UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

JAMILE DOS SANTOS SOUZA BAHIA

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: análise de organizações matemáticas e didáticas relativas à semelhança de triângulos

SALVADOR
2024

JAMILE DOS SANTOS SOUZA BAHIA

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: análise de organizações matemáticas e didáticas relativas à semelhança de triângulos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração em Educação Científica e Formação de Professores.

Orientador: Profª. Dr. Saddo Ag Almouloud

SALVADOR
2024

SIBI/UFBA/Faculdade de Educação – Biblioteca Anísio Teixeira

Bahia, Jamile dos Santos Souza.
Provas e demonstrações em livros didáticos do ensino médio [recurso eletrônico] : análise de organizações matemáticas e didáticas relativas à semelhança de triângulos / Jamile dos Santos Souza Bahia. - Dados eletrônicos. - 2024.

Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Educação. Programa de Pós- Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2024.
Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.
Disponível em formato digital.
Modo de acesso: https://repositorio.ufba.br/

1. Matemática (Segundo grau) - Livros didáticos. 2. Prova e demonstração. 3. Semelhança de triângulos. 4. Organizações matemáticas - Didática. 5. Teoria Antropológica do Didático. I. Almouloud, Saddo Ag. II. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDD 510 - 23. ed.

JAMILE DOS SANTOS SOUZA BAHIA

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: análise de organizações matemáticas e didáticas relativas à semelhança de triângulos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Mestra em Ensino, Filosofia e História das Ciências

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
SADDO AG ALMOULOUD
Data: 02/09/2024 11:40:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (Orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br
JANY SANTOS SOUZA GOULART
Data: 03/09/2024 08:45:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Jany Santos Souza Goulart (Examinadora Interna)

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARIDETE BRITO CUNHA FERREIRA
Data: 02/09/2024 21:00:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maridete Brito Cunha Ferreira (Examinadora Externa)

SALVADOR

2024

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.

(Arthur Schopenhauer)

Aos meus pais Josilene e João pelo amor e dedicação.
Ao meu esposo pela compreensão e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas.

Aos meus pais João e Josilene por todo amor e pelos esforços para garantir minha educação.

Aos meus irmãos Jiliane, Janielma e Jobson pelo amor, carinho e compreensão.

Ao meu esposo Joalisson pela ajuda, companheirismo, amor, compreensão; por ser minha rocha nos momentos difíceis e não me deixar desistir.

A minha grande amiga Jamile Cruz, presente que o mestrado me deu e levarei para vida, pela companhia e amizade durante essa jornada.

A turma de Mestrado 2022.2 por compartilharem comigo o início dessa caminhada.

Ao meu orientador Saddo Ag Almouloud pelas orientações e paciência durante a escrita deste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo financiamento da bolsa que possibilitou o desenvolvimento deste Mestrado.

A Profa. Dra. Maridete Ferreira e a Profa. Dra. Jany Goulart por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram e contribuem para o alcance de mais uma conquista.

Gratidão, pois “nenhum dever é mais urgente do que agradecer” (James Allen)

RESUMO
O objetivo dessa pesquisa foi analisar as organizações matemáticas e didáticas de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos. Para alcançá-lo, analisamos a abordagem do conceito de semelhança de triângulos em livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), 2021, bem como suas tarefas, e respectivas técnicas, envolvendo provas e demonstrações relativas a este conceito. Essa análise consistiu em três principais etapas: escolha dos livros didáticos analisados, análise ecológica, e análise praxeológica a partir da estrutura praxeológica constituída pelas noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e teve como base a Teoria Antropológica do Didático (TAD) enquanto ferramenta de análise de materiais didáticos. Nessa perspectiva, utilizamos como referencial teórico e metodológico, construtos da TAD desenvolvida por Yves Chevallard e colaboradores, e pesquisas similares de autores como Saddo Ag Almouloud; além de construtos teóricos sobre provas e demonstrações sob a ótica de Nicolas Balacheff, sobretudo a distinção entre explicação, prova e prova matemática (demonstração) e sua importância para a introdução do ensino desses conceitos na Educação Básica, e a tipografia das provas, classificadas como pragmáticas e intelectuais, que por sua vez englobam quatro outros tipos importantes, a saber: Empirismo Ingênuo, Experimento Crucial, Exemplo Genérico e Experiência Mental. Ao analisar as tarefas e estabelecer as técnicas necessárias à sua resolução, buscamos delinear como os autores dos livros didáticos selecionados abordam e exploram os conceitos de prova e demonstração. Destaca-se, a predominância de uma abordagem tradicional do conceito de semelhança de triângulos, isto é, definição, seguida de exemplos, exercícios resolvidos e propostos, embora em alguns casos houve uma certa contextualização ao associarem a semelhança à ampliação e redução de figuras, por exemplo. Na maioria dos livros didáticos analisados, os autores não exploraram provas e demonstrações. Muitos autores não apresentaram a demonstração dos casos de semelhança, dos quais apenas um foi demonstrado em um dos livros didáticos. Notamos também, que em boa parte dos livros didáticos, os autores optaram por demonstrar apenas o teorema fundamental da semelhança. De modo geral, na análise das organizações, inferimos que há uma aproximação entre as escolhas matemáticas e didáticas, ou seja, a partir do que foi apresentado na introdução da noção de semelhança de triângulos, foi possível desenvolver de forma justificável as tarefas escolhidas para mobilizar os conhecimentos relativos à respectiva noção. Além disso, embora na abordagem da noção de semelhança de triângulos não haja uma exploração de provas e demonstrações, o professor pode desenvolver estratégias para mobilizar esses conceitos por meio das tarefas que foram apresentadas, visto que o livro didático é uma ferramenta que deve ser utilizada para auxiliá-lo, estando sujeito aos objetivos referentes ao que se pretende ensinar.

Palavras-chave: Provas e Demonstrações; Semelhança de Triângulos; Livro Didático; TAD; Organizações matemáticas e didáticas.

ABSTRACT
The objective of this research was to analyze the mathematical and didactic organizations of textbooks for the 1st year of high school regarding proofs and demonstrations involving the similarity of triangles. To achieve this, we analyzed the approach to the concept of similarity of triangles in textbooks for the 1st year of high school approved in the National Book and Teaching Material Program (NBTMP), 2021, as well as their tasks, and respective techniques, involving tests and demonstrations relating to this concept. This analysis consisted of three main stages: choice of the textbooks analyzed, ecological analysis, and praxeological analysis based on the praxeological structure constituted by the notions of type of task, technique, technology and theory, and was based on the Anthropological Theory of Didactics (ATD) as a tool for analyzing teaching materials. From this perspective, we use, as a theoretical and methodological framework, constructs from the ATD developed by Yves Chevallard and collaborators, and similar research by authors such as Saddo Ag Almouloud; in addition to theoretical constructs about proofs and demonstrations from the perspective of Nicolas Balacheff, especially the distinction between explanation, proof and mathematical proof (demonstration) and its importance for the introduction of teaching these concepts in Basic Education, and the typography of proofs, classified as pragmatic and intellectual, which in turn encompass four other important types, namely: Naive Empiricism, Crucial Experiment, Generic Example and Mental Experiment. By analyzing the tasks and establishing the techniques necessary for their resolution, we seek to outline how the authors of the selected textbooks approach and explore the concepts of proof and demonstration. The predominance of a traditional approach to the concept of similarity of triangles stands out, that is, definition, followed by examples, solved and proposed exercises, although in some cases there was a certain contextualization by associating the similarity with the enlargement and reduction of figures, for example. In most of the textbooks analyzed, the authors did not explore proofs and demonstrations. Many authors did not demonstrate cases of similarity, of which only one was demonstrated in one of the textbooks. We also note that in most textbooks, the authors chose to demonstrate only the fundamental similarity theorem. In general, in the analysis of organizations, we infer that there is an approximation between mathematical and didactic choices, that is, based on what was presented in the introduction of the notion of similarity of triangles, it was possible to develop in a justifiable way the tasks chosen to mobilize knowledge relating to the respective notion. Furthermore, although in approaching the notion of similarity of triangles there is no exploration of proofs and demonstrations, the teacher can develop strategies to mobilize these concepts through the tasks that were presented, since the textbook is a tool that must be used to assist you, subject to the objectives relating to what you intend to teach.

Keywords: Proofs and Demonstrations; Textbook; Similarity of Triangles; ATD, Mathematical and didactic organizations.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AprovaME – Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

FNDE - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

FURG – Universidade Federal do Rio Grande

LD – Livro Didático

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Plano Nacional do Livro e do Material Didático

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

UFAC – Universidade Federal do Acre

UFCA – Universidade Federal do Cariri

UFFS – Universidade Federal da Fronteira do Sul

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFSJ – Universidade Federal de São José Del-Rei

UNESP – Universidade Estadual Paulista

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Inerentes ao ensino e à aprendizagem envolvendo o processo de demonstração, destacam-se as dificuldades de estudantes no entendimento e prática desse raciocínio, que vão desde reconhecê-la num livro de matemática, à identificação do que é hipótese e tese em uma proposição, bem como identificar se a proposição possui condições necessárias e suficientes e reconhecer sua necessidade quando a verdade da proposição lhes parece óbvia (Almouloud; Regnier; Fusco, 2009; De Villiers, 2001). Ou seja, algumas dificuldades estão relacionadas ao entendimento de elementos centrais do conceito de demonstração.

Complementando essa lista, Ferreira Filho (2007), em sua investigação sobre provas e demonstrações com estudantes da educação básica, identificou que as principais dificuldades apresentadas são: perceber a necessidade de provar, quando uma figura, para eles, já é suficiente; encontrar um argumento inicial; compreensão da linguagem utilizada no enunciado da questão; reconhecer validações dedutivas e empíricas; e finalizar um argumento. Além disso, uma grande questão também reside em como argumentar por meio de relações construídas coerentemente e que de fato comprovam o que se deseja fazendo uso de dados da proposição e recursos matemáticos já conhecidos (Almouloud; Regnier; Fusco, 2009), sendo também uma importante dificuldade apresentada pelos estudantes ao se depararem com o processo de demonstração em matemática.

Diante desse cenário, podem surgir as seguintes indagações: como minimizar essas dificuldades? Como a questão da demonstração é apresentada no livro didático? Essa apresentação facilita o entendimento do estudante? Essas são algumas das questões que podem suscitar pesquisas no campo da Educação Matemática, sobretudo no que se refere ao ensino e a aprendizagem de geometria, em particular, provas e demonstrações em geometria euclidiana plana.

As dificuldades dos estudantes em demonstrar e o receio de professores em trabalhar com demonstrações, despertaram o interesse por esse tema que me levou a desenvolver, na graduação (Trabalho de Conclusão de Curso – TCC), uma pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem de demonstrações, na qual investiguei dificuldades de estudantes de Licenciatura em Matemática com demonstrações geométricas a partir da análise de erros.

Durante essa pesquisa, foi possível constatar que algumas dessas dificuldades são oriundas, sobretudo, da Educação Básica e da escassez na abordagem de provas e demonstrações nesse nível (Souza, 2020). Isso porque, embora as considerem importante para a formação docente e declarem que o conhecimento delas propiciam segurança (Pinto;

Esquincalha, 2016; Mazzolli, 2016), muitos professores não possuem aporte geométrico para redigir provas e demonstrações, o que pode ser um fator determinante para que não as ensinem, e explicar o fato de professores, tais quais os entrevistados na pesquisa de Mazzolli (2016), pouco ou nunca trabalharem com tarefas demonstrativas em sala de aula.

Nesse sentido, com o intuito de dar continuidade às investigações sobre esse tema, nasceu o interesse em analisar como as provas e demonstrações são abordadas em livros didáticos da Educação Básica, já que são materiais utilizados tanto por estudantes quanto por professores e de importante relevância no cenário da educação, sendo uma das principais fontes que embasam o ensino e a aprendizagem (Pires; Lopes; Portela, 2020). Ainda diante dos resultados obtidos na pesquisa de Souza (2020), percebeu-se a necessidade de um olhar voltado, mais especificamente, para o Ensino Médio, visto que se trata da etapa de transição entre a Educação Básica e o Ensino Superior. Deste contexto, e levando em consideração que a abordagem de determinada noção em um livro didático perpassa pelas escolhas de seu autor, surgiu a questão norteadora desta pesquisa: Como autores de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio apresentam as organizações matemática e didática a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos?

Almejando o entendimento da abordagem dada às provas e demonstrações nesses livros, analisamos seções que abordam especificamente provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos, por se tratar de um conteúdo basilar muito importante e que também é utilizado como argumento para outras demonstrações como, por exemplo, na área de trigonometria para demonstrar as relações métricas, além de poder ser aplicada em áreas como a Física, em resoluções de problemas de óptica por exemplo. A série escolhida justifica-se por ser, no Ensino Médio, a série na qual os estudantes retomam o contato com o conteúdo supramencionado, visto, inicialmente, no 9º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais.

Cabe ressaltar que a forma como os autores de livros didáticos apresentam uma determinada noção, compreende tanto a realidade matemática, ou seja, as escolhas matemáticas relacionadas ao objeto matemático em questão, quanto a forma como esse objeto é apresentado didaticamente, isto é, as escolhas didáticas. Essas escolhas matemáticas e didáticas são denominadas por Chevallard (1999), respectivamente, de organização matemática e organização didática e são construtos da teoria desenvolvida por ele, denominada Teoria Antropológica do Didático (TAD), que será utilizada, nessa pesquisa, para análise dos dados. Logo, buscando responder à questão de pesquisa, temos como objetivo analisar as organizações matemática e didática de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos.

Ancorados no estudo de Varella (2010), que fez importantes constatações a respeito da abordagem da geometria analítica a partir do estudo de materiais didáticos, inferindo se as escolhas adotadas por seus autores em relação aos conceitos deste componente possibilitavam aos estudantes condições favoráveis de aprendizagem, pretendemos, ao analisar como as provas e demonstrações são apresentadas nos livros didáticos, possibilitar caminhos para minimizar as dificuldades que estudantes possuem em aprendê-las, contribuindo, nessa perspectiva, para o ensino e a aprendizagem dessas noções na Educação Básica.

Além disso, como o foco da pesquisa está centrado nesse nível, optamos por distinguir as noções de prova e demonstração, pois embora na Matemática elas sejam sinônimos, Balacheff (1982) considera necessário diferenciar esses termos, tornando possível inserir a demonstração na Educação Básica a partir de um processo gradual, no qual são estabelecidos níveis de prova. Enquanto a prova de modo geral pode ser considerada uma noção polissêmica em relação a sua aceitabilidade e dependendo do contexto em que é empregada, a demonstração é uma prova com características bem definidas e consolidadas, sendo necessário uma obediência argumentativa e lógica para que uma prova seja considerada uma demonstração em Matemática (Balacheff, 1982).

A escolha da TAD enquanto ferramenta para análise dos livros didáticos selecionados, deve-se ao seu potencial teórico-metodológico, especialmente quando se trata da análise desses recursos, o que é enfatizado na pesquisa desenvolvida por Almouloud (2015), na qual argumenta que "[...] por meio de conceitos da TAD podemos construir, entre outros, um método de análise de materiais didáticos (livros, cadernos e/ou apostilas destinadas ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos)" (Almouloud, 2015, p. 12).

Destaca-se, brevemente, que a TAD é uma teoria desenvolvida por Yves Chevallard nos anos 90, pertencendo ao campo da antropologia, que estuda o homem e suas ações (Ferreira, 2016). Uma extensão da Teoria da Transposição Didática que se encarrega de estudar especificamente a ação do homem diante do saber matemático.

Diante disso, foi desenvolvida uma pesquisa documental, na qual analisamos, à luz de pressupostos teóricos e metodológicos da TAD, livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio que foram aprovados no Plano Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021, mais especificamente, as organizações matemáticas e didáticas que dizem respeito a provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos.

Nessa perspectiva, ademais da introdução, essa pesquisa é constituída por 6 outros tópicos, a saber:

Tópico 2 que diz respeito à problemática, no qual apresentamos uma Revisão de Literatura com um panorama de estudos recentes e documentos normativos relacionados aos alicerces desta pesquisa que são as provas e demonstrações, semelhança de triângulos, livro didático e a TAD enquanto ferramenta de análise de livros e materiais didáticos; bem como a questão norteadora e os objetivos geral e específicos.

Tópico 3 no qual traçamos um breve panorama histórico e epistemológico do objeto matemático semelhança de triângulos, a fim de situar o leitor quanto à evolução deste conceito.

Tópico 4 cujo objetivo foi apresentar os construtos teóricos e seus respectivos autores, que norteiam essa pesquisa, a saber: provas e demonstrações sob a ótica de Balacheff (1982, 2000) e a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1999), com foco no modelo praxeológico.

Tópico 5 que diz respeito a metodologia e no qual descrevemos o que foi feito para a produção dos dados da pesquisa sob a ótica da TAD enquanto ferramenta de análise de livros e materiais didáticos, sobretudo baseado no olhar de Almouloud (2015).

Tópico 6 no qual apresentamos a análise dos dados obtidos, dividida em dois momentos: a análise da introdução do conceito de semelhança de triângulos nos livros didáticos selecionados e a análise da estrutura praxeológica constituída de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Além disso, também apresentamos uma discussão a respeito dos dois momentos, enfatizando como as provas e demonstrações são abordadas.

Tópico 7 com as considerações finais e perspectivas futuras.

2. PROBLEMÁTICA

2.1. Revisão de literatura

Considerando os elementos centrais que norteiam esta pesquisa, a saber: as noções de provas e demonstrações e da semelhança de triângulos, e o livro didático; tecemos alguns apontamentos baseados em estudos recentes e documentos oficiais da educação à respeito destas noções, bem como algumas considerações sobre o livro didático e sua importância, a fim de justificar a relevância desta ferramenta didática, além de relacionar as temáticas em questão, de modo a explicitar como essa relação foi estabelecida nesta pesquisa.

2.1.1. Achados em teses e dissertações CAPES sobre prova e demonstração

Desde a consolidação da geometria dedutiva, as questões e discussões envolvendo provas e demonstrações foram temas de estudos que tentam investigar percepções sobre o ensino e a aprendizagem em diferentes níveis da educação escolar, perpassando por concepções de alunos e professores, bem como pela abordagem em materiais e livros didáticos, relacionados a diferentes áreas e a uma variedade de conceitos, como é evidenciado no Quadro 1, que apresenta dissertações e tese com o tema prova e demonstração. Esses trabalhos foram obtidos por meio de uma busca simples no banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com as palavras-chave “prova e demonstração”. Foram localizados 9 trabalhos no período de 2007 a 2018, dos quais 1 não foi considerado pois não estava relacionado ao tema proposto, sendo analisadas 7 dissertações e 1 tese.

Quadro 1: Teses e Dissertações CAPES sobre prova e demonstração.

Autor(ano)	Título	Tipo	Instituição
VARELLA (2010)	Prova e demonstração na geometria analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.	Dissertação	PUC - SP
SOUZA (2009)	A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer.	Dissertação	PUC - SP
MARTINS (2012)	Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.	Dissertação	UFRJ
ALMEIDA (2007)	Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.	Dissertação	PUC - SP
ORDEM (2010)	Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique.	Dissertação	PUC -SP
ORDEM (2015)	Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique.	Tese	PUC - SP
CORREIA (2018)	Argumentação, Prova e Demonstração: uma Investigação sobre as Concepções de Ingressantes no Curso de Licenciatura em Matemática.	Dissertação	UFRJ
CARVALHO (2007)	Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio.	Dissertação	PUC - SP

Fonte: Os autores (2023).

Em sua pesquisa, Varella (2010) investigou a abordagem de provas e demonstrações em livros didáticos do Ensino Médio a respeito da geometria analítica e, resguardada a época de suas constatações e a esfera que abrigou seu estudo, percebeu que não houve o abandono do trabalho com provas e demonstrações em materiais didáticos, embora a compreensão do que seja passível de demonstração em matemática não seja apresentada de forma satisfatória e clara quanto aos termos pertencentes ao sistema dedutivo (Varella, 2010).

A análise de livros didáticos também foi utilizada nas pesquisas de Martins (2012) e Carvalho (2007). A pesquisa de Carvalho (2007) foi uma das primeiras a realizar um estudo das provas e demonstrações voltado para a álgebra, pois segundo a autora, não foram encontrados trabalhos que explorasse esse tema nessa perspectiva, sendo a geometria a área mais abordada. Além disso, a autora constatou a necessidade de diferenciar prova e demonstração como defendido por Balacheff (1982, 2000), visto que se torna possível considerar diversos tipos de justificativas dadas pelos alunos. Já Martins (2012), corroborando a constatação de Carvalho (2007), enveredou na área da geometria e seus resultados apontaram para a ausência de tarefas de cunho investigativo nos livros didáticos estudados e uma abordagem mesclada de provas pragmáticas e intelectuais, tipos de provas definidos por Balacheff (1982, 1988, 2000) ao distinguir prova e demonstração.

Em diálogo com essas pesquisas, observaremos, em nossa investigação, se houve avanço quanto a essa abordagem nos materiais e livros didáticos atuais, apesar de nosso estudo se debruçar também sobre um conceito da geometria euclidiana plana, assim como a investigação de Ordem (2010), que também analisou a abordagem dessa temática em livros didáticos, porém no âmbito internacional. Cabe ressaltar, que o autor dessa pesquisa deu continuidade ao seu estudo a respeito de provas e demonstrações investigando concepções de estudantes de Licenciatura em Matemática, constatando algumas fragilidades como a falta de estratégias consistentes, com embasamento matemático plausível, na produção de uma demonstração, e uma dissociação entre demonstração e uma de suas principais finalidade, a validação ou refutação em matemática (Ordem, 2015).

A análise de concepções de estudantes de licenciatura em matemática sobre argumentação, prova e demonstração também foi abordada por Correia (2018) em sua pesquisa de dissertação. Correia (2018) evidencia que as provas e demonstrações nem sempre são suficientes para convencer o estudante quanto à validade de um enunciado, apoiando-se no exemplo para verificar sua veracidade, embora haja um consenso quanto à finalidade dessas noções estar associada à validação de algo. Quanto à isso, o autor destaca a necessidade de ampliar as concepções dos estudantes a respeito de provas e demonstrações para além da função de validar, visto que pode ter efeitos negativos na aprendizagem e defende "que os cursos de formação inicial não se limitem apenas à função de validação, mas que ofereçam oportunidades de reflexão a respeito do lugar e da utilidade das provas no ensino da Matemática" (Correia, 2018, p. 198).

