

TESE DE DOUTORADO

**EXTENSÃO DO CRITÉRIO DE
BARBIERI EM TOMOGRAFIA
DE TEMPOS DE TRÂNSITO
NÃO-LINEAR**

MARCELO QUERINO E SILVA DO PRADO VIEIRA

SALVADOR – BAHIA
NOVEMBRO – 2024

Extensão do Critério de Barbieri em Tomografia de Tempos de Trânsito Não-linear

por

MARCELO QUERINO E SILVA DO PRADO VIEIRA

Bacharel em Geofísica (Universidade Federal da Bahia, 2013)

Mestre em Geofísica (Universidade Federal da Bahia, 2018)

Orientador: Prof. Dr. Amin Bassrei

TESE DE DOUTORADO

Submetida em satisfação parcial dos requisitos ao grau de

DOUTOR EM CIÊNCIAS

EM

GEOFÍSICA

à

Câmara de Ensino de Pós-Graduação e Pesquisa

da

Universidade Federal da Bahia

Comissão Examinadora

Amin Bassrei

Dr. Amin Bassrei - Orientador

Eduardo Telmo Fonseca Santos

Dr. Eduardo Telmo Fonseca Santos

Jessé C. C.

Dr. Jessé Carvalho Costa

Milton José Porsani

Dr. Milton José Porsani

Thierry Lemaire

Dr. Thierry Jacques Lemaire

Aprovada em 28 de Novembro de 2024

A presente pesquisa foi desenvolvida no Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da UFBA, com recursos da FAPESB.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI - UFBA.

V658 Vieira, Marcelo Querino e Silva do Prado,
Extensão do Critério de Barbieri em Tomografia de Tempos de Trânsito Não-linear / Marcelo Querino e Silva do Prado Vieira.
— Salvador, 2024.
141 f.

Orientador: Prof. Dr. Amin Bassrei
Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Geofísica, 2024.

1. Geofísica. 2. Inversão sísmica. 3. Tomografia. 4. Regularização. 5. Curva L. 6. Barbieri. I. Bassrei, Amin. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU: 550.343.4

Índice

Índice	3
Índice de Tabelas	6
Índice de Figuras	8
Resumo	14
Abstract	15
Introdução	16
1 Resolução de sistemas linearizados e regularizados	19
1.1 Modelagem direta e problema inverso	20
1.1.1 Problemas mal postos	20
1.1.2 Sistemas sobredeterminados e subdeterminados	21
1.2 Soluções do problema inverso	22
1.2.1 Método dos mínimos quadrados	22
1.2.2 Método da mínima estrutura	23
1.2.3 Método dos mínimos quadrados amortecido	23
1.2.4 Regularização	24
1.3 Técnicas para obter fator de regularização ótimo	25
1.3.1 Generalized cross validation	25
1.3.2 Curva L	26
1.3.3 Curva $\sin \Theta$	26
1.4 Linearização de problemas não lineares	28
1.5 Métodos de resolução de sistemas lineares	29
1.5.1 Pseudoinversa por decomposição em valores singulares	29
1.5.2 Gradiente conjugado	31

2 Tomografia de tempos de trânsito	35
2.1 Traçado de raios por equação do raio	35
2.1.1 Ligação fonte-receptor: Newton-Raphson e shooting method	37
2.2 Traçado de raios por grafos	39
2.3 Modelagem direta	41
2.4 Inversão com regularização	42
2.4.1 Inversão linear	42
2.4.2 Inversão linearizada	42
2.5 Simulações	43
2.5.1 Reprodução de situação real	44
3 Mapeamento do mal funcionamento da inversão e aprimoramento da solução	46
3.1 Matrizes de resolução	46
3.1.1 Matriz de resolução do dado	47
3.1.2 Matriz de resolução do modelo	47
3.1.3 Estimadores	47
3.2 Critério de Barbieri	48
3.3 Adaptação do critério de Barbieri à tomografia de tempos de trânsito com regularização	49
3.3.1 Algoritmos CB e CBM	51
4 Resultados - Modelo Sintético 1	53
4.1 Inversão linear	54
4.1.1 Resolução por SVD	54
4.1.2 Resolução por CG	57
4.1.3 Matrizes de resolução	60
4.1.4 Aplicação de CB	61
4.2 Inversão linearizada	63
4.2.1 Resolução por SVD	63
4.2.2 Resolução por CG	67
4.2.3 Matrizes de resolução	75
4.2.4 Aplicação de CB e CBM	77
5 Resultados - Modelo Sintético 2	82
5.1 Inversão linear	83
5.1.1 Aplicação de CB	84
5.2 Inversão linearizada - Traçado de raios por equação do raio	89

5.2.1	Aplicação de CB e CBM	91
5.3	Inversão linearizada - Traçado de raios por grafos	97
5.3.1	Aplicação de CB e CBM	101
6	Resultados - Dados reais do Campo de Dom João	106
6.1	Bacia do Recôncavo	106
6.1.1	Campo de Dom João	109
6.2	Aquisição	109
6.3	Processamento	111
6.4	Parametrização	111
6.5	Inversão linearizada	113
6.6	Aplicação de CB e CBM	121
6.7	Validação por dado sísmico de reflexão	122
7	Conclusões	131
	Agradecimentos	133
	Referências bibliográficas	134

Índice de Tabelas

4.1	Inversões lineares solucionadas por SVD. Melhores resultados em negrito. Tempo de processamento total de cada simulação aproximadamente 150 s	55
4.2	Inversões lineares solucionadas por CG. Melhores resultados em negrito. Tempo de processamento total de cada simulação inferior a 9 s.	58
4.3	Estimadores das matrizes de resolução referentes à inversão com regularização por \mathbf{D}_2	60
4.4	ϵ_{sapr} do aprimoramento por CB dos modelos referentes às simulações em negrito das Tabelas 4.1 e 4.2 obtidos com regularização por \mathbf{D}_2 em função de λ . Melhores resultados em negrito.	62
4.5	Simulação preliminar solucionada por SVD com $Jan = 9$. Melhores resultados em negrito.	66
4.6	Simulação final solucionada por SVD e regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$ e $q^{\min} = 10^{-3}$. Melhores resultados em negrito.	67
4.7	λ s da simulação preliminar (Tabela 4.5, regularizada por \mathbf{D}_2 , em negrito) e da simulação final (Tabela 4.6, por GCV e em negrito por curva L).	68
4.8	Simulação preliminar solucionada por CG. Melhores resultados em negrito. PT em segundos.	72
4.9	Simulação final solucionada por CG e regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$, $n^{CG} = 75$. Melhores resultados em negrito.	74
4.10	λ s da simulação preliminar (Tabela 4.8, regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$ e $n^{CG} = 75$), da simulação final (em negrito da Tabela 4.9) e do aprimoramento por CBM e CB.	74
4.11	Estimadores das matrizes de resolução em função de q^{\min} e λ para inversão linearizada solucionada por CG, regularizada por \mathbf{D}_2 e com $\mu = 1\%$	75
4.12	ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9, com uso de janela móvel e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}).	78

4.13 ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 4.9 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.	79
5.1 Inversões lineares. Melhores resultados em negrito.	83
5.2 ϵ_{sapr} do aprimoramento por CB dos modelos referentes às simulações em negrito da Tabela 5.1 em função de λ . Melhores resultados em negrito.	85
5.3 Simulação preliminar regularizada por \mathbf{D}_2 . Melhores resultados em negrito.	90
5.4 Simulação final regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 7$ e $n^{CG} = 15$. Melhores resultados em negrito.	90
5.5 λ s da simulação preliminar (Tabela 5.3, regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 7$ e $n^{CG} = 15$, em negrito), da simulação final (em negrito da Tabela 5.4) e do aprimoramento por CBM e CB.	91
5.6 ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 5.4 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.	93
5.7 Simulações com traçado de raios por grafos. Melhores resultados em negrito.	98
5.8 λ s das simulações em negrito da Tabela 5.7 e do aprimoramento por CBM e CB.	101
5.9 ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 5.7 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.	102
6.1 Desvio RMS percentual do dado (ϵ_t) e sequencial do λ selecionado em cada iteração com auxílio das curvas L e $\sin \Theta$ para todas as inversões das Figuras 6.6 e 6.7.	116

Índice de Figuras

1.1	Formatos típicos da curva L e das curvas $\sin \Theta$ e 1^a derivada de $\sin \Theta$ associadas.	27
2.1	Trecho de um meio acústico bidimensional (x, z) isotrópico e não homogêneo discretizado em blocos de mesmas dimensões identificados pelo par ordenado (p, q) , onde $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$, dentro dos quais o índice de refração é considerado constante. Pontos P_k e P_{k+1} representam pontos consecutivos referentes à discretização do trecho de um raio que se propaga pelo meio, separados pela distância Δl , e α_k é o ângulo que a tangente ao raio em P_k forma com o eixo x .	38
2.2	Fluxograma adotado na inversão linear.	42
2.3	Fluxograma adotado na inversão linearizada.	43
4.1	Modelo 1.	53
4.2	Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.	53
4.3	Valores singulares de $\mathbf{A}(\lambda)$ regularizada por \mathbf{D}_2 e seu número de condicionamento (NC). A ordem de grandeza do último autovalor é o quociente entre a ordem de grandeza do primeiro por NC .	54
4.4	Curvas auxiliares referentes às simulações regularizada por \mathbf{D}_2 em negrito da Tabela 4.1.	56
4.5	Modelos de velocidades referentes às simulações em negrito da Tabela 4.1.	57
4.6	Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito da Tabela 4.2.	58
4.7	Modelos de velocidade referentes às simulações em negrito da Tabela 4.2.	59
4.8	Diagonal principal de \mathbf{R}_m para diferentes seleções de autovalores (a, b, c, d, e) e para $\lambda = 20$ (f) referentes à inversão com regularização por \mathbf{D}_2 .	61
4.9	Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 4.4. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.	63

4.10 Matrizes resíduo (R) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 4.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações solucionadas por SVD em negrito da Tabela 4.4.	64
4.11 Matrizes resíduo (R) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 4.2. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações solucionadas por CG em negrito da Tabela 4.4.	65
4.12 Modelos verdadeiro e suavizados por diferentes janelas (<i>Jan</i>).	66
4.13 Curvas auxiliares referentes à simulação da Tabela 4.6 solucionada com GCV e com $\mu = 0.1\%$	68
4.14 Curvas auxiliares referentes à simulação da Tabela 4.6 solucionada com GCV e com $\mu = 1\%$	69
4.15 Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito da Tabela 4.6 solucionada com curva L e com $\mu = 0.1\%$	69
4.16 Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito da Tabela 4.6 solucionada com curva L e com $\mu = 1\%$	70
4.17 Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 4.9, com $\mu = 0.1\%$	71
4.18 Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 4.9, com $\mu = 1\%$	71
4.19 Modelos de velocidades estimados na inversão linearizada regularizada por \mathbf{D}_2 , correspondentes aos melhores resultados da simulação final por SVD e por CG.	73
4.20 Diagonal principal de \mathbf{R}_m para diferentes seleções de autovalores ($q^{min} = 10^{-18}$, a-d; $q^{min} = 10^{-8}$, e-h; $q^{min} = 10^0$, i-l; e $q^{min} = 10^3$, m-p) e valores de λ . Inversão linearizada solucionada por CG, regularizada por \mathbf{D}_2 e com $\mu = 1\%$	76
4.21 Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 4.12. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.	79
4.22 Matrizes resíduo (R) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 4.12.	80
4.23 Modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9 e aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.12.	81

5.1	Modelo 2	83
5.2	Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.	83
5.3	Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito da Tabela 5.1.	84
5.4	Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito da Tabela 5.1.	85
5.5	Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} das simulações em negrito da Tabela 5.2. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.	86
5.6	Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito na Tabela 5.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_L) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito na Tabela 5.2.	87
5.7	Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 5.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_L) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 5.2.	88
5.8	Modelos verdadeiro e suavizados por diferentes janelas (<i>Jan</i>).	89
5.9	Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 0$	91
5.10	Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 0.1\%$	92
5.11	Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 1\%$	92
5.12	Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 5\%$	93
5.13	Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 5.6. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.	94
5.14	Matrizes resíduo (\mathbf{R}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.4 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 5.6.	95
5.15	Modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.4 e aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.6.	96
5.16	Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.	97
5.17	Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{1H} e $\mu = 0.1\%$	99
5.18	Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{1H} e $\mu = 1\%$	99
5.19	Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{2H} e $\mu = 0.1\%$	100

5.20	Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{2H} e $\mu = 1\%$.	100
5.21	Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 5.7 com \mathbf{D}_{1H} ("a" e "b") e \mathbf{D}_{2H} ("c" e "d").	103
5.22	Matrizes resíduo (\mathbf{R}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.7 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 5.9.	104
5.23	Modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.7 e aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.9.	105
6.1	Seção geológica esquemática da Bacia do Recôncavo evidenciando uma geometria em meio- <i>graben</i> e falhamentos normais de alto ângulo. Fonte: Modificado de Penteado (1999).	109
6.2	Seção geológica da porção central da Bacia do Recôncavo ilustrando a configuração estrutural-estratigráfica do Campo de Dom João. Fonte: Milani e Araújo (2003).	110
6.3	Diagrama dos tempos da onda P transmitida. Regiões brancas indicam inexistência de tempo de trânsito para o respectivo par fonte-receptor. A numeração da fonte e do receptor indica a posição da estação ao longo do poço e aumenta para estações em profundidades maiores.	112
6.4	a) Localização verdadeira das estações nos poços das fontes e dos receptores. b) Projeção das estações em superfície. O ponto preto indica a estação com menor a profundidade.	112
6.5	Curvas auxiliares das inversões cujos modelos recuperados são mostrados na Figura 6.6a (a, b, c) e na Figura 6.6b (d, e, f) para as iterações inicial, intermediária e final.	116
6.6	Modelos de velocidade recuperados após inversão com todos os raios disponíveis e regularização por \mathbf{D}_{1H} ou por \mathbf{D}_{2H} . Traçados de raios sem horizontalização do modelo na primeira coluna, e com horizontalização na segunda coluna.	117
6.7	Modelos de velocidade recuperados após inversão de dados com <i>offset</i> vertical maior do que 10° e regularização por \mathbf{D}_{1H} ou por \mathbf{D}_{2H} . Traçados de raios sem horizontalização do modelo na primeira coluna, e com horizontalização na segunda coluna.	118

6.8 Modelos de velocidade recuperados nas inversões cujos traçados de raios foram realizados com algoritmo baseado na equação do raio, sempre em modelos suavizados por janela 5×5 e horizontalizados. Na primeira coluna, quando foram utilizados todos os 14048 raios disponíveis, e, na segunda, somente os raios cujo <i>offset</i> vertical é maior do que 10°	119
6.9 Número de vezes que cada bloco foi atravessado pelos 14048 raios disponíveis. Raios traçados por grafos com modelo constante em (a) e com os modelos das Figuras 6.6a em (b) e 6.6b em (c). Em (d), os raios foram traçados por equação do raio com o modelo da Figura 6.6a. (a) indica que a faixa entre $z = 125$ m e $z = 300$ m têm maior cobertura angular. (b) e (c) indicam que as interfaces com grande contraste de velocidade ($z = 150$ m e $z = 190$ m) têm densidade de raios muito maior que as demais regiões, como é esperado devido ao comportamento das <i>head waves</i> . Por outro lado, a densidade de raios é muito menor nestas interfaces em (d) devido à necessidade de uma maior suavização do modelo para o traçado de raios por equação do raio. . .	120
6.10 Diferenças entre os raios de tempo mínimo traçados por grafos (com janela de suavização 3×3) e pela equação do raio (com janela de suavização 5×5) no modelo correspondente ao da Figura 6.6a. A fonte está localizada próxima a uma interface de grande contraste de velocidade e é esperado que os raios de tempo mínimo correspondam aos de <i>head waves</i> para os <i>offsets</i> verticais curtos. Somente o traçado por grafos é capaz de mapeá-los corretamente. . .	120
6.11 Razão entre valores singulares dominantes consecutivos das matrizes pseudonulas \mathbf{P} correspondentes às aplicações de CB e de CBM aos modelos estimados das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização). Em todos os casos, somente a primeira autoimagem foi suprimida uma vez que somente a primeira razão é muito maior que as demais.	122
6.12 Matrizes pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às inversões das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização).	123
6.13 Modelos de velocidades aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às inversões das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização).	124
6.14 Mapa do Campo de Dom João contendo bloco sísmico, linha sísmica que corta a região invertida (entre os poços 800 e 803, que hospedaram as fontes e receptores) e poço central amarrado (1202).	127
6.15 Demarcação do topo da Formação Sergi (horizonte verde) na linha que corta a região invertida, a partir do poço 1202 amarrado. Base é o topo do embasamento.	127

Resumo

O presente trabalho propõe dois métodos para avaliar a qualidade da inversão tomográfica de tempos de trânsito com regularização por matrizes de derivada e também aprimorar o modelo de velocidades recuperado. Tais métodos são baseados no Critério de Barbieri, desenvolvido originalmente em tomografia médica. O primeiro, Critério de Barbieri (CB), considera uma modelagem por raios retos, enquanto o segundo, Critério de Barbieri Modificado (CBM), é governado pelo princípio de Fermat. Ambos fazem uso de filtragem por decomposição em valores singulares para suprimir autoimagens dominantes por assumir que o efeito dos erros do algoritmo de inversão assume um caráter espacial com distribuição aleatória. Nas simulações com dados sintéticos, os métodos aprimoraram a solução em termos do desvio RMS do modelo mesmo na presença de elevado ruído gaussiano adicionado ao dado. Em geral, o CBM requereu maior regularização do que a da inversão tradicional. Aplicados ao dado real do Campo de Dom João, Bacia do Recôncavo, ambos CB e CBM recuperaram modelos similares e de maior resolução do que o da inversão tomográfica convencional. Os resultados com dados reais foram validados por dados sísmicos de reflexão. Para a modelagem direta, foram testados algoritmo de traçado de raios baseado na solução analítica da equação do raio, e algoritmo de grafos, que é uma aplicação direta do princípio de Fermat. A modelagem por grafos se mostrou superior pela capacidade de sempre ligar fontes a receptores independente da complexidade do modelo de velocidades. Para o procedimento numérico da inversão, testamos a inversa generalizada e o gradiente conjugado, que apresentou menor custo computacional sem perda de qualidade. A regularização por matrizes de derivadas foi incorporada ao problema para estabilizar a solução. O fator de regularização foi escolhido pela curva L auxiliada pela curva $\sin \Theta$, desenvolvida neste trabalho, e também pela validação cruzada generalizada.

Abstract

This work offers two methods to evaluate the quality of traveltime tomography with regularization by derivative matrices and also to improve velocity models. Both methods are based on Barbieri's work, originally developed in medical tomography. The first, Barbieri Criterion (BC), considers forward modeling by straight rays, while the second one, Modified Barbieri Criterion (MBC), is ruled by Fermat's principle. Both use filtering by singular value decomposition to suppress dominant eigenimages by assuming that inversion algorithm errors are randomly located. Simulations with synthetic data showed that both methods had improved the solution in model RMS sense, even if high Gaussian noise was added to data. In general, MBC requires greater regularization than standard inversion. When applied to real data from Dom João Field, Recôncavo Basin, both methods had recovered similar models and with a higher resolution than the standard approach. Real data results were validated by seismic reflection data. Forward modeling was performed by ray tracing, based on analytical solution for differential ray equation, and by graphs, which is a simple application of Fermat's principle. Graph modeling proved to be superior as it always links sources and receivers regardless of velocity model. Numerical inversion was performed by generalized inverse and by a conjugate gradient method, which presented a lower computational cost without losing quality. Solution was stabilized by regularization by derivative matrices. Regularization factors were selected by L -curve and $\sin \Theta$ -curve, the latter developed in this work as an extension to the former, or by generalized cross-validation.

Introdução

A tomografia é uma técnica de reconstrução de imagem originalmente desenvolvida para astronomia (Bracewell & Riddle, 1967), microscopia eletrônica (De Rosier & Klug, 1968) e radiologia médica (Ambrose & Hounsfield, 1973). Consiste em posicionar fontes e receptores de algum sinal ao longo de um perímetro dentro do qual se deseja obter a distribuição de alguma propriedade, assumindo que a medida obtida depende desta propriedade.

No contexto da geofísica de reservatório, geralmente esta propriedade são as velocidades sísmicas. Na tomografia de tempos de trânsito as recuperamos a partir dos tempos de trânsito da onda direta (Bois *et al.*, 1972; McMechan, 1983; Washbourne *et al.*, 2002) ou refletida (Bording *et al.*, 1986). Naturalmente, abordagens com onda refletida são economicamente mais viáveis devido à possibilidade de aquisição com fontes e receptores dispostos na superfície, enquanto abordagens com onda direta só são possíveis em aquisições do tipo poço-a-poço ou poço-a-superfície, esta última, com baixa cobertura (Stewart, 1991). Na tomografia de forma da onda além dos tempos de trânsito é considerada a forma dos pulsos captados (Wolf, 1969; Devaney, 1984; Wu & Toksöz, 1987).

O procedimento tomográfico requer alguma parametrização do modelo. Por exemplo, o meio pode ser subdividido em superfícies horizontais compostas por um pequeno número de nódulos - isto é, pontos de coordenadas horizontais com velocidade constante - através das quais as velocidades dos outros pontos internos são interpoladas (Lazaratos & Marion, 1997; Washbourne *et al.*, 2002). A maneira convencional consiste na subdivisão do meio em grid retangular dentro dos quais a velocidade atribuída é constante. Métodos baseados em superfícies ou camadas tornam o problema sobredeterminado e têm ganho computacional, mas podem perder resolução lateral. Por outro lado, parametrizações baseadas em grid mantêm a resolução lateral para um número de dados coletados grande.

A inversão tomográfica de tempos de trânsito auxilia a caracterização e monitoramento de reservatórios de hidrocarboneto por ser capaz de determinar sua localização, extensão, conteúdo e evolução (Lazaratos & Marion, 1997; Handayani *et al.*, 2011; Messud *et al.*, 2017). Tais informações são de grande importância para a indústria de petróleo, sobretudo devido

às questões econômicas envolvidas na manutenção da produtividade de campos maduros. Nesta situação se encontra a Bacia do Recôncavo, cujo auge ocorreu na década de 1970 e hoje depende de técnicas refinadas para garantir a produtividade.

Como ferramenta de imageamento sísmico, a tomografia de tempos de trânsito tem a vantagem em relação ao método sísmico de reflexão tradicional de recuperar a distribuição de velocidades com maior resolução uma vez que utiliza fontes de alta frequência. Além disso, é capaz de fornecer um bom modelo inicial para o full waveform inversion (FWI), evitando que se atinja o mínimo local no processo de otimização do modelo (Datta & Sen, 2016). Virieux & Operto (2009) revisam a aplicabilidade da tomografia de tempos de trânsito na construção do modelo inicial do FWI.

Diferentemente do imageamento médico, no qual a trajetória do feixe de raio-X segue uma linha aproximadamente reta independentemente da distribuição de densidades, a trajetória da energia do pulso sísmico no meio acústico - e, consequentemente, o tempo de trânsito correspondente - depende da própria distribuição de velocidades - mais especificamente, do seu recíproco, isto é, as vagarosidades. A relação entre tempos de trânsito e vagarosidades é, portanto, não linear. Tarantola & Valette (1982) descrevem em detalhes maneiras de linearizar problemas não lineares no sentido dos mínimos quadrados. Além desta limitação, os dados adquiridos em campo nunca estão livres da contaminação por ruídos ambientais e ferramentais. Por último, a cobertura do meio é limitada uma vez que não é possível alocar fontes e receptores ao longo de todo o perímetro da região que se deseja imagear. O problema discreto, portanto, é numericamente instável, isto é, a solução a ser obtida é muito sensível a pequenas perturbações no dado, e é dito mal condicionado. Tarantola (2005) descreve matematicamente tais problemas.

Problemas discretos mal condicionados podem se tornar numericamente estáveis por meio de regularização, isto é, procedimento numérico que modifica a natureza do problema original através da introdução de alguma expectativa ou informação sobre a solução. Menke (2018) detalha maneiras de modificá-lo e descreve as particularidades das soluções assim obtidas. Uma das regularizações mais conhecidas, e utilizada no presente trabalho, é a de Tikhonov & Arsenin (1977). Baseada na aplicação de um operador derivada à solução, a função objetivo a ser minimizada engloba tanto a norma dos erros na predição do dado quanto a norma da solução suavizada pelo operador, ponderadas por um fator de regularização a ser determinado. A ideia é solucionar iterativamente o problema inverso com o valor adequado do fator a cada iteração até que alguma convergência seja atingida. Diversas técnicas para determinar os fatores foram desenvolvidas, como a generalized cross validation, ou GCV, (Golub *et al.*, 1979) e a curva L (Hansen, 1992) e aplicadas à tomografia de tempos de

trânsito (Bube & Langan, 1994; Yao & Roberts, 1999; Soupios *et al.*, 2001). No presente trabalho, tanto a GCV quanto a curva L são testadas, e é proposta a denominada curva $\sin \Theta$ para auxiliar a curva L .

A regularização introduzida produz uma solução estável de norma reduzida, mas, como mencionado, não resolve o problema original. A solução obtida, portanto, não representa com fidelidade o modelo verdadeiro. Não sendo possível obter informações adicionais à priori a respeito do modelo, é possível, pelo menos, avaliar de alguma forma a qualidade e as particularidades da solução obtida a partir de informações sobre a matriz núcleo. Os métodos mais empregados envolvem a matriz de covariância ou as matrizes de resolução do dado e do modelo (Menke, 2018), e têm grande aplicabilidade à tomografia sísmica (Yao *et al.*, 1999; Zhang & Thurber, 2007; Xia *et al.*, 2008).

Neste sentido, Barbieri (1974) sugeriu um critério capaz de mensurar os artefatos introduzidos pelo algoritmo de inversão ao identificar as sub-regiões do meio discretizado para as quais o algoritmo de inversão se comportou de maneira inesperada. O critério se baseia na resolução do problema inverso para um modelo complementar definido de modo que, somado ao original, produz uma solução de valores constantes. Do ponto de vista da informação, uma solução e sua complementar são equivalentes. Como geralmente o problema tomográfico é subdeterminado, infinitas soluções existem e aquela que obtemos é apenas uma das pertencentes ao espaço das soluções. Se algum artefato não está presente em duas soluções distintas, então ele não pertence ao espaço das soluções, ou seja, foi produzido equivocadamente pelo algoritmo de inversão (Gordon, 1974). Ao identificar a localização e tamanho desses artefatos, pode-se aproveitar esta informação para aprimorar a solução em algum sentido.

O presente trabalho propõe a adaptação do critério de Barbieri ao problema tomográfico de tempos de trânsito com regularização e apresenta dois algoritmos capazes de identificar as regiões da subsuperfície onde a inversão não ocorreu de maneira esperada. O primeiro critério é baseado na não linearidade entre a distribuição de vagarosidades e a trajetória do raio; o segundo, em uma aproximação linear entre elas. A informação extraída destes algoritmos, batizada no presente trabalho de matriz pseudonula, é utilizada para aprimorar o modelo obtido da inversão no sentido de minimização do seu desvio em relação ao modelo verdadeiro, desde que devidamente filtrada. A aplicabilidade dos critérios apresentados é exemplificada e discutida em dois modelos 2D sintéticos, de pequeno e grande porte, e em dado real do Campo de Dom João, Bacia do Recôncavo.

1

Resolução de sistemas linearizados e regularizados

Um sistema linear é um conjunto finito de equações lineares aplicadas a um conjunto igualmente finito de incógnitas. Do ponto de vista matricial, um sistema linear é um modelo matemático no qual um operador linear é aplicado a um vetor, resultando em outro vetor. Ou seja, cada componente de um vetor é representado por uma combinação linear de outro vetor. A importância dos sistemas lineares surge da sua capacidade de descrever inúmeros fenômenos físicos.

O problema tomográfico de tempos de trânsito consiste em solucionar sistemas lineares. Devido às limitações impostas pelo levantamento sísmico, os sistemas lineares que o representam não têm uma única solução possível. Para contornar esse obstáculo, são utilizados métodos numéricos que levam em consideração particularidades do problema a fim de encontrar uma solução satisfatória. Uma vez formulado o problema, no entanto, a solução não pode ser obtida pelo método convencional de inversão matricial uma vez que, ainda que a matriz tomográfica seja quadrada, ela certamente não terá posto completo e sua inversão requererá algum método alternativo.

Apesar de este capítulo tratar somente de sistemas lineares, o problema tomográfico de tempos de trânsito, em rigor, não o é, isto é, a lei física que o rege tem caráter não linear. Todavia, mesmo problemas dessa natureza podem ser descritos por sistema lineares desde que haja algum procedimento capaz de linearizá-lo. Um método iterativo bastante empregado em problemas geofísicos para esta finalidade é mostrado neste capítulo.

1.1 Modelagem direta e problema inverso

O principal objetivo da geofísica é obter um conjunto mínimo de parâmetros capaz de relacionar completamente sistemas físicos e leis ao conjunto de medidas observadas, isto é, busca-se predizer resultados de medidas ou reconstruir os parâmetros físicos. Ao primeiro objetivo, dá-se o nome de modelagem direta, na qual, partindo-se de um modelo geral e das condições específicas do problema é possível predizer os resultados das medidas. O segundo é o problema inverso (ou inversão) uma vez que caminha no sentido contrário do primeiro: parte-se de um conjunto de dados observados (medidas) e de um modelo geral (lei física) para determinar os valores dos parâmetros do modelo (Snieder e Trampert, 1999). A modelagem direta e o problema inverso também podem ser compreendidos como binômio causa-efeito. No problema direto, os parâmetros do modelo são o dado enquanto os valores medidos são as incógnitas; no problema inverso, o contrário.

Seja $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_M]^T$ o vetor de dimensão M que representa o dado observado e seja $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T$ o vetor de dimensão N que representa os parâmetros do modelo. O problema direto linear é representado por: $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$, onde a matriz \mathbf{G} , de dimensão $M \times N$, é o operador linear que relaciona \mathbf{d} e \mathbf{m} . Se \mathbf{G} é conhecida e inversível, a solução do problema é $\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$, onde \mathbf{G}^{-1} é a matriz inversa de \mathbf{G} . No entanto, \mathbf{G} normalmente não é inversível e um tratamento mais complexo se faz necessário para obter a resolução do sistema.

1.1.1 Problemas mal postos

Um problema inverso é dito mal posto quando ou a solução não existe ou não é única ou não é estável. Abaixo são definidas existência e unicidade da solução e estabilidade do problema:

- *Existência.* Antes de determinar os parâmetros, deve-se definir a possível classe de dados associados ao modelo. Todo modelo contém simplificações e aproximações que devem ser criteriosamente escolhidas para que a existência da solução seja garantida. Informações obtidas por outros métodos são bem-vindas para guiar as simplificações do modelo.
- *Unicidade.* Trata do seguinte questionamento: admitindo-se a existência da solução do problema inverso, pode-se garantir que ela é única? Isto é, é possível encontrar outra configuração dos parâmetros do modelo \mathbf{m} capaz de gerar o mesmo vetor \mathbf{d} , ao lhe aplicar o operador \mathbf{G} ? Se a resposta for positiva, mesmo que o conjunto de dados medidos

for completo e exato, não será possível resolver o problema inverso. Alguns artifícios podem ser usados para diminuir a ambiguidade da solução: i) avaliar suposições adicionais plausíveis; ii) introduzir dados provenientes de medições adicionais; iii) tolerar a ambiguidade se a classe de soluções admissíveis ainda contiver informações decisivas acerca do alvo. Existem duas razões para a não unicidade das soluções, segundo Tarantola e Valette (1982). Em alguns casos, a não unicidade advém do fato de que os dados são discretos, isto é, caso fossem contínuos a solução seria única. Em outros, há ambiguidade devido à própria natureza do problema inverso como, por exemplo, na obtenção do perfil de densidade de uma região da Terra a partir de medidas do campo gravitacional local: o teorema de Gauss afirma que infinitas configurações de densidade fornecem o mesmo valor de campo gravitacional.

- *Estabilidade.* Um problema é dito estável se a solução depende continuadamente dos dados e é dito instável se o contrário ocorrer. Em outras palavras, um problema é estável se uma pequena variação nos valores dos dados ocasiona uma pequena variação nos valores do parâmetro do modelo. Esta propriedade tem grande importância uma vez que os dados geofísicos estão sujeitos a ruídos de diversas naturezas (variação instrumental, erros analíticos, erros de medição, etc.).

O problema tomográfico inverso é mal posto por falhar nas duas últimas condições. Para contornar esse obstáculo, pode-se lançar mão de informações *a priori*, como dados geológicos ou geofísicos provenientes de outros métodos, e tratamentos numéricos que estabilizam o problema.

1.1.2 Sistemas sobredeterminados e subdeterminados

Seja novamente $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$. Para os problemas em geofísica geralmente não é possível encontrar o modelo exato, $\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$, pois \mathbf{G} é singular. Busca-se, porém, uma estimativa de \mathbf{m} que minimize alguma função objetivo. Por exemplo, o modelo estimado no sentido dos mínimos quadrados é $\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{d}$ e, no sentido da mínima estrutura, é $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T[\mathbf{G}\mathbf{G}^T]^{-1}\mathbf{d}$, como será demonstrado na Seção 1.2.

O sistema $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$ pode ser reescrito em notação de somatório:

$$d_i = \sum_{j=1}^N g_{ij} m_j, \quad i = 1, \dots, M, \quad (1.1)$$

onde M é o número de dados d_i e N é o número de parâmetros m_j do modelo. Seja o posto

de \mathbf{G} , $p(\mathbf{G})$, o número de linhas ou colunas linearmente independentes dela, que equivale ao número de linhas não nulas de \mathbf{G} escrita na forma escalonada por linhas. O posto $p(\mathbf{G}) = C$, se e somente se existe pelo menos uma submatriz quadrada de \mathbf{G} de ordem C cujo determinante é não nulo e toda submatriz quadrada de \mathbf{G} de ordem superior a C tem determinante nulo.

O sistema é subdeterminado quando não proporciona informação suficiente para determinar todos os parâmetros do modelo: há mais incógnitas do que dados, ou seja, $N > M$. Se $N < M$, o sistema ainda será subdeterminado se $p(\mathbf{G}) < N < M$. O sistema é sobre determinado quando o número de incógnitas é menor do que o número de dados ($N < M$) e $p(\mathbf{G}) = N$.

1.2 Soluções do problema inverso

A maneira mais simples de solucionar o problema inverso linear $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ é através de métodos baseados no comprimento do erro de predição do dado $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}$ ou no comprimento dos parâmetros do modelo \mathbf{m} na norma L_2 (Menke, 2018). Nesta seção são definidos três diferentes métodos baseados neste princípio e em quais tipos de sistemas cada um deles é apropriado.

1.2.1 Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados obtém a solução que minimiza a soma dos erros quadráticos da predição do dado, dada pela função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{e}\|_2^2, \quad (1.2)$$

onde $\|\cdot\|_2$ é o comprimento do vetor na norma L_2 . $\Phi(\mathbf{m})$ é um parabolóide positivo cujo mínimo global é atingido ao igualar a zero sua derivada em relação a \mathbf{m} , isto é, $\partial\Phi(\mathbf{m})/\partial\mathbf{m} = \mathbf{0}$, e equivale ao modelo estimado, \mathbf{m}^{est} , dado por:

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (1.3)$$

A solução por mínimos quadrados requer a inversa da matriz $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$, de dimensão N . Se o sistema é subdeterminado ($N > M$), $p(\mathbf{G}) \leq M < N \implies p(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \leq M$. Então $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ não admite inversa. Portanto, o método dos mínimos quadrados não é útil para sistemas

subdeterminados, pois, nestes casos, $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ é singular. Por outro lado, o método dos mínimos quadrados é adequada para sistemas sobredeterminados.

1.2.2 Método da mínima estrutura

O método da mínima estrutura tem por princípio a expectativa de que a solução é simples. Simplicidade, neste caso, é definida como a medida do comprimento euclidiano. O método obtém a solução cujo comprimento na norma L_2 é mínimo, sujeita à restrição de que o erro de predição do dado é nulo (Menke, 2018). Utilizando o método de multiplicadores de Lagrange, o problema consiste, portanto, em minimizar a seguinte função objetivo em relação ao \mathbf{m} :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{m}\|_2^2 + \mathbf{t}^T \mathbf{e}, \quad (1.4)$$

onde \mathbf{t} é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. Derivando em relação a \mathbf{m} e igualando a zero é obtido:

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^T [\mathbf{G} \mathbf{G}^T]^{-1} \mathbf{d}. \quad (1.5)$$

A solução por mínima estrutura requer a inversa da matriz $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$, de dimensão M . Se o sistema é sobredeterminado ($N < M$), $p(\mathbf{G}) \leq N < M \implies p(\mathbf{G} \mathbf{G}^T) \leq N$. Então $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$ não admite inversa. Portanto, o método da mínima estrutura não é útil para sistemas sobredeterminados, pois, nestes casos, $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$ é singular.

1.2.3 Método dos mínimos quadrados amortecido

Como visto na Subseção 1.1.2, mínimos quadrados não é útil em problemas subdeterminados. No entanto, uma variante denominada mínimos quadrados amortecido (MQA), é capaz de resolver problemas em que $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ é singular. Baseado em Levenberg (1944), MQA minimiza em relação a \mathbf{m} a seguinte função objetivo:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{e}\|_2^2 + \epsilon^2 \|\mathbf{m}\|_2^2, \quad (1.6)$$

onde o escalar ϵ^2 é um multiplicador de Lagrange.

MQA obtém a solução que minimiza tanto o comprimento do erro de predição do dado quanto o comprimento do modelo na norma L_2 . Ele é uma combinação entre o mínimos

quadrados e a mínima estrutura, e, portanto, é adequado para sistemas constituídos de uma parte subdeterminada e outra sobredeterminada. O fator ϵ^2 é o peso que define a importância relativa dos termos da função objetivo (Menke, 2018). Desenvolvendo $\Phi(\mathbf{m})$ e igualando a zero a derivada em relação a \mathbf{m} , é obtido:

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \epsilon^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (1.7)$$

MQA torna não singular $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ através da adição de uma constante ϵ^2 à sua diagonal principal. Soluções MQA são afetadas pela escolha de ϵ^2 , que deve ser suficientemente pequeno para não afetar demasiadamente a solução e, simultaneamente, grande o suficiente para que o sistema tenha solução.

1.2.4 Regularização

Se pequenas variações no dado de entrada causam pequenas variações na solução, o sistema é dito bem-condicionado, e é mal condicionado se a solução é muito sensível a tais perturbações (Tarantola, 2005). Problemas inversos mal condicionados e mal postos (Seção 1.1) podem se tornar numericamente estáveis por meio de regularização, um procedimento numérico que modifica a natureza do problema original através da introdução de alguma expectativa ou informação sobre a solução (Menke, 2018). No domínio discreto, a regularização consiste na aplicação de algum operador ao modelo. Geralmente, esse operador é a matriz derivada de ordem n calculada por diferenças finitas, \mathbf{D}_n , de modo que a regularização de ordem n , $\mathbf{l}_n = \mathbf{D}_n \mathbf{m}$, força uma suavidade à solução \mathbf{m} .

Uma das regularizações mais conhecidas, e utilizada no presente trabalho, é a de Tikhonov & Arsenin (1977), baseada na minimização da função objetivo $\Phi(\mathbf{m})$ que engloba tanto o comprimento na norma L_2 dos erros na predição do dado quanto o comprimento da solução suavizada pelo operador derivada de ordem n , ponderadas pelo fator de regularização λ :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{e}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{D}_n \mathbf{m}\|_2^2. \quad (1.8)$$

Utiliza-se a regularização de primeira ordem para expectativa de função a ser regularizada constante, e de segunda e terceira ordens, respectivamente, para expectativa de funções lineares e quadráticas. Equação 1.8 é uma generalização do mínimos quadrados (para $\lambda = 0$) e do mínimos quadrado amortecidos (para $\mathbf{D}_n = \mathbf{I}$). O valor de λ controla a intensidade da suavização do modelo, e produz desde soluções muito suaves - com elevado erro de predição do dado - até pouco suaves - com menor erro de predição do dado.

Há duas soluções para a Equação 1.8, que diferem quanto a variável em relação a qual a função objetivo é minimizada (Bassrei e Rodi, 1993). A primeira é em relação ao vetor erro, e é dada por $\mathbf{m} = [\mathbf{G} + \lambda(\mathbf{G}^{-1})^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2]^{-1} \mathbf{d}$. Se $\lambda = 0$, a solução é obtida da inversa clássica, e, se $\lambda > 0$, a solução exige duas inversões e requer \mathbf{G} quadrada e não singular. A segunda minimiza a função objetivo em relação ao modelo, e é dada por:

$$\mathbf{m}^{est} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (1.9)$$

A solução da Equação 1.9 exige apenas uma inversão, pode ser aplicada tanto em sistemas subdeterminados quanto sobredeterminados e a matriz a ser invertida é sempre quadrada. As modelagens inversas realizadas no presente trabalho são baseadas na resolução deste sistema.

1.3 Técnicas para obter fator de regularização ótimo

Um λ ótimo é aquele capaz de fornecer um modelo consistente com o dado observado, e determiná-lo é um problema à parte. Apresentamos abaixo as técnicas utilizadas no presente trabalho.

1.3.1 Generalized cross validation

Seja \mathbf{m}_λ^k a solução da Equação 1.9 obtida com exclusão do k -ésimo elemento, d_k , do dado \mathbf{d} . Define-se a função validação cruzada como (Golub *et al.*, 1979):

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^M [d_k - d_k(\mathbf{m}_\lambda^k)]^2, \quad (1.10)$$

onde $d_k(\mathbf{m}_\lambda^k)$ é o k -ésimo elemento do dado predito por \mathbf{m}_λ^k . A ideia central é que, se λ é adequado, a solução obtida será capaz de predizer dados faltantes. É possível, no entanto, calculá-la sem a necessidade de solucionar explicitamente o problema inverso para cada dado omitido por (Wahba, 1990):

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^M \frac{d_k - d_k(\mathbf{m}_\lambda)}{1 - a_{kk}(\lambda)}, \quad (1.11)$$

onde \mathbf{m}_λ é a solução da Equação 1.9 para \mathbf{d} completo e a_{kk} é o k -ésimo elemento da diagonal principal de $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{G}[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]^{-1} \mathbf{G}^T$.

A principal limitação da validação cruzada é sua não invariância sob transformação ortogonal, isto é, o problema original e transformado estimam diferentes λ s, apesar de serem equivalentes. Golub *et al.* (1979) expandem a validação cruzada de modo a torná-la invariante sob transformações ortogonais, denominando de validação cruzada generalizada (generalized cross validation, GCV), para o qual λ ótimo minimiza:

$$V(\lambda) = \frac{\|\mathbf{d} - \mathbf{Gm}_\lambda\|^2}{\left\{\frac{1}{M}Tr[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)]\right\}^2}, \quad (1.12)$$

onde $Tr[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)]$ é o traço de $[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)]$.

Segundo Wahba (1990), a teoria que justifica GCV é assintótica. Dados com grande amostragem produzem melhores resultados uma vez que fornecem informações suficientes para separar dado do ruído e ruídos não correlacionáveis.

1.3.2 Curva L

A curva L consiste na análise do gráfico paramétrico, de parâmetro λ , cuja abscissa é $\|\mathbf{d} - \mathbf{Gm}_\lambda\|_2$, e a ordenada, $\|\mathbf{D}_n \mathbf{m}_\lambda\|_2$, onde \mathbf{m}_λ é a solução da Equação 1.9 para determinado λ (Hansen, 1992). Elaborada em escala log – log, a curva assume o formato que a nomeia (Figura 1.1a). Ela expressa o balanceamento entre o erro de predição do dado e a suavidade do modelo. Valores elevados de λ aumentam a suavização do modelo e, ao reduzi-lo, a solução diminui o erro de predição do dado. Segundo Hansen (1992), λ ótimo equilibra suavização do modelo e erro do dado, e está localizado no ponto de maior inflexão da curva.

Embora a curva L pareça representar um elevado custo computacional por demandar certo número de resoluções do sistema a cada iteração, ela torna a inversão numericamente estável e acelera o processo de convergência, diminuindo o número de traçado de raios necessários (Santos *et al.*, 2006). Vale ressaltar que o objetivo da inversão com regularização não é somente minimizar o erro de predição do dado. A solução deve ter significado físico e isto pode significar a seleção de uma solução mais suavizada, ainda que com erro maior.

1.3.3 Curva $\sin \Theta$

A escolha de λ a partir da curva L exige algum método de mapeamento do ponto de maior inflexão da curva, como regularization tools (Hansen, 2007) ou a curva Θ (Santos *et al.*, 2006). É proposto no presente trabalho a denominada curva $\sin \Theta$, baseada na avaliação do gráfico do seno do ângulo entre a reta vertical e a reta que liga dois pontos consecutivos na curva L , correspondentes a λ s consecutivos. Apesar do nome, a curva L pode apresentar

desvios do formato esperado, os quais a curva auxiliar deve ser capaz de reconhecer. As Figuras 1.1a, 1.1d e 1.1g mostram os três principais formatos da curva L , e as Figuras 1.1b, 1.1e e 1.1h, as curvas $\sin \Theta$ correspondentes, nos aqui chamados Exemplos A, B e C. As curvas L exibidas na Figura 1.1 são provenientes de inversões com dados sintéticos. Em todos os casos, λ ótimo corresponde ao primeiro para o qual $\sin \Theta(\lambda) \geq K$, onde $0 < K < 1$ é um valor previamente estabelecido.

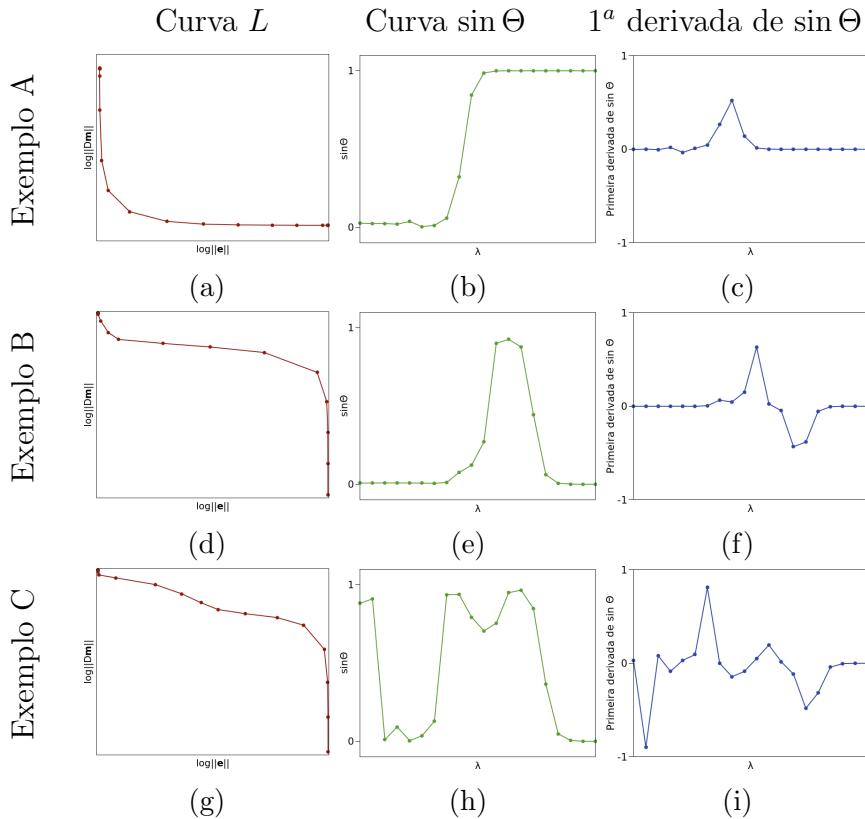


Figura 1.1: Formatos típicos da curva L e das curvas $\sin \Theta$ e 1^{a} derivada de $\sin \Theta$ associadas.

