

ESTIMATIVA DE PARÂMETROS  
GEOELÉTRICOS E GRAVIMÉTRI-  
COS ATRAVÉS DE INVERSÃO  
HÍBRIDA COM OS MÉTODOS  
METROPOLIS E *STEEPEST*  
*DESCENT*

ANNIE GABRIELLE DE OLIVEIRA SILVA

VIRTUTE SPIRITUS





# Estimativa de Parâmetros Geométricos e Gravimétricos através de Inversão Híbrida com os Métodos Metropolis e *Steepest Descent*

por

ANNIE GABRIELLE DE OLIVEIRA SILVA

Geofísica (Universidade Federal da Bahia – 2022)

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Alanna Costa Dutra

Coorientador: Prof. Dr. Wilson Mouzer Figueiró

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

EM

GEOFÍSICA

à

Câmara de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

da

Universidade Federal da Bahia

Comissão Examinadora



Dra. Alanna Costa Dutra - (PPGeof/UFBA-orientadora)



Dr. Paulo Eduardo Miranda Cunha - (Petrobrás)



Dr. Milton José Porsani - (PPGeof/UFBA)

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2025

A presente pesquisa foi desenvolvida no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos próprios, da CAPES

Silva, Annie Gabrielle de Oliveira,

Estimativa de Parâmetros Geolétricos e Gravimétricos através de Inversão Híbrida com os Métodos Metropolis e *Steepest Descent* / Annie Gabrielle de Oliveira Silva. — Salvador, 2025.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Alanna Costa Dutra

Coorientador: Prof. Dr. Wilson Mouzer Figueiró

Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Geofísica. Instituto de Geociências da Universidade Federal da Bahia, 2025.

1. Eletrorresistividade. 2. Gravimetria. 3. Inversão Conjunta. 4. Método Metropolis. 5. Steepest Descent. I. Dutra, Alanna Costa. II. Figueiró, Wilson Mouzer. III. Universidade Federal da Bahia. IV. Título.

CDU: 550.3

Dedicado aos meus pais Cristiane e  
Gabriel, e aos meus irmãos  
Giovanna, Otto e Maggie.

*"I think I did pretty well, considering I started out with nothing but a bunch of blank paper." (Steve Martin)*

# Resumo

Esta dissertação teve como objetivo principal testar metodologias de inversão aplicadas a dados sintéticos gravimétricos e geolétricos, integrando a inversão e interpretação desses dados para o estudo de um ambiente hidrogeológico. Fundamentados na teoria dos campos potenciais, ambos os métodos enfrentam ambiguidades inerentes à interpretação de suas anomalias, que podem ser causadas por diversas fontes possíveis. Para mitigar essas limitações, foi empregada a inversão conjunta, que processa simultaneamente os dados, gerando modelos que representam a geometria das interfaces de densidade e resistividade e a distribuição dessas propriedades. O estudo foi conduzido em duas etapas principais: a realização das modelagens individuais dos dados geofísicos e a aplicação de duas inversões conjuntas, uma global, utilizando o método Metropolis, e outra local, com o *Steepest Descent*, ambas implementadas por meio de códigos desenvolvidos em Python. Foram avaliados quatro modelos iniciais sob três níveis de ruído (sem ruído, 5% e 10%), gerando 24 modelos pela metodologia Metropolis, que serviram como entrada para o *Steepest Descent*, totalizando 48 modelos invertidos. Os resultados permitiram avaliar a qualidade das metodologias de inversão, identificar as limitações de cada método geofísico e visualizar a geometria e distribuição das propriedades no meio geológico, contribuindo para a compreensão e desenvolvimento de soluções mais robustas para problemas inversos.

# Abstract

The main objective of this dissertation was to test inversion methodologies applied to synthetic gravimetric and geoelectrical data, integrating the inversion and interpretation of these data for the study of a hydrogeological environment. Based on the theory of potential fields, both methods face inherent ambiguities in the interpretation of their anomalies, which can be caused by several possible sources. To mitigate these limitations, joint inversion was used, which simultaneously processes the data, generating models that represent the geometry of the density and resistivity interfaces and the distribution of these properties. The study was conducted in two main stages: the individual modeling of the geophysical data and the application of two joint inversions, a global one, using the Metropolis method, and a local one, using the *Steepest Descent*, both implemented through codes developed in Python. Four initial models were evaluated under three noise levels (no noise, 5% and 10%), generating 24 models using the Metropolis methodology, which served as input for the Steepest Descent, totaling 48 inverted models. The results allowed us to evaluate the quality of the inversion methodologies, identify the limitations of each geophysical method and visualize the geometry and distribution of properties in the geological environment, contributing to the understanding and development of more robust solutions for inverse problems.

# Índice

Resumo . . . . .	5
Abstract . . . . .	6
Índice . . . . .	7
Índice de Figuras . . . . .	8
Introdução . . . . .	9
<b>1 Método Elétrico . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1 Fundamentos . . . . .	13
1.2 Arranjos e Técnicas de Campo . . . . .	16
1.3 Modelo Geoelétrico de $n$ Camadas Paralelas . . . . .	18
<b>2 Método Gravimétrico . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1 Fundamentos . . . . .	21
2.2 Anomalia Bouguer . . . . .	24
2.3 Modelagem Gravimétrica Direta . . . . .	25
<b>3 Modelagem Inversa . . . . .</b>	<b>27</b>
3.1 Problemas Inversos Não Lineares . . . . .	28
3.2 Inversão de Escopo Global: Método Metropolis . . . . .	28
3.3 Inversão de Escopo Local: <i>Steepest Descent</i> . . . . .	31
3.4 Inversão Conjunta de dados Elétricos e Gravimétricos . . . . .	34
<b>4 Resultados e Discussões . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1 Inversão Sem Ruído . . . . .	47
4.2 Inversão com 5% de Ruído . . . . .	52
4.3 Inversão com 10% de Ruído . . . . .	56
4.4 Análise Completa dos Modelos Gerados . . . . .	60

---

5	Conclusões . . . . .	68
	Agradecimentos . . . . .	71
Apêndice A	Validação e Aprofundamento da Modelagem Geométrica . . .	73
Apêndice B	Validação da Modelagem Gravimétrica . . . . .	76
Apêndice C	Parâmetros de Archie dos Modelos Iniciais do Método Metropolis . . . . .	79
Apêndice D	Estudo dos Coeficientes da Função Objetivo do Método Metropolis . . . . .	81
Apêndice E	Critérios de Parada e Análise de Convergência para o Método Metropolis . . . . .	85
Apêndice F	Estudo do Coeficiente $\tau$ e Estudo da Convergência do Método <i>Steepest Descent</i> . . . . .	88
Apêndice G	Função Objetivo e Derivadas do Método <i>Steepest Descent</i> . .	90
Apêndice H	Resultados da Inversão Global . . . . .	92
Apêndice I	Resultados da Inversão Local . . . . .	105
	Referências Bibliográficas . . . . .	118

# Índice de Figuras

1.1	Cilindro condutor de resistência $\delta R$ , comprimento $\delta L$ , área de seção transversal $\delta A$ e a diferença de potencial $\delta V$ entre suas bases. (Kearey et al., 2009) . . . . .	14
1.2	Visão de configuração de eletrodos para medições de resistividade. Fonte (Borja, 2018). . . . .	16
1.4	Caminhamento feito com arranjo dipolo-dipolo. Fonte (Braga, 2006). . . . .	17
1.3	Arranjo dipolo-dipolo. . . . .	17
1.5	Modelo de $n$ camadas separadas por interfaces horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada $m$ . Com $n - 1$ espessuras ( $h_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$ ) e $n + 1$ resistividades ( $\sigma_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ). Adaptado de Sato (2002). . . . .	19
1.6	Modelo geoeletrico de $n$ camadas separadas por interfaces elétricas horizontais. Adaptado de (Borja, 2018). . . . .	20
2.1	Potencial gravitacional no ponto $P = (x, y, z)$ devido a uma distribuição contínua de massa, de densidade $\rho(x', y', z')$ , que ocupa um espaço tridimensional. Adaptada de Blakely (1996). . . . .	23
2.2	Modelo gravimétrico do prisma homogêneo de comprimento infinito, em uma das direções horizontais. . . . .	25
2.3	Malha gravimétrica com 60 prismas horizontais. . . . .	26
3.1	Fluxograma simplificado para a inversão utilizando método Metrópolis. . . . .	30
3.2	Direção de decrescimento da função $f(x)$ . . . . .	31
3.3	Fluxograma simplificado para a inversão utilizando método <i>steepest descent</i> . . . . .	33
3.4	Parâmetros da inversão conjunta . . . . .	34
3.5	Modelo geológico alvo. . . . .	36
3.6	Modelos alvo da inversão conjunta . . . . .	37

3.7	Disposição do arranjo dipolo-dipolo em função da malha gravimétrica. A segunda linha elétrica não é mostrada na figura, mas ocorre de maneira simétrica a demonstrada, com seus eletrodos de corrente A e B, respectivamente, posicionados nas coordenadas (6400, 0) e (6600, 0) . O caminhamento dá-se em sentido contrário com os eletrodos M e N inicialmente posicionados, respectivamente, nas coordenadas (6000, 0) e (6200, 0). . . . .	39
3.8	Visualização dos dados elétricos com 3 níveis de ruído. . . . .	40
3.9	Visualização do dados observados gravimétricos com diferentes graus de ruído. . . . .	40
3.10	Configuração bidimensional do caminhamento elétrico com diferentes graus de ruído. . . . .	41
3.11	Modelos elétricos iniciais de distribuição de resistividades elétricas ( $\text{ohm} \cdot m$ . . . . .	44
3.12	Modelos gravimétricos iniciais de distribuição de densidades ( $kg/m^3$ ), acompanhados dos respectivos erros em relação ao modelo alvo. . . . .	45
4.1	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3 considerando que os dados observados não possuem ruído. . . . .	49
4.2	Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o obtido pela inversão Metrópolis, para os dados observados sem ruído. . . . .	50
4.3	Resultado da inversão do <i>Steepest Descent</i> para o modelo 3, sem ruído. . . . .	51
4.4	Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o invertido, obtidos pelo método Metrópolis e com introdução de 5% de ruído nos dados observados. . . . .	52
4.5	Resultado da inversão pelo método Metrópolis, para o modelo 3 e com introdução de 5% de ruído nos dados observados. . . . .	54
4.6	Resultado da inversão pelo método <i>Steepest Descent</i> , para o modelo 3 e com introdução de 5% de ruído nos dados observados. . . . .	55
4.7	Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o invertido, obtidos pela inversão com método Metrópolis e com introdução de 10% de ruído nos dados observados. . . . .	56
4.8	Resultado da inversão pelo método Metropolis, para o modelo 3 e com introdução de 10% de ruído nos dados observados. . . . .	58
4.9	Resultado da inversão pelo método <i>Steepest Descent</i> , para o modelo 3 e com introdução de 10% de ruído nos dados observados. . . . .	59
4.10	Representação gráfica da redução da função objetivo da inversão global para diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	60
4.11	Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão global para o método elétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	62

---

4.12	Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão global para o método gravimétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	62
4.13	Representação gráfica dos resultados da inversão para diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	64
4.14	Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão local para o método elétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	65
4.15	Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão local para o método gravimétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	65
4.16	Comparação gráfica dos erros entre o modelo inicial e o modelo alvo, bem como entre os modelos invertidos (obtidos pela inversão global e local) e o modelo alvo, para o método elétrico. Os resultados são apresentados considerando diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	67
4.17	Comparação gráfica dos erros entre o modelo inicial e o modelo alvo, bem como entre os modelos invertidos (obtidos pela inversão global e local) e o modelo alvo, para o método gravimétrico. Os resultados são apresentados considerando diferentes modelos iniciais e níveis de ruído. . . . .	67
A.1	Comparação entre as curvas modelagens elétricas. . . . .	74
B.1	Malha gravimétrica formada por 800 prismas verticais semi-infinitos na direção y. . . . .	76
B.2	Modelagem gravimétrica de um cilindro, de uma esfera e a aproximação dessas estruturas utilizando prismas. A visualização de ambas as estruturas é a mesma, no entanto o cilindro possui uma terceira dimensão perpendicular a página. . . . .	77
E.1	As Figuras acima apresentam o comportamento da função objetivo ao longo de execuções de 2, 4 e 5 horas, onde o eixo X representa o tempo decorrido em minutos e o eixo Y o valor da função objetivo. . . . .	87
G.1	Matriz de densidades. . . . .	90
G.2	Definição de derivada. . . . .	91
H.1	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 1, sem ruído. . . . .	93
H.2	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, sem ruído. . . . .	94
H.3	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3, sem ruído. . . . .	95
H.4	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, sem ruído. . . . .	96
H.5	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 1, com ruído de 5%. . . . .	97
H.6	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, com ruído de 5%. . . . .	98

---

H.7	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3, com ruído de 5%. . . . .	99
H.8	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, com ruído de 5%. . . . .	100
H.9	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 1, com ruído de 10%. . . . .	101
H.10	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, com ruído de 10%. . . . .	102
H.11	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3, com ruído de 10%. . . . .	103
H.12	Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, com ruído de 10%. . . . .	104
I.1	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 1, sem ruído. . . . .	106
I.2	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 2, sem ruído. . . . .	107
I.3	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 3, sem ruído. . . . .	108
I.4	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 4, sem ruído. . . . .	109
I.5	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 1, com ruído de 5%. . . . .	110
I.6	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 2, com ruído de 5%. . . . .	111
I.7	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 3, com ruído de 5%. . . . .	112
I.8	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 4, com ruído de 5%. . . . .	113
I.9	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 1, com ruído de 10%. . . . .	114
I.10	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 2, com ruído de 10%. . . . .	115
I.11	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 3, com ruído de 10%. . . . .	116
I.12	Resultado da inversão <i>Steepest descent</i> para o modelo 4, com ruído de 10%. . . . .	117

# Introdução

A gravimetria e a eletrorresistividade são dois métodos que possuem aplicações práticas na exploração mineral, estudos tectônicos, geotécnicos e em problemas ambientais (Telford et al., 2004). No contexto da água subterrânea, os métodos geoeletricos são particularmente eficazes para mapear a estrutura de resistividade do subsolo, permitindo discriminar entre água doce e água salgada, aquíferos arenosos de rocha mole e material argiloso, aquíferos porosos ou fraturados de rocha dura e argilas pouco permeáveis, além de discriminar rochas fraturadas portadoras de água de sua rocha hospedeira sólida (Kirsch, 2006).

De igual forma, o método gravimétrico se destaca ao inferir pequenas variações de anomalias gravitacionais que podem indicar a presença de aquíferos, sobretudo em ambientes onde as diferenças de densidade entre rochas saturadas com água e rochas secas são marcantes. Além disso, o método é especialmente eficaz em detectar a variação de densidade entre o embasamento rochoso e sedimentos porosos saturados de água. Em estudos de águas subterrâneas, essas anomalias podem revelar a profundidade, extensão e geometria dos aquíferos (Kirsch, 2006).

A interpretação de anomalias de campos potenciais é inerentemente ambígua, dado que as anomalias podem ser causadas por um número infinito de fontes possíveis (Kearey et al., 2009). As limitações e ambiguidades dos métodos individuais podem ser consideravelmente reduzidas por meio da implementação de esquemas de inversão conjunta. De acordo com Haber e Oldenburg, (1997), uma inversão é considerada conjunta quando ela é capaz de inverter simultaneamente o conjunto de dados combinados  $(d_1, d_2)$  e recuperar os modelos  $(m_1, m_2)$ .

Além disso, Haber e Oldenburg (1997) destacam que, embora existam numerosos estudos sobre a inversão multidimensional de medições geofísicas complementares que detectam as mesmas propriedades físicas, a inversão conjunta multidimensional de dados díspares, provenientes de métodos baseados em propriedades físicas fundamentalmente diferentes e sem uma relação analítica pré-estabelecida, é muito menos explorada. Atualmente, existem duas abordagens principais para a realização dessas modelagens inversas: (1) o uso de atributos

estruturais, como limites de alvos geológicos, e (2) o uso de características petrofísicas ou hidrológicas para relacionar diferentes propriedades geofísicas.

Entre os estudos que utilizam atributos estruturais, destacam-se os trabalhos de Gallardo e Meju (2003), (2004), (2007) e Moorkamp et al. (2011), que implementam o método de gradiente cruzado. Nessa abordagem, o produto cruzado entre os gradientes de duas propriedades físicas, como resistividade e densidade, é minimizado, forçando a continuidade estrutural. Já no caso de abordagens que utilizam atributos petrofísicos, podem-se citar Nielsen e Jacobsen (2000), Colombo e De Stefano (2007) e Heinke et al. (2010). Esta pesquisa se insere na segunda abordagem, ao explorar relações petrofísicas para a inversão conjunta de dados de gravimetria e eletrorresistividade. O objetivo é superar as limitações de cada método individual, tanto no processo de inversão (com ajuste simultâneo das curvas de resistividade e anomalia gravimétrica observadas e calculadas) quanto na interpretação integrada dos modelos finais de propriedades físicas.

Santos et al. (2006) foram pioneiros na inversão conjunta utilizando atributos petrofísicos aplicados aos métodos eletroressistivos e gravimétricos, propondo um algoritmo baseado em *simulated annealing* para investigar estruturas geológicas e recursos hídricos subterrâneos na região do Sinai, Egito. Outros trabalhos relevantes nessa linha incluem: Represas (2009), que aplicou a metodologia em duas áreas distintas (Sinai e Chaves, Portugal); Sultan et al. (2010), que mapeou a profundidade do leito rochoso e zonas aquíferas na região do Cairo, Egito; e Pedrosa Júnior (2010), que investigou áreas de baixo imageamento sísmico na Bacia do Potiguar.

Mais recentemente, Zhang e Revil (2015) e Singh et al. (2019) exploraram abordagens inovadoras na inversão conjunta de dados elétricos e gravimétricos. Zhang desenvolveu uma estrutura de inversão bayesiana que integra informações geológicas prévias para interpretar dados sintéticos de gravidade e resistividade contínua, proporcionando maior confiabilidade na reconstrução das propriedades físicas. Por sua vez, Singh empregou a lógica *Fuzzy c-means* para estabelecer relações petrofísicas entre densidade e resistividade, com o intuito de mapear a extensão de rochas portadoras de urânio nas proximidades da mina a céu aberto de Beldih, na Índia.

A metodologia desta pesquisa teve como objetivo testar a eficácia de inversões conjuntas aplicadas a dados sintéticos gravimétricos e geoeletricos, considerando diferentes níveis de ruído para simular condições reais de medição em um ambiente hidrogeológico. Essa abordagem foi embasada no trabalho de Santos et al. (2006), especialmente na geração de modelos iniciais. A lei de Archie (1942) foi utilizada como vínculo petrofísico indireto, sendo aplicada exclusivamente para os modelos iniciais antes do procedimento de inversão.

Assumiu-se a validade da lei de Archie para todos os cenários hidrogeológicos modelados, considerando que sempre é possível identificar parâmetros específicos de Archie, como porosidade e os coeficientes  $a$  e  $m$ , que tornam as relações petrofísicas aplicáveis aos modelos gerados.

Nesta pesquisa, foram utilizadas duas modelagens diretas distintas, adaptadas às características dos métodos gravimétrico e geolétrico, e duas inversões, uma com a abordagem de escopo global (Metropolis) e outra de escopo local (*Steepest Descent*). Para os dados sintéticos gravimétricos, foi adotada uma modelagem baseada em prismas infinitos em uma das direções horizontais, parametrizando o meio em 60 prismas, com 10 estações localizadas nos pontos médios dos prismas e uma área de 4,8 km de extensão por 1 km de profundidade. Já para os dados geolétricos, foram realizadas duas linhas de caminhamento elétrico utilizando o arranjo dipolo-dipolo, sendo o modelo geolétrico composto por camadas horizontais paralelas. Os modelos alvo são distintos: o modelo elétrico possui três camadas e teve cinco parâmetros invertidos, enquanto o modelo gravimétrico conta com 36 parâmetros relacionados às densidades.

O método de inversão global Metropolis é aplicado inicialmente para gerar modelos a partir de combinações pseudoaleatórias, empregando uma função objetivo robusta que considera ajustes aos dados observados, vínculos de suavidade entre prismas adjacentes e restrições geológicas. A inversão produz dois modelos finais, elétrico e gravimétrico, que servem de entrada para o método *Steepest Descent*, caracterizado por sua abordagem baseada no gradiente. Nessa etapa, a função objetivo é simplificada para facilitar o cálculo numérico das derivadas, resultando nos modelos finais para cada cenário.

Foram realizados simulações em quatro modelos iniciais diferentes, avaliados sob três níveis de ruído: sem ruído, com 5% e com 10%. No total, foram gerados 48 modelos invertidos, combinando as metodologias de Metropolis e *Steepest Descent* em diferentes cenários. Essa abordagem permitiu avaliar a eficiência das inversões conjuntas em reduzir ambiguidades e melhorar a acurácia dos modelos finais.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta os fundamentos do método elétrico, os arranjos, as técnicas de campo e a modelagem geolétrica aplicada nesta pesquisa. O Capítulo 2 expõe os fundamentos do método gravimétrico, conceitos sobre a anomalia bouguer e uma discussão sobre a modelagem gravimétrica direta utilizada. O Capítulo 3 detalha as metodologias de inversão deste trabalho, abrangendo as técnicas de inversão global e local, bem como a abordagem adotada para a inversão conjunta dos dados. No Capítulo 4, são discutidos os resultados obtidos das simulações numéricas sem ruído e com dois diferentes níveis de ruído, para a representação dos dados observados.

Por fim, o Capítulo 5 apresenta as considerações finais, destacando uma retrospectiva dos resultados alcançados, as principais limitações encontradas durante o desenvolvimento do trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

# 1

## Método Elétrico

Todos os métodos eletrorresistivos implicam na injeção de uma corrente elétrica artificial no solo, por meio de eletrodos dispostos em sua superfície. Isso permite a aferição da diferença de potencial resultante, que é então usada para determinar a resistividade aparente das camadas subsuperficiais (Telford et al., 2004). Este método permite a caracterização das camadas geológicas, incluindo sua composição, espessura e identificação de possíveis depósitos minerais.

### 1.1 Fundamentos

A resistividade elétrica ( $\sigma$ ) é uma propriedade que descreve a capacidade de um material resistir ao fluxo de corrente elétrica, expressa em ohm-metros ( $\Omega \cdot m$ ). Para um cilindro condutor de resistência  $\delta R$ , comprimento  $\delta L$  e área de seção transversal  $\delta A$ , apresentado na Fig. 1.1, a resistividade é dada por:

$$\sigma = \frac{\delta R \delta A}{\delta L}. \quad (1.1)$$

A resistividade de um material é uma característica que varia significativamente entre diferentes tipos de substâncias. Materiais condutores, como os metais, exibem baixa resistividade, o que facilita a passagem de eletricidade, enquanto a maioria dos minerais que compõem as rochas possui alta resistividade, o que dificulta o movimento de elétrons. Essa característica está relacionada ao fato de que, nas rochas, a condução da eletricidade ocorre principalmente por processos eletrolíticos e não por processos eletrônicos.

A resistividade também pode ser expressa pela fórmula empírica de Archie (1942), a qual descreve a resistividade em termos do volume de água presente nos poros,  $\sigma = a\phi^{-b}f^{-c}\sigma_w$ ,

onde,  $\phi$  é a porosidade,  $f$  é a fração de poros contendo água de resistividade  $\sigma_w$  e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes empíricas.

A porosidade se torna, assim, um fator determinante para a definição da propriedade resistividade das rochas, que controla efetivamente a capacidade de condução elétrica (a resistividade aumenta conforme a porosidade diminui). Quando as rochas possuem maior porosidade, a presença de fluidos condutores, como a água, pode influenciar significativamente a sua resistividade.

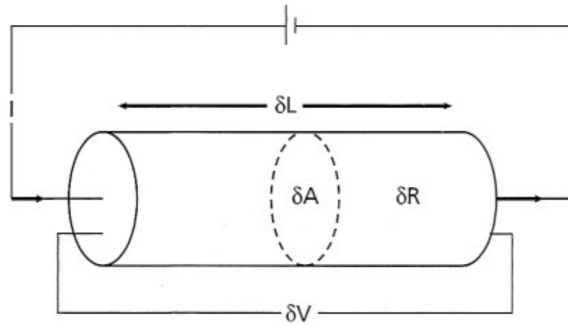


Figura 1.1: Cilindro condutor de resistência  $\delta R$ , comprimento  $\delta L$ , área de seção transversal  $\delta A$  e a diferença de potencial  $\delta V$  entre suas bases. (Kearey et al., 2009)

A profundidade de investigação e a resolução do método depende: da quantidade de dados, da configuração dos eletrodos, do alvo desejado e da complexidade das camadas geológicas. Há uma relação intrínseca entre a penetração da corrente no solo e a distância entre os eletrodos. Quanto maior for a distância entre os eletrodos, maior será o alcance de maiores profundidades no subsolo. Tal fato impõe limites práticos quanto a profundidade de investigação, em virtude da dificuldade de geração de energia e em estender longos comprimentos de cabos. Assim, o método é considerado raso e se restringe a até 1 km de profundidade (Kearey et al., 2009).

## Teoria do Potencial Elétrico

O método elétrico é fundamentado na teoria do potencial. Tratando-se de um problema elétrico estacionário, o campo elétrico pode ser obtido de um campo potencial  $\phi$  por meio de uma operação de gradiente. Então,

$$\vec{E} = -\nabla\phi. \quad (1.2)$$

Um campo vetorial  $\mathbf{E}$  é dito conservativo se o trabalho para mover uma partícula de ponto a outro, independe do caminho percorrido por essa partícula. Em um meio isotrópico

e linear, a lei de Ohm estabelece o seguinte:

$$\vec{J} = \eta \vec{E}, \quad (1.3)$$

em que  $\vec{J}$  é a densidade de corrente elétrica, e  $\eta$  é uma constante de proporcionalidade escalar não nula, denominada condutividade. O recíproco da condutividade é a resistividade  $\sigma = 1/\eta$ . Substituindo a Eq. 1.2 na 1.3 podemos escrever,

$$\vec{J} = -\eta \nabla \phi. \quad (1.4)$$

Para correntes elétricas estacionárias, onde a condutividade é finita e a carga não se acumula no meio durante o fluxo elétrico, a densidade de corrente elétrica, para um meio homogêneo, se reduz a  $\eta_a(x, y, z)$  e está em seu valor de equilíbrio, isto é  $\partial \eta_a(x, y, z)/\partial t = 0$  para cada ponto do meio. Portanto, é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

Sabendo da relação  $\nabla \cdot (\theta \vec{A}) = \nabla \theta \cdot \vec{A} + \theta \nabla \cdot \vec{A}$ , onde  $\vec{A}$  é um vetor função de posição e  $\theta$  o valor de uma função escalar, fazemos:

$$\nabla \eta \cdot \nabla \phi + \eta \nabla^2 \phi = 0. \quad (1.7)$$

Ou, para a resistividade,

$$\nabla \frac{1}{\sigma} \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \phi = 0. \quad (1.8)$$

Considerando que a condutividade ou resistividade é constante em todo o meio, o primeiro termo das Eqs. 1.7 e 1.8 desaparece, dando origem a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (1.9)$$

### Dois Eletrodos de Corrente na superfície

O potencial elétrico (V) a uma distância (r) de um único eletrodo de corrente (I) na superfície de um meio de resistividade uniforme  $\sigma$  é dado por:

$$V = \frac{\sigma I}{2\pi r}. \quad (1.10)$$

Para o caso onde temos uma fonte e um sumidouro, temos que o potencial elétrico total  $V_T$  em um ponto na superfície de observação, é dado pela soma seguinte,

$$V_T = V_A + V_B, \quad (1.11)$$

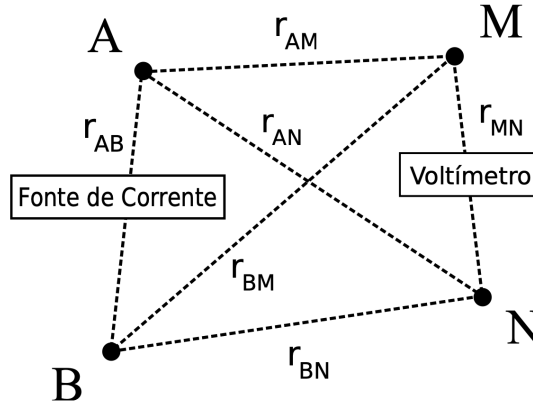


Figura 1.2: Visão de configuração de eletrodos para medições de resistividade. Fonte (Borja, 2018).

onde  $V_A$  e  $V_B$  são, respectivamente, os potenciais no ponto considerado devido aos eletrodo da fonte de corrente em A e ao sumidouro em B. Da Equação 1.10 podemos escrever,

$$V_M = \frac{\sigma I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right) \quad (1.12)$$

e

$$V_N = \frac{\sigma I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BN}} \right). \quad (1.13)$$

Então, a diferença de potencial  $\Delta V$  entre os eletrodos M e N é,

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{\sigma I}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right) - \left( \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BN}} \right) \right\}. \quad (1.14)$$

Isolando a resistividade na Equação 1.14, temos:

$$\sigma = \frac{\Delta V K}{I}. \quad (1.15)$$

Onde,  $K = 2\pi / \left\{ \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right) - \left( \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BN}} \right) \right\}$ , é o chamado fator geométrico, que trata da disposição espacial dos eletrodos na superfície.

## 1.2 Arranjos e Técnicas de Campo

Existem muitas configurações de eletrodos, dentre elas estão os arranjos Wenner, Schlumberger, dipolo-dipolo, etc. Assim como as técnicas existentes em levantamentos de resistividade: Caminhamento elétrico (CE), sondagem elétrica vertical (SEV) e perfilagem elétrica (PERF). Porém, apenas o arranjo dipolo-dipolo e o caminhamento elétrico serão explicitados a seguir, visto que foram o arranjo e a técnica de campo escolhidos para esta pesquisa.

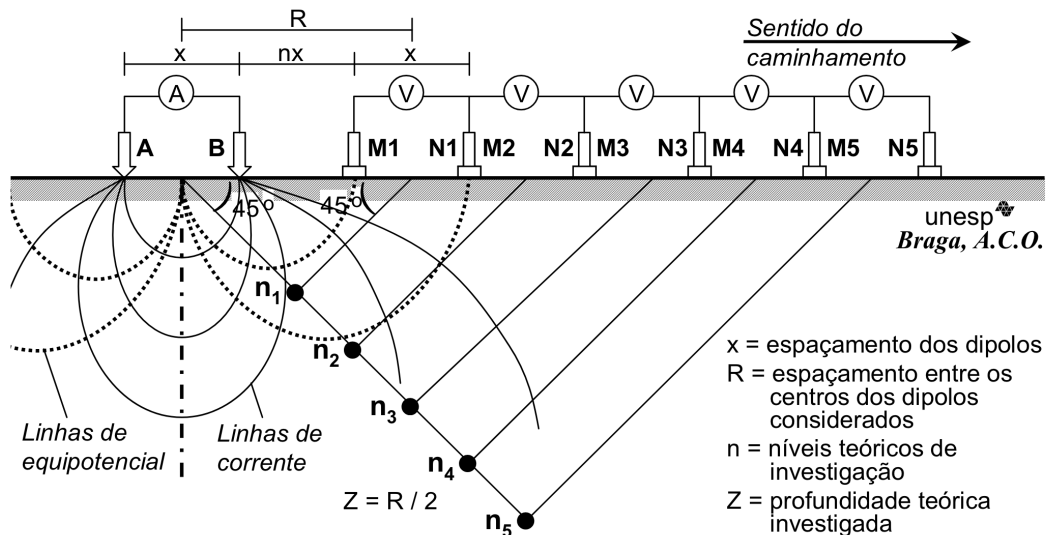


Figura 1.4: Caminhamento feito com arranjo dipolo-dipolo. Fonte (Braga, 2006).

### Arranjo dipolo-dipolo

Nesta configuração de eletrodos, Figura 1.3, os eletrodos de corrente A e B permanecem fixos e espaçados de uma distância  $a$ , enquanto apenas os eletrodos de potencial M e N, que também apresentam um espaçamento  $a$ , são deslocados por uma distância  $na$ .

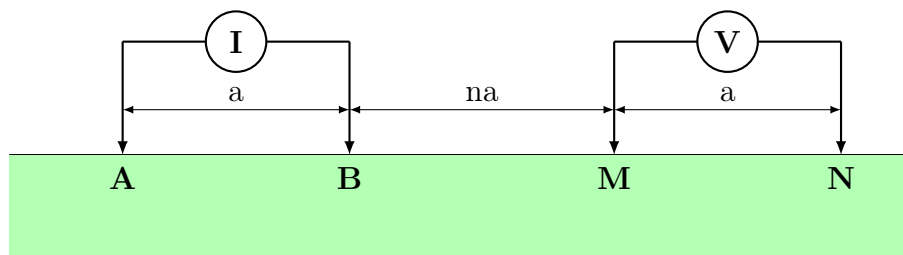


Figura 1.3: Arranjo dipolo-dipolo.

Para este arranjo, a resistividade aparente  $\sigma_a$  pode ser dada pela equação seguinte, sendo  $K = \pi an(n + 1)(n + 2)$  seu fator geométrico. Assim:

$$\sigma_a = \left( \frac{\Delta V}{I} \right) K. \tag{1.16}$$

### Caminhamento Elétrico

O Caminhamento elétrico é utilizado para determinar variações laterais de resistividade. Os eletrodos de corrente e os de potencial são mantidos a uma separação fixa e progressivamente movidos ao longo da direção da linha de investigação.

De acordo com Braga (2006), a profundidade teórica atingida em cada nível investigado, é tomada, segundo alguns autores, como sendo  $Z = R/2$  (metros), onde  $R$  é a distância entre os centros dos dipolos considerados (AB e MN). No entanto, na prática, essa relação é mais realística se for tomada como sendo aproximadamente  $R/4$ .

Este método é empregado para localizar falhas, zonas de cisalhamento, corpos de densidade anômala e a profundidade do embasamento. Além disso, assim como a finalidade desta pesquisa, ele também é utilizado em levantamentos para detectar a presença de descontinuidades abruptas.

### 1.3 Modelo Geométrico de $n$ Camadas Paralelas

O modelo geométrico escolhido foi de  $n$  camadas separadas por interfaces elétricas horizontais. Para um modelo geológico, representado na Fig. 1.5, formado por uma sucessão de camadas numeradas de 0 a  $n$ , com resistividades  $\sigma_i$ , com ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), separadas por  $n$  interfaces plano-paralelas, com a fonte de corrente pontual (I) localizada no interior de uma camada  $m$  (a qual será dividida por um plano, adicionando mais 1 camada, totalizando de  $n + 2$ ). Portanto, as camadas são indexadas por  $0, 1, \dots, \overline{m}, \underline{m}, \dots, n - 1$  e  $n$ , onde  $\overline{m}$  se refere à parte da camada  $m$ , delimitada pelos planos  $z = z_{m-1}$  e  $z = z_F$ , e  $\underline{m}$  ao restante da camada  $m$ , delimitada pelos planos  $z = z_F$  e  $z = z_m$ .

Conforme apresentado na seção 1.1, na ausência de fontes e considerando meios homogêneos e isotrópicos, a solução para o potencial elétrico em cada camada deve satisfazer a equação de Laplace. A solução geral desse problema implica na obtenção de  $n + 2$  expressões dos potenciais elétricos  $V_i$ , uma para cada camada  $i$ . A solução é dada por:

$$V_i = \int_0^\infty [A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda, \quad (1.17)$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são, cada uma,  $n + 2$  funções que definem o potencial  $V_i$ , encontradas a partir de considerações de condições de contorno. As variáveis  $z$  e  $r$  são obtidas devido ao uso da simetria cilíndrica na resolução do problema, os  $\lambda$ 's são as soluções das equações do potencial e  $J_0$  é a função de Bessel de primeira espécie.

A solução para esse problema foi apresentada de maneira generalizada para uma fonte de corrente elétrica alocada em uma camada arbitrária  $m$ . No modelo escolhido, contudo, a injeção de corrente e a medida de potencial são realizadas na superfície, no topo da primeira camada, conforme ilustrado na Figura 1.6. A validação e o detalhamento da modelagem geométrica utilizada nesta pesquisa estão descritos no Apêndice A, onde também se discutem as limitações do modelo adotado e se apresentam comparações com duas abordagens clássicas

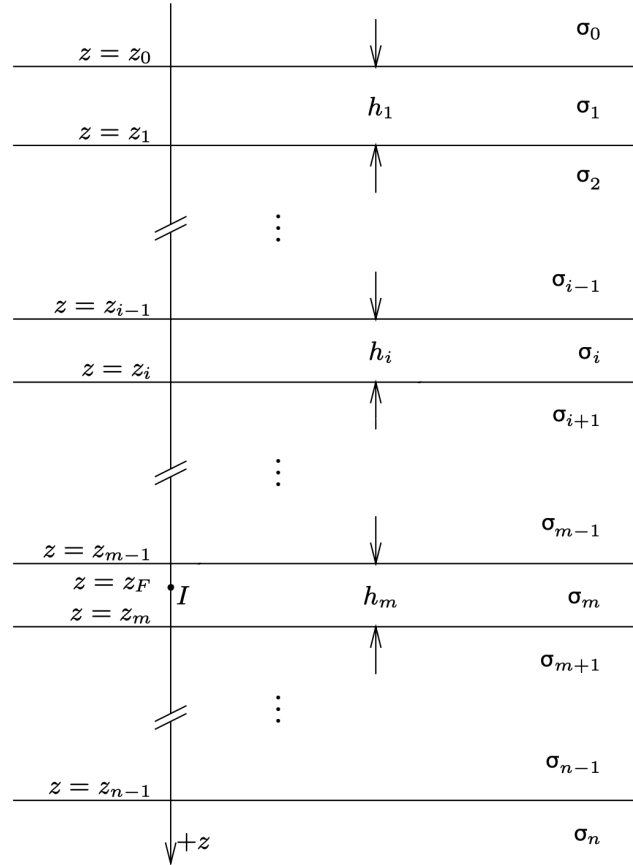


Figura 1.5: Modelo de  $n$  camadas separadas por interfaces horizontais com a fonte de corrente localizada no interior da camada  $m$ . Com  $n - 1$  espessuras ( $h_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$ ) e  $n + 1$  resistividades ( $\sigma_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ). Adaptado de Sato (2002).

de modelagem geométrica.

Para a solução particular, onde a fonte de corrente e de potencial encontram-se na camada 0, correspondente ao ar ( $\sigma = \infty$ ), e que  $z_0 = z_F = z = 0$ , Sato (2002) afirma que, para uma Terra estratificada horizontalmente com  $n$  camadas de espessura  $h_i$  e resistividade elétrica  $\sigma_i$ , podemos escrever o potencial elétrico  $V_1$ , em um ponto a uma distância  $r$  da fonte de corrente, como:

$$V_1 = \frac{\sigma_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (1.18)$$

Onde  $G_1$  é determinado pelo processo recursivo:

$$G_i = \frac{1 - (\sigma_{i+1}/\sigma_i)F_i}{1 + (\sigma_{i+1}/\sigma_i)F_i}, \quad (1.19)$$

$$F_i = \frac{1 - G_{i+1}e^{-2\lambda h_{i+1}}}{1 + G_{i+1}e^{-2\lambda h_{i+1}}}, \quad (1.20)$$

$$G_{i+1} = \frac{1 - (\sigma_{i+2}/\sigma_{i+1})F_{i+1}}{1 + (\sigma_{i+2}/\sigma_{i+1})F_{i+1}}, \quad (1.21)$$

⋮

$$F_{n-1} = 1, \quad (1.22)$$

$$G_n = 0. \quad (1.23)$$

Considerando que  $\int_0^\infty J_0(\lambda r)d\lambda = 1/r$ , o potencial pode ser reescrito como:

$$V_1 = \frac{\sigma_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda z_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda z_1}} - 1 \right] J_0(\lambda r) d\lambda \right\}. \quad (1.24)$$

A Equação 1.18 é substituída na Equação 1.16. Assim, para o arranjo dipolo-dipolo, a resistividade aparente  $\sigma_a$  é dada por:

$$\sigma_a = \sigma_1 \left\{ 1 + \frac{n(n+1)(n+2)a}{2} \times \int_0^\infty \left[ \frac{1 - G_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 + G_1 e^{-2\lambda h_1}} - 1 \right] [J_0(\lambda na) - 2J_0(\lambda(n+1)a) + J_0(\lambda(n+2)a)] d\lambda \right\}. \quad (1.25)$$

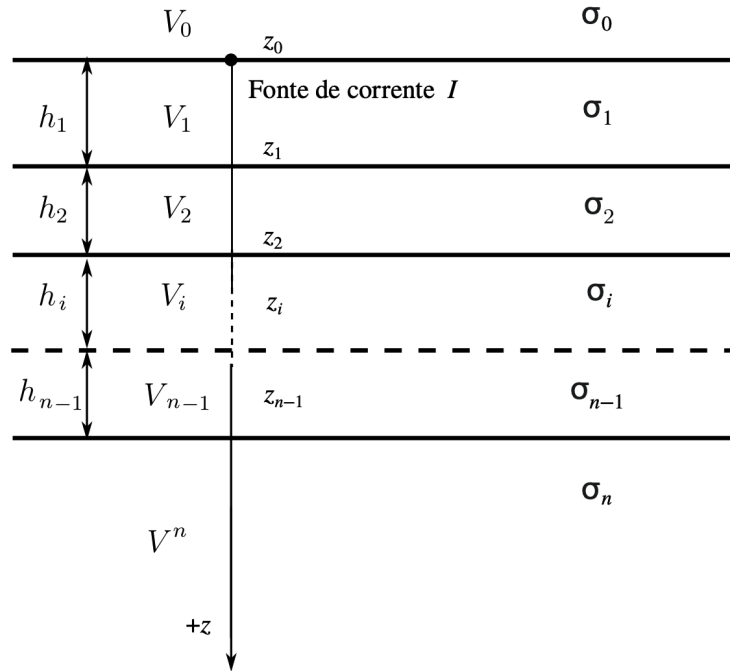


Figura 1.6: Modelo geológico de  $n$  camadas separadas por interfaces elétricas horizontais. Adaptado de (Borja, 2018).

# 2

## Método Gravimétrico

A prospecção gravimétrica envolve medidas da variação do campo gravitacional da Terra. Espera-se que seja possível localizar massas mais ou menos densas do que as formações adjacentes e entender sobre as irregularidades do campo terrestre (Telford et al., 2004). Neste capítulo serão abordados os aspectos teóricos da gravimetria que foram utilizados para essa pesquisa.

### 2.1 Fundamentos

O método gravimétrico é uma técnica geofísica que utiliza medições das variações no campo gravitacional terrestre para obter informações sobre a subsuperfície. Essas variações gravitacionais são causadas pela heterogeneidade da densidade dos materiais no subsolo, tornando essa abordagem amplamente empregada para mapear a distribuição de densidades de materiais abaixo da superfície.

As anomalias de gravidade detectadas pela gravimetria estão relacionadas às variações laterais de densidade dos materiais dentro do ambiente geológico. Assim, estas variações são observadas pelo contraste de densidade entre um corpo rochoso de densidade  $\rho_1$  e as rochas encaixantes de densidade  $\rho_2$ . Portanto,

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad (2.1)$$

onde o sinal do contraste de densidade determina o sinal da anomalia.

Para este trabalho, estudou-se um ambiente sedimentar de aquífero. As variações na porosidade são a principal causa de mudanças na densidade em rochas sedimentares. À

medida que a profundidade aumenta, a compactação das sequências de rochas sedimentares também aumenta, resultando em uma maior densidade (condição  $\rho(z)$  aumentando em profundidade).

As densidades das rochas são as menos variáveis de todos os parâmetros geofísicos, sua determinação apresenta potenciais ambiguidades que podem afetar a precisão das interpretações. Isto ocorre devido ao método gravimétrico utilizar anomalias do campo potencial, sobre a qual qualquer anomalia dada pode ser causada por um número infinito de fontes possíveis.

Para reduzir essas incertezas, é fundamental que a análise dos resultados seja enriquecida com informações prévias e a integração de outras abordagens geofísicas, como a eletrorresistividade, conforme ilustrado neste estudo. Essa estratégia combinada reforça a confiabilidade das análises e conclusões derivadas dos dados gravimétricos.

## Potencial e Campos Gravitacionais

A Terra é caracterizada por uma distribuição de massa heterogênea, associada a variação de densidade na subsuperfície. Transições entre as densidades das estruturas subsuperficiais geram os campos gravitacionais. O potencial de atração gravitacional ( $U_P$ ) de um corpo de massa ( $m$ ) e densidade ( $\rho$ ), é descrito pela lei de Isaac Newton através da integral:

$$U_P(x, y, z) = G \int \int \int_v \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz'. \quad (2.2)$$

Onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $dx' dy' dz'$  é um elemento de volume.

