \nu_i t_1 \nu_i^{-1} t_1^{-1} = 1, \quad i > 1; \\
r_{10} & : \sigma_i \cdots \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_i = 1, \\
r_{11} & : \nu_i \cdots \nu_1 t_1 \nu_1^{-1} \cdots \nu_i^{-1} \nu_i^{-1} \cdots \nu_1^{-1} t_1^{-1} \nu_1 \cdots \nu_i = 1, \\
r_{12} & : t_1 \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 t_1^{-1} \sigma_1^{-1} = 1, \\
r_{13} & : t_1 \nu_1 t_1 \nu_1^{-1} t_1^{-1} \nu_1 t_1^{-1} \nu_1^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Escolha qualquer elemento $\lambda = \sigma_1^m \nu_1^q t_1^k \in \Lambda$. Deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda r_1 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \sigma_j} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_j}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_2 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_j} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_j}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_3 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \nu_j} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_j}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_4 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \nu_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_5 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+2} t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+2} t_1^k, \nu_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_{i+1}}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_6 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+2} t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^{q+1} t_1^k, \nu_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_7 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_8 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+1}, \sigma_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_9 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_i} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+1}, \nu_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_{10} \lambda^{-1}) & = \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{m+l} \nu_1^q t_1^k, \sigma_{i-l}} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m+i-1)-l} \nu_1^q t_1^{k+1}, \sigma_{l+1}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-1)-l} \nu_1^q t_1^{k+1}, \sigma_{i-l}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-i)+l} \nu_1^q t_1^k, \sigma_{l+1}}, \\
\tau(\lambda r_{11} \lambda^{-1}) & = \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \nu_1^{q+l} t_1^k, \nu_{i-l}} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m+i-1)-l} \nu_1^q t_1^{k+1}, \nu_{l+1}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \nu_1^{(q-1)-l} t_1^{k+1}, \nu_{i-l}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \nu_1^{(q-i)+l} t_1^k, \nu_{l+1}}, \\
\tau(\lambda r_{12} \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+2}, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \sigma_1}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_{13} \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+1}, \nu_1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+2}, \nu_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^{k+1}, \nu_1} \cdot S_{\sigma_1^m \nu_1^q t_1^k, \nu_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte conjunto de relações definidoras para $\Gamma_2(FVB_n)$:

$$\alpha_{m,0,0,1} = 1, \quad (4.66)$$

$$\beta_{m,q,0,1} = 1, \quad (4.67)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m+1,q,k,j} \alpha_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (4.68)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q+1,k,j} \beta_{m,q+1,k,i}^{-1} \beta_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (4.69)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \beta_{m+1,q,k,j} \alpha_{m,q+1,k,i}^{-1} \beta_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (4.70)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m+1,q,k,i+1} \alpha_{m+2,q,k,i} \alpha_{m+2,q,k,i+1}^{-1} \alpha_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,i+1}^{-1} = 1, \quad (4.71)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q+1,k,i+1} \beta_{m,q+2,k,i} \beta_{m,q+2,k,i+1}^{-1} \beta_{m,q+1,k,i}^{-1} \beta_{m,q,k,i+1}^{-1} = 1, \quad (4.72)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q+1,k,i+1} \alpha_{m,q+2,k,i} \beta_{m+1,q+1,k,i+1}^{-1} \beta_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,i+1}^{-1} = 1, \quad (4.73)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q,k,i}^{-1} = 1, \quad (4.74)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m,q,k+1,i}^{-1} = 1, \quad i > 1, \quad (4.75)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q,k+1,i}^{-1} = 1, \quad i > 1, \quad (4.76)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,q,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,q,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,q,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,q,k,l+1} = 1, \quad (4.77)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,q+l,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-i)+l,k,l+1} = 1, \quad (4.78)$$

$$\alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k+2,1}^{-1} \alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (4.79)$$

$$\beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k+2,1}^{-1} \beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1. \quad (4.80)$$

Para (4.68) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1, j \geq 3$; dá as relações: (4.38).

Caso 2: $i = 2, j \geq 4$; dá as relações: (4.39).

Caso 3: $i, j \geq 3, |i-j| > 1$; dá as relações: (4.40).

Para (4.69) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.41).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.42).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.43).

Para (4.70) temos os seguintes 5 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1, j \geq 3$; dá as relações: (4.44).

Caso 2: $j = 1, i \geq 3$; dá as relações: (4.45).

Caso 3: $i = 2, j \geq 4$; dá as relações: (4.46).

Caso 4: $j = 2, i \geq 4$; dá as relações: (4.47).

Caso 5: $i, j \geq 3, |i - j| > 1$; dá as relações (4.48).

Para (4.71) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.49).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.50).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.51).

Para (4.72) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.52).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.53).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.54).

Para (4.73) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.55).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.56).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.57).

As relações (4.74), (4.75) e (4.76) não fornecem nenhuma relação não trivial.

Para (4.77) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.58).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.59).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.60).

Para (4.78) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (4.61).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (4.62).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (4.63).

Nas relações (4.79) e (4.80) não há caso a considerar, pois $i = 1$ é fixo. Portanto, a prova do lema está completa. \square

Concluimos o estudo do subgrupo comutador do grupo de tranças virtuais emolduradas, demonstrando que este subgrupo possui um conjunto infinito de geradores e é perfeito para $n \geq 5$. Com isso, estabelecemos que o grupo de tranças virtuais emolduradas é quase-perfeito para $n \geq 5$.

Teorema 4.32

O subgrupo $\Gamma_2(FVB_n)$ possui um conjunto infinito de geradores para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Para provar este teorema, aplicaremos diferentes transformações de Tietze à apresentação para $\Gamma_2(FVB_n)$, para $n \geq 5$, deduzidas dos Lemas 4.30 e 4.31.

De (4.38) obtemos

$$\alpha_{m+1,q,k,1} = \alpha_j^{-1} \alpha_{m,q,k,1} \alpha_j, \quad j \geq 3.$$

Observe que $\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,q,k,1} \alpha_j^m$. Então podemos remover todos os elementos $\alpha_{m,q,k,1}$ do conjunto gerador, exceto $\alpha_{0,q,k,1}$.

De (4.39) obtemos

$$\alpha_{m+1,q,2} = \alpha_j^{-1} \alpha_{m,q,2} \alpha_j, \quad j \geq 4.$$

Observe que $\alpha_{m,q,2} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,q,2} \alpha_j^m$. Então podemos remover todos os elementos $\alpha_{m,q,2}$ do conjunto gerador, exceto $\alpha_{0,q,2}$. Observe que, aqui, precisamos de $n \geq 5$.

De (4.45) obtemos

$$\beta_{m+1,q,k,1} = \alpha_i^{-1} \beta_{m,q,k,1} \alpha_i, \quad i \geq 3.$$

Observe que $\beta_{m,q,k,1} = \alpha_i^{-m} \beta_{0,q,k,1} \alpha_i^m$, $i \geq 3$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,q,k,1}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,q,k,1}$.

De (4.47) obtemos

$$\beta_{m+1,q,2} = \alpha_i^{-1} \beta_{m,q,2} \alpha_i, \quad i \geq 4.$$

Observe que $\beta_{m,q,2} = \alpha_i^{-m} \beta_{0,q,2} \alpha_i^m$, $i \geq 4$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,q,2}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,q,2}$. Observe que, aqui, precisamos de $n \geq 5$.

De (4.48) obtemos

$$\beta_{m+1,j} = \alpha_i^{-1} \beta_{m,j} \alpha_i.$$

Note que $\beta_{m,q,2} = \alpha_i^{-m} \beta_{0,j} \alpha_i^m$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,j}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,j}$.

Assim, podemos gerar $\Gamma_2(FVB_n)$ para todo $n \geq 5$, com o seguinte conjunto infinito:

$$\{\alpha_{0,q,k,1}, \beta_{0,q,k,1}, \alpha_{0,q,2}, \beta_{0,q,2}, \alpha_j, \beta_{0,j} \mid k \in \mathbb{Z}, q \in \{0,1\}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

□

Teorema 4.33

O subgrupo $\Gamma_2(FVB_n)$ é perfeito para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Para provar este teorema, abelianizamos a apresentação de $\Gamma_2(FVB_n)$ inserindo as relações do tipo $xy = yx$ para todos os x, y no conjunto gerador, e obtemos uma apresentação para o abelianizado $(\Gamma_2(FVB_n))^{ab}$. Agora mostraremos que $(\Gamma_2(FVB_n))^{ab} \cong \langle 1 \rangle$. Observamos o seguinte.

De (4.45) obtemos $\beta_{m+1,q,k,1} = \beta_{m,q,k,1}$, o que implica $\beta_{m,q,k,1} = \beta_{0,q,k,1}$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,q,k,1}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,q,k,1}$.

De (4.47) obtemos $\beta_{m+1,q,2} = \beta_{m,q,2}$, o que implica $\beta_{m,q,2} = \beta_{0,q,2}$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,q,2}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,q,2}$. Note que, aqui, precisamos de $n \geq 5$.

De (4.48) obtemos $\beta_{m+1,j} = \beta_{m,j}$, o que implica $\beta_{m,j} = \beta_{0,j}$. Então podemos remover todos os elementos $\beta_{m,j}$ do conjunto gerador, exceto $\beta_{0,j}$.

De (4.52) e das observações acima, obtemos $\beta_{0,q,k,1} = \beta_{0,q,2}$. De (4.53) segue que $\beta_{0,q,2} = \beta_{0,3}$. Além disso, de (4.54), $\beta_{0,3} = \beta_{0,4} = \dots = \beta_{0,n-1}$.

Das observações acima, obtemos

$$\beta_{0,3} = \beta_{0,q,2} = \beta_{0,q,0,1} = 1 \Rightarrow \beta_{m,q,k,1} = \beta_{m,q,2} = \beta_{m,i} = 1,$$

para todo $m, k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0,1\}$, $3 \leq i \leq n-1$.

Agora, de (4.38) obtemos $\alpha_{m+1,q,k,1} = \alpha_{m,q,k,1}$, o que implica $\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{0,q,k,1}$. De (4.44) obtemos $\alpha_{m,q+1,k,1} = \alpha_{m,q,k,1}$, o que implica $\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{m,0,k,1}$. Podemos substituir $\alpha_{m,q,k,1}$ em todas as relações por $\alpha_{0,0,k,1}$ e remover $\alpha_{m,q,k,1}$ do conjunto de geradores, exceto $\alpha_{0,0,k,1}$.

De (4.39) obtemos $\alpha_{m+1,q,2} = \alpha_{m,q,2}$, o que implica $\alpha_{m,q,2} = \alpha_{0,q,2}$. Então podemos remover todos os elementos $\alpha_{m,q,2}$ do conjunto gerador, exceto $\alpha_{0,q,2}$. Note que, aqui, precisamos de $n \geq 5$.

De (4.55) e das observações acima, obtemos $\alpha_{0,q,k,1} = \alpha_{0,q,2}$. De (4.56) segue que $\alpha_{0,q,2} = \alpha_3$. Além disso, de (4.57), $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_{n-1}$.

Portanto,

$$\alpha_3 = \alpha_{0,q,2} = \alpha_{0,0,0,1} = 1 \Rightarrow \alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{m,q,2} = \alpha_i = 1,$$

para todo $m, k \in \mathbb{Z}$, $q \in \{0,1\}$, $3 \leq i \leq n-1$.

□

4.7 Subgrupos característicos de FVB_n

Nesta seção, investigamos propriedades de invariância dos subgrupos FVP_n e FKB_n dentro do grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n . Para fim de recordação, os grupos FVP_n e FKB_n foram definidos na Seção 4.2. Em particular, mostraremos que tais subgrupos são característicos em FVB_n , isto é, são preservados por todo automorfismo de FVB_n . Essa abordagem segue a linha de raciocínio adotada por (DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025) ao demonstrar que VP_n é característico de VB_n se, e só se, $n \geq 4$, e KB_n é característico de VB_n se, e somente se, $n \geq 3$, adaptando seus métodos ao contexto emoldurado.

Estudamos no Teorema 4.24 quem são os homomorfismos do grupo FVB_n no grupo S_n para $n \geq 5$. Completamos esse estudo dos homomorfismos nessa seção fazendo os casos $n = 3$ e $n = 4$.

Para $n = 3$, o grupo de tranças virtuais emolduradas com 3 cordas FVB_3 tem geradores $t_1, t_2, t_3, \sigma_1, \sigma_2, v_1, v_2$ sujeitos às relações:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ v_1 v_2 v_1 &= v_2 v_1 v_2 \\ v_1 v_2 \sigma_1 &= \sigma_2 v_1 v_2 \\ v_1^2 &= 1 \\ v_2^2 &= 1 \\ t_i t_j &= t_j t_i \quad \text{para todo } i, j \\ \alpha_i t_j \alpha_i^{-1} &= \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i, \\ t_i, & \text{se } j = i + 1, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\alpha \in \{\sigma_i, v_i\}_{i=1,2}$. O grupo simétrico S_3 tem a seguinte apresentação:

$$S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle.$$

Definimos, para $1 \leq i \leq 8$, os seguintes homomorfismos $\psi_i: FVB_3 \rightarrow S_3$:

- (a) $\psi_1(v_1) = s_1, \psi_1(v_2) = s_1, \psi_1(\sigma_1) = s_2, \psi_1(\sigma_2) = s_2, \psi_1(t_1) = \psi_1(t_2) = \psi_1(t_3) = 1$;
- (b) $\psi_2(v_1) = s_1, \psi_2(v_2) = s_2, \psi_2(\sigma_1) = s_1, \psi_2(\sigma_2) = s_2, \psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = \psi_2(t_3) = 1$. Nesse caso, ψ_2 é igual ao homomorfismo π_{FP} ;
- (c) $\psi_3(v_1) = s_1, \psi_3(v_2) = s_2, \psi_3(\sigma_1) = s_2, \psi_3(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1, \psi_3(t_1) = \psi_3(t_2) = \psi_3(t_3) = 1$;
- (d) $\psi_4(v_1) = s_1, \psi_4(v_2) = s_2, \psi_4(\sigma_1) = s_1 s_2 s_1, \psi_4(\sigma_2) = s_1, \psi_4(t_1) = \psi_4(t_2) = \psi_4(t_3) = 1$;
- (e) $\psi_5(v_1) = s_1, \psi_5(v_2) = s_2, \psi_5(\sigma_1) = s_1 s_2, \psi_5(\sigma_2) = s_1 s_2, \psi_5(t_1) = \psi_5(t_2) = \psi_5(t_3) = 1$;

$$(f) \psi_6(v_1) = s_1, \psi_6(v_2) = s_2, \psi_6(\sigma_1) = s_2 s_1, \psi_6(\sigma_2) = s_2 s_1, \psi_6(t_1) = \psi_6(t_2) = \psi_6(t_3) = 1;$$

$$(g) \psi_7(v_1) = s_1, \psi_7(v_2) = s_2, \psi_7(\sigma_1) = 1, \psi_7(\sigma_2) = 1, \psi_7(t_1) = \psi_7(t_2) = \psi_7(t_3) = 1. \text{ Nesse caso, } \psi_7 \text{ é igual ao homomorfismo } \pi_{FK};$$

$$(h) \psi_8(v_1) = s_1, \psi_8(v_2) = s_1, \psi_8(\sigma_1) = s_1 s_2, \psi_8(\sigma_2) = s_1 s_2, \psi_8(t_1) = \psi_8(t_2) = \psi_8(t_3) = 1.$$

Para entender melhor o grupo FVB_3 , podemos estudar seus homomorfismos com imagem em S_3 . O resultado a seguir mostra que, a menos de conjugação, existem apenas algumas possibilidades para esse tipo de homomorfismo.

Teorema 4.34

Seja $\psi: FVB_3 \rightarrow S_3$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, uma das seguintes possibilidades se verifica.

- (a) ψ é abeliano;
- (b) $\psi \in \{\psi_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$.

Demonstração. Considere um homomorfismo $\psi: FVB_3 \rightarrow S_3$ e a inclusão natural $\iota: S_3 \rightarrow FVB_3$, definida por $\iota(s_1) = v_1$ e $\iota(s_2) = v_2$. A composição $\psi \circ \iota$ define então um endomorfismo do grupo S_3 . Pode-se verificar que, a menos de conjugação, esse endomorfismo é a identidade, ou a imagem de $\psi \circ \iota$ é $\langle s_1 \rangle$, ou ainda a imagem é o subgrupo trivial $\{1\}$. Dizer que $\psi \circ \iota$ é abeliano equivale a afirmar que essa composição, a menos de equivalência, não é a identidade.

Inicialmente, vamos supor que $\psi \circ \iota$ não é a identidade. Assim, a partir das relações $v_1^2 = 1$, $v_2^2 = 1$ e $v_1 v_2 v_1 = v_2 v_1 v_2$ temos que $\psi(v_1) = \psi(v_2) = w_1 \in S_3$ com $w_1^2 = 1$. A partir da relação $v_1 v_2 \sigma_1 = \sigma_2 v_1 v_2$ segue que $\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_2) = w_2 \in S_3$. Conhecidos w_1 e w_2 , a partir das relações de FVB_3 , podemos determinar $\psi(t_1)$, $\psi(t_2)$ e $\psi(t_3)$. Além disso, se $w_1 = 1$ ou $w_2 = 1$, então ψ é abeliano.

Então, suponhamos que $w_1 = s_1$ e que w_2 é um elemento não trivial em S_3 . Agora, analisemos os possíveis valores de $w_2 \in S_3$ tal que ψ é um homomorfismo.

- Se $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_1$, $\psi(\sigma_1) = s_1$ e $\psi(\sigma_2) = s_1$, então pela relação $v_1 t_3 = t_3 v_1$ temos $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$. Desta forma, $\psi(t_3)$ pertence ao centralizador de $\langle s_1 \rangle$ em S_3 que é $\{1, s_1\}$. Se $\psi(t_3) = 1$, pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$, obtemos $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Se $\psi(t_3) = s_1$, novamente pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$, obtemos $\psi(t_2) = \psi(t_1) = s_1$. Em ambos os casos, temos que ψ é abeliano.
- Suponha que $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_1$, $\psi(\sigma_1) = s_2$, $\psi(\sigma_2) = s_2$. Note que, pelas relações $v_1 t_3 = t_3 v_1$ e $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$, temos que $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$ e $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2$, então $\psi(t_3) = 1$. Assim, pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$ segue que $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_1 .

- Se $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_1$, $\psi(\sigma_1) = s_1 s_2$, $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2$, então das relações $v_1 t_3 = t_3 v_1$ e $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$, temos $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$ e $\psi(t_3) = s_2 s_1 \psi(t_3) s_1 s_2$, o que implica $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2$, ou seja, $\psi(t_3) = 1$. Pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$ podemos concluir que $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_8 .
- Suponha que $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_1$, $\psi(\sigma_1) = s_1 s_2 s_1$, $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1$. A partir das relações $v_1 t_3 = t_3 v_1$ e $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$, segue que $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$ e $\psi(t_3) = s_1 s_2 s_1 \psi(t_3) s_1 s_2 s_1$, obtemos $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2$, ou seja, $\psi(t_3) = 1$. Pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$ podemos concluir que $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Então ψ é conjugado a ψ_1 .
- Se $\psi(v_1) = s_1$, $\psi(v_2) = s_1$, $\psi(\sigma_1) = s_2 s_1$, $\psi(\sigma_2) = s_2 s_1$, então a partir das relações $v_1 t_3 = t_3 v_1$ e $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$, temos $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$ e $\psi(t_3) = s_1 s_2 \psi(t_3) s_2 s_1$, o que implica $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2 \Rightarrow \psi(t_3) = 1$. Pelas relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$ concluímos que $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Então ψ é conjugado a ψ_8 .

Para qualquer escolha de $w_2 = \psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_2)$ em S_3 , obtemos um homomorfismo abeliano ou um homomorfismo que é conjugado a ψ_1 ou ψ_8 .

Agora, suponha que $\psi \circ \iota$ seja o homomorfismo identidade. Isso implica que

$$\psi(v_1) = \tau_1 \quad \text{e} \quad \psi(v_2) = \tau_2.$$

A partir da relação mista $v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 = \sigma_2$, conclui-se que, ao conhecermos $\psi(\sigma_1)$, o valor de $\psi(\sigma_2)$ está totalmente determinado. Vamos então analisar os possíveis valores que $\psi(\sigma_1)$ pode assumir. Assim, podemos determinar $\psi(t_1)$, $\psi(t_2)$ e $\psi(t_3)$. Analisemos os possíveis valores para $\psi(\sigma_1)$.

- Suponha que $\psi(\sigma_1) = 1$, $\psi(\sigma_2) = 1$. Pelas relações $\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1$ e $\sigma_2 t_2 = t_3 \sigma_2$, concluímos que $\psi(t_1) = \psi(t_2) = \psi(t_3)$. A partir da relação $v_1 t_3 = t_3 v_1$ obtemos $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$. Ademais, pela relação $v_2 t_3 = t_2 v_2$ temos $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_2) s_2 = s_2 \psi(t_3) s_2$. Logo, $\psi(t_3) = 1$ o que implica $\psi(t_2) = \psi(t_1) = 1$. Esse homomorfismo é $\psi_7 = \pi_{FK}$.
- Suponha que $\psi(\sigma_1) = s_1$. Então $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 = s_2$. Pelas relações $v_1 t_1 = t_2 v_1$ e $v_2 t_2 = t_3 v_2$, obtemos $\psi(t_2) = s_1 \psi(t_1) s_1$ e $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_2) s_1$. Determinando $\psi(t_1)$ conseguiremos determinar $\psi(t_2)$ e $\psi(t_3)$. Analisaremos os possíveis valores de $\psi(t_1)$.
 - (i) Se $\psi(t_1) = 1$, então $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_3) = 1$.
 - (ii) Se $\psi(t_1) = s_1$, então $\psi(t_2) = s_2$ e $\psi(t_3) = s_2 s_1 s_2$. Nesse caso, não teremos um homomorfismo, pois $\psi(t_1 t_3) = s_2 s_1$ e $\psi(t_3 t_1) = s_1 s_2$, e temos que $s_2 s_1 \neq s_1 s_2$ em S_3 .
 - (iii) Se $\psi(t_1) = s_2$, então $\psi(t_2) = s_1 s_2 s_1$ e $\psi(t_3) = s_1$. Novamente não teremos um homomorfismo, pois $\psi(t_1 t_3) \neq \psi(t_3 t_1)$.

(iv) Se $\psi(t_1) = s_1 s_2$, então $\psi(t_2) = s_2 s_1$ e $\psi(t_3) = s_1 s_2$. Não teremos um homomorfismo, pois $\psi(v_1 t_3) \neq \psi(t_3 v_1)$.

(v) Se $\psi(t_1) = s_2 s_1$, então $\psi(t_2) = s_1 s_2$ e $\psi(t_3) = s_2 s_1$. Porém, $\psi(v_1 t_3) \neq \psi(t_3 v_1)$ e, dessa forma, não temos um homomorfismo.

(vi) Se $\psi(t_1) = s_1 s_2 s_1$, então $\psi(t_2) = s_2$ e $\psi(t_3) = s_1$. Novamente, $\psi(v_1 t_3) \neq \psi(t_3 v_1)$ e segue que não temos um homomorfismo.