No Exemplo A, a curva L assume o formato esperado. Nas regiões localmente verticais, $\sin \Theta(\lambda)$ é aproximadamente zero. À medida que se caminha ao longo da curva L no sentido de crescimento de λ , o ponto de maior inflexão é atingido e $\sin \Theta(\lambda)$ cresce até seu valor máximo, onde permanece. No Exemplo B, a curva L apresenta dois pontos de inflexão separados por um trecho horizontal, de modo que a curva $\sin \Theta$ associada volta a se anular após atingir um máximo, antes do qual está contido o λ ótimo. O Exemplo C é uma generalização dos Exemplos A e B, no qual os pontos de inflexão da curva L são separados por uma curva com inclinação variável. Possui, ainda, logo no início da curva, um terceiro ponto de inflexão que é visível apenas na curva $\sin \Theta$, onde $\sin \Theta(\lambda) \approx 1$, para $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ (nesta seção, i em $\lambda = i$ é o índice i em $\lambda(i)$, para $i = 1, \dots, n$, e não o valor $\lambda(i)$). A curva $\sin \Theta$ associada ainda é composta por outros dois máximos separados por um mínimo local, e se anula para os pontos externos a esses máximos. O mínimo local corresponde

à mudança na inclinação da curva L , e o λ ótimo corresponde a algum ponto anterior ao primeiro máximo.

Soluções de problemas tomográficos são geralmente obtidas por processos iterativos que podem durar dezenas de horas. Desta forma, não apenas é preciso encontrar λ adequado em cada iteração, como também obtê-los de forma automatizada. A avaliação da curva L a partir unicamente da curva $\sin \Theta$ garante o primeiro requisito, sem sombra de dúvidas, mas um algoritmo baseado somente na avaliação dela pode falhar no segundo requisito. Uma automação do procedimento demanda a análise conjunta da curva $\sin \Theta$ e da sua primeira derivada, ou seja, a função cosseno de λ (Figuras 1.1c, 1.1f e 1.1i). O procedimento a seguir garante a correta interpretação da curva $\sin \Theta$ e a aplicação automatizada do método para identificar o λ ótimo.

Seja $d(\lambda) = \sin \Theta(\lambda + 1) - \sin \Theta(\lambda)$ a discretização da função derivada por diferenças finitas, para $\lambda = 1, 2, \dots, n - 1$ e $d(n) = d(n - 1)$. Se $d(\lambda) \geq 0$, para $\lambda = 1, \dots, n$, então é o caso do Exemplo A. Se para todo i tal que $d(i) < 0 \implies d(j) \leq 0$, para $j = i + 1, \dots, n$, então é o caso do Exemplo B. Para ambos os casos, $\sin \Theta(\lambda)$ é comparado ao escalar $0 < K \leq 1$, previamente definido, para $\lambda = 1, \dots, n$, até que $\sin \Theta(\lambda = k) \geq K$, e $\lambda(k)$ é o valor ótimo. Se para algum i , $d(i) < 0 \implies d(j) > 0$, para pelo menos algum $j = i + 1, \dots, n$, então é o caso do Exemplo C, e $\sin \Theta(\lambda)$ é comparado a K , para $\lambda = i + 1, \dots, n$, até que $\sin \Theta(\lambda = k) \geq K$, e $\lambda(k)$ é o valor ótimo. Para os três casos, se não houver k tal que $\sin \Theta(k) \geq K$, deve-se repetir o procedimento para K menor até a convergência.

1.4 Linearização de problemas não lineares

Nem sempre os fenômenos da natureza são descritos por relações lineares. O problema tomográfico de tempos de trânsito, por exemplo, relaciona de maneira não linear o tempo de trânsito associado a um raio e a distribuição de vagarosidades do meio uma vez que a trajetória do raio é dependente dessa distribuição. Problemas não lineares só podem ser representados pela função direta $d = g(m)$ (Oldenburg e Li, 2005). No entanto, se a função é bem comportada, então g pode ser aproximada pela série de Taylor de primeira ordem em torno do modelo de referência m_0 (Sen e Stoffa, 2013):

$$g(m_0 + \delta m) = g(m_0) + \frac{\partial g(m)}{\partial m} |_{m=m_0} \delta m + \dots, \quad (1.13)$$

onde δm é uma pequena perturbação em m e foram ignorados os termos de segunda e maiores ordens. Para o conjunto de M medidas d associadas ao mesmo modelo m discretizado por

N elementos, a expansão de Taylor acima produz o sistema linear:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{m}, \quad (1.14)$$

onde \mathbf{G} é a matriz sensibilidade, com componentes $G_{ij} = \partial g_i / \partial m_j |_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}$, para $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, N$. O sistema é, portanto, linear para as perturbações no dado, $\Delta \mathbf{d}$, e no modelo, $\Delta \mathbf{m}$.

1.5 Métodos de resolução de sistemas lineares

Nesta seção, são detalhados os dois métodos de resolução de sistemas lineares utilizados no presente trabalho, a pseudoinversa por decomposição em valores singulares e o gradiente conjugado.

1.5.1 Pseudoinversa por decomposição em valores singulares

Nesta subseção, serão definidos a pseudoinversa de uma matriz retangular, a decomposição em valores singulares dessa matriz para obter sua pseudoinversa e um método eficiente para extrair da matriz sua informação dominante.

Pseudoinversa

Uma matriz quadrada e de posto completo admite inversa. Nos problemas geofísicos, no entanto, é recorrente necessitar inverter matrizes retangulares. É possível encontrar uma substituta suficiente para a matriz inversa exata, no sentido de minimização de erro quadrático, denominada pseudoinversa (Penrose, 1955).

Seja \mathbf{G} , de dimensão $M \times N$, uma matriz real. A matriz \mathbf{G}^+ , de dimensão $N \times M$, é a pseudoinversa de \mathbf{G} com as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{G} = \mathbf{G}$,
2. $\mathbf{G}^+\mathbf{G}\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^+$,
3. $(\mathbf{G}\mathbf{G}^+)^T = \mathbf{G}\mathbf{G}^+$,
4. $(\mathbf{G}^+\mathbf{G})^T = \mathbf{G}^+\mathbf{G}$.

Se essas propriedades são satisfeitas, \mathbf{G}^+ é única. É possível encontrar \mathbf{G}^+ de qualquer matriz não singular \mathbf{G} .

Decomposição em valores singulares

Sejam r o posto de \mathbf{G} e \mathbf{v}_i , para $i = 1, \dots, N$, o conjunto dos N autovetores ortonormais de $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ com autovalores λ_i associados, isto é, $\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, para $i = 1, \dots, N$. Como $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ é semidefinida positiva e $p(\mathbf{G}^T\mathbf{G}) = p(\mathbf{G})$, então $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \dots, r$ e $\lambda_i = 0$, para $i > r$. A partir dessas definições, é demonstrável que $\mathbf{G}\mathbf{G}^T\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$, onde \mathbf{u}_i , para $i = 1, \dots, M$, é o conjunto dos M autovetores ortonormais de $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$, e que:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{v}_i &= \sigma_i\mathbf{u}_i, & \text{se } i = 1, \dots, r; & \quad \mathbf{G}\mathbf{v}_i &= \mathbf{0}, & \text{se } i = r + 1, \dots, N, \\ \mathbf{G}^T\mathbf{u}_i &= \sigma_i\mathbf{v}_i, & \text{se } i = 1, \dots, r; & \quad \mathbf{G}^T\mathbf{u}_i &= \mathbf{0}, & \text{se } i = r + 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde $\sigma_i^2 = \lambda_i$. A decomposição em valores singulares é o agrupamento das Equações 1.15:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T, \quad (1.16)$$

onde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_M]$ e $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_N]$ são matrizes ortogonais. A matriz Σ , de dimensão $M \times N$, é retangular diagonal, onde $\Sigma_{ii} = \sigma_i$, para $i = 1, \dots, r$. O cálculo de \mathbf{G}^+ é trivial:

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^T, \quad (1.17)$$

onde Σ^+ é a transposta de Σ na qual todo elemento não nulo da diagonal principal é o seu recíproco. Para fins de filtragem de sinal, é utilizado o somatório de matrizes de posto unitário, dado por:

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (1.18)$$

onde o produto externo $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ ponderado por σ_i é a i -ésima autoimagem de \mathbf{G} . Lanczos (1996) detalha as definições acima.

Power Method

Computar a decomposição em valores singulares de matrizes grandes é custoso e desnecessário quando apenas se deseja extrair a informação dominante. O power method (Golub & Loan,

1996) é uma maneira eficiente de calcular a primeira autoimagem de uma matriz, cujo algoritmo é dado por:

$$\begin{aligned}
 D &= \min(M, N) \\
 \text{Se } M < N : \mathbf{A}_D &= \mathbf{G}\mathbf{G}^T \\
 \text{Se } M \geq N : \mathbf{A}_D &= \mathbf{G}^T\mathbf{G} \\
 \tilde{\mathbf{q}}_D &= [1 \dots 1]^T \\
 \mathbf{q}^0 &= \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|_2} \\
 \mathbf{z}^k &= \mathbf{A}\mathbf{q}^{k-1} \\
 \mathbf{q}^k &= \frac{\mathbf{z}^k}{\|\mathbf{z}^k\|_2} \\
 \lambda^k &= \mathbf{q}^{k,T}\mathbf{A}\mathbf{q}^k \\
 \text{Até } |\frac{\lambda^k}{\lambda^{k-1}} - 1| &\approx 0: \text{ critério de convergência} \\
 \sigma_1 &= \sqrt{\lambda^k} \\
 \text{Se } M < N : \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}^k &\implies \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{G}^T\mathbf{u}_1}{\sigma_1} \\
 \text{Se } M \geq N : \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}^k &\implies \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{G}\mathbf{v}_1}{\sigma_1} \\
 \mathbf{G}^R &= \mathbf{G} - \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Para a k -ésima iteração, \mathbf{q}^k é a estimativa de \mathbf{u}_1 ou \mathbf{v}_1 , \mathbf{z}^k é aproximação de um vetor na mesma direção de \mathbf{q}^k e λ^k é a estimativa de λ_1 . \mathbf{G}^R é a matriz residual de \mathbf{G} , isto é, sem a autoimagem dominante.

1.5.2 Gradiente conjugado

O método gradiente conjugado (CG), desenvolvido por Hestenes e Stiefel (1952), resolve sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde \mathbf{A}_N é uma matriz quadrada, simétrica e positiva definida, \mathbf{b} é o dado conhecido e \mathbf{x} é o modelo desconhecido.

Seja uma base vetorial P do espaço \Re^N composta por N vetores \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, mutuamente conjugados em \mathbf{A} , isto é, com produto interno $\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j = 0$, para $i \neq j$. A solução exata \mathbf{h} para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pode ser dada por:

$$\mathbf{h} = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \mathbf{p}_i, \tag{1.20}$$

onde $\alpha_i = \frac{\mathbf{p}_i^T \mathbf{b}}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i}$ foi calculado pré-multiplicando a equação por $\mathbf{p}_i^T \mathbf{A}$.

As componentes de \mathbf{h} , portanto, podem ser determinadas desde que se conheça a base P , custoso do ponto de vista computacional. No entanto, é possível calcular uma boa aproximação de \mathbf{h} de maneira iterativa, como segue. Considere a função objetivo $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e}$, onde $\mathbf{e} = \mathbf{h} - \mathbf{x}$ é o erro de \mathbf{x} como estimativa de \mathbf{h} . Desenvolvendo e reescrevendo a função objetivo, temos $F(\mathbf{x})$, dada por:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (1.21)$$

O ponto de mínimo de $F(\mathbf{x})$ é a solução exata \mathbf{h} do sistema: $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{h}$. O resíduo \mathbf{r} de \mathbf{x} como estimativa de \mathbf{h} , definido como $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$, aponta no sentido oposto ao do gradiente no mesmo ponto e é nulo para $\mathbf{x} = \mathbf{h}$. Portanto, de forma iterativa, pode-se estimar a solução $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{h}$ baseando-se na direção e módulo do resíduo associado: quando a estimativa \mathbf{x}_k estiver suficientemente próxima de \mathbf{h} , seu resíduo \mathbf{r}_k tenderá a zero. É demonstrável que os resíduos $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{N-1}$ são mutuamente ortogonais e que valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_j &= 0, & \text{se } i < j, \\ \mathbf{p}_i^T \mathbf{r}_j &= \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i, & \text{se } i \geq j, \\ \mathbf{r}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j &= 0, & \text{se } i \neq j \text{ ou } i \neq j+1, \\ \mathbf{r}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Seja $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ a estimativa inicial de \mathbf{h} . Defina o primeiro vetor da base P como o resíduo de \mathbf{x}_0 , isto é, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$. A partir da ortogonalização de Gram-Schmidt aplicada de modo que a base P seja mutuamente conjugados em \mathbf{A} , é obtido:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \mathbf{p}_i, \quad (1.23)$$

onde $\beta_i = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_i}$. Uma vez que β_i somente não se anula para $k = i$ ou $k = i + 1$, \mathbf{p}_{k+1} pode ser determinado de maneira iterativa:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k, \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}, \quad (1.24)$$

onde β_k foi calculada tomando o transposto da equação 1.23 e pós-multiplicando-a por \mathbf{r}_{k+1} .

A solução exata $\mathbf{x} = \mathbf{h}$, dada pela equação 1.20, pode igualmente ser encontrada por um processo iterativo, onde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ e:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad (1.25)$$

onde $k = 0, \dots, N-1$. Pré-multiplicando-a por \mathbf{A} e subtraindo-a de \mathbf{b} , encontra-se também uma equação iterativa para o cálculo de \mathbf{r}_{k+1} :

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k, \quad \text{e} \quad \alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}, \quad (1.26)$$

onde α_k foi calculado pré-multiplicando a equação acima por $\mathbf{p}_k^T \mathbf{A}$.

As fórmulas utilizadas no método CG são, portanto:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_0 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0, \\
 \alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{Ap}_k}, \\
 \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k, \\
 \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{Ap}_k, \\
 \beta_k &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}, \\
 \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

E os passos do algoritmo são:

1. Início: gera o modelo inicial \mathbf{x}_0 , computa o resíduo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$ e a direção $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$.
2. Rotina geral: uma vez determinados \mathbf{x}_k , o resíduo \mathbf{r}_k e a direção \mathbf{p}_k , computam-se \mathbf{x}_{k+1} , \mathbf{r}_{k+1} e \mathbf{p}_{k+1} , sucessivamente, pelas fórmulas dadas nas equações acima.
3. Resultado final: a solução $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{h}$ é encontrada na N -ésima iteração podendo, porém, ser interrompida antes, mediante avaliação do módulo do resíduo \mathbf{r}_k , para evitar erros de arredondamento numérico.

Aplicabilidade na tomografia de tempos de trânsito com regularização

Por envolver operações com matrizes de dimensão grande, a inversão tomográfica de tempos de trânsito com regularização é computacionalmente custosa. CG é uma alternativa para resolvê-la por não envolver a inversão matricial. Reescrevendo a Equação 1.9, obtemos:

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n] \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \tag{1.28}$$

Como \mathbf{G} e \mathbf{D}_n são quadradas, simétricas e positivas definidas, então $[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]$ também é, e o método CG pode ser aplicado ao problema.

CG otimizado para matrizes esparsas

No problema tomográfico de tempos de trânsito com regularização \mathbf{G} e \mathbf{D}_n possuem poucos elementos não nulos. Multiplicações entre matrizes dessa natureza - ditas esparsas - e algum vetor envolve uma grande quantidade de cálculos cujos resultados são zero. Ademais, não há necessidade de armazenar na memória matrizes tão grandes, mas com tão poucos elementos

úteis. Scales (1987) ensina uma conhecida técnica que decompõe matriz esparsa em três vetores capazes de substituí-la. Dessa forma, é possível multiplicá-la - ou sua transposta - por um vetor de maneira otimizada, poupano espaço na memória e tempo de processamento. Detalhes sobre a técnica e sua implementação são encontrados em Scales (1987).

No presente trabalho, esta técnica foi incorporada ao CG na resolução do problema inverso de maneira similar ao de Scales (1987) e igual ao de Sá (1996), que o denominou Conjugado Gradiente com Regularização (CGr). Resumidamente, o método CGr considera $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$ e substitui as equações 1.27 por um conjunto de multiplicações entre matriz esparsa decomposta e vetor ou soma de vetores. O algoritmo CGr é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_0 &= \mathbf{0} \\
\mathbf{s}_0 &= \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}_0 \\
\mathbf{t}_0 &= \mathbf{D}\mathbf{m}_0 \\
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{G}^T \mathbf{s}_0 - \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{t}_0 \\
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}_0 \\
\mathbf{q}_0 &= \mathbf{G}\mathbf{p}_0 \\
\mathbf{w}_0 &= \mathbf{D}\mathbf{p}_0 \\
\alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k + \lambda \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k} \\
\mathbf{m}_{k+1} &= \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\
\mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{q}_k \\
\mathbf{t}_{k+1} &= \mathbf{t}_k + \alpha_k \mathbf{w}_k \\
\mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{G}^T \mathbf{s}_{k+1} - \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{t}_{k+1} \\
\beta_k &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k} \\
\mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \\
\mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{G}\mathbf{p}_{k+1} \\
\mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{D}\mathbf{p}_{k+1}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

2

Tomografia de tempos de trânsito

Neste capítulo são apresentadas duas maneiras de se realizar o traçado de raios. A primeira é baseada na equação do raio, que descreve o caminho percorrido pela energia da onda sísmica de alta frequência no meio acústico. A segunda é baseada na teoria dos grafos numa aplicação direta do princípio de Fermat. Por fim, a equação do problema tomográfico de tempos de trânsito com regularização é detalhada, assim como os parâmetros e procedimentos adotados nas inversões com dado sintético.

2.1 Traçado de raios por equação do raio

Raio é o ente matemático que representa o caminho ao longo do qual a energia de uma onda se propaga no meio. Na tomografia de tempos de trânsito, é a trajetória da onda sísmica propagada no meio acústico. Em um meio isotrópico que pode ser não homogêneo o comprimento acústico associado ao raio entre os pontos P_0 e P_1 é dado por (Born & Wolf, 1999):

$$I = \int_{P_0}^{P_1} n \, dl, \quad (2.1)$$

onde n é a distribuição dos índices de refração e dl é um comprimento infinitesimal do arco ao longo do raio. Do princípio de Fermat, sabe-se que a energia da onda se propaga ao longo do caminho cujo tempo de trânsito é mínimo. Aplicando-o à Equação 2.1 obtemos a conhecida equação do raio (Wylie & Barrett, 1985),

$$\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \nabla n, \quad (2.2)$$

cuja solução representa a trajetória do raio em um meio isotrópico eventualmente não homogêneo. O vetor \mathbf{r} é a posição de um ponto qualquer ao longo do raio, $\nabla n = dn/d\mathbf{r}$ é o gradiente do índice de refração e $d\mathbf{r}/dl$ é o vetor unitário tangente ao ponto.

A propagação da onda sísmica em termos de raios considera comprimentos de onda negligenciáveis quando comparados às dimensões dos pontos espalhadores, isto é, é uma aproximação de alta frequência da energia da onda (Born & Wolf, 1999). Assim, algoritmos de traçado de raios baseados na Equação 2.2 são úteis desde que o índice de refração varie suavemente. Neste sentido, Andersen & Kak (1982) propuseram algoritmo capaz de modelar suficientemente meios realistas do ponto de vista geológico. Desenvolvendo a Equação 2.2, obtemos:

$$\frac{dn}{dl} \frac{d\mathbf{r}}{dl} + n \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \nabla n. \quad (2.3)$$

Mas podemos reescrever dn/dl como:

$$\frac{dn}{dl} = \frac{dn}{d\mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl}. \quad (2.4)$$

Substituindo o lado direito da equação 2.4 na equação 2.3, obtemos:

$$\left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) \frac{d\mathbf{r}}{dl} + n \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = \nabla n, \quad (2.5)$$

onde $d^2\mathbf{r}/dl^2$ é o vetor curvatura do raio em \mathbf{r} . Ao isolar $d^2\mathbf{r}/dl^2$ acima e o aplicar na aproximação em série de Taylor de segunda ordem de $\mathbf{r}(l + \Delta l)$, onde Δl é um incremento ao comprimento do arco ao longo do raio, obtemos:

$$\mathbf{r}(l + \Delta l) = \mathbf{r}(l) + \frac{d\mathbf{r}}{dl} \Delta l + \frac{1}{2n} \left[\nabla n - \left(\nabla n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right] \Delta l^2. \quad (2.6)$$

Ao representarmos o meio por um grid retangular composto por N_x blocos de mesmo tamanho na direção horizontal e N_z na vertical, cada bloco pode ser identificado pelo par ordenado (p, q) , com $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$. O valor $n(p, q)$ correspondente representa o índice de refração constante dentro do bloco (p, q) . A Figura 2.1 mostra um trecho da trajetória de um raio qualquer nesse meio, discretizado pelos pontos consecutivos

$P_k = (x_k, z_k)$ e $P_{k+1} = (x_{k+1}, z_{k+1})$, separados pela distância Δl . O vetor unitário na direção de propagação em P_k pode ser decomposto nas direções x e z mediante:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \cos \alpha_k \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha_k \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.7)$$

onde $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ são os versores na direção x e z , respectivamente. Por sua vez, o seno e o cosseno do ângulo podem ser discretizados por:

$$\sin \alpha_K = \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta l}, \quad (2.8)$$

$$\cos \alpha_K = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta l}. \quad (2.9)$$

Seja $d = \nabla n \cdot d\mathbf{r}/dl$. Como $\nabla n = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_z \hat{\mathbf{k}}$, onde n_x e n_z são as derivadas parciais de n , então $d = n_x \cos \alpha_k + n_z \sin \alpha_k$. No meio discretizado, n_x e n_z podem ser calculadas pelo método das diferenças finitas:

$$n_x(p, q) = \frac{n(p+1, q) - n(p-1, q)}{2\Delta x}, \quad (2.10)$$

$$n_z(p, q) = \frac{n(p, q+1) - n(p, q-1)}{2\Delta z}. \quad (2.11)$$

O índice de refração está relacionado à distribuição de vagarosidades (recíproco das velocidades sísmicas) por $n = cs$, onde c é a velocidade sísmica em um meio de referência. Assim, podemos decompor a Equação 2.6 nas direções x e z para obter:

$$x_{k+1} = x_k + \cos \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2s_k} (s_{k,x} - d_k \cos \alpha_k) \Delta l^2, \quad (2.12)$$

$$z_{k+1} = z_k + \sin \alpha_k \Delta l + \frac{1}{2s_k} (s_{k,z} - d_k \sin \alpha_k) \Delta l^2, \quad (2.13)$$

As Equações 2.12 e 2.13 estabelecem que, conhecidos a vagarosidade, um ponto do meio e um ângulo de incidência é possível traçar o raio.

2.1.1 Ligação fonte-receptor: Newton-Raphson e shooting method

O traçado de raios exige que se conheça o ângulo inicial que ligue a fonte ao receptor. Para meios homogêneos, o raio é reto e não há dificuldades nesse cálculo. No entanto, para meios

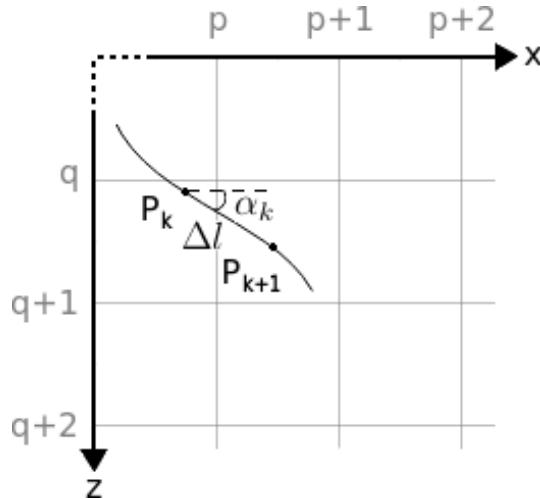


Figura 2.1: Trecho de um meio acústico bidimensional (x, z) isotrópico e não homogêneo discretizado em blocos de mesmas dimensões identificados pelo par ordenado (p, q) , onde $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$, dentro dos quais o índice de refração é considerado constante. Pontos P_k e P_{k+1} representam pontos consecutivos referentes à discretização do trecho de um raio que se propaga pelo meio, separados pela distância Δl , e α_k é o ângulo que a tangente ao raio em P_k forma com o eixo x .

heterogêneos, determiná-lo é uma tarefa custosa do ponto de vista computacional e faz-se necessário lançar mão de alguma técnica que estime seu valor de maneira rápida. Abaixo são descritas duas técnicas utilizadas para este propósito, e que foram usadas no nosso algoritmo: a primeira, como método dominante por ser menos custosa; a segunda, para os casos de insucesso da primeira.

Método de Newton-Raphson

Considere um par fonte-receptor em uma aquisição com geometria poço-a-poço com fonte no poço à esquerda e o receptor no poço à direita. É possível representar a posição z_i que o raio traçado pelo ângulo de lançamento θ_i atinge a borda direita da região ($x = x_{max}$) como a função $z_i = f(\theta_i)$. Linearizando a função $z_i = f(\theta_i)$ pela série de Taylor de primeira ordem em torno da estimativa inicial do ângulo de lançamento θ_0 , temos:

$$f(\theta_i) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta_i - \theta_0). \quad (2.14)$$

A derivada $f'(\theta_0)$ pode ser calculada considerando o ângulo θ_0 equidistante de duas outras estimativas θ_1 e θ_2 , separadas pela distância $2\Delta\theta$, isto é:

$$\theta_1 = \theta_0 - \Delta\theta, \quad (2.15)$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \Delta\theta, \quad (2.16)$$

$$f'(\theta_0) = \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{2\Delta\theta}. \quad (2.17)$$

O objetivo é encontrar o ângulo de lançamento θ_r que trace o raio que atinge o receptor. Substituindo a Equação 2.17 na Equação 2.14 e resolvendo para $\theta_{r'}$ - uma estimativa para θ_r -, encontramos:

$$\theta_{r'} = \theta_0 \pm \frac{(z_{r'} - z_0).2\Delta\theta}{z_2 - z_1}, \quad (2.18)$$

onde o sinal \pm é necessário porque o comportamento real da inclinação da curva $f(\theta_i)$ é desconhecido. O ângulo $\theta_{r'}$ escolhido será aquele para o qual $z_{r'}$ correspondente mais se aproxime da posição vertical real do receptor, z_r . O método de Newton-Raphson aplica a equação 2.18 de maneira iterativa e é interrompido quando $z_{r'} \approx z_r$, situação em que $\theta_{r'} \approx \theta_r$.

Apesar do baixo custo computacional, este método é dependente da estimativa inicial do ângulo de lançamento e do incremento $\Delta\theta$ definido. É possível, portanto, que não seja possível ligar a fonte ao receptor em algumas situações.

Shooting method

No *shooting method*, são definidos um ângulo de lançamento inicial θ_i , um ângulo de lançamento final θ_f e um incremento $\Delta\theta$ de modo que seja realizado o traçado para todos os raios possíveis entre os dois ângulos, espaçados pelo incremento escolhido. Como o objetivo é mapear o maior número possível de raios, é conveniente definir um incremento $\Delta\theta$ minúsculo e uma cobertura angular elevada. Ele é, por esse motivo, um método muito custoso do ponto de vista computacional, devendo ser usado somente para os casos em que o método de Newton-Raphson falhe.

2.2 Traçado de raios por grafos

Grafo, representado matematicamente por $G(N, A)$, é uma estrutura composta por um conjunto N não vazio de objetos denominados nós (ou vértices) e por um subconjunto de pares não ordenados destes objetos, A , denominado arcos (ou arestas). Uma rede, (G, D) , é um grafo com uma função peso $D : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$, a qual associa a cada aresta um número real.

Diversos problemas práticos podem ser representados por grafos. Por exemplo, se os nós representarem cidades, se os arcos representarem estradas que ligam as cidades, e se os pesos representarem o comprimento de cada estrada, é possível calcular o caminho de menor distância entre duas cidades quaisquer do mapa.

É possível formular o problema tomográfico de tempos de trânsito através de grafos. O presente trabalho utiliza algoritmo desenvolvido pelo Dr. Jessé Carvalho Costa em metodologia como segue. Represente o meio por um grid composto por blocos quadrados. Em cada borda de bloco é fixado um número constante de nós equidistantes, que são as posições disponíveis para a propagação da onda sísmica. Os arcos originados pelo nó j são somente aqueles que o conectam aos nós localizados nas bordas dos blocos adjacentes à borda em que ele se encontra, exceto aos nós localizados na borda do próprio nó j . O conjunto de nós conectados ao nó j define o seu *forward star*, conjunto $FS(j)$. O peso associado a cada arco do grid é o tempo de trânsito da onda sísmica propagada desde o nó de origem até o nó terminal, e é facilmente calculado como o produto da distância entre os nós e a vagarosidade no bloco. Os pesos devem ser os tempos de trânsito e não as distâncias para que seja respeitado o princípio de Fermat de tempo de trânsito mínimo.

Um método computacionalmente eficiente para calcular o caminho de tempo de trânsito mínimo desde um nó de origem fixo j até todos os outros do grid é o algoritmo de Dijkstra (1959), cujas etapas são dadas abaixo:

- Inicialmente, a todos os nós é atribuída a condição de não-visitado, $NVIS = N$. O tempo de trânsito mínimo desde o nó de origem fixo j até a cada nó k do grid é infinito, $TM(j, k) = \infty, \forall k \neq j \in N$, e $TM(j, j) = 0$. O nó antecessor a cada nó do grid é vazio, $NA(k) = \emptyset, \forall k \in N$.
- A primeira iteração parte do nó de origem fixo j e atualiza $TM(j, i)$, $\forall i \in FS(j)$, desde que seja menor do que o seu valor antigo. É atribuído $NA(i) = j$, $\forall i \in FS(j)$ e o nó j é promovido à condição de nó visitado, $VIS = \{j\}$ e $NVIS = N - \{j\}$.
- A segunda iteração tem como origem o nó $l = k \in NVIS$ tal que $TM(j, l) = \min\{TM(j, k)\}$, $\forall k \in NVIS$. São atualizados $TM(j, i)$, $\forall i \in FS(l) \cap NVIS$ como $TM(j, i) = TM(j, l) + TM(l, i)$ desde que seja menor do que o valor antigo, situação que atribui $NA(i) = l$. Ao final da iteração, $VIS = \{j, l\}$ e $NVIS = N - \{j, l\}$.
- O processo iterativo acima é finalizado quando $NVIS = \{k\}$ e $FS(k) = \emptyset$.

Desta forma, ao se considerar a fonte sísmica localizada no nó de origem fixo j e o receptor em algum outro nó do meio, o raio é traçado respeitando o princípio de Fermat.

Moser (1991) foi o pioneiro na aplicação de grafos ao problema tomográfico sísmico. Lá, é detalhada a metodologia supracitada e outras para representar o problema, além do algoritmo de Dijkstra e modificações dele mais eficientes do ponto de vista computacional.

O traçado de raios por grafos tem grandes vantagens. É independente da complexidade e dimensionalidade do modelo de vagarosidades e é sempre capaz de encontrar o caminho de tempo de trânsito mínimo. Não há restrição em relação à teoria do raio clássica, isto é, caminhos de raios difratados e zonas de sombra são corretamente encontrados. O tempo de processamento independe da complexidade do modelo e é quase linearmente dependente do número de nós no grid, enquanto a precisão do resultado é quadraticamente dependente do número de nós por coordenada e do número de arcos por nó.

2.3 Modelagem direta

Da Equação 2.1, é intuitivo deduzir que o tempo de trânsito do raio i , t_i , é a integral da vagarosidade ao longo do raio (Scales, 1987):

$$t_i = \int_{raio\ i} s \, dl. \quad (2.19)$$

Como a trajetória do raio depende do modelo de vagarosidades, t_i e s estão relacionados de maneira não linear. É possível linearizá-la por aproximação em série de Taylor de primeira ordem em torno de um modelo de vagarosidades inicial (Seção 1.4). Para um conjunto de M raios, o problema linearizado é dado por:

$$\Delta \mathbf{t} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{s}, \quad (2.20)$$

onde o vetor-coluna $\Delta \mathbf{t}$, com M componentes, contém as diferenças entre os tempos de trânsito observados e modelados pela distribuição de vagarosidades inicial. O vetor-coluna $\Delta \mathbf{s}$, com N componentes, onde $N = N_x N_z$, contém a diferença entre a vagarosidade verdadeira e inicial de cada bloco. Os elementos G_{ij} da matriz tomográfica \mathbf{G} correspondem à distância percorrida pelo raio i no bloco $j = (q-1)N_x + p$, com $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$, no modelo inicial, e são obtidos pelo algoritmo de traçado de raios. Como cada raio atravessa somente um pequeno número de blocos, \mathbf{G} tem poucos elementos não nulos e é dita esparsa.

2.4 Inversão com regularização

Há duas abordagens para a inversão com regularização, descritas nas próximas subseções.

2.4.1 Inversão linear

A inversão linear com regularização é baseada na solução da Equação 1.9 de maneira não iterativa a partir do traçado de raios em meio homogêneo. É uma aproximação válida para meios sem grandes contrastes de velocidades, mas falha para arcabouços geológicos mais complexos, onde raios retos não são capazes de representar o comportamento real da onda sísmica. Define-se um modelo \mathbf{s} constante de modo que \mathbf{G} seja obtido por traçado de raios retos. A Figura 2.2 mostra o fluxograma.

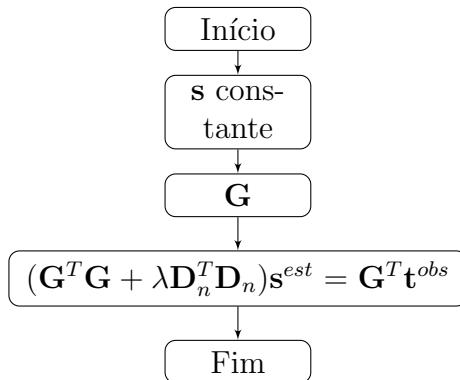


Figura 2.2: Fluxograma adotado na inversão linear.

2.4.2 Inversão linearizada

A inversão linearizada com regularização é baseada na solução iterativa da Equação 1.9. O algoritmo parte de uma estimativa inicial do modelo, \mathbf{s}_0 constante, que produzirá \mathbf{G}_0 . Uma modelagem direta calcula o tempo de trânsito \mathbf{t}^{cal} referente a esse modelo. A perturbação do modelo, $\Delta\mathbf{s}$, é, então, estimada para a perturbação $\Delta\mathbf{t}$, calculada em relação ao dado observado, \mathbf{t}^{obs} .

O passo seguinte depende do comportamento de $\Delta\mathbf{s}$. Ele definirá se haverá uma próxima iteração - onde o modelo é atualizado - ou se o processo é dado por finalizado, situação em que o modelo corrente é o modelo estimado, \mathbf{s}^{est} . Essa avaliação pode ser feita por meio da análise do comprimento do vetor $\Delta\mathbf{s}$, do desvio em relação ao modelo corrente, do comportamento da curva $\Delta\mathbf{t}$ correspondente, ou por diversas outras formas. Foi escolhido como critério de parada o desvio RMS percentual em relação ao modelo corrente, cujo detalhamento é mostrado na seção seguinte. A Figura 2.3 mostra o fluxograma.

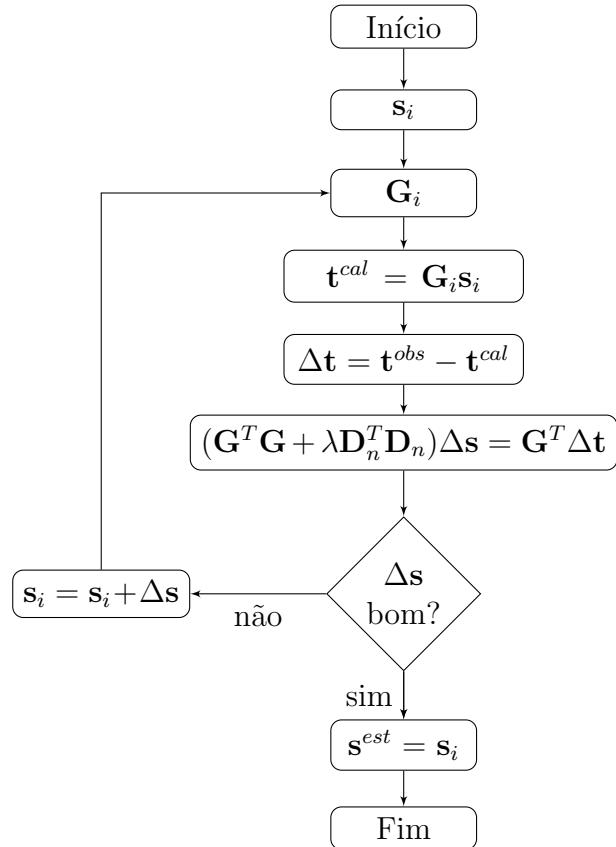


Figura 2.3: Fluxograma adotado na inversão linearizada.

2.5 Simulações

As simulações correspondem à inversão linear e linearizada de dois modelos, um de pequeno porte com arcabouço geológico mais complexo (Modelo 1) e outro de grande porte com arcabouço geológico semelhante ao do campo de Dom João, Bacia do Recôncavo (Modelo 2). O primeiro foi invertido pelo gradiente conjugado (CG) e pela pseudoinversa via decomposição em valores singulares (SVD), enquanto o segundo foi invertido apenas pelo CG devido ao elevado custo computacional do SVD.

Uma boa simulação exige que sejam obtidos os valores dos parâmetros envolvidos no algoritmo de inversão capazes de estimar um modelo similar ao verdadeiro. Os parâmetros são:

- *Jan*: Número de blocos nas direções x e z na vizinhança do bloco central (p, q) para o qual a vagarosidade atribuída será a média aritmética das vagarosidades dos blocos envolvidos.
- n^{CG} : Número de vetores mutuamente conjugados em $\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$, onde $n^{CG} \leq N$, para resolução por CG.

- q^{min} : Menor valor singular considerado em $\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$ na confecção da sua pseudoinversa para resolução por SVD.
- K : Valor mínimo do seno do ângulo formado entre a vertical e a reta que liga dois pontos consecutivos da curva L para selecionar λ pela curva L .

O procedimento adotado se deu como segue. Para o caso linear, a simulação é baseada na escolha de λ pelo menor desvio RMS percentual do modelo em relação ao verdadeiro, ϵ_s , definida na Equação 2.21, para se definir o valor ótimo de n^{CG} (quando solucionado por CG) ou q^{min} (quando solucionado por SVD). Para o caso linearizado, uma simulação preliminar baseada na escolha de λ (de cada iteração) também pelo menor ϵ_s define não apenas n^{CG} ou q^{min} como também J_{an} a serem usados na simulação final, baseada na escolha dos λ_s pela curva L (na qual testes definem K ótimo) ou pelo GCV (quando solucionado por SVD). Destaca-se que em inversões com dados reais só é possível definir λ pela curva L ou GCV uma vez que não se dispõe de ϵ_s .

Testamos como matrizes de regularização a matriz identidade (\mathbf{D}_0) e a derivada parcial de primeira e de segunda ordem na direção x somada à na direção z , \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 , respectivamente. Para traçados de raios por grafos, os operadores são as derivadas parciais de primeira e segunda ordem na direção horizontal, \mathbf{D}_{1H} e \mathbf{D}_{2H} , respectivamente. Os dados foram contaminados por diferentes níveis de ruído, explicado em detalhes na próxima subseção.

Todas as simulações foram realizadas em *notebook* configurado com processador Intel® Core™ i7-8565U de 4 núcleos e placa de vídeo integrada Intel® UHD Graphics 620 (WHL GT2).

2.5.1 Reprodução de situação real

Análise de desempenho

A definição dos valores adequados dos parâmetros nas simulações exige algum critério objetivo que confirme sua confiabilidade. Definimos o desvio RMS percentual do modelo estimado, \mathbf{s}^{est} , em relação ao verdadeiro, \mathbf{s}^{ver} , como:

$$\epsilon_s = \frac{\|\mathbf{s}^{est} - \mathbf{s}^{ver}\|_2}{\|\mathbf{s}^{ver}\|_2} \times 100\%. \quad (2.21)$$

Quanto menor ϵ_s mais o comprimento de \mathbf{s}^{est} se assemelha ao de \mathbf{s}^{ver} no sentido da norma L_2 . Quando o vetor de referência é o modelo estimado na iteração antecedente da inversão linearizada, $\epsilon_s \leq 0.1\%$ é o critério para a finalização do programa de inversão.

No mesmo sentido, o desvio RMS percentual do dado é definido como:

$$\epsilon_{\mathbf{t}} = \frac{\|\mathbf{t}^{cal} - \mathbf{t}^{obs}\|_2}{\|\mathbf{t}^{obs}\|_2} \times 100\%, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{t}^{cal} é o dado calculado.

Ruído gaussiano

Em situação real, os dados adquiridos em campo nunca estão livres da contaminação por ruídos ambientais ou ferramentais. Aplicamos ao dado sintético ruído cuja resultante tem distribuição de probabilidade gaussiana:

$$t_i^{obs} = \tilde{t}_i^{obs} + \alpha \cdot r_i \cdot \tilde{t}_i^{obs}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.23)$$

onde M é o número de raios, \tilde{t}_i^{obs} é o tempo observado livre de ruídos do i -ésimo raio, α é o fator de ruído adicionado e r_i é o valor do ruído adicionado. Os valores α foram escolhidos de modo que o desvio RMS percentual entre o dado contaminado, \mathbf{t}^{obs} , e o não contaminado, $\tilde{\mathbf{t}}^{obs}$, sejam $\mu = 0.1\%$, $\mu = 1\%$ e $\mu = 5\%$, e equivalem, respectivamente, a $\alpha = 0.0067$, $\alpha = 0.067$ e $\alpha = 0.34$, onde:

$$\mu = \frac{\|\mathbf{t}^{obs} - \tilde{\mathbf{t}}^{obs}\|_2}{\|\tilde{\mathbf{t}}^{obs}\|_2} \times 100\%. \quad (2.24)$$

3

Mapeamento do mal funcionamento da inversão e aprimoramento da solução

A inversão acumula erros de diversas naturezas, desde ruídos na aquisição do dado até erros de arredondamento associados aos métodos de resolução do sistema. Além disso, a falta de informações *a priori* prejudica a qualidade do modelo estimado uma vez que, mesmo consistente fisicamente, pode não representar rigorosamente a região invertida. A regularização introduzida, portanto, produz uma solução estável de norma reduzida, mas não resolve o problema original.

Não sendo possível obter mais informações à respeito da solução é possível, pelo menos, avaliar sua qualidade e particularidades a partir de informações da matriz tomográfica. Nas próximas seções explicamos as matrizes de resolução do dado e do modelo - métodos amplamente empregados para avaliação da solução de sistemas lineares -, e o critério de Barbieri (1974), capaz de mensurar os artefatos introduzidos pelo algoritmo de inversão. Por fim, apresentamos dois algoritmos desenvolvidos no presente trabalho baseados neste critério capazes de mapear as regiões do meio onde a inversão não operou de maneira esperada e de aprimorar o modelo estimado no sentido da norma L_2 .

3.1 Matrizes de resolução

A Seção 1.2 mostra diferentes soluções para $\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$ (Equações 1.3, 1.5, 1.7 e 1.9) na forma $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$, onde \mathbf{G}^{-g} é chamada de inversa generalizada (Menke, 2018).

3.1.1 Matriz de resolução do dado

É possível avaliar o quanto a solução, \mathbf{m}^{est} , é capaz de predizer o dado:

$$\mathbf{d}^{pre} = \mathbf{G}\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}[\mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{obs}] = [\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}]\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{R}_d\mathbf{d}^{obs}, \quad (3.1)$$

onde a matriz quadrada \mathbf{R}_d , de ordem M , é denominada matriz de resolução do dado, e descreve o quanto as previsões representam os dados observados. Se $\mathbf{R}_d = \mathbf{I}$, então $\mathbf{d}^{pre} = \mathbf{d}^{obs}$ e o erro de previsão do dado é nulo. Se $\mathbf{R}_d \neq \mathbf{I}$ - mas semelhante, no sentido de elementos não nulos estarem ao redor da diagonal principal - e \mathbf{d}^{obs} é ordenado, então podem ser preditas as médias ponderadas de dados vizinhos, mas não os dados individualmente. Em outras palavras, o formato de \mathbf{R}_d indica se os dados são preditos de maneira independente, ou, ainda, se são bem ou mal resolvidos. Quanto mais \mathbf{R}_d for semelhante à \mathbf{I} , mais bem-resolvidos são os dados (Menke, 2018).

3.1.2 Matriz de resolução do modelo

A matriz de resolução do modelo, \mathbf{R}_m , indica se os parâmetros do modelo podem ser estimados de maneira independente. Considere \mathbf{m}^{ver} o modelo verdadeiro, solução de $\mathbf{G}\mathbf{m}^{ver} = \mathbf{d}^{obs}$. Deseja-se avaliar quanto $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{obs}$ se aproxima dele:

$$\mathbf{m}^{est} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}^{obs} = \mathbf{G}^{-g}[\mathbf{G}\mathbf{m}^{ver}] = [\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}]\mathbf{m}^{ver} = \mathbf{R}_m\mathbf{m}^{ver}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{R}_m é quadrada de ordem N . Se $\mathbf{R}_m = \mathbf{I}$, então cada parâmetro do modelo é determinado independentemente. Se $\mathbf{R}_m \neq \mathbf{I}$, então os parâmetros do modelo estimado são médias ponderadas dos parâmetros do modelo verdadeiro (Menke, 2018).

3.1.3 Estimadores

Como o problema é perfeitamente solucionado se as matrizes de resolução são a matriz identidade, uma maneira conveniente de avaliar a solução é através do tamanho - ou *spread* - do resíduo das matrizes de resolução em relação à matriz identidade no sentido da norma L_2 , isto é, $spr(\mathbf{R}_d) = \|\mathbf{R}_d - \mathbf{I}\|_2^2$ e $spr(\mathbf{R}_m) = \|\mathbf{R}_m - \mathbf{I}\|_2^2$ (Menke, 2018).

No presente trabalho, no entanto, utilizamos estimadores percentuais que comparam \mathbf{R}_d e \mathbf{R}_m com \mathbf{I} , ϵ_{R_d} e ϵ_{R_m} , e com suas diagonais principais, $\epsilon_{R_d,dp}$ e $\epsilon_{R_m,dp}$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{R_d} &= \frac{\|\mathbf{R}_d - \mathbf{I}\|_2}{M} \times 100\%, \\
\epsilon_{R_m} &= \frac{\|\mathbf{R}_m - \mathbf{I}\|_2}{N} \times 100\%, \\
\epsilon_{R_{d,dp}} &= \frac{\|\mathbf{r}_d - \mathbf{u}\|_2}{M} \times 100\%, \\
\epsilon_{R_{m,dp}} &= \frac{\|\mathbf{r}_m - \mathbf{u}\|_2}{N} \times 100\%,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os elementos $r_{d,i} = R_{d,ii}$, para $i = 1, \dots, M$, $r_{m,i} = R_{m,ii}$, para $i = 1, \dots, N$, e $u_i = I_{ii}$, para $i = 1, \dots, M$ ou N .

Adicionalmente, é avaliada a imagem da diagonal principal de \mathbf{R}_m disposta como matriz de mesma dimensão do meio imageado. Quanto mais ela se aproxima da matriz de elementos constantes e iguais a 1, mais confiável é a inversão.

3.2 Critério de Barbieri

No contexto da tomografia médica, Barbieri (1974) definiu um critério capaz de mapear os artefatos introduzidos pelo algoritmo de inversão. Sejam o sistema $\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$, \mathbf{m}^{ver} a solução exata, \mathbf{d} o dado conhecido e \mathbf{w} um vetor de mesma dimensão de \mathbf{m} , com elementos $w_i = \omega$, ω constante, para todo i . Seja uma solução complementar de \mathbf{m}^{ver} , \mathbf{m}^c , definida de tal modo que:

$$\mathbf{m}^{ver} + \mathbf{m}^c = \mathbf{w}. \tag{3.4}$$

Existem infinitos \mathbf{m}^c para \mathbf{m}^{ver} , cada um correspondente a um \mathbf{w} . Apesar de vetores \mathbf{m}^c que diferem apenas por uma constante serem equivalentes em muitos aspectos, para tratar de problemas físicos é preferível que todos os elementos sejam positivos, isto é, $\omega > \max(\mathbf{m}^{ver})$ (Barbieri, 1974). Aplicando a Equação 3.4 ao sistema, obtemos o sistema complementar:

$$\mathbf{Gm}^c = \mathbf{Gw} - \mathbf{d}, \tag{3.5}$$

cujo lado direito é conhecido. A solução estimada $\mathbf{m}^{c,est}$ é obtida pelo mesmo algoritmo de inversão que produziu \mathbf{m}^{est} , e assim obtemos \mathbf{w}^{est} , batizado no presente trabalho como vetor pseudoconstante:

$$\mathbf{m}^{est} + \mathbf{m}^{c,est} = \mathbf{w}^{est}. \tag{3.6}$$

Se o algoritmo de inversão for exato, então $\mathbf{w}^{est} = \mathbf{w}$; se não for, elementos w_i de \mathbf{w} que diferem de ω indicam que os elementos m_i de \mathbf{m} são menos confiáveis. Tal expectativa reside

na ideia de que a obtenção de $\mathbf{m}^{c,est}$ não forneceria mais conhecimento do que \mathbf{m}^{est} uma vez que \mathbf{d} e $\mathbf{Gw} - \mathbf{d}$ são equivalentes do ponto de vista da informação. Portanto, qualquer desvio de \mathbf{w}^{est} em relação a \mathbf{w} seria explicado como artefatos introduzidos pelo mal funcionamento do algoritmo (Gordon, 1974).