Para um ponto que esteja no interior de um corpo, o potencial ( $U_P$ ) depende da densidade do corpo e satisfaz a equação de Poisson, descrita pela equação:

$$\nabla^2 U_P = \frac{\partial^2 U_P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_P}{\partial z^2} = -4\pi G\rho. \quad (2.3)$$

Para um ponto localizado no exterior do corpo, a densidade é nula e conseqüentemente o potencial satisfaz a equação diferencial de Laplace, assim:

$$\nabla^2 U_P = \frac{\partial^2 U_P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_P}{\partial z^2} = 0. \quad (2.4)$$

O gradiente do potencial da gravidade nos permite determinar a aceleração:

$$\vec{g} = \nabla U, \quad (2.5)$$

cujo valor absoluto, pode ser determinado por,

$$g = |\nabla U|. \quad (2.6)$$

## Distribuições de Massa e Modelagem Gravimétrica

O princípio da superposição afirma que o potencial gravitacional devido a uma distribuição de massas é a soma das atrações gravitacionais das massas individuais. Por isso, a força resultante é o vetor soma de todas as forças devido a todas as massas, causadoras do campo gravitacional, no espaço. Uma distribuição contínua de massa é um agrupamento de muitas

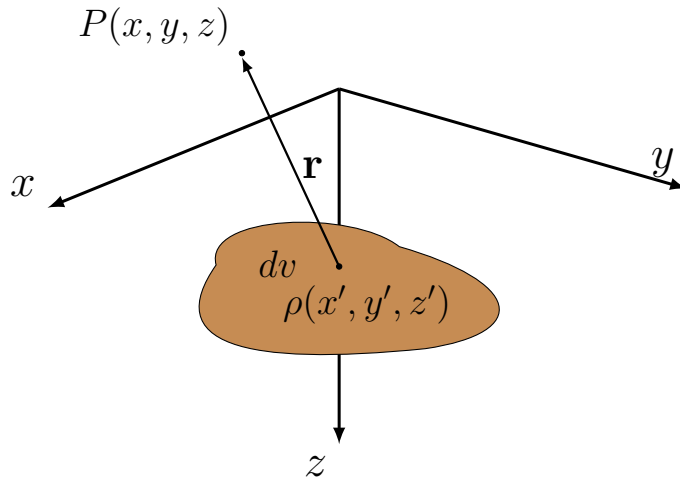


Figura 2.1: Potencial gravitacional no ponto  $P = (x, y, z)$  devido a uma distribuição contínua de massa, de densidade  $\rho(x', y', z')$ , que ocupa um espaço tridimensional. Adaptada de Blakely (1996).

pequenas massas  $dm = \rho(x, y, z)dv$  não espacialmente separadas, onde  $\rho(x, y, z)$  é a distribuição de densidade e  $dv$  é um elemento de volume. Aplicando o princípio de superposição,

$$\begin{aligned} U(P) &= \gamma \int_V \frac{dm}{r} \\ &= \gamma \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde a integração é sobre o volume  $V$  ocupado pela massa,  $P$  é o ponto de observação,  $Q$  é o ponto de integração e  $r$  é a distância entre  $P$  e  $Q$ , e  $\rho$  é dado em  $kg/m^3$ .

Considerando pontos de observação localizados fora de uma distribuição de massa, se a densidade é bem comportada, a integral da Equação 2.7 converge para todos os pontos  $P$  fora da massa e a atração gravitacional  $\vec{g}(P)$  pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \vec{g}(P) &= \nabla U(P) \\ &= -\gamma \int_V \rho(Q) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em campo, os gravímetros medem a componente vertical da atração gravitacional, assim,

$$g_z(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \frac{(z - z')}{r^3} dx' dy' dz'. \quad (2.9)$$

Generalizando a Equação 2.9, temos:

$$g(x, y, z) = \int_{z'} \int_{y'} \int_{x'} \rho(x', y', z') \psi(x - x', y - y', z - z') dx' dy' dz', \quad (2.10)$$

$$\psi = -\gamma \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Onde  $\psi(x - x', y - y', z - z')$  é a atração gravitacional em um ponto  $P(x, y, z)$  e  $\rho(x', y', z')$  é a densidade de uma massa pontual localizada em  $(x', y', z')$ .

Como destacado em Blakely (1996), a modelagem gravimétrica direta requer o cálculo de  $g(x, y, z)$  repetidas vezes usando a Equação 2.8. Essencialmente devemos dividir as fontes gravitacionais em  $N$  partes simples e converter a equação da modelagem em:

$$g_m = \sum_{n=1}^N \rho_n \psi_{mn}, \quad (2.12)$$

onde  $g_m$  é a atração gravimétrica vertical no ponto de número  $m$  das observações,  $\rho_n$  é a densidade da parte  $n$  e  $\psi_{mn}$  é a atração gravitacional no ponto  $m$  devido a parte  $n$  com densidade unitária.

## 2.2 Anomalia Bouguer

Blakely (1996) afirma que, quando medimos a gravidade em um determinado ponto, estamos, na verdade, somando diversos fatores. Dentre eles verifica-se a influência da latitude, da topografia, da atração produzida pelo Sol e pela Lua, dos instrumentos de medida, etc. Dessa forma, os valores da gravidade não podem ser diretamente utilizados quando adquiridos, devem-se realizar as correções gravimétricas.

A anomalia Bouguer reflete o valor observado da gravidade ( $g_{obs}$ ), após realizar algumas destas correções. São elas, correção do ar livre (fa), correção Bouguer simples (sb), correção de terreno (t) e gravidade teórica ( $g_0$ ). Sua definição será dada por:

$$\Delta g_{cb} = g_{obs} + g_{fa} - g_{sb} + g_t - g_0, \quad (2.13)$$

onde  $\Delta g_{cb}$  é a anomalia Bouguer completa.

## 2.3 Modelagem Gravimétrica Direta

O processo de modelagem gravimétrica direta começa com a criação de um modelo preliminar com base em informações geológicas e geofísicas disponíveis. Em seguida, a anomalia produzida pelo modelo inicial é calculada e comparada com os dados de gravidade observados, permitindo a avaliação da correspondência entre o modelo e a estrutura geológica real. Perturbações nos parâmetros do modelo são efetuados para aprimorar o alinhamento das curvas das anomalias, com o intuito de minimizar o erro entre dados observados e calculados.

### Modelagem por Prismas Infinitos em uma Direção Horizontal

A forma geométrica das fontes de anomalia gravimétrica, em geral, não é regular nem simétrica. No entanto, é possível aproximar estas fontes por formas simples, expressando sua resposta gravimétrica analiticamente. Nesta pesquisa, utilizou-se a modelagem da fonte com prismas, homogêneos e de comprimentos infinitos ao longo da direção  $y$ .

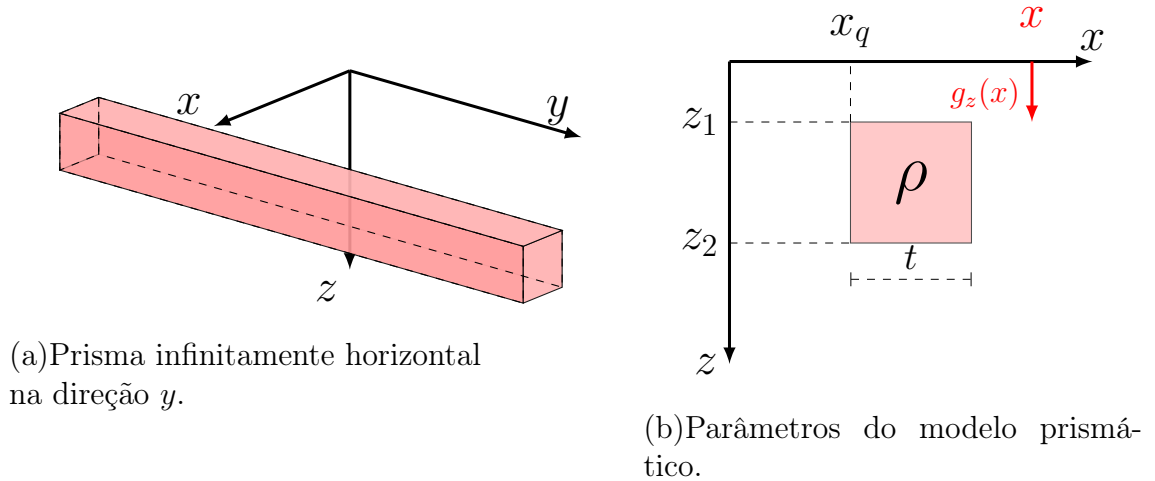


Figura 2.2: Modelo gravimétrico do prisma homogêneo de comprimento infinito, em uma das direções horizontais.

A equação que descreve a anomalia gravimétrica vertical  $g_z(x)$  de um prisma é descrita por Luiz e da Costa e Silva (1995) como:

$$\begin{aligned}
 g_z(x) = 2G\rho \left\{ \frac{(x - x_q)}{2} \cdot \ln \left( \frac{z_2^2 + (x - x_q)^2}{z_1^2 + (x - x_q)^2} \right) \right. \\
 + \frac{[(x - x_q) - t]}{2} \cdot \ln \left( \frac{z_1^2 + [(x - x_q) - t]^2}{z_2^2 + [(x - x_q) - t]^2} \right) \\
 - z_2 \left[ \arctan \left( \frac{(x - x_q) - t}{z_2} \right) - \arctan \left( \frac{x - x_q}{z_2} \right) \right] \\
 \left. + z_1 \left[ \arctan \left( \frac{(x - x_q) - t}{z_1} \right) - \arctan \left( \frac{x - x_q}{z_1} \right) \right] \right\}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

A abordagem escolhida envolve a discretização de subsuperfície em 60 prismas homogêneos com uma dimensão horizontal infinita. Seus parâmetros são:  $z_1$  é a profundidade do topo,  $z_2$  é a profundidade da base,  $t$  é a espessura,  $x_q$  é a coordenada horizontal do vértice superior esquerdo, e  $\rho$  é o contraste de densidades. Dessa forma, a anomalia gravimétrica do modelo discretizado é dada por:

$$g_z(x) = \sum_{i=1}^{60} g(x). \quad (2.15)$$

Apesar da discretização ser feita em uma malha com 8 km de extensão horizontal e 1 km de profundidade, o modelo possui dimensões de 4,8 km por 1 km. A malha descrita é graficamente representada na Figura 2.3. Foram utilizadas 10 estações gravimétricas, distribuídas na superfície, cada uma localizada no ponto médio de cada prisma.

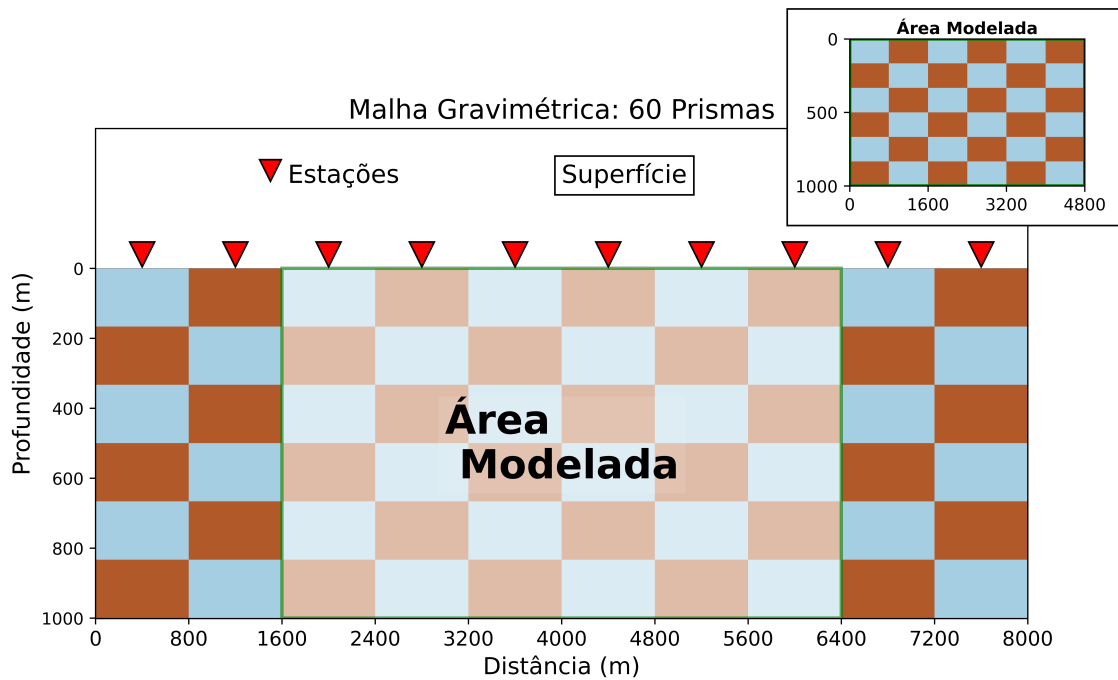


Figura 2.3: Malha gravimétrica com 60 prismas horizontais.

Com o objetivo de assegurar a confiabilidade da modelagem empregada, foi realizada uma comparação entre a equação adotada e as equações analíticas que descrevem a anomalia gravimétrica de uma esfera e de um cilindro. Esse procedimento é descrito em detalhe no Apêndice B.

# 3

## Modelagem Inversa

De acordo com Menke (2013), a teoria inversa é um conjunto de técnicas matemáticas organizadas para reduzir dados visando obter conhecimento sobre o mundo físico com base em inferências retiradas de observações. Isto é, a modelagem inversa utiliza os dados de campo em conjunto com princípios físicos ou teorias para estimar parâmetros de modelos quantitativos.

Na geofísica, durante a etapa da modelagem, são gerados modelos interpretáveis que consideram as variações das propriedades físicas dos meios geológicos, resultando em representações do meio geológico em diversas dimensões, unidimensionais (1D), como no caso deste trabalho, bidimensionais (2D), e tridimensionais (3D).

Os problemas inversos podem ser classificados em lineares e não-lineares, de acordo com a relação entre os parâmetros do modelo e os dados observados. Esta discussão será melhor abordada na seção 3.1. Além disso, metodologias empregadas para a resolução de problemas inversos podem ser subdivididas em abordagens de escopo global e de escopo local. Os métodos de escopo global exploram soluções em uma ampla gama de parâmetros simultaneamente. Em termos iterativos, parte-se de um modelo inicial distante do modelo alvo, geralmente devido à carência de informações à priori. Já os métodos de escopo local se concentram em ajustar iterativamente os parâmetros do modelo em torno de um modelo inicial relativamente próximo do modelo alvo, isto é, dentro do domínio de convergência do método.

### 3.1 Problemas Inversos Não Lineares

De acordo com Menke (2013), um problema é descrito como linear se satisfaz a relação  $G\vec{m} = \vec{d}$ , onde  $G$  é a função núcleo,  $\vec{d}$  é o vetor com os dados observados e  $\vec{m}$  é o vetor de parâmetros do modelo. Assim, um problema não linear é todo aquele que não obedece essa relação. Tarantola (2005) classifica os problemas não-lineares de acordo com seu grau de complexidade, podendo ser, relativamente à sua não linearidade: suaves, fracos, fortes altamente não lineares.

Problemas não lineares não possuem uma teoria única para sua resolução. A maioria dos métodos não lineares atuam na possibilidade de tornar o problema linear (Blakely, 1996). Este processo chama-se linearização e aproxima uma função não linear por uma ou mais funções lineares, permitindo solucionar o problema de maneira mais simples. Existem várias técnicas de linearização, dentre elas, a utilizada nesta pesquisa, é a linearização a partir da expansão da função em série de Taylor. Neste método, a função  $f(x)$  é expandida como uma soma de termos de potência  $(x-a)$ , assim dada por  $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$ , onde  $a$  é o ponto de linearização, com os coeficientes  $a_n$  tal que  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Seus coeficientes são obtidos a partir das derivadas da função e, o grau de aproximação da função linearizada para  $f(x)$  depende da escolha do grau de truncamento da soma das derivadas.

### 3.2 Inversão de Escopo Global: Método Metropolis

O método de escopo global escolhido nesta pesquisa é o Metropolis (ou Metropolis-Hastings). Esta estratégia foi desenvolvida por Metropolis e Ulam (1949), Metropolis et al. (1953) e Hastings (1970). Esta técnica de inversão baseia-se no método Monte Carlo (MC), utilizando cadeias de Markov (CM). Assim, o processo é randômico (MC) e sem memória (CM). A cadeia de Markov é um modelo matemático que descreve um processo estocástico, onde os próximos passos são determinados por probabilidades e cada passo depende exclusivamente do estado anterior (propriedade Markoviana).

De acordo com Tarantola (2005) a ideia básica deste método é realizar uma caminhada aleatória, uma espécie de movimento browniano, que, se não modificado, amostraria alguma distribuição de probabilidade inicial, então, usando uma regra probabilística, modificar a caminhada (alguns movimentos propostos são aceitos, outros são rejeitados) de tal forma que a caminhada aleatória modificada amostra a distribuição alvo.

Neste algoritmo, os novos parâmetros do modelo são gerados de maneira pseudo-aleatória, resultando em novos modelos admissíveis ( $M$  e  $N$ ) e no cálculo dos dados previstos  $\vec{d}_{calc} =$

$\vec{g}(\vec{M})$  e  $\vec{d}_{calc} = \vec{g}(\vec{N})$ . Dessa forma, dados calculados são gerados para o novo modelo e comparados com as observações  $\vec{d}_{obs}$ . Caso o critério de erro seja atendido por algum modelo, é o fim da inversão, caso contrário um número aleatório  $A$  é extraído de uma distribuição uniforme  $U[0, 1]$  e é utilizado como critério de aceitação ou rejeição de modelos.

Uma função de probabilidade  $P(M, N) = \frac{e^{-FO(N)}}{e^{-FO(M)}}$ , onde FO (x) é o cálculo do erro da função objetivo no modelo x, é utilizada em conjunto com o parâmetro A de aceitação. Se A for menor ou igual a  $P(M, N)$ , o modelo N é aceito como modelo corrente, é perturbado e passa novamente por todo o processo iterativo. Da mesma forma, se A for maior que  $P(M, N)$  o modelo N é rejeitado. Assim, o modelo não é somente aceito de forma determinística com base em um critério que mede a comparação entre os dados sintéticos e as observações, mas também de maneira pseudo-aleatória, utilizando a variável A.

O processo de geração-aceitação/rejeição é repetido até que um critério de parada seja satisfeito. Naturalmente, para o caso da inversão conjunta, o critério de parada é atingir um valor mínimo do erro, o qual dará início a metodologia de escopo local.

### Passos do Algoritmo

O algoritmo representado pelo fluxograma da Figura 3.1 pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Gera-se um modelo corrente  $M$ ;
2. Constrói-se um modelo admissível  $N$  a partir de perturbações pseudo-aleatórias dos parâmetros do modelo  $M$  corrente dentro dos limites de validade;
3. Calcula-se  $\vec{d}(M) = \vec{g}(\vec{M})$  e  $\vec{d}(N) = \vec{g}(\vec{N})$  para os modelos  $M$  e  $N$ ;
4. Verifica-se um critério de parada  $\|\vec{d}_{obs} - \vec{d}_{calc}(N)\| < \text{erro limite}$ . Se o critério é atendido, o modelo  $N$  é aceito como modelo invertido e é o fim do processo. Caso contrário, avança-se para o passo 5.
5. Gera-se um número pseudo-aleatório  $A \in [0, 1]$ ;
6. Constrói-se uma função de probabilidade  $P(M, N) = \frac{e^{-FO(N)}}{e^{-FO(M)}}$ ;
7. Caso  $A \leq P(M, N)$  o modelo M é substituído pelo modelo N e retorna-se para o passo 2. Caso  $A > P(M, N)$  o modelo N é rejeitado e retorna-se para o passo 2.

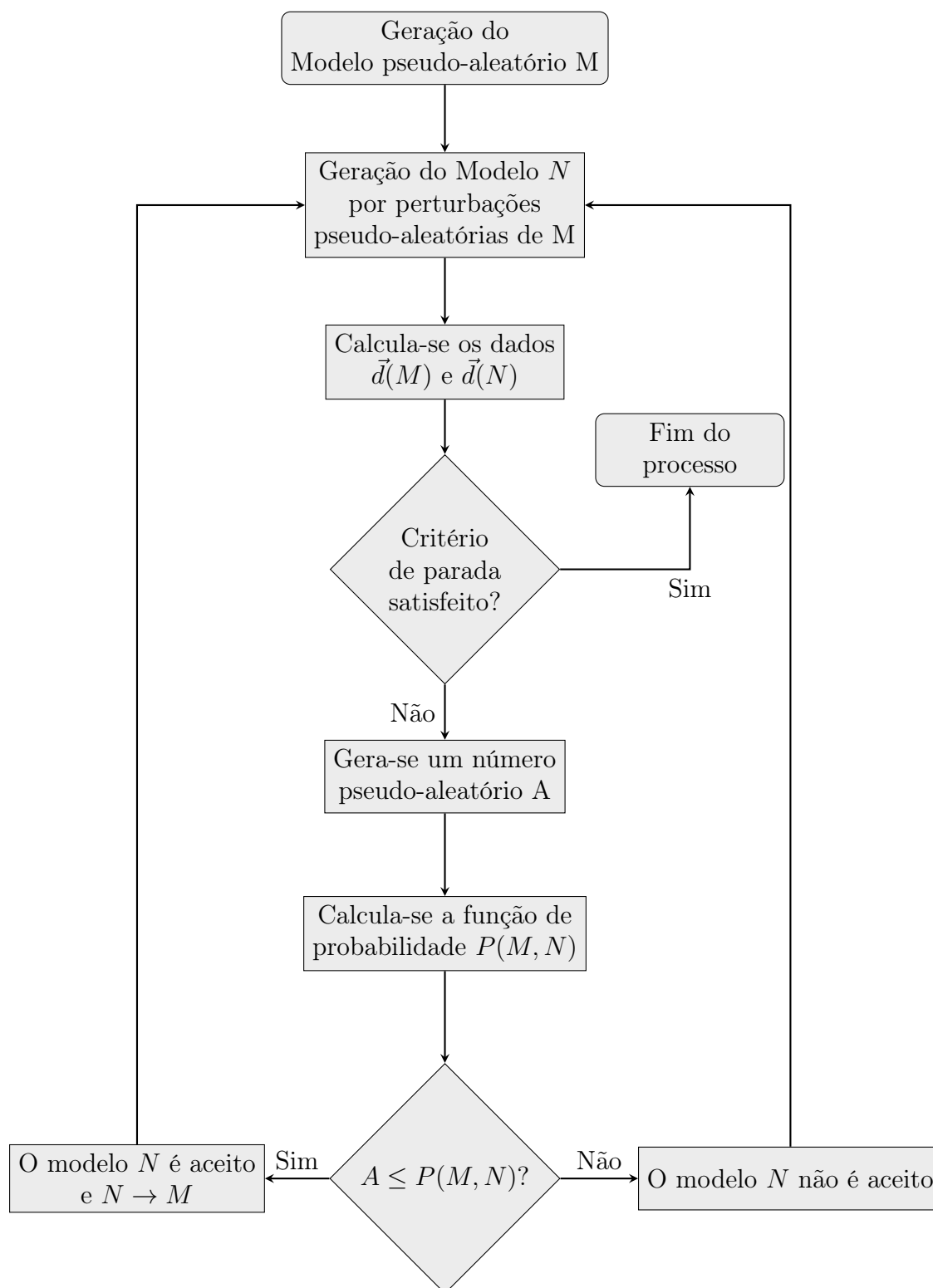


Figura 3.1: Fluxograma simplificado para a inversão utilizando método Metrópolis.

### 3.3 Inversão de Escopo Local: *Steepest Descent*

O método de escopo local escolhido nesta pesquisa é o método de Descida Íngreme (*steepest descent*). Este método é utilizado quando o erro  $E(m)$  e o seu gradiente  $[\nabla E]_i = \partial E / \partial m_i$  são relativamente fáceis de calcular (Menke, 2013). É possível resolver o problema devido ao gradiente do vetor erro apontar para a direção na qual seu valor diminui,

$$\vec{v}_j = -\nabla E_j. \quad (3.1)$$

Assim, atualização dos modelos  $m_j$  é dada por:

$$\vec{m}_{j+1} = \vec{m}_j + \tau \vec{v}_j,$$

onde  $\tau$  é um número positivo. O problema deste método é que o valor de  $\tau$  não é conhecido, se ele for muito grande o valor mínimo da função pode ser pulado e se for um valor muito pequeno a convergência pode demorar muito para ser atingida. Conforme descrito por Nocedal et al. (1999), em geral é difícil determinar um valor para  $\tau$ , existindo várias metodologias descritas para esta determinação. No entanto, neste trabalho foi abordada uma escolha mais simples, utilizou-se um valor de  $\tau = 512$ , onde, para cada iteração em que não existe uma melhora no resultado o parâmetro  $\tau$  é dividido pela metade. A escolha do valor deste parâmetro é melhor descrita no Apêndice F.

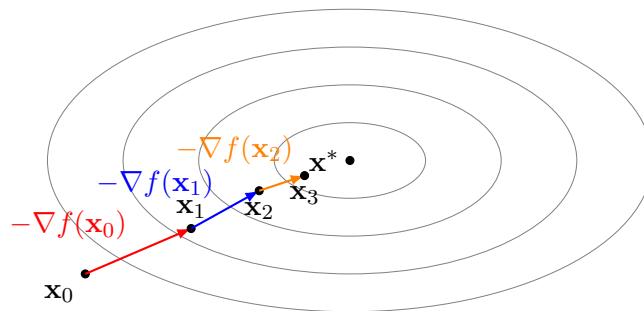


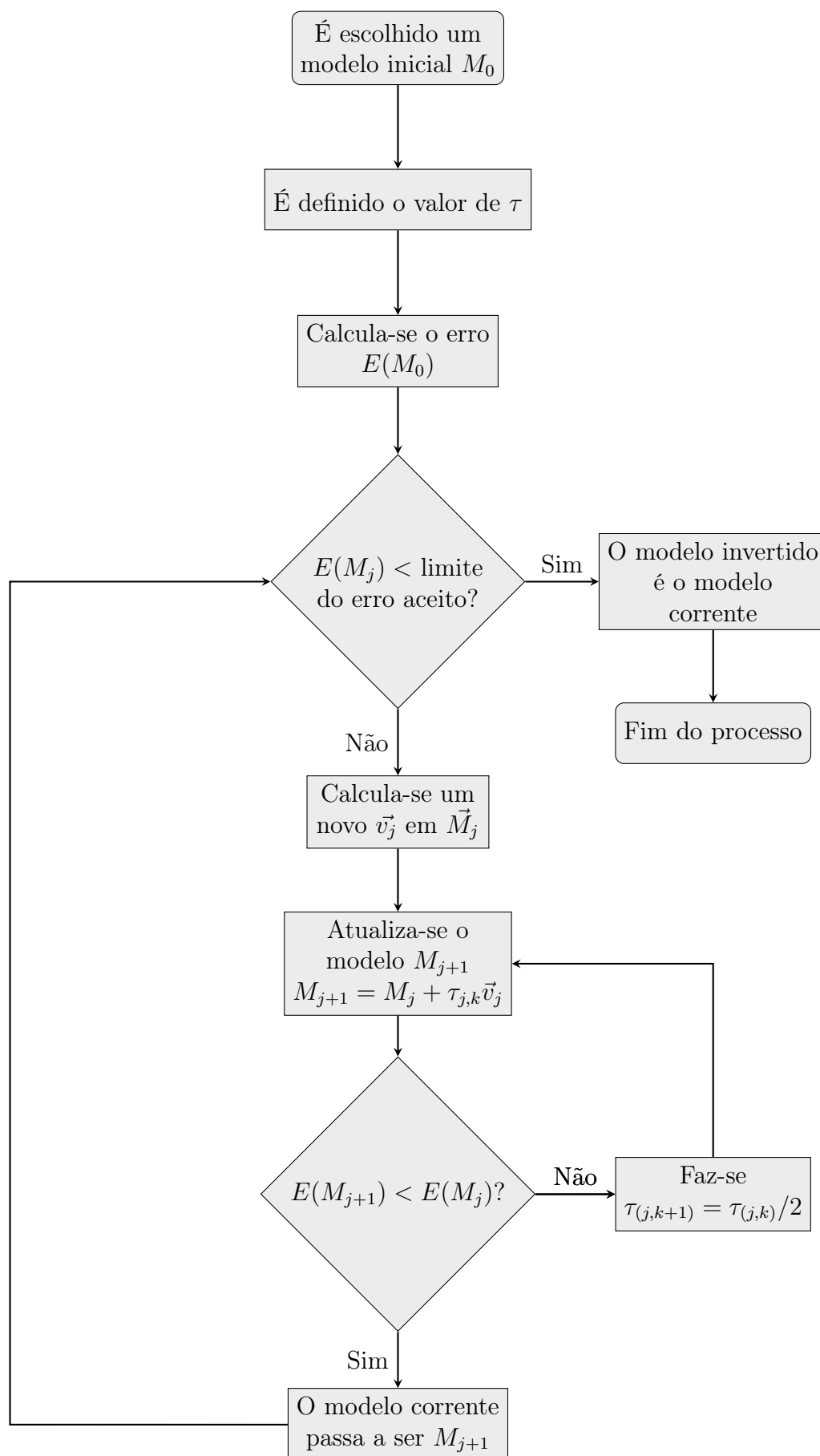
Figura 3.2: Direção de decrescimento da função  $f(x)$ .

#### Passos do Algoritmo

O algoritmo representado pelo fluxograma da Figura 3.3 pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. É escolhido um modelo inicial  $M_0$ .
2. É definido um valor de  $\tau$ .

3. Calcula-se o erro  $E(M_0)$
4. Enquanto (erro  $>$  erro aceitável ( $\varepsilon$ ) ou um número máximo de iterações atingido):
5. Calcula-se  $\vec{v} = -\nabla E$ .
6. Geramos um novo modelo  $M_{j+1} = M_j + \tau_{j,k} v_j$
7. Se  $E(M_{j+1}) < E(M_j)$  o novo modelo corrente passa a ser  $M_{j+1}$ . Se não, altera-se  $\tau$  e retorna-se para o passo 6.
8. Calcula-se o novo erro  $E(M_{j+1})$ .
9. Se  $E(M_{j+1}) < \varepsilon$  vá para o passo 10, se não vá para o passo 4.
10. O modelo invertido é  $M_{j+1}$

Figura 3.3: Fluxograma simplificado para a inversão utilizando método *steepest descent*.

### 3.4 Inversão Conjunta de dados Elétricos e Gravimétricos

Os dados  $\vec{d}$  provenientes do modelo  $\vec{M}$  estudado são representados por:

$$\vec{g}_z(x) = [g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{10})], \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(na) &= [\sigma_a, \sigma_{2a}, \dots, \sigma_{38a}] \\ &= [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{38}]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde a Eq. 3.2 representam os 10 pontos coletados pelas estações gravimétricas e a Eq. 3.3 representa as 38 resistividades aparentes  $\sigma_a$  coletadas no caminhamento elétrico. A geração dos dados sintéticos é melhor descrita na seção 3.4. Assim, seja  $\vec{M}$  o modelo estudado,  $\mathbf{m}_g$  o modelo gravimétrico e  $\mathbf{m}_e$  o modelo elétrico, podemos descrevê-los pelos seguintes parâmetros:

$$\vec{m}_g = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{66}) \tag{3.4}$$

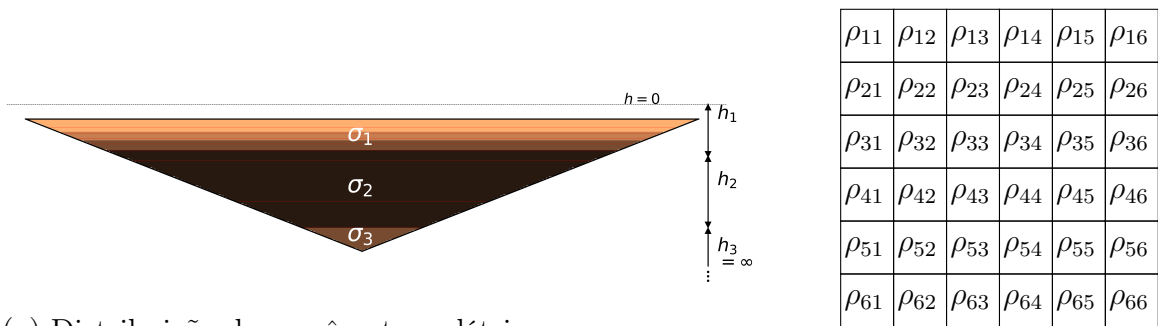
$$\vec{m}_e = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, h_1, h_2) \tag{3.5}$$

$$\vec{M} = (\vec{m}_g, \vec{m}_e). \tag{3.6}$$

Ou seja  $\vec{M}$  pode ser escrito como,

$$\vec{M} = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{66}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, h_1, h_2). \tag{3.7}$$

Onde  $\rho_{ij}$ , com  $i$  e  $j \in \{1, \dots, 6\}$  representam as 36 densidades, representadas na Figura 3.4, de cada um dos 36 prismas da área de estudo. Os  $\sigma_j$ , com  $j \in \{1, 2, 3\}$  representam as resistividades das camadas do modelo e  $h_k$ , com  $k \in \{1, 2\}$ ; suas espessuras.



(a) Distribuição dos parâmetros elétricos.

(b) Distribuição dos parâmetros gravimétricos.

Figura 3.4: Parâmetros da inversão conjunta

É importante destacar que as espessuras  $h_1, h_2$  correspondem à primeira e segunda camadas dos caminhamento elétrico. No contexto da modelagem elétrica adotada, a camada 0 (ar)

e a última camada (no caso deste trabalho,  $h_3$ ) são definidas como semi-infinitas. Em uma visualização 2D, a camada 0 se estenderia infinitamente para cima e a última infinitamente para baixo, ambas espessuras não sendo determinadas pelo processo de inversão.

### Análise de Desempenho dos Modelos: Avaliação e Cálculo dos Erros

Neste tópico apresentaremos as equações que foram utilizadas para avaliar os erros entre as curvas e os modelos elétricos e gravimétricos. Para o erro entre as curvas elétricas e os modelos foram utilizadas, respectivamente, as seguintes equações,

$$RMS_{\text{elet}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{38} (\vec{\sigma}_{a,\text{obs},i} - \vec{\sigma}_{a,\text{calc},i})^2}{38}} \quad (3.8)$$

$$\text{Erro-Modelo}_{\text{elet}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sum_{i=1}^3 (\sigma_{\text{obs},i} - \sigma_{\text{calc},i})^2}{\sum_{i=1}^3 (\sigma_{\text{obs},i})^2} + \frac{\sum_{i=1}^2 (h_{\text{obs},i} - h_{\text{calc},i})^2}{\sum_{i=1}^2 (h_{\text{obs},i})^2} \right) \cdot 100 \quad (3.9)$$

Para o erro entre as curvas e os modelos gravimétricos temos,

$$RMS_{\text{grav}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\vec{g}_{\text{obs},i} - \vec{g}_{\text{calc},i})^2}{10}} \quad (3.10)$$

$$\text{Erro-Modelo}_{\text{grav}} = \left( \frac{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\rho_{\text{obs},i,j} - \rho_{\text{calc},i,j})^2}{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\rho_{\text{obs},i,j})^2} \right) \cdot 100 \quad (3.11)$$

### Construção dos Modelos: Archie como Parâmetro

A inversão conjunta de dados geoeletricos e gravimétricos é um desafio, visto que não existe uma relação física direta que relacione as propriedades densidade e resistividade. Neste trabalho, foi utilizada a abordagem descrita por Santos et al. (2006), sobre a qual a inversão é realizada mediante a um vínculo petrofísico com a Lei de Archie (Archie, 1942). Para rochas limpas com argila e métodos de baixa frequência ou DC, a lei de Archie é expressa por (Grant e West, 1965):

$$\sigma = a\sigma_w S_w^{-n} \phi^{-m}, \quad (3.12)$$

onde  $a, m, n$  são constantes empíricas,  $\sigma_w$  é a resistividade da água,  $\phi$  é a porosidade fracionária,  $S_w$  é a quantidade fracionária de saturação de água nos poros e  $\sigma$  é a resistividade do meio. A densidade  $\rho$  de meios porosos parcialmente preenchidos com água é apenas a densidade ponderada por volume expressa por (Santos et al., 2006):

$$\rho = (1 - \phi)\rho_m + S_w\phi\rho_w, \quad (3.13)$$

onde  $\rho_w$  é a densidade da água e  $\rho_m$  é a densidade da matriz rochosa. Combinando as Equações 3.12 e 3.13 temos,

$$f(\sigma, \rho) = (1 - \phi)\rho_m + [a\sigma_w/\sigma\phi^{m-n}]^{1/n}\rho_w - \rho = 0 \quad (3.14)$$

Podemos simplificar a Eq. 3.14 tornando as constantes  $m$  e  $n$  iguais, assim,

$$f(\sigma, \rho) = (1 - \phi)\rho_m + [a\sigma_w/\sigma_a]^{1/n}\rho_w - \rho = 0 \quad (3.15)$$

A partir da Eq. 3.15, foram criados o modelo alvo e os quatro modelos iniciais para a eletrorresistividade e gravimetria, que foram usados como entrada para a inversão global. São eles apresentados nas seções denominadas, respectivamente, Definição do Modelo Alvo e Modelos iniciais da inversão Metropolis. Vale destacar que a relação de Archie não é incluída explicitamente nas funções objetivo, pois, neste trabalho, assumiu-se que ela é válida para todos os modelos gerados na inversão. Dessa forma, os parâmetros de cada modelo gerado nos processos de inversão, são eles: densidade, resistividade,  $a$ ,  $n$ ,  $\sigma_w$ ,  $\rho_m$  e  $\phi$  asseguram sua aplicabilidade.

### Definição do Modelo Alvo

Nesta pesquisa, foi utilizado um único modelo alvo, uma versão adaptada do modelo proposto por Santos (2006), ilustrado na Fig. 3.5. O autor descreve esse modelo sintético como representativo de um cenário geológico típico em ambientes sedimentares, consistindo em um embasamento do tipo horst, coberto por camadas horizontais de sedimentos. O modelo é composto por três camadas, cada uma com resistividades e densidades distintas. Reforça-se que a área investigada corresponde, somente, àquela demarcada na Fig. 3.5, sobre a qual é realizado o procedimento de inversão.

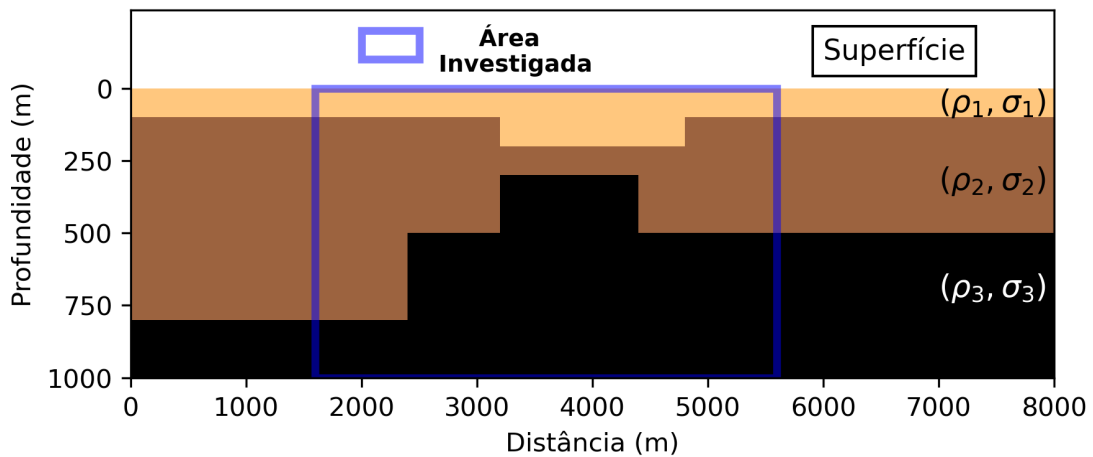
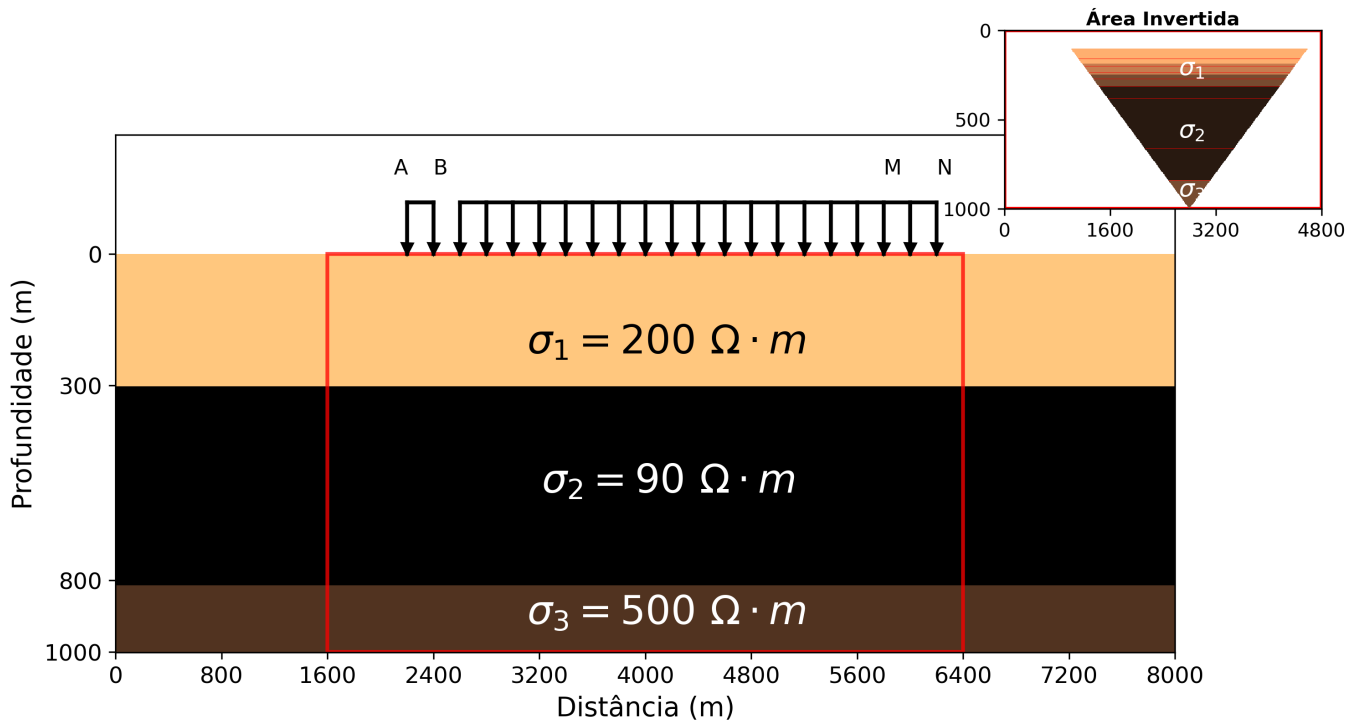
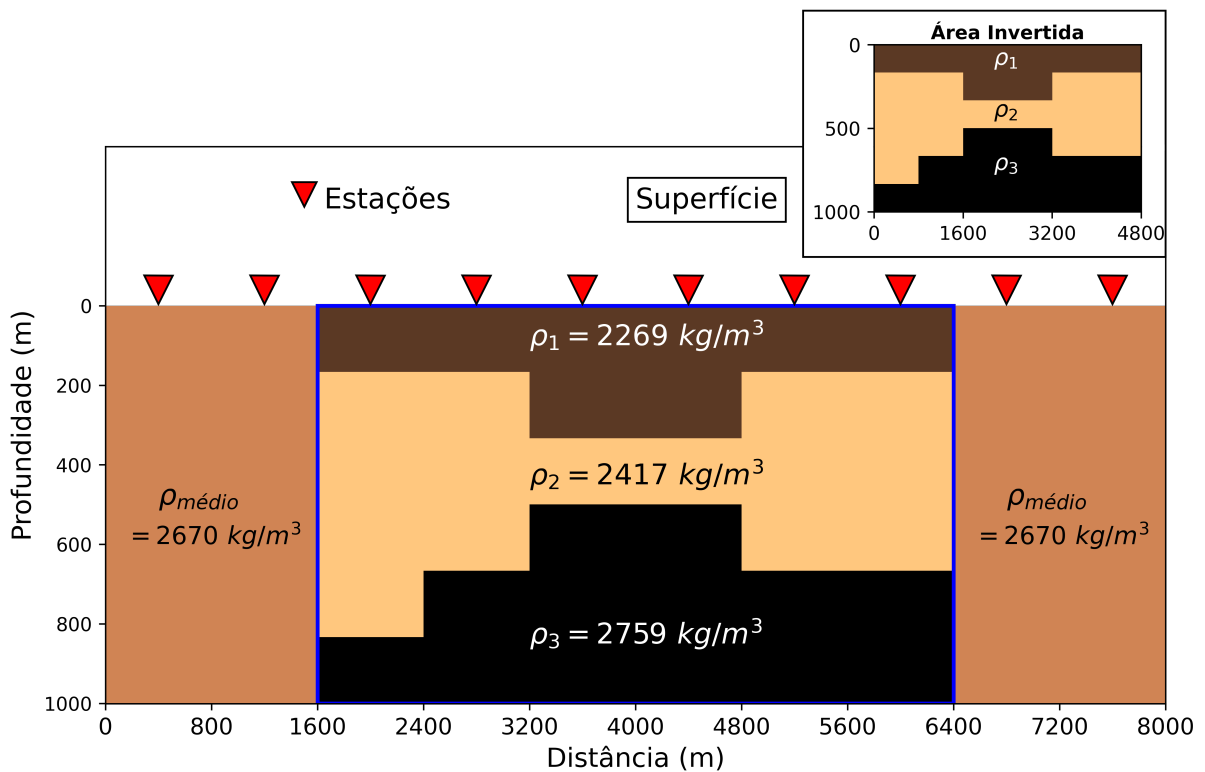


Figura 3.5: Modelo geológico alvo.



(a) Modelo alvo elétrico.



(b) Modelo alvo gravimétrico.

Figura 3.6: Modelos alvo da inversão conjunta

Devido às limitações específicas de cada tipo de modelagem, os métodos utilizados pos-

suem modelos alvos próprios, uma vez que cada modelo é parametrizado de forma distinta. Na modelagem elétrica de camadas, a distinção das interfaces ocorre exclusivamente em camadas paralelas de resistividade constante, com uma construção semi-triangular característica da resposta obtida pela técnica de caminamento elétrico com o arranjo dipolo-dipolo. Por outro lado, a modelagem gravimétrica adota uma parametrização prismática, mais flexível, que possibilita a criação de interfaces de densidade mais complexas. Os modelos alvos são apresentados na Fig. 3.6.

Os parâmetros de Archie utilizados na elaboração dos modelos foram extraídos de (Grant e West, 1965) e (Lima de Lima, 2014), com a exceção do parâmetro  $\sigma_w$ , que foi obtido de (da Silva et al., 2017). Os valores adotados incluem:  $a = 1$ ,  $n = 2, 4$ ,  $\rho_m = 2200 \text{ kg/m}^3$  (densidade média das rochas da crosta terrestre),  $\rho_w = 1250 \text{ kg/m}^3$  e  $\sigma_w = 100 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ . A Tabela 3.1 apresenta o valor da porosidade  $\phi$ , em função das diferentes camadas do modelo alvo. Além disso, a tabela descreve o sedimento característico de cada camada e os valores de referência utilizados na construção do modelo alvo, sendo que os dados de densidade foram obtidos de (Telford et al., 2004) e os de resistividade (Braga, 2006).

