UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

HENRIQUE PLÍNIO SANTOS RIOS

TRANSFORMANDO QUESTÕES DO ENEM DE PROPORCIONALIDADE EM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO: UM EXPERIMENTO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Salvador – Ba

Julho de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

HENRIQUE PLÍNIO SANTOS RIOS

TRNSFORMANDO QUESTÕES DO ENEM DE PROPORCIONALIDADE EM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO: UM EXPERIMENTO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada á Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT – UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Graça Luzia Dominguez Santos

Salvador – Ba

Julho de 2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

R586 Rios, Henrique Plínio Santos

Transformando questões do ENEM de proporcionalidade em atividade de investigação: um experimento com alunos do 3º ano do Ensino Médio / Henrique Plínio Santos Rios – Salvador, 2024.

68 f.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Graça Luzia Dominguez Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2024.

1. Matemática. 2. Ensino Médio. 3. ENEM. I. Santos, Graça Luzia Dominguez. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 51

TRANSFORMANDO QUESTÕES DO ENEM DE PROPORCIONALIDADE EM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO: UM EXPERIMENTO COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

HENRIQUE PLÍNIO SANTOS RIOS

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 11/07/2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
GRACA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS

Profa. Dra. Graça Luzia Dominguez Santos (orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Profa. Dra. Elais Cidely Souza Malheiro
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA

Profa. Dra. Jamille Vilas Bôas de Souza
Instituto Federal da Bahia

À minha família, minha base mais sólida. Em especial aos meus pais, por serem meus melhores modelos.

A Joniel, companheiro dos últimos 25 de minha vida que sempre soube compreender minhas ausências me apoiando incondicionalmente.

Ao meu filho Daniel que veio para me mostrar o sentido maior do amor.

A meu irmão Jusemário por um dia ter acreditado em mim até mais do que eu.

AGRADECIMENTOS

A Deus por estar sempre presente na minha vida me dando força, sabedoria e saúde para superar as dificuldades e alcançar meus objetivos.

À Universidade Federal da Bahia (UFBA) que me oportunizou-me uma experiência de excelência durante todo o curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

A todos os professores do PROFMAT que contribuíram de maneira sólida durante todo o meu curso e me apresentaram não apenas conteúdos matemáticos aprofundados, mas acima de tudo se mostraram sempre dispostos a nos ajudar.

A todos os colegas de curso pela garra, determinação e trocas de experiências.

Aos meus alunos, **em especial à turma 3BM de 2023** que foram minhas "cobaias" e juntos aprendemos na prática como investigar em Matemática.

A todos os meus colegas de trabalho que nesses 21 anos de docência me oportunizaram vivências riquíssimas e muito me inspiraram.

Agradecimento especial à minha colega Evelim Trabuco pela sua ajuda valiosa na confecção do *"abstract"*.

À coordenadora Geovana Cardoso por partilhar suas vivências em educação, pelo suporte e orientações com os documentos oficiais.

Às professoras doutoras Elaís Cidely Souza Malheiro e Jamile Vila Bôas de Souza, integrantes da banca, que se atentando sempre aos mínimos detalhes fizeram riquíssimas contribuições para tornar esse trabalho melhor.

À minha excelente professora e posterior orientadora Doutora Graça Luzia Dominguez Santos que teve a excelente ideia de trazer a Educação Matemática para um curso com fortes tendências de Matemática pura. E que como orientadora sempre teve muita paciência e sabedoria para não me deixar desistir, mesmo tendo que dar alguns puxões de orelha quando necessário.

“Aprendemos desde que nascemos a partir de situações concretas, que pouco a pouco conseguimos ampliar e generalizar. Aprendemos quando alguém mais experiente nos fala e aprendemos quando descobrimos a partir de um envolvimento mais direto, por questionamento e experimentação.”

(José Moran, 2018)

RESUMO

Essa dissertação visa apresentar e analisar a elaboração e implementação de uma ferramenta pedagógica, um Produto Educacional, no qual questões do ENEM, que têm a proporcionalidade como base resolutiva, foram abertas em Atividades Investigativas. O referido produto pode ser aplicado não apenas em turmas do Ensino Médio, mas também nas séries finais do Ensino Fundamental, em razão de ser nessa etapa escolar que se aborda o tema proporcionalidade. O conteúdo e a abordagem de ensino inovadora escolhidos visam contribuir para aprimorar a compreensão dos alunos sobre questões do ENEM que podem ser resolvidas através da proporcionalidade, visto que a literatura relata dificuldades na interpretação de tais questões. O estudo é de natureza qualitativa, os dados foram produzidos por intermédio de um experimento de ensino para implementação do Produto Educacional em uma turma do 3º ano matutino do ensino médio regular do Colégio Estadual Luiz Eduardo Magalhães, na cidade de Camaçari-Ba. Durante a implementação do Produto Educacional verificou-se que apesar do estranhamento inicial dos alunos com tarefas de teor investigativo, gradativamente eles aceitaram o convite, perceptível pelo aumento de interesse e engajamento para conclusão das atividades. Dessa forma, estabeleceu-se um ambiente de aprendizagem cooperativo, com o envolvimento de todos os atores - alunos/alunos e alunos/professor - no qual o professor atuou como mediador e os discentes como protagonistas do processo educativo.

Palavras-chave: Atividades Investigativas; Proporcionalidade; Ensino de Matemática; ENEM.

ABSTRACT

This paper intends to introduce the elaboration and execution of one standard pedagogical tool, an Educational Product, which concerns about questions from ENEM, it has the proportionality in mathematics teaching as the answer base, for this reason these questions were used at Researching Activities. This study experience can be used not only in High School groups, but also in ending grades of elementary schools, because proportionality in Mathematics is common to start at this final educational process. The subject and the approach of this innovative teaching that were selected they goal to contribute and improve the student's comprehension about ENEM's question. And these questions were focused on proportionality, because the literature demonstrates the misunderstanding that happens among the students. The study is qualitative in nature, the data were produced through a teaching experiment to implement the Educational Product in a 3rd year morning class of regular high school at Colégio Estadual Luiz Eduardo Magalhães, in the city of Camaçari-Ba. Along the implementation of this Educational Tool was verified an initial weirdness because it was an investigative task, but progressively the students accepted this request, and it was perceptible because the students showed their contribution and they committed themselves to complete the tasks. In this way, a collaborative learning environment was formed with all actors that were participating of this pedagogical tool (students/students and students/teacher), whereupon the teacher acted as a mediator and the students as protagonist inside this educational process.

Key-words: Researching Activities; proportionality; Mathematic teaching; ENEM.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCNS	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
UCSAL	Universidade Católica do Salvador

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesse capítulo, relato minha trajetória, cujas inquietações evidenciaram a escolha do tema dessa dissertação. Explicitarei durante a narrativa os objetivos e as justificativas (não apenas de caráter pessoal) que ressaltam a importância do tema e da proposta da abordagem de ensino para a Educação Básica. Por último, é apresentada a estrutura e a organização desta dissertação.

Bem antes de ser alfabetizado eu já me via professor. Lembro que, desde a 6ª série (atual 7º ano), eu já ensinava Matemática para os meus colegas e não demorou muito para que eu começasse a dar aulas de reforço em minha casa. Fiquei um pouco frustrado por não ter feito Magistério no Ensino Médio. Fui cursar Química na Escola Técnica Federal da Bahia, visto que um emprego no Polo Petroquímico era mais promissor financeiramente do que ser professor. Assim, tive que deixar de lado o sonho de ser professor para ingressar no mercado de trabalho como técnico químico de uma empresa petroquímica.

Após 8 anos trabalhando na indústria, retomei meu sonho e comecei a fazer o curso noturno de Licenciatura em Matemática na Universidade Católica do Salvador (UCSAL). Ainda durante a graduação, eu tinha como rotina estudar os conteúdos da Educação Básica de Matemática, mesmo que não estivesse em sala de aula. Esses conteúdos não faziam parte da estrutura curricular do meu curso, mas garantiram minha aprovação no concurso para professor da rede estadual um ano antes de me formar.

Conclui o curso de Licenciatura em Matemática em dezembro de 2002 e em março de 2003 assumi a minha vaga como professor efetivo na rede estadual. Depois de 6 anos como professor, fiz uma especialização, na qual meu trabalho de conclusão de curso teve como tema “O papel do professor de Matemática no processo de ensino e aprendizagem”. Nessa época, eu já buscava formas diferentes de ministrar cada aula, de motivar e despertar o interesse dos alunos por Matemática.

Durante o mestrado do PROFMAT, ao cursar a disciplina MD98 – Tópicos de Matemática, com a professora Drª. Graça Luzia Dominguez Santos, que veio a ser minha orientadora, estudamos, entre outros tópicos, abordagens de ensino inovadoras, distintas do ensino tradicional e, para minha surpresa, em minhas aulas, eu já usava algumas dessas abordagens sem saber. Alguns alunos me pediam para fazer resumos escritos das minhas futuras aulas (notas de aula) e também para indicar videoaulas sobre o assunto. Dessa forma, eu estava usando a metodologia ativa: Abordagem de Sala de Aula Invertida de maneira intuitiva.

Era uma tentativa de despertar o interesse dos alunos e fazer com que eles tivessem um contato prévio com o conteúdo a ser estudado, ou seja, propor uma alternativa a aula tradicional de Matemática, caracterizada por Skovsmose (2000) como Paradigma do Exercício, o qual se organiza sequencialmente como: o professor expõe o conteúdo, dá alguns exemplos, os alunos fazem exercícios (semelhantes ao que professor fez) e o professor verifica se os exercícios estão certos.

No decorrer da minha prática docente, tenho observado que, a cada ano que passa, os estudantes diminuem mais e mais o interesse e motivação para estudar Matemática. O que tem me levado a reconhecer que o Paradigma do Exercício já não surte o mesmo efeito que antigamente. Nessa direção, Santos e Soares (2011) afirmam que a mera transmissão de informações não mais caracteriza um processo eficiente de ensino e aprendizagem.

Estudar estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, acendeu uma luz no fim do túnel em minha mente sobre a escolha do tema da minha dissertação. Por vir de encontro ao meu anseio de procurar formas inovadoras de apresentar um conteúdo, o qual é decorrência da minha atitude reflexiva sobre o processo de ensino e aprendizagem, investigando alternativas para tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas. Para Alarcão (2005), professor reflexivo é um profissional que necessita saber quem é e as razões pelas quais atua. Alarcão (1992) também menciona algumas características de um professor reflexivo: conhecer os alunos e suas características, saber sobre o nível de aprendizagem e aflições dos alunos e conhecer a si mesmo.

Entretanto, ser um professor reflexivo por si só não é o bastante para modificar o processo de ensino e aprendizagem se as nossas aulas ainda são no modelo de ensino tradicional. Assim sendo, uma possibilidade que me pareceu viável para se contrapor ao ensino baseado no paradigma do exercício é a perspectiva proposta por Skovsmose (2023), denominada de Cenários de Investigação, que são ambientes que favorecem e potencializam a investigação. Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos respostas prontas (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022).

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da competência 5 da área de Matemática e suas tecnologias propostas na Base Nacional Curricular Comum - BNCC (Brasil, 2018, p. 531) para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Ainda de acordo com BNCC (Brasil, 2018), o desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem surgir de experiências empíricas. Ao formular conjecturas, mediante suas investigações, os estudantes deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las.

Há quase 8 anos, comecei a utilizar as questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) nas minhas aulas. Não apenas para preparar os estudantes para esse exame, mas sobretudo porque as questões do ENEM, em geral, são contextualizadas e elaboradas a partir de um texto base com referências à realidade ou a uma semirrealidade, tornando-as mais motivadoras, por retratarem fenômenos da realidade ou situações próximas da vida real. Tais referências são citadas em Skovsmose (2000) como ambientes possíveis para o desenvolvimento de atividades de investigação. Para Skovsmose (2000), nas tarefas com referência à realidade, alunos e professores trabalham com situações da vida real. Enquanto as tarefas com referência à semirrealidade simulam situações que podem acontecer na realidade. Entendemos que as questões do ENEM apresentam potencial para serem modificadas, com o propósito de se tornarem atividades investigativas.

No transcorrer das resoluções das questões do ENEM, em vários momentos os alunos diziam “ Professor, no Enem dá para resolver várias questões por regra de três, não é? A parte mais difícil é interpretar e saber o que precisa ser feito”. De maneira geral, os alunos consideram os textos muito longos, eles podem ficar perdidos e sem saber o que deve ser feito. Sobre o tema regra de três, de fato, há grande número de questões envolvendo proporcionalidade. Após fazer uma análise de conteúdos nas provas de Matemática do ENEM de 2017 a 2022, encontrei os seguintes resultados: das 45 questões presentes no exame que abordam proporcionalidade como base resolutiva, muitas delas envolvem razão entre duas grandezas (densidade absoluta, densidade demográfica, velocidade média, vazão, escala), proporção (números proporcionais, regra de três), porcentagem, dentre outros. Essas questões estão assim distribuídas:

Tabela 1: Incidência de proporcionalidade no ENEM

Ano	Quantidade de questões	Ano	Quantidade de questões
2017	8 questões (17,8%)	**2020**	14 questões (31,1%)
2018	14 questões (31,1%)	**2021**	12 questões (26,7%)
2019	13 questões (28,9%)	**2022**	12 questões (26,7%)

Fonte: Elaborada pelo autor com base nas provas do ENEM, 2017-2022

Proporcionalidade é um dos conteúdos matemáticos com bastante importância no cotidiano das pessoas visto que muitos aspectos de nossas vidas operam sob essa estrutura (Fernandez, LLinares, 2012). Faria e Maltempi (2020), consideram o raciocínio proporcional[1] importante para a matemática escolar em virtude deste ser extremamente útil na interpretação dos fenômenos reais.