3.3 Adaptação do critério de Barbieri à tomografia de tempos de trânsito com regularização

O critério de Barbieri foi originalmente desenvolvido para avaliar a distribuição de densidades recuperada de projeções em radiologia e microscopia eletrônica. Como a trajetória do raio independe das densidades, tanto o sistema original quanto o complementar compartilham a mesma matriz tomográfica baseada em traçado de raios retos.

Bejarano & Bassrei (2016) aplicaram uma variante do critério pioneiramente em tomografia de tempos de trânsito com regularização em abordagem linear e linearizada, como segue. Aplicando a matriz tomográfica \mathbf{G} obtida por traçado de raios retos (se abordagem linear) ou obtida do modelo estimado da inversão, \mathbf{s}^{est} (se abordagem linearizada), à Equação 3.4, obtemos o sistema complementar, $\mathbf{Gs}^c = \mathbf{t}^c$, onde $\mathbf{t}^c = \mathbf{Gw} - \mathbf{t}^{obs}$ é denominado tempo de trânsito complementar e é conhecido. Assim como o original, o sistema complementar é mal posto e requer regularização. Minimizando a função objetivo (Equação 1.8) em relação a \mathbf{s}^c , é produzido o sistema complementar com regularização:

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n] \mathbf{s}^{c,est} = \mathbf{G}^T \mathbf{t}^c, \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{s}^{c,est}$ é o modelo complementar estimado.

Em rigor, no entanto, a relação entre a trajetória do raio e a distribuição de vagarosidades é não linear e a decomposição proposta $s^{ver} + s^c = \omega$ produz:

$$\int_{raio\ i} s^c dl' = \omega \int_{raio\ i} dl'' - t_i^{obs}, \quad (3.8)$$

onde dl' e dl'' são, respectivamente, um comprimento infinitesimal do arco ao longo do raio i na distribuição de vagarosidades complementar s^c e na distribuição constante ω , e $\int_{raio\ i} dl''$ é o comprimento do segmento de reta que liga os pontos extremos do raio. A constante ω deve ser definida de modo que $t_i^c > 0$, para todo i , uma vez que o problema lida com tempos de trânsito positivos. O sistema complementar com regularização associado à Equação 3.8 para M raios é:

$$[\mathbf{G}^{c,T} \mathbf{G}^c + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n] \mathbf{s}^{c,est} = \mathbf{G}^{c,T} \mathbf{t}^c, \quad (3.9)$$

onde a matriz tomográfica complementar, \mathbf{G}^c , é obtida do modelo complementar $\mathbf{w} - \mathbf{s}^{est}$, cujos elementos devem ser positivos para que haja significado físico, o que impõe uma segunda restrição sobre o valor de ω a ser definido no início da aplicação da adaptação do critério de Barbieri à tomografia de tempos de trânsito.

Seja o resíduo desconhecido \mathbf{r} definido de modo que $\mathbf{s}^{ver} = \mathbf{r} + \mathbf{s}^{est}$. É possível obter uma estimativa de \mathbf{r} como segue. Seja $\mathbf{p} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{est}$. Evidentemente, é esperado que os elementos de \mathbf{p} diferentes de zero devem representar os blocos do meio onde a inversão se comportou de maneira inesperada, e os elementos iguais a zero devem representar os blocos onde a inversão foi bem-sucedida. Por este motivo, \mathbf{p} foi batizado no presente trabalho como vetor pseudonulo. Deve-se salientar, também, que elementos de \mathbf{p} referentes a blocos onde a inversão foi mal sucedida podem exibir tanto valores positivos quanto negativos, isto é, é possível que para o bloco j , por exemplo, $w_j^{est} > w_j \implies p_j < 0$. Ao aplicarmos as relações 3.4 e 3.6 à definição do vetor pseudonulo, temos que:

$$\mathbf{p} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{est} = (\mathbf{s}^{ver} - \mathbf{s}^{est}) + (\mathbf{s}^c - \mathbf{s}^{c,est}). \quad (3.10)$$

E, se assumirmos que o sistema original foi o único responsável pela introdução dos artefatos relacionados ao mal funcionamento do algoritmo de inversão, então $\mathbf{s}^c \approx \mathbf{s}^{c,est}$ e, assim, $\mathbf{p} \approx \mathbf{r} = \mathbf{s}^{ver} - \mathbf{s}^{est}$. Portanto:

$$\mathbf{s}^{apr} = \mathbf{p} + \mathbf{s}^{est} \approx \mathbf{s}^{ver}, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{s}^{apr} é o modelo aprimorado pelos critérios propostos. Deve-se salientar que a hipótese de o sistema original responder por todos os artefatos é uma entre diversas outras para distribuir o mal funcionamento do algoritmo entre os sistemas original e complementar. Pode-se definir outros pesos que distribuem os artefatos entre os sistemas.

Ao representarmos \mathbf{p} , de dimensão N , como a matriz pseudonula \mathbf{P} , de dimensão $N_z \times N_x$, o elemento $P_{q,p}$ pertence ao bloco (p, q) do meio e equivale ao elemento p_j , onde $j = (q-1)N_x + p$, para $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$. Partindo-se da conjectura razoável de que as regiões do meio imageado onde a inversão foi mal sucedida devem estar localizadas aleatoriamente, é possível realçar tais elementos de \mathbf{P} a partir da atenuação de todo sinal lateralmente coerente. Para esta finalidade, utilizamos o power method (Golub & Loan, 1996), detalhado na Subseção 1.5.1. O power method é baseado na decomposição em valores

singulares, ou SVD (Lanczos, 1996), técnica comumente aplicada à sísmica de reflexão para filtragem de ruídos coerentes no traço sísmico (Bekara & Baan, 2007; Chiu & Howell, 2008; Porsani *et al.*, 2010). No nosso algoritmo, é responsável por suprimir as primeiras autoimagens desde que os valores singulares correspondentes sejam muito maior que os demais, pois guardam informação lateralmente coerente (Freire & Ulrych, 1988).

Para modelos geológicos bidimensionais complexos, isto é, com grande variação vertical e lateral, a filtragem SVD pode ser operada não na matriz \mathbf{P} completa, mas em submatrizes de \mathbf{P} através de uma janela móvel que percorra inteiramente a matriz pseudonula. A cada bloco do meio está associada uma submatriz pseudonula de dimensões fixas, da qual o elemento central é o bloco em análise. Eventuais supressões de autoimagens dominantes da referida submatriz somente alterariam o valor do elemento de \mathbf{P} referente ao bloco central da submatriz, sem alterar as submatrizes de nenhum outro bloco do meio. Esta avaliação individual dentro de regiões menores do meio garante um melhor mapeamento da coerência em \mathbf{P} .

A partir do critério de Barbieri original, da solução dos sistemas complementares com regularização, do subsequente aprimoramento do modelo estimado e das discussões acerca da filtragem da matriz pseudonula, apresentamos dois algoritmos para avaliar e aprimorar a solução do problema tomográfico de tempos de trânsito. O primeiro, baseado na solução da Equação 3.9, é denominado Critério de Barbieri Modificado (CBM); o segundo é denominado Critério de Barbieri (CB) e é baseado na solução da Equação 3.7, e são detalhados na próxima subseção. Discussões acerca do fator de regularização λ que produz solução adequada das Equações 3.7 e 3.9 são realizadas nas simulações das Subseções 4.1.4, 4.2.4, 5.1.1 e 5.2.1. A solução $\mathbf{s}^{c,est}$ é obtida por meio do mesmo operador \mathbf{D}_n utilizado na inversão de \mathbf{s}^{est} e pelo mesmo método de resolução de sistema.

Assim como há ϵ_s , referente ao modelo estimado, há para o modelo aprimorado o estimador $\epsilon_{s^{apr}}$, definido como:

$$\epsilon_{s^{apr}} = \frac{\|\mathbf{s}^{apr} - \mathbf{s}^{ver}\|_2}{\|\mathbf{s}^{ver}\|_2} \times 100\%, \quad (3.12)$$

que deve ser menor que ϵ_s para garantir o sucesso do critério adotado.

3.3.1 Algoritmos CB e CBM

Para os dois algoritmos apresentados abaixo, considere $P_s(x_{i,s}, z_{i,s})$ e $P_r(x_{i,r}, z_{i,r})$, respectivamente, as coordenadas da fonte sísmica e do receptor para o raio i no meio bidimensional,

\mathbf{s}^{est} a solução da inversão para o dado \mathbf{t}^{obs} , \mathbf{s}^{ver} a solução verdadeira, \mathbf{G} a matriz tomográfica obtida por traçado de raios retos (se abordagem linear) ou obtida a partir de \mathbf{s}^{est} (se abordagem linearizada) e \mathbf{G}^c a matriz tomográfica complementar. O símbolo \leftarrow indica que o arranjo à esquerda foi produzido pelo arranjo à direta. O operador $\mathbf{A}^k(\cdot)$ suprime as primeiras k autoimagens da matriz. \mathbf{W} e \mathbf{W}^{est} são, respectivamente, uma matriz constante e pseudoconstante, \mathbf{P}^k é a matriz pseudonula com supressão de k autoimagens dominantes e \mathbf{R} é a matriz resíduo da qual \mathbf{P}^k é uma estimativa, e todas têm dimensão $N_z \times N_x$. O elemento $W_{q,p}$ de \mathbf{W} pertence ao bloco (p,q) do meio e equivale ao vetor \mathbf{w} , de elementos w_j , onde $j = (q-1)N_x + p$, com $p = 1, \dots, N_x$ e $q = 1, \dots, N_z$.

Algoritmo do Critério de Barbieri Modificado (CBM)

$$\omega \leftarrow t_i^c > 0 \text{ e } s_j^c > 0, \quad i = 1, \dots, M, \\ j = 1, \dots, N,$$

onde

$$\begin{aligned} t_i^c &= \omega \sqrt{(x_{i,r} - x_{i,s})^2 + (z_{i,r} - z_{i,s})^2} - t_i^{obs}, & i &= 1, \dots, M, \text{ e} \\ s_j^c &= \omega - s_j^{est}, & j &= 1, \dots, N. \\ \mathbf{w} &: w_j = \omega, & j &= 1, \dots, N. \\ \mathbf{G}^c &\leftarrow \mathbf{s}^c, & & \text{por traçado de raios.} \\ \mathbf{s}^{c,est} &= [\mathbf{G}^{c,T} \mathbf{G}^c + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]^{-1} \mathbf{G}^{c,T} \mathbf{t}^c, \\ \mathbf{W} &\leftarrow \mathbf{w}, \\ \mathbf{W}^{est} &\leftarrow \mathbf{s}^{est} + \mathbf{s}^{c,est}, \\ \mathbf{P}^k &= \mathbf{A}^k(\mathbf{W} - \mathbf{W}^{est}), \\ \mathbf{p}^k &\leftarrow \mathbf{P}^k, \\ \mathbf{s}^{apr} &= \mathbf{p}^k + \mathbf{s}^{est}, \\ \mathbf{R} &\leftarrow \mathbf{s}^{ver} - \mathbf{s}^{est}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Algoritmo do Critério de Barbieri (CB)

$$\omega \leftarrow t_i^c > 0, \quad i = 1, \dots, M, \\ \text{onde}$$

$$\begin{aligned} t_i^c &= \sum_{j=1}^N G_{ij} \omega - t_i^{obs}, & i &= 1, \dots, M. \\ \mathbf{w} &: w_j = \omega, & j &= 1, \dots, N. \\ \mathbf{s}^{c,est} &= [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{t}^c, \\ \mathbf{W} &\leftarrow \mathbf{w}, \\ \mathbf{W}^{est} &\leftarrow \mathbf{s}^{est} + \mathbf{s}^{c,est}, \\ \mathbf{P}^k &= \mathbf{A}^k(\mathbf{W} - \mathbf{W}^{est}), \\ \mathbf{p}^k &\leftarrow \mathbf{P}^k, \\ \mathbf{s}^{apr} &= \mathbf{p}^k + \mathbf{s}^{est}, \\ \mathbf{R} &\leftarrow \mathbf{s}^{ver} - \mathbf{s}^{est}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

4

Resultados - Modelo Sintético 1

O Modelo 1 (Figura 4.1) representa o arcabouço geológico clássico de um sistema petrolífero com trapa estrutural devido a dobramento em anticlinal, com folhelho como rocha selante (2400 m/s) e geradora (2600 m/s) e arenito como reservatório de gás (1500 m/s) e petróleo (3500 m/s). Possui 200 m de extensão, 400 m de profundidade e foi parametrizado em 800 blocos de dimensão $10\text{ m} \times 10\text{ m}$. Foi simulada aquisição em geometria poço-a-poço com 40 fontes à esquerda e 40 receptores à direita, ambos com espaçamento vertical de 10 m , totalizando 1600 raios. Apesar de ser de pequeno porte, é um modelo de grande complexidade uma vez que exibe variações de velocidade tanto verticais quanto laterais. A Figura 4.2 mostra o diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído modelados por traçado de raios retos.

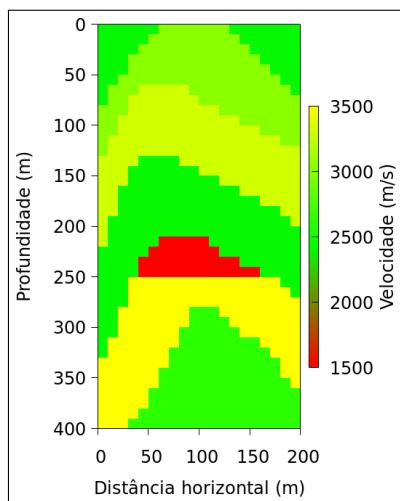


Figura 4.1: Modelo 1.

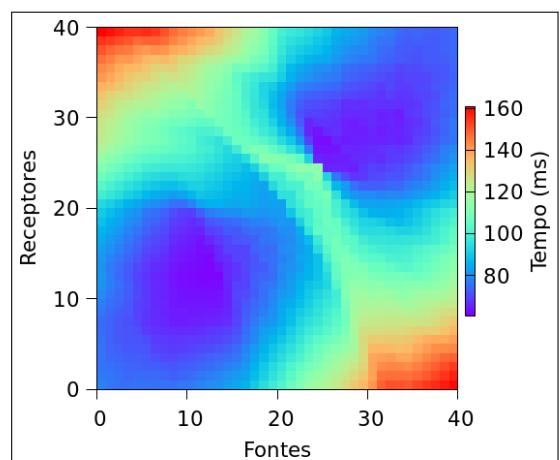


Figura 4.2: Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.

A regularização do problema inverso utilizou:

$$\begin{aligned}
 \lambda(1) &= 0 \\
 \lambda(2) &= 10^{-6}, && \text{para } \mathbf{D}_0, \\
 \lambda(2) &= 10^{-4}, && \text{para } \mathbf{D}_1, \\
 \lambda(2) &= 10^{-2}, && \text{para } \mathbf{D}_2, \\
 \lambda(i) &= \lambda(2) \cdot 10^{i-2}, && \text{p/ } i = 3, \dots, 20.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Doravante, $\lambda(i)$ será identificado nas abscissas dos gráficos, nas tabelas e no texto pelo índice i . O procedimento adotado nas simulações referentes ao Modelo 1 são detalhados na Seção 2.5 e no Capítulo 3.

4.1 Inversão linear

As próximas subseções detalham os resultados e discussões das inversões lineares do Modelo 1 por SVD e CG.

4.1.1 Resolução por SVD

A solução SVD exige o cálculo de $\mathbf{A}^+(\lambda)$, onde $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$. Devido a erros de arredondamento que podem considerar não nulos autovalores verdadeiramente nulos e ao número de condição possivelmente elevado de \mathbf{A} , é necessária prévia seleção dos autovalores a comporem $\mathbf{A}^+(\lambda)$. Como visto na Seção 2.5, a variável q^{\min} cumpre esse papel.

A influência de λ em $\mathbf{A}(\lambda)$ deve ser considerada. Para λ elevado, \mathbf{A} é dominado por $\lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$. De fato, as simulações indicaram que em tal situação o número de condição de \mathbf{A} é baixo e todos os autovalores são elevados, enquanto que para λ pequeno o número de condição é elevado, com acentuado decaimento da magnitude dos autovalores. A Figura 4.3 exemplifica esses resultados para \mathbf{D}_2 .

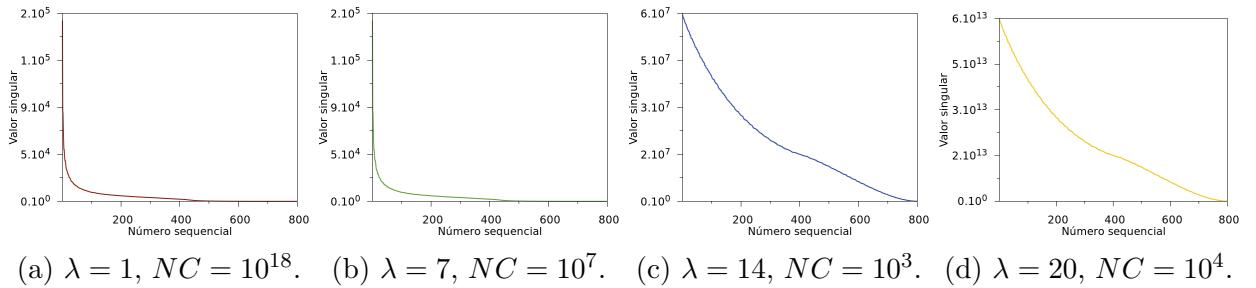


Figura 4.3: Valores singulares de $\mathbf{A}(\lambda)$ regularizada por \mathbf{D}_2 e seu número de condicionamento (NC). A ordem de grandeza do último autovalor é o quociente entre a ordem de grandeza do primeiro por NC .

A Tabela 4.1 exibe ϵ_s e ϵ_t relativos ao λ ótimo - isto é, λ que produziu menor ϵ_s - em

função de q^{min} . q^{min} distantes dos intervalos mostrados fornecem ϵ_s maiores. Para dados não contaminados, a regularização necessária é mínima ou nula e autovalores pequenos não devem ser descartados. Por outro lado, quanto maior μ , mais regularização é necessária e, portanto, os últimos autovalores têm maiores magnitudes em relação ao primeiro caso. Em negrito estão os melhores resultados. Nota-se que ϵ_t é similar ao μ correspondente. O tempo de processamento total de cada simulação foi de aproximadamente 150 segundos.

μ (%)	\mathbf{D}_0				\mathbf{D}_1				\mathbf{D}_2			
	q^{min}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	q^{min}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	q^{min}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)
0	10^{-11}	2	5,92	0,0001	10^{-11}	1	5,92	0	10^{-11}	1	5,92	0
	10^{-8}	2	5,92	0,0001	10^{-8}	1	5,92	0	10^{-8}	1	5,92	0
	10^{-5}	3	5,92	0	10^{-5}	1	5,92	0	10^{-5}	1	5,92	0
	10^{-2}	2	5,93	0	10^{-2}	1	5,93	0	10^{-2}	1	5,93	0
0.1	10^{-1}	9	6,74	0,0815	10^{-3}	5	20,3	0,076	10^{-3}	5	22,1	0,076
	10^0	9	6,74	0,0815	10^{-1}	6	9,08	0,076	10^{-1}	5	9,39	0,076
	10^1	9	6,74	0,0815	10^1	8	6,85	0,079	10^1	7	6,91	0,080
	10^3	9	9,18	0,277	10^3	1	9,18	0,28	10^3	1	9,18	0,277
1	10^{-3}	10	9,50	0,819	10^1	9	15,0	0,79	10^1	8	14,9	0,78
	10^{-1}	10	9,50	0,819	10^2	9	9,63	0,81	10^2	9	9,72	0,82
	10^1	10	9,50	0,819	10^3	1	9,65	0,89	10^3	1	9,65	0,89
	10^3	8	9,65	0,89	10^4	11	26,9	4,38	10^4	11	26,9	3,99
5	10^1	11	17,2	4,37	10^1	10	31,8	4,14	10^1	10	29,1	4,32
	10^2	11	17,2	4,37	10^2	10	22,0	4,14	10^2	10	19,4	4,32
	10^3	11	17,2	4,37	10^3	11	14,9	4,56	10^3	10	14,3	4,35
	10^4	5	25,1	9,30	10^4	11	27,3	6,25	10^4	11	27,1	6,00

Tabela 4.1: Inversões lineares solucionadas por SVD. Melhores resultados em negrito. Tempo de processamento total de cada simulação aproximadamente 150 s.

As simulações com dados sintéticos têm o objetivo de fornecer a faixa adequada dos parâmetros envolvidos para o problema com dado real semelhante, no qual não é possível obter λ por mínimo ϵ_s . É imprescindível, portanto, que sejam avaliadas as curvas L , $\sin \Theta$ e GCV. A Figura 4.4 mostra, para as melhores inversões regularizadas por \mathbf{D}_2 , o comportamento delas.

Para todo μ , quanto maior λ , maior ϵ_s e quanto menos ruidoso o dado, mais estreita é a faixa de λ s elegíveis (Figura 4.4a). ϵ_t segue padrão similar (Figura 4.4b). Para μ elevado, a curva L adquire a forma completa (Figura 4.4c) e se torna mais fácil visualizar λ adequado na curva $\sin \Theta$ (Figura 4.4d), localizado exatamente na base do trecho ascendente mais acentuado, que corresponde ao ponto de inflexão da curva L . ϵ_s se mantém relativamente baixo para uma faixa anterior a λ ótimo (exceto quando $\mu = 0$). Esta informação pode ser útil para dar mais segurança à escolha de K a ser usado para definir λ pela curva L .

Uma vantagem do GCV (Figura 4.4e) é a não necessidade de parâmetro adicional, isto

é, λ ótimo é simplesmente aquele associado ao menor valor da curva. Apenas para $\mu = 0$ o mínimo da curva GCV indicou tal λ . Todavia, ϵ_s de todos os modelos indicados pelo GCV estiveram muito próximos dos indicados por mínimo ϵ_s . O mesmo padrão ocorreu para \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 , evidenciando que é um método confiável.

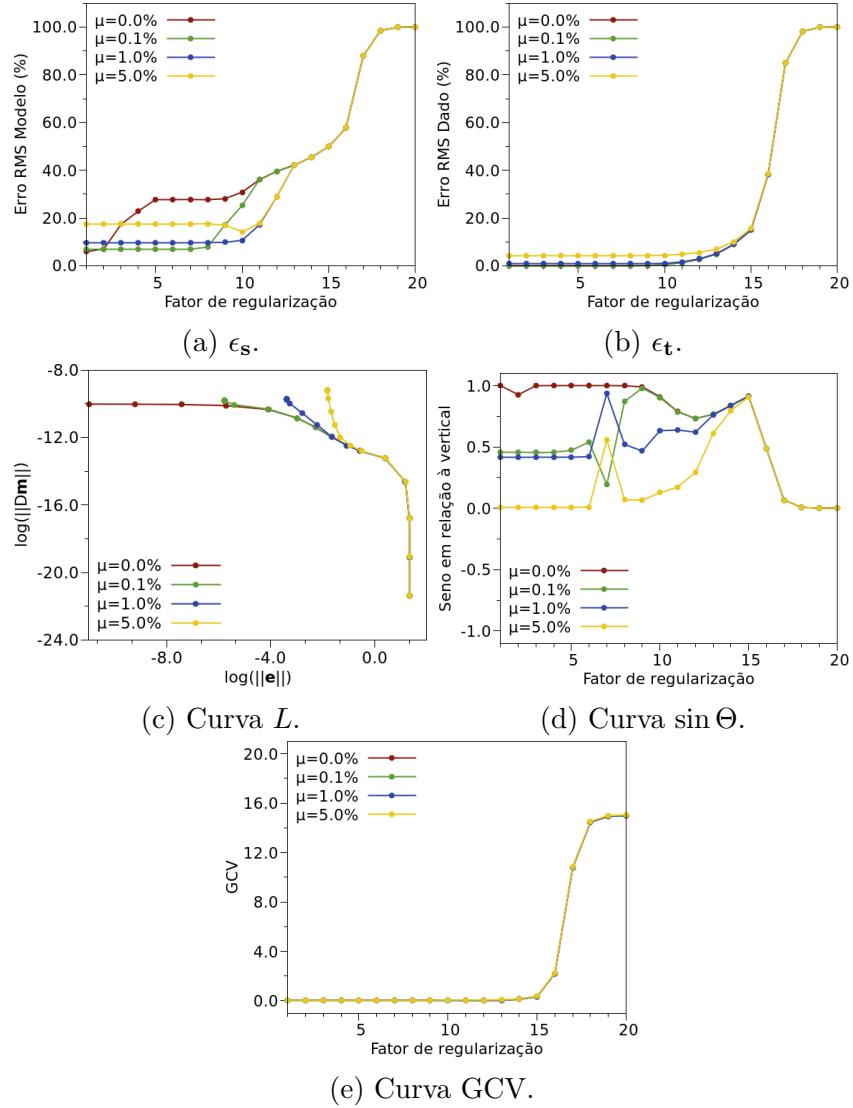


Figura 4.4: Curvas auxiliares referentes às simulações regularizada por \mathbf{D}_2 em negrito da Tabela 4.1.

A Figura 4.5 reúne os modelos de velocidade correspondentes aos resultados em negrito da Tabela 4.1. Como esperado, quanto maior μ , menor a confiabilidade de \mathbf{s}^{est} . Apesar de o estimador ϵ_s ser superior para a regularização por \mathbf{D}_2 do que para \mathbf{D}_0 ou \mathbf{D}_1 quando $\mu = 0.1\%$ e $\mu = 1\%$, os modelos recuperados com tal regularização se mostraram mais representativos do modelo verdadeiro.

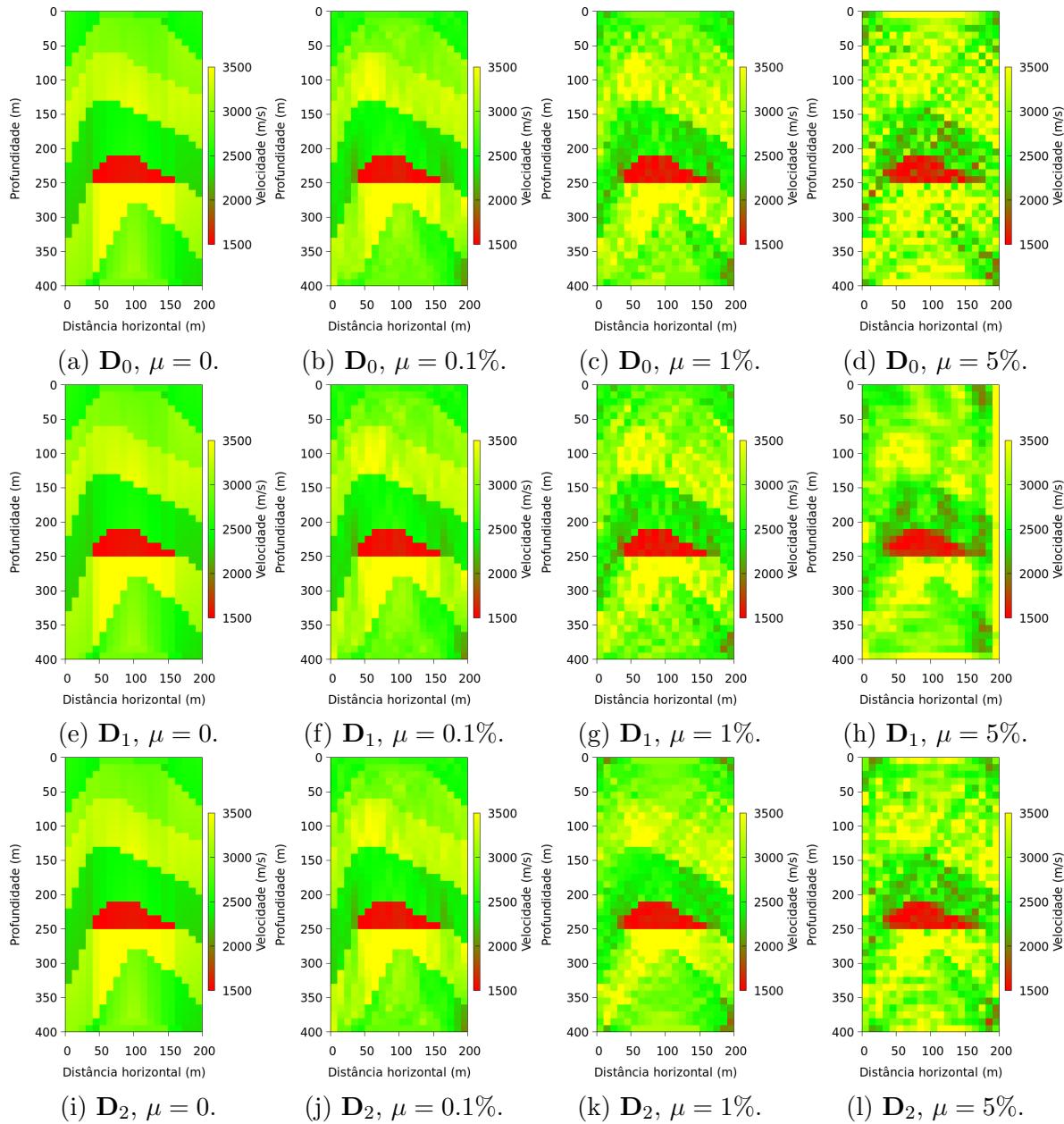


Figura 4.5: Modelos de velocidades referentes às simulações em negrito da Tabela 4.1.

4.1.2 Resolução por CG

A resolução por CG é mais rápida por não calcular \mathbf{A}^+ , mas não fornece curva GCV. A Tabela 4.2 mostra ϵ_s e ϵ_t referentes ao λ ótimo em função de n^{CG} . Em negrito estão os melhores resultados. Quanto maior μ , menor n^{CG} e maior λ . Mesmo para dado pouco contaminado, n^{CG} adequado cai para cerca de 12.5% do seu valor máximo, que é adequado somente para o dado livre de ruído. O tempo de processamento total para cada simulação foi inferior a 9 segundos, mesmo quando $n^{CG} = 800$. Comparada ao SVD (simulações em negrito da Tabela 4.1), a resolução por CG é superior exceto para dado não contaminado.

μ (%)	D_0				D_1				D_2			
	n^{CG}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	n^{CG}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	n^{CG}	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)
0	200	5	6,32	0,0041	500	6	5,99	0,0014	200	6	6,30	0,0041
	400	2	6,14	0,0019	600	6	5,93	0,0012	400	5	6,13	0,0019
	600	5	6,03	0,0011	700	6	5,92	0,0011	600	5	6,01	0,0011
	800	5	5,98	0,0007	800	5	5,96	0,0007	800	5	5,96	0,0007
0.1	50	5	6,99	0,85	50	8	6,93	0,085	50	8	6,96	0,086
	100	8	6,74	0,078	100	7	6,71	0,079	100	7	6,70	0,079
	200	9	6,74	0,082	150	7	6,73	0,078	200	6	7,03	0,077
	400	9	6,74	0,082	200	7	6,94	0,077	400	6	7,93	0,077
1	10	1	10,4	1,03	10	10	9,87	1,0	10	10	10,1	1,04
	15	2	9,11	0,86	15	10	8,68	0,87	20	9	8,72	0,84
	20	9	8,97	0,83	20	9	8,82	0,83	30	9	9,66	0,81
	25	10	9,08	0,83	25	9	8,95	0,82	40	8	10,9	0,80
5	5	1	17,9	4,86	6	11	15,2	4,75	10	10	14,0	4,36
	10	11	16,7	4,43	8	11	13,4	4,58	12	10	13,9	4,34
	15	11	16,9	4,38	10	11	13,5	4,56	14	10	14,4	4,33
	20	11	17,1	4,37	12	11	14,7	4,56	16	10	15,4	4,33

Tabela 4.2: Inversões lineares solucionadas por CG. Melhores resultados em negrito. Tempo de processamento total de cada simulação inferior a 9 s.

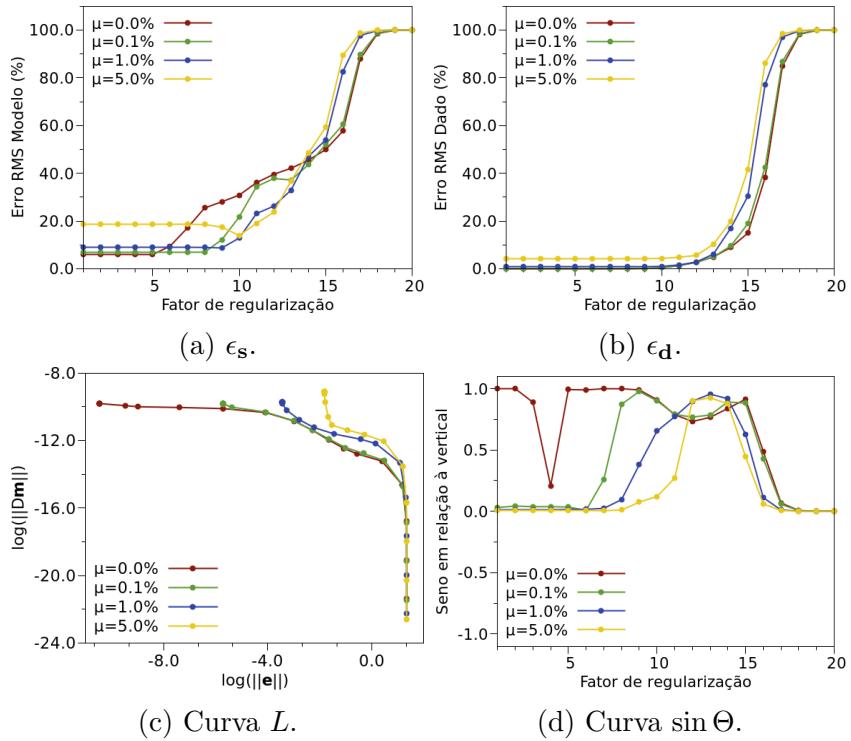


Figura 4.6: Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por D_2 em negrito da Tabela 4.2.

A Figura 4.6 mostra as curvas auxiliares referentes às simulações em negrito da Tabela 4.2 com regularização por D_2 . Para todo μ , λ s anteriores ao λ ótimo produzem ϵ_s relativa-

mente baixo, subindo imediatamente após ele (Figura 4.6a), enquanto ϵ_t mantém a mesma magnitude do ruído adicionado para a mesma faixa de λ citada. Para μ elevado, a curva L assume forma completa (Figura 4.6c), o que torna a curva $\sin \Theta$ mais fácil de ser avaliada (Figura 4.6d). Para todo μ , λ ótimo está localizado na base do trecho ascendente mais acentuado, e corresponde ao ponto de inflexão da curva L . É o mesmo padrão observado na resolução por SVD, mas melhor definido.

A Figura 4.7 reúne os modelos de velocidade correspondentes às melhores simulações da Tabela 4.2.

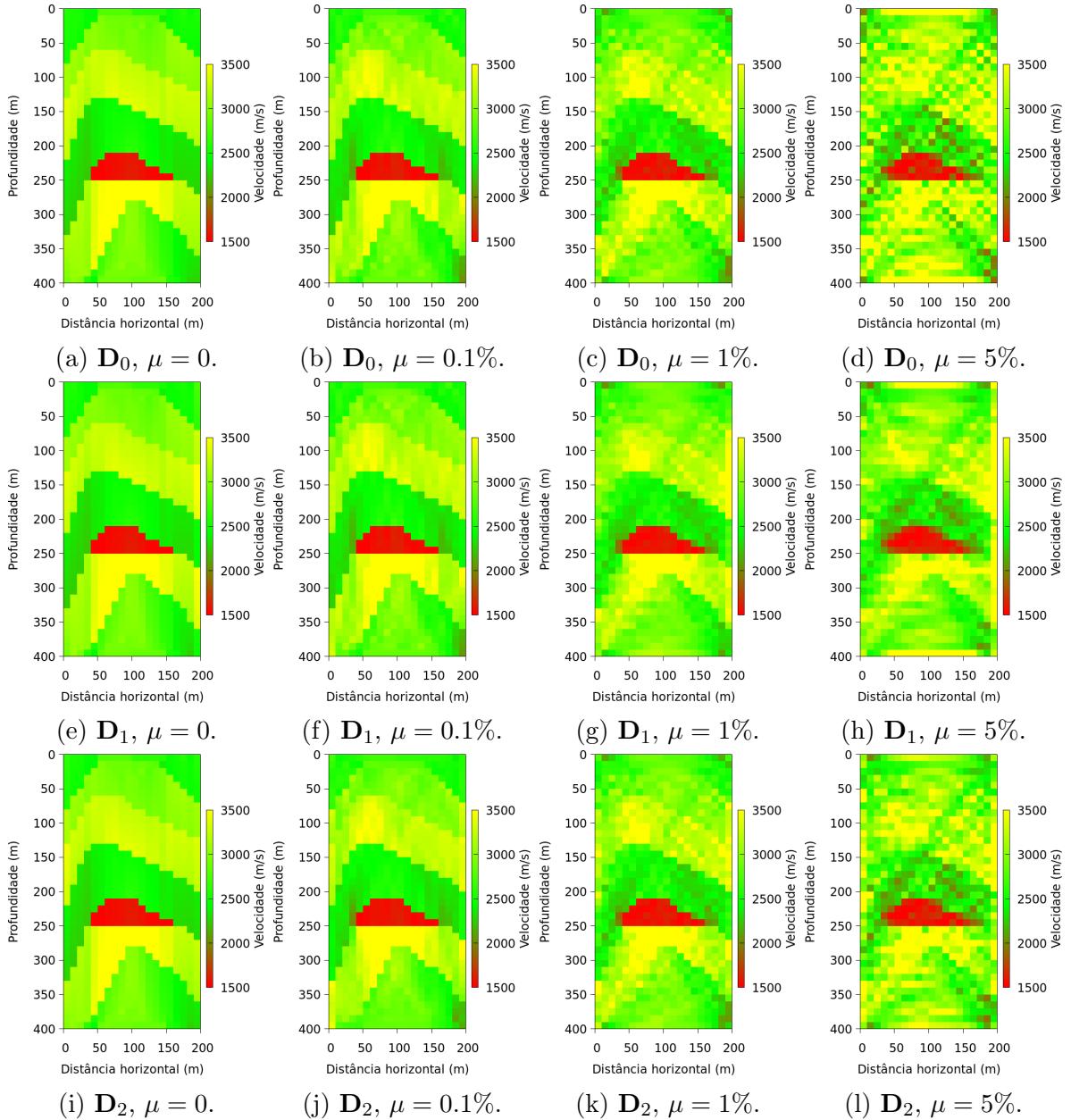


Figura 4.7: Modelos de velocidade referentes às simulações em negrito da Tabela 4.2.

4.1.3 Matrizes de resolução

A Tabela 4.3 reúne os estimadores das matrizes de resolução em função de q^{min} e λ para o caso regularizado por \mathbf{D}_2 . Para q^{min} fixado, \mathbf{R}_d e \mathbf{R}_m somente são influenciados por λ demasiadamente elevado, caso contrário os estimadores são iguais uma vez que as matrizes associadas se mostraram aproximadamente as mesmas. O aumento no valor dos estimadores para q^{min} crescentes indicam que as matrizes de resolução associadas se afastam da matriz identidade quando mais valores singulares são suprimidos. Dito de outra maneira: nestes casos não é possível predizer os parâmetros do modelo (ou dados) isoladamente, mas sim a média ponderada dos parâmetros (ou dados) vizinhos. A exceção é para $q^{min} = 10^{-18}$, pois, neste caso especificamente, há grosso erro de arredondamento uma vez que estão sendo considerados não nulos alguns autovalores verdadeiramente nulos.

q^{min}	λ	$\epsilon_{R_m}(\%)$	$\epsilon_{R_{m,dp}}(\%)$	$\epsilon_{R_d}(\%)$	$\epsilon_{R_{d,dp}}(\%)$
10^{-18}	1	63,3	1,22	1,86	1,42
	5	63,3	1,22	1,86	1,42
	9	63,3	1,22	1,86	1,42
	13	63,3	1,22	1,86	1,42
	20	3,46	3,42	2,47	2,46
10^{-8}	1	0,94	0,58	1,83	1,42
	5	0,94	0,58	1,83	1,42
	9	0,94	0,58	1,83	1,42
	13	0,94	0,58	1,83	1,42
	20	3,46	3,42	2,47	2,46
10^{-5}	1	0,94	0,58	1,83	1,42
	5	0,94	0,58	1,83	1,42
	9	0,94	0,58	1,83	1,42
	13	0,94	0,58	1,83	1,42
	20	3,46	3,42	2,47	2,46
10^1	1	1,40	0,81	1,90	1,51
	5	1,40	0,81	1,90	1,51
	9	1,40	0,81	1,90	1,51
	13	1,40	0,81	1,90	1,51
	20	3,46	3,42	2,47	2,46
10^3	1	2,36	1,71	2,12	1,81
	5	2,36	1,71	2,12	1,81
	9	2,36	1,71	2,12	1,81
	13	2,36	1,71	2,12	1,81
	20	3,46	3,42	2,47	2,46

Tabela 4.3: Estimadores das matrizes de resolução referentes à inversão com regularização por \mathbf{D}_2 .

As Figuras 4.8a, 4.8b, 4.8c, 4.8d e 4.8e mostram as diagonais principais de \mathbf{R}_m para

diferentes seleções de autovalores. Nota-se o já mencionado comportamento atípico para $q^{\min} = 10^{-18}$ e um afastamento da matriz identidade para q^{\min} crescente. A Figura 4.8f mostra o caso $\lambda = 20$. Para regularizações por \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 foram encontrados os mesmos padrões.

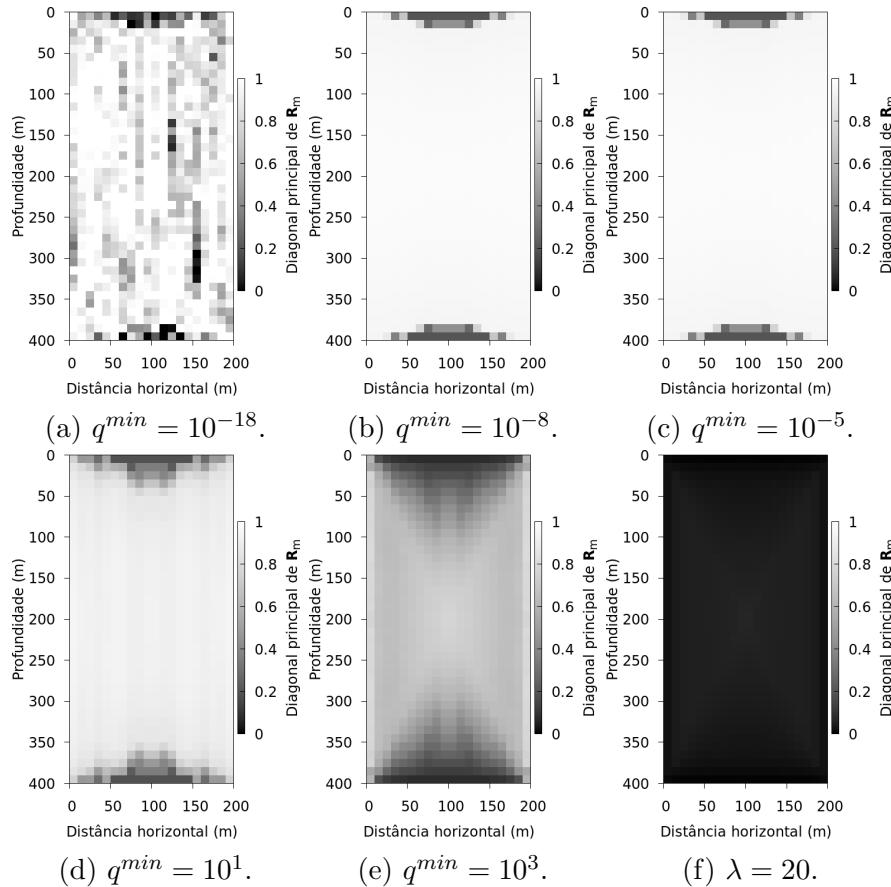


Figura 4.8: Diagonal principal de \mathbf{R}_m para diferentes seleções de autovalores (a, b, c, d, e) e para $\lambda = 20$ (f) referentes à inversão com regularização por \mathbf{D}_2 .

4.1.4 Aplicação de CB

Como a inversão linear é baseada em traçado de raios retos, só é possível mapear o mal funcionamento do algoritmo de inversão e aprimorar a solução por CB. A Tabela 4.4 mostra os estimadores $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ em função de λ referentes ao aprimoramento dos modelos estimados nas simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito das Tabelas 4.1 e 4.2. A faixa de λ s testados foi selecionada de modo que englobasse λ ótimo da inversão correspondente. Com exceção da resolução por SVD com $\mu = 5\%$, em que λ mais adequado no CB é o mesmo λ ótimo da inversão, para outros três casos λ s iguais ainda produziriam $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}} < \epsilon_{\mathbf{s}}$; para os demais casos, o λ seguinte ao ótimo já seria suficiente, o que garante robustez ao método. A única exceção é a resolução por SVD com $\mu = 0.1\%$, que não produziu $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}} < \epsilon_{\mathbf{s}}$ para nenhum λ .

Para dado muito contaminado os resultados foram positivos, o que sugere aplicabilidade a dado real.

μ (%)	Resolvido por SVD				Resolvido por CG			
	λ	$\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ (%)	n^{ai}	PT (s)	λ	$\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ (%)	n^{ai}	PT (s)
0	2	5.87	1	262	5	5.96	1	22
	3	5.90	1		6	5.91	1	
	4	4.93	1		7	5.85	1	
	5	5.26	1		8	5.83	1	
0.1	6	7.06	0	162	6	6.76	0	15
	7	7.09	0		7	6.77	1	
	8	6.91	1		8	6.61	1	
	9	8.01	1		9	6.56	1	
1	1	8.96	0	172	8	8.49	0	14
	2	8.93	0		9	8.60	0	
	3	8.93	0		10	8.63	1	
	4	8.93	0		11	8.66	1	
5	8	14.50	0	173	9	14.32	0	14
	9	14.21	0		10	12.75	0	
	10	12.94	0		11	12.75	0	
	11	13.37	0		12	13.20	0	

Tabela 4.4: $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ do aprimoramento por CB dos modelos referentes às simulações em negrito das Tabelas 4.1 e 4.2 obtidos com regularização por \mathbf{D}_2 em função de λ . Melhores resultados em negrito.

O número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}) depende da razão entre valores singulares consecutivos da matriz pseudonula, \mathbf{P} . A Figura 4.9 mostra as razões para as simulações em negrito da Tabela 4.4 e sugere supressão para valores maiores que 3. Apesar de, para $\mu = 0$, a razão entre o sétimo e oitavo valor singular superá-lo, não deve haver supressão pois as razões anteriores estão dentro do limite.

As Figuras 4.10 e 4.11 exibem, respectivamente para resoluções por SVD e por CG com regularização por \mathbf{D}_2 , as matrizes resíduo (\mathbf{R}) e os modelos de velocidade estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito das Tabelas 4.1 e 4.2, além das matrizes pseudonulas obtidas por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto e os modelos aprimorados por CB (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.4. Apesar de haver melhoria no sentido do desvio RMS percentual, não é possível visualizá-la nos modelos aprimorados. O Modelo 1 é parametrizado por um pequeno número de blocos e há um reduzido número de raios a comporem o problema inverso. Bejarano e Bassrei (2016) já indicavam a limitação do critério de Barbieri para problemas de pequeno porte.