Souza (2009) e Almeida (2007) desenvolveram suas pesquisas no âmbito do Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AprovaME), sendo um dos objetivos o mapeamento de concepções de estudantes adolescentes de escolas particulares do estado de São Paulo sobre argumentação e prova. Os autores buscaram compreender as concepções e escolhas dos estudantes a respeito dessa temática apoiando-se em resultado de questionários com questões que contemplavam a álgebra e a geometria, e entrevistas.

Ambas as pesquisas apontaram uma predominância na utilização de argumentos empíricos, com destaque, conforme Almeida (2007), para o empirismo ingênuo. Também foi constatado uma considerável quantidade de respostas "não sei", revelando a dificuldade dos alunos com questões que envolvem deduções. Almeida (2007) argumenta também, que por meio das entrevistas foi possível observar que, embora os professores abordem aspectos sobre provas e demonstrações, as atividades que são passadas aos alunos não exigem sua utilização, o que torna infrutífera essa abordagem. Assim como Almeida (2007), Souza (2009) entrevistou alunos que demonstraram uma preferência por atividades que requeiram apenas cálculos numéricos.

2.1.2. Considerações sobre o livro didático na educação escolar

Tecer considerações a respeito do livro didático torna-se necessário, visto que de acordo com os apontamentos do Plano Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2016, “O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno” (Brasil, 2015, p. 18), e justamente este elemento é um dos núcleos da questão norteadora desta pesquisa. Diante disso, pode-se dizer que os livros didáticos e seus autores, também, exercem certa influência nos processos de ensino e de aprendizagem, nesse caso específico, da matemática, portando escolhas sobre o “saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade” (Ibidem). Esses quesitos estão relacionados aos conceitos de organizações matemática e didática, estudados na TAD, que veremos no decorrer da pesquisa.

Cabe destacar que a partir da implantação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 2017, houve algumas alterações nessas organizações. Segundo o que é descrito no (PNLD) 2020, Anos Finais do Ensino Fundamental, primeiro nesse nível a ser pautado na BNCC, “o livro didático deve zelar pela apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, visando à garantia do desenvolvimento das competências específicas e gerais pelo(a) estudante, como previsto na BNCC” (Brasil, 2019, p. 7). Nesse sentido, as organizações matemáticas e didáticas que serão analisadas estarão baseadas no documento normativo em vigor.

Percebe-se, nesse contexto, que o PNLD é uma importante ferramenta norteadora da utilização e escolhas referentes ao livro didático. Voltado à distribuição de obras didáticas da rede pública de ensino Brasileira, teve início em 1937, ainda com outra denominação, sendo o mais antigo programa com esse intuito, atendendo, atualmente, a educação básica Brasileira, tendo como única exceção a educação infantil (Brasil, 2021).

A partir do ano de 1998, por intermédio do PNLD, foi criado o Guia de Livros Didáticos, que sugere livros para todos os anos da educação básica, aprovando ou não as obras que são selecionadas (Almouloud, 2015). Por conta dessa funcionalidade, o guia do (PNLD, 2021) foi utilizado para escolher os livros didáticos analisados nesta pesquisa.

As ações voltadas à avaliação dos livros didáticos distribuídos nas escolas públicas do país impactam diretamente nas escolhas dos autores e editores, pois segundo Oliveira (2007), as primeiras ações nesse sentido desencadearam reformulações em muitos livros visando atender às novas exigências, incorporando orientações a respeito dos conteúdos, pressupostos teórico-metodológicos, dentre outros. Em outras palavras, programas como o PNLD, exigem aos autores de livros didáticos adequarem-se às orientações vigentes referentes ao ensino e à aprendizagem de suas respectivas áreas de conhecimento.

Para além das escolhas dos autores, o livro didático deve ser utilizado como um recurso auxiliar na prática do professor, diferentemente de visões que se perpetuaram ao longo dos anos e foram duramente criticadas por Bunzen Júnior (2005), que colocavam o livro didático como um determinante de falas e comportamento, cabendo ao professor apenas a decodificação e repetição. Bunzen Júnior (2005) assevera que esses discursos tratavam tão somente de um álibi para o fracasso escolar, transferindo para o que deveria ser um recurso, toda responsabilidade docente.

Silva (2004) também contradiz essas visões distorcidas da utilização do livro didático, ao ponderar que os professores investigados em sua pesquisa se apropriavam das propostas dos livros adotados de acordo com as situações de ensino e de aprendizagem que surgiam no ambiente de sala de aula. Ou seja, as situações, a turma, direcionavam o modo como o livro seria utilizado, não o contrário, corroborando sua função enquanto recurso, na qual "Os exercícios, as atividades, os exemplos demonstrados nos livros didáticos servem para facilitar a aprendizagem e favorecem a obtenção de técnicas, competências e habilidades na análise e resolução de problemas propostos em sala de aula e fora dela" (Lopes; Pires; Portela, 2020, p.116).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já evidenciavam o livro didático como um dos recursos de mais forte influência no ensino Brasileiro, contudo ponderam sobre a necessidade de o professor atentar-se a qualidade, coerência e restrições em relação aos objetivos educacionais propostos (BRASIL, 1998), o que pode ser realizado também pelos mecanismos de avaliação e a escola. Os PCN também reforçam que o livro didático não deve ser o único recurso utilizado pelo professor, pois pode limitar a visão do aluno a respeito do conhecimento, visto que "a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento" (Brasil, 1998, p. 96).

Nessa perspectiva, Bittar (2017, p. 365) afirma que "se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas". Além disso, acaba por aproximar o pesquisador do trabalho desenvolvido pelo professor por ser um dos principais recursos utilizados no preparo das aulas (Bittar, 2017). Ou seja, o livro didático também se torna uma relevante fonte de pesquisas na busca do entendimento de fatores que influenciam os processos de ensino e aprendizagem.

Percebe-se então, que o processo desde a confecção do livro didático até sua utilização em sala de aula, perpassa, dentre outros aspectos estruturais, pelas escolhas de seus autores, os meios de avaliação, as escolhas da instituição escolar, bem como dos critérios e escolhas do professor. Além disso, há uma relação desenvolvida também com o estudante ao se tornar um instrumento de estudo e consulta que o acompanha durante o ano letivo. Em outras palavras, o livro didático torna-se relevante e um potencial base de pesquisa ao abarcar múltiplas camadas e principais atores da educação escolar.

2.1.3. Abordagem da semelhança de triângulos na Educação Básica

Sendo a semelhança de triângulos o objeto ao qual está vinculado os objetivos desta pesquisa, também consideramos importante tecer algumas considerações a seu respeito e suas aplicações, sobretudo, por meio de pesquisas recentes de teses e dissertações. Diferente do tópico anterior, houve um extenso número de pesquisas com essa característica no banco de teses da capes, por isso foi preciso filtrar as buscas, limitando-as aos últimos cinco anos. Além disso, a partir de uma breve leitura do título e do resumo, foram desconsideradas as pesquisas que não tinham relação direta com o objeto em questão. Após todas as filtragens, analisamos 10 trabalhos, Quadro 2, que abordam a semelhança de triângulos.

Quadro 2: Dissertações da Capes sobre semelhança de triângulos.

Autor(ano)	Título	Tipo	Instituição
FACCHINI (2021)	Uma proposta de atividades de semelhança de triângulos para o ensino fundamental	Dissertação	UNESP
SILVA (2018)	Usos/significados de materiais manipuláveis (régua e transferidor) e do software geogebra como formas alternativas de ensinar semelhança de triângulos a estudantes do 9º ano de uma escola pública de Rio Branco	Dissertação	UFAC
HORBACH (2020)	Semelhança de triângulos: um estudo propositivo através do scratch	Dissertação	UFFS
CORRÊA (2018)	Resolução de problemas envolvendo função afim através do uso de semelhança de triângulos	Dissertação	FURG
BORGES (2020)	Narrativa adaptada para o ensino de semelhança de triângulos para aluno com deficiência visual em situação de inclusão	Dissertação	UTFPR
SANTOS (2018)	Semelhança de triângulos e suas aplicações	Dissertação	UFCA
KONZEN (2020)	Reflexões acerca do uso do khan academy para o ensino de semelhança de triângulos em aulas remotas	Dissertação	UFFS
CALIANI (2021)	Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides	Dissertação	UNESP
SANT’ANNA (2020)	Formação de professores e tecnologias: uma discussão sobre semelhança de triângulos	Dissertação	PUC - SP
AGOSTINI (2022)	Metodologias ativas: uma proposta para o ensino de semelhança de triângulos	Dissertação	UFSJ

Fonte: Os autores (2023).

As pesquisas supramencionadas apresentam desde metodologias diversificadas para o ensino e a aprendizagem de semelhança de triângulos, como o uso de software, materiais manipuláveis e plataformas para o ensino remoto, a aplicações deste conceito no desenvolvimento da aprendizagem de outras noções matemáticas.

A pesquisa de Silva (2018), apesar de focar na utilização do material manipulável e do software GeoGebra, destaca a importância destes artefatos na aprendizagem da semelhança de triângulos, visto que os alunos tiveram facilidade no entendimento deste conceito por meio da utilização desses recursos, sobretudo do GeoGebra. Em relação a este software, Silva (2018) esclarece que os alunos tiveram bastante facilidade em manipulá-lo, por ser um aplicativo de celular, que a régua e o transferidor, que conforme aponta o estudo não eram muito utilizado pelos alunos, que pareciam não ter familiaridade com essas ferramentas.

Outro software de introdução à programação que, conforme o estudo de Horbach (2020), mostrou potencialidade para a aprendizagem significativa de semelhança de triângulos, foi o Scratch. Essa ferramenta foi utilizada no desenvolvimento de uma sequência didática e além de possibilitar uma aprendizagem significativa deste conceito, permitiu a abordagem do pensamento computacional, destacando a importância de incorporar tecnologias ao ensino, que, quando incorporadas de forma planejada e com intencionalidade pedagógicas, agregam significativamente e dinamizam o ensino de conceitos matemáticos.

A tecnologia também foi empregada na pesquisa de Caliani (2021), por meio do aplicativo para celulares de realidade aumentada intitulado “Educação Estendida”. Em sua pesquisa, o autor também apresentou a definição de semelhança de triângulos e os teoremas decorrentes com suas respectivas demonstrações, assim como Facchini (2021), que desenvolveu uma sequência didática com o intuito de explorar esse conceito. Contudo, o aplicativo não foi utilizado com a finalidade de trabalhar essas demonstrações com os estudantes e a sequência didática explorou sobretudo a definição e aplicações da semelhança de triângulos.

Corroboramos com Agostini (2022) que destaca a utilização da semelhança de triângulos no cotidiano para justificar a relevância de ensinar/aprender esse conceito na Educação Básica. Suas contribuições vão desde entender alguns fenômenos como ampliação e redução de fotos e mapas, ao cálculo de distâncias inacessíveis (Agostini, 2022). Além disso, como já enfatizado, a semelhança de triângulos é constantemente aplicada em demonstrações de outros conceitos que são destacados na pesquisa de Santos (2018), a saber: relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas de um ângulo agudo, teorema de Ptolomeu, teorema das cordas, bem como na resolução de problemas envolvendo esses conceitos, além de poder ser empregada na resolução de problemas envolvendo a função a fim, outro conceito importante da matemática (Corrêa, 2018). Em sua pesquisa, é ressaltado uma das mais importantes aplicações da semelhança de triângulos, o cálculo da medida da altura de uma pirâmide, por Tales de Mileto (640 a.c. – 564 a.c.).

Sant’anna (2020) destaca diversas atividades que podem ser realizadas explorando o conceito de semelhança de triângulos e outros que se relacionam, como homotetia, que segundo Maciel (2004), ancorada em seus estudos, permitiu abordar esse conceito de forma mais ampla, abordando dentre outras coisas, as condições necessárias e suficientes para que duas figuras sejam semelhantes. Sant’anna (2020) buscou ressignificar esses conceitos por meio da construção de estratégias didáticas com o uso de tecnologias digitais no âmbito da formação de professores. Nessa mesma linha de busca por estratégias para melhorar o ensino e aprendizagem, desse conceito, Borges (2020) desenvolveu uma pesquisa voltada para a inclusão, ao se debruçar sobre contribuições da adaptação tátil de uma narrativa histórica para o ensino de semelhança de triângulos, para alunos com deficiência visual e estudantes sem nenhum tipo de deficiência.

Percebe-se então que muitas pesquisas estão voltadas à busca por estratégias didáticas para melhorar o ensino e a aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos por meio de diferentes recursos que englobam outros campos como por exemplo o tecnológico. De certa forma, a pesquisa que fazemos também se preocupa com essas questões, visto que o livro didático é uma das principais e mais acessíveis fontes de estudo e consulta por parte dos professores e alunos.

2.2. A teoria antropológica do didático como ferramenta para análise de livros didáticos

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual nos aprofundaremos nos tópicos subsequentes, foi desenvolvida por Chevallard (1992, 1999) e colaboradores, inicialmente, para estudar e entender o homem frente ao saber, mais especificamente o saber matemático. Contudo, ao longo dos anos, estudos também apontaram um potencial dessa teoria enquanto ferramenta de análise de materiais e livros didáticos, bem como de práticas docentes.

Conforme Almouloud (2015, p. 10), a TAD "estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber", podendo ser empregada na análise de atores centrais dessas relações, desde sua estrutura e funcionamento, às suas influências nos processos de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, autores como Almouloud (2015), Bittar (2017) e Chaachoua e Comiti (2010), desenvolveram pesquisas que corroboram, solidificam e exemplificam a TAD como uma poderosa ferramenta de análise de livros didáticos.

A partir desses estudos, esses autores traçaram um caminhar metodológico que pode ser adotado na análise de livros didáticos, que vai desde a escolha dos livros, à análise das organizações matemática e didática adotadas pelos autores desses materiais. A TAD contribui, nesse sentido, ao permitir modelar as atividades desenvolvidas por meio de uma estrutura praxeológica que se constitui nessas organizações. Além disso, a TAD busca estabelecer as relações existentes entre as instituições e as organizações matemáticas referentes a um determinado objeto matemático, o que pode ser feito, segundo Chaachoua e Comiti (2010), por meio da análise de programas, observações em uma aula e também do livro didático, o que potencializa a relevância dessa teoria enquanto ferramenta de análise, em um movimento de contribuições mútuas.

Nessa perspectiva, Chaachoua e Comiti (2010) apontam a necessidade de analisar a estrutura e representatividade do material escolhido e compartilham com Bittar (2017) a importante etapa da escolha do livro a ser analisado, que também optou por separar o material estudado em cursos e atividades propostas a fim de facilitar a análise e contemplar toda abordagem dada ao objeto analisado. Devido a isso, essas pesquisas serviram de base para fundamentar as escolhas metodológicas de análise dos livros didáticos que constituem o corpus deste estudo.

Em resumo, “as ferramentas do TAD permitem pensar o recurso à análise de programas e livros didáticos como componente essencial do estudo da didática escolar e, no caso de análises comparativas, repensá-lo de acordo com a "dialética da mídia e dos meios”” (Chaachoua; Comiti, 2010, p. 787). Ou seja, essa ótica apresenta os livros didáticos como um ponto de partida à compreensão dos processos que são norteados pela didática escolar, isto é, o entendimento de outros fenômenos que ocorrem nos processos de ensino e aprendizagem, podendo ir além de um estudo fechado do que é abordado nesses livros.

2.3. Questão de pesquisa e objetivos

A partir dos apontamentos destacados na problemática, percebe-se que, embora tenha havido avanços quanto à abordagem de provas e demonstrações nos mais diversos âmbitos da educação, ainda se faz necessário a realização de estudos que possibilitem amenizar as lacunas apontadas nas pesquisas de Martins (2012) e Ordem (2015) por exemplo. Um desses meios que se destacam como uma importante ferramenta para estudantes e professores, é o livro didático. Por estar em constante processo de mudança e atualização, por meio do PNLD e dada sua relevância no processo educacional, o livro didático revelou-se um campo fértil para pesquisa.

Para nosso estudo, interessamo-nos por um conceito igualmente relevante nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, trata-se da semelhança de triângulos, numa perspectiva voltada para provas e demonstrações, destacando, na problemática suas contribuições não só para a Matemática, mas também, para outras áreas como a Física.

Ademais, ao se fazer estudos cujo campo de pesquisa é o Livro Didático, Almouloud (2015), Chaachoua e Comiti (2010) e Bittar (2017) sustentam as potencialidades da TAD enquanto ferramenta metodológico-teórica para análise de livros e materiais didático.

Nessa perspectiva, podemos destacar que as reflexões apresentadas nas seções anteriores permitiram tanto apresentar justificativas a respeito da relevância da pesquisa, quanto tecer argumentos que estreitam e inter-relacionam os resultados das pesquisas analisadas para delimitar nossa questão norteadora da pesquisa**: Como autores de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio apresentam as organizações matemática e didática a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos?**

Visando alcançar resultados que se aproximem de respostas a essa indagação, nosso objetivo geral é: **Analisar as organizações matemáticas e didáticas de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos**. Já os específicos são: Investigar como a noção e as tarefas geométricas, com suas respectivas resoluções (técnicas), a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos são apresentadas em livros didáticos do Ensino Médio; Analisar, a partir da noção apresentada e dos tipos de tarefa, o que é prova e o que é demonstração por meio da distinção estabelecida por Balacheff (2000); Refletir sobre a abordagem adotada por autores de livros didáticos a respeito de provas e demonstrações.

Ainda cientes da importância do objeto matemático semelhança de triângulos, apresentamos em um tópico a parte uma abordagem histórica e epistemológica deste conceito matemático.

3. ABORDAGEM HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA DO OBJETO MATEMÁTICO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dada a escolha do objeto matemático para subsidiar nossas análises sobre provas e demonstrações com base no estudo das organizações matemáticas e didáticas de livros didáticos, torna-se necessário apresentar uma abordagem histórica e epistemológica relativa à semelhança de triângulo, visando elucidar a evolução desse conceito ao longo da história, analisando suas mudanças e influências dos e para os processos de ensino e aprendizagem. Essa análise serviu como base para analisarmos a abordagem desse conceito nos livros didáticos selecionados para pesquisa.

3.1. Contribuições iniciais

Antes de concentrarmos nossa análise propriamente na semelhança de triângulos, convém começarmos pelo conceito de semelhança de modo geral. Segundo estudos de Maciel (2004), há uma forte influência dos egípcios na evolução do conceito de semelhança, que pode ser percebido em um dos métodos científicos utilizados por eles para reduzir e ampliar desenhos, denominado métodos dos quadrados, no qual ao traçar uma figura em um quadriculado, esta era reproduzida em uma certa escala, tornando-se uma transposição da figura anterior. Esse método permitia ao desenhista não cometer erros de proporção. Nessa perspectiva, "entre o esboço e o desenho final ampliado, havia uma razão geométrica de semelhança que envolvia conceitos de homotetia, semelhança e proporcionalidade" (Maciel, 2004, p. 5).

Considerando também a importância dos gregos na construção e desenvolvimentos dos conceitos matemáticos, em particular conceitos geométricos como o da semelhança, discorremos sobre a história do grego Tales de Mileto (600 aec). Corroborando a influência dos egípcios nesse processo, Tales era considerado um de seus discípulos e por suas contribuições à geometria, saudado como primeiro matemático verdadeiro e o organizador da geometria dedutiva (Boyer, 1974). Apesar de pouco se saber sobre Tales, algumas demonstrações lhe são atribuídas como por exemplo:

> Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro.
> Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> O ângulo inscrito em um semicírculo é reto.
> Quando duas retas se interceptam, os ângulos opostos são iguais.
> Os lados de triângulos semelhantes são proporcionais.

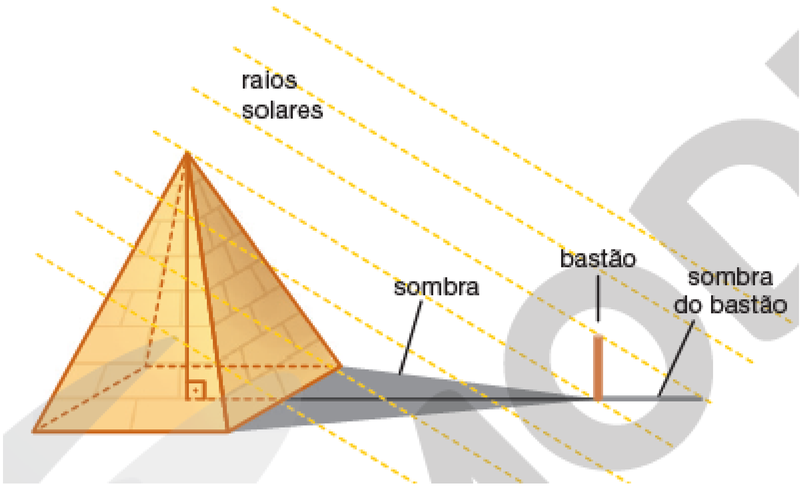
> Dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos e um dos lados iguais (Mol, 2013, p. 32).

Ou seja, já era atribuído a Tales o que viria a compor a definição de semelhança de triângulos. Além disso, esse conceito pode ser percebido também no que ficou conhecido como um dos métodos utilizado por Tales para medir a altura de uma pirâmide, que em sua homenagem recebeu o nome de Teorema de Tales. Esse teorema é destacado por Serres (1996, p. 157):

> Diógenes Laercio: "Jerônimo diz que Thales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura." Plutarco: "... gostou da tua maneira de medir a pirâmide... limitando-te a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira e a segunda sombra era a mesma que entre a pirâmide e o bastão. Mas também te acusaram de não gostares de reis..." (Tradução nossa)

A noção de proporção utilizada por Tales para medir a altura da pirâmide caracteriza a presença do conceito de semelhança de triângulos, destacada na Figura 1, que mostra uma situação ideal em que Tales fez essa medição.

Figura 1: Representação geométrica ideal do Teorema de Tales



Fonte: Teixeira e colaboradores (2020, p. 11).

As primeiras sistematizações do conceito de semelhança aparecem no livro "Os Elementos", uma importante obra matemática composta por treze livros, na qual diversos saberes matemáticos foram compilados por um grande matemático de sua época, Euclides. As primeiras menções a esse conceito aparecem no Livro VI que "[...] aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulo" (Eves, 2011, p. 173). Logo no início do livro é apresentada a seguinte definição: "Figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais, um a um, quantos os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção" (Euclides, 2009, p. 231), que diz respeito a figuras compostas especificamente por linhas retas, assim como todo o livro VI ao se referir a semelhança, o que se enquadra aos triângulos. Nesse sentido, durante o decorrer do livro são apresentados teoremas que se referem aos casos de semelhança de triângulo.