Assim, $\psi(\sigma_1) = s_1$, $\psi(\sigma_2) = s_2$, $\psi(t_1) = 1$, $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_3) = 1$. Esse homomorfismo é $\psi_2 = \pi_{FP}$.

- Seja $\psi(\sigma_1) = s_2$, então $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_2 s_2 s_1 = s_1 s_2 s_1$. Pelas relações $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$ e $v_1 t_3 = t_3 v_1$ temos, respectivamente, $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2$ e $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$, ou seja, $\psi(t_3) = 1$. Dessa forma, utilizando as relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1$ concluímos que $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_1) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_3 .
- Seja $\psi(\sigma_1) = s_1 s_2$, então $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1 = s_1 2$. Pela relação $\sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2$ obtemos $\psi(t_1) = s_2 s_1 \psi(t_1) s_1 s_2$. Por outro lado, pela relação $v_2 t_1 = t_1 v_2$ temos $\psi(t_1) = s_2 \psi(t_1) s_2$. Então a partir de $\psi(t_1) = s_2 s_1 \psi(t_1) s_1 s_2$ e $\psi(t_1) = s_2 \psi(t_1) s_2$ vamos obter $\psi(t_1) = s_1 \psi(t_1) s_1$, ou seja, $\psi(t_1) = 1$. Das relações $v_1 t_1 = t_2 v_1$ e $v_2 t_2 = t_3 v_2$ segue que $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_3) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_5 .
- Suponha que $\psi(\sigma_1) = s_2 s_1$, então $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_2 s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1$. Da relação $\sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1$ obtemos $\psi(t_3) = s_1 s_2 \psi(t_3) s_2 s_1$. Por outro lado, pela relação $v_1 t_3 = t_3 v_1$ temos $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$. A partir de $\psi(t_3) = s_1 s_2 \psi(t_3) s_2 s_1$ e $\psi(t_3) = s_1 \psi(t_3) s_1$ obtemos $\psi(t_3) = s_2 \psi(t_3) s_2$, ou seja, $\psi(t_3) = 1$. Das relações $v_2 t_2 = t_3 v_2$ e $v_1 t_1 = t_2 v_1$ segue que $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_1) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_6 .
- Se $\psi(\sigma_1) = s_1 s_2 s_1$, então $\psi(\sigma_2) = s_1 s_2 s_2 s_1 s_2 s_2 s_1 = s_1$. A partir das relações $\sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2$ e $v_2 t_1 = t_1 v_2$ temos, respectivamente, $\psi(t_1) = s_1 \psi(t_1) s_1$ e $\psi(t_1) = s_2 \psi(t_1) s_1$, ou seja, $\psi(t_1) = 1$. Novamente as relações $v_1 t_1 = t_2 v_1$ e $v_2 t_2 = t_3 v_2$ segue que $\psi(t_2) = 1$ e $\psi(t_3) = 1$. Esse homomorfismo é ψ_4 .

A partir dos cálculos acima, provamos que, salvo conjugação, ψ é abeliano ou $\psi \in \{\psi_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$. □

Para o caso com 4 cordas, ou seja, $n = 4$, o grupo FVB_4 tem como geradores $t_1, t_2, t_3, t_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, v_1, v_2, v_3$. Esses geradores estão sujeitos às relações a seguir:

- $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3, \quad \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1,$
- $v_1 v_2 v_1 = v_2 v_1 v_2, \quad v_2 v_3 v_2 = v_3 v_2 v_3, \quad v_1 v_3 = v_3 v_1, \quad v_1^2 = 1, \quad v_2^2 = 1, \quad v_3^2 = 1,$
- $v_1 v_2 \sigma_1 = \sigma_2 v_1 v_2, \quad v_2 v_3 \sigma_2 = \sigma_3 v_2 v_3, \quad \sigma_1 v_3 = v_3 \sigma_1, \quad \sigma_3 v_1 = v_1 \sigma_3,$

$$\bullet \alpha_i t_j \alpha_i^{-1} = \begin{cases} t_{i+1}, & \text{se } j = i, \\ t_i, & \text{se } j = i + 1, \\ t_j, & \text{se } j \neq i, i + 1, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \{\sigma_i, \nu_i\}_{i=1,2,3}$. O grupo simétrico S_4 tem a seguinte apresentação:

$$S_4 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_2 s_3 s_2 = s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 = s_3 s_1, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1 \rangle.$$

Seja $\eta: S_4 \longrightarrow S_4$ o homomorfismo definido por $\eta(s_1) = \eta(s_3) = s_1$ e $\eta(s_2) = s_2$.

Para entender quais são os possíveis homomorfismos de FVB_4 em S_4 , vamos usar o resultado a seguir que descreve os endomorfismos de S_4 .

Lema 4.35 ((DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025), Lemma 17)

Seja $\varphi: S_4 \longrightarrow S_4$ qualquer endomorfismo de S_4 . Então, a menos de conjugação, uma das seguintes possibilidades ocorre:

- (a) φ é abeliano,
- (b) φ é o homomorfismo identidade,
- (c) $\varphi = \eta$.

Defina, para $1 \leq i \leq 6$, os seguintes homomorfismos $\delta_i: FVB_4 \longrightarrow S_4$:

- (a) $\delta_1(\nu_1) = s_1, \delta_1(\nu_2) = s_2, \delta_1(\nu_3) = s_1, \delta_1(\sigma_1) = s_1, \delta_1(\sigma_2) = s_2, \delta_1(\sigma_3) = s_1, \delta_1(t_1) = \delta_1(t_2) = \delta_1(t_3) = \delta_1(t_3) = 1$;
- (b) $\delta_2(\nu_1) = s_1, \delta_2(\nu_2) = s_2, \delta_2(\nu_3) = s_1, \delta_2(\sigma_1) = s_1, \delta_2(\sigma_2) = s_3, \delta_2(\sigma_3) = s_3 s_2 s_1 s_2 s_3, \delta_2(\sigma_3) = s_3, \delta_2(t_1) = \delta_2(t_2) = \delta_2(t_3) = \delta_2(t_3) = 1$;
- (c) $\delta_3(\nu_1) = s_1, \delta_3(\nu_2) = s_2, \delta_3(\nu_3) = s_3, \delta_3(\sigma_1) = s_1, \delta_3(\sigma_2) = s_2, \delta_3(\sigma_3) = s_3, \delta_3(t_1) = \delta_3(t_2) = \delta_3(t_3) = \delta_3(t_3) = 1$. Este δ_3 é igual ao homomorfismo π_{FP} ;
- (d) $\delta_4(\nu_1) = s_1, \delta_4(\nu_2) = s_2, \delta_4(\nu_3) = s_3, \delta_4(\sigma_1) = s_1, \delta_4(\sigma_2) = s_3 s_2 s_1 s_2 s_3, \delta_4(\sigma_3) = s_1, \delta_4(t_1) = \delta_4(t_2) = \delta_4(t_3) = \delta_4(t_3) = 1$;
- (e) $\delta_5(\nu_1) = s_1, \delta_5(\nu_2) = s_2, \delta_5(\nu_3) = s_3, \delta_5(\sigma_1) = 1, \delta_5(\sigma_2) = 1, \delta_5(\sigma_3) = 1, \delta_5(t_1) = \delta_5(t_2) = \delta_5(t_3) = \delta_5(t_3) = 1$. Este δ_5 é igual ao homomorfismo π_{FK} ;
- (f) $\delta_6(\nu_1) = s_1, \delta_6(\nu_2) = s_2, \delta_6(\nu_3) = s_1, \delta_6(\sigma_1) = 1, \delta_6(\sigma_2) = 1, \delta_6(\sigma_3) = 1, \delta_6(t_1) = \delta_6(t_2) = \delta_6(t_3) = \delta_6(t_3) = 1$.

Usando o lema anterior, podemos agora descrever os homomorfismos de FVB_4 em S_4 . O teorema a seguir mostra que há apenas algumas possibilidades para essas aplicações.

Teorema 4.36

Seja $\delta: FVB_4 \rightarrow S_4$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, uma das seguintes possibilidades ocorre:

- (a) δ é abeliano;
- (b) $\delta \in \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$.

Demonstração. Seja $\delta: FVB_4 \rightarrow S_4$ um homomorfismo e seja $\iota: S_4 \rightarrow VB_4$ a inclusão natural definida por $\iota(s_1) = v_1$, $\iota(s_2) = v_2$ e $\iota(s_3) = v_3$. Então, a composição $\delta \circ \iota$ é um endomorfismo de S_4 . De acordo com o Lema 4.35, a menos de conjugação, $\delta \circ \iota$ é ou um homomorfismo abeliano, ou é η , ou é o homomorfismo identidade.

Afirmamos que quando $\delta \circ \iota$ é abeliano, então δ é abeliano. A prova dada por (DEKIMPE; GONÇALVES; OCAMPO, 2025) no caso em que a composição é abeliana funciona para $n = 4$, provando a afirmação.

Suponha que $\delta \circ \iota = \eta$. Portanto $\delta(v_1) = s_1$, $\delta(v_2) = s_2$ e $\delta(v_3) = s_1$.

A partir das relações mistas $v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 = \sigma_1$ e $v_2 v_3 \sigma_2 v_3 v_2 = \sigma_2$ observamos que $\delta(\sigma_2)$ e $\delta(\sigma_3)$ são completamente determinados por $\delta(\sigma_1)$. Analisamos os possíveis valores de $\delta(\sigma_1)$. Da relação $\sigma_1 v_3 = v_3 \sigma_1$ e do fato de que $\delta(v_3) = s_1$, segue que $\delta(\sigma_1)$ pertence ao centralizador de $\langle s_1 \rangle$ em S_4 , ou seja, $\delta(\sigma_1) \in \{1, s_1, s_3, s_1 s_3\}$.

- Suponha que $\delta(\sigma_1) = 1$, então $\delta(\sigma_2) = 1$ e $\delta(\sigma_3) = 1$. Das relações $\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1$, $\sigma_2 t_2 = t_3 \sigma_2$ e $\sigma_3 t_3 = t_4 \sigma_3$, obtemos $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4)$. A partir das relações $v_1 t_4 = t_4 v_1$ e $v_2 t_4 = t_4 v_2$ segue, respectivamente, que $\delta(t_4) = s_1 \delta(t_4) s_1$ e $\delta(t_4) = s_2 \delta(t_4) s_2$, e assim $\delta(t_4) = 1$. Logo, $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é δ_6 .
- Suponha que $\delta(\sigma_1) = s_1$. Então, temos: $\delta(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 = s_2$ e $\delta(\sigma_3) = s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1$. A partir das relações $v_1 t_4 = t_4 v_1$ e $v_2 t_4 = t_4 v_2$ segue, respectivamente, que $\delta(t_4) = s_1 \delta(t_4) s_1$ e $\delta(t_4) = s_2 \delta(t_4) s_2$, e assim $\delta(t_4) = 1$. Das relações $\sigma_1 t_1 = t_2 \sigma_1$, $\sigma_2 t_2 = t_3 \sigma_2$ e $\sigma_3 t_3 = t_4 \sigma_3$, segue $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4)$ e, portanto, $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é δ_1 .
- Suponha que $\delta(\sigma_1) = s_3$. Nesse caso, então temos que $\delta(\sigma_2) = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 = s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$ e $\delta(\sigma_3) = s_2 s_1 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_1 s_2 = s_3$. Utilizando novamente as mesmas relações usadas no item anterior, concluímos que $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é δ_2 .
- Por fim, se $\delta(\sigma_1) = s_1 s_3$, não obtemos um homomorfismo, pois a relação $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ não é preservada.

Agora, suponha que $\delta \circ \iota$ seja o homomorfismo identidade. Isso implica que $\delta(v_1) = s_1$, $\delta(v_2) = s_2$ e $\delta(v_3) = s_3$.

Como antes, a partir das relações mistas $v_1 v_2 \sigma_1 v_2 v_1 = \sigma_2$ e $v_2 v_3 \sigma_2 v_3 v_2 = \sigma_3$, segue que conhecendo $\delta(\sigma_1)$ conseguimos determinar completamente $\delta(\sigma_2)$ e $\delta(\sigma_3)$. Ademais, a relação $\sigma_1 v_3 = v_3 \sigma_1$ implica que $\delta(\sigma_1) \in \{1, s_1, s_3, s_1 s_3\}$, que é o centralizador de $\langle s_3 \rangle$ em S_4 . Analisamos os possíveis valores de $\delta(\sigma_1)$.

- Suponha que $\delta(\sigma_1) = 1$, então $\delta(\sigma_2) = 1$ e $\delta(\sigma_3) = 1$. Como nos itens acima, a partir das relações $v_1 t_4 = t_4 v_1$, $v_2 t_4 = t_4 v_2$, $\sigma_1 t_1 = t_1 \sigma_1$, $\sigma_2 t_2 = t_2 \sigma_2$ e $\sigma_3 t_3 = t_3 \sigma_3$, obtemos $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é $\delta_5 = \pi_{FK}$.
- Suponha que $\delta(\sigma_1) = s_1$. Então: $\delta(\sigma_2) = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 = s_2$ e $\delta(\sigma_3) = s_2 s_3 s_2 s_3 s_2 = s_3$. Neste caso, usando as mesmas relações utilizadas nos itens anteriores, temos $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é $\delta_3 = \pi_{FP}$.
- Suponha que $\delta(\sigma_1) = s_3$. Então: $\delta(\sigma_2) = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 = s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$ e $\delta(\sigma_3) = s_2 s_3 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_3 s_2 = s_1$. De maneira análoga ao que foi feito nos itens anteriores, concluímos que $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta(t_3) = \delta(t_4) = 1$. Esse homomorfismo é δ_4 .
- Por fim, se $\delta(\sigma_1) = s_1 s_3$, não obtemos um homomorfismo, pois a relação $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ não é preservada.

A partir dos cálculos acima, provamos que, a menos de conjugação, δ é abeliano ou $\delta \in \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$. □

Com base nos resultados anteriores sobre os homomorfismos definidos no Teorema 4.34 e no Teorema 4.36, apresentamos a seguir um lema que compara as estruturas dos grupos envolvidos, evidenciando que certos subgrupos associados não são isomorfos entre si.

Lema 4.37

Seja $n \geq 3$.

(a) Os grupos FVP_n e FKB_n não são isomorfos.

(b) Seja $n = 3$ e seja $\psi \in \{\psi_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$ como no Teorema 4.34.

- O grupo $FVP_3 = \text{Ker}(\psi_2)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\psi_i)$ para $1 \leq i \leq 8$ com $i \neq 2$.
- O grupo $FKB_3 = \text{Ker}(\psi_7)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\psi_i)$ para $1 \leq i \leq 8$ com $i \neq 7$.

(c) Seja $n = 4$ e seja $\delta \in \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ como no Teorema 4.36.

- O grupo $FVP_4 = \text{Ker}(\delta_3)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\delta_i)$ para $1 \leq i \leq 6$ com $i \neq 3$.
- O grupo $FKB_4 = \text{Ker}(\delta_5)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\delta_i)$ para $1 \leq i \leq 6$ com $i \neq 5$.

Demonstração. (a) Segue do Teorema 4.21.

(b) Seja $n = 3$ e seja $\psi \in \{\psi_i \mid 1 \leq i \leq 8\}$ como no Teorema 4.34. Utilizamos o Sistema GAP ([The GAP Group, 2022](#)) para calcular o abelianizado dos grupos envolvidos. A seguir, evidenciamos os códigos utilizados nos cálculos para o caso $n = 3$:

```
f7:=FreeGroup("x","y","a","b","s","t","u");;
AssignGeneratorVariables(f7);;
#I Assigned the global variables [ x, y, a, b, s, t, u ]
r:=ParseRelators([x,y,a,b,s,t,u],"xyx=yxy,aba=bab,a^2=1,
b^2=1,bayab=x,st=ts,su=us,tu=ut,xs=tx,xt=sx,_xu=ux,
ys=sy,yt=uy,yu=ty,as=ta,at=sa,au=ua,bs=sb,_bt=ub,bu=tb");;
g:=f7/r;
<fp group on the generators [ x, y, a, b, s, t, u ]>
p1:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7], [(2,3),(2,3),(1,2),(1,2),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p1));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (2,3), (2,3), (1,2), (1,2), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3 ]
gap>p2:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7], [(1,2),(2,3),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p2));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (1,2), (2,3), (1,2), (2,3), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
p3:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7],
[(2,3),(1,2)*(2,3)*(1,2),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p3));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (2,3), (1,3), (1,2), (2,3), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
p4:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7],
[(1,2)*(2,3)*(1,2),(1,2),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p4));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (1,3), (1,2), (1,2), (2,3), (), (), () ]
```

```

[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
p5:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7],
[(1,2)*(2,3),(1,2)*(2,3),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p5));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (1,3,2), (1,3,2), (1,2), (2,3), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2 ]
p6:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7],
[(2,3)*(1,2),(2,3)*(1,2),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p6));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (1,2,3), (1,2,3), (1,2), (2,3), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2 ]
p7:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7], [(),(),(1,2),(2,3),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p7));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (), (), (1,2), (2,3), (), (), () ]
[ 0, 0, 0 ]
p8:=GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(3),
[g.1,g.2,g.3,g.4,g.5,g.6,g.7],
[(1,2)*(2,3),(1,2)*(2,3),(1,2),(1,2),(),(),()]);
AbelianInvariants(Kernel(p8));
[ x, y, a, b, s, t, u ] ->
[ (1,3,2), (1,3,2), (1,2), (1,2), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 3 ]

```

Obtemos

- $(\ker(\psi_1))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^5 \oplus (\mathbb{Z}_3)^3$
- $(\ker(\psi_2))^{\text{Ab}} = (FVP_3)^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^9$
- $(\ker(\psi_3))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^7$
- $(\ker(\psi_4))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^7$
- $(\ker(\psi_5))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}_2)^4$
- $(\ker(\psi_6))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}_2)^4$
- $(\ker(\psi_7))^{\text{Ab}} = (FKB_3)^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^3$
- $(\ker(\psi_8))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}_3$

A partir disso, pelo Lema 4.20, como $(FVP_3)^{\text{Ab}}$ e $(FKB_3)^{\text{Ab}}$ não são isomorfos a nenhum outro abelianizado, concluimos que $FVP_3 = \text{Ker}(\psi_2)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\psi_i)$ para $1 \leq i \leq 8$ com $i \neq 2$ e

que $FKB_3 = \text{Ker}(\psi_7)$ não é isomorfo a $\text{Ker}(\psi_i)$ para $1 \leq i \leq 8$ com $i \neq 7$.

(c) Seja $n = 4$ e seja $\delta \in \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ como no Teorema 4.36. Utilizamos a mesma ideia do item anterior. A seguir, evidenciamos os códigos utilizados nos cálculos para o caso $n = 4$:

```
f10 := FreeGroup("x", "y", "z", "a", "b", "c", "s", "t", "u", "v");;
AssignGeneratorVariables(f10);;
#I Assigned the global variables [ x, y, z, a, b, c, s, t, u, v ]
r := ParseRelators([x, y, z, a, b, c, s, t, u, v], "xyx=yxy, zyz=zyz, xz=zx,
aba=bab, bcb=cbc, ac=ca, a^2=1, b^2=1, c^2=1, xc=cx, za=az, abx=yab,
bcy=zbc, st=ts, su=us, sv=vs, tu=ut, tv=vt, uv=vu, xs=tx, xt=sx, xu=ux,
xv=vx, ys=sy, yt=uy, yu=ty, yv=vy, zs=sz, zt=tz, zu=vz, zv=uz, as=ta, at=sa,
au=ua, av=va, bs=sb, bt=ub, bu=tb, bv=vb, cs=sc, ct=tc, cu=vc, cv=uc");;
g := f10/r;
p1 := GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10],
[(1, 2), (2, 3), (1, 2), (1, 2), (2, 3), (1, 2), (), (), (), ()]);
AbelianInvariants(Kernel(p1));
[x, y, z, a, b, c, s, t, u, v] ->
[(1, 2), (2, 3), (1, 2), (1, 2), (2, 3), (1, 2), (), (), (), ()]
[0, 0, 0, 0, 2, 2]
p2 := GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10],
[(3, 4), (3, 4)*(2, 3)*(1, 2)*(2, 3)*(3, 4), (3, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 2),
(), (), (), ()]);
AbelianInvariants(Kernel(p2));
[x, y, z, a, b, c, s, t, u, v] ->
[(3, 4), (1, 4), (3, 4), (1, 2), (2, 3), (1, 2), (), (), (), ()]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]
p3 := GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10],
[(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (), (), (), ()]);
AbelianInvariants(Kernel(p3));
[x, y, z, a, b, c, s, t, u, v] ->
[(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (), (), (), ()]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
p4 := GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10],
[(3, 4), (3, 4)*(2, 3)*(1, 2)*(2, 3)*(3, 4), (1, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 4),
(), (), (), ()]);
```

```

AbelianInvariants( Kernel(p4) );
[ x, y, z, a, b, c, s, t, u, v ] ->
[ (3,4), (1,4), (1,2), (1,2), (2,3), (3,4),
(), (), (), () ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2 ]
p5:= GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[ g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10 ],
[ (), (), (), (1,2), (2,3), (3,4), (), (), (), () ] );
AbelianInvariants( Kernel(p5) );
[ x, y, z, a, b, c, s, t, u, v ] ->
[ (), (), (), (1,2), (2,3), (3,4), (), (), (), () ]
[ 0, 0 ]
p6:= GroupHomomorphismByImages(g, SymmetricGroup(4),
[ g.1, g.2, g.3, g.4, g.5, g.6, g.7, g.8, g.9, g.10 ],
[ (), (), (), (1,2), (2,3), (1,2), (), (), (), () ] );
AbelianInvariants( Kernel(p6) );
[ x, y, z, a, b, c, s, t, u, v ] ->
[ (), (), (), (1,2), (2,3), (1,2), (), (), (), () ]
[ 0, 0, 2, 2 ]

```

A partir dos cálculos usando GAP obtemos

- $(\ker(\delta_1))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^4 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2$
- $(\ker(\delta_2))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^7 \oplus (\mathbb{Z}_2)^8$
- $(\ker(\delta_3))^{\text{Ab}} = (FVP_4)^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^{16}$
- $(\ker(\delta_4))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^7 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2$
- $(\ker(\delta_5))^{\text{Ab}} = (FKB_4)^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^2$
- $(\ker(\delta_6))^{\text{Ab}} \cong \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}_2)^2$

A partir desses cálculos, utilizando o Lema 4.20, concluímos que o grupo $FVP_4 = \ker(\delta_3)$ não é isomorfo a $\ker(\delta_i)$ para $1 \leq i \leq 6$ com $i \neq 3$, e também que o grupo $FKB_4 = \ker(\delta_5)$ não é isomorfo a $\ker(\delta_i)$ para $1 \leq i \leq 6$ com $i \neq 5$. \square

A seguir, apresentamos um resultado que mostra uma importante propriedade estrutural dos grupos FVP_n e FKB_n em relação ao grupo FVB_n .

Teorema 4.38

Os grupos FVP_n e FKB_n são subgrupos característicos do grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n se $n \geq 3$.

