



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA– IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GILBSON JOSÉ VELASCO SOUZA FILHO

O ENSINO DE CONJUNTOS E ANÁLISE COMBINATÓRIA BASEADAS NO DESENHO
UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM

SALVADOR

2024

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e
Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

S729 Souza Filho, Gilbson José Velasco

O ensino de conjuntos e análise combinatória baseadas no
desenho universal para a aprendizagem. / Gilbson José Velasco
Souza Filho. – Salvador, 2024.

121 f.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Mariana Cassol

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia,
Instituto de Matemática e Estatística, 2024.

1. Matemática - Ensino. 2. Educação Inclusiva. 3. Análise
Combinatória. I. Cassol, Mariana. II. Universidade Federal da
Bahia. III. Título.

CDU 511:37

GILBSON JOSÉ VELASCO SOUZA FILHO

O ENSINO DE CONJUNTOS E ANÁLISE COMBINATÓRIA BASEADAS NO DESENHO
UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mariana Cassol

SALVADOR

2024

GILBSON JOSÉ VELASCO SOUZA FILHO

O ENSINO DE CONJUNTOS E ANÁLISE COMBINATÓRIA BASEADAS NO DESENHO
UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM

Dissertação de mestrado apresentada à comissão acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 14/03/2024.

Banca Examinadora:



Prof.^a Dra. Mariana Cassol (orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA



Prof.^a Dra. Graça Luzia Dominguez Santos
Instituto de Matemática e Estatística - UFBA



Prof.^a Dra. Elaine Ferreira Rocha
Universidade Federal do Vale do S. Francisco-UNIVASF

AGRADECIMENTOS

Neste momento de grande realização para conclusão do meu mestrado, quero agradecer meu PAI que não se encontra mais entre nós, mas que mantenho nesse mundo terreno o seu nome, me dado como herança para não esquecer a sua ideologia de um mundo mais livre e justo, e que nos possibilitou ser criado nesse lugar maravilhoso. E tenho que agradecer a minha MÃE, professora e mulher retada, que em todos os momentos de dificuldade se manteve sempre a meu lado, nunca descuidando do meu caminho nos estudos, e a qual sempre foi um exemplo a ser seguido ao ponto de exercer uma grande influência na minha escolha profissional.

A minha amada e saudosa Vó Cremilda que me incentivava a fazer tabuada e tinha a função de vigiar os nossos estudos toda as tardes.

Aos meus irmãos Lula e Leca por serem uma inspiração em estudar Matemática, Química e Física, que sempre estudei para me igualar a vocês em seus saberes, e que de alguma forma precisava tirar uma boa nota para que soubessem que também era um “bom estudante”. A minha irmã Karol, minha parceira de surf, basquete e futebol, que na turbulência da adolescência me apresentou as ondas, graças que o oceano nos encontrou minha irmã. A José meu irmão caçula, que enfrentamos muitas dificuldades juntos, mas que sempre tive orgulho de ter como irmão, apesar de brigarmos muito, te amo meu irmão.

A Todos os meus sobrinhos que amo demais, Nat, Lulu, Dudinha, Pepeu, Ricão, Diogo, João, Helena, Sara e Eva, e Muito Obrigado Adriano, Fabiana, Poliana e Luciana por fazerem parte dessa família e cuidarem de meus irmãos tão bem.

A meu Tio Roberto, Tia Sueli e minha tia Beta que participaram da minha infância e trago muitas lembranças boas, e me deram como primo, Débora, Felipe, Leo e Dita. Quero agradecer o tio-primo Carlinho e sua esposa Elba e suas filhas Alana e Valentina por se tornarem tão presente nos dias atuais.

E ao citar, “Portanto, deixará o homem o seu pai e a sua mãe, e apegar-se-á à sua mulher, e serão ambos uma carne”, venho agradecer a minha esposa Lua, que embarca em meus sonhos de conhecer o mundo e compra as minhas brigas, mas do que eu, e sem você TICA, nada disso seria possível. E muito obrigado a Dona Mercedes e seu Valdir por terem trazidos ao mundo essa mulher guerreira.

As minhas professoras Dr^a. Mariana Cassol e Dr^a. Regiane Barbosa, que no momento mais difícil da minha vida, durante a pandemia, me acolheram e me redirecionaram, me fazendo enxergar novos horizontes e me dando uma oportunidade em SONHAR novamente. Um professor realmente pode fazer a diferença!!!!

A todos os professores e colegas da UFBA que nunca desistiram de mim e sempre me estenderam a mão, exigindo, ensinando e o melhor me apresentando esse universo maravilhoso da Matemática!!!!

“A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.”

Constituição Federal

RESUMO

A dissertação tem como objetivo principal descrever e propor práticas inclusivas para o ensino de Conjuntos e Análise Combinatória, fundamentadas nos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA). O enfoque da proposta é construir e desenvolver práticas pedagógicas inclusivas para o ensino de Matemática, considerando a diversidade presente em sala de aula. O trabalho inicia com uma introdução sobre o tema da inclusão escolar, abordando as definições de adaptação, legislações pertinentes e a importância do DUA, juntamente com os princípios e diretrizes que orientam sua aplicação em sala de aula. Destaca-se também o papel crucial do professor de Matemática no processo de inclusão.

Após a contextualização do DUA, o trabalho concentra-se nas propostas pedagógicas para o ensino de Conjuntos e Análise Combinatória no Ensino Médio. Isso inclui a elaboração de materiais didáticos e o planejamento de práticas variadas para aplicação em sala de aula. O texto destaca a importância da observação constante da dinâmica entre o ensino e a aprendizagem por parte do professor, avaliando a compreensão dos estudantes, a pertinência dos exemplos e os problemas apresentados. Conforme preconizado pelo DUA, a participação, a motivação e o engajamento dos estudantes são cruciais para garantir a efetividade do processo de aprendizagem.

O desenvolvimento do trabalho explora como as propostas pedagógicas podem facilitar o ensino e aprendizagem de Matemática, possibilitando a compreensão de conceitos, resolução de problemas e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos no cotidiano. Conclui-se que as propostas apresentadas podem servir de inspiração para outros professores, contribuindo para a promoção da aprendizagem inclusiva, independentemente de serem Público Alvo da Educação Especial (PAEE) ou não.

ABSTRACT

The main objective of the work is to describe and propose inclusive practices for teaching Sets and Combinatorial Analysis, based on the principles of Universal Design for Learning (UDL). The focus of the proposal is to build and develop inclusive pedagogical practices for teaching mathematics, considering the diversity present in the classroom. The work begins with an introduction to the topic of school inclusion, addressing the definitions of adaptation, relevant legislation and the importance of UDL, together with the principles and guidelines that guide its application in the classroom. The crucial role of the mathematics teacher in the inclusion process is also highlighted.

After contextualizing the DUA, the work focuses on pedagogical proposals for teaching Sets and Combinatorial Analysis in High School. This includes the development of teaching materials and the planning of varied practices for application in the classroom. The text highlights the importance for the teacher to constantly observe the dynamics between teaching and learning, evaluating students' understanding, the relevance of examples and the problems presented. As recommended by the DUA, student participation, motivation and engagement are crucial to ensuring the effectiveness of the learning process.

The development of the work explores how pedagogical proposals can facilitate the teaching and learning of mathematics for all students, enabling the understanding of concepts, problem solving and the practical application of knowledge acquired in everyday life. It is concluded that the proposals presented can serve as inspiration for other teachers, contributing to the promotion of inclusive learning for all students, regardless of whether they are People with Disabilities or not.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. JUSTIFICATIVA.....	16
2.1 DADOS HISTÓRICOS.....	18
3. DESENHO UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM	21
3.1. MODOS MÚLTIPLOS DE APRESENTAÇÃO.....	21
3.2. MODOS MÚLTIPLOS DE AÇÃO E EXPRESSÃO	24
3.3. ENGAJAMENTO E ENVOLVIMENTO	27
4. A CONSTRUÇÃO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA.....	30
4.1 CONJUNTOS.....	31
4.2 ANÁLISE COMBINATÓRIA.....	40
5. CONCEITOS MATEMÁTICOS.....	53
5.1 CONJUNTOS.....	53
5.2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.....	55
5.3. ARRANJO	59
5.4. PERMUTAÇÃO	61
5.5. COMBINAÇÃO	63
6. CONCLUSÃO.....	65
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
8. ANEXOS	73
8.1. ANEXO A – Questões de Conjuntos.....	73
8.2. ANEXO B – Questões Análise Combinatória.....	77

INTRODUÇÃO

A promulgação da constituição de 1988 determina a educação como direito de todos e dever do estado, sob os princípios da igualdade, pluralismo de ideias e garantia de um padrão de qualidade, para o desenvolvimento e preparo das pessoas ao exercício da cidadania (Brasil, 1988). Criaram as condições para a participação do Brasil na Conferência Mundial sobre Educação para Todos, organizada pela UNESCO em 1990, que estabeleceu a Declaração Mundial de Educação para Todos com o objetivo de impulsionar os esforços em oferecer educação adequada para toda a população em seus diferentes níveis de ensino, estabelecendo objetivos e metas para suprir as necessidades básicas de educação para crianças, jovens e adultos (UNESCO, 1990).

Nesse contexto, foi possível a participação do Brasil como país signatário da Declaração de Salamanca, que é tida como o mais importante marco mundial na difusão da filosofia da Educação Inclusiva, influenciando as teorias e práticas inclusivas em muitos países. Um pacto cujo objetivo foi fornecer os princípios, as políticas e as práticas em Educação Inclusiva formulada e dirigida aos governos para que concedessem prioridades, de modo que pudessem incluir todas as crianças, independente das diferenças ou dificuldades individuais, para a adoção como matéria de lei dos princípios da Educação Inclusiva, ampliando o conceito de Necessidades Educacionais Especiais e determinando o atendimento de todos em escolas regulares (UNESCO, 1994).

Portanto, ao concordar e assinar a Declaração Mundial de Educação para Todos e a Declaração de Salamanca, o Brasil optou por construir um sistema de educação universal e inclusivo, dando início a um processo legal de transformação do seu sistema educacional. Todavia temos que ter em mente que a inclusão é um movimento social mundial que visa oferecer oportunidade para todos, independentemente de condições econômicas, culturais, raciais, físicas ou intelectuais, ou seja, trata-se de um movimento que, na perspectiva dos Direitos Humanos, propõe que todos exerçam sua cidadania e que a diversidade seja respeitada (Brasil, 2008).