Os casos de semelhança são apresentados nos Teoremas 5, 6 e 7 do respectivo livro, cujos enunciados e respectivas demonstrações utilizadas por Euclides estão no Quadro 3.

Quadro 3: Demonstração dos casos de semelhança segundo Euclides.

Enunciado	Demonstração
Caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão equiângulos, e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos.	Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os lados em proporção, por um lado, como o AB para o BC, assim o DE para o EF, e, por outro lado, como o BC para o CA, assim o EF para o FD, e ainda como o BA para o AC, assim o ED para o DF; digo que o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF e terão os ângulos iguais, aqueles sob os quais se estendem os lados homólogos, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA ao sob EFD, e ainda o sob BAC, ao sob EDF. Fiquem, pois, construídos, sobre a reta EF e nos pontos E, F sobre ela, por um lado, o sob FEG igual ao ângulo sob ABC, e, por outro lado, o sob EFG igual ao sob ACB; portanto, o junto ao A restante é igual ao junto ao G restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o [triângulo] EGF. Portanto, os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos ABC, EGF estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos; portanto, como o AB para o BC, [assim] o GE para o EF. Mas, como o B para o BC, assim, foi suposto, o DE para o EF; portanto, como o DE para o EF, assim o GE para o EF. Portanto, cada um dos DE, GE tem para o EF a mesma razão; portanto, o DE é igual ao GE. Pelas mesmas coisas, então, também o DF é igual ao GF. Como, de fato, o DE é igual ao EG, e o EF é comum, os dois DE, EF, então, são iguais aos dois GE, EF; e a base DF [é] igual à base FG; portanto, o ângulo sob DEF é igual ao ângulo sob GEF, e o triângulo DEF é igual ao triângulo GEF, e os ângulos restantes são iguais aos ângulos restantes, aqueles sob os quais se estendem os lados iguais. Portanto, por um lado, o ângulo sob DFE é igual ao sob GFE, e, por outro lado, o sob EDF, ao sob EGF. E como o sob FED é igual ao sob GEF, mas o sob GEF, ao sob ABC, portanto, também o ângulo sob ABC é igual ao sob DEF. Pelas mesmas coisas, então, também o sob ACB é igual ao sob DFE, e, ainda, o junto ao A, ao junto ao D; portanto, o triângulo BC é equiângulo com o triângulo DEF. Portanto, caso dois triângulos tenham os lados em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos; o que era preciso provar.
Caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados [illegible]	Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo um ângulo, o sob BAC, igual a um ângulo, o sob EDF, e os lados, à volta dos ângulos iguais, em proporção, como o BA para o AC, assim o ED para o DF; digo que o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF, e terão o ângulo sob ABC igual ao sob DEF, e o sob ACB, ao sob DFE. Fiquem, pois, construídos, sobre a reta DF e nos pontos D, F sobre ela, por um lado, o sob FDG igual a qualquer um dos sob BAC, EDF, e, por outro lado, o sob DFG igual ao sob ACB; portanto, o ângulo junto ao B restante é igual ao junto ao G restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DGF. Portanto, proporcionalmente, como o BA está para o AC, assim o GD para o DF. Mas foi suposto também como o BA para o AC, assim o ED para o DF; portanto, também como o ED para o DF, assim o GD para o DF. Portanto, o ED é igual ao DG; e o DF é comum; então, os dois ED, DF são iguais aos dois GD, DF; e o ângulo sob EDF [é] igual ao ângulo sob GDF; portanto, a base EF é igual à base GF, e o triângulo DEF é igual ao triângulo GDF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais. Portanto, por um lado, o sob DFG é igual ao sob DFE, e, por outro lado, o sob DGF, ao sob DEF. Mas o sob DFG é igual ao sob ACB; portanto, também o sob ACB é igual ao sob DFE. Mas foi também suposto o sob BAC igual ao sob EDF; portanto, também o junto ao B restante é igual ao junto ao E restante; portanto, o triângulo ABC é equiângulo como o triângulo DEF. Portanto, caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados à volta dos ângulos iguais em proporção, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos sob os quais se estendem os lados homólogos; o que era preciso provar.

Caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados à volta dos outros ângulos em proporção, e cada um dos restantes, simultaneamente, ou menor ou não menor do que um reto, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos, à volta dos quais estão os lados em proporção.	Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo um ângulo igual a um ângulo, o sob BAC, ao sob EDF, e os lados à volta dos outros ângulos, os sob ABC, DEF em proporção, como o AB para o BC, assim o DE para o EF, e, primeiramente, cada um dos restantes, os juntos aos C, F, simultaneamente, menor do que um reto; digo que o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF, e o ângulo sob ABC será igual ao sob DEF, e o restante, a saber, o junto ao C, é igual ao restante, o junto ao F. Pois, se o sob ABC é desigual ao sob DEF, um deles é maior. Seja maior sob ABC. E fique construído, sobre a reta AB e no ponto B sobre ela, o sob ABG igual ao ângulo sob DEF. E como, por um lado, o ângulo A é igual ao D, e, por outro lado, o sob ABG, ao sob DEF, portanto, o sob AGB restante é igual ao sob DFE restante. Portanto, o triângulo ABG é equiângulo com o triângulo DEF. Portanto, como o AB está para o BG, assim o DE para o EF. Mas, como o DE para o EF, [assim], foi suposto, o AB para o BC; portanto, o AB tem para cada um dos BC, BG a mesma razão; portanto, o BC é igual ao BG. Desse modo, também o ângulo junto ao C é igual ao ângulo sob BGC. Mas o junto ao C foi suposto menor do que um reto; portanto, também o sob BGC é menor do que um reto; desse modo, o ângulo sob AGB, adjacente a ele, é maior do que um reto. E foi provado que é igual ao junto ao F; portanto, também o junto ao F é maior do que um reto. Mas foi suposto menor do que um reto; o que é absurdo. Portanto, o ângulo sob ABC não é desigual ao sob DEF; portanto, é igual. Mas também o junto ao A é igual ao junto ao D; portanto, o junto ao C restante é igual ao junto ao F restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF. Mas, então, de novo, fique suposto cada um dos junto aos C, F não menor do que um reto; digo, de novo, que também assim o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF. Tendo sido, pois, construídas as mesmas coisas, do mesmo modo provaremos que o BC é igual ao BG; desse modo, também o ângulo junto ao C é igual ao sob BGC. Mas o junto ao C não é menor do que um reto; portanto, nem o sob BGC é menor do que um reto. Então, os dois ângulos do triângulo BGC não são menores do que dois retos; o que é impossível. Portanto, de novo, o ângulo sob ABC não é desigual do sob DEF; portanto, é igual. Mas também o junto ao A é igual ao junto ao D; portanto, o junto ao C restante é igual ao junto ao F restante. Portanto, o triângulo ABC é equiângulo com o triângulo DEF. Portanto, caso dois triângulos tenham um ângulo igual a um ângulo, e os lados à volta dos outros ângulos em proporção, e cada um dos restantes, simultaneamente, é menor ou não menor do que um reto, os triângulos serão equiângulos e terão iguais os ângulos, à volta dos quais estão os lados em proporção; o que era preciso provar.

Fonte: Euclides (2009).

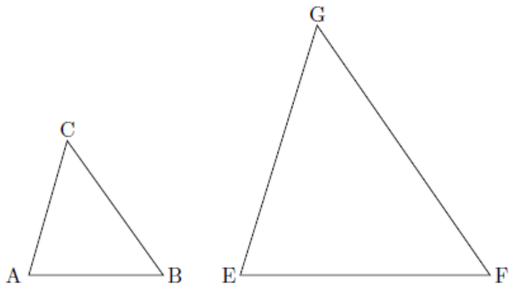
Contudo, em comparação a outras abordagens mais atuais, houve modificações no que diz respeito à definição do conceito de semelhança de triângulos e ao enunciado e demonstração dos casos de semelhança. Destacamos algumas dessas modificações no tópico subsequente ao apresentar a definição contida no livro de Geometria Euclidiana Plana do autor João Lucas Barbosa, a qual adotamos nesta pesquisa para exemplificar definições utilizadas atualmente em cursos de nível superior de formação de professores de Matemática, o que faz desta, uma obra muito empregada para o ensino de geometria nesses cursos.

3.2. Definição, propriedades e teoremas em perspectivas recentes

Nesse subtópico, apresentamos uma definição mais recente de semelhança de triângulos, bem como propriedades e teoremas que derivam dessa definição, a fim de situar o leitor quanto ao objeto matemático em questão, visando uma melhor compreensão da análise dos dados da pesquisa.

Definição: Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Na Figura 2, temos a representação geométrica de dois triângulos semelhantes.

Figura 2: Triângulos semelhantes.



Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 75).

Com isto queremos dizer que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e A → E, B → F, C → G é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as igualdades apresentadas na Figura 3:

Figura 3: Igualdades decorrentes da semelhança de dois triângulos.

$$\hat{A} = \hat{E},\ \hat{B} = \hat{F},\ \hat{C} = \hat{G} \text{ e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 75).

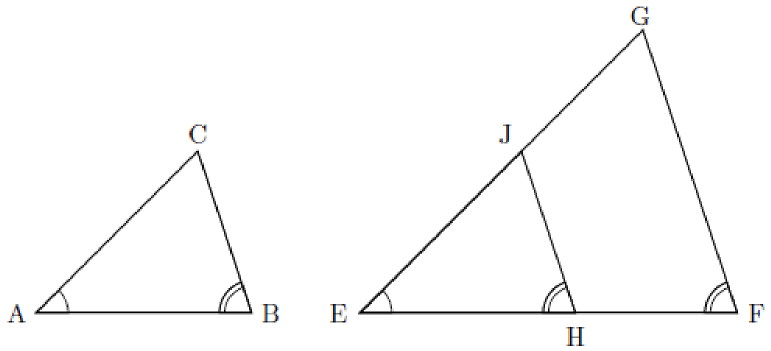
Nesse momento, João Lucas Barbosa (1995) enfatiza que o quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos. Quando essa razão de proporcionalidade é igual a um, os triângulos semelhantes também são congruentes, da mesma forma que triângulos congruentes são triângulos semelhantes de razão de proporcionalidade um.

Abaixo são apresentados os teoremas que se referem aos casos de semelhança de triângulos e suas respectivas demonstrações também baseadas em João Lucas Barbosa (1995). demonstrações dos casos de semelhança não seguem a ordem das demonstrações dos casos de congruência apresentados por João Lucas Barbosa (1995), pois o 2º caso é utilizado como argumento para demonstrar o 1º caso.

Teorema (2º caso - AA). Dado dois triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$ então os triângulos são semelhantes.

Demonstração: Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então a igualdade dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ acarreta na igualdade dos ângulos $\hat{C}\ e\ \hat{G}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isto, tomemos na semirreta S_{EF}[1] o ponto H de modo que EH = AB. Pelo ponto H tracemos uma reta paralela a FG, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Suporte à demonstração do 2º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 76).

Esta corta a semirreta S_{EG} num ponto J, formando um triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC (já que $\hat{A} = \hat{E}$, AB = EH e $\hat{B} = \hat{F} = \mathrm{E}\hat{H}\mathrm{J}$. Esta última igualdade deve-se ao paralelismo de JH e GF). Segue-se agora do teorema (6.16[2]) que ($\overline{EH}$[3]$/\overline{EF}$) = ($\overline{EJ}/\overline{EG}$). Como EH = AB e EJ = AC então, da igualdade acima obtém-se:

$$(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$$

De maneira análoga demonstra-se que (($\overline{AC}/\overline{EG}$) = ($\overline{CB}/\overline{GF}$). Fica demonstrado o teorema.

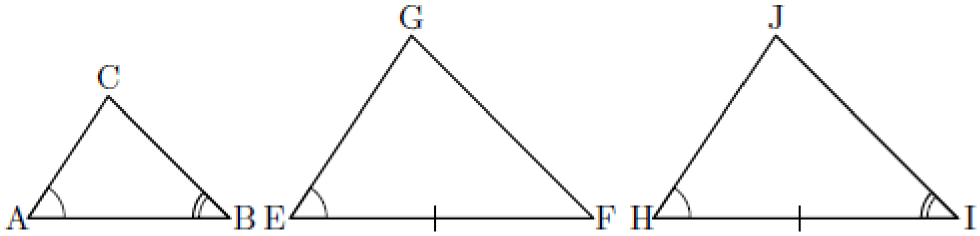
Teorema (1º caso - LAL). Se em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $(\overline{AB}/\overline{EF}) = (\overline{AC}/\overline{EG})$ então os triângulos são semelhantes.

---

[1] Essa notação é utilizada por João Lucas Barbosa (1995) para denotar o objeto matemático semirreta de origem em E e que contém o ponto F.
[2] Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.
[3] Essa notação é utilizada por João Lucas Barbosa (1995) para denotar a medida do objeto matemático segmento de reta.

Demonstração: Construamos um triângulo HIJ que tenha HI = EF, $\widehat{H}$ = $\hat{A}$ e $\hat{I}$ = $\hat{B}$, conforme Figura 5.

Figura 5: Suporte à demonstração do 1º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 77).

De acordo com o teorema anterior, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Logo ($\overline{AB}/\overline{HI}$) = ($\overline{AC}/\overline{HJ}$). Como HI = EF, a hipótese ($\overline{AB}/\overline{EF}$) = ($\overline{AC}/\overline{EG}$) a igualdade acima implica que: HJ = EG. Como, por construção HI = EF, $\widehat{H}$ = $\hat{A}$ e $\hat{I}$ = $\hat{B}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos[4], que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Como já sabíamos que ABC e HIJ eram semelhantes, podemos concluir facilmente que ABC e EFG são semelhantes.

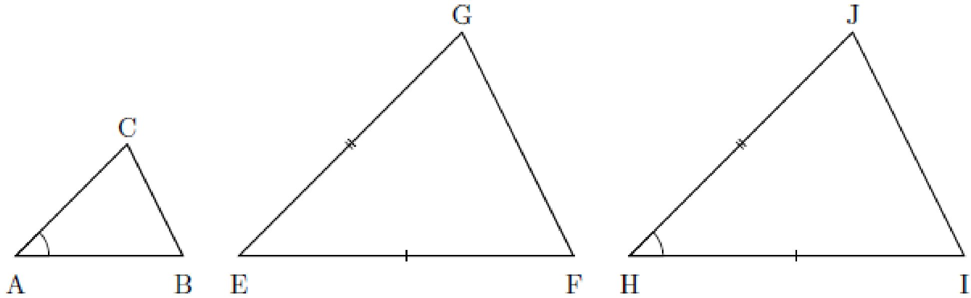
Teorema (3º caso - LLL). Se, em dois triângulos ABC e EFG, têm-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

Então os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração. Construamos um triângulo HIJ que tenha, $\widehat{H}$ = $\hat{A}$, HI = EF e HJ = EG. Segue-se então da hipótese que ($\overline{AB}/\overline{HI}$) = ($\overline{AC}/\overline{HJ}$), conforme Figura 6. Portanto, de acordo com o teorema imediatamente anterior, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.

Figura 6: Suporte à demonstração do 3º caso de semelhança de triângulos.



Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 78).

[4] Axioma IV. Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB = EF, AC = EG e $\hat{A} = \hat{E}$ então ABC = EFG.

Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre $(\overline{AB}/\overline{HI}) = (\overline{BC}/\overline{IJ})$. Segue-se (daí e da hipótese do teorema) que IJ = FG. Como já tínhamos que HI = EF e HJ = EG (por construção) então pelo terceiro caso de congruência de triângulos[5] HIJ e EFG são congruentes. Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e EFG são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema.

Em João Lucas Barbosa (1995) não é abordado o Teorema fundamental da semelhança, então para enuncia-lo tomamos como aporte uma outra obra, denominada Fundamentos de Matemática Elementar de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

Enunciado: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

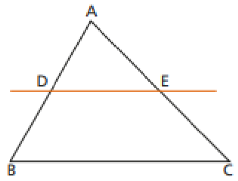
Demonstração: apresentamos sua demonstração na Figura 7

[5] Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Figura 7: Demonstração do Teorema Fundamental

Demonstração:

Para provarmos a semelhança entre $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:



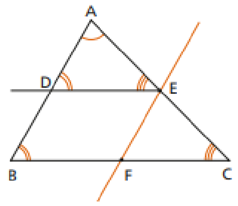
1º) Ângulos congruentes

$\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes)
então, temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)

2º) Lados proporcionais

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



Por E construímos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, com F em $\overline{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Paralelogramo BDEF} \Rightarrow \overline{DE} \equiv \overline{BF} \\ \text{Teorema de Tales} \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Logo, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (2)

3º) Conclusão

(1) e (2) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 194-195).

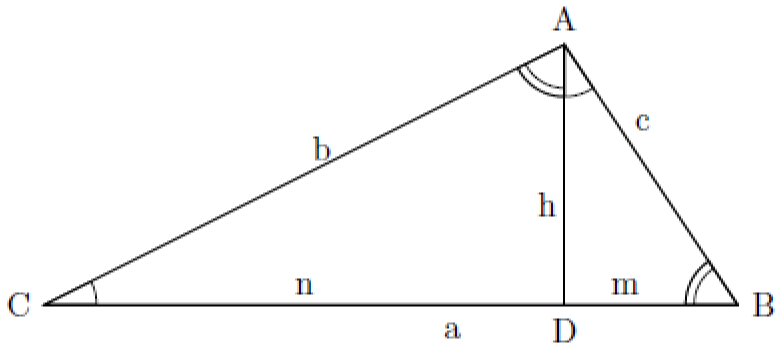
3.2.1. Aplicações da semelhança de triângulos

Algumas demonstrações de teoremas e relações são decorrentes da semelhança de triângulos como é o caso das relações métricas aplicadas a um triângulo retângulo e o conhecido Teorema de Pitágoras. Apresentamos algumas dessas decorrências por meio da demonstração de uma dessas relações métricas e do Teorema mencionado.

3.2.2. Relações métricas no triângulo retângulo

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC, como mostra a Figura 8. No que se segue vamos fazer uso da seguinte notação a = $\overline{BC}$, b = $\overline{AC}$, c = $\overline{AB}$, h = $\overline{AD}$, m = $\overline{BD}$ e n = $\overline{DC}$.

Figura 8: Triângulo retângulo ABC.



Fonte: João Lucas Barbosa (1995, p. 79).

Como AD é perpendicular à BC, então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90$ e $\hat{B}$ + B $\hat{A}$ D = 90 então B $\hat{A}$ D = $\hat{C}$. Como também D$\hat{A}$ C + $\hat{C}$ = 90 então D$\hat{A}$ C = $\hat{B}$. Os triângulos ADB e CDA são, portanto, ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças podemos deduzir várias relações entre as medidas a, b, c, h, m e n acima mencionadas. Por exemplo, a semelhança entre ADB e CDA é a que leva A em C. B em A e D em D. Como consequência desta semelhança tem-se

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Da última igualdade deduz-se que $h^2 = mn$. Dessa relação, tem-se a demonstração da seguinte proposição:

Proposição. Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

3.2.3. Teorema de Pitágoras

Enunciado. Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Em termos da notação o teorema de Pitágoras afirma que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração: A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência da semelhança dos triângulos ADB, CDA e ABC. Da semelhança de ADB e ABC (A → C; B → B e D → A) conclui-se que:

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC conclui-se que:

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

Logo am = c^2 e an = b^2. Portanto a(m+n) = c^2+b^2. Como m+n = a, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

3.3. Breve discussão

Percebe-se que as demonstrações utilizadas por Euclides têm uma redação mais discursiva e explicativa. Além disso, na linguagem e denominações adotadas aparecem termos como triângulos equiângulos e lados homólogos. Ressaltamos também, os teoremas supramencionados não citam especificamente que os triângulos serão semelhantes, pois Euclides emprega a definição para figuras retilíneas, isto é, não há uma definição específica para triângulos semelhantes. Já as definições, teoremas e demonstrações numa perspectiva mais recente são mais sucintas e sistemáticas e já são empregados conceitos e teoremas da congruência de triângulos, como é o caso da definição empregada por João Lucas Barbosa (1995).

Em alguns casos, é adotada uma definição para semelhança de polígonos em geral, destacando o triângulo como um caso especial, como se observa em determinados livros da Educação Básica, inclusive nos analisados nessa pesquisa; em outros, como em João Lucas Barbosa (1995), emprega-se uma definição mais especifica para semelhança de triângulos. Dolce e Pompeo (2013) também adotaram uma definição específica, na qual enfatizam que "Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais" (Dolce; Pompeo, 2013, p. 192). Contudo a linguagem utilizada também se aproxima em alguns termos, como lados homólogos, à adotada por Euclides (2009). Já em comparação com João Lucas Barbosa (1995), tem-se distinções como ângulos ordenadamente congruentes ao invés de ao invés de primeiro estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices e, em seguida, citar a congruência dos ângulos correspondentes, e o já citado lados homólogos, ao invés de lados correspondentes.

Algumas mudanças, no entanto, que não provocam alterações no significado, mas que são empregadas para se adequar ao nível de ensino, visto que a coleção de livros de Dolce e Pompeo (2013) denominada "Fundamentos da Matemática Elementar", apesar de ser utilizada no Ensino Superior, é mais voltada para a Educação Escolar. Vale salientar também o emprego da dupla condicional, evidenciando, ao contrário de João Lucas Barbosa (1995) e o próprio

Euclides (2009), que a recíproca da definição também é verdadeira, ou seja, se dois triângulos possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais, então são semelhantes, o que é importante, visto que é geralmente utilizada para determinar se dois triângulos são de fato semelhantes.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse tópico apresentamos os construtos teóricos centrais que norteiam essa pesquisa, cujos principais autores são Nicolas Balacheff com seus estudos sobre provas e demonstrações e Yves Chevallard, precursor da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

4.1. Prova e demonstração sob a ótica de Nicolas Balacheff

Nos primórdios da humanidade, um senso geométrico, inerente ao homem, e determinadas necessidades geométricas fundamentais para a vida dos seres humanos preconizavam o surgimento da geometria, que era utilizada como forma de se localizar no mundo e localizar as coisas à sua volta (Domingues, 1995). Segundo Domingues (1995), apenas tempos depois, com um importante papel dos gregos, sentiu-se a necessidade de formalizar a geometria como uma ciência dedutiva, passando a defini-la logicamente, surgindo então as primeiras demonstrações nessa área. Ocorreu, então, uma transformação do conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios em uma ciência matemática dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas, sendo uns dos mais importantes capítulos da história não só matemática, mas cultural (Bicudo, 2009).