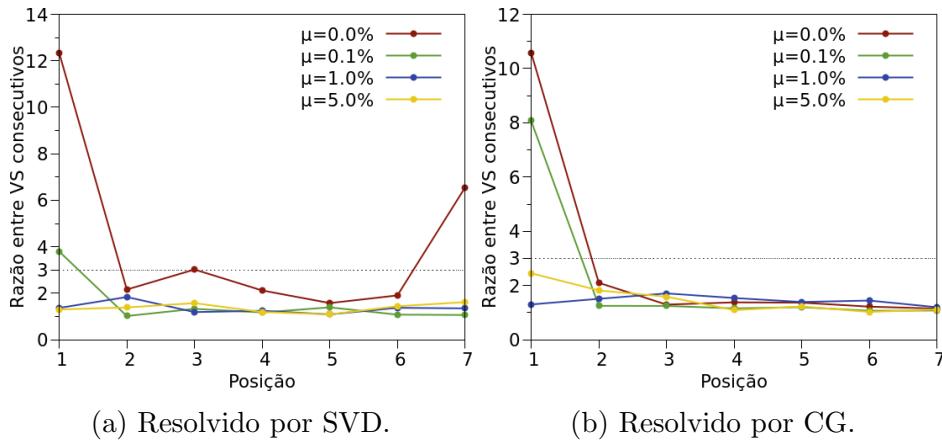


Figura 4.9: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 4.4. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.

4.2 Inversão linearizada

As próximas subseções detalham os resultados e discussões das inversões linearizadas do Modelo 1 por SVD e CG. Nas tabelas, NI é o número de iterações requeridas na simulação e PT é o tempo de processamento total.

Tanto o dado observado quanto a inversão são baseados em traçados de raios curvos, de modo que os modelos devem ser suavizados. A Figura 4.12 mostra as janelas de suavização, *Jan*, testadas.

4.2.1 Resolução por SVD

Devido ao elevado custo computacional, foi selecionado $Jan = 9$ para todas as simulações solucionadas por SVD.

A Tabela 4.5 exibe ϵ_s e ϵ_t da simulação preliminar (λ_s por mínimo ϵ_s) em função de q^{min} para D_1 e D_2 . Simulações com D_0 não foram realizadas pois não trouxeram resultados superiores na inversão linear. Em todos os casos, exceto para o par D_1 e $\mu = 5\%$, $q^{min} = 10^{-3}$ produziu os melhores resultados e foi escolhido para a simulação final.

A Tabela 4.6 mostra os resultados da simulação final. Há uma tendência de menor NI para μ crescentes, o que é esperado. Mesmo para um intervalo considerável de K , os resultados são melhores que os do GCV, exceto para $\mu = 1\%$, indicando que curva L é um método robusto. Em negrito estão os valores K que produziram o melhor modelo no sentido de mínimo ϵ_s . Nota-se, na Tabela 4.6, uma diminuição de K para μ crescente, o que é contraintuitivo: espera-se que modelos recuperados em inversões com dado mais

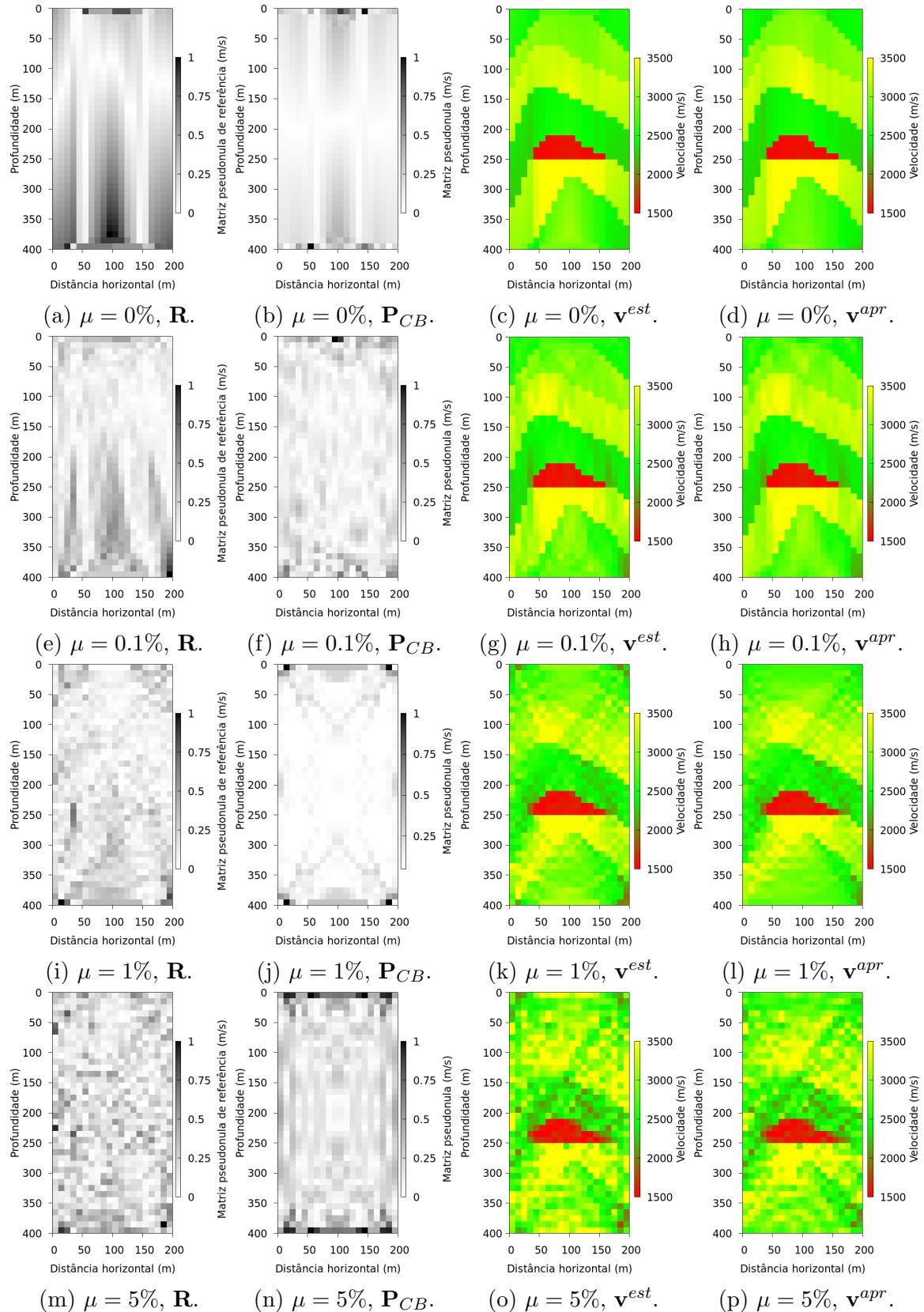


Figura 4.10: Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 4.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações solucionadas por SVD em negrito da Tabela 4.4.

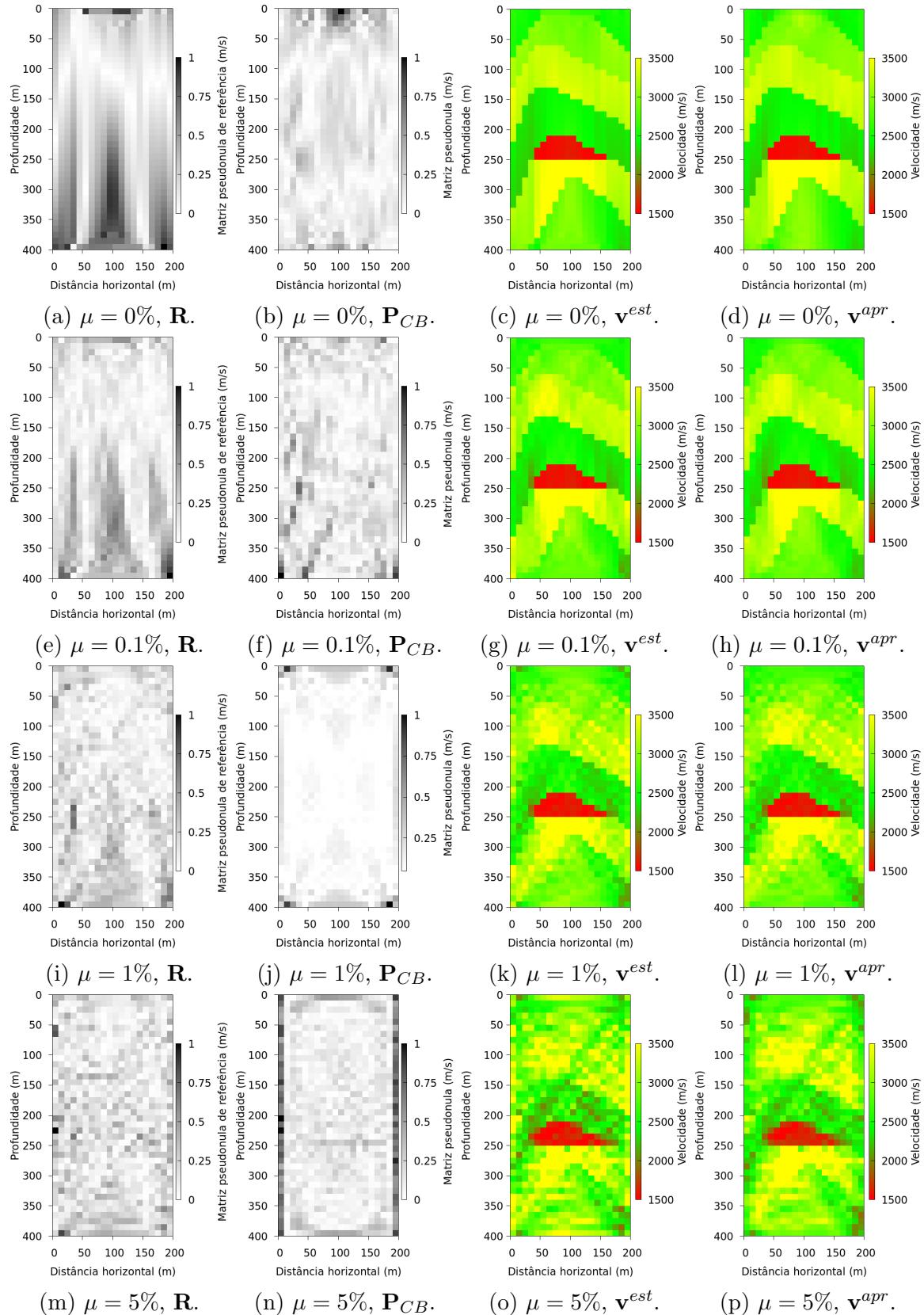
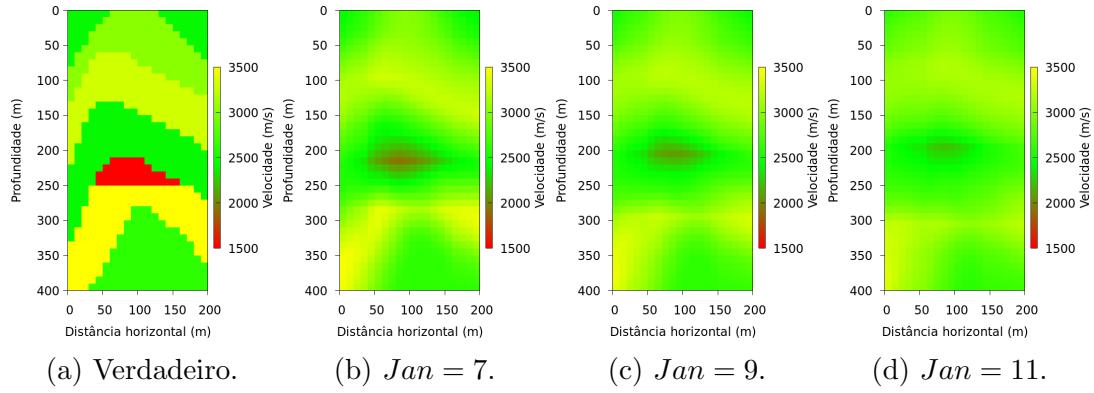


Figura 4.11: Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 4.2. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações solucionadas por CG em negrito da Tabela 4.4.

Figura 4.12: Modelos verdadeiro e suavizados por diferentes janelas (Jan).

contaminado sejam mais suavizados, e não menos como aparentemente se observou. Na verdade, μ crescentes produziram, como se espera, modelos mais suavizados (vide Tabela 4.7). K previamente definido é apenas o menor valor desejado para $\sin \Theta(\lambda)$, não o limite máximo.

μ (%)	D_1					D_2				
	q^{min}	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	TP (s)	NI	q^{min}	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	TP (s)	NI
0	10^{-5}	5.71	0.26	1583	9	10^{-5}	4.39	0.18	1896	11
	10^{-3}	5.71	0.26	1523	9	10^{-3}	4.39	0.18	1979	11
	10^{-1}	5.71	0.26	1597	9	10^{-1}	4.39	0.18	1919	11
	10^{+1}	6.95	0.38	1136	6	10^{+1}	5.19	0.22	2172	12
	10^{+3}	7.83	0.32	1471	8	10^{+3}	8.62	0.34	2334	12
	10^{+5}	16.06	4.45	2174	12	10^{+5}	16.20	4.41	2570	12
0.1	10^{-5}	5.95	0.39	916	5	10^{-5}	4.69	0.23	1261	7
	10^{-3}	5.95	0.39	960	5	10^{-3}	4.69	0.23	1254	7
	10^{-1}	5.95	0.39	927	5	10^{-1}	4.69	0.23	1256	7
	10^{+1}	6.96	0.40	1156	6	10^{+1}	5.44	0.26	2165	12
	10^{+3}	7.71	0.32	2051	12	10^{+3}	8.62	0.36	2084	12
	10^{+5}	16.06	4.45	2033	12	10^{+5}	16.19	4.41	2015	12
1	10^{-5}	8.70	1.07	1241	4	10^{-5}	7.00	1.19	936	3
	10^{-3}	8.70	1.07	1223	4	10^{-3}	7.00	1.19	936	3
	10^{-1}	8.70	1.07	1240	4	10^{-1}	7.00	1.19	943	3
	10^{+1}	8.72	1.07	820	4	10^{+1}	7.40	0.92	1983	12
	10^{+3}	8.25	0.93	2130	12	10^{+3}	9.09	0.93	1600	9
	10^{+5}	16.05	4.56	2447	12	10^{+5}	16.18	4.52	2195	12
5	10^{-5}	11.13	4.76	2122	12	10^{-5}	11.17	4.94	1646	9
	10^{-3}	11.13	4.76	2158	12	10^{-3}	11.17	4.94	1625	9
	10^{-1}	11.13	4.76	2180	12	10^{-1}	11.17	4.94	1602	9
	10^{+1}	11.13	4.76	3291	12	10^{+1}	11.17	4.94	1613	9
	10^{+3}	10.67	4.75	1164	6	10^{+3}	11.37	4.70	775	4
	10^{+5}	16.06	6.62	2185	12	10^{+5}	16.13	6.62	2098	12

Tabela 4.5: Simulação preliminar solucionada por SVD com $Jan = 9$. Melhores resultados em negrito.

A Tabela 4.7 indica λ de cada iteração para a simulação preliminar (em negrito da Tabela 4.5 com regularização por \mathbf{D}_2) e para a simulação final (Tabela 4.6, por GCV e em negrito por curva L). Para esta, os modelos de velocidade correspondentes são exibidos nas duas primeiras colunas da Figura 4.19. Devido à necessidade de regularização com maior intensidade, simulações com dado muito contaminado requerem menos iterações, mas se tornam demasiadamente suavizados.

As Figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 mostram as curvas auxiliares referentes à simulação final (Tabela 4.6, por GCV e em negrito por curva L) para as iterações inicial, intermediária e final, para $\mu = 0.1\%$ e $\mu = 1\%$. O mesmo padrão foi observado: ϵ_s é minimizado para uma estreita faixa de λ na iteração inicial, mas se estabiliza na última iteração, enquanto ϵ_t tem a mesma magnitude de μ independente de λ , exceto na primeira iteração, explodindo para regularizações intensas. A curva GCV indica um mínimo claro apenas na primeira iteração, enquanto a curva L mantém o formato que nomeia independente da simulação.

μ (%)	λ_s por GCV				λ_s por Curva L				
	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI	K	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI
0	8.28	0.32	1154	6	0.75	15.45	1.00	2139	12
					0.85	5.90	0.27	2148	12
					0.95	5.00	0.21	2143	12
					0.99	7.39	0.47	1330	7
0.1	7.88	0.33	1154	6	0.75	12.27	0.41	2111	12
					0.85	6.09	0.26	2164	12
					0.95	5.31	0.22	2152	12
					0.99	7.43	0.48	1289	7
1	8.89	0.98	977	5	0.75	8.92	0.91	1450	8
					0.85	8.66	0.97	1336	7
					0.95	9.23	1.17	952	5
					0.99	10.22	1.50	962	5
5	14.51	4.94	498	2	0.75	11.25	4.93	779	4
					0.85	11.23	4.98	829	4
					0.95	11.48	5.12	797	4
					0.99	13.05	5.45	644	3

Tabela 4.6: Simulação final solucionada por SVD e regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$ e $q^{min} = 10^{-3}$. Melhores resultados em negrito.

4.2.2 Resolução por CG

A Tabela 4.8 mostra os estimadores ϵ_s e ϵ_t da simulação preliminar em função de Jan e n^{CG} . Testes com valores de n^{CG} além dos exibidos produziram ϵ_s maiores. O melhor resultado de cada conjunto \mathbf{D} , Jan e μ no sentido de mínimo ϵ_s está em negrito. O objetivo é definir Jan

It.	Simulação preliminar				Simulação final (GCV)				Simulação final (Curva L)			
	μ (%)				μ (%)				μ (%)			
	0	0.1	1	5	0	0.1	1	5	0	0.1	1	5
1	12	12	12	12	10	10	10	11	11	11	11	12
2	10	10	10	12	10	10	10	11	10	10	10	12
3	10	10	10	12	9	9	10	-	9	9	10	12
4	13	11	-	13	10	10	12	-	10	10	11	14
5	10	9	-	13	10	10	14	-	9	9	11	-
6	9	9	-	13	12	12	-	-	9	9	11	-
7	9	10	-	13	-	-	-	-	9	9	12	-
8	10	-	-	13	-	-	-	-	9	9	-	-
9	9	-	-	13	-	-	-	-	9	9	-	-
10	9	-	-	-	-	-	-	-	9	9	-	-
11	11	-	-	-	-	-	-	-	9	9	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	9	9	-	-

Tabela 4.7: λ s da simulação preliminar (Tabela 4.5, regularizada por \mathbf{D}_2 , em negrito) e da simulação final (Tabela 4.6, por GCV e em negrito por curva L).

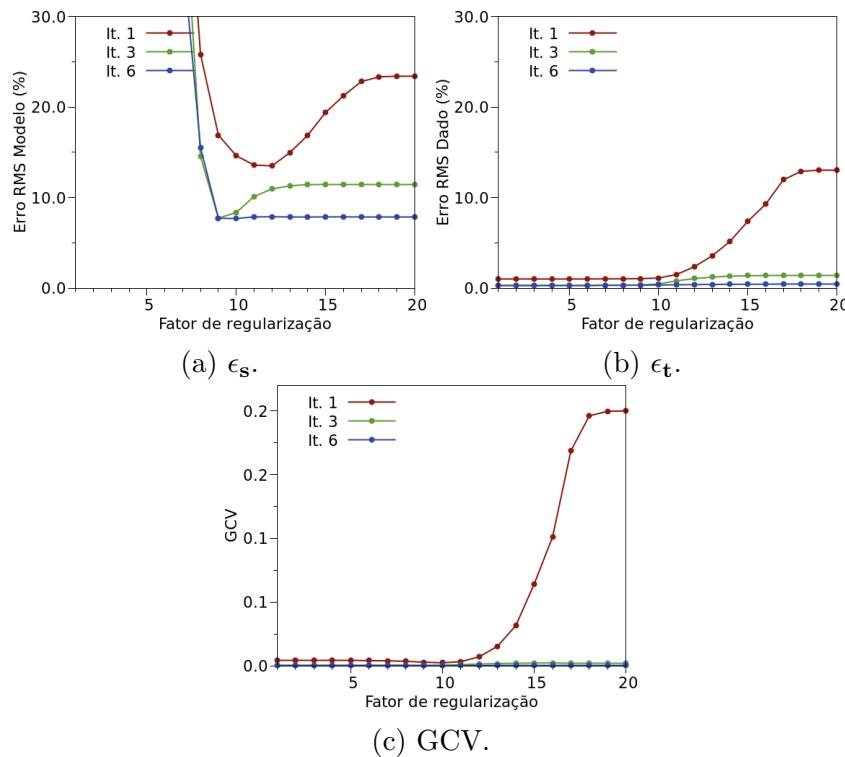
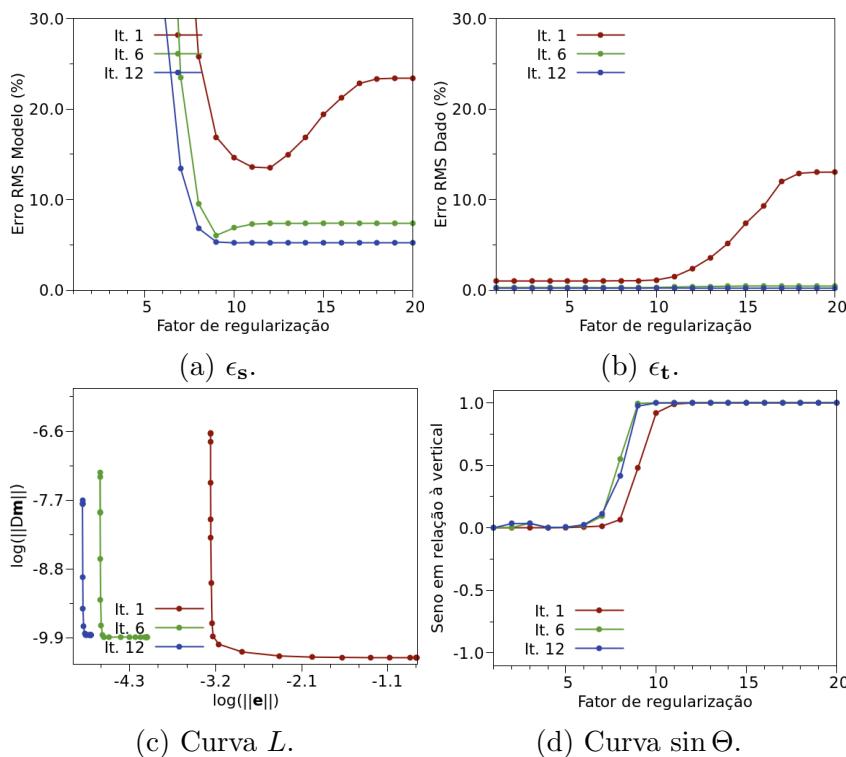
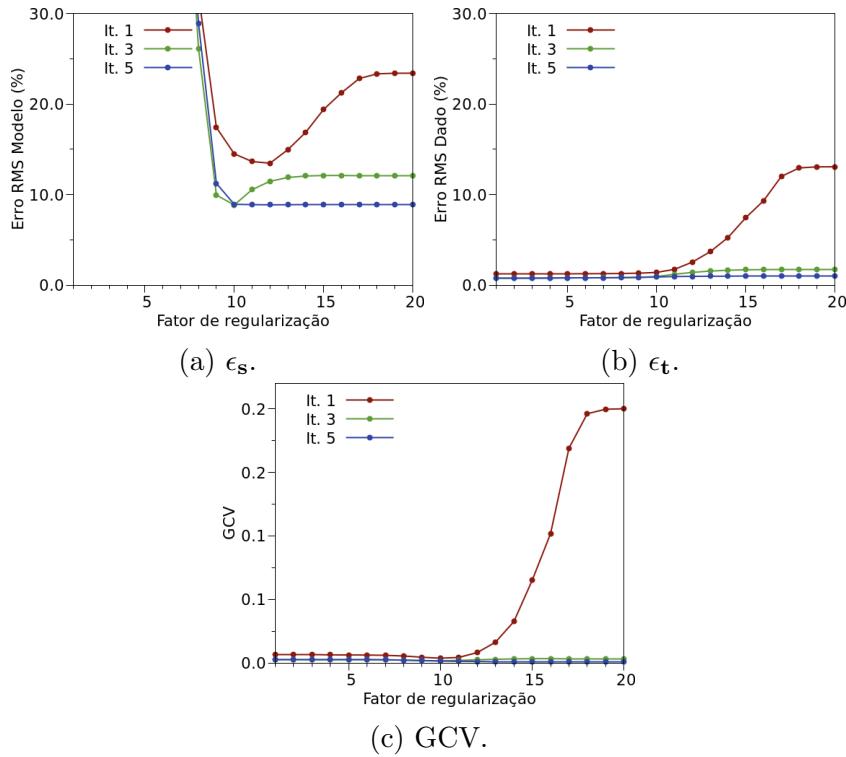


Figura 4.13: Curvas auxiliares referentes à simulação da Tabela 4.6 solucionada com GCV e com $\mu = 0.1\%$.

e n^{CG} a serem usados em situação real similar sem a certeza do nível de ruído. *Jan* largo pode comprometer a resolução dos modelos obtidos, e estreito pode ser inapropriado para ligar fontes a receptores. O valor $Jan = 9$ é suficiente para evitar os dois problemas. Para 67% das simulações, \mathbf{D}_2 produziu os melhores resultados, e esteve próximo do melhor nos



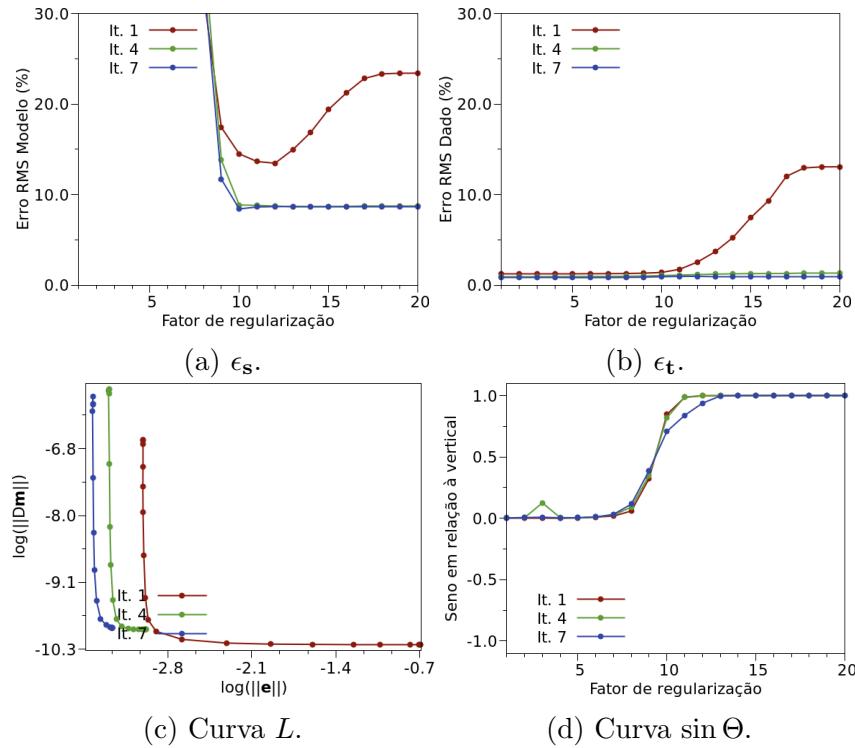


Figura 4.16: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito da Tabela 4.6 solucionada com curva L e com $\mu = 1\%$.

outros casos. Apesar de não corresponder sempre ao menor ϵ_s , $n^{CG} = 75$ para \mathbf{D}_2 e $Jan = 9$ se mostrou adequado, e este foi o conjunto escolhido para a simulação final.

Os resultados da simulação final são dados pela Tabela 4.9, que indica os estimadores ϵ_s e ϵ_t em função de K para os parâmetros anteriormente selecionados \mathbf{D}_2 , $Jan = 9$ e $n^{CG} = 75$. Assim como na resolução por SVD, a afirmação de que K diminuiria para μ crescentes é desmentida pela Tabela 4.10, que mostra λ crescentes para μ maiores, além da necessidade de menos iterações.

As Figuras 4.17 e 4.18 mostram as curvas auxiliares das iterações inicial, intermediária e final para a simulação final (em negrito da Tabela 4.9) quando $\mu = 0.1\%$ e $\mu = 1\%$, respectivamente. O mesmo padrão encontrado na resolução por SVD foi encontrado: ϵ_s é minimizado para uma estreita faixa de λ na primeira iteração e se estabiliza para uma faixa maior na última, enquanto ϵ_t tem mesma magnitude de μ independente de λ , exceto na primeira iteração, onde explode para λ elevado. A curva L mantém o formato que a nomeia, e a curva $\sin \Theta$ associada experimenta discreta variação do formato esperado apenas quando $\mu = 0.1\%$, não comprometendo sua interpretação.

A terceira coluna da Figura 4.19 mostra os modelos de velocidade referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9. Com baixíssimo custo computacional quando comparado à re-

solução por SVD, CG produziu modelos com melhor resolução para dado contaminado por ruído alto ($\mu = 1\%$ e $\mu = 5\%$), sendo, então, mais indicado.

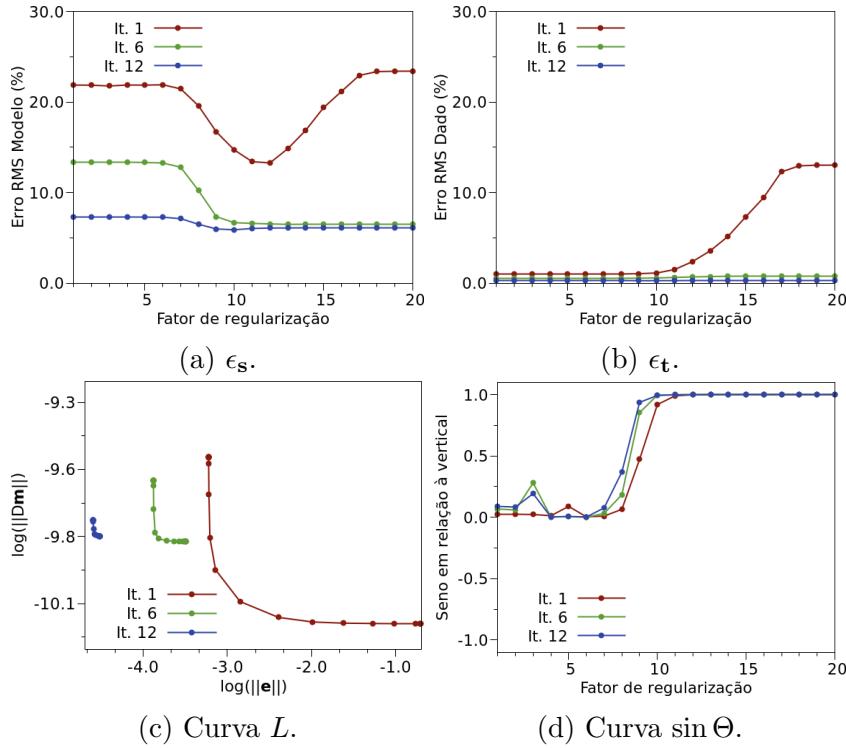


Figura 4.17: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 4.9, com $\mu = 0.1\%$.

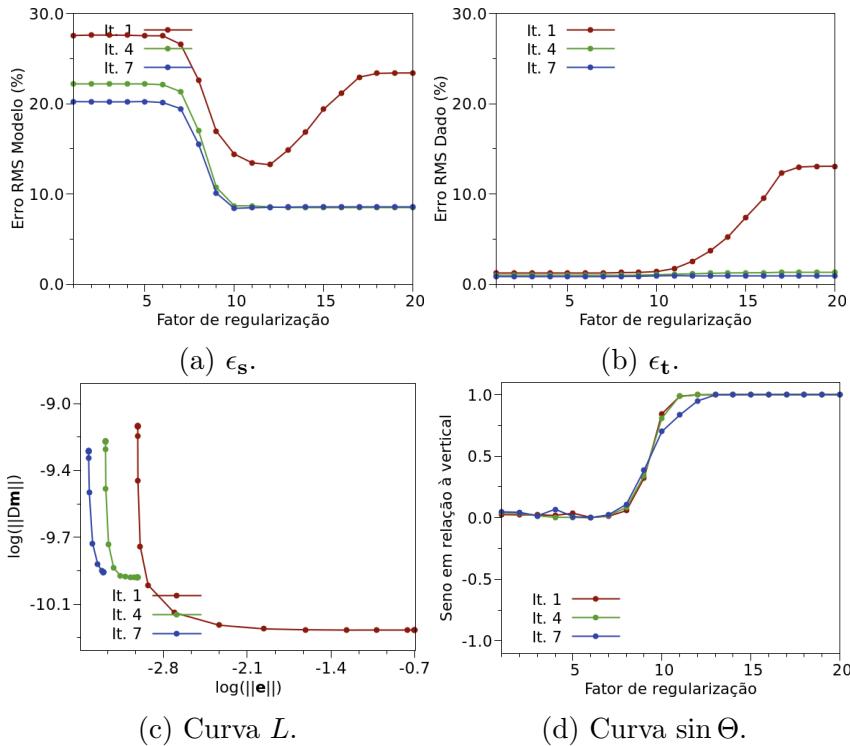


Figura 4.18: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 4.9, com $\mu = 1\%$.

Jan	$\mu(\%)$	D ₀					D ₁					D ₂				
		n^{CG}	$\epsilon_s(\%)$	$\epsilon_t(\%)$	PT	NI	n^{CG}	$\epsilon_s(\%)$	$\epsilon_t(\%)$	PT	NI	n^{CG}	$\epsilon_s(\%)$	$\epsilon_t(\%)$	PT	NI
7	0	25	8.55	0.35	74	9	25	7.08	0.31	120	9	200	6.25	0.43	97	11
		50	8.64	0.36	90	10	50	7.47	3.36	122	9	400	5.57	0.31	110	10
		75	8.68	8.33	83	9	75	8.06	0.48	111	8	600	7.00	8.48	96	7
		100	8.71	8.33	81	9	100	8.56	8.37	148	10	800	6.69	0.52	120	7
	0.1	25	8.61	8.33	85	9	25	7.08	0.35	79	10	75	6.59	0.36	74	10
		50	8.81	0.34	79	9	50	7.43	0.34	83	10	100	7.26	8.38	68	10
		75	8.86	0.36	80	9	75	8.04	0.35	69	8	125	7.06	0.68	59	8
		100	8.89	0.33	90	10	100	8.49	0.40	60	7	150	7.90	0.65	64	8
	1	10	10.30	0.89	57	7	25	8.81	0.95	56	7	75	9.13	0.96	50	7
		15	10.38	0.89	89	12	50	9.31	1.00	58	7	100	9.50	1.06	89	12
		20	10.41	0.89	81	11	75	9.38	1.00	55	6	125	9.54	1.04	72	9
		25	10.43	0.89	89	12	100	9.41	0.99	57	6	150	9.47	1.04	75	9
	5	10	13.82	4.63	21	4	25	11.54	4.89	18	3	75	11.71	4.92	24	4
		15	13.82	4.63	19	4	50	11.66	4.90	19	3	100	11.78	4.92	26	4
		20	13.82	4.63	18	4	75	11.66	4.89	20	3	125	11.80	4.92	26	4
		25	13.82	4.63	21	4	100	11.67	4.89	22	3	150	11.80	4.92	28	4
9	0	200	7.92	0.34	16	5	100	7.06	0.34	13	7	75	4.42	0.20	20	12
		400	7.92	0.34	28	5	200	6.06	0.30	26	9	100	4.48	0.18	22	12
		600	7.93	0.34	43	5	300	5.00	0.22	38	9	125	4.44	0.19	25	11
		800	7.92	0.34	57	5	400	5.81	0.26	53	10	150	5.20	0.63	16	5
	0.1	100	7.94	0.36	9	4	100	7.01	0.39	11	6	75	4.63	0.22	18	12
		200	7.94	0.34	18	5	200	6.12	0.40	16	5	100	4.50	0.21	22	12
		300	7.94	0.36	18	4	300	6.02	0.39	24	5	125	5.14	0.62	13	5
		400	7.94	0.36	24	4	400	5.98	0.38	37	6	150	5.10	0.65	12	4
	1	50	9.06	0.89	6	4	25	8.32	1.05	5	4	75	7.19	0.92	10	6
		100	9.06	0.89	8	4	50	8.51	1.05	8	5	100	7.04	0.92	12	6
		150	9.06	0.89	11	4	75	8.58	1.06	8	5	125	7.04	1.07	10	4
		200	9.06	0.89	15	4	100	8.66	1.06	10	5	150	6.94	0.92	16	6
	5	10	12.21	4.70	5	5	10	10.79	4.71	5	5	75	10.97	4.91	15	8
		15	12.20	4.70	5	5	15	10.77	4.75	6	7	100	11.10	4.92	13	6
		20	12.20	4.70	6	5	20	10.81	4.77	5	5	125	11.17	4.94	20	9
		25	12.20	4.70	6	5	25	10.88	4.75	5	5	150	11.17	4.94	23	9
11	0	25	7.79	0.61	5	4	100	6.09	0.31	14	7	75	5.66	0.28	12	7
		50	7.38	0.41	11	7	200	5.55	0.36	22	7	100	4.62	0.16	23	12
		75	7.44	0.37	11	6	300	5.68	0.35	30	7	125	4.96	0.18	18	8
		100	7.43	0.27	16	8	400	5.78	0.37	42	7	150	5.09	0.22	17	6
	0.1	25	7.61	0.57	6	6	100	6.00	0.41	14	7	75	5.43	0.22	18	11
		50	7.64	0.49	6	4	200	5.53	0.21	36	12	100	5.09	0.16	23	12
		75	7.72	0.53	8	4	300	5.44	0.22	46	11	125	5.20	0.19	15	6
		100	7.72	0.53	9	4	400	5.69	0.22	63	12	150	5.19	0.21	21	8
	1	10	8.97	0.88	4	4	25	7.93	0.89	6	5	75	6.82	0.89	6	3
		15	9.05	0.88	3	3	50	7.93	0.87	8	5	100	7.35	0.90	7	3
		20	9.07	0.88	4	3	75	7.99	0.88	8	4	125	7.19	0.91	11	5
		25	9.07	0.88	4	3	100	7.93	0.88	10	4	150	7.15	0.91	13	5
	5	10	12.38	4.63	3	3	10	10.74	4.69	4	5	75	11.12	4.82	7	4
		15	12.37	4.63	3	3	15	10.52	4.70	4	4	100	11.29	4.82	9	4
		20	12.37	4.63	3	3	20	10.36	4.70	4	4	125	11.33	4.82	9	4
		25	12.37	4.63	3	3	25	10.27	4.70	4	4	150	11.32	4.82	11	4

Tabela 4.8: Simulação preliminar solucionada por CG. Melhores resultados em negrito. PT em segundos.

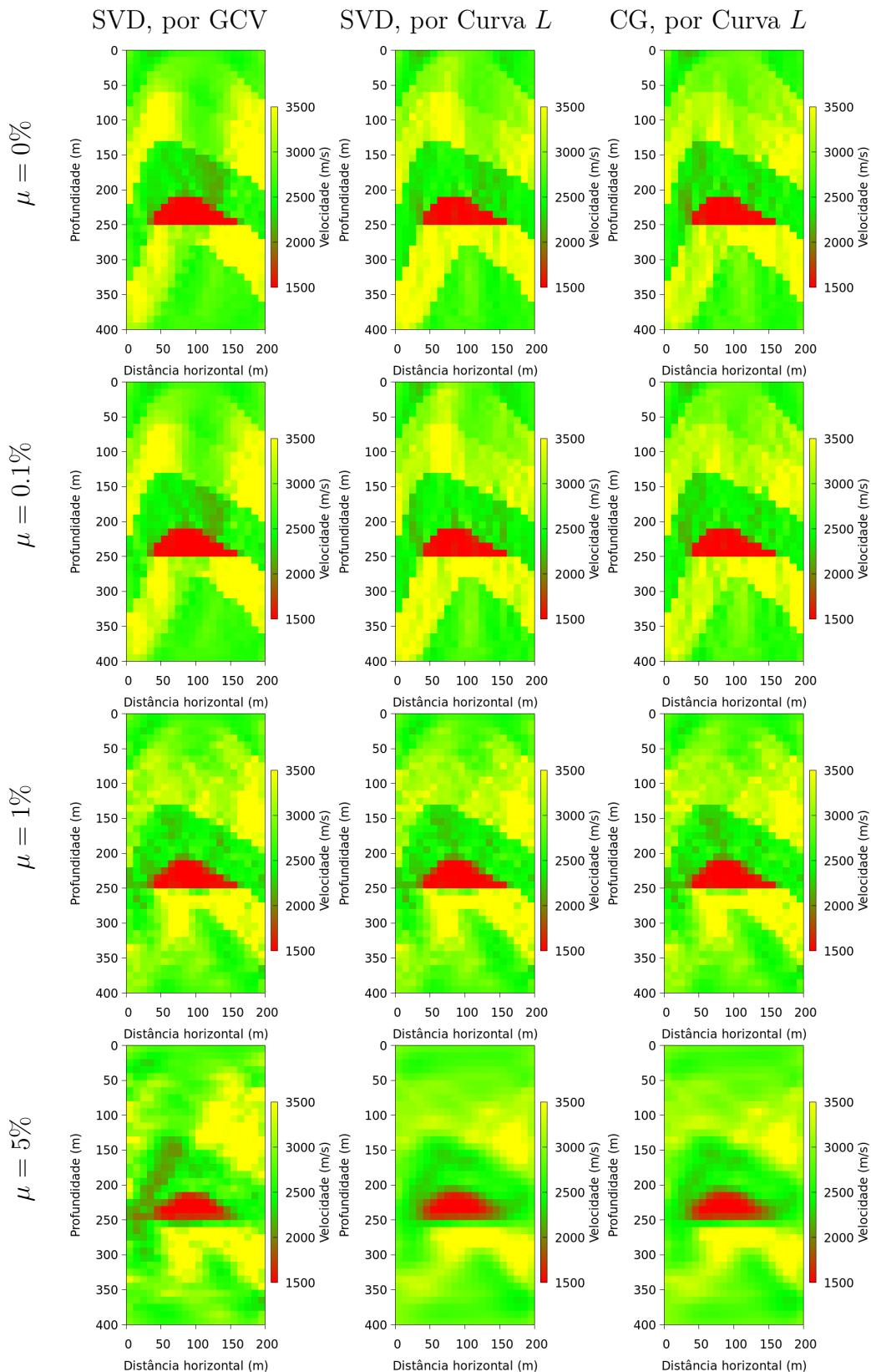


Figura 4.19: Modelos de velocidades estimados na inversão linearizada regularizada por \mathbf{D}_2 , correspondentes aos melhores resultados da simulação final por SVD e por CG.

μ (%)	K	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI
0	0.75	8.28	0.27	22	12
	0.85	6.76	0.27	21	12
	0.95	5.81	0.23	19	12
	0.99	7.28	0.46	13	7
0.1	0.75	7.47	0.30	21	12
	0.85	7.17	0.29	21	12
	0.95	5.88	0.27	19	12
	0.99	7.54	0.29	21	12
1	0.75	8.60	0.90	18	9
	0.85	8.52	0.97	14	7
	0.95	9.13	1.17	10	5
	0.99	10.07	1.50	8	5
5	0.75	11.01	4.93	8	4
	0.85	11.05	5.00	8	4
	0.95	11.33	5.10	7	4
	0.99	12.96	5.45	5	3

Tabela 4.9: Simulação final solucionada por CG e regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$, $n^{CG} = 75$. Melhores resultados em negrito.

Iteração	Simulação preliminar				Simulação final			
	$\mu = 0\%$	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 5\%$	$\mu = 0\%$	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 5\%$
1	12	12	12	12	11	11	11	12
2	10	10	10	12	10	10	10	12
3	9	9	10	12	9	9	10	12
4	13	13	13	12	10	10	11	12
5	10	11	10	13	9	9	11	-
6	9	10	11	13	10	10	11	-
7	9	10	-	13	9	9	12	-
8	10	9	-	13	9	9	-	-
9	10	10	-	-	9	9	-	-
10	10	9	-	-	9	10	-	-
11	10	10	-	-	9	9	-	-
12	10	10	-	-	9	10	-	-
CBM	-	-	-	-	16	15	12	15
CB	-	-	-	-	9	9	10	11

Tabela 4.10: λ s da simulação preliminar (Tabela 4.8, regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 9$ e $n^{CG} = 75$), da simulação final (em negrito da Tabela 4.9) e do aprimoramento por CBM e CB.

4.2.3 Matrizes de resolução

A Tabela 4.11 reúne os estimadores de \mathbf{R}_d e \mathbf{R}_m em função de q^{min} e λ para o caso solucionado por CG, regularizado por \mathbf{D}_2 quando $\mu = 1\%$. Para q^{min} fixado, \mathbf{R}_d e \mathbf{R}_m são mais influenciados por λ do que no caso linear. ϵ_{R_m} alto para $q^{min} = 10^{-18}$ e $\lambda = 1$ ocorre porque, neste caso, não há regularização e estão sendo considerados não nulos autovalores verdadeiramente nulos. $\mathbf{R}_m \approx \mathbf{I}$ quando $q^{min} = 10^{-8}$ e $\lambda = 1$, situação sem regularização e com supressão dos autovalores nulos. A inversão linearizada costuma ser realizada com regularização considerável, e \mathbf{R}_d e \mathbf{R}_m associadas não se assemelham à matriz identidade. Diz-se, nestes casos, que não é possível predizer os parâmetros do modelo (ou dados) isoladamente, mas sim a média ponderada dos parâmetros (ou dados) vizinhos.

q^{min}	λ	$\epsilon_{R_m}(\%)$	$\epsilon_{R_{m,dp}}(\%)$	$\epsilon_{R_d}(\%)$	$\epsilon_{R_{d,dp}}(\%)$
10^{-18}	1	50,8	0,70	1,80	1,37
	7	1,20	0,70	1,84	1,44
	14	3,51	3,49	2,49	2,49
	20	3,54	3,54	2,50	2,50
10^{-8}	1	0,65	0,55	1,80	1,37
	7	1,20	0,70	1,84	1,44
	14	3,51	3,49	2,49	2,49
	20	3,54	3,54	2,50	2,50
10^{-4}	1	0,71	0,57	1,80	1,38
	7	1,20	0,70	1,84	1,44
	14	3,51	3,49	2,49	2,49
	20	3,54	3,54	2,50	2,50
10^0	1	1,11	0,67	1,85	1,44
	7	1,12	0,71	1,85	1,45
	14	3,51	3,49	2,49	2,49
	20	3,54	3,54	2,50	2,50
10^3	1	2,34	1,71	2,12	1,80
	7	2,34	1,71	2,12	1,80
	14	3,51	3,49	2,49	2,49
	20	3,54	3,54	2,50	2,50

Tabela 4.11: Estimadores das matrizes de resolução em função de q^{min} e λ para inversão linearizada solucionada por CG, regularizada por \mathbf{D}_2 e com $\mu = 1\%$.

A Figura 4.20 mostra as diagonais principais de \mathbf{R}_m para diferentes seleções de autovalores e λ para a mesma simulação da Tabela 4.11. Quanto maior o número de autovalores suprimidos de \mathbf{A} e maior o valor de λ considerado, menos fiel ao problema se torna \mathbf{G} e maior se torna a influência de $\lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$ sobre \mathbf{A}^+ , o que afasta as matrizes de resolução da matriz identidade. Resultados similares foram encontrados para \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 .

