Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JAMILE CECI DOS SANTOS ROCHA

GEOMETRIA E AS ILUSÕES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Salvador - Bahia
2025

JAMILE CECI DOS SANTOS ROCHA

GEOMETRIA E AS ILUSÕES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin

Salvador - Bahia
2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

R672 Rocha, Jamile Ceci dos Santos

Geometria e as Ilusões: Uma proposta interdisciplinar nas aulas de Matemática. / Jamile Ceci dos Santos Rocha. – Salvador, 2025.

70 f.

Orientador: Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2025.

1. Transformações Geométricas. 2. Sala de Ames. 3. Padrões *moiré*. 4. Anamorfose cilíndrica. I. Marin, Juan Andrés Gonzalez. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU: 514

“GEOMETRIA E AS ILUSÕES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA”

Jamile Ceci dos Santos Rocha

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 27/06/2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin
(orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Vinícius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello
(interno – PROFMAT)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSEPH NEE ANYAH YARTEY
Data: 29/07/2025 14:48:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey

(externo)
Universidade Federal do recôncavo da Bahia (UFRB)

JAMILE CECI DOS SANTOS ROCHA

GEOMETRIA E AS ILUSÕES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin (Orientador)
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB

AGRADECIMENTOS

Aos estudantes que participaram da sequência didática e que continuem desenvolvendo a autonomia do aprender.

Aos gestores escolares que possibilitaram e apoiaram a minha formação continuada.

Aos colegas e pares pela colaboração na jornada acadêmica.

Ao orientador e aos professores, doutores, que compõem a banca examinadora, pelas sugestões para aprimorar o trabalho.

RESUMO

No contexto escolar, para estimular o interesse dos estudantes pelos conhecimentos matemáticos, muitos professores revisitam o planejamento pedagógico e a prática docente, diversificam as metodologias de ensino e propõem sequências didáticas interdisciplinares. O objetivo desse trabalho, portanto, é apresentar uma sequência didática sobre as transformações geométricas por meio da experimentação e construção de modelos de ilusão com um grupo de alunos da 1ª Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual. A pesquisa é qualitativa com base nos aspectos teóricos sobre sequência didática desenvolvidos por Antoni Zabala (1998). As atividades ordenadas são divididas em três blocos independentes com base na ilusão visual proposta, a saber, Sala de Ames, Padrões *moiré* e Anamorfose cilíndrica, abordando, respectivamente, os conceitos de homotetia, translação e rotação de figuras geométricas. Os aspectos metodológicos incluem a elaboração de um plano de aula e a aplicação de um questionário pós-aulas. Utiliza-se a técnica Análise de Conteúdo para verificar os interesses ou resistências dos estudantes em relação às metodologias propostas, como experimentações, materiais concretos, tecnologias digitais e interdisciplinaridade. Como resultados, a construção dos modelos de ilusão por meio dos *softwares* GeoGebra e Anamorph Me!, além de materiais recicláveis. E valida-se a sequência didática com base nos aspectos teóricos, na aplicação, nos registros das atividades e na avaliação dos estudantes.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Sala de Ames. Padrões *moiré*. Anamorfose cilíndrica.

ABSTRACT

In the school context, in order to foster students' interest in mathematical knowledge, many teachers revisit pedagogical planning and teaching practices, diversify instructional methodologies, and propose interdisciplinary didactic sequences. The objective of this study, therefore, is to present a didactic sequence on geometric transformations through experimentation and the construction of illusion models with a group of first-year high school students from the State Public School System. This is a qualitative research study based on the theoretical principles of didactic sequences as proposed by Antoni Zabala (1998). The structured activities are divided into three independent modules, each based on a proposed visual illusion—namely, the Ames Room, *Moiré* Patterns, and Cylindrical Anamorphosis—addressing, respectively, the concepts of homothety, translation, and rotation of geometric figures. Methodological aspects include the development of a lesson plan and the administration of a post-lesson questionnaire. The Content Analysis technique is used to identify students' interests or resistance regarding the proposed methodologies, such as experimentation, use of concrete materials, digital technologies, and interdisciplinarity. As results, illusion models were constructed using GeoGebra and Anamorph Me! software, as well as recyclable materials. The didactic sequence is validated based on theoretical foundations, implementation in practice, records of student activities, and student assessments.

Keywords: Geometric transformations. Ames Room. *Moiré* patterns. Cylindrical anamorphosis.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Um dos desafios na sala de aula de Matemática é despertar o interesse dos estudantes pelos objetos de conhecimento indicados no planejamento anual do professor e orientados nos documentos curriculares oficiais. Além disso, destacam-se alguns aspectos das salas de aula como a estrutura física e organizacional, assim como a escassez de recursos materiais. O ambiente da sala de aula com cadeiras enfileiradas, dificultando a interação entre professor/estudantes e estudantes/estudantes, como também a escassez de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) e materiais didáticos no ambiente escolar são alguns obstáculos que permeiam a prática docente.

Outro aspecto é a formação limitada dos professores frente aos novos espaços-tempos de aprendizagem e temáticas que muitas vezes não são contempladas nos saberes acadêmicos. Notam-se as aulas expositivas como o único recurso metodológico, a descontinuidade na formação dos professores por falta de incentivo dos empregadores e também em virtude das demandas docentes antes, durante e depois do horário de trabalho. A contextualização dos objetos matemáticos apenas na própria área de conhecimento, desconectada das questões sociais, dos temas transversais e do conhecimento científico e sua historicidade.

Nesse contexto, uma das possibilidades do professor de matemática é revisitar o seu planejamento e rever sua prática com modificações que visem discutir os impasses do ensino e aprendizagem. Conhecer outras metodologias, ideias de sequências didáticas e temas diversos para a formação do cidadão. Dessa maneira, propõe-se uma ruptura dos estereótipos comumente adotados pelos estudantes acerca do ensino e aprendizagem de matemática como a memorização de fórmulas, repetição de exercícios e forma linear de apresentação dos conteúdos, a saber, definição, exemplos, exercícios e, eventualmente, algumas aplicações.

O estudo de Geometria Plana e Espacial, objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias, possibilita o desenvolvimento de habilidades, tais como: investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas; aplicar as relações métricas, incluindo as noções de congruência e semelhança de figuras geométricas em variados contextos; visualizar, desenhar, argumentar na busca de solução para problemas e utilizar as noções de transformações isométricas e transformações homotéticas para analisar construções civis, obras de artes, entre outras produções humanas (Brasil, 2002, 2018).

Além disso, há um aprofundamento em relação ao sistema dedutivo: formulação de hipóteses, suas formas de validação e apresentação do conhecimento, por exemplo. Destaca-se também o uso das tecnologias digitais como ferramenta ou recurso metodológico, ampliando as possibilidades pedagógicas e de representação dos objetos e entes abstratos. Um determinado problema pode ser abordado de diversas maneiras e com diversos instrumentos matemáticos tendo em vista que as propriedades e os elementos geométricos também podem ser representados algebricamente ou por construção geométrica (Brasil, 2002).

O estudo de Geometria Plana e Espacial com temática interdisciplinar permeia múltiplas abordagens e discussões sobre os espaços-tempos de aprendizagem e as metodologias de ensino. As ilusões visuais como temática[1], por exemplo, podem estimular a curiosidade e interatividade dos estudantes. Dessa maneira, formulam-se as seguintes questões norteadoras: o estudo da Geometria Plana e Espacial a partir da experimentação e construção de modelos da Sala de Ames/dos Padrões *moiré*/da anamorfose cilíndrica é possível? Os estudantes participantes da pesquisa demonstram interesses ou resistências com propostas que relacionam experimentações, materiais concretos (estáticos e dinâmicos) e interdisciplinaridade no ensino de Matemática?

Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é apresentar uma sequência didática sobre as transformações geométricas por meio da experimentação e construção de modelos de ilusão com um grupo de alunos da 1ª (Primeira) Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual. De forma específica, identificar os conceitos relacionados à Geometria Plana e Espacial que se pretendem abordar na sequência didática; verificar a usabilidade dos materiais recicláveis, das ferramentas de desenho e dos *softwares* de geometria dinâmica para construção dos modelos. Além desses objetivos, listam-se: avaliar qualitativamente a sequência didática e sua aplicação; identificar e caracterizar os interesses e resistências dos estudantes participantes da pesquisa sobre as experimentações, materiais concretos (estáticos e dinâmicos) e interdisciplinaridade no ensino de Matemática.

Em termos teóricos, a pesquisa se justifica ao ampliar as discussões sobre as possibilidades metodológicas e a diversidade de materiais didáticos que um professor de matemática pode dispor na sua prática docente para incentivar os estudantes à aprendizagem de Geometria. Cabe destacar que outros objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias também podem contribuir para o processo de construção dos modelos citados.

[1]Esta pesquisa configura-se como uma ampliação da abordagem temática realizada pela autora em produção acadêmica anterior: Rocha e Gouveia Júnior (2024).

Os motivos de ordem prática estão relacionados a necessidade de subsídios (ou ampliá-los) para aprendizagens mediadas nos espaços de popularização das ciências como os museus interativos de ciência e tecnologias, laboratórios de ensino de matemática e feiras de matemática. Esse intercâmbio de conhecimentos e experiências não deve ocorrer apenas em ambiente externo à escola, mas também no próprio ambiente escolar, incentivando, por exemplo, a construção dos próprios laboratórios de ensino de matemática (fixos ou itinerantes), a produção colaborativa dos acervos pelos estudantes e professores e a divulgação dos projetos elaborados.

Em termos acadêmicos, a pesquisa se justifica ao corroborar com abordagens realizadas por outros pesquisadores. No aspecto interdisciplinar direcionado à popularização das ciências, Severo, Viali e Rocha Filho (2015) trabalharam com o estudo da Geometria Plana e Espacial, utilizando a construção de um caleidoscópio. O estudo de Rebello et al. (2015) abordou a aprendizagem de ângulos nas séries finais do Ensino Fundamental, dispondo do periscópio como ferramenta. Outros trabalhos, por sua vez, exploram o tema ilusões, o percurso histórico de algumas ilusões clássicas e sua relevância educacional no ensino das ciências, inclusive da Matemática. Nesse contexto, citam-se os trabalhos de Parisoto e Hilger (2016) e de Medeiros (2006).

As pesquisas com temáticas afins desenvolvidas no PROFMAT até a data de publicação desta dissertação abordam conhecimentos relacionados com a Matemática e a Arte, ratificando o aspecto interdisciplinar desse trabalho. Algumas sequências didáticas são propostas a partir da exposição das obras de M. C. Escher (1898-1972), artista que criou muitas ilusões articuladas com a Geometria. Silva (2024) aplicou uma sequência didática relacionando as obras desse artista, os mosaicos e a tesselação (recobrimento de uma superfície bidimensional) ao objeto de conhecimento polígonos e seus elementos. Canella (2021) associou as obras de Escher e a construção de mandalas mediada por tecnologia e trabalho manual ao objeto de conhecimento transformações geométricas.

Há trabalhos anteriores com abordagens análogas, tais como a sequência didática de Alves (2014) cujo diferencial é a aplicação da arte de M. C. Escher nas faces dos poliedros de Platão. Iavorski (2014), por meio da interdisciplinaridade, apresenta as obras do artista István Orosz, usa a técnica de anamorfose do tipo cilíndrica na oficina, propõe exercícios multidisciplinares (anamorfoses de gráficos e mapas, por exemplo) e descreve o *software Anamorph Me!*.

Outra abordagem está relacionada à Geometria Projetiva com a utilização ou não de tecnologias digitais. Gonçalves (2013) elaborou uma proposta didática para o ensino de Geometria Projetiva a alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental, incluindo a identificação de ilusões de óptica e a correlação entre o fenômeno e essa Geometria. Além disso, cabe salientar a ocorrência de pesquisas sobre Matemática e Arte com obras de arte não relacionadas às ilusões.

Esse trabalho, portanto, articula esses saberes, bem como amplia as abordagens já divulgadas em meio acadêmico. Por fim, em termos pessoais, a pesquisa contribui com a apreensão de saberes pertinentes à prática docente do pesquisador em formação continuada.

As seções que compõem esse trabalho são: Introdução, que apresenta a temática, contextualização, perguntas, objetivos e as justificativas da pesquisa; Os materiais didáticos e as ilusões, que apresenta as fundamentações sobre o uso de materiais didáticos nas aulas de matemática, sobre as ilusões de óptica, em particular, a Sala de Ames, Padrões *moiré* e Anamorfose, assim como sobre o GeoGebra. A seção Objetos de conhecimento, que explora os conhecimentos matemáticos centrais da sequência didática (transformações geométricas) e além de outras definições e teoremas matemáticos aplicados às ilusões tanto da Geometria Euclidiana Plana quanto da Geometria Projetiva.

As outras seções são: Metodologia, que indica as etapas da pesquisa e as condições de aplicação; a Sequência Didática, que, além da fundamentação e síntese, aborda as etapas de planejamento, aplicação e avaliação, contemplando os registros dos estudantes. As últimas seções: considerações finais, referências, os apêndices e o anexo.

2 OS MATERIAIS DIDÁTICOS E AS ILUSÕES

A passagem entre o físico/perceptível para o abstrato é uma etapa essencial para o ensino e a aprendizagem de Matemática, em particular, para o estudo de Geometria. Roque (2012) descreve que um quadrado é uma forma abstrata, o ponto como algo sem dimensão, que não existe na realidade. Os pontos, retas, planos, quadrados, portanto, não são concretos e só podem ser concebidos por meio de uma abstração. Dessa maneira, uma estratégia para construção e compreensão das representações dos entes matemáticos é a utilização de materiais didáticos.

Entende-se por materiais didáticos (MD) qualquer recurso/instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem (Lorenzato, 2012; Aragão Filho, 2017). Cabe destacar que os MD podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo que se deseja, porém não garante, apenas com seu uso, um bom ensino e nem aprendizagem significativa (Lorenzato, 2012). Além disso, o professor continua como mediador da aprendizagem.

Cabe salientar que o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é "[...] um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e, principalmente, aprender a aprender" (Lorenzato, 2012, p. 7). Além do apelo tátil e visual, os acervos que devem compor o LEM para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio são, por exemplo, "aqueles materiais que desafiam o raciocínio lógico-dedutivo (paradoxos, **ilusões de ótica**) nos campos aritmético, geométrico, algébrico, trigonométrico, estatístico. [...] acrescidos artigos de jornais ou revistas" (Lorenzato, 2012, p. 9-10, grifo nosso).

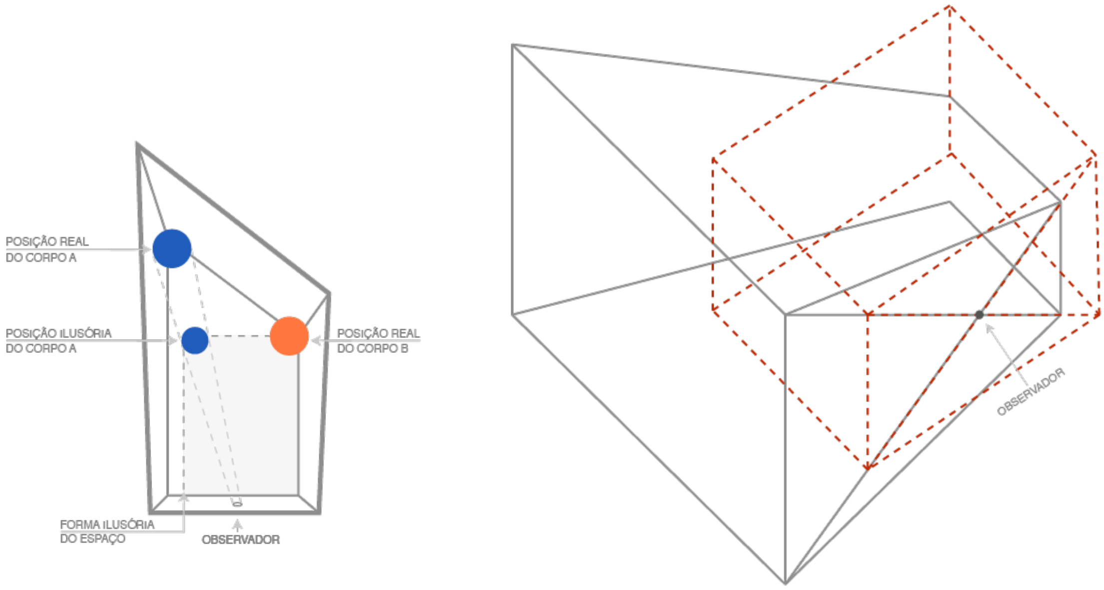
Brandes (apud Medeiros, 2006, p. 331), em consonância, sugeriu a utilização das ilusões ópticas no ensino de Matemática, ressaltando que as ilusões relacionadas à profundidade despertam o interesse dos estudantes, bem como a possibilidade de produzirem suas próprias ilusões de óptica. Segundo Baldo e Haddad (2003), uma ilusão é a discrepância entre o que é percebido em duas situações diferentes em relação ao mesmo objeto, salientando dessa maneira que a nossa percepção pode ser meramente uma representação do objeto real. Esses autores afirmam que "a percepção não depende apenas do objeto, mas também amplamente do sujeito que o percebe" (Baldo; Haddad, 2003, p. 7).

Nesse contexto, as ilusões visuais, que nem sempre derivam de fenômenos ópticos ou de mecanismos sensoriais básicos, podem depender de "fatores cognitivos condicionados por nossa interação multisensorial com o ambiente” (Baldo; Haddad, 2003, p. 9). Segundo Robinson (apud Baldo; Haddad, 2003, p. 9), “muitas das ilusões visuais envolvem relações espaciais, por isso chamadas de *ilusões geométricas*”.

2.1 SALA DE AMES

A Sala de Ames, uma ilusão geométrica, foi inventada pelo oftalmologista norte-americano Adelbert Ames em 1946. “[...] um espaço construído a partir de uma determinada forma geométrica e que aos olhos do observador tem outra configuração distinta da real, criando deste modo uma ilusão de óptica” (Quarto [...], 2012).

Figura 2.1: Representação da Sala de Ames



FONTE: (Quarto [...], 2012)

Outra descrição é realizada por Lanners (1982), destacando o prumo vertical das paredes, a medida dos ângulos dos cantos que não são retos e a inclinação da face que representa o piso. O autor também complementa que:

> Fazendo o observador olhar o recinto através de um orifício, sem possibilidade de controlar a profundidade com o segundo olho, seu cérebro “racionaliza” a imagem, atribuindo-lhe ângulos retos. [...] Nosso condicionamento sobre um mundo cultural reto é tão forte que nos força a aceitar, como real, a imagem falsa do recinto [...] (Lanners, 1982, p. 120).

Além disso, esse observador perceberá mudanças no tamanho de pessoas e/ou objetos que estejam em cantos distintos na sala de Ames e também quando eles se deslocam de um lado para outro. Dessa maneira, a divergência de percepção provocada pela ilusão geométrica gera um conflito cognitivo e uma oportunidade para desenvolver novos conhecimentos. Na figura 2.2, são apresentadas fotografias autorais em exposição itinerante do Museu das ilusões cuja curadoria foi realizada pelo Prof. Julio Abdalla.