Para além do processo prático ou intelectual, uma demonstração pode ser entendida como um mecanismo de validação dentro da Matemática, caracterizando-a e diferenciando-a das demais ciências experimentais (Almouloud; Regnier; Fusco, 2009). Também é recorrente compreendê-la como uma prova ou uma explicação, no entanto para fins de ensino, Balacheff (1982, 2000) considera necessário diferenciar esses termos, tornando possível inserir a demonstração na Educação Básica a partir de um processo gradual, em que são estabelecidos níveis de prova no qual “[...] devem-se considerar regras e critérios específicos – ou seja, o grau de exigência de uma prova deve corresponder à situação ou nível em que o aluno se encontra” (BALACHEFF, 2004 a*pud* FERREIRA, 2016, p. 46).

Essa diferenciação torna-se relevante pois “A distinção entre os significados de demonstração e prova implica aceitar, a depender do contexto, outras produções dos alunos para estabelecer a validade de uma afirmação.” (Ferreira, 2016, p. 43). Esse exercício de aceitação pode contribuir para o ensino e aprendizagem das demonstrações principalmente na Educação Básica em que os alunos devem começar a conjecturar e sistematizar suas primeiras argumentações.

Balacheff (2000) estabelece as seguintes definições, características e distinções entre explicação, prova e prova matemática ou simplesmente demonstração:

> Explicação: Seguindo os linguistas, colocamos a explicação no nível do sujeito falante. Para ele, estabelece e garante a validade de uma proposição, é enraizada em seu conhecimento e naquilo que constitui sua racionalidade, isto é, suas próprias regras de decisão de verdade. Na hora que explicação é expressa em um discurso, ele tenta torná-lo inteligível para os telespectadores a verdade da proposição já adquirida pelo orador.
> Prova: Quando uma explicação é reconhecida e aceita, é conveniente projetá-la tem um termo que permite marcar sua distinção do sujeito locutor. Em matemática fica claro que o termo "demonstração" não é o mais conveniente porque seu significado é muito específico. Selecionamos o termo prova.
> Prova matemática: O tipo dominante de prova em matemática tem uma forma particular. É uma série de declarações que são organizadas seguindo um conjunto bem definido de regras De agora em diante, chamaremos essas provas de demonstração (Balacheff, 2000, p. 12 – 13).

A explicação situa o interlocutor sobre a veracidade de um enunciado matemático, em uma situação em que o sujeito locutor, já convencido de sua verdade, tenta convencer o sujeito ouvinte. Essa explicação pode ou não ser aceita por uma comunidade matemática. Quando aceita, torna-se uma prova, que no sentido empregado por Balacheff (2000), permite englobar outros tipos de provas que não podem ter status de prova matemática. As provas matemáticas, conceituadas como demonstração, assumem um maior rigor, estando norteadas por regras específicas. São baseadas "[...] em um corpo de conhecimento fortemente institucionalizado, sobre um conjunto de definições, teoremas e regras de dedução, cuja validade é aceita socialmente" (Balacheff, 2000, p. 23). Além disso, são as únicas provas aceitas pelos matemáticos (Almouloud, 2007).

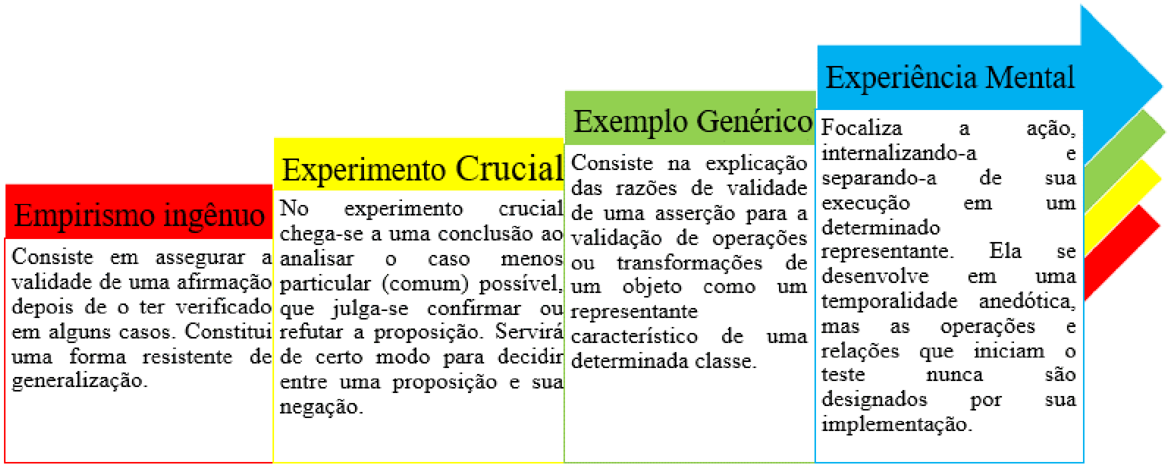
Em conformidade com Balacheff (2000) e para fins didáticos, também adotaremos essa distinção nas análises dos dados da pesquisa. Nessa perspectiva, uma demonstração pode ser definida como "um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas e verdades já demonstradas, raciocínios através dos quais se estabelece a veracidade de uma dada proposição" (Fetissov, 1995, p.22). Os axiomas são verdades aceitas sem necessidade de demonstração, as demais são denominadas teoremas (Bicudo, 2009; Euclides, 2009). Já o termo raciocínio, aqui será entendido e utilizado "[...] para designar a atividade intelectual não totalmente explícita que trata da manipulação de informações dadas ou adquiridas para produzir novas informações" (Balacheff, 2000, p. 13).

No âmbito das distinções estabelecidas por Balacheff (1988, 2000), as provas são situadas a partir de seus aspectos cognitivos, que por sua vez dizem respeito ao comportamento do estudante diante de uma situação em que há necessidade de comprovar a veracidade de um enunciado matemático. Nessa perspectiva, o autor destaca dois tipos de provas, as pragmáticas e as intelectuais. As provas pragmáticas estão associadas ao ato de mostrar, dependem de ações. Nesse nível, os alunos ainda estão ligados a exemplos práticos. Por exemplo, o estudante que se convence, inicialmente, que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 ao observar o padrão a partir da análise da soma de um número x de ímpares. Em outras palavras, nesse tipo de prova, apesar de se entender que "Em um nível mais alto, as razões podem ser expressas, [...] ainda estão fortemente relacionadas às ações realizadas em algum exemplo" (Balacheff, 1988; Almouloud; Moretti, 2022, p. 705).

Diante disso, para que o estudante alcance o nível de prova intelectual é necessária uma ruptura total com a necessidade de exemplos, o que não quer dizer que não possam ser utilizados, mas quando feito, devem ser apenas um suporte ao interlocutor. As provas intelectuais são, portanto, "aquelas que utilizam verbalizações das propriedades dos objetos e de suas relações" (Ibidem). Uma construção baseada em conceitos matemáticos para além do que se vê. Contudo, segundo Balacheff (1988) e Almouloud e Moretti (2022, p. 705), "Este passo em direção à prova intelectual não consiste em uma mera tradução da ação em palavras; requer uma construção genuína de meios de linguagem como uma ferramenta operativa". A linguagem torna-se um meio de análise lógica, indo além da sua função habitual de comunicação (Balacheff, 2000).

Balacheff (1988, 2000) distingue quatro tipos principais dentre as provas pragmáticas e intelectuais: Empirismo Ingênuo, Experiência Crucial, Exemplo Genérico e Experiência Mental, definidos na Figura 9. Os dois primeiros tipos dizem respeito às provas pragmáticas e não possibilitam comprovar, nos critérios do rigor matemático, a veracidade de uma afirmação, enquanto os dois restantes se relacionam com as provas intelectuais. A ordem em que são apresentados também tem seu significado, já que Balacheff (2000) propõe uma hierarquia hipotética, na qual suas posições são determinadas "[...] por seu nível de exigência de generalidade e por seu nível de conceituação do conhecimento requerido" (Balacheff, 2000, p. 26).

Figura 9: Tipos de provas.



Fonte: Adaptação de Balacheff (2000).

Conforme Balacheff (1988) e Almouloud e Moretti (2022), o empirismo ingênuo sugere ainda dois fenômenos distintos: a evidência factual e a crença cognitiva. O primeiro permite ao estudante considerar a mera observação como prova suficiente, diante da necessidade de oferecer uma rápida solução ao observador para não se submeter a um processo de prova por conta própria. Já no segundo, tem-se uma crença real na validade da solução que se está propondo (Balacheff, 1988; Almouloud; Moretti, 2022)

O experimento crucial surge quando o estudante constata que a mera observação de alguns casos é insuficiente para validar um enunciado matemático, mas encontra limites cognitivos e de linguagem que não lhe possibilitam avançar. O exemplo genérico sugere o uso de um caso específico e particular e a experiência mental “[...] pode ser vista na ligação de provas a partir de um exemplo genérico, ao longo de um processo de descontextualização que requer a eliminação do particular” (Balacheff, 1988; Almouloud; Moretti, 2022, p. 713).

Por exemplo, pensemos em um enunciado que permita sugerir tentativas de validações que representem cada tipo de provas, a saber: a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

No caso do empirismo ingênuo, os estudantes mediriam os ângulos internos de um número finito de triângulos, constatando que sua soma é igual a 180º. No experimento crucial, o discente recorreria a um caso não tão particular, como o triângulo escaleno, constatando que a soma de seus ângulos internos mede 180º e concluiria que sendo válida para esse caso, a afirmação é válida para todos os outros triângulos. No exemplo genérico, a escolha seria por um representante característico da classe dos triângulos, o caso do triângulo equilátero, cujos lados e ângulos são congruentes. A experiência mental sugere que os alunos possam tecer uma argumentação estabelecendo relações, chegando a uma conclusão, mas a partir de um exemplo genérico. Em outras palavras, o estudante pode validar suas conclusões, explicitando que a soma do ângulo interno e do externo a ele é igual a 180º e que a medida de um ângulo externo a um outro ângulo é igual à soma dos ângulos não adjacentes a esse ângulo, a partir de dados de um triângulo específico. Nesse caso, há uma tentativa de se desvencilhar do caso particular e generalizá-lo, embora isso seja feito com uso de dados de um determinado triângulo.

No que tange a importância das demonstrações para a Matemática, Almouloud, Silva e Fusco (2012) argumentam que seu valor vai além de comprovar um resultado, perpassa pela possibilidade de apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que, além de uma aplicabilidade mais abrangente, aponta novos caminhos e são indispensáveis para a expansão do conhecimento matemático, visto que o simples ato de pensar e redigir uma demonstração contribui com a matemática e seu desenvolvimento. Segundo os autores, "As demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas, e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições." (Almouloud; Silva; Fusco, 2012, p. 27).

Em relação ao ensino e a aprendizagem de provas e demonstrações, Ferreira (2016) aponta que é essa importância inerente a elas que faz com que pesquisadores como Nicolas Balacheff, defendam sua inserção desde os anos iniciais. A capacidade de argumentação pode ser trabalhada desde cedo com os alunos, seja para dar veracidade a uma proposição ou explicar a verdade sobre ela.

4.2. Teoria antropológica do didático: o modelo praxeológico

Desenvolvida por Yves Chevallard nos anos 90, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) tem como objeto de estudo a didática da matemática, e pertence ao campo da antropologia, que estuda o homem e suas ações (Ferreira, 2016). Uma extensão da Teoria da Transposição Didática que se encarrega de estudar especificamente a ação do homem diante do saber matemático.

Entre as inúmeras contribuições da TAD, destaca-se às voltadas para o ensino e a aprendizagem ao se tornar um instrumento de análise, sobretudo, de práticas docentes (Almouloud, 2022), e mais recentemente de livros e materiais didáticos (Almouloud, 2015). Nesse sentido, Almouloud (2022) afirma que:

> Esta teoria é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois, além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no

> campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. A teoria antropológica do didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber) (Almouloud, 2022, p.153).

Para estabelecer as relações de ensino nessa teoria, Chevallard (1998) apresenta os conceitos de objetos “O”, pessoas “X” e instituições “I”. Os objetos são descritos como todas as coisas, incluindo as pessoas e as instituições e “...existe a partir do momento que uma pessoa X ou instituição I o reconhece como *existente* (para ela)” (Chevallard, 1992, p. 86). As instituições, segundo Chevallard (1992), podem ser qualquer coisa dado o significado comum da palavra, contudo, concordamos com Santos; Menezes (2015) e Bittar (2017), que baseados nos estudos de Chevallard (1992, 1998, 1999), enfatizam que as instituições podem ser concebidas como um dispositivo social que fornece formas próprias de fazer e de pensar aos seus sujeitos. Já a pessoa é formada por estágios, a saber: indivíduo, que não se sujeitou as relações; sujeito, que se relaciona com uma instituição; e pessoa, que possui várias relações com instituições diferentes (Santos; Menezes, 2015).

No campo da Matemática, segundo Chevallard (1998), os objetos são produzidos em instituições sociais que podem ser escolas, universidades, livros didáticos, dentre outros. Nesse sentido, enfatizamos que o livro didático pode ser considerado uma instituição de referência para alunos e professores a depender do objetivo com o qual é utilizado, a saber: quando é utilizado como principal ferramenta de consulta para o ensino de determinado conteúdo, isto é, quando o professor e o aluno tomam como base os conceitos e tarefas propostas no livro didático (Bittar, 2017).

Nessa perspectiva, o aluno e o professor são sujeitos das instituições; e a relação institucional estabelecida entre uma instituição I, ou seja, professor e aluno, e um objeto O, perpassa pelas posições ocupadas por cada um e pelas tarefas que precisam cumprir por intermédio de determinadas técnicas (Almouloud, 2022). O tipo de instituição onde se encontra o saber que está relacionado ao objeto de estudo é definido como habitat de um objeto matemático e determina a função desse saber, que é chamada nicho (Chevallard, 1999).

As tarefas e técnicas fazem parte da praxeologia ou organização praxeológica, termo cunhado por Chevallard (1998) e que foi utilizado para denominar um modelo único, o qual os princípios bases da TAD sustentam que pode definir toda atividade humana. Isso porque, conforme Chevallard (1998, p. 92), “Na raiz da noção de praxeologia estão as noções interdependentes de tarefa, t, e tipo de tarefas, T. Quando uma tarefa t cai sob um tipo de tarefas T, às vezes escreveremos: $t \in T$".

Nesse modelo, para uma determinada tarefa (t), que no contexto da Matemática pode ser associada a um problema matemático, existe uma técnica (τ), que é um modo de realizar essa dada tarefa; uma tecnologia, denotada por (θ), que justifica a técnica a partir de um discurso racional (logos), garantindo que determinada técnica é capaz de resolver certo tipo de tarefa; além de uma teoria (Θ), que por sua vez fundamenta a tecnologia, assumindo o papel que esta realiza com a técnica (Chevallard, 1998). Os tipos de tarefa T e suas tarefas correspondentes geralmente são designados por um verbo, que é denominado gênero de tarefa (Ferreira, 2016; Almouloud, 2022). Como exemplo, Quadro 4, apresentamos uma tarefa envolvendo uma demonstração geométrica.

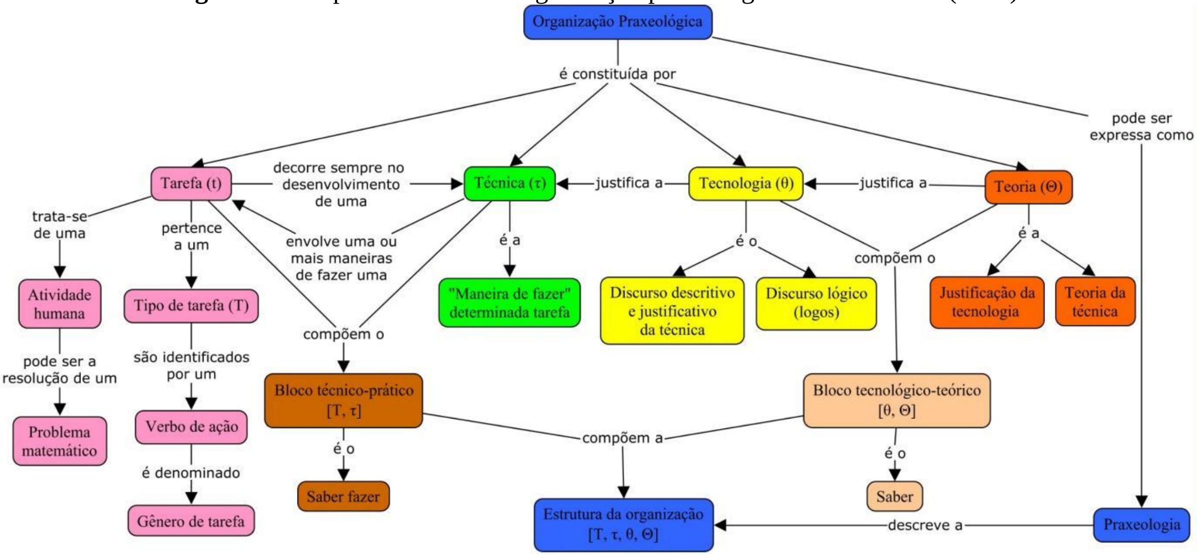
Quadro 4: Exemplo de uma organização praxeológica

Tipo de tarefa	Demonstrar uma proposição matemática.
tarefa	Demonstrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
Gênero da tarefa	Demonstrar.
Técnica	Construir um triângulo isósceles e, utilizando a isometria de reflexão, compará-lo com ele mesmo estabelecendo uma correspondência biunívoca entre seus vértices e concluir por intermédio da congruência de triângulos, que estes são congruentes, visto que os lados correspondentes são congruentes, e, portanto, os ângulos da base também o são.
Tecnologia	Terceiro caso de congruência de triângulos, denominado caso Lado, Lado, Lado (LLL), cujo enunciado é: "Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes" (Barbosa, João Lucas, 1995, p.30).
Teoria	Geometria Euclidiana Plana.

Fonte: Os autores (2023).

Esse conjunto é importante, pois segundo Almouloud (2015, p. 12), "Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular a atividade matemática." Essas noções ainda são divididas em dois blocos: o bloco técnico-prático [T / τ], composto por tarefa e técnica e representa o saber fazer e o bloco tecnológico-teórico [θ / Θ], formado por tecnologia e teoria que corresponde ao saber. Esses dois blocos compõem a praxeologia que traduz a estrutura da organização [T, τ, θ, Θ]. Para fins de resumo, apresentamos na Figura 10, um mapa conceitual da organização praxeológica apresentada.

Figura 10: Mapa conceitual da organização praxeológica de Chevallard (1998).



Fonte: Os autores (2023).

As praxeologias ou organizações relacionadas a um saber matemático são de duas espécies: matemática e didática. A organização matemática se refere a realidade matemática que pode ser construída e desenvolvida em uma sala de aula e a organização didática é a maneira pela qual se faz essa construção. Percebe-se então que existe uma relação entre os dois tipos de organização que é definido como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didáticas (Chevallard, 1999). No campo da matemática "Falamos de praxeologia matemática – ou de organização matemática - quando os tipos de tarefas T são voltados para a matemática, praxeologia didática - ou de organização didática - quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo". (Almouloud, 2015, p.16).

Por exemplo, para apresentar um objeto *O*, a um aluno *C*, o professor *A*, de uma determinada instituição *I*, que pode ser a escola, precisa elaborar uma situação que privilegie o relacionamento desse aluno com o dado objeto, ou seja, que possibilite a aprendizagem do sujeito sobre o objeto. Essa situação é denominada por Chevallard de organização didática (Ferreira, 2016). A partir desta perspectiva, analisamos as organizações matemáticas e didáticas dos livros didáticos selecionados, à luz da TAD enquanto ferramenta de análise de livros e materiais didáticos.

5. METODOLOGIA

O objetivo dessa pesquisa é analisar as organizações matemática e didática de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos. Nesse sentido, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, que conforme Moresi (2003) não requer a utilização de métodos e técnicas estatísticas, considerando que existe uma dinamicidade entre o sujeito e o mundo real, uma indissociabilidade entre a subjetividade do sujeito e o mundo objetivo que os números não podem traduzir. O que entra em consonância com o intuito dessa pesquisa, visto que pretendemos explorar a subjetividade presente nas escolhas de autores de livros didáticos quanto a abordagem de provas e demonstrações. Nossa preocupação, portanto, não é com a representatividade numérica, mas o aprofundamento da compreensão da abordagem escolhida por esses autores, o que é uma característica marcante da pesquisa qualitativa (Dourado; Ribeiro, 2021).

Diante disso, será desenvolvida uma pesquisa documental, pois, conforme enfatizado por Pires, Lopes e Portela (2020), o livro didático é um documento de importante relevância no cenário da educação e "A pesquisa documental tem como principal característica o fato de que a fonte de dados, o campo onde se procederá a coleta dos dados, é um documento (histórico, institucional, associativo, oficial etc.)" (Tozoni-Reis, 2009, p. 30). Em particular, a pesquisa documental em educação envolve a análise de documentos que sejam relevantes para o ensino e a educação (Tozoni-Reis, 2009). Além disso, "a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico" (Gil, 2002, p. 45), ou seja, a análise de um livro didático, de um documento oficial constitui uma pesquisa documental (Barbosa, Jonei, 2018).

Para produção e análise de dados, foram utilizados princípios da TAD, empregados por Chaachoua e Comiti (2010), Bittar (2017) e Almouloud (2015). Após o estudo dessas três obras nas quais os autores se debruçam em considerar a TAD como ferramenta de análise de livros e materiais didáticos, traçamos três etapas principais que embasam esta pesquisa, a saber: a escolha dos livros didáticos que foram analisados, apresentação de sua estrutura e representatividade; a análise ecológica que consiste em entender a razão de ser do objeto matemático, a identificação do tipo de instituição a qual pertence o saber associado e suas funções nessa instituição; e por fim, a análise praxeológica dividida em dois momentos: uma análise da introdução ao conceito de semelhança de triângulos adotada nos livros didáticos selecionados e a análise da estrutura praxeológica definida por Chevallard (2000) com base em critérios destacados por Chaachoua e Comiti (2010) e Almouloud (2015). Essas etapas serão detalhadas separadamente no tópico subsequente. Descrevemos a seguir o que foi feito em cada uma das etapas.