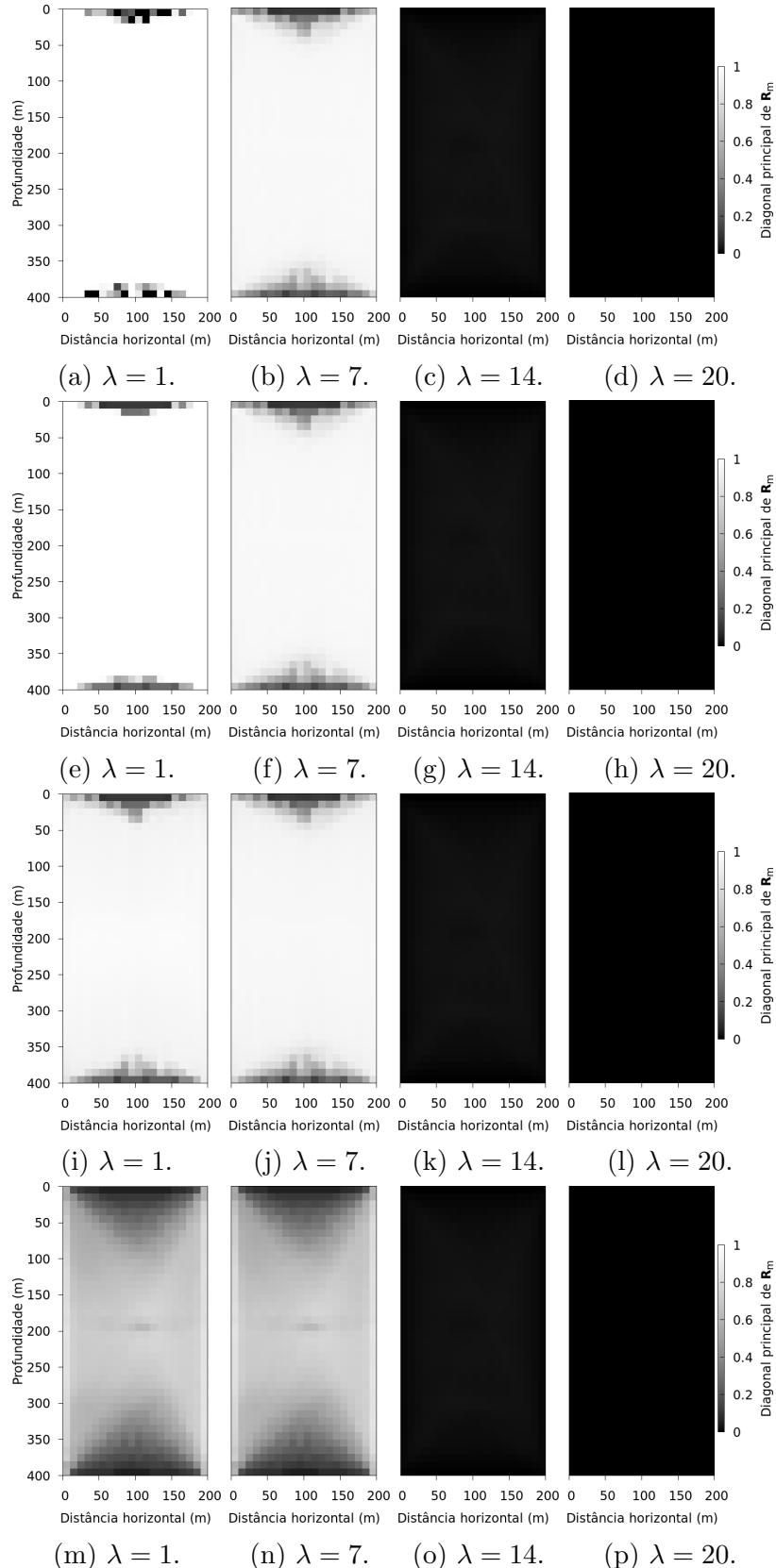


Figura 4.20: Diagonal principal de \mathbf{R}_m para diferentes seleções de autovalores ($q^{min} = 10^{-18}$, a-d; $q^{min} = 10^{-8}$, e-h; $q^{min} = 10^0$, i-l; e $q^{min} = 10^3$, m-p) e valores de λ . Inversão linearizada solucionada por CG, regularizada por \mathbf{D}_2 e com $\mu = 1\%$.

4.2.4 Aplicação de CB e CBM

CBM e CB foram aplicadas nas inversões solucionadas por CG e regularizadas por \mathbf{D}_2 . Como a inversão linearizada é baseada em traçado de raios curvos, é possível mapear o mal funcionamento do algoritmo de inversão e aprimorar a solução tanto por CBM quanto por CB. O Modelo 1 é composto por dobramento em anticlinal que pode ser visualizado como um certo número de camadas inclinadas. Dessa forma, a coerência lateral que se deseja extrair pode ser melhor identificada ao aplicar a supressão de autoimagens dominantes não em \mathbf{P} , mas em suas submatrizes. Outra abordagem possível seria aplicar o power method nas submatrizes rotacionadas. Tal abordagem, no entanto, exigiria a definição do ângulo de rotação, o que adicionaria mais um parâmetro ao algoritmo.

A Tabela 4.12 mostra os resultados de CBM e de CB no sentido de $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ para submatrizes de \mathbf{P} com dimensões até 20×40 , que corresponde à própria matriz \mathbf{P} . Ao se comparar $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$ com $\epsilon_{\mathbf{s}}$ das simulações em negrito da Tabela 4.9, verifica-se que, para CB, toda submatriz produziu $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}} < \epsilon_{\mathbf{s}}$, mas os melhores resultados foram obtidos com dimensões maiores. Por outro lado, para CBM, o uso de submatrizes com dimensão até 7×7 se mostrou necessário. No sentido de menor $\epsilon_{\mathbf{s}^{apr}}$, CB foi superior.

O lado direito da Tabela 4.10 discrimina λ por iteração de cada inversão e de cada aprimoramento (referente às simulações em negrito da Tabela 4.12). Ele confirma o resultado do caso linear, de que λ do aprimoramento por CB deve ser similar aos da inversão. Já para CBM, o aprimoramento exigiu maior regularização. A Tabela 4.13 confirma estas conclusões ao indicar que λ s próximos aos dos aprimoramentos da Tabela 4.10 ainda produzem resultados superiores aos da inversão, sugerindo a robustez dos algoritmos.

A Figura 4.21 mostra a razão entre valores singulares de \mathbf{P} (ou de suas submatrizes) para as simulações em negrito na Tabela 4.12. Para as simulações nas quais a eventual supressão de autoimagens dominantes foi operada nas submatrizes de \mathbf{P} , o gráfico se refere à razão das médias aritméticas dos valores singulares consecutivos relativas a todas as submatrizes. Para CBM, sempre as duas autoimagens dominantes foram suprimidas porque as razões correspondentes excederam 3; já para CB, apenas a primeira.

As Figuras 4.22 e 4.23 mostram as matrizes resíduo e modelos de velocidade estimados referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9 e as matrizes pseudonulas e modelos aprimorados por CBM e CB referentes às simulações em negrito da Tabela 4.12. É possível notar uma maior suavização dos modelos obtidos por CBM se comparados aos obtidos por CB.

μ (%)	Submatriz	CBM			CB		
		ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)
0	3×3	5.70	2	8	5.73	0	7
	5×5	5.71	3	7	5.73	1	7
	7×7	5.76	3	7	5.71	1	7
	9×9	5.81	3	7	5.70	1	7
	11×11	5.89	3	7	5.69	1	7
	20×40	5.94	3	7	5.64	1	7
0.1	3×3	5.78	2	8	5.81	0	7
	5×5	5.84	2	7	5.73	1	7
	7×7	5.88	2	7	5.68	1	7
	9×9	5.92	2	7	5.66	1	7
	11×11	5.99	2	7	5.65	1	7
	20×40	6.18	2	7	5.67	1	7
1	3×3	8.40	2	8	8.46	1	7
	5×5	8.42	2	7	8.43	1	8
	7×7	8.42	2	8	8.42	1	8
	9×9	8.42	2	8	8.39	1	8
	11×11	8.45	2	7	8.38	1	7
	20×40	8.31	2	7	8.15	1	7
5	3×3	10.97	2	8	10.95	1	7
	5×5	10.97	2	7	10.91	1	7
	7×7	10.97	2	8	10.90	1	7
	9×9	11.02	2	8	10.88	1	7
	11×11	11.02	2	7	10.90	1	7
	20×40	11.08	2	7	11.00	1	7

Tabela 4.12: ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9, com uso de janela móvel e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}).

μ (%)	CBM				CB			
	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)
0	14	5.76	2	8	8	5.76	0	7
	15	5.71	2		9	5.64	1	
	16	5.70	2		10	5.65	1	
	17	5.79	2		11	6.28	1	
0.1	14	5.80	2	8	7	5.84	1	7
	15	5.78	2		8	5.84	1	
	16	5.79	2		9	5.65	1	
	17	5.85	2		10	5.80	1	
1	12	8.31	2	7	9	8.42	1	7
	13	8.37	2		10	8.15	1	
	14	8.50	2		11	8.64	1	
	15	8.68	2		12	9.42	1	
5	15	10.97	2	7	10	11.25	1	7
	16	10.99	2		11	10.88	1	
	17	11.09	1		12	11.03	2	
	18	11.08	1		13	11.45	1	

Tabela 4.13: ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 4.9 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.

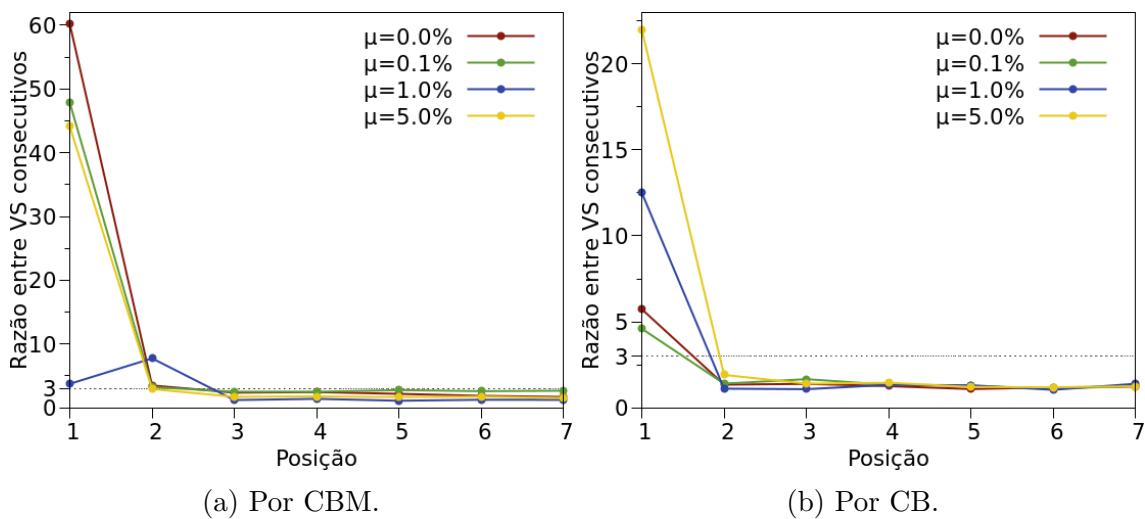


Figura 4.21: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 4.12. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.

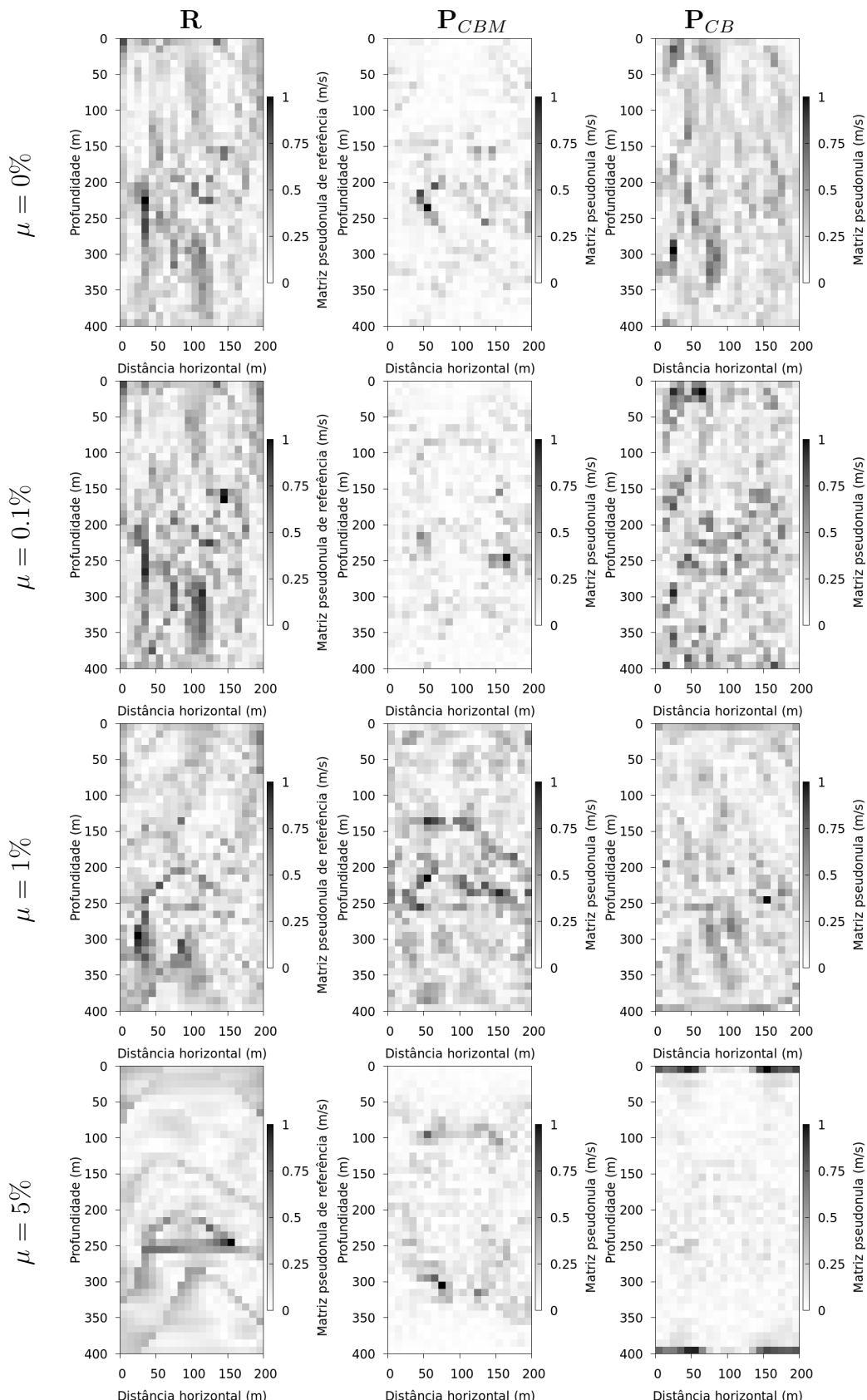


Figura 4.22: Matrizes resíduo (**R**) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 4.12.

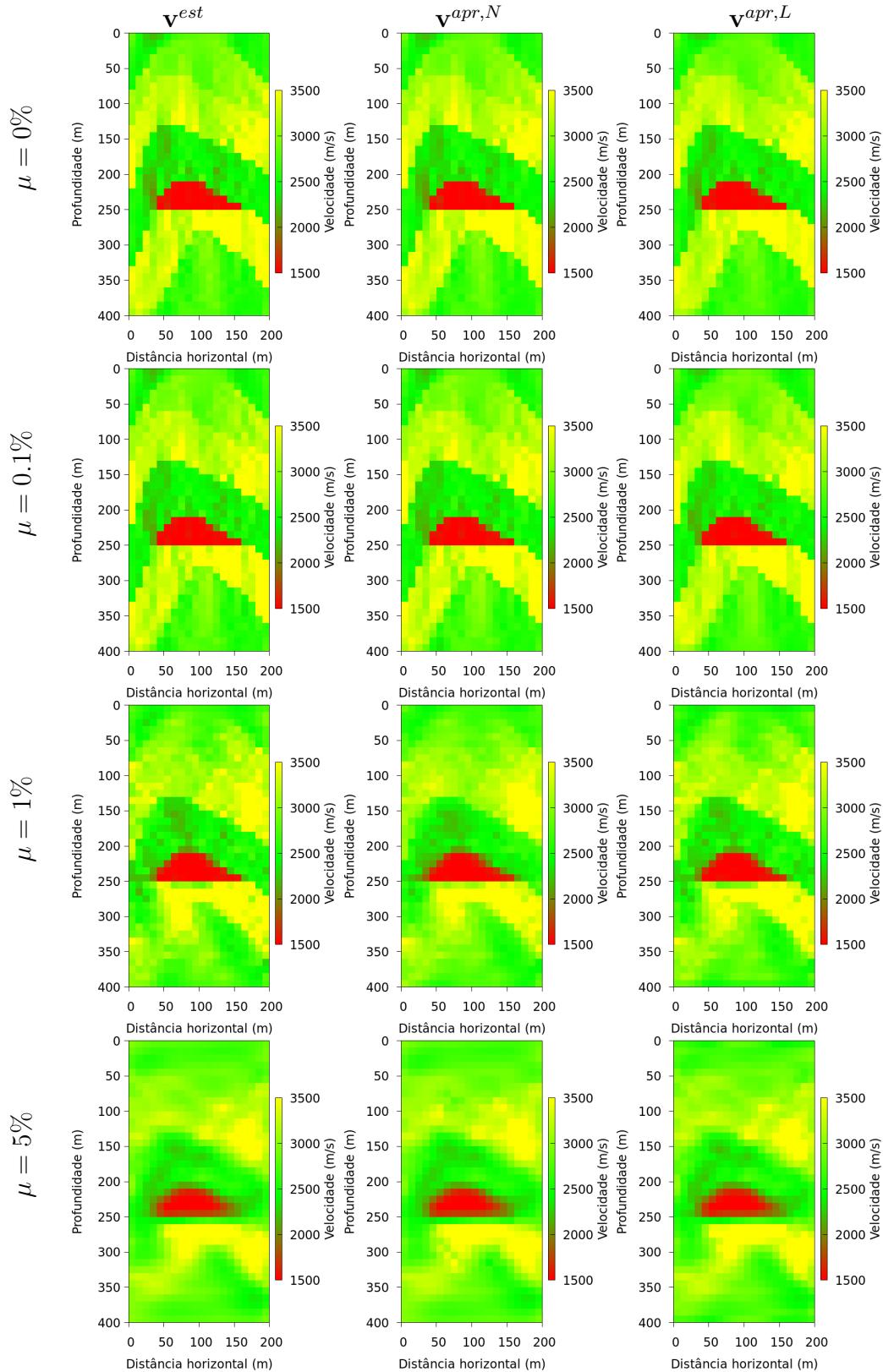


Figura 4.23: Modelos de velocidades estimados (v^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.9 e aprimorados por CBM ($v^{apr,N}$) e por CB ($v^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 4.12.

5

Resultados - Modelo Sintético 2

O Modelo 2 (Figura 5.1) representa um arcabouço geológico semelhante ao que deve ser encontrado na inversão do dado real referente ao campo de Dom João, Bacia do Recôncavo, e considera informações da literatura sobre o reservatório da Formação Sergi, bem representado no que diz respeito às variações verticais de velocidade. Apesar de ser um modelo bidimensional, nota-se que ele é basicamente 1D uma vez que é composto majoritariamente por camadas plano-paralelas, conforme informações acerca do Campo de Dom João, o qual o modelo busca simular. O modelo tem 215 m de extensão, 410 m de profundidade e foi parametrizado em 3526 blocos (43 na direção horizontal e 82 na vertical) com dimensões de 5 $m \times 5 m$. A aquisição é do tipo poço-a-poço, composta por 141 fontes à esquerda igualmente espaçadas umas das outras e por 140 receptores à direita também igualmente espaçados uns dos outros. A Figura 5.2 mostra o diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído e calculados por traçado de raios retos.

A regularização do problema inverso utilizou:

$$\begin{aligned}\lambda(1) &= 0 \\ \lambda(2) &= 10^{-4}, && \text{se } \mathbf{D}_1, \\ \lambda(2) &= 10^{-2}, && \text{se } \mathbf{D}_2, \\ \lambda(i) &= \lambda(2) \cdot 10^{i-2}, && \text{p/ } i = 3, \dots, 20.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Assim como para o Modelo 1, $\lambda(i)$ será identificado pelo índice i e diferentes valores para $\lambda(2)$ em \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são devido às diferentes ordens de grandeza envolvidas. \mathbf{D}_0 não foi utilizada por não ter trazido bons resultados com o Modelo 1. Todos as simulações foram solucionadas apenas por CG uma vez que SVD é bastante custoso do ponto de vista computacional e trouxe resultados similares ao CG nas simulações com o Modelo 1.

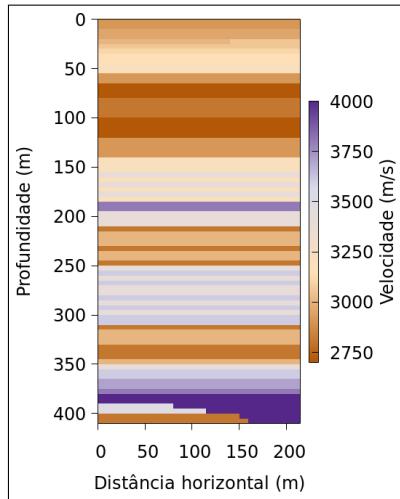


Figura 5.1: Modelo 2.

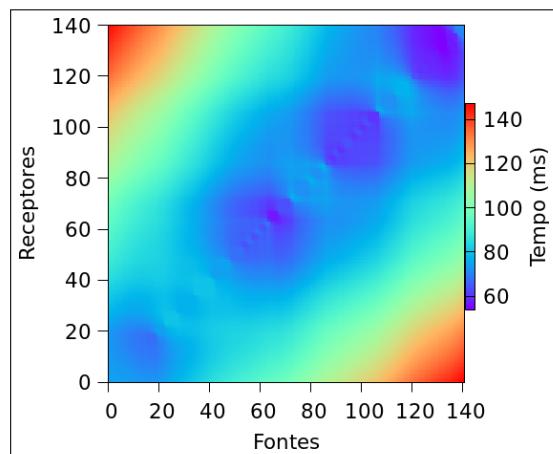


Figura 5.2: Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.

5.1 Inversão linear

A Tabela 5.1 mostra ϵ_s e ϵ_t relativos ao λ ótimo no sentido de mínimo ϵ_s para cada n^{CG} testado, com os melhores resultados em negrito. Quanto maior μ , menor n^{CG} e maior suavização. Como esperado, o tempo de processamento (PT) é proporcional a n^{CG} .

μ (%)	n^{CG}	D_1				D_2			
		λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	λ	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)
0	900	5	0.55	0	378	3	0.57	0	250
	1800	4	0.52	0	752	2	0.53	0	483
	2700	4	0.51	0	910	2	0.52	0	719
	3526	3	0.52	0	928	2	0.52	0	972
0.1	50	8	1.94	0.10	15	7	1.95	0.10	15
	100	7	1.64	0.09	28	6	1.64	0.09	28
	200	6	2.37	0.09	55	5	2.35	0.09	55
	400	6	3.69	0.09	103	5	3.69	0.09	111
1	10	10	7.45	1.12	5	9	7.52	1.12	5
	20	9	4.73	0.96	8	8	4.69	0.96	8
	30	9	4.42	0.94	10	8	4.41	0.94	10
	40	9	5.11	0.94	13	8	5.21	0.94	13
5	10	11	10.17	4.92	5	9	10.10	4.83	6
	15	10	9.53	4.78	7	9	9.10	4.79	7
	20	10	9.93	4.77	8	9	9.69	4.79	8
	25	10	11.54	4.77	9	9	11.18	4.78	9

Tabela 5.1: Inversões lineares. Melhores resultados em negrito.

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram as curvas auxiliares referentes às simulações em negrito da Tabela 5.1, ambas com o mesmo comportamento. Em todas as simulações, os λ s anteriores ao λ ótimo produzem ϵ_s próximo ao dele, e essa faixa é ampliada à medida que μ aumenta.

Já ϵ_t se mantém similar ao μ correspondente. Com exceção de $\mu = 0$, λ ótimo corresponde à base do trecho ascendente da curva $\sin \Theta$, como é esperado.

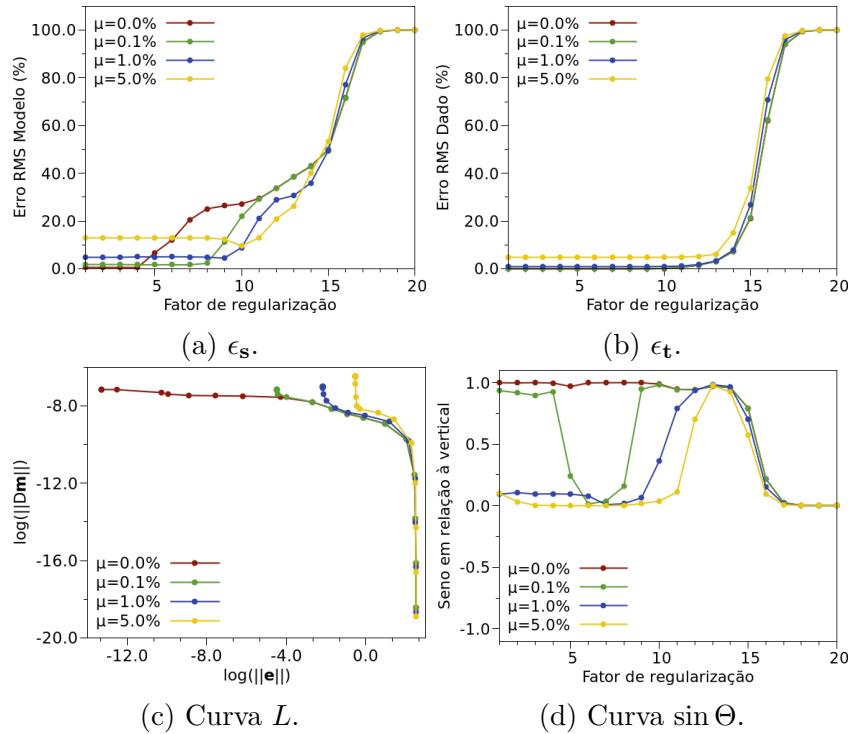


Figura 5.3: Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito da Tabela 5.1.

A terceira coluna das Figuras 5.6 e 5.7 reúne os modelos de velocidade correspondentes às simulações em negrito da tabela 5.1. Nota-se que mesmo para níveis elevados de ruído adicionado ao dado, é possível identificar as camadas geológicas.

5.1.1 Aplicação de CB

A Tabela 5.2 exibe a evolução de ϵ_{sapr} para conjunto de λ que engloba λ ótimo das inversões em negrito da Tabela 5.1. Para todas as simulações, λ igual ou uma ordem maior (em alguns casos, até duas ordens maior) ao λ ótimo produziu $\epsilon_{sapr} < \epsilon_{sest}$, o que sugere robustez ao critério para tratar dado real. A exceção é quando $\mu = 0$, situação que não deve ocorrer em campo, onde $\epsilon_{sapr} \approx \epsilon_{sest}$ para a mesma faixa de λ . O tempo de processamento quando $\mu = 0$ é muito maior que os demais porque, neste caso, conforme a Tabela 5.1, n^{CG} requerido é também muito maior. Em situação real, onde o dado é sempre contaminado por ruído, dificilmente será requerido n^{CG} tão alto.

A Figura 5.5 indica a evolução das razões entre valores singulares dominantes consecutivos da matriz pseudonula das simulações em negrito da Tabela 5.2. O número de auto-

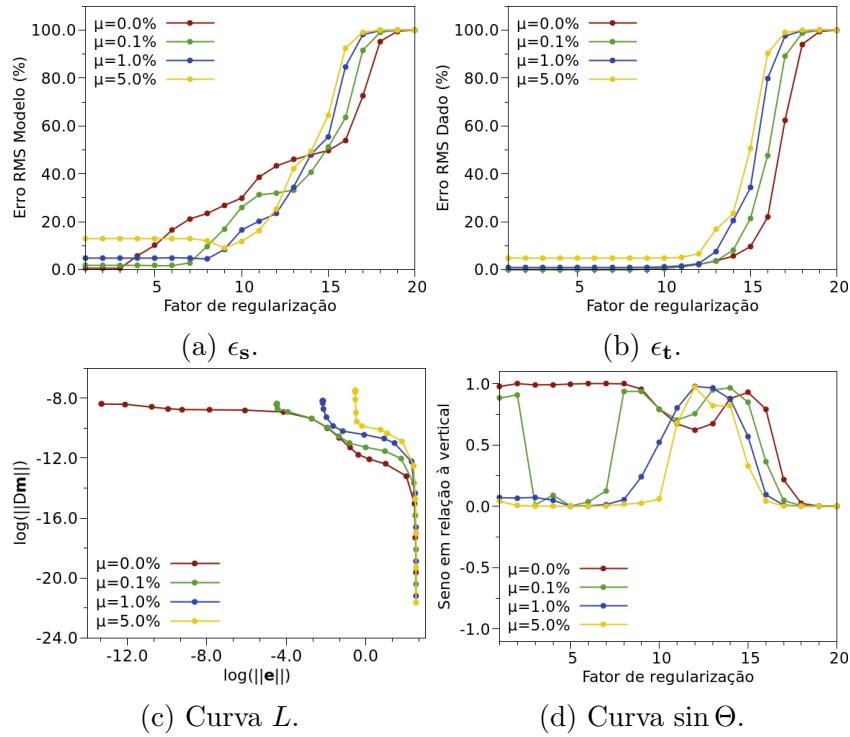


Figura 5.4: Curvas auxiliares referentes às simulações regularizadas por D_2 em negrito da Tabela 5.1.

μ (%)	D_1				D_2			
	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)
0	3	0.51	1	767	1	0.52	0	790
	4	0.51	1		2	0.52	0	
	5	0.51	1		3	0.52	1	
	6	0.53	1		4	0.51	1	
0.1	6	1.64	0	87	5	1.64	0	85
	7	1.62	0		6	1.61	0	
	8	1.56	0		7	1.53	0	
	9	1.33	1		8	1.22	1	
1	8	5.36	0	64	7	5.24	0	68
	9	4.13	0		8	3.91	0	
	10	3.56	0		9	3.41	0	
	11	3.19	1		10	5.84	0	
5	9	12.10	0	61	8	11.83	0	59
	10	8.54	0		9	7.88	0	
	11	8.32	0		10	7.06	0	
	12	12.22	0		11	8.65	0	

Tabela 5.2: ϵ_{sapr} do aprimoramento por CB dos modelos referentes às simulações em negrito da Tabela 5.1 em função de λ . Melhores resultados em negrito.

magens dominantes suprimidas, n^{ai} , depende de a razão ser maior que 3, estabelecido como indicativo da dominância.

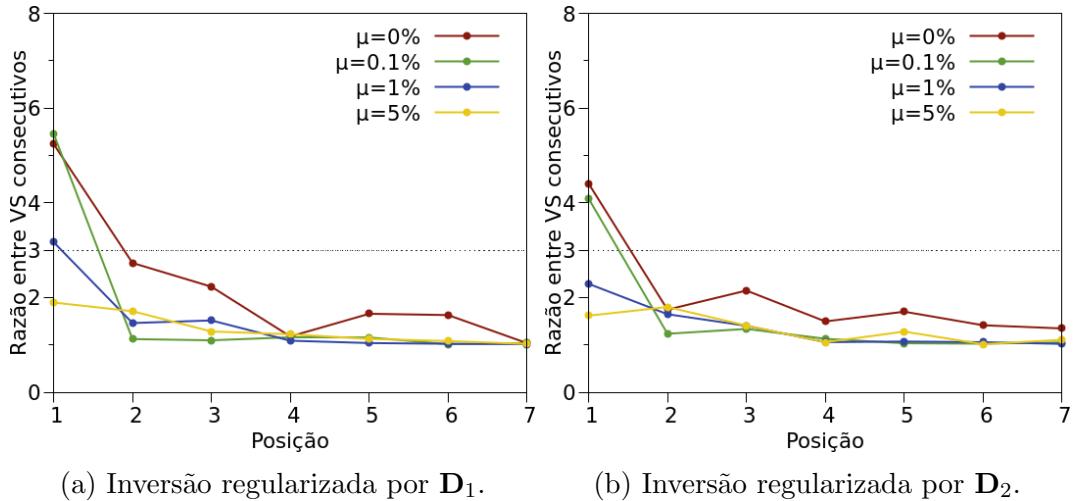


Figura 5.5: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} das simulações em negrito da Tabela 5.2. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.

A primeira coluna das Figuras 5.6 e 5.7 apresenta, respectivamente para as regularizações por \mathbf{D}_1 e por \mathbf{D}_2 , a matriz resíduo (\mathbf{R}) referente às simulações em negrito da Tabela 5.1. A segunda coluna, a matriz pseudonula (\mathbf{P}_L) - estimativa de \mathbf{R} - obtida do CB referente às simulações em negrito da Tabela 5.2; e a quarta coluna, o correspondente modelo aprimorado. É evidente que, quando $\mu > 0$, $\mathbf{P}_L \approx \mathbf{R}$ de modo que os modelos de velocidade aprimorados se tornam muito mais representativos do modelo verdadeiro que os estimados (\mathbf{v}^{est}). Resultados positivos para níveis de ruído considerável é o que se deseja, pois sugerem boa aplicabilidade do algoritmo para dado real.

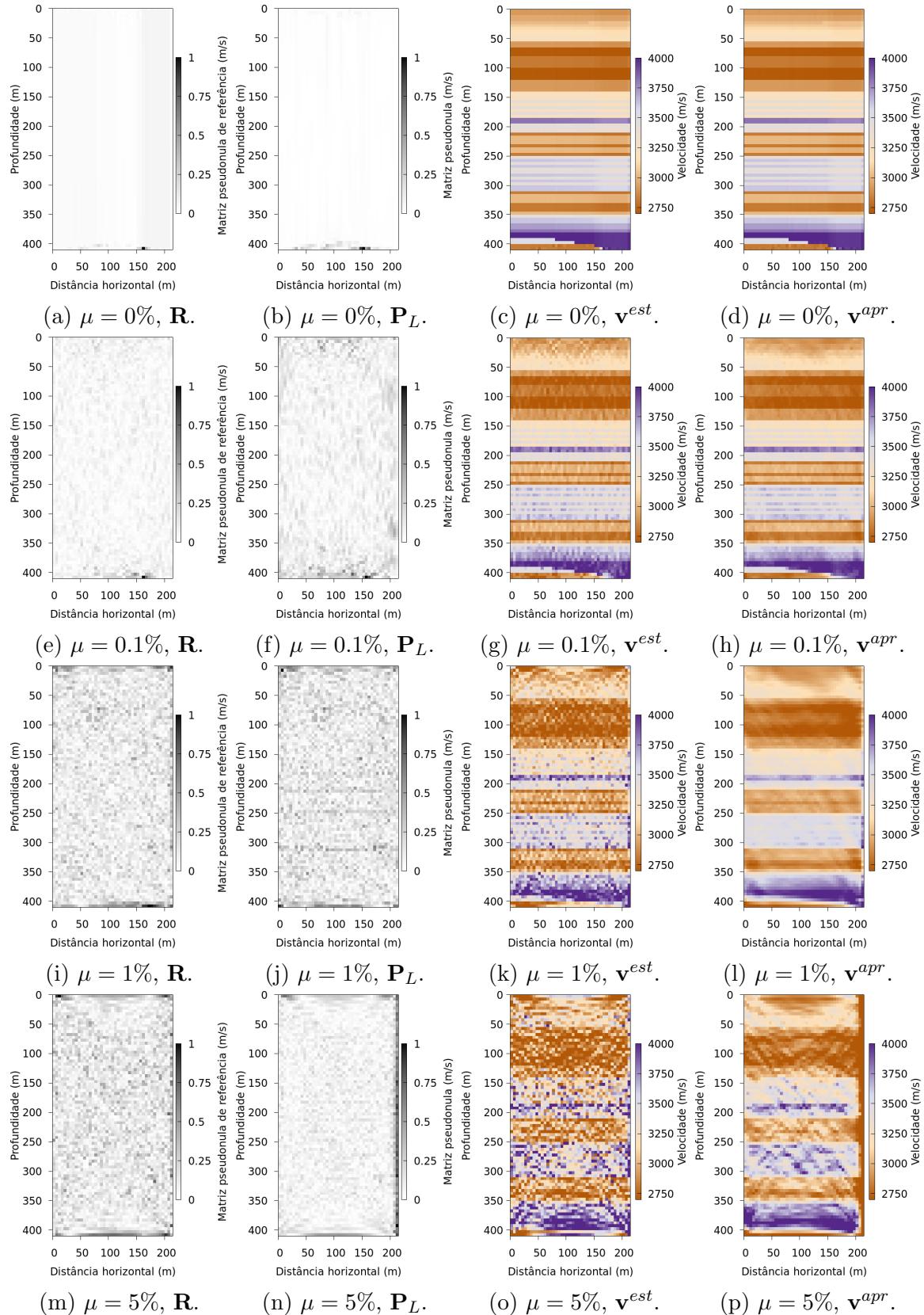


Figura 5.6: Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito na Tabela 5.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_L) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_1 em negrito na Tabela 5.2.

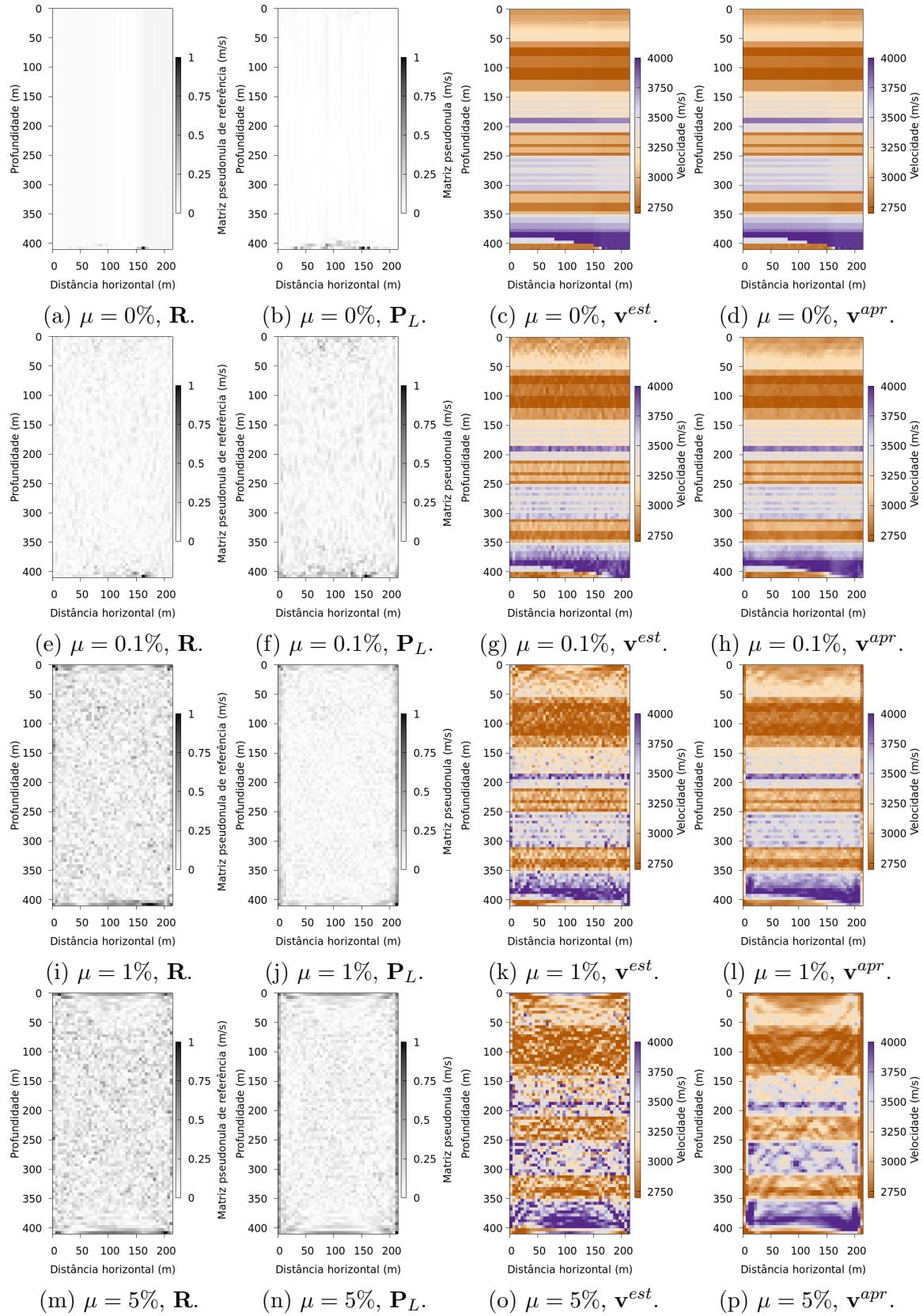


Figura 5.7: Matrizes resíduo (\mathbf{R}) e modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 5.1. Matrizes pseudonulas por CB (\mathbf{P}_L) normalizadas e em valor absoluto e modelos de velocidade aprimorados (\mathbf{v}^{apr}) referentes às simulações regularizadas por \mathbf{D}_2 em negrito na Tabela 5.2.

5.2 Inversão linearizada - Traçado de raios por equação do raio

Nesta seção, o traçado de raios foi realizado por equação do raio. Em virtude dos melhores resultados na inversão linear, a inversão linearizada foi regularizada somente por \mathbf{D}_2 . A Figura 5.8 mostra o modelo de velocidades verdadeiro e suavizados por diferentes janelas para sintetizar o dado e produzir a matriz tomográfica de cada iteração.

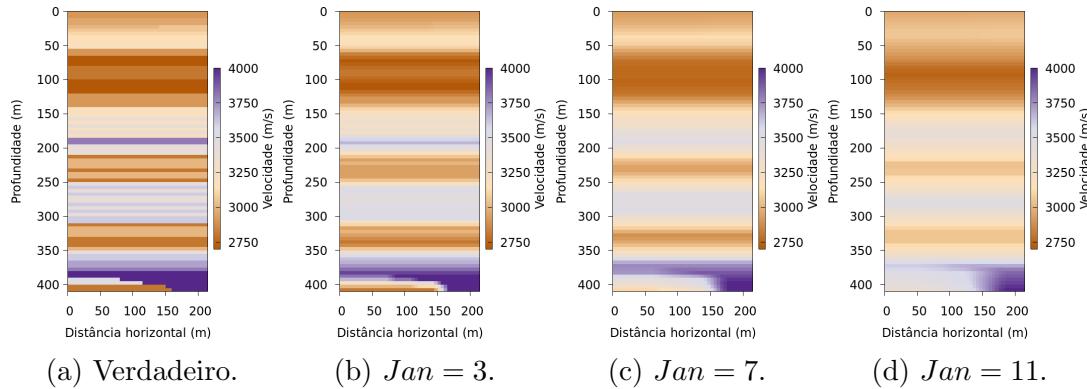


Figura 5.8: Modelos verdadeiro e suavizados por diferentes janelas (Jan).

A Tabela 5.3 exibe ϵ_s e ϵ_t da simulação preliminar em função de Jan e n^{CG} . Em negrito estão os melhores resultados. n^{CG} maiores produziram ϵ_s maior. Para a simulação final, foi escolhido $Jan = 7$, suficiente para ligar todos os raios sem perder resolução do modelo, e $n^{CG} = 15$, por recuperar os melhores modelos para $\mu = 5\%$. Deve-se lembrar que dados da Bacia do Recôncavo costumam ser contaminados por ruído elevado.

A Tabela 5.4 indica os resultados da simulação final. Valores de K além dos mostrados produziram modelos com maior ϵ_s . Observa-se os mesmos padrões do Modelo 1, isto é, NI reduzido para μ crescente, PT proporcional a NI , ϵ_t com mesma magnitude de μ , e a conclusão equivocada de K menor para μ crescente, desmentida pela Tabela 5.5, que evidencia leve aumento de λ para μ maiores na resolução com curva L .

As Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 exibem as curvas auxiliares da simulação final (em negrito da Tabela 5.4) para todo μ . A análise conjunta das curvas $\sin \Theta$ e do λ das iterações correspondentes (simulação final da Tabela 5.5) indica que K referente aos melhores resultados buscou λ associado aos pontos do topo do trecho ascendente da curva $\sin \Theta$, e não aos pontos da base do trecho. Os modelos recuperados são, portanto, mais suavizados do que o esperado. A abordagem utilizada é baseada em K único independente da iteração, mas nada impede uma abordagem que relaxe (ou intensifique) a suavização de acordo com a iteração.

μ	n^{CG}	$Jan = 3$				$Jan = 7$				$Jan = 11$			
		ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT	NI	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT	NI	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT	NI
0	5	4,55	0.53	1143	6	2,99	0.17	378	8	1,91	0.15	383	8
	10	4,51	0.60	1424	7	3,65	0.20	237	5	2,05	0.14	455	8
	15	4,59	0.58	1216	7	3,11	0.19	251	5	2,32	0.15	468	8
	20	4,72	0.58	854	5	3,57	0.24	291	5	2,29	0.15	294	5
0.1	5	4,53	0.52	1549	8	3,01	0.20	365	8	1,89	0.17	390	8
	10	4,51	0.62	1414	7	3,62	0.23	235	5	2,06	0.17	545	8
	15	4,59	0.62	1346	8	3,10	0.19	250	5	2,28	0.17	460	8
	20	4,72	0.59	843	5	3,61	0.23	294	5	2,32	0.17	300	5
1	5	4,56	1.09	1281	7	3,46	0.97	343	8	2,79	0.97	331	7
	10	4,56	1.15	2023	8	3,93	0.98	166	4	2,76	0.97	257	5
	15	4,66	1.14	1154	7	3,78	0.98	182	4	2,98	0.97	383	7
	20	4,79	1.16	1142	7	3,96	1.00	151	3	3,04	0.98	229	4
5	5	5,39	4.98	1608	8	4,79	4.94	154	4	4,37	4.94	125	4
	10	5,23	5.00	642	4	5,01	4.95	138	3	4,40	4.95	178	5
	15	5,16	5.02	438	3	4,72	4.95	142	3	4,34	4.96	129	3
	20	5,22	5.01	431	3	4,78	4.96	154	3	4,45	4.96	119	3

Tabela 5.3: Simulação preliminar regularizada por \mathbf{D}_2 . Melhores resultados em negrito.

μ (%)	K	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI
0	0.99	4.92	0.19	341	8
	0.999	4.58	0.17	393	8
	0.9999	4.63	0.32	165	5
0.1	0.99	4.93	0.19	347	8
	0.999	4.61	0.20	407	8
	0.9999	4.68	0.36	148	4
1	0.99	5.16	1.01	239	7
	0.999	4.69	1.04	238	5
	0.9999	5.21	1.09	141	4
5	0.9	5.42	4.96	149	4
	0.99	5.69	4.99	150	5
	0.999	5.74	4.99	210	4

Tabela 5.4: Simulação final regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 7$ e $n^{CG} = 15$. Melhores resultados em negrito.

A primeira coluna da Figura 5.15 mostra os modelos de velocidade correspondentes às simulações em negrito da Tabela 5.4. É possível identificar camadas geológicas, mas para μ crescente é evidente a maior suavização do modelo, além da presença de feição em X introduzida pela regularização.

Iteração	Simulação preliminar				Simulação final			
	$\mu = 0\%$	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 5\%$	$\mu = 0\%$	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 5\%$
1	12	12	12	12	10	10	11	11
2	11	11	11	11	10	10	11	11
3	9	9	9	11	10	10	11	12
4	8	8	10	-	10	10	12	12
5	12	9	-	-	10	10	11	-
6	-	-	-	-	10	10	-	-
7	-	-	-	-	10	10	-	-
8	-	-	-	-	10	10	-	-
CBM	-	-	-	-	18	18	18	18
CB	-	-	-	-	8	8	9	16

Tabela 5.5: λ s da simulação preliminar (Tabela 5.3, regularizada por \mathbf{D}_2 , com $Jan = 7$ e $n^{CG} = 15$, em negrito), da simulação final (em negrito da Tabela 5.4) e do aprimoramento por CBM e CB.