Figura 2.2: Ilusão da Sala de Ames

FONTE: (Rocha; Gouveia Júnior, 2024, p. 12)

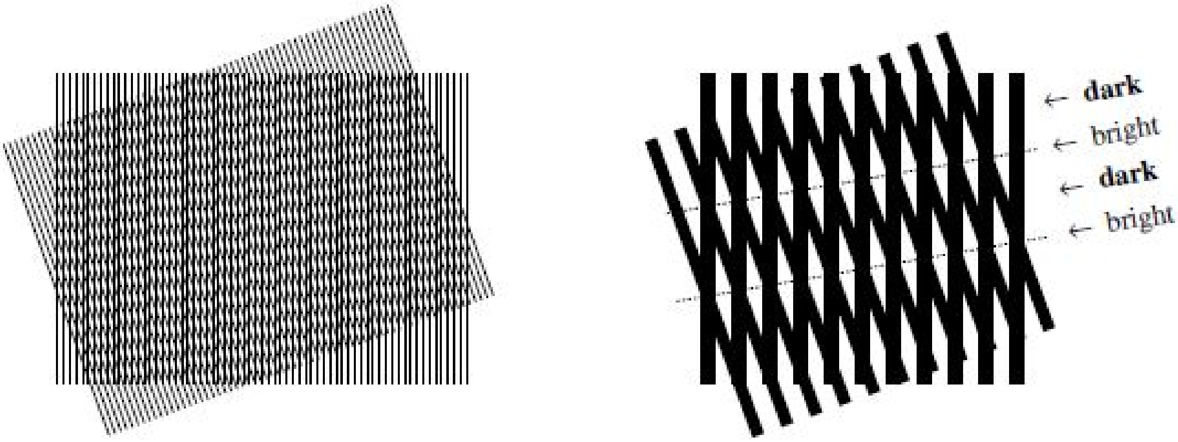
2.2 PADRÕES *MOIRÉ*

O efeito *moiré* é um fenômeno visual que ocorre quando estruturas repetitivas (como telas, grades ou redes) são sobrepostas ou vistas uma contra a outra, criando um novo padrão de áreas escuras e claras alternadas diferente das estruturas originais (Amidror, 2009). Na figura 2.3, o efeito aparece quando dois padrões repetitivos idênticos de linhas são sobrepostos sem alinhamento. Os padrões *moiré* também são observados com círculos ou matrizes de pontos.

O termo *moiré* é uma palavra francesa cuja origem se refere a seda molhada, tecido brilhante com padrões que se modificam com o movimento. O efeito *moiré* aparece na impressão de jornais e revistas, relacionado aos pontos de meio-tom. Existem métodos e ferramentas matemáticas para evitá-lo e, consequentemente, melhorar a qualidade da imagem. Na engenharia civil, mecânica, e materiais, há aplicação dos padrões *moiré* na análise de tensões, pois permite a visualização de deformações em objetos como vigas, placas e componentes mecânicos sob tensão. Outras áreas de aplicação são a Cristalografia, alinhamento óptico e na verificação de autenticidade de documentos (Amidror, 2009; OpenAI, 2024).

Na figura 2.4, observa-se a apresentação dos padrões *moiré* como acervo do Museu

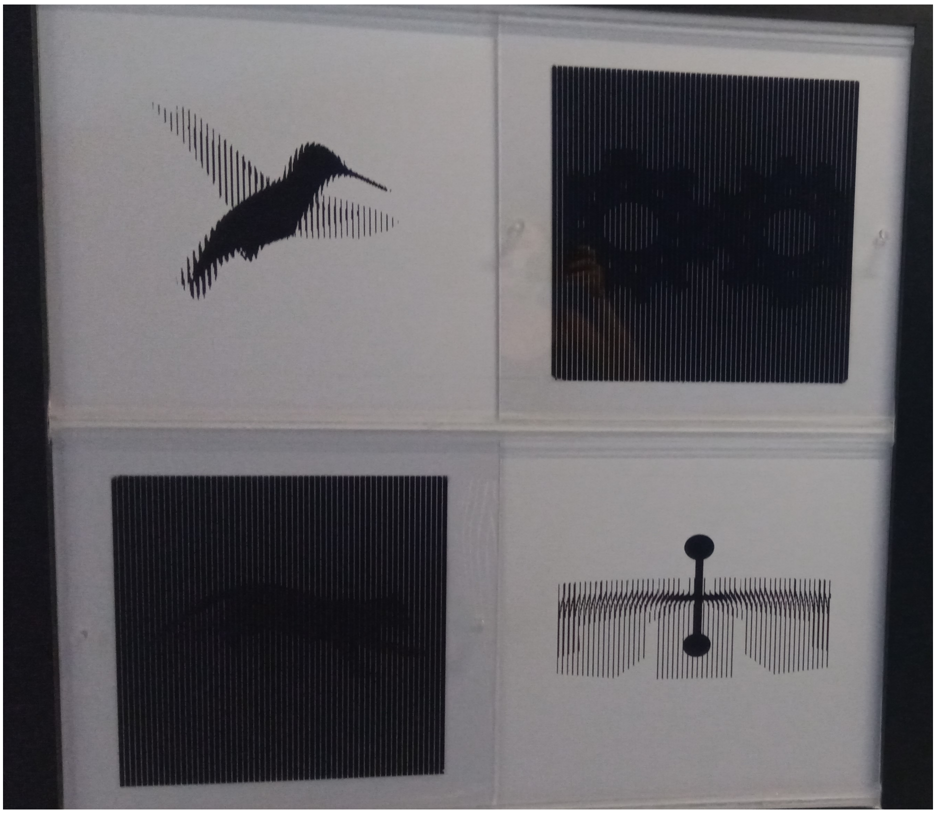
Figura 2.3: Efeito Padrão *moiré*



FONTE: (Amidror, 2009, p. 9)

das Ilusões, possibilitando, ao mover as placas de acrílico com grade de linhas, apreciar o movimento, por exemplo, do bater de asas de um beija-flor entre outras representações.

Figura 2.4: Padrão *moiré* em Museu



FONTE: Autoral

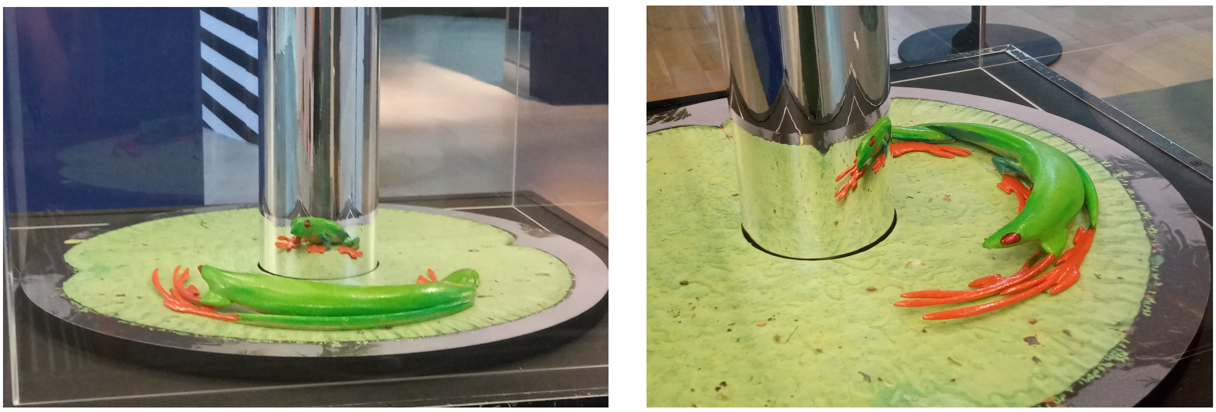
2.3 ANAMORFOSE

A anamorfose como técnica artística tem origem prática no Oriente com o uso de espelhos cilíndricos, assim como pelos registros e obras de Leonardo da Vinci, Piero della Francesca em 1474 e Hans Holbein em 1533. Inicialmente, as técnicas para construção de uma anamorfose eram ocultadas pelos artistas, em seguida, as mesmas foram aperfeiçoadas e publicizadas de maneira exaustiva (Trindade, 2015; Semmer et al., 2013; Brignoni, 2020).

As anamorfoses são "imagens que se apresentam normalmente distorcidas, uma vez vistas frontalmente e de vários ângulos, mas que vistas de um determinado lugar e a partir de um centro de projeção privilegiado, [...] se restituem perspectivamente"(Trindade, 2015, p. 87). Acrescenta-se também a utilização de superfícies especulares, de forma e curvatura variada que dão origem às anamorfoses poliédricas, cilíndricas, cônicas e esféricas, onde as imagens se restituem através dos espelhos com as mesmas características que geraram a anamorfose (Trindade, 2015).

No caso da anamorfose cilíndrica e seu efeito visual (anamorfismo catóptrico do tipo cilíndrico), a representação no plano é realizada a partir de um achatamento dos dados visuais, ou seja, consiste, teoricamente, em cortar o cilindro anamórfico adequadamente e desenrolá-lo sobre o plano (Araújo, 2016). Na figura 2.5, observa-se a apresentação da anamorfose intitulada "O Sapo e a Vitória-Régia"como acervo do Museu das Ilusões.

Figura 2.5: Anamorfose Cilíndrica em Museu



FONTE: Autoral

Para além do uso nas artes, as anamorfoses estão presentes no cotidiano. Iavorski (2014) e Semmer et al. (2013) ilustram e descrevem o uso das anamorfoses nas sinalizações de trânsito com normas sobre o tamanho das letras pintadas no asfalto, com base na velocidade permitida das vias, associada ao tempo de leitura e à reação motora pretendida. Nas placas de *marketing* em um estádio de futebol com letras distorcidas adequadamente para o ângulo de filmagem. Na representação de mapas em que, por exemplo, "cada país é redesenhado de forma que seu polígono sofre uma deformação proporcional a um tema de interesse (população, PIB ou outra variável de interesse)"(IBGEeduca, [s.d.]).

2.4 O GEOGEBRA

Os *softwares* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, também podem compor o acervo do LEM, funcionando como materiais didáticos nas aulas de Matemática. O GeoGebra foi criado em 2001 como produto da tese de Markus Hohenwarter, mas as funcionalidades e interface são aprimoradas continuamente. Além disso, o GeoGebra, que possui código aberto, é disponibilizado gratuitamente para os usuários não comerciais, possibilitando o uso em 190 países e tradução para 55 idiomas segundo o Instituto GeoGebra de São Paulo ([20–]).

O nome do *software* é um indicativo de sua versatilidade quanto aos conteúdos matemáticos abordados. Além da Geometria e Álgebra, também relaciona o Cálculo e Estatística de forma direta nas suas ferramentas. Com base na aplicabilidade da própria Matemática, o GeoGebra também pode contemplar outras áreas, como Artes e Engenharia.

A praticidade de manipulação desse material didático, aliada à disponibilidade de tutoriais, possibilita seu uso em diferentes níveis de escolaridade. Cabe destacar, no entanto, que para prática escolar, a formação continuada para professores e a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) nas escolas e nos currículos das Licenciaturas em Matemática também são necessárias.

Silveira (2018), por exemplo, traz a realidade das salas de aula de Cabo Verde, que se assemelha com a brasileira, quanto ao uso de *softwares* de Geometria Dinâmica, em particular, do GeoGebra. A autora enfatiza, de maneira teórica e prática a partir de um estudo de caso, a importância da formação do professor para a aplicação dessa ferramenta nas suas aulas, contribuindo para uma aprendizagem interativa dos estudantes sobre o conteúdo transformações geométricas isométricas.

Bobko e Rocha (2024) apresentam um tutorial digital dinâmico sobre o GeoGebra criado no ambiente e com as ferramentas do GeoGebra. Dessa forma, as autoras ampliam a interatividade e autonomia dos usuários, principalmente os iniciantes. Além disso, as autoras apresentam algumas sugestões de materiais e fontes de pesquisa sobre o tema. Em suma, os dois estudos ratificam o uso desses recursos tecnológicos para apoiar e potencializar as aprendizagens dos sujeitos envolvidos.

3 OBJETOS DE CONHECIMENTO

Muitos objetos de conhecimento da área de Matemática e suas Tecnologias estão presentes na sequência didática proposta nessa pesquisa. As transformações geométricas, no entanto, são objetos centrais desse estudo. Nesta seção, as transformações geométricas serão definidas a partir da óptica da Geometria, assim como da Geometria Analítica. Além desses objetos, algumas noções de Geometria Projetiva também aparecem na compreensão das anamorfoses, portanto também serão abordadas nesta seção.

3.1 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Na Geometria, as transformações geométricas no espaço consistem, de forma geral, em mudança de posição, orientação e tamanho de figuras no espaço tridimensional.

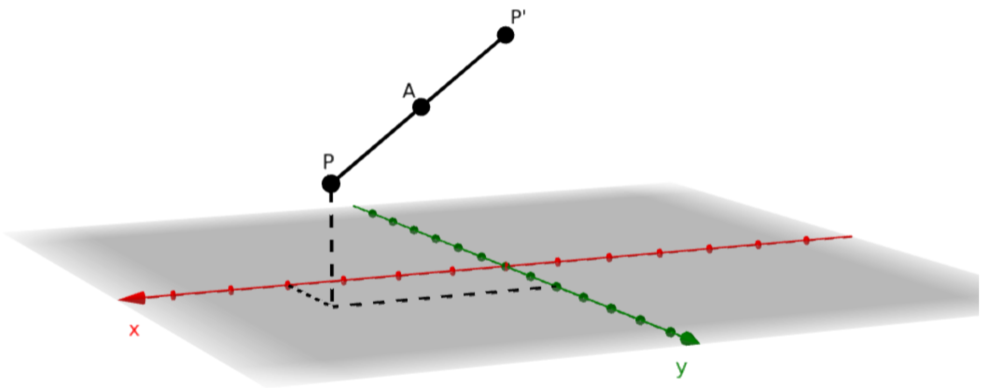
Chamam-se de *isometrias* as transformações que preservam a distância euclidiana. Além da transformação identidade, os tipos de isometrias no plano são: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento. No espaço, as isometrias se classificam em: rotação em torno de uma reta, isometria helicoidal, translação, reflexão em torno de um plano, rotação refletida e reflexão com deslizamento. As três primeiras classificações resultam de movimentos no espaço e as três últimas não provêm de movimentos.

Dessa maneira, segundo Lima (1996, 2002), uma transformação T no plano Π (ou no espaço euclidiano tridimensional E) é uma função $T : \Pi \to \Pi$ (ou $T : E \to E$), ou seja, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano Π outro ponto $P' = T(P)$ do plano (ou associa a cada ponto P do espaço o ponto P'), chamado sua imagem por T. Essa transformação diz-se *injetiva* quando pontos distintos em Π (ou em E) têm sempre imagens distintas. Diz-se *sobrejetiva* quando todo ponto P' em Π (ou em E) é imagem de pelo menos um ponto P. E chama-se *bijetiva*, ou uma bijeção, quando essa transformação é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Com o estabelecimento de um sistema de coordenadas em Π (ou em E), uma transformação T pode ser descrita por expressões das coordenadas dos pontos. Nas isometrias, $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in E$, sendo $d(X, Y)$ a distância entre os pontos X e Y. Exemplos de isometria são os seguintes: fixado um ponto A no espaço E, a reflexão em relação a esse ponto é uma isometria tal que A é o ponto médio do segmento

PP'.

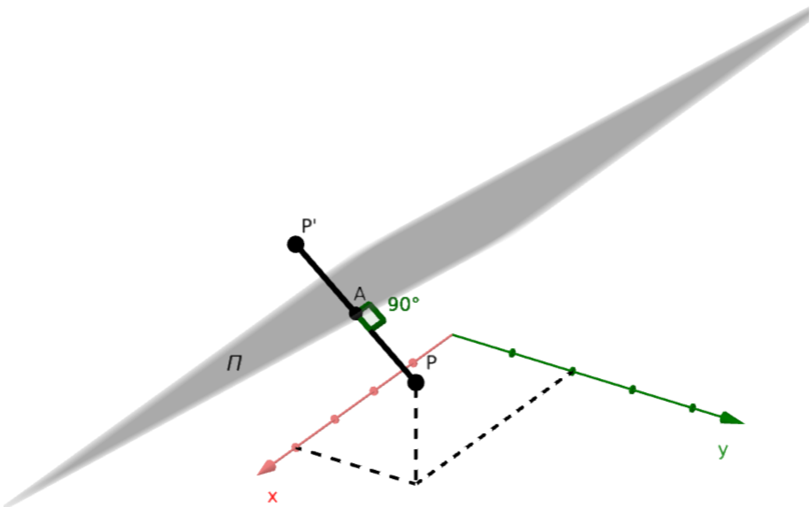
Figura 3.1: Reflexão em relação a um ponto



FONTE: Autoral

A reflexão em torno de um plano $\Pi \subset E$ é uma isometria tal que Π é o plano mediador do segmento PP'. Isso significa que PP' é perpendicular a Π e, além disso, se $\{A\} = PP' \cap \Pi$ então $\overline{PA} = \overline{AP'}$.

Figura 3.2: Reflexão em torno de um plano

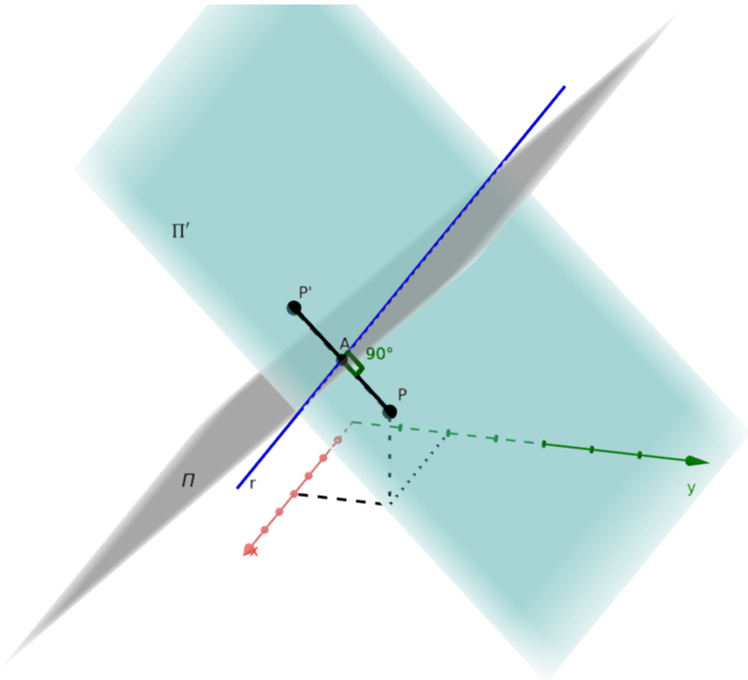


FONTE: Autoral

Observe que se Π' é o plano contendo a perpendicular PP' e $r = \Pi \cap \Pi'$. Restrita ao plano Π', a reflexão em torno de um plano $\Pi \subset E$ coincide com a reflexão em torno de r no plano Π' conforme a figura 3.3.

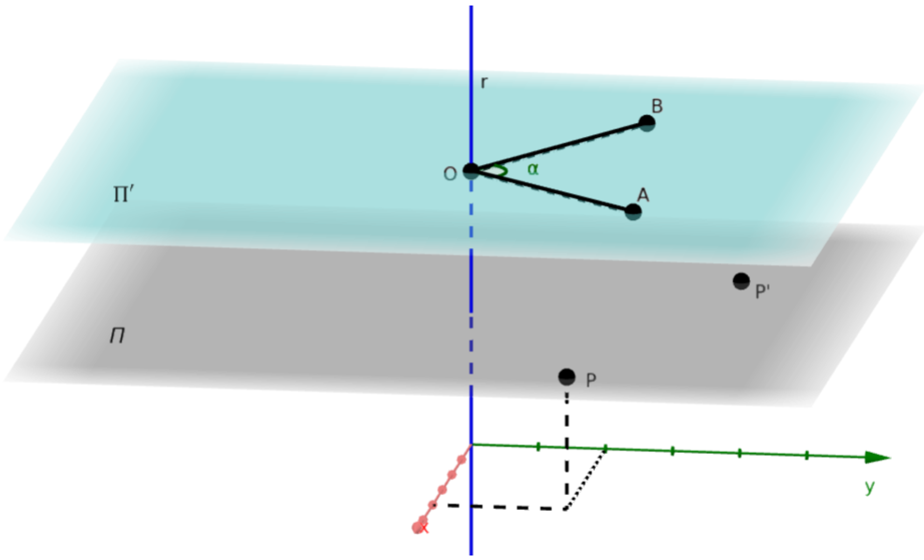
A rotação de ângulo $\alpha = A\hat{O}B$ em torno da reta r ($O \in r$ e os lados do ângulo estão sobre um plano perpendicular a r) é uma isometria cujo $P' = T(P)$ é determinado pelas seguintes condições: $P, P' \in \Pi$, $\Pi \perp r$; se $\Pi \cap r = \{O\}$, então $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e o ângulo $P\hat{O}P$ é igual a α.