Para garantir o direito a educação, o ensino deve ser ministrado seguindo o princípio da igualdade de condições, da acessibilidade ao currículo formal e da permanência na escola, e nesta perspectiva é determinante que o sistema de ensino se adapte e se reorganize para atender as necessidades de todos os estudantes, sejam eles público-alvo da educação especial ou não. A escola inclusiva propõe um sistema que considera as necessidades de todos. A inclusão é uma provocação ao reconhecimento das pluralidades humanas, cuja intenção é melhorar a qualidade do ensino da escola, atingindo todos os estudantes, lutando contra as frustrações e o fracasso na sala de aula (Matoan, 2003).

Nesta perspectiva, espera-se a inclusão de todos no processo de apropriação dos conhecimentos historicamente construídos nas diversas áreas. Sendo assim, é inegável o papel do ensino e do professor de Matemática para tornar esse processo de inclusão mais eficaz e produtivo, pois de acordo com a Base Nacional Comum Curricular-BNCC (Brasil, 2018), é preciso reconhecer a Matemática como uma ciência humana sendo fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, sendo uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas e para alicerçar descobertas e construções, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Quando se fala em Educação Inclusiva é comum associar a esta o direito dos estudantes Público Alvo da Educação Especial(PAEE), mas ressaltamos que a inclusão é um movimento mundial que respeita a diferença e garantia de direitos individuais de todos, na tentativa de oferecer educação de qualidade, considerando as necessidades e especificidades. E para que todos aprendam sem exceção, é preciso garantir o acesso aos objetos dos conhecimentos determinados pela BNCC. Ao abordar essa temática, da acessibilidade na área de educação, Manzini (2005) esclarece que o termo tem que ser entendido de uma maneira mais abrangente, indo além das dimensões física e arquitetônica, considerando também o acesso à informação, a comunicação, a metodologia, e aos recursos materiais e humanos para o ensino e a aprendizagem condizentes com as especificidades de cada estudante.

De acordo com a Lei Brasileira de Inclusão, em seu artigo terceiro, acessibilidade é

(...) possibilidade e condição de alcance para utilização, com segurança e autonomia, de espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias, bem como de outros serviços e instalações abertos ao público, de uso público ou privados de uso coletivo, tanto na zona urbana como na rural, por pessoa com deficiência ou com mobilidade reduzida; (BRASIL, 2015, s/p).

O processo de aprendizagem de uma pessoa com necessidades educacionais especiais segue as mesmas regras das demais pessoas, não podendo ser apontado como menos desenvolvido e sim que se desenvolve seguindo as mesmas regras das demais pessoas, mas com ritmos diferentes. Por isso, ao se trabalhar com esses estudantes é importante estimular o uso de práticas que valorizem as interações sociais, o trabalho em grupo, e que possibilitem o desenvolvimento de habilidades conceituais, sociais e práticas mediadas pela ação do professor, de forma que a sala de aula se torne um espaço de intensa interação com os instrumentos de aprendizagem (Vygotsky, 2001 e 1984).

Nesse sentido, as adaptações curriculares se constituem medidas importantes para o acesso à aprendizagem e a sua utilização deve ser considerada prática cotidiana em qualquer sala de aula. Segundo Capellini (2018), a adaptação curricular pode ser entendida como uma estratégia didática possibilitando diversas práxis pedagógicas que consideram as diferenças e os ritmos de aprendizagem dos estudantes, oferecendo alternativas educativas quando estes apresentarem dificuldades de se apropriar dos objetos dos conhecimentos determinados pela BNCC. Além disso, o peso da adaptação deve recair em primeiro lugar sobre o currículo e não sobre o estudante. É importante se considerar a existência de diferentes caminhos e variados tipos de recursos para o processo de ensino e aprendizagem, porém deve ser respeitado o tempo de aprendizagem de cada indivíduo (Sebastian-Heredero, 2020).

Sendo assim, é importante ter ciência que as Adaptações Curriculares são práticas alternativas em sala de aulas criadas frente às dificuldades de aprendizagem de todos os estudantes. Contudo, não se trata de fazer um novo currículo, ou um currículo mais fácil ou reduzido, mas sim em torná-lo mais acessível a todos, sobretudo e em primeiro lugar, para tratar de responder às necessidades de cada estudante, para que todos saiam beneficiados no processo de aprendizagem. Em seus estudos, Lopes (2017) afirma que a intenção da adaptação é acessar caminhos para que o estudante com deficiência obtenha êxito ao ser incluído na escola regular, observando as estratégias, os métodos, os recursos, as formas e, não menos importante, os instrumentos de avaliação, não podendo assim significar simplificação do currículo, mas garantia que as necessidades, desse estudante, sejam atendidas em nível de igualdade com os demais companheiros da sala de aula.

Neste contexto, o presente estudo tem o objetivo de propor práticas em sala de aula, referentes ao ensino de Conjunto e Análise Combinatória, seguindo uma abordagem baseada nos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA).

O DUA consiste na elaboração de estratégias educacionais para acessibilidade de todos, tanto em termos físicos quanto em termos de serviços, de produtos e do planejamento e construção de práticas pedagógicas para que todos possam aprender sem barreiras, desenvolvido por David Rose, Anne Meyer e outros pesquisadores do Center for Applied Special Technology (CAST) e apoiado pelo Departamento de Educação dos Estados Unidos, em 1999, em Massachusetts (CAST, 2018).

O DUA se baseia no conhecimento resultante de pesquisas e práticas oriundas de várias áreas do saber: a educação, a psicologia do desenvolvimento, as ciências cognitivas e as neurociências (CAST, 2018). O termo teve origem no conceito de Desenho Universal, do campo da Arquitetura e design de produtos, que teve como objetivo criar entornos físicos, produtos e ferramentas que possam ser utilizados pelo maior número de pessoas possíveis.

Um dos grandes obstáculos para a promoção da inclusão são as práticas inflexíveis que perduram em sala de aula e o DUA é uma referência em busca da correção desses obstáculos. Um grande exemplo nesse contexto é a culturalmente aceita figura do professor de Matemática em pé, seguindo o mesmo padrão há muitas décadas utilizando sempre o quadro e de costas para turma, um modelo tradicional de ensinar a Matemática. Para esse formato de sala de aula, é importante compreender que nem sempre os estudantes conseguem se engajar e se manter concentrados e participativos apenas copiando e escrevendo as suas anotações no caderno. Isso quer dizer, que exemplos como estes podem gerar barreiras não intencionais a um grupo de estudantes que não conseguem participar, dificultando o acesso ao aprendizado (Lambert, 2021).

Por isso, um dos grandes objetivos do Desenho Universal para a Aprendizagem é a busca em motivar e engajar a todos em sala de aula, usando práticas pedagógicas mais flexíveis, modificando as abordagens dos ambientes de ensino, com a construção dos materiais e estratégias planejadas de modo a responder às características e necessidades de todos em sala de aula. Este é um processo a ser desenvolvido pelo professor, sendo necessário entender a relação entre os objetivos, as características do estudante, as estratégias facilitadoras da aprendizagem e as tecnologias educativas (Edyburn, 2010). O DUA preconiza o desenvolvimento de planos de trabalho que levem em consideração a diversidade dos estudantes, considerando o que aprendem, como aprendem e porque aprendem (Rapp, 2014).

A BNCC (Brasil, 2018) orienta que as competências da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio utilizem de estratégias diversas, para introdução aos conceitos e procedimentos matemáticos como:

- A interpretação para situações em diversos contextos;
- A investigação estabelecendo conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos;
- A experimentação e observação de padrões. Isto pode fazer com que o estudante compreenda a importância da utilização dos diferentes registros de representação Matemáticas, sejam estas algébricas, geométricas ou estatísticas.

Desse modo, é essencial diversificar os recursos, as formas e formatos de apresentação. E é através de abordagens flexíveis e adequadas às necessidades de cada indivíduo. Nesse sentido, o DUA pode favorecer e permitir essas abordagens determinadas pela BNCC, ao se definir os objetivos, fundamentar as estratégias, construir os materiais e principalmente propor as diversas formas de apresentação das situações e das práticas, bem como as avaliações que sejam pertinentes a todos em

sala de aula (CAST, 2018). Para que se crie o acesso as competências determinadas, facilitando assim a construção das habilidades matemáticas orientadas na BNCC.

Por isso o presente trabalho será apresentado a construção de práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento de Conjuntos e Análise Combinatória, para turmas de Ensino Médio, respeitando as competências determinadas pela BNCC, e baseadas nos princípios e diretrizes que fundamentam o Desenho Universal para a Aprendizagem.

JUSTIFICATIVA

O ensino da Matemática com base no Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA) está fundamentado nos trabalhos de Sebastian-Heredero (2020), CAST(2018), AMTE(2017), Lambert(2020 e 2021) e Capp (2017). É possível destacar algumas das importâncias do DUA para o ensino de Matemática:

- **Acessibilidade para todos os estudantes:** O DUA é um modelo de ensino que visa tornar o currículo acessível a todos estudantes. Ao aplicar os princípios do DUA no ensino da Matemática, o intuito é garantir que todos tenham a oportunidade de aprender, independentemente de suas habilidades, estilos de aprendizagem e necessidades individuais.

- **Personalização da aprendizagem:** O DUA enfatiza a importância de oferecer múltiplas maneiras de representar a informação, de engajar os estudantes e de permitir que eles demonstrem o que aprenderam. Isso é particularmente relevante na Matemática, uma disciplina que muitos estudantes acham desafiadora. O DUA permite que os professores adaptem o ensino de Matemática para atender às necessidades individuais dos estudantes, ajudando a superar barreiras de aprendizagem.

- **Redução das barreiras de aprendizagem:** O DUA busca reduzir as barreiras de aprendizagem, tanto as físicas como as cognitivas. Na Matemática, isso pode envolver a adaptação de materiais didáticos, a utilização de tecnologia assistiva a criação de ambientes de aprendizagem que sejam acolhedores para todos os estudantes. Isso é fundamental para garantir que os estudantes com deficiências ou desafios de aprendizagem não sejam excluídos do processo de ensino da Matemática.

