Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IME
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Dissertação de Mestrado

Álgebra de Grassman: identidades polinomiais e polinômios centrais com involução

Izamara Ferreira Silva

Salvador-Bahia

Álgebra de Grassman: identidades polinomiais e polinômios centrais com involução

Izamara Ferreira Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Manuela da Silva Souza

Salvador-Bahia

Agosto de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências
e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

S586 Silva, Izamara Ferreira

Álgebra de Grassman: identidades polinomiais e polinômios centrais com involução/ Izamara Ferreira Silva. – Salvador, 2025.

77 f.

Orientadora: Prof.ª Dra. Manuela da Silva Souza

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática, 2025.

1. Álgebra de Grassmann. 2. Álgebras − Identidades polinomiais. 3. Polinômios centrais. I. Souza, Manuela da Silva. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU: 512.5 (043.3)

Álgebra de Grassman: identidades polinomiais e polinômios centrais com involução

Izamara Ferreira Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de agosto de 2025.

Banca examinadora:

Manuela da Silva Souza

Prof^a^. Dr^a^. Manuela da Silva Souza (Orientadora)
UFBA

Documento assinado digitalmente
MATEUS EDUARDO SALOMAO
Data: 16/10/2025 19:46:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mateus Eduardo Salomão
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento assinado digitalmente
PEDRO HENRIQUE MARTINS DE MORAIS
Data: 14/10/2025 17:40:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pedro Henrique Martins de Morais
Instituto Federal de Sergipe

A todas as versões de mim que
ousaram continuar.

Resumo

Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2, E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre este corpo e φ uma involução em E. Baseando-se principalmente em [1], nesse trabalho apresentamos uma descrição dos conjuntos das $*-$identidades polinomiais, $Id(E, \varphi)$ e os conjuntos dos $*-$polinômios centrais $C(E, \varphi)$, para os casos de característica 0 e característica $p > 2$. Além disso, mostramos que se $p > 2$, $C(E, \varphi)$ não é finitamente gerado como um $T(*)$-espaço.

Palavras-chave: : Álgebra de Grassmann; $PI-$ Álgebras; $*-$Identidades polinomiais; $*-$Polinômios Centrais.

Abstract

Let K be an infinite field of characteristic $\neq 2$, E is the infinite-dimensional Grassmann algebra over this field, and φ is an involution on E. Based primarily on [1], in this work, we present a description of the sets of $*-$polynomial identities, $Id(E, \varphi)$, and the sets of $*-$central polynomials, $C(E, \varphi)$, for the cases of characteristic 0 and characteristic $p > 2$. Furthermore, we show that if $p > 2$, then $C(E, \varphi)$ is not finitely generated as a $T(*)$-space.

Keywords: Grassmann Algebra; PI-Algebras; $*-$Polynomial Identities; $*-$Central Polynomials.

Sumário

Introdução

Um conceito considerado importante na Teoria de Anéis é o de álgebra sobre um corpo K (ou K-álgebra), definida como sendo um espaço vetorial munido de um produto. As PI-álgebras são um tipo especial de álgebras que satisfazem uma identidade polinomial, ou seja, quando um polinômio não nulo que se anula em qualquer substituição de suas variáveis por elementos da álgebra. Como exemplos básicos de $PI-$álgebras associativas temos as álgebras comutativas, álgebras de matrizes, as álgebras de dimensão finita, a álgebra de Grassmann, entre outras. Estudar PI-álgebras consiste em estudar como as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra interferem em sua estrutura.

Quanto aos chamados polinômios centrais, para uma álgebra associativa A, estes são polinômios em variáveis não comutativas que tomam valores apenas no centro de A. Esses polinômios desempenham um papel importante na PI-teoria, teoria que estuda as $PI-$álgebras, uma vez que, a partir de um polinômio central, podemos construir uma identidade polinomial.

A álgebra na qual trabalharemos os conceitos acima é a álgebra de Grassmann, denotada por E, de dimensão infinita, dada da seguinte maneira: primeiro construindo uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um conjunto não vazio e enumerável. Denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa unitária livre, gerada livremente por X sobre K, os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados polinômios. Deste modo, para $char(K) \neq 2$, considere o ideal I de $K\langle X\rangle$ tal que $I = \langle\{x_i x_j + x_j x_i\}\rangle$, e para cada $i, j = 1, 2, \ldots$ fazemos $e_i = x_i + I$. Assim, E denota a álgebra quociente $\frac{K\langle X\rangle}{I}$ e é uma álgebra associativa e unitária com base $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k; k \geq 1\}$, ou seja,

$$E = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i\rangle.$$

Os conceitos debatidos no contexto ordinário da PI-teoria, podem ser naturalmente ampliados para o caso de álgebras munidas de alguma estrutura adicional. No nosso caso, tal estrutura adicional são as álgebras munidas de uma involução. Assim, podemos fazer a seguinte construção: sejam $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$ dois conjuntos disjuntos e enumeráveis de variáveis. Denote por $K\langle Y \cup Z\rangle$ a álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por $Y \cup Z$ sobre F dotada da involução $*$, onde

$$y_i^* = y_i \text{ e } z_i^* = -z_i$$

para todo i, os elementos de $K\langle Y \cup Z\rangle$ são chamados $*-$polinômios. Deste modo, dada uma involução φ em E, denotaremos por $Id(E,\varphi)$ e $C(E,\varphi)$ os subconjuntos de $K\langle Y \cup Z\rangle$ formados, respectivamente, por todas as $*-$identidades polinomiais e pelos $*-$polinômios centrais de (E,φ). Por $*-$identidades polinomiais entendemos aqueles polinômios que, ao serem avaliados em E, se anulam identicamente, sempre respeitando a involução φ. Já os $*-$polinômios centrais são aqueles que, sob as mesmas condições, resultam em um elemento do centro da álgebra E.

Os primeiros trabalhos que envolviam PI-álgebras apareceram, embora de forma implícita, na década de $1920 - 1930$, nas pesquisas de Wagner [12] e Dehn [11], mas seu verdadeiro desenvolvimento começou com os trabalhos de I. Kaplansky em 1948 [13] e de Amitsur e Levistky em 1950 [10], e atualmente é uma área da álgebra bem desenvolvida e em expansão rápida.

Partindo do princípio de que uma identidade polinomial diz muito sobre a estrutura de uma álgebra, um dos desafios centrais da PI-teoria é descrever as identidades de uma álgebra, isto é, determinar uma base para seu T-ideal de identidades. Em 1950, Specht formulou a questão se o T-ideal de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é finitamente gerado. Foi apenas em 1987 que Kemer [14] obteve uma resposta afirmativa para essa questão, conhecida como o Problema de Specht. Atualmente, para algumas álgebras, os T-ideais de identidades já foram completamente descritos; entretanto, para muitas outras, essa descrição ainda permanece um problema aberto.

O estudo das álgebras com involução remonta aos anos 1930, quando pesquisadores já demonstravam grande interesse nessas estruturas devido às suas amplas conexões com diversas áreas da matemática, física e outras ciências. A partir da década de 1960, com os trabalhos pioneiros de Herstein [15] e Martindale [16] sobre anéis simples com involução que satisfaziam identidades polinomiais, as $*-$identidades passaram a ser investigadas de forma sistemática. Mesmo após quase seis décadas desses avanços, o conhecimento acerca da estrutura de $Id(A,*)$ e $C(A,*)$ para uma dada álgebra A ainda é bastante limitado. Vale destacar, por exemplo, que o primeiro conjunto de $*-$identidades polinomiais não triviais foi descrito apenas em 1982, por Diana Levchenko [17].

O trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo, abordamos os conceitos preliminares essenciais à compreensão do texto, incluindo definições de álgebras, álgebras livres e álgebras livres com involução, bem como o conceito de identidades polinomiais e a definição do T-ideal de uma PI-álgebra. Também introduzimos e exemplificamos os polinômios multihomogêneos e multilineares.

No segundo capítulo, apresentamos conceitos e resultados relacionados às involuções na álgebra de Grassmann, destacando que, nesse ambiente, é possível definir diversas involuções distintas. Nosso objetivo é fornecer ao leitor as ferramentas necessárias para entender a escolha de estudar apenas um tipo específico de involução.

Nos capítulos três e quatro, apresentamos os principais resultados deste trabalho. No Capítulo 3, descrevemos o conjunto $Id(E, \varphi)$ em dois casos: primeiro, quando o corpo possui característica zero, e depois, quando o corpo possui característica positiva $p > 2$. Em ambos os casos, demonstramos que $Id(E, \varphi)$ é finitamente gerado como um $T(*)-$ideal. Por fim, no último capítulo, estudamos os $*-$polinômios centrais de E também em dois casos - para característica zero e para $p > 2$ - e mostramos que, diferentemente de $Id(E, \varphi)$, o conjunto dos $*-$polinômios centrais de E não é finitamente gerado como um $T(*)-$espaço, quando a característica do corpo é maior que 2.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo desse capítulo, introduziremos conceitos preliminares necessário a leitura do texto. Para uma compreensão mais detalhada da Teoria de Álgebras com Identidades Polinomiais, consulte a referência [2]. Salvo indicação em contrário, em todo o capítulo, K denotará um corpo qualquer.

1.1 Álgebra

Definição 1.1. *Um espaço vetorial sobre K, A, é chamado de* **álgebra** *(ou K-álgebra) se A possui uma operação binária $*$ (ou seja, uma função $* : (A \times A) \to A$), chamada multiplicação, tal que para qualquer $a, b, c \in A$ e qualquer $\alpha \in K$;*

1. $(a + b) * c = a * c + b * c$,

2. $a * (b + c) = a * b + a * c$,

3. $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Normalmente denotamos a multiplicação de dois elementos a, b em A por ab em vez de $a * b$. Claramente, a noção de álgebra generaliza tanto a noção de espaço vetorial quanto de anel. Dizemos que:

1. A é **associativa**, se $a(bc) = (ab)c$ para quaisquer $a, b, c, \in A$;

2. A é **comutativa**, se $ab = ba$ para quaisquer $a, b, \in A$;

3. A é **unitária**, se existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$, para qualquer $a \in A$;

4. A é uma **álgebra de Lie**, se para quaisquer $a, b, c \in A$, valem:

$$a^2 = 0,$$

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \text{ (Identidade de Jacobi).}$$

5. A é **álgebra de Jordan**, se para todos $a, b, c \in A$, tem-se que

$$ab = ba,$$

$$(a^2b)a = a^2(ba) \text{ (Identidade de Jordan).}$$

Inicialmente não exigimos $1 \in A$, a associatividade em A, etc.

Exemplo 1. *Uma extensão L qualquer de um corpo K é uma K-álgebra associativa, comutativa e unitária.*

De fato, observe que qualquer extensão L de um corpo K pode ser vista como um espaço vetorial sobre K. Basta tomar a multiplicação $*$ como sendo a multiplicação em L, ou seja, $k * a = ka$, para todo $k \in K$ e $a \in L$, pois como $K \subseteq L$ então $k \in L$.

Exemplo 2. *O conjunto $K[x]$ dos polinômios em uma variável, com coeficientes em K, munido com as operações usuais é uma K-álgebras associativa, comutativa e unitária.*

Definição 1.2. *Sejam A uma álgebra e $a, b \in A$. Definimos o* ***comutador*** *de a e b, por:*

$$[a, b] = ab - ba,$$

usando a notação $[a, b]$. Podemos definir indutivamente, para todo $n \geq 3$, como:

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}], a_n].$$

Exemplo 3. *Se A é uma álgebra associativa com a multiplicação $*$ então o conjunto A é uma álgebra de Lie com a multiplicação dada pelo comutador. Essa álgebra é denotada por $A^{(-)}$.*

Com efeito, vamos verificar que $A^{(-)}$ satisfaz as condições 4 de álgebra de Lie:
(i) Seja $a \in A$, segue que

$$[a, a] = aa - aa = 0.$$

(ii) Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$, temos que mostrar que $[[a_1, a_2], a_3] + [[a_2, a_3], a_1] + [[a_3, a_1], a_2] = 0$.

Calcularemos cada parcela separadamente, na primeira temos

$$\begin{aligned} [[a_1, a_2], a_3] &= [a_1a_2 - a_2a_1, a_3] \\ &= (a_1a_2 - a_2a_1)a_3 - a_3(a_1a_2 - a_2a_1) \\ &= (a_1a_2)a_3 - (a_2a_1)a_3 - a_3(a_1a_2) + a_3(a_2a_1) \\ &= a_1a_2a_3 - a_2a_1a_3 - a_3a_1a_2 + a_3a_2a_1, \end{aligned}$$

pois A é associativa. Para a segunda parcela temos que,

$$[[a_2, a_3], a_1] = a_2a_3a_1 - a_3a_2a_1 - a_1a_2a_3 + a_1a_3a_2.$$

Analogamente para a terceira parcela, segue que

$$[[a_3, a_1], a_2] = a_3a_1a_2 - a_1a_3a_2 - a_2a_3a_1 + a_2a_1a_3.$$

Somando as parcelas anteriores, obtemos

$$a_1a_2a_3 - a_2a_1a_3 - a_3a_1a_2 + a_3a_2a_1 + a_2a_3a_1 - a_3a_2a_1 - a_1a_2a_3 + a_1a_3a_2 + a_3a_1a_2 - a_1a_3a_2 - a_2a_3a_1 + a_2a_1a_3 = 0.$$

Portanto, A é uma álgebra de Lie.

Observação 1. *Sejam A uma K-álgebra e $B = \{e_i \mid i \in I\}$ uma* ***base*** *de A. Uma multiplicação em A é totalmente determinada pela multiplicação entre os elementos de B. Dados $e_i, e_j \in B$, segue que*

$$e_ie_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k$$

com $\alpha_{ij}^k \in K$ e, fixados i e j, onde apenas um número finito de α_{ij}^k são não nulos. Os elementos $\alpha_{ij}^k \in K$ são chamados de constantes estruturais da álgebra A.

Neste trabalho, nosso interesse está concentrado em álgebras associativas. Embora existam diversas estruturas algébricas, todas as definições, propriedades e resultados aqui abordados serão restritos ao ambiente das álgebras associativas. O próximo exemplo apresentará o objeto principal desta pesquisa, a álgebra de Grassmann.

Observação 2. *Sempre que necessário, utilizaremos a notação $char(K)$ para indicar a característica de um corpo K.*

Definição 1.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita e enumerável, sob um corpo de característica diferente de 2, $char(K) \neq 2$. Considere o seguinte conjunto $\{e_1, e_2, \cdots\}$ uma base. Definimos a* ***álgebra exterior*** *ou* ***álgebra de Grassmann*** *de V, denotada por E, como sendo a álgebra associativa e unitária com base*

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\},$$

onde o produto na base é obtido pela justaposição e satisfaz

$$e_ie_j = -e_je_i$$

para quaisquer $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Essa propriedade é chamada de ***anticomutatividade****. Caso retiremos o elemento 1 do conjunto de geradores, obtemos a* ***álgebra de Grassmann sem unidade****, denotada por E'. A álgebra E' possui base B' formada pelos elementos*

$$v = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k},$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. *Podemos escrever a base de* E *como* $B = B' \cup \{1\}$.

Considere um elemento $v = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \in B'$, *seu comprimento é definido como* k. *O conjunto* E_0 *é o centro de* E, *gerado pelos elementos da base de comprimento par e denotamos por* E_1 *o conjunto gerado pelos elementos da base de comprimento ímpar.*

Temos que, E é uma $K-$álgebra. De fato, conforme a Definição 1.1, o produto em E é definido inicialmente para os elementos da base por justaposição. Em seguida, essa definição é estendida a toda a álgebra por linearidade, garantindo que a multiplicação seja bilinear e também associativa.

Definição 1.4. *Um subespaço* S *da álgebra* A *é chamado de* ***subálgebra*** *se é fechado em relação à multiplicação, ou seja,* $s_1, s_2 \in S$ *implica* $s_1 s_2 \in S$. *Uma subálgebra* I *de* A *é chamada de* ***ideal à esquerda*** *de* A *se* $AI \subseteq I$ *(ou seja,* $ai \in I$ *para todos* $a \in A, i \in I$*). Da mesma forma, define-se um ideal à direita e um ideal bilateral (ou simplesmente um ideal).*

Exemplo 4. *Seja* A *uma álgebra associativa. O subespaço vetorial*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \text{para todo } x \in A\},$$

é definido como o ***centro*** *da álgebra* A. *Temos que,* $Z(A)$ *é uma subálgebra de* A.

Definição 1.5. *Sejam* A_1 *e* A_2 *álgebras. Uma transformação linear* $\phi : A_1 \to A_2$ *é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

com $a, b \in A_1$.

Se A_1 *e* A_2 *forem álgebras unitárias, exigimos também que*

$$\phi(1_{A_1}) = 1_{A_2}.$$

Seja ϕ um homomorfismo de álgebras. Se ϕ é injetivo, dizemos que ϕ é um **monomorfismo ou mergulho**. Se ϕ é sobrejetivo, ϕ é chamado de **epimorfismo**. E se ϕ é bijetivo então ϕ é dito **isomorfismo**. Um **endomorfismo** de uma álgebra A é um homomorfismo de A nela própria, já um **automorfismo** é um endomorfismo bijetivo (endomorfismo e isomorfismo ao mesmo tempo). Duas álgebras A_1 e A_2 são ditas isomorfas, se existe um isomorfismo $\phi : A_1 \to A_2$, e nesse caso, denotamos por $A_1 \simeq A_2$.

Exemplo 5. *As álgebras* E *e* $K \oplus E'$, *da Definição 1.3, são isomorfas. De fato,* $\phi : K \oplus E' \to E$, *definida por* $\phi(\lambda, x) = \lambda + x$, *é um isomorfismo.*

Definição 1.6. *Seja* $\phi : A_1 \to A_2$ *um homomorfismo de álgebras. O conjunto*

$$Ker\phi = \{a \in A_1 \mid \phi(a) = 0\},$$

*é definido como **núcleo** de ϕ, e é um ideal de A_1 e o conjunto*

$$Im\phi = \{\phi(a) \mid a \in A_1\},$$

*é a **imagem** de ϕ, é uma subálgebra de A_2.*

Definição 1.7. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. O espaço vetorial $\frac{A}{I}$, munido com o produto*

$$(a + I)(b + I) = ab + I,$$

*é definido como a **álgebra quociente** de A por I para todo $a, b \in A$. Notação: $a + I$ por $\bar{a}$.*

Deste modo, a definição de produto abaixo independe da escolha dos representantes das classes laterais, estando bem definido, uma vez que, I é um ideal bilateral.

Enfim, temos que,

$$\frac{A_1}{Ker\phi} \cong Im\phi,$$

e que a aplicação $\pi : A \to \frac{A}{I}$, definida por $\pi(a) = \bar{a}$, é um homomorfismo chamado de projeção canônica.