Figura 3.3: Reflexão em torno de uma reta (no plano)



FONTE: Autoral

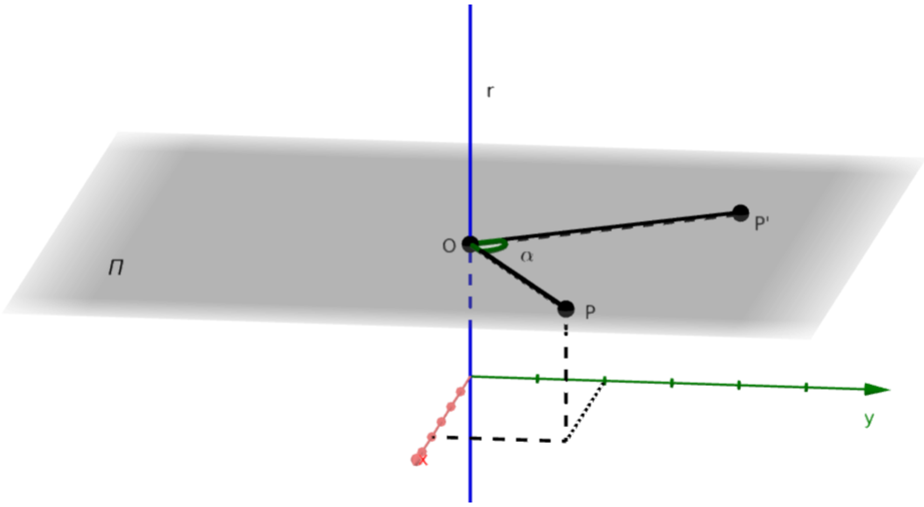
Figura 3.4: Rotação de ângulo α em torno da reta r I



FONTE: Autoral

Dessa maneira, coincide, no plano, com a rotação de ângulo α com centro de rotação no ponto O conforme a figura 3.5.

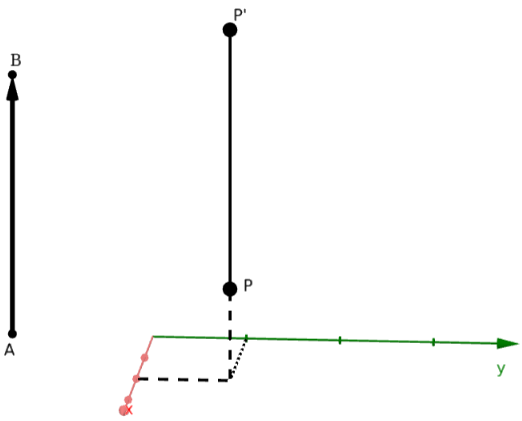
Figura 3.5: Rotação e ângulo α em torno da reta r II



FONTE: Autoral

Sejam A, B pontos distintos do espaço e $\overrightarrow{AB}$ o vetor. A translação em relação a esse vetor é uma isometria tal que $\overline{PP'} = \overline{AB}$, $\overrightarrow{PP'}$ tem a mesma direção e sentido que $\overrightarrow{AB}$.

Figura 3.6: Translação



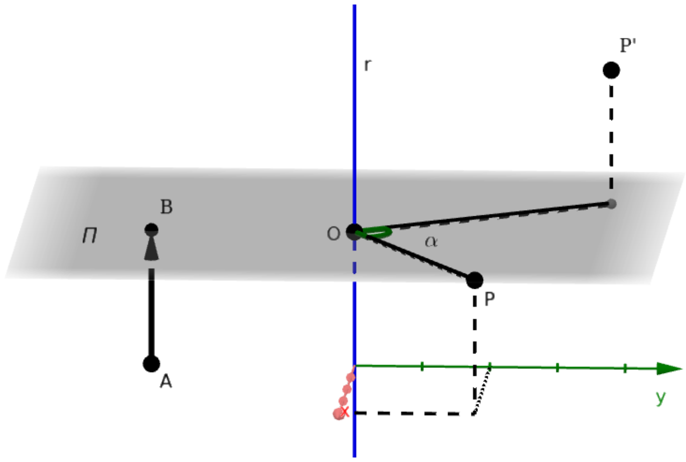
FONTE: Autoral

A isometria helicoidal é a composição de duas isometrias: uma rotação de ângulo α em torno da reta r com uma translação em relação ao vetor $\overrightarrow{AB}$, na qual o segmento AB é paralelo à reta r ou está contido nela.

A reflexão com deslizamento é a composição de duas isometrias: uma reflexão em torno de um plano $\Pi \subset E$ e uma translação em relação ao vetor $\overrightarrow{AB}$, na qual o segmento AB é paralelo ao plano Π ou está contido nele.

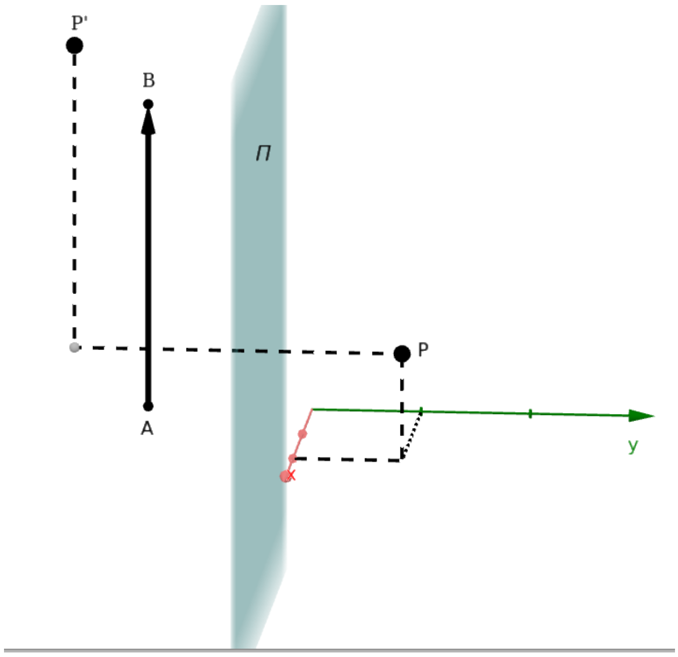
A rotação refletida é a composição de duas isometrias: uma reflexão em torno de

Figura 3.7: Isometria helicoidal



FONTE: Autoral

Figura 3.8: Reflexão com deslizamento

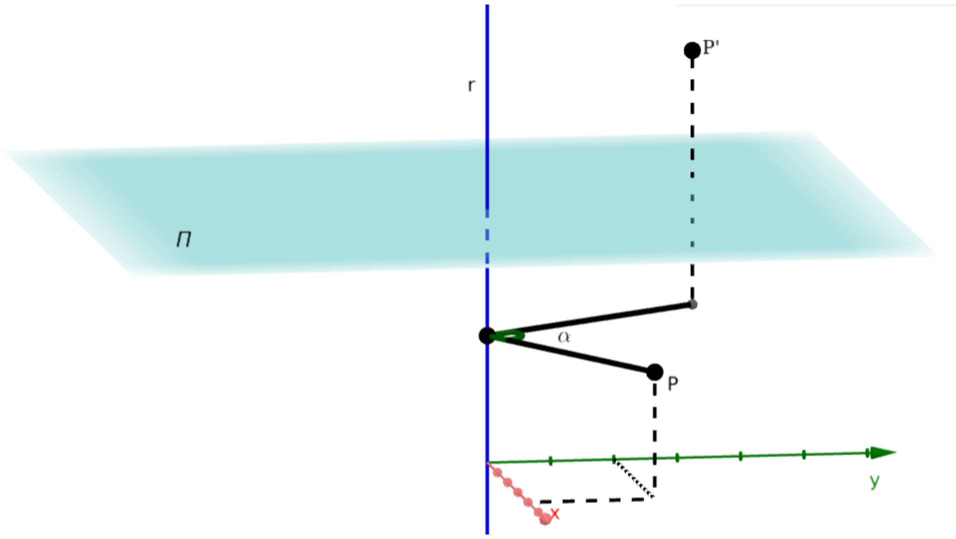


FONTE: Autoral

um plano $\Pi \subset E$ e uma rotação de ângulo α em torno da reta r perpendicular a Π. Quando $\alpha = 180°$, a rotação refletida coincide com a reflexão em relação ao ponto fixado $O \in E$, $\Pi \cap r = \{O\}$ conforme a figura 3.10.

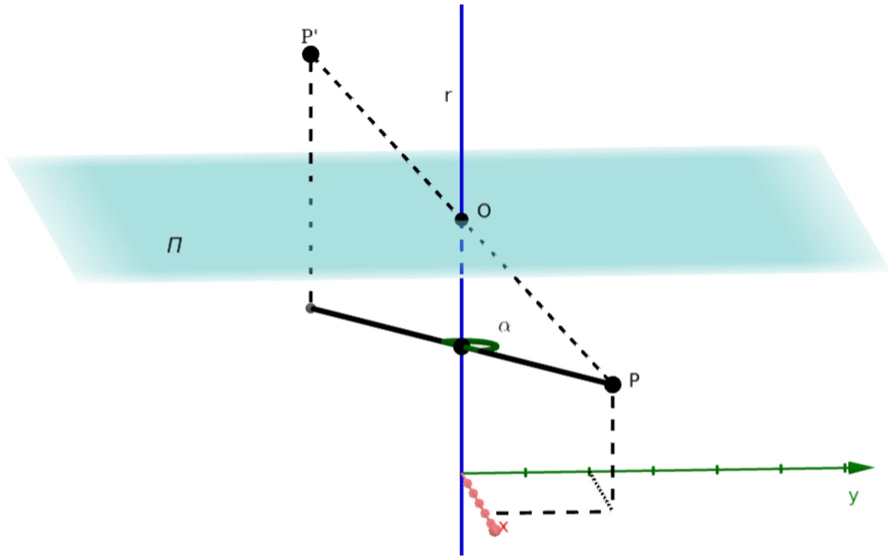
Na Geometria Analítica, estabelece-se um sistema de coordenadas para estudo das transformações. O sistema de eixos ortogonais, por exemplo, com a mesma origem O no espaço E, tais que dois quaisquer deles são perpendiculares. Essa escolha permite associar a cada ponto P do espaço E um terno ordenado de números reais (x, y, z), chamado de coordenadas de P, assim como (x', y', z') são as coordenadas de $P' = T(P)$ e $O(0, 0, 0)$.

Figura 3.9: Rotação refletida I



FONTE: Autoral

Figura 3.10: Rotação refletida II



FONTE: Autoral

Na reflexão em relação ao ponto O, sabe-se que O é o ponto médio do segmento PP', logo vale a equação 3.1.

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} = \frac{z+z'}{2} = 0 \Rightarrow x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z \tag{3.1}$$

Na reflexão em torno de um plano Π, sendo A o ponto médio do segmento PP' e $\overrightarrow{PP'}$ um vetor normal desse plano, obtém-se a equação 3.2.

$$\begin{cases} A\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right), A \in \Pi \\ \Pi : ax+by+cz=d \\ PP' \perp \Pi \\ \overrightarrow{PP'} = (x'-x, y'-y, z'-z) \end{cases} \tag{3.2}$$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano Π. Além disso, (a, b, c) também representa as coordenadas do vetor normal de Π, logo vale a equação 3.3.

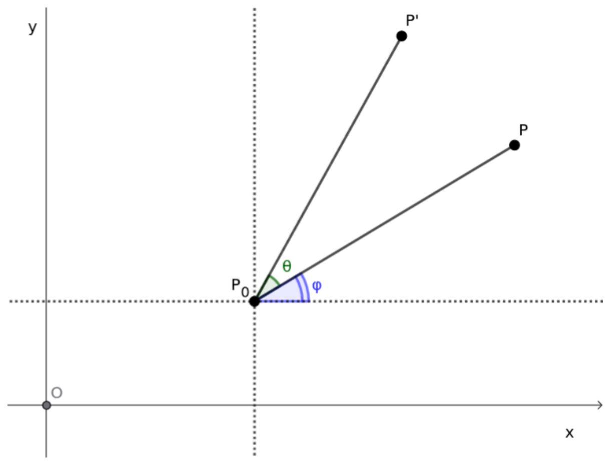
$$\begin{cases} a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') = 2d \\ \frac{x'-x}{a} = \frac{y'-y}{b} = \frac{z'-z}{c} \end{cases} \tag{3.3}$$

Desenvolvendo a equação 3.3, resolve-se um sistema em relação às incógnitas x', y' e z' conforme equação 3.4, fornecendo as equações de reflexão em torno do plano Π.

$$\begin{cases} ax' + by' + cz' = 2d - ax - by - cz \\ cx' - az' = cx - az \\ cy' - bz' = cy - bz \end{cases} \tag{3.4}$$

Para compreender as equações de rotação, propõe-se a rotação de ângulo θ do ponto P em torno de um ponto P_0 (transformação T no plano) conforme a figura 3.11.

Figura 3.11: Rotação de ângulo θ em torno de um ponto P_0



FONTE: Autoral

Se $P(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$ são pontos do plano, então $P' = T(P)$ tal que, por módulo de vetores no plano e razões trigonométricas no triângulo retângulo:

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + |\overrightarrow{P_0P}|cos(\theta+\varphi) \\ &= x_0 + |\overrightarrow{P_0P}|cos(\theta)cos(\varphi) - |\overrightarrow{P_0P}|sen(\theta)sen(\varphi) \\ &= x_0 + (x-x_0)cos(\theta) - (y-y_0)sen(\theta) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} y' &= y_0 + |\overrightarrow{P_0P}|sen(\theta+\varphi) \\ &= y_0 + |\overrightarrow{P_0P}|sen(\theta)cos(\varphi) + |\overrightarrow{P_0P}|sen(\varphi)cos(\theta) \\ &= y_0 + (x-x_0)sen(\theta) + (y-y_0)cos(\theta) \end{aligned} \tag{3.6}$$

As equações 3.5 e 3.6 também são válidas para a transformação no espaço euclidiano E. A rotação de ângulo θ em torno da reta r, e, por conveniência, coincidindo a reta r com um dos eixos (Oz), tem-se $z' = z$. Além disso, essa transformação, restrita ao plano Π, é a rotação de ângulo θ em torno do ponto de interseção desse plano com a reta r.

Na translação em relação ao vetor $\overrightarrow{AB}$ em E, considerando M como ponto médio do segmento AP' e também do segmento BP, então igualando as coordenadas do ponto M, chegam-se às equações de translação em que os números a, b e c representam as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ conforme a equação 3.7.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases} \tag{3.7}$$

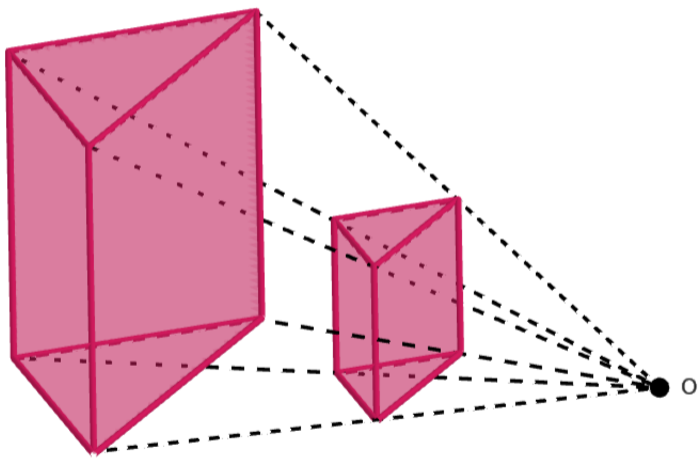
Define-se uma homotetia, com base em Carvalho (2005) e Lima (2002), representada na figura 3.12. Dado um ponto O do espaço (ou do plano Π), chamado de centro de homotetia, e um número real $k \neq 0$, chamado de razão de homotetia. A transformação homotética é uma função $T : E \to E$ (ou $T : \Pi \to \Pi$) que associa a cada ponto P do espaço (ou do plano Π) o ponto $P_1 = T(P)$ sobre a semirreta S_{OP} tal que $\overline{OP_1} = k\overline{OP}$.

Quando a razão de homotetia é igual a um $(k = 1)$, a homotetia reduz-se a transformação identidade, ou seja, $T(P) = P$ para todo P. Além disso, dados dois pontos P, Q no espaço (ou no plano), com $T(P) = P_1$ e $T(Q) = Q_1$. Se O, P e Q são distintos e colineares com P entre O e Q, então para $k > 1$, sem perda de generalidade, tem-se a relação indicada na equação 3.8.

$$\begin{aligned} d(P_1, Q_1) = \overline{P_1Q_1} &= \overline{OQ_1} - \overline{OP_1} \\ &= k\overline{OQ} - k\overline{OP} \\ &= k(\overline{OQ} - \overline{OP}) \\ &= k\overline{PQ} = k \cdot d(P, Q) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para O, P e Q pontos distintos e não colineares, os triângulos ΔOPQ e ΔOP_1Q_1 são semelhantes na razão $k > 1$ pelo caso Lado-Ângulo-Lado (LAL), logo $\dfrac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{PQ}} = k$.

Figura 3.12: Homotetia



FONTE: Autoral

Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto P e (x_1, y_1, z_1) as coordenadas do ponto P_1 no espaço, então as equações de homotetia são dadas pela equação 3.9.

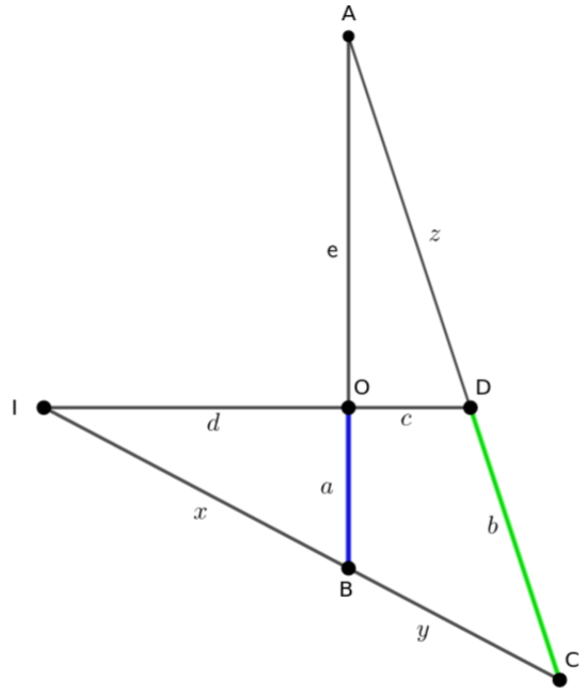
$$\begin{cases} x_1 = kx \\ y_1 = ky \\ z_1 = kz \end{cases} \tag{3.9}$$

3.2 TEOREMA DE MENELAUS APLICADO ÀS ILUSÕES

Na figura 3.13, a representação restrita de um plano horizontal que contém o ponto I de localização do observador, com base na descrição da Sala de Ames, possibilita o estabelecimento de um sistema de coordenadas retangulares, considerando o ponto O como origem.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ representa a parede aparente do fundo da sala, ou seja, com o efeito percebido pelo observador (faces ortogonais). A reta $\overleftrightarrow{AC}$ representa a parede real da sala de de Ames (fundo da sala). E as retas $\overleftrightarrow{ID}$ e $\overleftrightarrow{IC}$ representam linhas de visão do observador, com $\overleftrightarrow{ID}$ perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 3.13: Teorema de Menelaus



FONTE: Autoral

Esse esquema, portanto, possibilita relacionar as variáveis a e b que são medidas de segmentos correspondentes com base em mmaca ([s.d.]), Museu de *Matemàtiques* de *Catalunya* fundado em 2014. Além disso, B e C são pontos de localização de um mesmo objeto na parede aparente e na parede real, respectivamente.

Aplica-se o Teorema de Menelaus da Geometria euclidiana na situação proposta: no triângulo ΔABC, uma reta transversal corta as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos O, D e I, respectivamente. Então:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{e}{a} \cdot \frac{b}{z} \cdot \frac{x}{x+y} = 1 \tag{3.10}$$

Analogamente, dado o triângulo ΔIDC, uma reta transversal corta as retas $\overleftrightarrow{ID}$, $\overleftrightarrow{IC}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ nos pontos O, B e A, respectivamente. Então:

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BI}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = 1 \Leftrightarrow \quad \frac{d}{c} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{z+b} = 1 \tag{3.11}$$

Desenvolvendo as equações e substituindo a equação 3.11 na equação 3.10 (Apêndice C), obtêm-se:

$$b = \left(\frac{d+c}{ed-ac}\right) az, \quad z = \sqrt{c^2+e^2} \tag{3.12}$$

3.3 NOÇÕES DE GEOMETRIA PROJETIVA APLICADAS ÀS ILUSÕES

Realizam-se outras análises das ilusões por meio da Geometria Projetiva. Uma área da Geometria incentivada pela necessidade de representação do movimento pelos artistas, assim como pela ideia de simplificação do complexo mecanismo da visão e da projeção de um mundo tridimensional em uma superfície bidimensional.