Demonstração. Seja Σ_n o conjunto de todos os homomorfismos sobrejetivos de FVB_n em S_n , e seja $\mathfrak{T}_n = \Sigma / \sim_c$ o conjunto das classes de equivalência de Σ_n por \sim_c , em que a relação de equivalência \sim_c foi definida na Seção 1.1. Escolhemos o seguinte conjunto de representantes Λ de \mathfrak{T}_n : $\Lambda_3 = \{\psi_i \mid 1 \leq$

$i \leq 8$ } do Teorema 4.34, $\Lambda_4 = \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ do Teorema 4.36, $\Lambda_6 = \{\pi_{FK}, \pi_{FP}, v_6 \circ \pi_{FK}, v_6 \circ \pi_{FP}\}$ do Teorema 4.24, e $\Lambda_n = \{\pi_{FK}, \pi_{FP}\}$ para $n \geq 5$ e $n \neq 6$ do Teorema 4.24.

Se $n = 6$, dado um homomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow H$ e $\gamma \in \text{Aut}(H)$, então $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\gamma \circ \varphi)$, então $\text{Ker}(v_6 \circ \pi_{FK}) = \text{Ker}(\pi_{FK})$ e $\text{Ker}(v_6 \circ \pi_{FP}) = \text{Ker}(\pi_{FP})$. Desta forma, pelo Lema 4.37 e pelo Teorema 4.8, obtemos que FVP_n e FKB_n são subgrupos característicos em FVB_n quando $n \geq 3$. \square

4.8 Uma representação de Burau para VB_n

Na presente seção, apresentaremos a construção de uma representação de Burau para o grupo de tranças virtuais. Seguiremos, em grande parte, a abordagem descrita em (VENKATARAMANA, 2014), Seções 7.2 e 7.3, que trata da representação de Burau para o grupo de tranças clássico. Nessa construção, o grupo de tranças virtuais emolduradas surge naturalmente no desenvolvido. Na literatura, podemos encontrar outras representações de Burau para grupo de tranças virtuais, a saber: (VERSHININ, 2001) e (PALMER; SOULIÉ, 2022).

Seja F_{n+1} um grupo livre, livremente gerado por x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . Considere a representação do grupo de tranças virtuais VB_{n+1} no grupo de automorfismos de F_{n+1} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi: VB_{n+1} &\longrightarrow \text{Aut}(F_{n+1}) \\ \sigma_i &\longmapsto \varphi(\sigma_i): \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} \\ x_j \mapsto x_j \quad \text{se } j \neq i, i+1. \end{cases} \\ v_i &\longmapsto \varphi(v_i): \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1} \\ x_{i+1} \mapsto x_i \\ x_j \mapsto x_j \quad \text{se } j \neq i, i+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Tal representação induz uma ação de VB_{n+1} sobre F_{n+1} como segue

$$\begin{aligned} \psi: VB_{n+1} \times F_{n+1} &\longrightarrow F_{n+1} \\ (\sigma_i, x_j) &\longmapsto \sigma_i x_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & \text{se } j = i+1, \\ x_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (v_i, x_j) &\longmapsto v_i x_j v_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_i & \text{se } j = i+1, \\ x_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

A ação de VB_{n+1} sobre F_{n+1} induz uma ação do grupo VB_{n+1} sobre o abelianizado $F_{n+1}^{ab} = \mathbb{Z}^{n+1}$ do grupo livre, cujas imagens dos geradores x_i formam a base canônica de \mathbb{Z}^{n+1} . Das equações

anteriores, conclui-se que cada elemento σ_i e v_i atua permutando os vetores da base, enviando e_i em e_{i+1} , e_{i+1} em e_i e deixando todos os demais vetores fixos.

$$\psi^{ab}: VB_{n+1} \times \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$(\sigma_i, x_j) \longmapsto \sigma_i x_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_i & \text{se } j = i + 1, \\ x_j & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(v_i, x_j) \longmapsto v_i x_j v_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_i & \text{se } j = i + 1, \\ x_j & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Escreva $G = \mathbb{Z}^{n+1}$ para a abelianização do grupo livre F_{n+1} , livremente gerado por x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , onde G é escrito multiplicativamente. Temos que a aplicação $\eta: G \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq q^{\mathbb{Z}}$ dada por

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_{n+1}^{m_{n+1}} \mapsto q^{-(m_1+m_2+\cdots+m_{n+1})}.$$

O grupo S_{n+1} (e, portanto, o grupo VB_{n+1}) atua em \mathbb{Z}^{n+1} por permutação na base e age trivialmente em $q^{\mathbb{Z}}$. O homomorfismo η equivariante em relação a essa ação, ou seja, para qualquer $\tau \in S_{n+1}$ e qualquer $g \in G$ temos $\eta(\tau \cdot g) = \tau \cdot \eta(g)$. Além disso, o grupo VB_{n+1} atua em F_{n+1} e o homomorfismo $F_{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$ é equivariante em relação a essa ação. Agora, temos uma sequência exata curta

$$1 \rightarrow K_{n+1} \rightarrow F_{n+1} \rightarrow q^{\mathbb{Z}} \rightarrow 1,$$

com núcleo K_{n+1} estável sob a ação do grupo VB_{n+1} .

Como um subgrupo normal de F_{n+1} , o grupo K_{n+1} é gerado pelos elementos

$$y_1 = x_1^{-1} x_2, \quad y_2 = x_2^{-1} x_3, \dots, \quad y_n = x_n^{-1} x_{n+1}.$$

De fato, a escolha dos geradores $x_i^{-1} x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n$ como uma base de K_{n+1} está relacionada com a condição do núcleo K_{n+1} , que é que a soma dos expoentes de x_1, x_2, \dots, x_{n+1} seja zero. O grupo K_{n+1} consiste nos elementos de F_{n+1} que satisfazem $m_1 + m_2 + \cdots + m_{n+1} = 0$, onde $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_{n+1}^{m_{n+1}} \in F_{n+1}$. Os elementos $x_i^{-1} x_{i+1}$, para $i = 1, \dots, n$, são candidatos naturais a geradores porque eles pertencem ao núcleo, pois a soma dos expoentes é zero. Além disso, eles são independentes, cada $y_i = x_i^{-1} x_{i+1}$ representa uma relação linear independente entre os geradores de F_{n+1} , ou seja, se $y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} = 1$, $a_i \in \mathbb{Z}$, então $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. De fato, seja $\eta: F_{n+1} \longrightarrow F_{n+1}^{ab} = \mathbb{Z}^{n+1}$ tal que $\eta(y_j) = e_j$, $j = 1, \dots, n$, onde os e_j são os vetores da base canônica de \mathbb{Z}^{n+1} . Então, aplicando η em $y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n} = 1$, obtemos $\sum_{i=1}^n a_i (-e_i + e_{i+1}) = 0 \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Analisando coordenada a coordenada dessa igualdade, vemos que $a_1 = 0$, na coordenada j para $j = 2, \dots, n$, temos $a_{j-1} - a_j = 0$ e como $a_1 = 0$, segue que $a_j = 0$ para todo $j \leq n$, e na $n+1$ -ésima coordenada resta $a_n = 0$. E temos ainda

que os y_i 's geram K_{n+1} , pois qualquer elemento de K_{n+1} pode ser escrito como uma combinação de $y_i = x_i^{-1}x_{i+1}$.

Conforme observado anteriormente, VB_{n+1} atua sobre K_{n+1} . A seguir, calcularemos sua ação na base y_1, y_2, \dots, y_n de K_{n+1} . O grupo VB_n é gerado por σ_i e ν_i , e a ação de σ_i e ν_i , $i = 1, \dots, n-1$, em F_{n+1} foi descrita anteriormente. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \psi_K: VB_{n+1} \times K_{n+1} &\longrightarrow K_{n+1} \\ (\sigma_i, x_j^{-1}x_{j+1}) &\longmapsto \begin{cases} x_{i-1}^{-1}x_{i+1} & \text{se } j = i-1, \\ x_{i+1}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}x_{i+1}x_{i+2} & \text{se } j = i+1, \\ x_j^{-1}x_{j+1} & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (\nu_i, x_j^{-1}x_{j+1}) &\longmapsto \begin{cases} x_{i-1}^{-1}x_{i+1} & \text{se } j = i-1, \\ x_{i+1}^{-1}x_i & \text{se } j = i, \\ x_i^{-1}x_{i+2} & \text{se } j = i+1, \\ x_j^{-1}x_{j+1} & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Escrevendo $x_i^{-1}x_{i+1} = y_i$, temos

$$\begin{aligned} \psi_K: VB_{n+1} \times K_{n+1} &\longrightarrow K_{n+1} \\ (\sigma_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} y_{i-1}y_i & \text{se } j = i-1, \\ x_{i+1}^{-1}y_i^{-1}x_{i+1} & \text{se } j = i, \\ x_{i+1}^{-1}y_i x_{i+1}y_{i+1} & \text{se } j = i+1, \\ y_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (\nu_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} y_{i-1}y_i & \text{se } j = i-1, \\ y_i^{-1} & \text{se } j = i, \\ y_i y_{i+1} & \text{se } j = i+1, \\ y_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consideremos agora o subgrupo comutador $\Gamma_2(K_{n+1})$ de K_{n+1} . É um subgrupo normal de F_{n+1} e é estável pela ação do grupo VB_{n+1} em K_{n+1} . Portanto, temos uma sequência exata curta de grupos

$$1 \longrightarrow \frac{K_{n+1}}{\Gamma_2(K_{n+1})} \longrightarrow \frac{F_{n+1}}{\Gamma_2(K_{n+1})} \longrightarrow q^{\mathbb{Z}} \longrightarrow 1.$$

Como a lei do grupo em $\frac{K_{n+1}}{\Gamma_2(K_{n+1})}$ é escrita de forma aditiva, para cada x_i , a ação por conjugação em $\frac{K_{n+1}}{\Gamma_2(K_{n+1})}$ é simplesmente multiplicação pelo elemento q^{-1} . Dessa forma, reescrevemos ψ_K da

seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi_K: VB_{n+1} \times K_{n+1}^{ab} &\longrightarrow K_{n+1}^{ab} \\ (\sigma_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} y_{i-1} + y_i & \text{se } j = i - 1, \\ -qy_i & \text{se } j = i, \\ qy_i + y_{i+1} & \text{se } j = i + 1, \\ y_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (v_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} y_{i-1} + y_i & \text{se } j = i - 1, \\ -y_i & \text{se } j = i, \\ y_i + y_{i+1} & \text{se } j = i + 1, \\ y_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, escreva $y_i = q^i e_i$. Obtemos

$$\begin{aligned} \psi_K: VB_{n+1} \times K_{n+1}^{ab} &\longrightarrow K_{n+1}^{ab} \\ (\sigma_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} q^{i-1} e_{i-1} + q^i e_i & \text{se } j = i - 1, \\ -q^{i+1} e_i & \text{se } j = i, \\ q^{i+1} e_i + q^{i+1} e_{i+1} & \text{se } j = i + 1, \\ q^j e_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (v_i, y_j) &\longmapsto \begin{cases} q^{i-1} e_{i-1} + q^i e_i & \text{se } j = i - 1, \\ -q^i e_i & \text{se } j = i, \\ q^i e_i + q^{i+1} e_{i+1} & \text{se } j = i + 1, \\ q^j e_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Note que, para $j = i - 1$, temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} q^{i-1} e_{\sigma_i(i-1)} &= q^{i-1} (e_{i-1} + qe_i) &\Rightarrow & e_{\sigma_i(i-1)} = e_{i-1} + qe_i, \\ q^{i-1} e_{v_i(i-1)} &= q^{i-1} (e_{i-1} + qe_i) &\Rightarrow & e_{v_i(i-1)} = e_{i-1} + qe_i. \end{aligned}$$

Para $j = i$, temos

$$\begin{aligned} q^i e_{\sigma_i(i)} &= -q^{i+1} e_i &\Rightarrow & e_{\sigma_i(i)} = -qe_i, \\ q^i e_{v_i(i)} &= -q^i e_i &\Rightarrow & e_{v_i(i)} = -e_i. \end{aligned}$$

Para $j = i + 1$, temos

$$\begin{aligned} q^{i+1} e_{\sigma_i(i+1)} &= q^{i+1} (e_i + e_{i+1}) &\Rightarrow & e_{\sigma_i(i+1)} = e_i + e_{i+1}, \\ q^{i+1} e_{v_i(i+1)} &= q^{i+1} (q^{-1} e_i + e_{i+1}) &\Rightarrow & e_{v_i(i+1)} = q^{-1} e_i + e_{i+1}. \end{aligned}$$

Para j qualquer, diferente dos listados acima, temos

$$\begin{aligned} q^j e_{\sigma_i(j)} = q^j e_j &\Rightarrow e_{\sigma_i(j)} = e_j, \\ q^j e_{v_i(j)} = q^j e_j &\Rightarrow e_{v_i(j)} = e_j. \end{aligned}$$

Portanto, na base $\{e_j\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_K: VB_{n+1} \times K_{n+1}^{ab} &\longrightarrow K_{n+1}^{ab} \\ (\sigma_i, e_j) &\longmapsto \begin{cases} e_{i-1} + qe_i & \text{se } j = i-1, \\ -qe_i & \text{se } j = i, \\ e_i + e_{i+1} & \text{se } j = i+1, \\ e_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ (v_i, e_j) &\longmapsto \begin{cases} e_{i-1} + qe_i & \text{se } j = i-1, \\ -e_i & \text{se } j = i, \\ q^{-1}e_i + e_{i+1} & \text{se } j = i+1, \\ e_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, vamos determinar a representação de VB_{n+1} em $GL_n(\Lambda)$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ é o anel de polinômios de Laurent.

Temos que K_{n+1}^{ab} é um grupo abeliano livre de posto n , então $K_{n+1}^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$. Assim, da ação de VB_{n+1} em K_{n+1}^{ab} , temos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: VB_{n+1} &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \\ \sigma_i &\longmapsto \tilde{\varphi}(\sigma_i)(x) = \sigma_i \cdot x \\ v_i &\longmapsto \tilde{\varphi}(v_i)(x) = v_i \cdot x \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$.

Considere $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \{\alpha: \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n \mid \alpha \text{ é um isomorfismo}\}$ e $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid A \text{ é invertível}\}$. Dessa forma, podemos indentificar $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ com $GL_n(\mathbb{Z})$. De fato, dado $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, identificando os geradores de \mathbb{Z}^n com a base canônica do \mathbb{R}^n temos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto de geradores de \mathbb{Z}^n . Tome a matriz $[\alpha(e_1) \quad \alpha(e_2) \quad \cdots \quad \alpha(e_n)]$, onde $\alpha(e_i)$ é a i -ésima coluna da matriz. Como α é um isomorfismo, $[\alpha(e_1) \quad \alpha(e_2) \quad \cdots \quad \alpha(e_n)]$ pertence a $GL_n(\mathbb{Z})$.

Faremos então a seguinte identificação:

$$\sigma_1 \longmapsto U_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -q & 1 & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-2} \end{array} \right],$$

para $2 \leq i \leq n-1$

$$\sigma_i \mapsto U_i = \left[\begin{array}{c|cc|c} I_{i-2} & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & q & -q & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & I_{n-(i+1)} \end{array} \right],$$

$$\sigma_n \mapsto U_n = \left[\begin{array}{c|cc} I_{n-2} & & \\ \hline & 1 & 0 \\ & q & -q \end{array} \right],$$

$$v_1 \mapsto V_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & q^{-1} & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & I_{n-2} \end{array} \right],$$

para $2 \leq i \leq n-1$

$$v_i \mapsto V_i = \left[\begin{array}{c|ccc|c} I_{i-2} & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \\ & q & -1 & q^{-1} & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & I_{n-(i+1)} \end{array} \right],$$

$$v_n \mapsto V_n = \left[\begin{array}{c|cc} I_{n-2} & & \\ \hline & 1 & -1 \\ & q & 0 \end{array} \right],$$

onde os espaços vazios nas matrizes acima correspondem ao elemento zero.

Teorema 4.39

Seja $n \geq 2$. A seguinte atribuição define uma representação $\overline{Bur}: VB_{n+1} \rightarrow GL_n(\Lambda)$, chamada representação de Burau do grupo de tranças virtuais VB_{n+1} :

$$\sigma_1 \mapsto \begin{bmatrix} -q & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \text{Id}_{n-2} \quad \text{e} \quad v_1 \mapsto \begin{bmatrix} -1 & q^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \text{Id}_{n-2},$$

$$\sigma_n \mapsto \text{Id}_{n-2} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & -q \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_n \mapsto \text{Id}_{n-2} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ q & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_i \mapsto \text{Id}_{i-2} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & -q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \text{Id}_{n-i-1} \quad \text{e} \quad v_i \mapsto \text{Id}_{i-2} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & -1 & q^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \text{Id}_{n-i-1},$$

para $i = 2, \dots, n-1$.

A demonstração deste teorema decorre diretamente da construção previamente apresentada. Essa construção garante uma representação de Burau no contexto do grupo de tranças virtuais e, assim, o Teorema 4.39 formaliza essa representação.

A partir do Teorema 4.39 é natural pensar que representação obtém para $q = -1$ ou $q = 1$. Como perspectiva futura, podemos comparar com o que foi feito em (BLOOMQUIST; GOLDBERG; SCHERICH, 2025) a partir de uma representação de Burau do grupo de tranças virtuais e então analisar uma possível definição para os subgrupos de congruência do grupo de tranças virtuais emolduradas. Além disso, para estudos futuros, podemos estudar a relação entre o grupo de tranças virtuais emolduradas FVB_n e os grupos cristalográficos.

Capítulo 5

O grupo de tranças singulares SG_n e o grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n

Neste capítulo, introduzimos o grupo de tranças singulares emolduradas, uma extensão do grupo de tranças singulares. Nosso objetivo é definir formalmente esse grupo, estabelecer seus geradores e relações, e investigar sua estrutura algébrica.

Também neste capítulo, construiremos um invariante para nós singulares seguindo a construção de Jones. Para isso, utilizaremos um traço de Markov definido sobre a álgebra de Temperley-Lieb virtual.

5.1 O grupo de tranças singulares SG_n e nós singulares

Nesta primeira seção, analisaremos o grupo de tranças singulares, o qual serve de alicerce para o desenvolvimento apresentado neste capítulo. A compreensão detalhada de sua estrutura e propriedades é essencial, uma vez que o grupo de tranças singulares emolduradas pode ser interpretado como uma generalização desse grupo. Assim, esta seção tem por finalidade introduzir as definições, notações e resultados preliminares que darão suporte à investigação algébrica do grupo de tranças singulares emolduradas, conduzida na seção subsequente.

A noção geométrica de tranças singulares foi introduzida independentemente por Baez em (BAEZ, 1992) e Birman em (BIRMAN, 1993). Foi demonstrado que tais tranças formam um monoide. É provado em (FENN; KEYMAN; ROURKE, 1998) que o monoide de Baez-Birman com n cordas está realizado no grupo SG_n que é agora conhecido como **grupo de tranças singulares** em n cordas. O grupo SG_n tem uma apresentação que possui o mesmo conjunto de geradores e relações definidoras que a apresentação do monoide para o monoide de Baez-Birman, com a única propriedade adicional de que os elementos são invertíveis em SG_n . Esse grupo, SG_n , inclui o grupo de tranças clássico B_n como um subgrupo.

Definição 5.1

O grupo de tranças singulares SG_n em n cordas é gerado por um conjunto de $2(n-1)$ geradores $\{\sigma_i, \tau_i \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$, com relações

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1 \quad (5.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (5.2)$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad |i-j| > 1 \quad (5.3)$$

$$\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i, \quad |i-j| > 1 \quad (5.4)$$

$$\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.5)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (5.6)$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} = \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (5.7)$$

Os geradores σ_i e τ_i , $i = 1, \dots, n-1$, podem ser vistos geometricamente na Figura 18.



Figura 18 – As tranças elementares σ_i e τ_i .

Considerando o homomorfismo $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ tal que $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = s_i = (i \ i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$, em (DASBACH; GEMEIN, 1998) foi definido o **grupo de tranças puras singulares** SP_n que generaliza o grupo de tranças puras clássico P_n , onde o grupo SP_n corresponde ao núcleo do homomorfismo sobrejetivo π . Para o caso $\pi(\sigma_i) = s_i = (i \ i+1)$ e $\pi(\tau_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, em (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020) é definido o grupo ST_n como núcleo desse homomorfismo. Ainda de acordo com o artigo (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020), os autores obtêm uma apresentação para ST_3 e demonstram que ST_3 é isomorfo ao grupo de tranças puras singulares SP_3 .

No trabalho (DASBACH; GEMEIN, 1998) se encontra um conjunto de geradores e relações definidoras para SP_n . Porém, em (BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2025) os autores simplificam essa apresentação, que trazemos a seguir. Para descrevê-lo, define-se os seguintes elementos em SP_n :

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \sigma_i^2, \\ b_{i,i+1} &= \tau_i \sigma_i, \\ a_{ij} &= \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} a_{i,i+1} \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad i+1 < j \leq n, \\ b_{ij} &= \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} b_{i,i+1} \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \quad i+1 < j \leq n. \end{aligned}$$

Teorema 5.2 (([BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2025](#)), Theorem 3.1)

O grupo das tranças puras singulares SP_n , com $n \geq 2$, é gerado pelos elementos a_{ij}, b_{ij} , onde $1 \leq i < j \leq n$, e é definido pelas seguintes relações (com $\varepsilon = \pm 1$):

$$a_{ij}b_{ij} = b_{ij}a_{ij}, \quad (5.8)$$

$$a_{ik}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij} a_{kj})^{\varepsilon} a_{kj} (a_{ij} a_{kj})^{-\varepsilon}, \quad (5.9)$$

$$a_{ik}^{-\varepsilon} b_{kj} a_{ik}^{\varepsilon} = (a_{ij} a_{kj})^{\varepsilon} b_{kj} (a_{ij} a_{kj})^{-\varepsilon}, \quad (5.10)$$

$$a_{km}^{\varepsilon} a_{kj} a_{km}^{-\varepsilon} = (a_{kj} a_{mj})^{\varepsilon} a_{kj} (a_{kj} a_{mj})^{-\varepsilon}, \quad \text{para } m < j, \quad (5.11)$$

$$a_{km}^{\varepsilon} b_{kj} a_{km}^{-\varepsilon} = (a_{kj} a_{mj})^{\varepsilon} b_{kj} (a_{kj} a_{mj})^{-\varepsilon}, \quad \text{para } m < j, \quad (5.12)$$

$$a_{im}^{-\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = [a_{ij}^{-\varepsilon} a_{mj}^{\varepsilon}] a_{kj} [a_{ij}^{-\varepsilon} a_{mj}^{\varepsilon}]^{-1}, \quad \text{para } i < k < m, \quad (5.13)$$

$$a_{im}^{-\varepsilon} b_{kj} a_{im}^{\varepsilon} = [a_{ij}^{-\varepsilon} a_{mj}^{\varepsilon}] b_{kj} [a_{ij}^{-\varepsilon} a_{mj}^{\varepsilon}]^{-1}, \quad \text{para } i < k < m, \quad (5.14)$$

$$a_{im}^{\varepsilon} a_{kj} a_{im}^{-\varepsilon} = a_{kj}, \quad \text{para } k < i < m < j \quad \text{ou } m < k, \quad (5.15)$$

$$a_{im}^{\varepsilon} b_{kj} a_{im}^{-\varepsilon} = b_{kj}, \quad \text{para } k < i < m < j \quad \text{ou } m < k, \quad (5.16)$$

$$b_{im}^{\varepsilon} b_{kj} b_{im}^{-\varepsilon} = b_{kj}, \quad \text{para } k < i < m < j \quad \text{ou } m < k, \quad (5.17)$$

$$b_{im}^{-\varepsilon} b_{kj} b_{im}^{\varepsilon} = b_{kj}, \quad \text{para } k < i < m < j \quad \text{ou } m < k, \quad (5.18)$$

$$b_{ij}^{-\varepsilon} (a_{ik} a_{jk}) b_{ij}^{\varepsilon} = a_{ik} a_{jk}, \quad \text{para } i < j < k, \quad (5.19)$$

$$b_{im}^{-\varepsilon} (a_{mj}^{-1} a_{kj} a_{mj}) b_{im}^{\varepsilon} = a_{mj}^{-1} a_{kj} a_{mj}, \quad \text{para } i < k < m, \quad (5.20)$$

$$b_{im}^{-\varepsilon} (a_{mj}^{-1} b_{kj} a_{mj}) b_{im}^{\varepsilon} = a_{mj}^{-1} b_{kj} a_{mj}, \quad \text{para } i < k < m. \quad (5.21)$$

Uma apresentação para SP_n nos casos $n = 2$ e $n = 3$ é fornecida em ([BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2020](#)). O lema a seguir traz uma apresentação para o caso $n = 2$.