Parâmetros de Archie: Modelo Alvo				
Camada	Geologia	Parâmetros	Valores de Referência	Porosidade $\phi$
1	Areia	$\rho_1$	1700 – 2300 $\text{kg/m}^3$	37%
		$\sigma_1$	100 – 3000 $\Omega \cdot \text{m}$	
2	Arenito	$\rho_2$	1610 – 2760 $\text{kg/m}^3$	50%
		$\sigma_2$	80 – 200 $\Omega \cdot \text{m}$	
3	Calcário Fino	$\rho_3$	1930 – 2900 $\text{kg/m}^3$	0%
		$\sigma_3$	500 – 1000 $\Omega \cdot \text{m}$	

Tabela 3.1: Parâmetros de Archie para o modelo alvo.

### Geração de Dados Sintéticos

Para a geração dos dados sintéticos eletroressistivos são utilizadas 2 linhas de caminamento elétrico, uma no sentido da esquerda para a direita, como demonstrado na Fig. 3.7, e outra da direita para a esquerda. A distância entre os eletrodos (a) é de 200 m e em cada levantamento foram coletados 19 níveis. É importante ressaltar que esse trabalho possui um caráter teórico, e que a quantidade de níveis atingidos pelo método tem o objetivo de garantir que ambos os

métodos alcancem a mesma profundidade de investigação (1000 m), ainda que a aplicação do método elétrico apresente desafios adicionais nesse sentido.

Para a geração de dados sintéticos gravimétricos, foram utilizadas 10 estações gravimétricas distribuídas uniformemente em linha ao longo de uma extensão de 8 km, com um espaçamento de 800 m entre cada estação. A matriz de densidades foi gerada aleatoriamente com valores de contraste de densidade calculados a partir da diferença entre um valor sorteado no intervalo de 2199 a 2920 kg/m<sup>3</sup> e a densidade de referência de 2670 kg/m<sup>3</sup>. A Fig. 3.7 ilustra a relação entre os dois métodos geofísicos utilizados, permitindo visualizar sua parametrização e sua distribuição espacial. Além disso, para a modelagem gravimétrica, foi incorporada ao algoritmo uma organização crescente dos valores das densidades em cada coluna. Essa modificação não acarreta prejuízos teóricos, pois é bem estabelecido que as densidades aumentam em conformidade com a profundidade.

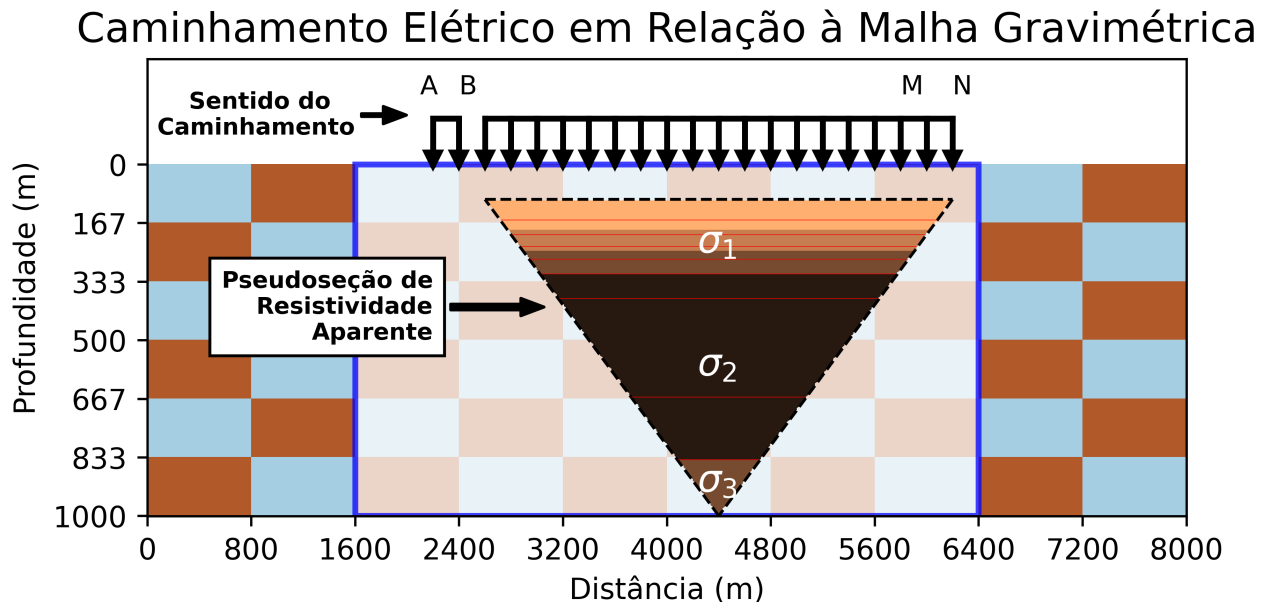


Figura 3.7: Disposição do arranjo dipolo-dipolo em função da malha gravimétrica. A segunda linha elétrica não é mostrada na figura, mas ocorre de maneira simétrica a demonstrada, com seus eletrodos de corrente A e B, respectivamente, posicionados nas coordenadas (6400, 0) e (6600, 0). O caminhamento dá-se em sentido contrário com os eletrodos M e N inicialmente posicionados, respectivamente, nas coordenadas (6000, 0) e (6200, 0).

Os dados foram organizados em matrizes e vetores de forma a facilitar a manipulação computacional e a aplicação dos métodos de inversão. A linguagem Python foi utilizada para a implementação devido à sua versatilidade e à disponibilidade de bibliotecas numéricas eficientes, como NumPy e SciPy, que permitem a realização de operações matriciais e a geração de números aleatórios de maneira otimizada. Além disso, a escolha do Python se

Resistividades com Diferentes Níveis de Ruído em Função da Distância

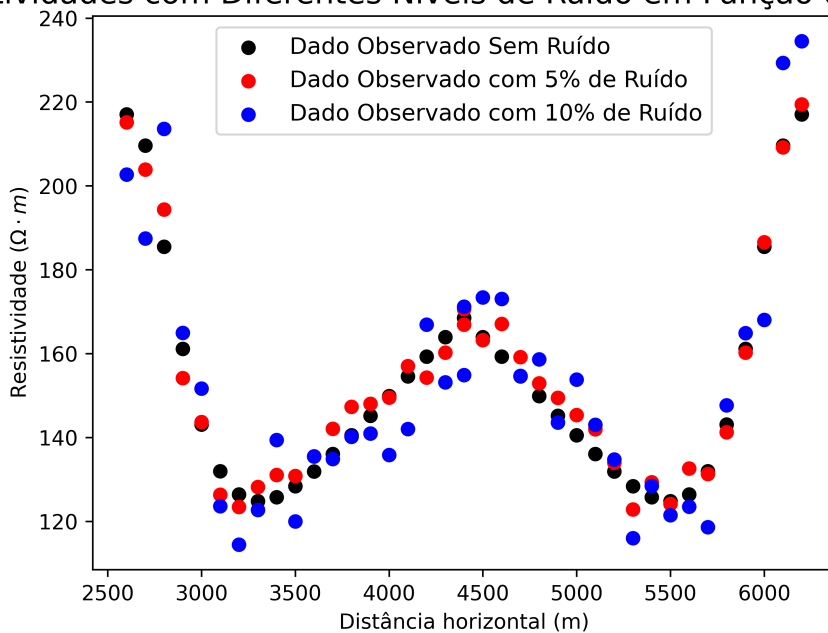
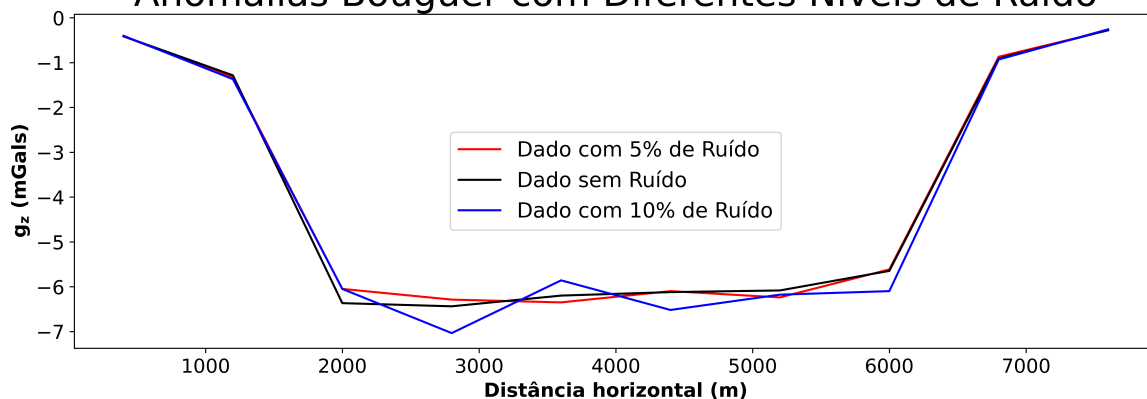


Figura 3.8: Visualização dos dados elétricos com 3 níveis de ruído.

Anomalias Bouguer com Diferentes Níveis de Ruído



Modelo Gravimétrico Alvo

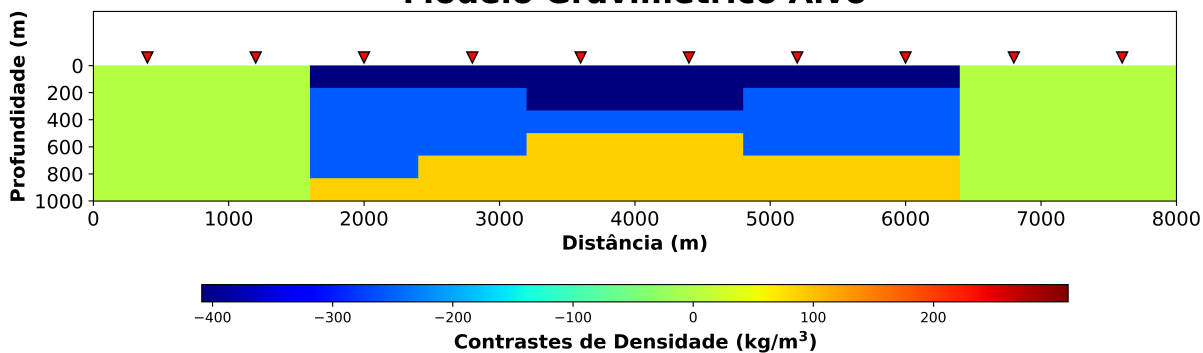


Figura 3.9: Visualização do dados observados gravimétricos com diferentes graus de ruído.

deu pelo seu amplo uso na comunidade científica e pela familiaridade da autora com a linguagem.

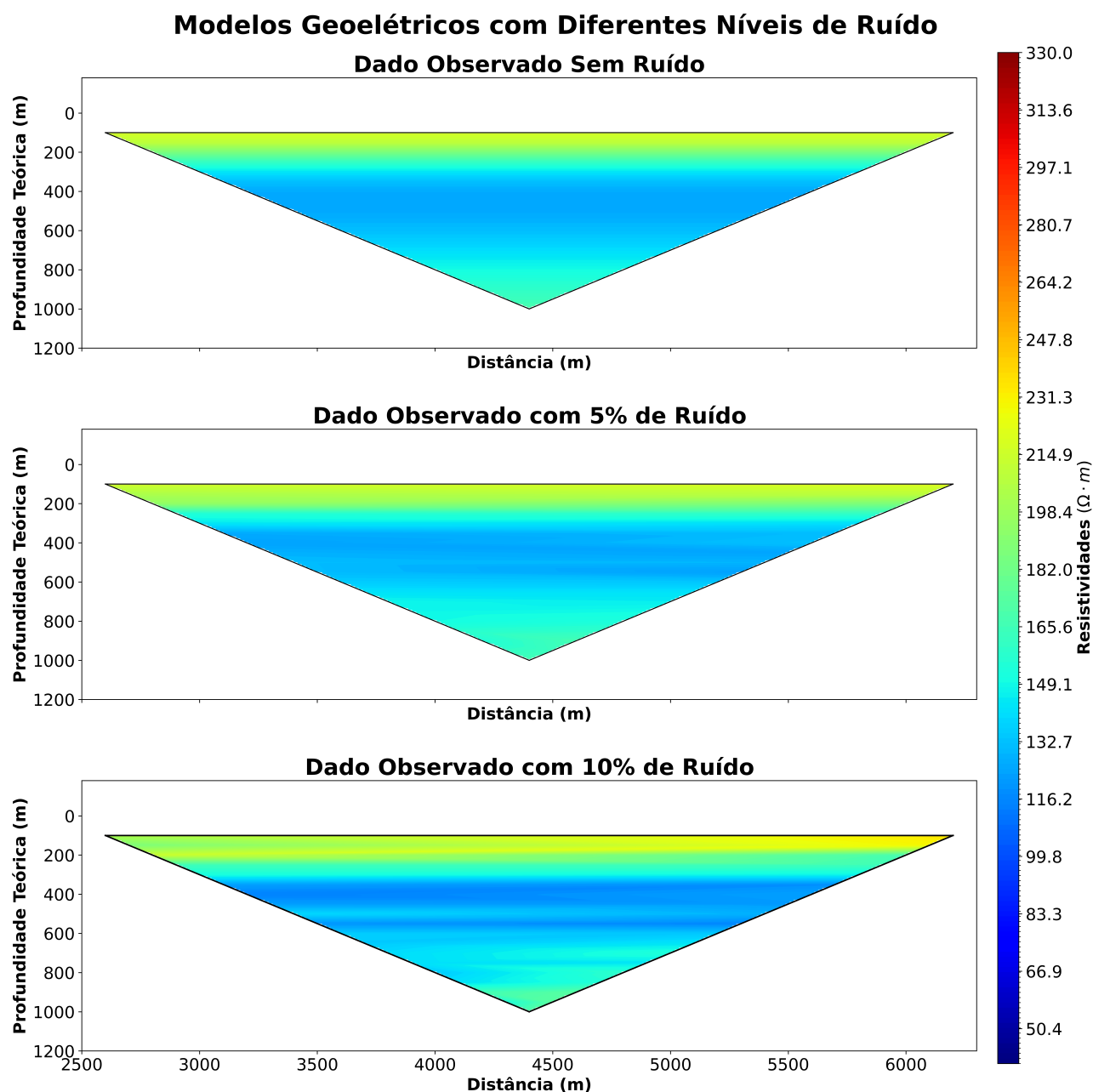


Figura 3.10: Configuração bidimensional do caminhamento elétrico com diferentes graus de ruído.

Nesta pesquisa a qualidade da inversão foi analisada com base, também, na adição de ruído aleatório aos dados observados, variando entre 5% e 10%. O ruído foi adicionado aos dados observados por meio da multiplicação de um fator aleatório, distribuído uniformemente entre -1 e 1, pela porcentagem definida de ruído e pelo valor original dos dados. A influência do ruído nas curvas observadas pode ser visualizada nas Figs. 3.8, 3.9 e 3.10. Embora

a Fig. 3.8 não represente os dados de caminhamento elétrico de maneira convencional, ela demonstra de forma satisfatória a influência do ruído sobre a intensidade da resistividade, mesmo quando posicionada em função da distância.

Na Fig. 3.9 o dado gravimétrico é apresentado, e percebe-se que o ruído foi adicionado apenas na parte inferior da curva. As extremidades laterais foram ajustadas para garantir que o mínimo da curva gravimétrica seja zero. Já na Fig.3.10 é a representação do dado elétrico em uma disposição 2D, ilustrando o efeito do ruído nos dados observados. Observa-se, com a adição de ruído, o dado observado originalmente sem ruído perde sua uniformidade na segunda camada, apresentando valores ainda mais baixos de resistividade. Além disso, a distinção entre as camadas 2 e 3 torna-se menos evidente.

### Funções Objetivo

Foram utilizadas duas funções objetivo (FO) distintas, uma para cada método de inversão. Para o método Metrópolis, foi utilizada uma FO mais robusta, descrita por 5 parcelas, a primeira referente ao ajuste dos dados elétricos, a segunda parcela referente ao ajuste dos dados gravimétricos, a terceira parcela é um termo de suavização de densidades entre prismas adjacentes e as duas últimas parcelas atuam como termos de regularização de Tikhonov, penalizando modelos que se desviam significativamente do modelo *a priori*, utilizando a norma  $L_2$  e contribuindo para a estabilização da solução.

$$S(M) = \alpha \cdot \frac{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}} - \vec{\sigma}_{(M)}\|_2^2}{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}}\|_2^2} + \beta \cdot \frac{\|\vec{g}_{\text{obs}} - \vec{g}_{(M)}\|_2^2}{\|\vec{g}_{\text{obs}}\|_2^2} + \gamma \cdot \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 (\rho_{ij} - \rho_{ij+1}) \\ + \eta \cdot \|\vec{m}_{g, \text{a priori}} - \vec{m}_{g, (M)}\|_2 + \mu \cdot \|\vec{m}_{e, \text{a priori}} - \vec{m}_{e, (M)}\|_2. \quad (3.16)$$

Para o método de inversão *Steepest Descent*, foi utilizada uma função objetivo mais simples, excluindo os termos de suavização e regularização presentes na função objetivo do método de Metrópolis, conforme representado por:

$$S(M) = \alpha \cdot \frac{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}} - \vec{\sigma}_{(M)}\|_2^2}{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}}\|_2^2} + \beta \cdot \frac{\|\vec{g}_{\text{obs}} - \vec{g}_{(M)}\|_2^2}{\|\vec{g}_{\text{obs}}\|_2^2}. \quad (3.17)$$

Uma discussão sobre a escolha dos coeficientes da FO do método Metrópolis encontra-se no Apêndice D. Além disso, os coeficientes utilizados para método local ( $\alpha$  e  $\beta$ ) são os mesmos do método global. Um aprofundamento sobre a FO do *Steepest Descent* é descrito no apêndice G.

## Modelos Iniciais da Inversão Metropolis

Para os modelos iniciais da inversão global, foram desenvolvidos quatro cenários: um modelo mais distante do alvo, dois intermediários e um que está próximo do modelo alvo. É importante ressaltar que, para os modelos elétricos, a quantidade de camadas não foi considerada como um parâmetro a ser estimado. Nos modelos gravimétricos, optou-se por adotar um número de camadas igual ao do modelo alvo, utilizando essa informação como dado *a priori*, embora a inversão tenha liberdade para variar a quantidade de camadas. Todos os modelos iniciais foram baseados nos mesmos parâmetros de Archie empregados no modelo alvo, com exceção da porosidade. Os valores dos parâmetros e da porosidade dos modelos iniciais estão detalhados no Apêndice C. As configurações dos modelos estão ilustradas nas Figs. 3.11 e 3.12. Ressalta-se que, embora os valores das camadas sejam expressos em densidades nos modelos gravimétricos, os fatores relevantes para a inversão Metropolis são os contrastes de densidade.

### Modelos Geométricos Iniciais

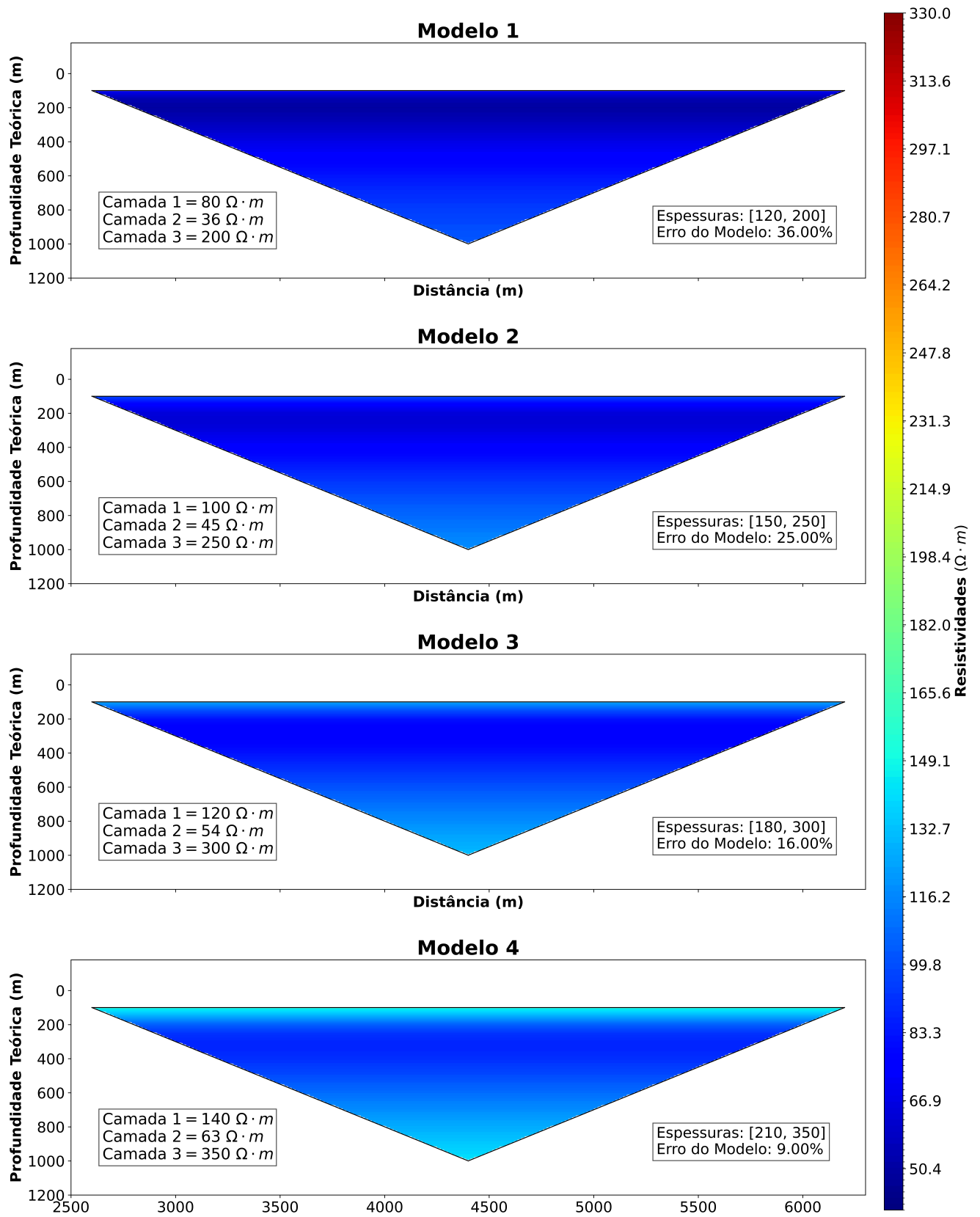


Figura 3.11: Modelos elétricos iniciais de distribuição de resistividades elétricas ( $\text{ohm} \cdot m$ )

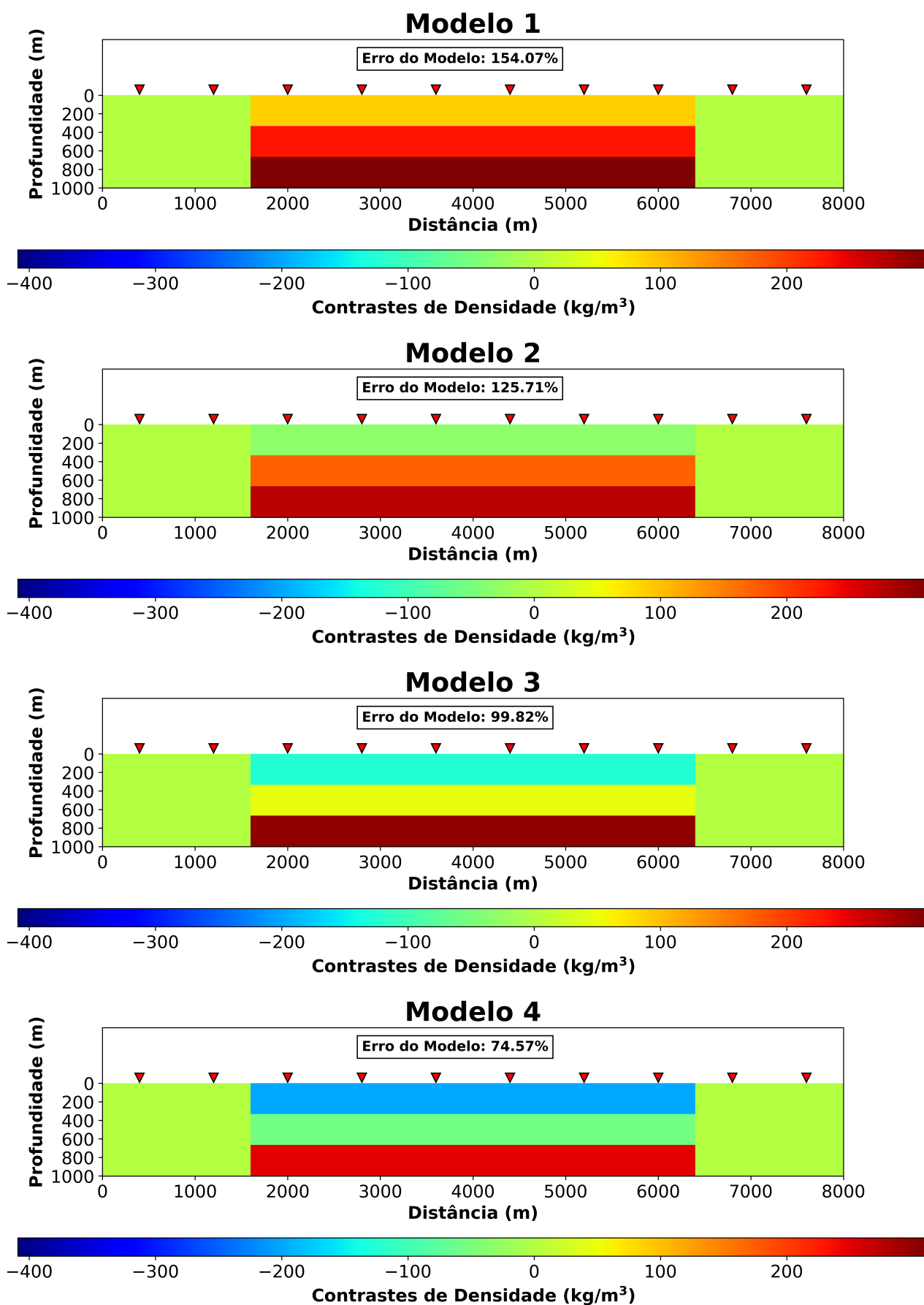


Figura 3.12: Modelos gravimétricos iniciais de distribuição de densidades ( $kg/m^3$ ), acompanhados dos respectivos erros em relação ao modelo alvo.

# 4

## Resultados e Discussões

Nesta seção, os resultados obtidos ao longo do estudo são apresentados e analisados, organizando-se em etapas que refletem o progresso da pesquisa. Cada etapa representa uma parte fundamental do trabalho, desde a validação dos métodos até a interpretação dos modelos invertidos. O modelo geológico real foi concebido com base em características hidrogeológicas típicas, representando um ambiente sedimentar composto por grabens e horsts. Geologicamente, essa estrutura é caracterizada por camadas sedimentares horizontais sobre um embasamento rochoso, com interfaces definidas por contrastes de densidade e resistividade. Geofisicamente, o modelo inclui três camadas com resistividades distintas no método elétrico e densidades variáveis no método gravimétrico, permitindo avaliar a eficácia da inversão conjunta na identificação de interfaces e propriedades físicas.

Os resultados são apresentados de acordo com os níveis de ruído introduzidos nos dados observados, abordando tanto a inversão elétrica quanto a gravimétrica. Para cada nível de ruído (sem ruído, 5% e 10%), são discutidos os resultados obtidos pelos métodos de inversão global (Metropolis) e local (*Steepest Descent*). Os principais resultados incluem: a validação dos métodos de modelagem, com destaque para a validação da modelagem gravimétrica por meio das equações analíticas de uma esfera e de um cilindro (detalhada no Apêndice B), bem como a validação da modelagem elétrica com diferentes abordagens (discutida no Apêndice A); as inversões representativas, com foco em um modelo representativo (Modelo 3) para cada cenário de ruído, apresentando os resultados obtidos e comparando-os com os modelos gerados por ambas as metodologias de inversão; e uma análise geral dos 48 modelos invertidos, destacando padrões, erros e *insights* obtidos.

Os resultados desta seção estão complementados por informações detalhadas nos apên-

lices, como segue: o Apêndice D contém o estudo dos coeficientes da função objetivo do método Metropolis, fornecendo a descrição da metodologia para a determinação dos seus valores utilizados, o Apêndice E explica os critérios e parada para o processo de inversão global, tendo como principal referência a convergência do algoritmo, o Apêndice E explica a metodologia utilizada para encontrar o coeficiente  $\tau$  do método local, também tendo como base a convergência do algoritmo. O apêndice G discute a função objetivo e as derivadas analíticas e numéricas utilizadas pelo método *steepest descent*. E os apêndices H e I apresentam, respectivamente, gráficos detalhados de cada inversão realizada para os diferentes níveis de ruído pelos métodos global e local.

A discussão dos resultados inicia com a descrição dos ajustes observados entre os dados sintéticos e os modelos calculados. Destacam-se as diferenças entre os métodos de inversão global e local, bem como a influência do ruído nos dados observados. A análise inclui comparações diretas dos erros (RMS) e da capacidade de cada método em recuperar as propriedades físicas do modelo real. A seção conclui com uma análise crítica dos resultados, na seção intitulada Análise Completa dos Modelos Gerados, conectando-os às informações de todas às 48 inversões realizadas, destacando as limitações e dificuldades encontradas neste estudo.

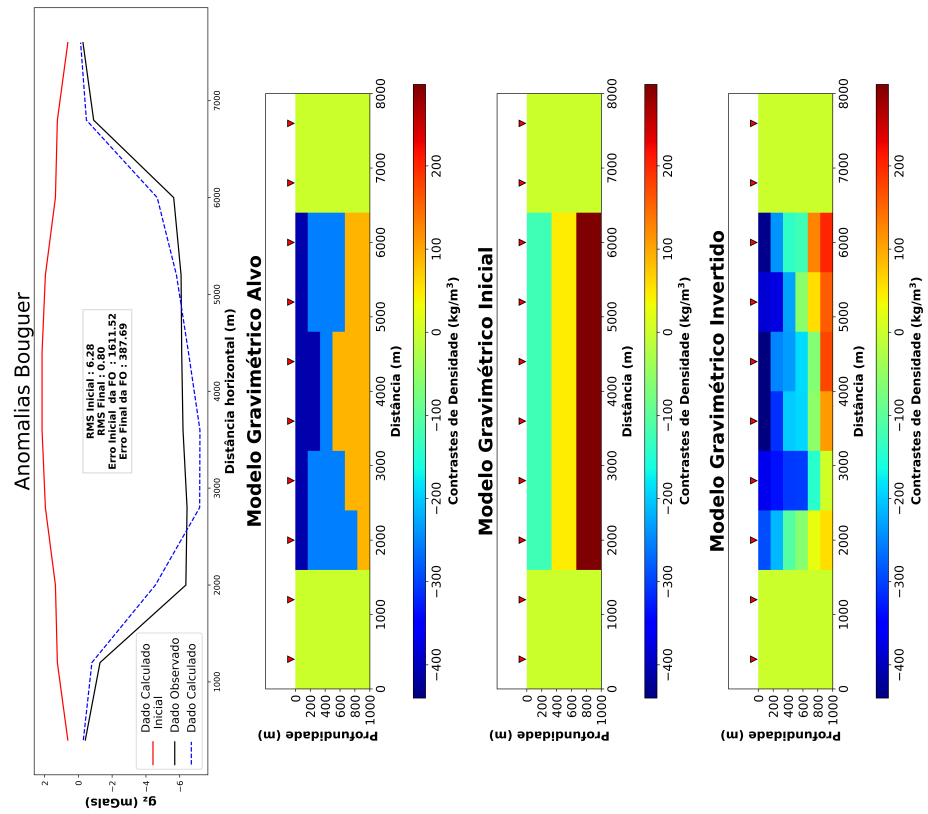
## 4.1 Inversão Sem Ruído

### Inversão de Escopo Global

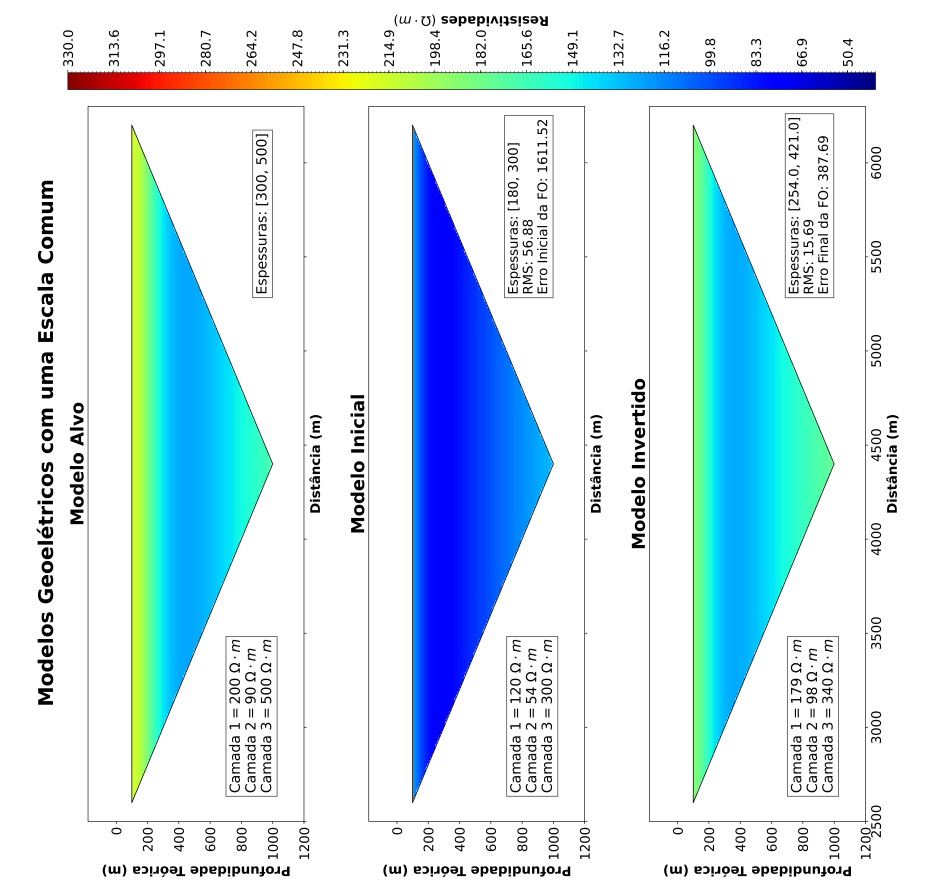
O modelo 3 é o segundo modelo mais próximo. A função objetivo apresentava um erro inicial de 1611,52 que decaiu para 387,69, uma redução de 24%. Para os dados geolétricos, houve uma redução de erro RMS de 56,88% para 15,69%. Saindo de uma pseudoseção visualmente bem distante do alvo, para uma mais próxima do modelo alvo, permitindo a distinção entre as três camadas do modelo. O maior erro do modelo encontra-se principalmente na resistividade e na espessura da última camada, fato justificável, pois, à medida que a profundidade de investigação aumenta, o erro associado a essas medições tende a ser maior.

Para avaliar a proximidade como modelo real, podemos visualizar a Fig. 4.2, a qual mostra as curvas de resistividade em função da profundidade. Observa-se que, embora os valores das espessuras e das resistividades não tenham sido totalmente ajustados, os dados apresentam um excelente ajuste geral. Esse resultado é considerado satisfatório, já que os erros entre o modelo inicial e o modelo real, e entre o modelo invertido e o modelo real, são de 16% e 5,6%, respectivamente.

Para os dados gravimétricos houve uma redução do erro RMS do modelo inicial de 6,28% para 0,80%, podemos visualizar uma representação do modelo de camadas horizontais, com valores de densidade próximos para posições adjacentes, semelhante a estrutura do modelo gravimétrico alvo. Pode-se distinguir 3 regiões distintas, visualizando duas camadas de densidade relativamente constantes. A curva ficou bem ajustada, deixando assim os dados calculados e observados com a mesma tendência. O erro calculado entre o modelo real e o modelo inicial é de 99,82%, enquanto o erro entre os modelos real e invertido é reduzido para 49,04%.



(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.



(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura 4.1: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3 considerando que os dados observados não possuem ruído.

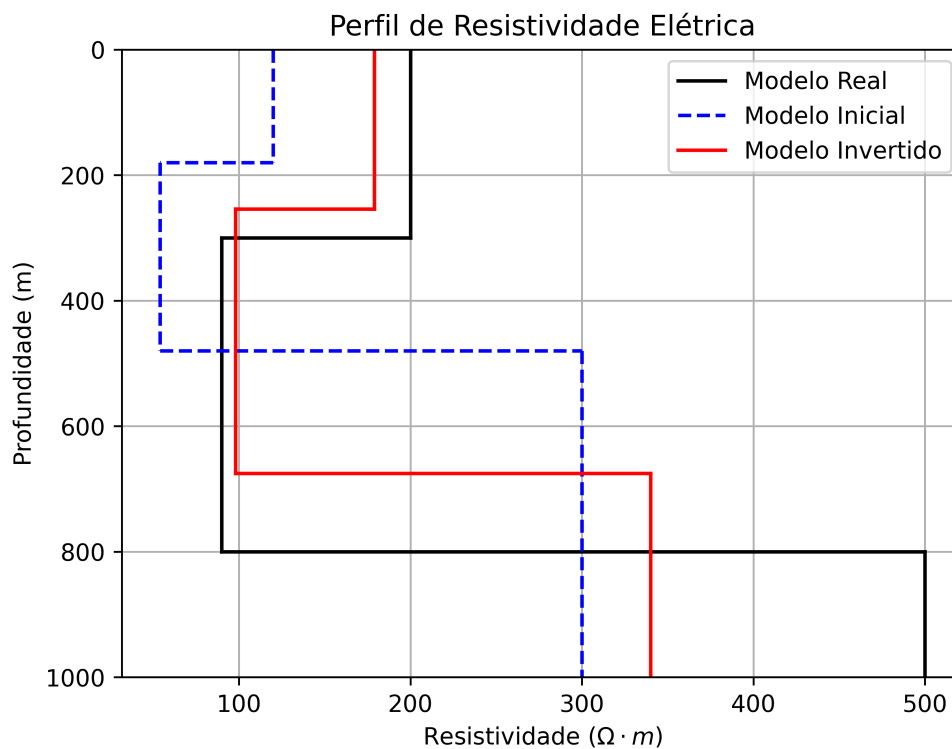
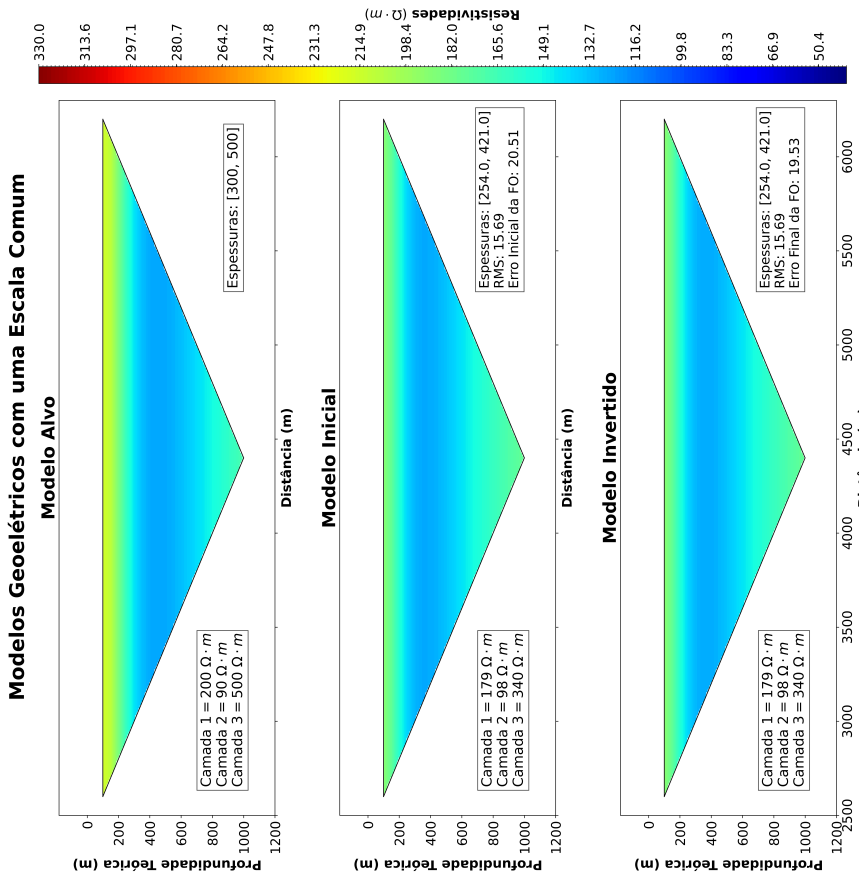
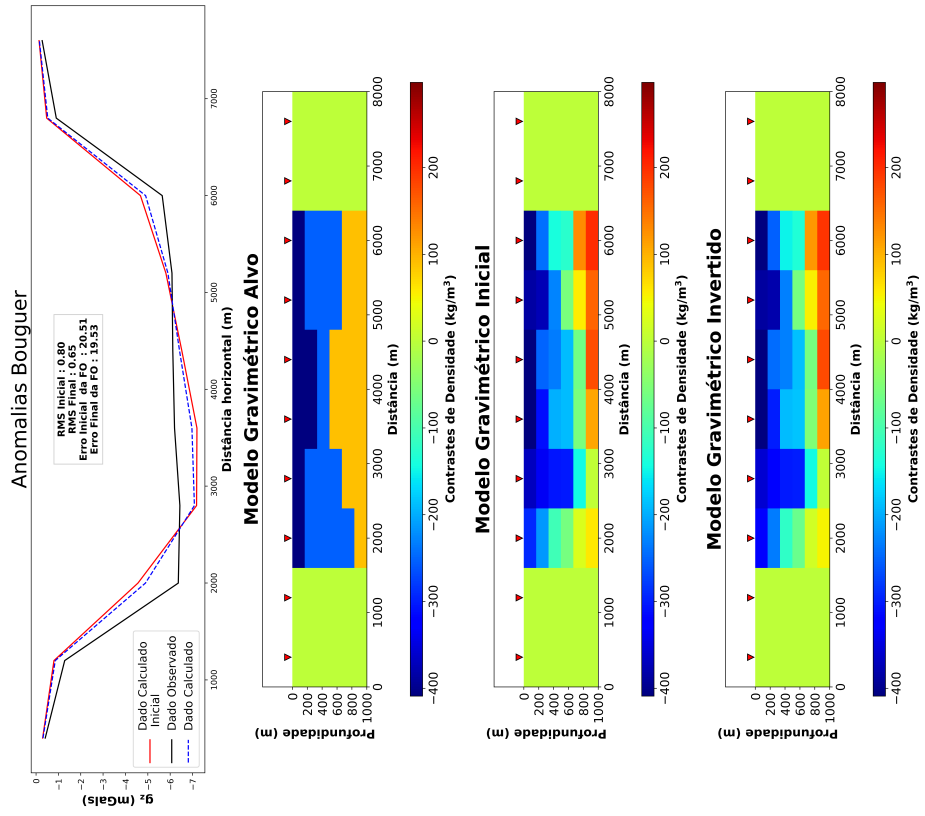


Figura 4.2: Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o obtido pela inversão Metrópolis, para os dados observados sem ruído.

### Inversão de Escopo Local

Para estes modelos, os resultados evidenciaram certa estagnação, indicando o limite de convergência do algoritmo. A função objetivo iniciou-se em 20,51 e finalizou em 19,53, apresentando apenas uma alteração insignificante no modelo gravimétrico, onde as curvas iniciais e finais são praticamente idênticas. Esse comportamento em relação à convergência é abordado de forma mais detalhada na seção 4.4.



(a) Resultado inversão gradiente para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão gradiente para os dados gravimétricos.

Figura 4.3: Resultado da inversão do *Steepest Descent* para o modelo 3, sem ruído.

## 4.2 Inversão com 5% de Ruído

### Inversão de Escopo Global

Os resultados da inversão global são apresentados na Fig. 4.5. A função objetivo apresentou uma redução significativa, de 1617,83 para 419,48, correspondente a 25,93%, enquanto o erro RMS dos dados geoeletricos caiu de 57,56% para 24,75%. No entanto, a pseudoseção invertida não conseguiu representar a estrutura esperada de três camadas, exibindo predominantemente uma única fase. O maior erro foi observado nos parâmetros de resistividade e espessura da última camada, indicando dificuldades específicas na representação dessas propriedades. Apesar da melhoria visual no modelo invertido, que obteve um erro final de 21,35%, houve uma maior discrepância em relação ao modelo alvo em comparação ao modelo inicial, cujo erro era de 16%. Essa redução na aproximação ao modelo alvo reflete as ambiguidades inerentes aos processos de inversão geofísica, em que múltiplas soluções podem produzir ajustes similares nas curvas observadas. Pode-se observar a distância entre os modelos inicial, o modelo real e o invertido na Fig. 4.4.