A Sala de Ames, segundo Crannell (2021), é projetivamente equivalente a uma sala convencional, pois existe uma transformação ponto-ponto e reta-reta (colineação projetiva) que mapeia a Sala de Ames para uma sala convencional (paralelepípedo reto-retângulo), preservando as relações de incidência da Geometria Projetiva.

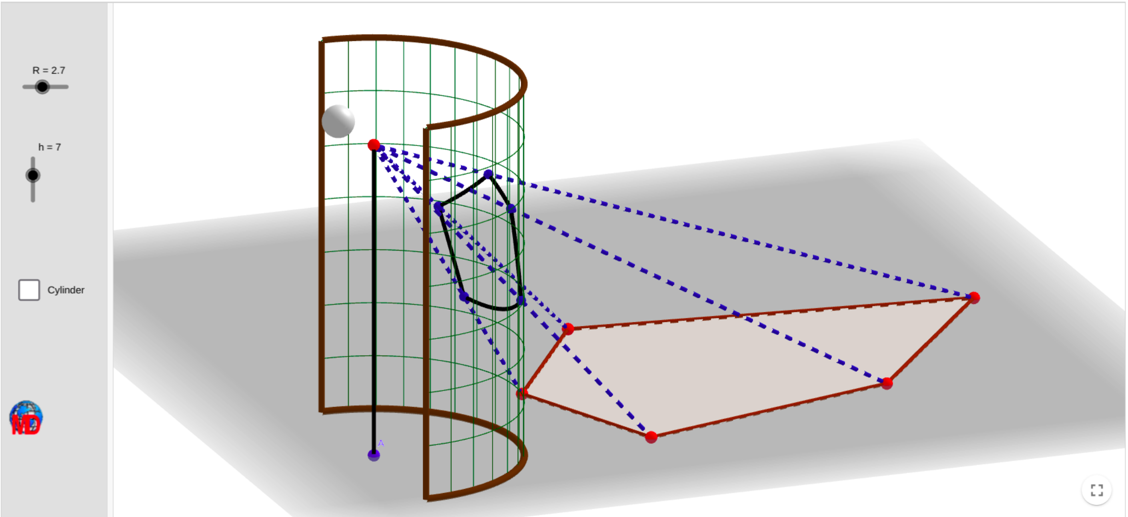
Os axiomas de incidência da Geometria Projetiva, conforme Hefez (1985), são: a) dois pontos distintos determinam uma e somente uma reta com a qual são incidentes; b) duas retas distintas determinam um e somente um ponto com o qual são incidentes. Por outro lado, na Geometria Euclidiana Plana, "*Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto*"(Barbosa, 2002, p.1).

Dessa forma, segundo Hefez (1985), duas retas paralelas no plano euclidiano correspondem a duas retas distintas que se encontram no infinito no plano projetivo real que, em síntese, dado um centro O, do ponto de vista projetivo, tornam-se equivalentes todos os pontos, distintos de O, que estão sobre um mesmo raio passante por O.

A anamorfose, segundo Araújo (2021), é uma consequência de um único axioma, o princípio da oclusão radial que gera efeitos visuais de profundidade, mesmo que a figura esteja na superfície bidimensional. Isso ocorre, pois os objetos mais próximos do centro de projeção/ponto de observação ocultam parcialmente os mais distantes ao longo do mesmo raio de visão. Segundo Araújo (2017, p. 103), o princípio da oclusão radial diz que "para um observador monocular num ponto O, dois pontos são opticamente equivalentes se estão sobre o mesmo raio com origem em O".

Ao aceitar como válido o princípio da oclusão radial, então os pontos de um objeto definem um cone de raios de centro O, cone visual. Dois objetos, portanto, que definem o mesmo cone de raios são anamorfos em relação à O. A interseção do cone visual de um objeto com uma superfície curva, um cilindro por exemplo, gera a anamorfose bidimensional em que a projeção de retas serão curvas no espaço, mas parecerão retas quando vistas de O. No caso da anamorfose cilíndrica, o centro O está localizado no eixo do cilindro reto, possibilitando a observação em todas as direções ao redor do eixo vertical.

Figura 3.14: Anamorfose cilíndrica



FONTE: Mentrard (2020)

4 METODOLOGIA

A pesquisa é qualitativa cuja etapa de aplicação foi realizada com um grupo de alunos da 1ª (Primeira) Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual, atuando como professor-pesquisador no seu espaço de docência. Essa escolha deve-se a possibilidade de aplicar a sequência didática e realizar os seus registros com mais disponibilidade, em virtude da superlotação das salas de aula, da ausência de apoio na logística para uso das tecnologias e a sobrecarga diária de horas/aulas embora em formação continuada. Oito estudantes participaram da aplicação da sequência didática, considerando a participação em pelo menos um encontro.

No primeiro momento, realizou-se uma revisão de literatura, contemplando alguns estudos teóricos e práticos sobre o uso de materiais concretos (instrumentos cujo funcionamento tem bases científicas); os aspectos importantes do ensino e aprendizagem de Geometria, o percurso histórico das ilusões e sua relevância educacional; a desconstrução das ilusões para compreendê-las; a interdisciplinaridade e as experimentações nas aulas de Matemática.

A próxima etapa metodológica refere-se à elaboração dos instrumentos: sequência didática, plano de aula (Apêndice A) e questionário (Apêndice B) para os estudantes após a realização das aulas. A terceira etapa refere-se à aplicação da sequência didática e do questionário. Em seguida, a análise das resoluções das tarefas propostas. Na etapa final, propôs-se a técnica denominada Análise de Conteúdo para análise das concepções oriundas do questionário.

A técnica Análise de Conteúdo consiste, segundo Laville e Dionne (1999, p. 214), em "um estudo minucioso de seu conteúdo, das palavras e frases que o compõem [neste caso, as respostas obtidas no questionário], procurar-lhes o sentido, captar-lhes as intenções [...] em torno das ideias principais". Para esse estudo, definem-se as categorias analíticas a partir do modelo fechado, ou seja, o pesquisador se limita às categorias definidas previamente para classificar os elementos do conteúdo (Laville; Dionne, 1999). Essa escolha centraliza o estudo conforme os objetivos da pesquisa.

As categorias analíticas definidas a priori aplicadas ao ensino de Matemática são:

a) Experimentações;

b) Uso de materiais concretos;

c) Interdisciplinaridade;

d) Uso de tecnologias digitais.

O Recurso Educacional (RE) elaborado nessa pesquisa, portanto, é uma sequência didática composta por três blocos de atividades com o tema Geometria e as ilusões com duas versões: as orientações ao professor, com comentários e sugestões da organização da aula e a folha do estudante com espaços para os registros escritos. Ambas com publicação no Portal eduCapes.

O Recurso Educacional possui alguns limites como a ordenação das atividades dentro de cada bloco e a impossibilidade de aplicação em estruturas escolares que não dispõem, minimamente, de tecnologias digitais e conectividade como ferramentas educacionais. No entanto, com as ideias propostas no RE, o professor poderá remixar o material e propor a construção dos modelos apenas com ferramentas de desenho, plano com o sistema de coordenadas impresso e materiais recicláveis.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Consideram-se, na pesquisa, os aspectos teóricos sobre sequência didática segundo Antoni Zabala (1998). Define-se uma sequência didática, com base nos seus elementos constituintes, como um "*conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos*" (Zabala, 1998, p. 20).

Zabala (1998) cita a atenção à diversidade dos alunos e outras dimensões ou variáveis para descrição de qualquer proposta metodológica, a saber: o papel dos professores e dos alunos, a organização social da aula, a utilização dos espaços e do tempo, a maneira de organizar os conteúdos, os materiais curriculares, o sentido e o papel da avaliação. Além disso, a tipologia dos conteúdos (conceituais, procedimentais e atitudinais) subsidia as diferentes posições sobre o papel que deve ter o ensino. Dessa maneira, "[...] num ensino que propõe a formação integral, a presença dos diferentes tipos de conteúdos estará equilibrada; por outro lado, um ensino que defende a função propedêutica universitária priorizará os conceituais" (Zabala, 1998, p. 35).

5.1 PLANEJAMENTO

Em síntese, a sequência didática proposta segue as seguintes etapas: 1. Apresentação por parte do professor, por meio de fotos, imagens, vídeos e animações, da situação problemática (diferenças de percepção da forma geométrica, dos padrões ou tamanho de objetos e/ou pessoas) com o tema ilusão; 2. Proposição de hipóteses pelos estudantes sobre a situação problemática (coletiva e individualmente); 3. Construção dos modelos de ilusão por meio de *softwares* de geometria dinâmica (GeoGebra) e criação de anamorfoses (*Anamorph Me!*), imagens impressas, cilindros reciclados e outros materiais; 4. Registro das observações com questões pré-definidas; 5. Elaboração das conclusões sobre a situação problemática e as transformações geométricas; 6. Generalização e síntese pelo professor com base na contribuição do grupo; 7. Exposição pelos estudantes e/ou gravação de vídeo para outros grupos; 8. Autoavaliação e avaliação da sequência didática; 9. Avaliação, pelo professor, da participação do grupo e das aprendizagens realizadas.

Essa sequência didática contempla os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais, portanto visa uma formação mais integral. O conjunto de atividades ordenadas possibilita a atuação constante dos estudantes, a formulação de hipóteses e o desenvolvimento de técnicas, assim como a organização em grupos e o trabalho colaborativo. Além disso, os processos avaliativos ratificam a abordagem dos três tipos de conteúdo.

Algumas perguntas são indicadas por Zabala (1998) para avaliar a necessidade de reforçar ou acrescentar outras atividades e validar a sequência didática. A existência de atividades:

> a) que nos permitam determinar os *conhecimentos prévios* que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
>
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam *significativos e funcionais* para os meninos e as meninas?
>
> c) que possamos inferir que são adequadas ao *nível de desenvolvimento* de cada aluno?
>
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que *permitam criar zonas de desenvolvimento proximal* e intervir?
>
> e) que provoquem um *conflito cognitivo* e promovam a *atividade* mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
>
> f) que promovam uma *atitude favorável*, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
>
> g) que estimulem a *autoestima* e o *autoconceito* em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
>
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o *aprender a aprender*, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens? (Zabala, 1998, p. 72-73)

A observação, a formulação de hipóteses e os registros são indícios dos conhecimentos prévios dos estudantes em relação aos novos conhecimentos. Os conteúdos são propostos de forma significativa e funcional, inseridos como um saber científico no contexto de popularização da Ciência. O diálogo entre o professor e os estudantes em grupos possibilita acessar a diversidade de ritmos e entendimentos, incluindo a mediação do professor nesse processo. Além disso, espera-se que o desafio seja alcançável ao propor várias etapas de observação e experimentação.

A divergência de percepção gera um conflito cognitivo e uma oportunidade para desenvolver novos conhecimentos. A autoavaliação trará os registros necessários para verificar se a sequência didática estimula a autoestima e o autoconceito dos estudantes.

A autonomia incentivada na proposta ratifica a importância do aprender a aprender, portanto, as sequências didáticas como essa não são inseridas como episódicas.

Antes de esmiuçar as atividades ordenadas, cabe recordar que o objetivo desse trabalho é apresentar uma sequência didática sobre as transformações geométricas por meio da experimentação e construção de modelos de ilusão com um grupo de alunos da 1ª (Primeira) Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual. No apêndice A, consta o instrumento Plano de aula com a indicação dos objetivos e dados da aula de forma resumida.

No primeiro momento, mostrar para os alunos a figura 2.2, nomeando a Sala de Ames sem descrevê-la e propor, individualmente, as seguintes questões: Nessas fotografias, quais são os efeitos observados? Você conhece a Sala de Ames? Descreva essa experiência.

Em seguida, apresentar a descrição da Sala de Ames conforme Quarto [...] (2012) apresentada na seção 2.1 e propor, individualmente, a seguinte atividade: Desenhar, com ferramentas como régua e esquadro, uma representação que justifique os efeitos observados na sala, considerando a visualização a partir de um orifício limitado a um único olho. Após os registros, apresentar brevemente a interface do GeoGebra e os comandos/ferramentas que serão utilizados.

Para construção, em grupo, do modelo da Sala de Ames no GeoGebra, indicam-se os seguintes passos:

- Na interface do GeoGebra, na aba **Exibir** selecionar a **Janela de Visualização 3D**. Na aba **Configurações**, selecionar **Idioma: Portuguese/ Português (Brasil)** e **Rotular: Apenas para os Pontos Novos**;

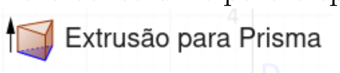
- Inserir, na Janela de Álgebra, os pontos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 3)$ e $D = (0, 3)$;

- Para construir o quadrilátero ABCD, selecionar a ferramenta 

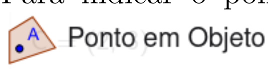
e, em seguida, selecionar, nessa ordem, os pontos A, B, C, D, A;

- Com a ferramenta 

, acionar a Janela de Visualização 3D para a mudança das ferramentas;

- Para construir o paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH, selecionar a ferramenta 

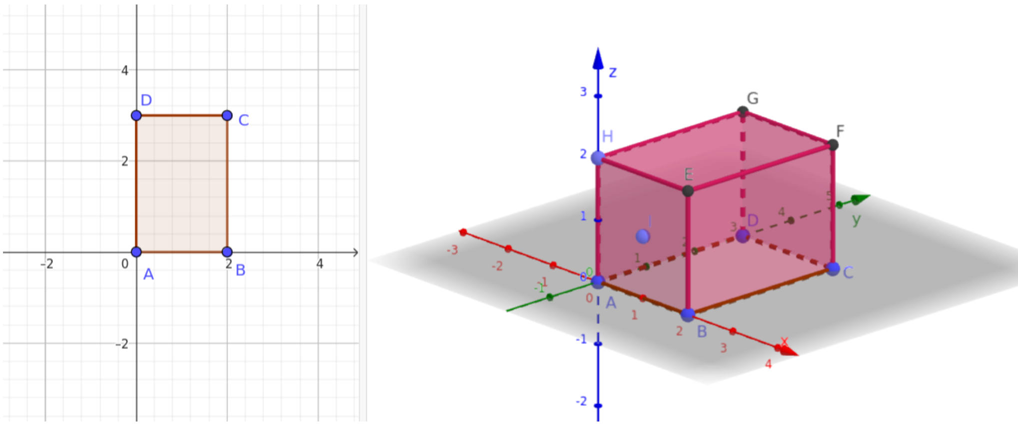
e, em seguida, selecionar o quadrilátero ABCD e marcar a altura do paralelepípedo reto-retângulo para 2 unidades de comprimento;

- Para indicar o ponto de observação da Sala de Ames, selecionar a ferramenta 

e, em seguida, marcar o ponto I no centro do quadrilátero

ABEH;

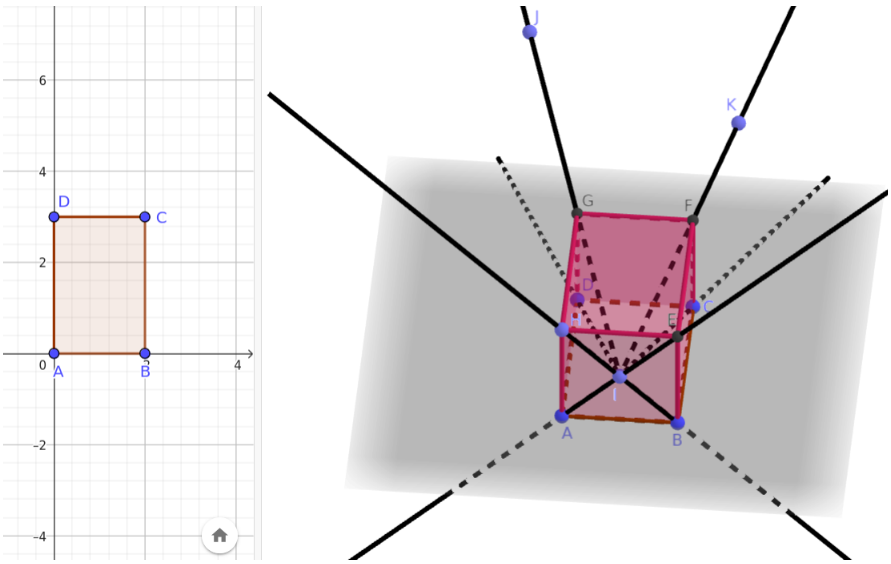
Figura 5.1: Construção no GeoGebra (Sala de Ames) I



FONTE: Autoral

- Selecionar a ferramenta Semirreta e, em seguida, construir oito semirretas com origem no ponto I ligando aos vértices do paralelepípedo;

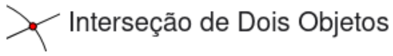
Figura 5.2: Construção no GeoGebra (Sala de Ames) II



FONTE: Autoral

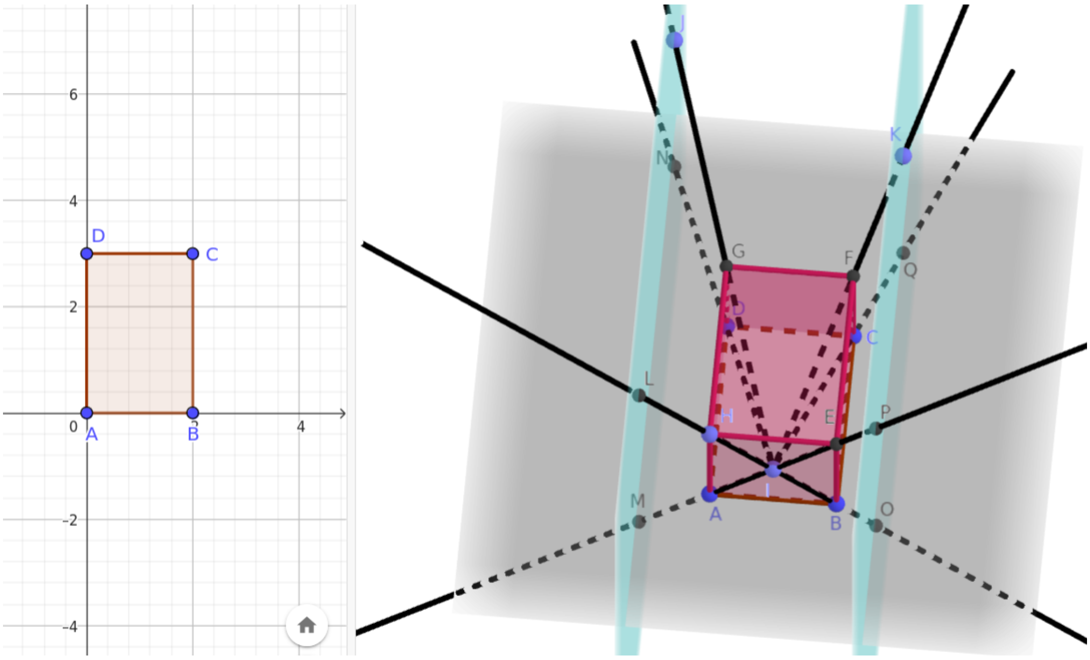
- Selecionar a ferramenta Ponto em Objeto, marcando os pontos J e K, dois pontos aleatórios contidos, respectivamente, nas semirretas S_{IG} e S_{IF}. O segmento $\overline{JK}$ não é paralelo a aresta $\overline{GF}$ do paralelepípedo;

- Selecionar a ferramenta Plano Paralelo e, em seguida, selecionar o ponto J e o quadrilátero ADGH. Analogamente, selecionar o ponto K e o quadrilátero BCFE;

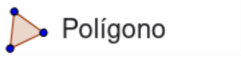
- Selecionar a ferramenta 

e, em seguida, selecionar os pontos de interseção dos planos com as semirretas para marcar os vértices da Sala de Ames. Realizar esse processo seis vezes;

Figura 5.3: Construção no GeoGebra (Sala de Ames) III



FONTE: Autoral

- Desativar os planos construídos na Janela de Álgebra, selecionar a ferramenta 

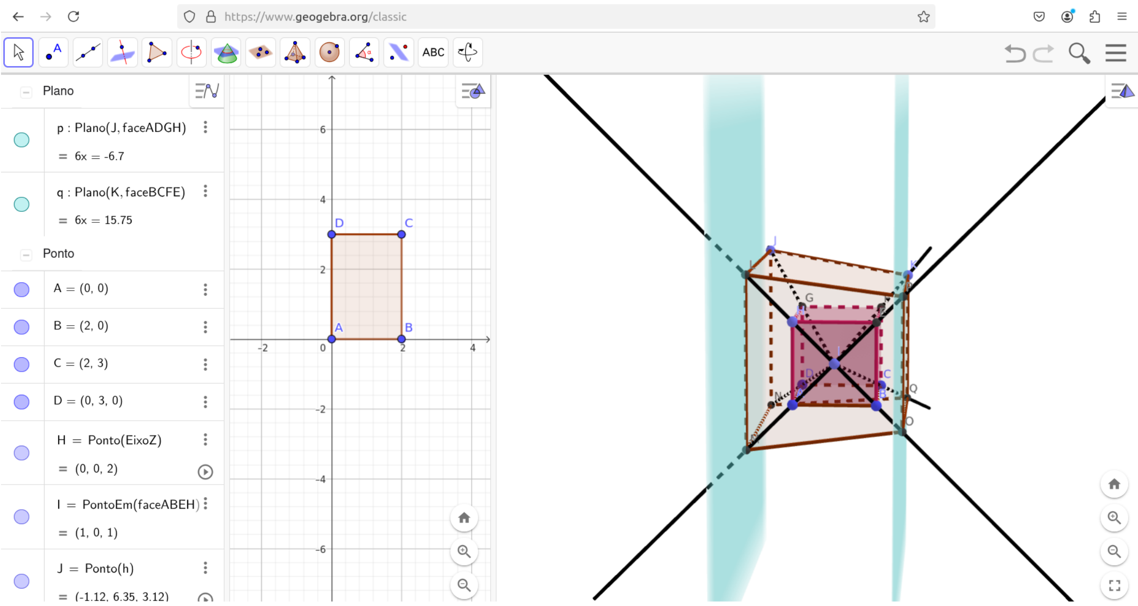
e construir os quadriláteros que formam as faces da Sala de Ames.