São inúmeras as situações no comércio em que precisamos aumentar uma vez e meia, dobrar, triplicar, dividir ao meio ou em mais partes certas quantidades e consequentemente o respectivo valor a ser pago. Ou em certas situações da Física, a velocidade é diretamente proporcional à distância percorrida e inversamente proporcional ao tempo gasto. Em Química, a densidade de um corpo é diretamente proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao seu volume. Apesar desse contato com o tema proporcionalidade, percebo na minha prática que os alunos ainda apresentam muita dificuldade para entender e aplicar esse conceito na resolução de tarefas.

De fato, segundo Alpha e Almouloud (2021, p. 773), “apesar do importante lugar ocupado pela noção de proporcionalidade tanto no ensino quanto no cotidiano, os alunos têm muitas vezes demonstrado domínio insuficiente ou até tardio dessa noção”. Alguns estudos (Costa Júnior, 2010; Silva, 2008; Martins, 2007) apontam que o conceito de proporcionalidade nas escolas se restringe quase que exclusivamente à resolução de regra de três deixando de lado as relações existentes entre as grandezas. Segundo os autores, se o professor, em seu trabalho com o conteúdo, utiliza apenas esse tipo de estratégia está deixando de explorar as relações existentes entre as grandezas e, com isso, os alunos perdem a oportunidade de desenvolver o raciocínio proporcional.

Para Faria (2016, p. 49), o raciocínio proporcional pode ser entendido como:

> [...] a capacidade de raciocinar, estabelecendo uma relação entre duas ou mais grandezas em termos relativos, mobilizando para tal raciocínio a habilidade de analisar

[1] Em seguida, apresentaremos uma definição precisa do raciocínio proporcional, por ora considere-o de forma intuitiva.

> qualitativamente situações, estabelecer relações, julgar com equidade e distinguir circunstâncias proporcionais das não proporcionais.

A proporcionalidade está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, matemática financeira, análise de tabelas, gráficos e funções. A BNCC (Brasil, 2018) estabelece que a proporcionalidade deve estar presente nos estudos de operações com números naturais, representação fracionária dos números racionais, áreas, funções, probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2018).

Para Faria e Maltempi (2020), o estudante que consegue raciocinar proporcionalmente poderá ter um melhor desempenho em outras disciplinas escolares, tendo em vista que terá habilidade de compreender escalas dos mapas proporcionais em geografia; de interpretar nas aulas de ciências o crescimento dos seres vivos, por vezes, proporcionais ao tempo de vida, além das mais variadas situações; de compreender a escala musical e as proporções entre os elementos que compõem os quadros de Leonardo da Vinci, estudados em artes; e em inúmeras outras situações presentes nos conteúdos escolares.

Com o novo Ensino Médio (Brasil, 2018), na escola em que atuo há uma disciplina que faz parte dos Itinerários Formativos: O Mundo, os Números e suas Relações. No início do ano letivo de 2023, já haviam sido abordados alguns conteúdos de matemática básica (revisitando temas das séries anteriores do Ensino Fundamental II), empregando investigação matemática como abordagem de ensino. Os alunos reunidos em grupos foram desafiados a resolver problemas matemáticos por intermédio de tarefas investigativas que os levassem a estabelecer padrões, por meio de elaboração de conjecturas que não eram iguais para todos, ou seja, os caminhos para solução poderiam ser diversos.

O interessante foi que mesmo os alunos que tinham dificuldades na matéria conseguiam dar boas contribuições para o encaminhamento dos trabalhos e, sem se darem conta, eles estavam fazendo investigação matemática. Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem (Skovsmose, 2000). Os primeiros resultados foram bastante promissores.

Diante das considerações anteriores, desenvolvemos um Produto Educacional constituído de atividades investigativas elaborados a partir de questões do Enem que abordam o conteúdo de proporcionalidade, na perspectiva dos Cenários de Investigação proposto por Skovsmose (2000).

Para analisarmos a viabilidade e os resultados da aplicação do referido Produto Educacional, de forma a ter subsídios para que possa ser replicado por outros professores de matemática do ensino médio, realizamos um experimento, inspirados na concepção de experimento de ensino, tal como formulado como Steffe, Thompson (2000) e Cobb (2000) (apud Santos, Barbosa, 2014). No experimento de ensino, o pesquisador atua como professor e geralmente interage com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, acompanhando as atividades desenvolvidas pelos alunos, analisando as ações dos alunos no decorrer do experimento (Steffe; Thompson, 2000; Cobb, 2000, apud Santos e Barbosa, 2014). Neste experimento, o autor da dissertação atuou como professor.

Assim, esse estudo tem como objetivo apresentar e analisar a elaboração e implementação de uma ferramenta pedagógica, um Produto Educacional, no qual questões do ENEM, que têm a proporcionalidade como base resolutiva, foram abertas em Atividades Investigativas.

Esse trabalho é composto pela introdução, três capítulos e um apêndice. A presente seção apresenta a trajetória pessoal, acadêmica e profissional, a escolha, a justificativa do tema e o objetivo deste trabalho.

O primeiro capítulo trata da fundamentação teórica, que é dividida em duas partes: fundamentações pedagógica e matemática. A fundamentação pedagógica apresenta a Investigação Matemática como uma aprendizagem ativa e suas contribuições para o ensino de Matemática. Para finalizar esse primeiro capítulo, é feita a exposição do conteúdo matemático que alicerça o produto educacional. Este capítulo também traz os principais documentos oficiais que norteiam o ensino de proporcionalidade na educação básica.

A caracterização do produto educacional é feita no segundo capítulo, que traz os procedimentos metodológicos e a análise dos resultados. Inicialmente, é feita uma discussão sobre pesquisa, formação docente e o papel do mestrado profissional. Na seção seguinte, é apresentado o contexto do produto educacional bem como o perfil da turma na qual a atividade investigativa foi desenvolvida. O capítulo termina apresentando a análise dos resultados.

No terceiro e último capítulo são apresentadas as considerações finais. Após as referências, há um apêndice com as questões no modelo tradicional, como apareceram no ENEM e as mesmas questões transformadas em atividades investigativas.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

> Aprender é próprio do aluno: só ele aprende, e por si; portanto, a iniciativa lhe cabe. O professor é uma guia, um diretor; pilota a embarcação, mas a energia propulsora deve partir dos que aprendem (Dewey, 1979, p.43).

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica que estrutura o Produto Educacional proposto nessa pesquisa. De início, discorremos abordagem pedagógica das investigações matemáticas entendidas na nossa perspectiva como uma metodologia ativa e, em seguida, serão destacados os conceitos matemáticos referentes à proporcionalidade (conteúdo tema do Produto Educacional), bem como a sua importância na educação básica.

1.1 Investigação Matemática como uma Metodologia Ativa

Nos meus anos de docência, sempre estive preocupado com o distanciamento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Minhas aulas sempre eram planejadas e preparadas com bastante antecedência. Uma seleção criteriosa de exercícios era feita. Alguns deles eram resolvidos em sala de aula e outros tantos vinham em listas de exercícios intermináveis, em que apenas uma meia dúzia de alunos respondia e o restante da turma copiava. Por mais que eu desse o conteúdo da melhor forma possível, era cada vez maior o desinteresse por parte dos alunos. Só posteriormente compreendi que o problema poderia estar relacionado ao ensino tradicional da Matemática, denominado por Alro e Skovsmose (2023) de *paradigma do exercício*.

O ensino de Matemática tradicional é caracterizado por certas formas de organização da sala de aula (Alro e Skovsmose, 2023). As aulas se dividem em duas partes: primeiro o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, geralmente retiradas de algum livro-texto. Em seguida, os alunos fazem alguns exercícios pela aplicação direta das técnicas aprendidas. Skovsmose (2007) estima que, na educação básica, os alunos sejam expostos a aproximadamente 10.000 exercícios, na sua maioria baseados em comandos do tipo: resolva, efetue, calcule etc., nos quais as atividades são descontextualizadas e o material didático é pouco variado. Esses exercícios dificilmente atendem aos objetivos registrados nos programas curriculares de Matemática que visam desenvolver a criatividade, o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas.

As metodologias ativas são caminhos para avançar mais no conhecimento profundo, nas competências socioemocionais e em novas práticas (Moran, 2015). Nas metodologias ativas, o aluno é o protagonista central, enquanto os professores são mediadores ou facilitadores do processo. O professor e o livro didático não são mais os meios exclusivos do saber em sala de aula (Pereira, 2012). O aluno é instigado a participar da aula por trabalhos em grupo ou discussão de problemas.

Minha educação matemática básica foi toda baseada no ensino tradicional. A minha graduação também seguiu o mesmo caminho. Em toda a minha formação, nunca tive contato com abordagens de ensino e aprendizagem com designs inovadores, tais como as metodologias ativas e as atividades investigativas, sequer sabia que elas existiam. E até mesmo em minha pós-graduação, eu não tinha estudado a respeito. Somente no mestrado do PROFMAT, com a disciplina Tópicos de Matemática, estudei as abordagens de ensino distintas do paradigma do exercício. Eu era um professor com 16 anos de sala de aula e com duas especializações e nunca tive conhecimento dessa área de estudos em Educação Matemática. Por mais que um professor tenha inquietações e repense as suas aulas, segundo Alarcão (2005), ele deve ser um prático e um teórico da sua parte pedagógica. Dessa forma, “a reflexão sobre seu ensino é o primeiro passo para quebrar o ato de rotina, possibilitar a análise de opções múltiplas para cada situação e reforçar sua autonomia face ao pensamento dominante de uma dada realidade” (Alarcão 2005, p. 82-83).

Para Moran (2015, p.17)

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa.

As atividades de investigação podem propiciar aos estudantes a exploração e descoberta de fatos matemáticos, a partir da reflexão e entendimento sobre fatos do seu cotidiano (Milani, 2020). Com base na participação ativa dos alunos e, ao trabalhar em grupos, desenvolvem a capacidade de diálogo com seus colegas e professor, que é de fundamental importância para a aprendizagem (Milani, 2020). Assim, apesar de Moran (2015) não incluir as investigações matemáticas como uma das metodologias ativas, entendemos que podemos concebê-la como tal.

As atividades investigativas são vistas por muitos pesquisadores – Milani (2020), Skovsmose (2007); Brocardo (2001); Alro e Skovsmose (2006); Cunha, Oliveira e Ponte (1995) - como uma excelente estratégia para potencializar o processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

Segundo Moran (2015) um dos caminhos mais interessantes nas metodologias ativas é a investigação. Os estudantes, sob orientação dos professores desenvolvem a habilidade de levantar questões e problemas e buscam – individual e grupalmente, utilizando métodos indutivos e dedutivos, interpretações coerentes e soluções possíveis.

Em perspectiva análoga, Alro e Skovsmose (2023) ressaltam que a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2022) definem investigar como procurar conhecer o que não se sabe. Segundo Ponte (2003), investigar trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

Tais características indicam que como docentes não devemos ignorar a importância de se fazer investigação em sala de aula. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino e aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor.

Das afirmações dos autores anteriormente citados depreende-se que a investigação matemática é uma grande aliada no processo de ensino e aprendizagem, no qual o aluno passa a ser um sujeito ativo na aquisição do conhecimento, tendo o professor como um mediador.

Um ambiente de aprendizagem bastante útil no processo de ensino e aprendizagem são os chamados *cenários para investigação* - "[...] no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada" (Skovsmose, 2000, p. 1), pois esses são, por natureza, abertos. Para Skovsmose (2000), a educação matemática deve se mover entre os diferentes ambientes. O autor afirma ainda que não se trata de abandonar por completo os exercícios, mas de diversificar os ambientes de ensino e aprendizagem, inserindo também estratégias que fomentem a criatividade e participação ativa dos alunos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2022, p.23), corroboram com essa ideia ao afirmarem que

> Os professores não devem propor aos seus alunos apenas atividades investigativas. Há, sem dúvida, lugar para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefa de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

A investigação matemática tem um papel importante para transformar o aluno num sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem. Isso é o que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2022, p. 23)

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu desenvolvimento na aprendizagem.

Conforme afirma Santos et al (2002), a investigação matemática é uma metodologia de ensino e aprendizagem que pode levar o aluno a realmente fazer matemática.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), esse “fazer matemática” é realmente aprender matemática e a investigação matemática em sala de aula realiza essa tarefa, levando o aluno a investigar e explorar o objeto de estudo. O fazer matemático dos alunos em sala de aula, por meio da investigação matemática, aproxima os alunos da construção da matemática, com algumas características do fazer matemático, próprio dos matemáticos (Fonseca, Brunheira e Ponte 1999).

Nessa direção, Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) defendem a utilização das investigações matemáticas por entenderem que para compreender a Matemática é importante analisá-la procurando compreender sua construção. Para os referidos autores, é possível estabelecer um paralelo entre a atividade do matemático e a atividade do aluno na aula de matemática, sendo assim um poderoso meio de aprendizagem matemática para o aluno.

O conceito de investigação matemática é discutido e aprofundado num artigo de Ponte e Matos (1992). Os autores enfatizam a ideia de que, numa investigação, os alunos são colocados no papel dos matemáticos. Segundo os autores, isso acontece quando os discentes procuram entender uma situação complexa, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças, de forma a conseguir chegar a generalizações. Nessa perspectiva, as investigações matemáticas incluem uma variedade de situações, desde tarefas complexas que podem levar certo tempo a resolver, até as questões relativamente simples que surgem na sala de aula.