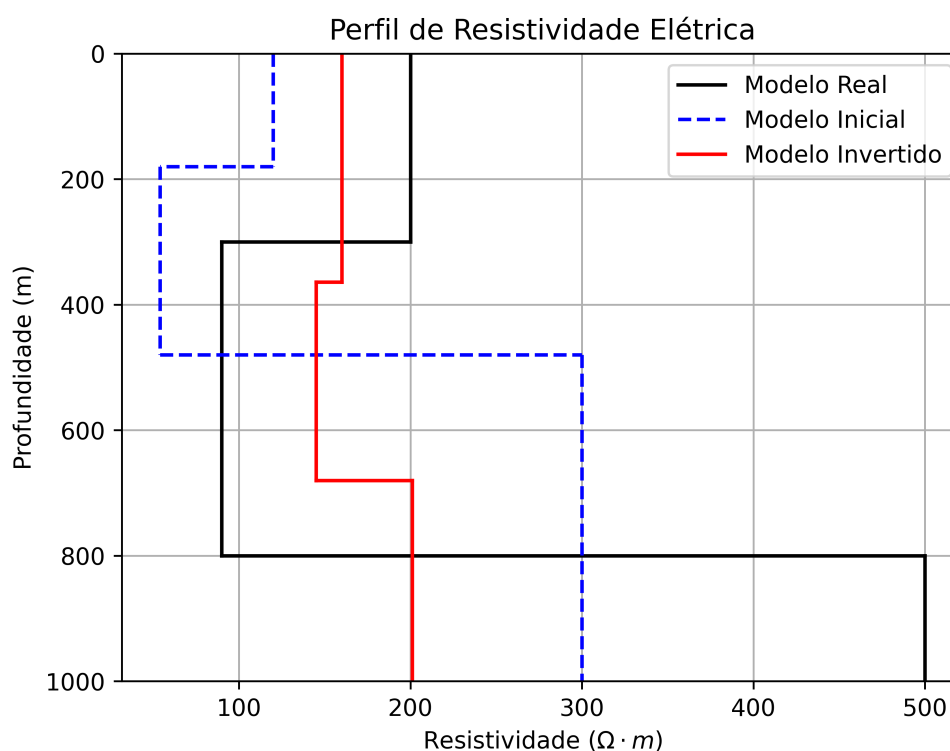


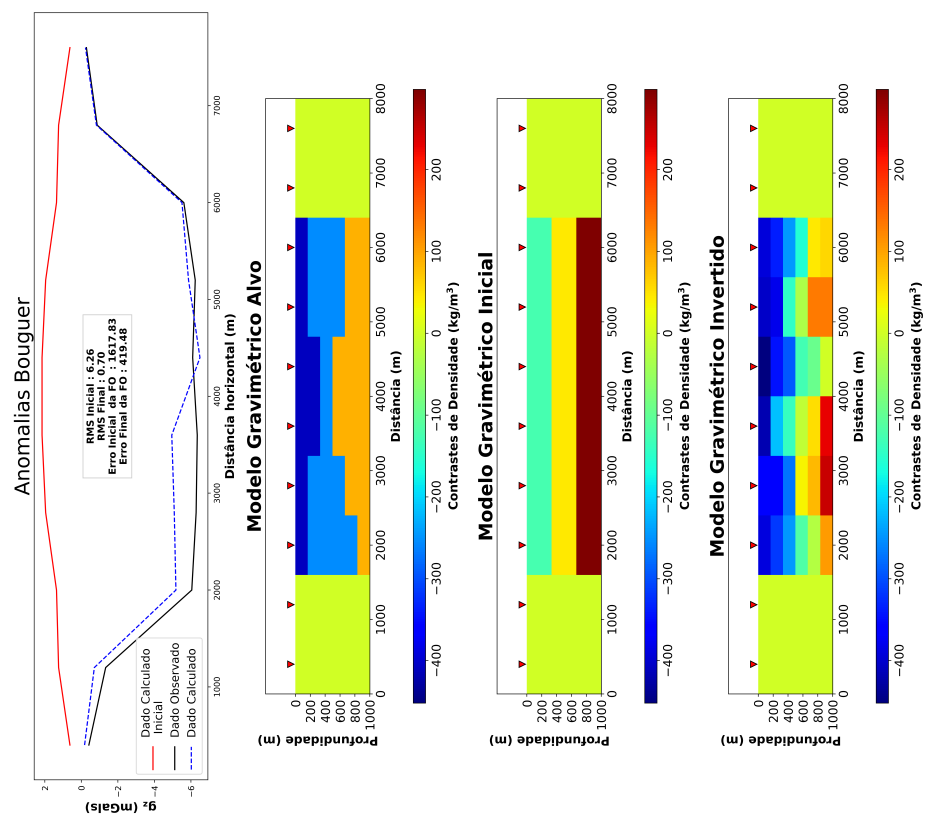
Figura 4.4: Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o invertido, obtidos pelo método Metrópolis e com introdução de 5% de ruído nos dados observados.

Na análise gravimétrica, o erro RMS foi significativamente reduzido, passando de 6,26% no modelo inicial para 0,70% no modelo final. O modelo resultante reflete uma configuração

de camadas horizontais com densidades relativamente uniformes em posições adjacentes, aproximando-se do padrão do modelo gravimétrico de referência. A curva ficou bem ajustada com os dados calculados e observados exibindo a mesma tendência. Quanto aos erros, o modelo inicial apresentou uma discrepância de 99,82% em relação ao modelo de referência, enquanto o modelo final reduziu essa diferença para 44,39%.

### **Inversão de Escopo Local**

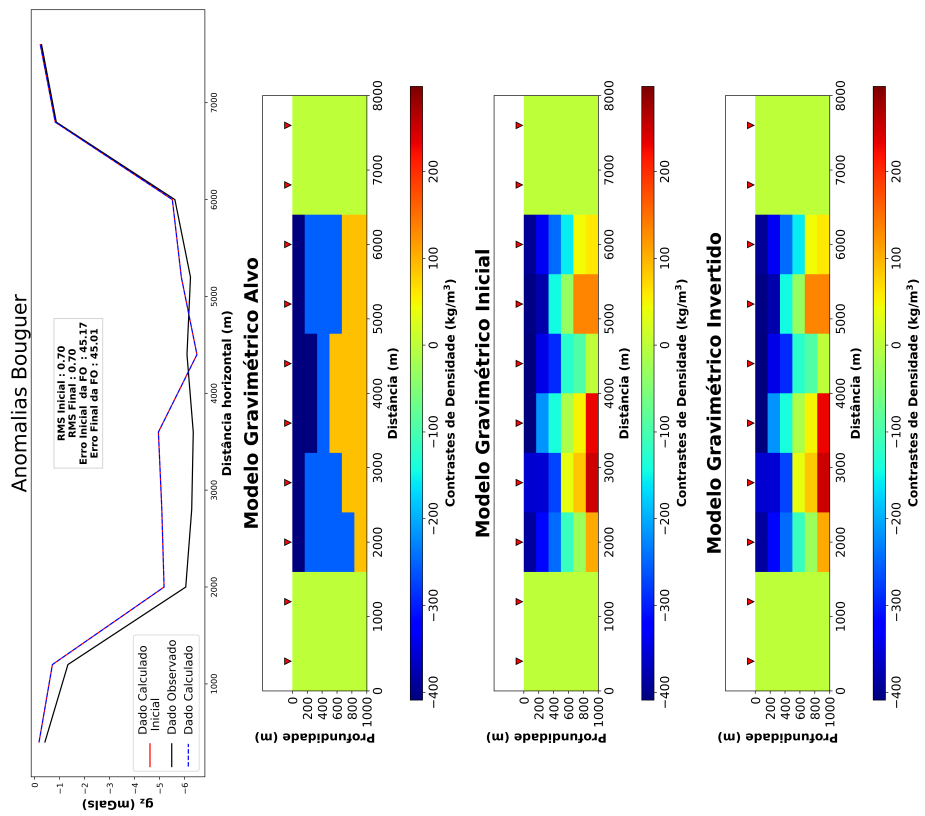
Os resultados da inversão local, ilustrados na Fig. 4.6, evidenciam uma redução mínima da função objetivo, de 45,17 para 45,01, enquanto o erro RMS dos dados geoeletricos apresentou um leve aumento, de 24,75% para 24,85%. Apesar disso, a pseudoseção invertida indicou, ainda que de forma sutil, a presença de uma camada intermediária, atribuída à diminuição da densidade na camada 2, o que aprimorou parcialmente sua representação. De modo geral, para este modelo, o método de gradiente não conseguiu proporcionar melhorias significativas nos resultados, tanto para a parte elétrica quanto para a gravimétrica. No caso da gravimetria, não foi observada nenhuma alteração com o uso desta metodologia de inversão. Essa situação é similar à descrita na seção de inversão local sem ruído, onde se discute a dificuldade de convergência do algoritmo para modelos mais próximos. Reafirma-se que essa questão será detalhada na seção 4.4.



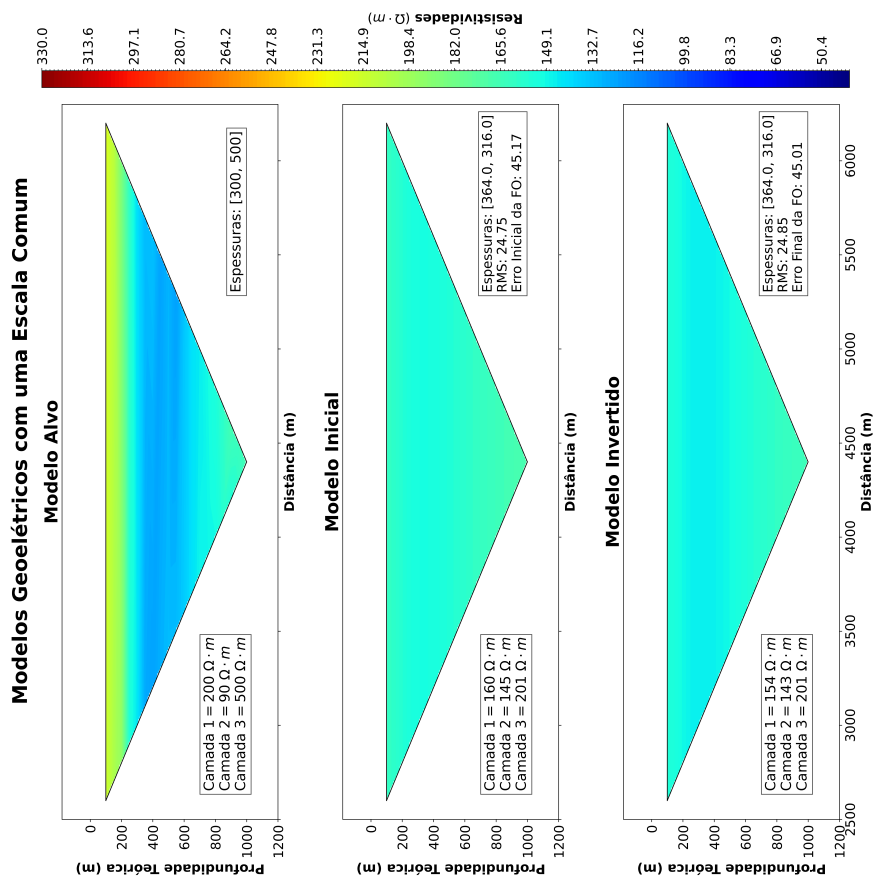
(a) Resultado inversão gradiente para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão gradiente para os dados gravimétricos.

Figura 4-5: Resultado da inversão pelo método Metrópolis, para o modelo 3 e com introdução de 5% de ruído nos dados observados.



(b) Resultado inversão gradiente para os dados gravimétricos.



(a) Resultado inversão gradiente para os dados elétricos.

Figura 4.6: Resultado da inversão pelo método *Steepest Descent*, para o modelo 3 e com introdução de 5% de ruído nos dados observados.

### 4.3 Inversão com 10% de Ruído

#### Inversão de Escopo Global

Os resultados da inversão global são apresentados na Fig. 4.8. A função objetivo apresentou uma redução significativa, de 1592,42 para 452,30, enquanto o erro RMS dos dados geoeletricos caiu de 58,35% para 30,65%. A pseudoseção invertida não foi capaz de recuperar o modelo de 3 camadas, exibindo, apenas, uma única fase. Em contrapartida, aproximou-se visualmente no modelo alvo devido ao aumento das resistividades das camadas iniciais e das suas espessuras. O maior erro entre os parâmetros invertidos foram a resistividade da terceira camada e a espessura da última camada, assim como nos modelos anteriores. Apesar da melhoria visual, o modelo invertido tem um erro final de 31,84%, relativamente ao modelo alvo, enquanto que tal o erro para o modelo inicial é de 16%. Pode-se observar a distância entre os modelos inicial, o modelo real e o invertido na Fig. 4.7.

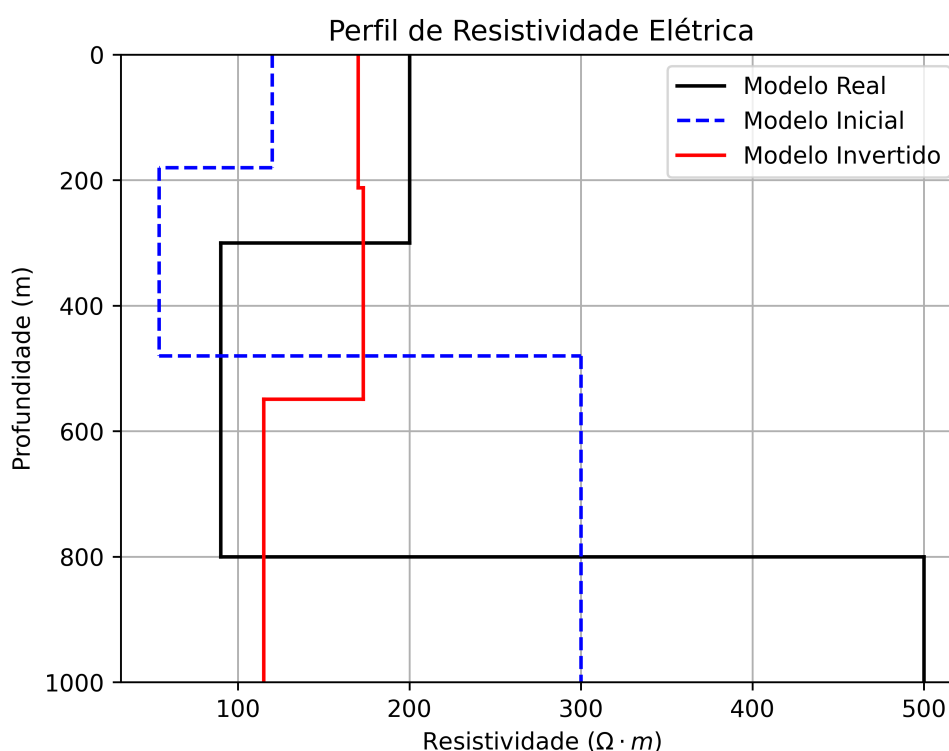


Figura 4.7: Comparativo entre os modelos elétricos inicial, real e o invertido, obtidos pela inversão com método Metrópolis e com introdução de 10% de ruído nos dados observados.

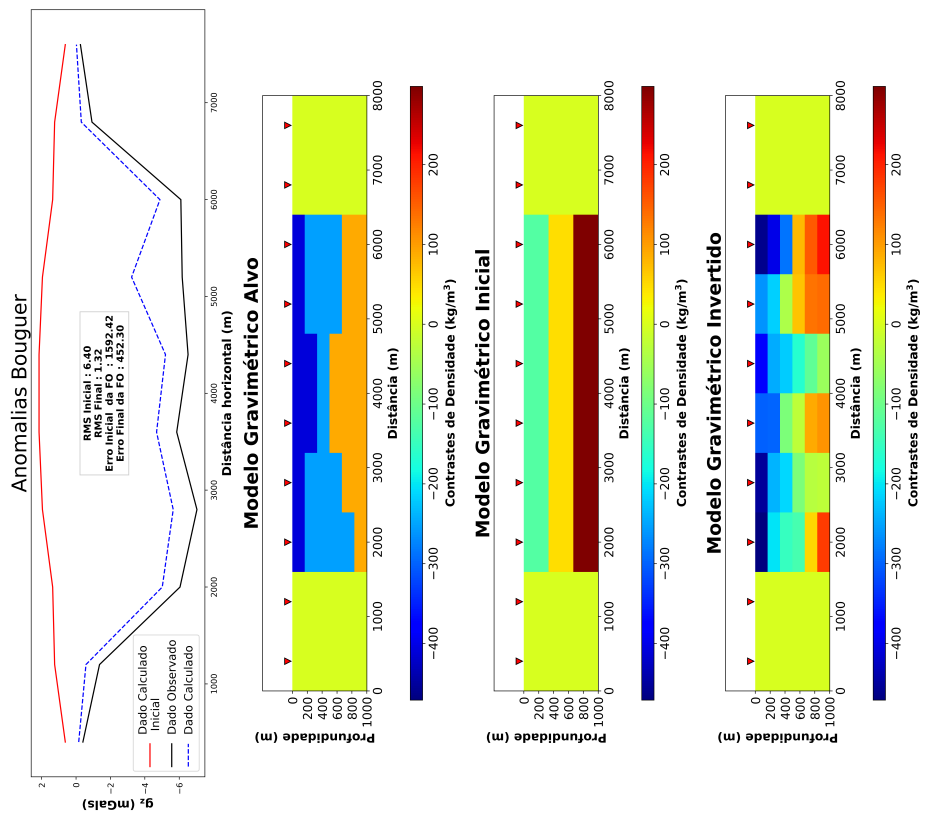
Na análise gravimétrica, a presença do ruído se fez notável com a geração de um modelo invertido menos coerente, perdendo as características de modelo estratificado de camadas horizontais. Devido ao fenômeno da ambiguidade, ainda que o modelo invertido não represente a situação geológica esperada, o erro RMS foi significativamente reduzido, passando

de 6,40% no modelo inicial para 1,32% no modelo final.

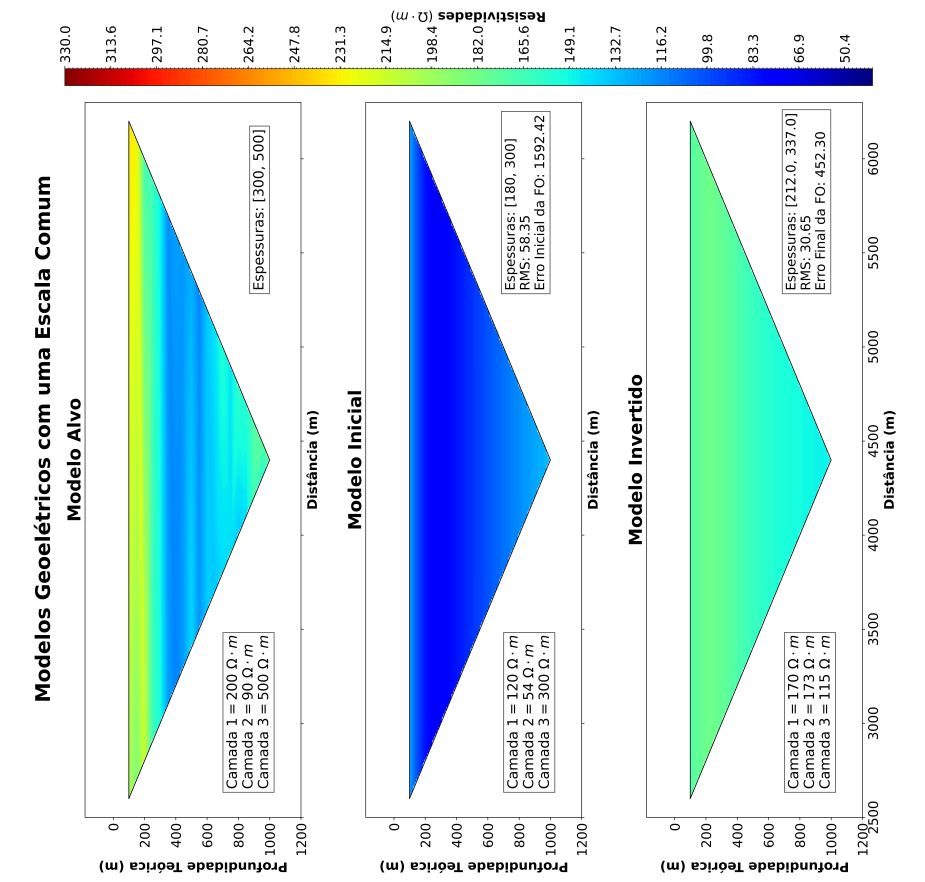
### **Inversão de Escopo Local**

Houve uma redução do erro RMS nos dados elétricos, passando de 30,65% para 30,05%, acompanhada pela identificação de um contraste entre camadas, representadas por uma maior resistividade e outra de menor. Embora o ajuste entre os dados calculados e observados tenha sido satisfatório, persiste uma discrepância significativa entre o modelo invertido e o modelo de referência, resultando em um erro de 31,84%.

Na análise gravimétrica, verificou-se um fenômeno discutido em maior detalhe na seção 4.4: o superajuste da curva gravimétrica. Esse processo reduziu substancialmente o erro RMS, de 1,32% para apenas 0,15%. Contudo, o método gradiente demonstrou limitações em alterar a estrutura do modelo inicial, atuando apenas no ajuste incremental dos parâmetros até atingir a convergência para uma solução com melhor adequação aos dados.

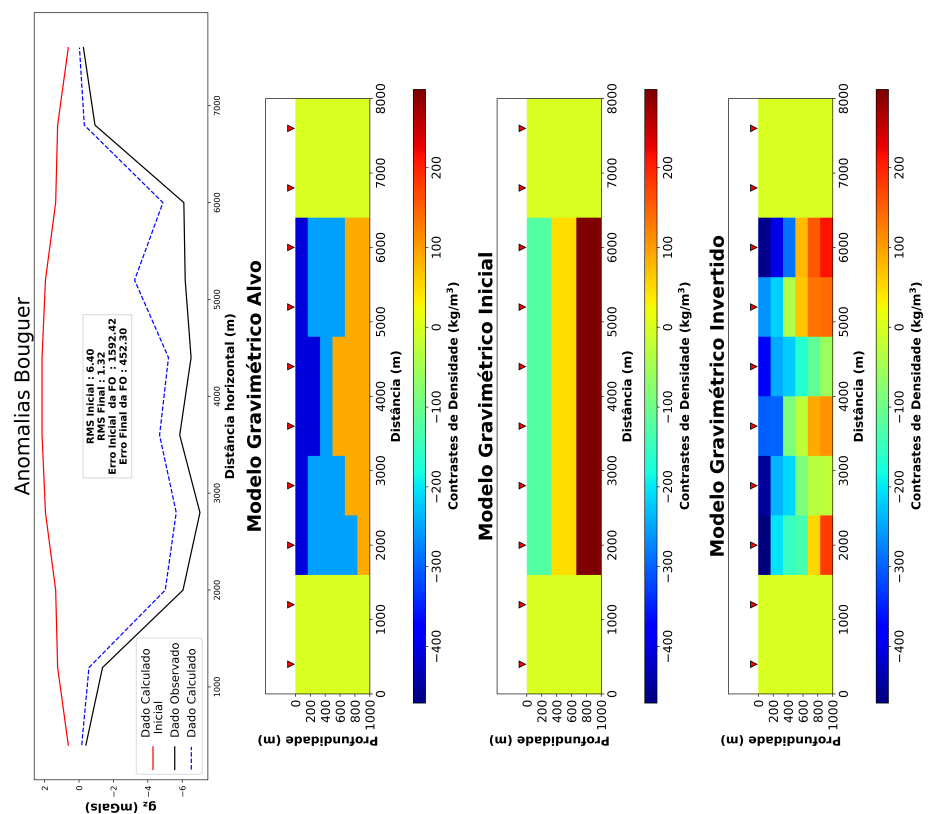


(a) Resultado inversão estocástica para os dados elétricos.



(b) Resultado inversão estocástica para os dados gravimétricos.

Figura 4.8: Resultado da inversão pelo método Metropolis, para o modelo 3 e com introdução de 10% de ruído nos dados observados.



(a) Resultado inversão gradiente para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão gradiente para os dados gravimétricos.

Figura 4.9: Resultado da inversão pelo método *Steepest Descent*, para o modelo 3 e com introdução de 10% de ruído nos dados observados.

## 4.4 Análise Completa dos Modelos Gerados

Neste tópico, apresentamos uma análise geral dos 48 modelos obtidos nesta pesquisa. Para essa análise, utilizaremos as informações descritas na Tabela 4.1, que reúne informações sobre: os valores iniciais ( $S_{inic}$ ) e finais ( $S_{fin}$ ) da função objetivo; os erros RMS entre as curvas de dados elétricos do modelo inicial ( $RMS_{e-inic}$ ) e do modelo invertido ( $RMS_{e-fin}$ ); os erros RMS entre as curvas de dados gravimétricos do modelo inicial ( $RMS_{g-inic}$ ) e do modelo invertido ( $RMS_{g-fin}$ ); e os erros entre os modelos invertidos e os modelos reais, tanto elétrico (Erro-Modelo<sub>e-fin</sub>) quanto gravimétrico (Erro-Modelo<sub>g-fin</sub>).

Para complementar essa análise e facilitar a interpretação dos resultados, foram geradas imagens com base nos dados da Tabela 4.1. Essas representações gráficas permitem uma visualização mais clara das variações nos modelos em função do nível de ruído (0%, 5% e 10%), do método de inversão (escopo global ou local) e dos modelos iniciais (1, 2, 3 e 4).

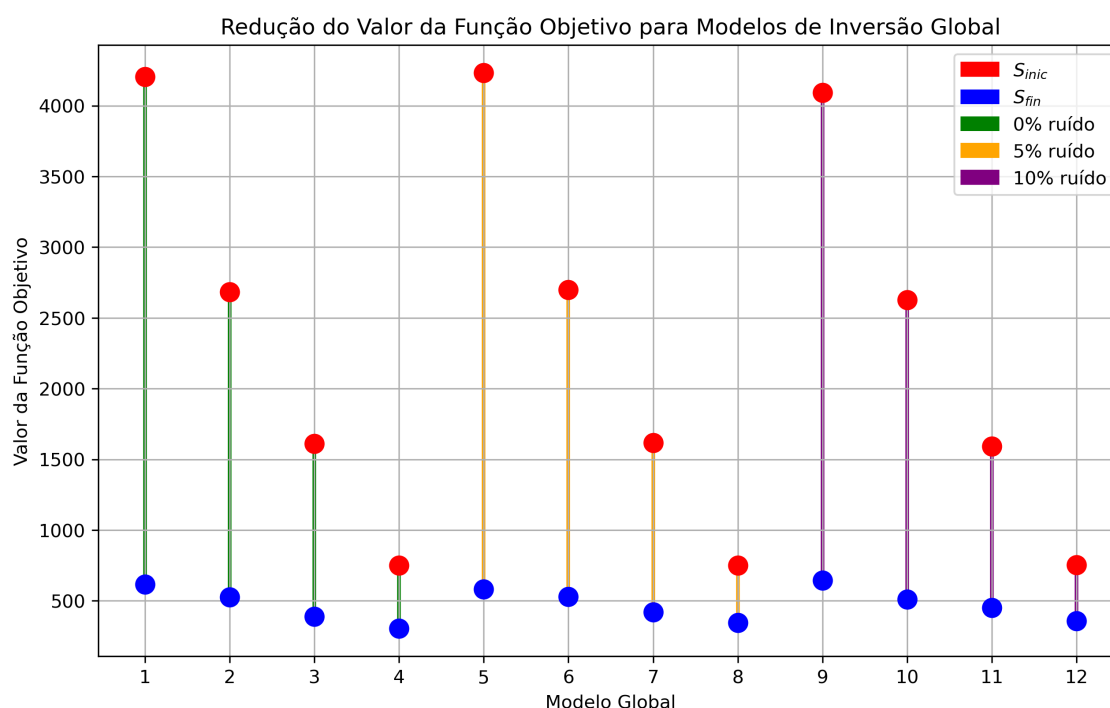


Figura 4.10: Representação gráfica da redução da função objetivo da inversão global para diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

Na inversão global, quando analisamos a redução da função objetivo e a influência do ruído podemos utilizar a Figura 4.10. De forma geral, todos os modelos apresentaram um excelente ajuste das curvas, com uma redução significativa na função objetivo. A introdução de ruído nas curvas observadas, no geral, pouco aumentou o erro inicial das funções objetivo e as minimizações permaneceram próximas às dos dados sem ruído.

Informações sobre as 48 Inversões Realizadas						
Nível de Ruído	Escopo da Inversão	Parâmetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
0%	Global	$S_{inic}$	4202,97	2683,14	1611,52	749,58
		$S_{fin}$	615,40	527,42	387,69	304,33
		$RMS_{e-inic}$ (%)	81,95	69,55	56,88	43,67
		$RMS_{e-fin}$ (%)	22,83	24,23	15,69	21,93
		$RMS_{g-inic}$ (%)	10,14	8,10	6,28	6,28
		$RMS_{g-fin}$ (%)	0,98	0,61	0,80	0,80
		Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)	40,89	47,53	5,61	14,81
	Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	52,04	40,71	49,04	48,84	
	Local	$S_{inic}$	41,60	43,77	20,51	40,11
		$S_{fin}$	36,54	36,30	19,53	38,67
		$RMS_{e-inic}$ (%)	22,83	24,23	15,69	21,93
		$RMS_{e-fin}$ (%)	22,51	22,46	15,69	21,47
		$RMS_{g-inic}$ (%)	0,98	0,61	0,80	1,13
		$RMS_{g-fin}$ (%)	0,16	0,10	0,65	1,13
Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)		40,74	48,33	5,61	14,81	
Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	47,11	38,60	47,80	40,71		
5%	Global	$S_{inic}$	4231,85	2698,38	1617,83	749,44
		$S_{fin}$	581,13	528,33	419,48	344,40
		$RMS_{e-inic}$ (%)	82,70	70,25	57,56	44,37
		$RMS_{e-fin}$ (%)	11,57	27,34	24,75	32,23
		$RMS_{g-inic}$ (%)	10,12	8,08	6,26	4,26
		$RMS_{g-fin}$ (%)	0,48	1,19	0,70	1,04
		Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)	59,83	34,31	21,35	14,76
	Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	43,87	45,77	44,39	39,76	
	Local	$S_{inic}$	9,77	58,11	45,17	80,11
		$S_{fin}$	8,75	53,96	45,01	76,91
		$RMS_{e-inic}$ (%)	11,57	27,34	24,75	32,23
		$RMS_{e-fin}$ (%)	11,56	26,50	24,85	31,69
		$RMS_{g-inic}$ (%)	0,48	1,19	0,70	1,04
		$RMS_{g-fin}$ (%)	0,18	1,19	0,70	1,04
Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)		59,97	34,94	21,40	14,77	
Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	41,01	45,77	44,39	39,76		
10%	Global	$S_{inic}$	4092,80	2628,48	1592,42	754,24
		$S_{fin}$	643,34	511,33	452,30	356,85
		$RMS_{e-inic}$ (%)	83,03	70,80	58,35	45,46
		$RMS_{e-fin}$ (%)	19,70	28,35	30,65	16,57
		$RMS_{g-inic}$ (%)	10,26	8,22	6,40	4,41
		$RMS_{g-fin}$ (%)	1,05	0,79	1,32	1,20
		Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)	31,68	50,14	31,21	4,54
	Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	46,47	47,52	55,76	48,04	
	Local	$S_{inic}$	28,44	55,34	66,13	27,06
		$S_{fin}$	19,38	39,92	52,99	14,80
		$RMS_{e-inic}$ (%)	19,70	28,35	30,65	16,57
		$RMS_{e-fin}$ (%)	19,38	26,11	30,05	12,76
		$RMS_{g-inic}$ (%)	1,05	0,79	1,32	1,20
		$RMS_{g-fin}$ (%)	0,16	0,20	0,15	1,20
Erro-Modelo <sub>e-fin</sub> (%)		31,84	51,43	31,84	4,51	
Erro-Modelo <sub>g-fin</sub> (%)	42,94	44,91	51,33	48,04		

Tabela 4.1: Análise completa dos 48 modelos invertidos.

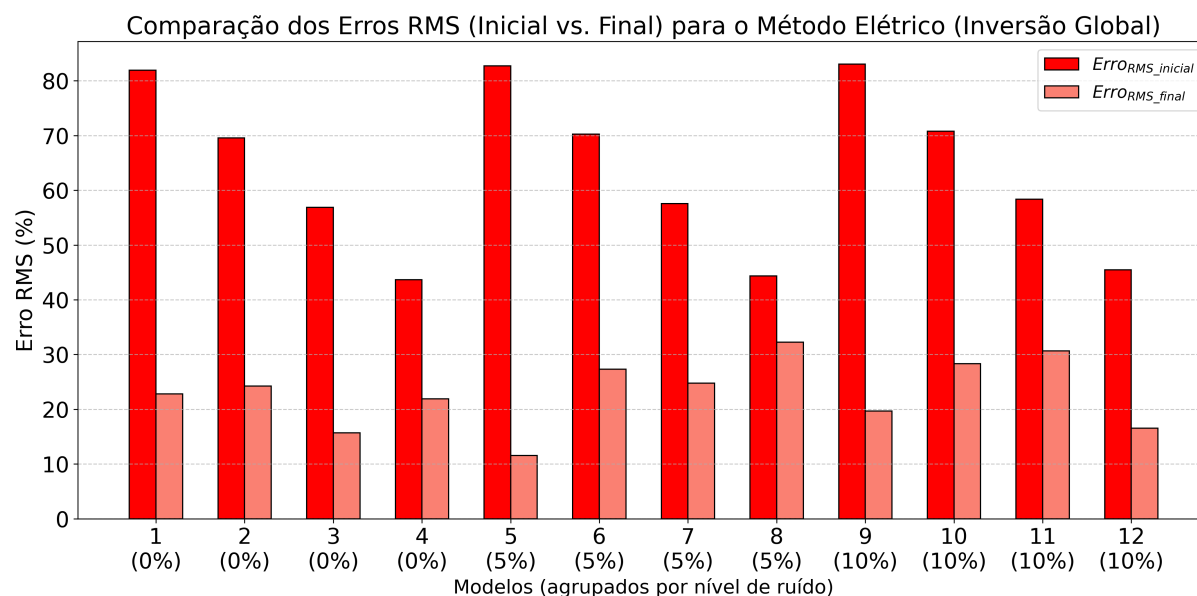


Figura 4.11: Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão global para o método elétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

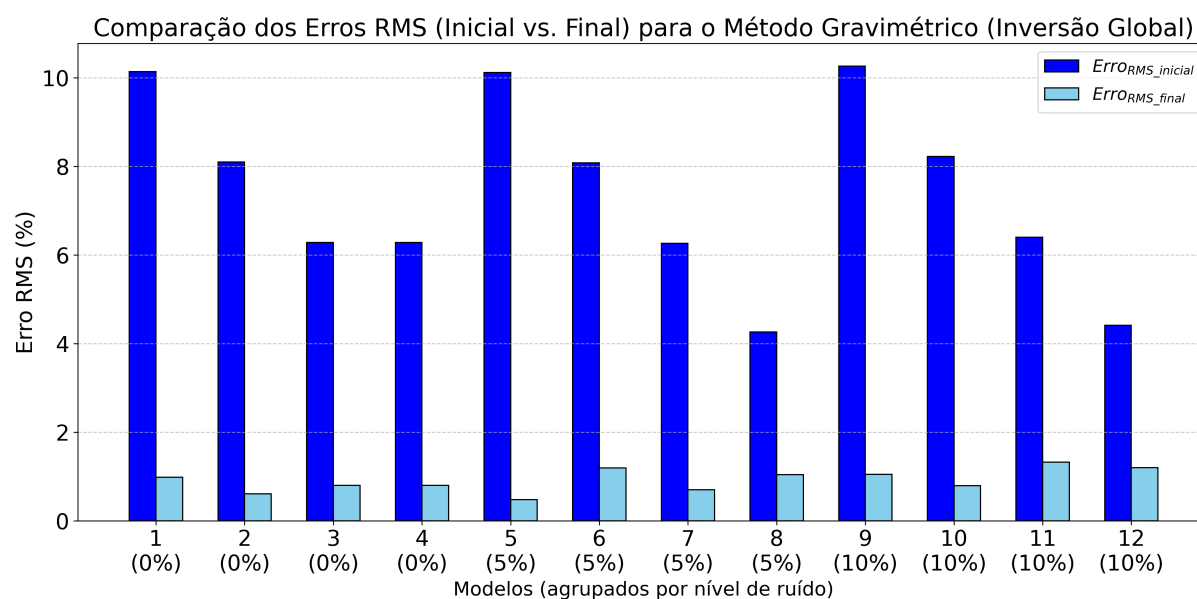


Figura 4.12: Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão global para o método gravimétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

Para o estudo do erro RMS na inversão global, dispomos das Figuras 4.11 e 4.12. Verifica-se que o erro RMS foi reduzido em ambos os métodos, no entanto, houve diferenças no desempenho entre as duas partes. Para a parte gravimétrica, os erros RMS finais variaram entre 0,48% e 1,32%. Já na parte geolétrica, o erro mostrou maior instabilidade, oscilando entre 11,57% e 32,23%. Essa discrepância entre os métodos era esperada, pois, no caso do modelo elétrico, embora as pseudoseções iniciais não estivessem muito distantes do modelo

alvo (com erros do modelo de até no máximo 36%), os valores de erro RMS entre as curvas das pseudoseções e o dado real eram elevados, variando de 43,67% a 83,03%. Isso evidencia a alta sensibilidade do método elétrico a modelos iniciais distantes. Não houve aumento progressivo expressivo dos erros RMS inicial para ambos os métodos com a inserção do ruído. Para o erro RMS final, não houve uma regra para crescimento ou decréscimo, em virtude do uso de uma metodologia estocástica de inversão.

A maior dificuldade enfrentada pelo método Metropolis foi estabelecer uma correlação precisa entre a geometria do modelo e a intensidade dos contrastes de densidade. Isso se deve à seleção aleatória das densidades no modelo parametrizado, o que dificultou a obtenção de uma distribuição consistente com padrões geológicos esperados e comprometeu a convergência para soluções fisicamente mais realistas. Já nos dados geoeletricos, o principal desafio foi reduzir simultaneamente o erro RMS e o erro do modelo invertido em relação ao modelo real. Essa dificuldade está associada ao fenômeno da equivalência, conforme descrito por Braga (2016), que demonstra como diferentes configurações de seções geoeletricas podem gerar curvas de campo idênticas ou muito similares. Essa ambiguidade, inerente ao método, pode complicar a definição de um modelo único e bem ajustado, tornando o processo de inversão mais suscetível a incertezas.

Na inversão de escopo local, é importante lembrar algumas informações previamente mencionadas. Os métodos de otimização utilizam funções objetivo distintas, o que implica que o modelo final gerado pelo método Metropolis, quando utilizado como entrada para o método de gradiente, apresentará valores diferentes para a função objetivo global e local. Ressalta-se que a função objetivo do método estocástico é mais robusta, pois considera não apenas o ajuste dos dados, mas também a distância entre modelos iniciais e a suavidade das densidades. Em contraste, a função objetivo do método local é mais simplificada, levando em conta apenas os dois primeiros fatores relacionados ao ajuste dos dados elétricos e gravimétricos. Como resultado, os valores da função objetivo no método local tendem a ser inferiores, podendo apresentar discrepâncias relacionadas ao melhor ou pior ajuste dos dados. Isso pode ser observado nos modelos 1, com ruído de 5%, e 3, sem ruído, nos quais o ajuste entre as curvas é suficientemente bom, a ponto do valor da função objetivo no modelo 3 ser inferior, mesmo quando comparado aos valores da função objetivo de modelos com os mesmos níveis de ruído.

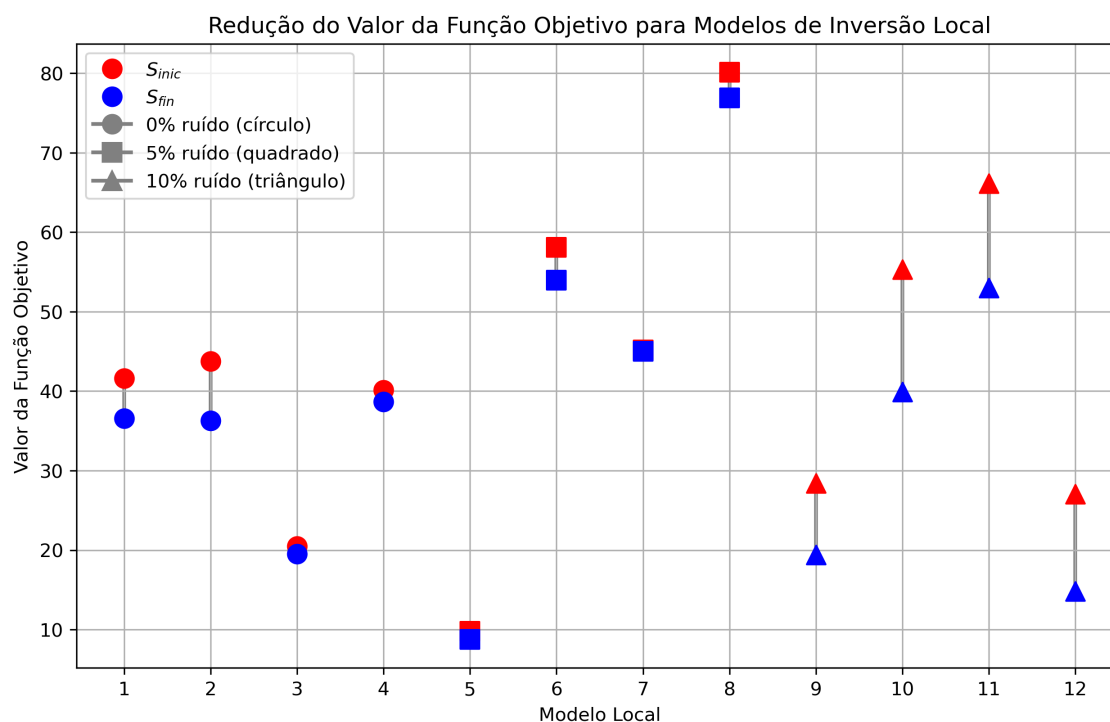


Figura 4.13: Representação gráfica dos resultados da inversão para diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

Quanto a redução da função objetivo e a influência do ruído na inversão local, podemos utilizar a Figura 4.13. Em termos gerais, o método *Steepest Descent* proporcionou um bom ajuste entre as curvas, mas não foi capaz de minimizar de forma significativa os valores iniciais das funções objetivo. A presença ou ausência de ruído nos dados não se refletiu de maneira uniforme nos resultados da inversão de escopo local, pois estes foram diretamente influenciados pela aleatoriedade do método Metropolis.

Para o estudo do erro RMS da inversão local, dispomos das Figuras 4.14 e 4.15. Verifica-se que o erro RMS foi reduzido em ambos os métodos, no entanto, houve diferenças no desempenho entre as duas partes. Esse comportamento é evidente quando se analisa os erros RMS finais entre as curvas dos dados elétricos, cuja variação ficou entre 11,56% e 31,69%. Embora tenha ocorrido uma redução modesta nos erros, em alguns modelos, principalmente nos mais próximos do modelo alvo, houve estagnação. Esse fenômeno sugere que a metodologia atingiu seu limite de convergência, pelo menos no que se refere à parte geométrica. Contudo, ainda que alguns modelos apresentem estagnação na parte elétrica, como ocorre, por exemplo, no modelo 3, sem ruído, observa-se uma melhoria no método gravimétrico, indicando que os limites de convergência para os dois métodos não coincidem.

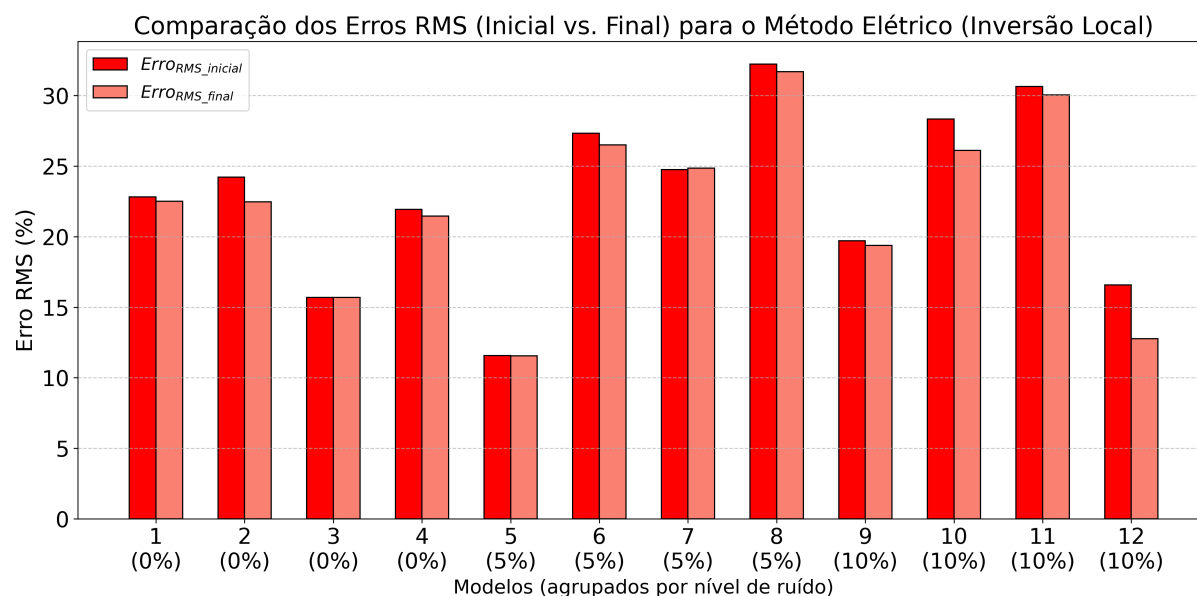


Figura 4.14: Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão local para o método elétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

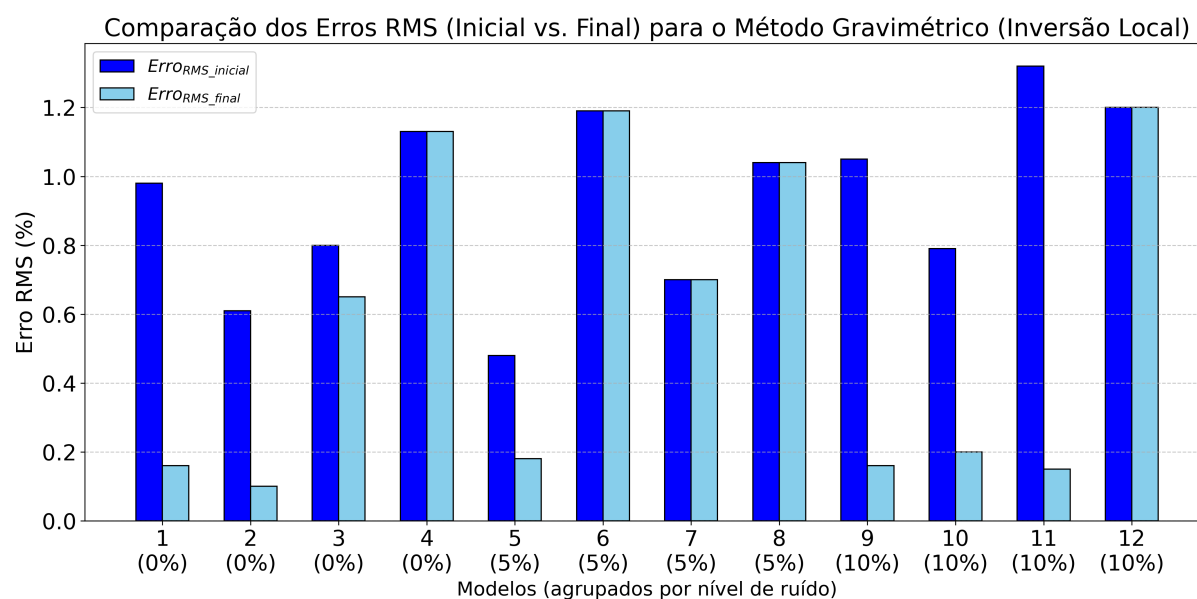


Figura 4.15: Representação gráfica dos erros RMS inicial e final da inversão local para o método gravimétrico, com diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

No caso da gravimetria, em algumas situações, houve uma redução significativa nos erros, com valores de erro RMS finais variando entre 0,10% e 1,20%. No entanto, também foram observados casos de estagnação, especialmente nos modelos mais próximos do modelo alvo. Essa estagnação sugere que o método de otimização alcançou seu limite de convergência para a parte gravimétrica. No entanto, como demonstrado no caso do método elétrico, em situações de estagnação no método gravimétrico, houve uma melhoria nos resultados da

parte elétrica, como evidenciado nos modelos 4, com ruídos de 5% e 10%.