Muitas representações dos entes matemáticos são realizadas nos passos de construção da Sala de Ames, possibilitando a abstração dos mesmos. Representações de pontos, semirretas, segmentos de reta, planos, planos paralelos, pontos pertencentes ao plano, interseção de semirretas e planos, polígonos, paralelepípedo reto-retângulo e poliedros. A abordagem desses objetos de conhecimento, portanto, relaciona-se com os objetivos específicos da pesquisa, identificando, além das transformações geométricas, outros conceitos relacionados à Geometria Plana e Espacial.

A figura 5.4 ilustra todos os objetos para construção da Sala de Ames no GeoGebra. Na figura 5.5, ocultam-se alguns objetos matemáticos para melhor visualização da Sala de Ames. Cabe salientar que o ponto I representa a posição do observador.

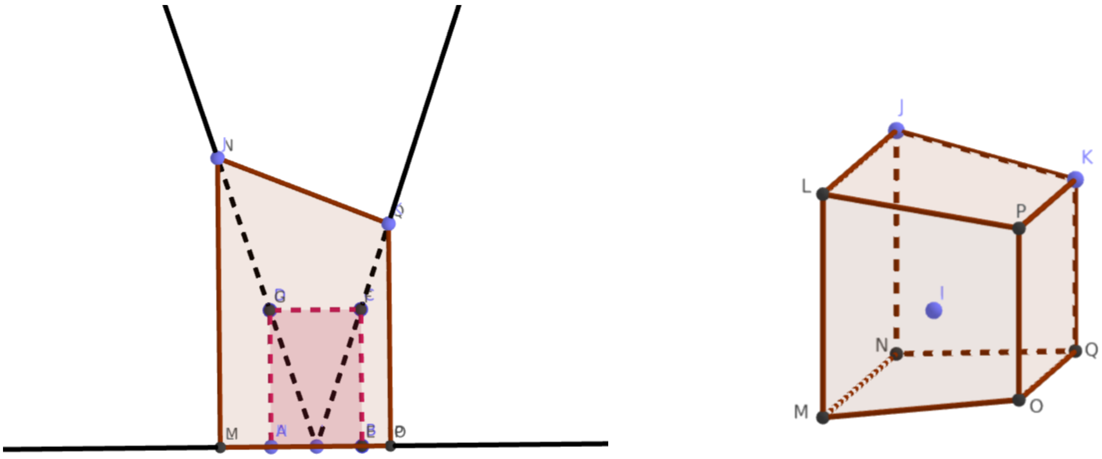
Posterior a etapa de construção, apresenta-se a figura 2.1, representação da Sala de Ames, e propõem-se as seguintes questões: Modificando a construção para que o segmento $\overline{JK}$ seja paralelo a aresta $\overline{GF}$ do paralelepípedo, o que é possível observar sobre o quadrilátero NQKJ em relação ao quadrilátero DCFG conforme a figura 5.6?

Figura 5.4: Construção no GeoGebra (Sala de Ames) IV



FONTE: Autoral

Figura 5.5: Representações da Sala de Ames no GeoGebra I

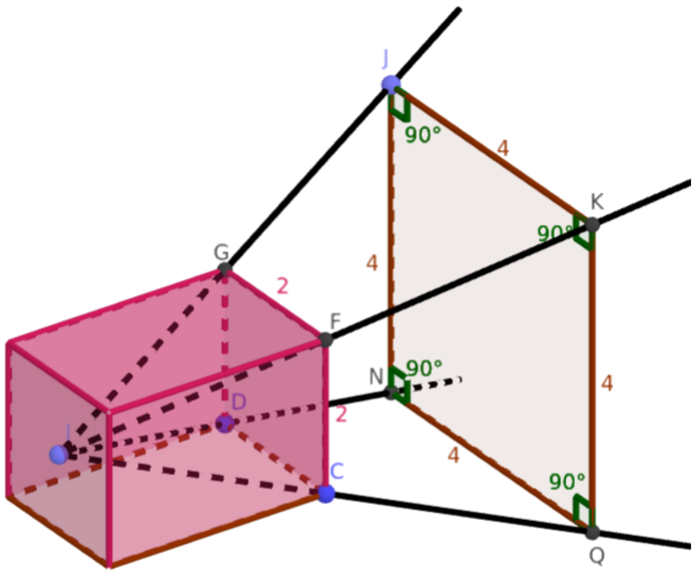


FONTE: Autoral

Nesse momento, espera-se que os estudantes analisem que ambos os quadriláteros são quadrados e que a medida do segmento $\overline{JK}$ é o dobro da medida do segmento $\overline{GF}$. Analogamente para os outros lados correspondentes dos quadriláteros. Continuam-se as questões: Com base na figura 5.7 e nos dados apresentados, qual é a relação entre as medidas dos segmentos correspondentes dos quadriláteros e as distâncias entre os pontos I e G e também entre os pontos I e J?

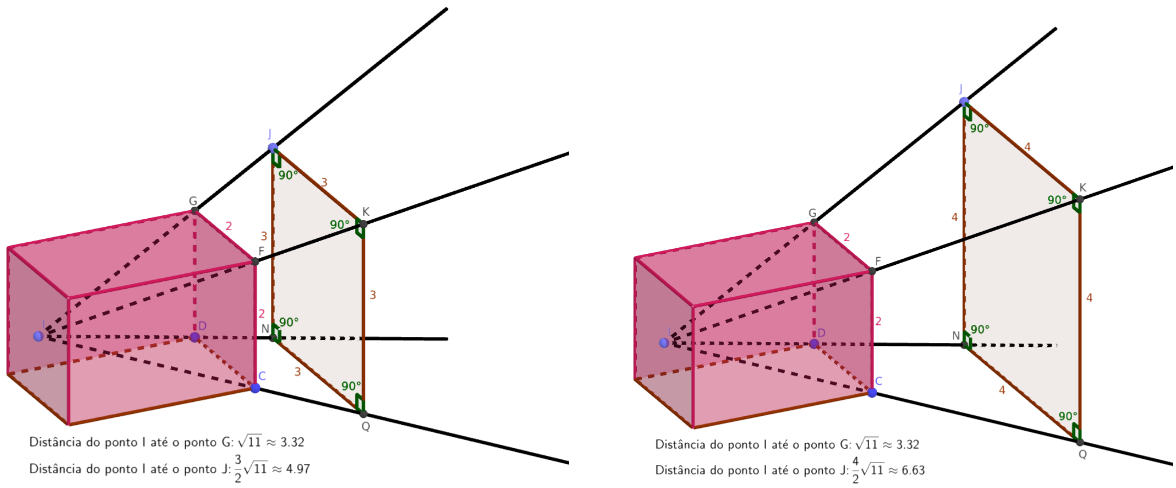
Espera-se que os estudantes identifiquem o ponto fixo I (centro de homotetia), a

Figura 5.6: Homotetia no Espaço Tridimensional I



FONTE: Autoral

Figura 5.7: Homotetia no Espaço Tridimensional II

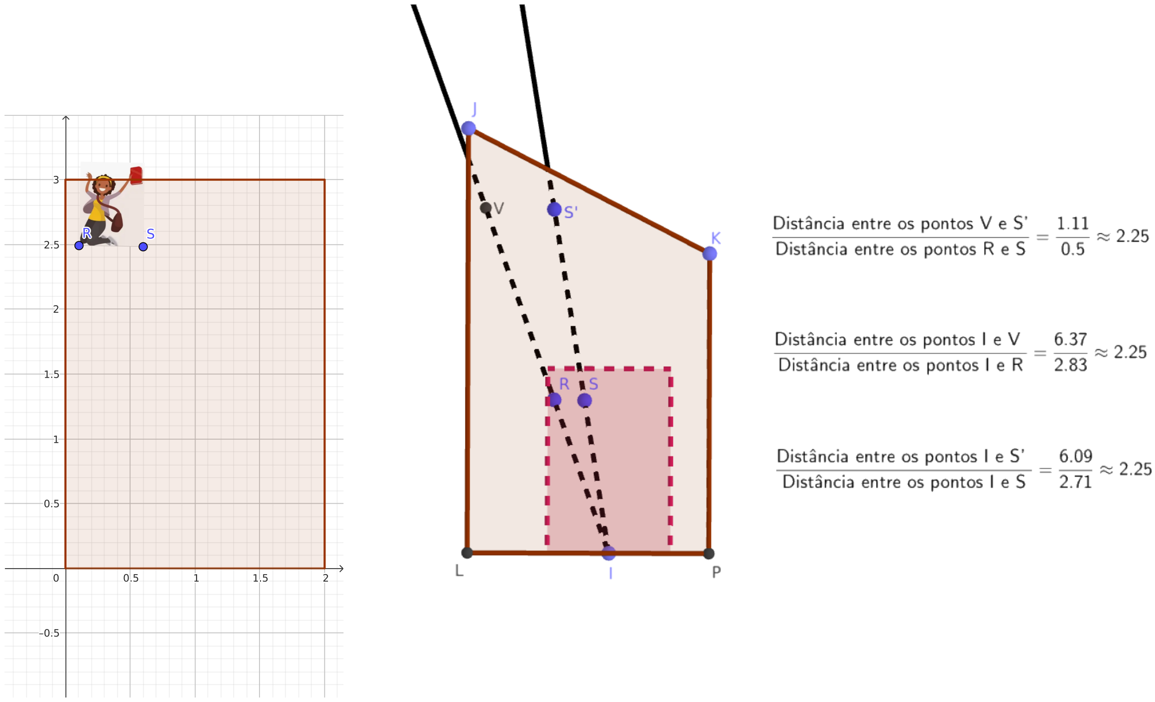


FONTE: Autoral

proporcionalidade entre os segmentos correspondentes e o fator de ampliação em cada caso, mesmo que eles não utilizem termos matemáticos adequados. Após os registros, apresenta-se a definição de homotetia, utilizando o arquivo do GeoGebra gerador dessas figuras.

Continuam-se as questões: Com base na figura 5.8 e nos dados apresentados, qual é a relação entre a homotetia e os efeitos observados na Sala de Ames, considerando a visualização a partir de um orifício limitado a um único olho?

Figura 5.8: Representações da Sala de Ames no GeoGebra II



FONTE: Autoral

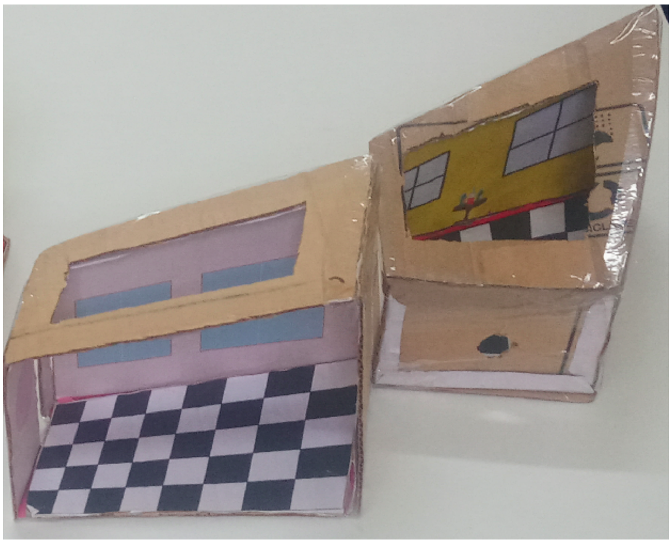
Nessa etapa, há a elaboração das conclusões sobre a situação problemática e as transformações geométricas, em particular, a homotetia e também um momento de generalização e síntese pelo professor com base na contribuição dos grupos.

Para finalizar esse primeiro conjunto de atividades, apresentam-se os modelos da Sala de Ames, conforme a figura 5.9, confeccionados por outro grupo de alunos com base na sequência didática elaborada pela autora desse trabalho e disponível em Rocha e Gouveia Júnior (2024). Essa etapa pode ser excluída da sequência caso não haja disponibilidade ou interesse por parte do professor mediador. Cabe salientar, no entanto, que pode ser um momento com outras formas de experimentação, a saber, com material didático concreto, incluindo papelão e materiais impressos.

O segundo conjunto de atividades refere-se aos Padrões *moiré*. Inicia-se com a apresentação, em grupo, da animação conforme figura 5.10 e propõe-se a interação dos alunos com a animação por meio dos controles deslizantes. Nomeia-se como padrões *moiré* sem descrevê-los e, individualmente, indicam-se as seguintes questões: Quais são os efeitos observados nessa animação? Você conhece os padrões *moiré*? Descreva essa experiência.

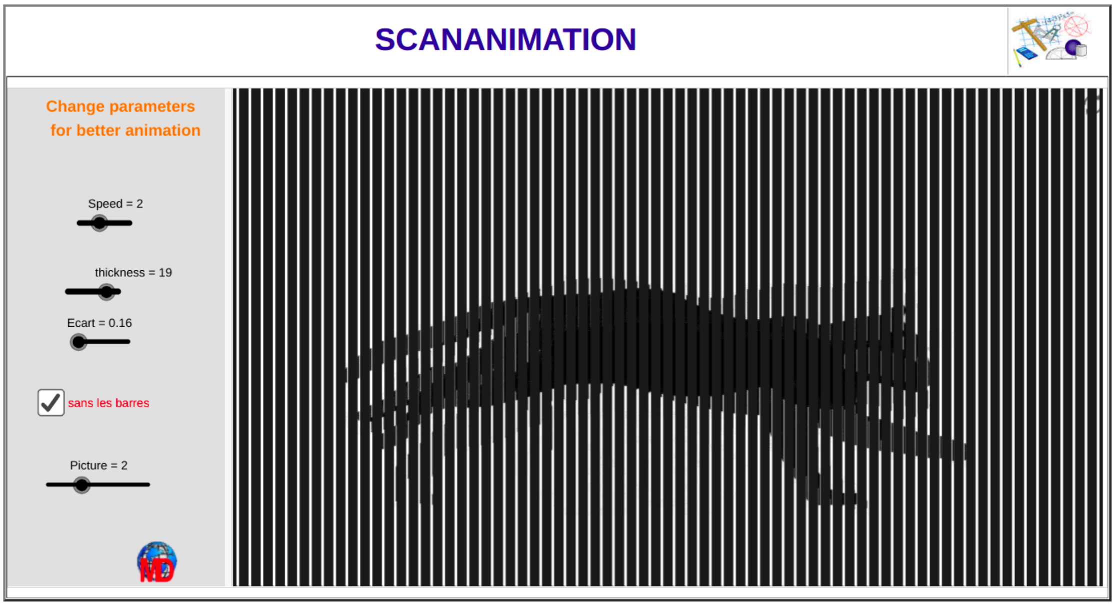
Novamente buscando os conhecimentos prévios dos estudantes. Após os registros, apresenta-se a definição do efeito *moiré* conforme Amidror (2009) indicada na seção 2.2. Em seguida, em grupo, questiona-se: Como construir, no GeoGebra, o padrão *moiré* apresentado na animação? Quais os objetos/elementos serão necessários?

Figura 5.9: Modelos da Sala de Ames com Materiais Recicláveis



FONTE: Autoral

Figura 5.10: Animação Padrões *moiré*



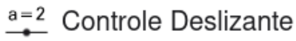
FONTE: Mentrard (2024)

Na descrição, prevê-se a construção de grades em formato de retângulos, um conjunto de imagens em grade de um animal, objeto ou pessoas em sequência, formando vários frames cuja combinação gera o movimento, assim como a existência de um modulador da velocidade.

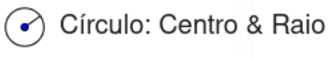
Para construção[1], em grupo, do modelo Padrões *moiré* no GeoGebra, indicam-se

[1]Registra-se, nessa etapa, as contribuições do Prof. Vinicius Mello para otimização da construção no GeoGebra referente à grade do padrão *moiré*.

os seguintes passos:

- Na interface do GeoGebra, inserir, na Janela de Álgebra, os pontos $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$;
- Na aba **Configurações**, selecionar **Idioma: Portuguese/ Português (Brasil)** e **Rotular: Menos para os Objetos Novos**;
- Selecionar a ferramenta 

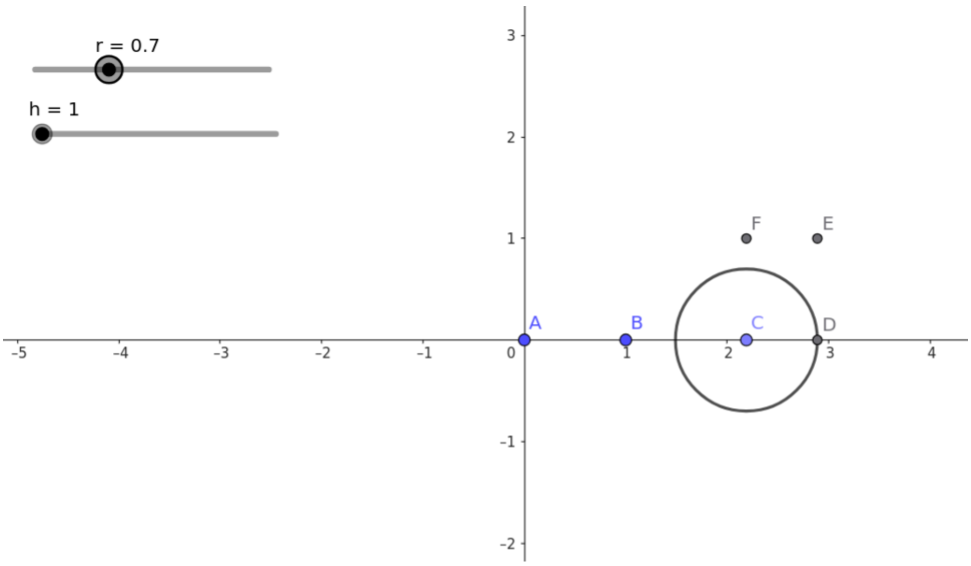
e com um clique na **Janela de Visualização**, alterar as configurações. **Nome: r; min: 0.1; max: 1, incremento: 0.1** e confirmar. Repetir esse procedimento para novo controle deslizante, porém alterar as configurações. **Nome: h; min: 1; max: 30, incremento: 1** e confirmar;
- Selecionar a ferramenta 

, marcando o ponto C sobre o EixoX (reta horizontal) para abscissa maior que 2;
- Selecionar a ferramenta 

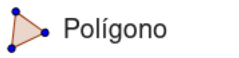
, acionar o ponto C e digitar o raio **r**;
- Selecionar a ferramenta 

e, em seguida, selecionar um dos pontos de interseção da circunferência com o EixoX;
- Inserir, na Janela de Álgebra, os pontos $E = (x(D), h)$ e $F = (x(C), h)$

Figura 5.11: Construção no GeoGebra (Padrões *moiré*) I



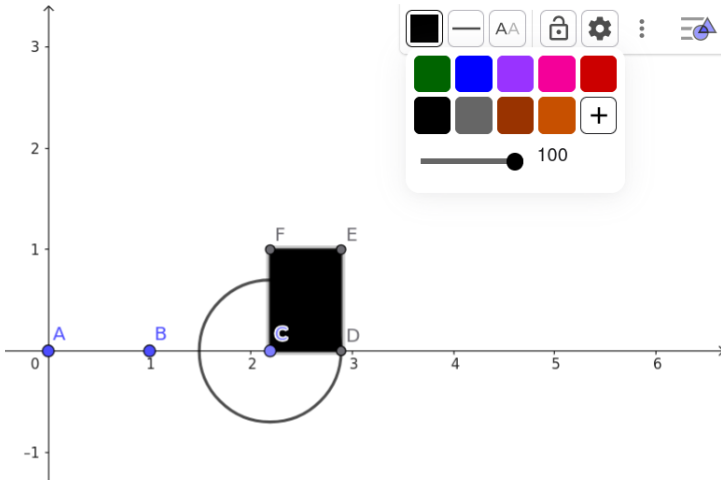
FONTE: Autoral

- Para construir o quadrilátero CDEF, selecionar a ferramenta 

e, em seguida, selecionar, nessa ordem, os pontos C, D, E, F, C;

- Selecionar o quadrilátero CDEF e mudar a sua cor para preta e opaca.