Esse mesmo conceito de atividade de investigação serviu para nortear os estudos que se desenvolveram em Portugal nos anos 90, em particular o projeto “Matemática para todos”, que foi o mais significativo nessa área. Ponte (2003) afirma que, na perspectiva desse projeto, a inserção das investigações matemáticas no currículo de matemática se justifica por diversas razões, apresentadas a seguir:

> i. Favorecem o envolvimento do aluno no trabalho que realiza na aula de matemática. Sem esse envolvimento dificilmente o aluno realizará uma aprendizagem significativa.
> ii. Estimulam um pensamento globalizante que não se resume a aplicação de conhecimento ou procedimentos pré-determinados e isolados, mas que, pelo contrário, implica normalmente que se relacionem diversos tópicos.
> iii. Fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos de diferentes níveis de competência matemática. Com efeito, uma tarefa de natureza investigativa, na sala de aula, pode ser abordada e desenvolvida de vários modos e em diversos graus de profundidade.
> iv. Podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática.
> v. Embora lidando com aspectos complexos do pensamento, reforçam as aprendizagens mais elementares. (Abrantes, Ponte, Fonseca e Brunheira, 1991apud Ponte, 2003,p.21)

Outro aspecto relevante das investigações matemáticas se dá devido ao desenvolvimento de conhecimentos transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em equipe. Segundo Brocardo (2001), a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente. Para Cunha, Oliveira e Ponte (1995), as atividades investigativas estimulam o envolvimento dos alunos e elas podem ser trabalhadas por alunos em diferentes níveis de desenvolvimento.

Como relatam Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento das situações, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Esses momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste etc. Cada um desses momentos pode incluir diversas atividades, como se indica no quadro a seguir.

Tabela 2 : Atividades desenvolvidas na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	✓ Reconhecer uma situação problemática ✓ Explorar a situação problemática ✓ Formular questões
Conjecturas	✓ Organizar dados ✓ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	✓ Realizar testes ✓ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	✓ Justificar uma conjectura ✓ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocado e Oliveira (2022)

O professor e investigador por vocação Carlos A. Braumann (2002, p.5) ressalta a importância das atividades investigativas ao afirmar que “aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigações de natureza matemática”. Mas o autor ressalta que essa investigação deve ser adequada a cada grau de ensino. Para Braumann (2002), aprender Matemática sem forte intervenção de sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Dessa forma, fica clara a grande importância das atividades investigativas para o aprendizado dos alunos.

Partindo do pressuposto que as investigações matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos devem experimentar (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022), a pergunta dos autores é: como deverá ser realizada uma aula de investigação matemática? Qual o papel do professor e o que esperar dos alunos? Os próprios autores respondem que sempre é possível programar o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela acabará, visto que são vários os caminhos seguidos pelos alunos (avanços, recuos, divergências entre eles).

Ao contrário do que muitos pensam, o professor continua tendo um papel chave nas aulas investigativas, “cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022, p.26). Esses autores destacam que o professor tem de garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. Esse momento inicial é muito importante, principalmente quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações.

Para Alro e Skovsmose (2023), tanto o professor como o aluno podem ser acometidos por dúvidas quando chegam para trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de “regras” de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco. Os autores ressaltam, ainda, que um processo investigativo não pode ser uma atividade compulsória, ele pressupõe o envolvimento dos participantes, ou seja, os alunos devem ser convidados para um cenário para investigação, a fim de se tornarem condutores e participantes ativos do processo de investigação.

Na condução de uma aula investigativa, fornecer a tarefa por escrito aos alunos é muito vantajoso (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022), mas isso não dispensa uma pequena introdução oral por parte do professor. No caso de alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão. O que precisa ser garantido nessa fase inicial é que os alunos compreendam o que significa investigar.

O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), é fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. Os alunos devem saber que podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa.

Os alunos procuram integrar os seus conhecimentos matemáticos na investigação e isso deve ser estimulado no decurso da aula (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022). As conjecturas podem surgir de diferentes formas, tais como: por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Segundos os autores, o teste de conjecturas é um aspecto do trabalho investigativo que os alunos conseguem entender com facilidade, mas chamam a atenção ao seguinte aspecto:

> Existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas em poucos casos. Cabe ao professor combater essa forma de encarar o teste de conjecturas, quer seja no apoio que ele dá aos grupos, quer na fase de discussão onde os alunos podem ser estimulados a procurar contraexemplos (Ponte; Brocado e Oliveira, 2022, p.33).

O professor tem um papel muito importante nas aulas de investigação, mas é um pouco diferente do que ocorre em outros tipos de aulas, afirmam os autores. Isso leva os alunos a confrontarem-se com dificuldades e dilemas. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), até mesmo o professor pode ver nessas aulas um desafio adicional à sua prática, mas certamente, traduzem-se também em momentos de realização profissional.

No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, os autores reforçam que:

> O professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, racionar matematicamente e apoiar seu trabalho (Ponte; Brocardo e Oliveira; 2022, p.46).

Dessa maneira, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), desafiar os alunos é fundamental para garantir que eles se sintam motivados para realizar a atividade. O papel do professor é procurar criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo, além também de dar atenção especial à própria tarefa escolhendo questões ou situações que de fato sejam um desafio para os alunos.

De que forma deverá ser feita a avaliação de uma atividade investigativa? Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), afirmam que o professor precisa recolher informações durante todo o desenvolvimento do trabalho dos alunos. No início, é imprescindível observar se os alunos entenderam bem a atividade e como reagiram a ela, evitando que eles usem uma abordagem de resolução de um simples exercício. Para isso, o professor deverá acompanhar o máximo possível o trabalho de cada grupo.

Ainda de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2022), numa aula em que os alunos realizam investigações matemáticas, é desejável que o professor raciocine matematicamente e de modo autêntico, ou seja, manifestar seu raciocínio de forma aberta com os alunos, pois dessa forma eles podem aprender mais sobre o processo de investigar.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2022) ressaltam que o professor deve manter uma postura interrogativa visto que uma das grandes vantagens dessa postura é o fato de ajudar os alunos compreenderem que o papel principal do professor é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo. Isso fará com que as habituais perguntas dos alunos, como "Está certo? ou " É isso que o professor quer?", sejam cada vez menos frequentes à medida que os alunos compreendem qual é o seu papel e o do professor nessas aulas.

E por fim, os supracitados autores afirmam ainda que, numa aula de investigação matemática, tal como em qualquer outra, tudo o que acontece depende em boa medida do professor e dos alunos. O professor precisa conhecer bem os seus alunos e estabelecer com eles um bom ambiente de aprendizagem para que as investigações possam ser realizadas com sucesso. E não se pode negar que essas aulas se caracterizam por uma grande margem de imprevisibilidade, exigindo do professor uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que irão surgir.

Na próxima seção serão abordados os conhecimentos matemáticos sobre proporcionalidade, que dão suporte ao produto educacional proposto nesse trabalho.

1. 2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios (Lima, 2013, p.84). O texto matemático muito bem-conceituado e de mais longa utilização no Brasil, segundo Lima (2013), é o compêndio Aritmética Progressiva, de Antônio Trajano, cuja primeira edição é de 1883 e ainda se achava em circulação na década de 60, com mais de oitenta edições publicadas. Atualmente, essa obra pode ser encontrada em sebos digitais.

A definição dada por Trajano para proporcionalidade é:

> Duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas dizem-se diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais (Trajano, 1883 apud Lima, 2013, p. 84)

A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade (Lima, 2013, p. 84). O autor afirma ainda que ao substituirmos as grandezas de Trajano por suas medidas, que são números reais, teremos a seguinte definição atual

> Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c, f(x)$ (proporcionalidade direta)
> ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)

Para Lima (2013), nesta nova versão, as grandezas da definição antiga são os números reais x, y e a correspondência a que Trajano se refere é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Ou seja, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado *constante de proporcionalidade*) tal que $y = ax$ para todo valor de x .

Nas definições de proporcionalidade direta e inversa propostas por Trajano (Trajano, 1883 apud Lima, 2013), fica evidente a importância da constante de proporcionalidade e do raciocínio proporcional associados às estruturas multiplicativas, ao referir-se à multiplicação e divisão.

Alguns estudos como Tinoco (1993), Schliemann e Carraher (1997) mostram que, na educação básica a aplicação do conceito de proporcionalidade se restringe quase que exclusivamente à utilização de regra de três, baseando-se na igualdade de razões equivalentes. Para tais autores, o professor que utiliza apenas esse tipo de estratégia deixa de explorar as relações existentes entre as grandezas e com isso seus alunos não desenvolvem o raciocínio proporcional, que é a capacidade de estabelecer relações proporcionais entre duas grandezas[2].

Autores renomados já haviam se manifestado nesse sentido, por exemplo, Geraldo Ávila, na década de 80, escreveu dois artigos para a Revista do Professor de Matemática (SBM) sugerindo que não seja utilizada no Brasil a expressão “regra de três”. A definição de proporcionalidade direta e inversa proposta por Geraldo Ávila diz que :

> **Definição 1**. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: $y = kx$ ou $y/x = k$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade.
> **Definição 2**. Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = k/x$ ou $xy = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade). (RPM 8,1990, p. 3)

Os primeiros passos para não se utilizar a expressão “regra de três” aqui no Brasil foram dados na década de 60 por intermédio do Movimento da Matemática Moderna (Silva Neto, 2014). Houve a elaboração de uma proposta dos “Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática”, em 1963, documento correspondente a BNCC[3] atualmente. E, em nenhum momento, aparece a expressão regra de três nessa nova proposta ao referir-se ao conteúdo de proporcionalidade (Silva Neto, 2014, p.7).

Duas coleções de livros didáticos utilizados atualmente nas séries finais do ensino fundamental foram observadas[4], seus autores já fazem uso do termo “grandezas proporcionais” e não mais “regra de três”. Souza (2019, p.172) fala em situações-problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais : “Note que as grandezas massa de biscoito e massa de

---

[2] Uma definição mais rigorosa de proporcionalidade será vista mais adiante (Teorema Fundamental da Proporcionalidade).
[3] A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas de sua educação básica.
[4] Panoramas matemática 7/Joamir Roberto de Souza; Jornadas.mat : matemática, 7º ano/ Fausto Arnaud Sampaio.

gordura saturada são diretamente proporcionais, pois, se dobrarmos ou reduzirmos à metade uma delas, a outra também dobra ou se reduz à metade, e assim por diante".

Esses livros fazem parte do acervo pessoal do autor deste trabalho que os utiliza para recomposição das aprendizagens dos conteúdos das séries anteriores. A contextualização com outras áreas do conhecimento é outro ponto positivo das referidas obras. Há uma preocupação dos autores em mostrar ao aluno a presença do raciocínio proporcional em várias situações do dia a dia, além de também relacionarem proporcionalidade com gráficos.

A BNCC também não faz referência à expressão "regra de três". Nos chamados objetos de conhecimentos para o 7º ano, temos "problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais" (Brasil, 2018, p.306). Como habilidade esperada, a BNCC (Brasil, 2018) preconiza que o aluno deverá ser capaz de resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, utilizando sentenças algébricas para expressar a relação entre elas.

Segundo Lima (1986), o ponto principal para o ensino de proporcionalidade deve ser a definição precisa de "grandezas proporcionais". Para o autor, uma vez entendido com bastante clareza esse conceito, todos os exercícios envolvendo proporcionalidade ~~regra de três e proporções~~ são resolvidos de maneira simples com base na citada definição, sem a necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios. Nesse sentido, cabe ao professor, deixar de lado o uso da expressão "regra de três" e passar a usar grandezas proporcionais.

Na prática, há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade direta, é dada explicitamente (ou quase) (Lima, 2013, p. 84). Por exemplo, se um quilo de açúcar custa a reais então x quilos custam $y = ax$. Mas, segundo o autor, há muitos casos em que a constante de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem mesmo tem relevância alguma no problema.

Para Lima (2013), quando a correspondência $x \to y$, $x' \to y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $x'/y' = x/y$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhece os outros três, nisto consiste a tradicional "regra de três". Por fim, Lima coloca ainda a seguinte questão: como verificar com certeza que a correspondência $x \to y$ é uma proporcionalidade? A definição de Trajano exige que se tenha $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores reais de c e x. Em particular, para todo c (Lima, 2013, p.85), o que é fácil verificar quando c é um número inteiro. E nos outros casos?

Lima (2013), afirma que a chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é linear ou não é o Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

> Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

$i)\ f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
$ii)$ Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(Logo $f(cx) = cf(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.)
$iii)\ f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. (p.86)

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração apresentada a seguir encontra-se no artigo de Hércules Luiz Júnior[5].

($i \Longrightarrow ii$) Tome $q = m/n$, um número racional, donde $m = nq$. Por (i) temos que $m. f(x) = f(mx) = f(nqx) = n. f(qx)$, portanto $f(qx) = \frac{m}{n} f(x) = qf(x)$. Com isso, assumindo $a = f(1)$, temos $a > 0$ por f ser função crescente, e que $f(q) = f(q.1) = q. f(1) = aq$, pelo que já foi feito acima. Desta forma, $f(x) = ax$, para todo x racional. Agora tome x irracional e suponha por absurdo que $f(x) \neq ax$. Assuma que $f(x) > ax$, logo $\frac{f(x)}{a} > x$. Dado $q \in \left]x, \frac{f(x)}{a}\right[$, q racional, obtemos $f(x) > aq > ax \Longrightarrow f(x) > f(q) > ax$. Porém, por hipótese, f é crescente, portanto, $q > x \Longrightarrow f(q) > f(x)$, o que nos leva a um absurdo. Para $f(x) < ax$, o procedimento é análogo. Logo, quando $a = f(1)$ tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

($ii \Longrightarrow iii$) Podemos afirmar, pelo item (ii) que $f(x + y) = f\big((x + y).1\big) = (x + y). f(1) = x. f(1) + y. f(1) = f(x.1) + f(y.1) = f(x) + f(y)$. Logo $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

($iii \Longrightarrow i$) Tome n inteiro e x um real. Assumindo $n \geq 0$, temos que:

Para $n = 0?, f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$;
Daí, $f(0) = 0 = f(0.x) = 0. f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Assim, $f(nx) = f(x + x + \cdots + x)$, com n parcelas x, portanto $f(nx) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = n. f(x)$.
Para $n = -1?$; $0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \Longrightarrow f(-x) = -f(x) = -1. f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Daí, $f\big((-n).x\big) = f\big(n.(-x)\big) = f(-x) + f(-x) + \cdots + f(-x) = n. f(-x) = n. f(-x) = n.(-1). f(x) = -nf(x)$.
Logo $f(nx) = n. f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

[5] As diferentes abordagens do ensino de proporcionalidade, Departamento de Matemática – UFPR, Curitiba, 2016

Observe que a condição (ii) do teorema acima demonstrado nos garante que f é uma função linear.