Lema 5.3 (([BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2020](#)), Lemma 3.1)

1- $SP_2 = \langle a_{12}, b_{12} \mid a_{12}b_{12} = b_{12}a_{12} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

2- SP_2 é normal em SG_2 e a ação de SG_2 em SP_2 é definido pelas fórmulas

$$a_{12}^{\sigma_1} = a_{12}, \quad b_{12}^{\sigma_1} = b_{12},$$

$$a_{12}^{\tau_1} = a_{12}, \quad b_{12}^{\tau_1} = b_{12}.$$

No caso $n = 3$, a partir da apresentação dada por ([BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2020](#)), os autores provam que SP_3 se decompõe como um produto semidireto. Em seguida, trazemos a apresentação dada para o caso $n = 3$.

Teorema 5.4 (([BARDAKOV; KOZLOVSKAYA, 2020](#)), Theorem 3.9)

O grupo de tranças puras singulares SP_3 é gerado pelos elementos

$$a_{12}, a_{13}, a_{23}, b_{12}, b_{13}, b_{23},$$

e é definido pelas relações:

$$\bullet \quad a_{12} a_{13} a_{12}^{-1} = a_{23}^{-1} a_{13} a_{23}, \quad a_{12} a_{23} a_{12}^{-1} = a_{23}^{-1} a_{13}^{-1} a_{23} a_{13} a_{23},$$

- $a_{12}b_{12} = b_{12}a_{12}$,
- $a_{13}b_{13} = b_{13}a_{13}$, $a_{23}b_{23} = b_{23}a_{23}$
- $b_{12}(a_{13}a_{23})b_{12}^{-1} = a_{13}a_{23}$, $a_{12}b_{13}a_{12}^{-1} = a_{23}^{-1}b_{13}a_{23}$,
- $a_{12}b_{23}a_{12}^{-1} = a_{23}^{-1}a_{13}^{-1}b_{23}a_{13}a_{23}$.

Como mencionado anteriormente, em (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020) foi definido o grupo ST_n como o núcleo do homomorfismo $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ tal que $\pi(\sigma_i) = s_i = (i \ i+1)$ e $\pi(\tau_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Define-se os seguintes elementos geradores de ST_3 :

$$a_{12} = \sigma_1^2, \quad a_{13} = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}, \quad a_{23} = \sigma_2^2, \quad c_{12} = \tau_1, \quad c_{13} = \sigma_2\tau_1\sigma_2^{-1}, \quad c_{23} = \tau_2.$$

Teorema 5.5 ((GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020), Theorem 3.8)

O grupo ST_3 é gerado pelos elementos

$$a_{12}, a_{13}, a_{23}, c_{12}, c_{13}, c_{23},$$

sujeito às relações definidoras:

$$\begin{aligned} a_{12}c_{12} &= c_{12}a_{12}, \\ a_{13}c_{13} &= c_{13}a_{13}, \\ a_{23}c_{23} &= c_{23}a_{23}, \\ a_{12}a_{13}a_{12}^{-1} &= a_{23}^{-1}a_{13}a_{23}, \\ c_{12}a_{13}a_{23}c_{12}^{-1} &= a_{13}a_{23}, \\ a_{12}c_{13}a_{12}^{-1} &= a_{23}^{-1}c_{13}a_{23}, \\ a_{12}^{-1}a_{23}a_{12} &= a_{13}a_{23}a_{13}^{-1}, \\ a_{12}^{-1}c_{23}a_{12} &= a_{13}c_{23}a_{13}^{-1}. \end{aligned}$$

No que tange ao estudo do centro do grupo de tranças singulares, o próximo resultado descreve o centro de SG_n .

Teorema 5.6 ((FENN; ROLFSEN; ZHU, 1996), Theorem 7.2)

O centro de SG_n é todo SG_n para $n = 2$. Mas no caso $n \geq 3$ é o mesmo que o centro (cíclico infinito) de $B_n \subset SG_n$, gerado por Δ_n^2 .

Note que para $n = 2$, o grupo SG_2 é abeliano. Em relação ao centro do grupo SP_n , provou-se que, para $n \geq 3$, $Z(B_n) = Z(SP_n) = Z(SG_n)$ é um grupo cíclico infinito (ver (VERSHININ, 2010)).

A relação entre nós singulares e tranças singulares é exatamente a mesma do caso clássico. É um problema natural estudar suas propriedades algébricas e geométricas para construir invariantes de enlaçamentos singulares.

No caso clássico, a operação de fechamento de uma trança gera um nó ou enlace. De forma semelhante, o fechamento de uma trança singular, que inclui cruzamentos singulares representados pelos geradores τ_i , resulta em um nó singular. Os nós singulares são generalizações dos nós clássicos.

O **fecho** de uma trança singular segue o mesmo princípio do fecho de uma trança clássica, conectando as extremidades correspondentes das cordas através de arcos simples. Denotamos o fecho de uma trança singular ω por $\hat{\omega}$. Assim como no caso clássico, nós singulares orientados podem ser transformados em tranças singulares fechadas. Para uma demonstração do teorema de Alexander aplicado a nós singulares, consulte (BIRMAN, 1993).

Definição 5.7

Um nó singular com n componentes é a imagem de uma imersão suave de n cópias do círculo em \mathbb{S}^3 , que possui um número finito de singularidades, chamadas cruzamentos singulares, que são todos pontos duplos ordinários.

Um enlaçamento singular pode ser descrito como uma generalização de um enlaçamento clássico, diferenciando-se por permitir um número finito de autointerseções transversais. Quando um enlaçamento singular possui apenas um componente, ele é chamado de nó singular. A Figura 19 apresenta alguns exemplos ilustrativos de nós e enlaçamentos singulares. Para simplificar, utilizaremos o termo “nós” para nos referirmos tanto a “nós” quanto a “enlaçamentos”.

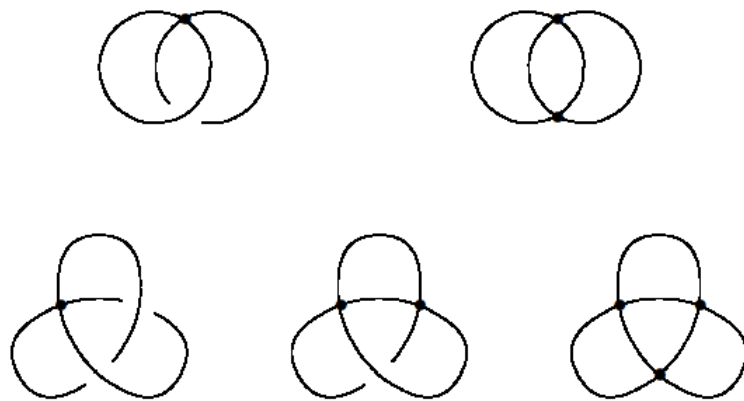


Figura 19 – Exemplos de nós e enlaçamentos singulares [(JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2009), Figure 8].

Definição 5.8

Dois nós singulares K_1, K_2 são isotópicos, isto é, topologicamente equivalentes, se existir um automorfismo próprio de \mathbb{S}^3 que preserve a orientação e leve um no outro, de modo que ele preserve um pequeno disco rígido ao redor de cada cruzamento singular.

Um diagrama de nó singular é uma projeção do nó singular para o plano tal que qualquer cruzamento é um cruzamento clássico ou um cruzamento singular. Dois diagramas de nó singular

orientados são equivalentes se e somente se um pode ser obtido do outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister singulares (ver (BATAINEH et al., 2018)).

Considere agora o limite indutivo $\cup_n SG_n$, construído a partir dos monomorfismos naturais entre os monoides $SG_n \hookrightarrow SG_{n+1}$. De forma análoga ao teorema de Markov para tranças clássicas, Gemein demonstrou em (GEMEIN, 1997) o seguinte resultado, que também pode ser comparado com a versão baseada em L -movimentos apresentada em (LAMBROPOULOU, 2007).

Teorema 5.9 ((GEMEIN, 1997), Markov's Theorem)

Duas tranças singulares em $\cup_n SG_n$ têm fechamentos isotópicos se e somente se diferem por relações de tranças singulares e uma sequência de movimentos:

- (i) Conjugação real: $\sigma_i \omega \sim \omega \sigma_i$, $\omega, \sigma_i \in SG_n$;
- (ii) Comutação singular: $\tau_i \omega \sim \omega \tau_i$, $\omega, \tau_i \in SG_n$;
- (iii) Estabilização real: $\omega \sim \omega \sigma_n^\pm$, $\omega \in SG_n$.

Os movimentos (i) e (iii) do Teorema 5.9 são os dois movimentos bem conhecidos do teorema clássico de Markov para tranças clássicas. O movimento (ii) é ilustrado na Figura

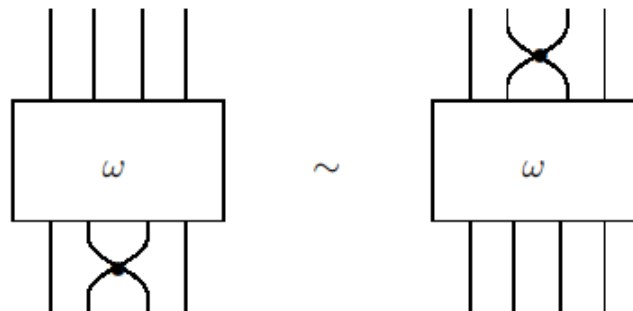


Figura 20 – Comutação singular [(JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2009), Figure 3].

5.2 Definição do grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n

O grupo de tranças singulares emolduradas será introduzido de maneira análoga à abordagem apresentada por (KO; SMOLINSKY, 1992) ao definir o grupo de tranças emolduradas. Assim como no trabalho de (KO; SMOLINSKY, 1992), nossa construção parte da generalização do conceito clássico de tranças, incorporando a estrutura de emolduramento para capturar informações adicionais associadas às componentes das tranças.

Esse paralelo permite explorar as técnicas e intuições desenvolvidas na definição do grupo de tranças emolduradas, adaptando-as ao contexto das tranças singulares. Dessa forma, garantimos um tratamento que facilita tanto a compreensão do novo conceito quanto a comparação com outras estruturas relacionadas.

Definição 5.10

Seja $n \geq 2$. O grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n é gerado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ com relações (5.1)-(5.7) e relações adicionais

$$t_i t_j = t_j t_i \text{ para todo } i, j, \quad (5.22)$$

$$\eta_k t_j = t_{\eta_k(j)} \eta_k, \quad (5.23)$$

onde $\eta_k \in \{\sigma_k, \tau_k\}$, para $i, j = 1, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Os geradores t_1, \dots, t_n formam um grupo abeliano livre de posto n dado por

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle \cong \mathbb{Z}^n, \quad t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \mapsto (k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Seja S_n o grupo simétrico agindo sobre $\{1, 2, \dots, n\}$. Seja $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ o homomorfismo sobrejetivo de grupos enviando σ_i e τ_i para a transposição $(i \ i+1)$. O grupo de tranças SG_n atua em $\{1, \dots, n\}$ através do homomorfismo π , isto é, $\eta(i) = \pi(\eta)(i)$, $\eta \in SG_n$. Adotamos a convenção de que o grupo simétrico atua pela direita, de modo que $(\eta\gamma)(i) = \gamma(\eta(i))$ para $\eta, \gamma \in SG_n$. Então o grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n é isomorfo ao produto semidireto $\mathbb{Z}^n \rtimes SG_n$, onde SG_n age em \mathbb{Z}^n por

$$\eta \cdot (k_1, k_2, \dots, k_n) = (k_{\eta(1)}, k_{\eta(2)}, \dots, k_{\eta(n)}),$$

onde $\eta \in SG_n$, para $i = 1, \dots, n-1$.

Qualquer palavra em FSG_n se divide, por construção, na parte da moldura e na parte de trança. Isto é, pode ser escrito na forma

$$t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta, \text{ onde } k_i \in \mathbb{Z}, \beta \in SG_n.$$

A multiplicação e o inverso em FSG_n são definidos usando a ação de SG_n em \mathbb{Z}^n como segue

$$(t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta)(t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n} \cdot \gamma) := t_1^{k_1 + l_{\beta(1)}} \dots t_n^{k_n + l_{\beta(n)}} \cdot \beta\gamma,$$

e

$$(t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta)^{-1} = t_1^{-k_{\beta^{-1}(1)}} t_2^{-k_{\beta^{-1}(2)}} \dots t_n^{-k_{\beta^{-1}(n)}} \cdot \beta^{-1}.$$

A seguir, apresentaremos uma proposição que estabelece uma nova apresentação para o grupo de tranças singulares emolduradas, em que os geradores t_i , $i = 1, \dots, n$, podem ser deduzidos de t_1 .

Proposição 5.11

O grupo FSG_n tem uma apresentação reduzida com os geradores $t_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, e relações (5.1)-(5.7) e relações adicionais:

$$t_1 \eta_j = \eta_j t_1, \quad j > 1, \quad (5.24)$$

$$t_1 \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} = \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} t_1, \quad (5.25)$$

$$\eta_i \dots \eta_1 t_1 \eta_1^{-1} \dots \eta_i^{-1} = \eta_i^{-1} \dots \eta_1^{-1} t_1 \eta_1 \dots \eta_i, \quad (5.26)$$

onde, para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\eta_i \in \{\sigma_i, \tau_i\}$.

Demonstração. A demonstração é análoga à prova dada na Proposição 4.15. Porém, para mostrar que a relação $t_i t_j = t_j t_i$ é consequência das relações da Proposição 5.11, considere $\eta_i = \sigma_i$, pois precisamos da relação $\eta_i \eta_{i+1} \eta_i = \eta_{i+1} \eta_i \eta_{i+1}$, que não é válida em FSG_n quando $\eta_i = \tau_i$. \square

No contexto geométrico, um elemento de FSG_n pode ser descrito como uma trança singular composta por n cordas, onde ocorrem cruzamentos clássicos e singulares, e cada corda é acompanhada, no topo, por um número inteiro que representa sua moldura. Um elemento de \mathbb{Z}^n , quando \mathbb{Z}^n é visto como subgrupo de FSG_n , é identificado com a trança identidade em n cordas, sendo cada corda decorada pelo inteiro correspondente do elemento. Por outro lado, ao considerar SG_n como um subgrupo de FSG_n , suas tranças singulares são vistas como tranças emolduradas em que todas as molduras são iguais a zero. A operação de multiplicação em FSG_n combina a concatenação usual das tranças em SG_n com a soma das molduras das cordas, que são transferidas para a trança resultante. Para uma visualização mais clara, consulte o Exemplo 5.12.

Exemplo 5.12

Considere as tranças singulares emolduradas $t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} \cdot \tau_2 \sigma_1$ e $t_1^{l_1} t_2^{l_2} t_3^{l_3} \cdot \sigma_1 \tau_1 \tau_2$. Tem-se o produto

$$\begin{aligned} (t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} \cdot \tau_2 \sigma_1)(t_1^{l_1} t_2^{l_2} t_3^{l_3} \cdot \sigma_1 \tau_1 \tau_2) &= t_1^{k_1+l_{\tau_2 \sigma_1(1)}} t_2^{k_2+l_{\tau_2 \sigma_1(2)}} t_3^{k_3+l_{\tau_2 \sigma_1(3)}} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \tau_1 \tau_2 \\ &= t_1^{k_1+l_{\sigma_1(\tau_2(1))}} t_2^{k_2+l_{\sigma_1(\tau_2(2))}} t_3^{k_3+l_{\sigma_1(\tau_2(3))}} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \tau_1 \tau_2 \\ &= t_1^{k_1+l_{\sigma_1(1)}} t_2^{k_2+l_{\sigma_1(3)}} t_3^{k_3+l_{\sigma_1(2)}} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \tau_1 \tau_2 \\ &= t_1^{k_1+l_2} t_2^{k_2+l_3} t_3^{k_3+l_1} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \tau_1 \tau_2. \end{aligned}$$

Geometricamente,

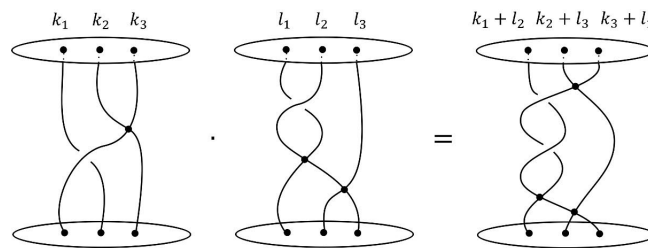


Figura 21 – Multiplicação das tranças singulares emolduradas.

O grupo das tranças puras singulares emolduradas é definido de forma análoga à construção do grupo das tranças puras emolduradas apresentada em (NATOV, 1997).

O homomorfismo de grupo $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ pode ser estendido para um homomorfismo de grupo $\hat{\pi}: FSG_n \rightarrow S_n$ enviando t_j para a identidade. Chamamos o núcleo de $\hat{\pi}$ de grupo das **tranças puras singulares emolduradas** e denotamos por FSP_n .

Nesse contexto, FSP_n pode ser descrito como o produto direto entre o grupo das tranças puras singulares SP_n e \mathbb{Z}^n . Cada corda de uma trança pura singular é associada a um elemento de \mathbb{Z} , que representa sua moldura ou torção. Assim, o grupo FSP_n combina a estrutura das tranças puras singulares com as informações adicionais fornecidas pelas molduras.

A permutação associada a uma trança pura singular é trivial, então uma trança pura singular comuta com os geradores da moldura. Estruturalmente, FSP_n é definido como:

$$FSP_n = \mathbb{Z}^n \oplus SP_n,$$

onde \mathbb{Z}^n é o grupo abeliano livre que captura as molduras, e SP_n é o grupo das tranças puras singulares em n cordas, incorporando cruzamentos clássicos e singulares.

Para a operação de multiplicação no grupo FSP_n , para dois elementos $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta$ e $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n} \cdot \gamma$ em FSP_n , a multiplicação é dada por

$$\begin{aligned} (t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n} \cdot \beta)(t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n} \cdot \gamma) &= t_1^{k_1+m_{\beta(1)}} t_2^{k_2+m_{\beta(2)}} \dots t_n^{k_n+m_{\beta(n)}} \cdot \beta\gamma \\ &= t_1^{k_1+m_1} t_2^{k_2+m_2} \dots t_n^{k_n+m_n} \cdot \beta\gamma. \end{aligned}$$

Essa definição reflete a natureza de um produto direto, com a soma em \mathbb{Z}^n e a multiplicação em SP_n .

Teorema 5.13

Seja $n \geq 2$. O grupo FSP_n admite uma apresentação com geradores $a_{ij}, b_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, t_1, t_2, \dots, t_n , sujeitos às relações (5.8)-(5.21) e

$$t_k t_l = t_l t_k, \quad (5.27)$$

$$a_{ij} t_k = t_k a_{ij}, \quad (5.28)$$

$$b_{ij} t_k = t_k b_{ij}, \quad (5.29)$$

onde $1 \leq i < j \leq n$ e $k, l = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.2 temos que o grupo SP_n tem uma apresentação com geradores a_{ij} e $b_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, sujeitos às relações (5.8)-(5.21). Temos ainda que $\mathbb{Z}^n = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \mid [t_i, t_j] = 1 \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq n \rangle$.

Como o grupo FSP_n é um produto direto dos grupos \mathbb{Z}^n e SP_n , a apresentação de FSP_n é dada pelos geradores $t_1, t_2, \dots, t_n, a_{ij}$ e $b_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, com as relações de \mathbb{Z}^n e SP_n e a família de relações de comutatividade entre os geradores de \mathbb{Z}^n e SP_n (ver [(JOHNSON, 1997), Proposition 4, Chap. 4]). \square

Como feito em (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020), consideramos o homomorfismo

$$\pi: SG_n \longrightarrow S_n,$$

definido por $\pi(\sigma_i) = (i \ i+1)$ e $\pi(\tau_i) = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$.

Estendemos esse homomorfismo para

$$\hat{\pi}: FSG_n \longrightarrow S_n,$$

definido por

$$\hat{\pi}(\sigma_i) = (i \ i + 1), \quad \hat{\pi}(\tau_i) = 1, \quad \hat{\pi}(t_j) = 1,$$

para $i = 1, \dots, n-1$ e $j = 1, \dots, n-1$.

Definimos, então, o grupo FST_n como o núcleo do homomorfismo $\hat{\pi}$.

Quanto ao grupo ST_n , definido na Seção 5.1, na literatura não consta uma apresentação para $n = 2$. Por isso nos dedicamos agora a dar uma apresentação para ST_2 utilizando o algoritmo de Reidemeister-Schreier.