Figura 5.12: Construção no GeoGebra (Padrões *moiré*) II



FONTE: Autoral

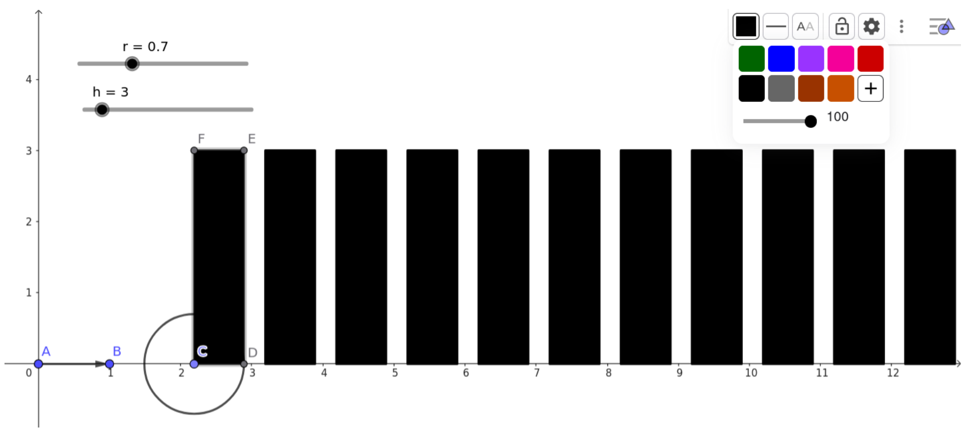
- Selecionar a ferramenta 

e, em seguida, acionar, nessa ordem os pontos A e B;

- Inserir na **Entrada** o comando: Sequência(Transladar(q1, k*u),k,1,60,1);

- Selecionar a sequência **l1** e mudar a sua cor para preta e opaca;

Figura 5.13: Construção no GeoGebra (Padrões *moiré*) III



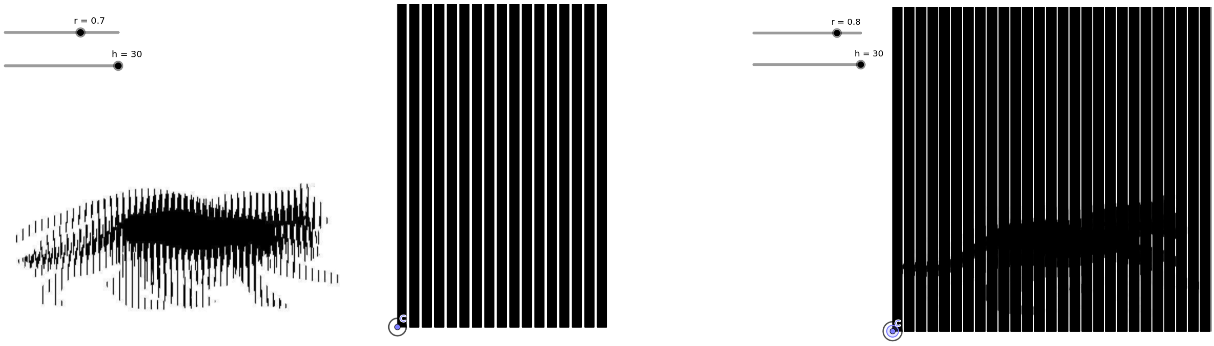
FONTE: Autoral

- Selecionar a ferramenta Inserir Imagem e carregar a imagem obtida em Mentrard (2024) sem as grades;

- Com a ferramenta Mover, ampliar ou reduzir a figura por meio dos pontos G e H;

- Mover o ponto C para gerar o efeito *moiré*.

Figura 5.14: Construção no GeoGebra (Padrões *moiré*) IV



FONTE: Autoral

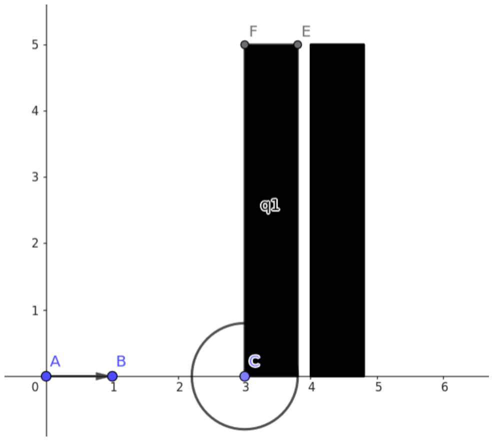
Cabe informar que há perdas de nitidez do efeito *moiré* ao realizar as tentativas de ajuste da imagem sem determinação das medidas exatas ou aproximadas, considerando essas etapas de construção do modelo. A elaboração da imagem é uma possibilidade, porém dispensada nessa sequência em virtude do aumento de passos, comandos e o uso de outras tecnologias digitais.

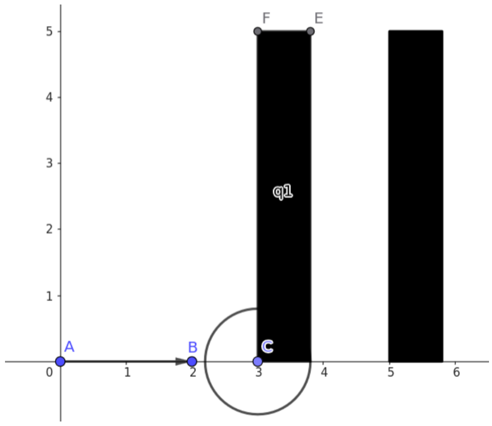
As representações de pontos, polígonos, circunferência dado o centro e a medida do raio, interseção de entes geométricos, vetor, sequência e translação são contempladas nessa construção do modelo Padrões *moiré* no GeoGebra. Posteriormente, apresenta-se a figura 5.15, propondo as seguintes questões: O que significa transladar o polígono **q1** que aparece nos passos de construção do modelo? Além do polígono, qual outro objeto matemático é importante na realização da translação de figuras geométricas?

O terceiro conjunto de atividades refere-se à anamorfose cilíndrica. Inicia-se com a apresentação da figura 5.16 e, individualmente, indicam-se as seguintes questões: Quais são os efeitos observados nessa imagem? Você conhece a técnica anamorfose? Descreva essa experiência. Como restituir a imagem original da Monalisa?

Nesse momento, espera-se o relato de vivências em Museus, espaços físicos ou digitais de publicização e incentivo da Ciência. Além disso, perceber a compreensão dos estudantes sobre as superfícies especulares, suas formas e características.

Figura 5.15: Construção no GeoGebra (Padrões *moiré*) V





FONTE: Autoral

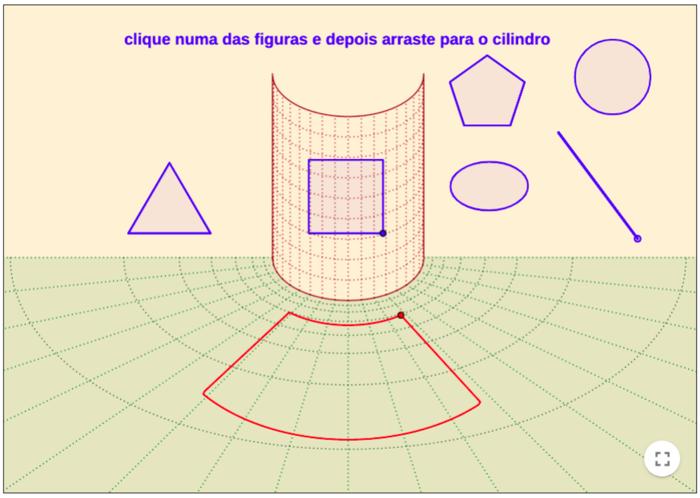
Figura 5.16: Anamorfose Monalisa

FONTE: Kent (2020)

Após o registro e a socialização para o grupo, apresenta-se a animação ilustrada na figura 5.17 para experimentação pelos estudantes, indicando a necessidade de uma superfície especular cilíndrica. Apresenta-se o *software Anamorph Me!* cuja interface está representada na figura 5.18, especificamente para construção de anamorfose cilíndrica. As duas entradas de dados para essa função são o raio do círculo que forma a base do espelho cilíndrico e o ângulo da imagem resultante da anamorfose.

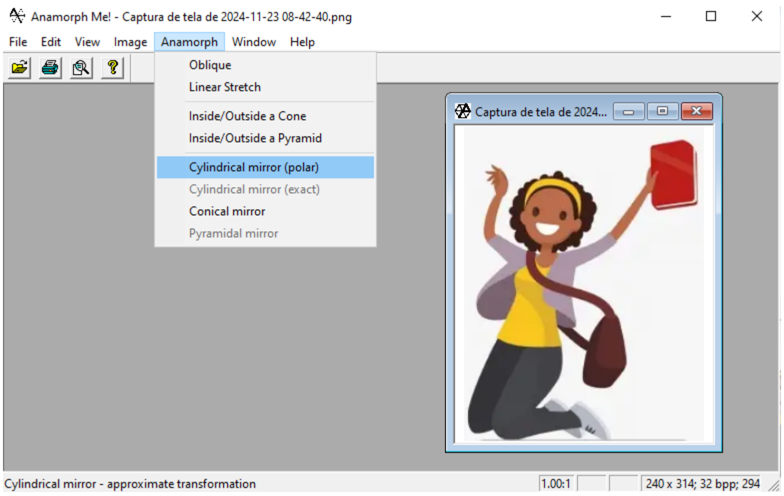
Em virtude da falta de equipamentos compatíveis com o *software*, propõe-se a exposição dessa ferramenta e o acesso às anamorfoses resultantes por meio das impressões. Em seguida, levantam-se os seguintes questionamentos a partir da figura 5.19: Antes da anamorfose cilíndrica, qual modificação foi realizada na imagem original para resultar na segunda anamorfose? Antes da anamorfose cilíndrica, foi realizada uma transformação geométrica que preserva a forma e o tamanho da figura?

Figura 5.17: Animação Anamorfose



FONTE: Manetta (2017)

Figura 5.18: Anamorph Me! I

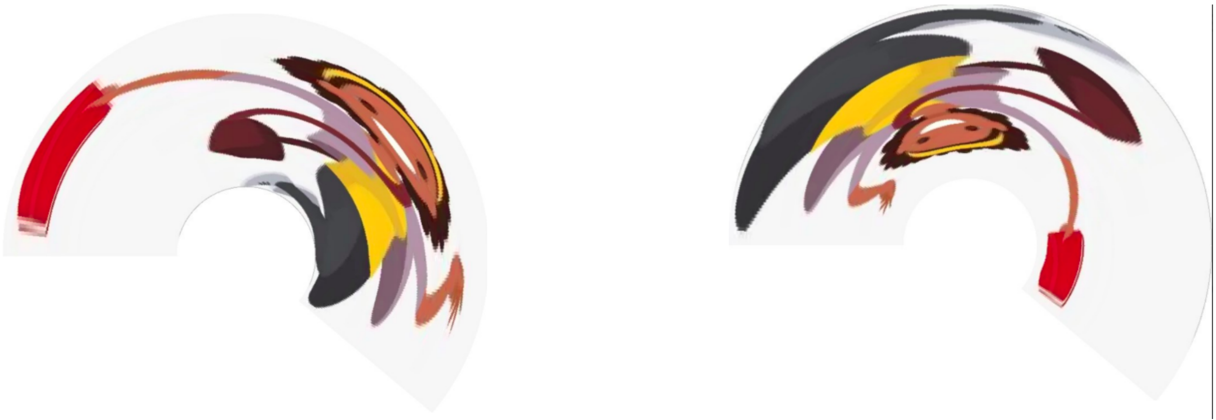


FONTE: Autoral

Nessa etapa, os estudantes podem trazer o conceito da rotação de figuras no plano, indicando as características e os elementos relacionados como ângulo e centro de rotação. Eles também podem usar termos mais simples como "girar de cabeça para baixo"a imagem original. Cabe salientar para os alunos que a primeira imagem da figura 5.19 representa, em tamanho reduzido, a anamorfose resultante quando se insere, no *software*, os seguintes dados na entrada: 125 pixels, a medida do raio do círculo que forma a base do espelho cilíndrico e 220°, o ângulo da imagem.

O próximo passo refere-se a construção das superfícies especulares cilíndricas com o uso de recipientes de alimentos (batata chips), copos e garrafas de acrílico rachadas, *insulfilm* espelhado e tesoura. Depois de confeccionadas pelos estudantes, testá-las com

Figura 5.19: Anamorph Me! II



FONTE: Autoral

as anamorfoses, identificando as correspondentes. Dessa maneira, as imagens geradoras são restituídas.

Os objetos matemáticos contemplados nesse bloco de atividades são as figuras geométricas, projeção, rotação, ângulo, círculo e cilindro. Existem outras possibilidades de abordagem como o sistema de coordenadas retangulares e polares como nas sequências didáticas de Iavorski (2014). Finaliza-se o terceiro conjunto de atividades com as imagens sobre as aplicações das anamorfoses nas sinalizações de trânsito, nos estádios de futebol e nas representações dos mapas.

Sugerem-se a generalização e síntese pelo professor com base na contribuição do grupo nas atividades realizadas e sobre o tópico transformações geométricas. Além disso, dispor de um momento de exposição pelos estudantes e/ou gravação de vídeo para outros grupos com a utilização da aba Protocolo de Construção no caso das experimentações no GeoGebra e/ou apresentação dos materiais concretos.

5.2 APLICAÇÃO

A aplicação da sequência didática ocorreu em seis encontros de 1 hora-aula cada, em virtude da programação da professora-pesquisadora no ano vigente. Outros formatos, no entanto, seriam mais produtivos e com menor fragmentação da sequência didática. Isso mostra que o professor é desafiado, com frequência, a realizar adaptações do seu planejamento em decorrência da dinâmica escolar.

No primeiro bloco de atividades (Sala de Ames) realizado em 3 horas-aulas, apenas dois estudantes completaram as atividades, incluindo a experimentação dos modelos com materiais recicláveis. As atividades estão subdivididas no recurso educacional (folha do estudante) em: apresentação da situação problemática (registro individual); construção do modelo da Sala de Ames por meio do *software* de geometria dinâmica; registro das observações e conclusões (em grupo). Outros quatro estudantes também participaram desse primeiro bloco de atividades, dois deles até a etapa de construção no GeoGebra e os outros dois na etapa inicial de apresentação da situação.

Cabe salientar que a apresentação da sequência didática desse bloco de atividades foi realizada de maneira ordenada mesmo para os estudantes que não frequentaram o primeiro encontro. Dessa maneira, foi necessário realizar orientações distintas nos grupos, respeitando os ritmos e os níveis de autonomia dos estudantes.

No segundo bloco de atividades (Padrões *moiré*) realizado em dois encontros, apenas dois estudantes participaram e completaram as atividades. Um desses estudantes teve contato com a pesquisa pela primeira vez nessa etapa. As atividades estão subdivididas no recurso educacional (folha do estudante) em: apresentação da situação problemática (registro individual); construção do modelo Padrão *moiré* por meio do *software* de geometria dinâmica; registro das observações e conclusões (em grupo).

A aplicação desse bloco ocorreu em período de avaliação final da unidade, por esse motivo houve uma redução da participação dos estudantes. Além disso, como os estudantes estavam em momentos distintos da sequência, todas as etapas foram individuais. Durante essa aplicação, surgiram também dificuldades de conexão à internet, necessária para o acesso ao *software* de Geometria Dinâmica e às animações.

No terceiro bloco de atividades (Anamorfose cilíndrica) realizado em um único encontro com duração maior da aula, três estudantes participaram e completaram as atividades, um deles teve contato com a pesquisa apenas nessa etapa. Além disso, outro estudante participou individualmente, no encontro anterior, até a etapa de experimentação com a animação (figura 5.17). As atividades estão subdivididas no recurso educacional (folha do estudante) em: apresentação da situação problemática (registro individual) e registro das observações e conclusões (em grupo).

O uso do *software Anamorph Me!* foi apenas ilustrativo com gravação de tela executando as anamorfoses propostas na atividade (figura 5.19), pois não havia nenhum computador para uso dos professores com o sistema operacional compatível. Esse aspecto já constava no planejamento.

5.3 AVALIAÇÃO

No primeiro bloco de atividades (Sala de Ames), os estudantes observaram[2] os seguintes efeitos nas fotografias (figura 2.2):

[2]Na transcrição dos registros, incluíram-se a pontuação, as preposições e as correções ortográficas/concordâncias para evitar perdas no entendimento das ideias e garantir a fluidez na leitura.

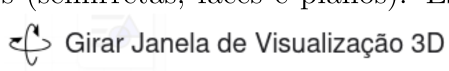
a) *Os efeitos observados nas imagens são os efeitos de profundidade, largura e comprimento nas pessoas*;
b) *Que em uma imagem a pessoa à esquerda aparenta ser maior e, na segunda imagem, a pessoa que estava à direita foi para esquerda e aparenta ser maior*;
c) *Os efeitos observados são que parece uma passagem em outra sala, mas só que é um papel de parede. Os efeitos que eu observei foram que as pessoas estão maiores e o outro não;*
d) *Um lugar é maior que o outro;*
e) *Duas pessoas parecem ter o mesmo tamanho e diferente, mesmo estando no mesmo lugar*;
f) *Uma ilusão de ótica causada por distorção da sala.*

Os estudantes, embora com dificuldade em realizar o registro do que foi percebido ou com equívoco de orientação de direita e esquerda, identificaram a diferença de tamanho das pessoas a depender da posição das mesmas na Sala de Ames. Alguns deles já elaborando hipóteses, indiretamente, sobre o formato da sala, especificando a ilusão de ótica ou o papel de parede como geradores dos efeitos.

Os seis estudantes que participaram dessa etapa afirmaram não conhecer a sala de Ames. Além disso, os desenhos ampliam as hipóteses elaboradas, tais como a distância das pessoas em relação à posição do observador, as ondulações das paredes, uma sala convencional (cubo), uma sala com a face do piso triangular e noções de retas que se encontram no infinito (geometria projetiva) ao representar o papel de parede.