5.1. Escolha dos livros didáticos para análise

Considerando o objetivo geral desta pesquisa, buscou-se, inicialmente, livros do 1º ano do Ensino Médio na área de matemática que foram aprovados no PNLD 2021, visando obter um panorama mais recente, sobretudo após a implantação da BNCC. Nesse sentido, pesquisou-se no Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pelo PNLD mais recente aprovado para o Ensino Médio, que até a presente pesquisa se tratava do PNLD (2021). Assim, tivemos acesso ao do Guia Nacional do Livro e do Material Didático[6], onde foram encontrados 10 livros aprovados pelo referido PNLD. Na busca pelos livros aprovados, percebemos que alguns estavam divididos em volumes como Geometria Plana e Trigonometria, que foram selecionados por serem a área relacionada à Semelhança de Triângulos, objeto de estudo dessa pesquisa. Em alguns livros, encontramos a abordagem desse conceito no volume Geometria Plana, em outros no volume Trigonometria. Um livro foi desconsiderado, ainda nessa busca, por não abordar o conceito diretamente, pois sua proposta de ensino era feita por meio de projetos.

Após essa análise preliminar, fizemos o download dos livros pré-selecionados. Dos 9 restantes, um não estava disponível para download e outro não estava disponível na internet. Assim, foram selecionados para análise 7 livros didáticos descritos no Quadro 5.

[6] Disponível em https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias. Acessado em: 26 de Fev. de 2023.

Quadro 5: Livros didáticos selecionados para análise.

Título do livro	Título do volume	Descritor	Autor/Editor responsável	Ano	Área de conhecimento
Conexões – matemática e suas tecnologias	Trigonometria	LD1	Fábio Martins de Leonardo	2020	Matemática e suas tecnologias
Diálogo	Geometria plana	LD2	Lilian Aparecida Teixeira	2020	Matemática e suas tecnologias
Matemática em Contexto	Trigonometria e sistemas lineares	LD3	Luis Roberto Dante e Fernando Viana	2020	Matemática e suas tecnologias
Matemática Interligada	Trigonometria, fenômenos, periódicos e programação	LD4	Thais Marcelle de Andrade	2020	Matemática e suas tecnologias
Multiversos	Sequencias e trigonometria	LD5	Joamir Roberto de Souza	2020	Matemática e suas tecnologias
Prisma	Geometria e trigonometria	LD6	Bonjorno Giovanni Jr. e Paulo Câmara	2020	Matemática e suas tecnologias
Quadrante	Geometria plana e espacial	LD7	Eduardo Chavante e Diego Prestes	2020	Matemática e suas tecnologias

Fonte: Os autores (2023).

Ainda nessa etapa, analisamos a estrutura e representatividade dos livros pré-selecionados, por meio das resenhas contidas no Guia do PNLD 2021. Cada livro contém sua resenha, que analisamos separadamente, mas buscamos fazer as interseções plausíveis reunindo características comuns a cada livro, destacando também suas particularidades. Nesse víeis, constatamos que todos os livros selecionados estão fundamentados na BNCC no que diz respeito às competências gerais e específicas e habilidades da área de matemática e suas tecnologias (Brasil, 2020). São divididos em volumes, dos quais são destacados no Quadro 5, os que propõem o estudo da semelhança de triângulos e temáticas afins. De modo geral, cada obra é composta pelo Livro do Estudante (LE), Manual do Professor (MP) e Material Digital do Professor (MDP).

O LD1 explora as metodologias ativas como forma de destacar o protagonismo dos estudantes diante de situações e problemas diversos e em contextos específicos da matemática, estimulando processos de abstração e reflexão. O professor tem destacado seu papel de mediador dos processos de ensino e de aprendizagem.

No LD2 é destacado o trabalho interdisciplinar a partir de situações que articulam a área da Matemática e suas Tecnologias e outras áreas de conhecimento. Há também uma variedade de situações “[...] que permitem ao estudante formular e resolver problemas, criar soluções com base nos conhecimentos de diferentes áreas e argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias" (Brasil, 2021, p. 60). Em outras palavras, que estimulam a argumentação e autonomia dos estudantes. A interdisciplinaridade também é explorada em LD3 que também se baseia na resolução de problemas em sua organização metodológica. Além disso, como o próprio nome evidencia, as contextualizações são frequentemente utilizadas para introduzir os objetos do conhecimento, por meio de situações nas quais são evidenciados os conceitos matemáticos em questão.

Assim como LD1, LD4 sugere uma abordagem por meio de metodologias ativas, promovendo o protagonismo juvenil. Também trabalha a argumentação matemática, possibilitando ao aluno se expressar e compreender o mundo, bem como construir conhecimento por intermédio do pensamento científico, computacional, crítico e criativo. Segundo o que é proposto no PNLD 2021, "o uso de metodologias ativas para abordagem dos conteúdos promove uma reflexão crítica das situações envolvendo relações próprias do mundo do trabalho, cidadania e escolhas para projetos de vida, permitindo assim, o protagonismo dos(as) estudantes." (Brasil, 2021, p. 71). Também é levado em consideração o conhecimento prévio dos alunos ao trabalhar os objetos de conhecimento específicos da matemática.

O LD5 também articula diferentes áreas de conhecimento, possibilitando um trabalho interdisciplinar. As metodologias ativas também são exploradas, juntamente com algumas tendências da educação matemática com vistas ao desenvolvimento cognitivo do estudante, para o exercício da cidadania e observância do mundo do trabalho. Nessa mesma linha, LD6 se "caracteriza por contextualizar os objetos de conhecimento, relacionando-os às diversas práticas sociais e à necessidade de resolver problemas do cotidiano, muitas vezes fazendo uso das tecnologias digitais." (Brasil, 2021, p. 83). O foco também está em desenvolver o protagonismo do estudante, sua consciência enquanto cidadão, entendendo seu papel no mundo e na sociedade.

LD7 carrega características comuns aos anteriores como interdisciplinaridade e argumentação matemática, possibilitando aos estudantes reflexão, diálogo e produção. Além disso, a obra traz aspectos da História da Matemática, além de abordar a importância da Etnomatemática e a valorização da ciência.

Dentre as abordagens destacadas, chamamos atenção àquelas que privilegiam o protagonismo do aluno, visto que se encaixa nos objetivos do Paradigma do Questionamento do Mundo. Trata-se de um contra paradigma ao paradigma do Monumentalismo dos saberes, "o qual e descrito com a analogia a um museu no qual os estudantes visitam as obras as quais somente podem ser vistas e veneradas, sem toca-las ou manipula-las e sem questioná-las, isto sob o paradigma das visitas das obras” (Almouloud *et al*, 2021, p. 439). Já o paradigma do questionamento do mundo privilegia o protagonismo do estudante justamente por opor-se ao Monumentalismo ao considerar importante compreender as razões de ser que culminam na existência de determinada obra (Almouloud, 2021).

5.2. Análise ecológica

A análise ecológica foi feita levando em consideração o objeto matemático em estudo, ou seja, a semelhança de triângulos. No entanto, esse tópico se concentra em apresentar apenas o viés desse conceito em documentos normativos da Educação, visto que essa análise já vem sendo feita ao longo desta pesquisa em outros tópicos, tais quais o destinado à semelhança de triângulos na Revisão de Literatura, a dimensão histórica e epistemológica tratada na seção 3 e também a própria natureza desta pesquisa, que visa analisar a dimensão institucional, considerando o livro didático um habitat que abriga este conceito.

Neste contexto, a semelhança se trata, portanto, de um conteúdo que é abordado na Educação Escolar, dentro da área da Matemática, mais especificamente da geometria e perpassa tanto pela Educação Básica, quanto pelo Ensino Superior em cursos como Licenciaturas em Matemática. É apresentada nos PCN no bloco espaço e forma, no qual se busca o “Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro)” (Brasil, 1998, p. 89), dentre elas a semelhança de triângulos.

De acordo com a BNCC, deve ser abordada inicialmente no 9º ano do Ensino Fundamental, dentro da unidade temática geometria, para o desenvolvimento da habilidade em reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Além disso, a semelhança de triângulos aparece também como argumento que pode ser utilizado na demonstração de conceitos como as relações métricas do triângulo retângulo (Brasil, 2017).

No ensino médio, embora não seja especificado na BNCC para essa etapa, cujo intuito é o aprofundamento de conceitos estudados no Ensino Fundamental Anos Finais, esse conhecimento é retomado na 1ª série, conforme pode ser observado nos livros didáticos. Segundo o que é descrito no documento, esse conceito deve ser explorado e aplicado, juntamente com as relações métricas, para o desenvolvimento da habilidade em aplicar as relações métricas, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (Brasil, 2017).

5.3. Análise praxeológica

Na análise praxeológica, utilizamos os procedimentos metodológicos adotados por Almouloud (2015), fundamentados na TAD, dos quais ele destaca três etapas importantes: identificação dos tipos de tarefas, em que são analisadas as atividades propostas nas variadas seções dos capítulos; identificação de técnicas que possibilitam o cumprimento das tarefas; e identificação das tecnologias, que podem ser construídas com base no comentário dos autores, na análise do livro do professor ou análise matemática das situações utilizadas.

Além disso, para análise de uma organização praxeológica, isto é, das organizações matemáticas e didáticas, além dos conceitos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria já explicitados, devem se considerar critérios importantes, conforme enfatiza Almouloud (2015, 2022) fundamentado em Chevallard (1999). Esses critérios foram utilizados como ponto de partida para análise das organizações matemáticas e didáticas dos livros didáticos selecionados. As adequações serão feitas conforme necessidades apontadas pelas análises.

Nesse sentido, apresentamos no Quadro 6, os critérios apontados por Almouloud (2022) fundamentados nos apontamentos de Chevallard (1999), para analisar os tipos de tarefas; técnicas, sobre as quais ele propõe um conjunto de indagações; e as tecnologias e pertinência do bloco tecnológico-teórico, também a partir de uma série de questionamentos.

Quadro 6: Critérios para análise de organizações matemáticas e didáticas segundo Chevallard (1999).

Noção avaliada	Critérios	O que verificar
Tarefas	Critério de identificação	Quais tipos de tarefa são apresentados de forma bem clara e bem identificados.
Tarefas	Critério das razões de ser	Quais razões de ser dos tipos de tarefa são explicitadas ou, ao contrário, se esses tipos de tarefa aparecem sem motivos válidos.
Tarefas	Critério de pertinência	Quais tipos de tarefa considerados são representativos das situações matemáticas frequentemente encontradas, bem como se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.
Técnicas	Mesmos critérios adotados para tarefa, devendo buscar respostas para algumas indagações.	As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas?
Técnicas	Mesmos critérios adotados para tarefa, devendo buscar respostas para algumas indagações.	São de fácil utilização?
Técnicas	Mesmos critérios adotados para tarefa, devendo buscar respostas para algumas indagações.	São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefa proposto?
Técnicas	Mesmos critérios adotados para tarefa, devendo buscar respostas para algumas indagações.	São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto?
Tecnologias e bloco tecnológico-teórico	Parte de um conjunto de indagações	Dado um enunciado, o problema de sua justificativa está somente colocado ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?
Tecnologias e bloco tecnológico-teórico	Parte de um conjunto de indagações	As formas de justificativas utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas?
Tecnologias e bloco tecnológico-teórico	Parte de um conjunto de indagações	Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado?
Tecnologias e bloco tecnológico-teórico	Parte de um conjunto de indagações	Os argumentos utilizados são cientificamente válidos?
Tecnologias e bloco tecnológico-teórico	Parte de um conjunto de indagações	O resultado tecnológico de uma determinada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Fonte: Almouloud (2022, p. 167).

A partir desse conjunto de critérios, analisamos as organizações matemáticas e didáticas a respeito de provas e demonstrações relativas à semelhança de triângulos, abertos à necessidade de formular novos questionamentos ou fazer apontamentos que não necessariamente foram oriundos desses critérios.

Para uma análise mais compacta e eficaz, a dividimos em dois momentos. No primeiro momento, analisamos a abordagem dada a semelhança de triângulos, destacando as escolhas matemáticas e as técnicas utilizadas pelos autores ao apresentarem, por exemplo, sua definição, casos de semelhanças e demais escolhas feitas, isto é, uma análise inicial das organizações matemáticas e didáticas apresentadas nesses livros a respeito do conceito supramencionado. A partir dessa análise já descartamos o livro LD7, pois apesar de trazer uma abordagem sobre figuras planas, está voltado para a razão entre áreas envolvendo essas figuras, e nesse quesito também não aborda os triângulos, ou seja, foge dos objetivos dessa pesquisa. Em um segundo momento, analisamos as tarefas apresentadas nos livros didáticos, que incluem os exercícios resolvidos e propostos, suas respectivas técnicas, e as tecnologias e teorias. Apresentamos no tópico 6 a análise desses dois momentos considerando os livros didáticos selecionados após as etapas anteriores.

6. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS

Apresentamos nesse tópico a análise dos dois momentos da análise praxeológica dos 6 livros didáticos selecionados.

6.1. Análise da abordagem dada a semelhança de triângulos

Comecemos pela análise da definição de semelhança de triângulos adotada pelos autores dos livros didáticos selecionados. Nessa perspectiva, notamos três técnicas distintas de abordagem. Os autores de LD1 iniciam sua abordagem falando sobre o conceito geral de semelhança, com uma contextualização envolvendo a ampliação e redução de fotografias (Figura 11), uma abordagem que se assemelha à finalidade empregada a semelhança pelos egípcios que foi destacada por Maciel (2004). Uma curiosidade interessante trazida em LD1 convida os estudantes a refletirem se dois círculos são sempre semelhantes, o que é verdade já que a forma é mantida e apenas o raio é alterado.

Figura 11: Exemplo de abordagem do conceito de semelhança

Fonte: Leonardo e colaboradores (2020, p. 21).

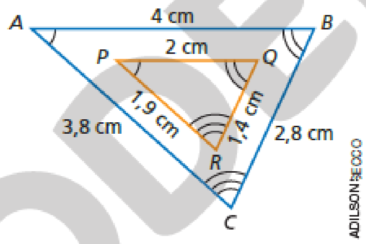
Logo em seguida é introduzida a semelhança de polígonos e enfim a semelhança de triângulos (Figura 12) tratada em LD1 como um caso especial, já que é preciso verificar a veracidade de apenas uma das condições de semelhança, para automaticamente a outra também ocorrer. De antemão, destacamos que em LD1 não são enunciados os casos de semelhança, nem o teorema fundamental da semelhança. Apenas o caso LAL (1º caso) aparece em um exercício resolvido e os demais podem ser percebidos nos triângulos escolhidos para exemplificar a semelhança.

Figura 12: Definição de semelhança de triângulos em LD1

Para determinar se dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar se satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos internos correspondentes são congruentes.

Exemplo

Comparando as medidas dos ângulos internos e dos lados dos triângulos *ABC* e *PQR*, podemos perceber que:



- $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$, $\hat{C} \cong \hat{R}$
- $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} = 2$

Assim, podemos concluir que: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$
(lemos: "o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *PQR*")

Entretanto, o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas uma das condições de semelhança, automaticamente a outra também ocorre. Em outras palavras, para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que uma das condições a seguir seja satisfeita:

- Os lados correspondentes sejam proporcionais.
- Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

Fonte: Leonardo e colaboradores (2020, p. 25).

Em outros casos como LD5, os autores apresentam a ideia de semelhança de polígonos e na sequência o conceito de semelhança de triângulos de forma contextualizada, seguido dos casos de semelhança e do teorema fundamental da semelhança.

Já nos livros LD2, LD4 e LD6 os autores apresentam o tópico semelhança de triângulos começando já nesse tópico com a definição de polígonos semelhantes, para então destacar que os triângulos são um caso especial (Figura 13).

Figura 13: Definição de semelhança de triângulos em LD2

Dizemos que dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem às seguintes condições:

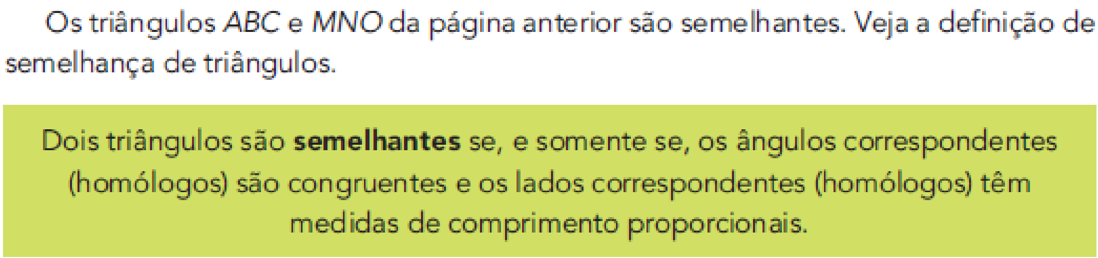
- os ângulos internos correspondentes são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.
- os lados correspondentes são proporcionais.

É possível verificar se dois triângulos são semelhantes sem necessariamente analisar ambas as condições. Para isso, utilizamos os casos de semelhança, apresentados a seguir.

Fonte: Andrade (2020, p. 18).

LD3 é o único em que o autor inicia o tópico sobre semelhança de triângulos com sua definição conforme indicado na Figura 14.

Figura 14: Definição de semelhança de triângulos em LD3.



Os triângulos *ABC* e *MNO* da página anterior são semelhantes. Veja a definição de semelhança de triângulos.

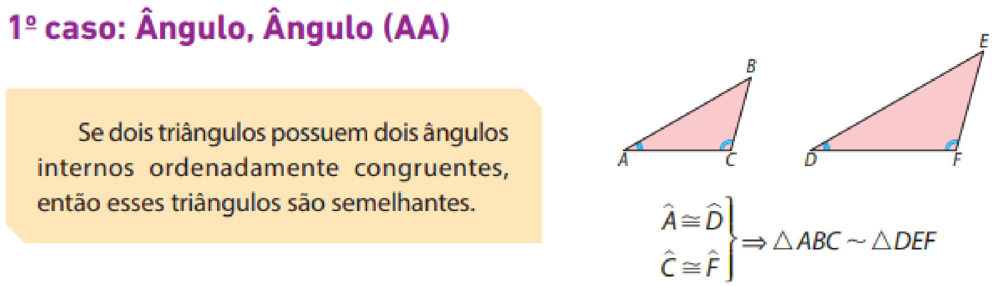
Dois triângulos são **semelhantes** se, e somente se, os ângulos correspondentes (homólogos) são congruentes e os lados correspondentes (homólogos) têm medidas de comprimento proporcionais.

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 14).

Evidenciamos que, com exceção de LD1, todos apresentam os casos de semelhança e em LD1, LD2 e LD3, os autores não abordam o teorema fundamental da semelhança. O LD6 se distingue ao abordar algumas consequências da semelhança de triângulos, dentre elas a razão de semelhança, que também é abordada em LD3.

Na abordagem dos casos de semelhança, excetuando LD2, nos demais os autores não apresentam suas respectivas demonstrações, apenas o enunciado seguido do aporte da figura, nos casos de LD3 e LD6, como mostra a Figura 15.

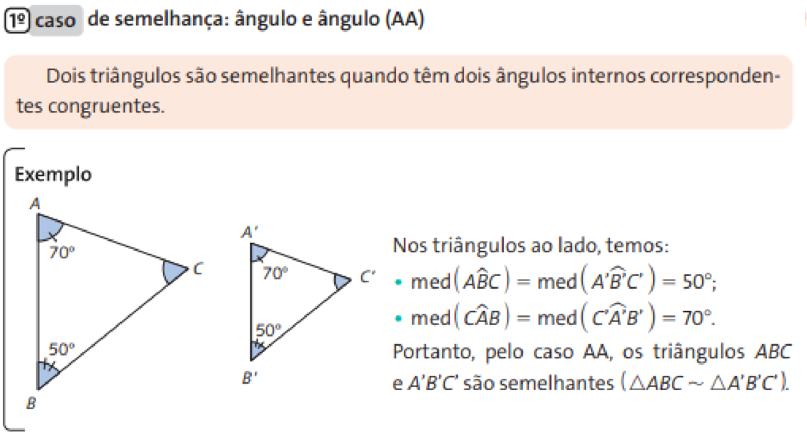
Figura 15: Exemplo de abordagem dos casos de semelhança de triângulos.



Fonte: Giovanni Jr; Câmera (2020, p. 38).

Ou o enunciado seguido de um exemplo com medidas específicas, casos de LD4 e LD5, como na Figura 16.

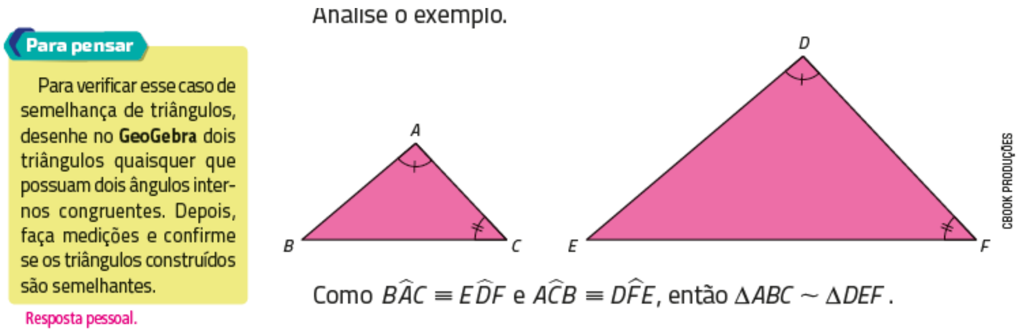
Figura 16: Exemplo de abordagem dos casos de semelhança de triângulos.



Fonte: Souza (2020, p. 18).

Em LD5 os autores destacam que os casos podem ser demonstrado e sugerem que os estudantes pesquisem e discutam com os colegas as demonstrações. Além disso ao enunciar um dos casos, é sugerido que os estudantes usem o Geogebra para confirmar se os triângulos são de fato semelhantes (Figura 17). Nesse caso, seria uma "mostração", ou seja, uma prova no sentido e distinção estabelecidos por Balacheff (2000).

Figura 17: Exemplo de abordagem dos casos de semelhança de triângulos.



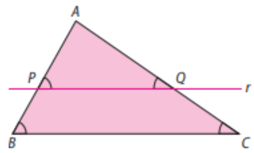
Fonte: Souza (2020, p. 18).

Nos quais foram enunciado o teorema fundamental da semelhança, LD4, LD5 e LD6, apenas em LD4 não foi abordado sua demonstração, exemplificada na Figura 18. Embora em LD4 o autor afirme que essa propriedade pode ser demonstrada, somente exemplifica-a e sugere utilizá-la para demonstrar o primeiro caso de semelhança.

Figura 18: Exemplo de abordagem do teorema fundamental da semelhança.

Teorema fundamental da semelhança

Vamos, agora, trabalhar com um teorema bastante utilizado na resolução de exercícios e atividades, conhecido como teorema fundamental da semelhança. Ele também é útil na demonstração de outras proposições matemáticas.