- **Promoção da equidade:** O DUA promove a equidade no ensino, garantindo que todos os estudantes tenham a oportunidade de alcançar seu pleno potencial na Matemática. Ao adotar práticas inclusivas, os educadores podem ajudar a diminuir as disparidades de desempenho entre diferentes grupos de estudantes, tornando o ensino da Matemática mais justo e equitativo.

- **Preparação para a diversidade do mundo real:** O ensino da Matemática inclusiva com base no DUA prepara os estudantes para lidar com a diversidade do mundo real. Eles aprendem a valorizar a diferença e a colaborar com pessoas que têm diferentes formas de pensar e aprender, habilidades e desafios. Isso os prepara melhor para futuros ambientes de trabalho e interações sociais.

Além disso, é importante destacar que as práticas baseadas na DUA não excluem os métodos inovadores do ensino de Matemática. Pelo contrário é uma forma de trazer para sala de aula as diversas possibilidades de tecnologias e práticas atualizadas mais inovadoras.

O presente estudo tem o intuito da elaboração de tarefas Matemáticas significativas para a sala de aula, sugeridas por Viana e Lozada (2020), para que o estudante tenha a possibilidade de

vivenciar experiências Matemáticas de exploração e descobertas, e não somente de memorização ou repetição. A ideia central deste trabalho está relacionada a construção de um ambiente ou cenário de investigação, que segundo Skovsmose (2014), se contrapõe a ideia de que o autor denomina de paradigma do exercício, se referindo as atividades repetitivas e mecânicas com as operações, cálculos e resoluções de exercícios de Matemática.

A aprendizagem Matemática num cenário de investigação ocorre quando os estudantes trabalham em tarefas para as quais não dispõem de métodos de resolução imediata e têm de pensar e construir as suas próprias estratégias. A proposta é o desenvolvimento em sala de aula de situações envolvendo a construção de tarefas Matemáticas que estimulem os estudantes no engajamento em atividades de investigação, cooperação e comunicação, viabilizando assim, espaços para diferentes formas de reflexões e respostas as atividades em sala de aula (Skovsmose, 2014).

Por isso, as propostas utilizadas nesse trabalho visam a construção de um ambiente de aprendizagem participativo e acolhedor. O ensino da Matemática e seus objetos dos conhecimentos podem ser explorados de uma forma mais ativa e não simplesmente de uma forma repetitiva, com intuito de decorar as fórmulas. Ademais, o seu ensino deve incluir situações em sala de aula que oportunizem a criatividade, as quais serão expressas nos registros dos estudantes, que propiciem a aceitação de múltiplas soluções, o diálogo matemático em suas múltiplas possibilidades e a promoção da aprendizagem ativa. Isso tudo sem deixar de lado a contextualização, a resolução de problemas e a formalização.

Portanto, o objetivo do presente trabalho é descrever e propor práticas pedagógicas docentes para o ensino de Conjuntos e Análise Combinatória baseadas em alguns princípios do DUA. O foco desta proposta é a produção de um processo de práticas e adaptações de materiais, inspirado em um cenário de investigação e atividades contextualizadas para a resolução de problemas.

Neste sentido, entende-se que é possível sonhar com novos caminhos e práticas inovadoras, buscando a quebrar os paradigmas de todo o contexto histórico da construção do sistema educacional brasileiro, concernente a sua estrutura e a cultura da forma de ensinar a Matemática. Por isso, alguns setores da sociedade vêm influenciando e lutando por reformas promovidas nos últimos anos para o início do processo de criação de um sistema inclusivo.

Dados Históricos

É importante conhecer o movimento de transformação fundamentado em implementações de leis e decretos de políticas públicas no âmbito da educação, que vêm traçando os caminhos a serem seguidos para a construção de um sistema educacional inclusivo, que possibilite a inclusão do público-alvo da educação especial nas escolas regulares. Por isso, o caráter de Educação Especial foi definido legalmente como uma modalidade transversal a todos os níveis de ensino, de forma complementar ou suplementar à escolarização (Brasil,1999). Acompanhando esse processo de mudança, foi garantida a matrícula pela Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica, Resolução CNE/CEB nº 2/2001, que traz no artigo 2º:

“Os sistemas de ensino devem matricular todos os alunos, cabendo às escolas organizarem-se para o atendimento aos educandos com necessidades educacionais especiais, assegurando as condições necessárias para uma educação de qualidade para todos. (MEC/SEESP, 2001).”

Junto ao Plano Nacional de Educação (PNE) de 2001, foram estabelecidos os objetivos e metas para a matrícula dos estudantes com necessidades educacionais especiais, apontando os problemas referentes: à oferta de matrículas para estudantes com deficiência nas classes comuns do ensino regular, à formação docente, e ao atendimento educacional especializado. O PNE trouxe como objetivo o avanço para a educação brasileira a construção de um sistema inclusivo que garantisse o atendimento a toda a diversidade humana (Brasil, 2001). Para isso foi implementada a Resolução CNE/CP nº 1/ 2002 que estabeleceu as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, que definiu que as instituições de ensino superior deveriam organizar a estrutura e o currículo para a formação docente, com capacidade para trabalhar com a diversidade em sala de aula e que contemplasse os conhecimentos sobre especificidades dos estudantes com necessidades educacionais especiais (Brasil, 2002).

Um dos grandes passos, nessa caminhada, foi aceitar as diferenças da forma da acessibilidade dos objetos do conhecimento, com o reconhecimento da Língua Brasileira de Sinais(LIBRAS) como meio legal de comunicação e expressão, e a garantia institucional para o seu uso e difusão, visando o acesso dos estudantes surdos à escola, incluindo o estudo da Libras como disciplina curricular nos cursos de formação de professores, bem como a formação e a certificação de professor, instrutor e intérprete de Libras (obrigatório ao atendimento do estudante surdo), assegurando a educação bilíngue (Brasil, 2002; Brasil,2005). Além disso, houve a implementação das diretrizes e normas para o uso, ensino, a produção e a difusão do Sistema Braille em todas as modalidades de ensino,

compreendendo o projeto da Grafia Braile para a Língua Portuguesa e a recomendação para o seu uso em todo o território nacional (Brasil, 2002).

Nos anos seguintes foi implementado pelo MEC o Programa Educação Inclusiva, que garante o direito à diversidade, com o intuito foi apoiar a transformação para um sistema de ensino inclusivo nos municípios do Brasil, promovendo um amplo processo de formação de gestores e educadores, para que fossem ofertados o atendimento educacional especializado e a garantia do direito ao acesso à escola (Brasil, 2003). Foi também lançado o Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE, que teve como eixo central a formação de professores para a educação especial, com a implantação de salas de recursos multifuncionais, visando garantir o acesso, a permanência no ensino regular e o atendimento aos estudantes com necessidades educacionais, nas escolas públicas (Brasil, 2007).

Nos anos subsequentes foram muitas as publicações de decretos que asseguram os direitos das pessoas com deficiência, como a Lei Brasileira de Inclusão (LBI), publicada em julho de 2015.

Esta reafirma o direito a educação. Segundo essa lei:

A educação constitui direito da pessoa com deficiência, assegurados um sistema educacional inclusivo em todos os níveis e o aprendizado ao longo de toda a vida, de forma a alcançar a máximo desenvolvimento possível de seus talentos e habilidades físicas, sensoriais, intelectuais e sociais, segundo suas características, interesses e necessidades de aprendizagem. (LBI, 2015, Art. 27)

Nesse contexto, o Brasil vem criando condições para a normatizar as premissas inclusivas que estavam em debates internacionais sobre a inclusão escolar, criando leis e implementando programas que delimitaram novos contornos para as políticas educacionais no tocante à Educação Especial (Garcia & Michels, 2011), estimulando as matrículas dos estudantes PAEE nas escolas regulares. Parece evidente que a inserção de estudantes PAEE obteve um avanço quantitativo, representado pelo Gráfico 1, nas escolas da Educação Básica do Brasil, pois segundo o último censo escolar foram mais de 1,3 milhões de matrículas de estudantes público-alvo da educação especial na rede de ensino, sendo 88% destes matriculados nas escolas regulares (Brasil 2022).

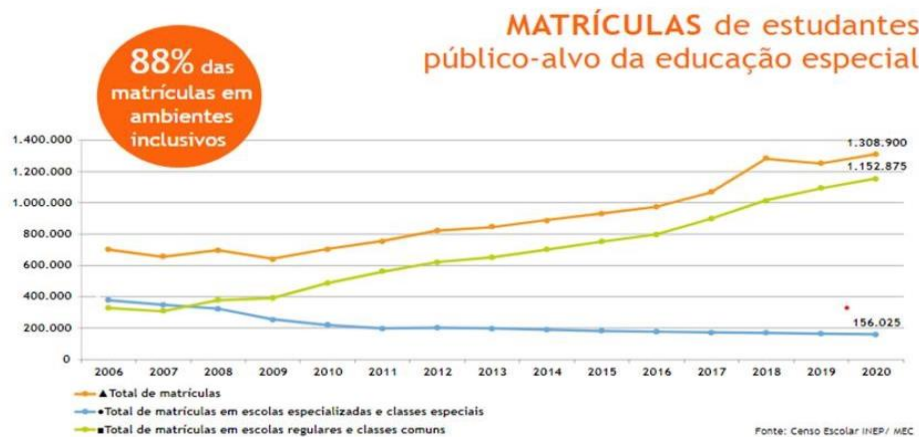


Gráfico 1. Evolução das matrículas de estudantes PAEE (Instituto Rodrigo Mendes, 2023).

Fonte: <https://institutorodrigomendes.org.br/politicas-educacao-inclusiva>,
 acessado no dia 05 de fevereiro de 2024

Assim, esse aumento das matrículas, não pode ser apenas encarado como uma política pública de integração desses estudantes ao ambiente físico das escolas, com intuito de socialização, mas se trata de uma conquista de um setor da sociedade que vem sendo atendida com a implementação de políticas públicas voltadas para a inclusão no sistema de ensino regular, buscando o acesso ao currículo oficial e a aprendizagem de conhecimentos historicamente produzidos em busca da formação de cidadãos economicamente ativos.

O DESENHO UNIVERSAL PARA A APRENDIZAGEM

A fundamentação das diretrizes para a implementação do Desenho Universal para a Aprendizagem, segundo Sebastian-Heredero (2020), está baseada em três princípios fundamentais, que são:

- Proporcionar Modos Múltiplos de Apresentação;
- Proporcionar Modos Múltiplos de Ação e Expressão;
- Proporcionar Modos Múltiplos de Implicação, Engajamento e Envolvimento.