Em relação à construção do modelo no GeoGebra ilustrada na figura 5.20, formou-se um trio para experimentação e, em outro encontro, um estudante também concluiu essa etapa. O trio precisou de mais orientação na execução dos passos propostos e na compreensão das ferramentas do GeoGebra do que o outro estudante. No ano letivo, o contato que eles tiveram com esse *software* até esse momento de experimentação foi de maneira expositiva.

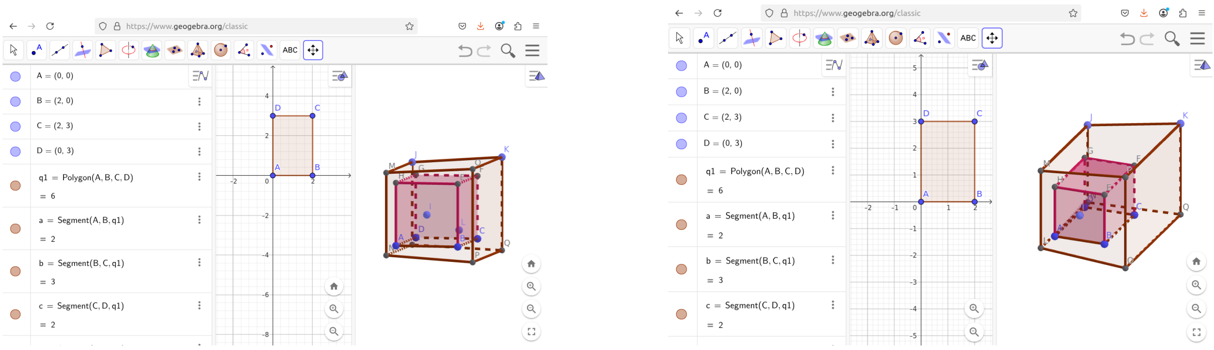
Um obstáculo encontrado nessa etapa foi ao usar a ferramenta *Extrusão para Prisma*, pois os novos pontos gerados foram nomeados de forma diferente do que indicava a sequência, conforme a figura 5.21. Nesse momento, os ajustes foram realizados com intermédio do professor, renomeando os pontos na interface do GeoGebra.

Ao selecionar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, também surgiram alguns erros devido à sobreposição dos elementos (semirretas, faces e planos). Esse aspecto foi resolvido ao selecionar outra ferramenta: 

.

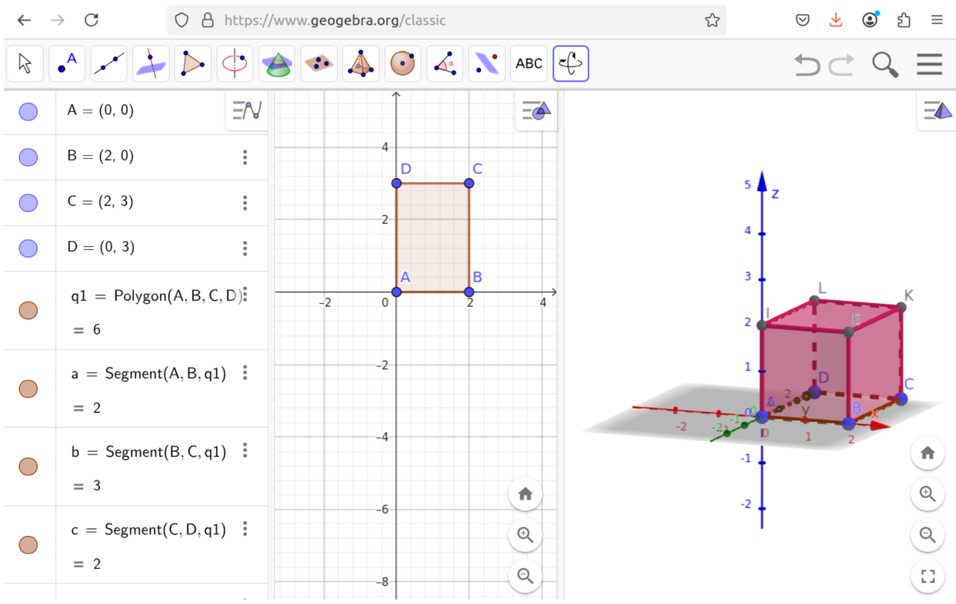
Na atividade de registro das observações e conclusões (em grupo) nos itens **a**, **b** e **c** (organização no RE), com base, respectivamente, nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8, a dupla

Figura 5.20: Construção no GeoGebra pelos estudantes (Sala de Ames)



FONTE: Autoral

Figura 5.21: Obstáculos na construção (Sala de Ames)



FONTE: Autoral

participante respondeu:

a) Ambos são quadrados, dobrou a medida do lado do quadrado, ambos tem 90°.

b) No primeiro caso para chegar do I para o G foi $\sqrt{11}$*, para chegar do I até o J foi* $\frac{3}{2}$ *vezes* $\sqrt{11}$ *e, na segunda figura, ao invés de ser* $\frac{3}{2}$ *foi* $\frac{4}{2}$.

c) Na sala de Ames tem Homotetia e faz com que as pessoas que estejam perto pareçam que estão mais perto.

Verifica-se que a dupla compreendeu a pergunta e analisou corretamente a figura 5.6, identificando que na homotetia a forma das figuras é preservada ao indicar que os dois quadriláteros são quadrados e inferir sobre a medida dos seus ângulos internos. Além disso, ao identificar a mudança no tamanho da figura, nesse caso dobrando a medida dos lados do quadrado.

Em relação a pergunta referente à figura 5.7, a dupla identificou a relação entre as medidas dos segmentos IG e IJ, embora tenha substituído a palavra distância pela expressão "para chegar". Além disso, indicou a razão de homotetia em cada caso, mesmo não sabendo nomeá-la dessa maneira. Por outro lado, não citou a relação entre as medidas dos segmentos correspondentes dos quadriláteros, nem usou expressões como "segmentos proporcionais"ou "proporcionalidade".

O professor apresentou a definição de homotetia com o arquivo do GeoGebra gerador das imagens, mas a dupla não ampliou as terminologias referentes à homotetia, nem correlacionou o centro de homotetia com a posição do observador na sala de Ames na questão sobre a figura 5.8. Por outro lado, identificou a homotetia nos efeitos percebidos pelo observador em relação a posição das pessoas no interior da sala.

No segundo bloco de atividades (Padrões *moiré*), os estudantes observaram os seguintes efeitos na animação (figura 5.10):

a) *Parecem várias linhas pretas e tem uma ilusão de um animal correndo.*

b) *Mudanças do animal sendo substituído por outro, a velocidade sendo modificada, as cores no preto e branco e o animal caminhando.*

Os registros descrevem com detalhes a animação, incluindo a percepção dos efeitos ao modificar os controles deslizantes que compõem a animação. Os dois estudantes afirmaram não conhecer os padrões *moiré*, porém um deles citou: *[...] mas eu já vi um tipo de desenho em um quadro plastificado que de acordo muda a direção do ver, a imagem vai mudando.*

Figura 5.22: Imagens em papéis holográficos

FONTE: Autoral

O conhecimento prévio, as experimentações e as conexões são evidenciados nessa descrição sobre papéis holográficos, que se relacionam com os padrões *moiré* pela existência de estruturas repetitivas e finas que interagem com a luz ou entre si, criando efeitos visuais dinâmicos.

Ao serem questionados sobre a construção, no GeoGebra, do padrão *moiré* apresentado na animação e os objetos/elementos necessários, indicaram:

a) *Eu consegui perceber que precisa de várias grades e tem que estar em movimento e precisa de uma figura que não precisa ser tão nítida.*
b) *A diversificação do preto e branco junto com um animal correndo sobre a impressão do ver. Telas, grades ou redes. As grades estão passando sobre o animal dando a impressão de ele estar caminhando.*

Percebe-se, nessa etapa, que as explanações estão mais detalhadas em virtude da definição do efeito *moiré* que eles tiveram acesso e também do incentivo do professor com questionamentos sobre a animação. Devido ao quantitativo de estudantes e das etapas distintas da sequência em que cada um deles estava, a construção no GeoGebra foi individual conforme a figura 5.23. A principal dificuldade observada foi o ajuste na imagem, que já era esperado no planejamento.

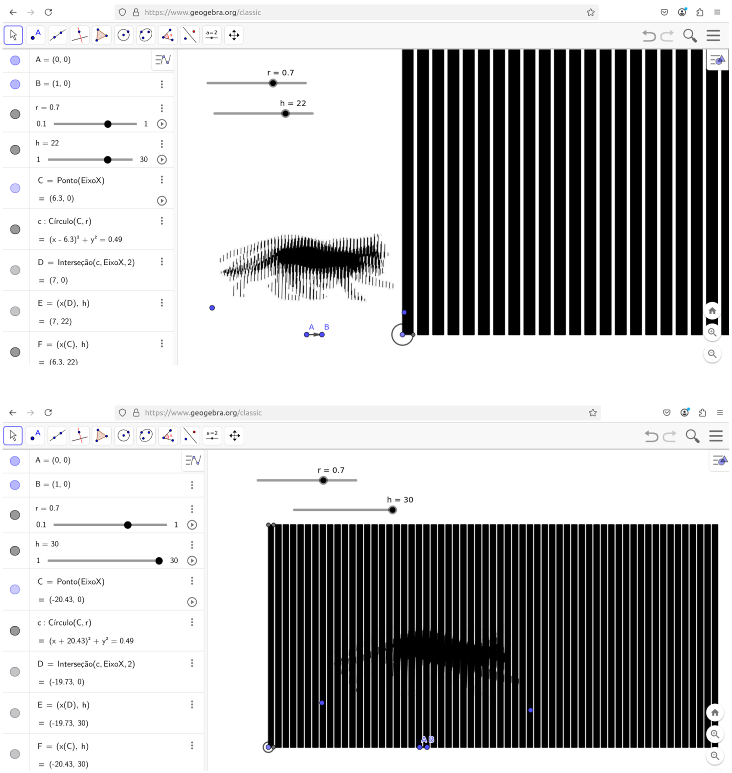
Os registros sobre o significado de transladar o polígono que aparece nos passos de construção do modelo e também sobre o objeto matemático importante para realizar essa transformação estão indicados a seguir:

a) *Se distanciou 1 vez na primeira imagem, na segunda imagem se distanciou 2 vezes. É preciso também círculo: centro e raio para separar o polígono, vetor.*
b) *O polígono andou 1 unidade à direita na 1ª imagem, já na 2ª o polígono mudou de lugar e o vetor também. O polígono andou em direção direita e pulou 2 unidades.*

Nesse momento foi necessário realizar alguns questionamentos adicionais sobre as diferenças presentes nas duas imagens, se a forma e o tamanho do polígono foram alterados na translação. Além disso, foram questionados sobre a abscissa (coordenada x) do ponto C e a abscissa do seu ponto correspondente após a translação. Os dois estudantes identificaram o vetor como elemento importante na translação e, indiretamente, a relação entre o comprimento, direção e sentido do vetor com o deslocamento de cada ponto do polígono.

No terceiro bloco de atividades (Anamorfose cilíndrica), os estudantes observaram os seguintes efeitos na imagem (figura 5.16):

Figura 5.23: Construção no GeoGebra pelos estudantes (Padrões *moiré*)



FONTE: Autoral

a) *Ela parece menor, parece desfocada.*

b) *Distorção, desfoque.*

c) *Ela está mexida.*

d) *A imagem está meio borrada, distorcida.*

Identificaram, portanto, os efeitos da técnica anamorfose. Ao serem questionados sobre experiências anteriores, apenas um estudante lembrou, ao ler o item seguinte sobre a restituição da imagem da Monalisa: *Sim, já tinha visto. Em alguns casos depende do ponto de vista.*

O estudante que citou e socializou essa experiência começou a buscar diferentes pontos de observação da imagem. Essa ação se configura como uma estratégia de restituição de imagens deformadas obtidas pela técnica de anamorfose oblíqua. O outro estudante que estava ao lado também começou a fazer a mesma tentativa. Sobre a restituição da imagem original da Monalisa, um estudante respondeu que não tem como, dois responderam que não sabem e um estudante registrou o cilindro como resposta.

Cabe destacar, no entanto, que o estudante que registrou o cilindro como ferramenta para restituição começou tardiamente a primeira atividade, logo pode ter apenas visto a animação proposta na etapa seguinte ou ouvido algum questionamento sobre a animação. Foi interrogado sobre isso, mas não confirmou.

Durante a animação citada, eles concluíram sobre a necessidade de um cilindro espelhado para restituição da imagem. Além disso, um estudante observou que a medida que arrasta a figura verticalmente no cilindro, a imagem deformada torna-se maior. Essa conclusão se relaciona com a mudança de sistema de coordenadas retangulares para coordenadas polares não exploradas nessa sequência.

As observações acerca da figura 5.19 foram realizadas em grupo por três estudantes com colaborações orais, porém cada estudante realizou o seu registro:

a) *Os raios das duas imagens são iguais. O efeito é causado pela rotação e o ângulo de rotação em graus é* $180°$.
b) *Os raios das duas imagens são iguais. A modificação realizada foi a rotação. O ângulo de rotação foi* $180°$.
c) *O ângulo de rotação foi* $180°$.

Os raios da base do cilindro foram citados, possivelmente, devido à inserção desse dado no *software Anamorph Me!* para realizar a anamorfose cilíndrica. Um dos estudantes, nesse momento, lembrou dos ajustes realizados em uma fotografia nos aplicativos dos *smartphones*. Procurou essa ferramenta no celular, mostrou inicialmente o ícone que se referia à reflexão em torno da reta vertical, depois encontrou o ícone que realiza a rotação das imagens. A informação do ângulo surgiu ao serem questionados sobre a medida do ângulo, em graus, correspondente a uma volta completa (giro completo).

Afirmaram que, na rotação, as figuras não mudam de forma e tamanho, mas no momento do registro eles não completaram a frase ou confundiram algumas ideias. Por fim, realizaram a construção do modelo com materiais recicláveis conforme a figura 5.24 e responderam ao questionário proposto.

Dos oito estudantes participantes da sequência didática, seis responderam ao questionário conforme o gráfico 5.25. As respostas oriundas do questionário foram bem sucintas e genéricas. Organiza-se o conteúdo com base nas categorias analíticas:

Quanto às experimentações:
a) *Gostei. Muito legais.*
b) *Foi bom, porque aprendi rápido.*
c) *Perfeito, pois foi uma atividade muito dinâmica.*
d) *Uma atividade fácil de aprender.*

Figura 5.24: Construção pelos estudantes (Anamorfose Cilíndrica)

FONTE: Autoral

Quanto ao uso de materiais concretos:

a) *Muito importante.*

b) *É uma experiência nova e muito interessante.*

c) *Muito fácil de aprender.*

d) *Ajuda bastante o aprendizado.*

Quanto à interdisciplinaridade:

a) *Todas.*

b) *Geometria e Física.*

c) *Matemática, Física e Geografia.*

d) *Não sei.*

Quanto ao uso de tecnologias digitais:

a) *Muito importante.*

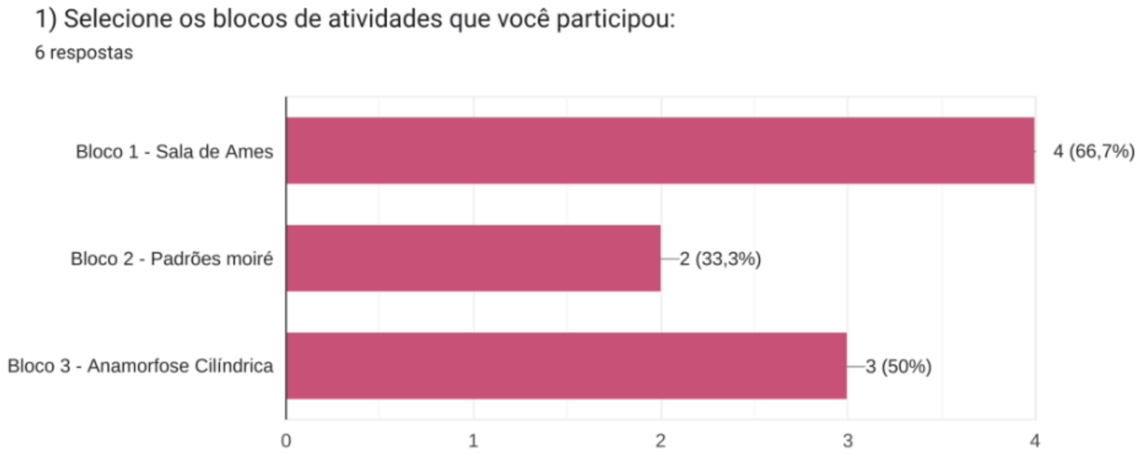
b) *É uma experiência nova e muito interessante.*

c) *Perfeito, muito interessante estar usando esses recursos tecnológicos.*

d) *Muito fácil de aprender.*

e) *Ajuda bastante o aprendizado.*

Figura 5.25: Participação no questionário



FONTE: Autoral

Os estudantes mostraram interesse nas experimentações, no uso de materiais concretos e tecnologias digitais, assim como na abordagem interdisciplinar propostos na sequência didática. Nenhum registro de resistência a esses aspectos foi observado no conteúdo dos questionários. Cabe destacar que a concepção de interdisciplinaridade adotada consiste em um ensino que contempla as inter-relações entre a Matemática e outras áreas do saber científico e tecnológico. Essa perspectiva é consonante com Tomaz e David (2008) cuja ideia de interdisciplinaridade não se limita à reunião de disciplinas escolares, áreas afins ou subáreas. Defendida por essas autoras, a possibilidade de, a partir de uma investigação de um objeto, conteúdo, tema de estudo ou projeto, promover atividades com ação dos sujeitos (estudantes e professores) em sistemas interativos, buscando novas informações e combinações, transformando o conhecimento das diversas disciplinas ou áreas.

Sobre as disciplinas ou saberes que estavam articulados com a Matemática nas atividades, dois estudantes citaram todas as disciplinas, ratificando a pluralidade da temática. Dois estudantes citaram Geometria e Física, enfatizando os conhecimentos prévios dos estudantes, visto que os conceitos físicos não foram trabalhados diretamente. Um estudante registrou Matemática, Física e Geografia; no entanto, não houve tempo para apresentar as anamorfoses nas representações dos mapas. Então, acredita-se que a associação com a Geografia deve-se ao uso de coordenadas cartesianas retangulares, a exemplo das coordenadas geográficas e à relação entre a planificação e a cartografia, portanto, outro conhecimento prévio.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo apresentar uma sequência didática sobre as transformações geométricas por meio da experimentação e construção de modelos de ilusão com um grupo de alunos da 1ª (Primeira) Série do Ensino Médio da Rede Pública Estadual. As experimentações e construções foram realizadas com o uso de materiais concretos confeccionados com materiais recicláveis e, principalmente, com a interação e manipulação do *software* de Geometria Dinâmica, a saber, o GeoGebra. Esses materiais didáticos são ferramentas que compõem um possível acervo de um Laboratório de Ensino de Matemática, espaço adequado para realizar investigações, propor e testar hipóteses sobre propriedades e teoremas, entre outros aspectos.

A sequência didática foi dividida em três blocos de atividades com base no modelo de ilusão explorado, a saber, Sala de Ames, Padrões *moiré* e Anamorfose Cilíndrica. As atividades realizadas contemplaram as etapas de apresentação da situação problemática, construção dos modelos de ilusão e registro das observações e conclusões com questões pré-definidas. Além disso, foi proposto um questionário para autoavaliação e avaliação da sequência didática pelos estudantes.

Os pressupostos teóricos que fundamentam a sequência didática são conforme Zabala (1998). O autor considera alguns aspectos para validar a sequência didática, tais como os conhecimentos prévios, que foram amplamente trabalhados ao longo de toda a sequência, e os conteúdos significativos e funcionais, pois estes se articularam com a popularização da Ciência e a valorização dos espaços de divulgação, como as feiras escolares e os museus. Outro aspecto foi quanto a adequação das atividades ao nível de desenvolvimento de cada aluno que também foi observado. Além disso, um desafio alcançável, respeitando o tempo de aprendizagem. As atividades foram motivadoras, estimularam a autoestima em relação às aprendizagens e valorizaram o desenvolvimento da autonomia do aprender. Acredita-se, com base nos pressupostos teóricos de Zabala (1998), que houve validação da sequência didática.