1.2 Álgebras Livres

Antes de introduzirmos as identidades polinomiais de uma álgebra A, é fundamental definir o contexto no qual esses polinômios estão sendo considerados. Para isso, é necessário compreender a estrutura da álgebra livre associada, levando em conta a classe de álgebras à qual A pertence.

Definição 1.8. *Seja $S = \{s_i\}_{i \in I}$ um subconjunto de A, uma álgebra associativa. Se todo elemento $a \in A$ pode ser escrito como combinação linear sobre K de produtos da forma $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_j}$, onde $s_{i_j} \in S$, então A é dita **álgebra gerada por** S. Neste caso, denotaremos $A = \langle S \rangle$.*

Definição 1.9. *Seja $\aleph$ uma classe de álgebras e seja $F \in \aleph$ uma álgebra gerada pelo subconjunto X. A álgebra F é dita **livre na classe** $\aleph$, **gerada pelo conjunto** X, se satisfaz a seguinte propriedade universal: para toda álgebra $A \in \aleph$ qualquer aplicação $f : X \to A$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras*

$$\bar{f} : F \to A.$$

A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamado de posto de F.

Considere um conjunto qualquer X. Uma **palavra** sobre X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. A palavra vazia ($n = 0$) será denotada por 1.

Denotaremos por $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras sobre X, isto é, todo elemento de $K\langle X\rangle$ é uma combinação linear formal, com coeficientes em K, de palavras sobre X. Podemos definir a seguinte multiplicação entre duas palavras

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_n}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_n},$$

e depois estender por linearidade o produto para quaisquer dois elementos de $K\langle X\rangle$. Munido deste produto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa, com unidade, que é a palavra 1.

Os elementos de X são chamados de **variáveis**, os elementos da forma $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, com $\alpha \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ são chamados **monômios** e os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados **polinômios**. Observe que esses polinômios não são comutativos.

Exemplo 6. *O elemento* $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_1^2x_3 - 2x_4x_3x_1x_4$ *é um polinômio de* $K\langle X\rangle$ *e seus monômios são* $x_2x_1^2x_3$ *e* $2x_4x_3x_1x_4$.

Proposição 1.1. *A álgebra* $K\langle X\rangle$ *é livre na classe das álgebras associativas unitárias.*

Demonstração. Seja A um K-álgebra associativa e unitária e $f : X \to A$ uma aplicação qualquer, onde para cada $x_i \in X$, definimos $r_i = f(x_i)$. Considere,

$$\begin{array}{rcl} \bar{f} : K\langle X\rangle & \to & A \\ \sum a_{i_1i_2\cdots i_n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} & \mapsto & \sum a_{i_1i_2\cdots i_n}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}, \\ \bar{f}(1) & = & 1_A. \end{array}$$

Observe que a restrição de $\bar{f}\,|_X = f$. Mostraremos que $\bar{f}$ é um homomorfismo de álgebra.

Para isso, escrevemos os polinômios α e β como combinações lineares de uma coleção comum de monômios, atribuindo coeficientes iguais a zero quando necessário. Assim, tomando $\alpha = \sum a_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}$, $\beta = \sum b_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n} \in K\langle X\rangle$ para um conjunto apropriado de índices, e sendo $k \in K$, segue que

$$\begin{array}{rcl} (1)\bar{f}(\alpha+\beta) & = & \bar{f}\left(\sum a_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n} + \sum b_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\right) \\ & = & \bar{f}\left(\sum (a_{i_1\cdots i_n} + b_{i_1\cdots i_n})x_{i_1}\cdots x_{i_n}\right) \\ & = & \sum (a_{i_1\cdots i_n} + b_{i_1\cdots i_n})r_{i_1}\cdots r_{i_n} \\ & = & \sum a_{i_1\cdots i_n}r_{i_1}\cdots r_{i_n} + \sum b_{i_1\cdots i_n}r_{i_1}\cdots r_{i_n} \\ & = & \bar{f}\left(\sum a_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\right) + \bar{f}\left(\sum b_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\right) \\ & = & \bar{f}(\alpha) + \bar{f}(\beta). \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\bar{f}(k\alpha) &= \bar{f}\Big(\sum (ka_{i_1\cdots i_n})x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big)\\
&= \sum (ka_{i_1\cdots i_n})r_{i_1}\cdots r_{i_n}\\
&= k\cdot\Big(\sum (a_{i_1\cdots i_n})r_{i_1}\cdots r_{i_n}\Big)\\
&= k\cdot\bar{f}\Big(\sum (a_{i_1\cdots i_n})x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big)\\
&= k\cdot\bar{f}(\alpha).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\bar{f}(\alpha\cdot\beta) &= \bar{f}\Big(\sum a_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\cdot\sum b_{k_1\cdots k_m}x_{k_1}\cdots x_{k_m}\Big)\\
&= \bar{f}\Big(\sum c_j x_{i_1}\cdots x_{i_n}x_{k_1}\cdots x_{k_m}\Big)\\
&= \sum c_j r_{i_1}\cdots r_{i_n}r_{k_1}\cdots r_{k_m}\\
&= \Big(\sum a_{i_1\cdots i_n}r_{i_1}\cdots r_{i_n}\Big)\cdot\Big(\sum b_{k_1\cdots k_m}r_{k_1}\cdots r_{k_m}\Big)\\
&= \bar{f}\Big(\sum a_{i_1\cdots i_n}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big)\cdot\bar{f}\Big(\sum b_{k_1\cdots k_m}x_{k_1}\cdots x_{k_m}\Big)\\
&= \bar{f}(\alpha)\cdot\bar{f}(\beta).
\end{aligned}
$$

Logo, $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas unitárias. □

Poderíamos, de forma análoga, mostrar que $K\langle X\rangle$ sem a palavra vazia 1 é também livre na classe das álgebras associativas sem unidade.

1.3 PI-álgebras

Nesta seção, apresentaremos a definição de identidades polinomiais, noção fundamental para o estudo da PI-teoria e será imprescindível na continuação do presente trabalho.

Definição 1.10. *Seja A uma álgebra associativa e $f(x_1,\ldots,x_n)\in K\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para A se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$, para quaisquer $a_1,\ldots,a_n\in A$.*

Definição 1.11. *Uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial á chamada de **PI-álgebra.***

Proposição 1.2. *Um polinômio $f\in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial da álgebra associativa A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que, se $f\in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A, então f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X\rangle$ em A.

Com efeito, se $f \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A, então $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ para todo $a_1,\dots,a_n \in A$. Considere a aplicação $h : X \to A$, que leva $x_i \mapsto a_i$. Como $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre, podemos estender a aplicação h a um homomorfismo de álgebra, tal que

$$\begin{array}{rcl} \bar{h} : K\langle X\rangle & \to & A \\ f(x_1,\dots,x_n) & \mapsto & f(a_1,\dots,a_n) = 0. \end{array}$$

Mais ainda, todo homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A, restrito ao conjunto X define uma função h. Logo, f pertence ao núcleo de todo homomorfismo de $K\langle X\rangle \to A$.

Para a recíproca, sejam $a_1,\dots,a_n \in A$. Defina um homomorfismo de álgebra $\varphi : K\langle X\rangle \to A$, tal que,

$$\varphi(x_1) = a_1,\dots,\varphi(x_n) = a_n.$$

Por hipótese $f(x_1,\dots,x_n) \in Ker(\varphi)$, então $\varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = 0$. Como φ é um homomorfismo, temos que $f(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)) = 0$ e aplicando φ segue que, $f(a_1,\dots,a_n) = 0$. Logo, $f(x_1,\dots,x_n)$ é uma identidade polinomial para A. □

Exemplo 7. *Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, satisfaz o polinômio $[x_1,x_2]$ para todos $a_1,a_2 \in A$.*

De fato, suponha que A é comutativa e sejam $a_1,a_2 \in A$.Temos que

$$[a_1,a_2] = a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1 = a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_2 = 0.$$

Logo, $[x_1,x_2]$ é uma identidade polinomial de A. Reciprocamente, suponha que A satisfaz ao polinômio $[x_1,x_2]$ para todos $a_1,a_2 \in A$, então $[a_1,a_2] = a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1 = 0$. Assim, $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$, para todos $a_1,a_2 \in A$. Portanto, A é comutativa.

Exemplo 8. *O polinômio de Hall, dado por $[[x_1,x_2]^2,x_3]$ é uma identidade polinomial para $M_2(K)$.*

Com efeito, sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(K)$,

$$[A,B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - a_{12}b_{11} - a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - a_{11}b_{21} - a_{21}b_{22} & a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21} \end{bmatrix}.$$

Calculando o traço da matriz resultante de $[A,B]$, temos

$$tr([A,B]) = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21} = 0.$$

Daí, seja $C = [A, B]$, com $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{11} \end{bmatrix}$. Calculando C^2 temos,

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{bmatrix} c_{11}^2 + c_{12}c_{21} & c_{11}c_{12} - c_{12}c_{11} \\ c_{21}c_{11} - c_{11}c_{21} & c_{21}c_{12} + c_{11}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11}^2 + c_{12}c_{21} & 0 \\ 0 & c_{21}c_{12} + c_{11}^2 \end{bmatrix} \\ &= (c_{11}^2 + c_{12}c_{21}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Chamando $c_{11}^2 + c_{12}c_{21}$ de λ, temos que $C^2 = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot I$, com I sendo a matriz identidade 2×2.

Voltando ao polinômio de Hall, segue que

$$\begin{aligned} [[A, B]^2, D] &= [C^2, D] \\ &= [\lambda I, D] \\ &= \lambda I \cdot D - D \cdot \lambda I \\ &= \lambda \cdot (ID - DI) = \lambda \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, o polinômio de Hall é uma identidade polinomial para $M_2(K)$.

Observe que, além da demonstração apresentada acima, também é possível provar que o polinômio de Hall é uma identidade para $M_2(K)$, utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton da Álgebra Linear.

Exemplo 9. *Toda K-álgebra A de dimensão finita n satisfaz o polinômio standard*

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (sgn\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n+1)}.$$

Onde S_{n+1} é o grupo de permutação de $1, 2, \ldots, n+1$ e $sgn\ \sigma$ é o sinal da permutação σ.

De fato, como toda permutação é bijetiva, os $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n+1)}$ são todos distintos, então $f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ é linear em todas as suas variáveis, ou seja cada x_i aparece com grau 1. Seja $\beta = \{e_1, \ldots e_n\}$ uma base do espaço vetorial A e $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elementos arbitrários da álgebra A. Podemos representar cada um dos seus elementos a_i na forma de combinação linear dos elementos da base com coeficientes em K, ou seja, $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$.

Assim, $f_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ é uma combinação linear de termos da forma $f_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}})$. Observe que então existem $p \neq q$ tais que $i_p = i_q$, já que a base tem dimensão n.

Lembrando que o conjunto das permutações pares A_{n+1} é um subgrupo normal de S_{n+1}, e que o índice de A_{n+1} em S_{n+1} é 2. Então existem duas classes laterais disjuntas no grupo quociente S_{n+1}/A_{n+1}. Assim, podemos escrever

$$S_{n+1} = A_{n+1}\dot{\cup}A_{n+1}\tau,$$

onde a permutação τ é o 2-ciclo que permuta i_p e i_q. Desse modo,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}}) &= \sum_{\sigma\in S_{n+1}} (sgn\ \sigma)e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_{n+1})} \\
&= \sum_{\sigma\in A_{n+1}} e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_{n+1})} + \sum_{\sigma\in A_{n+1}} (sgn\ \sigma\tau)e_{\sigma\tau(i_1)}\cdots e_{\sigma\tau(i_{n+1})} \\
&= \sum_{\sigma\in A_{n+1}} e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_{n+1})} - \sum_{\sigma\in A_{n+1}} e_{\sigma\tau(i_1)}\cdots e_{\sigma\tau(i_{n+1})} \\
&= \sum_{\sigma\in A_{n+1}} e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_{n+1})} - \sum_{\sigma\in A_{n+1}} e_{\sigma(i_1)}\cdots e_{\sigma(i_{n+1})}. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ é uma identidade polinomial para A.

Observação 3. *Retomando a propriedade de anticomutatividade, sabemos que, para quaisquer elementos da base da álgebra de Grassmann, vale $e_ie_j = -e_je_i$. Essa propriedade permite reordenar produtos de elementos da base à menos de um sinal, recurso que será amplamente utilizado em demonstrações ao longo deste texto. Nesse sentido, considerando, $a = e_{i_1}\cdots e_{i_r}$, $b = e_{j_1}\cdots e_{j_s}$, tem-se:*

$$[a, b] = e_{i_1}\cdots e_{i_r}e_{j_1}\cdots e_{j_s} - e_{j_1}\cdots e_{j_s}e_{i_1}\cdots e_{i_r} = (1 - (-1)^{rs})e_{i_1}\cdots e_{i_r}e_{j_1}\cdots e_{j_s}.$$

Onde a potência rs indica o número de transposições necessárias para transformar ba em ab em função de seus índices. Por exemplo, tomando $a = e_{i_1}e_{i_2}$ e $b = e_{j_1}e_{j_2}$, então

$$\begin{aligned}
ba &= e_{j_1}e_{j_2}e_{i_1}e_{i_2} \\
&= -1(e_{j_1}e_{i_1}e_{j_2}e_{i_2}) \\
&= (-1)(-1)(e_{i_1}e_{j_1}e_{j_2}e_{i_2}) \\
&= (-1)(-1)(-1)(e_{i_1}e_{j_1}e_{i_2}e_{j_2}) \\
&= (-1)(-1)(-1)(-1)(e_{i_1}e_{i_2}e_{j_1}e_{j_2}) \\
&= (-1)^{2\cdot 2}(e_{i_1}e_{i_2}e_{j_1}e_{j_2}).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[a, b] &= ab - ba \\
&= e_{i_1}e_{i_2}e_{j_1}e_{j_2} - ((-1)^{2\cdot 2}(e_{i_1}e_{i_2}e_{j_1}e_{j_2})) \\
&= (1 - (-1)^{2\cdot 2})(e_{i_1}e_{i_2}e_{j_1}e_{j_2}).
\end{aligned}$$

Exemplo 10. *A álgebra de Grassmann E de dimensão infinita satisfaz a identidade polinomial* $[[x_1, x_2], x_3]$.

De fato, tomemos quaisquer três vetores de uma base de E associada a ele:

$$a = e_{i_1} \cdots e_{i_r}, \quad b = e_{j_1} \cdots e_{j_s} \quad \text{e} \quad c = e_{k_1} \cdots e_{k_t}.$$

Usando a Observação 3, segue que

$$[a, b] = (1 - (-1)^{rs}) e_{i_1} \cdots e_{i_r} e_{j_1} \cdots e_{j_s}.$$

Onde a potência rs indica o número de transposições necessárias para transformar ba em ab em função de seus índices. Note que, o fator $(1 - (-1)^{rs})$ decide se o comutador é nulo ou não. Se rs é **par**, então $(-1)^{rs} = 1$, logo

$$[a, b] = (1 - 1)\, e_{i_1} \cdots e_{i_r} e_{j_1} \cdots e_{j_s} = 0.$$

Isso ocorre se r ou s pares. Assim,

$$[[a, b], c] = [0, c] = 0.$$

Para o caso em que r e s sejam ambos números ímpares, temos que, $ba = -ab$ e daí,

$$[[a, b], c] = [ab - ba, c] = [ab - (-ab), c] = 2[ab, c],$$

onde o comprimento de ab é igual $r + s$, que é par. Assim, pelo argumento dado no caso anterior, teremos $[ab, c] = 0$, qualquer que seja o comprimento de c. Logo, o polinômio $[[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para a álgebra de Grassmann.

Nem toda álgebra pode ser classificada como uma PI-álgebra, como será exemplificado a seguir.

Exemplo 11. *A álgebra livre $K\langle X\rangle$ não é uma PI-álgebra, pois, uma vez que f é uma identidade polinomial de $K\langle X\rangle$, com $x_1, \cdots x_n \in K\langle X\rangle$, acontece que $f(x_1, \cdots x_n) = 0$, logo f é o polinômio nulo.*

Definição 1.12. *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é denominado T-ideal se é invariante por endomorfismos de $K\langle X\rangle$, ou seja $\varphi(I) \subset I$, para todo endomorfismo φ de $K\langle X\rangle$.*

Definição 1.13. *Seja A uma álgebra, o conjunto*

$$Id(A) = \{f \in K\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \ em \ A\},$$

é definido como o conjunto das identidades polinomiais de A.

Observação 4. *(i) O polinômio nulo é sempre uma identidade polinomial para A.*

(ii) $f - \alpha g$ *é identidade polinomial para A, se* f, g *são identidades polinomiais para A e* $\alpha \in K$.

(iii) fh *e* hf *são identidades polinomiais para A, se f for identidade polinomial de A, para todo* $h \in K\langle X\rangle$.

(iv) $f(g_1, \cdots, g_n)$ *é uma identidade polinomial para A, se* $f(x_1, \cdots, x_n)$ *for identidade polinomial de A, para todo* $g_1, \cdots, g_n \in K\langle X\rangle$. *Uma vez que* $f \in Id(A)$ *e* $g_i(a_1, \cdots, a_k) \in A$, *com* $i = 1, \cdots, n$, *para quaisquer* $a_1, \cdots, a_k \in A$.

A próxima proposição resume a observação feita anteriormente.

Proposição 1.3. *O conjunto* $Id(A)$ *das identidades polinomiais de uma álgebra A é um* $T-$*ideal.*

Demonstração. Segue da observação anterior que $Id(A)$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Resta mostrar que $Id(A)$ é invariante por endomorfismos. Seja $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in Id(A)$ e $g_1, \cdots, g_n \in K\langle X\rangle$. Considerando que os endomorfismos φ de $K\langle X\rangle$ são dado por

$$\varphi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle$$

$$x_i \to g_i,$$

então, $\varphi(f) = \varphi(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)) = f(g_1, \cdots, g_n) = 0$, Deste modo, $f(g_1, \cdots, g_n) \in Id(A)$. Logo, podemos concluir que $\varphi(Id(A)) \subset Id(A)$. □

Se $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de $Id(A)$ como $T-$ideal, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base das identidades** de A e denotamos $Id(A) = \langle \mathcal{B}\rangle^T$

Exemplo 12. *Seja A uma álgebra comutativa (com unidade) sobre um corpo infinito,* $Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$.

A demonstração deste resultado será apresentada na seção seguinte, pois ainda precisamos estabelecer um resultado necessário para sua prova.

1.4 Polinômios Multihomogêneos, Multilineares e Próprios

Quando estamos manipulando com um corpo K infinito e buscamos caracterizar o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra específica, podemos nos concentrar apenas nos seus polinômios multihomogêneos. Se K possuir característica zero, podemos simplificar o estudo para identidades polinomiais multilineares. Nesta seção, apresentaremos a justificativa para realizar essas reduções e como elas facilitam a análise do conjunto de identidades polinomiais em contextos específicos.