Seja $SG_2 = \langle \sigma_1, \tau_1 \mid \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Considere

$$\Lambda_3 = \{1, \sigma_1\}$$

o conjunto Schreier de representantes de classe para ST_2 em SG_2 . Segundo o algoritmo, o grupo ST_2 é gerado pelos elementos

$$S_{\lambda, a} = \lambda a \cdot (\overline{\lambda a})^{-1}, \quad \lambda \in \Lambda_3, \quad a \in \{\sigma_1, \tau_1\}.$$

A seguir, trazemos os elementos $S_{\lambda, a}$:

$$\begin{aligned} S_{1, \sigma_1} &= \sigma_1 \cdot (\overline{\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 \cdot \sigma_1^{-1} = 1, \\ S_{1, \tau_1} &= \tau_1 \cdot (\overline{\tau_1})^{-1} = \tau_1 \cdot 1 = \tau_1 = c_{12}, \\ S_{\sigma_1, \sigma_1} &= \sigma_1^2 \cdot (\overline{\sigma_1^2})^{-1} = \sigma_1^2 \cdot 1 = \sigma_1^2 = a_{12}, \\ S_{\sigma_1, \tau_1} &= \sigma_1 \tau_1 \cdot (\overline{\sigma_1 \tau_1})^{-1} = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} = \tau_1. \end{aligned}$$

Vemos que ST_2 é gerado por $S_{\sigma_1, \sigma_1} = \sigma_1^2$ e $S_{\sigma_1, \tau_1} = \tau_1$. Para finalizar, encontraremos as relações definidoras de ST_2 . Então tomemos a relação $r = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1}$:

$$\tau(r) = S_{1, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1, \tau_1} \cdot S_{1, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{1, \tau_1}^{-1} = 1,$$

o que implica $S_{\sigma_1, \tau_1} = S_{1, \tau_1}$. Agora,

$$\tau(\sigma_1 r \sigma_1^{-1}) = S_{1, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1, \sigma_1} \cdot S_{1, \tau_1} \cdot S_{\sigma_1, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1, \tau_1}^{-1} \cdot S_{1, \sigma_1}^{-1} = S_{\sigma_1, \sigma_1} \cdot S_{1, \tau_1} \cdot S_{\sigma_1, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1, \tau_1}^{-1} = 1,$$

e isso implica que $a_{12} c_{12} = c_{12} a_{12}$. Assim, $ST_2 = \langle a_{12}, c_{12} \mid a_{12} c_{12} = c_{12} a_{12} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Lema 5.14

1- $ST_2 = \langle a_{12}, c_{12} \mid a_{12} c_{12} = c_{12} a_{12} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

2- ST_2 é normal em SG_2 e a ação por conjugação de SG_2 em ST_2 é definida pelas fórmulas

$$a_{12}^{\sigma_1} = a_{12}, \quad c_{12}^{\sigma_1} = c_{12}, \quad a_{12}^{\tau_1} = a_{12}, \quad c_{12}^{\tau_1} = c_{12},$$

3- SP_2 é isomorfo a ST_2 .

Demonstração. O item 1 segue diretamente da construção acima feita para determinar os geradores e relações de ST_2 .

Para o item 2, como SG_2 é abeliano, temos que ST_2 é normal em SG_2 . Além disso, veja que

- $a_{12}^{\sigma_1} = \sigma_1 a_{12} \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \sigma_1^2 \sigma_1^{-1} = \sigma_1^2 = a_{12}$,
- $a_{12}^{\tau_1} = \tau_1 a_{12} \tau_1^{-1} = \tau_1 \sigma_1^2 \tau_1^{-1} = \sigma_1^2 = a_{12}$,
- $c_{12}^{\sigma_1} = \sigma_1 c_{12} \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} = \tau_1 = c_{12}$,
- $c_{12}^{\tau_1} = \tau_1 c_{12} \tau_1^{-1} = \tau_1 \tau_1 \tau_1^{-1} = \tau_1 = c_{12}$.

O item 3 segue do item 1 e do Lema 5.3, que afirma que $SP_2 = \langle a_{12}, b_{12} \mid a_{12} b_{12} = b_{12} a_{12} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

□

Voltando para o ambiente emoldurado, para os casos $n = 2$ e $n = 3$ o grupo FST_n tem uma estrutura de produto semidireto. Além disso, os grupos FSP_2 e FST_2 não são isomorfos, como pode ser visto no próximo resultado.

Teorema 5.15

1- $FST_n = \mathbb{Z}^n \rtimes ST_n$

3- Os grupos FSP_2 e FST_2 não são isomorfos.

Demonstração. Para o item 1, seja o homomorfismo $\hat{\pi}: FSG_n \longrightarrow S_n$ definido por $\hat{\pi}(\sigma_i) = s_i$, $\hat{\pi}(\tau_i) = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, e $\hat{\pi}(t_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$. Como definido acima, $\text{Ker}(\hat{\pi})$.

É conhecido que o núcleo do homomorfismo $\pi: SG_n \longrightarrow S_n$ definido por $\pi(\sigma_i) = s_i$, $\pi(\tau_i) = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, é o grupo ST_n (ver (GONGOPADHYAY; KOZLOVSKAYA; MAMONOV, 2020)).

Queremos mostrar que $FST_n = \mathbb{Z}^n \rtimes ST_n$. De fato, pela definição de $\hat{\pi}$, observamos que os subgrupos \mathbb{Z}^n e ST_n estão contidos em $\text{Ker}(\hat{\pi})$. Assim, segue que $\mathbb{Z}^n \cdot ST_n \subseteq \text{Ker}(\hat{\pi})$.

Agora, seja $g \in \text{Ker}(\hat{\pi}) \subset FSG_n$. Podemos escrever

$$g = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \beta,$$

com $\beta \in SG_n$.

Como $\hat{\pi}(t_j) = 1$ para todo $j = 1, \dots, n$, temos

$$\hat{\pi}(g) = \hat{\pi}(t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \beta) = \hat{\pi}(\beta).$$

Sabendo que $g \in \text{Ker}(\hat{\pi})$, obtemos $\hat{\pi}(g) = 1$, e portanto $\hat{\pi}(\beta) = 1$.

Como $\beta \in SG_n$, concluímos que $\beta \in \text{Ker}(\hat{\pi}|_{SG_n})$. Mas, como $\text{Ker}(\hat{\pi}|_{SG_n}) = \text{Ker}(\pi)$, segue que $\beta \in ST_n$.

Logo, $\text{Ker}(\hat{\pi}) \subseteq \mathbb{Z}^n \cdot ST_n$. Além disso, note que $\mathbb{Z}^n \cap ST_n = \{1\}$.

Por outro lado, temos que \mathbb{Z}^n é subgrupo normal de FST_n . Com efeito, sejam $a \in \mathbb{Z}^n$ e $h \in FST_n$. Pela estrutura $FST_n = \mathbb{Z}^n \cdot ST_n$, podemos escrever $h = ag$, onde $a \in \mathbb{Z}^n$ e $g \in ST_n$. O conjugado hah^{-1} pode ser escrito como $hah^{-1} = a(gag^{-1})a^{-1}$, e chamemos $b = gag^{-1}$. Como ST_n é subgrupo de SG_n , então ST_n age sobre os geradores t_j de \mathbb{Z}^n por $gt_jg^{-1} = t_{g(j)}$. Como a é um produto de potências de t_j , o elemento b é um produto de potências dos geradores de \mathbb{Z}^n e, portanto, $b \in \mathbb{Z}^n$. Desta forma, como \mathbb{Z}^n é abeliano, temos $hah^{-1} = aba^{-1} = b$. Como $b \in \mathbb{Z}^n$, concluímos que o conjugado hah^{-1} pertence a \mathbb{Z}^n . Assim, \mathbb{Z}^n é um subgrupo normal de FST_n .

Para mostrar o item 2, o grupo ST_2 é gerado por a_{12} e c_{12} . A permutação associada ao gerador a_{12} é trivial, então $a_{12}t_i = t_ia_{12}$, $i = 1, 2$. Porém,

$$c_{12}t_1 = \tau_1t_1 = t_2\tau_1 = t_2c_{12} \quad \text{e} \quad c_{12}t_2 = \tau_1t_2 = t_1\tau_1 = t_1c_{12}.$$

Assim,

$$FST_2 = \langle t_1, t_2, a_{12}, c_{12} \mid [t_1, t_2] = [a_{12}, t_1] = [a_{12}, t_2] = [a_{12}, c_{12}] = 1, c_{12}t_1 = t_2c_{12} \rangle. \quad (5.30)$$

Do Lema 5.3 vemos que $(SP_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}^2$. Então, como $FSP_2 = \mathbb{Z}^2 \oplus SP_2$, pelo Lema 4.20 segue que $(FSP_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}^4$. Pela apresentação de FST_2 dada em (5.30), a relação $c_{12}t_1 = t_2c_{12}$ em $(FST_2)^{ab}$ implica que $t_1 = t_2$, logo $(FST_2)^{ab} \cong \mathbb{Z}^3$. Desta maneira, sabendo que $(FSP_2)^{ab}$ e $(FST_2)^{ab}$ não são isomorfos, pelo Lema 4.20 temos que FSP_2 e FST_2 não são isomorfos. \square

5.3 O centro de FSG_n

Nesta seção, será discutido o centro do grupo de tranças singulares emolduradas. Como é conhecido (ver (VERSHININ, 2010)), os grupos de tranças puras P_n , tranças clássicas B_n , tranças puras singulares SP_n e tranças singulares SG_n compartilham o mesmo centro, que é dado pelo subgrupo cíclico gerado pelo elemento Δ_n^2 , onde

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 \in B_n.$$

Dessa forma, podemos concluir que o centro do grupo de tranças puras singulares emolduradas FSP_n coincide com o centro do grupo de tranças puras emolduradas FP_n e que o centro do grupo de tranças singulares emolduradas FSG_n é igual ao centro do grupo de tranças emolduradas FB_n .

Proposição 5.16

Se $n \geq 3$, então $Z(FSP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.6, para $n \geq 3$, tem-se que $Z(SG_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$. Provou-se em (VERSHININ, 2010), para $n \geq 3$, que $Z(SP_n) = Z(SG_n)$. Então, como $FSP_n = \mathbb{Z}^n \oplus SP_n$, segue que $Z(FSP_n) = \mathbb{Z}^n \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$. \square

Teorema 5.17

Se $n \geq 3$, então $Z(FSG_n) = \mathbb{Z}[\theta] \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$, onde $\theta = t_1 \cdots t_n$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.6, para $n \geq 3$, tem-se que $Z(SG_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$. Provou-se em (VERSHININ, 2010), para $n \geq 3$, que $Z(B_n) = Z(SG_n)$. Então, $Z(FSG_n) = \mathbb{Z} \oplus \langle \Delta_n^2 \rangle$ segue do Teorema 2.5. \square

5.4 Série central inferior de SG_n e FSG_n

Nesta seção, será discutida, inicialmente, a série central inferior do grupo de tranças singulares SG_n , tema sobre o qual, até onde sabemos, não há registros disponíveis na literatura até o momento, embora em (DEY; GONGOPADHYAY, 2022) é provado que $\Gamma_2(SG_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. Em seguida, será realizada uma análise da série central inferior do grupo de tranças singulares emolduradas.

Teorema 5.18

Sejam $n \geq 2$ e SG_n o grupo de tranças singulares em n cordas. As propriedades a seguir são válidas:

- i) O grupo SG_2 é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- ii) O abelianizado de SG_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ para $n \geq 2$.
- iii) Se $n \geq 3$, então o grupo SG_n não é residualmente nilpotente.
- iv) Se $n \geq 3$, então $\Gamma_2(SG_n) = \Gamma_3(SG_n)$.

Demonstração. i) A partir da Definição 5.1, temos que

$$SG_2 = \langle \sigma_1, \tau_1 \mid \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1 \rangle.$$

Logo, podemos deduzir que σ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} e τ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} . Portanto, $SG_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

ii) Para encontrarmos o abelianizado de SG_n , $SG_n/\Gamma_2(SG_n)$, basta considerarmos a apresentação de SG_n dada na Definição 5.1 e inserir a relação $xy = yx$ para todos os x, y no conjunto gerador. A partir da relação (5.2), obtém-se

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i = \sigma_{i+1}.$$

Por outro lado, da relação (5.6), tem-se

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_i \sigma_i \sigma_{i+1} = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_i = \tau_{i+1}.$$

Portanto, $\frac{SG_n}{\Gamma_2(SG_n)} = \langle \sigma_1, \tau_1 \mid [\sigma_1, \tau_1] = 1 \rangle$. Observe que σ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} e τ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} . Dessa forma, $\frac{SG_n}{\Gamma_2(SG_n)}$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

iii) Note que o grupo SG_n contém o grupo B_n , o qual não é residualmente nilpotente para $n \geq 3$, conforme indicado em (GORIN; LIN, 1969). Como todo subgrupo de um grupo residualmente nilpotente também é residualmente nilpotente (ver (SILVA, 2023), Proposição 1.47), conclui-se que o grupo SG_n não pode ser residualmente nilpotente para $n \geq 3$.

iv) Basta considerarmos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(SG_n)}{\Gamma_3(SG_n)} \longrightarrow \frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)} \xrightarrow{p} \frac{SG_n}{\Gamma_2(SG_n)} \longrightarrow 1.$$

Pelo item ii), sabemos que $\frac{SG_n}{\Gamma_2(SG_n)} = \langle \sigma_1, \tau_1 \mid [\sigma_1, \tau_1] = 1 \rangle$.

Queremos mostrar que p é um isomorfismo. Temos pelas propriedades da série central inferior que todos os elementos do núcleo de p são centrais em $\frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)}$. Existe $a_i \in \frac{\Gamma_2(SG_n)}{\Gamma_3(SG_n)}$ tal que $\sigma_i = a_i \sigma_1$ com $a_1 = 1$. Pela relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, temos

$$\begin{aligned} a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 &= a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 & \Leftrightarrow & \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_i a_{i+1} a_i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & & \Leftrightarrow & a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & & \Leftrightarrow & a_i a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & & \Leftrightarrow & a_i = a_{i+1}, \end{aligned}$$

isto é, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$. Segue de $\sigma_i = a_i \sigma_1$ que $\sigma_i = \sigma_1$, para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Assim todos os σ_i representam a mesma classe em $\frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)}$, denotemos tal classe por σ .

Da mesma forma, existe $b_i \in \frac{\Gamma_2(SG_n)}{\Gamma_3(SG_n)}$, onde $\tau_i = b_i \tau_1$ com $b_1 = 1$. Considerando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ de SG_n vemos que $\sigma_i \sigma_{i+1} b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_i \sigma_{i+1}$, o que implica $\sigma_1^2 b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2$. Porém, os b_i são centrais em $\frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)}$ e pela relação $\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i$, obtemos

$$\sigma_1^2 b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \Leftrightarrow b_i \tau_1 \sigma_1^2 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \Leftrightarrow b_i = b_{i+1},$$

isto é, $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 1$. Por $\tau_i = b_i \tau_1$ obtemos que $\tau_i = \tau_1$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Assim todos os τ_i representam a mesma classe em $\frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)}$, denotemos tal classe por τ .

Note que a classe de σ comuta com a classe de τ em $\frac{SG_n}{\Gamma_3(SG_n)}$, pois $\sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1$. Então, para $n \geq 3$, p é um isomorfismo e $\Gamma_2(SG_n) = \Gamma_3(SG_n)$. \square

A seguir, exploramos algumas propriedades e características estruturais.

Proposição 5.19

O grupo FSG_2 é isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

Demonstração. Note que a partir da Definição 5.10 temos que $FSG_2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes SG_2$. Pelo Teorema 5.18, $SG_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Portanto, $FSG_n \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ \square

Proposição 5.20

Seja $n \geq 2$. Então o abelianizado de FSG_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para encontrarmos o abelianizado de FSG_n , $FSG_n / \Gamma_2(FSG_n)$, é suficiente considerarmos a apresentação de FSG_n dada na Definição 5.10 e adicionarmos algumas relações comutativas. Da relação (5.23) segue que $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$ e $\tau_i t_i = t_{i+1} \tau_i$, então $t_i = t_{i+1}$. A partir da relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, tem-se

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \Leftrightarrow \sigma_i \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \Leftrightarrow \sigma_i = \sigma_{i+1}.$$

Da relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, tem-se

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_i \sigma_i \sigma_{i+1} = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_i = \tau_{i+1}.$$

Portanto, $\frac{FSG_n}{\Gamma_2(FSG_n)} = \langle t_1, \sigma_1, \tau_1 \mid [t_1, \sigma_1] = [t_1, \tau_1] = [\sigma_1, \tau_1] = 1 \rangle$.

Note que t_1 gera uma cópia \mathbb{Z} , σ_1 gera uma cópia \mathbb{Z} e τ_1 gera uma cópia \mathbb{Z} , fazendo com que $\frac{FSG_n}{\Gamma_2(FSG_n)}$ seja isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ □

Proposição 5.21

Se $n \geq 3$, então FSG_n não é residualmente nilpotente.

Demonstração. Observe que o grupo FSG_n contém o grupo SG_n , que não é residualmente nilpotente, conforme indicado no Teorema 5.18. Como todo subgrupo de um grupo residualmente nilpotente também é residualmente nilpotente, conclui-se que o grupo FSG_n não pode ser residualmente nilpotente. □

Teorema 5.22

Seja FSG_n , $n \geq 3$. Então $\Gamma_2(FSG_n) = \Gamma_3(FSG_n)$.

Demonstração. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \frac{\Gamma_2(FSG_n)}{\Gamma_3(FSG_n)} \longrightarrow \frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)} \xrightarrow{p} \frac{FSG_n}{\Gamma_2(FSG_n)} \longrightarrow 1.$$

Pela Proposição 5.20, temos que o abelianizado de FSG_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ gerados por t_1, σ_1 e τ_1 respectivamente. Dessa forma, temos que todos os t_j se projetam em t_1 , σ_i se projetam em σ_1 e τ_i se projetam em τ_1 por p em $\frac{FSG_n}{\Gamma_2(FSG_n)}$, para $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n-1$, então vai existir $a_i \in \frac{\Gamma_2(FSG_n)}{\Gamma_3(FSG_n)}$, onde $\sigma_i = a_i \sigma_1$ com $a_1 = 1$. Ao tomarmos a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ em FSG_n vemos que $a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 = a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1$. Mas os a_i são centrais em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$, então

$$\begin{aligned} a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 = a_{i+1} \sigma_1 a_i \sigma_1 a_{i+1} \sigma_1 & \Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_i a_{i+1} a_i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & \Leftrightarrow a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & \Leftrightarrow a_i a_i a_{i+1} = a_{i+1} a_i a_{i+1} \\ & \Leftrightarrow a_i = a_{i+1}, \end{aligned}$$

ou seja, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$. Segue que, por $\sigma_i = a_i \sigma_1$ obtemos $\sigma_i = \sigma_1$, para $i = 1, \dots, n-1$. Dessa forma, todos os σ_i representam a mesma classe em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$.

De forma análoga, vai existir $b_i \in \frac{\Gamma_2(FSG_n)}{\Gamma_3(FSG_n)}$, onde $\tau_i = b_i \tau_1$ com $b_1 = 1$. Tomando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ de FSG_n vemos que $\sigma_i \sigma_{i+1} b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_i \sigma_{i+1}$, o que implica $\sigma_1^2 b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2$. Porém, os b_i são centrais em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$ e pela relação $\tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i$, temos

$$\sigma_1^2 b_i \tau_1 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad b_i \tau_1 \sigma_1^2 = b_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad b_i = b_{i+1},$$

isto é, $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 1$. Segue que, por $\tau_i = b_i \tau_1$ obtemos $\tau_i = \tau_1$, para $i = 1, \dots, n-1$. Logo, todos os τ_i representam a mesma classe em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$.

Para o caso t_i , existe $c_i \in \frac{\Gamma_2(FSG_n)}{\Gamma_3(FSG_n)}$, onde $t_i = c_i t_1$ com $c_1 = 1$ para $i = 1, \dots, n$. A partir da relação (5.23), temos $\sigma_i t_i = t_{i+1} \sigma_i$ em FSG_n e vemos que $\sigma_i c_i t_1 = c_{i+1} t_1 \sigma_i$. Como os c_i são centrais em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$ e, além disso, $\sigma_i t_1 = t_1 \sigma_i$ se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 3$), então

$$\sigma_i c_i t_1 = c_{i+1} t_1 \sigma_i \Leftrightarrow c_i \sigma_i t_1 = c_{i+1} \sigma_i t_1 \Leftrightarrow c_i = c_{i+1}$$

ou seja, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$. Assim, por $t_i = c_i t_1$ tem-se que $t_i = t_1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, todos os t_i representam a mesma classe em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$.

Note que as classes de σ_i e τ_i comutam com a classe de t_j em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$, pois $\alpha_i t_1 = t_1 \alpha_i$, $\alpha_i \in \{\sigma_i, \tau_i\}$, se $i > 1$ (estamos considerando $n \geq 3$). Além disso, a classe de σ_i comuta com a classe de τ_i em $\frac{FSG_n}{\Gamma_3(FSG_n)}$, pois $\sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1$. Então, para $n \geq 3$, p é um isomorfismo e $\Gamma_2(FSG_n) = \Gamma_3(FSG_n)$. \square

5.5 Subgrupo comutador de FSG_n

O estudo do subgrupo comutador do grupo de tranças singulares $\Gamma_2(SG_n)$ foi realizado em (DEY; GONGOPADHYAY, 2022), onde foi provado que $\Gamma_2(SG_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. Essa base de conhecimento serve como ponto de partida para o estudo do subgrupo comutador no contexto mais geral dos grupos de tranças singulares emolduradas. Para analisar o subgrupo comutador $\Gamma_2(FSG_n)$, utilizaremos a apresentação de FSG_n dada na Proposição 5.11.

Da Proposição 5.20 tem-se que o quociente $FSG_n/\Gamma_2(FSG_n)$ é isomorfo a soma direta $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pode-se definir o homomorfismo φ a partir da seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(FSG_n) \longrightarrow FSG_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

onde, para $i = 1, \dots, n-1$, $\varphi(\sigma_i)$ é o gerador de \mathbb{Z} , $\varphi(\tau_i)$ é o gerador de \mathbb{Z} e $\varphi(t_1)$ é o gerador de \mathbb{Z} respectivamente quando visto como $FSG_n/\Gamma_2(FSG_n)$.

Lema 5.23

O subgrupo $\Gamma_2(FSG_n)$ possui o seguinte conjunto de geradores:

$$\{\alpha_{m,q,k,1}, \beta_{m,q,k,1}, \alpha_{m,q,2}, \beta_{m,q,2}, \alpha_j, \beta_j, \gamma_{m,q,r} \mid m, q, k \in \mathbb{Z}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

Demonstração. Como um conjunto de Schreier de representantes de classe de FSG_n por $\Gamma_2(FSG_n)$, tome as palavras

$$\Lambda = \{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \mid m, q, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Seguindo o algoritmo Reidemeister-Schreier, o subgrupo comutador $\Gamma_2(FSG_n)$ é gerado pelas palavras

$$\{S_{\lambda,a} = (\lambda a)(\overline{\lambda a})^{-1} \mid \lambda \in \Lambda, a \in \{\sigma_i, \tau_i, t_1 \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}\}.$$

Agora encontraremos os elementos $S_{\lambda,a}$. Para isso, tome $\lambda = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k$ em Λ e considerando diferentes a , obteremos os seguintes casos:

1. Se $a = \sigma_1$, então

$$S_{\lambda,\sigma_1} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \sigma_1 t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

que indicaremos por $\alpha_{m,q,k,1}$.

2. Se $a = \sigma_2$, como $\sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_2} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \sigma_2 t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m \tau_1^q \sigma_2 \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos esse elemento por $\alpha_{m,q,2}$.

3. Se $a = \sigma_j, j > 2$, então

$$S_{\lambda,\sigma_j} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \sigma_j t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_j \sigma_1^{-1},$$

e denotaremos esse elemento por α_j .