Os estudantes não apresentaram resistência em relação às metodologias propostas para o ensino de Matemática: as experimentações, materiais concretos, tecnologias digitais e interdisciplinaridade. Cabe, no entanto, ressaltar as limitações da aplicação, como a fragmentação da sequência didática em virtude da organização escolar, além dos recursos tecnológicos e da conectividade nas escolas, que são requisitos para a realização dessa sequência didática. Sugere-se a escolha de apenas uma ilusão a depender da organização escolar.

Em relação aos conceitos relacionados à Geometria Plana e Espacial, as transformações geométricas (homotetia, translação e rotação) foram objetos centrais, cada uma dessas transformações abordada em um modelo de ilusão. Outros conceitos, no entanto, foram trabalhados na sequência didática sobre Sala de Ames, tais como representação de pontos, retas, semirretas e planos, planos paralelos, pontos pertencentes ao plano, interseção de semirretas e planos, polígonos, paralelepípedo reto-retângulo e poliedros.

Nas atividades sobre Padrões *moiré*, exploraram também as representações de pontos, polígonos, circunferência dado o centro e a medida do raio, interseção de entes geométricos, vetor e sequência. Nas atividades sobre Anamorfose cilíndrica, os outros objetos matemáticos contemplados foram as figuras geométricas, projeção, ângulo, círculo e cilindro.

Conclui-se que o presente estudo configura-se não só como uma valorização da formação continuada do professor-pesquisador em sua prática docente, mas também como um incentivo aos pares que buscam novas metodologias de ensino de Matemática, ferramentas práticas para suas aulas, ideias para projetos em feiras de ciências e estímulos às aprendizagens em museus, a exemplo dos museus interativos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Claudia Maria. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher**. 2014. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Rio de Janeiro, 2014.

AMIDROR, Isaac. **The theory of the Moiré phenomenon**. 2 ed. London: Springer, 2009. (Volume I: Periodic Layers)

ARAGÃO FILHO, Osvaldo. Materiais didáticos (MD) como recursos didáticos em um laboratório de ensino de matemática (LEM). In: MÜLLER, Gessilda; HETKOWSKI, Tânia; PINHEIRO, Gerusa (Org.). **Estratégias de ensino da matemática:** entrelaçando saberes para a educação básica. Salvador: EDUNEB, 2017. p. 277-294.

ARAÚJO, António. A Geometria (Descritiva) na anamorfose e das perspectivas curvilíneas. **Workshop "Matemática e Arte"**. Évora: 2017. p. 101 - 108.

______. Topologia, anamorfose, e o bestiário das perspectivas curvilíneas. In: DIAS, Fernando (coord). **Convocarte nº2 arte e geometria**: teorias, aplicações e derivações. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2016. p. 51 - 69.

______. Anamorphosis reformed: from optical ilusions to immersive perspectives. In: SRIRAMAN, Bharath (ed.). **Handbook of the mathematics of the arts and sciences**. Switzerland: Springer, 2021. p. 175 - 242.

BALDO, Marcus Vinícius; HADDAD, Hamilton. Ilusões: o olho mágico da percepção. **Revista Brasileira de Psiquiatria**, v. 25 (Supl. II), 2003, p. 6-11.

BARBOSA, João Lucas. **Geometria euclidiana plana**. 8 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do Professor de Matemática)

BOBKO, Nara; ROCHA, Laís. Tutorial virtual de GeoGebra: criação de um recurso educacional aberto dinâmico e interativo. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 13, n. 2, 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros**

Curriculares Nacionais Ensino Médio + (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRIGNONI, Pol. **Didáctica con anamorfismo cilíndricos**. 2020. 62 f. Treball final de grau (Grau de Matemàtiques) - Universitat de Barcelona, Barcelona, 2020.

CANELLA, Andrea. **Matemática, tecnologia e arte**: uma proposta de ensino de isometrias para a educação básica. 2021. 99 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Rio de Janeiro, 2021.

CARVALHO, Paulo Cezar. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do Professor de Matemática)

CRANNELL, Annalisa. Looking through the glass. In: SRIRAMAN, Bharath (ed.). **Handbook of the mathematics of the arts and sciences**. Switzerland: Springer, 2021. p. 79 - 103.

GARCIA, Ana Luiza; HALMENSCHLAGER, Karine; BRICK, Elizandro. Desinteresse escolar: um estudo sobre o tema a partir de teses e dissertações. **Revista Contexto & Educação**. Editora Unijuí, n.114, 2021.

GONÇALVES, Tiago. **Uma introdução à Geometria Projetiva para o ensino fundamental**. 2013. 149 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Rio Grande, 2013.

HEFEZ, Abramo. **Uma introdução a história da Geometria Projetiva**. Vitória, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

IAVORSKI, Claudio. **Anamorfose**: uma arte no ensino de matemática e sua aplicação em atividades interdisciplinares. 2014. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Curitiba, 2014.

IBGEeduca. **Você sabe o que é anamorfose?**. [s.d.]. Disponível em: <https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/20815-anamorfose.html>. Acesso em: 4 maio 2025.

Instituto GeoGebra de São Paulo. **Sobre o GeoGebra**. São Paulo, [20–]. Disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html>. Acesso em: 2 maio 2025.

KENT, Phillip. **Art of anamorphosis:** software. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://www.anamorphosis.com/software.html>. Acesso em: 2 maio 2025.

LANNERS, Edi. **O livro de ouro das ilusões**. Tradução Maria Madalena Teixeira. Ediouro, 1982. Tradução de: Illusionen.

LAVILLE, Christian; DIONNE, Jean. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução: Heloísa Monteiro, Francisco Settineri. Porto Alegre: Artmed, 1999.

LIMA, Elon. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

______. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios**. Paulo Cezar P. Carvalho (colaborador). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. (Coleção do Professor de Matemática)

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: ___ (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. p. 3-37. (Coleção formação de professores)

MANETTA, Marco. **Anamorfose cilíndrica**, [S.l.], 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/NutDxCTY>. Acesso em: 2 maio 2025.

MEDEIROS, Alexandre. A história e a Física do fantasma de Pepper. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Santa Catarina, v. 23, n. 3, p. 329-344, dez. 2006.

MENTRARD, Daniel. **Scananimation**,[S.l.], 2024. Disponível em: <http://dmentrard.fr.fr/GEOGEBRA/Maths/geogebrclassic/ScanimatMD.html>. Acesso em: 2 maio 2025.

______. **Cylindrical perspective and anamorphism**, [S.l.], 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/m8zthjbk>. Acesso em: 2 maio 2025.

MMACA. **Habitació d'Ames.** [s.d.]. Disponível em: <https://mmaca.cat/docs/moduls/habitacio-ames/ames.pdf>. Acesso em: 4 maio 2025.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

NOLLA, Ramon; MASIP, Ramon. **Habitació d'Ames**: esborrany d' apunt. Departament de Matemàtiques. IES Pons s'Icart, 2016.

OPENAI. ChatGPT. Resposta à consulta sobre análise de tensões o uso do padrão moiré na anti-falsificação de documentos. Disponível em: <https://www.openai.com/chatgpt>. Acesso em: 26 out. 2024.

PARISOTO, Mara Fernanda; HILGER, Thais Rafaela. Investigação da aprendizagem de conceitos de óptica utilizando ilusões para turmas de pré-vestibular. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 9, n. 1, p. 62-98, jan./abr. 2016.

PREDIGER, Juliane; BERWANGER, Luana; MÖRS, Marlete. Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. **Revista Destaques Acadêmicos**, n. 4, 2009.

QUARTO de Ames. Mestrado em Ensino de Artes Visuais 2012-2013. [S.l.], 2012. Disponível em: < http://meav2012-2013.blogspot.com/2012/12/quarto-de-ames.html?view=magazine>. Acesso em: 05 abril 2024.

REBELLO, Ana Paula et al. O periscópio nas aulas de matemática. In: BORGES, Regina Maria; LIMA, Valderez Marina; IMHOFF, Ana Lúcia (Org.). **Contribuições de um museu interativo**: à educação em ciências e matemática. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2015. p. 111-117.

ROCHA, Jamile Ceci; GOUVEIA JÚNIOR, Josaphat Ricardo. **Geometria e as ilusões**: uma proposta interdisciplinar sobre o conceito de poliedros e suas relações. 2024. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Salvador, 2024.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SEMMER, Simone; SILVA, Sani; NEVES, Marcos Cesar. Anamorfose no Ensino de Geometria. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.6, n.3, 2013.

SEVERO, Daniela; VIALI, Lori; ROCHA FILHO, João. O estudo da Geometria Plana e Espacial a partir da construção de um caleidoscópio. In: BORGES, Regina Maria; LIMA, Valderez Marina; IMHOFF, Ana Lúcia (Org.). **Contribuições de um museu interativo**: à educação em ciências e matemática. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2015. p. 71-76.

SILVA, Fábio. **Geometria, Arte & Escher**: uma experiência na educação básica. 2024. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Recife, 2024.

SILVEIRA, Astrigilda. O GeoGebra como ferramenta de apoio para aprendizagem significativa da Geometria. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 7, n. 1, 2018.

TOMAZ, Vanessa; DAVID, Maria Manuela (2008). Os temas transversais e o fazer pedagógico na escola. In: ___. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021. p. 13-26. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

TRINDADE, António. A concepção de uma Anamorfose, do séc. XVI ao séc. XX. requisitos, técnicas e uma demonstração prática. In: MARQUES, António (coord.) **As idades do desenho**. Lisboa : Universidade de Lisboa, 2015. p. 85 - 102.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução Ernani F. Rosa. Artmed, 1998.

APÊNDICE A - Plano de Aula

Título da aula: Geometria e as ilusões
Autora: Jamile Ceci dos Santos Rocha (PROFMAT - UFBA)
Perfil da escola: Escola da Rede Estadual de Ensino
Modalidade/Nível de Ensino: 1ª Série do Ensino Médio Regular
Componente(s) Curricular(es): Matemática
Tema: Transformações Geométricas.

Dados da(s) Aula(s)

O que o estudante poderá aprender com essa aula
Objetivo Geral: Investigar e articular os saberes matemáticos sobre transformações geométricas na experimentação com modelos baseados na Sala de Ames, uma ilusão geométrica, nos Padrões *moiré* e nas Anamorfoses Cilíndricas.

Objetivos Específicos:

- Compreender as transformações geométricas (homotetia, translação e rotação), seus elementos e características;
- Explorar as representações geométricas e algébricas dos entes matemáticos com uso de tecnologias digitais (GeoGebra);
- Utilizar as noções de transformações isométricas e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como obras de arte e outras aplicabilidades;
- Explorar e construir modelos semelhantes às exposições interativas do Museu das Ilusões com o uso de tecnologias digitais;
- Desenvolver a produção colaborativa e contribuir para a popularização das ciências a partir da divulgação dos conhecimentos apreendidos.

Habilidade BNCC: (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

Duração da atividade: 6 horas-aulas, podendo ampliar no caso da apresentação para outros grupos (feiras escolares ou outros formatos).

Conhecimentos prévios: Noção sobre os segmentos proporcionais e sequência. E familiaridade com o uso de tecnologias.

Estratégias e recursos da(s) aula(s):
Em síntese, a sequência didática proposta segue as seguintes etapas: 1. Apresentação por parte do professor, por meio de fotos, imagens, vídeos e animações, da situação problemática (diferenças de percepção da forma geométrica, dos padrões ou tamanho de objetos e/ou pessoas) com o tema ilusão; 2. Proposição de hipóteses pelos estudantes sobre a situação problemática (coletiva e individualmente); 3. Construção dos modelos de ilusão por meio de *softwares* de geometria dinâmica (GeoGebra) e criação de anamorfoses (*Anamorph Me!*), imagens impressas, cilindros reciclados e outros materiais; 4. Registro das observações com questões pré-definidas; 5. Elaboração das conclusões sobre a situação problemática e as transformações geométricas; 6. Generalização e síntese pelo professor com base na contribuição do grupo; 7. Exposição pelos estudantes e/ou gravação de vídeo para outros grupos; 8. Autoavaliação e avaliação da sequência didática; 9. Avaliação, pelo professor, da participação do grupo e das aprendizagens realizadas.

Recursos utilizados: *Chromebooks*, mouses, materiais reciclados em formato cilíndrico, tesoura, régua, esquadro, *insulfilm* espelhado, atividades ordenadas e imagens impressas, lousa e marcador de quadro branco.

Avaliação: Autoavaliação e avaliação da sequência didática e da usabilidade dos materiais recicláveis e dos *softwares* de geometria dinâmica para construção dos modelos (questionário digital). Avaliação, pelo professor, da participação do grupo e das aprendizagens realizadas (registro escrito nas atividades ordenadas, observação e diálogos entre professor e alunos).

Referências
LIMA, Elon. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. (Coleção do Professor de Matemática)

APÊNDICE B - Questionário

Prezado(a) participante,

Você está sendo convidado(a) a responder a esse questionário sobre a sua participação e aprendizagem, assim como sobre as metodologias e abordagens realizadas na pesquisa "Geometria e as Ilusões: uma proposta interdisciplinar nas aulas de Matemática", desenvolvida por Jamile Ceci dos Santos Rocha, discente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Bahia - UFBA, sob orientação do Professor Juan Andrés Gonzalez Marin.

1) Selecione os blocos de atividades que você participou:

- Bloco 1 - Sala de Ames
- Bloco 2 - Padrões *moiré*
- Bloco 3 - Anamorfose Cilíndrica

2) Qual foi o seu grau de envolvimento nas atividades selecionadas? Por quê?

3) Como você avalia a sua aprendizagem nessas aulas?

4) Nas aulas, a professora propôs experimentações com o uso de tecnologias digitais e materiais concretos. Qual é a sua opinião sobre o uso desses recursos nas aulas de Matemática?

5) Para você, quais outras disciplinas ou saberes estavam articulados com a Matemática nessas atividades?

APÊNDICE C - Demonstrações

Dada a equação 3.10, tem-se:

$$\frac{e}{a} \cdot \frac{b}{z} \cdot \frac{x}{x+y} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{x+y}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} + \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{y}{x} = 1 \tag{6.1}$$

Dada a equação 3.11, tem-se:

$$\frac{d}{c} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{z+b} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{c}{d} \cdot \frac{z+b}{z} \tag{6.2}$$

Substituindo a equação 6.2 em 6.1, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} + \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{z+b}{z} = 1 \\
\Leftrightarrow\; & \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} + \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{z} = 1 \\
\Leftrightarrow\; & \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} + \frac{a}{e} \cdot \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{e} \cdot \frac{c}{d} = 1 \\
\Leftrightarrow\; & \frac{z}{b} + \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{c}{d} = \frac{e}{a} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{z}{b} + \frac{z}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{c}{d} = \frac{e}{a} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{1}{b}\left(z + \frac{z \cdot c}{d}\right) = \frac{e}{a} - \frac{c}{d} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{1}{b}\left(1 + \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{e}{a} - \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{1}{z} \\
\Leftrightarrow\; & \frac{1}{b}\left(\frac{d+c}{d}\right) = \left(\frac{ed-ac}{ad}\right) \cdot \frac{1}{z} \\
\Leftrightarrow\; & b = \left(\frac{d+c}{d}\right) \cdot \left(\frac{adz}{ed-ac}\right) \\
\Leftrightarrow\; & b = \left(\frac{d+c}{ed-ac}\right) az
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, com base na figura 3.13, $z = \sqrt{c^2 + e^2}$.

APÊNDICE D - Anamorfose Cilíndrica (Anamorph Me!)

Figura 6.1: Anamorfose para impressão

FONTE: Autoral

ANEXO A - Aplicações de Anamorfoses

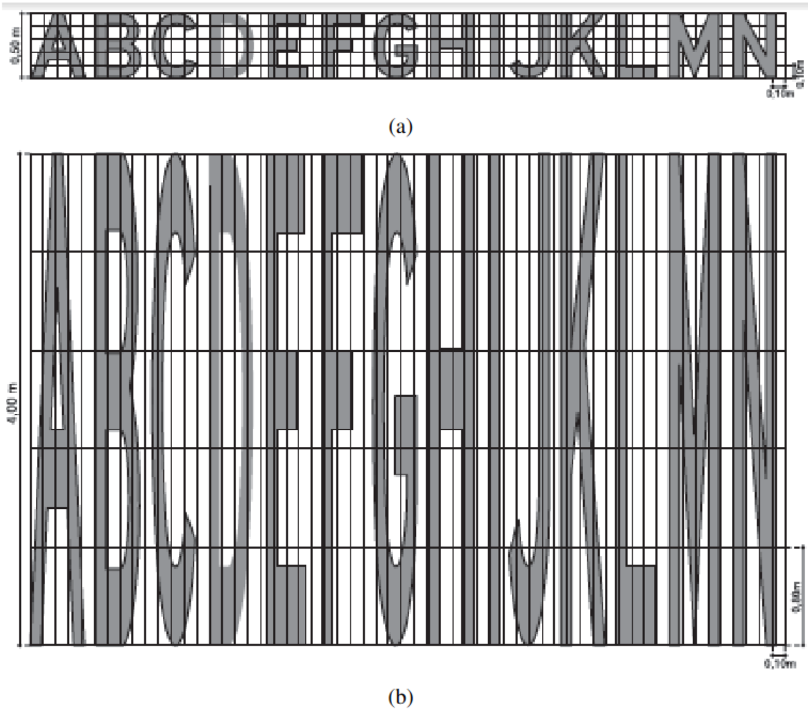
Figura 6.2: Placas de *marketing* no futebol

FONTE: Iavorski (2014)

Figura 6.3: Sinalizações horizontais de trânsito

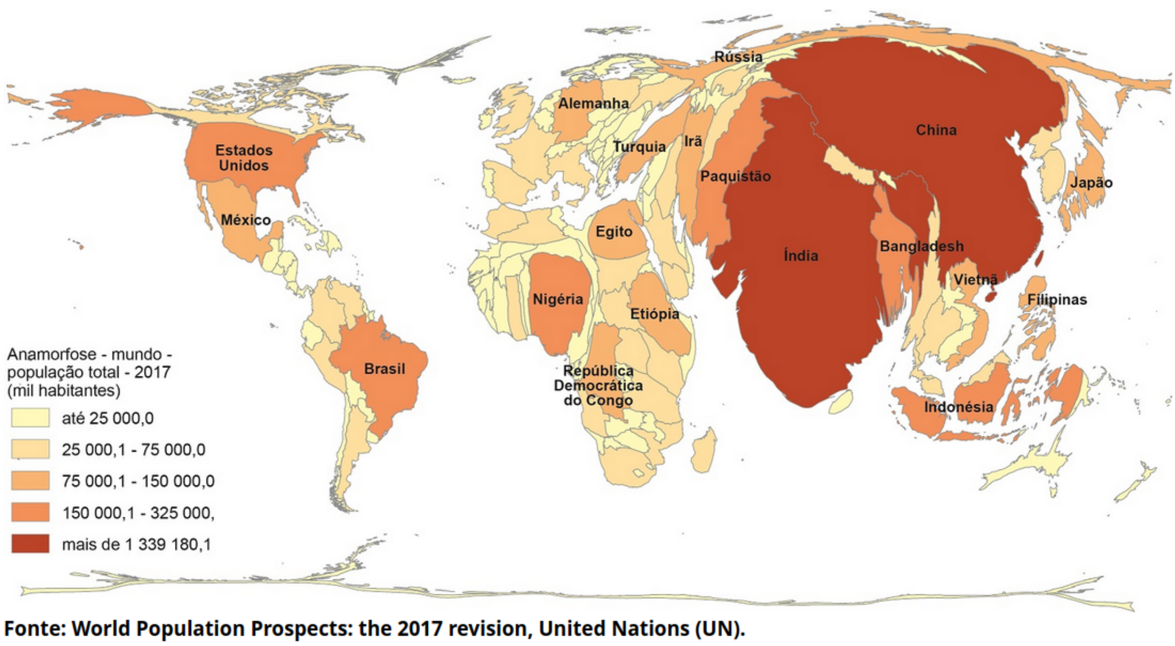
FONTE: Iavorski (2014)

Figura 6.4: Modelos de sinalizações horizontais de trânsito



FONTE: Iavorski (2014)

Figura 6.5: Anamorfose nas representações de mapas



FONTE: IBGEeduca