Por fim, Lima (2013) destaca ainda que, em algumas situações, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo), cujas medidas são expressas apenas por números não negativos. Neste caso temos uma função crescente $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, onde $\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

O atual Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2021) para o ensino médio aprovou 10 coleções de Matemática. Desse total, 8 foram observadas pelo autor dessa pesquisa. E o que se constatou foi que esses livros didáticos adotados no Brasil ainda não relacionam a função linear e a proporcionalidade na definição de grandezas proporcionais. A única exceção é o livro escrito pelo professor Dante (2016) que traz uma abordagem interessante que mais se aproxima das definições adotadas por Lima (2013).

Para Dante (2016), uma função linear é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para todo x real. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem. O autor afirma ainda que os problemas que envolvem proporcionalidade direta, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear, e por isso a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.

Ao supor que uma grandeza y seja função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$, Dante (2016) traz as seguintes definições:

> Dizemos que y é **diretamente proporcional** a x se as seguintes condições forem satisfeitas:
>
> a) y é função crescente de x;
> b) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também ficará multiplicado por n, ou seja:
> $f(n.x) = n.f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$
> Do mesmo modo, dizemos que y é **inversamente proporcional** a x se :
> a) quando y é uma função crescente de x:
> b) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y ficará dividido por n, ou seja:
> $f(n.x) = \frac{1}{n}.f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$

A importância do ensino de proporcionalidade na educação básica se deve ao fato desse conteúdo estar interligado com outras áreas da Matemática. De acordo com Soares e Nehring (2013, apud Pinheiro, 2018), o conceito de proporcionalidade está relacionado a outros conceitos matemáticos, como por exemplo, porcentagem, função, teorema de Tales. A relevância do raciocínio proporcional para a matemática escolar ainda compreende o fato de que é extremamente útil na interpretação de fenômenos reais, pois muitos aspectos da nossa vida operam sobre essa estrutura (Fernandez; Llinares, 2012, apud Faria e Maltemp, 2020)

Corroborando com essas ideias, Maranhão e Machado (2011, p. 142) afirmam que:

> A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em uma de suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas.

Faria (2016) explicita que o raciocínio proporcional pode ser entendido como:

> [...] A capacidade de raciocinar, estabelecendo uma relação entre duas ou mais grandezas em termos relativos, mobilizando para tal raciocínio a habilidade de analisar qualitativamente situações, estabelecer relações, julgar com equidade e distinguir circunstâncias proporcionais das não proporcionais (p.49).

Para Lest, Post e Behr (1988, apud Faria e Maltemp, 2020), o raciocínio proporcional é de extrema importância na formação matemática dos alunos dos anos finais do ensino fundamental, uma vez que contribui para que eles estabeleçam relações entre a Matemática e situações do cotidiano, fora do contexto escolar, nas compras, nos investimentos, nos desenhos e mapas, na conversão de moedas ou no ajuste de uma simples receita de bolo.

Ainda segundo Lest, Post e Behr (1988, apud Faria e Maltemp, 2020), o aluno que raciocina proporcionalmente poderá ter um melhor desempenho em outras disciplinas escolares, pois será capaz de entender as escalas proporcionais à realidade estudada em geografia; de interpretar o crescimento dos seres vivos, por vezes proporcionais ao tempo de vida; de compreender a escala musical.

Ao trabalhar com atividades envolvendo proporcionalidade, o professor deve propor aos seus alunos vários tipos de problemas, considerando que a diversificação é uma condição necessária para que eles desenvolvam seu raciocínio proporcional (Van De Walle, 2009; Lamon, 2012; Nunes, Costa, 2016 apud Almeida, 2018). Para Van de Walle (2009), a proporcionalidade nada mais é do que a declaração de igualdade entre duas relações, ou seja, a relação entre duas variáveis proporcionais.

Conforme Lest, Post e Behr (1988, apud Faria, 2019), o raciocínio proporcional é um modelo de raciocínio matemático que abrange duas variáveis, múltiplas comparações e habilidade para reunir e processar várias informações. Os autores afirmam, ainda, que o raciocínio proporcional desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de habilidades dos alunos em Matemática. Ademais, destacam que o raciocínio proporcional representa a habilidade de compreensão das relações multiplicativas, enquanto a maioria dos conceitos da aritmética é de natureza aditiva.

Van de Walle (2009) defende que o desenvolvimento do raciocínio proporcional tem grande importância nos currículos da educação básica uma vez que é necessário para a abstração empírica e engloba várias conexões com outros ramos da Matemática, entre eles: Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Um outro ponto a ser considerado é que o conceito de raciocínio proporcional não é o mesmo de proporcionalidade. Para Lamon (2005, apud Faria, 2019), as questões matemáticas envolvendo proporcionalidade podem ser resolvidas facilmente tomando por base a expressão $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. O raciocínio proporcional vai além disto, tendo em vista que é condição necessária para que argumentos e explicações sejam elaborados diante de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade.

Lamon (2005, apud Faria, 2019) afirma ainda que o conceito de raciocínio proporcional implica em muito mais do que o emprego de algoritmos ou cálculos mecânicos; está ligado à capacidade de pensar, analisar e explorar relações entre quantidades, o que é exposto por meio de comentários, explicações e argumentos sobre as relações proporcionais.

Vemos em Van de Walle (2009) que a essência do raciocínio proporcional é considerar os números em termos relativos e não em termos absolutos. Raciocinar em termos absolutos está relacionado às estruturas aditivas, ao passo que raciocinar em termos relativos se relaciona com as estruturas multiplicativas.

Ilustramos um exemplo clássico dessa relação entre os termos relativos absolutos com duas contas: uma de R$ 80,00 que ao ser paga em atraso passou para R$ 160,00; e uma outra conta de R$ 100,00 que foi paga também com atraso e aumentou para R$ 160,00. Analisando essas duas contas em termos absolutos, com uma estrutura aditiva, o aluno poderia dizer que ambas tiveram o mesmo aumento. Porém em termos relativos, com uma estrutura multiplicativa, o aluno pode observar que a primeira conta dobrou de valor, o que não ocorreu com a segunda conta.

Outra importância do raciocínio proporcional é ter clareza para identificar situações que não são proporcionais. No exemplo dado sobre uma receita de bolo, Faria (2019) faz algumas considerações sobre o tempo de preparo. Se uma hora é o tempo necessário para se fazer uma receita, caso essa seja dobrada, o tempo também duplicará? É óbvio que a quantidade de cada ingrediente utilizado na receita será dobrada, pois se trata de uma operação proporcional. Teremos que manipular uma quantidade maior de ingredientes e com isso o tempo irá aumentar, mas o tempo para a finalização da receita não será necessariamente o dobro. Nesse exemplo, o tempo de preparo não pode ser considerado proporcional à quantidade de receitas preparadas. Portanto, alguém que raciocina proporcionalmente não irá considerar essa situação como sendo proporcional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais das séries finais do ensino fundamental (Brasil,1998) preconizam que, nesse ciclo, o ensino de matemática visa o desenvolvimento do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas, e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.

Na BNCC, a Matemática é destacada como uma área do conhecimento essencial para os estudantes da Educação Básica, tanto por suas aplicações como também por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e engajados. Para o Ensino Médio, a proposta é a de que as atividades desenvolvidas na etapa anterior sejam consolidadas, ampliadas e aprofundadas (Brasil, 2018, p. 527). A BNCC cita o conteúdo de proporcionalidade como uma ideia fundamental da Matemática e ressalta:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e em outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2018, p. 266)

Os conteúdos de Matemática na BNCC estão divididos em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Proporcionalidade é mencionada como habilidade necessária nas unidades Números, Álgebra e Geometria e, tendo em vista que não há como ensinar proporcionalidade sem compreender o que são grandezas, é um conteúdo de muita relevância no ensino de Matemática.

Outro documento norteador sobre o ensino de proporcionalidade é A Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (Brasil, 2009). Esse documento estabelece as Habilidades e Competências que o aluno deverá desenvolver ao final do ensino médio. Proporcionalidade é citada nas seguintes competências:

> **Competências da área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano**.
> **H10** - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
> **H11** - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
> **H12** - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
> **H13** - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
> **H14** - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.
> **Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano**.
> **H15** - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

> **H16** - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
> **H17** - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
> **H18** - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
> **Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas**.
> **H19** - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
> **H20** - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas (Brasil, 2009, p. 5-6)

Os documentos oficiais brasileiros norteadores do ensino também destacam a importância da contextualização no ensino de Matemática. Essa preocupação passou a ter mais destaque depois da implementação do ENEM. Os Parâmetros Curriculares Nacionais deixam claro que:

> Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. (...) No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações, outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos (Brasil, 1998, p. 19).

Para os PCNs, a contextualização não é o único ou o melhor caminho para o ensino e a aprendizagem. Um ensino contextualizado auxilia na compreensão e utilização dos conteúdos matemáticos.

Vemos nos Parâmetro Curriculares Nacionais do Ensino Médio que :

> Contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa, em primeiro lugar, assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto (...). O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo (PCNEM, 2000, p. 78).

Ainda em relação ao ENEM, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) afirma que:

> O ENEM tem, ainda, papel fundamental na implementação da reforma do ensino médio, ao apresentar, nos itens da prova, os conceitos de situação–problema, interdisciplinaridade e contextualização, que são, ainda, mal compreendidos e pouco habituais na comunidade escolar. A prova do ENEM, ao entrar na escola, possibilita a discussão entre professores e alunos dessa nova concepção de ensino preconizada pela LDB, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela reforma do ensino médio, norteadores da concepção do exame. (INEP, 2005, p.8)

Para Spinelli (2011, apud Martini, Pelisson, Titon, 2020), uma alternativa cabível ao ensino da Matemática é o uso da contextualização, que pode ser uma porta para o entendimento de concepções a respeito dos conteúdos da disciplina, visto que a contextualização permite aos alunos reunirem os conhecimentos prévios, obtidos na vida cotidiana com os saberes a serem construídos durante as aulas.

Spinelli (2011, apud Martini, Pelisson, Titon, 2020) acrescenta ainda que, como os alunos já são passivos no momento de estudar, há a necessidade da busca por significados e aplicações para o que aprendem, e devido a isso, acredita-se que a contextualização pode ser um caminho de sucesso para incentivar e proporcionar a aprendizagem da Matemática.

O produto educacional (PE) apresentado nessa pesquisa tem como base a importância do raciocínio proporcional e do ensino contextualizado, características presentes no ENEM. Nesse trabalho, optamos por deixar de lado a resolução de exercícios com uma única resposta e tal como proposto por Alro e Skovsmose (2023, p.53) utilizar os cenários para investigação, no qual os " [...] os alunos podem formular questões e planejar diversas linhas de investigação."

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS

> "Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino."
> (Paulo Freire, 1996. p.29)

A graduação é apenas o passo inicial na formação de um professor. Segundo Ghedin (2008, apud Freire, Guerrini, Dutra, 2016), a formação dos professores apresenta-se como um dos principais elementos para que a escola alcance a qualidade do ensino por ela promovido. O ensino alcançará mais qualidade e contribuirá com a promoção de aprendizagens significativas quando os professores entenderem que sua formação é um diferencial nesse processo.

Corroborando com essa ideia, Justino (2011, p. 54) defende que

> O docente, quando realiza pesquisa, tem a possibilidade de compreender o processo de construção do conhecimento, através de questionamentos da sua própria prática, buscando adotar uma atitude de investigação com autonomia e responsabilidade. Assim, a integração entre formação e pesquisa pode favorecer a melhoria do preparo e capacitação do professor, contribuir para seu desenvolvimento profissional e promover o aperfeiçoamento de sua prática.

A pesquisa é indispensável na formação docente (Beilerrot, 2001, apud Freire, Guerrini, Dutra, 2016), pois, durante e após sua materialização, se constroem novos conhecimentos, a partir de uma metodologia rigorosa na qual são evidenciados os problemas, objetivos e caminhos percorridos na busca de enfrentar e alcançá-los, tornando-se pública ao final. Portanto, a pesquisa na formação docente com esses pressupostos, contribui com a elaboração de conhecimentos do professor, na constituição de caminhos metodológicos a serem percorridos no enfrentamento dos desafios cotidianos durante o ato de ensinar.

De acordo com Freire (1996, p.29):

> Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.

Segundo Freire, Guerrini e Dutra (2016), os Mestrados Profissionais em Ensino destacam-se como cursos que valorizam e incentivam a pesquisa e o contexto profissional como elementos essenciais da formação docente. Uma das características desse tipo de mestrado é a possibilidade da elaboração e aplicação de produtos educacionais que visam atender as demandas encontradas pelos próprios professores. Um produto educacional é uma ferramenta pedagógica elaborada pelos próprios profissionais em formação.

Conforme já mencionado na introdução, o produto educacional desenvolvido nessa pesquisa é um material didático que tem como característica atividades investigativas construídas a partir de questões do ENEM que têm a proporcionalidade como base resolutiva.

Também já foi destacado na introdução que o uso das questões do ENEM pode se mostrar interessante e desafiador para os alunos por serem contextualizadas e elaboradas a partir de um texto base com referências à realidade ou uma semirrealidade. Como essas questões têm uma resposta única, entendemos que de certa forma ainda estão vinculadas ao *paradigma do exercício.*

2. 1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nessa dissertação, elaboramos e desenvolvemos um Produto Educacional (PE) usando como design atividades de investigação (Alro e Skovsmose, 2023) e tendo como tema proporcionalidade. Na análise dos dados produzidos, tivemos como objetivo compreender os entraves e desafios enfrentados pelos alunos e professor, bem como a viabilidade de aplicação do referido PE.