4. Se $a = \tau_1$, então

$$S_{\lambda,\tau_1} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \tau_1 t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos por $\beta_{m,q,k,1}$.

5. Se $a = \tau_2$, como $\tau_2 t_1 = t_1 \tau_2$, então

$$S_{\lambda,\tau_2} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \tau_2 t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \sigma_1^m \tau_1^q \tau_2 \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m},$$

e denotaremos esse elemento por $\beta_{m,q,2}$.

6. Se $a = \tau_j, j > 2$, então

$$S_{\lambda,\tau_j} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \tau_j t_1^{-k} \tau_1^{-q} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-m} = \tau_j \tau_1^{-1},$$

e denotaremos este elemento por β_j .

7. Se $a = t_1$, então

$$S_{\lambda,t_1} = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k t_1 (\overline{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k t_1})^{-1} = 1.$$

□

Agora, vamos considerar as relações definidoras de FSG_n , reescrevê-las nos geradores de $\Gamma_2(FSG_n)$, e conjugando por elementos $\lambda \in \Lambda$, obtemos as relações definidoras de $\Gamma_2(FSG_n)$.

Lema 5.24

O subgrupo $\Gamma_2(FSG_n)$ possui o seguinte conjunto de relações: para $m, q, k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_{m,q,0,1} = 1, \quad (5.31)$$

$$\beta_{m,q,0,1} = 1, \quad (5.32)$$

$$\alpha_{m,q,k,1} \alpha_j \alpha_{m+1,q,k,1}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (5.33)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_j \alpha_{m+1,q,2}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (5.34)$$

$$\alpha_i \alpha_j \alpha_i^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i - j| > 1, \quad (5.35)$$

$$\alpha_{m,q,k,1} \alpha_{m+1,q,2} \alpha_{m+2,q,k,1} \alpha_{m+2,q,2}^{-1} \alpha_{m+1,q,k,1}^{-1} \alpha_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (5.36)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_3 \alpha_{m+2,q,2} \alpha_3^{-1} \alpha_{m+2,q,2}^{-1} \alpha_3^{-1} = 1, \quad (5.37)$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.38)$$

$$\beta_{m,q,k,1} \beta_j \beta_{m,q+1,k,1}^{-1} \beta_j^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (5.39)$$

$$\beta_{m,q,2} \beta_j \beta_{m,q+1,2}^{-1} \beta_j^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (5.40)$$

$$\beta_i \beta_j \beta_i^{-1} \beta_j^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i - j| > 1, \quad (5.41)$$

$$\beta_{m,q,k,1} \alpha_j \beta_{m+1,q,k,1}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 3, \quad (5.42)$$

$$\beta_i \alpha_{m,q+1,k,1} \beta_i^{-1} \alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.43)$$

$$\beta_{m,q,2} \alpha_j \beta_{m+1,q,2}^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad j \geq 4, \quad (5.44)$$

$$\beta_i \alpha_{m,q+1,2} \beta_i^{-1} \alpha_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad i \geq 4, \quad (5.45)$$

$$\beta_i \alpha_j \beta_i^{-1} \alpha_j^{-1} = 1, \quad i, j \geq 3, \quad |i - j| > 1, \quad (5.46)$$

$$\beta_{m,q,k,1} \alpha_{m,q+1,k,1} \beta_{m+1,q,k,1}^{-1} \alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (5.47)$$

$$\beta_{m,q,2} \alpha_{m,q+1,2} \beta_{m+1,q,2}^{-1} \alpha_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (5.48)$$

$$\beta_i \alpha_i \beta_i^{-1} \alpha_i^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.49)$$

$$\alpha_{m,q,k,1} \alpha_{m+1,q,2} \beta_{m+2,q,k,1} \alpha_{m+1,q+1,2}^{-1} \alpha_{m,q+1,k,1}^{-1} \beta_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (5.50)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_3 \beta_{m+2,q,2} \alpha_3^{-1} \alpha_{m,q+1,2}^{-1} \beta_3^{-1} = 1, \quad (5.51)$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1}^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_{i+1}^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.52)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_{m+1,q,k,1} \beta_{m+2,q,2} \alpha_{m+1,q+1,k,1}^{-1} \alpha_{m,q+1,2}^{-1} \beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (5.53)$$

$$\alpha_3 \alpha_{m+1,q,2} \beta_3 \alpha_{m+1,q+1,2}^{-1} \alpha_3^{-1} \beta_{m,q,2}^{-1} = 1, \quad (5.54)$$

$$\alpha_{i+1} \alpha_i \beta_{i+1} \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1} \beta_i^{-1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.55)$$

$$\alpha_{m,q,k,1} \alpha_{m,q,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,q,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,q,k,1} = 1, \quad (5.56)$$

$$\alpha_{m,q,2} \alpha_{m+1,q,k,1} \alpha_{m+1,q,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-1,q,2}^{-1} \alpha_{m-2,q,k+1,1}^{-1} \alpha_{m-2,q,k,1} \alpha_{m-1,q,2} = 1, \quad (5.57)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,q,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,q,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,q,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,q,k,l+1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.58)$$

$$\beta_{m,q,k,1} \beta_{m,q,k+1,1}^{-1} \beta_{m,q-1,k+1,1}^{-1} \beta_{m,q-1,k,1} = 1, \quad (5.59)$$

$$\beta_{m,q,2} \beta_{m,q+1,k,1} \beta_{m,q+1,k+1,1}^{-1} \beta_{m,q,2}^{-1} \beta_{m,q-1,2}^{-1} \beta_{m,q-2,k+1,1} \beta_{m,q-2,k,1} \beta_{m,q-1,2} = 1, \quad (5.60)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,q+l,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-i)+l,k,l+1} = 1, \quad i \geq 3, \quad (5.61)$$

$$\alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k+2,1}^{-1} \alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (5.62)$$

$$\beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k+2,1}^{-1} \beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1. \quad (5.63)$$

Demonstração. Inicialmente, coletaremos as relações $S_{\lambda,a} = 1$. Consideramos todos os pares (λ, a) com $\lambda \in \Lambda = \{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \mid m, q, k \in \mathbb{Z}\}$, $a \in S = \{\sigma_j, \tau_j, t_1 \mid j = 1, 2, \dots, n-1\}$. Precisamos encontrar os pares (λ, a) para os quais λa e $\overline{\lambda a}$ são livremente iguais.

Observe que, $\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \sigma_j$ e $\overline{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \sigma_j} = \sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k$ são livremente iguais se e somente se $k = 0$ e $j = 1$. Assim, obtemos a seguinte relação como uma das relações que definem $\Gamma_2(FSG_n)$: $S_{\sigma_1^m \tau_1^q, \sigma_1} = 1$, ou seja, $\alpha_{m,q,0,1} = 1$. Analogamente, temos que $\beta_{m,q,0,1} = 1$.

Agora, calculamos os termos $\tau(\lambda r_\mu \lambda^{-1})$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e para cada uma das relações definidoras $r_\mu = 1$ de FSG_n , conforme segue:

$$\begin{aligned} r_1 & : \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \\ r_2 & : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1, \\ r_3 & : \tau_i \tau_j \tau_i^{-1} \tau_j^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \\ r_4 & : \tau_i \sigma_j \tau_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \\ r_5 & : \tau_i \sigma_i \tau_i^{-1} \sigma_i^{-1} = 1, \\ r_6 & : \sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_{i+1}^{-1} = 1, \\ r_7 & : \sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \tau_i^{-1} = 1, \\ r_8 & : \sigma_i t_1 \sigma_i^{-1} t_1^{-1} = 1, \quad i > 1, \\ r_9 & : \tau_i t_1 \tau_i^{-1} t_1^{-1} = 1, \quad i > 1; \\ r_{10} & : \sigma_i \cdots \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_i = 1, \\ r_{11} & : \tau_i \cdots \tau_1 t_1 \tau_1^{-1} \cdots \tau_i^{-1} \tau_i^{-1} \cdots \tau_1^{-1} t_1^{-1} \tau_1 \cdots \tau_i = 1; \\ r_{12} & : t_1 \sigma_1 t_1 \sigma_1^{-1} t_1^{-1} \sigma_1 t_1^{-1} \sigma_1^{-1} = 1, \\ r_{13} & : t_1 \tau_1 t_1 \tau_1^{-1} t_1^{-1} \tau_1 t_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Escolha qualquer elemento $\lambda = \sigma_1^m \tau_1^q t_1^k \in \Lambda$. Deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned} \tau(\lambda r_1 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_j} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_j}^{-1}, \\ \tau(\lambda r_2 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1}, \\ \tau(\lambda r_3 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_i} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \tau_j} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \tau_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_j}^{-1}, \\ \tau(\lambda r_4 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_i} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_j} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \tau_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_j}^{-1}, \\ \tau(\lambda r_5 \lambda^{-1}) & = S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_i} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \tau_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_i}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda r_6 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \tau_1^q t_1^k, \tau_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_{i+1}}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_7 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^{m+2} \tau_1^q t_1^k, \tau_{i+1}} \cdot S_{\sigma_1^{m+1} \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_i}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+1} t_1^k, \sigma_{i+1}}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_8 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_i} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_9 \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_i} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \tau_i}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_{10} \lambda^{-1}) &= \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{m+l} \tau_1^q t_1^k, \sigma_{i-l}} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m+i-1)-l} \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_{l+1}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-1)-l} \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_{i-l}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^{(m-i)+l} \tau_1^q t_1^k, \sigma_{l+1}}, \\
\tau(\lambda r_{11} \lambda^{-1}) &= \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \tau_1^{q+l} t_1^k, \tau_{i-l}} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \tau_1^{(q+i-1)-l} t_1^{k+1}, \tau_{l+1}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \tau_1^{(q-1)-l} t_1^{k+1}, \tau_{i-l}}^{-1} \cdot \prod_{l=0}^{i-1} S_{\sigma_1^m \tau_1^{(q-i)+l} t_1^k, \tau_{l+1}}, \\
\tau(\lambda r_{12} \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+2}, \sigma_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \sigma_1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \sigma_1}^{-1}, \\
\tau(\lambda r_{13} \lambda^{-1}) &= S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \tau_1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+2}, \tau_1}^{-1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^{k+1}, \tau_1} \cdot S_{\sigma_1^m \tau_1^q t_1^k, \tau_1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o seguinte conjunto de relações definidoras para $\Gamma_2(FSG_n)$:

$$\alpha_{m,q,0,1} = 1, \quad (5.64)$$

$$\beta_{m,q,0,1} = 1, \quad (5.65)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m+1,q,k,j} \alpha_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (5.66)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m+1,q,k,i+1} \alpha_{m+2,q,k,i} \alpha_{m+2,q,k,i+1}^{-1} \alpha_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,i+1} = 1, \quad (5.67)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q+1,k,j} \beta_{m,q+1,k,i}^{-1} \beta_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (5.68)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \alpha_{m,q+1,k,j} \beta_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,j}^{-1} = 1, \quad |i-j| > 1, \quad (5.69)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \alpha_{m,q+1,k,i} \beta_{m+1,q,k,i}^{-1} \alpha_{m,q,k,i}^{-1} = 1, \quad (5.70)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m+1,q,k,i+1} \beta_{m+2,q,k,i} \alpha_{m+1,q+1,k,i+1}^{-1} \alpha_{m,q+1,k,i}^{-1} \beta_{m,q,k,i+1} = 1, \quad (5.71)$$

$$\alpha_{m,q,k,i+1} \alpha_{m+1,q,k,i} \beta_{m+2,q,k,i+1} \alpha_{m+1,q+1,k,i}^{-1} \alpha_{m,q+1,k,i+1}^{-1} \beta_{m,q,k,i} = 1, \quad (5.72)$$

$$\alpha_{m,q,k,i} \alpha_{m,q,k+1,i}^{-1}, \quad i > 1, \quad (5.73)$$

$$\beta_{m,q,k,i} \beta_{m,q,k+1,i}^{-1}, \quad i > 1, \quad (5.74)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{m+l,q,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m+i-1)-l,q,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-1)-l,q,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \alpha_{(m-i)+l,q,k,l+1} = 1, \quad (5.75)$$

$$\prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,q+l,k,i-l} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q+i-1)-l,k+1,l+1}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-1)-l,k+1,i-l}^{-1} \prod_{l=0}^{i-1} \beta_{m,(q-i)+l,k,l+1} = 1, \quad (5.76)$$

$$\alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k+2,1}^{-1} \alpha_{m,q,k+1,1} \alpha_{m,q,k,1}^{-1} = 1, \quad (5.77)$$

$$\beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k+2,1}^{-1} \beta_{m,q,k+1,1} \beta_{m,q,k,1}^{-1} = 1. \quad (5.78)$$

Para (5.66) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1, j \geq 3$; dá as relações: (5.33).

Caso 2: $i = 2, j \geq 4$; dá as relações: (5.34).

Caso 3: $i, j \geq 3, |i-j| > 1$; dá as relações: (5.35).

Para (5.67) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.36).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.37).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.38).

Para (5.68) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.39).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.40).

Caso 3: $i, j \geq 3, |i - j| > 1$; dá as relações: (5.41).

Para (5.69) temos os seguintes 5 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1, j \geq 3$; dá as relações: (5.42).

Caso 2: $j = 1, i \geq 3$; dá as relações: (5.43).

Caso 3: $i = 2, j \geq 4$; dá as relações: (5.44).

Caso 4: $j = 2, i \geq 4$; dá as relações: (5.45).

Caso 5: $i, j \geq 3, |i - j| > 1$; dá as relações: (5.46).

Para (5.70) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.47).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.48).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.49).

Para (5.71) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.50).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.51).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.52).

Para (5.72) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.53).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.54).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.55).

As relações (5.73) e (5.74) não fornecem nenhuma relação não trivial.

Para (5.75) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.56).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.57).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.58).

Para (5.76) temos os seguintes 3 casos possíveis:

Caso 1: $i = 1$; dá as relações: (5.59).

Caso 2: $i = 2$; dá as relações: (5.60).

Caso 3: $i \geq 3$; dá as relações: (5.61).

Nas relações (5.77) e (5.78) não há nenhum caso a considerar, pois $i = 1$ é fixo. Portanto, a prova do lema está completa. \square

A seguir, mostraremos que o subgrupo comutador $\Gamma_2(FSG_n)$ possui um conjunto infinito de geradores e é perfeito para $n \geq 5$.

Teorema 5.25

O subgrupo $\Gamma_2(FSG_n)$ possui um conjunto infinito de geradores para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Para provar este teorema, aplicaremos diferentes transformações de Tietze à apresentação de $\Gamma_2(FSG_n)$, para $n \geq 5$, deduzidas dos Lemas 5.23 e 5.24.

A partir de (5.39) obtemos

$$\beta_{m,q+1,k,1} = \beta_j^{-1} \beta_{m,q,k,1} \beta_j, \quad j \geq 3. \quad (5.79)$$

Observe que $\beta_{m,q,k,1} = \beta_j^{-q} \beta_{m,0,k,1} \beta_j^q$, $j \geq 3$.

De (5.42) obtemos

$$\beta_{m+1,q,k,1} = \alpha_j^{-1} \beta_{m,q,k,1} \alpha_j, \quad j \geq 3. \quad (5.80)$$

Note que $\beta_{m,q,k,1} = \alpha_j^{-m} \beta_{0,q,k,1} \alpha_j^m$, $j \geq 3$.

Usando (5.79) e (5.80), podemos expressar cada $\beta_{m,q,k,1}$ em termos de $\beta_{0,0,k,1}$, α_j , β_j . Substituímos esses valores de $\beta_{m,q,k,1}$ em todas as outras relações definidoras e removemos todos os $\beta_{m,q,k,1}$, exceto $\beta_{0,0,k,1}$, do conjunto de geradores.

A partir de (5.40) temos

$$\beta_{m,q+1,2} = \beta_j^{-1} \beta_{m,q,2} \beta_j, \quad j \geq 4. \quad (5.81)$$

Note que $\beta_{m,q,2} = \beta_j^{-q} \beta_{m,0,2} \beta_j^q$, $j \geq 4$.

De (5.44) temos

$$\beta_{m+1,q,2} = \alpha_j^{-1} \beta_{m,q,2} \alpha_j, \quad j \geq 4. \quad (5.82)$$

Observe que $\beta_{m,q,2} = \alpha_j^{-m} \beta_{0,q,2} \alpha_j^m$, $j \geq 4$.

Usando (5.81) e (5.82), podemos expressar cada $\beta_{m,q,2}$ em termos de $\beta_{0,0,2}$, α_j , β_j . Observe que aqui precisamos de $n \geq 5$. Substituímos esses valores de $\beta_{m,q,2}$ em todas as outras relações definidoras e removemos todos os $\beta_{m,q,2}$, exceto $\beta_{0,0,2}$, do conjunto de geradores.

A partir de (5.33) obtemos

$$\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,q,k,1} \alpha_j^m, \quad j \geq 3. \quad (5.83)$$

De (5.43) obtemos

$$\alpha_{m,q,k,1} = \beta_i^{-q} \alpha_{m,0,k,1} \beta_i^q, \quad i \geq 3. \quad (5.84)$$

Usando (5.83) e (5.84), podemos expressar cada $\alpha_{m,q,k,1}$ em termos de $\alpha_{0,0,k,1}$, α_j , β_i . Substituímos esses valores de $\alpha_{m,q,k,1}$ em todas as outras relações definidoras e removemos todos os $\alpha_{m,q,k,1}$, exceto $\alpha_{0,0,k,1}$, do conjunto de geradores.

De (5.34) temos

$$\alpha_{m,q,2} = \alpha_j^{-m} \alpha_{0,q,2} \alpha_j^m, \quad j \geq 4. \quad (5.85)$$

A partir de (5.45) temos

$$\alpha_{m,q,2} = \beta_i^{-q} \alpha_{m,0,2} \beta_i^q, \quad i \geq 4. \quad (5.86)$$

Usando (5.85) e (5.86), podemos expressar cada $\alpha_{m,q,2}$ em termos de $\alpha_{0,0,2}$, α_j , β_i . Substituímos esses valores de $\alpha_{m,q,2}$ em todas as outras relações definidoras e removemos todos os $\alpha_{m,q,2}$, exceto $\alpha_{0,0,2}$, do conjunto de geradores. Observe que aqui precisamos de $n \geq 5$.

Portanto, para $n \geq 5$, mostramos que $\Gamma_2(FSG_n)$ pode ser gerado pelo conjunto infinito de geradores:

$$\{\alpha_{0,0,k,1}, \beta_{0,0,k,1}, \alpha_{0,0,2}, \beta_{0,0,2}, \alpha_j, \beta_j \mid k \in \mathbb{Z}, 3 \leq j \leq n-1\}.$$

□

Teorema 5.26

O subgrupo $\Gamma_2(FSG_n)$ é perfeito para todo $n \geq 5$.

Demonstração. Para provar este teorema, abelianizamos a apresentação para $\Gamma_2(FSG_n)$ (a partir dos Lemas 5.23 e 5.24) inserindo a relação $xy = xy$ para todos x, y no conjunto gerador $\Gamma_2(FSG_n)$, e obtemos uma apresentação para $(\Gamma_2(FSG_n))^{ab}$. Mostraremos agora que $(\Gamma_2(FSG_n))^{ab} \cong \langle 1 \rangle$.

De (5.33) temos $\alpha_{m+1,q,k,1} = \alpha_{m,q,k,1}$, o que implica $\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{0,q,k,1}$ para todos $m, q, k \in \mathbb{Z}$. Substituímos $\alpha_{m,q,k,1}$ por $\alpha_{0,q,k,1}$ em todas as relações e removemos todos os $\alpha_{m,q,k,1}$ do conjunto de geradores exceto $\alpha_{0,q,k,1}$.

De (5.34) temos $\alpha_{m+1,q,2} = \alpha_{m,q,2}$, o que implica $\alpha_{m,q,2} = \alpha_{0,q,2}$ para todos $m, q \in \mathbb{Z}$. Desta forma, podemos substituir $\alpha_{m,q,2}$ por $\alpha_{0,q,2}$ em todas as relações, e removemos todos os $\alpha_{m,q,2}$ do conjunto de geradores exceto $\alpha_{0,q,2}$. Observe que aqui precisamos de $n \geq 5$.

A partir de (5.36) e das igualdades $\alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{0,q,k,1}$ e $\alpha_{m,q,2} = \alpha_{0,q,2}$, obtemos $\alpha_{0,q,k,1} = \alpha_{0,q,2}$, $q, k \in \mathbb{Z}$. Além disso, de (5.38), $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_{n-1}$.

Desta forma, segue que

$$\alpha_3 = \alpha_{0,q,2} = \alpha_{0,q,0,1} = 1 \Rightarrow \alpha_{m,q,k,1} = \alpha_{m,q,2} = \alpha_i = 1,$$

para todo $m, q, k \in \mathbb{Z}$, $3 \leq i \leq n-1$.

Agora, de (5.42), temos $\beta_{m+1,q,k,1} = \beta_{m,q,k,1}$, o que implica $\beta_{m,q,k,1} = \beta_{0,q,k,1}$ para todos $m, q, k \in \mathbb{Z}$.

De (5.44) temos $\beta_{m+1,q,2} = \beta_{m,q,2}$, o que implica $\beta_{m,q,2} = \beta_{0,q,2}$ para todos $m, q \in \mathbb{Z}$. Observe que aqui precisamos de $n \geq 5$.

De (5.50) e das igualdades $\beta_{m,q,k,1} = \beta_{0,q,k,1}$ e $\beta_{m,q,2} = \beta_{0,q,2}$, obtemos $\beta_{0,q,k,1} = \beta_{0,q,2}$, $q, k \in \mathbb{Z}$.

De (5.51) segue $\beta_{0,q,2} = \beta_3$, $q \in \mathbb{Z}$. Além disso, de (5.52), $\beta_3 = \beta_4 = \dots = \beta_{n-1}$.

Assim, obtemos

$$\beta_3 = \beta_{0,q,2} = \beta_{0,q,0,1} = 1 \Rightarrow \beta_{m,q,k,1} = \beta_{m,q,2} = \beta_i = 1,$$

para todos $m, q, k \in \mathbb{Z}$, $3 \leq i \leq n-1$.

Concluimos que, na apresentação para $(\Gamma_2(FSG_n))^{ab}$, todos os geradores são iguais a 1. Então, $(\Gamma_2(FSG_n))^{ab} \cong \langle 1 \rangle$. Assim, $\Gamma_2(FSG_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. \square

5.6 Um invariante de nós singulares

A construção de Vaughan Jones, apresentada inicialmente no artigo "A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras" (veja (JONES, 1985)), revolucionou a teoria dos nós ao introduzir uma

abordagem algébrica para a obtenção de invariantes polinomiais de nós. Baseada na correspondência entre representações das álgebras de Temperley-Lieb e o grupo de tranças, essa construção permitiu a definição do polinômio de Jones, um dos invariantes mais importantes na classificação de nós clássicos.

No contexto de nós singulares, Juyumaya e Lambropoulou propuseram um invariante seguindo a construção de Jones (veja (JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2009)), utilizando um traço de Markov na álgebra de Yokonuma-Hecke. Essa álgebra é definida a partir do grupo de tranças emolduradas. A álgebra de Yokonuma-Hecke estende a álgebra de Hecke clássica, permitindo uma formulação mais rica e flexível para descrever invariantes de nós singulares. A introdução do traço de Markov nessa estrutura fornece uma ferramenta para capturar propriedades topológicas e algébricas de nós com singularidades, estendendo as ideias originais de Jones a um novo domínio.