Definição 1.14. *O polinômio* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ *é dito* ***homogêneo*** *de grau k na variável* x_i *se todos os seus monômios tem grau k em* x_i *e denotamos por* $deg_{x_i}(f) = k$. *Dizemos que* f *é* ***multihomogêneo*** *de* ***multigrau*** $(deg_{x_1}(f), deg_{x_2}(f), \cdots, deg_{x_n}(f))$ *se* f *é homogêneo em cada uma de suas variáveis. Sendo* $f \in K\langle X\rangle$, *a soma de todos os monômios de* f *com um dado multigrau é chamado de* ***componente multihomogênea*** *de* f. *Um polinômio* f *é* ***linear na variável*** x_i, *se* x_i *ocorre com grau 1 em cada monômio de* f. *Um polinômio que é multihomogêneo e linear em cada uma de suas variáveis é dito* ***multilinear***. *Já um* ***monômio linear*** *é um elemento de* $K\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ *da forma* $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ *com todos os* i_j *distintos e* $r \geq 1$.

Definição 1.15. *Denotamos por* P_n *o espaço vetorial de todos os polinômios em* $K\langle X\rangle$ *que são multilineares. Como* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *um polinômio multilinear nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$, *cada variável aparece em cada monômio com grau 1, tal polinômio será sempre da forma*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in K$. *Claramente,* P_n *tem dimensão* $n!$ *e tem base*

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Exemplo 13.

1. *O polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2^2x_3 + x_1^4x_2^3x_3$ *é homogêneo em* x_1 *e* x_3 *com* $deg_{x_2}(f) = 4$ *e* $deg_{x_3}(f) = 1$. *Note também que* f *é linear na variável* x_3.

2. *O polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2^2x_3 - x_2x_3x_2x_1^3 + x_3x_2x_1x_2x_1^2$ *é multihomogêneo de multigrau* $(3, 2, 1)$.

3. *O polinômio* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3$ *é multilinear.*

Proposição 1.4. *Seja*

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i *é a componente homogênea de* f *de grau* i *em* x_1.

(i) Se o corpo K contém mais de n elementos (por exemplo, K é infinito), então as identidades polinomiais $f_i \equiv 0$, *com* $i = 0, 1, \cdots, n$, *segue de* $f \equiv 0$.

(ii) Se o corpo for de característica 0 (ou se $charK > degf$*), então* $f \equiv 0$ *é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.*

As demonstrações de tais resultados podem ser encontradas em [2], páginas 39-40.

Definição 1.16. *Seja $f \in K\langle X\rangle$. Dizemos que f é um* ***polinômio próprio (ou comutador)****, se é uma combinação linear de produtos de comutadores, ou seja,*

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \sum \alpha_{i,\cdots,j}[x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}] \cdots [x_{j_1}, \cdots, x_{j_q}],$$

com $\alpha_{i,\cdots,j} \in K$.

Assumimos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores. Denotamos por B o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X\rangle$,

$$B_m = B \cap K\langle x_1 \cdots x_m\rangle,\ m = 1, 2, \cdots,\ \Gamma_n = B \cap P_n,\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

ou seja, B_m é o conjunto dos polinômios próprios em m variáveis e Γ_n é o conjunto de todos os polinômios multilineares próprios de grau n.

Proposição 1.5. *Seja A uma álgebra uma PI-álgebra, definida sobre um corpo infinito K. Então, todas as identidades polinomiais de A decorrem das identidades próprias, ou seja, daquelas pertencentes à interseção $Id(A) \cap B$. Além disso, se a característica de K for zero, então as identidades polinomiais de A decorrem das identidades próprias multilineares, ou seja, daquelas em $Id(A) \cap \Gamma_n$, para todo $n = 2, 3, \ldots$*

A demostração de tal resultado pode ser encontrado em [2], Proposição 4.3.3, p. 42-44.

Podemos agora demonstrar o Exemplo 12, apresentado em seção anterior, o qual afirma que, se A é uma álgebra comutativa com unidade sobre um corpo infinito, então $Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$.

De fato, pelo Exemplo 7, se A é uma álgebra comutativa, sabemos que $[x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial para A. Como $Id(A)$ é um T-ideal, segue que $\langle [x_1, x_2]\rangle^T \subseteq Id(A)$.

Para a inclusão inversa, Pela Proprosição 1.5 podemos supor que f é $f \in Id(A)$, um polinômio multilinear próprio. Uma vez que A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito, suas identidades polinomiais seguem do conjunto das identidades polinomiais próprias e multilineares, B.

Agora, note que qualquer comutador de ordem maior pode ser escrito recursivamente na forma

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}], x_k].$$

Dessa modo, todo comutador pertence ao T-ideal gerado por $[x_1, x_2]$. Como f é uma combinação linear de produtos de comutadores, concluímos que

$$Id(A) = \langle Id(A) \cap B\rangle^T \subseteq \langle [x_1, x_2]\rangle^T.$$

1.5 Linearização Parcial

Nesta seção, faremos uma breve análise do processo de linearização parcial de um polinômio, o qual será útil no estudo das identidades polinomiais com involução na álgebra de Grassmann.

Definição 1.17. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_t) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multihomogêneo. Para cada $i = 1, \ldots, t$, consideremos um inteiro $a_i \geq 1$ e tomemos as variáveis $x_{ij} \in X$, todas distintas, com $j = 1, \ldots, a_i$. Definimos a **linearização parcial de** f como a componente multihomogênea*

$$f\left(\sum_{j=1}^{a_1} x_{1j}, \sum_{j=1}^{a_2} x_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{a_t} x_{tj}\right),$$

e denotamos por $Lin(f)$ o conjunto de todas as suas linearizações parciais.

Exemplo 14. *Seja $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_2x_1^2$. Usando a linearização parcial de f, tomemos $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$, e introduzimos novas variáveis x_{11}, x_{12} para x_1 e x_{21} para x_2. Assim, substituimos:*

$$x_1 \to x_{11} + x_{12}, \quad x_2 \to x_{21}.$$

Calculamos então:

$$f(x_{11} + x_{12}, x_{21}) = (x_{11} + x_{12})^2 x_{21} + x_{21}(x_{11} + x_{12})^2.$$

Expandindo os produtos, obtemos

$$(x_{11} + x_{12})^2 = x_{11}^2 + x_{11}x_{12} + x_{12}x_{11} + x_{12}^2.$$

Substituindo na equação,

$$f(x_{11} + x_{12}, x_{21}) = (x_{11}^2 + x_{11}x_{12} + x_{12}x_{11} + x_{12}^2)x_{21} + x_{21}(x_{11}^2 + x_{11}x_{12} + x_{12}x_{11} + x_{12}^2).$$

Distribuindo x_{21}, segue que

$$\begin{aligned} f(x_{11} + x_{12}, x_{21}) = &(x_{11}^2x_{21}) + (x_{11}x_{12}x_{21}) + (x_{12}x_{11}x_{21}) + (x_{12}^2x_{21}) \\ &+ (x_{21}x_{11}^2) + (x_{21}x_{11}x_{12}) + (x_{21}x_{12}x_{11}) + (x_{21}x_{12}^2), \end{aligned}$$

e cada um dos polinômios dentro dos parênteses representa uma linearização parcial de f, ou seja, pertencem a $Lin(f)$.

O próximo resultado evidencia a importância das linearizações parciais no estudo das identidades polinomiais.

Lema 1.6. *Seja A uma álgebra com base D, K um corpo infinito e $f = f(x_1, \ldots, x_t) \in K\langle X\rangle$ um polinômio multihomogêneo. Então, $f \in Id(A)$ se, e somente se,*

$$\hat{f}(v_1, \ldots, v_l) = 0$$

para toda $\hat{f} \in Lin(f)$ e para todos $v_1, \ldots, v_l \in D$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [7]. ■

1.6 Identidades polinomiais da Álgebra de Grassmann

Nesta seção, descreveremos as identidades polinomiais da álgebra Grassmann e seus invariantes numéricos.

Observação 5. *Existem várias relações entre comutadores que facitam os cálculos, uma delas é a seguinte:*

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$

De fato,

$$\begin{aligned} [A, BC] &= ABC - BCA + (BAC - BAC) \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) \\ &= [A, B]C + B[A, C]. \end{aligned}$$

De maneira ánaloga, pode ser demostrado que $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Lema 1.7. *Seja* $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ *o T-ideal de* $K\langle X \rangle$ *gerado pela identidade polinomial* $[x_1, x_2, x_3]$. *Então os polinômios*

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \text{ e } [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

pertence a G.

Demonstração. De fato, pela 5, temos que

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$

Seja $[x_1, x_2^2, x_3] \in G$. Usando a igualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} [x_1, x_2^2, x_3] &= [x_1, x_2x_2, x_3] \\ &= [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [[x_1, x_2]x_2, x_3] + [x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \in G \end{aligned}$$

Como $[x_1, x_2, x_3] \in G$, então $[x_1, x_2, x_3]x_2 \in G$ e $x_2[x_1, x_2, x_3] \in G$. Daí,

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] \in G.$$

Uma vez que, $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] = [x_2, x_3][x_1, x_2] - [x_1, x_2][x_2, x_3]$, podemos escrever

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] = 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]] \in G$$

e, desde que $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] \in G$, temos que

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \in G.$$

Além disso, a linearização do polinômio $f(x) = [x_1, x][x, x_2]$ é dada por

$$h(y_1, y_2) = f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2) = [x_1, y_1][y_2, x_2] + [x_1, y_2][y_1, x_2].$$

o que ilustra o processo de linearização utilizado. Para um melhor entendimento desse procedimento, ver Exemplo 23.

Renomeando as variáveis concluímos que $[x_1, x_2][x_3, x_4]+[x_1, x_3][x_2, x_4]$ pertence a G. □

Lema 1.8. *Sejam K um corpo infinito de característica diferente de 2 e I um $T-$ideal tal que $[x_1, x_2, x_3] \in I$. Então o polinômio*

$$[x_1, x_2]x_3[x_2, x_4] \in I.$$

Demonstração. De fato, note que, pelo Lema 1.7 anterior, substituindo $x_1 = x_1x_3$ e $x_3 = x_4$, temos que $[x_1x_3, x_2][x_2, x_4] \in I$. Por outro lado, podemos reescrever $[x_1x_3, x_2][x_2, x_4]$, usando $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$,

$$\begin{aligned} [x_1x_3, x_2][x_2, x_4] &= (x_1[x_3, x_2] + [x_1, x_2]x_3)[x_2, x_4] \\ &= x_1[x_3, x_2][x_2, x_4] + [x_1, x_2]x_3[x_2, x_4]. \end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 1.7, obtemos que $x_1[x_3, x_2][x_2, x_4] \in I$, então segue que $[x_1, x_2]x_3[x_2, x_4]$ também pertence a I, como queríamos.

□

Teorema 1.9. *Seja $char(K) = 0$ e E a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita. O T-ideal $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$.*

Demonstração. Segue do Exemplo 10 que $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade para E, portanto, $[x_1, x_2, x_3] \in T(E)$, daí $G \subseteq T(E)$, onde $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$.

Para completar a prova, precisamos provar a inclusão contrária. Primeiramente como E é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica zero, então as identidades polinomiais de E seguem das identidades multilineares próprias. Então, considere $f \in \frac{B(X)}{B(X) \cap G}$, um polinômio multilinear próprio.

Agora, como $[x_1, x_2, x_3] \in G$, temos que $[x_1, \cdots, x_s] \in G$, para todo $s \geq 3$. Além disso, pelo Lema 1.7, temos que $[x_{j_1}, x_{j_2}][x_{j_3}, x_{j_4}] = -[x_{j_1}, x_{j_3}][x_{j_2}, x_{j_4}]$. Logo, como

$[x_{j_1}, x_{j_2}] = -[x_{j_2}, x_{j_1}]$, concluímos que, f pode ser escrito como combinação linear de polinômios do tipo

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

onde $j_1 < \cdots < j_{2m}$, com $m = 0, 1 \cdots$

Assim, o conjunto $\frac{B(X)}{B(X) \cap G}$, onde $B(X)$ é o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X \rangle$ é gerado por

$$\beta = \{[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, \text{ para } k = 0, 1, \cdots\}$$

Por outro lado, note que se $f = \sum \alpha_i m_i \in T(E)$ com $m_i \in \beta$, então $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots$. De fato, como $i_1 < \cdots < i_{2k}$ podemos assumir $\sum \alpha_i m_i$ multiinear e desta forma $f(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{2k}}) = \alpha[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \cdots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$. Fazendo $x_{i_l} = e_{i_l}$, para $l = 1, \cdots, 2k$, obtemos $f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{2k}}) = \alpha_i 2^k e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}$, como $f \in T(E)$ temos $\alpha_i 2^k e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} = 0$. Logo $\alpha_i = 0$. Logo, β é linearmente independente em $\frac{B(X)}{B(X) \cap T(E)}$. Portanto, $G = T(E)$, como queríamos demonstrar. □

1.7 Álgebras com Involução

Neste seção, estudaremos involuções, os conceitos básicos sobre uma álgebra com involução, faremos a construção da álgebra livre com involução com a intenção de apresentar os conceitos de identidades e polinômios centrais com involução. Em todo o capítulo, K denotará um corpo de característica diferente de 2 e, a menos de menção contrária.

Definição 1.18. *Uma **involução** em uma álgebra A é uma aplicação $* : A \to A$ dada por $a \to a^*$ tal que, para todos $a, b \in A$, valem:*

1. $(a^*)^* = a$,
2. $(a + b)^* = a^* + b^*$,
3. $(ab)^* = b^* a^*$.

Por $*$ denotamos uma involução de uma álgebra. Álgebras com involução formam uma classe, e essas álgebras são chamadas $*$-álgebras sobre um corpo K. Denotamos o par formado pela álgebra A e a involução $*$ por $(A, *)$.

Sendo A uma álgebra associativa com unidade e $*$ uma involução em A, temos as seguintes observações:

$a)$ $1^* = 1$.

De fato, se $1^* = a$, então, pelo item 1 da Definição 1.18, $1 = a^*$, e pelo item 3, segue que

$$1 = a^* = (a \cdot 1)^* = 1^* \cdot a^* = a \cdot 1 = a.$$

b) Se $u \in A$ é invertível, então $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

De fato,

$$u^* \cdot (u^{-1})^* = (u^{-1} \cdot u)^* = 1^* = 1 = u^* \cdot (u^*)^{-1},$$

como queríamos.

Note que uma involução $*$ é uma transformação linear se, e somente se, $*$ restrita ao corpo K é a aplicação identidade. Como o centro de uma álgebra, $Z(A)$, é uma subálgebra de A, denotamos $Z(A, *) = \{a \in Z(A) \mid a^* = a\}$

Exemplo 15. *Se A é uma álgebra comutativa, então a aplicação identidade é uma involução sobre A, dita involução trivial.*

Definição 1.19. *Uma involução $*$ que é uma transformação linear é dita do **primeiro tipo**, caso contrário, é dita do **segundo tipo**.*

Exemplo 16. *Considere a aplicação $t : M_n(K) \to M_n(K)$, definida por $t(A) = A^t$ (transposta da matriz A). Temos que t é uma involução do primeiro tipo em $M_n(K)$, e é chamada de involução transposta.*

Exemplo 17. *Considerando $M_2(\mathbb{C})$ uma $\mathbb{C}$-álgebra, temos que $* : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ definida por*

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{z_1} & \bar{z_3} \\ \bar{z_2} & \bar{z_4} \end{pmatrix},$$

em que $\bar{z_i}$ é o conjugado do número complexo z_i, é uma involução do segundo tipo.

Exemplo 18. *Construiremos um exemplo de involução $*$ para a álgebra de Grassmann E. Considere, $1^* = 1$ e para cada gerador e_i de E,*

$$e_i^* = \begin{cases} e_i, & \text{se } i \text{ é par}, \\ -e_i, & \text{se } i \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Para um elemento básico de comprimento ≥ 2, $v = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} \in \beta'$ (base sem 1), definimos

$$v^* = e_{i_n}^* \cdots e_{i_2}^* e_{i_1}^*.$$

Agora, como $*$ está definida em toda a base B de E, estendemos $*$ para toda a álgebra E de forma linear. Portanto, $*$ é um exemplo de involução do primeiro tipo para a álgebra de Grassmann E.

De fato, considere $v = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}$ e $u = e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_m}$. Para mostrar o item 1. da Definição 1.18, para o caso $n = 1$, temos um gerador $v = e_i$. Pela definição da involução, se i é par, então

$$(v^*)^* = (e_i^*)^* = (e_i)^* = e_i = v.$$

Se i é ímpar, obtemos

$$(v^*)^* = (e_i^*)^* = (-e_i)^* = -e_i^* = -(-e_i) = e_i = v.$$

Para o caso geral, seja $v = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}$. Pela definição da involução, temos:

$$v^* = e_{i_n}^* e_{i_{n-1}}^* \cdots e_{i_1}^*.$$

Aplicando a involução novamente, obtemos:

$$(v^*)^* = (e_{i_n}^* e_{i_{n-1}}^* \cdots e_{i_1}^*)^*.$$

Note que, pelo caso $n = 1$, a involução aplicada duas vezes a um único gerador e_i resulta em e_i, independentemente de i ser par ou ímpar. Dessa forma, ao aplicarmos a primeira involução em v, obtemos $e_{i_n}e_{i_{n-1}}\cdots e_{i_1}$, possivelmente com um sinal. No entanto, qualquer troca de sinais introduzida na primeira aplicação será cancelada na segunda.

Além disso, como a involução inverte a ordem dos fatores a cada aplicação, a segunda aplicação reverte a ordem de volta para a configuração original, restaurando a sequência $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n}$. Assim, concluímos:

$$(v^*)^* = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n} = v.$$

Para o item 2., a propriedade segue diretamente da construção da definição. Como a aplicação $*$ foi estendida por linearidade a toda a álgebra E, temos que, para quaisquer elementos $u, v \in E$, vale

$$(u + v)^* = u^* + v^*.$$

Por fim, para o item 3., temos

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^* &= (e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_m} \cdot e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n})^* \\
&= (e_{i_n}^* \cdots e_{i_2}^* e_{i_1}^* e_{j_m}^* \cdots e_{j_2}^* e_{j_1}^*) \\
&= (e_{i_n}^* \cdots e_{i_2}^* e_{i_1}^*) \cdot (e_{j_m}^* \cdots e_{j_2}^* e_{j_1}^*) \\
&= (e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n})^* \cdot (e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_m})^* = v^* \cdot u^*.
\end{aligned}$$

Note que, $(E, *)$ é uma involução do primeiro tipo, isto é, $*$ é uma transformação linear. De fato, pelo item 2., garantimos que $(u+v)^* = u^* + v^*$. Da mesma forma, como a definição de $*$ foi estendida por linearidade a partir da base da álgebra, segue que, para todo $\alpha \in K$ e $u \in E$, temos

$$(\alpha u)^* = \alpha u^*.$$

Definição 1.20. *Dizemos que um elemento $a \in (A, *)$ é **simétrico** se $a^* = a$ e é **antissimétrico** se $a^* = -a$.*

Assim, denotamos por $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ os subespaços de A dos elementos simétricos e antissimétricos, respectivamente. Deste modo, temos que $A^+ \cap A^- = \{0\}$, uma vez que a característica do corpo é diferente de 2. Com isso, podemos escrever $A = A^+ \oplus A^-$. De fato, calculando

$$(a + a^*)^* = a^* + a^{**} = a^* + a = a + a^*$$

e

$$(a - a^*)^* = a^* - a^{**} = a^* - a = -(a - a^*).$$

concluimos que $a + a^* \in A^+$ e $a - a^* \in A^-$. E como $char(K) \neq 2$, segue que, $a = \frac{(a+a^*)}{2} + \frac{(a-a^*)}{2}$ para todo $a \in A$. Portanto, $A = A^+ \oplus A^-$.