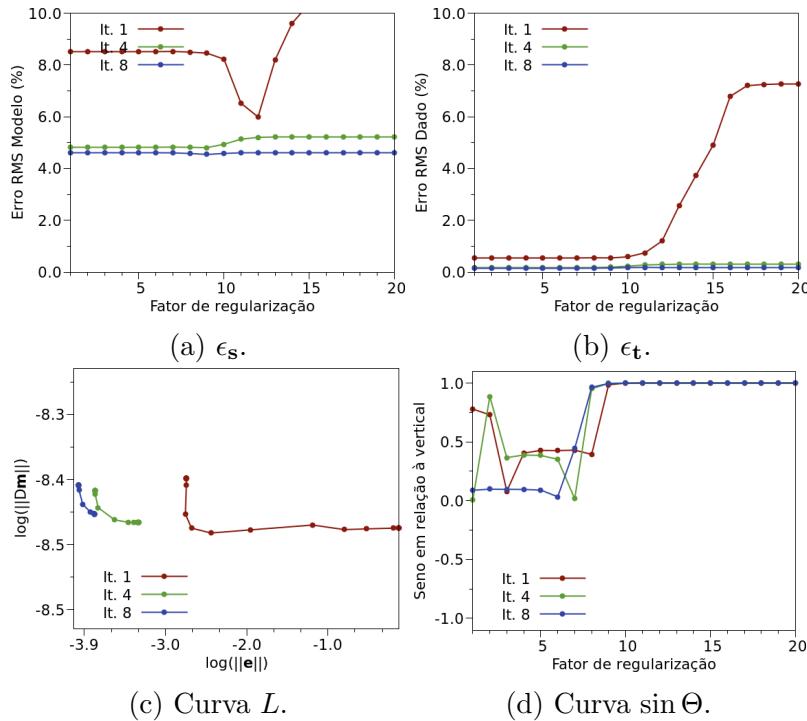


Figura 5.9: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 0$.

5.2.1 Aplicação de CB e CBM

A Tabela 5.6 mostra ϵ_{sapr} dos aprimoramentos por CBM e CB dos modelos em negrito da Tabela 5.4, em função de λ . Os melhores resultados estão em negrito, todos com ϵ_{sapr} menor que ϵ_s . Os demais aprimoramentos, com exceção de dois, também produziram $\epsilon_{sapr} < \epsilon_s$, indicando a robustez dos algoritmos.

O lado direito da Tabela 5.5 mostra λ de cada iteração para a simulação final e repete

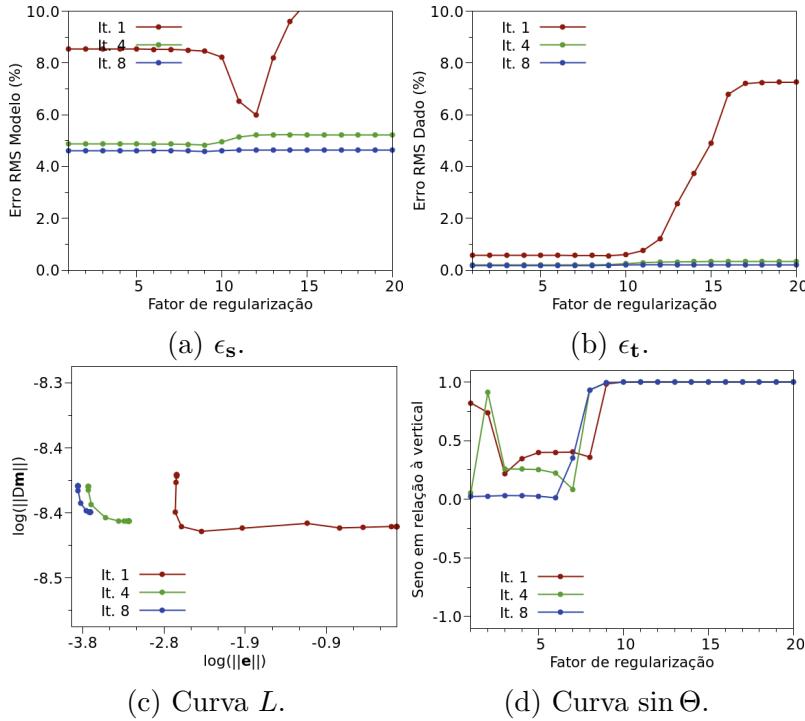


Figura 5.10: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 0.1\%$.

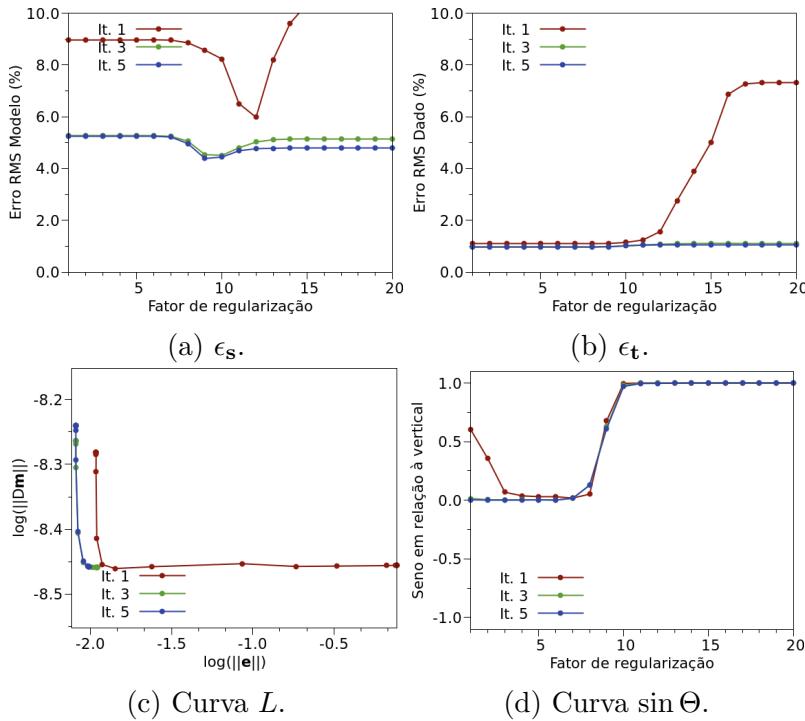
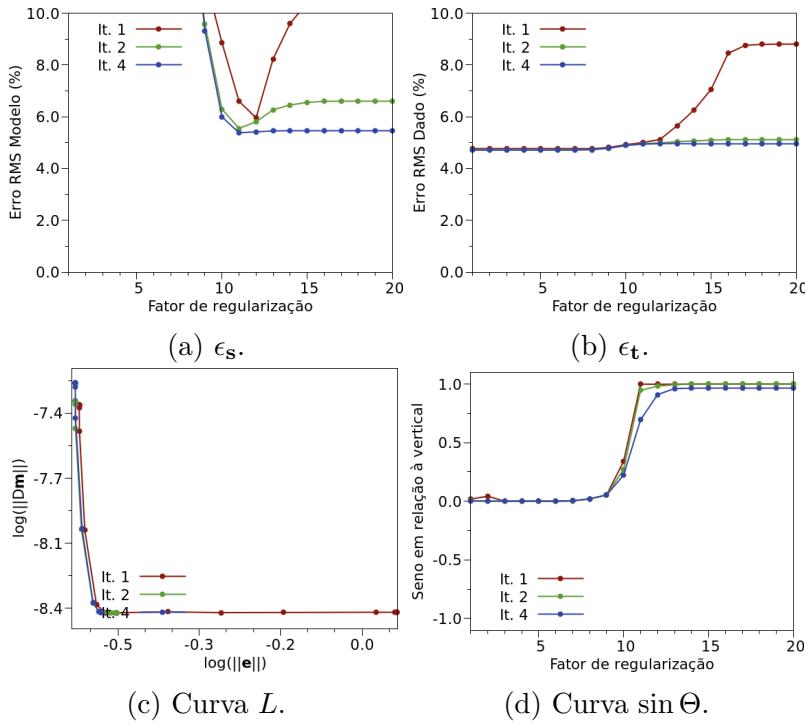


Figura 5.11: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 1\%$.

os referentes aos aprimoramentos por CBM e CB em negrito da Tabela 5.6. De maneira similar ao caso linear, CB mantém o uso de λ próximo ao ótimo, mas duas ordens abaixo. A exceção é para $\mu = 5\%$, que necessitou de elevada regularização. Pra CBM, é sempre

Figura 5.12: Curvas auxiliares referentes à simulação em negrito na Tabela 5.4, com $\mu = 5\%$.

μ (%)	CBM				CB			
	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)	λ	ϵ_{sapr} (%)	n^{ai}	PT (s)
0	17	4.16	1	35	7	3.91	0	29
	18	4.13	1		8	3.91	0	
	19	4.13	1		9	3.95	0	
	20	4.13	1		10	4.46	0	
0.1	17	4.17	1	34	7	3.93	0	30
	18	4.15	1		8	3.92	0	
	19	4.15	1		9	3.97	0	
	20	4.15	1		10	4.51	0	
1	17	4.52	1	36	8	4.32	0	30
	18	4.51	1		9	3.93	0	
	19	4.51	1		10	4.53	0	
	20	4.51	1		11	4.82	0	
5	17	4.87	1	35	11	5.34	0	30
	18	4.85	1		12	5.46	0	
	19	4.85	1		15	5.28	1	
	20	4.85	1		16	4.92	1	

Tabela 5.6: ϵ_{sapr} do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 5.4 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.

necessário maior regularização e, por isso, os modelos aprimorados são mais suavizados.

O número de autoimagens dominantes suprimidas, n^{ai} , depende das razões entre valores

singulares consecutivos, e é mantido aqui o procedimento que suprime autoimagens dominantes desde que a razão seja maior que 3. A Figura 5.13 mostra as razões para os resultados em negrito da Tabela 5.6.

As Figuras 5.14 e 5.15 mostram as matrizes resíduo e modelos de velocidade estimados referentes às simulações em negrito da Tabela 5.4 e as matrizes pseudonulas e modelos aprimorados por CBM e CB referentes às simulações em negrito da Tabela 5.6. CBM produz modelos mais suavizados e com maior atenuação dos artefatos introduzidos pela regularização. Já CB produz modelos com maior resolução, apesar de não atenuar com mesma eficiência os artefatos. Em ambos os critérios, os modelos obtidos superam o modelo estimado na inversão e, por funcionarem bem para dado ruidoso, tornam-se promissores para tratar o problema inverso com dado real.

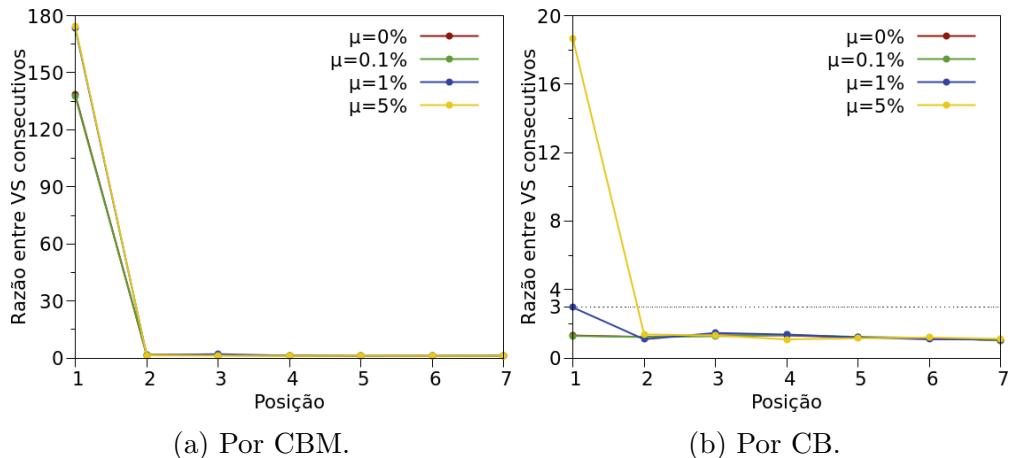


Figura 5.13: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 5.6. Para razões maiores que 3, a autoimagem correspondente deve ser suprimida.

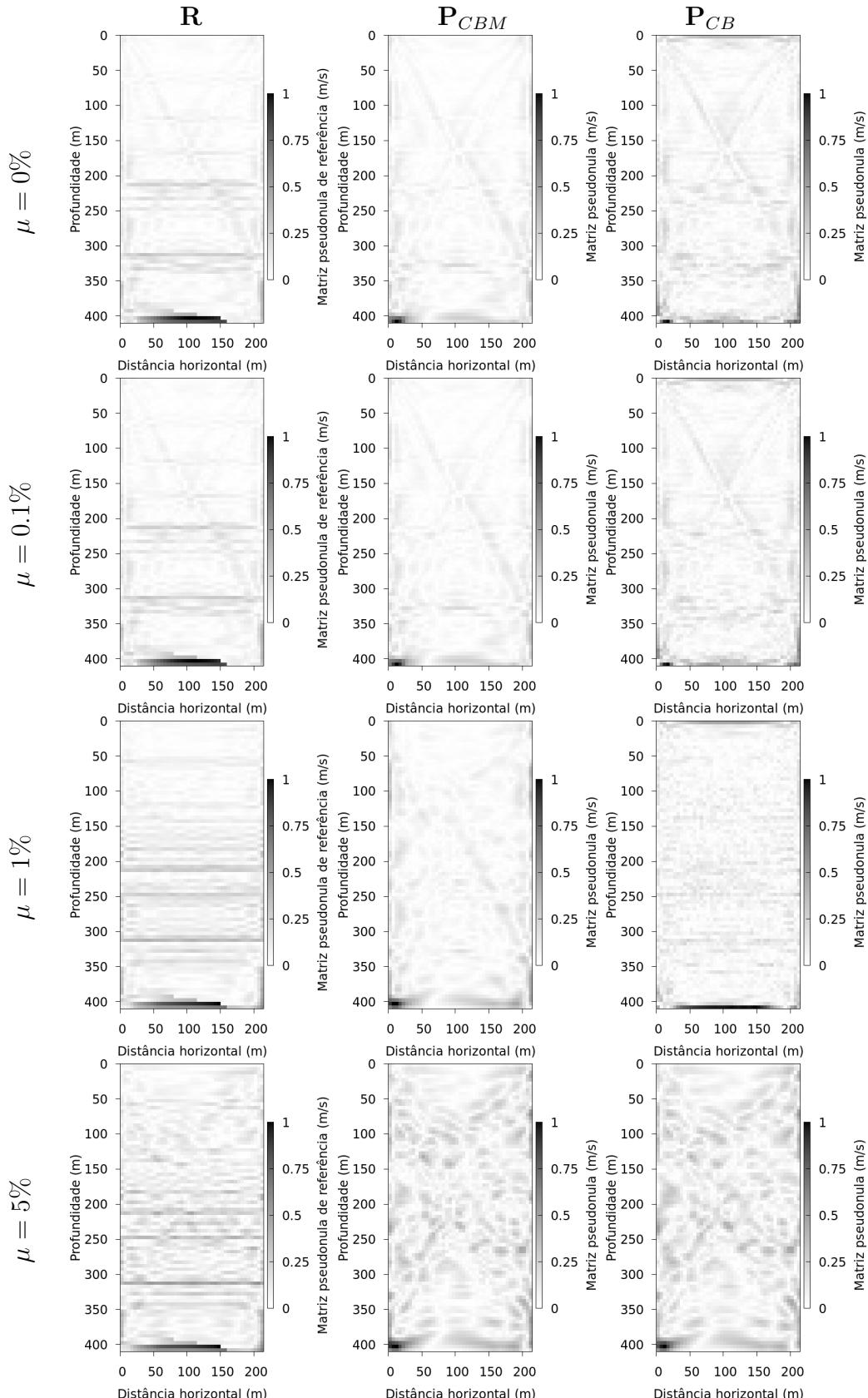


Figura 5.14: Matrizes resíduo (**R**) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.4 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 5.6.

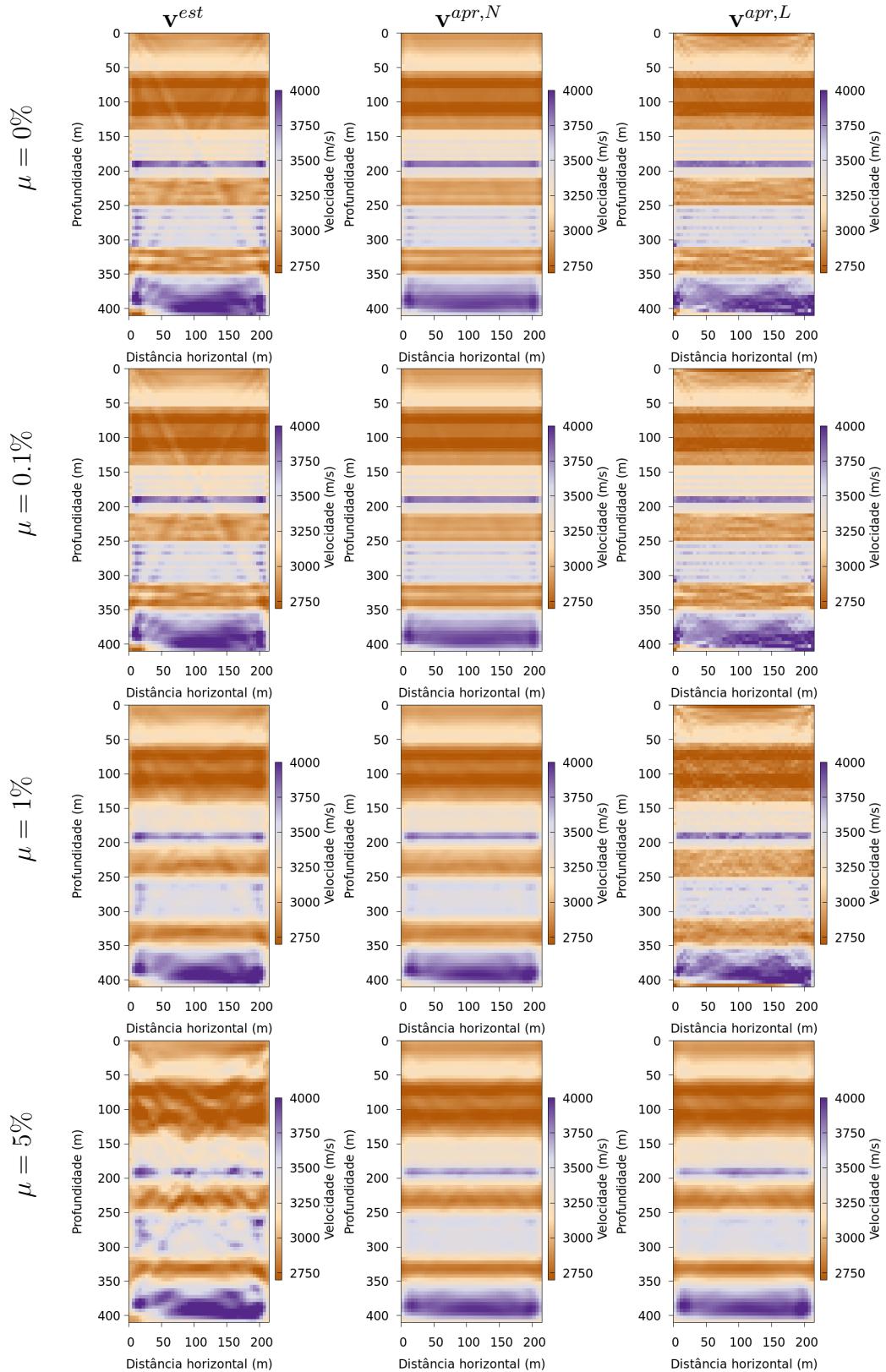


Figura 5.15: Modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.4 e aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.6.

5.3 Inversão linearizada - Traçado de raios por grafos

Nesta seção, o traçado de raios foi realizado por grafos com 12 nós equidistantes em cada lado dos blocos. Não há necessidade de grande suavização do modelo de vagarosidades uma vez que a modelagem por grafos sempre conecta fontes a receptores independentemente da complexidade geológica do meio. É preferível, inclusive, que não haja tal suavização para que sejam preservadas as características do modelo, o que torna a modelagem por grafos mais promissora para inversão com dado real. Portanto, foi escolhida a janela de suavização 3×3 .

Apesar dos bons resultados da regularização com operador derivada \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 na seção anterior, devemos lembrar que é esperado um modelo composto por camadas aproximadamente plano-paralelas. Portanto, aqui serão testados somente regularização com operadores derivada de primeira e segunda ordens na direção horizontal, denominados \mathbf{D}_{1H} e \mathbf{D}_{2H} , respectivamente.

Para aumentar a fidelidade das simulações às inversões com dado real, a coordenada vertical das fontes e dos receptores e os raios válidos (14048 raios, de acordo com a Figura 5.16) são os mesmos do dado real. Dois procedimentos foram incluídos para garantir estabilidade ao método: a) as modelagens foram realizadas com modelos de velocidades limitados a um intervalo entre 1500 m/s e 5000 m/s; b) os fatores de regularização foram definidos manualmente - e não automaticamente - pelo usuário com auxílio das curvas L e $\sin \Theta$. Somente inversões iterativas com dados contaminados por ruído gaussiano de $\mu = 0.1\%$ e $\mu = 1\%$ foram realizadas.

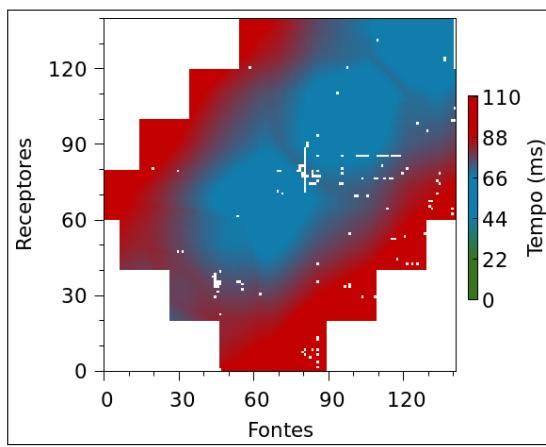


Figura 5.16: Diagrama dos tempos de trânsito observados livres de ruído.

A Tabela 5.7 mostra os resultados para valores extremos e intermediário de n^{CG} . Recordemos que n^{CG} é o número de vetores mutuamente conjugados em $\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n$, isto é, o número de passos necessários para se obter a solução pelo método do gradiente conjugado

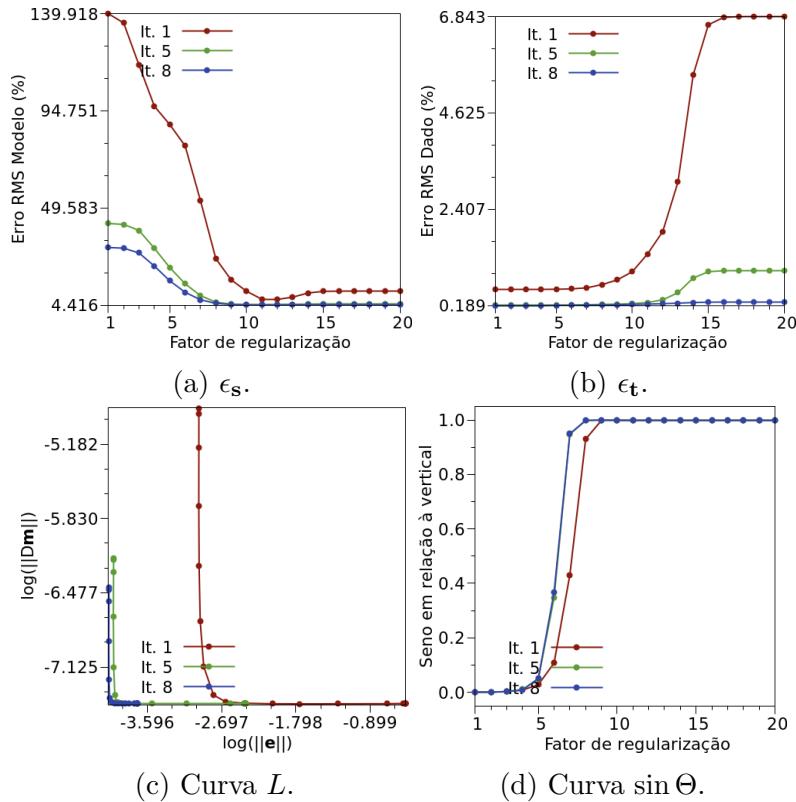
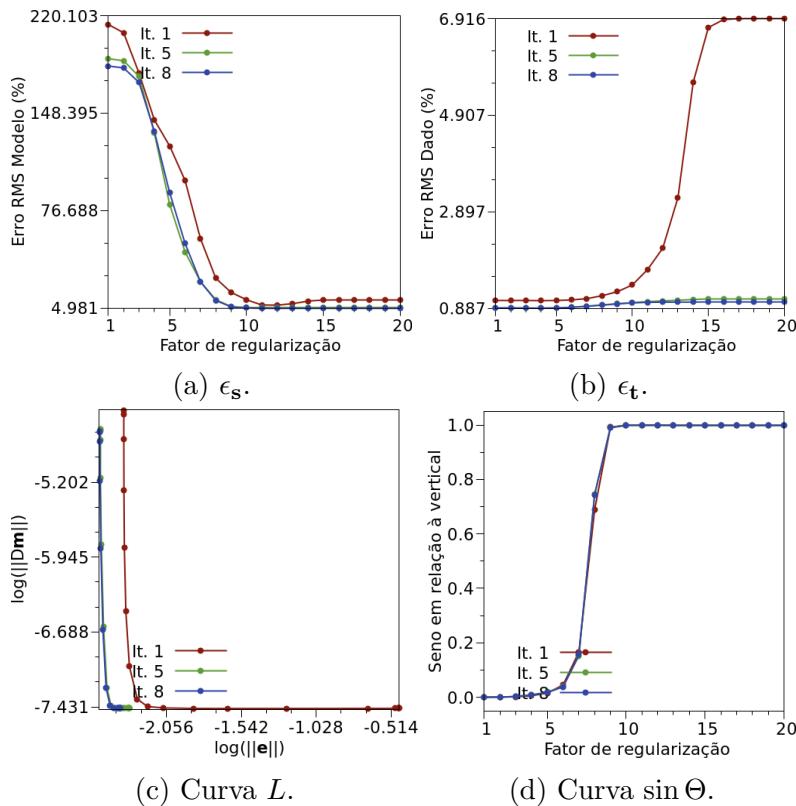
(Subseção 1.5.2). Se o sistema é mal comportado, um número grande de passos levará a soluções pouco fieis aos dados. Por outro lado, um maior número de passos aumenta a precisão da solução se o sistema é bem comportado. Como é esperado um modelo em camadas plano-paralelas, o sistema regularizado por \mathbf{D}_{1H} é bem comportado e admite n^{CG} elevado, mas \mathbf{D}_{2H} , não. O menor ϵ_s para \mathbf{D}_{1H} compensa o elevado tempo de processamento, quando comparado a \mathbf{D}_{2H} . As simulações com traçado de raios por equação do raio, regularizados por \mathbf{D}_1 ou \mathbf{D}_2 , também não admitem n^{CG} elevado porque não respeitam as características do modelo esperado (Tabela 5.3).

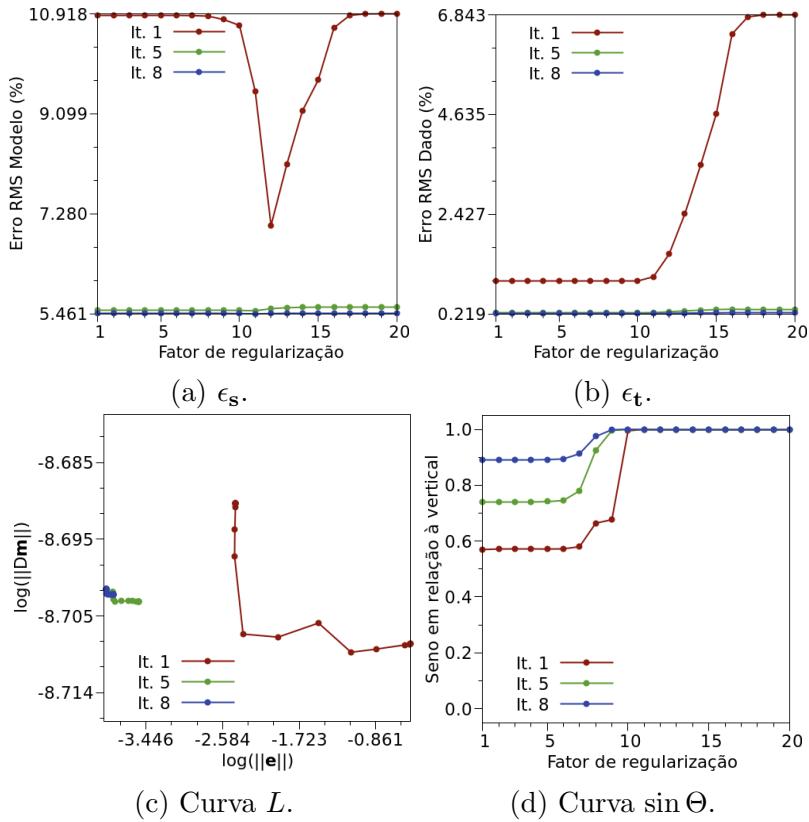
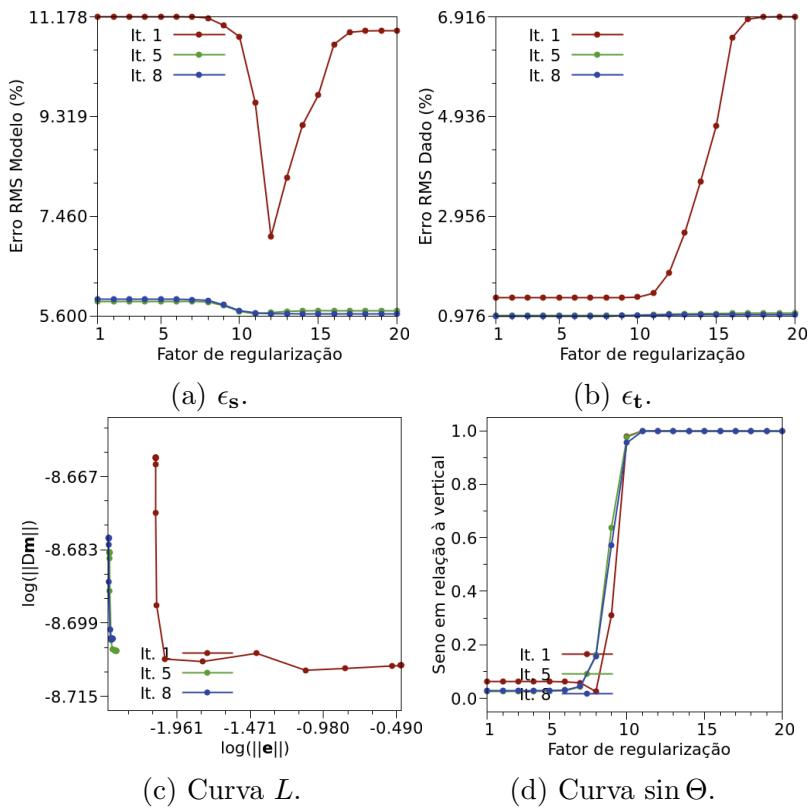
É possível também comparar a acurácia da modelagem por grafos e por equação do raio. As simulações com grafos produziram resultados comparáveis às simulações preliminares com equação do raio no sentido de ϵ_s mesmo utilizando somente 70% dos raios, para a mesma janela de suavização (Tabelas 5.3 e 5.7). Isso sugere a robustez da modelagem por grafos: a matriz tomográfica guarda informações mais fiéis do caminho percorrido pelo raio do que aquela produzida com o algoritmo de Andersen & Kak (1982), que sofre limitação numérica imposta pela necessidade de se calcular o gradiente do modelo de vagarosidades.

As Figuras 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20 mostram as curvas auxiliares para algumas iterações das simulações em negrito da Tabela 5.7. Todas as curvas mantêm o mesmo padrão das simulações iterativas com traçado de raios por equação do raio, com curvas $\sin \Theta$ bem demarcadas, e valor adequado de λ um pouco além do ponto de inflexão da curva L , evidenciando a necessidade de modelos mais suavizados. As curvas ϵ_s mostram valores menores para iterações mais avançadas e para modelos com um bom grau de suavização dentro de uma mesma iteração, enquanto as curvas ϵ_t mostram valores maiores quando há muita suavização na iteração inicial e, em todas as outras situações, mantêm valores baixos, como se espera.

μ (%)	n^{CG}	\mathbf{D}_{1H}				\mathbf{D}_{2H}			
		ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI	ϵ_s (%)	ϵ_t (%)	PT (s)	NI
0.1	10	5.93	0.21	800	8	5.46	0.22	800	8
	1000	4.60	0.25	3100	8	6.74	0.47	3100	8
	3526	4.51	0.23	9400	8			9400	8
1	10	5.80	1.00	800	8	5.66	1.00	800	8
	1000	5.04	1.00	3100	8	7.03	1.14	3100	8
	3526	4.98	1.01	9400	8			9400	8

Tabela 5.7: Simulações com traçado de raios por grafos. Melhores resultados em negrito.

Figura 5.17: Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{1H} e $\mu = 0.1\%$.Figura 5.18: Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{1H} e $\mu = 1\%$.

Figura 5.19: Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{2H} e $\mu = 0.1\%$.Figura 5.20: Curvas auxiliares da simulação em negrito na Tabela 5.7, com \mathbf{D}_{2H} e $\mu = 1\%$.

5.3.1 Aplicação de CB e CBM

A Tabela 5.8 mostra o λ selecionado de cada iteração das inversões em negrito da Tabela 5.7, e o λ selecionado na aplicação do CBM e CB. Para todos os casos foi necessária uma maior suavização do que a utilizada nas inversões. Agregado aos resultados da Tabela 5.9, em que λ_s maiores produziram resultados similares, é possível afirmar que uma grande suavização leva a resultados superiores que aos das inversões no sentido de minimização de ϵ_s , o que sugere robustez aos critérios propostos.

Iteração	D_{1H}		D_{2H}	
	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$	$\mu = 0.1\%$	$\mu = 1\%$
1	12	12	12	12
2	11	12	12	11
3	11	11	10	11
4	9	11	9	11
5	10	11	9	11
6	10	11	11	11
7	11	11	11	10
8	12	11	10	11
CBM	16	16	18	18
CB	16	16	18	18

Tabela 5.8: λ_s das simulações em negrito da Tabela 5.7 e do aprimoramento por CBM e CB.

O tempo de processamento para CBM é maior do que para CB devido à necessidade de se realizar uma modelagem com o modelo de vagarosidades complementar, e é muito maior para **D_{1H}** porque, conforme Tabela 5.7, foi necessário n^{CG} muito maior do que para **D_{2H}**. Novamente, o maior tempo de processamento para simulações com **D_{1H}** foi compensado pelos melhores resultados no sentido de minimização de ϵ_s .

Um resultado curioso merece destaque. Tanto para CBM quanto para CB aplicados quando o modelo é suavizado por **D_{2H}** foi observado ϵ_s ligeiramente menor para o dado contaminado por $\mu = 1\%$ do que para $\mu = 0.1\%$. Duas possibilidades podem ser a causa deste fenômeno contraintuitivo. A primeira é que **D_{2H}** não fornece informações fieis sobre as características estratigráficas do modelo, e a segunda é que flutuações pontuais do valor da vagarosidade para determinados blocos devido a erros numéricos podem produzir ϵ_s maiores ou menores.

A Figura 5.21 mostra a evolução das razões entre valores singulares dominantes consecutivos da matriz pseudonula das simulações em negrito na Tabela 5.9. Para todos os casos, a razão entre o primeiro e segundo valor singular é muito maior do que a razão entre os demais, sendo por este motivo suprimida apenas a primeira autoimagem para todos as aplicações de

CB e CBM.

A Figura 5.22 mostra a boa correspondência entre a matriz resíduo e as matrizes pseudonulas por CBM e CB para todos os casos em negrito na Tabela 5.9 no sentido de mapear os artefatos aleatórios introduzidos pela regularização. Esta observação é confirmada pela Figura 5.23, na qual os modelos de velocidades aprimorados pelos critérios propostos foram capazes de mapear a estratificação do modelo, de atenuar os artefatos introduzidos pela regularização e de elevar a resolução do modelo.

Regularização	μ (%)	CBM				CB			
		λ	$\epsilon_{s^{apr}}$ (%)	n^{ai}	PT (s)	λ	$\epsilon_{s^{apr}}$ (%)	n^{ai}	PT (s)
D_{1H}	0.1	16	3.97	1	1189	16	4.00	1	1080
		17	4.01	1		17	4.01	1	
		18	4.02	1		18	4.02	1	
		19	4.02	1		19	4.02	1	
	1	16	4.39	1	1227	16	4.41	1	1140
		17	4.43	1		17	4.43	1	
		18	4.44	1		18	4.44	1	
		19	4.44	1		19	4.44	1	
D_{2H}	0.1	17	4.92	1	95	17	5.04	1	8
		18	4.85	1		18	4.85	1	
		19	4.85	1		19	4.85	1	
		20	4.85	1		20	4.85	1	
	1	17	4.82	1	93	17	4.86	1	9
		18	4.75	1		18	4.75	1	
		19	4.75	1		19	4.75	1	
		20	4.75	1		20	4.75	1	

Tabela 5.9: $\epsilon_{s^{apr}}$ do aprimoramento por CBM e CB dos modelos referentes às simulações em negrito na Tabela 5.7 em função de λ e o respectivo número de autoimagens dominantes suprimidas (n^{ai}). Melhores resultados em negrito.

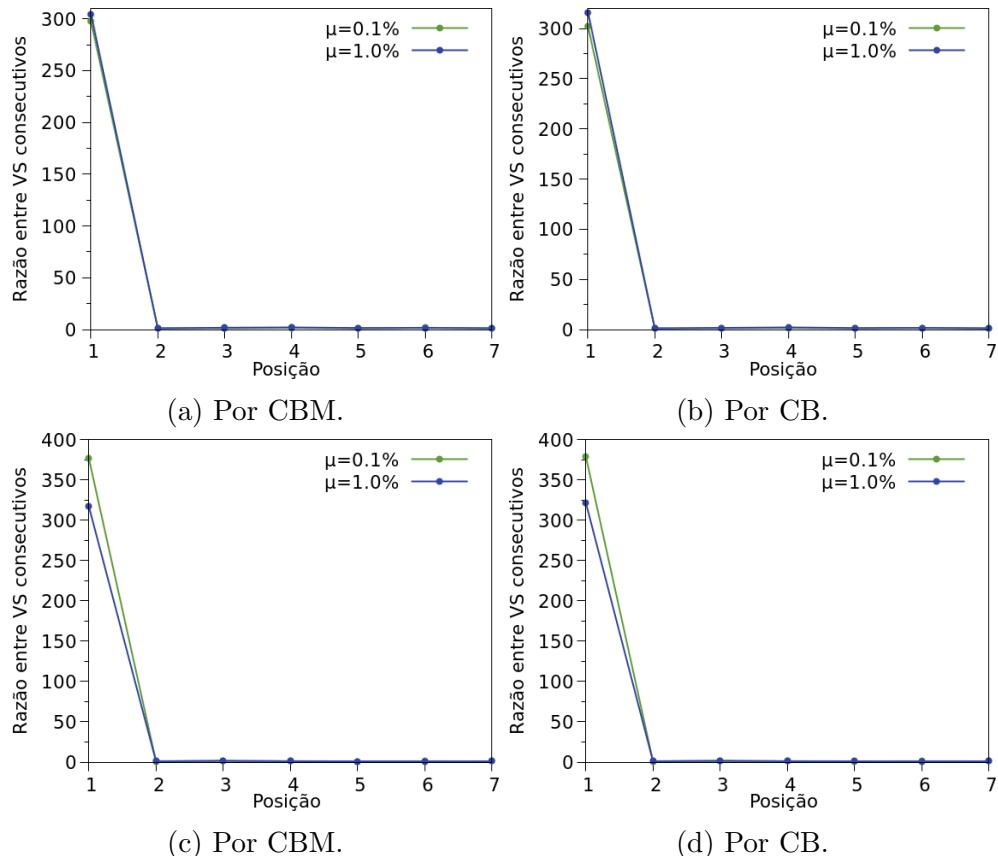


Figura 5.21: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos de \mathbf{P} referente às simulações em negrito da Tabela 5.7 com \mathbf{D}_{1H} ("a" e "b") e \mathbf{D}_{2H} ("c" e "d").

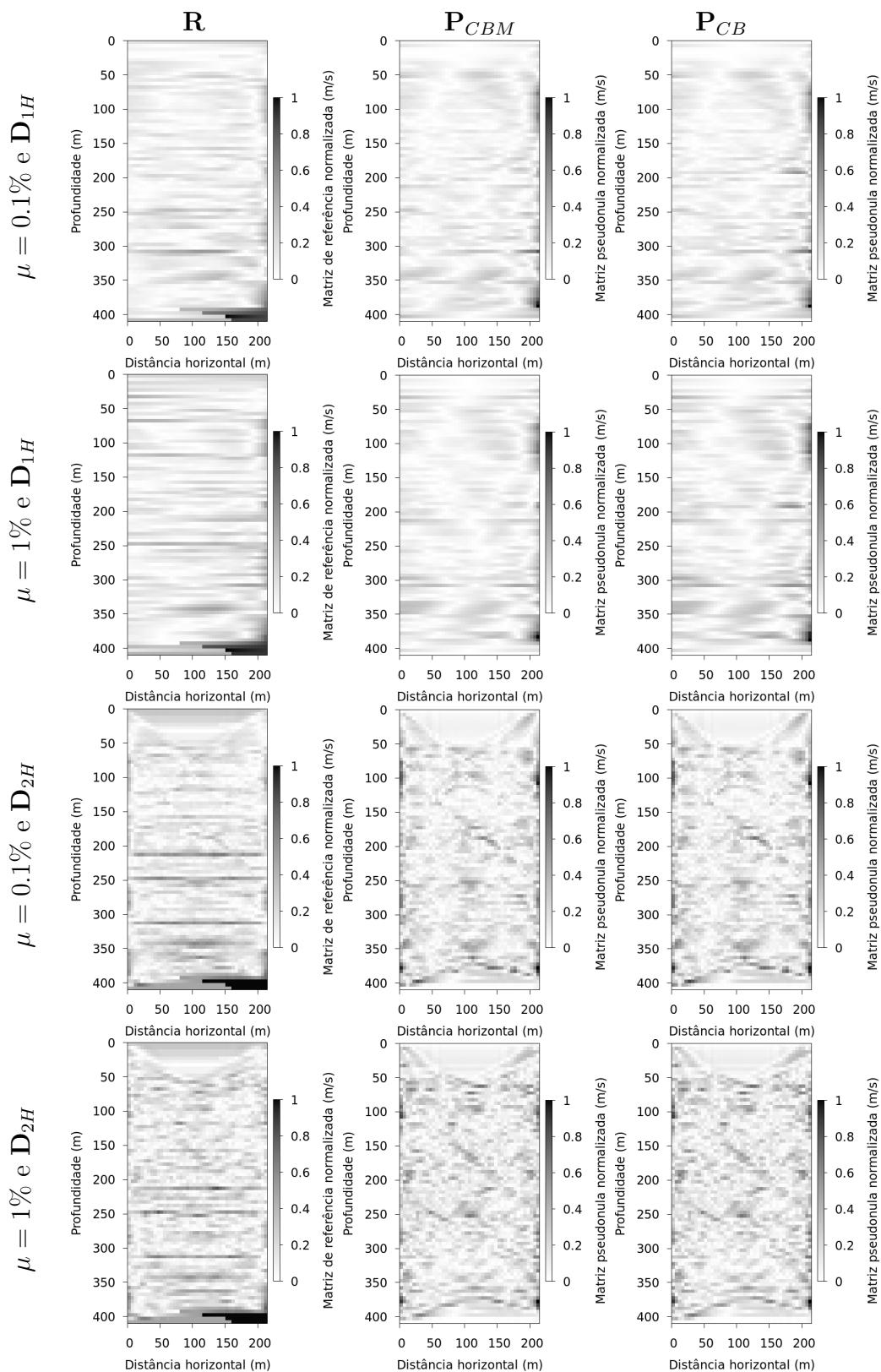


Figura 5.22: Matrizes resíduo (**R**) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.7 e pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às simulações em negrito da Tabela 5.9.

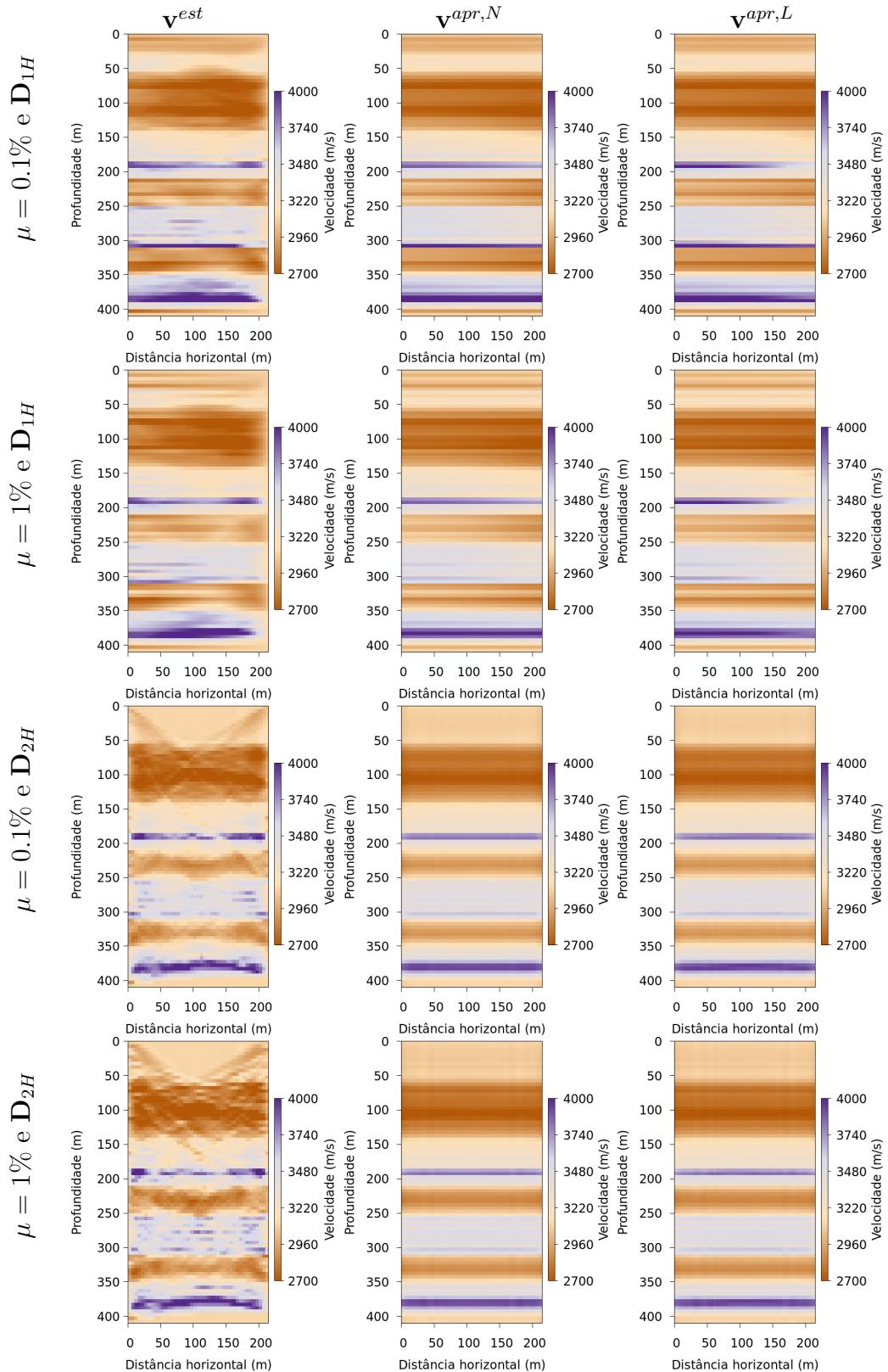


Figura 5.23: Modelos de velocidades estimados (\mathbf{v}^{est}) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.7 e aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às simulações em negrito da Tabela 5.9.

6

Resultados - Dados reais do Campo de Dom João

Os dados obtidos constituem parte de um convênio celebrado entre FAPEX/UFBA e Petrobras, com aquisição operada pela Schlumberger. O objetivo do projeto foi o estudo e a caracterização de reservatório da Formação Sergi no Campo de Dom João a partir da inversão tomográfica de tempos de trânsito.