A seguir, serão explorados os três princípios fundamentais e suas características.

Proporcionar Modos Múltiplos de Apresentação

No estudo da didática da Matemática, a luz da teoria dos campos conceituais, Merlini et al. (2016) entende que é necessário que o professor apresente uma diversidade de situações sobre as estruturas e os conceitos do universo matemático. Segundo os autores, uma situação está atrelada a uma diversidade de conceitos e, por sua vez, para a formação de um conceito quanto mais situações diferenciadas forem apresentadas aos estudantes, maiores são a possibilidade na eficácia do processo de aprendizagem.

Portanto, o princípio no DUA em proporcionar os modos múltiplos de apresentação não apenas garantem que as informações sejam acessíveis a estudantes com deficiências perceptivas ou sensoriais específicas, mas também visa facilitar o acesso de todos em sala de aula. Temos que ter em mente, que os estudantes diferem na maneira como percebem e compreendem as informações apresentadas a eles. Por isso, é preciso fornecer opções diversas na forma e métodos ao apresentar os objetos dos conhecimentos matemáticos, determinados pela BNCC, oferecendo variadas opções para a exposição com o intuito de facilitar o ato de perceber, de compreender e de entender, buscando a utilização de diferentes tipos de formatos e de linguagens.

O aprendizado pode se tornar difícil quando os objetos do conhecimento são apresentados em formatos cuja mensagem requeira a todo momento ajuda ou esforços extraordinários. Isto pode criar um ruído na comunicação e dificultar a percepção pelo estudante e a fluidez na dinâmica em sala de aula (Sebastian-Heredero, 2020). As falhas iniciais nesse processo de ensino e aprendizado criam

obstáculos, e para Relvas (2009), o professor é responsável por apresentar as informações, apontar pistas e estabelecer pontes para a construção do conhecimento, e quando as informações são mal apresentadas, existe o risco em serem não compreendidas ou mal compreendidas e mal armazenadas. Por isso, a partir desse conhecimento, Relvas (2012) aborda a proposta de que toda ação de ensino deve considerar as emoções envolvidas no processo de aprendizagem. A autora traz alguns exemplos como situações do cotidiano escolar, em relação a apresentação que pode gerar no estudante um sentimento de medo e frustração, sendo um fator para o fracasso. Por isso, a importância em garantir a qualidade da apresentação dos objetos dos conhecimentos matemáticos em sala de aula, para que se tornem acessíveis, ou seja, para que sejam percebidos e entendidos igualmente por todos.

Portanto, para reduzir as barreiras na aprendizagem, deve-se fornecer as mesmas informações por meio de diferentes modalidades, e formatos, que permitam personalização, atendendo as especificidades de cada um, e ofereçam diversas opções de apresentação sejam elas visuais, auditivas ou táteis. Diante disso, temos que ter em mente, a diversidade inerente a toda sala de aula, pois existem estudantes que podem captar informações com mais rapidez ou eficiência com textos impressos, ou outros estudantes que se sentem mais confortáveis utilizando ferramentas por meios visuais ou auditivos. Vale salientar também a presença de estudantes com deficiências sensoriais (cegueira ou surdez), deficiência motora e deficiência intelectual, inseridos na classificação do público alvo da educação especial brasileira, ou a presença de estudante com transtornos de aprendizagem (Dislexia, Discalculia, Disortografia, Disgrafia, Transtorno do Processamento Auditivo Central e o Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade) que exigem do professor maneiras distintas ao acesso aos objetos do conhecimento.

Segundo Rose e Meyer (2006), ainda existe a capacidade de lidar com modos distintos de representação, tanto linguística quanto não linguística. Para os autores, os elementos semânticos pelos quais as informações são apresentadas como as palavras, ou símbolos e números utilizados no universo da Matemática, não são igualmente acessíveis a estudantes com níveis diferentes de conhecimentos. Por exemplo, um gráfico que ilustra um relacionamento entre duas variáveis pode ser informativo para uns e inacessível ou desconcertante para outros.

Portanto, deve-se esperar como resultado de tudo isso, possíveis desigualdades quando a informação é apresentada a todos de uma única forma. Contudo, uma boa estratégia para a construção das práticas é conhecer o público a ser atendido, para que se busque apresentar de formas variadas os objetos do conhecimento matemático. Isto é, utilizando recursos, dinâmicas, práticas pedagógicas e tecnologias diferentes para que se busque uma construção gradativa do conhecimento, introduzindo as informações em unidades menores, agrupando ideias, e construindo as habilidades adquiridas processualmente. Estes são suportes graduais que favorecem as estratégias de processamento da

informação, ou seja, mostram informações progressivamente, dando muita atenção na introdução de vocabulários e símbolos, promovendo dessa forma com clareza e compreensão as competências esperadas para cada unidade temática, ou melhor, tornam acessível os objetos dos conhecimentos determinados pela BNCC, especialmente de maneira a promover e estabelecer conexões com estruturas e objetos do conhecimento aprendidos anteriormente, ou que façam parte do mundo do estudante.

Segundo Sebastian-Heredero (2020), o objetivo da educação é ensinar aos estudantes como transformar as informações que têm acesso em conhecimentos úteis, em seus estudos o autor aborda como as pessoas diferem muito em suas habilidades de processamento de informações. Ou seja, as informações apresentadas em sala de aula, como conceitos, princípios ou ideias, são mais acessíveis e podem ser assimiladas de maneira mais apropriada quando apresentadas de forma que facilitem ou ativem qualquer conhecimento prévio necessário. Para garantir que todos tenham acesso igual a informação, devem ser oferecidos diversos modos de apresentação, para que esclareçam ou tornem explícitas o significado e as suas relações com os objetos do conhecimento.

Na Matemática, o acesso aos novos objetos do conhecimento muitas vezes necessita conhecimentos prévios. Ou seja, os professores de Matemática muitas vezes afirmam que a Matemática é uma disciplina acumulativa, um discurso muito utilizado para se esquivar do fracasso dos estudantes com essa área do conhecimento, responsabilizando o ensino da disciplina Matemática nos anos anteriores.

Sabemos sim que existem barreiras e desigualdades quando alguns estudantes não possuem esse conhecimento preliminar, que é essencial para compreender ou usar as novas informações. Essas dificuldades podem ser reduzidas quando existe a disponibilidade de opções para apresentar as informações e facilitar ou permitir que outras conexões sejam feitas com as informações preliminares necessárias, ou seja, criar uma diferenciação às informações apresentadas, abordada em Tomlinson(2016), para promover aprendizado dada necessidades individuais de cada estudante em sala de aula.

Portanto, para implementar esses princípio é preciso conectar o aprendizado, estabelecendo relações e ativando conhecimentos prévios, usando imagens visuais, materiais variados, tais como materiais manipuláveis que estimula outros sentidos, além da audição e visão, instigando a investigação, fixando os conceitos anteriores já assimilados ou praticando rotinas para dominá-los, estabelecendo ligações entre conceitos e recorrendo também as conexões com outros temas curriculares entre as diversas áreas do conhecimento, por exemplo, contextualizando problemas matemáticos com os objetos do conhecimento das aulas de história, geografia, ou outras disciplinas.

Proporcionar Modos Múltiplos de Ação e Expressão

Os estudantes diferem no modo como agem e se expressam em sala de aula, podendo resolver as atividades didáticas de maneiras diferentes. Enquanto alguns são capazes de se expressar corretamente por escrito, outros são mais eficientes em utilizar a linguagem oral. Por isso, para Rose e Meyer (2002), deve-se levar em consideração que tanto a ação quanto a expressão requerem muitas estratégias, práticas e organização, devido a capacidade dos estudantes em distinguir-se uns dos outros. Segundo as autoras, não há um único meio de ação e expressão ideal para todos os estudantes e, conseqüentemente, é essencial fornecer diversas alternativas que estimulem a participação do estudante para a sua ação e expressão em relação aos conhecimentos que estão sendo adquiridos.

Segundo Sebastian-Heredero (2020), para a implementação desse princípio é preciso fornecer opções para: a interação física, a otimização do acesso a ferramentas, a criação de produtos e tecnologias de apoio, a disponibilização de opções para a expressão e a comunicação, a definição das competências com níveis de suporte graduados para prática e execução, e fornecimento de opções para funções executivas.

Ao fornecer opções para a interação física com o material e a cooperação entre os estudantes, segundo Sarmiento (2010), o manuseio dos materiais concretos na aula de Matemática é essencial para um melhor aprendizado, possibilitando uma melhor interação entre os estudantes, sendo um estímulo para o trabalho em equipe, pois, à medida que os estudantes tem contato direto com os materiais, ora realizando medições, ora descrevendo, ou comparando com outros de mesma natureza, criam-se condições que estimulam o desenvolvimento do senso crítico e dedutivo do estudante.

Contudo, é preciso que o professor esteja atento e ofereça alternativas nos requisitos de ritmo, de tempos, das habilidades motoras necessárias para interação com esses materiais educacionais e do domínio da tecnologia no caso da utilização de softwares. Pois, o grande objetivo é otimizar o acesso às ferramentas e às tecnologias de apoio. Seguindo as diretrizes da DUA, geralmente, não basta fornecer uma ferramenta ao estudante, é necessário oferecer auxílio para que se faça um uso efetivo dela (CAST 2018). Muitos estudantes precisam de ajuda para navegar em seu ambiente, tanto em termos do ambiente físico quanto do currículo, e deve-se garantir que todos tenham a oportunidade de utilizarem ferramentas ou materiais que os ajudem na participação plena em sala de aula.

Diversos estudantes com deficiência precisam usar regularmente tecnologias assistivas para navegar, interagir ou escrever. Portanto, é essencial assegurar que as tecnologias e o currículo não criem barreiras na utilização dessas ferramentas. No entanto, é pertinente assegurar que, ao fazer uma

lição em um formato acessível, esta não elimine o desafio necessário para aprender. Por exemplo, estudantes com paralisia cerebral com deficiências nos membros superiores, que podem se expressar oralmente, terão uma grande dificuldade em fazer avaliações escritas.

A tarefa do professor, nesse sentido, é proporcionar as diversas opções para a expressão e a comunicação, tanto no nível da interação entre colegas quanto para permitir que o estudante expresse facilmente os seus conhecimentos, ou seja, consiga expressar as suas ideias referentes aos objetos do conhecimento. Pois bem, é essencial fornecer meios alternativos de expressão utilizando múltiplos meios de comunicação, pois a utilização e a existência de alternativas podem reduzir as barreiras para se expressar, baseado na especificidade de cada indivíduo em sala de aula.