Em virtude desse propósito, o estudo é de natureza qualitativa. De acordo com Denzin e Lincoln (2005), a pesquisa qualitativa visa interpretar os fenômenos, analisando aspectos subjetivos, sociais e contextuais dos atores que participam da conjuntura que está sob investigação.

Para produzir tal interpretação, foi realizado um experimento – estudo empírico, inspirados na formulação de experimento ensino, tal como entendido por Steffe, Thompson, (2000) e Cobb (2000) (apud Santos e Barbosa, 2014) . Como mencionamos anteriormente, no experimento de ensino, o pesquisador atua como professor e dialoga com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, acompanhando as atividades desenvolvidas pelos alunos, analisando suas ações no transcorrer do experimento (Steffe; Thompson, 2000; Cobb, 2000, apud Santos e Barbosa, 2014). Neste experimento, o autor da dissertação atuou como professor.

Após a análise minuciosa, imersão aprofundada e interpretação do diário de campo e dos documentos produzidos pelos alunos integrados com a fundamentação teórica que deu suporte a elaboração do PE, os dados foram organizados em categorias as quais serão apresentadas na seção de Análise dos Dados.

2.2 CONTEXTO DO ESTUDO

O experimento foi realizado com uma turma do 3º ano matutino do ensino médio regular do colégio estadual Luiz Eduardo Magalhães, na cidade de Camaçari. A unidade escolar mencionada fica situada na Avenida Deputado Luiz Eduardo Magalhães, S/N, Centro. Essa escola atende mais de 1600 alunos, distribuídos nos três turnos. Ela oferece o Ensino Médio regular e Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Os alunos escolhidos foram da turma 3BM, pelo fato de ser a única turma com quatro aulas semanais (duas aulas de Matemática e duas aulas do Itinerário Formativo[6]). As aulas do Itinerário Formativo eram geminadas (duas aulas seguidas de 50 minutos cada uma), e essas aulas foram destinadas apenas para a aplicação do experimento. Outro motivo que também contribuiu para a escolha dessa turma foi o fato de as aulas serem nas terças-feiras e o horário das aulas ser das 10h20 às 12h00. Nas aulas do primeiro horário, geralmente, os alunos chegam atrasados, o que poderia prejudicar o desenvolvimento das atividades.

Essa turma era tranquila e os alunos relacionam-se bem uns com os outros. A aula explicativa flui bem, uma vez que eles são bem atentos, participativos e observadores, entretanto no momento de realizarem os exercícios, acabam perdendo o interesse. A turma apresentava o mesmo padrão de outras, isto é, um ou outro aluno resolve as listas de exercícios e os demais copiam e entregam sem nem saber o que foi que eles copiaram.

A turma escolhida era composta por jovens entre 16 e 18 anos, muitos deles já exerciam atividade remunerada ou faziam curso técnico. E todos ainda moravam com seus pais. Em relação aos conhecimentos prévios em Matemática, a turma era muito heterogênea e por esse motivo muitos alunos apresentavam dificuldades com conteúdo das séries anteriores.

O experimento foi programado para ser realizado nos dias 03,10, 17, 24 e 31 de outubro de 2023, durante 5 encontros semanais, com duas aulas de 50 minutos cada uma. O

[6] Os itinerários formativos são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no ensino médio.

tempo estimado para a realização do experimento foi de 4 encontros, mas foi deixado um encontro extra para caso acontecesse algum imprevisto. E de fato houve um imprevisto: na aula do dia 24/10, os alunos tiveram que se ausentar da escola para uma aula de campo em outro município.

A turma foi dividida em 6 grupos com 5 alunos e mais um grupo com 6 alunos. Foram selecionadas 10 questões do ENEM das edições 2013 até 2021 que em sua resolução podemos utilizar o raciocínio proporcional. Essas questões foram abertas em atividades investigativas (Milani, 2020; Alro e Skovsmose, 2023).

O cronograma previsto era que os alunos resolvessem 3 ou 4 questões a cada encontro, mas isso não aconteceu no primeiro dia, porque os alunos ficaram muito agitados com o novo formato da aula e com a atividade em si, e por esse motivo eles fizeram apenas 2 questões. As atividades foram recolhidas e distribuídas novamente no segundo encontro, que foi bem mais produtivo, pois os alunos conseguiram resolver 4 questões. E no terceiro encontro, eles finalizaram a atividade resolvendo mais 4 questões. No quarto encontro, seriam feitas as apresentações orais e elas não ocorreram, porque os discentes tiveram aula de campo. As apresentações foram feitas na semana seguinte. Esse fato ilustra a importância de se deixar uma aula extra para caso haja algum imprevisto.

A atividade investigativa foi desenvolvida quase no final da última unidade letiva e constituiu uma avaliação parcial dessa unidade. Os conteúdos matemáticos necessários para a resolução foram trabalhados na I Unidade e, também nos anos finais do ensino fundamental. A avaliação dos alunos foi feita por intermédio das produções escritas dos alunos (relatórios), da observação pelo professor no decorrer da realização das tarefas e também nas apresentações orais: estratégias de resoluções e conclusões.

2.3 ANÁLISE DOS DADOS

Baseados na análise dos dados citados na seção de procedimentos metodológicos, concebemos 6 categorias: Estranhamento com a organização da sala em uma aula de matemática; Dificuldade para trabalhar em grupo; Incerteza sobre como agir diante do design inovador da atividade; Desenvolvimento da capacidade de cooperação em grupo no cenário de investigação; O aluno como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem e validação das suas ideias e Compreensão do conteúdo matemático.

Em seguida, apresentamos extratos dos dados, que foram selecionados para ilustrar as categorias mencionadas.

Quando apresentamos as falas dos alunos, optamos por utilizar nomes fictícios, para preservar suas identidades.

- **Estranhamento com organização da sala em uma aula de Matemática**

No primeiro dia do experimento, as cadeiras estavam arrumadas de forma tradicional: filas paralelas, com os alunos numa posição predeterminada. O professor começou arrumando as cadeiras em grupos e pediu que os alunos ajudassem. Essa disposição da sala de aula de Matemática, diferente do padrão tradicional, ocasionou comentários:

"- Nem parece aula de Matemática!"

"- Será que a gente está na aula certa mesmo?"

O modelo tradicional da organização das salas de aula, sobretudo nas aulas de matemática, é de cadeiras em fileiras voltadas para o quadro e os estudantes silenciados. Para Giroux (1997) apud Pires e Silveira (2022), tal postura tradicional de alguns educadores e escolas está fundamentado no positivismo, com o entendimento que "[...] as escolas são simplesmente locais de instrução" (p. 485). A mudança no layout da sala operou para os alunos como uma quebra no acordo (tácito) do paradigma do exercício, pois houve uma ruptura no equilíbrio do ambiente de aprendizagem (Skovsmose, 2000).

A harmonia entre os parâmetros do ambiente de aprendizagem é o que Skovsmose (2000) chama de "*contrato didático".* Isto é, uma harmonia entre a maneira que o significado é produzido, a organização das tarefas, a estruturação do livro didático e o desenvolvimento da comunicação. Essa harmonia deve ser reconhecida e aceita tanto pelo professor como pelos alunos.

Skovsmose (2000, p. 17) afirma ainda que "o fato de o contrato didático ser estabelecido não revela muito sobre a qualidade do ambiente de aprendizagem, apenas mostra que tanto o professor quanto os alunos compartilham a mesma compreensão e aceitação do ambiente de aprendizagem." Para os alunos, a disposição das cadeiras em semicírculo ou em grupos poderia fazer parte das disciplinas das áreas de Humanas ou Linguagens, jamais das aulas de Matemática.

- **Dificuldade para trabalhar em grupo.**

Como foi dito anteriormente, a turma foi dividida em grupos. Essa divisão ficou a critério dos alunos, mas foi observado que eles já tinham os seus pares preferidos e não queriam se organizar de forma diferente. Alguns grupos tinham 7 ou até 8 alunos, mesmo eles sendo orientados que cada grupo deveria ter 5 alunos. Outros alunos falaram:

" – Eu não gosto de atividades em grupo!"

" – Não sei por que o professor inventou esse tipo de atividade em Matemática?"

Nesse ponto, foi necessária a mediação do professor junto à turma para que os grupos formados tivessem apenas 5 alunos e sobre a importância do trabalho em grupo. Corroborando, com mencionado anteriormente, com a afirmação de Ponte, Brocado e Oliveira (2022, p. 29) que "[...] se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer alguns problemas de gestão ao professor".

À medida que o professor foi explicando como se daria o trabalho e qual seria o papel dos alunos, eles compreenderam e aceitaram o convite para realizar a tarefa proposta. Podemos perceber a importância da mediação do professor para criar um ambiente de investigação, familiarizando os alunos paulatinamente com aulas com designs inovadores.

- **Incerteza sobre como agir diante do design inovador da atividade.**

A tarefa foi entregue no formato impresso para os alunos e o professor explicou o que deveria ser feito: eles deveriam, em grupo, analisar as questões e ir respondendo cada item numa sequência gradativa, sem pular nenhum. No entanto, como eles não estavam ambientados com esse estilo de atividade, leram de maneira superficial e foram logo perguntando:

" - É para calcular o que mesmo, gente?"

" - Tem tanto texto aqui que eu nem sei para onde vai!"

" - Eu já procurei no google e não tem nada parecido!"

" - Professor, essa atividade é de Matemática mesmo?"

Wichnoski (2020) aponta que um dos obstáculos emergentes na prática de ensino com atividades investigativas é a dificuldade dos alunos para interpretar os enunciados das tarefas.

Inferimos, que os estudantes não estavam socializados com tarefas investigativas (Alro e Skovsmose, 2023), mas somente com exercícios de teor imperativo que envolvem solicitação de cálculos diretos tais como: Resolva a equação..., Reduza a expressão... ou Construa a figura...

.

Sobre esse momento inicial da atividade investigativa, Ponte, Brocado e Oliveira (2022, p.26) afirmam que “Essa fase, embora curta, é absolutamente crítica, dela depende todo o resto. O professor tem de garantir que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade”.

Diante desses questionamentos, a primeira atividade foi toda lida em voz alta juntamente com os alunos. Mesmo após a leitura da atividade, na ordem em que as questões apareciam, os alunos deslocavam-se diretamente para as partes em que identificavam a presença de algum cálculo. E muitas vezes, apresentavam dificuldades para transcrever as suas ideias e, por esse motivo, ficavam a todo momento perguntando se estavam indo bem.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2022) afirmam que

> Muitas vezes a tarefa é fornecida aos alunos por escrito, o que sem dúvida é vantajoso, mas não dispensa uma pequena introdução oral por parte do professor. No caso dos alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua boa compreensão. Contudo, independentemente do nível etário, há que garantir nessa fase inicial, que os alunos compreendam o que significa investigar (p.26).

Um grupo específico precisou de uma orientação inicial, visto que dois de seus componentes se mostraram resistentes para aceitar essa modalidade de atividade, que para eles era nova. Após a mediação do professor, de forma que não parecesse uma imposição, o “convite” para a atividade foi aceito pelos alunos.

Como destacam Alro e Skovsmose (2023), um processo investigativo não pode ser uma atividade compulsória, ela pressupõe o envolvimento dos participantes. Corroborando com Skovsmose, Ponte, Brocardo e Oliveira (2022, p.28) afirmam que “quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as investigações, é importante que tal seja feito, porque contribui para que o trabalho progrida mais rápido”.

Essa fase introdutória da investigação levou mais de uma aula devido à arrumação da sala, formação dos grupos, leitura em voz alta da primeira questão. Mas esse tempo extra foi fundamental para que os alunos entendessem o seu papel não passivo, isto é, de protagonista nas atividades de investigação. Distinto do que ocorre no ensino tradicional.

Como assinalado por Wichnoski (2020, p. 613), “ A concepção dos alunos sobre a matemática, sobre as aulas de matemática, sobre o papel do professor, sobre seu próprio papel e a não habitualidade com o ensino pautado na Investigação Matemática” faz com que na realização dessas atividades haja indícios de insegurança, impaciência e resistência”.

- **Desenvolvimento da capacidade de cooperação em grupo no cenário de investigação.**

Como já foi dito anteriormente, a divisão da turma em grupos precisou da mediação do professor por conta do número excessivo de componentes, além disso teve um grupo no qual dois alunos me perguntaram se não poderiam fazer a atividade em dupla, visto que eles sempre tinham um bom rendimento na matéria e poderiam dar conta de fazer a atividade sozinhos. Em um outro canto da sala, três alunas que não possuíam um bom rendimento na matéria e não demonstravam muito interesse durante as aulas, não tinham se agrupado a nenhum dos grupos e uma delas comentava:

" – Eu vou me agrupar com quem? O povo aqui só faz questão de quem é inteligente!"

Foi sugerido a esses 5 alunos que se juntassem em um único grupo e fizessem uma tentativa de trabalharem juntos pelo menos no primeiro encontro. Caso não desse certo, eles poderiam se separar a partir do segundo encontro, mas que nesse momento a interação entre eles poderia render bons resultados. Esse grupo permaneceu junto até o final, e a partir do segundo encontro, todos já participavam igualmente.

Abaixo seguem trechos do relatório apresentado por esse grupo, cujos nomes são todos fictícios, conforme foi dito anteriormente, para preservar a identidade de cada um deles.

"- Para iniciar, tivemos um debate sobre a resultado da 1ª questão. Valter concluiu que o seu resultado é 10, mas Marcelo não concordou inicialmente e então fez um novo cálculo e explicou para o grupo e então entramos em consenso. Eu (Maria) estou tentando acompanhar o ritmo dos meus colegas. Eles não têm dificuldade para trabalhar em equipe, mas são muito acelerados, já o meu ritmo é um pouco mais lento, ainda assim, trabalhamos bem em equipe."