Definição 1.21. *Uma função $\varphi : (A, \bullet) \to (B, \circ)$ é um **homomorfismo de álgebras com involução** (ou $*$-homomorfismo) se φ for um homomorfismo de álgebras e, para todo $a \in A$,*

$$\varphi(a^\bullet) = (\varphi(a))^\circ.$$

*Duas álgebras com involução $(A, \bullet), (B, \circ)$ são ditas **isomorfas**, e escrevemos $(A, \bullet) \cong (B, \circ)$, se houver um $*$-isomorfismo $\varphi : (A, \bullet) \to (B, \circ)$, ou seja, um $*$-homomorfismo bijetor.*

1.8 Álgebra Livre com Involução

Sejam $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ e $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \cdots\}$ dois conjuntos infinitos enumeráveis e disjuntos. A álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por $X \cup X^*$ é escrita como $K\langle X \cup X^* \rangle$. Seja $\circ$ uma involução sobre essa álgebra.

Onde para os geradores, temos que $1^\circ = 1, x_i^\circ = x_i^*$ e $(x_i^*)^\circ = x_i$. Em um monômio qualquer $v = w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in X \cup X^*$, defina

$$v^\circ = (w_1 w_2 \cdots w_n)^\circ = (w_n)^\circ \cdots (w_2)^\circ (w_1)^\circ,$$

e estenda $\circ$ para toda a álgebra $K\langle X \cup X^* \rangle$ de forma linear. A fim de evitar confusão, denotaremos $\circ = *$. Os elementos de $K\langle X \cup X^* \rangle$ sao chamados de *-polinômios.

Definição 1.22. *Seja $(A, \circ)$ uma álgebra com involução. Um polinômio $f \in K\langle X \cup X^*\rangle$ é dito ser uma* ***$*$-identidade polinomial (ou identidade polinomial com involução)*** *para $(A, \circ)$ se f pertence ao núcleo de todo $*$-homomorfismo $\varphi : K\langle X \cup X^*\rangle \to A$. Denotamos por $Id(A, \circ)$ o conjunto de todas as $*$-identidades polinomiais de $(A, \circ)$.*

Proposição 1.10. *Sejam $(A, \circ)$ uma álgebra com involução e $f = f(x_1, x_1^*, \cdots, x_n, x_n^*) \in K\langle X \cup X^*\rangle$ um polinômio. Então $f \in Id(A, \circ)$ se, e somente se,*

$$f(a_1, a_1^\circ, \cdots, a_n, a_n^\circ) = 0,$$

para todos $a_1, \cdots, a_n \in A$.

Demonstração. Suponha que $f = f(x_1, x_1^*, \cdots, x_n, x_n^*) \in Id(A, \circ)$ e sejam $a_1, \cdots, a_n \in A$. Tomemos uma aplicação $X \cup X^* \to A$ que leva $x_i \mapsto a_i$ e $x_i^* \mapsto a_i^\circ$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Como $K\langle X \cup X^*\rangle$ é associativa livre, essa aplicação se estende a um homomorfismo $\varphi : K\langle X \cup X^*\rangle \to A$, que também é um $*$-homomorfismo. Como φ é um $*$-homomorfismo, temos que

$$\varphi(f) = \varphi(f(x_1, x_1^*, \cdots, x_n, x_n^*)) = f(\varphi(x_1), \varphi(x_1^*), \cdots, \varphi(x_n), \varphi(x_n^*)) = f(a_1, a_1^\circ, \cdots, a_n, a_n^\circ),$$

mas, por hipótese, $f \in Id(A, \circ)$. Logo, $\varphi(f) = 0$.

Por outro lado, se $\varphi : K\langle X \cup X^*\rangle \to A$ é um $*$-homomorfismo qualquer, e $a_i = \varphi(x_i)$, então $a_i^\circ = \varphi(x_i)^\circ = \varphi(x_i^*)$, e assim,

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1, a_1^\circ, \cdots, a_n, a_n^\circ) \\ &= f(\varphi(x_1), \varphi(x_1^*), \cdots, \varphi(x_n), \varphi(x_n^*)) \\ &= \varphi(f(x_1, x_1^*, \cdots, x_n, x_n^*)), \end{aligned}$$

ou seja, $f \in ker(\varphi)$, e portanto, $f \in Id(A, \circ)$. Assim, segue o resultado. □

Apesar da caracterização construída acima, para o estudo das $*$-identidades polinomiais e dos $*$-polinômios centrais de uma álgebra com involução, definiremos os polinômios de uma forma mais conveniente. Sejam $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$, dois conjuntos enumeráveis infinitos, onde

$$y_i = x_i + x_i^* \text{ e } z_i = x_i - x_i^*,$$

para todo $i \geq 1$. Note que cada y_i é um elemento simétrico, e que cada z_i é um elemento antissimétrico, e podemos considerar a álgebra livre unitária $K\langle Y \cup Z\rangle$, livremente gerada por $Y \cup Z$. Assim, $K\langle X \cup X^*\rangle = K\langle Y \cup Z\rangle$, e, a partir de agora, utilizaremos essa construção.

Lema 1.11. *Se $\varphi : (K\langle Y \cup Z\rangle, *) \to (A, \circ)$ é um $*$-homomorfismo de álgebras, então φ leva elementos simétricos de $K\langle Y \cup Z\rangle$ em elementos simétricos de A e elementos antissimétricos de $K\langle Y \cup Z\rangle$ em elementos antissimétricos de A.*

Demonstração. Seja $f \in K\langle Y \cup Z\rangle$ simétrico, então $f(y_1, \cdots, y_n)^* = f(y_1, \cdots, y_n)$. Assim, $\varphi(f(y_1, \cdots, y_n)^*) = \varphi(f(y_1, \cdots, y_n))$. Como φ é um $*$-homomorfismo de álgebras, temos que $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^\circ, \forall a \in A$ Daí,

$$(\varphi(f(y_1, \cdots, y_n)))^\circ = \varphi(f(y_1, \cdots, y_n)^*) = \varphi(f(y_1, \cdots, y_n)) = \varphi(f),$$

que é simétrico em A. De maneira análoga, mostramos para $\varphi(f)$ antissimétrico.

□

Proposição 1.12. *Se $a_1, a_2, \ldots$ são elementos simétricos de A, uma álgebra com involução e $b_1, b_2, \cdots$ são elementos antissimétricos de A, então existe um $*$-homomorfismo de álgebras $\varphi : (K\langle Y \cup Z\rangle, *) \to (A, \circ)$ tal que $\varphi(y_i) = a_i$ e $\varphi(z_i) = b_i$, para todo $i \geq 1$.*

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : Y \cup Z \to A$, tal que $y_i \mapsto a_i$ e $z_i \mapsto b_i$. Como a álgebra $K\langle Y \cup Z\rangle$ é livre, a aplicação ϕ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras

$$\varphi : K\langle Y \cup Z\rangle \to A.$$

Falta mostrar que φ é um $*$-homomorfismo, ou seja, que $\varphi(f^*) = (\varphi(f))^\circ$. De fato, para o caso simétrico, temos que $y_i^* = y_i$ e $a_i^\circ = a_i$, então

$$\varphi(y_i^*) = \varphi(y_i) = a_i \text{ e } \varphi(y_i)^\circ = a_i^\circ = a_i.$$

De maneira análoga, mostramos para o caso antissimétrico.

□

Proposição 1.13. *Um polinômio $f = f(x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m)$ é uma $*$-identidade polinomial para a $*$-álgebra A se, e somente se, $f(a_1, \cdots, a_l, b_1, \cdots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \cdots, a_l \in A^+$ e $b_1, \cdots, b_m \in A^-$.*

Demonstração. Seja $c_i \in (A, *)$, podemos escrever $c_i = a_i + b_i$, onde $a_i^* = a_i$ e $b_i^* = -b_i$. Suponha que, $l \geq m$. Então, considere o seguinte homomorfismo

$$\varphi : K\langle Z, *\rangle \to (A, *)$$

$$(z_i + z_i^*)/2 = x_i \to a_i$$

$$(z_i - z_i^*)/2 = y_i \to b_i.$$

Por hipótese, f é uma $*$-identidade polinomial, então

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(f(x_1,\cdots,x_l,y_1,\cdots,y_m)) \\ &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_l),\varphi(y_1),\cdots,\varphi(y_m)) \\ &= f(a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m), \end{aligned}$$

para quaisquer $a_i \in A^+$ e $b_i \in A^-$.

Agora reciprocamente, suponha que $f(a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m) = 0$ e considere um $*$-homomorfismo qualquer

$$\varphi : K\langle Z,*\rangle \to (A,*)$$

tal que

$$a_i = \frac{1}{2}(\varphi(z_i) + \varphi(z_i^*)) = \frac{1}{2}(\varphi(z_i + z_i^*)) = \varphi(x_i)$$

e, analogamente temos que, $b_i = \varphi(y_i)$. Segue que

$$\begin{aligned} \varphi(f(x_1,\cdots,x_l,y_1,\cdots,y_m)) &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_l),\varphi(y_1),\cdots,\varphi(y_m)) \\ &= f(a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f \in Ker\varphi$ para qualquer $*$-homomorfismo φ, ou seja, f é uma $*$-identidade polinomial para a $*$-álgebra A. □

Exemplo 19. *Seja UT_2 munida da involução $*$ dada por:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Observe que $\{1, e_{12}\}$ forma uma base para UT_2^+, enquanto $\{e_{11} - e_{22}\}$ forma uma base para UT_2^-. Assim, $[y_1, y_2] \in Id(UT_2, *)$, pois, se $a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 e_{12}$ e $a_2 = \alpha_3 + \alpha_4 e_{12}$ são elementos quaisquer de UT_2^+, temos

$$[a_1, a_2] = [\alpha_1 + \alpha_2 e_{12}, \alpha_3 + \alpha_4 e_{12}] = [\alpha_2 e_{12}, \alpha_4 e_{12}] = 0,$$

e $[z_1, z_2] \in Id(UT_2, *)$, pois, se $b_1 = \alpha_1(e_{11} - e_{22})$ e $b_2 = \alpha_2(e_{11} - e_{22})$ são elementos quaisquer de UT_2^-, temos

$$[b_1, b_2] = [\alpha_1(e_{11} - e_{22}), \alpha_2(e_{11} - e_{22})] = 0$$

e assim, o resultado segue da proposição anterior.

Definição 1.23. *Considere o par $(A, *)$ uma álgebra com involução, dizemos que um ideal I de A é um* ***$*$-ideal*** *se $a^* \in I$, para todo $a \in I$.*

Definição 1.24. *Um $*$-ideal I de $K\langle Y \cup Z\rangle$ é chamado de $T(*)$-ideal se $\varphi(I) \subset I$ para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$.*

Definição 1.25. *Se $S \subset K\langle Y \cup Z\rangle$, então o $T(*)$-ideal* **gerado** *por S, denotado por $\langle S\rangle^{T(*)}$, é a interseção de todos os $T(*)$-ideais que contêm S.*

Note que $\langle S\rangle^{T(*)}$ é o menor $T(*)$-ideal que contém S. Quando S é finito e $I = \langle S\rangle^{T(*)}$, dizemos que I é finitamente gerado.

Lema 1.14. *Dado um subconjunto $S \subset K\langle Y \cup Z\rangle$, o $T(*)$-ideal $\langle S\rangle^{T(*)}$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares de polinômios da seguinte forma:*

$$g_0 f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_1,$$

onde $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in S \cup S^*$, $g_0, g_1 \in K\langle Y \cup Z\rangle, h_1, \cdots, h_m \in K\langle Y \cup Z\rangle^+$ e $w_1, \cdots, w_n \in K\langle Y \cup Z\rangle^-$.

Demonstração. Conside W como o conjunto formado por todas as combinações lineares definidas acima. Mostraremos que $W = \langle S\rangle^{T(*)}$

Para mostrar $W \subset \langle S\rangle^{T(*)}$, como $\langle S\rangle^{T(*)}$ é um ideal, é suficiente verificar que cada

$$f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}.$$

Lembremos também que $\langle S\rangle^{T(*)}$ é um $*$-ideal, logo, se $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in S \cup S^*$, segue que $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}$.

Agora, pela Proposição 1.12, existe um $*$-endomorfismo $\varphi : K\langle Y \cup Z\rangle \to K\langle Y \cup Z\rangle$ tal que $\varphi(y_i) = h_i$ para todo $i = 1, \cdots, m$ e $\varphi(z_j) = w_j$, para todo $j = 1, \cdots, n$. Como $\langle S\rangle^{T(*)}$ é fechado por $*$-endomorfismos, segue que

$$\varphi(f) = f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}.$$

Para a inclusão contrária, é suficiente provar que W é um $T(*)$-ideal. Então, precisamos mostrar que W é um $*$-ideal e que é invariante por $*$-endomorfismos de $K\langle Y \cup Z\rangle$. Claramente W é um ideal, agora, para provar que é fechado pela involução, basta verificar que $p^* \in W$, onde p é um polinômio da forma

$$p = g_0 f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_1.$$

Considere φ o $*$-endomorfismo de $K\langle Y \cup Z\rangle$ tal que $\varphi(y_i) = h_i$ e $\varphi(z_j) = w_j$ para todo i, j. Temos que

$$\begin{aligned} p^* &= (g_0 f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_1)^* \\ &= g_1^* (\varphi(f))^* g_0^* \\ &= g_1^* \varphi(f^*) g_0^* \\ &= g_1^* f^*(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_0^* \in W. \end{aligned}$$

Agora, para mostrar que W é fechado por $*$-endomorfismos de $K\langle Y \cup Z\rangle$, precisamos mostrar que, se

$$p = g_0 f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_1,$$

então $\varphi(p) \in W$, para qualquer $*$-endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$. Note que $\varphi(h_i) \in K\langle Y \cup Z\rangle^+$ para todo $i = 1, \cdots, m$ e $\varphi(w_j) \in K\langle Y \cup Z\rangle^-$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \varphi(g_0 f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n) g_1) \\ &= \varphi(g_0)\varphi(f(h_1, \cdots, h_m, w_1, \cdots, w_n))\varphi(g_1) \\ &= \varphi(g_0) f(\varphi(h_1), \cdots, \varphi(h_m), \varphi(w_1), \cdots, \varphi(w_n))\varphi(g_1) \in W, \end{aligned}$$

e portanto, W é um $T(*)$-ideal. □

Agora vamos ao estudo dos $*$-polinômios centrais.

Definição 1.26. *Dizemos que $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ é um* ***polinômio central com involução (ou $*$-polinômio central)*** *para uma álgebra com involução $(A, \circ)$ se, para quaisquer $a_1, \cdots, a_m \in A^+$ e $b_1, \cdots, b_n \in A^-$,*

$$f(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n) \in Z(A).$$

Denotamos por $C(A, \circ)$ o conjunto de todos os $*$-polinômios centrais de $(A, \circ)$

Assim como no caso ordinário, temos que $Id(A, \circ) + K \subset C(A, \circ)$, e dizemos que esses são os $*$-polinômios centrais triviais. Dada uma álgebra com involução $(A, \circ)$, temos interesse em descobrir se existem $*$-polinômios centrais não triviais.

Exemplo 20. *Seja UT_2 com a involução **simplética** s dada por*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Então $f(y_1) = y_1$ é um $*$-polinômio central para UT_2, quando $char(K) \neq 2$.

De fato, Dado $Y_1 \in UT_2^+$ um elemento simétrico , temos que $Y_1^s = Y_1$ é preservado pela involução. Daí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

segue que, $a = c$ e $b = -b$, obtendo $b = 0$. Assim,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Como Y_1 é um múltiplo da identidade, claramente comuta com quaquer $g \in UT_2$. Portanto, $f(y_1) = y_1$ é um $*$-polinômio central de UT_2.

Definição 1.27. *Seja V um subespaço vetorial de $K\langle Y \cup Z\rangle$. Dizemos que V é um T-**espaço** se, para todo endomorfismo ϕ de $K\langle Y \cup Z\rangle$, temos $\phi(V) \subseteq V$. Analogamente, considerando a estrutura adicional de involução, V é chamado de $T(*)$-**espaço** se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $*$-endomorfismo φ de $K\langle Y \cup Z\rangle$.*

Note que, um $T(*)$-ideal é um conceito mais forte que um $T(*)$-espaço. Além de ser um subespaço vetorial fechado sob substituições de variáveis, ele também deve ser fechado sob multiplicação por qualquer polinômio em $K\langle Y \cup Z\rangle$. Em resumo, todo $T(*)$-ideal é um $T(*)$-espaço, mas nem todo $T(*)$-espaço é um $T(*)$-ideal.

Exemplo 21. *Seja $(E, *)$ a álgebra de Grassmann com a involução $*$ dada no Exemplo 18. Considere $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$, um polinômio central em $(E, *)$, e seja $g(x_3) = x_3$ em $K\langle Y \cup Z\rangle$. Agora, analisando o produto*

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)\, g(x_3) = [x_1, x_2]\, x_3.$$

E substituindo os geradores $x_1 = e_1, \quad x_2 = e_2, \quad x_3 = e_3$, temos

$$h(e_1, e_2, e_3) = [e_1, e_2]\, e_3 = (e_1e_2 - e_2e_1)e_3 = 2\, e_1e_2e_3.$$

Note que $e_1e_2e_3$ é um elemento de comprimento ímpar e, portanto, não pertence ao centro de $(E, *)$.

Concluímos que a multiplicação de um polinômio central por um polinômio arbitrário nem sempre resulta em um polinômio central.