Por fim, diante do exposto, é importante destacar que, foi observado que o método *Steepest Descent* não realiza modificações geométricas nos modelos iniciais, mas sim um refinamento dos valores das propriedades físicas, ajustando resistividade, espessura e densidade para melhorar o ajuste entre os dados observados e calculados. Esse processo resulta em curvas gravimétricas altamente ajustadas e em melhorias nos modelos elétricos finais, embora os modelos finais possam não refletir de forma rigorosa a geometria ou as propriedades dos modelos geológicos alvo. Esse resultado indica que o método necessita de entradas mais precisas nos modelos iniciais e reforça a ideia de que o método de Metropolis não é a abordagem mais adequada para essa função.

No que concerne a discussão dos resultados dos modelos invertidos em comparação com os modelos alvo, podemos empregar as Figuras 4.16 e 4.17. A presença ou ausência de ruído nos dados não se refletiu de maneira uniforme nos resultados da inversão de escopo local, pois estes foram diretamente influenciados pela aleatoriedade do método Metropolis. De maneira geral, para os dados elétricos, após a inversão, os modelos invertidos apresentaram uma certo distanciamento em relação ao modelo real, ainda que fosse possível foi possível visualizar uma pseudoseção com três camadas. Em contrapartida, para os dados gravimétricos, observou-se uma maior aproximação dos resultados de inversão com o modelo alvo, recuperando o modelo de camadas paralelas. Tais observações destacam a necessidade de uma estratégia que restrinja de forma mais robusta o modelo elétrico aos seus valores iniciais, a fim de melhorar sua precisão.

É importante destacar que, em diversos casos, os modelos elétricos apresentaram erros maiores do que em seus estados iniciais. Esse comportamento é uma característica inerente aos processos de inversão de dados geofísicos. Tal resultado enfatiza a relevância de incorporar informações a priori, como dados sobre a geologia local, além de selecionar modelos iniciais adequados, e a necessidade do uso de outros métodos geofísicos de investigação. Essas práticas aumentam a confiabilidade e a precisão dos resultados, assim ressalta-se que o simples ajuste de dados de propriedades físicas não é suficiente para garantir modelos invertidos consistentes ou geologicamente coerentes.

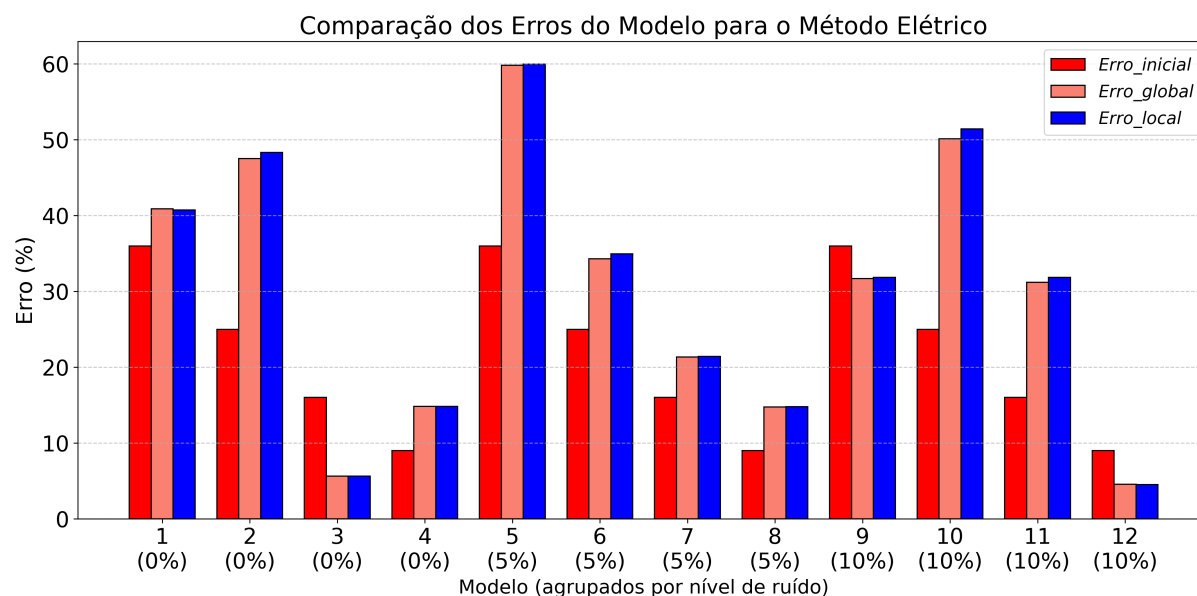


Figura 4.16: Comparação gráfica dos erros entre o modelo inicial e o modelo alvo, bem como entre os modelos invertidos (obtidos pela inversão global e local) e o modelo alvo, para o método elétrico. Os resultados são apresentados considerando diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

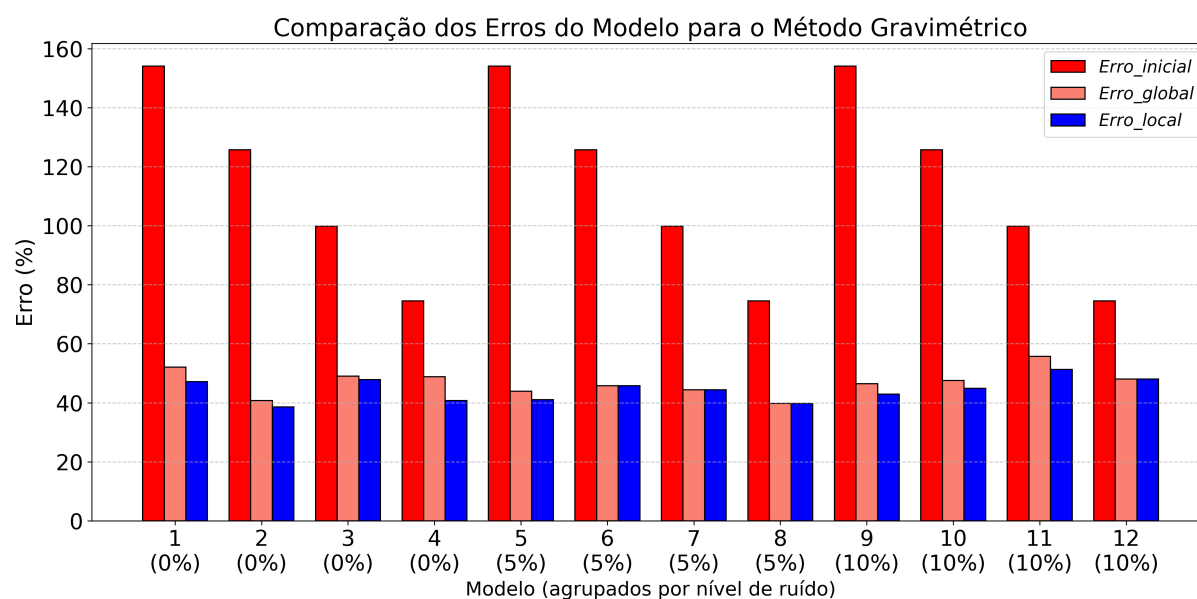


Figura 4.17: Comparação gráfica dos erros entre o modelo inicial e o modelo alvo, bem como entre os modelos invertidos (obtidos pela inversão global e local) e o modelo alvo, para o método gravimétrico. Os resultados são apresentados considerando diferentes modelos iniciais e níveis de ruído.

# 5

## Conclusões

Esta dissertação teve como objetivo principal testar metodologias de inversão aplicadas a dados sintéticos gravimétricos e geolétricos, realizando inversões conjuntas por meio das metodologias de otimização Metropolis e *Steepest Descent*. Os principais destaques do trabalho são:

- A implementação da modelagem gravimétrica por prismas infinitos em uma direção horizontal, como uma alternativa simplificada do método Talwani.
- O desenvolvimento da modelagem elétrica para o arranjo dipolo-dipolo utilizando a técnica do caminhamento elétrico.
- Aplicação da relação de Archie como vínculo indireto na inversão, integrando informações geológicas diretamente aos modelos iniciais para aumentar sua consistência.
- Realização da inversão conjunta com abordagem de escopo global, utilizando o método de Metropolis, resultando em 24 modelos preliminares que serviram de entrada para a etapa de refinamento local.
- A implementação da inversão conjunta de escopo local pelo método *Steepest descent* e a geração de 24 modelos finais.

Os resultados demonstraram que a metodologia utilizada nesta pesquisa estabeleceu uma nova estratégia de inversão de dados geofísicos, não apenas por combinar dois métodos de inversão em um processo conjunto, mas também pelo uso da técnica de caminhamento elétrico para aquisição de dados geolétricos, o que não é comumente encontrado na literatura.

De modo geral, verificou-se que os parâmetros gravimétricos foram estimados com maior precisão em comparação aos elétricos. Essa discrepância pode ser atribuída à maior estabilidade e menor complexidade da modelagem gravimétrica em relação à elétrica. Para mitigar esse problema em estudos futuros, recomenda-se aprimorar a parametrização e buscar uma melhor equalização na quantidade de parâmetros considerados na inversão conjunta.

A inversão local não apresentou melhorias significativas em relação aos resultados obtidos pela inversão global. Esse comportamento pode ser explicado pela complexidade do método elétrico utilizado, que gerou um grande número de mínimos locais próximos ao modelo alvo. Essa característica dificultou a eficácia do método de decrescimento rápido (*steepest descent*), que não é ideal para escapar de mínimos locais.

Outro ponto relevante foi a observação de que a diminuição do valor inicial da função objetivo (Sinic) para os quatro modelos analisados não resultou em uma redução consistente do erro final nos modelos nem nas médias RMS dos dados. Esse comportamento pode estar relacionado a irregularidades na topologia do espaço de modelos e à elevada não-linearidade da função objetivo. Como recomendação, sugere-se o uso de espaços de modelo menos irregulares e funções objetivo mais simples, a fim de facilitar o controle sobre o processo de inversão e alcançar resultados mais consistentes.

Dentre as principais dificuldades encontradas, destaca-se a correspondência entre as parametrizações dos métodos geofísicos, de modo que ambos contribuíssem de forma equivalente no processo de inversão. Além disso, foi desafiador determinar coeficientes apropriados para as funções objetivo, correlacionar de forma precisa a geometria do modelo com os contrastes de densidade e reduzir simultaneamente o erro RMS e o erro do modelo invertido em relação ao modelo real, especialmente devido ao fenômeno de equivalência entre camadas geoeletricas. Na inversão local, o principal obstáculo foi minimizar significativamente os valores iniciais da função objetivo, além da incapacidade de realizar mudanças geométricas nos modelos gravimétricos de densidade.

Diante dessas limitações, sugere-se para trabalhos futuros:

- A adoção de metodologias de inversão mais sofisticadas, como *Simulated Annealing* e Algoritmo Genético, complementando abordagens locais como Newton ou Gauss-Newton.
- O estabelecimento de vínculos que mantenham os modelos obtidos em cada etapa do processo iterativo dentro de um domínio no qual exibam razoabilidade com a realidade geológica

- A utilização de métodos de discretização avançados, como diferenças finitas ou elementos finitos, para gerar modelos geoeletricos genuinamente 2D, mais completos e com maior variabilidade.
- A inclusão de vínculos diretos entre as propriedades de resistividade e densidade na função objetivo, promovendo uma abordagem mais unificada e consistente para resolver o problema inverso conjunto.

# Agradecimentos

Gostaria de salientar que trabalho, para mim, tem grande significado. Meu mestrado foi executado durante o período de apenas 11 meses. Após uma mudança de orientação tive uma mudança drástica de tema, e a escolha de uma metodologia complexa, como inversão conjunta, não foi muito incentivada. A frase de Steve Martin descreve exatamente a sensação que tenho ao final dessa jornada *"I think I did pretty well, considering I started out with nothing but a bunch of blank paper"*. Ainda mais importante que meu TCC, esta dissertação foi contruída com base nas minhas ideias e lapidada por meus orientadores. É a comprovação do meu crescimento intelectual, tendo como base uma série de noites sem dormir e com muito estudo. É o meu amadurecimento como cientista, pesquisadora e profissional da área.

Este foi um trabalho em conjunto, onde todas as pessoas presentes da minha vida contribuíram de alguma forma para o meu amadurecimento pessoal e/ou acadêmico. Primeiro gostaria de agradecer a Deus, pela vida extremamente abençoada que tenho. Agradeço aos meus pais, Cristiane e Gabriel, minhas referências de vida. Os faróis que iluminam meu caminho quando a vida fica escura. Obrigada por toda a dedicação, investimento, paciência, amor, compreensão e palavras de incentivo. E por sempre, **SEMPRE** acreditarem em mim. Amo muito vocês. Agradeço a minha irmã, Giovanna, por todo o carinho, todas as conversas, todos os estudos de física ou matemática e a todas as discussões inerentes a irmandade. Ter você na minha vida me faz uma pessoa melhor. Te amo, dona Fanta.

Agradeço aos meus orientadores, Alanna Dutra e Wilson Figueiró que compraram essa ideia maluca de inversão conjunta com um prazo extremamente curto. Alanna, muito obrigada pelos puxões de orelha não me deixando fazer mais do que deveria, pelo acompanhamento próximo de cada etapa da pesquisa, pelo respeito às minhas ideias e a minha forma de pensar ciência (só quem é da área de pesquisa sabe como isso é raro em orientadores), por me ensinar que a pesquisa pode ser sim um processo menos doloroso e extremamente produtivo. Muito obrigada por todo o carinho. Te respeito muito como cientista, professora e mulher. Ao Fig, sou extremamente grata por sua paciência e por suas ideias durante o processo de construção dessa pesquisa. Te agradeço pelas incontáveis horas discutindo arranjos elétricos, parametrizações, metodologias de inversão, funções objetivo e livros de otimização. O

senhor é um orientador excelente, que me ensinou muito sobre a construção de metodologia científica.

A professora Susana Cavalcanti por toda a ajuda referente às dúvidas quanto ao método elétrico e por todos os conselhos sobre a pós-graduação. Ao professor Hédison Sato, pelo fornecimento de seu código "Rhank0". Ao professor Milton Porsani, por suas aulas de inversão cujo conhecimento me marcou tanto que direcionei totalmente minhas pesquisas a este assunto. Ao professor Marcos Vasconcelos, por todos os conselhos e discussões durante a construção do meu trabalho. A professora Juliana Manzur, que sempre terá minha gratidão, por mudar a minha vida me mostrando o caminho da geofísica. Saiba que você estará nos agradecimentos de todas as etapas concluídas em relação a este curso.

Aos amigos de curso, por todo o incentivo, compartilhamento de materiais e conhecimentos, risadas e dificuldades do processo de aprendizagem. Agradeço ao Marcos Luz, Vitto Clavijo, João Chaves, Armando Carvalho, André Luiz, Filipe Moura, Letícia Pires, Vasco Badagola, Matheus Nilo, Yana Pinheiro ... e muitos outros.

Por último mas não menos importante, agradecimentos mais do que especiais ao Leo Batista, por toda a ajuda (e paciência!) ao explicar minhas dúvidas sobre o método elétrico. Por suas críticas e sugestões. Tenha certeza que sua participação foi fundamental para a construção do meu trabalho.

# Apêndice **A**

## Validação e Aprofundamento da Modelagem Geométrica

A modelagem empregada nesta pesquisa apresenta algumas limitações, entre as quais se destaca o uso de apenas duas linhas de caminhamento elétrico, com os dados interpolados para atribuir uma característica pseudo-2D ao modelo. A segunda linha de medição é uma duplicação espelhada da primeira, alterando as posições de profundidade e distância horizontal. No entanto, essa abordagem não é considerada um ponto negativo, pois o modelo alvo deste trabalho assume a simplificação de camadas horizontais e homogêneas. Dessa forma, na inversão, ajusta-se a curva geométrica resultante da combinação dessas duas linhas de caminhamento elétrico, otimizando três valores de resistividade e dois de espessura.

A validação da modelagem elétrica utilizada nesta pesquisa foi realizada por meio de comparações com outros dois softwares de referência: o PyGIMLi e o Res2DMod. Todas as modelagens foram feitas com os parâmetros do modelo alvo, com o arranjo dipolo-dipolo e com um espaçamento de 200 m. Além disso, foi simulada, apenas, a primeira linha do caminhamento com as especificações retratadas na seção Geração de Dados Sintéticos.

O software PyGIMLi (Rücker et al., 2017), realiza uma modelagem com base na resolução numérica da equação de Poisson, a qual descreve a distribuição do potencial elétrico em um meio de resistividade  $\sigma$ . A resolução desta equação é feita por meio do método de elementos finitos. Inicialmente, o domínio de interesse é discretizado em uma malha composta por pequenos elementos (triangulares em 2D), aos quais são atribuídos os valores de resistividade ( $\sigma$ ). Em seguida, configura-se a posição dos eletrodos e o tipo de arranjo (como Wenner, Schlumberger ou Dipolo-Dipolo). Por fim, o software realiza a modelagem direta, resolvendo numericamente a equação e simulando os potenciais e resistividades aparentes

correspondentes aos arranjos definidos.

O software Res2DMod utiliza uma abordagem numérica baseada nos métodos de diferenças finitas ou elementos finitos, para resolver a distribuição do potencial elétrico em subsuperfícies discretizadas. A subsuperfície é dividida em blocos utilizando uma malha retangular, composta por  $L$  nós na direção horizontal e  $M$  nós na direção vertical. No método das diferenças finitas, o potencial elétrico é calculado nos nós da malha, resolvendo iterativamente as equações diferenciais associadas ao problema. Os parâmetros do modelo, como propriedades físicas do meio e configurações do arranjo, são definidos em um arquivo de entrada. Com base nesses dados e na malha discretizada, o software realiza a modelagem direta, gerando o modelo sintético que simula a resposta elétrica do meio.

Diferentemente de outros softwares, a modelagem utilizada nesta pesquisa baseia-se na resolução analítica da equação do potencial elétrico. A resistividade aparente é calculada a partir da fórmula de recorrência descrita na Seção 1.3, conforme formulada por Sato (2002). Essa abordagem proporciona uma representação teórica mais direta do comportamento geométrico, dispensando a necessidade de discretização numérica do domínio.

## Modelagens Elétricas: Análise Comparativa de Resultados

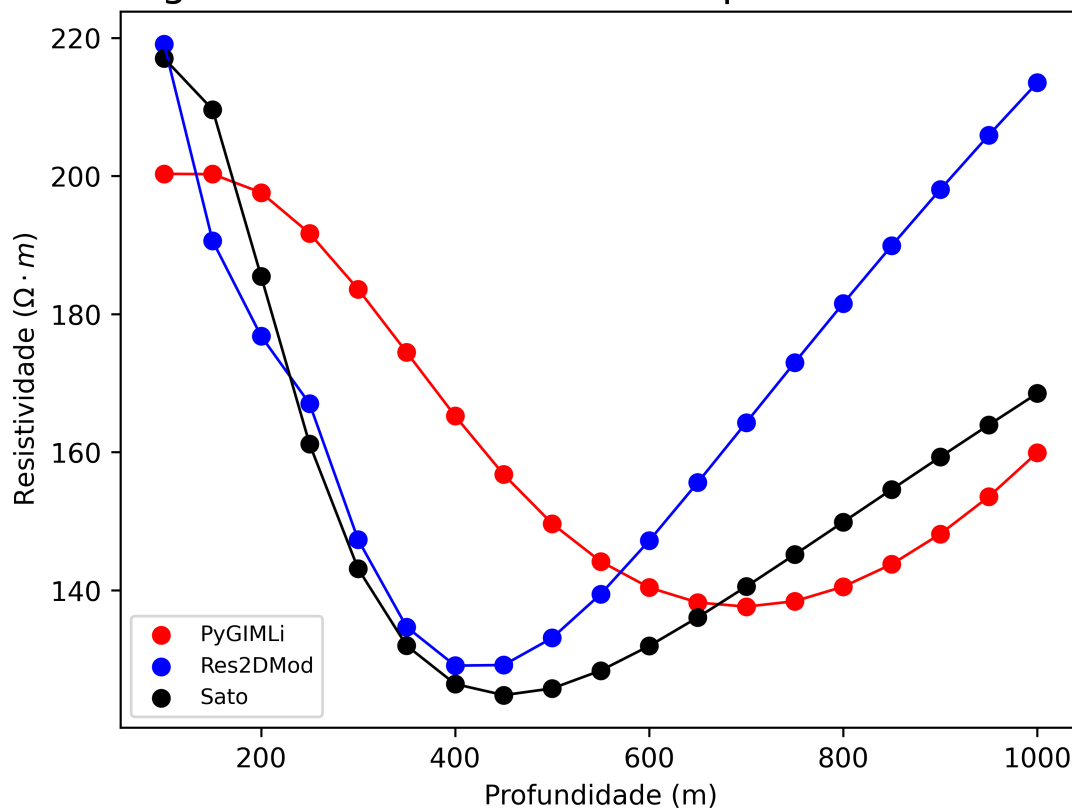


Figura A.1: Comparação entre as curvas modelagens elétricas.

<b>Erros entre as Curvas de Modelagem</b>			
	Sato x PyGIMLi	Sato x Res2DMod	PyGIMLi x Res2DMod
RMS	22%	23%	33%

Tabela A.1: Comparação entre os erros das modelagens elétricas.

A comparação entre os resultados das modelagens pode ser observada na Fig. A.1 e na Tabela A.1. Os resultados revelam que, embora as curvas elétricas apresentem valores de resistividade distintos para cada ponto, elas seguem uma tendência semelhante. A análise do erro proporciona uma reflexão interessante sobre a modelagem de dados elétricos: apesar de representarem o mesmo ambiente geológico, as diferentes metodologias utilizadas resultam em representações distintas. Este efeito é especialmente evidente quando se trata de abordagens numéricas, como ilustrado na Tabela A.1, onde o erro entre as curvas do PyGIMLi e do Res2DMod é o maior entre as comparações feitas.

Sendo assim, a modelagem que utiliza a metodologia apresentada é mais do que suficientemente validada, visto que, em comparação com as outras curvas, é a que apresenta o menor nível de erro.

# Apêndice **B**

## Validação da Modelagem Gravimétrica

Para validar o código de modelagem gravimétrica e assegurar que a modelagem prismática elaborada oferece uma boa aproximação do meio geológico, empregamos as equações analíticas da atração gravitacional de uma esfera e de um cilindro como parâmetros de verificação. Equações estas retiradas de Fowler (1990) e Telford et al. (2004), respectivamente,

$$g_{ze}(x) = \frac{4\pi G \Delta \rho r^3 z_c}{3[(x - x_c)^2 + z_c^2]^{3/2}}, \quad (\text{B.1})$$

$$g_{zc}(x) = \frac{2G\pi\Delta\rho r^2}{z_c[1 + (x - x_c)^2/z_c^2]} \times \frac{1}{\{1 + [(x - x_c)^2 + z_c^2]/L^2\}}. \quad (\text{B.2})$$

Onde  $\Delta\rho$  representa o contraste de densidade em  $\text{kg/m}^3$  entre a rocha encaixante e as estruturas (cilindro e esfera);  $L$  é o comprimento semi-infinito do cilindro, medido ao longo do eixo  $y$  (perpendicular ao plano da página);  $x_c$  e  $z_c$  são as coordenadas do centro das estruturas; e  $r$  é o raio das estruturas, expresso em metros. Para aprimorar a aproximação

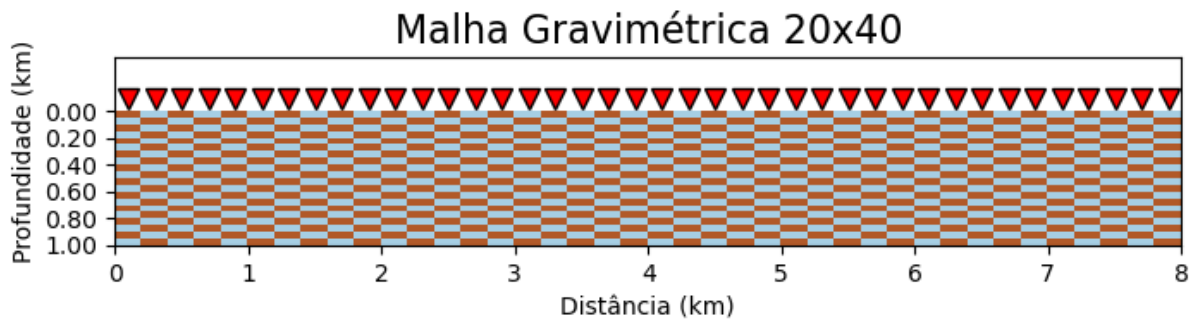


Figura B.1: Malha gravimétrica formada por 800 prismas verticais semi-infinitos na direção  $y$ .

das estruturas validativas, utilizamos uma malha mais detalhada, conforme ilustrado na Figura B.1, composta por 20 prismas em profundidade e 40 prismas ao longo da distância horizontal. Os cálculos foram realizados com um contraste de densidade de  $\Delta\rho = 200 \text{ kg/m}^3$  e um raio de 0,2 km para ambas as estruturas, esfera e cilindro. O semi-comprimento do cilindro foi definido como 100 km, um valor significativamente maior que o raio, de forma a se assemelhar a um prisma infinito ao longo do eixo  $y$ . Para a modelagem da esfera, o erro  $rms$

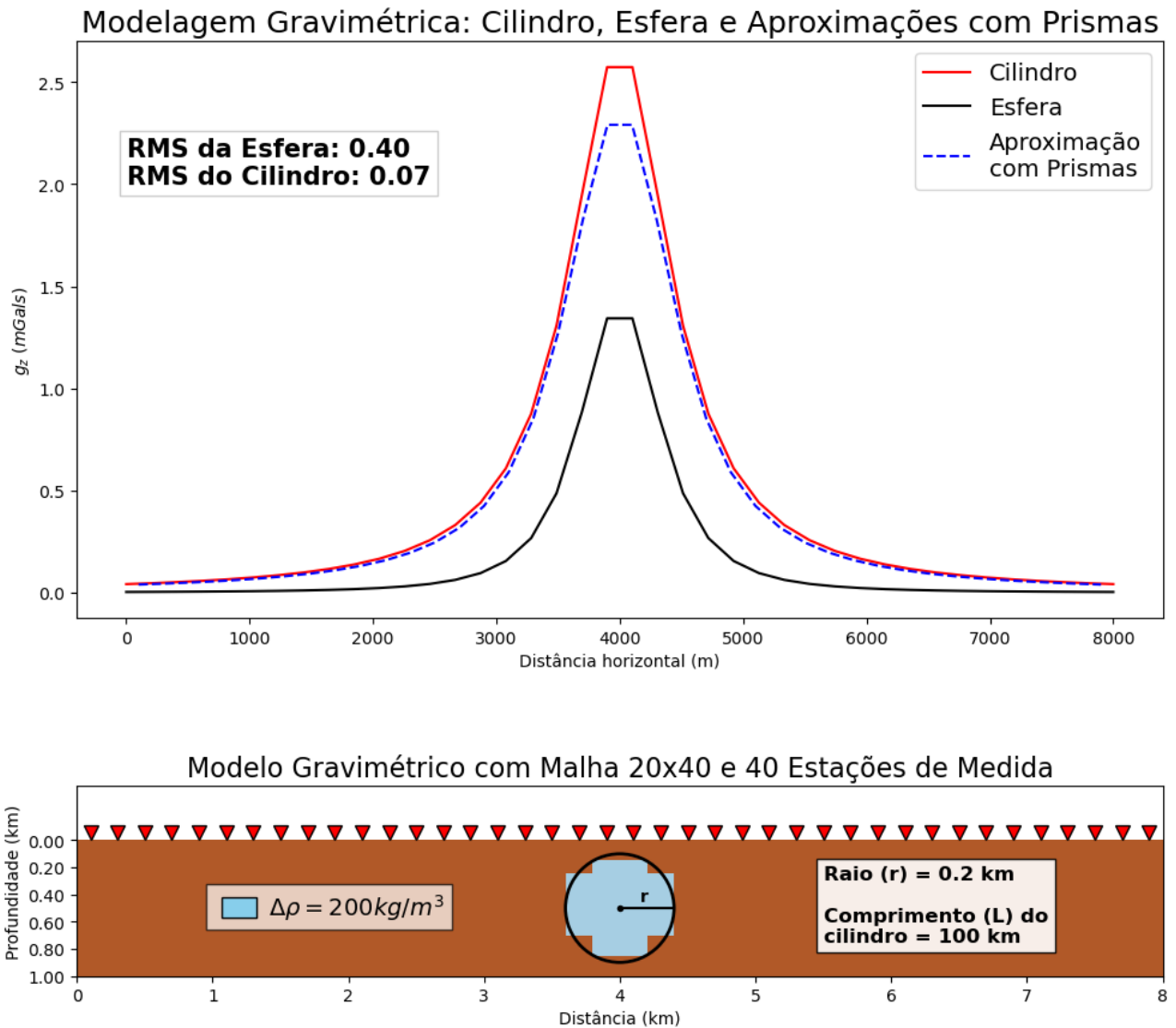


Figura B.2: Modelagem gravimétrica de um cilindro, de uma esfera e a aproximação dessas estruturas utilizando prismas. A visualização de ambas as estruturas é a mesma, no entanto o cilindro possui uma terceira dimensão perpendicular a página.

obtido foi de 40%, enquanto para a modelagem do cilindro horizontal o erro  $rms$  foi de 7%. Esses resultados indicam que, apesar do refinamento da malha, a modelagem da esfera por prismas não oferece uma boa aproximação. Em contraste, a modelagem cilíndrica apresentou uma aproximação mais precisa devido ao fato da estrutura cilíndrica ser praticamente infinita

na terceira dimensão, o que justifica o uso de um semi-comprimento muito maior que o raio. Em última análise, a aproximação entre as curvas do cilindro e da modelagem prismática e o seu baixo erro associado ao seu ajuste fundamenta que a modelagem prismática desta pesquisa é adequada para a representação de estruturas de subsuperfície.

# Apêndice **C**

## Parâmetros de Archie dos Modelos Iniciais do Método Metropolis

A tabela C.1 fornece todos os valores de densidade e resistividade utilizados nos modelos iniciais. Para que as densidades sejam utilizadas no método Metropolis, devem ser feitas a subtração entre seus valores e o  $\rho_{\text{médio}}$ .

Parâmetros de Archie para os modelos iniciais				
Modelo	Camada	Parâmetros	Valor	Porosidade $\phi$
1	1	$\rho_1$	$2757 \text{ kg/m}^3$	37%
		$\sigma_1$	$80 \Omega \cdot m$	
		$h_1$	$120 \text{ m}$	
	2	$\rho_2$	$2903 \text{ kg/m}^3$	55%
		$\sigma_2$	$36 \Omega \cdot m$	
		$h_2$	$200 \text{ m}$	
3	$\rho_3$	$2982 \text{ kg/m}^3$	7%	
	$\sigma_3$	$200 \Omega \cdot m$		
2	1	$\rho_1$	$2636 \text{ kg/m}^3$	37%
		$\sigma_1$	$100 \Omega \cdot m$	
		$h_1$	$150 \text{ m}$	
	2	$\rho_2$	$2843 \text{ kg/m}^3$	50%
		$\sigma_2$	$45 \Omega \cdot m$	
		$h_2$	$250 \text{ m}$	
3	$\rho_3$	$2943 \text{ kg/m}^3$	5%	
	$\sigma_3$	$250 \Omega \cdot m$		
3	1	$\rho_1$	$2545 \text{ kg/m}^3$	37%
		$\sigma_1$	$120 \Omega \cdot m$	
		$h_1$	$180 \text{ m}$	
	2	$\rho_2$	$2716 \text{ kg/m}^3$	50%
		$\sigma_2$	$54 \Omega \cdot m$	
		$h_2$	$300 \text{ m}$	
3	$\rho_3$	$2969 \text{ kg/m}^3$	1%	
	$\sigma_3$	$300 \Omega \cdot m$		
4	1	$\rho_1$	$2472 \text{ kg/m}^3$	37%
		$\sigma_1$	$140 \Omega \cdot m$	
		$h_1$	$210 \text{ m}$	
	2	$\rho_2$	$2615 \text{ kg/m}^3$	50%
		$\sigma_2$	$63 \Omega \cdot m$	
		$h_2$	$350 \text{ m}$	
3	$\rho_3$	$2919 \text{ kg/m}^3$	1%	
	$\sigma_3$	$350 \Omega \cdot m$		

Tabela C.1: Parâmetros de Archie para os modelos iniciais

# Apêndice **D**

## Estudo dos Coeficientes da Função Objetivo do Método Metropolis

Primeiramente, foi analisada a contribuição dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  para a função objetivo tanto individualmente quanto de forma conjunta, conforme mostrado na Tabela D.1. Nesta tabela, os valores dos coeficientes são organizados em três seções: a primeira exibe os resultados da função objetivo considerando apenas o coeficiente  $\alpha$ , associado à parte elétrica; a segunda apresenta os resultados considerando apenas o coeficiente  $\beta$ , associado à parte gravimétrica; e a terceira seção mostra a função objetivo combinada com ambos os coeficientes. O erro da FO calculado com base nos modelos iniciais apresentados na seção 3.4 em comparação com os dados observados sem ruído.

Coeficientes $\alpha$ e $\beta$					
$\alpha$	$\beta$	Modelos	Erro FO Elétrico	Erro FO Gravimétrico	Erro FO
1	1	1	0,279	4,483	4,762
		2	0,201	2,862	3,133
		3	0,134	1,719	1,853
		4	0,079	0,800	0,879

Tabela D.1: Valores da FO considerando apenas os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ .

Em uma inversão conjunta, espera-se que cada método contribua de maneira equitativa na função objetivo, equilibrando assim o impacto dos diferentes conjuntos de dados. No entanto, durante experimentos, observou-se que a simples atribuição de coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  (como  $\alpha = 1606$  e  $\beta = 100$  para o modelo 1) que permitissem uma contribuição equivalente para a FO, favorecia excessivamente a inversão elétrica, resultando em um ajuste

pouco coerente na parte gravimétrica. Esse desequilíbrio levou a resultados gravimétricos inconsistentes e muito distantes dos modelos iniciais.

Observou-se, então, que o ajuste da gravimetria melhorava quando o coeficiente  $\alpha$  era maior que  $\beta$ , mas apenas até certo limite. Essa necessidade de ajuste foi justificada pela quantidade desigual de parâmetros envolvidos: o modelo gravimétrico requer 36 parâmetros, enquanto o modelo elétrico utiliza apenas 5. Considerando essa diferença, propôs-se uma nova metodologia que define os coeficientes com base na proporção de contribuição de cada método para a FO. Assim,  $\alpha$  deve representar aproximadamente  $5/41 \approx 12\%$  da FO, enquanto  $\beta$  deve representar cerca de  $36/41 \approx 88\%$ .

Adicionalmente, foi estabelecido que a FO deveria estar na ordem de três dígitos para favorecer uma escala que equilibre a contribuição de cada método. Para isso, todos os valores da FO conjunta ( $FO_{\alpha,\beta}$ ) foram multiplicados por 1000. Com esses ajustes, as seguintes equações foram formuladas para definir os coeficientes:

$$\alpha_{\text{Mod}_i} = \frac{0,12 \cdot (FO_{\alpha,\beta,i} \cdot 1000)}{FO_{\alpha,i}} \quad (\text{D.1})$$

$$\beta_{\text{Mod}_i} = \frac{0,88 \cdot (FO_{\alpha,\beta,i} \cdot 1000)}{FO_{\beta,i}} \quad (\text{D.2})$$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_{\text{Mod}_i}}{4} \quad (\text{D.3})$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^4 \beta_{\text{Mod}_i}}{4} \quad (\text{D.4})$$

Os valores finais de  $\alpha$  e  $\beta$  são calculados pela média aritmética dos coeficientes proporcionais, que são obtidos para cada modelo  $i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$ . Cada coeficiente  $\alpha_{\text{Modelo}_i}$  e  $\beta_{\text{Modelo}_i}$  representa a contribuição de cada modelo individual para a função objetivo. Assim, a média desses coeficientes fornece os valores finais de  $\alpha$  e  $\beta$  para a inversão conjunta, refletindo uma combinação equilibrada das contribuições dos modelos. Os valores finais obtidos foram  $\alpha = 1728,30$  e  $\beta = 937,34$ .

Os demais coeficientes não podem ser avaliados diretamente com os modelos iniciais, pois estes servem como referência, resultando em uma contribuição nula para a função objetivo. Para o coeficiente  $\gamma$ , o valor será sempre nulo nos modelos iniciais, pois eles apresentam camadas horizontais homogêneas, o que elimina qualquer erro associado à suavização. Já para os coeficientes  $\eta$  e  $\mu$ , a norma é calculada entre o modelo corrente e o modelo inicial; como ambos são idênticos no início, esses coeficientes também resultam em valores nulos.

Portanto, o erro associado a esses coeficientes foi avaliado iterativamente durante o processo de inversão, ao invés de ser calculado diretamente com os modelos iniciais na função objetivo. Os modelos 1 e 4 e os dados sem ruído foram utilizados como entradas para a

inversão, realizando-se um total de 10.000 iterações. Para cada uma dessas iterações, foram calculados os erros da função objetivo correspondentes a cada parâmetro. Ao final do processo, foram extraídos os valores máximos, mínimos e a média aritmética desses erros. Inicialmente, todos os parâmetros foram testados com valor unitário e, posteriormente, com valor 0,5. Com esses valores, observou-se que os coeficientes  $\gamma$ ,  $\eta$  e  $\mu$  apresentam contribuições aproximadamente equivalentes para a função objetivo (FO) quando utilizam-se os mesmos valores numéricos.

A escolha dos valores dos coeficientes  $\gamma$ ,  $\eta$  e  $\mu$  baseou-se nos valores máximos, mínimos, nas médias das contribuições dos termos associados a cada coeficiente na função objetivo (FO), além de experimentos de inversão. Testes preliminares indicaram que, para coeficientes iguais a 1 e 0,5, o modelo mais próximo não convergia, sugerindo que os termos de ajuste (Tikhonov e suavidade) estavam promovendo um superajuste da FO. Com coeficientes de 0,4 e 0,3, o algoritmo realizava apenas algumas iterações, gerando modelos excessivamente similares aos modelos iniciais e indicando baixa variabilidade na geração de modelos.

Concluiu-se assim que o valor de 0,2 era o mais adequado para os coeficientes  $\eta$  e  $\mu$ , permitindo uma contribuição equilibrada dos modelos iniciais sem induzir a falta de convergência. Além disso, considerou-se fundamental que as influências dos modelos elétrico e gravimétrico iniciais na FO fossem proporcionais, garantindo que cada modelo contribuísse de forma equitativa para a solução final. Por fim, para solucionar o problema da suavidade entre prismas adjacentes, o coeficiente  $\gamma$  foi ajustado para 0,3, melhorando a continuidade entre prismas sem comprometer a variabilidade dos modelos.

Coeficiente $\gamma$				
Modelo	$\gamma$	Máximo FO	Mínimo FO	Média FO
1	0,1	275,300	0	57,875
	0,2	628,400		115,585
	0,3	852,300		173,583
	0,4	1024,0		229,949
	0,5	1388,0		288,166
	1	2608		582,2751
4	0,1	257,0	0	58,125
	0,2	500,400		116,391
	0,3	926,700		174,102
	0,4	1017,200		235,192
	0,5	1286,500		287,372
	1	2630		570,224

Tabela D.2: Valores da FO considerando apenas o termo com o coeficiente  $\gamma$ .

Coeficiente $\mu$				
Modelo	$\mu$	Máximo FO	Mínimo FO	Média FO
1	0, 1	234, 236	18, 404	133, 815
	0, 2	461, 999	38, 522	266, 474
	0, 3	714, 466	66, 122	400, 138
	0, 4	958, 127	63, 160	533, 572
	0, 5	1180, 964	102, 128	666, 917
	1	2320, 453	274, 104	1331, 916
4	0, 1	217,840	16, 744	118, 323
	0, 2	442, 947	20, 366	235, 353
	0, 3	648, 208	46, 261	353, 809
	0, 4	856, 247	75, 033	472, 997
	0, 5	1054, 518	62, 242	588, 118
	1	2149, 951	139, 135	1181, 234

Tabela D.3: Valores da FO considerando apenas o termo com o coeficiente  $\mu$ .

Coeficiente $\eta$				
Modelo	$\eta$	Máximo FO	Mínimo FO	Média FO
1	0, 1	273, 831	130, 578	210, 844
	0, 2	578, 405	264, 832	421, 074
	0, 3	855, 266	389, 965	632, 199
	0, 4	1103, 269	518, 903	842, 059
	0, 5	1360, 173	663, 993	1052, 142
	1	2915, 203	1349, 437	2107, 142
4	0, 1	161, 056	55, 871	100, 525
	0, 2	342, 500	114, 798	200, 888
	0, 3	477, 666	154, 332	301, 414
	0, 4	671, 377	212, 322	401, 480
	0, 5	816, 935	282, 738	501, 009
	1	1680, 482	575, 742	1001, 382

Tabela D.4: Valores da FO considerando apenas o termo com o coeficiente  $\eta$ .

# Apêndice **E**

## Critérios de Parada e Análise de Convergência para o Método Metropolis

O método Metrópolis apresenta um comportamento estocástico, resultando em variações aleatórias no erro da função objetivo (FO), sem uma tendência uniforme de convergência. Para avaliar seu comportamento, foram realizados três testes de inversão, representados na Fig. E.1, com durações de 2, 4 e 5 horas. O modelo utilizado como referência foi o Modelo 1 mais distante, com erro inicial de 4202,97, e os dados observados eram livres de ruído.

Para todas as durações analisadas, constatou-se que a maior redução da FO ocorreu, predominantemente, nos primeiros 20 minutos de execução.

- Tempo limite de 2 horas: A FO decaiu rapidamente para 620 nos primeiros 5 minutos. Após esse período, ocorreram apenas duas melhorias adicionais: uma para 606,39, pouco após 50 minutos, e outra para 590,26, por volta de 1 hora e 10 minutos. Assim, observa-se que o algoritmo apresentou poucas melhorias significativas entre os 5 minutos e 1 hora e 10 minutos.
- Tempo limite de 4 horas: A FO atingiu 640 nos primeiros 18 minutos. Posteriormente, ocorreram quatro melhorias: uma para 630 em 40 minutos, outra para 623,15 cerca de 10 minutos após. As duas últimas melhorias foram registradas em 1 hora e 40 minutos (585,25) e após 2 horas (585,17).
- Tempo limite de 6 horas: A FO reduziu para 650 antes dos primeiros 20 minutos. Após esse período, foram observadas apenas duas melhorias: a primeira em 40 minutos, com um valor de 589,88, e a segunda após 4 horas, alcançando 581,13.

Após atingir um erro na faixa de 600, observa-se que não há uma melhoria expressiva na redução da função objetivo (FO). Com base nessa análise, determinou-se que um prazo máximo de 1 hora seria adequado para a realização das inversões. Adicionalmente, ressaltase que, devido à natureza estocástica do método, pode ocorrer um período considerável sem reduções significativas na FO. No entanto, para o prazo estabelecido, optou-se por não implementar critérios adicionais de parada, como a estabilização da FO, pois isso não comprometeria a qualidade dos resultados obtidos.

A geração dos dados e a implementação das metodologias descritas neste trabalho foram realizados em um notebook MacBook equipado com o processador Apple M2 e 16 GB de memória RAM. A arquitetura do processador M2, com seu alto número de núcleos e otimização para tarefas de cálculo intensivo, foi particularmente importante para lidar com a grande quantidade de operações envolvidas no trabalho, enquanto os 16 GB de RAM garantiram fluidez no processamento dos dados, mesmo para modelos de maior complexidade.