6.1 Bacia do Recôncavo

A Bacia do Recôncavo está localizada no Estado da Bahia, região Nordeste do Brasil, e ocupa uma área de cerca de 11.500 km². É limitada pelo sistema de falhas da Barra, a sul; pelo sistema de falhas de Salvador, a leste; pelo Alto de Aporá, a norte e noroeste; e pela Falha de Maragogipe, a oeste. Compreende a porção sudeste do rifte Recôncavo-Tucano-Jatobá.

Segundo Destro *et al.* (2003), o rifte Recôncavo-Tucano-Jatobá é interpretado como um aulacógeno do Atlântico Sul. Sua origem está relacionada ao estiramento crustal que resultou na fragmentação do Supercontinente Gondwana entre o Jurássico Superior e o Cretáceo Inferior, culminando na formação do Oceano Atlântico.

Segundo Silva *et al.* (2007), a configuração estrutural da Bacia do Recôncavo é representada basicamente por um meio-*graben* com falha de borda a leste e orientação geral NE-SW. O mergulho regional de camadas para leste é condicionado por falhas normais planares com direção preferencial N30°E, enquanto zonas de transferência com orientação N40°W acomodaram taxas de extensão variáveis entre diferentes compartimentos da bacia ao longo de sua

evolução.

Desenvolvido sobre o cráton do São Francisco, o embasamento da bacia é composto predominantemente por gnaisses granulíticos arqueanos do Bloco Serrinha, a oeste e norte; pelos cinturões Itabuna-Salvador-Curaçá, a oeste-sudeste; e Salvador-Esplanada, a leste-nordeste. Ao norte, ocorrem também rochas metassedimentares de idade neoproterozóica, relacionadas ao Grupo Estância.

Segundo Magnavita (1993), o preenchimento sedimentar da Bacia do Recôncavo pode ser dividido em quatro estágios distintos: sinéclise, pré-rifte, rifte e pós-rifte. Ressalva-se o uso dos termos pré e pós-rifte como uma simplificação, uma vez que, *sensu lato*, qualquer unidade mais velha ou mais nova que o rifteamento pode ser considerada pré ou pós-rifte. No presente trabalho, no entanto, os termos são aplicados aos estratos formados indiretamente pelo processo de rifteamento.

A fase sinéclise, denominada Supersequência Paleozóica, ocorreu durante o Permiano sob paleoclima árido e contexto de bacia intracratônica. A deposição nesta fase ilustra uma tendência geral regressiva, com transição de sedimentação marinha rasa a lacustre, representada, respectivamente, pelos Membros Pedrão e Cazumba da Formação Afligidos.

A Supersequência Pré-rifte (ou fase pré-rifte) está inserida num estágio inicial de flexura da crosta, em resposta aos esforços distensionais ocorridos durante o Jurássico e o Cretáceo. A deposição sedimentar nesta fase é representada por três grandes ciclos flúvio-eólicos representados, da base para o topo, pelo Membro Boipeba da Formação Aliança e pelas formações Sergi e Água Grande. Esses ciclos são separados por transgressões lacustres de caráter regional, sendo relacionadas aos sedimentos pelíticos do Membro Capianga da Formação Aliança e à Formação Itaparica.

Segundo Caixeta *et al.* (1994), o início da fase rifte (ou Supersequência rifte) marca não apenas o início do aumento da taxa de subsidência devido às rupturas na crosta por forças tectônicas distensivas como também uma mudança climática de árido para úmido. O aumento da taxa de subsidência somado à umidificação climática promoveu uma transgressão regional lacustre sobreposta aos fácies flúvio-eólicos da Formação Água Grande.

O início da fase rifte não deve ser atribuído ao aparecimento dos leques conglomeráticos sin-tectônicos da falha de borda (Formação Salvador), uma vez que esses depósitos indicam apenas a existência de elevação topográfica. O início da fase rifte deve ter precedido a primeira entrada conglomerática, pois uma fase inicial de subsidência é necessária para criar espaço de acomodação para esses sedimentos. Desta forma, o início do estágio rifte é atribuído à base do Membro Tauá da Formação Candeias, composto por folhelhos lacustres

depositados durante a subsidência sofrida pela bacia por esforços tectônicos distensivos.

A defasagem entre o primeiro registro de conglomerados de falha de borda e o início da fase rifte é considerada compatível com o tempo necessário para o soerguimento da lapa e sua posterior erosão para constituição dos leques aluviais (Silva *et al.*, 2007).

O início do rifte ocorreu há aproximadamente 144 Ma, durante o Berriásiano; já a deposição sedimentar da fase rifte durou 22 Ma, desde o início do Barriásiano ao final do Barremiano. O arcabouço estrutural da Bacia do Recôncavo foi determinado durante esse período.

Durante uma fase inicial de bacia faminta, foram depositados folhelhos lacustres e turbiditos do Membro Gomo (Formação Candeias). Esta deposição ocorreu inicialmente em lago restrito, o qual foi posteriormente ampliado durante a deposição da Formação Maracangalha (Membros Pitanga e Caruaçu) devido à intensa atividade tectônica.

Uma atenuação da atividade tectônica com consequente diminuição na taxa de subsidência (indicado pela presença de carbonatos oncolíticos no topo da Formação Maracangalha) permitiu que deltas progradassem através das plataformas existentes ao longo das margens flexurais, preenchendo os depocentros com arenitos deltaicos das Formações Marfim e Pojuca. O peso exercido por esses pacotes de arenito aliado a fisiografia da bacia como um meio-*graben* promoveram a pressurização dos folhelhos da Formação Maracangalha resultando em diápiros de folhelhos associados a falhas de crescimento.

Durante o Hauteriviano Superior e o Barremiano Inferior, uma queda no nível do lago tectonicamente induzida originou um canyon na porção oeste das bacias de Tucano Sul e Recôncavo, sendo preenchido por arenitos deltaicos e folhelhos da Formação Taquipe (Magnavita *et al.*, 2005).

Os depósitos deltaicos foram sucedidos por sedimentos fluviais da Formação São Sebastião, depositados na fase final do processo de assoreamento da bacia. Esse sistema fluvial progradou de NNW para SSE a partir da Bacia de Tucano.

A fase pós-rifte ou Supersequência Pós-rifte representa um estágio da bacia já em um contexto de subsidência térmica, após a separação dos continentes e das fontes de calor. É composto por conglomerados aluviais e arenitos, além de ocasionais folhelhos e calcários da Formação Marizal. Os estratos são sub-horizontais e se sobrepõem discordantemente aos estratos da fase rifte.

Não relacionada ao processo de rifteamento, a Sequência do Neógeno completa o processo deposicional da bacia recobrindo principalmente a porção nordeste e o embasamento

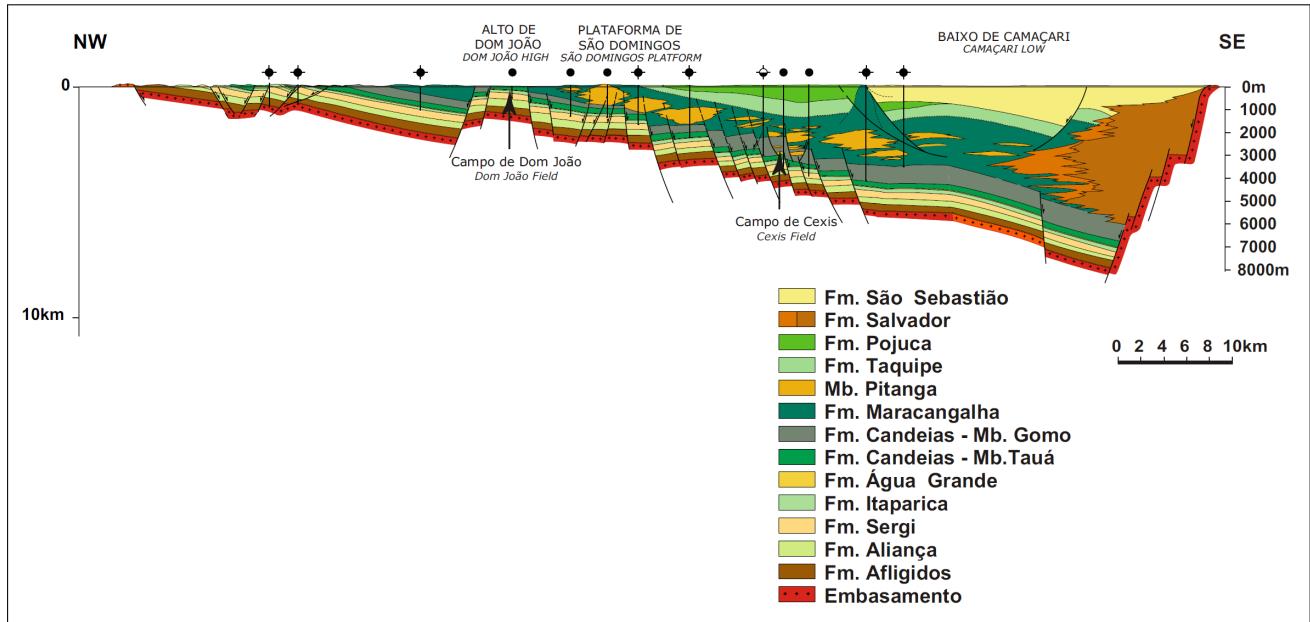


Figura 6.1: Seção geológica esquemática da Bacia do Recôncavo evidenciando uma geometria em meio-graben e falhamentos normais de alto ângulo. Fonte: Modificado de Penteado (1999).

cristalino da borda leste. Essa sequência engloba folhelhos cinza esverdeados e calcários impuros relacionados a uma transgressão marinha de idade miocênica (Formação Sabiá) e depósitos fluviais associados a leques aluviais pliocênicos da Formação Barreiras.

6.1.1 Campo de Dom João

O Campo de Dom João tem área de aproximadamente 47 km² e cerca de 24 km de extensão. É estruturado como um *horst* alongado a SSW-NNE, limitado a leste pela Falha de Dom João e a oeste pela Falha Nova América (Milani e Araújo, 2003).

A acumulação de hidrocarboneto ocorre nos arenitos da Formação Sergi e, secundariamente, nos arenitos da Formação Água Grande. A rocha geradora são os folhelhos lacustrinos da Formação Candeias e a migração foi proporcionada pela rotação de blocos, a qual justapôs lateralmente gerador e reservatório (Milani e Araújo, 2003).

6.2 Aquisição

A aquisição foi realizada em geometria poço-a-poço, ambos direcionais e com distância interpoço de aproximadamente 215 m. Um poço é chamado direcional quando a projeção vertical na superfície dos pontos ao longo de sua trajetória não coincide com a posição do

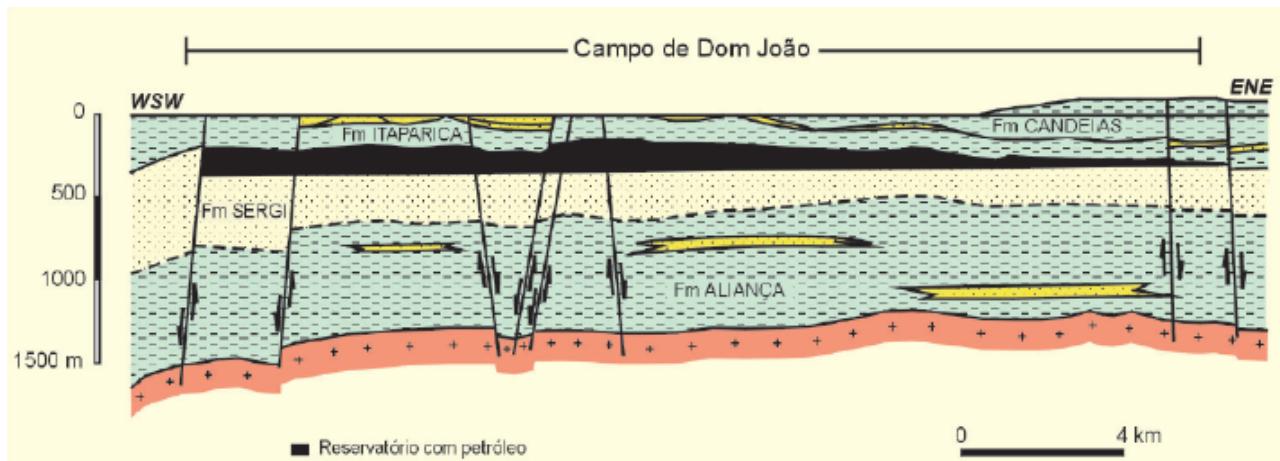


Figura 6.2: Seção geológica da porção central da Bacia do Recôncavo ilustrando a configuração estrutural-estratigráfica do Campo de Dom João. Fonte: Milani e Araújo (2003).

topo do poço. É uma técnica que desvia a trajetória do poço em situações em que não é viável a perfuração vertical. Em levantamentos com poços direcionais dois conceitos devem ser explicados: *measured depth* (MD), que representa a distância percorrida ao longo da trajetória do poço; e *true vertical depth* (TVD), o comprimento da projeção vertical de algum ponto do poço à superfície ou *datum*.

O levantamento ocorreu como segue. Um arranjo de 20 receptores espaçados de 3 m em MD foi fixado de modo que o último receptor coincidisse com a profundidade máxima do poço. Este arranjo permaneceu fixo enquanto no outro poço uma fonte piezoelétrica subia lentamente desde a profundidade máxima até o topo previamente estabelecido, emitindo sinal com frequências entre 100 e 1200 Hz. Este sinal emitido ao longo do poço resultou em registros de múltiplas frequências a cada 3 m em MD no poço das fontes. Finalizada a primeira coleta de dados, o arranjo de receptores foi elevado de 60 m em MD, onde permaneceu fixo, e, no outro poço, a fonte foi novamente levada à profundidade máxima para que novos registros fossem coletados enquanto subia lentamente emitindo o sinal. O procedimento foi repetido até que o primeiro receptor do arranjo de receptores coincidisse como o topo previamente estabelecido no respectivo poço.

Fontes piezoelétricas são discos maciços compostos por inúmeros cristais ferroelétricos microscópicos que, quando polarizados e sob aplicação de campo elétrico alternado, transformam energia elétrica em mecânica. Fontes desta natureza são eficazes para gerar ondas P e atenuar as *tubewaves*. A frequência do sinal emitido variou entre 100 e 1200 Hz e em cada estação foram efetuadas 4 varreduras posteriormente empilhadas para aumentar a razão sinal/ruído.

O arranjo de receptores foi constituído por um conjunto de 20 hidrofones, compostos cerâmicos que produzem uma voltagem de saída proporcional às variações de pressão associadas à passagem da onda P na água. No levantamento, uma estação receptora compreendeu um arranjo de 8 transdutores conectados linearmente, cujas saídas individuais foram integradas para aumentar a razão sinal/ruído.

6.3 Processamento

Todo o processamento desta seção foi realizado pela Schlumberger e, resumidamente, consistiu na atenuação das *tubewaves* e no *picking* de primeiras quebras.

Tubewaves são ondas de superfície que se propagam na interface entre o fluido e a parede do poço com velocidade relativamente constante, e ocorrem quando uma onda Rayleigh encontra o poço e perturba o fluido presente. São caracterizadas pela baixa frequência e alta amplitude. Em dados sísmicos de poço são fontes de ruído com comportamento linear que devem ser atenuadas antes do *picking* de primeiras quebras (Korneev *et al.*, 2005). No levantamento, o *picking* de primeiras quebras, isto é, a identificação do tempo de trânsito da onda P transmitida, foi realizado em quatro domínios para aumentar a confiabilidade do dado: receptor comum, tiro comum, *offset* comum e CMP.

Após o processamento, os dados e os parâmetros obtidos para o presente trabalho são como segue. O poço das fontes totalizou 141 estações e o dos receptores, 140, sempre espaçadas uma da seguinte de 3 m em MD. Dos 19740 raios previstos foram recuperados dados para somente 14048 - os outros foram corrompidos por falhas instrumentais ou devido a erros de *picking*. A Figura 6.3 mostra o diagrama de tempos de trânsito dos raios válidos. Em TVD, o poço das fontes vai de 149 m a 550 m, e o poço dos receptores, de 147 m a 537 m. A Figura 6.4 mostra a posição verdadeira das estações de ambos os poços em perfil (6.4a) e em mapa (6.4b).

6.4 Parametrização

A formulação do problema tomográfico em grid retangular composto por blocos regulares utilizada no presente trabalho exige uma aquisição com geometria bidimensional. Em uma situação ideal, ambos os poços pertencem ao mesmo plano e compartilham a mesma inclinação, e nenhuma modificação ao problema original é requerida, isto é, as estações podem ser posicionadas nos limites laterais do grid. É importante destacar que posicioná-las nos limites laterais é válido mesmo para poços direcionais, desde que a inclinação seja a mesma,

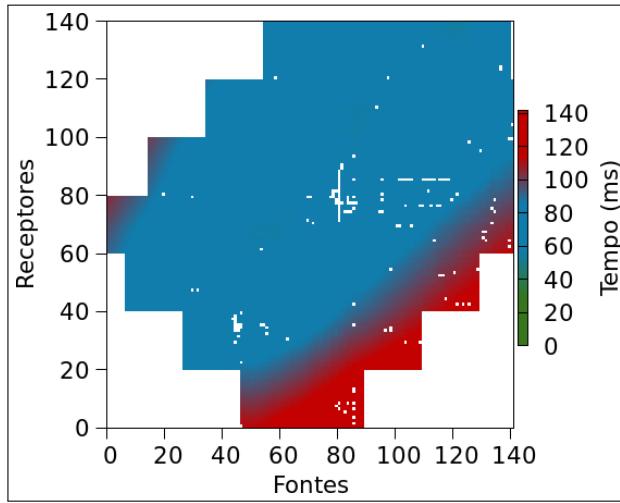


Figura 6.3: Diagrama dos tempos da onda P transmitida. Regiões brancas indicam inexistência de tempo de trânsito para o respectivo par fonte-receptor. A numeração da fonte e do receptor indica a posição da estação ao longo do poço e aumenta para estações em profundidades maiores.

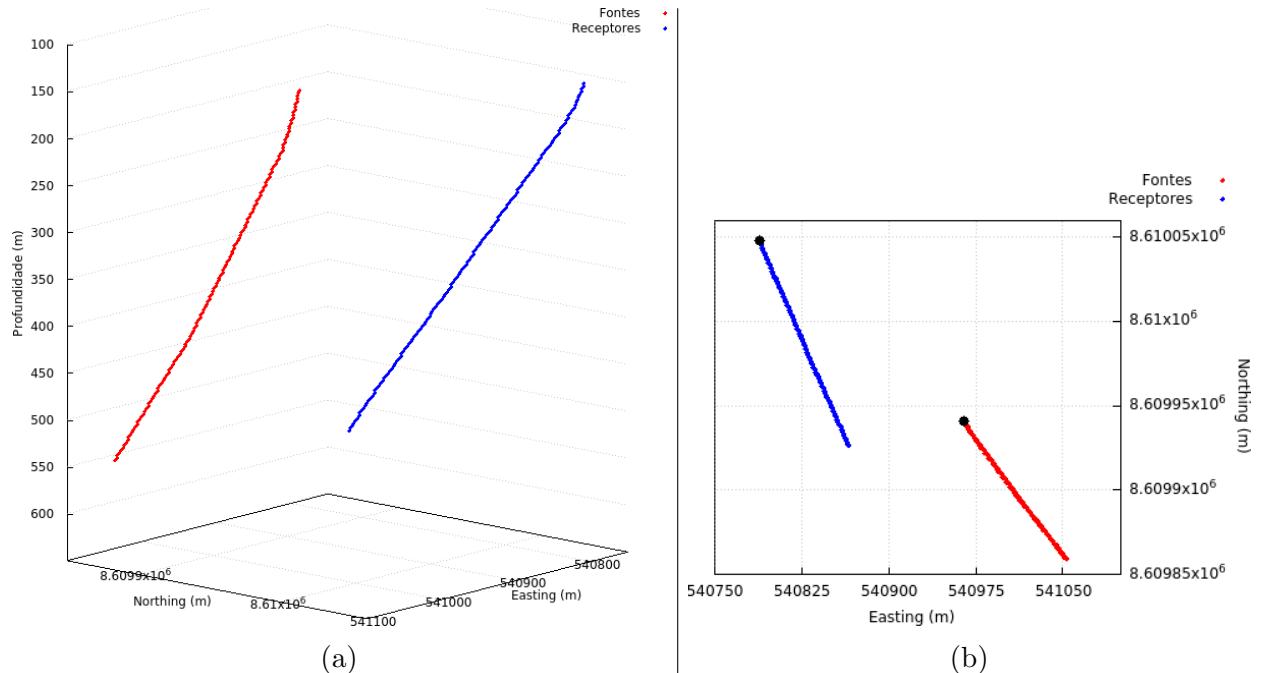


Figura 6.4: a) Localização verdadeira das estações nos poços das fontes e dos receptores. b) Projeção das estações em superfície. O ponto preto indica a estação com menor a profundidade.

e a escolha de MD ou TVD como coordenada vertical apenas dilataria ou contrairia as camadas, respectivamente. No entanto, a Figura 6.4 mostra que os poços têm inclinações ligeiramente diferentes e não pertencem ao mesmo plano, e modificações à posição verdadeira das estações devem ser realizadas. Posicionamos o poço das fontes em $x = 0$, o poço dos receptores em $x = 215$ m, e a coordenada vertical das estações como TVD subtraído de 145

m para que o grid inicie em $z = 0$. O grid é composto por 43 blocos na direção horizontal e 82 na vertical, com dimensão 5 m × 5 m. Como visto anteriormente, o número total de raios disponíveis é 14048.

Em um modelo de velocidades com baixíssimo contraste de velocidade, o caminho percorrido pelo raio é pouco afetado se a posição da fonte ou do receptor sofrer pequena alteração, e uma simples correção no tempo de trânsito proporcional ao comprimento do raio reto é suficiente. Evidentemente, o dado invertido nestas condições ainda acumulará erros, mas toleráveis. Por outro lado, em um modelo com grande contraste de velocidade, como é esperado no Campo de Dom João, o caminho percorrido pelo raio pode ser demasiadamente alterado mesmo para uma pequena modificação na posição da fonte ou do receptor, e a modelagem pode não representar corretamente o problema. Como não é possível calcular o verdadeiro caminho e comprimento do raio curvo, a correção do tempo de trânsito realizada permaneceu proporcional ao comprimento do raio reto. Esta aproximação grosseira é uma limitação da aplicação do algoritmo ao dado real.

6.5 Inversão linearizada

Os modelos foram recuperados após até 12 iterações, compostas por uma modelagem e por um conjunto de 20 inversões com regularização. Os sistemas foram solucionados pelo método gradiente conjugado, sempre com $n^{CG} = 3526$. Para respeitar as expectativas sobre o modelo, a regularização se deu por operadores derivada de primeira e segunda ordens na direção horizontal, \mathbf{D}_{1H} e \mathbf{D}_{2H} , respectivamente, com fatores de regularização partindo de $\lambda(1) = 0$ e $\lambda(i) = 10^{i-4}$, para $i = 2, \dots, 20$. O λ adequado de cada iteração foi selecionado manualmente com o auxílio das curvas L e $\sin \Theta$.

Em razão da maior robustez para lidar com grandes contrastes de velocidade, optamos pela modelagem por grafos, com 12 nós equidistantes em cada lado de bloco. Alguns resultados com modelagem por equação do raio são mostrados apenas para efeito comparativo. A modelagem da primeira iteração utilizou uma distribuição de velocidades constante e igual a 3100 m/s. Para as demais, os raios foram traçados no modelo estimado na iteração anterior após ser limitado ao intervalo entre 1500 m/s e 5000 m/s e suavizado por uma janela 3×3 .

Conforme visto anteriormente, inversões com dado real acumulam erros de *picking*, de posição das estações e de correção dos tempos de trânsito. Como é esperado um modelo com camadas plano-paralelas, foram incluídas inversões nas quais os raios são traçados em modelos não apenas suavizados e limitados ao intervalo entre 1500 m/s e 5000 m/s, como também posteriormente horizontalizados. Por horizontalização aqui entende-se que a veloci-

dade de todos os blocos pertencentes a uma mesma profundidade é calculada como a média aritmética das velocidades dos próprios blocos.

Dois conjuntos de dados foram invertidos. O primeiro incluiu todos os 14048 raios disponíveis, e o segundo somente os 11440 raios cujos *offsets* verticais - ângulo entre a horizontal em TVD e a reta que liga fonte a receptor - são maiores do que 10°. Este artifício visa evitar as *head waves*, ondas cujos raios viajam paralelamente às interfaces que separam camadas com grande contraste de velocidade. *Head waves* ocorrem quando o ângulo de incidência é maior do que o ângulo crítico e, à rigor, correspondem a uma reflexão.

O tempo de processamento da modelagem por grafos é independente da complexidade do modelo e foi de aproximadamente 90 s em cada iteração. O tempo de processamento de cada inversão dentro de uma iteração foi de aproximadamente 55 s para o conjunto completo de raios e de 45 s para o reduzido.

As Figuras 6.6 e 6.7 mostram os modelos recuperados com modelagem por grafos quando se utilizou todos os raios disponíveis ou somente aqueles com *offset* vertical maior do que 10°, respectivamente. Todos os oito tomogramas guardam entre si grande similaridade, apesar de diferirem quanto à resolução vertical e, evidentemente, quanto à continuidade lateral devido à utilização ou não do recurso de horizontalização do modelo para o traçado de raios. Deve-se salientar que a região entre $z = 0$ e aproximadamente $z = 50$ m é menos confiável que as demais por possuir baixa cobertura angular. A Figura 6.9 mostra a baixa densidade de raios nos blocos correspondentes tanto em traçado de raios retos (Figura 6.9a) quanto curvos (Figuras 6.9b e 6.9c) - nestes últimos, os raios foram traçados nos modelos recuperados das Figuras 6.6a e 6.6b, respectivamente.

A comparação entre os modelos das Figuras 6.6 e 6.7 com os mesmos parâmetros indicam que a exclusão de raios com *offset* curto diminui a resolução vertical dos modelos recuperados. Em outras palavras, é preferível que seja utilizado todo o dado disponível. A explicação é simples. A modelagem por grafos é sempre capaz de identificar o caminho de tempo mínimo, mesmo em modelos não suavizados. Desta forma, caso haja uma interface com grande contraste de velocidade, esta será preservada ao optar-se pela não-suavização do modelo, e as *head waves* que a percorrem - e que fazem parte do dado real uma vez que correspondem ao caminho de tempo mínimo para *offsets* verticais curtos sempre que houver interfaces com grande contraste de velocidade - serão corretamente mapeadas pelo algoritmo.

Por outro lado, a modelagem por equação do raio baseada no algoritmo de Andersen & Kak (1982) exige o cálculo discreto do gradiente da distribuição de vagarosidades. Por este motivo, modelos complexos devem ser demasiadamente suavizados para garantir estabilidade ao método. O efeito colateral é que interfaces com grande contraste de velocidade

desaparecem e o caminho dos raios modelados não mais correspondem ao das *head waves*. De fato, a Figura 6.8 mostrou modelos recuperados com maior resolução vertical quando dados com *offsets* verticais curtos são excluídos. Em todas as inversões baseadas em traçado de raios por equação do raio (Figura 6.8) os modelos foram suavizados por janela 5×5 e horizontalizados. Sem o recurso da horizontalização os modelos recuperados são ruidosos e por este motivo não foram mostrados.

A discussão acerca da capacidade de os algoritmos de modelagem identificarem *head waves* é confirmada na Figura 6.10, que mostra o caminho percorrido pelos raios quando traçados por grafos e pela equação do raio no modelo da Figura 6.6a para uma fonte localizada em $z = 195$ m, próxima a uma interface de grande contraste de velocidade. Somente a modelagem por grafos foi capaz de identificar o comportamento das *head waves*. No mesmo sentido, a Figura 6.9b mostra uma elevada densidade de raios nesta interface. Por outro lado, a modelagem por equação do raio, mesmo com uma janela de suavização estreita de 5×5 , já distorce bastante a trajetória esperada dos raios de tempo mínimo (Figuras 6.9d e 6.10b).

A Figura 6.5 mostra as curvas auxiliares das iterações inicial, intermediária e final das inversões cujos modelos recuperados são mostrados nas Figuras 6.6a e 6.6b. As curvas L e $\sin \Theta$ seguem o padrão esperado, que se repete nas outras inversões (não mostradas). Os λ_s selecionados são aqueles tais que $\sin \Theta(\lambda) \approx 1$. Isto significa que os modelos estimados em cada iteração abrem mão da minimização do erro do dado para garantir uma característica estratificada. Mesmo assim, à medida que as iterações avançam, há uma clara tendência de diminuição do erro do dado, conforme indica a evolução de ϵ_t na Tabela 6.1. Os λ_s selecionados nas inversões regularizadas por \mathbf{D}_{2H} são em torno de 100 e 1000 vezes o valor daqueles selecionados para \mathbf{D}_{1H} somente devido às diferentes ordens de grandeza envolvidas entre os operadores; na verdade, a intensidade da regularização em ambos os casos é aproximadamente a mesma.

It.	Com todos os raios								Com raios de offset vertical maior do que 10°							
	D_{1H}				D_{2H}				D_{1H}				D_{2H}			
	Sem Hor.		Com Hor.		Sem Hor.		Com Hor.		Sem Hor.		Com Hor.		Sem Hor.		Com Hor.	
	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t	λ	ϵ_t
1	13	4.53	13	4.53	15	3.43	15	3.43	13	4.46	12	2.96	15	3.14	16	4.20
2	13	3.82	13	3.76	16	3.30	16	3.11	13	3.70	12	2.25	15	2.83	16	3.68
3	13	3.38	13	3.31	15	2.04	16	2.61	13	3.36	13	2.08	15	1.65	16	3.29
4	13	2.84	13	2.82	15	1.62	16	2.28	13	3.10	12	1.47	15	1.43	16	2.85
5	12	1.96	12	1.84	15	1.55	16	2.13	13	2.77	12	1.23	15	1.41	16	2.37
6	12	1.50	12	1.60	14	1.33	15	1.70	13	2.46	12	1.23	14	1.18	16	2.15
7	12	1.34	12	1.57	15	1.44	15	1.71	12	1.86	12	1.22	14	1.12	15	1.70
8	13	1.32	11	1.26	15	1.43	15	1.80	12	1.50	11	0.93	14	1.11	15	1.67
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	1.18	15	1.15	15	1.86
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11	0.94	15	1.14	15	1.75
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11	0.92	15	1.14	15	1.77
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	11	0.91	15	1.14	15	1.78

Tabela 6.1: Desvio RMS percentual do dado (ϵ_t) e sequencial do λ selecionado em cada iteração com auxílio das curvas L e $\sin \Theta$ para todas as inversões das Figuras 6.6 e 6.7.

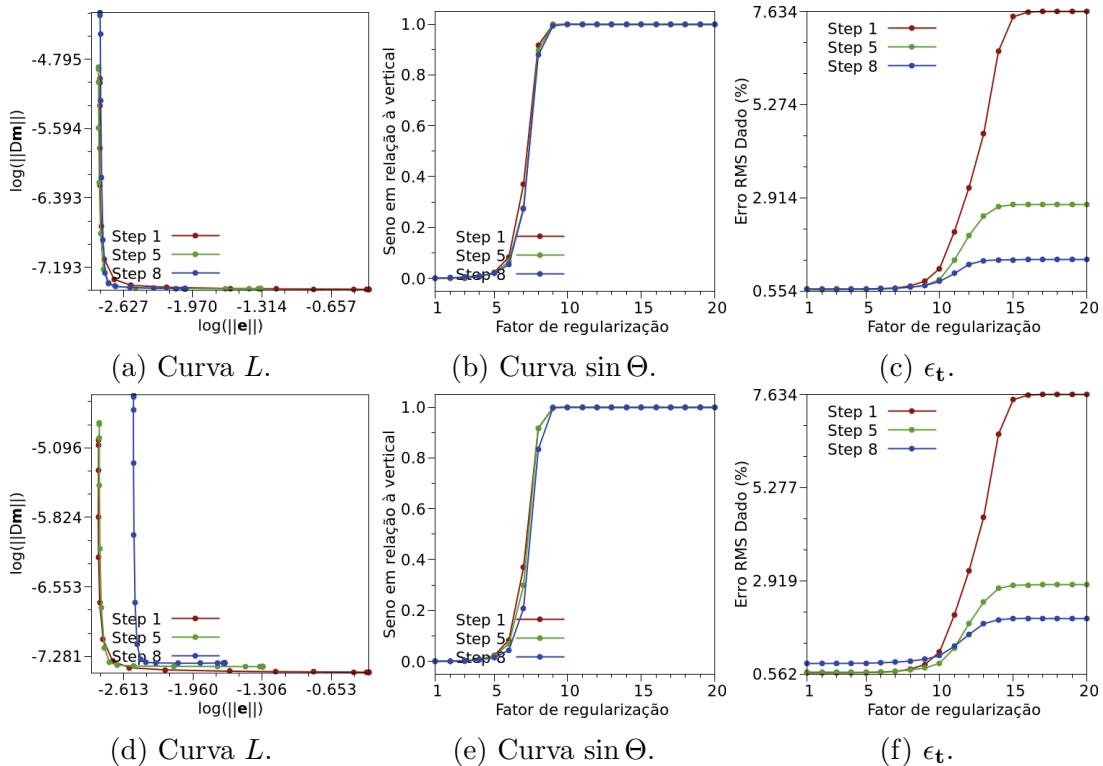


Figura 6.5: Curvas auxiliares das inversões cujos modelos recuperados são mostrados na Figura 6.6a (a, b, c) e na Figura 6.6b (d, e, f) para as iterações inicial, intermediária e final.

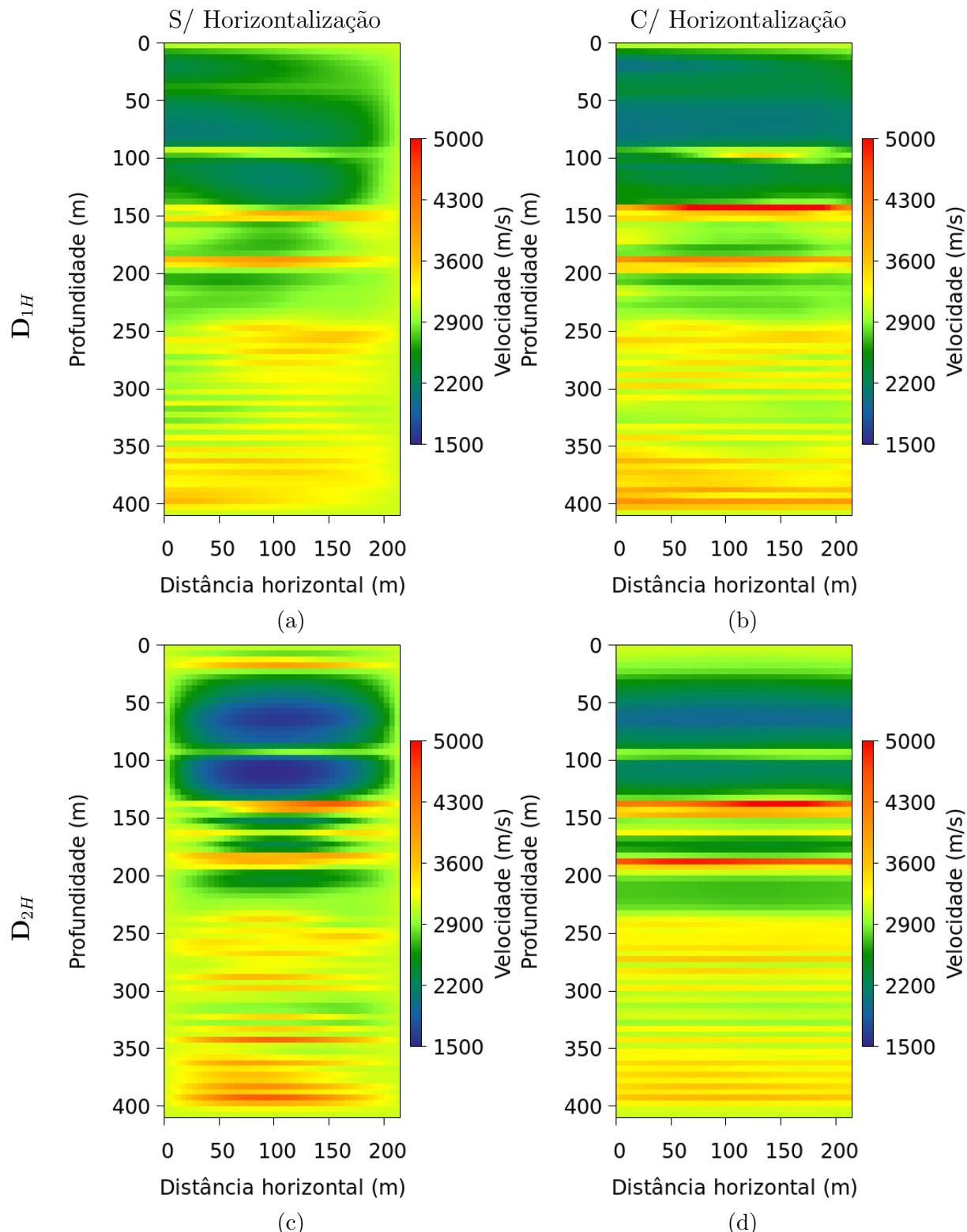


Figura 6.6: Modelos de velocidade recuperados após inversão com todos os raios disponíveis e regularização por \mathbf{D}_{1H} ou por \mathbf{D}_{2H} . Traçados de raios sem horizontalização do modelo na primeira coluna, e com horizontalização na segunda coluna.

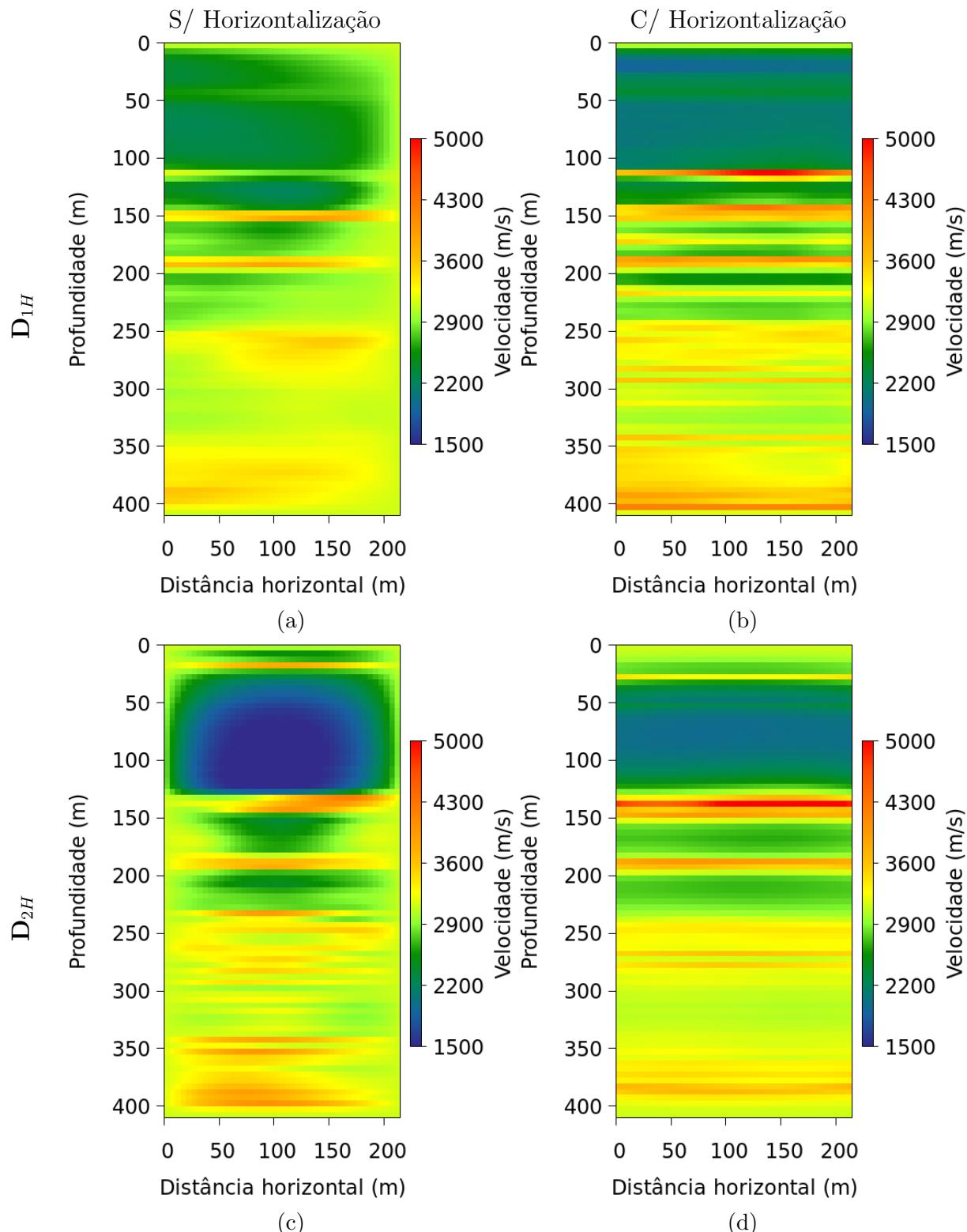


Figura 6.7: Modelos de velocidade recuperados após inversão de dados com *offset* vertical maior do que 10° e regularização por \mathbf{D}_{1H} ou por \mathbf{D}_{2H} . Traçados de raios sem horizontalização do modelo na primeira coluna, e com horizontalização na segunda coluna.

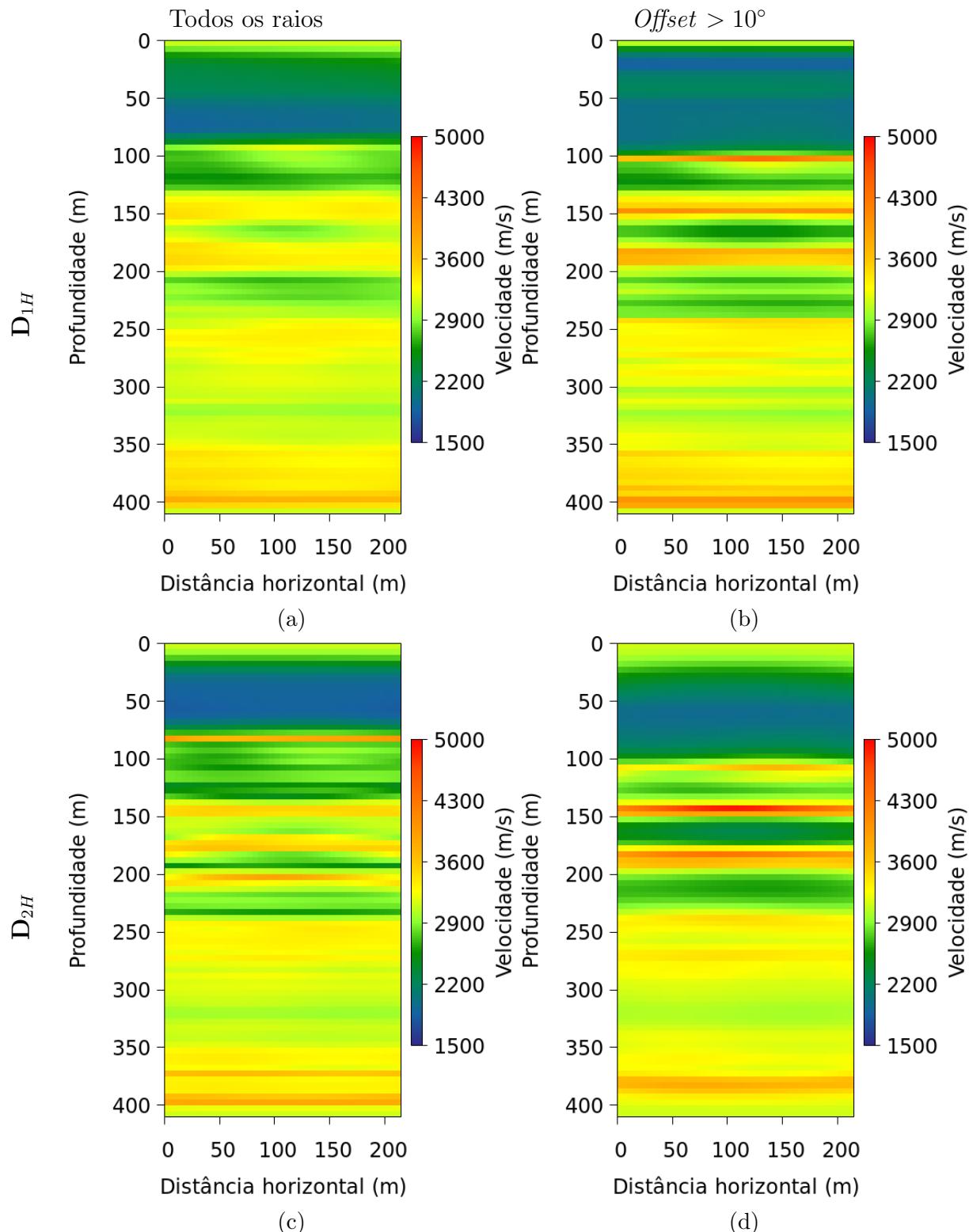


Figura 6.8: Modelos de velocidade recuperados nas inversões cujos traçados de raios foram realizados com algoritmo baseado na equação do raio, sempre em modelos suavizados por janela 5×5 e horizontalizados. Na primeira coluna, quando foram utilizados todos os 14048 raios disponíveis, e, na segunda, somente os raios cujo offset vertical é maior do que 10° .

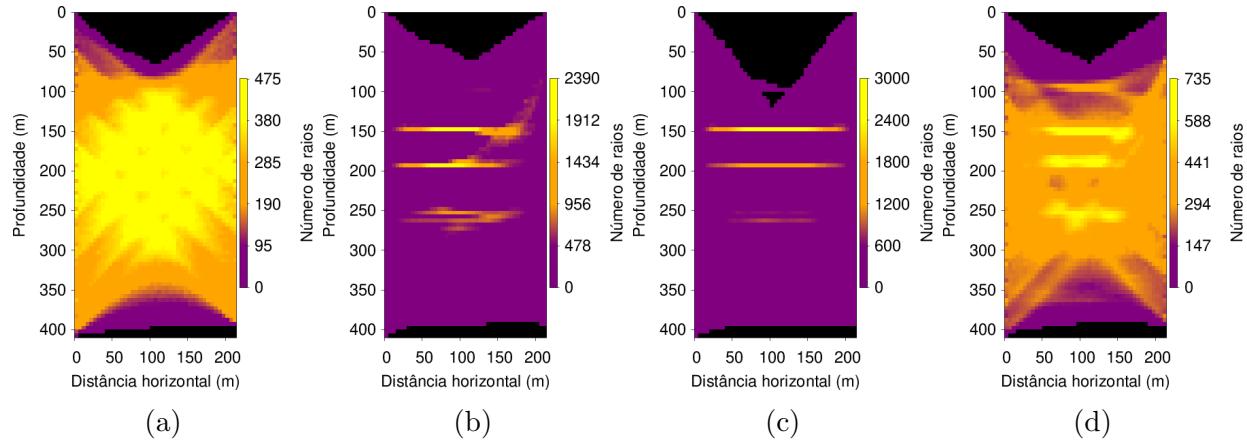


Figura 6.9: Número de vezes que cada bloco foi atravessado pelos 14048 raios disponíveis. Raios traçados por grafos com modelo constante em (a) e com os modelos das Figuras 6.6a em (b) e 6.6b em (c). Em (d), os raios foram traçados por equação do raio com o modelo da Figura 6.6a. (a) indica que a faixa entre $z = 125$ m e $z = 300$ m têm maior cobertura angular. (b) e (c) indicam que as interfaces com grande contraste de velocidade ($z = 150$ m e $z = 190$ m) têm densidade de raios muito maior que as demais regiões, como é esperado devido ao comportamento das *head waves*. Por outro lado, a densidade de raios é muito menor nestas interfaces em (d) devido à necessidade de uma maior suavização do modelo para o traçado de raios por equação do raio.