Assim como no caso das $*$-identidades polinomiais, $C(A, \circ)$ sempre é um $T(*)$-espaço, e um dos problemas na área de PI-álgebras é tentar descrever o conjunto de $*$-polinômios centrais para uma dada álgebra com involução $(A, \circ)$. Assim, segue a seguinte definição:

Definição 1.28. *Se $S \subset K\langle Y \cup Z\rangle$, então o $T(*)$-**espaço gerado** por S, denotado por $\langle S\rangle^{TS(*)}$, é a interseção de todos os $T(*)$-espaços que contêm S. No caso sem involução, o T-**espaço gerado** por S, denotado por $\langle S\rangle^{TS}$, é definido como a interseção de todos os T-espaços que contêm S.*

Definição 1.29. *Um polinômio $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ é dito ser $Y-$**próprio** se for uma combinação linear de polinômios da forma*

$$z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n} c_1c_2 \cdots c_t,$$

onde $n, t \geq 0, r_1, \cdots, r_n \geq 0$ e $c_1, \cdots, c_t \in K\langle Y \cup Z\rangle$ são comutadores de comprimento ≥ 2. Denotamos por B o conjunto de todos os polinômios $Y-$próprios.

Proposição 1.15. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2 e H um $T(*)-$ideal, então H é gerado (como $T(*)-$ideal) por seus elementos $Y-$próprios multihomogêneos. Se K for de característica zero, H é gerado por seus elementos $Y-$próprios multilineares.*

Demonstração. A demonstração é similar à encontrada em [2], Prop. 4.3.3.(ii) □

Exemplo 22. *Seja (E, φ) a álgebra de Grassmann sobre K um corpo de $char(K) = 0$, com a involução φ. Considerando $H = Id(E, \varphi)$, o $T(*)$-ideal das $*$-identidades polinomiais de E. Pelo Teorema 3.1, resultado será demonstrado no Capítulo 3, temos que*

$$Id(E, \varphi) = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)},$$

sendo o polinômio $[y_1 + z_1,\ y_2 + z_2,\ y_3 + z_3]$ Y-próprio e multilinear. Assim, H é gerado, como $T(*)$-ideal, por seus elementos Y-próprios multilineares.

Proposição 1.16. *Seja K um corpo infinito de característica $p > 2$. Se H é um $T(*)-$espaço, então H é gerado, como $T(*)-$espaço, por seus elementos multihomogêneos $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in H$ de multigrau $(p^{a_1}, \cdots, p^{a_m}, p^{b_1}, \cdots, p^{b_n})$, onde $a_i, b_j \geq 0$ para todos i, j.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [7], Proposição 1.4.5. □

Agora, estenderemos os resultados da seção de Linearização Parcial para o contexto de involuções.

Definição 1.30. *Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2, e seja $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ um polinômio multihomogêneo. Dados $a_i \geq 1$ para $i = 1, \ldots, m$ e $c_i \geq 1$ para $i = 1, \ldots, n$, consideremos variáveis distintas y_{ij} para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, a_i$ e z_{ij} para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, c_i$.*

Uma componente multihomogênea de

$$f\left(\sum_{j=1}^{a_1} y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{a_m} y_{mj}, \sum_{j=1}^{c_1} z_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{c_n} z_{nj}\right)$$

*é chamada de uma yz-**linearização parcial de** f, e denotamos por $Lin_{yz}(f)$ o conjunto de todas as yz-linearizações parciais de f.*

Exemplo 23. *Seja o polinômio $f(y_1, y_2, z_1) = y_1^2 z_1 + y_2 z_1^2 \in K\langle Y \cup Z \rangle$. Escolhendo $a_1 = 2, a_2 = 2$ e $c_1 = 2$, tomamos novas variáveis distintas $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, z_{11}, z_{12}$ Assim, substituindo:*

$$y_1 \to y_{11} + y_{12}, \quad y_2 \to y_{21} + y_{22} \text{ e } \quad z_1 \to z_{11} + z_{12},$$

obtemos a expressão:

$$f(y_{11} + y_{12}, y_{21} + y_{22}, z_{11} + z_{12}) = (y_{11} + y_{12})^2 (z_{11} + z_{12}) + (y_{21} + y_{22})(z_{11} + z_{12})^2.$$

Expandindo $(y_{11}+y_{12})^2$*, obtemos*

$$(y_{11}+y_{12})^2 = y_{11}^2 + y_{11}y_{12} + y_{12}y_{11} + y_{12}^2$$

Multiplicando por $(z_{11}+z_{12})$*, tem-se*

$$\begin{aligned}(y_{11}+y_{12})^2(z_{11}+z_{12}) &= (y_{11}^2 + y_{11}y_{12} + y_{12}y_{11} + y_{12}^2)(z_{11}+z_{12})\\ &= y_{11}^2z_{11} + y_{11}^2z_{12} + y_{11}y_{12}z_{11} + y_{11}y_{12}z_{12}\\ &\quad + y_{12}y_{11}z_{11} + y_{12}y_{11}z_{12} + y_{12}^2z_{11} + y_{12}^2z_{12}.\end{aligned}$$

Expandindo a outra parcela $(z_{11}+z_{12})^2$

$$(z_{11}+z_{12})^2 = z_{11}^2 + z_{11}z_{12} + z_{12}z_{11} + z_{12}^2.$$

E multiplicando por $(y_{21}+y_{22})$*, segue que*

$$\begin{aligned}(y_{21}+y_{22})(z_{11}+z_{12})^2 &= (y_{21}+y_{22})(z_{11}^2 + z_{11}z_{12} + z_{12}z_{11} + z_{12}^2)\\ &= y_{21}z_{11}^2 + y_{21}z_{11}z_{12} + y_{21}z_{12}z_{11} + y_{21}z_{12}^2\\ &\quad + y_{22}z_{11}^2 + y_{22}z_{11}z_{12} + y_{22}z_{12}z_{11} + y_{22}z_{12}^2.\end{aligned}$$

Reunindo os resultados anteriores, obtemos as seguintes yz*-linearizações parciais de* f*:*

$$\begin{array}{llll} y_{11}^2z_{11}, & y_{11}^2z_{12}, & y_{11}y_{12}z_{11}, & y_{11}y_{12}z_{12},\\ y_{12}y_{11}z_{11}, & y_{12}y_{11}z_{12}, & y_{12}^2z_{11}, & y_{12}^2z_{12},\\ y_{21}z_{11}^2, & y_{21}z_{11}z_{12}, & y_{21}z_{12}z_{11}, & y_{21}z_{12}^2,\\ y_{22}z_{11}^2, & y_{22}z_{11}z_{12}, & y_{22}z_{12}z_{11}, & y_{22}z_{12}^2. \end{array}$$

Portanto, o conjunto $Lin_{yz}(f)$ *contém todos esses monômios.*

De maneira análoga ao Lema 1.6, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Lema 1.17. *Sejam* K *um corpo infinito de característica diferente de* 2*,* A *uma álgebra com involução* $*$*,* B^+ *uma base para* A^+*,* B^- *uma base para* A^- *e* $f = f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdot, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ *um polinômio multihomogêneo. Então* $f \in Id(A,*)$ *se, e somente se,*

$$\hat{f}(v_1, \cdots, v_l, w_1, \cdots, w_k) = 0$$

para todo $\hat{f}(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_k) \in Lin_{yz}(f), v_1, \cdots, v_l \in B^+$ *e* $w_1, \cdots, w_k \in B^-$*.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7], Lema 1.5.3. □

Lema 1.18. *(Regev, 1991) Sejam* K *um corpo infinito de característica* $p > 2$ *e* E' *a álgebra de Grassmann sem unidade. Então* $x^p \in Id(E')$*. Em particular,* $x^p \in C(E)$*.*

Demonstração. Considere $g \in E'$ um elemento qualquer, podemos escrevê-lo como combinação linear de elementos da base,

$$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i,$$

onde $\alpha_i \in K$ e $w_i \in B'$. Segue que

$$g^p = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \right)^p = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} w_{i_1} \cdots w_{i_p}.$$

Se $k < p$, ao menos dois w_i em cada produto $w_{i_1} \cdots w_{i_p}$ são iguais, resultando em zero na álgebra de Grassmann e daí $g^p = 0$.

Se $k \geq p$, note que

$$g^p = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_p} U_p(w_{i_1} \cdots w_{i_p}),$$

onde

$$U_p(x_{i_1} \cdots x_{i_p}) = \sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)}.$$

Assim, temos que verificar que $U_p(w_{i_1} \cdots w_{i_p}) = 0$. Se $w_i \neq w_j$ são dois elementos de comprimento ímpar, então segue que

$$w_i b w_j = -w_j b w_i$$

para qualquer $b \in E$. Portanto, as parcelas vão se anular duas a duas, resultando em $U_p(w_{i_1} \cdots w_{i_p}) = 0$.

Agora, se apenas um dos elementos envolvidos possui comprimento ímpar e os demais têm comprimento par, então os elementos de comprimento par comutam com o de comprimento ímpar. Por outro lado, se todos os elementos têm comprimento par, eles comutam dois a dois. Para mais clareza, ver Observação 3. Em ambos os casos temos

$$U_p(w_{i_1} \cdots w_{i_p}) = 0 = p! w_{i_1} \cdots w_{i_p} = 0,$$

já que K tem característica p. Logo, segue que $g^p = 0$.

Em particular, se $g = \alpha + g_1$, com $\alpha \in K$ e $g_1 \in E'$,

$$g^p = (\alpha + g_1)^p = \sum \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \alpha^{p-k} g_1^k = \alpha^p + g_1^p = \alpha^p,$$

pois $char(K) = p$, como $\alpha \in K$ e $K \subset C(E)$, temos que $x^p \in C(E)$ □

O próximo resultado nos será útil no Capítulo 4 estudo dos polinômios centrais de E em característica positiva.

Lema 1.19. *Se K é um corpo infinito de característica $p > 2$, então*

$$(x_1x_2)^p - x_1^p x_2^p \in Id(E).$$

Demonstração. Sejam $g_1 = \alpha_1 + h_1, g_2 = \alpha_2 + h_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ e $h_1, h_2 \in E'$, onde E' é a álgebra de Grassmann sem unidade. Então $g_1g_2 = \alpha_1\alpha_2 + h_3$, onde $h_3 \in E'$, segue que

$$(g_1g_2)^p - g_1^p g_2^p = (\alpha_1\alpha_2 + h_3)^p - (\alpha_1 + h_1)^p(\alpha_2 + h_2)^p.$$

Como, K é um corpo infinito de característica $p > 2$, temos

$$(g_1g_2)^p - g_1^p g_2^p = (\alpha_1\alpha_2)^p + (h_3)^p - (\alpha_1^p + h_1^p)(\alpha_2^p + h_2^p).$$

De h_1, h_2 e $h_3 \in E'$, e usando o Lema 1.18, temos que

$$(g_1g_2)^p - g_1^p g_2^p = (\alpha_1\alpha_2)^p - (\alpha_1^p)(\alpha_2^p) = \alpha_1^p\alpha_2^p - (\alpha_1^p)(\alpha_2^p) = 0.$$

□

Teorema 1.20. *Sejam K um corpo infinito com característica $p > 2$,*

$$q(x_1, x_2) := x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1},$$

e para cada $n \geq 1$,

$$q_n = q_n(x_1, \cdots, x_{2n}) := q(x_1, x_2)q(x_3, x_4)\cdots q(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

Então

$$C(E) = \langle\{x_1[x_2, x_3, x_4], x_0^p, x_0^p q_n \mid n \geq 1\}\rangle^{TS}.$$

Mais ainda, $C(E)$ não é finitamente gerado como um $T-$espaço.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6], página 141. □

Capítulo 2

Involuções na Álgebra de Grassmann

Neste capítulo serão introduzidos conceitos e resultados sobre involuções da álgebra de Grassmann, estrutura em que diversas involuções distintas são possíveis, com o objetivo de fornecer ao leitor ferramentas para entender a simplificação feita ao estudarmos apenas um tipo de involução.

2.1 Involuções em E

Nesta seção usaremos as seguites notações: Consideraremos E e E' as álgebras de Grassmann unitária e não unitária, respectivamente, com o seguinte conjunto infinito de geradores $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$, onde B' é base E' formada pelos elementos

$$\xi = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k},$$

com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, enquanto $B = B' \cup \{1\}$ é uma base de E. Além disso, dado um elemento $\xi = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k} \in B'$, dizemos que k é o seu **comprimento**.

Lema 2.1. *Seja φ é uma involução em E. Então temos as seguintes afirmações:*

1. *$\varphi(\xi_j) \in E'$, para todo $j = 1, 2, \ldots$*
2. *Se $u \in B'$ tem comprimento k, então $\varphi(u)$ é dada como uma combinação linear de elementos de E' de comprimento maior ou igual a k.*

Demonstração. 1 : Como $\varphi(0) = 0$ e os ξ_j são geradores de E, sabemos que $\xi_j\xi_j = 0$. Escrevendo $\varphi(\xi_j) = \alpha_j + u_j$, com $\alpha_j \in K$ e $u_j \in E'$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\xi_j\xi_j) \\ &= \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) \\ &= (\alpha_j + u_j)(\alpha_j + u_j) \\ &= \alpha_j^2 + u, \end{aligned}$$

onde $u = 2\alpha_j u_j + u_j^2 \in E'$. Assim, $\alpha_j^2 = 0$, isto é, $\alpha_j = 0$ e portanto $\varphi(\xi_j) \in E'$.

2 : Seja $u = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}$, então

$$\varphi(u) = \varphi(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}) = \varphi(\xi_{i_k})\cdots\varphi(\xi_{i_2})\varphi(\xi_{i_1}).$$

Pelo item anterior, $\varphi(u)$ é uma combinação linear de elementos de E'. Note que, se $u, v \in B'$ possuem comprimento m e n, respectivamente, segue que ou $u \cdot v = 0$ ou $u \in B'$ com comprimento $m + n$, uma vez que produtos de geradores iguais em E' é igual a zero e para geradores diferente, após fazer a justaposição, obtendo comprimento $m + n$. Portanto, $\varphi(u)$ tem comprimento maior ou igual que k. □

Observação 6. *Segue pelo Lema 2.1, que para φ uma involução qualquer em E, que*

$$\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j,$$

no qual c_j é combinação linear de elementos da base B' com comprimento $\geq 2, \alpha_{ij} \in K$ com somente uma quantidade finita deles não nula.

Definição 2.1. *Seja L o espaço vetorial gerado por $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$. Definiremos uma trasnformação linear $\varphi_l : L \to L$, operando na base da seguinte maneira:*

$$\varphi_l(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i.$$

Lema 2.2. *A transformação linear φ_l mencionada acima é um isomorfismo linear.*

Demonstração. Precisamos provar que φ_l é bijetora. Para a sobrejetividade é suficiente provar que $\xi_j \in \varphi_l(L)$, para todo j. Note que, pela Observação e definição anterior, se $u \in L$, então $\varphi(u) = \varphi_l(u) + c$, no qual c é combinação linear de elementos da base B' com comprimento ≥ 2. Agora, para um dado ξ_j, sabemos que

$$\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j,$$

no qual c_j é combinação linear de elementos da base B' com comprimento ≥ 2, e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\xi_j = \varphi(\varphi(\xi_j)) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j\right)\\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) + \varphi(c_j)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\varphi(\xi_i) + \varphi(c_j)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}(\varphi_l(\xi_i) + c_i) + \varphi(c_j)\\
&= \varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}c_i + \varphi(c_j)\\
&= \varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) + c
\end{aligned}
$$

no qual $c = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}c_i + \varphi(c_j)$ é combinação linear de elementos da base B' com comprimento ≥ 2, isto é

$$\varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) = \xi_j.$$

Logo, φ_l é sobrejetora.

Para a injetividade, suponha $\varphi_l(u) = 0$, com $u \in L$. Daí,temos que $\varphi(u) = \varphi_l(u) + c = c$ e $u = \varphi(\varphi(u)) = \varphi(c)$. Porém, pelo item 2 do lema anterior, obtemos que $\varphi(c)$ é uma combinação linear de elementos da base B' com comprimento ≥ 2, enquanto $u \in L$, isso só é possível se $u = 0$. Logo, φ_l é injetora. □

A seguir, construiremos uma involução para E a partir de φ_l, estendendo esta transformação linear para a álgebra E, mantendo a mesma notação φ_l. Para realizar essa extensão, definimos os valores da função sobre os elementos da base: estabelecemos $\varphi_l(1) = 1$ e se $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k} \in B'$,

$$\varphi_l(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}) = \varphi_l(\xi_{i_k})\cdots\varphi_l(\xi_{i_2})\varphi_l(\xi_{i_1}).$$

Dessa forma, concluímos a extensão de φ_l de maneira linear para qualquer elemento de E.

Lema 2.3. *A transformação linear* $\varphi_l : E \to E$ *definida anteriormente é uma involução.*

Demonstração. Como φ_l é uma transformação linear, precisamos provar apenas os itens 1 e 3 da Definição 1.18.

Começaremos pelo item 3. Temos que mostrar que $\varphi_l(a \cdot b) = \varphi_l(b) \cdot \varphi(a)$, para todo $a, b \in E$. Uma vez que, φ_l é, por definição, linear, podemos considerar $a, b \in B$, base de E. Note que, como definimos $\varphi_l(1)$ como sendo 1, para $a = 1$ ou $b = 1$, temos $\varphi_l(1 \cdot b) = \varphi_l(1) \cdot \varphi_l(b)$ é claro o resultado. Considere agora $a = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}$ e $b = \xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_n}$. Se $ab \neq 0$, então $ab = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_n}$ e segue que

$$\begin{aligned}
\varphi_l(ab) &= \varphi_l(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_n}) \\
&= \varphi_l(\xi_{j_n})\cdots\varphi_l(\xi_{j_2})\varphi_l(\xi_{j_1})\varphi_l(\xi_{i_m})\cdots\varphi_l(\xi_{i_2})\varphi_l(\xi_{i_1}) \\
&= \varphi_l(b)\cdot\varphi_l(a).
\end{aligned}$$

Se $a \cdot b = 0$, então $\xi_{i_k} = \xi_{j_l}$. De fato, como $a, b \in B = B' \cup \{1\}$, base da álgebra de Grassmann, o produto de dois elementos de B' ou resulta num novo elemento da base ou é zero. Daí, temos que

$$\varphi_l(ab) = \varphi_l(0) = 0.$$

Por outro lado, com $\xi_{i_k} = \xi_{j_l}$, então $\varphi_l(\xi_{i_k}) = \varphi_l(\xi_{j_l})$. De modo que,

$$\varphi_l(a) = \varphi_l(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_n}) = \varphi_l(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}\cdots\xi_{i_n})$$

e

$$\varphi_l(b) = \varphi_l(\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_n}) = \varphi_l(\xi_{j_1}\cdots\xi_{i_k}\cdots\xi_{j_n}).$$

Note que, como $a, b \in B$, podemos fazer transposições de ξ_{i_k} da seguinte maneira, a menos de um sinal da permutação:

$$\begin{aligned}
\varphi_l(a)\cdot\varphi_l(b) &= \varphi_l(\xi_{i_k}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_n})\cdot\varphi_l(\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_n}\xi_{i_k}) \\
&= \varphi_l(\xi_{i_n})\cdots\varphi_l(\xi_{i_1})\cdot(\varphi_l(\xi_{i_k}))^2\cdot\varphi_l(\xi_{j_n})\cdots\varphi_l(\xi_{j_1})
\end{aligned}$$

Com base $\varphi_l(\xi_{i_k}) \in L$ segue que

$$(\varphi_l(\xi_{i_k}))^2 = 0,$$

e assim, $\varphi_l(a)\cdot\varphi_l(b) = 0$, verificando o resultado.