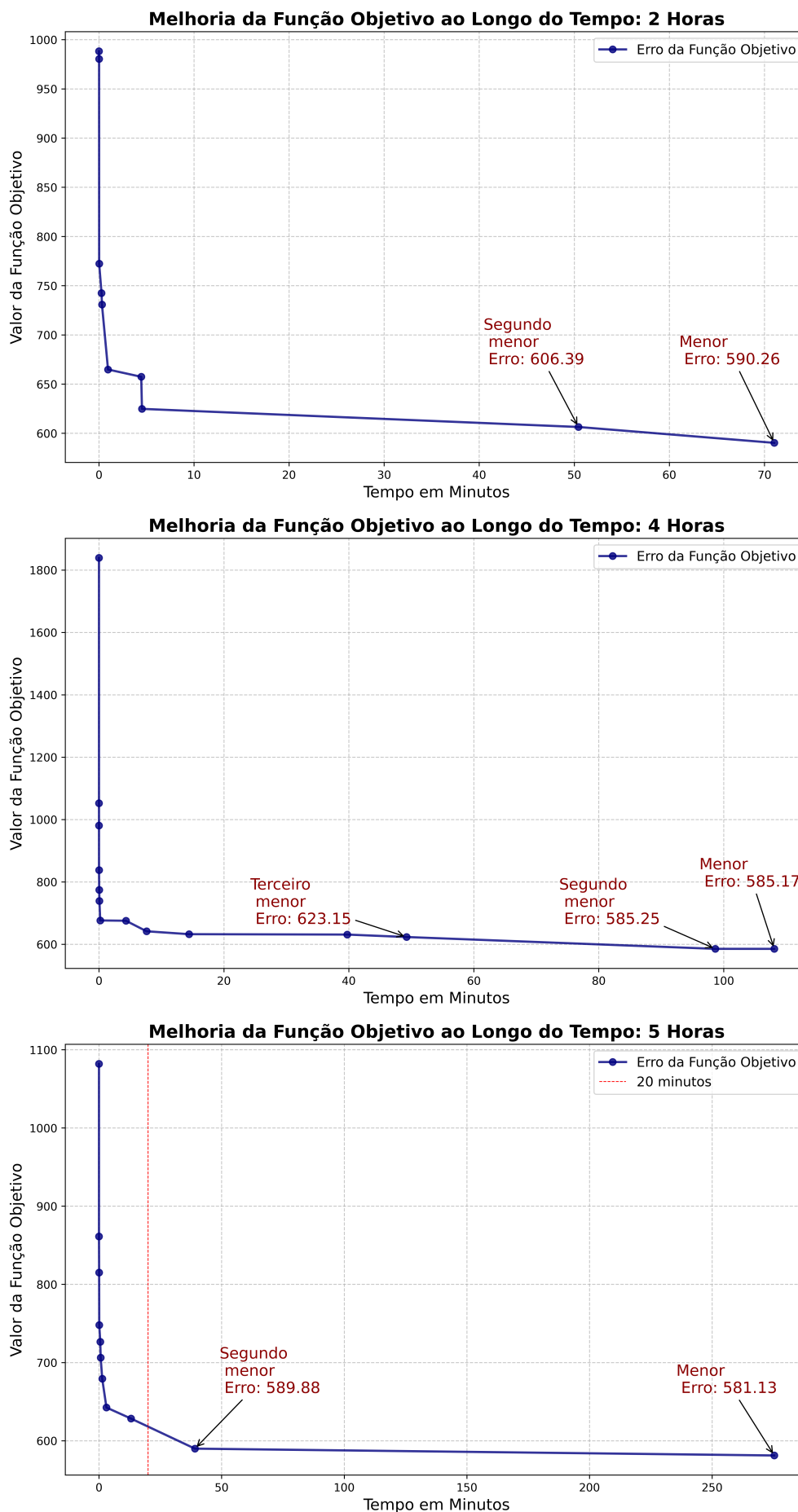


Figura E.1: As Figuras acima apresentam o comportamento da função objetivo ao longo de execuções de 2, 4 e 5 horas, onde o eixo X representa o tempo decorrido em minutos e o eixo Y o valor da função objetivo.

# Apêndice **F**

## Estudo do Coeficiente $\tau$ e Estudo da Convergência do Método *Steepest Descent*

Neste estudo, foram utilizados dois modelos iniciais, Modelos 1 e 4, apresentados na seção 3.4, os quais foram ajustados aos dados observados sem a presença de ruído. Todos os testes foram realizados com 10.000 iterações e são apresentados na Tabela F.1. O valor inicial da função objetivo para o Modelo 1 é  $FO = 4685,529$ , enquanto para o Modelo 4, o valor é  $FO = 886,652$ . Os valores de  $\tau$  escolhidos seguiram potências de 2, em razão do critério adotado, no qual  $\tau$  é reduzido pela metade caso não ocorra melhora significativa nos resultados da inversão.

Coeficiente $\tau$				
Modelo	$\tau$	FO Final	Qualidade do modelo	Observações quanto a convergência
1	2	4017,92	Ruim	muito lenta
	32	1477	ruim	moderada
	64	557,160	razoável	moderada
	128	153,936	razoável	rápida
	256	98,148	bom	rápida
	512	85,227	bom	rápida
	1024	45,699	bom	rápida
4	2	742,980	Ruim	muito lenta
	32	291,760	ruim	moderada
	64	127,745	razoável	moderada
	128	55,227	bom	rápida
	256	45,193	bom	rápida
	512	45,620	bom	rápida
	1024	45,620	bom	rápida

Tabela F.1: Avaliação do coeficiente  $\tau$ .

Para o modelo menos próximo, os valores mais baixos de  $\tau$ , como  $\tau = 2$  e  $\tau = 32$ , resultam em uma convergência muito lenta ou moderada, com a função objetivo (FO) permanecendo em valores altos (4017,92 e 1477, respectivamente). Isso indica que o modelo ainda está distante de uma solução ideal, sugerindo que esses valores de  $\tau$  não são eficazes para otimizar o modelo de forma adequada. Por outro lado, para valores intermediários de  $\tau$ , como  $\tau = 64$  e  $\tau = 128$ , observou-se uma melhora significativa na FO (557,16 e 153,936), o que demonstra uma convergência mais eficiente. A qualidade do modelo nesses casos foi classificada como razoável, refletindo um bom equilíbrio entre a velocidade de convergência e a qualidade do ajuste, embora ainda não se tenha atingido o melhor resultado possível. Nos casos em que os valores de  $\tau$  foram mais elevados, como para  $\tau = 256$ ,  $\tau = 512$  e  $\tau = 1024$ , a FO apresentou uma diminuição expressiva (98,148, 85,227 e 45,699), indicando uma convergência mais rápida e uma qualidade de modelo significativamente melhor. Esses valores de  $\tau$  são considerados bem ajustados, levando os resultados mais próximos do modelo ideal, com uma convergência rápida e uma boa qualidade do ajuste.

Para o modelo 4, podemos observar um resultado semelhante ao do modelo 1 em relação aos coeficientes. A convergência para ambos os modelos segue padrões similares, com os valores mais baixos de  $\tau$  resultando em uma convergência mais lenta e a função objetivo mantendo-se em valores elevados. À medida que os valores de  $\tau$  aumentam, a convergência se torna mais eficaz, com uma diminuição significativa na FO, o que leva a uma melhoria na qualidade do modelo. Em ambos os casos, os valores de  $\tau$  mais elevados, como 256, 512 e 1024, apresentam uma boa qualidade do modelo e uma convergência rápida, indicando que esses coeficientes de  $\tau$  estão bem ajustados e produzem resultados próximos ao modelo ideal.

Por fim, com base nos experimentos realizados, optou-se pelo valor de  $\tau = 512$ , pois ele representa um ponto intermediário entre os valores analisados, oferecendo um bom equilíbrio entre a convergência e a qualidade do modelo.

# Apêndice **G**

## Função Objetivo e Derivadas do Método *Steepest Descent*

O Modelo ( $\vec{M}$ ) e o dado ( $\vec{d}$ ) são representados por,

$$\vec{M} = (\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{66}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, h_1, h_2, h_3) \quad (\text{G.1})$$

$$\vec{d} = (g_1, g_2, \dots, g_{10}, \sigma_{a1}, \sigma_{a2}, \sigma_{a3}, \dots, \sigma_{a44}) \quad (\text{G.2})$$

A função objetivo é dada por:

$$S(M) = \frac{\|\vec{g}_{\text{obs}} - \vec{g}_{\text{calc}}\|_2^2}{\|\vec{g}_{\text{obs}}\|_2^2} + \frac{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}} - \vec{\sigma}_{\text{calc}}\|_2^2}{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}}\|_2^2} \quad (\text{G.3})$$

$$\Rightarrow S(M) = \frac{\|g_1 - g_1(M), g_2 - g_2(M), \dots, g_{10} - g_{10}(M)\|_2^2}{\|g_1, g_2, \dots, g_{10}\|_2^2} + \frac{\|\sigma_{a1} - \sigma_{a1}(M), \sigma_{a2} - \sigma_{a2}(M), \dots, \sigma_{a44} - \sigma_{a44}(M)\|_2^2}{\|\sigma_{a1}, \sigma_{a2}, \dots, \sigma_{a44}\|_2^2} \quad (\text{G.4})$$

$$\Rightarrow S(M) = \frac{\sum_{i=1}^{10} (g_i - g_i(M))^2}{\sum_{i=1}^{10} (g_i)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{44} (\sigma_{ai} - \sigma_{ai}(M))^2}{\sum_{i=1}^{44} (\sigma_{ai})^2}. \quad (\text{G.5})$$

$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{14}$	$\rho_{15}$	$\rho_{16}$
$\rho_{21}$	$\rho_{22}$	$\rho_{23}$	$\rho_{24}$	$\rho_{25}$	$\rho_{26}$
$\rho_{31}$	$\rho_{32}$	$\rho_{33}$	$\rho_{34}$	$\rho_{35}$	$\rho_{36}$
$\rho_{41}$	$\rho_{42}$	$\rho_{43}$	$\rho_{44}$	$\rho_{45}$	$\rho_{46}$
$\rho_{51}$	$\rho_{52}$	$\rho_{53}$	$\rho_{54}$	$\rho_{55}$	$\rho_{56}$
$\rho_{61}$	$\rho_{62}$	$\rho_{63}$	$\rho_{64}$	$\rho_{65}$	$\rho_{66}$

Figura G.1: Matriz de densidades.

O gradiente da função objetivo  $S(M)$  é definida por,

$$\vec{\nabla} S(M) = \left( \frac{\partial S}{\partial \rho_{11}}, \frac{\partial S}{\partial \rho_{12}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \rho_{66}}, \frac{\partial S}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial S}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial S}{\partial \sigma_3}, \frac{\partial S}{\partial h_1}, \frac{\partial S}{\partial h_2}, \frac{\partial S}{\partial h_3} \right) \quad (\text{G.6})$$

Da parte gravimétrica,

$$\frac{\partial S}{\partial m_{\text{grav}}} = \frac{2}{\|\vec{g}_{\text{obs}}\|_2^2} \sum (\vec{g}_{\text{obs}} - \vec{g}_{\text{calc}}) \left( -\frac{\partial \vec{g}_{\text{calc}}}{\partial m_{\text{grav}}} \right) \quad (\text{G.7})$$

Então,

$$\frac{\partial S}{\partial \rho_{11}} = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^{10} g_i - g_i(M)}{\sum_{i=1}^{10} (g_i)^2} \left( -\frac{\partial g_i(M)}{\partial \rho_{11}} \right) \quad (\text{G.8})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \rho_{22}} = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^{10} g_i - g_i(M)}{\sum_{i=1}^{10} (g_i)^2} \left( -\frac{\partial g_i(M)}{\partial \rho_{22}} \right) \quad (\text{G.9})$$

⋮

$$\frac{\partial S}{\partial \rho_{66}} = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^{10} g_i - g_1(M)}{\sum_{i=1}^{10} (g_i)^2} \left( -\frac{\partial g_i(M)}{\partial \rho_{66}} \right) \quad (\text{G.10})$$

Para a parte elétrica da mesma forma,

$$\frac{\partial S}{\partial m_{\text{elétrico}}} = \frac{2}{\|\vec{\sigma}_{\text{obs}}\|_2^2} (\vec{\sigma}_{\text{obs}} - \vec{\sigma}_{\text{calc}}) \left( -\frac{\partial \vec{\sigma}_{\text{calc}}}{\partial m_{\text{elétrico}}} \right) \quad (\text{G.11})$$

Então,

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ai}} = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^{10} \sigma_{ai} - \sigma_{ai}(M)}{\sum_{i=1}^{10} (\sigma_{ai})^2} \left( -\frac{\partial \sigma_{ai}(M)}{\partial \sigma_{ai}} \right) \quad (\text{G.12})$$

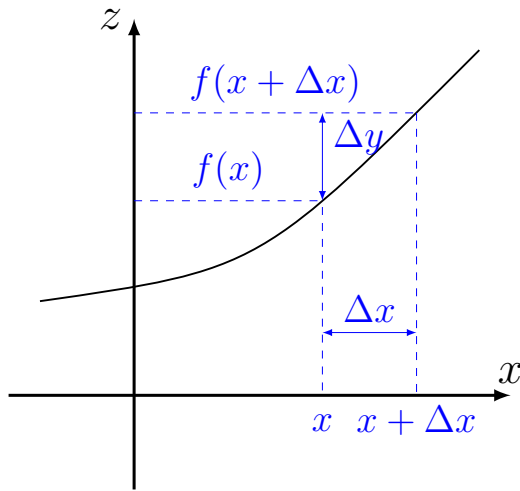


Figura G.2: Definição de derivada.

Por sua equação complexa, a derivada elétrica não possui derivada analítica, assim obtendo seu valor de maneira numérica. Portanto, da definição de derivada,

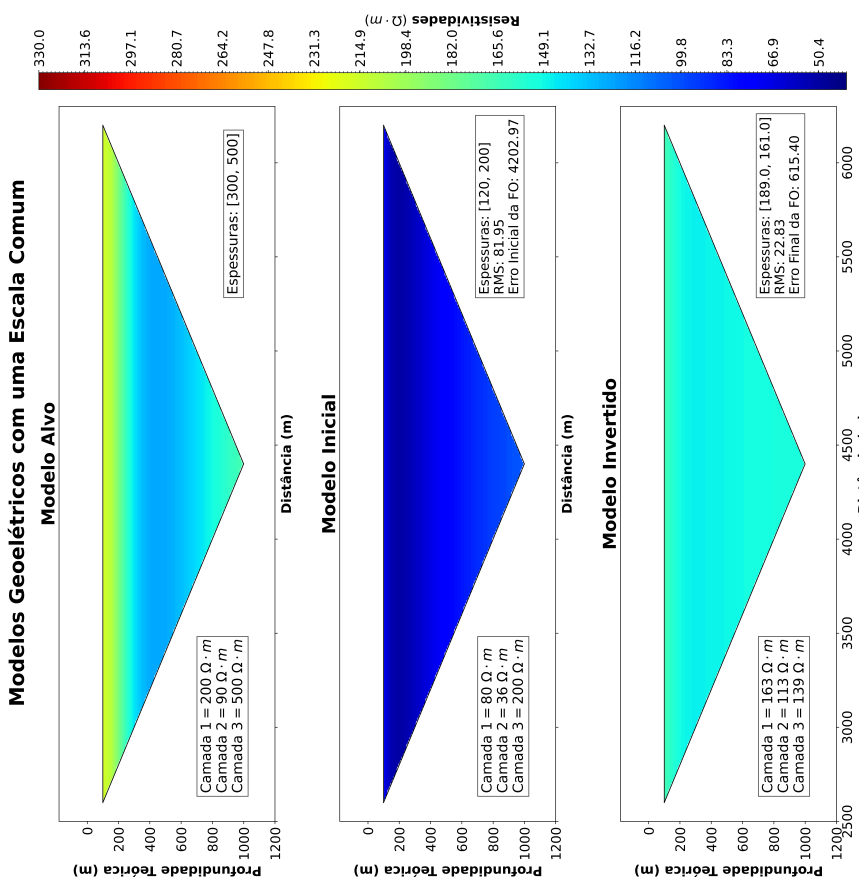
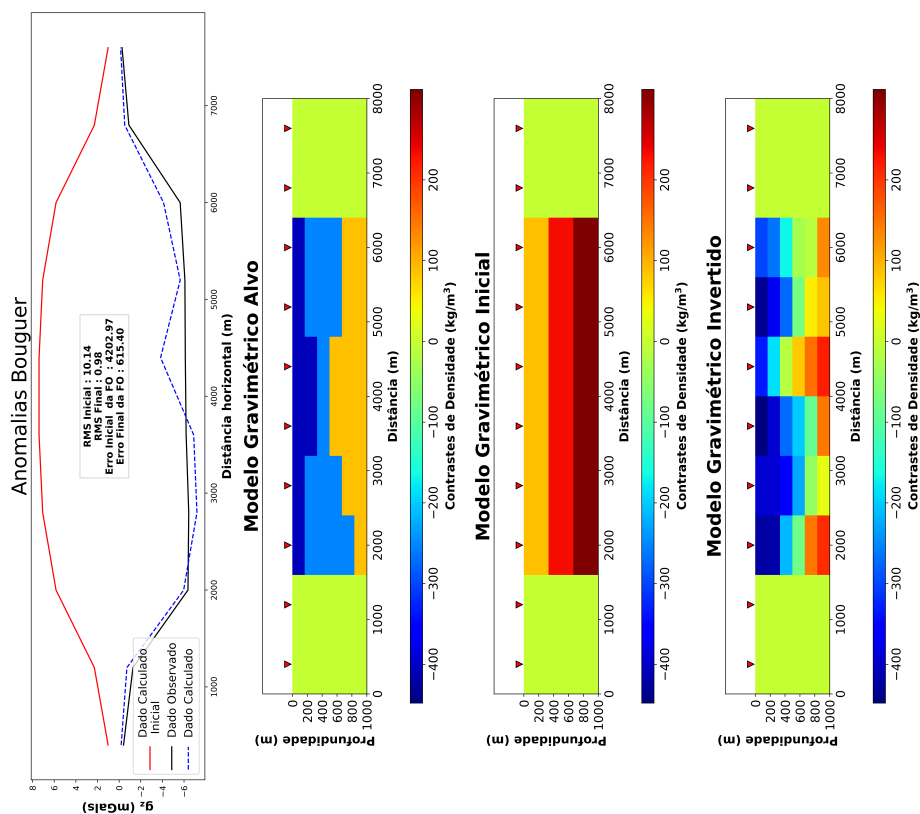
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{G.13})$$

Assim,

$$\frac{\partial \sigma_a(M)}{\partial \sigma_a} = \frac{\overbrace{\sigma_a(\dots, \sigma_{ai} + \Delta \sigma_{ai}, \dots)}^{\text{Dado perturbado}} - \overbrace{\sigma_a(\dots, \sigma_{ai}, \dots)}^{\text{Dado observado}}}{\Delta \sigma_{ai}} \quad (\text{G.14})$$

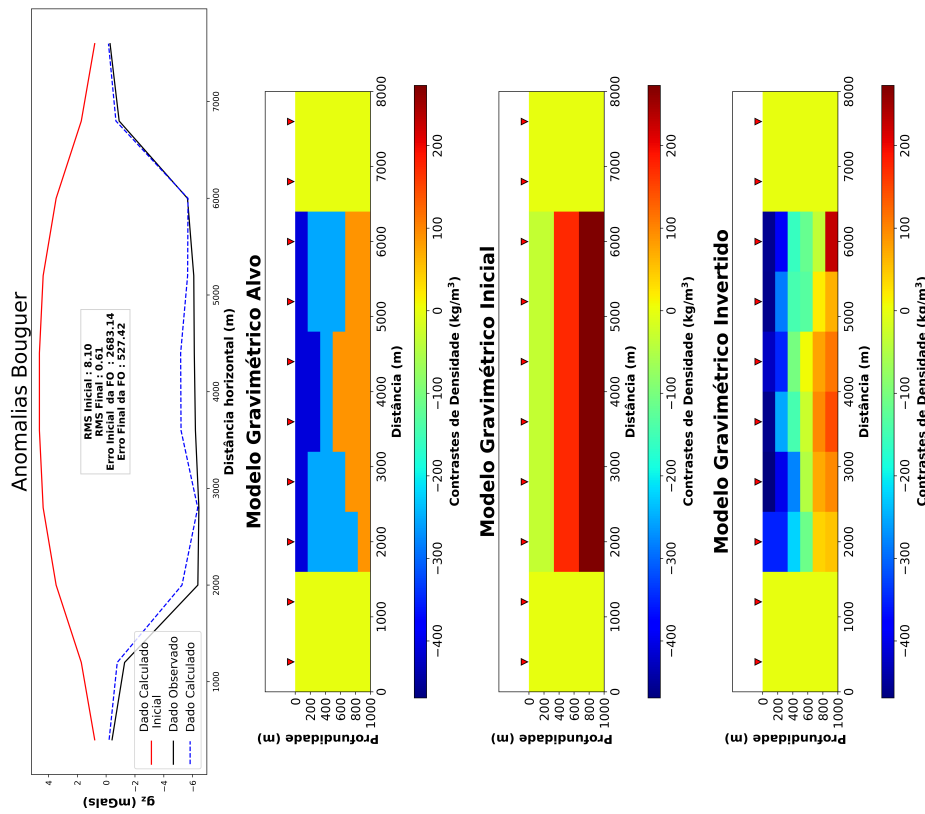
# Apêndice **H**

## Resultados da Inversão Global

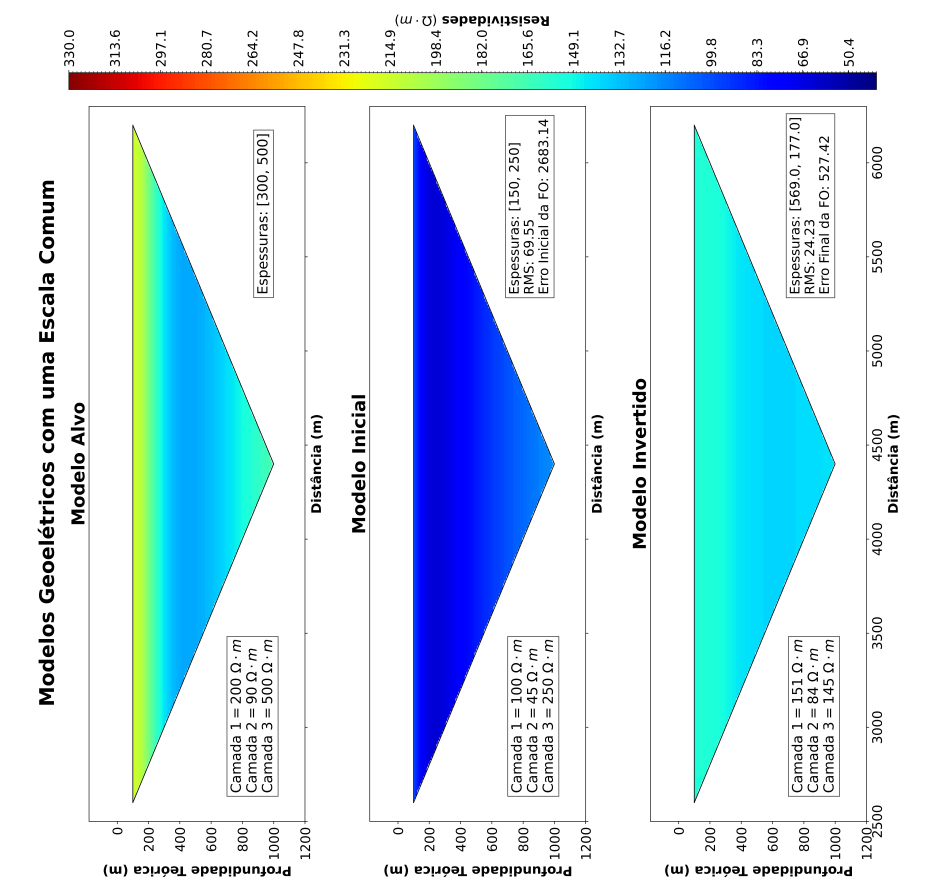


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.  
 (b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.1: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 1, sem ruído.

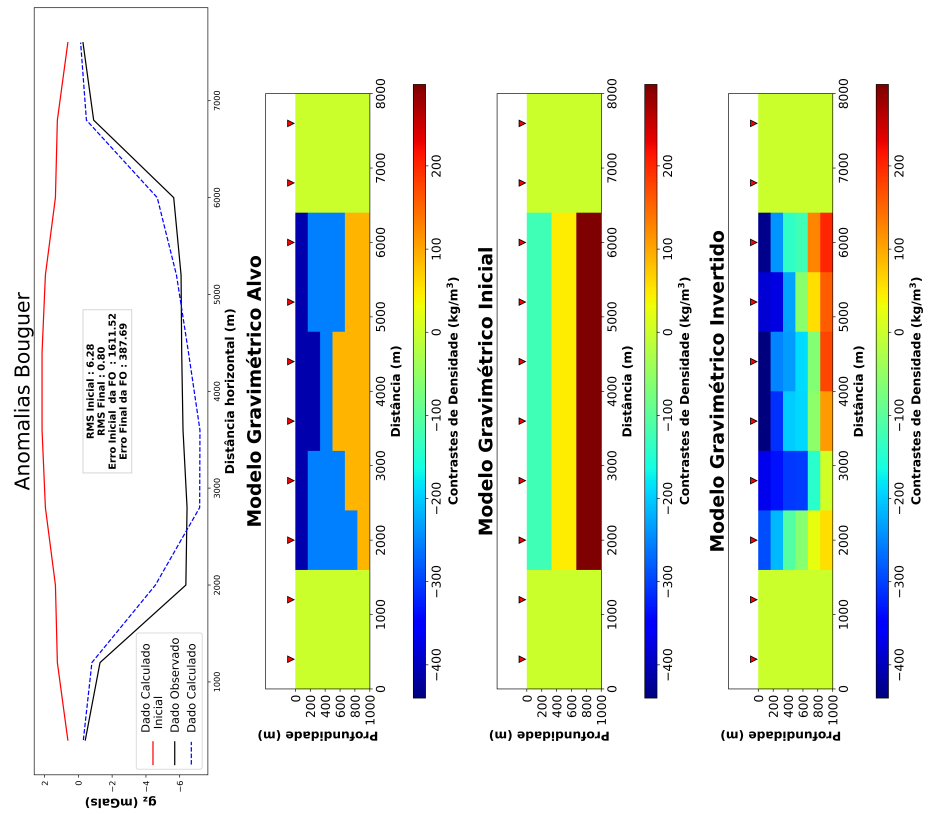


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

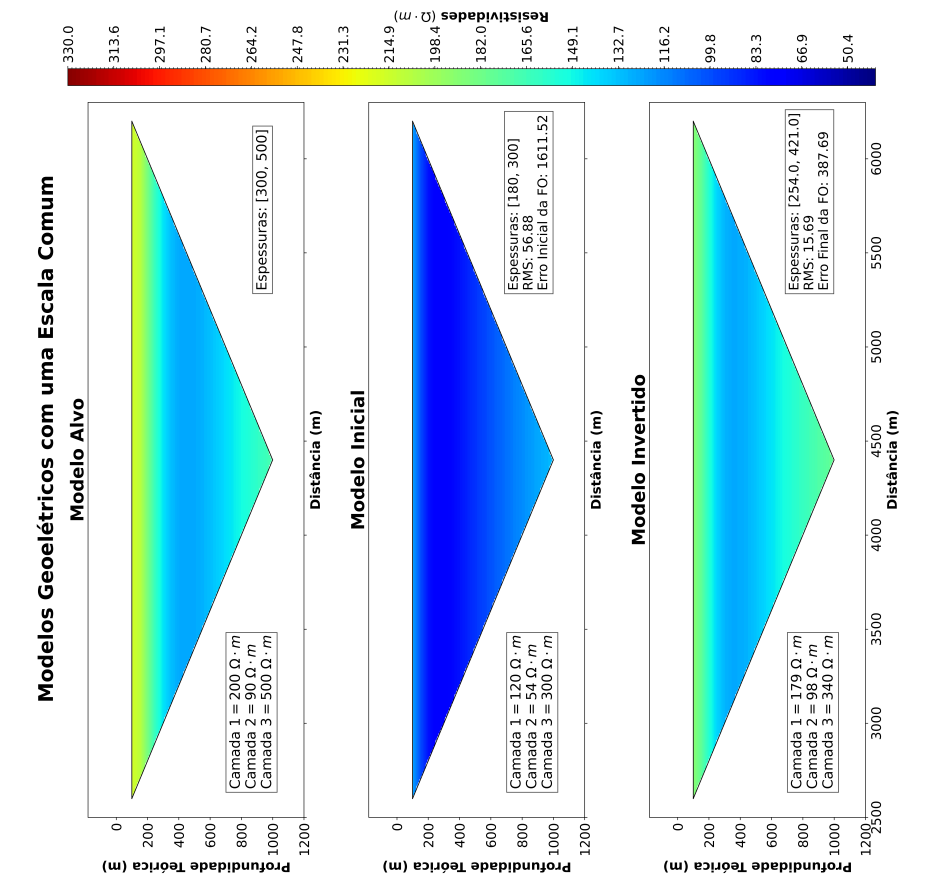


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.2: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, sem ruído.

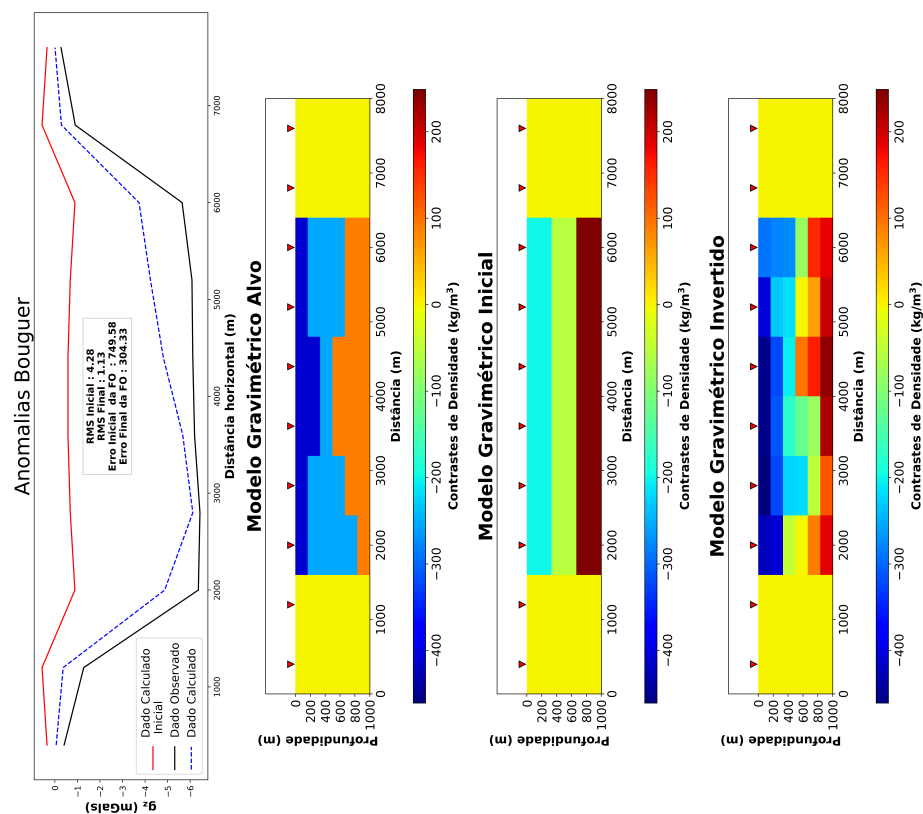


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

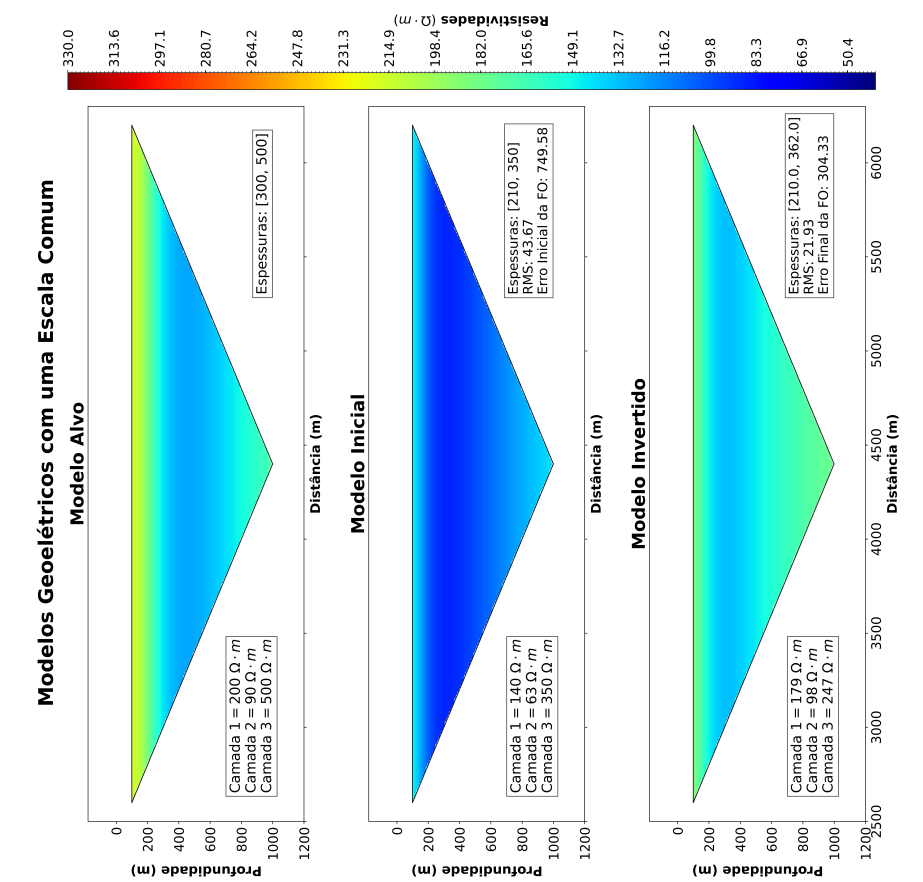


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.3: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3, sem ruído.

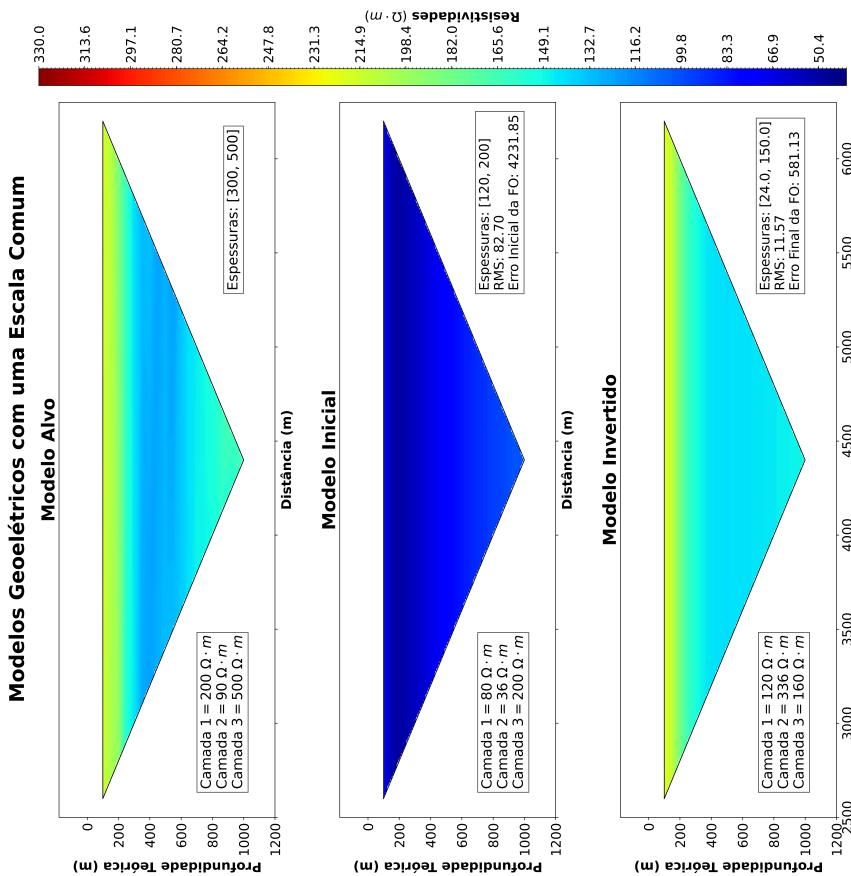
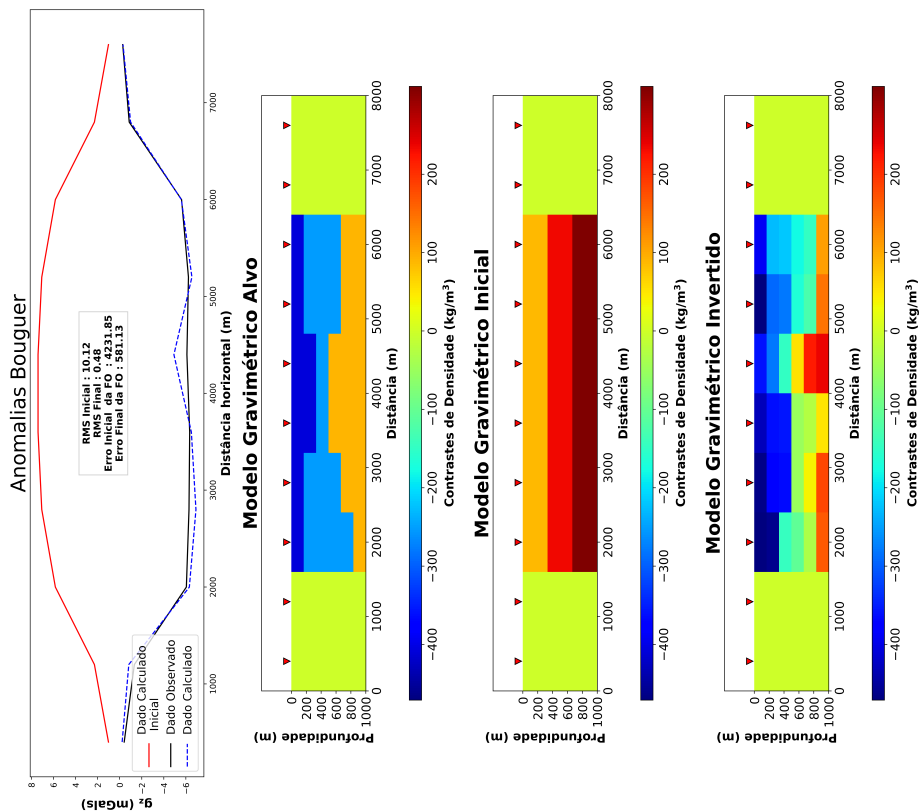


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.



(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

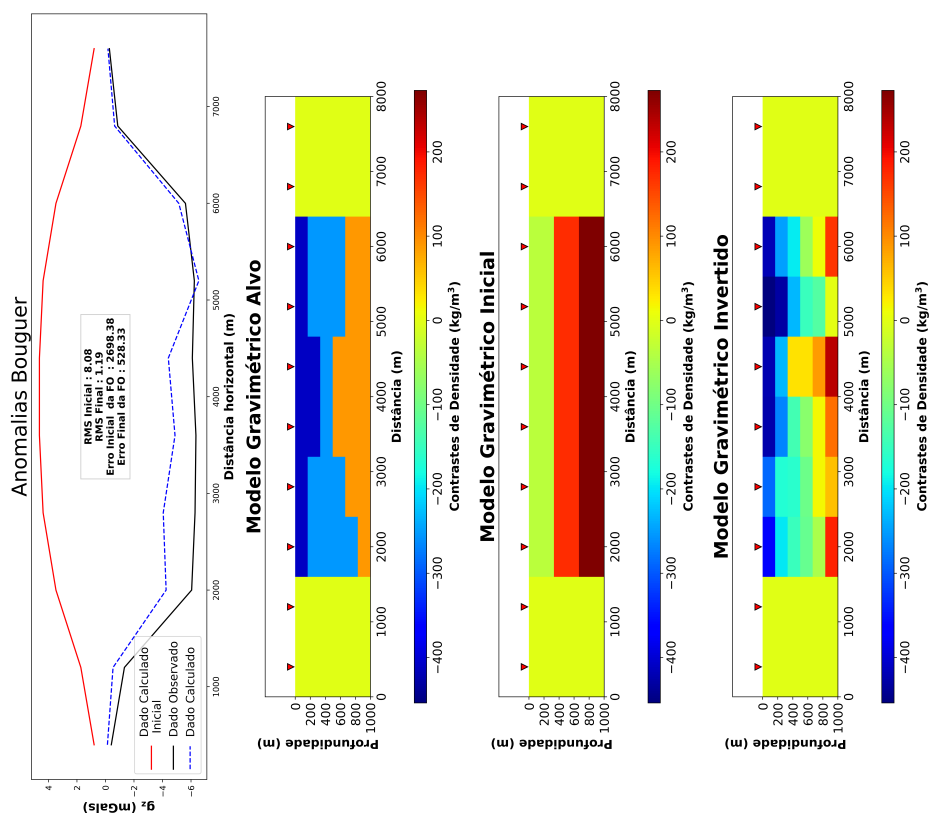
Figura H.4: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, sem ruído.



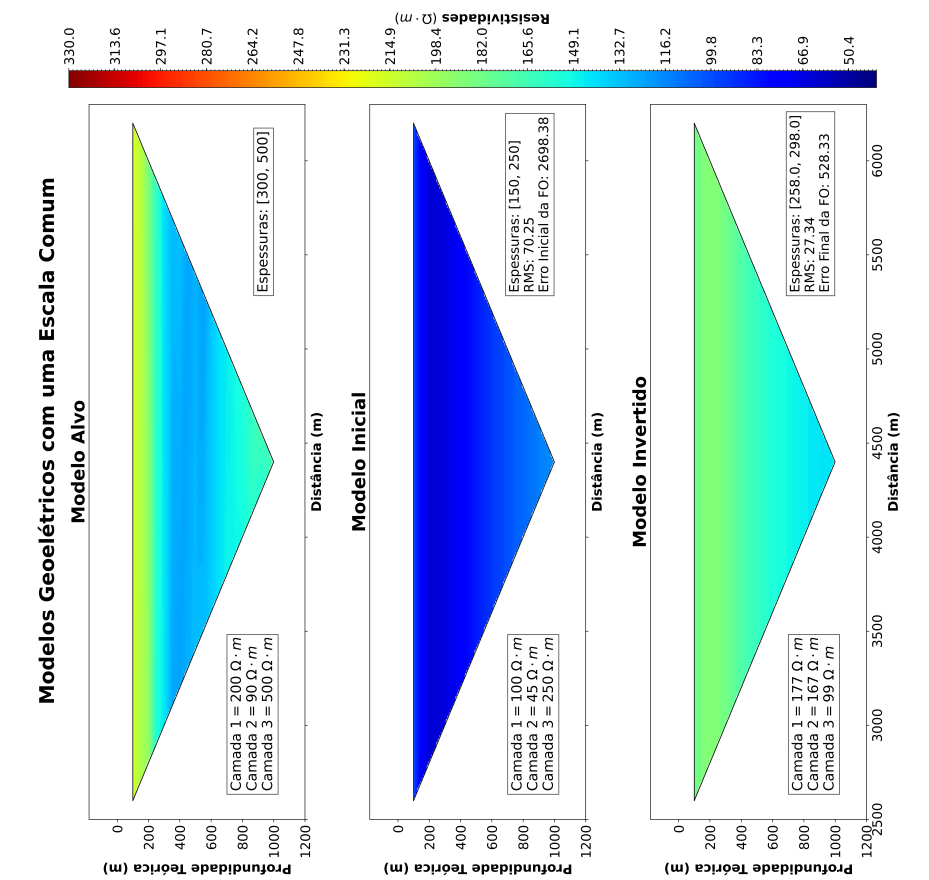
(a) Resultado inversão Metr6polis para os dados el6tricos.

(b) Resultado inversão Metr6polis para os dados gravim6tricos.

Figura H.5: Resultado da inversão Metr6polis para o modelo 1, com ruído de 5%.

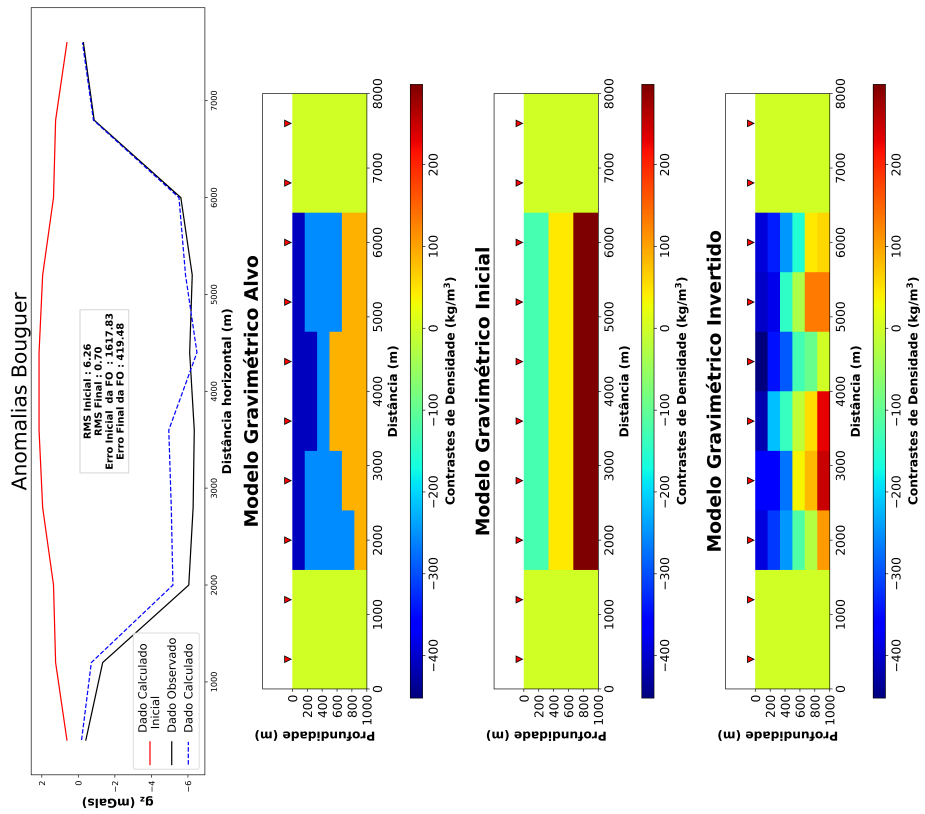


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

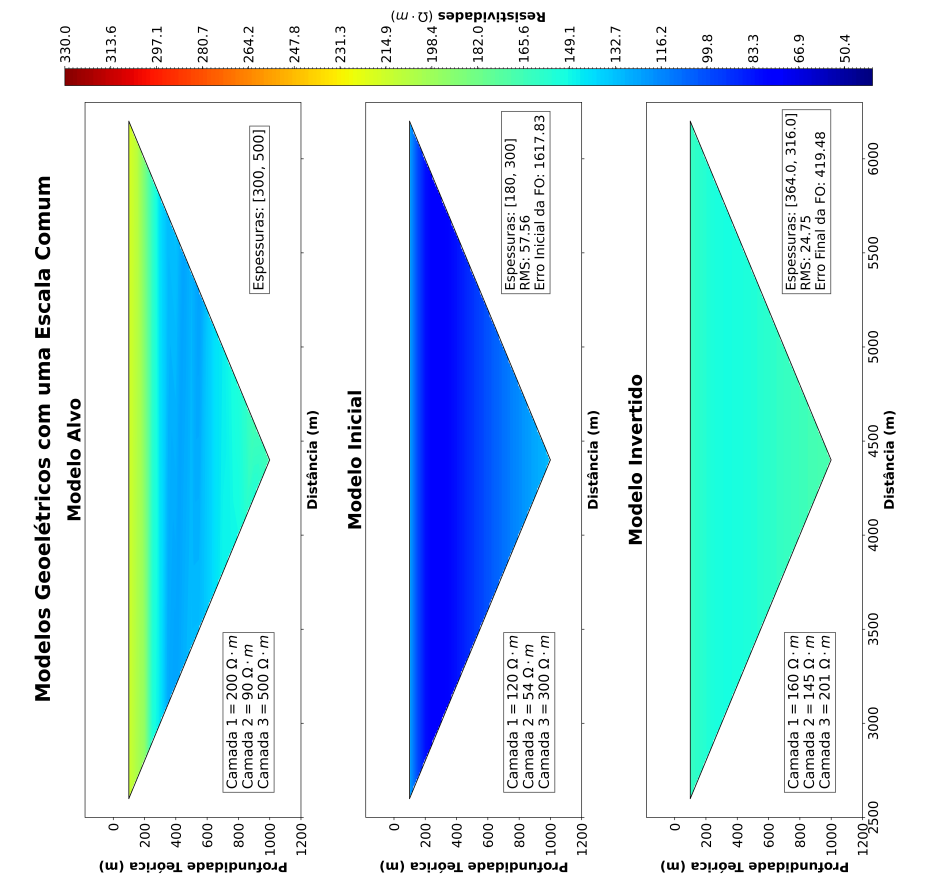


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.6: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, com ruído de 5%.