Existem ferramentas mais flexíveis e acessíveis, como usar objetos físicos manipuláveis como modelos 3D e o material dourado. Hoje em dia é possível utilizar mídias sociais, aplicativos e apresentações com animações, ferramentas e tecnologias que possibilitam apresentar ou resolver problemas usando estratégias variadas. E com elas, os estudantes podem participar do processo de aprendizagem e expressar o que sabem. Neste sentido, os estudantes devem aprender a usar ferramentas que permitam o melhor ajuste possível entre as suas habilidades e o que a tarefa didática exige.

No processo de planejamento da unidade temática, composta de objetos do conhecimento e competências a serem desenvolvidas em uma turma de Matemática, o formato de avaliação é uma das questões principais a ser trabalhadas pelo professor, pois esta é uma forma de se obter o feedback e aferir o desempenho do estudante e da turma. E o ato de avaliar está relacionado com a capacidade de expressão do indivíduo, e, por conseguinte, está vinculado com a ação do estudante em sala de aula. Como já exposto, o professor, ao escolher as competências determinadas pela BNCC, deve defini-las com níveis de suporte graduados, também para a sua prática e a sua execução, desenvolvidas em uma ampla variedade de formatos visuais, auditivas ou de leitura, estruturadas e sequenciadas, buscando a autonomia do estudante, oferecendo oportunidades de apoio para quem precisa. Neste sentido, para a acessibilidade aos objetos do conhecimento determinados pela BNCC, o professor pode oferecer alternativas e maior liberdade para quem pode fazê-lo de forma autônoma. Para Rose e Meyer (2006, 2002), é importante dar opções para que os estudantes atinjam seu nível máximo de proficiência nas diferentes competências. Contudo, frequentemente precisam de múltiplos auxílios para guiá-los tanto na prática quanto no desenvolvimento de sua autonomia.

Para Sebastian-Heredero (2020), uma das formas de como implementá-lo, é oferecer diferentes modelos de simulação que utilizem distintas abordagens, estratégias e habilidades e usar mentores diferentes, como o apoio de tutores ou de grupo de estudos em sala de aula que usam

abordagens diversas para motivar, orientar, dar feedback ou informar, pois estes servem para fornecer suportes. No entanto, à medida que se vai avançando na unidade temática, os suportes podem ser removidos gradualmente à medida que as habilidades aumentem a autonomia dos estudantes.

O professor ao estruturar as suas práticas, precisa fornecer opções para funções executivas, que são a capacidade humana de agir com facilidade ou domínio, caracterizada como um sistema complexo de módulos funcionais da mente que regulam os processos de planejamento e de controle, sendo determinante na orientação da ativação e da modulação dos processos cognitivos (Desoete e Weerdt, 2013). Essas capacidades permitem que os indivíduos ajam estabelecendo metas ou objetivos no longo prazo e são comumente utilizados no intuito de descrever o comportamento intencional direcionado para a solução de conflitos (Neuenschwander et al., 2012). Segundo Andrade et al. (2016), afirma-se que o funcionamento das funções executivas permite ao indivíduo emitir comportamentos direcionados a metas, motivando-o para o início da atividade, partindo assim para o ato de planejá-la, freando os comportamentos inadequados, lidando bem com os estresses da vida diária e aprendendo com os seus erros.

Porém, as funções executivas são limitadas com o excesso de informações que armazena na memória de trabalho. Isso quer dizer que aulas tradicionais de Matemática, com professor somente utilizando o quadro, escrevendo e abordando muitas definições, formalizando a todo momento, e estudantes utilizando caderno de anotações, é um processo muito limitado para alguns estudantes e até severamente limitado para aqueles com deficiências cognitivas e problemas de aprendizagem, segundo Sebastian-heredero(2020). Por isso, é importante oferecer estruturas e organizadores externos, como os utilizados pelas pessoas que usam as funções executivas, para manter as informações organizadas na mente. Uma boa estratégia são as salas de aula temáticas com laboratório exclusivo para o ensino da Matemática, que proporcionam a todo momento a exposição dos organizadores em formas de gráficos, modelos, lembretes e avisos para padronizar, categorizar e sistematizar.

Além disso, é sempre bom para o professor retornar a objetos dos conhecimentos passados e ao início do assunto, trazer exemplos cotidianos para criar as diversas formas de estímulo, bem como construir pontes sobre o que aquele estudante está sentindo a respeito do que se está sendo abordado em sala. Assim, para estimular as funções executivas, de uma forma mais eficiente, é preciso garantir a vivência rotineira e sistemática sobre o processo de aprendizagem. E a todo momento é preciso estimular a ação e a expressão do estudante, sendo uma forma de feedback mais explícito, informativo e regular do estudante. Pois, para fornecer esses retornos é essencial fazer perguntas para orientar sobre o próprio processo de aprendizagem, mostrando e expondo o progresso ao longo do tempo, pedindo aos estudantes que identifiquem as dificuldades, usando modelos e formatos que orientem a

autorreflexão e fornecendo modelos diferentes de estratégias de avaliação como contextualização, dramatização, produção de vídeos, o ensino baseado em projetos, o ensino baseado em problemas e a abordagem diferenciada.

Proporcionar Modos Múltiplos de Implicação, Engajamento e Envolvimento

O componente afetivo é um fator bastante importante para a aprendizagem, porém os indivíduos diferem muito na maneira como estão envolvidos ou no que os motiva a aprender. Para alguns, a novidade e a espontaneidade podem ser motivadoras, enquanto outros preferem ambientes rotineiros. Há estudantes que preferem trabalho em grupo, enquanto outros estão mais envolvidos no trabalho sozinho. Isto quer dizer que não existe uma forma única de participação ideal, sendo essencial fornecer várias opções para facilitar o engajamento e o envolvimento do estudante em sala de aula.

Segundo Sebastian-Heredero (2020), para proporcionar modos múltiplos de implicação, engajamento e envolvimento é necessário: proporcionar opções para promover o interesse por parte dos estudantes; otimizar a escolha individual e a autonomia; proporcionar opções para manter o esforço e a persistência; e proporcionar opções para a autorregulação.

Ao proporcionar opções para promover o interesse, o professor em sala de aula tem que se dedicar a captar a atenção e o envolvimento dos estudantes, pois cada estudante difere significativamente no que atrai sua atenção e motiva seu interesse. Contudo, os interesses mudam à medida que novos conhecimentos e habilidades são adquiridos. Segundo Schwartz (2014), a motivação também é mutável, o que faz dela uma propriedade dinâmica à medida que o contexto situacional e o contexto cognitivo mudam. Logo, é relevante ter formas diversas e estratégias alternativas para promover o engajamento dos estudantes em sala de aula.

A busca pela participação do estudante, o que corriqueiramente os professores chamam “*trazer o estudante para mim ou não quero perder o estudante*”, passa pela construção de um ambiente em sala de aula que maximize a satisfação com as conquistas e proporcione participação ativa do estudante na construção de suas metas, na tentativa que se sintam vinculados ao seu próprio processo de aprendizado. Segundo Sebastian-Heredero (2020), este é um dos pontos principais para otimizar a escolha individual e a autonomia. Neste sentido, Rose Meyer e Hitchcock (2005) afirmam que um dos fatores primordiais para a implantação das diretrizes do DUA passa por discutir com a turma os caminhos traçados para atingir as metas em relação ao processo de ensino e aprendizagem. No exemplo brasileiro é possível apresentara a turma, as possíveis competências a serem adquiridas

em relação ao ensino dos objetos dos conhecimentos determinados pela BNCC, para cada unidade temática, sendo interessante dessa forma apresentar e discutir com a turma o que será abordada, a forma e o que se pretende atingir.

Por outro lado, é preciso minimizar a sensação de insegurança e as distrações criando um espaço onde os estudantes se sintam confiantes para aprender. Tal fato para Fonseca et al. (2016) pode ser justificado pela influência dos afetos e emoções dos estudantes direcionadas ao ambiente escolar, por meio da interação com colegas e professores para a realização das atividades, sendo mais eficiente quando se está relacionados aos afetos e emoções positivas.

Vale ressaltar a necessidade em reduzir as possíveis causas de insegurança e distrações, criando um clima de apoio e aceitação na sala de aula, sendo interessante elaborar rotinas de classe, utilizando ferramentas que possam incrementar a previsibilidade das atividades diárias. Um grande exemplo são os ambientes próprios para cada disciplina, que criam um ambiente onde cada professor é o responsável em decorar e incrementar a sala com lembretes e pré-visualizações que permitam aos estudantes antecipar e estar preparados para o que está sendo apresentado em sala de aula.

Contudo, quando se trata da construção das práticas pedagógicas deve-se ter bastante cuidado com o ritmo de trabalho, em relação a duração das aulas e os dias decorridos de espera entre os encontros para a sequência das atividades, tendo em mente que na sala de aula existem estudantes que podem precisar de ajuda para as suas demandas na realização de suas tarefas.

Na interação entre o processo de planejamento e de aplicação, ou apresentação, um dos grandes objetivos dos professores é a construção e implementação das práticas que busquem o engajamento do estudante, definido por Schaufeli (2020) como um estado de espírito positivo, gratificante e relacionado ao trabalho. Segundo o autor, o engajamento refere-se a um estado afetivo cognitivo mais persistente e penetrante caracterizado por vigor, envolvimento e absorção, sendo o vigor caracterizado por altos níveis de energia e resiliência mental durante o trabalho, a vontade de investir esforço no próprio trabalho, e persistência mesmo diante das dificuldades. A dedicação é caracterizada por um senso de importância, entusiasmo, inspiração, orgulho e desafio. Já o termo absorção, é caracterizada por estar totalmente concentrado e atenção focada, controle completo, e prazer intrínseco.

Um dos papéis do professor em sala de aula é proporcionar opções para manter o esforço e a persistência. Quando os estudantes estão motivados, podem regular sua atenção e a parte emocional para manter o esforço e a concentração que esse aprendizado exige. Portanto, o que se pretende para garantir o resultado esperado quando se está planejando as tarefas para a aplicação em sala de aula,

são estudantes que mantenham a sua atenção e a participação nas tarefas. Assim, um dos fatores que se deve estar atento é ao nível e a importância do desafio percebido pelos estudantes.