Agora para o item 1, precisamos provar que $\varphi_l(\varphi_l(a)) = a$ para todo $a \in E$. Lembre que, $\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{i_j}\xi_i + c_j$, então $\varphi_l(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{i_j}\xi_i$. Com base na demonstração do Lema 2.2, segue que

$$\varphi_l(\varphi_l(\xi_j)) = \varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{i_j}\xi_i\right) = \xi_j.$$

Como φ_l é linear, basta considerar $a \in B$. No caso de $a = 1$, o resultado é verificado $\varphi_l(\varphi_l(a)) = \varphi_l(\varphi_l(1)) = \varphi_l(1) = 1$.

Agora, se $a = \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}$. Usando o item 3, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}) &= \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_m}) \cdots \varphi_l(\xi_{i_1}))\\ &= \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_1})) \cdots \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_m}))\\ &= \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.4. *O espaço vetorial L tem uma base $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots\}$ composta por elementos simétricos e antissimétricos em relação a φ_l, ou seja, para todo j,*

$$\varphi_l(e_j) = \pm e_j.$$

Demonstração. Note que, como $char(K) \neq 2$, é possivel escrever todo elemento $v \in L$ como

$$v = \frac{v + \varphi_l(v)}{2} + \frac{v - \varphi_l(v)}{2},$$

de modo que,

$$\frac{v + \varphi_l(v)}{2} \in L^{(+,\varphi_l)} \text{ e } \frac{v - \varphi_l(v)}{2} \in L^{(-,\varphi_l)},$$

e como $L^{(+,\varphi_l)} \cap L^{(-,\varphi_l)} = \{0\}$, segue que

$$L = L^{(+,\varphi_l)} \oplus L^{(-,\varphi_l)}.$$

Com isso, unindo as bases dos subespaços $L^{(+,\varphi_l)}$ e $L^{(-,\varphi_l)}$, como resultado, obtemos a base $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots\}$ de L, que atende à propriedade desejada. □

Observação 7. *Fixaremos Ω como a base do espaço vetorial L, como no Lema 2.4. Note que:*
a) A subálgebra unitária de E gerada por Ω é exatamente E. Por definição da álgebra de Grassmann, para quaisquer i, j temos $e_ie_j = -e_je_i$, ou seja, os geradores de Ω satisfazem a relação anticomutativa, o que caracteriza a estrutura de E.
b) Defina D o conjunto formado por 1 e por todos os elementos da forma

$$v = e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k},$$

com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k, k \geq 1$. Assim, podemos concluir que D é uma base de E. Além disso, sempre que $v \in D$ possui comprimento ≥ 1, então

$$\varphi(v) = \varphi_l(v) + v' = \pm v + v',$$

onde v' é uma combinação linear de elementos pertencentes a D e seu comprimento é estritamente superior ao comprimento de v.

Lema 2.5. *Sejam $v \in D$ e $e_i, e_j \in \Omega$ tais que $ve_ie_j \neq 0$. Temos que:*

a) Se $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.

b) Se $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.

c) Se $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.

d) Se $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.

Demonstração. a) Sabemos que φ_l é uma involução, como $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, temos que

$$\varphi_l(ve_ie_j) = \varphi_l(e_j)\varphi_l(e_i)\varphi_l(v) = e_je_iv = ve_je_i = -ve_ie_j$$

uma vez que e_je_i tem comprimento par, daí $e_je_i \in E_0$ (Centro de E) e $e_je_i = -e_ie_j$. Logo, $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.

b) Como φ_l é uma involução, $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, temos que

$$\varphi_l(ve_ie_j) = \varphi_l(e_j)\varphi_l(e_i)\varphi_l(v) = -e_je_iv = -ve_je_i = ve_ie_j$$

Logo, $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.

c) Uma vez que φ_l é uma involução, e $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, temos que

$$\varphi_l(ve_ie_j) = \varphi_l(e_j)\varphi_l(e_i)\varphi_l(v) = (-e_j)(-e_i)v = e_je_iv = ve_je_i = -ve_ie_j$$

Logo, $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.

d) Sendo φ_l é uma involução, $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, temos que

$$\varphi_l(ve_ie_j) = \varphi_l(e_j)\varphi_l(e_i)\varphi_l(v) = (-e_j)(-e_i)(-v) = -e_je_iv = -ve_je_i = ve_ie_j$$

Logo, $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$. □

O resultado a seguir estabelece uma conexão entre as identidades multilineares associadas à involução de (E, φ_l) e as identidades ordinárias de E.

Lema 2.6. *Seja $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ um polinômio multilinear. Se K é um corpo de característica diferente de 2, então $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$ se, e somente se, $f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in Id(E)$.*

Demonstração. Note que, Ω é um conjunto infinito e todo elemento $e_i \in \Omega^{(+,\varphi_l)} \cup \Omega^{(-,\varphi_l)}$, sendo assim, dividiremos a prova em dois casos: $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito e $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito. Demostraremos o primeiro caso, uma vez que, de maneira análoga vale para o segundo, com algumas modificações necessárias.

Suponha $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito. Se

$$f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in Id(E),$$

então vale $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$, uma vez que $Id(E)$ é invariante por endomorfismos.

Para a implicação contrária, precisamos mostrar que dado um $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ um polinômio multilinear, se K é um corpo com $char(K) \neq 2$, então $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$ implica em $f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in Id(E)$.

Suponha, por contradição, que $f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \notin Id(E)$. Por hipotése, o polinômio é multilinear, então existem elementos $v_1, \cdots, v_{m+n} \in D$, base de E, tais que

$$f(v_1, \cdots, v_{m+n}) \neq 0.$$

Se $v = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \in D$, denote por $\delta(v)$ o conjunto $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$, o conjunto dos elementos da base que aparecem em v. Disso, existe um índice θ tal que

$$\delta(v_1) \cup \delta(v_2) \cup \cdots \cup \delta(v_{m+n}) \subset \{e_1, e_2, \cdots, e_\theta\}.$$

De modo que, estamos utilizando os primeiros θ elementos da base D. Como por hipótese $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é infinito, existe um subconjunto

$$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{2(m+n)-1}}, e_{i_{2(m+n)}}\} \subset \Omega^{(+,\varphi_l)}, \tag{2.1}$$

onde $\theta < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2(m+n)-1} < i_{2(m+n)}$. Agora, defina $\overline{v_j} = v_j u_j$ da seguinte forma:

a) Se $j = 1, \cdots, m$ e $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tome $u_j = 1$. Neste caso,

$$\overline{v_j} = v_j u_j = e_{j_1}\cdots e_{j_m} \cdot 1 = e_{j_1}\cdots e_{j_m} = v_j \in D^{(+,\varphi_l)}.$$

b) Se $j = 1, \cdots, m$ e $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tome $u_j = e_{i_{2j-1}}e_{i_2 j} \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, obtemos pela letra *b* do Lema 2.5, $\overline{v_j} \in D^{(+,\varphi_l)}$.

c) Se $j = m+1, \cdots, m+n$ e $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tomando $u_j = e_{i_{2j-1}}e_{i_2 j} \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, obtemos pela letra *a* do Lema 2.5, $\overline{v_j} \in D^{(-,\varphi_l)}$.

d) Se $j = m+1, \cdots, m+n$ e $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tomando $u_j = 1$, obtemos

$$\overline{v_j} = v_j u_j = e_{j_{m+1}}\cdots e_{j_{m+n}} \cdot 1 = e_{j_{m+1}}\cdots e_{j_{m+n}} = v_j \in D^{(-,\varphi_l)}.$$

Note que a construção dos $\overline{v_j}$ é feita de modo a respeitar a simetria e antissimetria da involução quando necessário. Assim, temos que

$$\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_m} \in D^{(+,\varphi_l)} \text{ e } \overline{v_{m+1}}, \cdots, \overline{v_{m+n}} \in D^{(-,\varphi_l)}.$$

Como $f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$, u_j são elementos centrais da álgebra de Grassmann e por suposição $f(v_1, \cdots, v_{m+n}) \neq 0$, temos que

$$0 = f(\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_{m+n}}) = f(v_1u_1, \cdots, v_{m+n}u_{m+n}) = f(v_1, \cdots, v_{m+n})u_1\cdots u_{m+n} \neq 0,$$

uma contradição. Portanto, $f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in Id(E)$.

Quanto ao segundo caso, ou seja, $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito, existem ajustes necessário na construção dos $\overline{v_j}$. Anaoamente ao caso anterior, existe um natural θ tal que $v_1, \ldots, v_{m+n} \in D$ satisfazem:

$$\delta(v_1) \cup \delta(v_2) \cup \cdots \cup \delta(v_{m+n}) \subset \{e_1, e_2, \ldots, e_\theta\}.$$

Como $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ é infinito, podemos escolher elementos $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2(m+n)}} \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$ com

$$\theta < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2(m+n)}.$$

Definimos então $\overline{v_j} = v_j u_j$, com os u_j das seguintes formas:

Para $j = 1, \ldots, m$ (variáveis simétricas y_j):

a) Se $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tomando $u_j = e_{i_{2j-1}} e_{i_{2j}} \in D^{(-,\varphi_l)}$. Pelo item (c) do Lema 2.5, $\overline{v_j} \in D^{(-,\varphi_l)}$.

b) Se $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tomando $u_j = 1$, então $\overline{v_j} = v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.

Para $j = m+1, \ldots, m+n$ (variáveis antissimétricas z_j):

c) Se $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tomando $u_j = 1$, então $\overline{v_j} = v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.

d) Se $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tomando $u_j = e_{i_{2j-1}} e_{i_{2j}} \in D^{(-,\varphi_l)}$. Pelo item (d) do Lema 2.5, $\overline{v_j} \in D^{(+,\varphi_l)}$.

Garantindo que,

$$\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m} \in D^{(-,\varphi_l)} \quad \text{e} \quad \overline{v_{m+1}}, \ldots, \overline{v_{m+n}} \in D^{(+,\varphi_l)}.$$

concluindo assim a demonstração.

□

Lema 2.7. *Se $f(x_1, \cdots, x_n) \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, então $f(u_1, \cdots, u_n) \in \langle [y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3] \rangle^{T(*)}$, para todos $u_1, \cdots, u_n \in K\langle Y \cup Z \rangle$.*

Demonstração. Uma vez que, $f(x_1, \cdots, x_n) \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, pelo Lema 1.14, denotamos f por,

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum \alpha_g g_0 [g_1, g_2, g_3] g_4,$$

com $\alpha_g \in K$, $g = (g_0, \cdots, g_4)$ e $g_i = g_i(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X \rangle$ para todo i. Assim,

$$f(u_1, \cdots, u_n) = \sum \alpha_g \overline{g_0} [\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}] \overline{g_4},$$

onde $\overline{g_i} = g_i(u_1, \cdots, u_n) \in K\langle Y \cup Z \rangle$ para todo i. Note que cada $\overline{g_i}$ é uma soma de polinômios simétricos e antissimétricos, uma vez que, um $T-$ideal é invariante sob os endomorfismos da álgebra livre. Consequentemente, temos que

$$f(u_1, \cdots, u_n) \in \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

□

Utilizaremos a seguinte ordenação de variáveis para $Y \cup Z$:

$$z_i < z_{i+1} < \cdots < y_i < y_{i+1}, \text{ para todo } i.$$

Lema 2.8. *Sejam* K *um corpo infinito de característica diferente de* 2 *e* J *um* $T(*)$*-ideal tal que*

$$[y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \in J.$$

Então o espaço vetorial quociente $B_Y/(B_Y \cap J)$ *possui conjunto gerador*

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J,$$

onde $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} \in Y \cup Z, a_i \geq 0$ *para todo* i *e* $m, n \geq 0$.

Demonstração. Note que todo comutador de peso 3, da forma $[x_1, x_2, x_3]$, com $x_1, x_2, x_3 \in Y \cap Z$, está em J. Temos que, pela Definição 1.29, os geradores de B_Y são polinômios da forma $f = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_m^{a_m} c_1 c_2 \cdots c_t$, com $a_i \geq 0$, c_j comutadores, e $t \geq 0$ Daí, se algum c_i for um comutador de comprimento ≥ 3, então $f \in J$, e mais ainda

$$f + B_Y \cap J = B_Y \cap J.$$

ou seja, f pertence a classe do zero no espaço quociente $B_Y/(B_Y \cap J)$. Deste modo, podemos supor que todos os comutadores c_i são de comprimento 2, isto é

$$f + B_Y \cap J = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J,$$

Pelos Lemas 1.7 e 2.7, segue que os polinômios $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ pertencem a J, com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in Y \cup Z$.

Dessa maneira, podemos utilizar a lei de anticomutatividade $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$ nos polinômios acima, para trocar a ordem das variáveis dentro dos comutadores livremente, e caso algum $x_i = x_j$, então o comutador $[x_i, x_j] = 0$, o que implicaria que $f \in J$. Por isso, é necessário garantir que todas as variáveis dentro de cada comutador sejam distintas.

Portanto, podemos reescrever

$$f + B_Y \cap J = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$. Assim, podemos simplificar os geradores de $B_Y/(B_Y \cap J)$ para a forma desejada, em que todos os comutadores são de comprimento 2 e as variáveis estão ordenadas como queriamos. □

O próximo resultado nos fornece a ferramenta necessária para o estudo apenas do conjunto $Id(E, \varphi_l)$ para especificar por completo o conjunto $Id(E, \varphi)$, uma vez que o Lema 2.9 assegura que todas as identidades com involução de (E, φ) também são identidades com involução para (E, φ_l).

Lema 2.9. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então*

$$Id(E, \varphi) \subset Id(E, \varphi_l).$$

Demonstração. Como K é infinito e $char(K) \neq 2$, segue pela Proposição 1.15 que $Id(E, \varphi)$ é gerado por seus elementos multihomogêneos $Y-$próprios, uma vez que E é uma álgebra unitária. Daí, tomemos $f \in Id(E, \varphi)$ um polinômio multihomogêneo $Y-$próprio, e suponha, por contradição, que esse polinômio $f \notin Id(E, \varphi_l)$. Denotaremos por J o seguinte $T(*)-$ideal:

$$J = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Note que, por construção $J \subset Id(E, \varphi)$ e $J \subset Id(E, \varphi_l)$, já que o Lema 2.7 vale pra qualquer involução. Agora, usando Lema 2.8, temos que $f = g + h$, onde $h \in J$ e g é uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}],$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$ em $Y \cup Z$, $a_1, a_2, \cdots, a_m \geq 0, m \geq 0$ e $n \geq 0$. Mais ainda, como $f \in Id(E, \varphi)$ e $h \in J \subset Id(E, \varphi)$, temos que $g \in Id(E, \varphi)$, então $g \notin Id(E, \varphi_l)$. Dado que K é infinito, se um polinômio multihomogêneo de um determinado grau anula em todos os elementos da álgebra, então qualquer polinômio que seja combinação linear desse polinômio também precisa ser multihomogêneo com o mesmo multigrau. Portanto, assumimos que g é multihomogêneo com mesmo multigrau de f.

Pelo Lema 1.17, existem $\hat{g}(y_1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_k) \in Lin_{yz}(g)$, $v_1, \cdots, v_l \in D^{(+, \varphi_l)}$ e $w_1, \cdots, w_k \in D^{(-, \varphi_l)}$ tais que

$$\hat{g}(v_1, \cdots, v_l, w_1, \cdots, w_k) \neq 0. \tag{2.2}$$

Observe que, se $l \geq 1$, ou seja, existem pelo menos l variáveis $y_1, \cdots, y_l$ do conjunto Y no polinômio $\hat{g}$, então $deg_{y_i} \hat{g} = 1$ para todo $i = 1, \cdots, l$ e os y_i's aparecem dentro de um comutador.

Logo, $\hat{g}(y_1, \cdots, 1, \cdots, y_l, z_1, \cdots, z_k) = 0$, já que o polinômio $\hat{g}$ é construído a partir de combinações lineares de produtos de comutadores, e esses comutadores se anula quando $y_i = 1$.

Em particular, $v_1, \cdots, v_l \in D - \{1\}$. Como $1 \in D^{(+, \varphi_l)}$, temos que $w_1, \cdots, w_k \in D - \{1\}$ também. Daí, como $\hat{g}$ é multihomogêneo e $w_i^2 = 0$, (por ser uma palavra na álgebra E), temos que $\hat{g}$ é multilinear.

Agora, como K é um corpo infinito e $g \in Id(E, \varphi)$, temos que $\hat{g} \in Id(E, \varphi)$. Dados

$$\frac{v_i + \varphi(v_i)}{2} \in E^{(+, \varphi)} \text{ e } \frac{w_j - \varphi(w_j)}{2} \in E^{(-, \varphi)}$$

para todo i, j. Deste modo, temos que

$$\hat{g}\left(\frac{v_1+\varphi(v_1)}{2},\cdots,\frac{v_l+\varphi(v_l)}{2},\frac{w_1+\varphi(w_1)}{2},\cdots,\frac{w_k+\varphi(w_k)}{2}\right)=0.$$

Usando a Observação 7, obtemos que

$$\frac{v_i+\varphi(v_i)}{2}=v_i+v_i^{'} \text{ e } \frac{w_j-\varphi(w_j)}{2}=w_j+w_i^{'},$$

com $v_i^{'}$ sendo uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de v_i, analogamente para $w_j^{'}$. Por isso,

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{g}\left(\frac{v_1+\varphi(v_1)}{2},\cdots,\frac{v_l+\varphi(v_l)}{2},\frac{w_1+\varphi(w_1)}{2},\cdots,\frac{w_k+\varphi(w_k)}{2}\right)\\
&= \hat{g}\left(v_1+v_1^{'},\cdots,v_l+v_l^{'},w_1+w_1^{'},\cdots,w_k+w_k^{'}\right)\\
&= \hat{g}\left(v_1,\cdots,v_l,w_1,\cdots,w_k\right)+u,
\end{aligned}$$

onde u é uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de $\hat{g}\left(v_1,\cdots,v_l,w_1,\cdots,w_k\right)$. Está igualdade é um absurdo, pois $\hat{g}$ não nulo, é multilinear, então cada variável aparece no máximo uma vez em cada termo, com um comprimento fixado, não sendo possível cancelar esses termos em uma soma multilinear com u estritamente maior que este comprimento fixado de $\hat{g}$, levando à conclusão de que $\hat{g}\left(v_1,\cdots,v_l,w_1,\cdots,w_k\right)=0$, contradizendo 2.2.