Consideremos o triângulo *ABC* ao lado. Nele, vamos traçar uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$, que vai intersectar o lado $\overline{AB}$ no ponto *P* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *Q*.

Do paralelismo de *r* com o lado $\overline{BC}$, temos: $\hat{P} \cong \hat{B}$ e $\hat{Q} \cong \hat{C}$, que são ângulos correspondentes.

Assim, os triângulos *APQ* e *ABC* têm ângulos ordenadamente congruentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança, concluímos que $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

Assim, acabamos de provar que:

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Fonte: Giovanni Jr; Câmera (2020, p. 39).

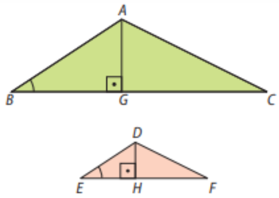
LD6 também se destaca por apresentar não só algumas consequências da semelhança de triângulos, mas suas demonstrações, das quais trazemos a demonstração de um dos itens da primeira consequência (Figura 19), cujo enunciado diz que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (de razão de semelhança k) é k².

Figura 19: Exemplo de abordagem de uma das consequências da semelhança de triângulos.

Demonstração

Considere dois triângulos *ABC* e *DEF* tais que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, como mostram as figuras ao lado. Então, pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$



Traçando as alturas homólogas $\overline{AG}$ e $\overline{DH}$, temos, pelo caso AA de semelhança, $\triangle ABG \sim \triangle DEH$. Então, podemos escrever: $\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DH} = k$

Calculando as respectivas áreas, indicadas por *S*, temos:

Área $\triangle ABC$: $S_1 = \frac{BC \cdot AG}{2}$ Área $\triangle DEF$: $S_2 = \frac{EF \cdot DH}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{BC \cdot AG}{2}}{\frac{EF \cdot DH}{2}} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2$$

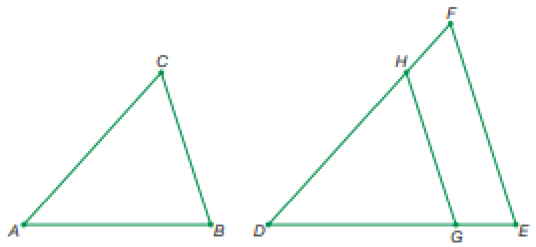
Fonte: Giovanni Jr; Câmera (2020, p. 39-40).

Em LD2, diferentemente dos demais, é feita a demonstração do caso de semelhança AA (2º caso), como mostra a Figura 20.

Figura 20: Exemplo de abordagem dos casos de semelhança com demonstração.

Caso de semelhança AA: se dois triângulos possuem dois ângulos internos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

Demonstração: considere os triângulos ABC e DEF em que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ são congruentes. Agora, vamos mostrar que os lados correspondentes são proporcionais. Para isso, marque sobre o lado $\overline{DE}$ do triângulo DEF um ponto G de maneira que $AB = DG$ e, em seguida, trace o segmento $\overline{GH}$ paralelo ao lado $\overline{EF}$.



Note que $\hat{G} = \hat{E}$, pois são ângulos correspondentes de paralelas cortadas por uma transversal.

Note que, pelo caso de congruência **ALA** (ângulo, lado, ângulo), os triângulos ABC e DGH são congruentes, pois $\hat{A} = \hat{D}$, $AB = DG$ e $\hat{B} = \hat{G} = \hat{E}$.

Pelo Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{DH}{DF} = \frac{DG}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

De maneira semelhante, mostra-se que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Consequentemente, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ e, portanto, os triângulos ABC e DEF são semelhantes, como queríamos demonstrar.

Agora, vamos conhecer outros dois casos de semelhanças. Estes também podem ser demonstrados, porém não apresentaremos as demonstrações nesta coleção.

Fonte: Teixeira e colaboradores (2020, p. 16-17).

No entanto, embora os autores afirmem que os outros casos podem ser demonstrados, não apresentam essas demonstrações em LD2, sendo abordado apenas o enunciado seguido de um exemplo. Em LD2 também não é apresentado o teorema fundamental da semelhança.

Ante o exposto, apresentamos, no Quadro 7, os livros nos quais são apresentadas os principais elementos e noções relativas à semelhança de triângulos.

Quadro 7: Síntese dos elementos relativos à semelhança de triângulos abordados em cada livro didático.

Livros	Definição	Casos de Semelhança	Teorema fundamental da semelhança	Demonstração dos casos de semelhança	Demonstração do teorema fundamental
LD1	x				
LD2	x	x		x	
LD3	x	x			
LD4	x	x	x		
LD5	x	x	x		x
LD6	x	x	x		x

Fonte: Os autores (2023).

6.2. Discussão dos resultados desta análise

De modo geral, embora em alguns casos haja uma breve contextualização, notamos a preferência por uma abordagem tradicional, na qual são apresentados a definição, um exemplo, envolvendo ou não medidas específicas, e elementos centrais como os casos de semelhança de triângulos e o teorema fundamental da semelhança, em seguida algumas atividades propostas (tarefas), algumas resolvidas e outras destinadas à resolução pelos estudantes. Há uma pouca abordagem de demonstrações, principalmente dos casos de semelhança, mostrando uma preferência em apresentar a demonstração do teorema fundamental. A definição de semelhança de triângulos adotada, é a mesma apresentada neste trabalho e deriva da definição de semelhança de polígonos, já que se trata de um caso à parte, sendo, como enfatizado em LD1, um caso especial dentre os polígonos.

Evidenciamos também, a preocupação dos autores em esclarecer a correspondência dos vértices que torna possível a semelhança entre os triângulos escolhidos, pois, como é destacado em LD1 não é necessário que dois polígonos estejam na mesma posição para serem semelhantes, porém ao indicar a semelhança, deve-se respeitar a ordem dos vértices correspondentes. Esse quesito também é importante no momento de estabelecer as hipóteses em uma demonstração que envolve esse conceito, assim como em outros como a congruência.

No entanto, cabe ressaltar que em sua maioria, os autores dos livros didáticos em questão, utilizam para exemplificar a definição e os casos de semelhança, triângulos na mesma posição como podemos ver nos casos representados pelos exemplos anteriores. Ou seja, quase todos os triângulos utilizados para exemplificar a semelhança são também homotéticos. Contudo, nesse quesito, destacamos LD1 por apresentar exemplos com triângulos em diferentes posições.

6.3. Análise da estrutura praxeológica

Nesse momento, apresentamos, de forma conjunta, os dados obtidos nos livros didáticos selecionados, com exceção de LD3 por não apresentar atividades ou exercícios resolvidos. Ao analisar as tarefas, as subdividimos por tipo de tarefa (T), que são apresentados no Quadro 8, no qual também trazemos exemplos, de forma sintetizada, de tarefas pertencentes a cada tipo.

Os tipos de tarefa são denotados e ordenados pela letra “T” maiúscula, seguida de índices em ordem crescente de 1 a *n*, e suas respectivas tarefas denotadas pela letra “t” minúscula seguido pelo mesmo índice que indica seu tipo de tarefa, e uma letra do alfabeto em maiúsculo, evitando repetições em casos em que há mais de uma tarefa para o mesmo tipo, como está indicado no Quadro 8. Logo em seguida apresentamos como exemplo, uma ou mais tarefas de cada tipo de tarefa, retirados na íntegra dos livros didáticos, e sua(s) respectiva(s) técnica(s) (τ), a(s) tecnologia(s) (θ) que a(s) justifica(m) e a teoria (Θ) que justifica essa(s) tecnologia(s). De antemão, destacamos que como se trata de um conceito específico da Geometria Euclidiana Plana, apenas as tecnologias que não forem justificadas por esta, terão a teoria destacada.

Quadro 8: Tipos de tarefas e suas respectivas tarefas.

Tipos de tarefa (T_n)	**Tarefas $t_{n(A-Z)}$**
T_1: Identificar se dois triângulos são semelhantes e qual caso de semelhança foi empregado como justificativa.	t_{1A}: Identificar se dois triângulos de medidas x, y, z e k, u, v respectivamente, são semelhantes.
T_2: Mostrar a semelhança entre dois ou mais triângulos	t_{2A}: Mostrar que dado um triângulo ABC retângulo em B, dividido pela sua altura relativa à hipotenusa em dois triângulos ABH e CBH, os três são semelhantes.
T_3: Determinar um valor especifico utilizando a semelhança de triângulos.	t_{3A}: Determinar o valor de uma incógnita em uma equação; t_{3B}: Determinar a medida do lado de um dos triângulos.
T_4: Determinar a medida de grandezas de figuras ou objetos por meio da semelhança de triângulos.	t_{4A}: Determinar a altura de um prédio; t_{4B}: Determinar o perímetro de um quadrado; t_{4C}: Calcular o comprimento de uma lagoa.
T_5: Elaborar situações problemas envolvendo semelhança de triângulos.	t_{5A}: Elaborar uma situação problema com uma resposta especifica; t_{5B}: Elaborar uma situação problema de resposta livre.

Fonte: Os autores (2023).

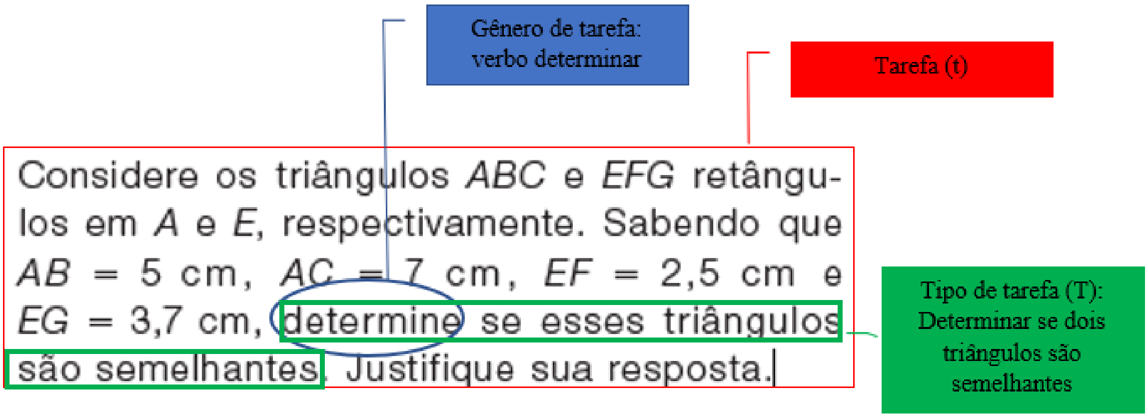
Tomando como base o Quadro 8, detalhamos cada uma das tarefas citadas, apresentando suas respectivas técnicas e tecnologias. Além disso, ressaltamos, que como na maioria das tarefas apresentadas, as técnicas foram propostas pela autora desta pesquisa, levamos em consideração os critérios estabelecidos no Quadro 5.

6.3.1. Tipo de tarefa T_1: Análise da tarefa t_{1A}

O tipo de tarefa T_1 engloba tarefas que visam identificar triângulos semelhantes. Das tarefas pertencentes a esse tipo, umas apresentam enunciado e a figura dos triângulos como base e outras apenas o enunciado contendo os dados para que o estudante esboce a figura. Trazemos como exemplo uma tarefa que está contida no livro didático LD2 (Figura 21), que tem como proposta determinar se triângulos de medidas específicas são semelhantes. Essa tarefa apresenta apenas o enunciado com os dados necessários à resolução da questão. Na

Figura 21, também apresentamos o gênero de tarefa, tipo de tarefa e a tarefa. Logo em seguida uma técnica capaz de resolvê-la e a tecnologia que a justifica.

Figura 21: Exemplo do tipo de tarefa T_1.



Fonte: Adaptado de Teixeira e colaboradores (2020, p. 16-17).

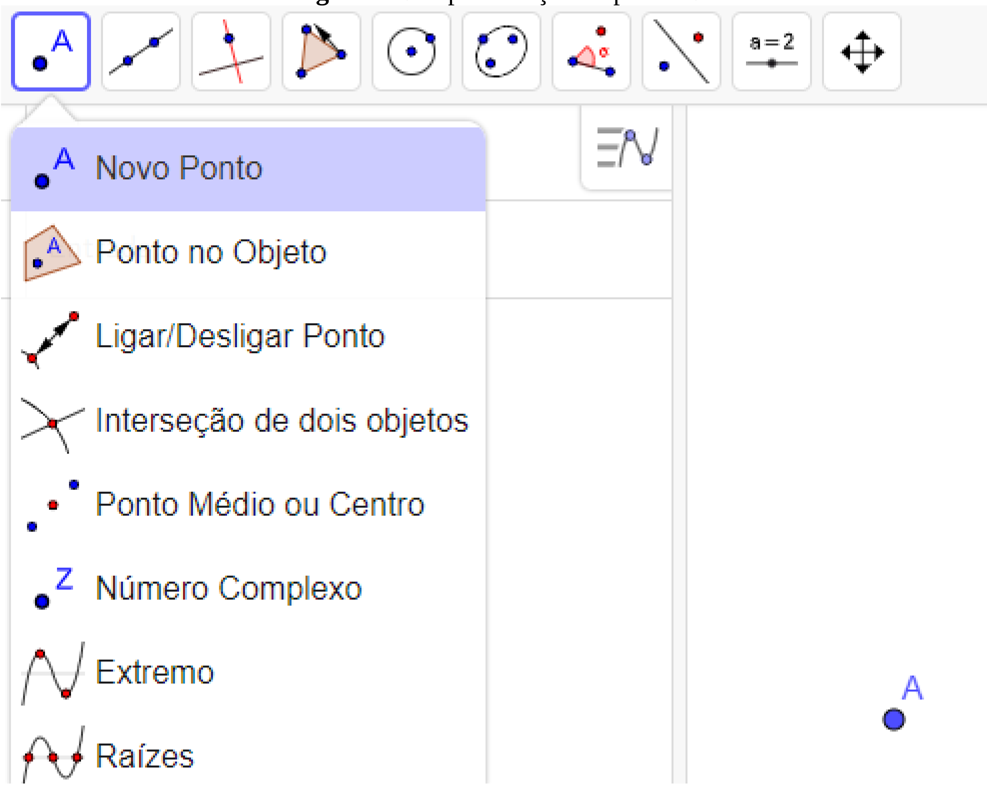
Antes de apresentarmos a técnica, ressaltamos que essa tarefa foi subdividida em subtarefas, pois são necessários alguns passos para chegar a sua solução, que possuem técnicas próprias.

Subtarefa 1: construir os triângulos ABC e EFG com suas respectivas medidas

Técnica 1: Os estudantes podem fazer os triângulos a mão livre com lápis e papel. No nosso caso, fizemos esse processo por meio do GeoGebra, visto que é uma ferramenta com potencial já destacado em trabalhos como o de Silva (2018) para o desenvolvimento da aprendizagem da semelhança de triângulos, além de ser um software gratuito e dinâmico que pode ser utilizado por alunos e professores. Nessa perspectiva, apresentamos o passo a passo para a construção do triângulo ABC utilizando essa ferramenta.

1. Abra o GeoGebra;
2. Com a ferramenta Novo Ponto construa o ponto A.

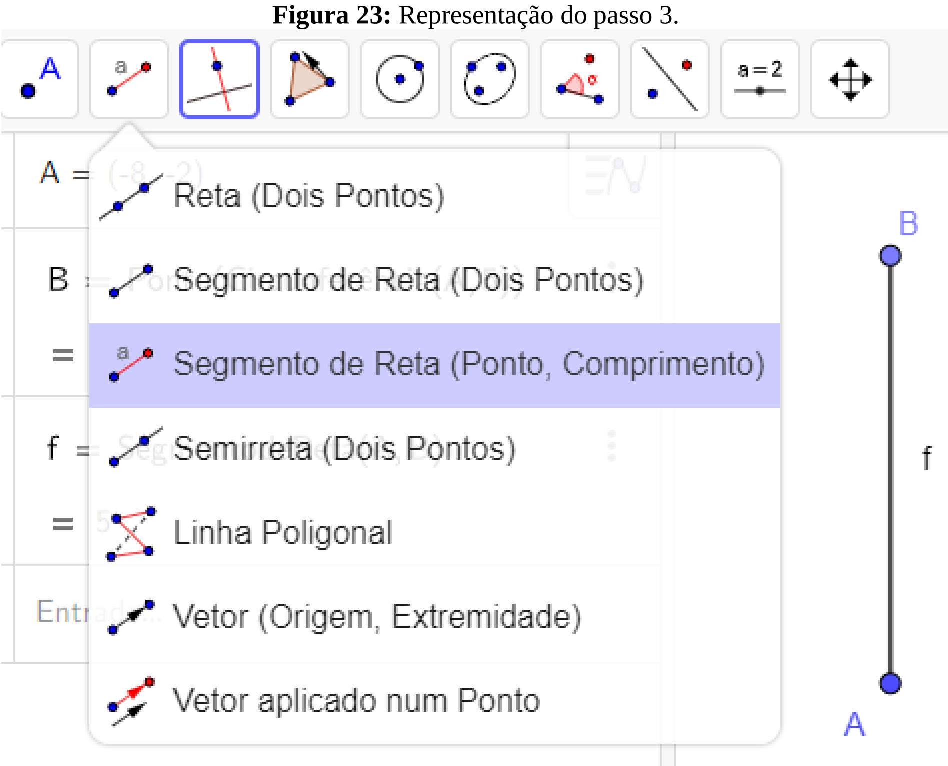
Figura 22: Representação do passo 2.



Fonte: Os autores (2024).

3. Com a ferramenta Segmento de Reta (Ponto, Comprimento) construa, a partir do ponto A, o segmento AB com medida 5. O segmento será construído na horizontal. Arraste o ponto B de modo que o segmento AB fique na vertical, respeitando a convenção matemática de que os vértices do triângulo sejam lidos no sentido horário.

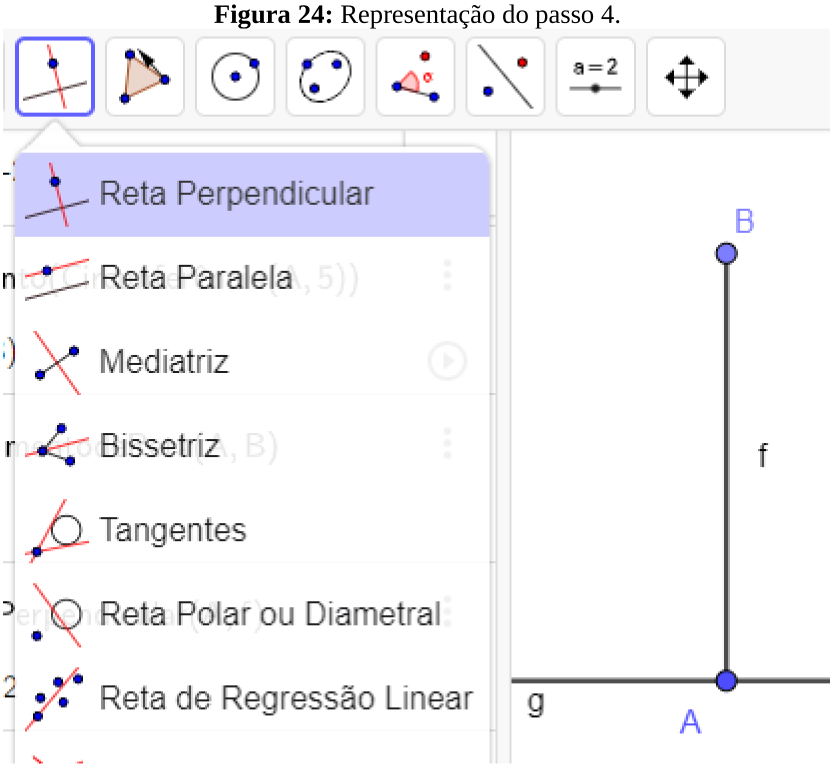
Figura 23: Representação do passo 3.



Fonte: Os autores (2024).

4. Com a ferramenta Reta Perpendicular, construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A.

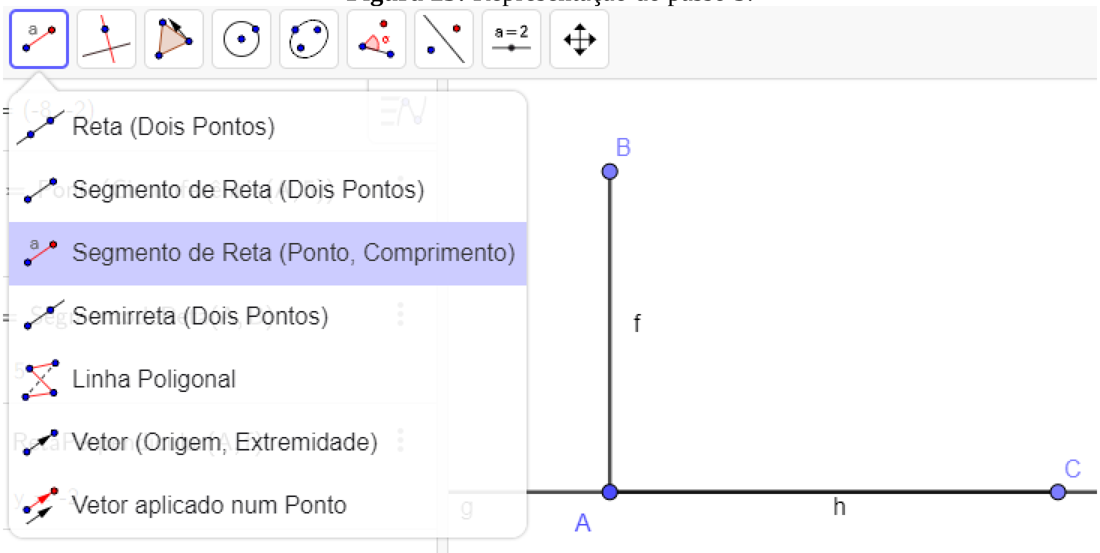
Figura 24: Representação do passo 4.



Fonte: Os autores (2024).