Esse extrato nos possibilita inferir que os alunos talvez tenham percebido que para a resolução bem-sucedida da atividade em grupo, é necessário o respeito ao ponto de vista dos colegas, sem distinção, bem como o envolvimento e interação de todos os membros.

O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022). Alro e Skovsmose (2023, p.66) corroboram com esse pensamento e afirmam: "o modelo de cooperação investigativa é constituído por atos de comunicação entre professor e alunos, que podem favorecer a aprendizagem de maneira peculiar".

A partir desse ponto, a atividade transcorreu com mais naturalidade e todos os grupos mostravam-se animados em responder as tarefas propostas.

No primeiro encontro, a maioria só conseguiu responder duas questões. Nos encontros seguintes, eles já foram mais produtivos e conseguiram concluir todas as atividades previstas. As apresentações orais ficaram para o quarto e último encontro.

- **O aluno como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem e validação das suas ideias**.

No grupo composto por três discentes que não possuíam bom rendimento e não eram interessadas em Matemática, observamos uma mudança no padrão. No segundo encontro, elas estavam muito empolgadas com a atividade, pois suas contribuições estavam ajudando bastante. Uma delas disse:

"- Professor, eu até gostei dessa forma de trabalhar na aula de Matemática. No início, não queriam aceitar as minhas sugestões, porque eu sempre tiro nota baixa na matéria, mas depois viram que eu estava certa e passaram até a me consultar nas outras questões."

Nesse extrato, podemos notar que a atividade de investigação oportunizou a participação e envolvimento de uma estudante, que não tinha um bom rendimento em matemática. De maneira que ela se sentiu motivada a compartilhar suas ideias, as quais, inclusive, passaram a ser reconhecidas e validadas pelo grupo.

Nessa direção, Ponte, Brocardo e Oliveira (2022) defendem que

> É fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor (p. 28).

Esse aspecto que os autores citam foi observado principalmente no primeiro encontro, no qual os discentes não compreendiam como se dava o processo de investigação, consideravam que tudo deveria ser resolvido por um cálculo direto. Entretanto, à medida que eles foram entendendo como prosseguir em uma atividade investigativa, o estranhamento inicial foi se dissipando e as aulas transcorreram com mais fluidez. A turma conseguia interpretar e realizar as tarefas com mais celeridade e competência.

- **Compreensão do conteúdo matemático.**

No trecho a seguir, podemos observar como o trabalho em grupo pode mudar a compreensão dos alunos sobre algum conteúdo:

“- Até a questão 4, sempre havia muita discussão e as resoluções eram mais demoradas, sem contar que tínhamos que chamar o professor a todo momento, mas ele sempre respondia às nossas perguntas com outras perguntas. E isso fazia a gente pensar mais.”

“ – A partir da questão 5 em diante, já estávamos bem mais rápidos e não precisamos consultar o professor. As ideias de proporcionalidades apareciam de maneira mais clara nas questões e com apenas multiplicações ou divisões conseguíamos responder as questões.”

Nesses extratos, fica evidente que com o progresso da atividade, os alunos apresentaram um entendimento mais significativo, tanto sobre aspectos fundamentais do procedimento de investigação, como do conceito de proporcionalidade, associando-o às estruturas multiplicativas, extrapolando o padrão de “regra de três”.

Em concordância com esse resultado, Alro e Skovsmose (2023) afirmam que há diferentes aspectos envolvidos no processo de mudança do paradigma de exercícios para os cenários de investigação, ressaltando que “pode haver mudanças nos padrões de comunicação e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem” (p. 55).

E para finalizar, mas não menos importante, o registro por escrito das atividades investigativas traz os resultados fiéis dos trabalhos dos discentes. Ponte, Brocardo e Oliveira (2022, p.34) afirmam que “o registro escrito, que se pede numa investigação como essa, constitui um desafio adicional para alunos desse nível de escolaridade, porque exige um nível de representação que nunca utilizaram.”

E isso fica bem evidente no registro a seguir, onde um dos grupos fizeram investigação matemática de maneira natural, ao responderem a seguinte questão:

O preço médio cobrado por um pintor para executar um serviço consiste em uma taxa fixa de R$ 25,00 mais uma quantia proporcional a área pintada.

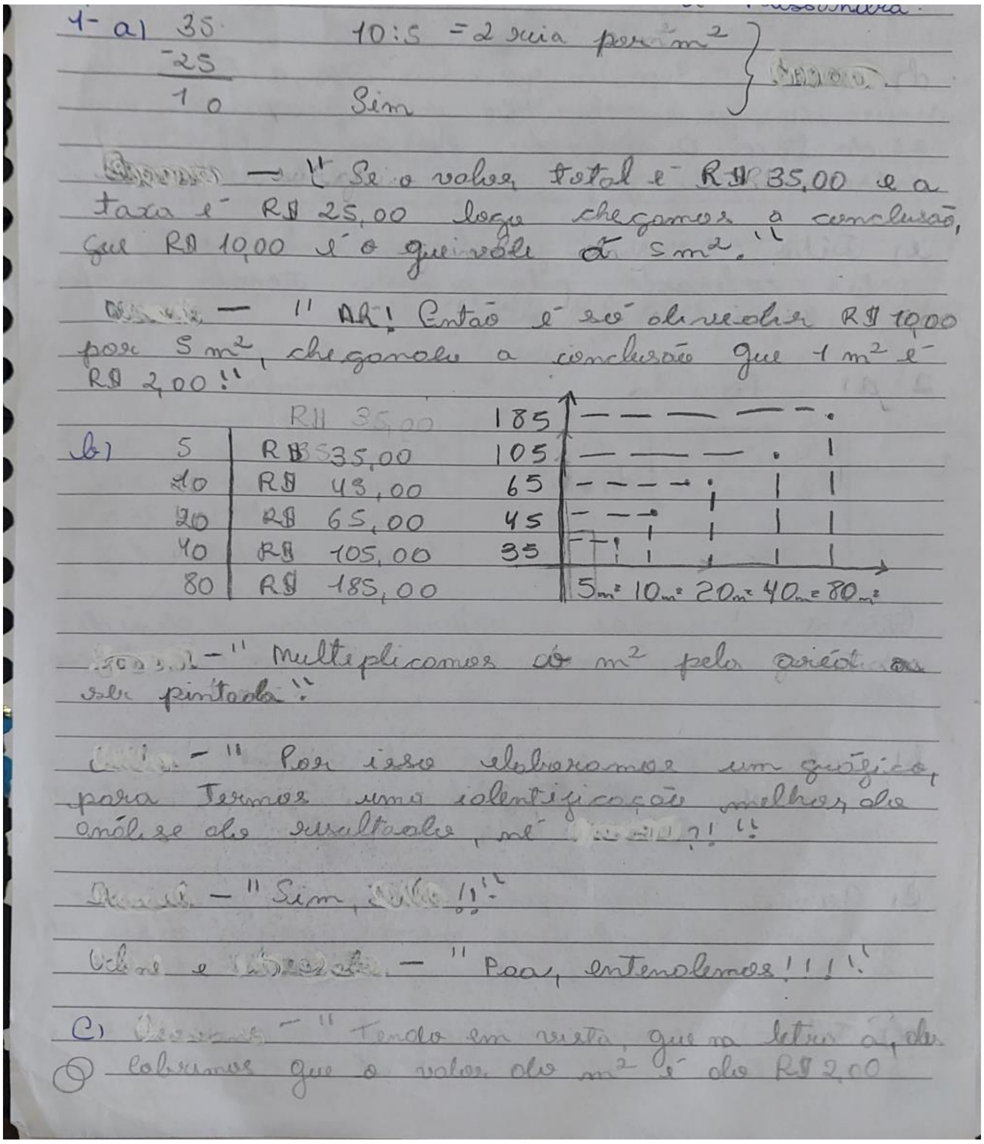
Reúnam-se em grupos de 4 ou 5 alunos e analisem as questões a seguir

a) Para pintar 5 m^2 o preço total a pagar é R$ 35,00 (taxa fixa + valor proporcional a área pintada). É possível calcular o valor pago pela área pintada, sem a taxa fixa? Qual será esse valor por m^2? Justifique sua resposta.

b) Com base no item anterior, elaborem um quadro com os valores a pagar quando se deseja pintar as seguintes áreas: 5 m^2, 10 m^2, 20 m^2, 40 m^2 e 80 m^2. Em seguida, elabore um gráfico com esses valores.

c) Saulo deseja renovar a pintura de sua sala e após medir as áreas das paredes descobriu que elas têm 150 m^2. Ajude Saulo a descobrir quanto ele pagará por essa pintura.

Figura 1 : registro das respostas dos discentes


1- a) 35
-25
10

10:5 = 2 reais por m^2

Sim

— "Se o valor total é R$ 35,00 e a taxa é R$ 25,00 logo chegamos à conclusão, que R$ 10,00 é o equivale à 5 m^2."

— "Ah! Então é só dividir R$ 10,00 por 5 m^2, chegando à conclusão que 1 m^2 é R$ 2,00!"

b)	5	R$ 35,00
	10	R$ 45,00
	20	R$ 65,00
	40	R$ 105,00
	80	R$ 185,00

— "Multiplicamos o m^2 pela área a ser pintada!"

— "Por isso elaboramos um gráfico, para termos uma identificação melhor da análise do resultado, né ?!"

— "Sim, !!"

e — "Poa, entendemos!!!"

C) — "Tendo em vista, que na letra a, descobrimos que o valor do m^2 é de R$ 2,00

Fonte : registro do experimento (outubro/2023)

Figura 2 : transcrição das respostas dos discentes

Transcrição

a) Gustavo: “ Se o valor total é R$ 35,00 e a taxa é R$ 25,00 logo chegamos à conclusão de que R$ 10,00 é o que vale 5 m^2.”

Maria: “ Ah, então é só dividir R$ 10,00 por 5 m^2, chegando conclusão que 1 m^2 é R$ 2,00.”

b) Davi: “ Multiplicamos o m^2 pela área a ser pintada.”

Marta: “ Por isso elaboramos um gráfico, para termos uma identificação melhor da análise do resultado né, Davi?”

Davi: “ Sim, Marta.”

Gilda e Ana: “ Boa! Entendemos!!!”

c) Gustavo: “ Tendo em vista que na letra a descobrimos que o valor do m^2 é R$ 2,00...

Fonte : registro do experimento (outubro/2023)

Para chegar na resposta do item “a”, Gustavo explicou para o grupo que inicialmente deveriam subtrair a taxa do valor total, assim: $35 - 25 = 10$. O valor de R$ 10,00 encontrado seria referente aos 5 m^2 pintados. Maria finalizou a questão concluindo que bastaria dividir 10 por 5 para encontrar o preço cobrado por metro quadrado.

Já no item “b”, o grupo entendeu o que deveria ser feito, pois conseguiram construir a tabela e o gráfico corretamente. Eles multiplicaram cada área a ser pintada por R$ 2,00 e, em seguida, somaram R$ 25,00 referentes ao valor da taxa.

Percebemos no registro feito por Davi que ele teve dificuldade para transcrever seus argumentos matemáticos. Tais dificuldades podem ser explicadas, talvez, pela falta de hábito de resolver exercícios através da investigação (Wichnoski, 2020). Alro e Skovsmose(2023, p.66) corroboram com esse pensamento ao afirmar que “talvez seja difícil para o aluno expressar a sua ideia matematicamente.”

O registro das respostas dadas pelos discentes é representativo da cooperação do trabalho em grupo. Esses modelos de cooperação podem favorecer a aprendizagem de maneira peculiar (Alro e Skovsmose, 2023). Gustavo iniciou a resolução da atividade e com isso Maria pode concluir o valor pago por cada metro quadrado de área pintada. Esses passos ajudaram nas conclusões de Davi e Marta. E também no entendimento de Gilda e Ana.

Além disso, é cabal perceber como os alunos desenvolveram o raciocínio proporcional, visto que estabeleceram relação entre as grandezas e mobilizaram tal relação para analisar a situação, empregando registros diversos, inclusive gráficos.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi apresentar e analisar a elaboração e implementação de uma ferramenta pedagógica, um Produto Educacional (PE), que possa ser replicado por outros professores de Matemática em qualquer série do Ensino Médio e nas séries finais do Ensino Fundamental, visto que é nessa etapa escolar que se aborda o tema proporcionalidade. Ele é composto por uma Atividade Investigativa (AI) elaborada a partir das questões de proporcionalidade presentes na prova de Matemática do ENEM, visando contribuir para o interesse e motivação dos discentes, no qual o professor pode abandonar o paradigma do exercício para entrar em um ambiente diferente, chamado de cenários para investigação (Alro e Skovsmose, 2023).

A abordagem das questões de proporcionalidade do ENEM via AI também tem como objetivo facilitar a interpretação dessas questões por parte dos alunos, que muitas vezes não compreendem qual trajetória seguir na resolução de tarefas sobre esse tema. Como citamos anteriormente, a despeito do papel importante de proporcionalidade não apenas no ensino, mas também no cotidiano, a grande maioria dos alunos não tem demonstrado compreensão acerca desse conteúdo (Alpha e Almouloud, 2021).

Para um professor que sempre trabalhou com o paradigma do exercício elaborar um material didático de natureza investigativa, saindo da sua zona de conforto, com o objetivo de trazer novas perspectivas para ensino e a aprendizagem, se constitui em uma tarefa desafiadora.

Alro e Skovsmose (2023, p.55) ressaltam que

> Tanto o professor quanto os alunos podem ser acometidos por dúvidas quando chegam para trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de “regras” de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco.

Mesmo depois de uma pesquisa extensa, sempre surgem algumas dúvidas por parte do professor na hora de “colocar a mão na massa” e conduzir a atividade investigativa.

Alro e Skovsmose (2023, p.50) afirmam ainda que “a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação.”

Segundo o autor, os alunos podem formular questões e planejar linhas de investigação de forma diversificada.