□

Capítulo 3

O conjunto das $*-$identidades polinomiais de E

Neste capítulo, vamos estudar o conjunto $Id(E, \varphi)$. Dividiremos em dois casos, primeiro quando o corpo possui característica zero, e depois, quando o corpo possui característica positiva $p > 2$, apresentando um conjunto finito de geradores para $Id(E, \varphi)$, como $T(*)-$ideal, nos dois casos.

3.1 $Id(E, *)$ quando K é de característica 0

Juntamente com os resultados apresentados no capítulo anterior, nesta seção mostraremos que, quando a característica do corpo é zero, suas $*-$identidades polinomiais decorrem do comutador de peso 3, semelhante ao caso ordinário.

Teorema 3.1. *Se K é corpo de $char(K) = 0$ e φ é uma involução em E, então*

$$Id(E, \varphi) = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Demonstração. DEnote por J o seguinte $T(*)-$ideal:

$$J = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Queremos provar que $J = Id(E, \varphi)$, o conjunto das identidades polinomiais da álgebra E com a involução φ. Para isso, precisaremos provar as duas inclusões:

$J \subseteq Id(E, \varphi)$,

$Id(E, \varphi) \subseteq J$.

Vimos no Teorema 1.9 que $[x_1, x_2, x_3] \in Id(E)$, então segue que $J \subset Id(E, \varphi)$, provando a primeira inclusão.

Pelo Lema 2.9, temos que $Id(E,\varphi) \subset Id(E,\varphi_l)$, e assim basta provar que $Id(E,\varphi_l) \subset J$. Para isso, tomemos um polinômio $f = f(y_1 \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E,\varphi_l)$. Por hipótese, K é um corpo de caractéristica zero, então o $T(*)-$espaço é gerado pelos seus elementos multilineares. Portanto, podemos supor que f é multilinear.

Como K é um corpo de característica diferente de 2, podemos usar o Lema 2.6, e obtemos que

$$f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Assim, pelo Lema 2.7, segue que

$$f = f(y_1 \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in J,$$

mostrando a igualdade desejada.

□

3.2 $Id(E,*)$ quando K é infinito de característica $p > 2$

Quanto a essa seção, mostraremos que, em característica positiva $\neq 2$, é preciso um novo polinômio para caracterizar as $*-$identidades polinomiais de E, se diferenciando do caso visto anteriormente, ou seja, quando o corpo é de característica zero. Nesta seção, K denotará um corpo infinito de característica $p > 2$.

Lema 3.2. *Se φ é uma involução em E, então $E^{(-,\varphi)} \subset E'$.*

Demonstração. Considere $u = \alpha + v \in E^{(-,\varphi)}$, onde $\alpha \in K$ e $v \in E'$. Como $char(K) = p > 2$, e usando o Lema 1.18, sabemos que $x^p \in Id(E')$ e segue que

$$u^p = (\alpha + v)^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} \alpha^{p-k} v^k = \alpha^p + v^p = \alpha^p.$$

Desse modo,

$$-(\alpha^p) = -(u^p) = (-u)^p = (\varphi(u))^p = \varphi(u^p) = \varphi(\alpha^p) = (\varphi(\alpha))^p = \alpha^p,$$

ou seja, $2\alpha^p = 0$. Portanto, $\alpha = 0$ e $u = v \in E'$. □

Proposição 3.3. *Se φ é uma involução em E, então $z_1^p \in Id(E,\varphi)$.*

Demonstração. Se φ é uma involução em E, pelo Lema 3.2 temos que $E^{(-,\varphi)} \subset E'$. Tome, $a_1 \in E^{(-,\varphi)} \subset E'$. Como K é um corpo infinito de característica $p > 2$, então pelo Lema 1.18, segue que $a_1^p = 0$, como a_1 é qualquer, então $z_1^p \in Id(E',\varphi)$. □

Isto posto, designaremos nesta seção por I o $T(*)-$ideal:

$$I = \langle z_1^p, [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3]\rangle^{T(*)}.$$

Desejamos demonstrar que $I = Id(E,\varphi)$, com φ uma involução sobre E. De fato, $I \subset Id(E,\varphi)$, uma vez que z_1^p e $[y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3]$ ambos constituem $*-$identidades de E. Conforme o Lema 2.9, $Id(E,\varphi) \subset Id(E,\varphi_l)$. Falta provar que $I \supset Id(E,\varphi)$. Para isso, vamos mostrar, $I \supset Id(E,\varphi_l)$.

Pela Proposição 1.16 basta provar que

$$Id(E,\varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN},$$

considerando os multigraus correspondentes, $M = (p^{c_1},\cdots,p^{c_m})$ e $N = (p^{b_1},\cdots,p^{b_n})$, onde B_{MN} é o subespaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ que inclui todos os polinômios multihomogêneos $Y-$próprios $f(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n)$ com $deg_{y_i} f = p^{c_i}$ e $deg_{z_j} f = p^{b_j}$. Considere

$$B_{MN}(I) := \frac{B_{MN}}{I \cap B_{MN}}.$$

De acordo com o Lema 2.8, podemos concluir que o espaço vetorial $B_{MN}(I)$ possui conjunto gerador formado por pela seguinte forma

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n}[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2k-1},x_{2k}] + I \cap B_{MN},$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Com base nisso, dividindo em casos, vamos demostrar que $Id(E,\varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$:

Lema 3.4. *Se* $M = (p^{c_1},\cdots,p^{c_m})$, N *é qualquer, e algum* $c_i \geq 1$, *então* $Id(E,\varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Note que, estamos trabalhando com polinômios multihomogêneos $Y-$próprios, ou seja, polinômios nos quais cada variável y_i ocorre com um grau específico, dado por p^{c_i} e por hipótese existe algum $c_i \geq 1$. Assim, em cada monômio de B_{MN}, a variável y_i aparece elevada a $p^{c_j} \geq p$. Mas como $y_i^p \in I$, segue que

$$y_i^{p^{c_i}} = \left(y_i^p\right)^{p^{c_i-1}} \in I,$$

e, portanto, todo monômio contendo esse fator se anula em $B_{MN}(I)$,

$$B_{MN}(I) = 0 \implies B_{MN} \subseteq I$$

em outras palavras, não existem polinômios novos fora de I que precisam ser considerados.

□

Com isso, podemos afirmar que todo polinômio multihomogêneo $Y-$próprio com uma variável simétrica de grau maior que 1 está em I, deste modo é suficiente supor $M = (1, \cdots, 1)$, ou seja, $Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Lema 3.5. *Se $M = (1, \cdots, 1), N = (p^{b_1}, \cdots, p^{b_n})$ e algum $b_j \geq 2$, então $Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.*

Demonstração. De fato, para algum $b_j \geq 2$, visto que polinômio é da forma

$$g = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n} [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}],$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k}$, podendo ter no máximo uma variável z dentro do comutador, obtemos $a_j \geq p^2 - 1 > p$.

Se isso acontece, teremos uma variável $z_j^{a_j}$, com $a_j > p$. Como $z_1^p \in I$, logo $z_j^{a_j} \in I$, e portanto $g \in I$ e $B_{MN}(I) = 0$. Como no Lema 3.4, concluímos □

Lema 3.6. *Se $M = (1, \cdots, 1)$ e $N = (1, \cdots, 1)$, então $Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.*

Demonstração. Seja $f = f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN}$. Por hipótese, f é um polinômio multilinear e, como $char(K) \neq 2$, é possível recorrer ao mesmo argumento análogo ao utilizado no Teorema 3.1, concluindo que $f \in I \cap B_{MN}$. □

Lema 3.7. *Sejam $M = (1, \cdots, 1)$ e $N = (p^{b_1}, \cdots, p^{b_n})$, com $0 \leq b_j \leq 1$ para todo j. Se $b_j = 1$ para algum j, então $Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.*

Demonstração. Tome um polinômio multi-homogêneo

$$f = f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN}.$$

Agora, defina d como a cardinalidade do conjunto

$$J = \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid b_j = 1\},$$

a quantidade de índices j onde z_j tem grau p. A prova será feita por indução em d.

Para o caso $d = 0$, nenhum z_j tem grau p, o resultado já foi provado no Lema 3.6 anterior. Então, suponha $d \geq 1$, pelo menos uma variável z_j tem grau p. Podemos assumir, usando os Lemas 1.7, 1.8 e 2.7, que $b_1 = 1$, daí, z_1 tem grau p. Com isso, podemos escrever

$$z_i z_j = z_j z_i + [z_i, z_j].$$

Portanto, usando a estrutura dos polinômios em de $B_{MN}(I)$ temos que os geradores são da forma

$$z_1^{p-1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n} [z_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] + I \cap B_{MN},$$

com $x_2 < x_3 < \cdots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Deste modo, existe $g \in B_{M\hat{N}}$ e $h \in I$ tais que

$$f = z_1^{p-1} g + h, \tag{3.1}$$

onde $\hat{N} = (1, p^{b_2}, \cdots, p^{b_n})$ e g é uma combinação linear de p termos da forma

$$z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n} [z_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Afirmação: $g \in Id(E, \varphi_l)$.

De fato, suponha, por absurdo, que $g \notin Id(E, \varphi_l)$.

Sabemos que, $f = f(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n) \in Id(E, \varphi_l) \cap B_{MN}$, com $h \in I$ e $I \subset Id(E, \varphi_l)$, temos que, por 3.1

$$z_1^{p-1} \cdot g \in Id(E, \varphi_l).$$

Para a demonstração, como Ω é um conjunto infinito, $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots\}$ e todo elemento $e_i \in \Omega^{(+,\varphi_l)} \cup \Omega^{(-,\varphi_l)}$, dividiremos a prova em dois casos: $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito ou $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito. Provaremos o primeiro caso, pois o segundo é análogo.

Seja $u = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \in D$, base de E, tome por $\delta(u)$ o conjunto $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$, e se $h = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$ é um elemento qualquer de E, com $\alpha_i \in K$ e $u_i \in D$, considere $\delta(h)$ como sendo o conjunto

$$\delta(u_1) \cup \cdots \cup \delta(u_r).$$

Por hipotése $g \notin Id(E, \varphi_l)$, então existem $v_1, \cdots, v_m \in E^{(+,\varphi_l)}$ e $w_1, \cdots, w_m \in E^{(-,\varphi_l)}$, de modo que

$$g(v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_m) \neq 0.$$

Note que, podemos tomar w_1 em $D^{(-,\varphi_l)}$, mais ainda de comprimento ímpar, uma vez que é um elemento antissimétrico.

Seja $s \geq 1$ tal que

$$\delta(v_1) \cup \cdots \cup \delta(v_m) \cup \delta(w_1) \cup \cdots \cup \delta(w_n) \subset \{e_1, e_2, \cdots e_s\}.$$

Sabemos que, $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é infinito, sendo possível encontrar um subconjunto

$$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_{2p-3}}, e_{i_{2p-2}}\} \subset \Omega^{(+,\varphi_l)},$$

com $s < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2p-3} < i_{2p-2}$. Agora, fixe

$$w_1' = e_{i_1} e_{i_2}, \cdots, w_{p-1}' = e_{i_{2p-3}} e_{i_{2p-2}}.$$

Pelo item a) do Lema 2.5 e considerando $v = 1$, segue que, $w_i' \in E^{(-,\varphi_l)}$, para todo i.

Visto que $z_1^{p-1} \cdot g \in Id(E, \varphi_l)$, substituindo z_1 pelo elemento antissimétrico $w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_1'$, segue que

$$u = \left(w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_1^{'}\right)^{p-1} g(v_1, \cdots v_m, w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_1^{'}, w_2, \cdots w_n) = 0.$$

Contudo, estamos trabalhando com $char(K) = p > 2$, simplificando o binômio, já que os coeficientes dos termos intermediários são múltiplos de p, e portanto zero. Segue que,

$$\begin{aligned} u &= \left(w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_1^{'}\right)^{p-1} g(v_1, \cdots v_m, w_1, w_2, \cdots w_n) \\ &= (p-1)!(w_1^{'} \cdots w_{p-1}^{'})g(v_1, \cdots v_m, w_1, w_2, \cdots w_n) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

já que, $g(v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_m) \neq 0$, o que contradiz o fato que $u = z_1^{p-1} \cdot g \in Id(E, \varphi_l)$. Logo, $g \in Id(E, \varphi_l)$, provando a afirmação.

Por hípotese de indução, podemos concluir que $g \in I$. Assim, de maneira específica,

$$f = z_1^{p-1} \cdot g + h \in I.$$

Note que, é resolvido uma variável de cada vez, de modo que para o caso $n+1$, resolveriamos pra n variáveis e depois para $n+1$. □

Teorema 3.8. *Seja K um corpo infinito de característica $p > 2$. Se φ é uma involução sobre E, então*

$$Id(E, \varphi) = \langle z_1^p, [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Demonstração. O resultado segue dos Lemas 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7. □

Capítulo 4

O conjunto dos $*-$polinômios centrais de E

Neste capítulo começaremos a estudar os $*-$polinômios centrais de E. Relembrando que um $*-$polinômio central é aquele que, ao ser avaliado em elementos de uma álgebra, resulta invariavelmente em um elemento que pertence ao centro da álgebra, que comuta com todos os demais elementos, respeitando a involução.

4.1 $C(E,*)$ quando K é de característica 0

Para começar, faremos a seguinte observação: A partir das seções anteriores, temos que, se K é um corpo infinito, independente da característica, a igualdade $Id(E,\varphi) = Id(E,\varphi_l)$ nos Teoremas 3.1 e 3.8 é sempre verificada, onde φ_l é uma involução qualquer de E. Igualmente, temos que $C(E,\varphi) = C(E,\varphi_l)$. De fato, seja $f = f(y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_n) \in C(E,\varphi)$,

$$\begin{aligned} f \in C(E,\varphi) &\Leftrightarrow [f, y_{m+1} + z_{n+1}] \in Id(E,\varphi) \\ &\Leftrightarrow [f, y_{m+1} + z_{n+1}] \in Id(E,\varphi_l) \\ &\Leftrightarrow f \in C(E,\varphi_l). \end{aligned}$$

Daí, considere φ uma involução de E, fixe o seguinte $T(*)-$espaço:

$$W = K + \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2] \rangle^{TS(*)} + Id(E,\varphi).$$

Observe que $W \subset C(E,\varphi)$, e mais ainda que W é um candidato natural para definir o conjunto $C(E,\varphi)$, já que contém os polinômios centrais triviais da forma $K + Id(E,\varphi)$ e um polinômio central não trivial, o comutador.

Nesta seção mostraremos que $W = C(E, \varphi)$.

Lema 4.1. *Sejam K um corpo infinito de característica diferente de 2 e φ uma involução em E. Se $f \in C(E, \varphi)$ e existe $x \in Y \cup Z$ tal que f é homogênea de grau 1 em x, então $f \in W$.*

Demonstração. Como visto acima, consideraremos $\varphi = \varphi_l$. Como, por hipótese f é homogênea de grau 1 em x, podemos escrever f como uma combinação linear de monômios da forma $m = m_1xm_2$, onde m_1 e m_2 são monômios que não dependem de x. Note que,

$$m = xm_2m_1 + [m_1, xm_2],$$

escrevendo

$$f = xg + h,$$

onde g é um polinômio que não depende de x, $deg_xg = 0$ e $h \in \langle[y_1 + z_1, y_2 + z_2]\rangle^{TS(*)}$. Portanto, como $f \in C(E, \varphi_l)$, em particular, segue que $xg \in C(E, \varphi_l)$.

Afirmamos que $g \in Id(E, \varphi_l)$. De fato, considere $g = g(y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n)$, suponha por absurdo que $g \notin Id(E, \varphi_l)$. Nesse caso, existem $v_1, \cdots, v_m \in E^{(+,\varphi_l)}$ e $w_1, \cdots, w_n \in E^{(-,\varphi_l)}$, de modo que

$$g(v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n) = g_0 + g_1 \neq 0$$

com g_0 e g_1 sendo combinações lineares de monômios da base D com comprimentos pares e ímpares, respectivamente. Usando a notação do Lema 3.7 para δ. Tome $s \geq 1$ tal que

$$\delta(v_1) \cup \cdots \cup \delta(v_m) \cup \delta(w_1) \cup \cdots \cup \delta(w_n) \subset \{e_1, e_2, \cdots e_s\}.$$

Isso posto, existem $s < i_1 < i_2 < i_3$ tais que:

1) $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3} \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, se $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é um conjunto infinito,

2) $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3} \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, se $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ é um conjunto infinito.

Usando o Lema 2.5, teremos variáveis simétricas e antissimétricas para os dois caso, de fato:

Para o caso 1), nas variáveis simétricas, temos que $1, e_{i_1} \in D^{(+,\varphi_l)}$. Agora, para as antissimétrica considere o item *a*) do Lema 2.5, dados $v = 1$ e $v = e_{i_1}$, então obtemos que $e_{i_1}e_{i_2}, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(-,\varphi_l)}$, respectivamente.

Para o caso 2), nas variáveis antissimétrica segue que $e_{i_1}, e_{i_1}e_{i_2} \in D^{(-,\varphi_l)}$, pelo item *c*) do Lema 2.5, usando $v = 1$. Já para as variáveis simétricas, temos $1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(+,\varphi_l)}$, pelo item *d*) do Lema 2.5 e fazendo $v = e_{i_1}$.

Como $g = g_0 + g_1 \neq 0$, suponha $g_0 \neq 0$. Assim, considerando o caso 1) e x sendo uma variável simétrica, como $e_{i_1} \in D^{(+,\varphi_l)}$, podemos usar $x = e_{i_1}$, então

$$e_{i_1}g(v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n) = e_{i_1}g_0 + e_{i_1}g_1 \notin Z(E).$$

Já que, g_0 é combinação linear de monômios da base D, cujos comprimentos são pares, então $e_{i_1}g_0$ teria comprimento ímpar. Logo, $e_{i_1}g_0 \notin Z(E)$. Agora, para x uma variável antissimétrica, como $e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(-,\varphi_l)}$, tome $x = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}$, então

$$e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g(v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_n) = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_0 + e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_1 \notin Z(E),$$

pelo mesmo argumento anterior.