Os estudantes se envolvem mais quando as informações e as atividades que precisam realizar são relevantes para eles e tem valor para seus interesses e objetivos. Ou seja, devendo ser relevantes para os objetivos pessoais e de aprendizagem. Os estudantes raramente se interessam por informações e atividades que não tenha valor para eles ou que não são relevantes, por isso, uma das maneiras mais importantes para os professores captarem seu interesse é por meio de atividades reais e significativas. Obviamente, nem todos os estudantes consideram as mesmas atividades ou informações expressivas para seus objetivos. Segundo Sebastian-Heredero (2020), é preciso variar as atividades e as fontes de informação para que elas possam atingir a cada um e promovam o desenvolvimento de respostas pessoais e o interesse dos estudantes. Ou seja, o que se busca são atividades educacionais culturalmente e socialmente relevantes e significativas, que possibilitem a participação ativa, a investigação, a exploração e a experimentação por parte de cada indivíduo que compõe a sala de aula.

Além disso, a estruturação das atividades deve incentivar o uso da imaginação para resolver problemas novos e relevantes, ou que tentem dar significados a ideias complexas de maneira criativa, estimulando e fomentando a colaboração e a cooperação. Embora seja importante cuidar dos elementos extrínsecos da aprendizagem para contribuir com uma maior motivação e envolvimento, também é necessário e preciso que os estudantes desenvolvam habilidades intrínsecas para regular suas próprias emoções e motivações, denominada de capacidade de se autorregular.

A autorregulação da aprendizagem, para Ganda e Boruchovitch (2018), em seus aspectos de autorreflexão e ação, é definido como um processo no qual o estudante monitora e avalia o seu próprio aprendizado e está associada à melhor retenção do conteúdo, maior envolvimento com os estudos e melhor desempenho acadêmico. Pois segundo as autoras, a formação da autorregulação na vida de um indivíduo é um aspecto fundamental do desenvolvimento humano, sendo caracterizada como a capacidade em modular as próprias reações emocionais ao interagir com o meio ambiente.

No entanto, os estudantes também precisam conseguir lidar com as frustrações e evitar a ansiedade, por isso a importância do conhecimento individual de cada estudante sobre o que ele considera motivador, intrinsecamente ou extrinsecamente. Para Rose, Meyer e Hitchcock (2005), professores e escolas podem ajudar e oferecer alternativas, como o tempo e os espaços escolares. Estes trazem em seus estudos exemplos de atividades e estratégias escolares que buscam estimular e implementar o desenvolvimento da auto regulação como: conversar na tentativa de incentivar a autorreflexão sobre do que acabou de trabalhar em sala de aula, estimular no individuo a administração de seu tempo de concentração nas tarefa escolares, melhorar e facilitar a orientação

sobre o processo a ser seguido no estabelecimento das metas, levando em conta tanto os pontos fortes quanto os fracos de cada um, identificando em cada um seus objetivos pessoais.

Além disso, é preciso que indivíduos reconheçam que estão progredindo em direção a uma maior independência e autonomia, sendo necessário que a escola tenha diversas formas de avaliação para que cada um possa identificar e escolher o melhor para cada estudante. A avaliação é mais eficaz em manter o envolvimento quando o retorno é relevante, construtivo, acessível, consistente e oportuno.

Uma proposta de autoavaliação é decisiva para ajudar os estudantes a manterem a motivação e o esforço necessários para aprender, pois um retorno bem orientado, o *feedback*, estimula os estudantes para o domínio ou a excelência nessa habilidade, em vez de uma forma fixa, de múltipla escolha, e objetiva que busca mensurar a absorção de conteúdos tecnicistas. Mas, ao avaliar como os estudantes devem ser capazes de se comunicar e colaborar efetivamente na construção de seu aprendizado, entende-se que isso é mais fácil para alguns do que para outros. Pode ser papel da escola propor esse objetivo comum na colaboração de cada um no seu processo de construção do conhecimento sempre respeitando a especificidade de cada um.

A CONSTRUÇÃO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA

Conjuntos

O objetivo neste capítulo é descrever uma proposta de prática docente para ensino de Conjuntos, para estudantes do Ensino Médio, baseadas em alguns princípios do DUA.

Ao começar com Conjuntos, o foco desta proposta é a produção de um processo de práticas, utilizações de materiais adaptativos e manipuláveis de materiais, partindo assim para a construção das habilidades das operações e da Resolução de Problemas, com conjuntos visando determinar o que propõe a BNCC, para conjuntos como criar as habilidades em coletar e organizar as informações, em fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos, de modo a estimular a investigação, aproveitando o já constituído pelo estudante no Ensino Fundamental, promovendo assim ações que facilitem o letramento matemático já iniciado nas etapas anteriores. Isto significa que os novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e abstração, permitindo aos estudantes formular e resolver problemas com mais autonomia devido aos recursos matemáticos já aprendidos (Brasil, 2018)

Com base na definição e nas diretrizes norteadoras para aplicação do DUA, foi desenvolvida como proposta, uma sequência de atividades com métodos e materiais diversos para a aprendizagem de conjuntos, oferecendo caminhos alternativos para a aprendizagem, propondo níveis variados de apoio e desafios seja, vendo, ouvindo, lendo, falando ou tocando para aprender sobre o objeto do conhecimento. A estratégia é apresentar as informações numa variedade de maneiras pois, segundo Lambert (2020),

Os estudantes devem ser capazes de usar uma variedade de representações para modelar seu pensamento; múltiplas representações podem apoiar os estudantes com diferenças de memória e processamento. Tudo isso sugere o central papel da representação na aprendizagem Matemática e como compreender a representação em si, como multimodal, pode tornar a Matemática mais acessível a todos os estudantes. (Lambert, 2020, p.8).

Por isso, buscando seguir essas diretrizes, o relato começa com a construção do material a ser utilizado em sala de aula pelos estudantes, separando-os em grupos, utilizando caixas de papelão e materiais para colorir, como na Figura 1, em que foram utilizadas fitas adesivas com coloração diferentes para atrair a atenção do estudante. No caso da caixa azul, foi utilizada na borda uma fita de

coloração metálica com superfície mais áspera para diferenciar da caixa rosa de mesmo tamanho e formato, quando for manuseada por estudantes com deficiência visual, por exemplo. Assim como as bolinhas a serem usadas com diversidades de cores e diversidades de texturas.

Figura 1. Caixas para Construção dos Conjuntos



Fonte: Imagem do Autor

É fundamental compreender que é preciso incluir os estudantes em todas as atividades desenvolvidas em sala de aula, e buscar recursos que permitam que todos participem. Sendo assim, a adaptação curricular pode acontecer de diferentes maneiras, o importante é considerar as características e necessidades do estudante, além do contexto no qual o trabalho educacional é desenvolvido.

A proposta é que a primeira aula seja utilizada para a construção do material e introdução do que será feito nos próximos encontros, sendo que as caixas servirão como organizadores de coisas, objetos ou elementos que tiverem as mesmas características, podendo estar dentro, por isso pertencendo a determinada caixa ou estando fora dela, ou seja não pertencendo, o que está exemplificado na Figura 2.

Figura 2. Relação de pertinência



Fonte: Imagem do Autor

Na atividade representada na Figura 2, é introduzida a relação de pertinência junto com o símbolo usado na Matemática, de \in ou \notin . Contudo, é preciso continuar com a prática e a utilização de mais exemplos. Como o utilizado na Figura 3, trabalhando uma maior complexidade sobre a relação de inclusão e a possibilidade do elemento pertencer a dois conjuntos, no caso as esferas verde e branca que pertencem (\in) a caixa rosa que está contida (\subset) na caixa verde, já a esfera vermelha que pertence (\in) à caixa verde, mas não pertence (\notin) à caixa rosa.

Figura 3. Relação de Inclusão



Fonte: Imagem do Autor

A proposta é apresentar a Figura 3 para que todos os estudantes possam visualizar, ou tocar, e entender os conceitos de Matemática que normalmente são explicados de maneira abstrata, além de aprenderem na prática o uso dos símbolos, \in , \notin , \subset e \supset . A elaboração dos materiais por cores e texturas facilita a compreensão e diferenciação dos conceitos, além de propiciar que um estudante com deficiência visual, por exemplo, possa realmente participar da explicação em sala de aula e tenha acesso ao mesmo material que a turma. Ao propor a atividade é interessante fazer as seguintes perguntas para que além de utilizar os conceitos de pertinência e inclusão, possa também trazer objetos do conhecimento dos anos anteriores que serão utilizados em durante o ensino médio, como é o caso de fração:

- Existe algum elemento que pertence a caixa verde e não pertence a caixa rosa?
- Quantas bolinhas ou esferas pertencem a caixa verde?
- Quantas esferas pertencem somente a caixa verde?
- Considerando as esferas que pertencem a caixa verde:

1. Qual a fração que representa as esferas dentro da caixa rosa?

2. Qual a fração que representa as esferas que não estão dentro da caixa rosa?

- Considerando o total de esferas utilizadas, qual a fração que representa as bolinhas que pertencem a caixa verde, mas não pertencem a caixa rosa?

A proposta descrita visa atender a todos estudantes da sala de aula, mas para o planejamento das práticas é importante levar em consideração as especificidades de cada estudante, visando a participação de todos. Uma boa estratégia para a aplicação é organizar a classe em pequenos grupos, para possibilitar a interação social e uma maior participação dos membros de cada grupo, estimulando as áreas sociocognitivas e emocionais da aprendizagem (Bello et al., 2018). Este sentimento de participação e interação nos grupos condiz com a proposta de Rose e Meyer (2002), que mencionam a relevância das redes afetivas, o engajamento e envolvimento em sala de aula nos processos de ensino e aprendizagem.

Assim, é fundamental que a todo momento o professor entenda que os estudantes precisam estar envolvidos com o que se está trabalhando em sala de aula, e a construção do material didático tende a motivar a participação, pois o estudante trabalha com o que foi produzido por ele.