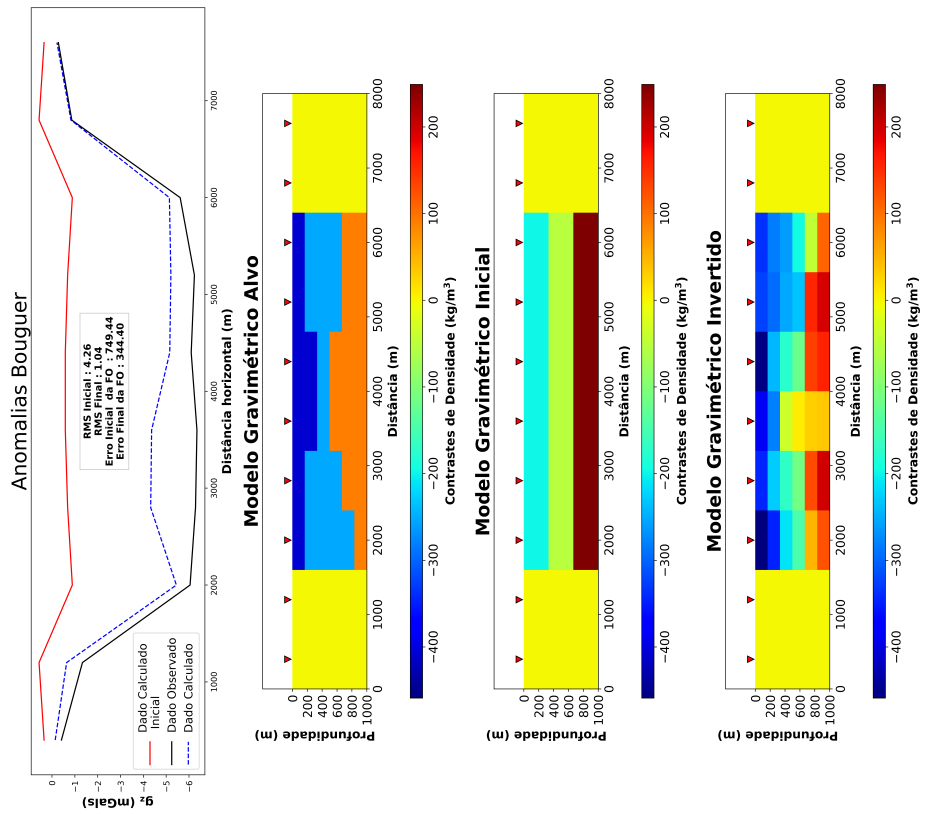


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

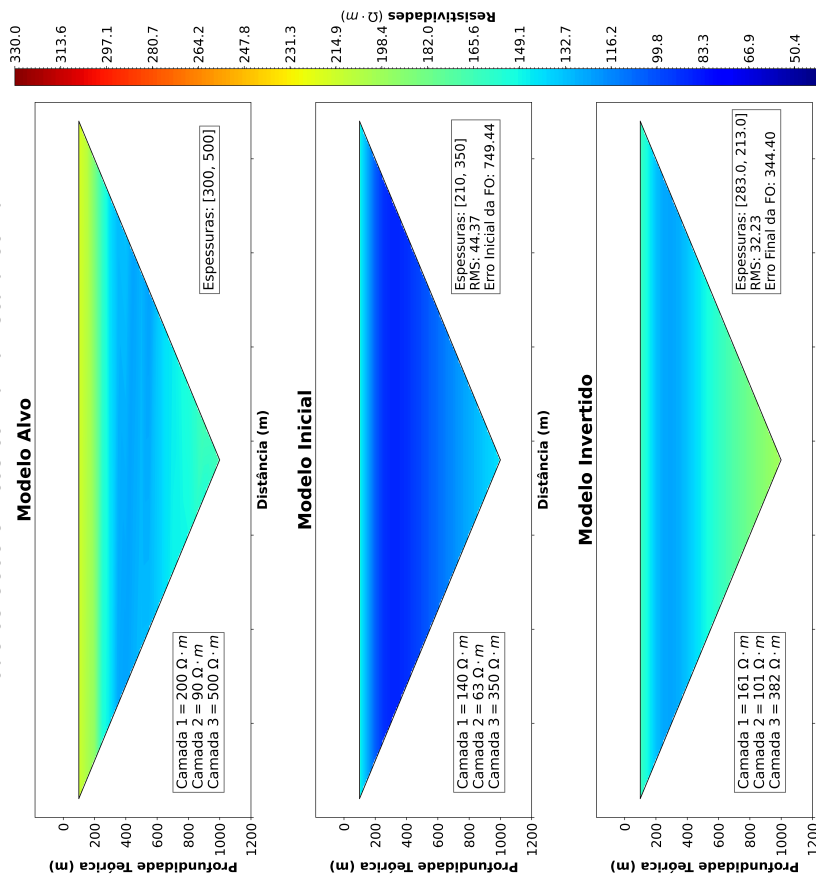


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.7: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 3, com ruído de 5%.

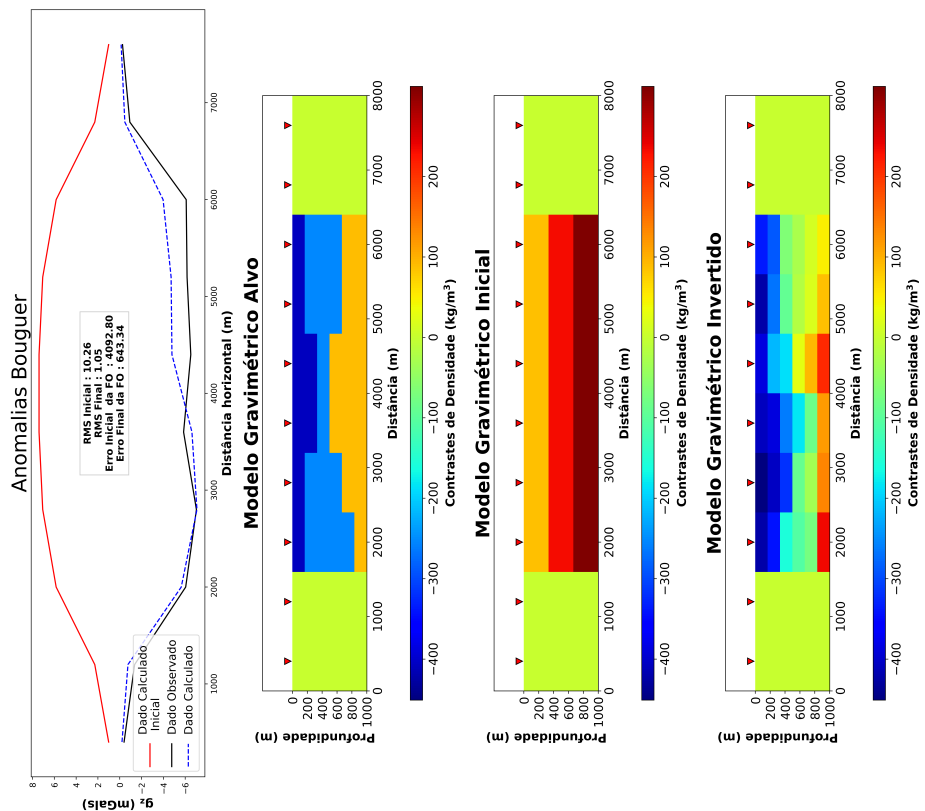


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

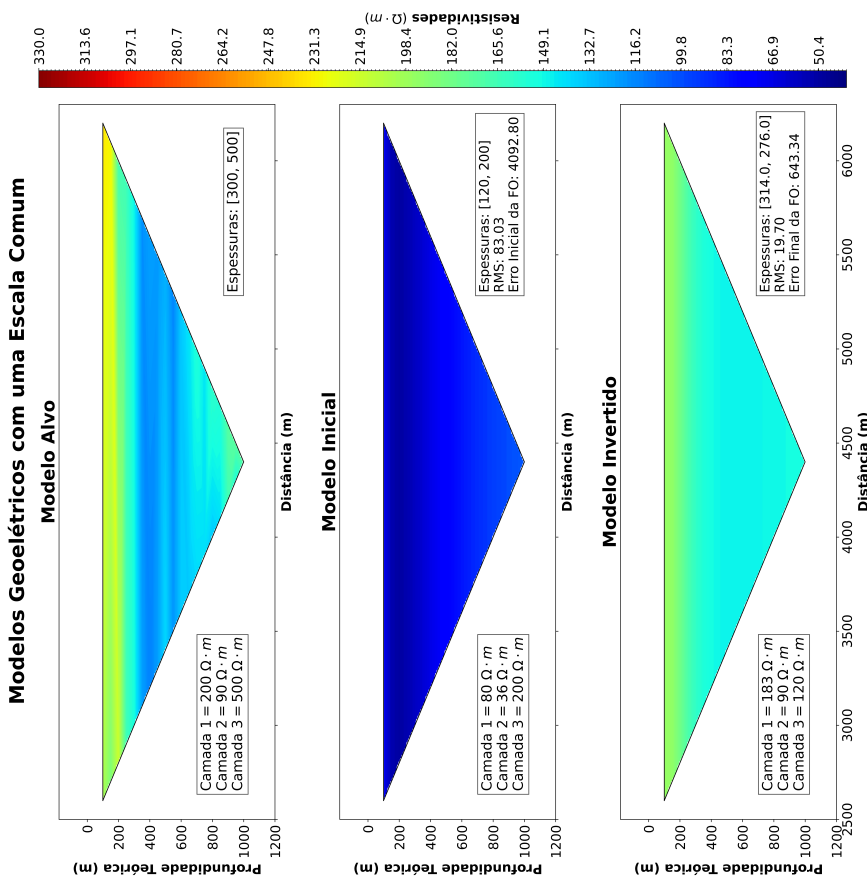


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.8: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, com ruído de 5%.

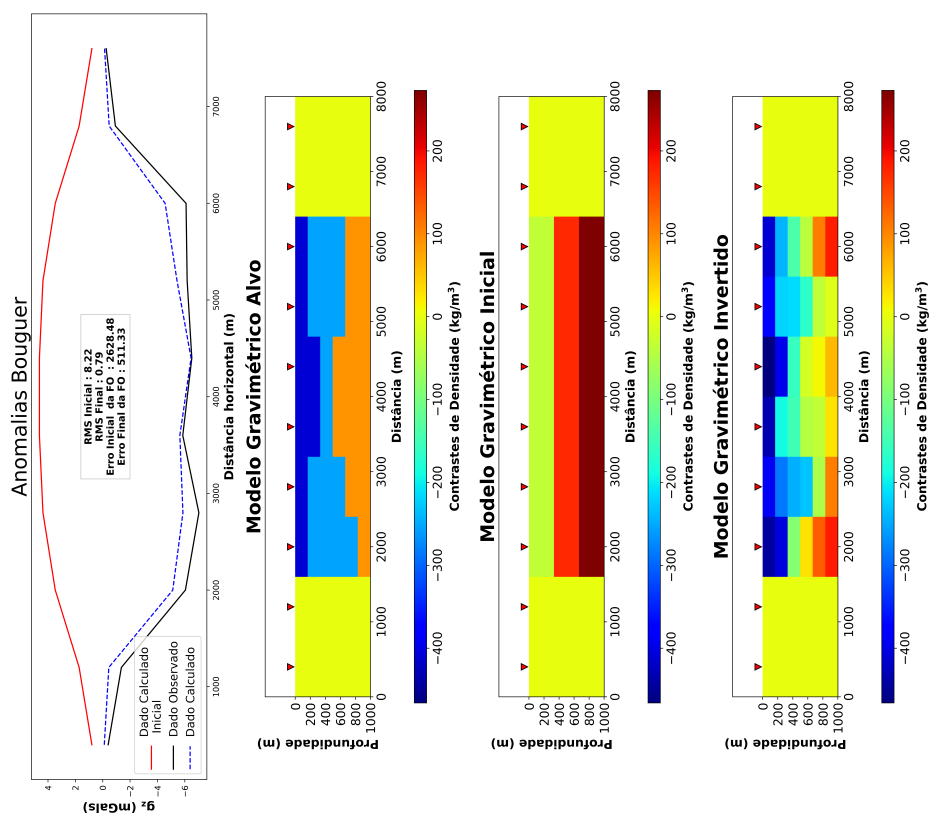


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

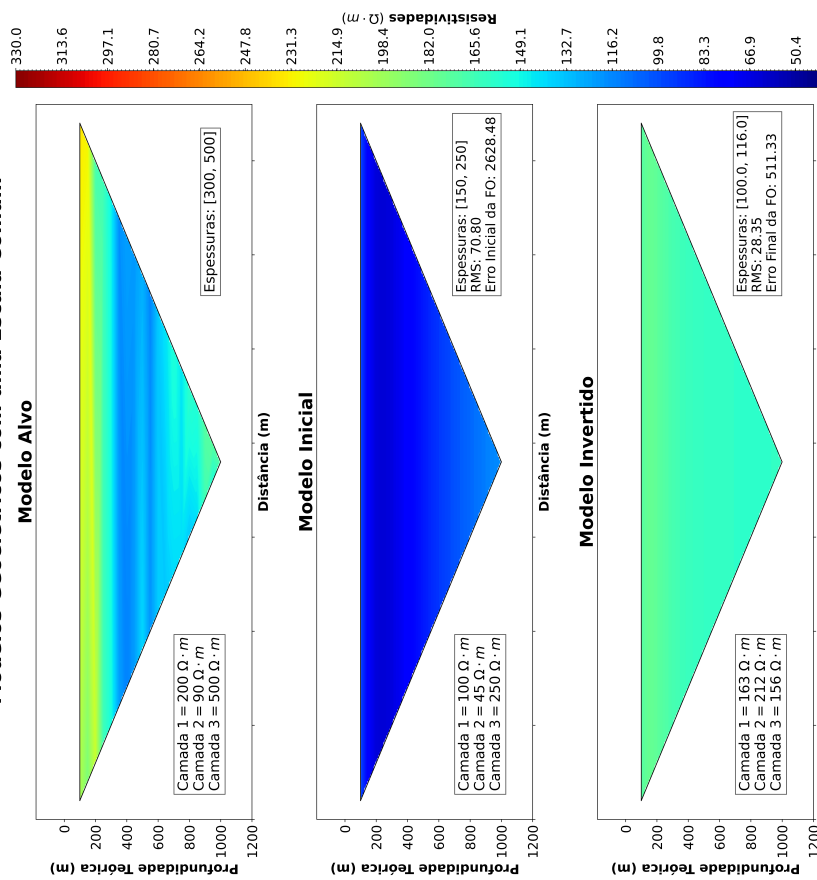


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos, com ruído de 10%.

Figura H.9: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 1, com ruído de 10%.

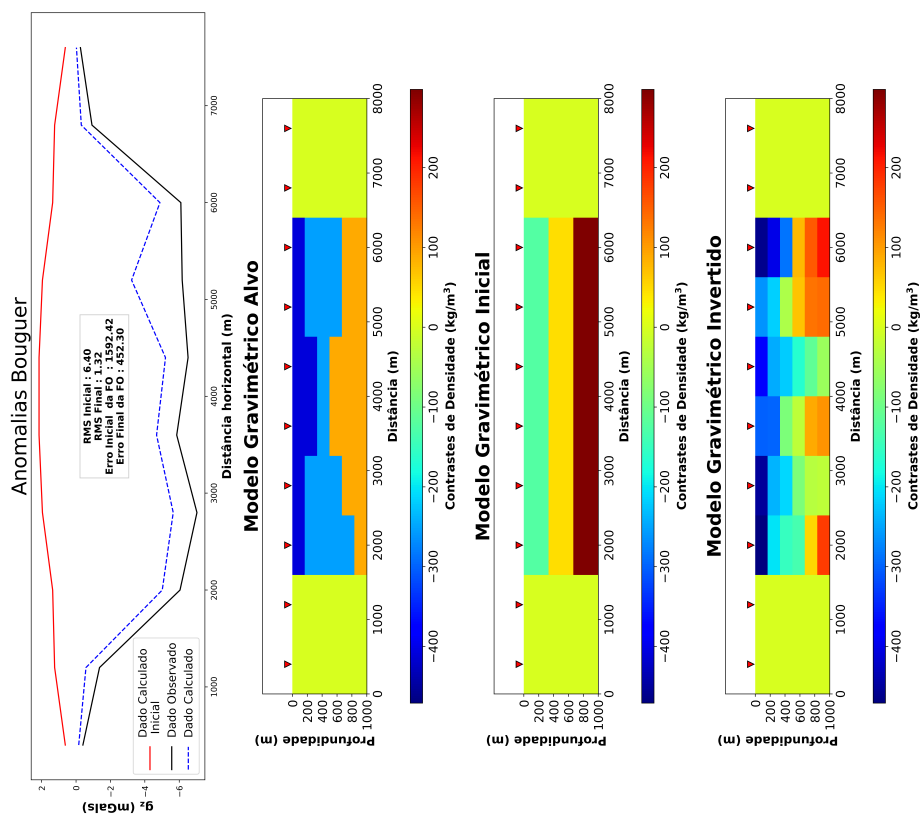


(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

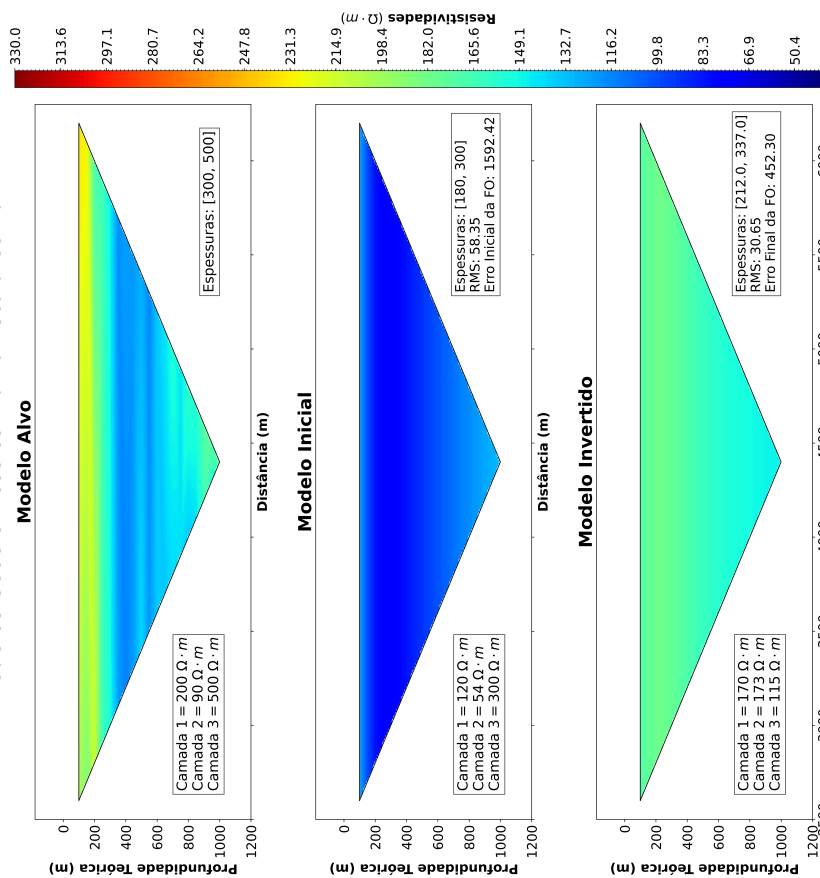


(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.10: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 2, com ruído de 10%.

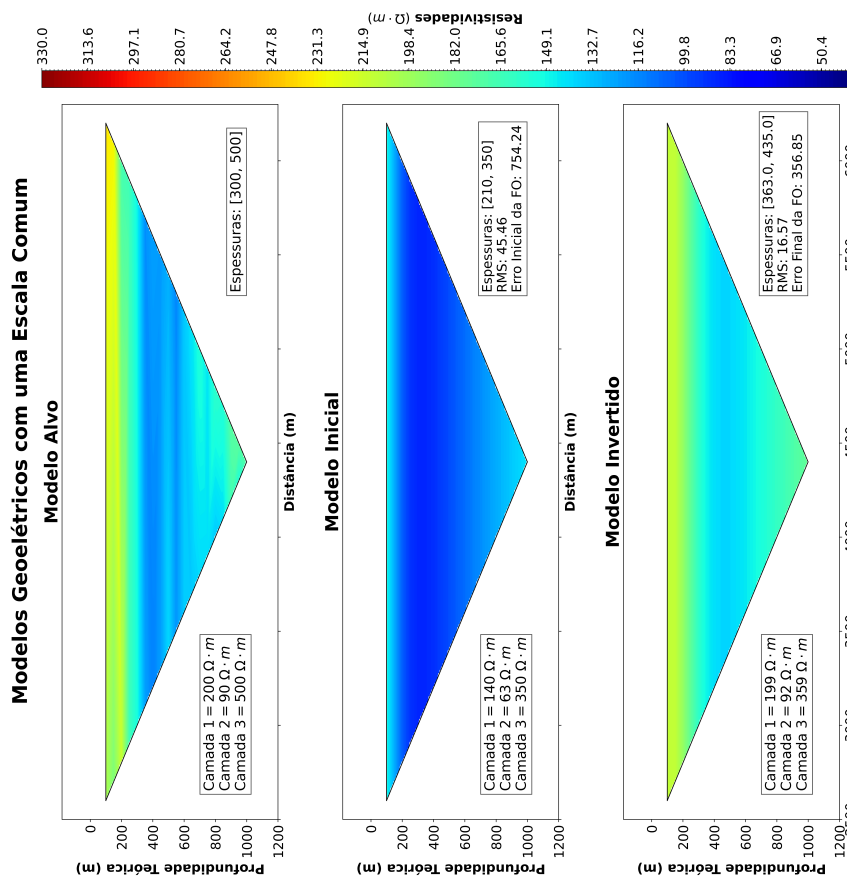
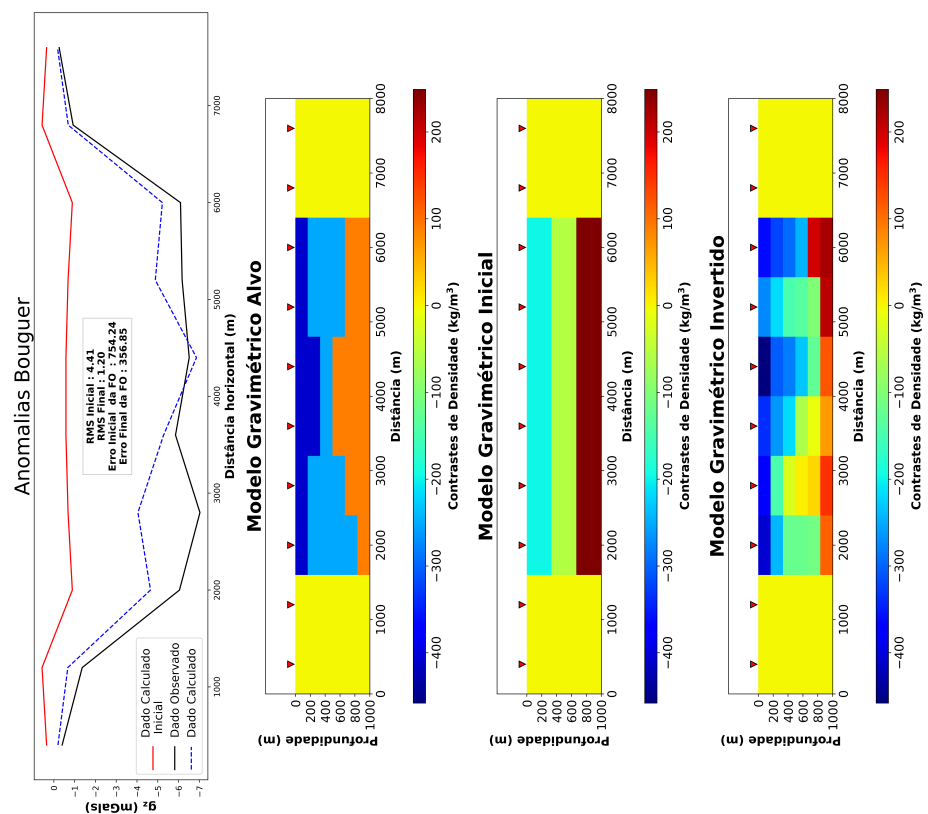


(a) Resultado inversão Metr6polis para os dados el6tricos.



(b) Resultado inversão Metr6polis para os dados gravim6tricos.

Figura H.11: Resultado da inversão Metr6polis para o modelo 3, com ruído de 10%.



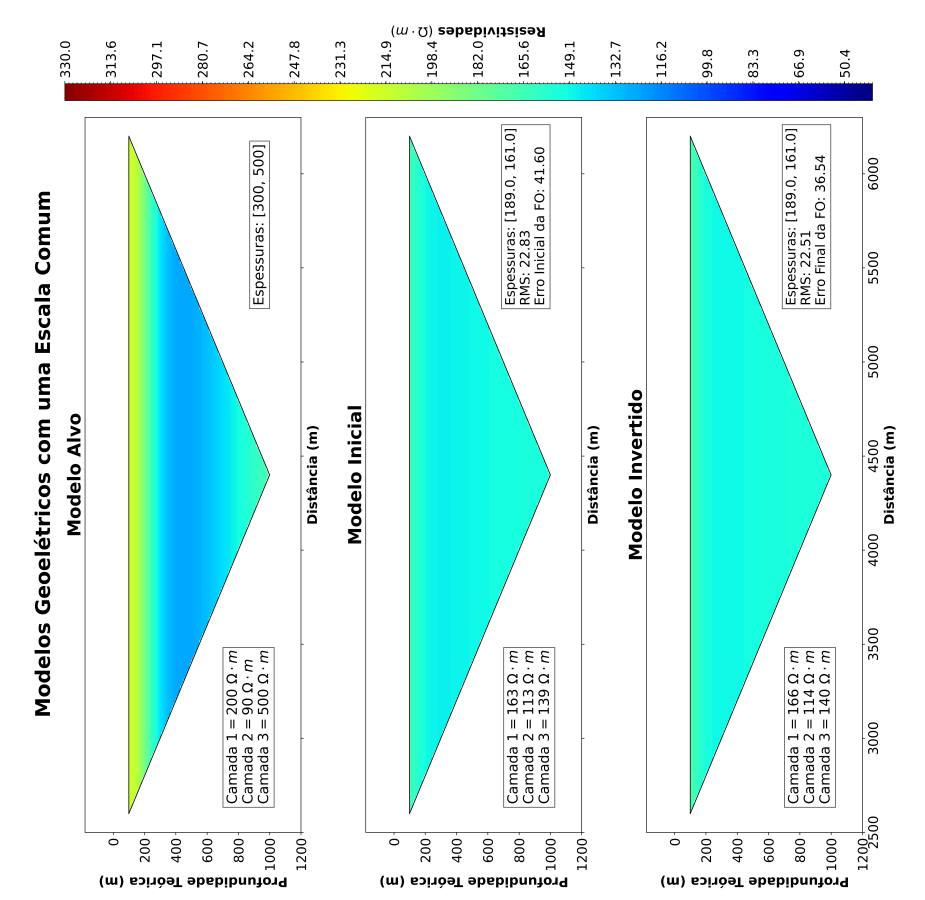
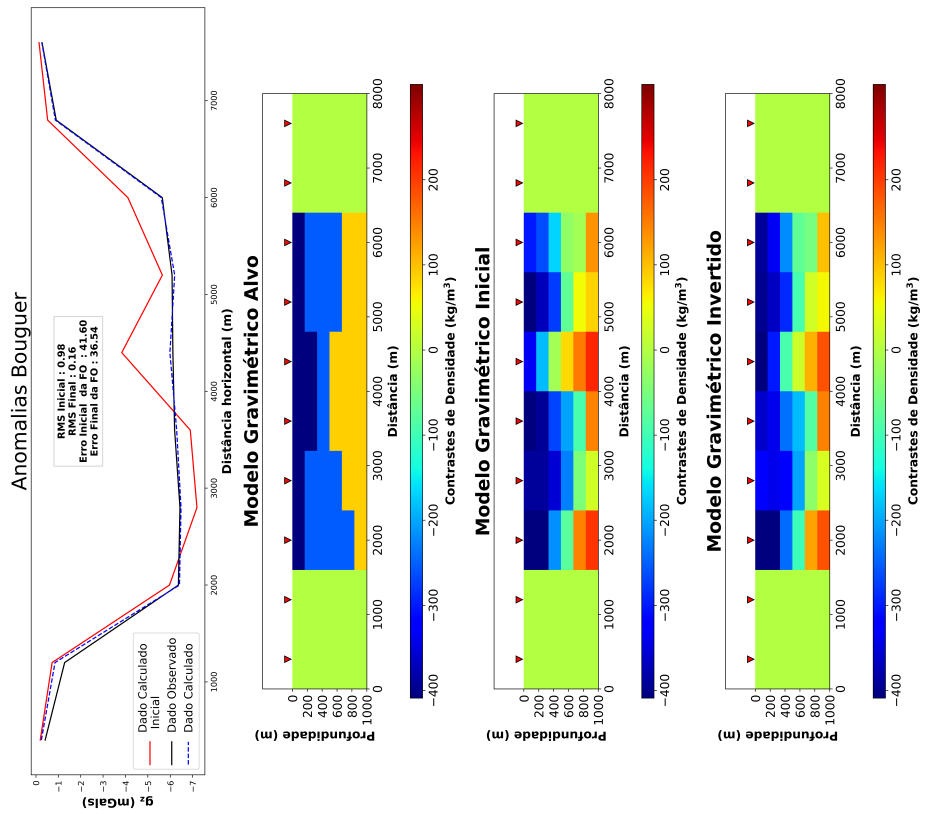
(a) Resultado inversão Metrópolis para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão Metrópolis para os dados gravimétricos.

Figura H.12: Resultado da inversão Metrópolis para o modelo 4, com ruído de 10%.

# Apêndice I

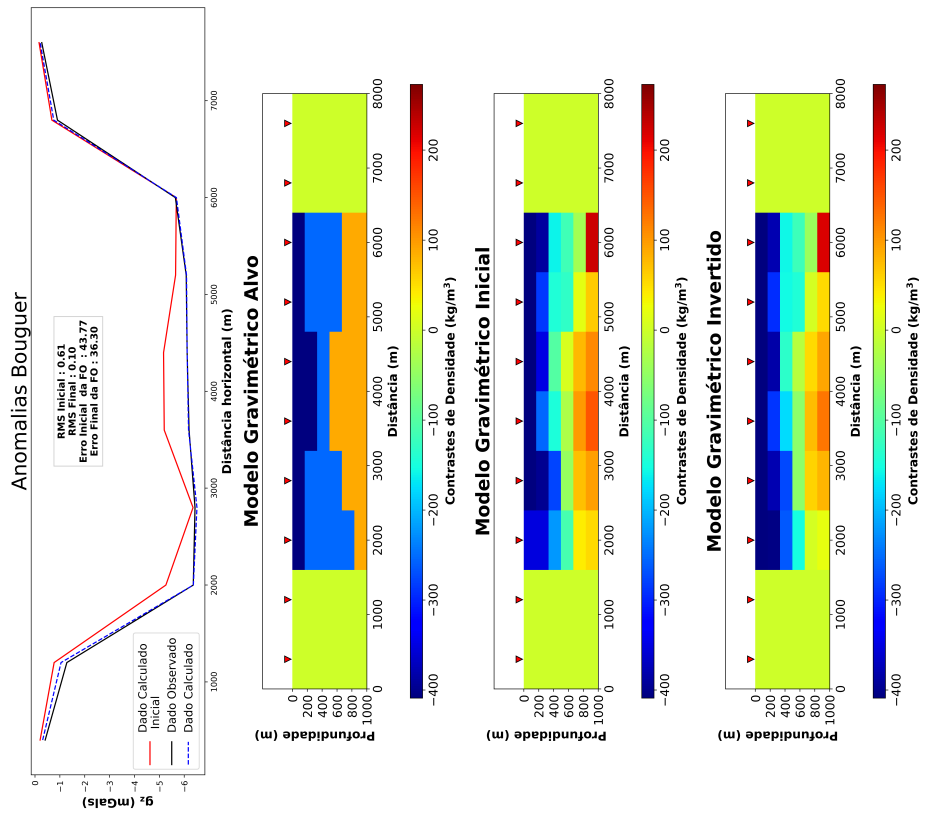
## Resultados da Inversão Local



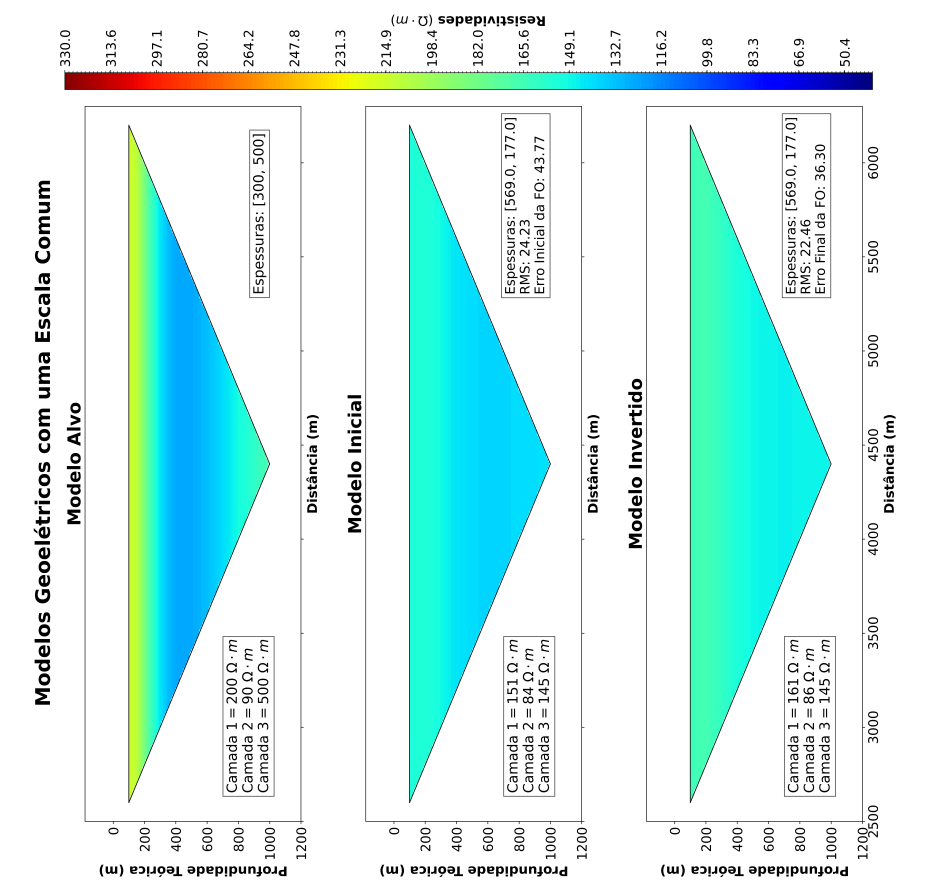
(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados geométricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

Figura I.1: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 1, sem ruído.

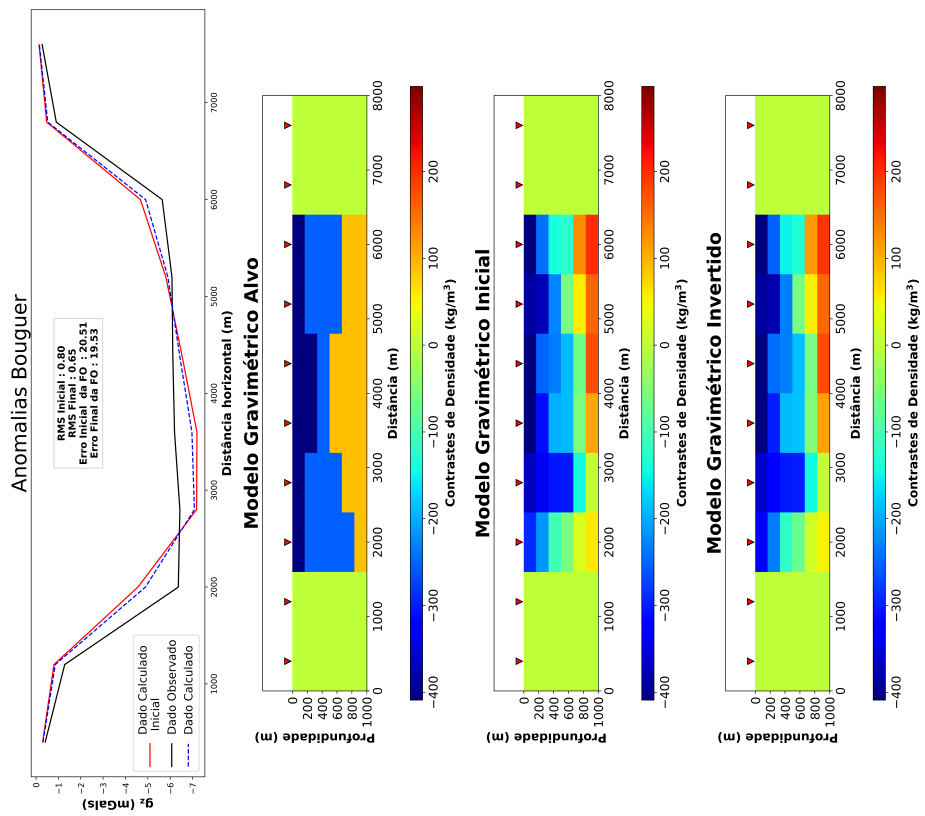


(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

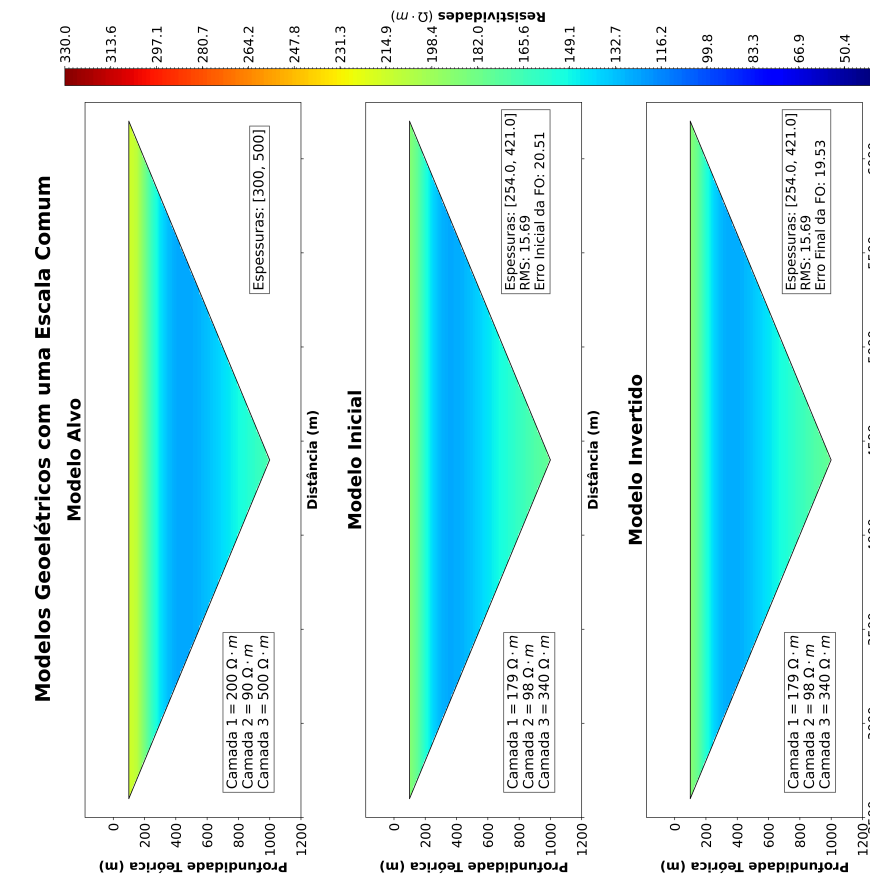


(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

Figura I.2: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 2, sem ruído.

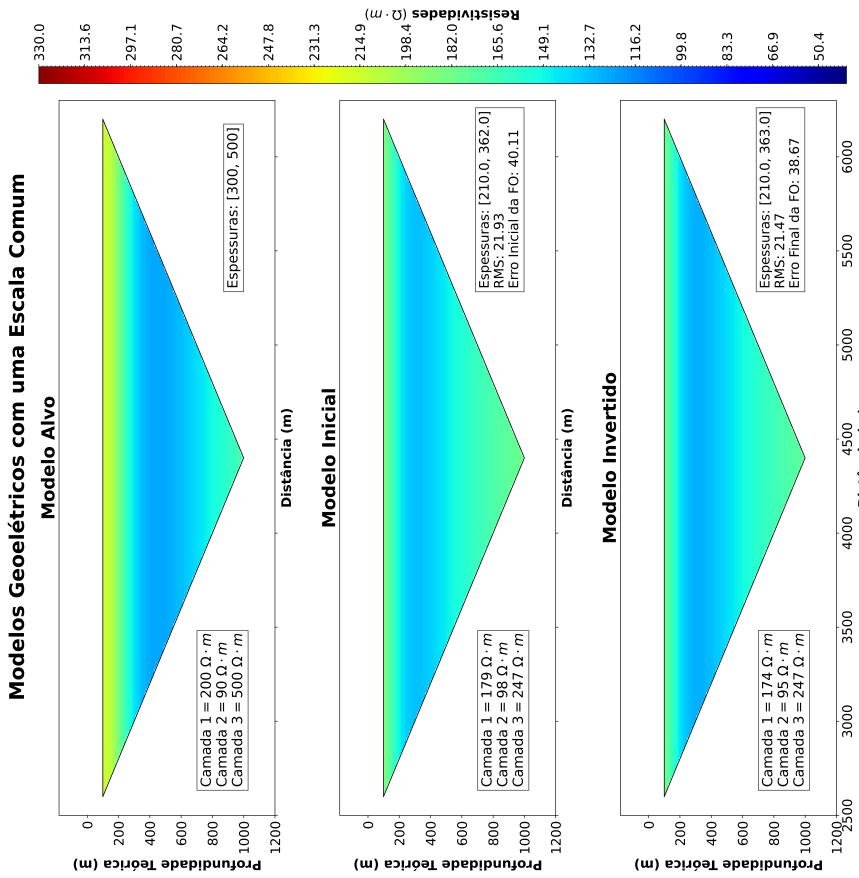
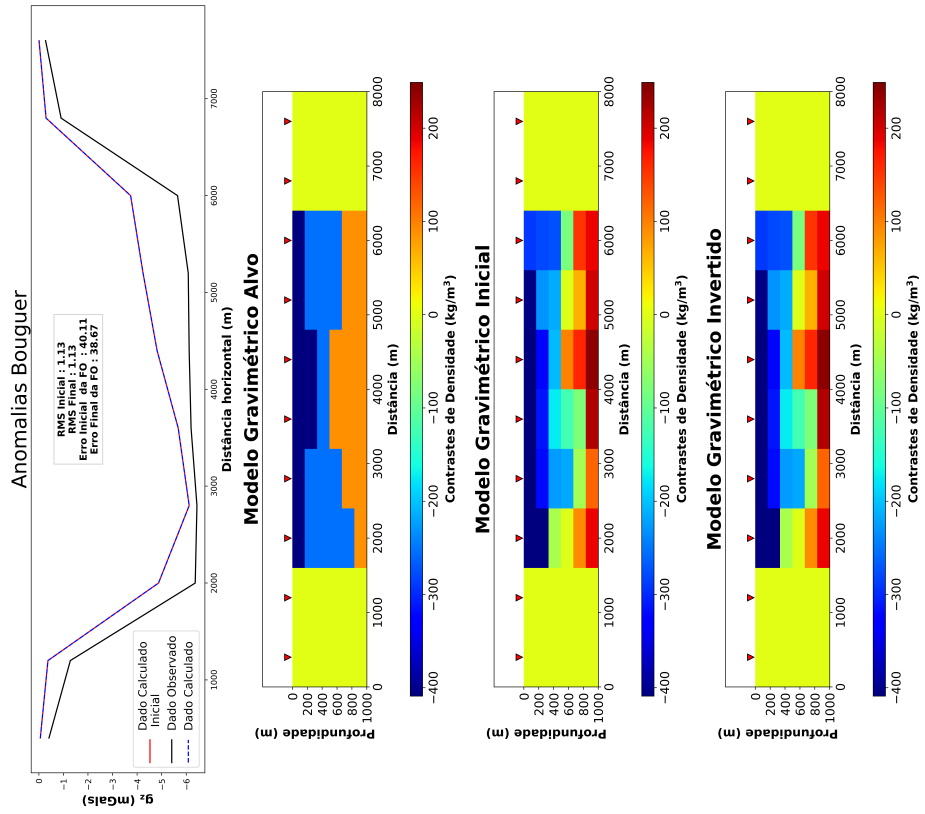


(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.