5.6.1 A álgebra Temperley-Lieb virtual VTL_n e o Traço de Markov

Nesta subseção, será explorada a álgebra Temperley-Lieb virtual, juntamente com o traço de Markov associado a essa estrutura algébrica. Como referência principal, utilizaremos o trabalho (PARIS; RABENDA, 2021), que fornece uma base teórica detalhada para o estudo dessas construções e suas aplicações na teoria dos invariantes de nós virtuais.

Dois anéis estão envolvidos nesta subseção. O primeiro é o anel $R_0 = \mathbb{Z}[z]$ de polinômios na variável z com coeficientes inteiros. O segundo é o anel $R = \mathbb{Z}[A^\pm]$ dos polinômios de Laurent na variável A com coeficientes inteiros. Assumimos que R_0 está imerso em R através da identificação $z = -A^2 - A^{-2}$.

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Um **flat virtual n -tangle** é uma coleção de n pares disjuntos em $\{0, 1\} \times \{1, \dots, n\}$, isto é, uma partição de $\{0, 1\} \times \{1, \dots, n\}$ em pares. Seja $E = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um flat virtual n -tangle. Então representamos graficamente E no plano conectando as duas extremidades de cada α_i com um arco.

Exemplo 5.27

Considere o flat virtual 3-tangle $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, onde $\alpha_1 = \{(0, 1), (0, 2)\}$, $\alpha_2 = \{(0, 3), (1, 2)\}$ e $\alpha_3 = \{(1, 3), (1, 1)\}$.

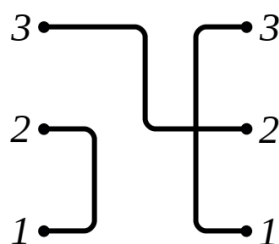


Figura 22 – Flat virtual 3-tangle [(PARIS; RABENDA, 2021), Figure 2.2].

Denotamos por \mathcal{E}_n o conjunto de flat virtual n -tangles, e por VTL_n o R_0 -módulo livre gerado livremente por \mathcal{E}_n . Definimos uma multiplicação em VTL_n da seguinte forma. Sejam E e E' dois flat virtual n -tangles. Ao concatenar os diagramas de E e E' obtemos uma família de curvas fechadas e n -arcos. Esses n -arcos determinam uma partição de $\{0, 1\} \times \{1, \dots, n\}$ em pares, ou seja, um flat virtual n -tangle que denotamos por $E * E'$. Seja m o número de curvas fechadas obtidas. Então definimos $EE' = z^m(E * E')$. É facilmente verificado que VTL_n dotada desta multiplicação é uma álgebra (unitária e associativa) que chamamos de **álgebra de Temperley-Lieb virtual**.

Exemplo 5.28

No lado esquerdo da Figura 23 estão ilustrados os diagramas de dois flat virtual 4-tangles, E e E' , e no lado direito um diagrama de $E * E'$. Neste exemplo, concatenando os diagramas de E e E' obtemos apenas uma curva fechada, portanto $m = 1$ e $EE' = z(E * E')$. A curva fechada não aparece na figura $E * E'$.

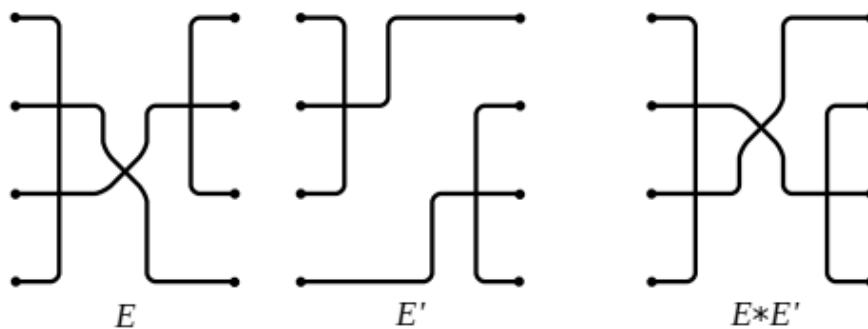


Figura 23 – Multiplicação em VTL_n [(PARIS; RABENDA, 2021), Figure 2.3].

Observação 5.29

Uma **torre de álgebras** é uma sequência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de álgebras tais que A_n é uma subálgebra de A_{n+1} para todo $n \geq 1$. É facilmente visto que a inclusão $\mathcal{E}_n \hookrightarrow \mathcal{E}_{n+1}$ que envia cada $E \in \mathcal{E}_n$ para $E \cup \{(0, n+1); (1, n+1)\}$ induz um homomorfismo injetivo $VTL_n \hookrightarrow VTL_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. Então, temos uma torre de álgebras $\{VTL_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposição 5.30 ((PARIS; RABENDA, 2021), Proposition 2.7)

Seja $n \geq 3$ e seja VTL_n a álgebra sobre R_0 definida pela apresentação com geradores E_1, \dots, E_{n-1} , v_1, \dots, v_{n-1} e relações

$$\begin{aligned} E_i^2 &= zE_i, \quad v_i^2 = 1, \quad E_i v_i = v_i E_i = E_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ E_i E_j &= E_j E_i, \quad v_i v_j = v_j v_i, \quad v_i E_j = E_j v_i, \quad \text{para } |i-j| > 1, \\ E_i E_j E_i &= E_i, \quad v_i v_j v_i = v_j v_i v_j, \quad v_i v_j E_i = E_j v_i v_j, \quad \text{para } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

Os geradores E_i e v_i são ilustrados na Figura 24.

Seja E um flat virtual n -tangle. Conectando com um arco o ponto $(0, i)$ com o ponto $(1, i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ em um diagrama de E obtemos uma família de curvas fechadas que chamamos de

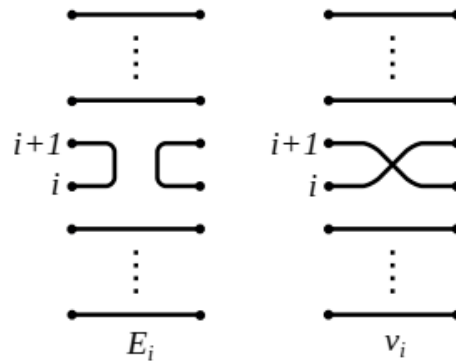


Figura 24 – Geradores de VTL_n [(PARIS; RABENDA, 2021), Figure 2.4].

fechamento do diagrama de E . Denotamos por $t_n(E)$ o número de curvas fechadas nesta família e definimos $T'_n(E) = z^{t_n(E)} = (-A^2 - A^{-2})^{t_n(E)}$. Então definimos $T'_n: VTL_n(R) \rightarrow R$ estendendo linearmente o homomorfismo $T'_n: \mathcal{E}_n \rightarrow R$.

Exemplo 5.31

A Figura 25 ilustra o fechamento do flat virtual 3-tangle E da Figura 22. Nesse caso, temos $t_n(E) = 1$ e, portanto, $T'_n(E) = z = -A^2 - A^{-2}$.

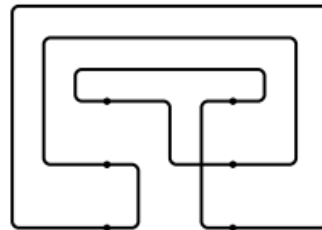


Figura 25 – Fechamento de um flat virtual 3-tangle [(PARIS; RABENDA, 2021), Figure 2.5].

Vemos na Figura 26 que as seguintes igualdades são válidas:

$$T'_{n+1}(E) = zT'_n(E), \quad T'_{n+1}(EE_n) = T'_n(E), \quad T'_{n+1}(Ev_n) = T'_n(E).$$

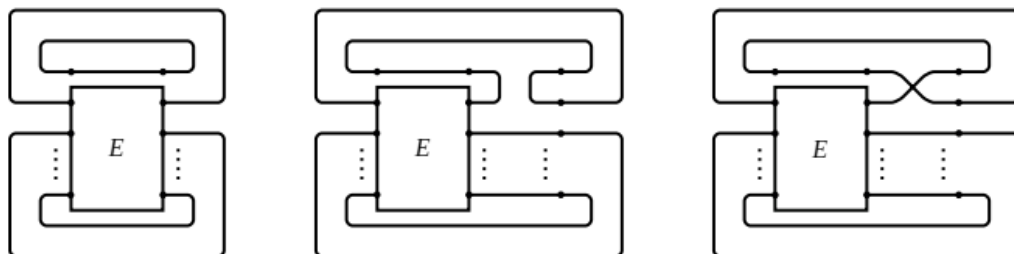


Figura 26 – $n + 1$ -fechamentos de E , EE_n e Ev_n [(PARIS; RABENDA, 2021), Figure 2.6].

Concluimos o estudo desta subseção com um teorema que será uma ferramenta essencial na construção do invariante de nós singulares, que será abordado na próxima subseção. Uma ferramenta importante na construção de um invariante de nós é a função de Markov.

Seja R um anel. Para $n \geq 1$, denotamos por $R[VB_n]$ a R -álgebra do grupo VB_n . Note que, como VB_n é um subgrupo de VB_{n+1} , temos que $R[VB_n]$ é uma subálgebra de $R[VB_{n+1}]$. Uma sequência $\{T_n: R[VB_n] \rightarrow R\}_{n=1}^{\infty}$ de formas R -lineares é chamada de **traço de Markov** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $T_n(xy) = T_n(yx)$ para todo $n \geq 1$ e todos $x, y \in R[VB_n]$.
2. $T_n(x) = T_{n+1}(x\sigma_n) = T_{n+1}(x\sigma_n^{-1}) = T_{n+1}(x\tau_n)$ para todo $n \geq 1$ e todo $x \in R[VB_n]$.
3. $T_n(x) = T_{n+1}(x\sigma_n^{-1}\tau_n\tau_{n-1}\sigma_n)$ para todo $n \geq 2$ e todo $x \in R[VB_n]$.
4. $T_n(x) = T_{n+1}(x\tau_n\tau_{n-1}\sigma_n^{-1}\tau_n\sigma_{n-1}^{-1}\tau_n^{-1}\tau_n)$ para todo $n \geq 2$ e todo $x \in R[VB_n]$.

Note que essa definição de “traço de Markov” não é a que normalmente aparece na literatura (veja (KAUFFMAN; LAMBROPOULOU, 2006), por exemplo), mas a mesma foi utilizada por (PARIS; RABENDA, 2021) para provar o teorema a seguir.

Teorema 5.32 ((PARIS; RABENDA, 2021), Theorem 2.10)

A sequência $\{T'_n: VTL_n(R) \rightarrow R\}_{n=1}^{\infty}$ é uma função de Markov.

5.6.2 Construção do invariante

Lembre-se que $R = \mathbb{Z}[A^{\pm}]$ denota a álgebra dos polinômios de Laurent na variável A , e que $R_0 = \mathbb{Z}[z]$ é uma subálgebra de R através da identificação $z = -A^{-2} - A^2$.

O teorema a seguir estabelece um homomorfismo entre a álgebra de grupo do grupo de tranças singulares SG_n e a álgebra Temperley-Lieb virtual $VTL_n(R)$. Este homomorfismo preserva a estrutura algébrica, mapeando as operações do grupo SG_n para operações correspondentes em $VTL_n(R)$, de modo a garantir que relações sejam respeitadas. Este resultado é essencial na compreensão das conexões entre estruturas combinatórias e topológicas associadas às tranças singulares e os diagramas de Temperley-Lieb na configuração virtual.

Teorema 5.33

Seja $n \geq 1$. Existe um homomorfismo $\rho_n: R[SG_n] \rightarrow VTL_n(R)$ que envia σ_i para v_i e τ_i para $-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Demonstração. Precisamos mostrar que ρ_n preserva as relações do grupo SG_n dadas na Definição 5.1.

Com efeito, pela definição de ρ_n tem-se $\rho_n(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \rho_n(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$, para $i = 1, \dots, n-2$, e $\rho_n(\sigma_i\sigma_j) = \rho_n(\sigma_j\sigma_i)$, para $|i-j| > 1$. Além disso, como $E_i v_i = v_i E_i = E_i$, segue que $\rho_n(\tau_i\sigma_i) = \rho_n(\sigma_i\tau_i)$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \rho_n(\tau_i\tau_j) &= (-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i)(-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j) = A^{-4}v_i v_j + A^{-6}v_i E_j + A^{-6}E_i v_j + A^{-8}E_i E_j \\ &= A^{-4}v_j v_i + A^{-6}v_j E_i + A^{-6}E_j v_i + A^{-8}E_j E_i = (-A^{-2}v_j - A^{-4}E_j)(-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) \\ &= \rho_n(\tau_i\tau_j), \end{aligned}$$

para $|i - j| > 1$.

Veja que

$$\begin{aligned}\rho_n(\tau_i \sigma_j) &= (-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i)v_j = -A^{-2}v_i v_j - A^{-4}E_i v_j = -A^{-2}v_j v_i - A^{-4}v_j E_i \\ &= v_j(-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) \\ &= \rho_n(\sigma_j \tau_i),\end{aligned}$$

para $|i - j| > 1$.

Para finalizar, vamos verificar que $\rho_n(\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i) = \rho_n(\tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})$. De fato,

$$\begin{aligned}\rho_n(\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i) &= v_i v_{i+1}(-A^{-2}v_i - A^{-4}E_i) = -A^{-2}v_i v_{i+1} v_i - A^{-4}v_i v_{i+1} E_i \\ &= -A^{-2}v_{i+1} v_i v_{i+1} - A^{-4}E_{i+1} v_i v_{i+1} \\ &= (-A^{-2}v_{i+1} - A^{-4}E_{i+1})v_i v_{i+1} \\ &= \rho_n(\tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}),\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n - 2$.

A igualdade $\rho_n(\sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1}) = \rho_n(\tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i)$ segue de forma análoga ao feito acima. \square

Observação 5.34

A sequência de homomorfismos $\{\rho_n: R[SG_n] \longrightarrow VTL_n(R)\}_{n=1}^{\infty}$ é compatível com a torre de álgebras $\{VTL_n(R)\}_{n=1}^{\infty}$.

A seguir, definiremos o nosso invariante de nós singulares, construído a partir do homomorfismo entre a álgebra de grupo do grupo de tranças singulares e a álgebra Temperley-Lieb virtual definido no Teorema 5.33. Este invariante será obtido em combinação com o traço de Markov definido na álgebra $VTL_n(R)$ (veja o Teorema 5.32). Esta abordagem permite associar propriedades algébricas a estruturas topológicas de nós singulares, enriquecendo o estudo das seus invariantes. Cabe aqui lembrar que o fecho de uma trança singular é obtido conectando as extremidades correspondentes das cordas da trança por meio de arcos simples.

Definição 5.35

Seja $\omega \in SG_n$. Definimos o homomorfismo $\Delta: R[SG_n] \longrightarrow R$ no fecho $\hat{\omega}$ de ω como segue:

$$\Delta(\hat{\omega}) := T'_n \circ \rho_n(\omega),$$

onde $T'_n: VTL_n(R) \longrightarrow R$ tal que $T'_n(E) = z^{t_n(E)} = (-A^2 - A^{-2})^{t_n(E)}$, sendo $t_n(E)$ o número de curvas fechadas em E , e ρ_n foi definido no Teorema 5.33.

Teorema 5.36

Seja $n \geq 2$. O homomorfismo Δ define um invariante de nós singulares.

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.9, basta provar que Δ preserva os movimentos (i), (ii) e (iii). Pelo Teorema 5.32 temos que $T'_n(xy) = T'_n(yx)$, pois T'_n é um traço de Markov, e então Δ respeita os movimentos (i) e (ii). Agora, seja $\omega \in SG_n$ e, então, $\omega\sigma_n \in SG_{n+1}$. Assim,

$$\Delta(\widehat{\omega\sigma_n}) = T'_{n+1}(\rho_{n+1}(\omega\sigma_n)) = T'_{n+1}(\rho_n(\omega)v_n) = T'_n(\rho_n(\omega)).$$

Por outro lado,

$$\Delta(\widehat{\omega\sigma_n^{-1}}) = T'_{n+1}(\rho_{n+1}(\omega\sigma_n^{-1})) = T'_{n+1}(\rho_n(\omega)v_n) = T'_n(\rho_n(\omega)).$$

O movimento (iii) do Teorema 5.9 está agora verificado e a prova está concluída. □

No próximo exemplo, aplicaremos o nosso invariante a alguns nós singulares, demonstrando como a construção teórica desenvolvida é utilizada na prática para distinguir e analisar tais nós.

Exemplo 5.37

Neste exemplo calculamos os valores do invariante Δ em alguns nós básicos singulares. Os nós singulares estão ilustrados na Figura 27.

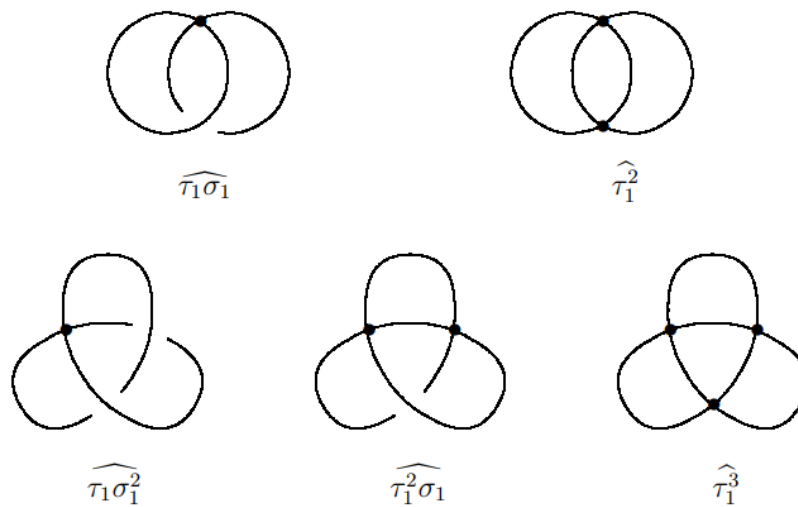


Figura 27 - Nós singulares [(JUYUMAYA; LAMBROPOULOU, 2009), Figure 8].

$$\begin{aligned} \Delta(\widehat{\tau_1\sigma_1}) &= T'_2 \circ \rho_2(\tau_1\sigma_1) = T'_2((-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)v_1) = T'_2(-A^{-2}1) + T'_2(-A^{-4}E_1v_1) \\ &= -A^{-2}T'_2(1) - A^{-4}T'_2(E_1) \\ &= -A^{-2}(-A^{-2} - A^2)^2 - A^{-4}(-A^{-2} - A^2) \\ &= -A^{-2}(A^{-4} + 2 + A^4) + A^{-6} + A^{-2} \\ &= -A^{-6} - 2A^{-2} - A^2 + A^{-6} + A^{-2} \\ &= -A^2 - A^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{\tau_1^2}) &= T_2' \circ \rho_2(\tau_1^2) = T_2'((-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)(-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)) \\
&= T_2'(A^{-4}1 + A^{-6}v_1E_1 + A^{-6}E_1v_1 + A^{-8}E_1^2) \\
&= T_2(A^{-4}1 + 2A^{-6}E_1 + zA^{-8}E_1) \\
&= A^{-4}T_2'(1) + 2A^{-6}T_2'(E_1) + A^{-8}(-A^{-2} - A^2)T_2'(E_1) \\
&= A^{-4}(-A^{-2} - A^2)^2 + 2A^{-6}(-A^{-2} - A^2) + A^{-8}(-A^{-2} - A^2)^2 \\
&= A^{-4}(A^{-4} + 2 + A^4) - 2A^{-8} - 2A^{-4} + A^{-8}(A^{-4} + 2 + A^4) \\
&= -A^{-8} + 2A^{-4} + 1 - 2A^{-8} - 2A^{-4} + A^{-12} + 2A^{-8} + A^{-4} \\
&= A^{-4} + A^{-8} + A^{-12} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{\tau_1\sigma_1^2}) &= T_2' \circ \rho_2(\tau_1\sigma_1^2) = T_2'((-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)v_1^2) = T_2'(-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1) \\
&= -A^{-2}T_2'(v_1) - A^{-4}T_2'(E_1) \\
&= -A^{-2}(-A^{-2} - A^2) - A^{-4}(-A^{-2} - A^2) \\
&= A^{-4} + 1 + A^{-6} + A^{-2} \\
&= A^{-2} + A^{-4} + A^{-6} + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{\tau_1^2\sigma_1}) &= T_2' \circ \rho_2(\tau_1^2\sigma_1) = T_2'((-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)^2v_1) = T_2'((A^{-4} + 2A^{-6}v_1E_1 + A^{-8}E_1^2)v_1) \\
&= T_2'(A^{-4}v_1 + 2A^{-6}E_1 + A^{-8}(-A^{-2} - A^2)E_1v_1) \\
&= A^{-4}T_2'(v_1) + 2A^{-6}T_2'(E_1) + A^{-8}(-A^{-2} - A^2)T_2'(E_1) \\
&= A^{-4}(-A^{-2} - A^2) + 2A^{-6}(-A^{-2} - A^2) + A^{-8}(-A^{-2} - A^2)^2 \\
&= -A^{-6} - A^{-2} - 2A^{-8} - 2A^{-4} + A^{-8}(A^{-4} + 2 + A^4) \\
&= -A^{-6} - A^{-2} - 2A^{-8} - 2A^{-4} + A^{-12} + 2A^{-8} + A^{-4} \\
&= -A^{-2} - A^{-4} - A^{-6} + A^{-12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{\tau_1^3}) &= T_2' \circ \rho_2(\tau_1^3) = T_2'((-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1)^3) = T_2'(-A^{-6}v_1^3 - 3A^{-8}v_1^2E_1 - 3A^{-10}v_1E_1^2 - A^{-12}E_1^3) \\
&= -A^{-6}T_2'(v_1) - 3A^{-8}T_2'(E_1) - 3A^{-10}(-A^{-2} - A^2)T_2'(E_1) - A^{-12}(-A^{-2} - A^2)^2T_2'(E_1) \\
&= -A^{-6}(-A^{-2} - A^2) - 3A^{-8}(-A^{-2} - A^2) - 3A^{-10}(-A^{-2} - A^2)^2 - A^{-12}(-A^{-2} - A^2)^3 \\
&= A^{-8} + A^{-4} + 3A^{-10} + 3A^{-6} - 3A^{-10}(A^{-4} + 2 + A^4) - A^{-12}(-A^{-6} - 3A^{-2} - 3A^2 - A^6) \\
&= A^{-8} + A^{-4} + 3A^{-10} + 3A^{-6} - 3A^{-14} - 6A^{-10} - 3A^{-6} + A^{-18} + 3A^{-14} + 3A^{-10} + A^{-6} \\
&= A^{-4} + A^{-6} + A^{-8} + A^{-18}
\end{aligned}$$

Para $\widehat{\tau_1}$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(\widehat{\tau_1}) &= T_2' \circ \rho_2(\tau_1) = T_2'(-A^{-2}v_1 - A^{-4}E_1) \\
&= -A^{-2}(-A^{-2} - A^2) - A^{-4}(-A^{-2} - A^2) \\
&= A^{-2} + A^{-4} + A^{-6} + 1
\end{aligned}$$

Um fato interessante é que quando duas tranças são equivalentes segundo uma sequência de movimentos, seus fechos são isotópicos e, assim, seus respectivos polinômios associados são iguais. Por exemplo, as tranças $\alpha = \tau_1\sigma_1^2$, $\beta = \sigma_1\tau_1\sigma_1$ e $\gamma = \sigma_1^2\tau_1$ são equivalentes, pois em SG_n vale que $\sigma_1\tau_1 = \tau_1\sigma_1$, e então os fechos $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\gamma}$ são isotópicos e, portanto, utilizando o invariante Δ vemos que $\Delta(\widehat{\alpha}) = \Delta(\widehat{\beta}) = \Delta(\widehat{\gamma})$.