Durante a aplicação das atividades, o interesse dos alunos na realização das tarefas foi aumentando gradativamente. No primeiro encontro houve uma certa resistência por parte de alguns discentes em fazer as atividades. Eles se mostravam bastante inseguros e ficavam consultando o professor a todo instante para validar o seu trabalho.

Já a partir do segundo encontro, as discussões nos grupos ficaram bem mais produtivas e notava-se o envolvimento de todos, podemos dizer que os alunos aceitaram o convite e se implicaram no processo de investigação, constituindo-se assim um novo ambiente de aprendizagem (Alro e Skovsmose, 2023). O trabalho em grupo transcorreu de forma mais harmoniosa. As questões eram lidas e discutidas por eles com mais atenção, e na ordem que eram propostas. Eles já se sentiam mais seguros e não dependiam tanto do aval do professor para saber se estavam acertando ou não.

A atividade de investigação oportunizou a participação de todos os estudantes, até mesmo aqueles que não tinham um bom rendimento em Matemática ou não demonstravam interesse na aula tradicional. Esses estudantes, ao apresentarem as suas ideias ao grupo se sentiram mais valorizados e, mesmo quando eram corrigidos pelos colegas eles não se sentiam menos importantes. Portanto, os padrões de comunicação mudaram, abrindo-se para novos tipos de cooperação (Alro e Skovsmose, 2023).

Nesse tipo de aula, o professor não é mais o detentor do conhecimento. Claro que os alunos devem saber que podem contar com o apoio do professor (Ponte; Brocardo e Oliveira, 2022). O professor atua como um mediador, cabendo aos discentes todo o protagonismo no processo de aprendizagem.

Por fim, vale ressaltar que o tema dessa pesquisa é de grande relevância, principalmente para os estudantes das escolas públicas, pois os indicadores mostram o baixo desempenho desses estudantes nas provas do ENEM e nas avaliações externas.

No que diz respeito ao tema proporcionalidade, como citado por Van de Walle (2009), o desenvolvimento do raciocínio proporcional tem grande importância nos currículos da educação básica, uma vez que é necessário para a abstração empírica e engloba várias conexões com outros ramos da Matemática, entre eles: Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Entendemos que o PE produzido nesse estudo pode contribuir para o ensino da Matemática, uma vez que pode e deve ser adaptado para outros conteúdos matemáticos e contextos. Como citado por Alro e Skovsmose (2023), não se trata de abandonar de vez os exercícios tradicionais, mas de inserir tarefas com designs investigativos com o objetivo de propiciar ambientes de ensino e aprendizagem nos quais os discentes sintam-se motivados, trazendo-os "[...] para o centro do palco do processo educativo" (Alro e Skovsmose, 2023, p. 72) e servindo de referência e inspiração para outros educadores que queiram reproduzi-lo ou fazerem novas pesquisas envolvendo essa e outras abordagens de ensino inovadoras como contraponto ao ensino tradicional.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, I. (Coor.) **. Formação Reflexiva de Professores**: estratégias de supervisão. Porto. Porto Editora, 2005.

ALARCÃO, I. Continuar a formar-se, renovar e inovar. A formação contínua de professores. **Revista da Escola Superior de Educação de Santarém**, vol. 3, p. 24-35, 1992.

ALMEIDA, J. M. P. **Proporcionalidade na educação básica**: investigando as possíveis conexões com outros ramos da Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica. Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

ALPHA, O.; AUMOULOUD, S. A. Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.23, n.1, p. 769-809, 2021.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 1 ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3 ed., Autêntica Editora. Belo Horizonte, MG, 2023.

ÁVILA. G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, nº 8, p. 1 – 8, 1986.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Penso Editora, 2018.

BARBOSA, E. F. ; MOURA, D. G. Metodologias Ativas de Aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. Boletim Técnico do Senac, v.39, n.2, p. 48-67, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** . Matemática / Secretária de Educação Média e Tecnológica. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**. MEC. 2018.

BRASIL. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. MEC – Brasil, 2009. Disponível em <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em 05 jan. 2024.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática / Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds**.), Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. P. 5-24. Lisboa: SEM – SPCE, 2002.

BROCARDO, J. **Investigações na sala de aula de matemática**: um projeto curricular no 8º ano. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa: APM, 2001

CUNHA, H., OLIVEIRA, H., PONTE, J. P. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. In A. Pinheiro, A. P. Canavarro (Eds), Actas do ProfMat 95 (p. 161 -168). Lisoba: APM, 1995.

DANTE, L. R. **Matemática : Contexto & Aplicações.** 3 ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2016.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.). **The Sage Handbook of Qualitative Research**. Sage Publications. p. 1-32, 2005.

ENEM 2017 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

ENEM 2018 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

ENEM 2019 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

ENEM 2020 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

ENEM 2021 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

ENEM 2022 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação.

FARIA, R. W. S. C. **Raciocínio proporcional**: integrando aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra. 2016. 280 f. *Tese* (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2016.

FARIA, R. W. S. C. Os conteúdos da aprendizagem e o raciocínio proporcional. **RELVA**, Juara/MT/Brasil, v. 6, n. 1, p. 251-272, jan./jun. 2019.

FARIA, R. W. S.C.; MALTEMPI, M. V. Raciocínio Proporcional na Matemática Escolar. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 58, n. 57, p. 1 – 18, e-20024, jul./set. 2020.

FERNANDEZ, C.; LLINARES, S. Relaciones implicativas entre las estratégias empleadas em la resolución de situaciones lineales. **Revista lationamericana de investigación em Matemática Educativa (Relime)**, v. 15, p. 277-310,2012.

FIORENTI, D., LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J, P. As atividades de investigação o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat**, v. 99, p. 91-101, 1999.

FREIRE, G. G.; GUERRINI, D.; DUTRA, A. **O Mestrado Profissional em Ensino e os Produtos Educacionais**: a pesquisa na formação docente. Porto das Letras, v. 2, n. 1, p. 100-114, 2013.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e terra, 1996.

JUSTINO, M. N. **Pesquisa e recursos didáticos na formação e prática docente**. Curitiba: Ibpex, 2011.

LIMA, E. L. Que são grandezas proporcionais? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 9, p. 21-29, 1986

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1. Coleção do professor de matemática. SBM, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro, SBM, Coleção PROFMAT), 2013.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, Curitiba, nº1, p. 141 – 156, 2011.

MARTINI, D.; PELISSON, S. E.; TITON, F. P. A contextualização matemática aliada a outras metodologias para o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros com o 7º ano de uma escola municipal de Concórdia. **CONTRAPONTO: Discussões científicas e pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v.1, n. 1, p. 160-176, 2020.

MILANI, R. Transformar exercícios em cenários para investigação: uma possibilidade de inserção na educação matemática crítica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 31, p. 1-18, 2020.

MICOTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo. Editora UNESP, 1999.

MORAN, J. **Mudando a Educação com Metodologias Ativas**. USP, 2015 disponível em : https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em 16 mai. 2023.

PEREIRA, R. Método Ativo: Técnicas de Problematização da Realidade aplicada à Educação Básica e ao Ensino Superior. In: **VI Colóquio Internacional. Educação e Contemporaneidade. São Cristóvão, SE**. 20 a 22 setembro de 2012.

PIRES, E. M.; SILVEIRA, E. Obstáculos e resistências no uso de tendências metodológicas na educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 36, p. 471- 494, 2022.

PINHEIRO, J. M**. A. Proporcionalidade na Educação Básica: Investigando as possíveis conexões com outros ramos da Matemática, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica. Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018f, 2018.

PONTE, J. P.; Matos, J.F. Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In: **Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice** (pp. 239-254). Springer Berlin Heidelberg, 1992.

PONTE, J. P. ; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E; FIGUEREDO, N. DIONÍSIO, A.F. (org). **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Editor: Seção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. 1ª Edição, dezembro de 2002.

PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, Lisboa, Nº 2, pp. 93-169, junho 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA. H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte. Autêntica. 2022.

SANTOS, C.P. ; SOARES, S. R. Aprendizagem e relação professor-aluno na universidade : duas faces da mesma moeda. **Est. Aval. Educ.**, São Paulo, v 22, n. 49, p. 353-370, maio/ago. 2011.

SANTOS, G. L. D; BARBOSA, J. C. O que Acontece quando os alunos resolvem exercícios de Cálculo com um software? **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 257-276, Santa Maria, jan./jun., 2014.

SANTOS, L. et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE J. P et al. (Orgs) **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** (p. 83 – 106) Lisboa: SPCE, 2002.

SCHLIEMANN, A. D.; CARREHER, D. W. Razões e Proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN, A. D.; CARREHER, D. W., et al . **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. 2ª ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

SILVA NETO, O. A Regra de Três nos currículos ao longo da história. In: **Simpósio de Educação Matemática em Debate**. SIMPEMAD. Joinville, 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática,

Rio Claro, 14, 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica**: Incerteza, Matemática, Responsabilidade. São Paulo: Cortez. 2007.

SOUZA, J. R . **Panoramas matemática 7**. 1. Ed – São Paulo: FTD, 2019

TINOCO, L. A. A (Coord.). **Razões e Proporções**. Instituto de Matemática, UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 1993.

VAN DE WALE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Penso Editora. 2009.

WICHNOSKI, Paulo. Obstáculos emergentes da prática de ensino com a Investigação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, p. 604-627, 2020.

APÊNDICE 1 – QUESTÕES DO ENEM NA FORMA ORIGINAL

SELEÇÃO DE ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM ENVOLVENDO PROPORCIONALIDE

Exercício 01 - ENEM 2021

O preço médio cobrado por um pintor para executar um serviço consiste em uma taxa fixa de R$ 25,00 mais uma quantia proporcional à área pintada. O quadro apresenta os valores cobrados por ele em trabalhos recentes.

Área pintada (m^2)	Total a pagar (R$)
5	35,00
10	45,00
20	65,00
40	105,00
80	185,00

Qual o preço cobrado para realizar um serviço de pintura de uma área de 150 m^2?

A) R$ 300,00

B) R$ 325,00

C) R$ 400,00

D) R$ 1 050,00

E) R$ 3 750,00

Exercício 02 - ENEM 2017

Em uma embalagem de farinha encontra-se a receita de um bolo, sendo parte dela reproduzida a seguir:

INGREDIENTES
• 640 g de farinha (equivalente a 4 xícaras).
• 16 g de fermento biológico (equivalente a 2 colheres medidas).

Possuindo apenas a colher medida indicada na receita, uma dona de casa teve que fazer algumas conversões para poder medir com precisão a farinha. Considere que a farinha e o fermento possuem densidades iguais.

Cada xícara indicada na receita é equivalente a quantas colheres medida?

a) 10.

b) 20.

c) 40.

d) 80.

e) 320.

Exercício 03 - ENEM 2021

Um lava-rápido oferece dois tipos de lavagem de veículos: lavagem simples, ao preço de R$ 20,00, e lavagem completa, ao preço de R$ 35,00. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários, e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, R$ 300,00.

Para não ter prejuízo, o menor número de lavagens diárias que o lava-rápido deve efetuar é

A) 6.

B) 8.

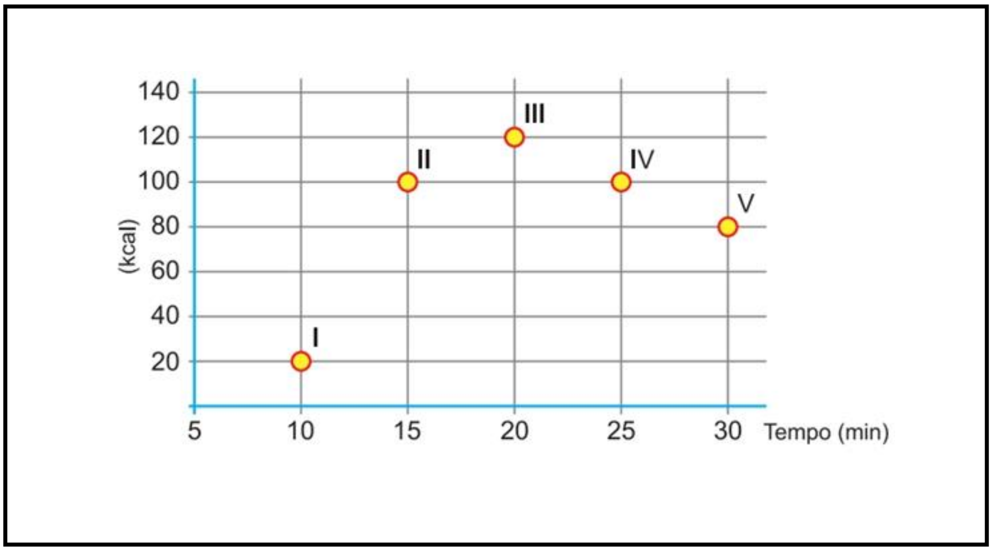
C) 9.

D) 15.

E) 20.

Exercício 04 - ENEM 2019

Os exercícios físicos são recomendados para o bom funcionamento do organismo, pois aceleram o metabolismo e, em consequência, elevam o consumo de calorias. No gráfico, estão registrados os valores calóricos, em kcal, gastos em cinco diferentes atividades físicas, em função do tempo dedicado às atividades, contado em minuto



Qual dessas atividades físicas proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto?

A) I　　B) II　　C) III　　D) IV　　E) V

Exercício 05 - ENEM 2012

Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a cada 8 horas, então a massa corporal do filho é de:

A) 12 kg　　B) 16 kg　　C) 24 kg　　D) 36 kg　　E) 75 kg

Exercício 06 - ENEM 2016

O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:

"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".

Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da embalagem(g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

Com base nessas informações responda os itens a seguir

I. Qual das embalagens de salgadinho é a mais vantajosa para compra? Justifique sua resposta.

II. Para alcançar os 12 pontos da promoção essa menina deverá juntar quantas embalagens de cada pacote?

III. Comprando duas embalagens de 200 g essa menina pagará R$ 12,80 e somará os 12 pontos exigidos na promoção. Podemos dizer que esta é a opção mais vantajosa? Justifique sua resposta.