Agora, para o caso 2) e sendo x uma variável simétrica, tome $e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(+,\varphi_l)}$, então

$$e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g(v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_n) = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_0 + e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_1 \notin Z(E),$$

argumento análogo. E se x for uma variável antissimétrica, como $e_{i_1} \in D^{(-,\varphi_l)}$, use $x = e_{i_1}$, então

$$e_{i_1}g(v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_n) = e_{i_1}g_0 + e_{i_1}g_1 \notin Z(E).$$

De maneira análoga pode ser analisado o caso em que $g_1 \neq 0$. Portanto, para todos os casos, encontra-se um absurdo, uma vez que $xg \in C(E,\varphi_l)$. Logo, $g \in Id(E,\varphi_l)$, provando a afirmação e assim, como $f = xg + h$ e h já está em W, concluímos que $f \in W$, o que prova o Lema. □

Teorema 4.2. *Se K é um corpo de característica zero e φ é uma involução em E, então*

$$C(E,\varphi) = \langle 1, [y_1+z_1, y_2+z_2], (y_1+z_1)[y_2+z_2, y_3+z_3, y_4+z_4]\rangle^{TS(*)}.$$

Demonstração. Como $char(K) = 0$, todo $T(*)-$espaço é gerado por seus elementos multilineares, mais ainda vimos que $Id(E,\varphi) = \langle [y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3]\rangle^{T(*)}$, então podemos escrever

$$W = \langle 1, [y_1+z_1, y_2+z_2], (y_1+z_1)[y_2+z_2, y_3+z_3, y_4+z_4]\rangle^{TS(*)}, W \subset C(E,\varphi).$$

Deste modo, dado $f \in C(E,\varphi)$ multilinear, que por definição, cada variável (incluindo x) aparece no máximo uma vez em cada termo. Assim, usando o Lema 4.1 anterior, obtemos que $f \in W$, isto é, $C(E,\varphi) \subset W$. Provando a igualdade. □

4.2 $C(E,*)$ quando K é infinito de característica $p > 2$

Nesta seção, nosso objetivo é caracterizar o conjunto dos $*-$polinômios centrais de E e demonstrar que esse conjunto não é finitamente gerado como $T(*)-$espaço. Para isso, precisaremos do seguinte resultado técnico:

Teorema 4.3. *Seja K um corpo infinito de característica $p > 2$ e denotemos por $\mathbb{I}$ o ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelos elementos f^p, onde $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e $f(0, \cdots, 0) = 0$. Defina W_n como o T-espaço em $K\langle X\rangle$ gerado por*

$$x_0^p, x_0^p q_1, x_0^p q_2, \cdots, x_0^p q_n,$$

onde

$$q_i = q_i(x_1, \cdots, x_{2i}) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \cdots x_{2i-1}^{p-1}[x_{2i-1}, x_{2i}]x_{2i}^{p-1}.$$

Então,

$$q_{n+1} \notin W_n + Id(E) + \mathbb{I}.$$

Demonstração. Resultado demonstrado em [6], Página 136. □

De maneira análoga ao teorema, definiremos os polinômios em $K\langle Y \cup Z\rangle$,

$$\hat{q}_1 = \hat{q}(y_1, y_2, z_1, z_2) := (y_1 + z_1)^{p-1}[y_1 + z_1, y_2 + z_2](y_2 + z_2)^{p-1}$$

e se $n \geq 1$, consideraremos

$$\hat{q}_n := \hat{q}(y_1, y_2, z_1, z_2) \cdots \hat{q}(y_{2n-1}, y_{2n}, z_{2n-1}, z_{2n}).$$

Observação 8. *Antes de apresentarmos o Teorema 4.4 e sua demonstração, nessa observação queremos ilustrar e justificar o formato da Equação 4.1 que aparecerá na demonstração. Mais precisamente, queremos entender como se pode reorganizar os termos dos polinômio centrais h, mantendo o multigrau adequado, de forma que as variáveis y_i apareçam (ou não) dentro dos comutadores, e os demais fatores sejam agrupados de forma controlada. Nos exemplos a seguir, consideramos dois cenários: o primeiro em que todas as variáveis y_i aparecem nos comutadores, e o segundo em que há variáveis y_i fora dos comutadores. Ambos os casos ilustram como chegamos ao padrão da Equação 4.1,*

$$h = y_{i_1}^{p^{b_{i_1}}} \cdots y_{i_r}^{p^{b_{i_r}}} y_{j_1}^{p^{b_{j_1}-p}} \cdots y_{j_s}^{p^{b_{j_s}-p}} x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \cdots x_{2n-1}^{p-1}[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2n}^{p-1},$$

usado na prova do Teorema.

Primeiro caso *(todas as variáveis y aparecem dentro do comutador): De acordo com o Lema 2.8, o elemento $f + I$ em $\frac{K\langle Y\cup Z\rangle}{I}$, onde I é dado por $I = \langle z_1^p, [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3]\rangle^{T(*)}$, pode ser escrito como uma combinação linear de elementos do tipo $h + I$, com*

$$h = y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m} z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m}[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}],$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Para fins de simplificação, consideremos

$$h = y_1^{p^{b_1}-1} y_2^{p^{b_2}-1} z_1^{p-1} z_2^{p-1}[y_1, z_1][y_2, z_2],$$

uma vez que, h possui o mesmo multigrau de f, $(p^{b_1},\cdots,p^{b_m},p^{c_1},\cdots,p^{c_n})$, com $b_i>0$ e $c_i=1$, para todo i. No entanto, vale ressaltar que não se trata de uma igualdade simples, mas sim de uma igualdade módulo I, ou seja, $f\equiv h \mod I$.

$$
\begin{aligned}
h &= y_1^{p^{b_1}-1}y_2^{p^{b_2}-1}z_1^{p-1}z_2^{p-1}[y_1,z_1][y_2,z_2]\\
&= y_1^{p^{b_1}-1}y_2^{p^{b_2}-1}z_1^{p-1}[y_1,z_1][y_2,z_2]z_2^{p-1}\\
&= y_1^{p^{b_1}-1}y_2^{p^{b_2}-1}[y_1,z_1]z_1^{p-1}[y_2,z_2]z_2^{p-1}\\
&= y_1^{p^{b_1}-1-(p-1)}y_2^{p^{b_2}-1-(p-1)}y_1^{p-1}[y_1,z_1]z_1^{p-1}y_2^{p-1}[y_2,z_2]z_2^{p-1}\\
&= y_1^{p^{b_1}-p}y_2^{p^{b_2}-p}y_1^{p-1}[y_1,z_1]z_1^{p-1}y_2^{p-1}[y_2,z_2]z_2^{p-1}
\end{aligned}
$$

Note que, as igualdades 2, 3 e 4 das contas acima acontecem pois, elementos do tipo $[x_{2i-1},x_{2i}]$, $[x_{2i-1},x_{2i}]x_{2i}^{p-1}$, $x_{2i}^{p-1}[x_{2i-1},x_{2i}]x_{2i}^{p-1}\in C(E,\varphi)$, isto é, comutam com os outros módulo I.

***Segundo caso** (tem-se variavéis y que não aparecem dentro do comutador): Tomemos $h=y_1^{p^{b_1}-1}y_2^{p^{b_2}-1}y_3^{p^{b_3}}z_1^{p-1}z_2^{p-1}[y_1,z_1][y_2,z_2]$.*

$$
\begin{aligned}
h &= y_1^{p^{b_1}-1}y_2^{p^{b_2}-1}y_3^{p^{b_3}}z_1^{p-1}z_2^{p-1}[y_1,z_1][y_2,z_2]\\
&= y_1^{p^{b_1}-p}y_2^{p^{b_2}-p}y_3^{p^{b_3}}y_1^{p-1}[y_1,z_1]z_1^{p-1}y_2^{p-1}[y_2,z_2]z_2^{p-1}
\end{aligned}
$$

As contas ocorrem pelas mesma justificativas do caso anterior. Assim, na demosntração é feita a troca de índices das variáveis y_i, para reorganizar, de modo que, fiquem juntas na frente os y_i que não aparecem no comutador, seguidas dos y_i que aparecem no comutador. Chegando na Equação 4.1.

Teorema 4.4. *Seja K um corpo infinito de característica $p>2$. Então o conjunto $C(E,\varphi)$ dos $*-$polinômios centrais de E com uma involução φ é gerado, como um $T(*)-$espaço, pelos polinômios:*

1. $(y_1+z_1)z_2^p(y_3+z_3)$,
2. $(y_1+z_1)[y_2+z_2,y_3+z_3,y_4+z_4]$,
3. $y_0^p, y_0^p\hat{q}_1,\ldots,y_0^p\hat{q}_n,\ldots$

Demonstração. Defina U como sendo o $T(*)-$espaço gerado pelos polinômios 1., 2. e 3. listados acima. Esse espaço U conterá, portanto, combinações lineares dos geradores propostos. Observe que, como $y_0^p\hat{q}_1\in U$, para $y_0=1$ e $\hat{q}_1=\hat{q}(1+y_1,1+y_2,z_1,z_2)$ obtemos que

$$g = (1)^p(1+y_1+z_1)^{p-1}[1+y_1+z_1, 1+y_2+z_2](1+y_2+z_2)^{p-1} \in U,$$

e sabemos que K é um corpo infinito, cada componente multi-homogênea de g pertence a U e como $[1+y_1+z_1, 1+y_2+z_2] = [y_1,y_2]+[y_1,z_2]+[z_1,y_2]+[z_1,z_2]$. Assim,

$$[y_1,y_2], [y_1,z_2], [z_1,y_2], [z_1,z_2] \in U,$$

desse modo $W = K + \langle [y_1+z_1, y_2+z_2] \rangle^{TS(*)} + Id(E,\varphi) \subset U$.

Pelo Teorema 1.20, que garante que $C(E) = \langle \{x_1[x_2,x_3,x_4], x_0^P, x_0^p q_n \mid n \geq 1\} \rangle^{TS}$, obtemos que $U \subset C(E,\varphi)$. Uma vez que, cada polinômio gerador listado pertence a $C(E,\varphi)$: Para o polinômio do tipo 1., temos que $z_1^p \in Id(E,\varphi) \subset U$, $T(*)-$ideal, e, os produtos com somas $y_i + z_i$ resultam em elementos centrais. De maneira análoga, o polinômio do tipo 2., também pertence a $C(E,\varphi)$ porque o comutador triplo é uma identidade para (E,φ). Quanto aos polinômios do tipo 3., $y_0^p \hat{q}_n$ para todo $n \geq 0$, pertencem a $C(E,\varphi)$ porque y_0^p é central em (E,φ) e $\hat{q}_n$ é construído a partir de produtos de comutadores, todos centrais em E.

Falta provar que $C(E,\varphi) \subset U$. Pela Proposição 1.16, $C(E,\varphi)$ é gerado, como $T(*)-$espaço, por seus elementos multihomogêneos $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ de multigrau $(p^{b_1},\ldots,p^{b_m},p^{c_1},\ldots,p^{c_n})$, onde cada b_j e $c_i \geq 0$. Assim, dessa forma, tome

$$f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in C(E,\varphi).$$

Se para algum i, $b_i = 0$ ou $c_i = 0$, então teriamos y_i ou $z_i \in Y \cup Z$ tal que f seria homogênea de grau 1 em y_i ou z_i. Logo, segue do Lema 4.1 que $f \in W$, como $W \subset U$ temos que, $f \in U$.

Considere, então, que $b_i > 0$ e $c_i > 0$ para cada i. De acordo com o Lema 2.8, o elemento $f + I$ em $\frac{K\langle Y \cup Z \rangle}{I}$, onde I é o $T(*)-$ideal definido como

$$I = \langle z_1^p, [y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3] \rangle^{T(*)},$$

pode ser escrito como uma combinação linear de elementos do tipo $h + I$, onde

$$h = y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m} z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m} [x_1,x_2][x_3,x_4] \cdots [x_{2k-1},x_{2k}],$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Dado que K é infinito, podemos considerar que h possui o mesmo multigrau que f. Em particular, se algum $c_i \geq 2$, então o monômio h pertence a $Id(E,\varphi)$. De fato, podemos ter no máximo uma variável z dentro do comutador, restando $a_j \geq p^2 - 1 > p$. Assim, teremos $z_j^{a_j}$, com $a_j > p$, como $z_i^p \in Id(E,\varphi)$, segue que $f \in U$, como queriamos.

Agora, assumindo que, $b_i > 0$ e $c_i = 1$ para todo i. Obtemos que, $a_i = p-1$ para todo i, dado que as variáveis dentro do comutador aparece apenas uma única vez e são ordenadas $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k}$, então podemos reescrever h como:

$$h = y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m} z_1^{p-1} \cdots z_m^{p-1}[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Note que, se $u \in C(E,\varphi)$, então $uv + I = vu + I$ para todo polinômio v, e como

$$[x_{2i-1}, x_{2i}], [x_{2i-1}, x_{2i}]x_{2i}^{p-1}, x_{2i}^{p-1}[x_{2i-1}, x_{2i}]x_{2i}^{p-1} \in C(E,\varphi),$$

Assim, aplicando os resultados sobre produtos centrais em $C(E,\varphi)$ e combinando comutadores e elementos centrais, é possível reescrever cada h da seguinte maneira

$$h = y_{i_1}^{p^{p^{b_{i_1}}}} \cdots y_{i_r}^{p^{p^{b_{i_r}}}} y_{j_1}^{p^{p^{b_{j_1}-p}}} \cdots y_{j_s}^{p^{p^{b_{j_s}-p}}} x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \cdots x_{2n-1}^{p-1}[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2n}^{p-1}. \tag{4.1}$$

Mais explicações na Observação 8. Por último, como $(uv)^p + I = u^p v^p + I.$, elementos centrais. Pelo Lema 1.19, segue que

$$h \in \langle y_0^p \hat{q}_n \rangle^{TS(*)} + I.$$

Logo, $f \in U$, como queriamos. □

No teorema anterior caracterizamos os geradores $T(*)-$espaço $C(E,\varphi)$ um conjunto infinito de polinômios. Quanto ao resultado a seguir mostraremos que não é admissível apresentar o mesmo $T(*)-$espaço através de um subconjunto finito destes polinômios.

Corolário 4.5. *Seja K um corpo infinito de característica $p > 2$. Se φ é uma involução em E, então $C(E,\varphi)$ não é finitamente gerado como um $T(*)-$espaço.*

Demonstração. Considere C_n o $T(*)-$espaço de $K\langle Y \cup Z\rangle$ gerado pelos polinômios

$$(y_1 + z_1)z_2^p(y_3 + z_3), (y_1 + z_1)[y_2 + z_2, y_3 + z_3, y_4 + z_4], y_0^p, y_0^p\hat{q}_1, \cdots, y_0^p\hat{q}_n.$$

Suponha, por absurdo, que $C(E,\varphi)$ é finitamente gerado como $T(*)-$espaço. Isso implica que existe um conjunto finito S tal que todos os elementos de $C(E,\varphi)$ podem ser obtidos a partir de combinações de elementos de S, isto é, $C(E,\varphi) = \langle S\rangle^{TS(*)}$. Dado que,

$$C(E,\varphi) = \bigcup_n C_n,$$

para qualquer $f \in S$ existe um índice n_f tal que $f \in C_{n_f}$. Assim, definimos $N = max\{n_f \mid f \in S\}$, garantindo que todos os elementos de S estejam contidos em C_N. Assim, obtemos $C(E, \varphi) = C_N$, que seria finitamente gerado. Em particular,

$$f = f(y_1, \cdots, y_{2(N+1)}) = 1^p \hat{q}_{N+1}(y_1, \cdots, y_{2(N+1)}, 0, \cdots, 0) \in C_N,$$

Desse modo, qualquer polinômio f em $C(E, \varphi)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos polinômios geradores de C_N. Isso inclui termos da forma:

$$f_1 f_2^p f_3, \; g_1[g_2, g_3, g_4],$$

$$h_0^p, \; h_1^p \hat{q}_1(h_{1,1}, h_{1,2}, h_{1,3}, h_{1,4}), \cdots, h_N^p \hat{q}_N(h_{N,1}, h_{N,2}, h_{N,3}, h_{N,4N}),$$

para certos $f_i, g_i, h_i, h_{i,j} \in K\langle Y \cup Z \rangle$, com $i \leq N$. Note que, f_2 é um polinômio antissimétrico e 1 é um polinômio simétrico, deste modo, temos que $f_2(0, \cdots, 0) = 0$, isto é, f_2 não tem termo independente. Continuando, ao substituir as variáveis z_i por 0, reduzimos a análise aos polinômios $f_i, g_i, h_i, h_{i,j}$ apenas nas variáveis y, supondo então $f_i, g_i, h_i, h_{i,j} \in K\langle Y \rangle$.

Por fim, trocando as variáveis y_j por x_j, resultando em,

$$f_1 f_2^p f_3 \in \mathbb{I} = \langle f^p \rangle,$$

$$g_1[g_2, g_3, g_4] \in Id(E),$$

$$h_0^p \in W_N,$$

$$h_i^p \hat{q}_i(h_{i,1}, \cdots h_{i,4i}) = h_i^p q_i(h_{i,1} + h_{i,2i+1}, \cdots h_{i,2i} + h_{i,4i}) \in W_N \text{ e}$$

$$q_{N+1} = f(x_1, \cdots, x_{2(N+1)}) \in W_n + Id(E) + \mathbb{I}.$$

onde W_N é gerado, como o T-espaço em $K\langle X \rangle$, por $x_0^p, x_0^p q_1, x_0^p q_2, \cdots, x_0^p q_N$, o que contradiz a Observação 4.3. Logo, $C(E, \varphi)$ não é finitamente gerado como $T(*)-$espaço. □

Referências

[1] L. Centrone, D. J. Gonçalves, D. C. Silva, Identities and central polynomials with involution for the Grassmann algebra, Journal of Algebra, Vol. 560, 2020, 219-240.

[2] V. S. Drensky, Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra. Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[3] A. Giambruno, M. V. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods, 2005.

[4] R. B. dos Santos, and A. C. Vieira, PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.

[5] C. F. Bezerra Júnior, Identidades polinomiais e polinômios centrais com involução, Dissertação de mestrado em matemática, UFCG, Campina Grande, 2014.

[6] A. P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. da Silva, The central polynomials for the Grassmann algebra, Israel J. Math. 179 (2010), 127-144.

[7] D. C. Silva, Identidades e Polinômios Centrais com Involução para a Álgebra de Grassmann e Álgebra das Matrizes Triangulares de Ordem 3, Tese de Doutorado em Matemática, UFSCar, São Carlos, 2020.

[8] E. C. da S. Leite, Identidades Polinomiais para a Álgebra de Jordan das Matrizes Triângulares Superiores de Ordem, Dissertação de Mestrado em Matemática, UFBA, Salvador, 2021.

[9] P. H. Martins de Morais, Identidades Polinomiais em Álgebras de Grupo, Dissertação de mestrado em matemática, UFBA, Salvador, 2018.

[10] S. A. Amitsur and J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1, 449-463 (1950).

[11] M. Dehn, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, (German) Math. Ann. 85, 184–194 (1922).

[12] W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, (German) Math. Ann. 113, 528–567 (1936).

[13] I. Kaplansky, Rings with polynomial identity, revised, Amer. Math. Soc. 54, 496–500 (1948).

[14] A. R. Kemer, Finite basis property of identities of associative algebras, Algebra and Logic 5, 362–397 (1987).

[15] I. N. Herstein, Lie and Jordan systems in simple rings with involution, American Journal of Mathematics, vol.78, 1956, pp.629–649.

[16] W. S. Martindale III, Rings with involution and polynomial identities, Journal of Algebra, vol.11, 1969, pp.186–194.

[17] D. V. Levchenko, Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra, Serdica, vol.8, n.º1, 1982, pp.42–56.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA
CEP: 40170 -110
<http://www.pgmat.ufba.br>