A importância em se trabalhar com o material manipulativo, segundo Elida et al. (2015), está enraizada na ideia de que crianças raciocinam concretamente antes de fazê-lo abstratamente. É importante lembrar aos estudantes que os objetos a serem manipulados são apenas uma representação física de um conceito. Assim, segundo os autores, existem condições e princípios para o uso de materiais manipuláveis como: começar com representações concretas altamente transparentes e passar para representações mais abstratas ao longo do tempo; evitar materiais e práticas que tenham características irrelevantes para os estudantes; e explicar explicitamente a relação entre os objetos concretos e o conceito matemático; e usar o material de forma consistente, por um longo período. Continuando com a estratégia de organização em grupos menores de estudantes para manipulação de material e construindo passo a passo os exemplos a serem utilizados, o que pode ser considerado no processo avaliativo, propõe-se que cada grupo responda o desafio oral, que pode ser lido, explicado, e repetido quantas vezes for necessário pelo professor.

Neste sentido, pode-se propor uma atividade para que possa entender, ou mapear a turma, em relação aos objetos do conhecimento da Matemática referentes operações, as frações e as resoluções de problemas. Como representado pela resolução da Figura 4, nessa proposta de atividade pede-se que sejam escolhidas 8 bolas e que se coloque $\frac{1}{2}$ das bolas dentro da caixa menor, $\frac{1}{4}$ das bolas pertencentes a caixa maior, mas não pertencentes a caixa menor. E o restante fora das caixas.

Figura 4. Representação da Proposta de Avaliação



Fonte: Imagem do Autor

Após a resolução deste desafio é possível continuar a praticar usando o material manipulável produzido, inclusive contextualizando com temáticas mais rotineiras, como por exemplo, propondo junto com a turma uma atividade sobre a preferência em História ou Biologia, com apresentação de estudos, como a Matemática é utilizada nas demais áreas do conhecimento. E no caso dessa proposta de prática, pode ser realizada uma votação, na qual cada estudante recebe duas esferas e deve colocar a esfera na caixa que representa sua preferência, se por biologia na caixa rosa ou por história na caixa azul, ou uma em cada caixa, caso gostem igualmente das duas. É importante lembrar da participação do professor, que também colocará as bolinhas nas caixas.

Figura 5. Atividade em sala de aula



Fonte: Imagem do Autor

Após a votação, no centro da sala um dos estudantes será escolhido para contar o total de bolinhas. Antes de iniciar a contagem, teremos as seguintes indagações:

- Os números de bolinhas corresponderam ao total de pessoas que participaram da dinâmica?
- Os conjuntos são disjuntos?
- Quantos estudantes gostaram dos dois exemplos?
- Qual a fração de estudantes que gostam apenas do exemplo utilizando História?
- Qual a fração de estudantes que gostam apenas do exemplo utilizando Biologia?

Após as indagações, visando proporcionar um sentido de investigação nos estudantes, pode-se aplicar a resolução das questões utilizando o diagrama de VENN, desenhando no quadro ou projetando utilizando o computador. Porém, no caso da nossa prática, propomos uma adaptação que permita a participação de maior número de estudantes, trazendo para o centro da sala material manipulável utilizando dois bambolês, como na Figura 6.

Figura 6. Conjuntos são disjuntos?



Fonte: Imagem do Autor

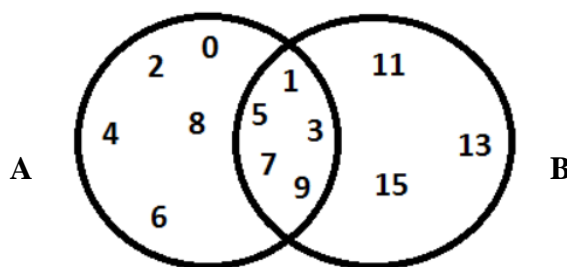
Nesta situação foram utilizados recursos comumente disponíveis no contexto da escola, contudo a escolha dos assuntos interdisciplinares pode ser adaptada para diversas realidades, já que o objetivo desta atividade é a participação de todos, visando a motivação e engajamento da turma, pois como defendem Silva e Mendes (2018), a intenção das práticas que seguem os princípios do DUA nas aulas de Matemática é valorizar as experiências de ensino e aprendizagem bem-sucedidas, além de mostrar uso dos conteúdos em situações reais, do dia a dia. Daí a importância em oferecer aos estudantes do PAEE mais oportunidades nas atividades destinadas à turma, e não em atividades descontextualizadas, ou colocadas separadas do restante dos colegas.

Com esse tipo de atividade se espera estimular as redes de reconhecimento, denominado princípio da representação que, para Rose e Meyer (2006), está relacionado aos diversos modos de oferecer acesso aos conhecimentos prévios, conceitos e temas atuais a partir de informações apresentadas. Desta forma, para a continuação do desenvolvimento dos objetos do conhecimento dos conjuntos, o que se busca são novas formas de apresentação.

A proposta é que no próximo encontro com a turma seja realizada uma aula expositiva utilizando a projeção com o computador, sugere-se a que o modelo da figura 6 participe da apresentação, mas tendo atenção com a formatação das letras e pano de fundo, usando letras sem serifas, tamanho grande e contraste, com o intuito de facilitar a leitura dos estudantes. Na aula com o projetor é importante que em nenhum momento o professor fique de costas para a turma, podendo caminhar pela sala e interagir melhor com os seus estudantes. Pode-se então, realizar a atividade a seguir.

Considere os conjuntos A e B , não disjuntos:

Figura 7. Exemplo utilizando o Diagrama de Venn.



Fonte: Imagem do Autor

Responda o que se pede:

- 1) Quem são os elementos do conjunto A ?
- 2) Quem são os elementos do conjunto B ?
- 3) Quantos elementos existem no conjunto $A \cup B$?
- 4) Quais elementos são do conjunto $A \cap B$?
- 5) Qual a fração que representa a quantidade de elementos pertencentes a intersecção dos conjuntos?
- 6) Determine os elementos dos conjuntos abaixo:
 - a) $A - B$
 - b) $B - A$

Sugere-se a utilização das adaptações em toda fase de ensino, para que se possa atender as especificidades de aprendizados de uma grande parcela dos estudantes presentes em sala de aula. Pois a função dos materiais manipulativos, conforme destacado por Olanoff et al. (2009), é fundamentar e ampliar a compreensão dos estudantes.

Após as primeiras introduções sobre conjuntos e suas operações, e ao verificar que a turma está progredindo e internalizando esse conhecimento, é possível avançar para a formalização desses conceitos. Isso pode ser feito na próxima aula ou encontro, consolidando assim o entendimento dos alunos e preparando o terreno para novos aprendizados., partindo-se assim para a formalização do que foi ensinado, a ser realizada processualmente em mais de uma aula, com os estudantes.

Após a formalização dos conceitos, retoma-se para a aplicação da atividade em sala de aula, cujo o enfoque está inspirado na abordagem baseada em problemas, pois segundo Browder et al. (2018), a resolução de problemas pode ser um desafio para qualquer estudante que tenha dificuldade em Matemática, contudo sua realização gera competências que são cruciais para a independência na vida diária, ou seja, contribui para que o estudante não veja os conteúdos trabalhados em sala de aula deslocados de sua realidade, ao contrário, compreendendo a relação deste na vida. Neste sentido, propõe-se alguns problemas, listados no Anexo 1.

Nesta última etapa do processo de ensino de conjuntos, com a classe dividida em grupos e utilizando a resolução estruturada por esquemas. Neste caso, na proposta desta atividade, os estudantes em conjunto com o professor, e usando os materiais manipulativos desenvolvidos em sala de aula aplicam o que aprenderam, podendo responder as questões em diversos formatos, seja escrito, oral, ou meios de multimídia, isto é, conforme a preferência de cada um, pois cada estudante demonstra o aprendizado de um jeito, alguns ficam mais seguros registrando a resolução de maneira escrita, outros por meio de recursos, associando com exemplos. E na perspectiva do DUA, isto precisa ser considerado no processo de aprendizagem.

Ao abordar a temática baseada em esquemas Kingsdorf e Krawec (2016) pontuam a necessidade de fazer com que o estudante identifique o tipo de problema, receba instrução de direção e aprenda a categorizar palavras. No caso dos problemas propostos na avaliação do Anexo 1, o que se busca é o aprendizado da resolução dos problemas utilizando o diagrama de VENN da figura 6, que ficará montado com o grupo para que o professor seja capaz de instigar e intervir em todo o processo de resolução. Neste formato, e em pequenos grupos, respeitando o ritmo de cada um e com o apoio de referência visual, pode-se perceber as contribuições do processo de resolução de problemas e o aprendizado de cada estudante (Browder et al, 2018).

Ao propor que a atividade avaliativa seja organizada com a transcrição das questões 01 e 02 para os cartões das Figuras 7 e 8 respectivamente, entregues para cada grupo no primeiro dia de avaliação, é possível aplicar a avaliação em um formato de um *QUIZZ* (jogo), assim a função do

professor estará voltada para que todos da equipe participem, não importando a condição e especificidade de cada estudante.

Figura 8. Cartão para o QUIZZ, questão 01

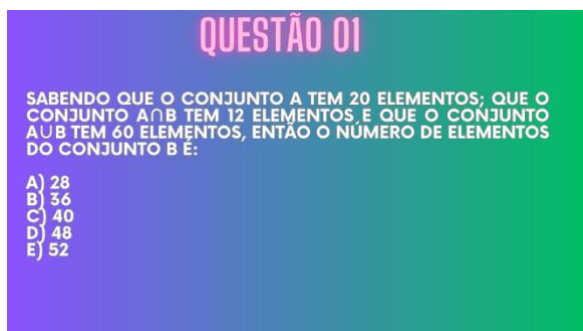
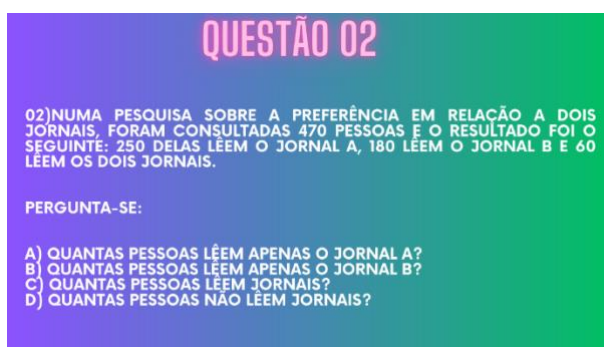


Figura 9. Cartão para o QUIZZ, questão 02



Fonte: Imagens do Autor

A partir destas propostas, é possível pensar em possibilidades de práticas inclusivas para que os estudantes possam construir conhecimento acerca de conjuntos, desde a compreensão dos conceitos e da sua aplicabilidade cotidiana. A proposta é começar com a construção dos materiais didáticos e o planejamento de diversas práticas, porém à medida que se começa a aplicação em sala, é imperativo que o professor de Matemática a cada encontro observe como está a relação entre o ensino e a aprendizagem, avaliando se o estudante está entendendo, se os exemplos e problemas utilizados fazem sentido, pois de acordo com o DUA, para garantir a aprendizagem é preciso que haja a participação, motivação e o engajamento dos estudantes

Análise Combinatória

Há uns anos, professores de Ensino Médio, comprometidos com o ensino da Matemática vêm dependendo grandes esforços para que a análise combinatória passe a ser ensinada de forma a estimular o raciocínio, e não simplesmente ser um mero emprego de fórmulas (Silva, 2022). Na BNCC, para os objetos do conhecimento da análise combinatória, pede-se uma abordagem para o desenvolvimento das habilidades que determinam a resolução e elaboração de problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meios dos princípios aditivos e multiplicativos (Brasil, 2018).