Com base no item II responda:

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é:

a) R$ 10,80 b) R$ 12,80 c) R$ 20,80 d) R$ 22,00 e) R$ 22,80

Exercício 07 - Enem 2013

Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d'agua tem volume de 0,2 mL.

Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

a) 0,2

b) 1,2

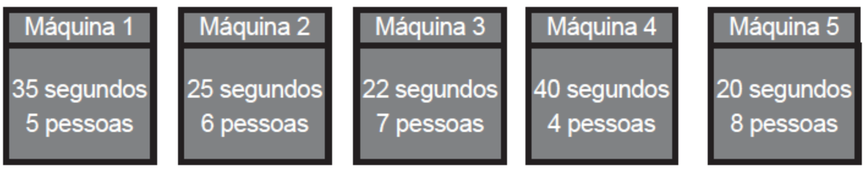
c) 1,4

d) 12,9

e) 64,8

Exercício 08 - Enem 2018

Em um aeroporto, os passageiros devem submeter suas bagagens a uma das cinco máquinas de raio-X disponíveis ao adentrarem a sala de embarque. Num dado instante, o tempo gasto por essas máquinas para escanear a bagagem de cada passageiro e o número de pessoas presentes em cada fila estão apresentados em um painel, como mostrado na figura.



Um passageiro, ao chegar à sala de embarque desse aeroporto no instante indicado, visando esperar o menor tempo possível, deverá se dirigir à máquina

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

Exercício 09 - Enem 2015

Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

A) 0,624.

B) 52,0.

C) 156,0.

D) 750,0.

E) 1 201,9.

Exercício 10 - Enem 2020

Uma pessoa possuía um lote com área de 300 m^2. Nele construiu sua casa, utilizando 70% do lote para construção da residência e o restante para área de lazer. Posteriormente, adquiriu um novo lote ao lado do de sua casa e, com isso, passou a dispor de um terreno formado pelos dois lotes, cuja área mede 420 m^2. Decidiu então ampliar a casa, de tal forma que ela ocupasse no mínimo 60% da área do terreno, sendo o restante destinado à área de lazer.

O acréscimo máximo que a região a ser destinada à área de lazer no terreno poderá ter, em relação à área que fora utilizada para lazer no lote original, em metro quadrado, é

A) 12

B) 48

C) 78

D) 138

E) 168

APÊNDICE 2 – A ATIVIDADE INVESTIGATIVA

SELEÇÃO DAS QUESTÕES DO ENEM ENVOLVENDO PROPORCIONALIDADE QUE FORAM TRANSFORMADAS EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Atividade 01

O preço médio cobrado por um pintor para executar um serviço consiste em uma taxa fixa de R$ 25,00 mais uma quantia proporcional à área pintada.

Reúnam-se em grupos de 4 ou 5 alunos e analisem as questões a seguir

a) Para pintar 5 m^2 o preço total a pagar é R$ 35,00 (taxa fixa + valor proporcional a área pintada). É possível calcular o valor pago pela área pintada, sem a taxa fixa? Qual será esse valor por m^2? Justifique sua resposta.

b) Com base no item anterior elaborem um quadro com os valores a pagar quando se deseja pintar as seguintes áreas: 5 m^2, 10 m^2, 20 m^2, 40 m^2 e 80 m^2. Em seguida elabore um gráfico com esses valores.

c) Saulo deseja renovar a pintura de sua sala e após medir as áreas das paredes descobriu que elas têm 150 m^2. Ajude Saulo a descobrir quanto ele pagará por essa pintura.

d) De acordo com as dimensões das paredes de sua casa, calcule quanto cada um de vocês gastaria para pintar todo o interior.

e) Pesquise com sua família e/ou amigos se o valor que o pintor cobra é justo.

Atividade 02

Reúnam-se em grupos de 4 ou 5 alunos e analisem as questões a seguir

Dona Célia é uma excelente cozinheira e pretende fazer certa receita, mas não dispõe dos utensílios adequados para medir a farinha.

Ela observou que em uma embalagem de farinha encontra-se a receita de um bolo, sendo parte dela reproduzida a seguir:

INGREDIENTES
• 640 g de farinha (equivalente a 4 xícaras).
• 16 g de fermento biológico (equivalente a 2 colheres medidas).

Possuindo apenas a colher medida indicada na receita, dona Célia teve que fazer algumas conversões para poder medir a farinha de maneira exata.

a) Tente completar os quadros abaixo. Explique o raciocínio que você usou.

Farinha

4 xícaras	640 g
3 xícaras	
2 xícaras	
1 xícara	

Fermento

4 colheres medidas	
3 colheres medidas	
2 colheres medidas	16 g
1 colher medida	

b) Você sabe o significado da "**densidade**" de um corpo? Pesquise a respeito.

c) Considerando que a farinha e o fermento possuem densidades iguais, é possível encontrar uma equivalência entre cada xícara e a colher medida? Justifique sua resposta.

d) Se Dona Célia quiser fazer uma receita e meia do bolo, quantas xícaras de farinha e colheres medida de fermento serão necessárias?

Atividade 03

O lava-rápido do seu Elias oferece dois tipos de lavagem de veículos: lavagem simples, ao preço de R$ 20,00, e lavagem completa, ao preço de R$ 35,00. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários, e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, R$ 300,00.

Reúnam-se em grupos de 4 ou 5 alunos e analisem as questões a seguir.

a) Construa uma tabela com os valores de lavagem simples e lavagem completa para 1, 2, 3, 4, 5 e 10 lavagens

b) Um cliente com R$ 148,00 pretende fazer 4 lavagens simples e mais duas completas em um certo período. É possível? Justifique sua resposta.

c) Como você faria para encontrar o menor número de lavagens diárias simples e/ou completas que o lava-rápido deve efetuar diariamente para não ter prejuízo? Explique sua resposta

Atividade 04

Os consumos calóricos de cinco atividades físicas diferentes com o tempo de duração de cada uma foram listados abaixo:

Atividade física	Tempo de execução (min)	Consumo calórico(kcal)
I	10	20
II	15	100
III	20	120
IV	25	100
V	30	80

Formem grupos de 4 ou 5 alunos e analisem as questões a seguir

a) Vocês sabem o significado de calorias e consumo calórico? Pesquisem e relatem o que descobriram.

É importante fazer atividade física regularmente? Por quê? Você ou pessoas da sua família fazem atividades físicas regularmente?

b) Com base nas informações do quadro, construa o gráfico do consumo calórico em função do tempo de duração de cada atividade. (Dica: coloque o consumo calórico no eixo vertical e o tempo de duração de cada uma no eixo horizontal)

c) Analisando o gráfico construído, o tempo de cada atividade física determina o gasto calórico?

d) De acordo com o gráfico, quais das atividades físicas é a que consome mais calorias por minuto?

e) Construa um quadro com o gasto calórico para cada uma das atividades para um tempo de minutos. (Dica: o tempo de execução é proporcional ao gasto calórico)

e) O que você acha que faz com que uma atividade física tenha mais gasto calórico?

Atividade 05

Dona Rosa comprou certo remédio para seu filho e recorreu à bula para verificar a dosagem que precisava dar. Ela leu na bula que deveriam ser dadas 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. A embalagem do remédio continha 120 mL.

Formem grupos com 4 ou 5 alunos e analisem cada questão a seguir sempre justificando as suas respostas.

a) Você sabe a sua massa corporal? Acha importante ter essa informação?

b) Quem compra remédios em sua casa? Essa compra é feita com ou sem receita médica? O que você acha da compra de remédios sem receita médica?

Atualmente os antibióticos só podem ser adquiridos com receita médica. Você sabe qual o motivo dessa restrição?

c) Dona Rosa fez os cálculos e deu 30 gotas do remédio para o seu filho a cada 8 horas. Quantas vezes por dia ela deveria dar esse remédio? No final do dia quantas gotas ela deu do medicamento?

d) Se Dona Rosa ministrou corretamente o medicamento para o seu filho, como podemos encontrar a massa corporal dessa criança?

e) O tratamento dessa criança deverá ser feito por 30 dias. Um frasco desse remédio será suficiente? Para resolver essa questão considere que 1 mL ≅ 20 gotas.

Atividade 06

O pacote de salgadinho preferido de Joana é vendido em embalagens com diferentes quantidades. No supermercado onde ela normalmente compra tem uma promoção.

A cada embalagem é atribuído um número de pontos e "ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".

Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços

Massa da embalagem(g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

Reúna-se com seus colegas e responda as perguntas a seguir, sempre comentando e justificando as respostas.

I) Se Joana estiver interessada apenas em comprar mais salgadinhos, qual das embalagens de salgadinho é a mais vantajosa?
II) Para alcançar os 12 pontos da promoção Joana deverá juntar quantas embalagens de cada pacote?
III) Qual opção Joana deve escolher gastando menos para levar o bichinho de pelúcia nessa promoção?
IV) E se Joana recebe de mesada R$ 8,00 por semana, o que você sugere que ela faça para levar o bichinho de pelúcia? Você recebe mesada? Você gasta toda mesada que recebe ou economiza?
V) Você pesquisaria em outras lojas um preço mais barato do que essa promoção ou compraria logo no lugar que está acostumado?

Atividade 07

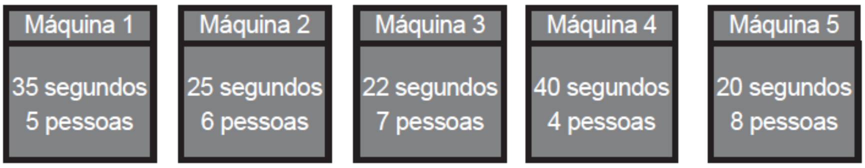
Na casa de Marcos, uma torneira no seu jardim não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d’agua tem volume de 0,2 mL.
Em grupos de 4 ou 5 alunos, discuta as seguintes questões:
a) Você acha importante o uso consciente da água? Cite alguns exemplos de desperdício de água e apresente formas de evitar esse desperdício.
b) Pesquise junto com seus pais ou avós se eles sempre tiveram acesso à água tratada.
c) Ao tentar reparar o vazamento Marcos não foi bem-sucedido e o vazamento aumentou para 4 mL a cada 3 segundos. Complete a tabela abaixo:

empo	**Volume (mL)**
3 segundos	
60 segundos	
1 hora	
1 dia	

d) Sabendo que esse vazamento durou 10 dias, quanto foi desperdiçado, em litros, nesse período?

Atividade 08

Ana e Márcia são duas irmãs que estão de férias e farão uma viagem para Fortaleza. Chegando ao aeroporto Luís Eduardo Magalhães elas devem submeter suas bagagens a uma das cinco máquinas de raio-X disponíveis na sala de embarque. Num dado instante, o tempo gasto por essas máquinas para escanear a bagagem de cada passageiro e o número de pessoas presentes em cada fila estão apresentados em um painel, como mostrado na figura.



Forme grupos de 4 ou 5 alunos e responda as questões abaixo justificando cada resposta.

a) Vocês sabem para que servem essas máquinas de raio-X? Como funcionam? Esses aparelhos funcionam da mesma forma que os utilizados para fins médicos? Pesquisem e relatem as informações obtidas.

b) Há algum curso específico para trabalhar com os aparelhos de raio – X nos aeroportos? Qual o salário médio desse profissional?

c) Quantas pessoas estão na sala de embarque no instante dos dados acima ?

d) Construa uma tabela com o tempo necessário para que todas as pessoas sejam atendidas em cada máquina de raio-X

e) Márcia foi para a máquina 5 por ser a mais rápida e Ana para a máquina 4 por ter menos pessoas . Elas fizeram as melhores escolhas? Qual delas será atendida mais rápido?

d) Se você estivesse nessa sala de embarque escolheria qual máquina? Explique o motivo.

Atividade 09

Pedro levou seu gato Tom ao veterinário para consulta sobre uma irritação na pele. O gato de Pedro está com 3,0 kg e foi receitado um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal. Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

Reúna-se em grupos e responda as questões abaixo justificando cada resposta.

a) Você tem algum animal de estimação? No local onde você mora tem muitos casos de abandono animal?

b)Existem ONGs (ONG = organização não governamental) que atuam na proteção de animais domésticos abandonados. Vocês conhecem alguma? Pesquisem.

c) Para ser veterinário (a) que curso a pessoa precisa fazer? Qual a duração? Você gostaria de fazer?

d) Construa um gráfico com a massa do felino e a área de sua superfície corporal.

e) Qual a dose diária que Pedro deverá dar desse medicamento para o seu gato?

f) O frasco do medicamento contém 15 g e o tratamento de Tom deve ser por 60 dias. Com apenas um frasco, Pedro conseguirá completar o tratamento?

Atividade 10

Carlos está prestes a se aposentar e comprou um lote com área de 300 m^2 um pouco afastado do centro para ter uma vida mais tranquila e aproveitar a natureza. Ele utilizou 70% do lote para construção da residência e o restante para área de lazer. Posteriormente, adquiriu um novo lote ao lado de sua casa e, com isso, passou a dispor de um terreno formado pelos dois lotes, cuja área mede 420 m^2. Decidiu então ampliar a casa, de tal forma que ela ocupasse no mínimo 60% da área do terreno, sendo o restante destinado à uma horta e um pomar.

Reúna-se em grupos e responda as questões abaixo justificando cada resposta.

a) Você mora perto ou distante do centro? O local onde você mora é movimentado?

b) Atualmente, é crescente a procura por lotes distantes dos grandes centros urbanos. Em sua opinião qual o motivo de isso acontecer? Você prefere morar próximo do centro ou afastado ?

c) Inicialmente, qual era a área ocupada pela casa de Carlos? E pelas áreas da horta e do pomar?

d) Após comprar o novo lote quantos metros quadrados passou a ter a casa de Carlos? E as áreas da horta e do pomar?

e) Quanto aumentou a área da casa após a compra do novo lote? E as áreas da horta e do pomar? Qual dos dois ambientes teve um aumento percentual maior?