5. Com a ferramenta Segmento de Reta (Ponto, Comprimento) construa, a partir do ponto A, o segmento AC com medida 7.

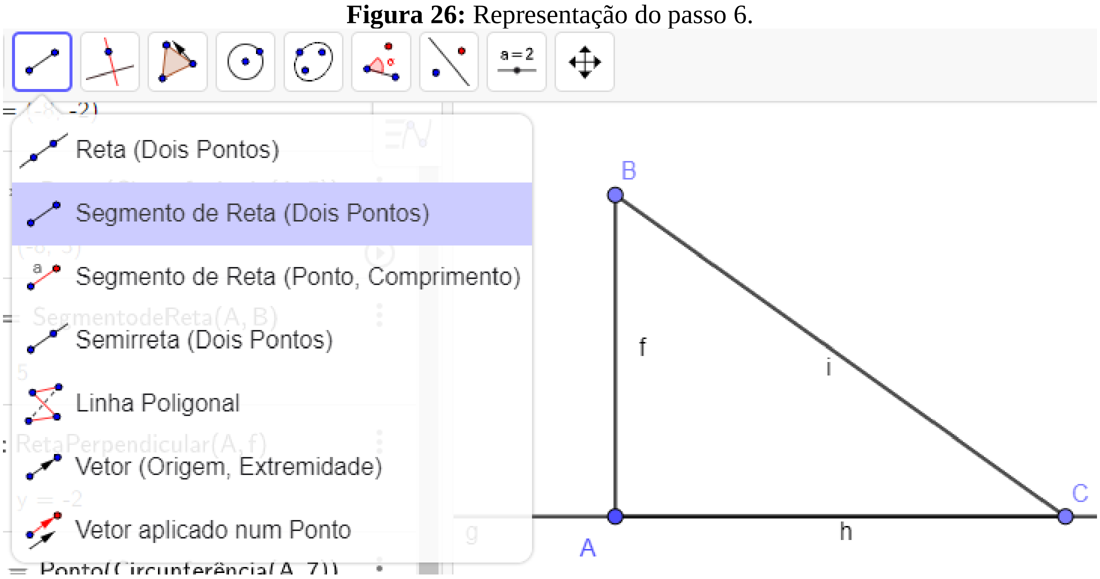
Figura 25: Representação do passo 5.



Fonte: Os autores (2024).

6. Com a ferramenta Segmento de Reta (Dois Pontos) construa o segmento BC.

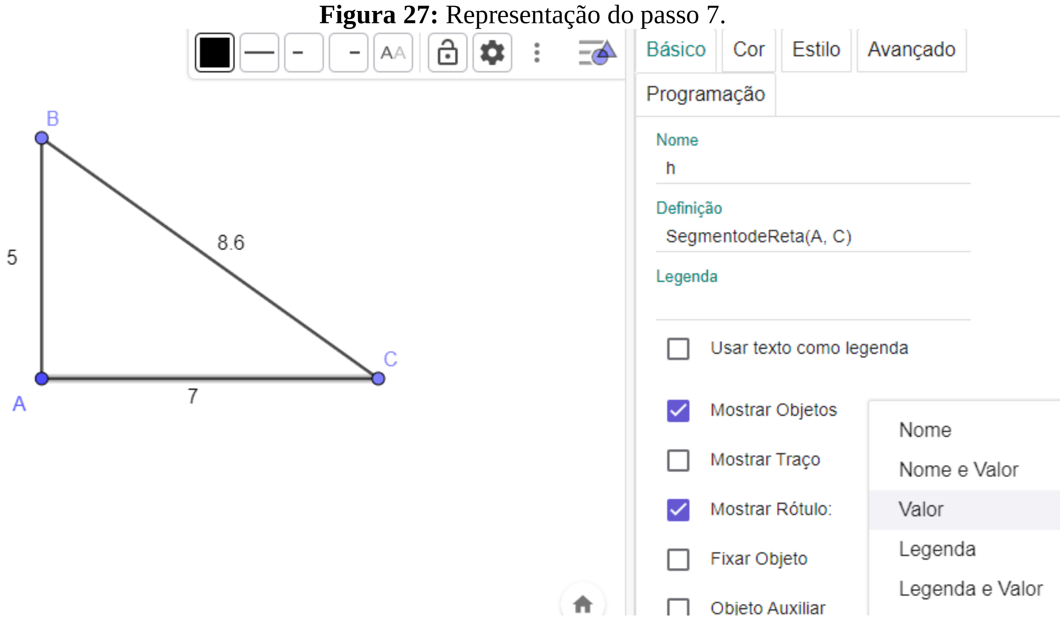
Figura 26: Representação do passo 6.



Fonte: Os autores (2024).

7. Com o botão direito do mouse, nas configurações dos objetos, altere seus rótulos para exibir o valor.

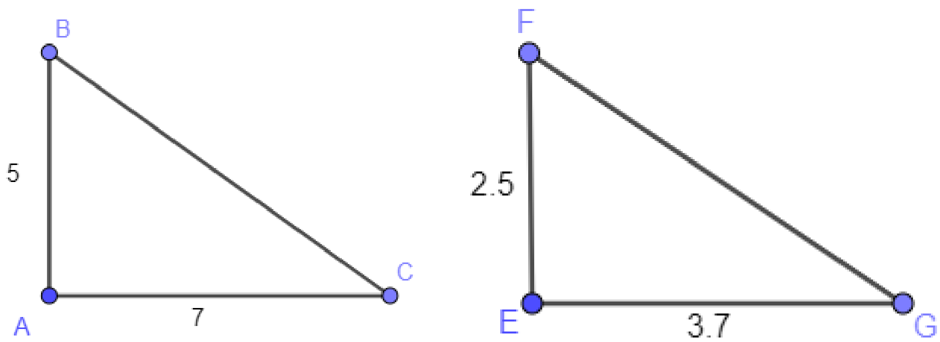
Figura 27: Representação do passo 7.



Fonte: Os autores (2024).

De modo análogo, construa o triângulo EFG retângulo em E, atentando-se para alterar a notação dos vértices.

Figura 28: Triângulos ABC e EFG.



Fonte: Os autores (2024).

Tecnologia 1: condição de existência de um triângulo.

Subtarefa 2: verificar os lados correspondentes

Técnica 2: Estabelecer uma correspondência entre os vértices que torne possível o processo de identificação da semelhança. A correspondência estabelecida nesse caso é:

$$A \rightarrow E,\ B \rightarrow F \text{ e } C \rightarrow G$$

Logo em seguida, identificar os lados opostos a vértices correspondentes. Como AB está oposto a C que é correspondente a G que é oposto de EF, então $\frac{AB}{EF}$ e como AC está oposto a B que é correspondente a F que é oposto a EG, então $\frac{AC}{EG}$.

Tecnologia: convenção - lados correspondentes são opostos à vértices correspondentes.

Subtarefa 3: verificar se os três lados correspondentes são proporcionais

Técnica 3:

$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} \rightarrow \frac{5}{2,5} = \frac{7}{3,7} \rightarrow$ 5.3,7 = 7.2,5 $\rightarrow$ 18,5 = 17, 5. Falso, logo dois dos três lados correspondentes não são proporcionais.

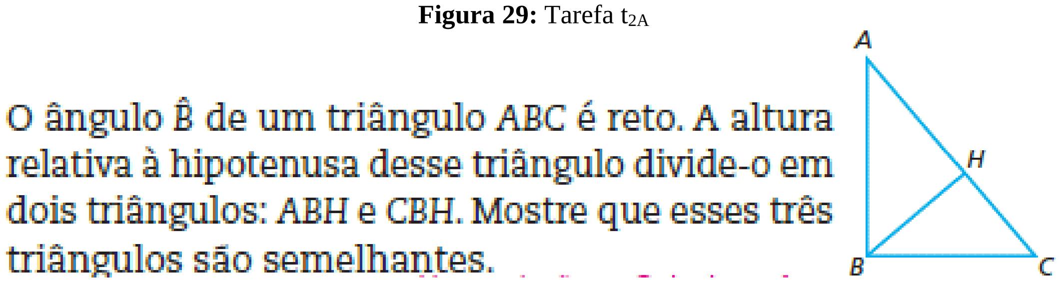
Tecnologia 3: Por definição, para dois triângulos serem semelhantes é necessário que os três lados correspondentes sejam proporcionais. Nesse caso, como não são, logo os triângulos não são semelhantes

Conclusão: Os triângulos ABC e EFG não são semelhantes.

6.3.2. Tipo de tarefa T_{2}: Análise da tarefa t_{2A}

A tarefa em questão, Figura 29, está contida em LD1. O verbo mostrar é o gênero de tarefa e no livro é apresentada com uma figura suporte (Figura 29) que acompanha seu enunciado.

Figura 29: Tarefa t_{2A}


O ângulo $\hat{B}$ de um triângulo ABC é reto. A altura relativa à hipotenusa desse triângulo divide-o em dois triângulos: ABH e CBH. Mostre que esses três triângulos são semelhantes.

Fonte: Leonardo (2020, p. 28).

No livro no qual se encontra essa tarefa não é apresentada uma sugestão de resolução. Por isso que, novamente vamos sugerir uma técnica, levando em consideração o que foi discutido pelos autores em relação ao conceito de semelhança de triângulos. Ressaltamos que na matemática e no contexto em questão, o verbo mostrar assume um papel de prova no sentido empregado por Balacheff (2000) no que diz respeito à distinção entre explicação, prova e prova matemática (demonstração). Embora acreditemos que os autores utilizaram o verbo mostrar com o mesmo sentido de demonstrar, é importante se atentar as notações, visto que adotamos essa distinção. Por isso e porque a estrutura da tarefa exige uma demonstração, apresentamos como técnica à essa tarefa uma prova matemática.

Como se trata de três triângulos, consideramos importante subdividir a referida tarefa em subtarefas, nas quais demonstraremos cada uma das semelhanças. Comecemos, então pelos triângulos ABC e ABH.

Subtarefa 1: Demonstrar que os triângulos ABC e ABH são semelhantes.

Técnica 1: Sejam os triângulos ABC e ABH, por hipótese o ângulo $\hat{B}$ é reto e BC é a altura relativa à hipotenusa, logo o ângulo B$\hat{H}$A também é reto, o que implica que os ângulos $\hat{B}$ e B$\hat{H}$A são congruente. Além disso o ângulo Â é comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso de semelhança AA, os triângulos ABC e ABH são semelhantes.

Subtarefa 2: Demonstrar que os triângulos ABC e BCH são semelhantes

Técnica 2: Sejam os triângulos ABC e BCH. De modo semelhantes a técnica 1, os ângulos $\hat{B}$ e B$\hat{H}$C são congruentes por serem retos. Além disso, no caso desses triângulos, o ângulo $\hat{C}$ é comum a ambos. Logo, pelo caso de semelhança AA, os triângulos ABC e BCH são semelhantes.

Subtarefa 3: Demonstrar que os triângulos ABH e BCH são semelhantes

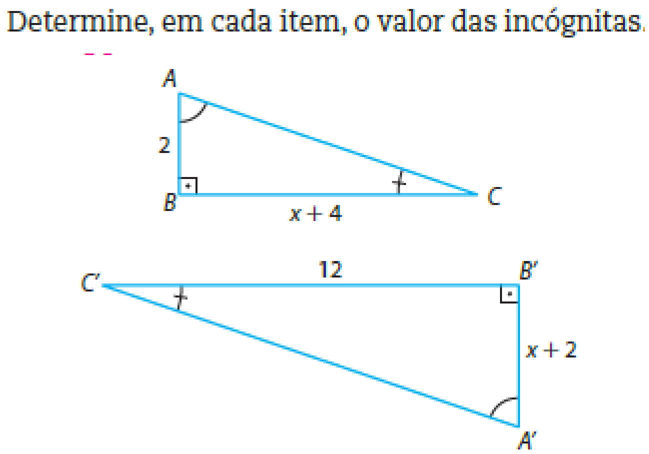
Técnica 3: Sejam os triângulos ABH e BCH. Pelas tarefas anteriores, têm-se que os ângulos B$\hat{H}$A e B$\hat{H}$C são retos, logo são congruentes. Além disso, como ABC e BHA são semelhantes, pela definição de semelhança de triângulos, têm-se que os ângulos A$\hat{B}$H e $\hat{C}$ são congruentes. Logo, pelo caso de semelhança AA, os triângulos ABH e BHC são semelhantes.

Tecnologia: As três técnicas em questão têm como tecnologia o caso de semelhança AA. A técnica 3 também têm como tecnologia a própria definição de semelhança.

6.3.3. Tipo de tarefa T_3: Análise da tarefa t_{3A}

Essa tarefa (Figura 30) está localizada no livro didático LD1. O seu intuito é utilizar a definição e os casos de semelhança para determinar valores desconhecidos, resultantes em uma equação. É importante destacar que nesse caso, o autor não especifica no enunciado que os triângulos são semelhantes, cabendo ao estudante concluir que é necessário demonstrar essa condição e que por meio dela é possível resolver a tarefa. Como novamente os autores não apresentam uma resolução à essa tarefa, apresentamos uma técnica capaz de resolvê-la dentro do que foi apresentado na introdução ao conceito de semelhança de triângulos.

Figura 30: Tarefa t_{3A}



Fonte: Leonardo (2020, p. 28).

Técnica: Considerando os triângulos ABC e A'B'C', têm-se que os ângulos $\hat{B}$ e $\widehat{B'}$ são retos, portanto, congruentes. Além disso, os ângulos correspondentes de mesma marcação, caso de Â e $\widehat{A'}$, também são congruentes. Logo, pelo caso de semelhança AA, os triângulos em questão são semelhantes. Desse modo, por definição de semelhança de triângulos os lados AB e A'B, BC e B'C' são proporcionais. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \rightarrow \frac{2}{X+2} = \frac{X+4}{12} \rightarrow 24 = x^2 + 4x + 2x + 8 \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$$

Recaímos, então em uma equação quadrática, que pode ser resolvida por meio da Fórmula Quadrática, o que requer a mobilização de outros conceitos por parte do estudante, que nesse caso já deve ter visto tal conceito, uma vez que este é abordado nas séries anteriores ao 1º ano do Ensino Médio.

Consideremos então a equação $x^2 + 6x - 16 = 0$. Utilizando a Fórmula Quadrática, tem-se que:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.(-16)}}{2.1} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} \rightarrow x = \frac{-6 \pm 10}{2} \rightarrow$
$x' = \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2$ e $x'' = \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8$.

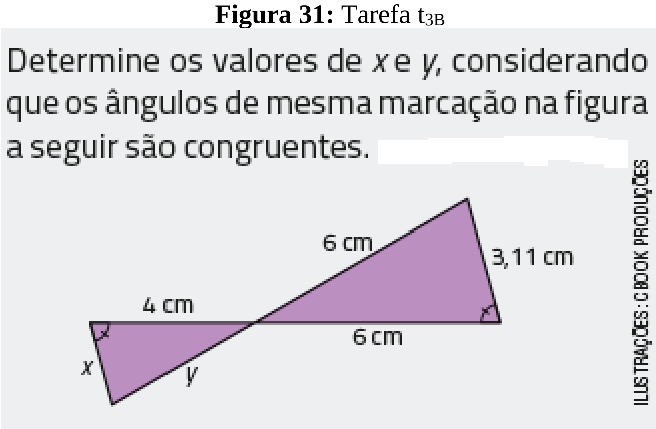
Ao substituirmos o -8 na expressão x+2, temos o resultado -6. Como x+2 se trata da medida de um lado do triângulo, que não poder ser negativa, o x'' = -8 não convém. Logo x = 2.

Tecnologia: Caso de semelhança AA, definição de semelhança de triângulos, propriedade fundamental da proporcionalidade e Fórmula Quadrática.

6.3.4. Tipo de tarefa T_3: Análise da tarefa t_{3B}

Essa tarefa (Figura 31), contida no livro didático LD5, diferentemente da anterior solicita aos estudantes encontrar um valor desconhecido de forma mais direta, sem resultar em uma equação. Novamente, por falta de uma resolução apresentada pelos autores, fornecemos uma técnica capaz de resolvê-la seguindo o que foi apresentado pelo autor ao introduzir o conceito de semelhança de triângulos.

Figura 31: Tarefa t_{3B}



Fonte: Souza (2020, p. 67).

Técnica: Por meio da figura suporte, podemos notar dois triângulos. Como dito no enunciado os ângulos de mesma marcação são congruentes e além disso, ângulos opostos pelo vértice também o são. Logo, os triângulos em destaque possuem dois ângulos correspondentes congruentes, portanto, pelo caso de semelhança AA, são semelhantes. Sendo assim, pela definição de semelhança de triângulos, os lados correspondentes são proporcionais. Logo, podemos escrever:

$\frac{y}{6} = \frac{4}{6} \rightarrow y = 4$ e $\frac{x}{3,11} = \frac{4}{6} \rightarrow 6x = 12,44 \rightarrow x \cong 2,07$

Tecnologia: Caso de semelhança AA, definição de semelhança de triângulos, propriedade fundamental da proporcionalidade, Congruência dos ângulos opostos pelo vértice.

6.3.5. Tipo de tarefa T_{4}: Análise da tarefa t_{4A}

Essa tarefa, representada pela Figura 32, diferentemente das apresentadas até então, aparece no livro didático LD1 como um exercício resolvido, isto é, a técnica que apresentamos para tal, Figura 33, trata-se da resolução proposta pelo autor.

Figura 32: Tarefa t_{4A}

Em certo momento, um poste projeta uma sombra com 1,2 m de comprimento. Ao mesmo tempo, uma pessoa de 1,75 m de altura, próxima ao poste, projeta uma sombra de 0,35 m de comprimento. Qual é a altura do poste?

Fonte: Andrade (2020, p. 19).

Técnica: Como mencionado anteriormente, na Figura 33 apresentamos a técnica para a tarefa t_{4A}.

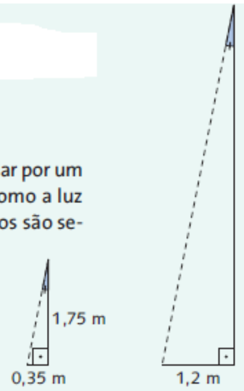
Figura 33:Técnica da Tarefa t_{4A}

Podemos representar esquematicamente o poste, sua sombra e o raio de luz solar por um triângulo retângulo, assim como a pessoa, sua sombra e o raio de luz solar. Como a luz solar incide com mesmo ângulo sobre o poste e a pessoa, então esses triângulos são semelhantes pelo 1º caso de semelhança (AA).

Assim, tomando a altura do poste como x, temos:

$$\frac{x}{1,75} = \frac{1,2}{0,35} \Rightarrow 0,35x = 1,2 \cdot 1,75 \Rightarrow x = \frac{2,1}{0,35} \Rightarrow x = 6$$

Portanto, o poste mede 6 m de altura.



Fonte: Andrade (2020, p. 19).

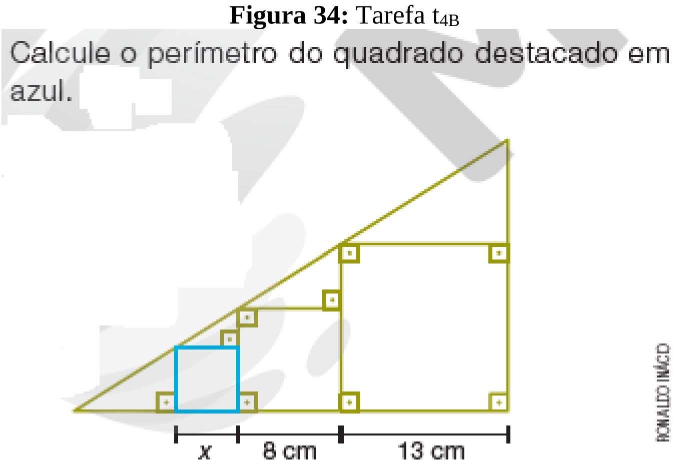
Percebe-se que a técnica em questão, que foi apresentada pelos autores, é capaz de resolver a tarefa proposta, exigindo a mobilização dos conceitos discutidos na introdução ao conteúdo de semelhança de triângulos, a saber: a definição de semelhança de triângulos e o caso de semelhança AA. Além disso, nota-se uma boa sistematização do raciocínio para concluir, com um apoio importante da figura, que os triângulos são retângulos, e que o fato da luz solar incidir sobre o poste e a pessoa com um mesmo ângulo, faz com que os triângulos formados também tenham outros dois ângulos congruentes além dos ângulos retos, o que permite concluir que os triângulos são semelhantes pelo caso de semelhança AA. Nesse contexto, tornou-se possível, por meio da definição de semelhança de triângulos, determinar a altura do poste, chegando assim à resolução da tarefa.

Tecnologia: Caso de semelhança AA, definição de semelhança de triângulos.

6.3.5.1. Tipo de tarefa T_4: Análise da tarefa t_{4B}

Esta tarefa (Figura 34) está contida no livro didático LD2 e além de mobilizar o conceito de semelhança de triângulos, requer do estudante conhecimentos prévios sobre perímetro e a definição do quadrado.

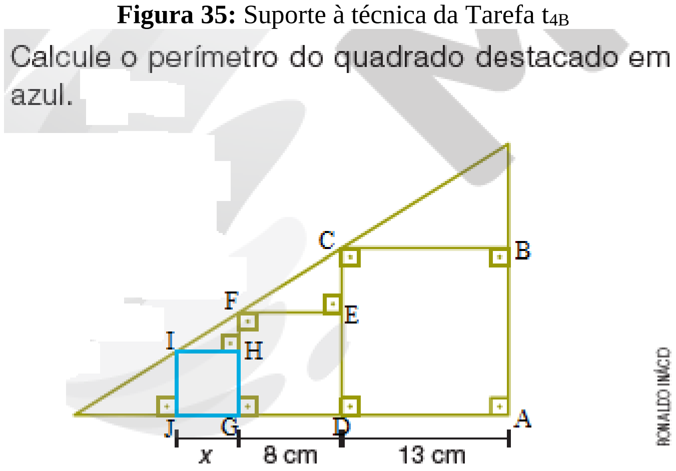
Figura 34: Tarefa t_{4B}



Fonte: Teixeira (2020, p. 19).

Técnica: Para facilitar o entendimento do desenvolvimento da técnica de resolução desta tarefa, faremos algumas marcações identificando os triângulos e quadrados que foram utilizados para determinar o perímetro do quadrado em destaque, como mostra a Figura 35.

Figura 35: Suporte à técnica da Tarefa t_{4B}



Fonte: Adaptado de Teixeira (2020, p. 19).

Nessa perspectiva, destacamos os quadrados ABCD, DEFG e GHIJ e os triângulos ECF e HFI. A tarefa solicita que encontremos o perímetro do quadrado GHIJ. Como o lado CD do quadrado ABCD é composto pelo lado DE do quadrado DEFG e pelo lado EC do triângulo ECF, podemos dizer que $\overline{EC}$ = $\overline{CD}$ – $\overline{DE}$. Como ABCD e DEFG são quadrados, $\overline{CD}$ = $\overline{DA}$. = 13 cm e $\overline{DE}$ = $\overline{GD}$. = 8 cm. Portanto $\overline{EC}$ = $\overline{CD}$ - $\overline{DE}$. = 13 cm – 8 cm = 5 cm. Seguindo o mesmo raciocínio, concluímos que $\overline{HI}$ = 8 - x.