(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

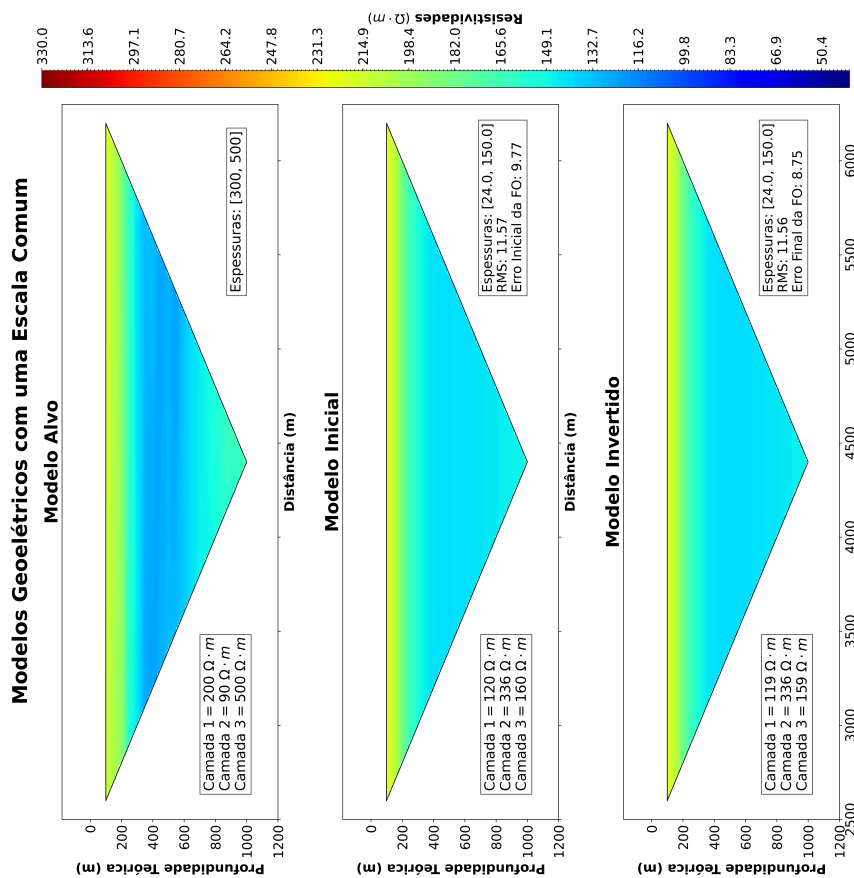
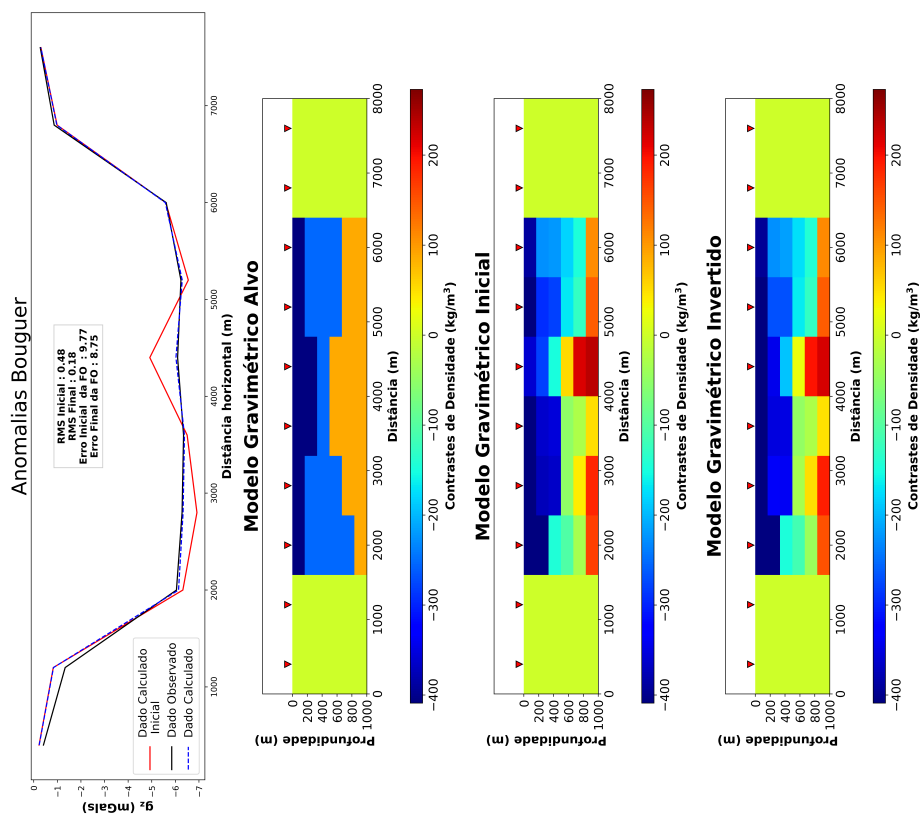
Figura I.3: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 3, sem ruído.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

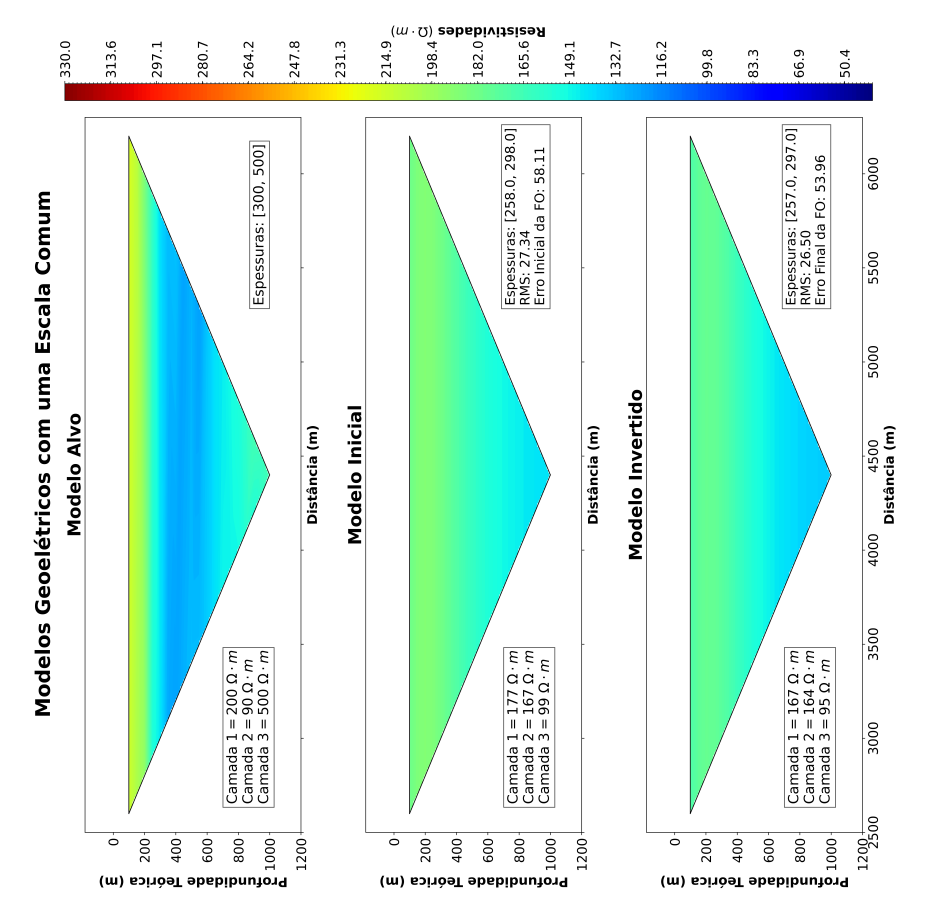
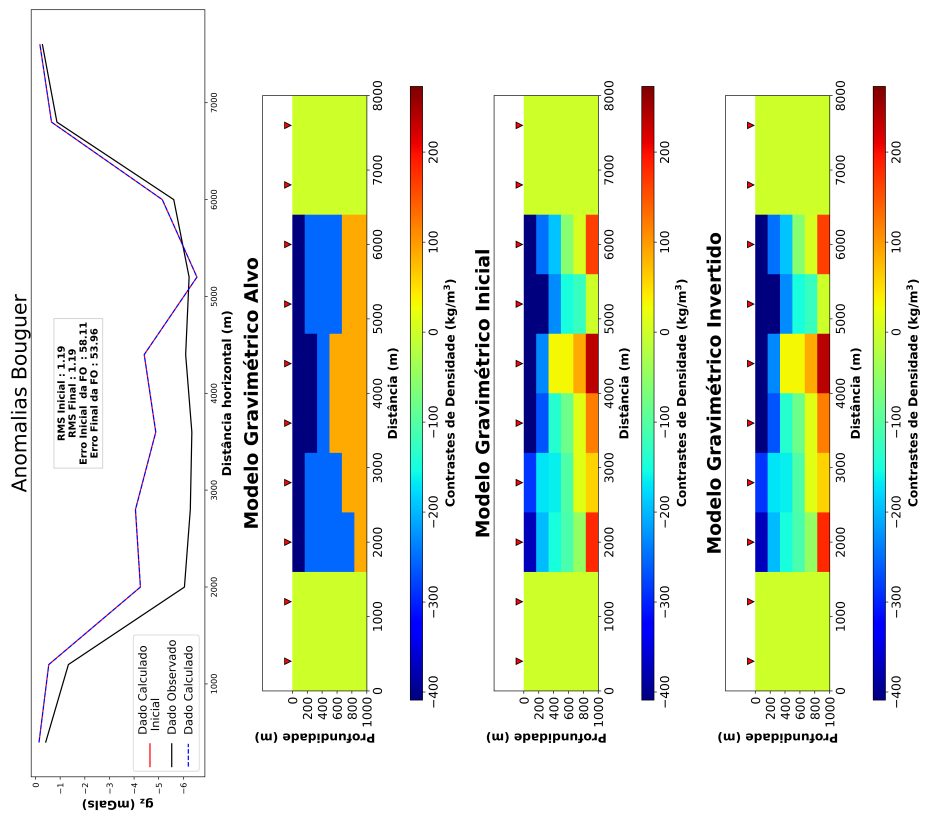
Figura I.4: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 4, sem ruído.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

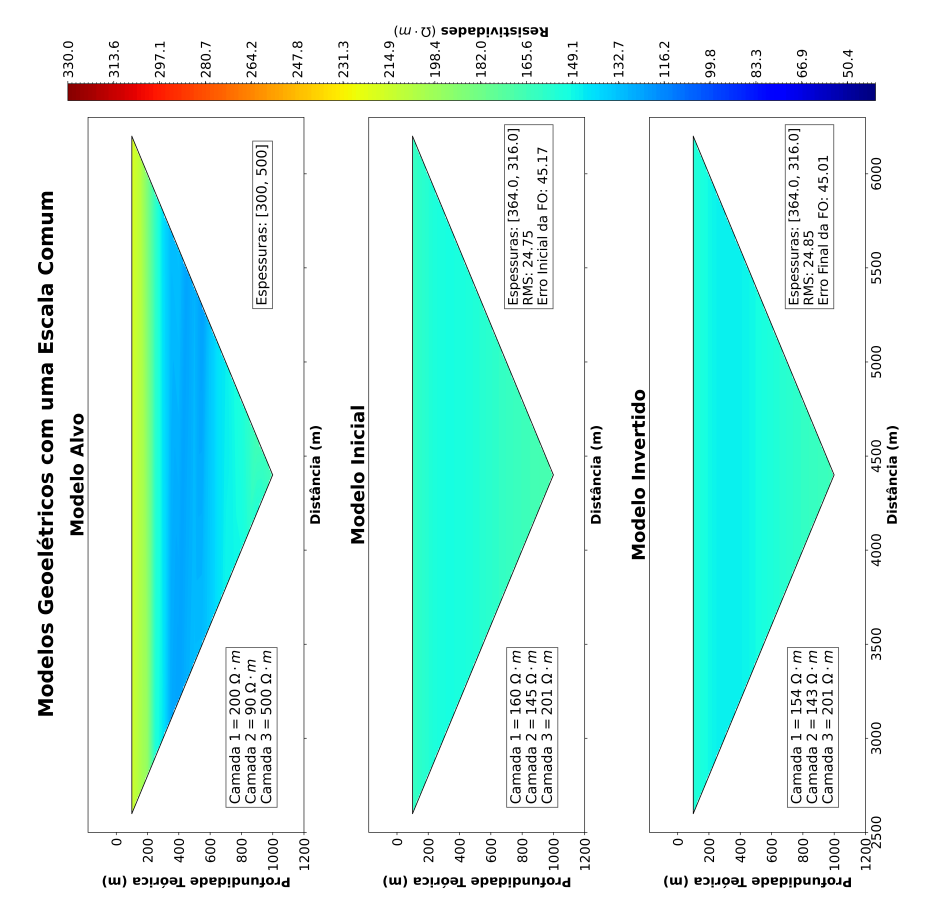
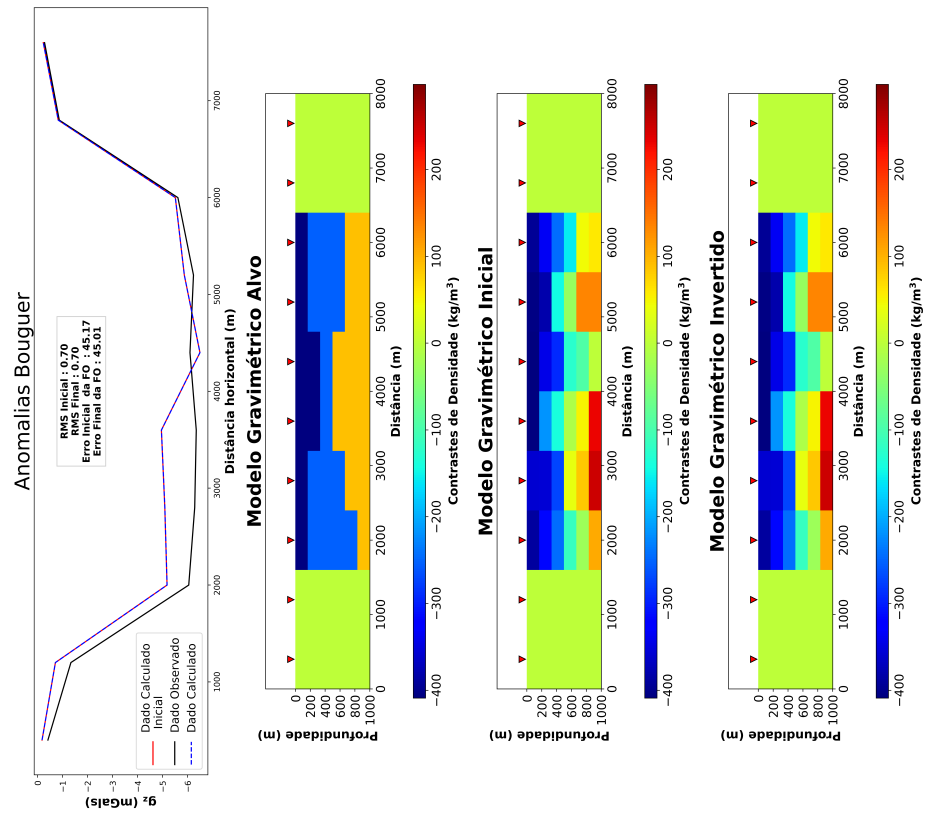
Figura I.5: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 1, com ruído de 5%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados geoeletricos.

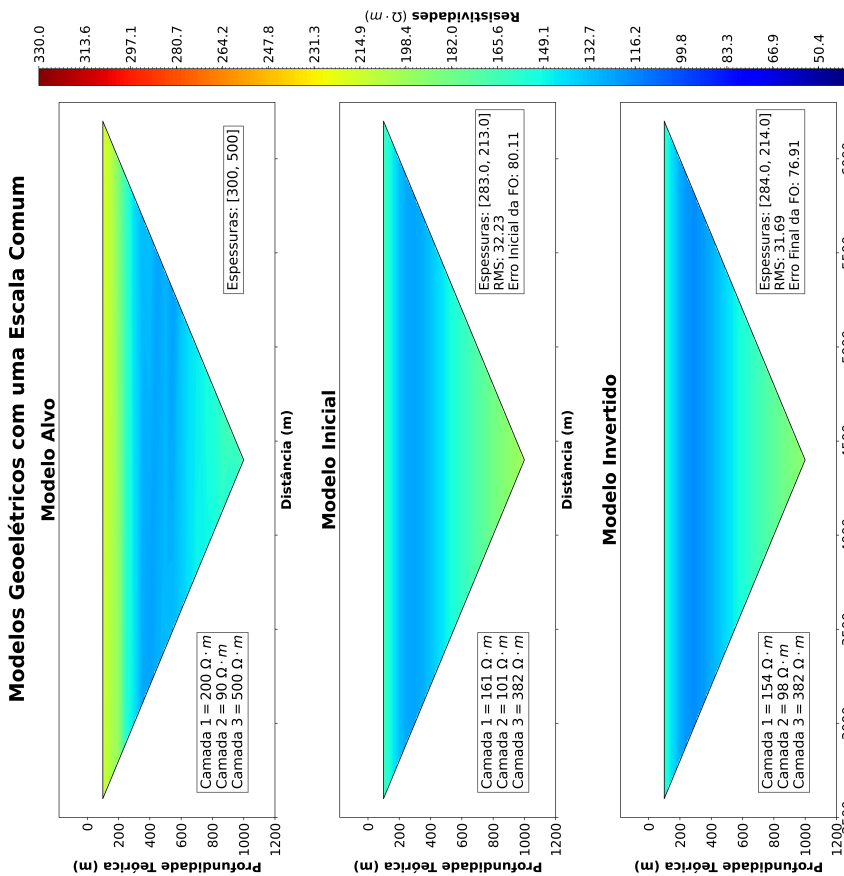
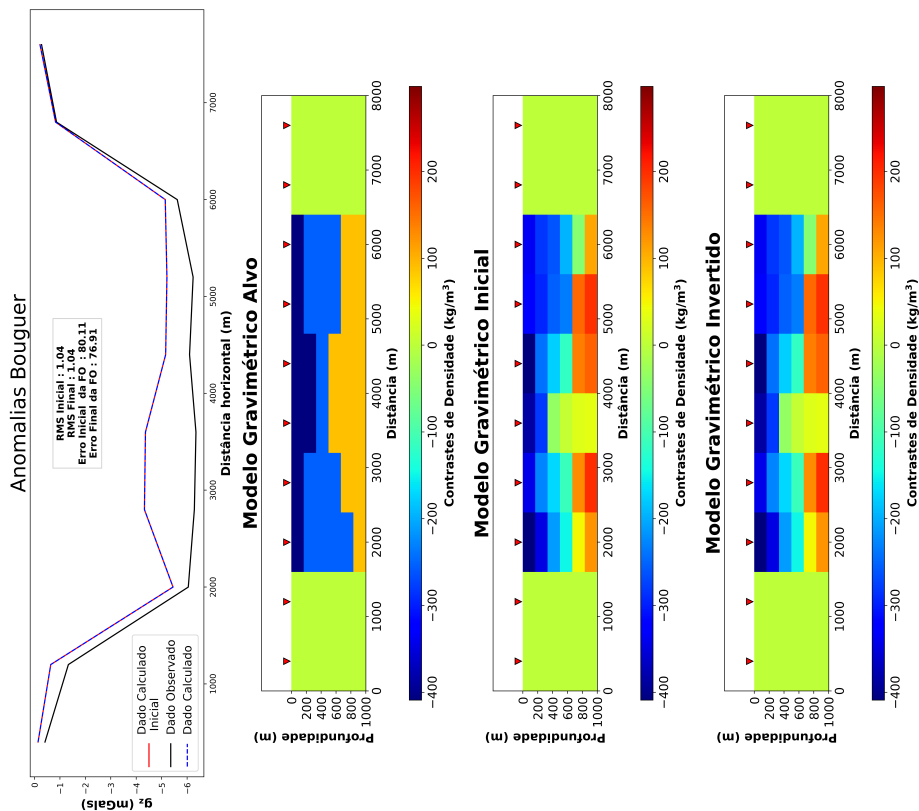
Figura I.6: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 2, com ruído de 5%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

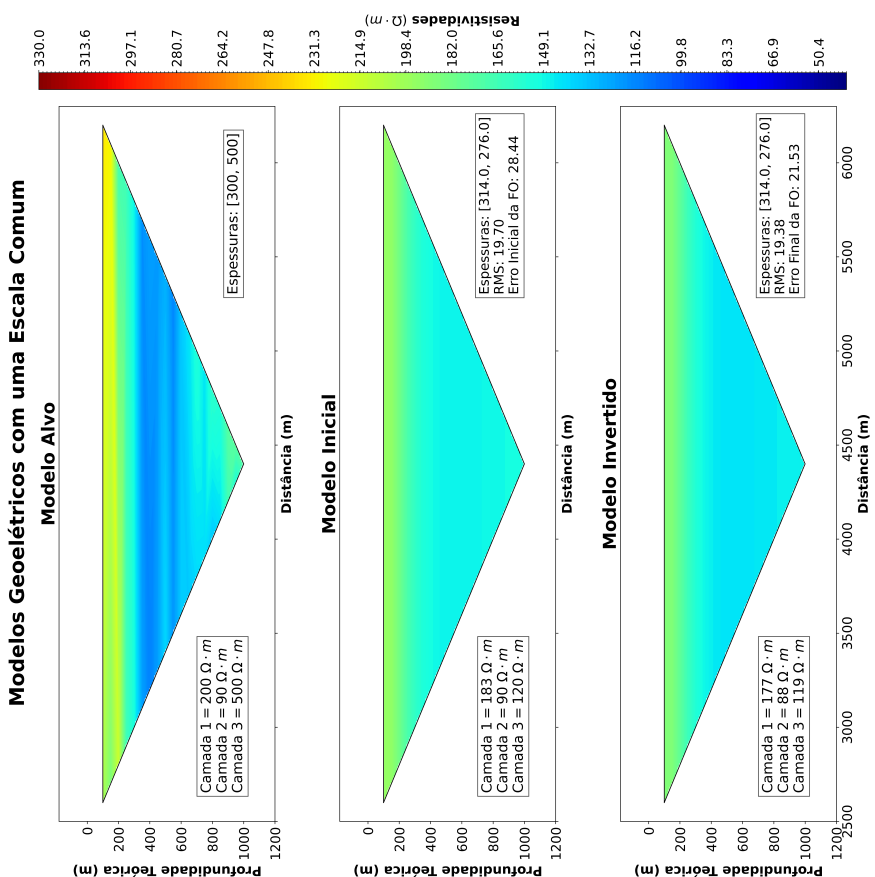
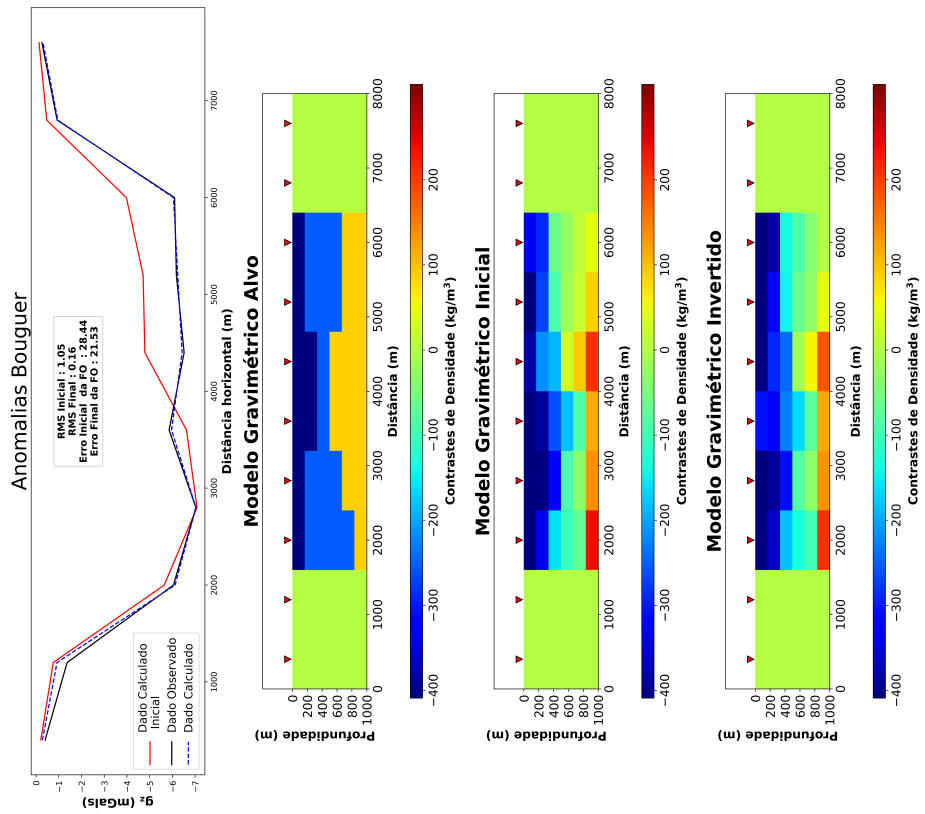
Figura I.7: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 3, com ruído de 5%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

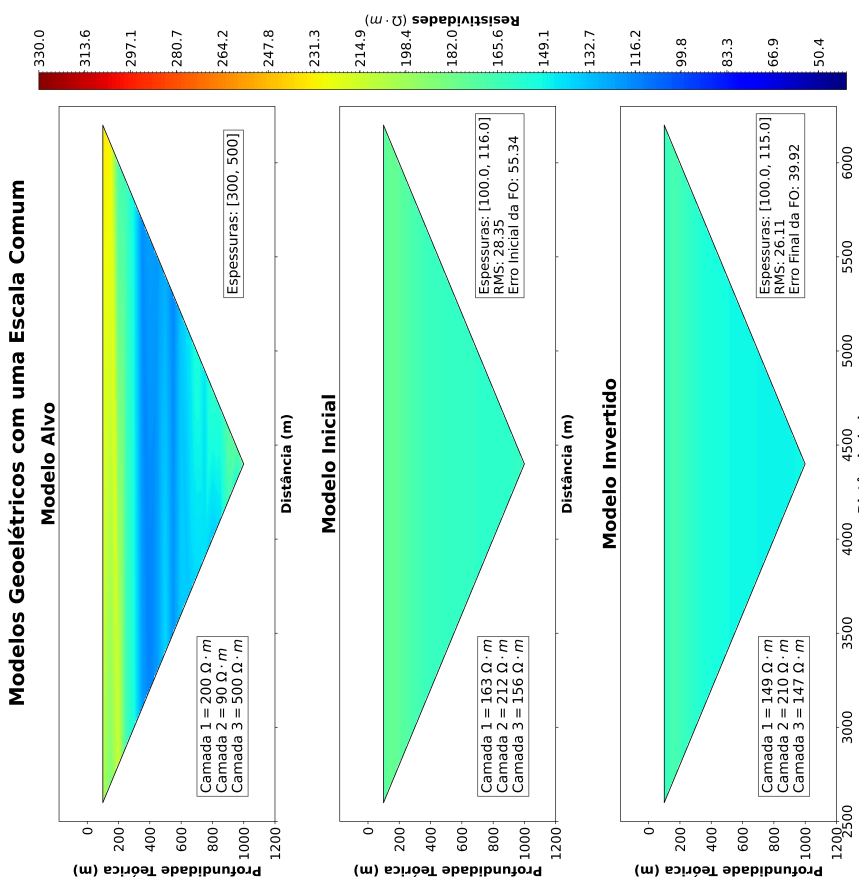
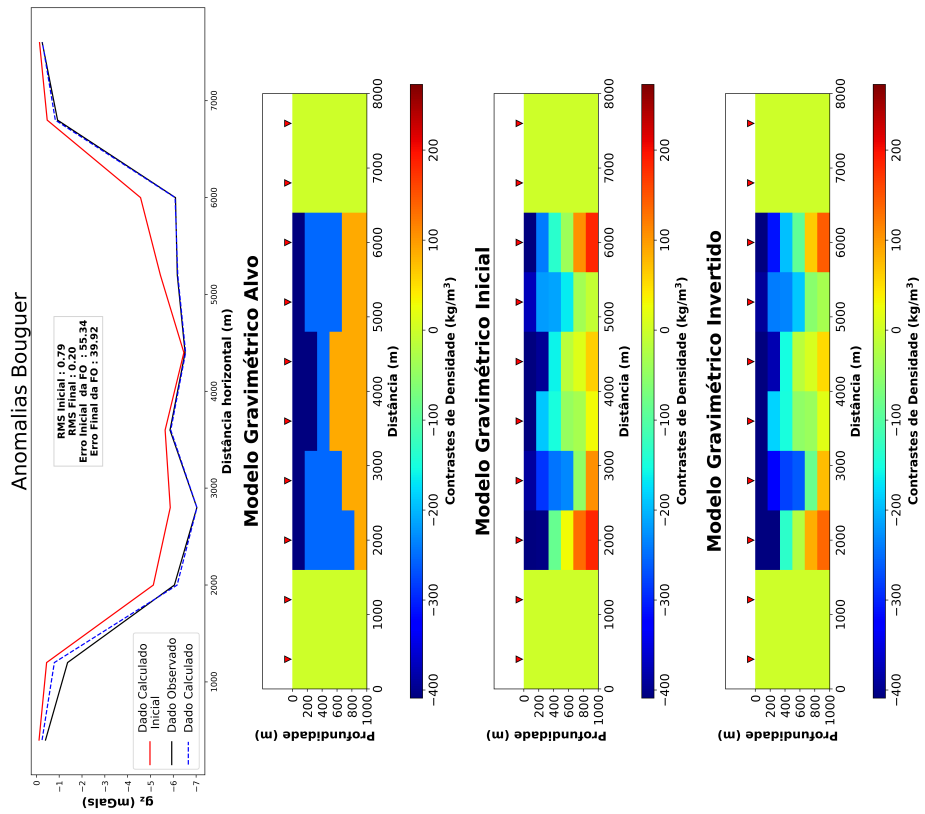
Figura I.8: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 4, com ruído de 5%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

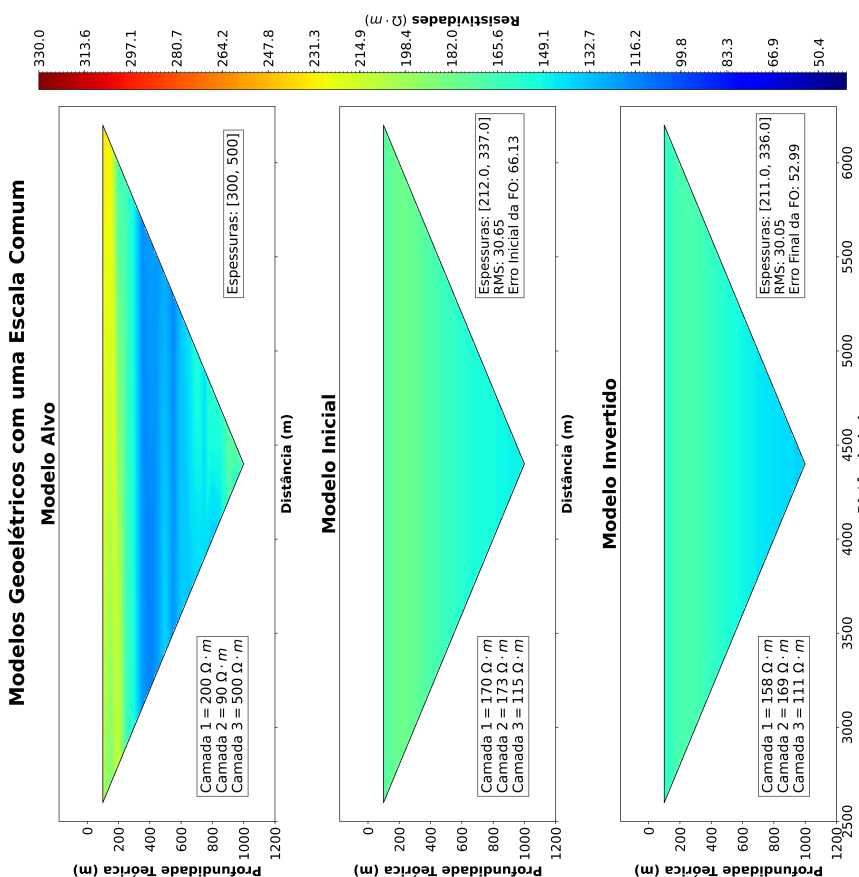
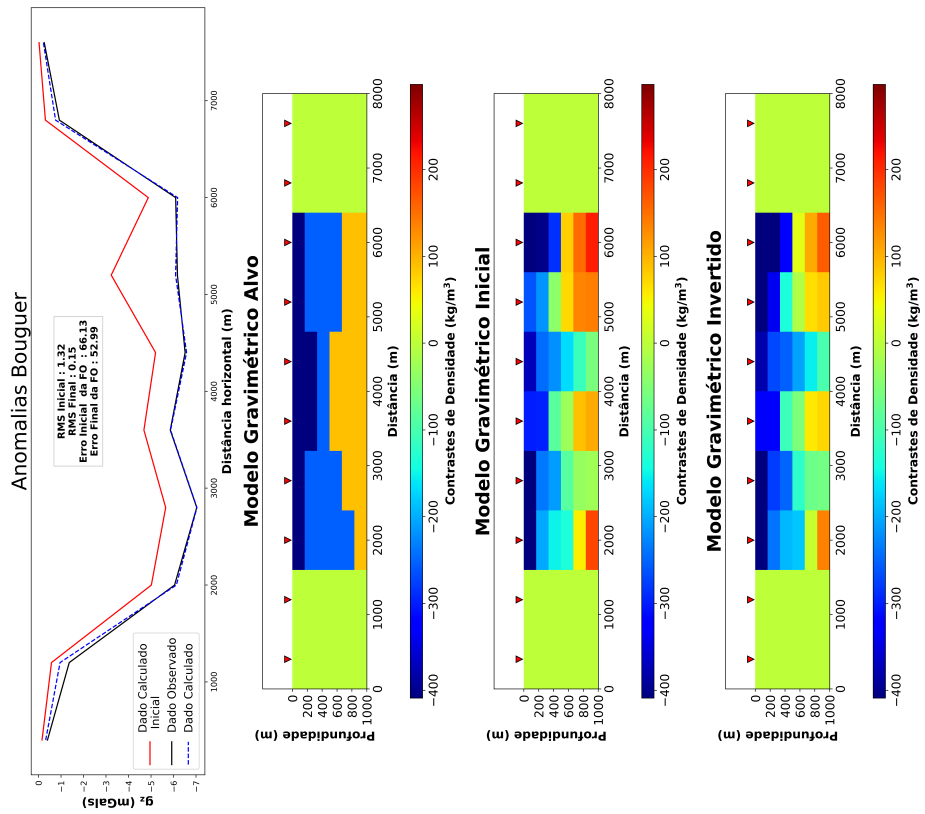
Figura I.9: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 1, com ruído de 10%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

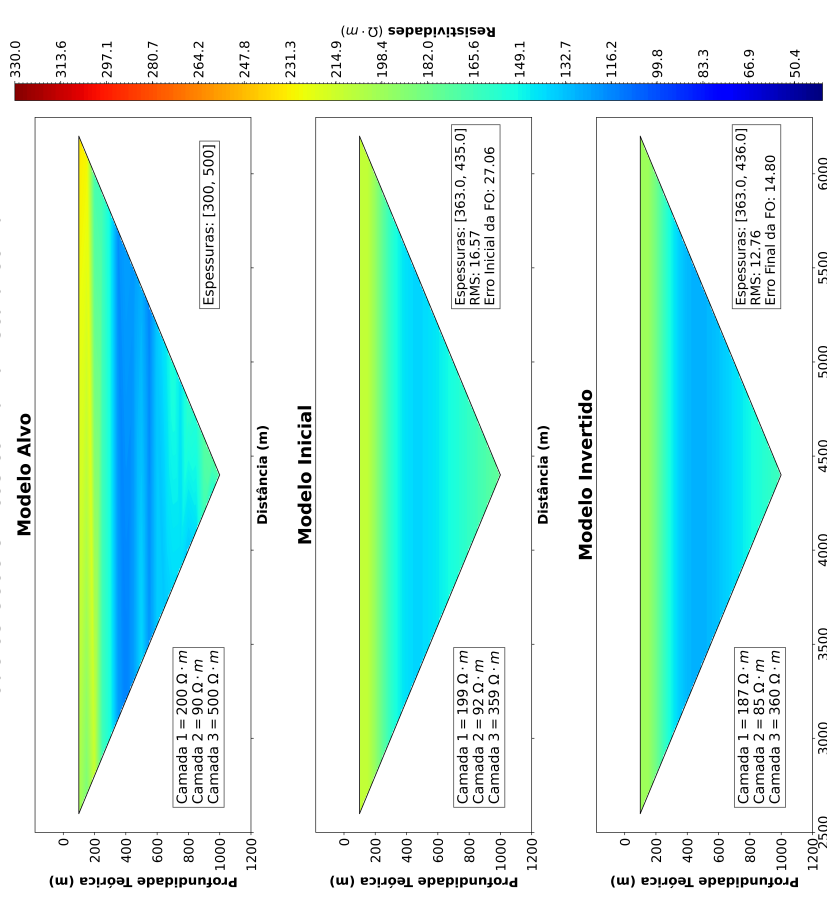
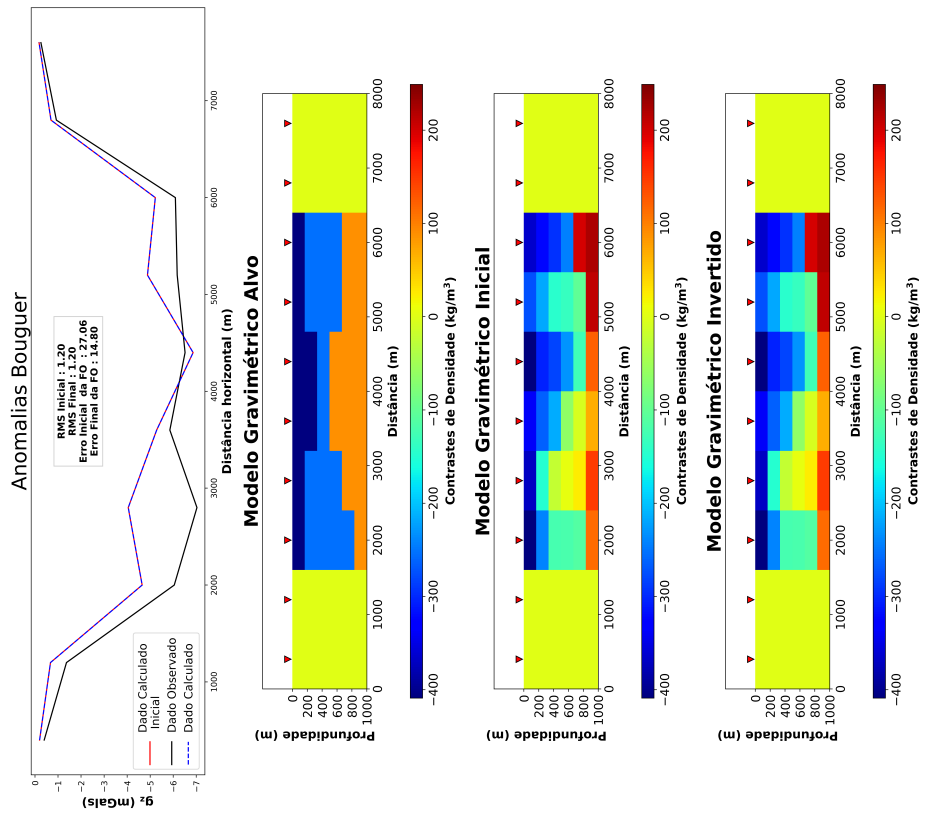
Figura I.10: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 2, com ruído de 10%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

Figura I.11: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 3, com ruído de 10%.



(a) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados elétricos.

(b) Resultado inversão *Steepest descent* para os dados gravimétricos.

Figura I.12: Resultado da inversão *Steepest descent* para o modelo 4, com ruído de 10%.

# Referências Bibliográficas

- Archie, G. E. (1942) The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics, *Transactions of the AIME*, **146**(01):54–62.
- Blakely, R. J. (1996) *Potential theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press.
- Borja, M. S. (2018) Modelagem e inversão de eletrorresistividade 1d usando fortran moderno: arranjos wenner e schlumberger, *Rel. Téc.*, Universidade Federal da Bahia.
- Braga, A. C. d. O. (2006) Métodos da eletrorresistividade e polarização induzida aplicados nos estudos da captação e contaminação de águas subterrâneas: uma abordagem metodológica e prática, Universidade Estadual Paulista.
- Braga, A. C. O. (2016) Métodos Geométricos em Hidrogeologia, Oficina de Textos.
- Colombo, D.; De Stefano, M. (2007) Geophysical modeling via simultaneous joint inversion of seismic, gravity, and electromagnetic data: Application to prestack depth imaging, *\*The Leading Edge\**, **26**(3), 326–331. Society of Exploration Geophysicists.
- da Silva, A. B.; de Brito, J. M.; de Araújo Silva, R.; Braz, A. S.; da Silva Filho, E. D. (2017) Parâmetros físico-químicos da água utilizada para consumo em poços artesianos na cidade de Remígio-PB, *Águas Subterrâneas*, **31**(2), 109–118.
- Fowler, C. M. R. (1990) *The solid earth: an introduction to global geophysics*, Cambridge University Press.
- Gallardo, L. A.; Meju, M. A. (2003) Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data, *\*Geophysical Research Letters\**, **30**(13). Wiley Online Library.
- Gallardo, L. A. e Meju, M. A. (2004) Joint two-dimensional dc resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **109**(B3).
- Gallardo, L. A.; Meju, M. A. (2007) Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification, *\*Ge-*

- ophysical Journal International\*, 169(3), 1261–1272. Blackwell Publishing Ltd, Oxford, UK.
- Gouvêa, J. L. (2013). *Geofísica na Prospecção Mineral: Guia para Aplicação*. Sociedade Brasileira de Geofísica.
- Grant, F. S. e West, G. F. (1965) Interpretation theory in applied geophysics, New York: McGraw-Hill.
- Haber, E. e Oldenburg, D. (1997) Joint inversion: a structural approach, Inverse problems, **13**(1):63.
- Hastings, W. K. (1970) Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications, Oxford University Press.
- Heincke, B.; Jegen, M.; Moorkamp, M.; Chen, J.; Hobbs, R. W. (2010) Adaptive coupling strategy for simultaneous joint inversions that use petrophysical information as constraints, \*SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010\*, 2805–2809. Society of Exploration Geophysicists.
- Kearey, P.; Brooks, M. e Hill, I. (2009) *Geofísica de Exploração, Oficina de textos*.
- Kirsch, R. (2006) *Groundwater geophysics: a tool for hydrogeology*, Springer.
- Lima de Lima, O. A. (2014) *Propriedades Físicas das Rochas: Bases da Geofísica Aplicada*, Sociedade Brasileira de Geofísica.
- Luiz, J. G. e da Costa e Silva, L. M. (1995) *Geofísica de Prospecção: Volume 1*, Editora CEJUP.
- Menke, W. (2013) *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*, Academic press.
- Nocedal, J.; Wright, S. J. (1999) *Numerical Optimization*, Springer.
- PEDROSA JUNIOR, N. C. (2010) *Inversão conjunta de dados geofísicos (gravimetria e eletrorresistividade) ao longo de uma seção transversal ao rifte da bacia Potiguar*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará.
- Represas, P. M. M. F. (2009) *Inversão conjunta de dados de gravimetria e resistividade*, Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa (Portugal).
- Santos, F. M.; Sultan, S.; Represas, P. e Sorady, A. E. (2006) Joint inversion of gravity and geoelectrical data for groundwater and structural investigation: application to the northwestern part of Sinai, Egypt, *Geophysical Journal International*, **165**(3):705–718.
- Sato, H. K. (2002) *Notas de aula de métodos elétricos*, Aulas ministradas na Universidade Federal da Bahia.

- Singh, A.; Mishra, P. K. e Sharma, S. (2019) 2d cooperative inversion of direct current resistivity and gravity data: A case study of uranium bearing target rock, *Geophysical Prospecting*, **67**(3):696–708.
- Sultan, S. A.; Santos, F. A. M. e Abbas, A. M. (2010) Joint inversion interpretation for gravity and resistivity data: a case study at new heliopolis city, cairo, egypt, *Near Surface Geophysics*, **8**(1):43–53.
- Tarantola, A. (2005) *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, SIAM.
- Telford, W. M.; Geldart, L. P. e Sheriff, R. E. (2004) *Applied geophysics*, Cambridge University Press.
- Metropolis, N.; Ulam, S. (1949) The Monte Carlo method, *Journal of the American Statistical Association*, **44**(247), 335–341.
- Metropolis, N.; Rosenbluth, A. W.; Rosenbluth, M. N.; Teller, A. H.; Teller, E. (1953) Equation of state calculations by fast computing machines, *The Journal of Chemical Physics*, **21**(6), 1087–1092.
- Moorkamp, M.; Heincke, B.; Jegen, M.; Roberts, A. W.; Hobbs, R. W. (2011) A framework for 3-D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data, *\*Geophysical Journal International\**, **184**(1), 477–493. Blackwell Publishing Ltd, Oxford, UK.
- Nielsen, L.; Jacobsen, B. H. (2000) Integrated gravity and wide-angle seismic inversion for two-dimensional crustal modelling, *\*Geophysical Journal International\**, **140**(1), 222–232. Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK.
- Rücker, C.; Günther, T.; Wagner, F. M. (2017) pyGIMLi: An open-source library for modelling and inversion in geophysics, *Computers and Geosciences*, **109**, 106–123. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300417300584>.
- Zhang, J.; Revil, A. (2015) 2D joint inversion of geophysical data using petrophysical clustering and facies deformation, *\*Geophysics\**, **80**(5), M69–M88. Society of Exploration Geophysicists.