Exemplo 5.38

A trança cujo fecho é isotópico ao nó representado na Figura 28 é representada algebricamente por $\beta = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$. Note que em β só aparecem cruzamentos clássicos. Faremos trocas de cruzamentos clássicos por cruzamentos singulares e aplicaremos o nosso invariante Δ . Para saber a quantidade de tranças singulares que encontraremos a partir da troca de cruzamentos clássicos por singulares, utilizamos o conceito de combinação. A fórmula para calcular a combinação de n elementos tomados k a k é $C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.



Figura 28 - Nó número 8.

Inicialmente, faremos a mudança de um cruzamento clássico em β por um cruzamento singular. Para sabermos a quantidade possível de tranças que conseguiremos, basta calcular a combinação $C_{4,1}$, pois queremos retirar um cruzamento dentre quatro cruzamentos, assim temos um total de $C_{4,1} = 4$ possibilidades de tranças singulares, que são listadas a seguir:

1. $\beta_1 = \tau_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$,
2. $\beta_2 = \sigma_1\tau_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$,
3. $\beta_3 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\tau_1\sigma_2^{-1}$,
4. $\beta_4 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\tau_2^{-1}$.

Pelos itens (i) e (ii) do Teorema 5.9 vemos que $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_2 = \widehat{\beta}_4$. Então, vamos calcular o invariante em $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$. De forma análoga aos cálculos feitos no Exemplo 5.37, obtemos

$$\Delta(\widehat{\beta}_1) = A^{-2} - A^{-4} + A^{-6} - 1 \quad \text{e} \quad \Delta(\widehat{\beta}_2) = A^6 - A^4 + A^2 + 1,$$

ou seja, como os polinômios são diferentes, podemos concluir que $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$ não são isotópicos.

Agora faremos a mudança de dois cruzamentos clássicos por dois cruzamentos singulares. Obtemos um total de $C_{4,2} = 6$ tranças singulares, como listadas abaixo:

1. $\beta_1 = \tau_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$,
2. $\beta_2 = \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1}$,
3. $\beta_3 = \tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}$,
4. $\beta_4 = \sigma_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1}$,
5. $\beta_5 = \sigma_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}$,
6. $\beta_6 = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \tau_1 \tau_2^{-1}$,

Novamente pelos itens (i) e (ii) do Teorema 5.9 temos que $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_6$ e $\widehat{\beta}_3 = \widehat{\beta}_4$. Desta forma, aplicando o invariante em $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_5$, obtemos

- $\Delta(\widehat{\beta}_1) = -2A^2 - 2A^{-2} - 2A^{-4} - 2$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_2) = -A^{-2} - 2A^{-4} - 2A^{-6} - 2A^{-8} - 2A^{-10}$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_3) = -A^2 - A^2$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_5) = -A^{10} - 2A^8 - 2A^6 - 2A^4 - A^2$,

e concluímos que $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_5$ não são isotópicos.

Na sequência, passaremos para a mudança de três cruzamentos clássicos por por três cruzamentos singulares. Teremos um total de $C_{4,3} = 4$ tranças singulares, como vemos a seguir:

1. $\beta_1 = \tau_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1}$,
2. $\beta_2 = \tau_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}$,
3. $\beta_3 = \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_1 \tau_2^{-1}$,
4. $\beta_4 = \sigma_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2^{-1}$.

Pelos itens (i) e (ii) do Teorema 5.9, observa-se que $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_2 = \widehat{\beta}_4$. Dessa forma, podemos concentrar nossos cálculos do invariante em $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$. Seguindo raciocínio semelhante ao apresentado no Exemplo 5.37, obtemos

$$\Delta(\widehat{\beta}_1) = A^{-2} + 4A^{-2} + 4A^{-4} + 3A^{-6} + A^{-8} + 3 \quad \text{e} \quad \Delta(\widehat{\beta}_2) = A^6 + 2A^4 + A^{-2} + 2A^{-4} + A^{-6} + 2,$$

ou seja, $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$ não são isotópicos.

Por fim, temos a trança com quatro cruzamentos singulares $\beta_1 = \tau_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2^{-1}$ e

$$\Delta(\widehat{\beta}_1) = -4A^4 - 6A^2 - 7A^{-2} - 4A^{-4} - A^{-6} - 8.$$

No Exemplo 5.38 usamos um nó com uma componente e quatro cruzamentos clássicos. No exemplo a seguir iremos considerar um nó com duas componentes, porém, com quatro cruzamentos clássicos.

Exemplo 5.39

A trança que cujo fecho é representado na Figura 29, é representada algebricamente por $\beta = \sigma_1^4$, ou seja, uma trança com quatro cruzamentos clássicos iguais.

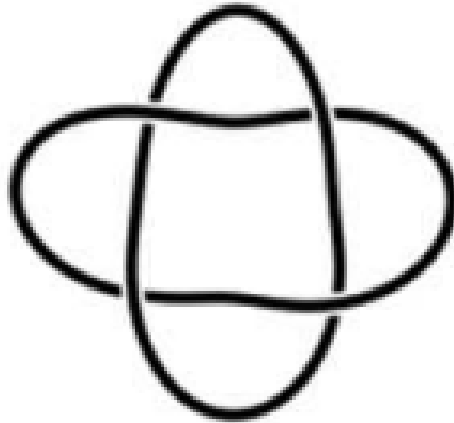


Figura 29 – Enlace de Salomão.

Assim como feito no Exemplo 5.38, faremos a mudança de cruzamentos clássicos por cruzamentos singulares. Em SG_n a relação $\sigma_1\tau_1 = \tau_1\sigma_1$ é válida. Então, fazendo as mudanças de cruzamentos em β , as possíveis tranças singulares são:

1. $\beta_1 = \tau_1\sigma_1^3$,
2. $\beta_2 = \tau_1^2\sigma_1^2$,
3. $\beta_3 = \tau_1^3\sigma_1$,
4. $\beta_4 = \tau_1^4$.

Utilizando o nosso invariante Δ vamos determinar o polinômio correspondente a cada fecho a seguir: $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_4$.

Aplicando o invariante Δ em $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_4$ e procedendo como no Exemplo 5.37, obtemos

- $\Delta(\widehat{\beta}_1) = -A^2 - A^2$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_2) = 1 - A^{-4} - 3A^{-8} - A^{-12}$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_3) = -A^2 - 2A^{-6} - A^{-8} - 4A^{-10} - 2A^{-12} - 3A^{-14}$,
- $\Delta(\widehat{\beta}_4) = A^{-4} + 17A^{-8} + 33A^{-12} + 12A^{-16} + 8A^{-20}$.

Desta forma, como os polinômios são diferentes, concluímos que $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$, $\widehat{\beta}_3$ e $\widehat{\beta}_4$ não são isotópicos.

Resumimos em forma de tabelas a classificação feita acima.

Dois cruzamentos/ duas componentes	
Representação algébrica do enlace	Polinômio
$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\tau_1 \sigma_1}$	$\Delta(\widehat{\beta}_1) = -A^2 - A^{-2}$
$\widehat{\beta}_2 = \widehat{\tau_1^2}$	$\Delta(\widehat{\beta}_2) = A^{-4} + A^{-8} + A^{-12} + 1$

Três cruzamentos/ uma componente	
Representação algébrica do nó	Polinômio
$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\tau_1 \sigma_1^2}$	$\Delta(\widehat{\beta}_1) = A^{-2} + A^{-4} + A^{-6} + 1$
$\widehat{\beta}_2 = \widehat{\tau_1^2 \sigma_1}$	$\Delta(\widehat{\beta}_2) = -A^{-2} - A^{-4} - A^{-6} + A^{-12}$
$\widehat{\beta}_3 = \widehat{\tau_1^3}$	$\Delta(\widehat{\beta}_3) = A^{-4} + A^{-6} + A^{-8} + A^{-18}$

Quatro cruzamentos/ uma componente	
Representação algébrica do nó	Polinômio
$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_1) = A^{-2} - A^{-4} + A^{-6} - 1$
$\widehat{\beta}_2 = \widehat{\sigma_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_2) = A^6 - A^4 + A^2 + 1$
$\widehat{\beta}_3 = \widehat{\tau_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_3) = -2A^2 - 2A^{-2} - 2A^{-4} - 2$
$\widehat{\beta}_4 = \widehat{\tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_4) = -A^{-2} - 2A^{-4} - 2A^{-6} - 2A^{-8} - 2A^{-10}$
$\widehat{\beta}_5 = \widehat{\tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_5) = -A^2 - A^2$
$\widehat{\beta}_6 = \widehat{\sigma_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_6) = -A^{10} - 2A^8 - 2A^6 - 2A^4 - A^2$
$\widehat{\beta}_7 = \widehat{\tau_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_7) = A^{-2} + 4A^{-2} + 4A^{-4} + 3A^{-6} + A^{-8} + 3$
$\widehat{\beta}_8 = \widehat{\tau_1 \tau_2^{-1} \sigma_1 \tau_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_8) = A^6 + 2A^4 + A^{-2} + 2A^{-4} + A^{-6} + 2$
$\widehat{\beta}_9 = \widehat{\tau_1 \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2^{-1}}$	$\Delta(\widehat{\beta}_9) = -4A^4 - 6A^2 - 7A^{-2} - 4A^{-4} - A^{-6} - 8$

Quatro cruzamentos/ duas componentes	
Representação algébrica do enlace	Polinômio
$\widehat{\beta}_1 = \widehat{\tau_1 \sigma_1^3}$	$\Delta(\widehat{\beta}_1) = -A^2 - A^2$
$\widehat{\beta}_2 = \widehat{\tau_1^2 \sigma_1^2}$	$\Delta(\widehat{\beta}_2) = 1 - A^{-4} - 3A^{-8} - A^{-12}$
$\widehat{\beta}_3 = \widehat{\tau_1^3 \sigma_1}$	$\Delta(\widehat{\beta}_3) = -A^2 - 2A^{-6} - A^{-8} - 4A^{-10} - 2A^{-12} - 3A^{-14}$
$\widehat{\beta}_4 = \widehat{\tau_1^4}$	$\Delta(\widehat{\beta}_4) = A^{-4} + 17A^{-8} + 33A^{-12} + 12A^{-16} + 8A^{-20}$

Referências

- ALEXANDER, J. W. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 9, n. 3, p. 93–95, 1923.
- ARNOL'D, V. I. A remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, v. 2, n. 3, p. 1–3, 1968.
- ARTIN, E. Theorie der zöpfe. In: SPRINGER. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. [S.l.], 1925. v. 4, n. 1, p. 47–72.
- ARTIN, E. Braids and permutations. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 48, n. 3, p. 643–649, 1947.
- ARTIN, E. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 48, n. 1, p. 101–126, 1947.
- BAEZ, J. C. Link invariants of finite type and perturbation theory. *letters in mathematical physics*, Springer, v. 26, p. 43–51, 1992.
- BANERJEE, I.; HUXFORD, P. Generators for the level m congruence subgroups of braid groups. 2024. Preprint.
- BARDAKOV, V.; BELLINGERI, P. On representations of Artin–Tits and surface braid groups. *Journal of Group Theory - J GROUP THEORY*, v. 14, 01 2010.
- BARDAKOV, V. G. The virtual and universal braids. *Fundam. Math.*, v. 184, p. 1–18, 2004. ISSN 0016-2736.
- BARDAKOV, V. G.; BELLINGERI, P. Combinatorial properties of virtual braids. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 156, n. 6, p. 1071–1082, 2009.
- BARDAKOV, V. G.; BELLINGERI, P.; DAMIANI, C. Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 24, n. 12, p. 1550063, 2015.
- BARDAKOV, V. G.; GONGOPADHYAY, K.; NESHCHADIM, M. V. Commutator subgroups of virtual and welded braid groups. *International Journal of Algebra and Computation*, World Scientific, v. 29, n. 03, p. 507–533, 2019.
- BARDAKOV, V. G.; KOZLOVSKAYA, T. A. On 3-strand singular pure braid group. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 29, n. 10, p. 2042001, 2020.
- BARDAKOV, V. G.; KOZLOVSKAYA, T. A. Singular braids, singular links and subgroups of camomile type. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 362, p. 109206, 2025.

- BATAINEH, K. et al. Generating sets of Reidemeister moves of oriented singular links and quandles. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 27, n. 14, p. 1850064, 2018.
- BELLINGERI, P. On presentations of surface braid groups. *J. Algebra*, v. 274, n. 2, p. 543–563, 2004. ISSN 0021-8693.
- BELLINGERI, P. et al. Powers of half-twists and congruence subgroups of braid groups. In: *Contemporary Mathematics*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2026. To appear.
- BELLINGERI, P.; GERVAIS, S. Surface framed braids. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 159, n. 1, p. 51–69, 2012.
- BELLINGERI, P.; PARIS, L. Virtual braids and permutations. In: *Annales de l'Institut Fourier*. [S.l.: s.n.], 2020. v. 70, n. 3, p. 1341–1362.
- BIRMAN, J. S. On braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 22, n. 1, p. 41–72, 1969.
- BIRMAN, J. S. *Braids, links, and mapping class groups*. [S.l.]: Princeton University Press, 1974.
- BIRMAN, J. S. New points of view in knot theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 28, n. 2, p. 253–287, 1993.
- BLOOMQUIST, W.; GOLDBERG, A.; SCHERICH, N. Congruence subgroups of the virtual braid group. *arXiv preprint arXiv:2510.21593*, 2025.
- BRENDLE, T.; MARGALIT, D.; PUTMAN, A. Generators for the hyperelliptic Torelli group and the kernel of the Burau representation at $t=-1$. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 200, n. 1, p. 263–310, 2015.
- BRENDLE, T. E. Congruence subgroups of braid groups. Winter Braids School, p. 1–26, 2018. Disponível em: <https://www.numdam.org/book-part/WBLN_2018__5__A3_0/>.
- BRENDLE, T. E.; MARGALIT, D. The level four braid group. *J. Reine Angew. Math.*, v. 735, p. 249–264, 2018.
- CASTEL, F. *Geometric representations of the braid groups*. [S.l.]: Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2016. v. 378. (Astérisque, v. 378). ISSN 0303-1179. ISBN 978-2-85629-835-0.
- CHMUTOV, S. et al. On the link invariants from the Yokonuma-Hecke algebras. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, v. 25, p. 1641004, 07 2016.
- CHOW, W.-L. On the algebraical braid group. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 49, n. 3, p. 654–658, 1948.
- COXETER, H. S. M. Factor groups of the braid group. *Proceedings of the 4th Canadian Mathematical Congress*, p. 95–122, 1959.
- DAMIANI, C. A journey through loop braid groups. *Expositiones Mathematicae*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 252–285, 2017.
- DASBACH, O. T.; GEMEIN, B. The word problem for the singular braid monoid. *arXiv preprint math/9809070*, 1998.
- DEHORNOY, P. et al. *Ordering braids*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2008.

- DEKIMPE, K.; GONÇALVES, D. L.; OCAMPO, O. Characteristic subgroups and the R-property for virtual braid groups. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 663, p. 20–47, 2025.
- DEY, S.; GONGOPADHYAY, K. Commutator subgroups of singular braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 31, n. 05, p. 2250033, 2022.
- DICKSON, L. E.; EUGENE, L. *Linear groups, with an exposition of the Galois field theory*. Leipzig: B. G. Teubner, 1901.
- DIES, E.; NICAS, A. The center of the virtual braid group is trivial. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 23, n. 08, p. 1450042, 2014.
- DINIZ, R. *Grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas e grupos cristalográficos*. Tese (PhD thesis) — Universidade Federal de São Carlos, 2020.
- DINIZ, R.; OCAMPO, O.; SANTOS JÚNIOR, P. C. *Coxeter-type quotients of surface braid groups*. 2024.
- FADELL, E.; NEUWIRTH, L. Configuration spaces. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, v. 10, p. 111–118, 1962.
- FADELL, E.; VAN BUSKIRK, J. On the braid groups of E^2 and S^2 . 1961.
- FENN, R.; KEYMAN, E.; ROURKE, C. The singular braid monoid embeds in a group. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, World Scientific, v. 7, n. 07, p. 881–892, 1998.
- FENN, R.; RIMÁNYI, R.; ROURKE, C. The braid-permutation group. *Topology*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 123–135, 1997.
- FENN, R.; ROLFSEN, D.; ZHU, J. Centralisers in the braid group and singular braid monoid. University of Sussex, 1996.
- FOX, R.; NEUWIRTH, L. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, JSTOR, v. 10, p. 119–126, 1962.
- GAMBAUDO, J.-M.; GHYS, É. Braids and signatures. *Bulletin de la Société mathématique de France*, v. 133, n. 4, p. 541–579, 2005.
- GEMEIN, B. Singular braids and markov's theorem. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 6, n. 04, p. 441–454, 1997.
- GILLETTE, R.; VAN BUSKIRK, J. The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 131, n. 2, p. 277–296, 1968.
- GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The roots of the full twist for surface braid groups. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 2004. v. 137, n. 2, p. 307–320.
- GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The braid group and a generalisation of the Fadell-Neuwirth short exact sequence. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 14, n. 03, p. 375–403, 2005.
- GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. The braid groups of the projective plane and the Fadell-Neuwirth short exact sequence. *Geometriae dedicata*, Springer, v. 130, n. 1, p. 93–107, 2007.
- GONÇALVES, D. L.; GUASCHI, J. et al. The splitting of generalisations of the Fadell-Neuwirth short exact sequence. *arXiv preprint arXiv:2509.02707*, 2025.

- GONGOPADHYAY, K.; KOZLOVSKAYA, T. A.; MAMONOV, O. V. On some decompositions of the 3-strand singular braid group. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 283, p. 107398, 2020.
- GONZÁLEZ-MENESES, J. New presentations of surface braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 10, n. 03, p. 431–451, 2001.
- GORIN, E. A.; LIN, V. J. Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, IOP Publishing, v. 7, n. 4, p. 569, 1969.
- HANSEN, V. L. *Braids and coverings: selected topics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.
- HU, S.-t. *Homotopy theory*. [S.l.]: Academic press, 1959.
- JOHNSON, D. L. *Presentations of groups*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- JONES, V. F. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. In: *New Developments in the Theory of Knots*. [S.l.]: World Scientific, 1987. p. 20–73.
- JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, v. 12, p. 103–111, 1985. ISSN 0273-0979.
- JUYUMAYA, J.; LAMBROPOULOU, S. p-adic framed braids. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 154, n. 8, p. 1804–1826, 2007.
- JUYUMAYA, J.; LAMBROPOULOU, S. An invariant for singular knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 18, n. 06, p. 825–840, 2009.
- KAMADA, S. Braid presentation of virtual knots and welded knots. *Osaka Journal of Mathematics*, Osaka University and Osaka City University, Departments of Mathematics, v. 44, n. 2, p. 441–458, 2007. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1183667989>>.
- KASSEL, C.; TURAIEV, V. *Braid groups*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 247.
- KAUFFMAN, L. H. Virtual knot theory. *European Journal of Combinatorics*, Academic Press, v. 20, n. 7, p. 663–691, 1999.
- KAUFFMAN, L. H.; LAMBROPOULOU, S. Virtual braids and the L-move. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 15, n. 06, p. 773–811, 2006.
- KIRBY, R. A calculus for framed links in S^3 . *Invent. math*, v. 45, n. 1, p. 35–56, 1978.
- KO, K. H.; SMOLINSKY, L. The framed braid group and 3-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 115, n. 2, p. 541–551, 1992.
- LAMBROPOULOU, S. Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manifolds. *Knots in Hellas*, World Scientific, v. 98, p. 274–289, 2000.
- LAMBROPOULOU, S. L-moves and Markov theorems. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 16, n. 10, p. 1459–1468, 2007.
- LIN, V. Braids and permutations. *arXiv preprint math/0404528*, 2004.
- LIN, V. Y. Artin braids and the groups and spaces connected with them. *Journal of Soviet Mathematics*, Springer, v. 18, p. 736–788, 1982.
- LYNDON, R. *Combinatorial group theory*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1977.

- MAGNUS, W.; KARRASS, A.; SOLITAR, D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. 2nd rev. ed.. ed. New York: Dover Publications, 1976. P. 116.
- MAKRI, S. The unrestricted virtual braid groups UVB_n . *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 31, n. 12, p. 2250087, 2022.
- MALCEV, A. On isomorphic matrix representations of infinite groups. *Matematicheskii Sbornik*, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian ... , v. 50, n. 3, p. 405–422, 1940.
- MURASUGI, K. Seifert fibre spaces and braid groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 1, p. 71–84, 1982.
- MURASUGI, K.; KURPITA, B. *A study of braids*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 484.
- NANDA, N.; SINGH, M. Alexander and Markov theorems for virtual doodles. *arXiv preprint arXiv:2006.07205*, 2020.
- NATOV, J. *Pure framed braids and 3-manifolds*. [S.l.]: Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College, 1997.
- PALMER, M.; SOULIÉ, A. The Burau representations of loop braid groups. *Comptes Rendus. Mathématique*, v. 360, n. G7, p. 781–797, 2022.
- PARIS, L.; RABENDA, L. Virtual and arrow Temperley-Lieb algebras, Markov traces, and virtual link invariants. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 30, n. 06, p. 2150041, 2021.
- PARIS, L.; ROLFSEN, D. Geometric subgroups of surface braid groups. In: *Annales de l'institut Fourier*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 49, n. 2, p. 417–472.
- PEREIRO, C. d. M. *Os grupos de tranças do toro e da garrafa de Klein*. Tese (PhD thesis) — Universidade Federal de São Carlos, 2015.
- SILVA, M. P. d. *Propriedades combinatórias de tranças virtuais*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, 2023.
- The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2*. [S.l.], 2022. [Https://www.gap-system.org](https://www.gap-system.org). Disponível em: <<https://www.gap-system.org>>.
- VAN BUSKIRK, J. Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 122, n. 1, p. 81–97, 1966.
- VENKATARAMANA, T. N. Image of the Burau representation at d-th roots of unity. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 1041–1083, 2014.
- VERSHININ, V. On the singular braid monoid. *St. Petersburg Mathematical Journal*, v. 21, n. 5, p. 693–704, 2010.
- VERSHININ, V. V. On homology of virtual braids and Burau representation. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, World Scientific, v. 10, n. 05, p. 795–812, 2001.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br