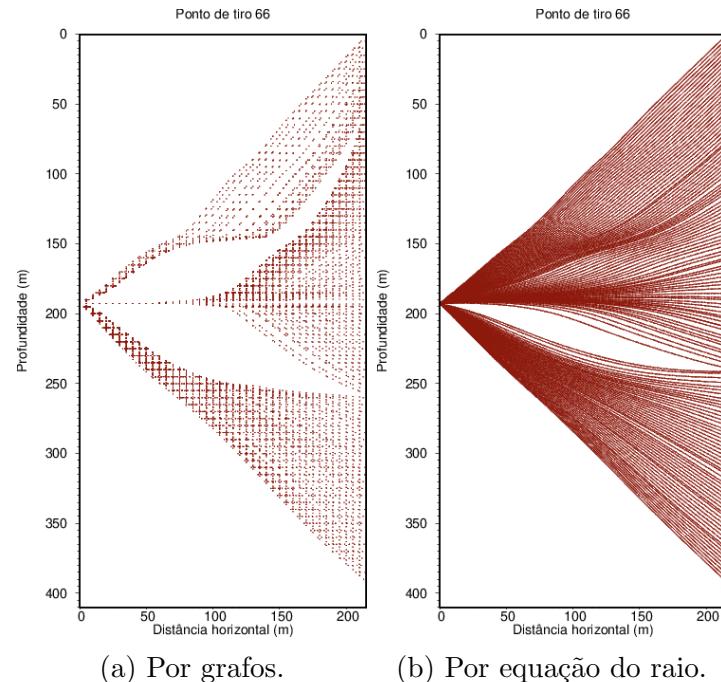


Figura 6.10: Diferenças entre os raios de tempo mínimo traçados por grafos (com janela de suavização 3×3) e pela equação do raio (com janela de suavização 5×5) no modelo correspondente ao da Figura 6.6a. A fonte está localizada próxima a uma interface de grande contraste de velocidade e é esperado que os raios de tempo mínimo correspondam aos de *head waves* para os *offsets* verticais curtos. Somente o traçado por grafos é capaz de mapeá-los corretamente.

6.6 Aplicação de CB e CBM

Apesar de todos os modelos das Figuras 6.6 e 6.7 guardarem entre si grande similaridade, CB e CBM foram aplicados somente nos modelos das Figuras 6.6a e 6.6b, isto é, naqueles recuperados por inversões com 14048 raios, regularizadas por \mathbf{D}_{1H} e que diferem somente quanto à utilização ou não do artifício de horizontalização do modelo para o traçado de raios. Estes modelos foram considerados os mais representativos da situação real uma vez que foram obtidos a partir de toda a informação disponível do dado, por um algoritmo de modelagem capaz de prever as *head waves* e por obedecerem a estrutura de camadas plano-paralelas.

Evidentemente, assim como o sistema original, os sistemas complementares também foram modelados por grafos, e o vetor constante $\mathbf{w} = 0.002 \text{ s/m}$ (equivalente a um campo de velocidades constante de 500 m/s) foi suficiente para garantir tempos de trânsito complementares e modelos complementares sempre positivos. Os sistemas foram regularizados pelo fator λ de índice 17, seguindo o mesmo padrão observado nas simulações com dados sintéticos, em que a regularização do sistema complementar foi em torno de 10^4 a 10^5 vezes a do sistema original.

A Figura 6.11 mostra a evolução da razão entre os 8 primeiros valores singulares de \mathbf{P} correspondentes às aplicações de CB e CBM em ambos os modelos. Em todos os casos, o primeiro valor singular é pelo menos 100 vezes maior que os demais, que se mantiveram aproximadamente iguais, e por isso somente a primeira autoimagem foi suprimida.

Assim como nas simulações com dados sintéticos e modelagem por grafos (Figura 5.22), as matrizes pseudonulas da Figura 6.12 também evidenciaram uma grande correspondência entre CB e CBM quando aplicados ao mesmo modelo. E, comparando os modelos aprimorados correspondentes (Figura 6.13) aos modelos de entrada - isto é, aos obtidos pela inversão tomográfica convencional (Figuras 6.6a e 6.6b) -, os aprimoramentos por CB e CBM aumentaram a resolução vertical e coerência lateral. A boa correspondência entre os quatro resultados da Figura 6.13 sugerem robustez aos métodos propostos.

Vimos anteriormente na Tabela 6.1 a tendência de queda do estimador ϵ_t para iterações avançadas. Apesar de esta diminuição parecer um indicador favorável, é importante ponderar que inversões de dados reais requerem outros indicadores para atestar a qualidade dos modelos recuperados. Uma inversão tomográfica baseada no método dos mínimos quadrados, por exemplo, certamente resultaria em ϵ_t ainda menor, sob o custo de recuperar um modelo sem sentido do ponto de vista geológico. Devemos lembrar que o dado do Campo de Dom João sofreu grande alteração no arranjo geométrico e demandou correção dos tempos de trânsito para ser encaixado na abordagem bidimensional. Em outras palavras, a própria

referência do estimador já é uma aproximação do dado original.

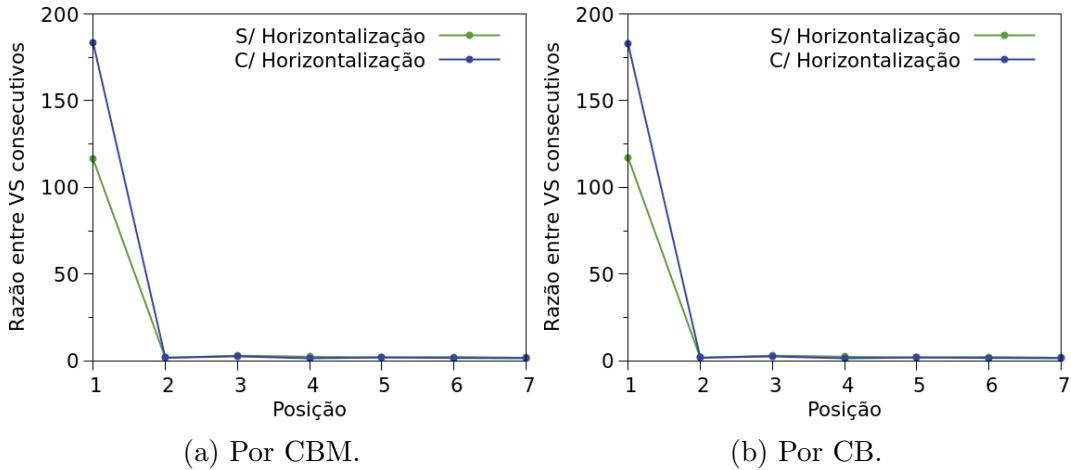


Figura 6.11: Razão entre valores singulares dominantes consecutivos das matrizes pseudo-nulas \mathbf{P} correspondentes às aplicações de CB e de CBM aos modelos estimados das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização). Em todos os casos, somente a primeira autoimagem foi suprimida uma vez que somente a primeira razão é muito maior que as demais.

6.7 Validação por dado sísmico de reflexão

Validações baseadas no desvio entre dado observado e modelado são pouco confiáveis devido à natureza esparsa dos problemas tomográficos. Por outro lado, uma maneira eficiente de validar o modelo seria comparar por alguma métrica, por exemplo, norma L_2 , o perfil sônico dos poços e as vagarosidades nas bordas do tomograma. Infelizmente, os perfis sônicos dos poços que delimitam a região invertida não foram disponibilizados. Desta forma, optamos pela validação por dado sísmico pós-*stack*. Apesar de a resolução vertical da sísmica ser, certamente, menor que a da tomografia, a assinatura sísmica guarda valiosas informações a serem usadas para fins de validação da inversão tomográfica.

A Figura 6.14 localiza o Campo de Dom João, o dado sísmico 3D de reflexão e alta resolução - isto é, taxa de amostragem de 1 ms - migrado em tempo pertencente ao levantamento 0026-4D-Dom João, e os poços que delimitam a região invertida - aqui, denominados 800 e 803. Os dados sísmicos e de poços carregados e interpretados nesta seção foram gratuitamente disponibilizados pela ANP e SGB através da plataforma *online* do Programa REATE. Devido à indisponibilidade do perfil sônico nos poços 800 e 803, os poços não foram amarrados. Este problema foi solucionado com a utilização do *check-shot* do poço vizinho, 1202. Os horizontes correspondentes ao topo das formações foram demarcados no poço 1202 e interpretados até a linha sísmica que corta a região invertida sem dificuldades uma vez que

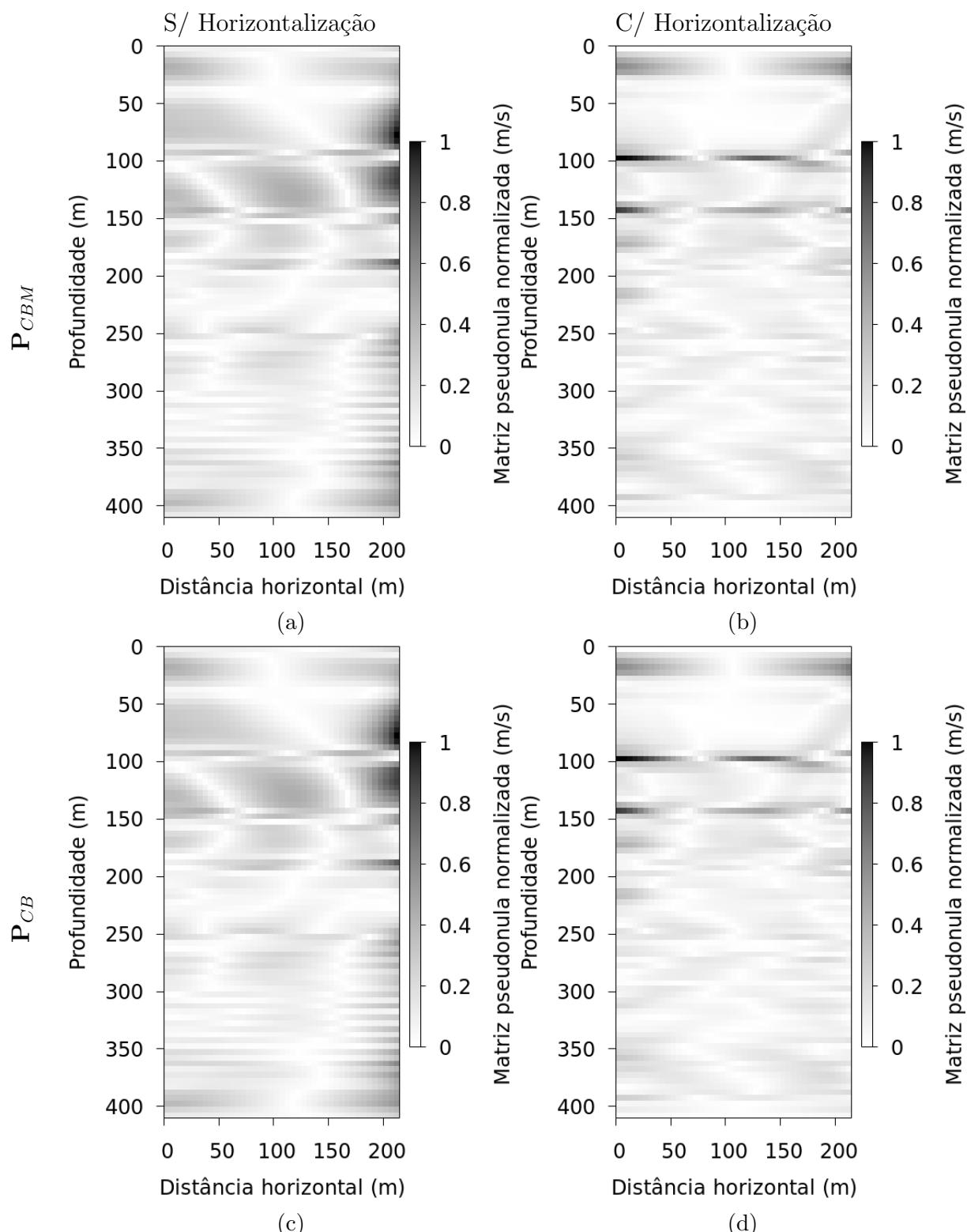


Figura 6.12: Matrizes pseudonulas por CBM (\mathbf{P}_{CBM}) e por CB (\mathbf{P}_{CB}) normalizadas e em valor absoluto referentes às inversões das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização).

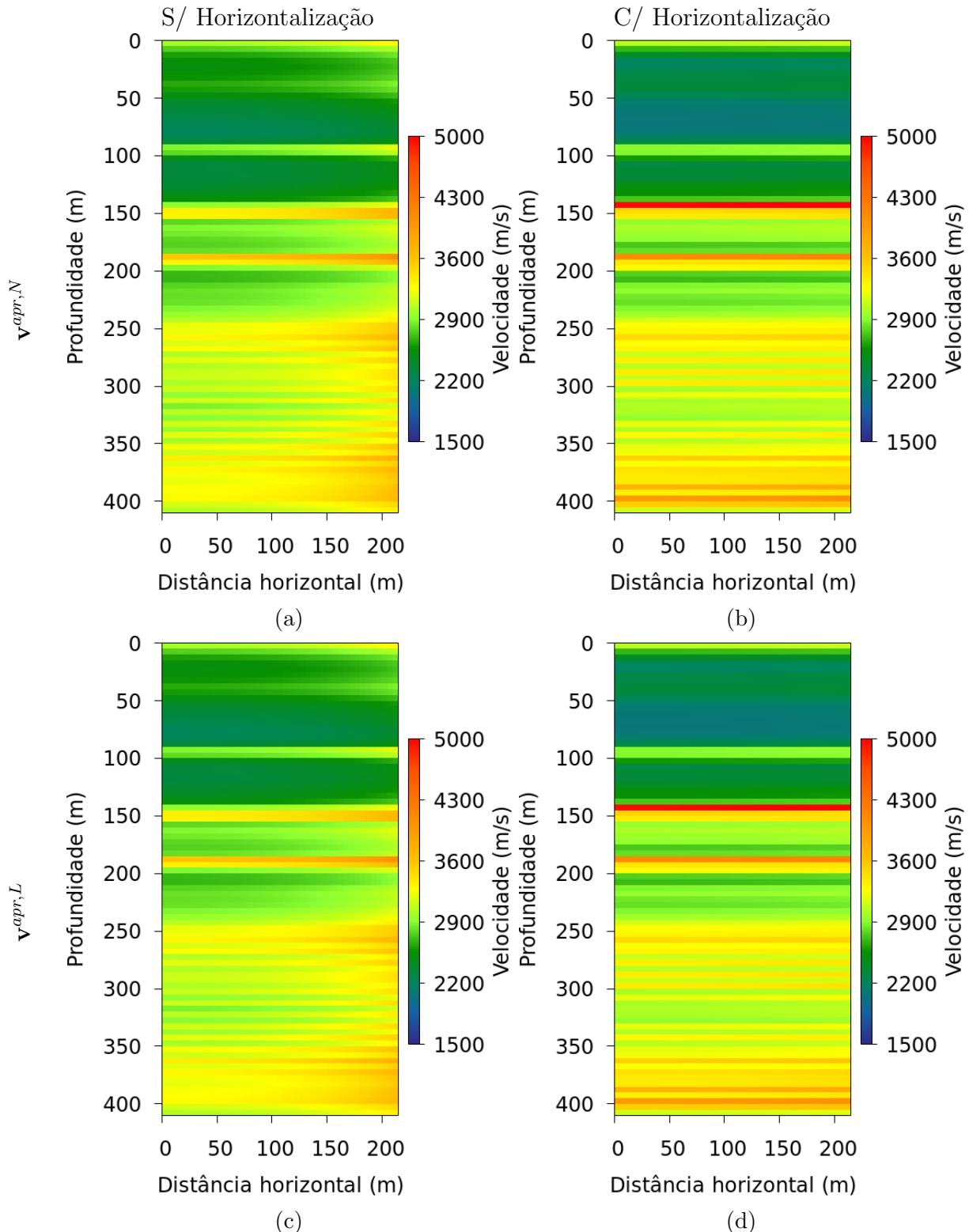


Figura 6.13: Modelos de velocidades aprimorados por CBM ($\mathbf{v}^{apr,N}$) e por CB ($\mathbf{v}^{apr,L}$) referentes às inversões das Figuras 6.6a (sem horizontalização) e 6.6b (com horizontalização).

os refletores têm boa continuidade lateral e o dado tem elevada resolução vertical. A Figura 6.15 exemplifica o procedimento para a demarcação do topo da Formação Sergi (em verde).

Segundo Schinelli *et al.* (2013) e Milani e Araújo (2003), o Campo de Dom João está localizado em um *horst* sub-horizontalizado de direção SSW-NNE, limitado à Oeste por uma zona falhada principal deslocada de 400 a 500 m (Falha Nova América), e uma zona de falhas de menor magnitude à Leste (Falha de Dom João). 70% do campo é banhado por águas rasas da Baía de Todos os Santos, com lâmina d'água média de 3 m. É o segundo campo comercial mais antigo da Bacia do Recôncavo, em produção desde 1947. O reservatório produz a partir dos arenitos flúvio-eólicos da Formação Sergi e, secundariamente, pelos da Formação Água Grande. Rotação de blocos promoveu a justaposição entre o gerador da Formação Candeias e os reservatórios (Milani e Araújo, 2003). Atualmente, o campo está sujeito à injeção de água (Schinelli *et al.*, 2013).

A Figura 6.16 mostra a interpretação da linha sísmica que inclui a região invertida, delimitada pelo retângulo vermelho. O topo do embasamento é alcançado em menos de 800 ms TWT e claramente a subsuperfície é composta por camadas plano-paralelas, o que justifica a inversão tomográfica regularizada por operador de primeira derivada na horizontal ter apresentado os melhores resultados. Prolongamento da linha à NW mostra provável atuação da Falha Nova América, onde uma falha normal com bloco baixo à NW é preenchido a partir da erosão e transporte de sedimentos do *horst* que hospeda o Campo de Dom João, assinado por superfícies *downlap* no sentido do aporte (SE-NW) com refletores de amplitude variável (Figura 6.17a), e, na direção perpendicular, por refletores caóticos em forma de cunha, amplitude oscilante e sem continuidade lateral (Figura 6.17b). Estas fácies sísmicas sugerem sistemas turbidíticos atuantes durante a fase de expansão do *rift* da bacia. Outro modelo possível, mas menos provável, seria a de um microsistema de leques aluviais devido ao rejeito promovido pelo tectonismo. Salienta-se, porém, que estas interpretações são especulativas uma vez que não há poços nesta região para as validarem. Pelo mesmo motivo, os horizontes referentes ao topo das formações não foram demarcados nesta zona.

No Campo de Dom João aflora a Formação Candeias, composta por folhelhos lacustres do Andar Rio da Serra Inferior ricos em matéria orgânica - rocha geradora de todos os *plays* exploratórios da Bacia do Recôncavo - e por turbiditos referentes à fase do rifteamento na qual as falhas incipientes, isoladas e de baixo rejeito começam a se expandir e se conectam até culminar na formação de lago profundo. A expansão desse sistema lacustre ocorre posteriormente, no Rio da Serra Superior, quando folhelhos não-geradores e turbiditos de retrabalhamento de frentes deltaicas da Formação Maracangalha são depositados. Uma vez que o Campo de Dom João está localizado em um alto estrutural, não houve subsidência

suficiente para registrar tais depósitos.

A Figura 6.18 compara o tomograma recuperado pós-aplicação de CBM e o dado sísmico. As demarcações de profundidade do topo das formações na borda do tomograma foram realizadas mediante leitura do Arquivo Geral de Poço (AGP), documento de poço incluído no âmbito do Programa REATE. A escala de cores relaciona cores frias às velocidades menores e cores quentes às maiores. Uma vez que a amplitude do refletor sísmico é proporcional ao contraste de impedância acústica na interface entre duas camadas, e este é diretamente proporcional ao contraste de velocidade (exceto por variações significativas da densidade das camadas), espera-se que haja uma correspondência direta entre interfaces do tomograma com grandes contrastes de velocidade e refletores de alta amplitude. De fato, esta correspondência é encontrada.

A Formação Candeias e a porção inferior da Formação Sergi apresentam os menores contrastes de velocidades no tomograma e refletores de menor amplitude na sísmica. Em discussão anterior, foi considerado que a porção superior do tomograma seria menos confiável devido à menor cobertura inerente ao problema tomográfico, mas, exceto por uma grande coincidência, a distribuição recuperada no tomograma se repete na sísmica.

As Formações Itaparica e Água Grande apresentam as maiores variações de velocidade, seguidas da Formação Sergi, conforme esperado uma vez correspondem a intercalação entre depósitos arenosos provenientes de ciclos flúvio-eólicos e folhelhos de transgressão lacustre de extensão regional. Na sísmica, apresentam-se como fácies de elevada amplitude e boa continuidade lateral (exceto por ação tectônica), e configuram bons marcadores estratigráficos por atuarem em toda a bacia e por possibilitarem identificação de falhas. As menores variações de velocidade na Formação Sergi podem ser resultantes da recorrente injeção de água no reservatório.

Diante do exposto, conclui-se que os aprimoramentos do modelo de velocidades obtido da inversão tomográfica de tempos de trânsito pelos métodos aqui desenvolvidos CB e CBM foram capazes de recuperar modelo de alta resolução validado por dado sísmico de reflexão, mesmo considerando aquisição tomográfica de dados reais na qual poços direcionais mergulham em direções diferentes.

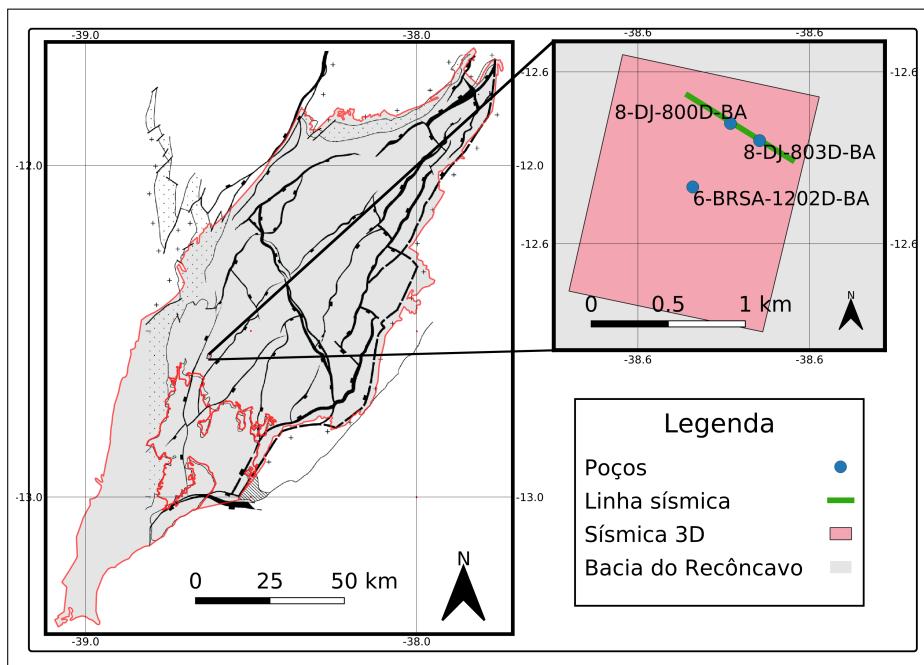


Figura 6.14: Mapa do Campo de Dom João contendo bloco sísmico, linha sísmica que corta a região invertida (entre os poços 800 e 803, que hospedaram as fontes e receptores) e poço central amarrado (1202).

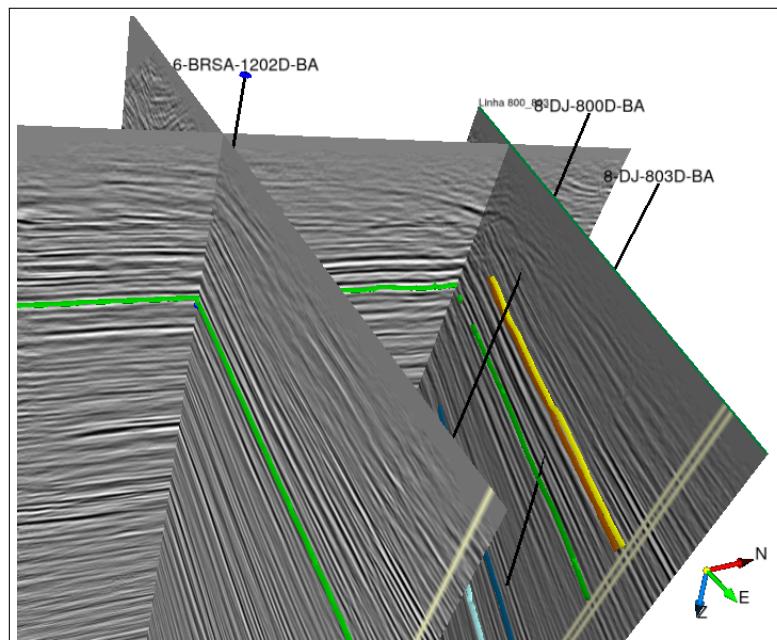


Figura 6.15: Demarcação do topo da Formação Sergi (horizonte verde) na linha que corta a região invertida, a partir do poço 1202 amarrado. Base é o topo do embasamento.

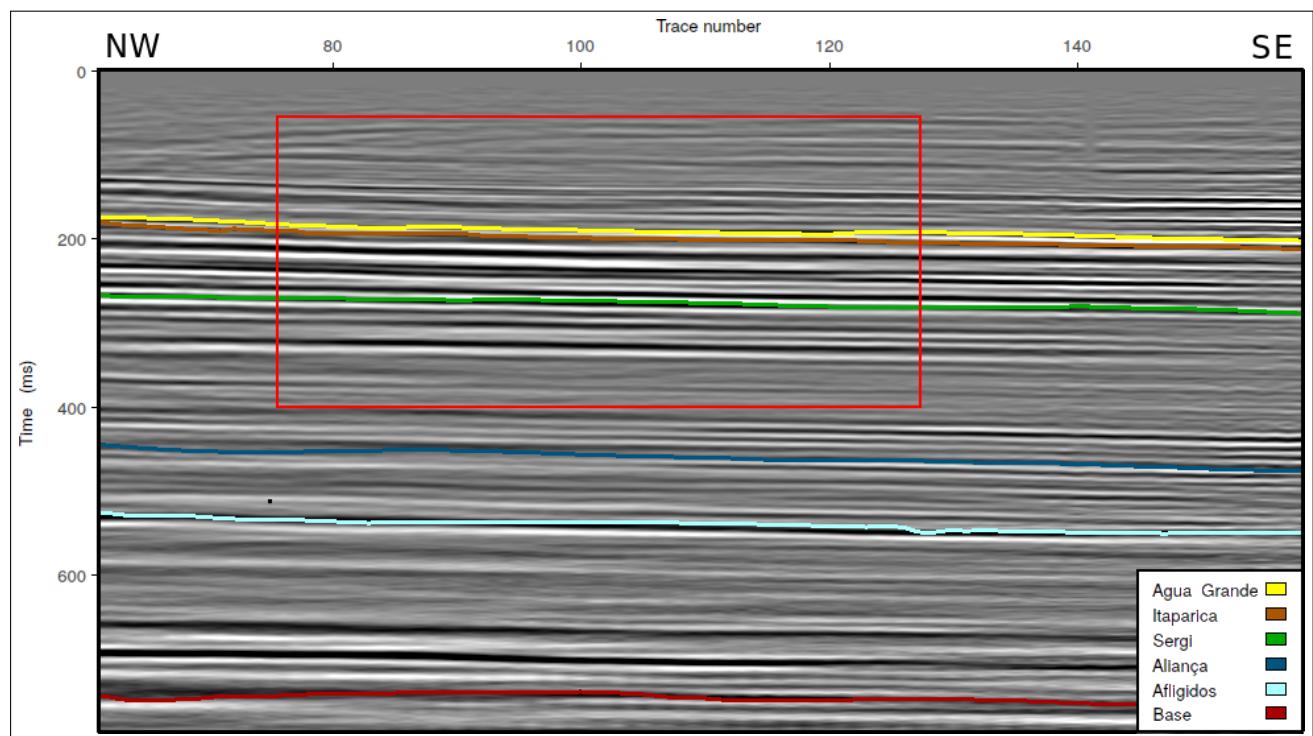
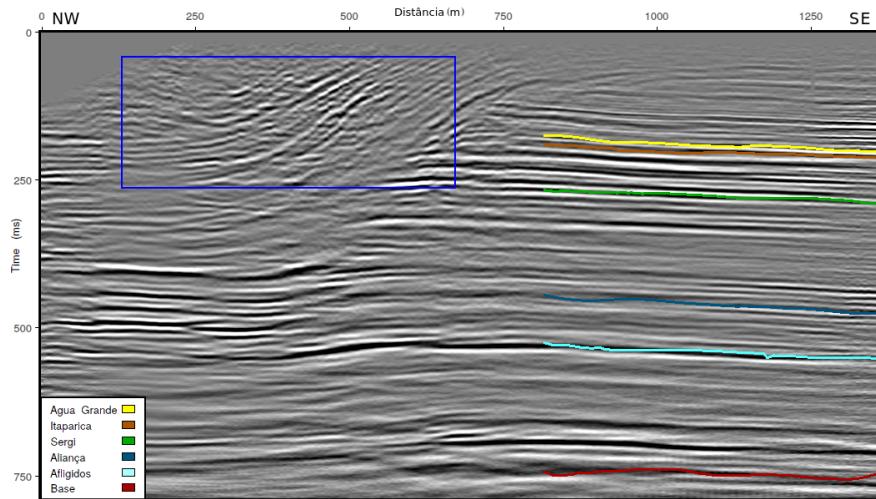
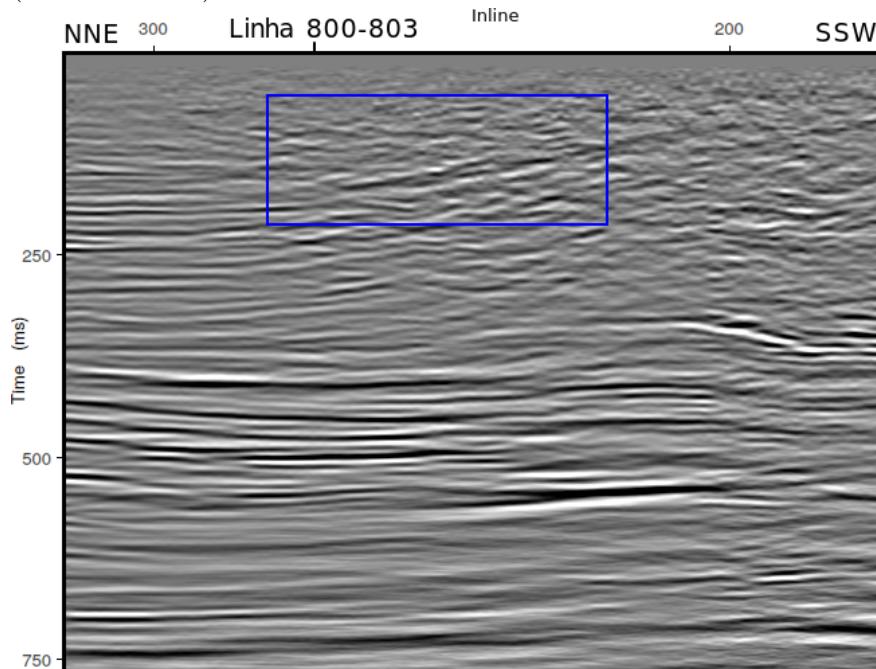


Figura 6.16: Demarcação do topo das formações na linha sísmica a partir do poço 1202 amarrado. Retângulo em vermelho delimita a região invertida.



(a) Extensão na direção NW da linha que delimita a região invertida (Linha 800-803).



(b) *Crossline*.

Figura 6.17: Sismofácies (dentro do retângulo azul) que sugerem sistemas turbidíticos (ou leques aluviais). Em (a), superfícies *downlap*; em (b) refletores em cunha.

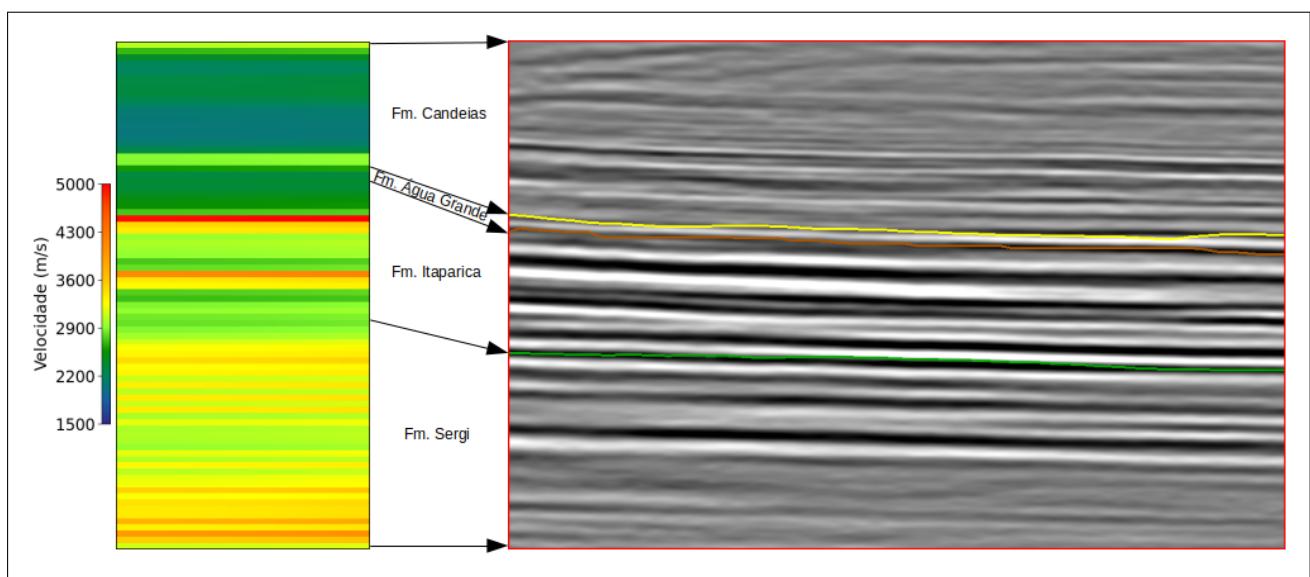


Figura 6.18: Clara correspondência entre o modelo recuperado por CBM e o dado sísmico migrado.

7

Conclusões

Os dois métodos propostos no presente trabalho, Critério de Barbieri (CB) e Critério de Barbieri Modificado (CBM), se mostraram capazes de mapear as regiões de mal funcionamento do algoritmo de inversão tomográfica de tempos de trânsito com regularização de Tikhonov tanto na abordagem não-iterativa quanto iterativa. A matriz pseudonula obtida da aplicação dos métodos forneceu as informações necessárias para aprimorar o modelo de velocidades recuperado no sentido de minimização do desvio RMS do modelo (no caso sintético, em que o modelo verdadeiro é conhecido) e no sentido de elevar a resolução (no caso real). A filtragem da matriz pseudonula por decomposição de valores singulares (SVD) para suprimir autoimagens dominantes, quando for o caso, é um artifício que se mostrou bastante útil para realçar as regiões do meio imageado onde a inversão tomográfica foi mal sucedida e corroborou a suposição de que os erros do algoritmo de inversão têm distribuição espacial aleatória. Ambos os métodos são de fácil implementação e de baixo custo computacional.

Nas simulações com dado sintético, ambos os métodos foram bem sucedidos mesmo na presença de elevado ruído gaussiano adicionado ao dado. Nestes casos, em geral, CBM requereu maior regularização do que a inversão tomográfica, enquanto CB utilizou regularização de aproximadamente a mesma intensidade. Aplicados ao dado real do Campo de Dom João, porção central da Bacia do Recôncavo, ambos os métodos recuperaram modelos similares entre si, com maior resolução do que o da inversão tomográfica, e sua superioridade foi validada por comparação com o dado sísmico de reflexão migrado em tempo.

A modelagem direta, isto é, traçado de raios, pelo algoritmo de Andersen e Kak (1982) é suscetível a erros de arredondamento por depender do cálculo de derivadas espaciais, o que pode levá-lo a exigir demasiada suavização do modelo para conseguir ligar fontes a recepto-

res. Na prática, isto significa perda de resolução que, em situação real de mapeamento de reservatório, pode provocar o insucesso da operação. Para modelos pouco complexos, o custo computacional é baixo se a ligação for possibilitada por algum método de otimização, como Newton-Raphson. Por sua vez, modelagem por grafos, baseada tão somente no princípio de Fermat, além do baixo custo computacional, é sempre capaz de encontrar a trajetória de tempo de trânsito mínimo do raio e não requer suavização, independentemente da complexidade do modelo.

Inversões por pseudoinversa são inviáveis na prática pelo elevado custo computacional, ao passo que por gradiente conjugado os modelos recuperados mantiveram a mesma qualidade (em alguns casos, até maior), com menor custo, sendo sempre a melhor opção. A incorporação da regularização de Tikhonov é essencial para driblar o mal condicionamento inerente ao problema tomográfico e recupera modelos mais realistas desde que o operador respeite as características esperadas da subsuperfície.

A curva L , como esperado, se mostrou crucial para que o sistema convirja em número baixo de iterações. A escolha do fator de regularização por meio da curva L auxiliada pela curva $\sin \Theta$, desenvolvida neste trabalho, garantiu a rápida convergência uma vez que desvios do formato original da curva L são melhor mapeados na curva $\sin \Theta$.

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço à minha família.

Agradeço à minha amada Taisa.

Agradeço aos meus amigos e colegas.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Amin Bassrei, pela confiança e ajuda imprescindíveis para a execução desta tese.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pela bolsa de Doutorado concedida a mim, essencial para garantir a dedicação a esta tese.

Agradeço aos meus professores, à Universidade Federal da Bahia e ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da UFBA pela estrutura fornecida e excelência.

Agradeço ao Dr. Jessé Carvalho Costa pela disponibilização do algoritmo de traçado de raios por grafos.

Agradeço à FAPEX/UFBA e à Petrobras pelos dados reais fornecidos.

Agradeço à ANP e SGB pela disponibilização gratuita dos dados reais sísmicos e de poço através do Programa REATE.

Agradeço à dGB Earth Sciences pela disponibilização gratuita do software OpendTect.

Referências bibliográficas

- Ambrose, J. e Hounsfield, G. (1973) Computerized transverse axial tomography, British Journal of Radiology, v. 46, n. 542, 148-149, Londres.
- Andersen, A. H. e Kak, A. C. (1982) Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields, Journal of Acoustical Society of America, v. 72, 1593-1606.
- Barbieri, M. (1974) A criterion to evaluate three dimensional reconstructions from projections of unknown structures, Journal of Theoretical Biology, v. 48, 451-467.
- Bassrei, A. e Rodi, W. (1993) Regularization and inversion of linear geophysical data, In: 3rd International Congress of the Brazilian Geophysical Society, v. 1, 111-116, RJ.
- Bejarano, S. L. e Bassrei, A. (2016) Critique of solutions in linearized inverse problems: numerical experiments in travelttime tomography, Revista Brasileira de Geofísica, v. 34, n. 4, 495-508.
- Bekara, M. e Baan, M. V. D. (2007) Local singular value decomposition for signal enhancement of seismic data, Geophysics, v. 72, n. 2, V59-V65.
- Bois, P.; La Porte, M.; Lavergne, M. e Thomas, G. (1972) Well-to-well seismic measurements, Geophysics, v. 37, n. 3, 471-480.
- Bording, R.; Gersztenkorn, A.; Lines, L.; Scales, J. e Treitel, S. (1986) Applications of seismic travel-time tomography, Geophysical Journal International, v. 90, n. 2, 285-303.
- Born, M. e Wolf, E. (1999) Principles of Optics, 7th ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- Bracewell, R. e Riddle, A. (1967) Inversion of fan-beam scans in radio astronomy, Astrophysical Journal, v. 150, 427-434.
- Bube, K. P.; Langan, R. T. (1994) A continuation approach to regularization for travelttime tomography, 64th Annual International SEG Meeting (Los Angeles), 980-983.
- Caixeta, J. M.; Bueno, G. V.; Magnavita, L. P. e Feijó, F. J. (1994) Bacias do Recôncavo,

- Tucano e Jatobá, Boletim de Geociências da Petrobrás, v. 8, n. 1, 163-166, RJ.
- Chiu, S. K. e Howell, J. E. (2008) Attenuation of coherent noise using localized adaptive eigenimage filter, 78th SEG Meeting (Las Vegas) Expanded abstracts, 2541-2545.
- Datta, D. e Sen, M. (2016) Estimating a starting model for full-waveform inversion using a global optimization method, *Geophysics*, v. 81, n. 4, R211-R223.
- De Rosier, D. e Klug, A. (1968) Reconstruction of three dimensional structures from electron micrographs, *Nature*, v. 217, 130-134, Londres.
- Destro, N.; Szatmari, P.; Alkmim, F. F. (2003) Release faults, associated structures, and their control on petroleum trends in the Recôncavo rift, northeast Brazil, *AAPG Bulletin*, v. 87, n. 7, 1123-1144.
- Devaney, J. (1984) Geophysical diffraction tomography, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 22, n. 1, 3-13.
- Dijkstra, E. W. (1959) A note on two problems in connexion with graphs, *Numerische Mathematik*, v. 1, 269-271.
- Freire, S. e Ulrych, T. (1988) Application of singular value decomposition to vertical seismic profiling, *Geophysics*, v. 53, n. 6, 778-785.
- Golub, G. H.; Heath, M. e Wahba, G. (1979) Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter, *Technometrics*, v. 21, n. 2, 215-223.
- Golub, G. H.; Loan, C. F. van (1996) Matrix computations, Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- Gordon, R. (1974) A tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Techniques), *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 21, n. 3, 78-93.
- Handayani, T.; Irwanzah, Z.; Taslim, M.; Kurniadi, D.; Dogra, S.; Nalonnill, A.; Marion, B.; Bryans, B. e Reyes, P. (2011) Crosswell seismic: Step change in seismic imaging - A case study from Indonesia, SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Jakarta.
- Hansen, P. C. (1992) Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, v. 34, n. 4, 561-580.
- Hansen, P. C. (2007) Regularization Tools Version 4.0 for Matlab 7.3, *Numerical Algorithms*, v. 46, 189-194.
- Hestenes, M. R. e Stiefel, E. (1952) Method of conjugate gradients for solving linear systems, *Journal of Research of the National Bureau os Standards*, v. 49, 409-436.

- Korneev, V.; Parra, J. e Bakulin, A. (2005) Tube-wave effects in cross-well seismic data at Stratton Field, In: SEG Technical Program Expanded Abstracts, 336-339, Annual Meeting, Houston.
- Lanczos, C. (1996) Linear Differential Operators, Van Nostrand, Londres.
- Lazaratos, S. e Marion, B. (1997) Crosswell seismic imaging of reservoir changes caused by CO₂ injection, *The Leading Edge*, v. 16, n. 9, 1300-1306.
- Levenberg, K. (1944) A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, n. 2, 164-168.
- Magnavita, L. P. (1993) Geometry and kinematics of the Recôncavo-Tucano-Jatobá Rift, NE Brazil, PhD Thesis, University of Oxford, Oxford.
- Magnavita, L. P.; Silva, R. R. e Sanches, C. P. (2005) Roteiros geológicos: Guia de Campo da Bacia do Recôncavo, NE do Brasil, Boletim de Geociências da Petrobrás, v. 13, n. 2, 301-308.
- McMechan, G. (1983) Seismic tomography in boreholes, *Geophysical Journal International*, v. 74, n. 2, 601-612.
- Menke, W. (2018) Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory, ed. 4, Academic Press, Londres.
- Messud, J.; Reinier, M.; Prigent, H.; Guillaume, P.; Coléou, T. e Masclet, S. (2017) Extracting seismic uncertainties from tomographic velocity inversion and their use in reservoir risk analysis, *The Leading Edge*, v. 36, n. 2, 127-132.
- Milani, E. J. e Araújo, L. M. (2003) Recursos minerais energéticos: Petróleo, In: Geologia, Tectônica e Recursos Minerais do Brasil, 541-576, CPRM.
- Moser, T. J. (1991) Shortest path calculation of seismic rays, *Geophysics*, v. 56, n. 1, 59-67.
- Oldenburg, D. W. e Li, Y. (2005) Inversion for Applied Geophysics: A tutorial, Society of Exploration Geophysicists, v. 13, Tulsa, OK.
- Penrose, R. (1955) A generalized inverse for matrices, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 51, n. 3, 406-413.
- Penteado, H. L. B. (1999) Modélisation compositionnelle 2D de la genèse, expulsion et migration du pétrole dans le Compartiment Sud du Bassin de Recôncavo, Brésil, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

- Porsani, M.; Silva, M.; Melo, P. e Ursin, B. (2010) SVD filtering applied to ground-roll attenuation, *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 7, n. 3, 284-289.
- Sá, T. J. M. (1996) Inversão e seleção de imagens na tomografia de transmissão utilizando regularização de ordem arbitrária, decomposição em valores singulares, conjugado gradiente modificado e entropia. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Bahia, BA.
- Santos, E. T. F.; Bassrei, A. e Costa, J. C. (2006) Evaluation of L-curve and Θ -curve approaches for the selection of regularization parameter in anisotropic travelttime tomography, *Journal of Seismic Exploration*, v. 15, n. 3, 245-272.
- Scales, J. A. (1987) Tomographic inversion via the conjugate gradient method, *Geophysics*, v. 52, n. 2, 179-185, Tulsa, OK.
- Schinelli, M.; Bassrei, A.; Kolb, C.; Denaclara, H.; Schill, S.; Bryans, B. (2013) Crosswell Seismic Reservoir Characterization in Dom Joao Field, Brazil, In: 13th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, 17-20, RJ.
- Sen, M. K. e Stoffa, P. L. (2013) Global optimization methods in geophysical inversion, Cambridge University Press.
- Silva, O. B.; Caixeta, J. M. e Milhomem, P. S. (2007) Bacia do Recôncavo, Boletim de Geociências da Petrobrás, v. 15, n. 2, 423-431.
- Snieder R. e Trampert J. (1999) Inverse Problems in Geophysics, In: Wirgin, A. (editor) Wavefield Inversion, International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), v. 398, 119-190, Springer, Nova York.
- Soupios, P.; Papazachos, C.; Juhlin, C. e Tsokas, G. (2001) Nonlinear 3-D travelttime inversion of crosshole data with an application in the area of the Middle Ural Mountains, *Geophysics*, v. 66, n. 2, 627-636.
- Stewart, R. R. (1991) Exploration Seismic Tomography: Fundamentals, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK.
- Tarantola, A. (2005) Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, SIAM, Philadelphia.
- Tarantola, A. e Valette, B. (1982) Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 20, n. 2, 219-232.
- Tikhonov, A. N. e Arsenin, V. Y. (1977) Solutions of Ill-posed Problems, Winston, Washington.
- Virieux, J. e Operto, S. (2009) An overview of full-waveform inversion in exploration

geophysics, Geophysics, v. 74, n. 6, WCC1-WCC26.

Wahba, G. (1990) Spline models for observational data, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Washbourne, J.; Rector, J. e Bube, K. (2002) Crosswell travelttime tomography in three dimensions, Geophysics, v. 67, n. 3, 853-871.

Wolf, E. (1969) Three-dimensional structure determination of semi-transparent objects from holographic data, Optics Communications, v. 1, n. 4, 153-156.

Wu, R.; Toksoz, M. (1987) Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging, Geophysics, v.52, n. 1, 11-25.

Wylie, C. R. e Barrett, L. C. (1985) Advanced Engineering Mathematics, McGraw-Hill, Nova York.

Xia, J.; Miller, R. e Xu, Y. (2008) Data resolution matrix and model resolution matrix of Rayleigh wave inversion using a damped least square method, Pure and Applied Geophysics, v. 165, 1227-1248.

Yao, Z. e Roberts, R. (1999) A practical regularization for seismic tomography, Geophysical Journal International, v. 138, n. 2, 293-299.

Yao, Z.; Roberts, R. e Tryggvason, A. (1999) Calculating resolution and covariance matrices for seismic tomography with the LSQR method, Geophysical Journal International, v. 138, n. 3, 886-894.