Agora considerando os triângulos ECF e HFI, vamos demonstrar que eles são semelhantes. Como se trata de triângulos retângulos, eles possuem os ângulos retos congruentes. Além disso, as retas que contém os segmentos HI e FE são paralelas, pois $\overleftrightarrow{HI}$ é paralelo à $\overleftrightarrow{JG}$ e $\overleftrightarrow{FE}$ é paralelo a $\overleftrightarrow{GD}$, e por sua vez, os segmentos JG e GD estão sobre a mesma reta suporte. Considerando essas retas paralelas cortadas pela transversal que contém o segmento IF, tem-se que os ângulos $F\hat{I}H$ e $C\hat{F}E$ são correspondentes, logo congruentes. Portanto, pelo caso de semelhança AA, tem-se que os triângulos ECF e HFI são semelhantes. Nesse caso, as medidas de seus lados são proporcionais e podemos escrever:

$$\frac{5}{8-x} = \frac{8}{x} \rightarrow 5x = 64 - 8x \rightarrow 64 = 5x + 8x \rightarrow 13x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{13}$$

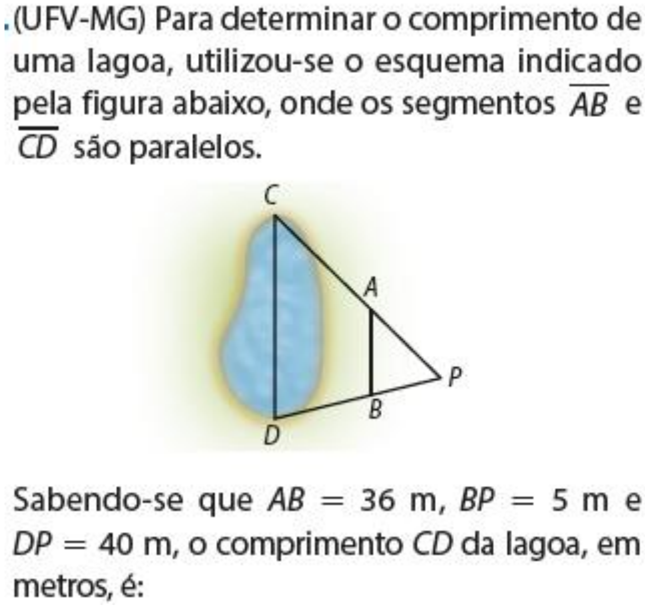
Como o perímetro P de um quadrado é igual a soma da medida de seus lados e a medida do lado do quadrado destacado é igual a x = $\frac{64}{13}$, tem-se que P = $\frac{64}{13} + \frac{64}{13} + \frac{64}{13} + \frac{64}{13} = \frac{256}{13}$.

Tecnologia: caso de semelhança AA, definição de quadrado, teorema das paralelas..

6.3.5.2. Tipo de tarefa T_4: Análise da tarefa t_{4C}

Essa tarefa (Figura 36) está contida no livro didático LD6 e permite ao estudante mobilizar outros conceitos para além dos casos de semelhança, como por exemplo o teorema fundamental da semelhança. Novamente a técnica apresentada foi proposta pelos autores desta pesquisa.

Figura 36: Tarefa t_{4C}


(UFV-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado pela figura abaixo, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.

Sabendo-se que $AB = 36$ m, $BP = 5$ m e $DP = 40$ m, o comprimento CD da lagoa, em metros, é:

Fonte: Giovanni Jr; Câmara (2020, p. 41).

Técnica: Considerando os triângulos CDP e ABP, tem-se que por hipótese AB e CD são paralelos, logo pelo teorema fundamental da semelhança CDP e ABP são semelhantes. Sendo assim os lados CD e AB, DP e BP são proporcionais e podemos escrever:

$\frac{CD}{AB} = \frac{DP}{BP} \rightarrow \frac{CD}{36} = \frac{40}{5} \rightarrow 5CD = 1440 \rightarrow CD = 288$. Logo o comprimento da lagoa é 288m

Tecnologia: Teorema fundamental da semelhança

6.3.6. Tipo de tarefa T_5: Análise da tarefa t_{5A}

A tarefa t_{5A} (Figura 37) contida no livro didático LD4 é interessante, pois sua técnica resulta em outra tarefa, que chamamos de t_{5A}, que por sua vez demanda uma nova técnica que deve ser capaz de apresentar a resposta solicitada na tarefa inicial. Nesse sentido, como técnica para a tarefa originária, vamos considerar a sugestão do autor de LD4.

Figura 37: Tarefa t_{5A}

Você produtor

10. Elabore um problema envolvendo semelhança de triângulos que tenha como resposta a frase:

A altura do prédio é igual a 40 metros.

Fonte: Andrade (2020, p. 19).

Técnica: Resolução sugerida pelo autor de LD1, Figura 38, que tem como resposta a frase solicitada.

Figura 38: Técnica da Tarefa t_{5A}

Resposta pessoal. Possível resposta: em um mesmo momento, um prédio projeta uma sombra de 20 m de comprimento, enquanto uma pessoa de 1,7 m de altura projeta uma sombra de 85 cm de comprimento. Qual é a altura do prédio?

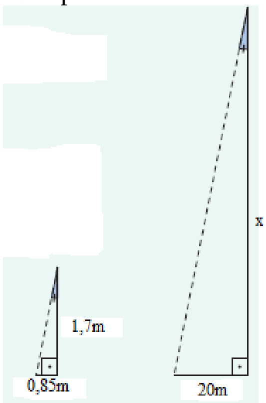
Fonte: Andrade (2020, p. 19).

Percebe-se uma semelhança com a tarefa t_{4A}, apresentada como exercício proposto mesmo livro didático, LD4, pois exploram a noção de projeção, envolvendo a medida da altura de uma pessoa e de determinado objeto. Nesse contexto, podemos conjecturar, que o estudante além do que foi apresentado na introdução do conceito, pode utilizar como exemplo os exercícios resolvidos ou propostos no livro didático.

Como se trata de uma nova tarefa, apresentamos uma nova técnica capaz de resolvê-la para certificar que esta tarefa de fato leva a resposta solicitada. Nesse sentido, a **tecnologia** que justifica a primeira técnica será justamente a nova técnica apresentada. Além disso, conforme mencionado acima, é uma tarefa similar à tarefa t_{4A}, adotamos uma técnica também similar à técnica de t_{4A}, tomando-a como base.

Técnica da tarefa $t_{5A'}$: Como se trata de uma projeção, podemos representar o prédio, sua sombra e o raio da luz solar, assim como a pessoa sua sombra e o raio da luz solar, por um triângulo retângulo conforme a Figura 39.

Figura 39: Suporte à técnica da Tarefa $t_{5A'}$



Fonte: Adaptado de Andrade (2020, p. 19).

Além dos ângulos retos congruentes, os triângulos possuem os ângulos destacados congruentes, pois a luz do sol incide sobre o prédio e a pessoa com a mesma angulação, pelo caso de semelhança AA, eles são semelhantes. Portanto, denotando o valor desconhecido por x, podemos escrever:

$\frac{1,7}{x} = \frac{0,85}{20} \rightarrow 1,7.20 = 0,85x \rightarrow$ e $34 = 0,85x \rightarrow x = \frac{34}{0,85} \rightarrow x = 40$

Logo, a técnica em questão justifica a técnica (tarefa) da tarefa t_{5A}, sendo de fato sua tecnologia.

Tecnologia: caso de semelhança AA.

6.3.7. Tipo de tarefa T_5: Análise da tarefa t_{5B}

Esta tarefa (Figura 40) está contida no livro didático LD5 e se assemelha a tarefa t_{5A}, distinguindo-se por não exigir uma resposta fixa. Da mesma forma, a técnica dessa tarefa gera uma nova tarefa, que não apresentamos, pois consideramos que pode ser qualquer uma das outras tarefas já apresentadas até aqui, cujas técnicas e tecnologias já foram discutidas.

Figura 40: Tarefa t_{5B}

Elabore um problema envolvendo semelhança de triângulos. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, depois, verifiquem se a resposta está correta.

Fonte: Teixeira (2020, p. 619).

No entanto, destacamos e corroboramos com a observação do autor ao enfatizar que essa tarefa possibilita a ampliação do repertorio de reflexões e questionamentos sobre determinadas situações por parte dos estudantes (Teixeira, 2020).

6.4. Discussão

Por meio da análise da introdução do conceito de semelhança e da estrutura praxeológica relacionada à este conceito apresentadas nos livros didáticos selecionados, foi possível constatar que as organizações matemáticas e didáticas estão bem interligadas, visto que, embora em sua maioria as técnicas para as tarefas apresentadas tenham sido propostas pela autora desta pesquisa, a análise realizada apoiou-se naquilo que foi proposto pelos respectivos autores dos livros didáticos nos quais estavam localizadas essas tarefas.

As tarefas são diversificadas e trata desde a definição, aos casos de semelhança e o teorema fundamental. Houve poucas do tipo T_2, que exigem uma demonstração explorando os conceitos estudados sem o uso de dados específicos, o que entra em consonância com o estudo de Carvalho (2007), no qual é destacada a ausência de tarefas de cunho investigativo nos livros didáticos que foram analisados. Em sua maioria, as tarefas recaem em procedimentos algébricos devido ao fato de envolverem triângulos com medidas específicas, como é o caso das tarefas do tipo T_1.

Como pudemos ver a partir dos exemplos apresentados, são tarefas com enunciados claros, que retratam diversas situações, desde a aplicação direta da definição, a questões mais elaboras como por exemplo as tarefas t_{2A} e t_{4B}, ou de tarefas em que já são apresentadas as figuras, àquelas nas quais os estudantes constroem-nas por meio dos dados fornecidos. Além de tarefas que associam outras noções como as de triângulo e da semelhança, têm-se as noções de perímetro, paralelismo, outras figuras planas como o quadrado, projeção ortogonal, dentre outras. Algumas delas são utilizadas para estudar o conceito de semelhança de triângulos, é o caso das tarefas envolvendo projeção ortogonal.

Lembramos que o livro didático, e consequentemente suas tarefas, são uma ferramenta de auxílio ao professor, o que lhe permite traçar estratégias que favoreçam a aprendizagem daquilo que se pretende ensinar. Ou seja, se o intuito é desenvolver nos estudantes, além do conceito de semelhança, a redação de demonstrações, o professor pode focar em tarefas que permitam esse desenvolvimento, além disso, explorar aspectos que por vezes não são pedidos e faz parte do processo de demonstração, como destacar o que são a hipótese e a tese, o que se pode utilizar do aporte da figura, caso tenha, dentre outros aspectos que podem ir além do que é colocado pelos autores dos livros didáticos.

Quando uma tarefa demanda uma técnica que exige uma demonstração, ou seja, um raciocino dedutivo, é comum que a tecnologia apareça na construção da própria técnica, justificando-a, como acontece na tarefa t_{2A} (Figura 29) por exemplo. Isso porque no processo de redação de uma demonstração é necessário justificar com argumentos matematicamente válidos cada escolha feita que levou à tese estabelecida, sejam esses argumentos hipóteses dadas, proposições ou teoremas já demonstrados, axiomas, definições, dentre outros. Nesses casos, temos um exemplo no qual "[...] o discurso tem a função dupla de ser técnica e tecnologia, pois permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado e justificar que tal resultado seja o correto" (Almouloud, 2022, p.158).

Destacamos que em muitos casos, a utilização do verbo mostrar nas tarefas propostas, sugere que os autores não distinguem prova e demonstração, pois utilizam esse verbo com o mesmo intuito de demonstrar. Entretanto, conforme a distinção estabelecida por Balacheff (2000), é importante ter cuidado com essas terminologias, sobretudo nesse nível de escolaridade, para não gerar obstáculos na aprendizagem.

As tarefas do tipo T_5 se destacam por apresentarem uma problemática que foge ao rotineiro, ao possibilitar a mobilização de novas tarefas e consequentemente novas técnicas, corroborando o que enfatiza Almouloud (2022) ao salientar a necessidade de se ter tarefas efetivamente problemáticas para a produção de novas técnicas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo dessa pesquisa foi analisar as organizações matemáticas e didáticas de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio a respeito de provas e demonstrações envolvendo semelhança de triângulos. Nessa perspectiva, realizamos uma análise da abordagem inicial do conceito de semelhança de triângulos adotada pelos autores dos livros didáticos selecionados e uma sistematização dos tipos de tarefas, com suas respectivas tarefas encontrados nesses livros, bem como suas técnicas e suas tecnologias.

A partir do que foi apresentado, notamos que em sua maioria, os autores dos livros didáticos selecionados optaram por uma organização matemática que consiste em apresentar a definição de semelhança, seguidos de alguns exemplos e posteriormente os casos de semelhança, também com exemplos. Houve uma abordagem que apresentou o teorema fundamental, sendo este o que mais foi enunciado com sua respectiva demonstração. Quanto à organização didática, em alguns dos livros pode-se perceber uma tentativa de contextualização, por meio de exemplos cotidianos utilizando a ampliação de fotografias por exemplo. Contudo, notamos pouca diversificação em relação à posição dos triângulos nos exemplos utilizados, sendo em sua maioria triângulos homotéticos.

Ressaltamos uma aproximação entre a organização matemática e didática, visto que as tarefas e suas respectivas técnicas que envolvem o conceito de semelhança podem permitir que os estudantes desenvolvam o que foi introduzido inicialmente. Os autores apresentaram tarefas que podem fazer apelo a demonstração, quanto as provas, pois em suas técnicas pudemos desenvolver tanto um raciocínio condizente com uma demonstração, como também, pudemos observar a possível utilização de provas, por meio do uso de software como o GeoGebra, como foi sugerido em um dos livros didáticos analisados. Cabe ao professor decidir qual a melhor estratégia considerando o tempo de aprendizagem do estudante. Além disso, a sugestão da utilização de software reforça o potencial dessas ferramentas principalmente no ensino de geometria, como foi destacado na revisão de literatura.

Diante do exposto nas discussões referentes aos dois momentos destacados na análise praxeológica dos livros didáticos selecionados, constatamos, de modo geral, que os autores apresentam os principais elementos relacionados à semelhança de triângulos, a saber: definição, os casos de semelhança e o teorema fundamental da semelhança. Alguns autores optaram por uma introdução direta, partindo da definição de semelhança de triângulos, enquanto outros fizeram uma abordagem gradual, começando, em alguns casos, pelo conceito geral de semelhança. Mesmo que timidamente, alguns dos autores, apresentaram uma contextualização ao associarem a semelhança à ampliação e redução de figuras, por exemplo.

Contudo, na maioria dos livros didáticos, os autores não exploraram provas e demonstrações, sobretudo no estudo dos casos de semelhança, que como apresentado no tópico 3 desta pesquisa, têm demonstrações relativamente simples que podem ser trabalhadas também no Ensino Médio. No entanto, reiteramos, que como o livro didático é apenas um suporte, cabe ao professor escolher a melhor maneira de introduzir essas noções.

Embora muitas recaiam em procedimentos mais algébricos, há tarefas que exigem a mobilização de um raciocínio argumentativo. Essas tarefas têm potencial para serem exploradas pelo professor em sala de aula no intuito de desenvolver competências argumentativas nos alunos. Nesse sentido, destacamos novamente sua importância na condução das técnicas utilizadas para resolver as respectivas tarefas.

Nessa perspectiva, inferimos ter alcançado os objetivos desta pesquisa, respondendo assim à questão que a norteou, e como proposta de estudos futuros pretendemos investigar o desenvolvimento dessas técnicas pelos estudantes e/ou professores, por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), com o intuito de potencializar o desenvolvimento da aprendizagem de provas e demonstrações.

REFERÊNCIAS

AGOSTINI, Fernanda Cristine Guimaraes. **Metodologias Ativas como proposta para o estudo de semelhança de triângulos**. 2022. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João Del-Rei, Rio de Janeiro, 2022.

ALMEIDA, Júlio César Porfírio de. **Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo**. 2007. 220 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: Reunião anual da Anped, 2007, Caxambu. **Anais...** Caxambu: n. 30, p. 1-18, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; REGNIER, J. C.; FUSCO, C. A. Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS, ENGINEERING AND SOCIETY - ICMES, 1., 2009, Curitiba. **Anais…** Curitiba: [s.n.], p. 1-8, 2009.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión: Revista Iberoámericana de Educación Matemática**, v. 42, p. 9-34, 2015.

ALMOULOUD, Saddo Ag et al. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 426-466, 2021.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 2.ed. Curitiba: Editora UFPR, 2022.

ANDRADE, Thais Marcelle de (ed.). **Matemática interligada:** geometria espacial e plana. São Paulo: Scipione, 2020.

BALACHEFF, Nicolas. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. **Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, Nicolas. A study of students' proving processes at the junior high school level. In: Second UCSMP international conference on mathematics education. Chicago: NCTM, 1998. Tradução: ALMOULOUD, Saddo Ag; MORETTI, Méricles Tadeu. estudo dos processos de prova dos alunos no colégio. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n. 1, p. 698-721, 2022.

BALACHEFF, Nicolas. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. una empressa docente. **Hal open Science**, 2000.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. SBM, 1995.

BARBOSA, J. C. **Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática**: aproximações e distanciamentos. In: OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. (orgs.) Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática. Brasília: SBEM, 2018.

BICUDO, Irineu**. Introdução**. In: EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, v. 25, n. 3, p. 364-387, 2017.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática:** geometria e trigonometria. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BORGES, Fabio. **Narrativa adaptada para o ensino de semelhança de triângulos para aluno com deficiência visual em situação de inclusão**. 2020. 144 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino De Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2020.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guia PNLD 2021**. 2021. Disponível em: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/historico. Acesso em: 20 de maio de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de maio de 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUNZEN JUNIOR, Clecio dos Santos. **Livro didático de língua portuguesa**: um gênero do discurso. 2005. 168 f. Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

CALIANI, Fabricio Jose Oliveira. **Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides**. 2021. 60 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, Rio de Janeiro, 2021.

CARVALHO, Cláudia Cristina Soares de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio.** 2007. 163 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática e suas tecnologias:** trigonometria e sequências. São Paulo: Edições SM, 2020.

CORREIA, Joao Carlos Caldato. **Argumentação, Prova e Demonstração: uma Investigação sobre as Concepções de Ingressantes no Curso de Licenciatura em Matemática**. 2018. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

CORREA, Marcelo Martins. **Resolução de Problemas envolvendo Função Afim através do uso de Semelhança de Triângulos**. 2018. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio de Janeiro, 2018.

CHAACHOUA, Hamid; COMITI, Claude. L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. **ACTES CITAD2**, p. 771-789, 2010.

CHEVALLARD, Yves. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.12, n.i, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Yves. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique**, 1998. Disponível em: https://s2hepdoctorant.github.io/TAD_Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 10 de Fev. de 2022.

CHEVALLARD, Yves. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique**, 1999. Disponível em: http://yves.Chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 10 de Fev. de 2022.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos:** geometria plana e geometria espacial. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

DE VILLIERS, Michael D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, v. 63, p. 31-36, 2001.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, 9: geometria plana. São Paulo: Atual, 1993.

DOMINGUES, Hygino H. Introdução histórica. In: FETISSOV, A.I. **A demonstração em Geometria**. Tradução: Hygino Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: atual, 1995.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FACCHINI, Camila. **Uma proposta de atividades de semelhança de triângulos para o ensino fundamental**. 2021. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, Rio de Janeiro, 2021.

FERREIRA FILHO, J.L. **Um estudo sobre Argumentação e Prova envolvendo o Teorema de Pitágoras.** 2007. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 341 f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FETISSOV, A.I. **A demonstração em Geometria**. Tradução: Hygino Domingues, Matemática: aprendendo e ensinando. São Paulo: atual, 1995.

HORBACH, Ivan Carlos. **SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UM ESTUDO PROPOSITIVO ATRAVÉS DO SCRATCH**. 2020. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Rio de Janeiro, 2020.

LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões:** matemática e suas tecnologias. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

MARTINS, Rachel Bloise. **Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. 2012 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

MAZZOLLI, Suellen Rodrigues de Oliveira. **Olhares para o papel das demonstrações em matemática:** formadores e professores têm a palavra. 2016. 146 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

MOL, Rogério Santos**. Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

OLIVEIRA, Esmeralda Maria Queiroz de. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental**. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

ORDEM, Jacinto. **Prova e demonstração em geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique**. 2010. 138 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ORDEM, Jacinto. **Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique**. 2015. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PINTO, Gisela Maria da Fonseca; ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. Concepções de licenciandos em Matemática sobre demonstração em Geometria. **Unión: revista iberoamericana de educación matemática**, n. 46, p. 90-106, 2016.

LOPES, Thayany Pinheiro Cordeiro; PIRES, Liceia Alves; PORTELA, Mariliza Simonete. A Matemática financeira no livro didático do 6º ano. **ACERVO-Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 2, n. 2, p. 113-133, 2020.

SANT'ANNA, Viviane Nogueira Ponciano. **FORMAÇÃO DE PROFESSORES E TECNOLOGIAS: UMA DISCUSSÃO SOBRE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS**. 2020. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020.

SANTOS, Antonio Eudo dos. **SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E SUAS APLICAÇÕES**. 2018. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Cariri, Rio de Janeiro, 2018.

SERRES, Michel. **Los orígenes de la geometría**: tercer libro de las fundaciones. Siglo XXI, 1996.

SILVA, Heliton Melo da. **USOS/SIGNIFICADOS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS (RÉGUA E TRANSFERIDOR) E DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FORMAS ALTERNATIVAS DE ENSINAR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS A ESTUDANTES DO 9º ANO DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE RIO BRANCO**. 2018. 168 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2018.

SILVA, Ceris S. Ribas da. **Como os professores utilizam os novos livros didáticos de alfabetização avaliados com as maiores menções pelo pnld.** Disponível em: http://27reuniao.anped.org.br/gt08/t082.pdf. Acesso em: 15 de maio de 2023.

SOUZA, Jamile dos Santos. **O processo de demonstração em geometria plana:** compreendendo dificuldades de alunos de Licenciatura em Matemática a partir da Análise de Erros. 2021. 87 f. Monografia (Graduação) – Universidade do Estado da Bahia, Alagoinhas, 2021.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática:** Sequências e trigonometria. São Paulo: Editora FTD, 2020.

SOUZA, Maria Estela Conceição de Oliveira de. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer**. 2009. 143 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (ed.). **Diálogo:** matemática e suas tecnologias. v.2. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

VARELLA, Márcia. **Prova e demonstração na Geometria Analítica:** Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. 2010. 214 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.