Segundo Moura (2017), para a aprendizagem da Matemática é preciso que os estudantes não sintam medo em interagir e participar com a turma e o professor. Por isso, o presente estudo, ao se basear no DUA para construção de práticas em sala de aula para o ensino de análise combinatória, busca o engajamento dos estudantes, combatendo os obstáculos que trazem os sentimentos de insegurança e frustração em sala de aula. Neste sentido, o Desenho Universal para a Aprendizagem tem como um dos objetivos, incentivar os fatores emocionais que favoreçam o aprendizado, identificando as barreiras que influenciam esses sentimentos de insegurança e frustração, buscando tornar a sala de aula um ambiente de participação e motivação para a aprendizagem (Heredero, 2020).

Contudo, para Lambert (2020), os principais obstáculos ao analisar os discursos dos estudantes em relação ao professor de Matemática, são os caminhos limitados apresentados em sala de aula para aprender a Matemática no formato tradicional, pois o enfoque tradicional dos professores visa a introdução e a memorização de relações (ou fórmulas). Segundo a autora, essa forma de apresentar os conteúdos matemáticos é bastante limitada e não atinge todos em sala de aula, apresentando uma grande limitação em conectar, ou contextualizar, os conceitos com o mundo do estudante, e não estimulando os aspectos emocionais referentes ao aprendizado. O estudo ressalta também como os que os professores de Matemática estimulam a cultura das resoluções rápidas, fato este que pode inibir a participação de alguns estudantes.

Devido a esse cenário vivido em sala de aula, o presente estudo vai recorrer as possibilidades de práticas e estratégias diversas para o aprendizado dos princípios de contagens e dos agrupamentos (Arranjo Simples e Combinação Simples), em turmas do Ensino Médio, inicialmente utilizando-se de materiais adaptativos e manipulativos, pois para Gervázio (2017), é preciso tornar a aprendizagem significativa para o estudante, através da vivência de situações concretas. Nesse contexto, segundo o autor, propõe-se a diversificação dos estímulos, além da visão e audição, na busca da construção do conhecimento matemático.

Diante disso, para o início da apresentação do Princípio Multiplicativo da Contagem, seria interessante uma sala de aula com mesas para cada grupo, para que se possa manipular os materiais

a serem utilizados para o ensino dos agrupamentos, representado no exemplo 1, da Figura 10. O professor apresenta a seguinte situação: “O professor Gilbson quer sair. E para se arrumar ele tem 4 peças de roupas para a parte superior do corpo (camisas) e três para a parte inferior (camisas e calças)”. Trabalhando em equipe, montando e anotando, indaga-se:

- É possível determinar quantas são as formas que ele pode se arrumar?

Figura 10. O princípio da contagem



Fonte: Imagem do Autor

Para acompanhar a turma, e ter maior liberdade em transitar e responder a todos após a primeira atividade, é interessante ter um projetor para que se possa apresentar a resolução a partir das montagens, representadas na Figura 11. Assim, pode-se apresentar de forma intuitiva o princípio multiplicativo da contagem, trabalhando nesses primeiros encontros com os materiais manipulativos. O direcionamento da atividade pelo professor é de vital importância, para que se possa progredir com o princípio multiplicativo, pois nesse primeiro momento o foco é na montagem e contagem para a resoluções das situações. Isto quer dizer que todos os grupos precisam ter montado corretamente todas as soluções.

Neste momento, o professor precisa ir de mesa em mesa, rever todas as montagens, apresentando o total de possibilidades e auxiliando sempre para que possa conduzir as repostas de cada grupo, comparando para que se possa projetar o resultado-

Após essa primeira comparação e contagem dos elementos da solução, pergunta-se a turma: “Nesse caso, é possível multiplicar o total de partes superiores (camisa), que são 4, pelo total de partes inferiores (calças e bermudas), que são 3?”.

Prossegue-se, então, para a atividade I, representada pela Figura 12.

- Pede-se aos estudantes para montar e contar todas as possibilidades da professora Valéria tem com as peças da Figura 12, ao se arrumar para um passeio.

Figura 11. Resultado do Princípio da contagem



Fonte: Imagem do Autor

Figura 12. Continuação do princípio da contagem



Fonte: Imagem do Autor

Deixando cada grupo montar as possibilidades, mas supervisionando para que não se esqueçam de nenhum exemplo, o papel do professor nesse momento é direcionar a atividade em busca da resolução, observando se alguns estudantes estão contando utilizando as estruturas aditivas

da composição, ou aplicando o princípio multiplicativo. Mas o grande questionamento a ser instigado, para a atividade da Figura 12, na classe é: “Pensem aí? Mas não me respondam e debatam entre si, só entre vocês do grupo. Existe a possibilidade de contar usando a multiplicação entre os objetos de cada conjunto de roupa?”.

Após a resolução da atividade já é possível formalizar na lousa, o seguinte lema: “Consideremos o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) para que $a_i \in A$ e $b_j \in B$ ”.

Segundo Vergnaud (1994), as estruturas multiplicativas abordam vários tipos de multiplicação e várias classes de problemas. Para o autor, é importante que os estudantes saibam distinguir as classes de problemas e analisá-las cuidadosamente, por isso a presente proposta visa ser estruturada de modo que os estudantes em sala de aula reconheçam as diferentes estruturas, encontrando assim procedimentos no campo das estruturas multiplicativas que sejam apropriados para a solução de problemas e situações envolvendo os agrupamentos de arranjo simples e combinação.

Para Paiva (2020), o foco do estudo da Análise Combinatória no Ensino Médio é identificar dois tipos de agrupamento: os arranjos e as combinações. Por isso, tomando como base materiais didáticos do Ensino Médio, o que se propõe é a criação de práticas utilizando materiais manipulativos, traduzindo em formatos acessíveis a todos os estudantes em sala de aula. Por isso, este presente estudo visa desenvolver uma proposta de ensino e práticas, seguindo os princípios do DUA, desenvolvendo diversos formatos e formas de apresentação, mas sempre visando a participação e o engajamento de todos os estudantes.

Na introdução deste objeto do conhecimento o intuito é trabalhar com os métodos sem defini-los, mas abordando intuitivamente e de forma concreta, buscando uma maior interação com a turma. Partindo assim, da resolução das atividades, montando e contando. Para Mendes e Delgado (2008), existem níveis de habilidades dos estudantes para a resolução de situações envolvendo a operação de multiplicação. Ou seja, primeiramente os estudantes utilizam os cálculos por contagem aditiva, e quando se sentem seguros passam a apropriar dos procedimentos que envolvem o algoritmo das operações multiplicativas, mais estruturadas e formalizadas.

Portanto, o importante é entender como está o envolvimento e participação de cada grupo já organizado, observando se é necessário alterar ou não, para poder continuar com as atividades. Nesse momento, é preciso fazer com que os estudantes entendam os padrões ao se utilizar os métodos da contagem. Segundo Paiva (2020), a teoria dos conjuntos tem importante aplicação na Análise Combinatória. Segundo o autor, um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos, que pode ser utilizado como na Figura 6. Para a generalização da contagem, é

preciso entender se os conjuntos são disjuntos ou não, e que não se pode contar o mesmo elemento duas vezes.

Nessa etapa, é prioridade que a todo momento se possa trabalhar com os métodos de contagem dos agrupamentos. Mas é preciso que os professores entendam que é determinante para o sucesso na aplicação nas atividades, o respeito ao tempo de cada estudante. Devido a heterogeneidade em uma turma, alguns estudantes podem não ter os níveis de habilidades desenvolvidos para as fases de multiplicação (Mende e Delgado, 2008). Por isso, fundamentado nos estudos dos autores, o desenvolvimento dessa proposta tem esse enfoque introdutório, em um formato concreto e utilizando bastante a contagem para familiarizar o estudante com o objeto do conhecimento e fortalecendo os conceitos das estruturas multiplicativas para que se facilite o acesso a aprendizagem em Análise Combinatória.

Junto com a estratégia do uso de figuras e situações diversas, é importante a utilização de materiais manipuláveis pois, segundo Lorenzato (2006), é uma das possibilidades que o professor de Matemática tem para criar o acesso ao conhecimento matemático, conectando os conceitos abstratos, para que possam ser entendidos, em um primeiro momento, de uma forma mais próxima da realidade do estudante. Além disso, é preciso diversificar as situações para permitir e facilitar a transposição didática dos saberes matemáticos (Vergnaud 1996, 1994).

Na próxima etapa, coloca-se sobre a mesa de cada grupo os números ilustrados na Figura 13. Pede-se que os estudantes montem números de dois algarismos distintos, como exemplificado na Figura 14.

Figura 13. Sequência numérica.

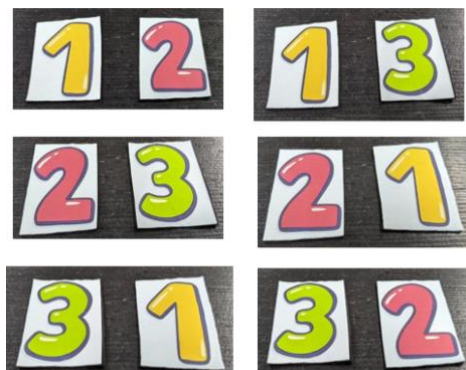


Fonte: Imagem do Autor

A proposta para esta atividade é instigar a investigação sobre o objeto matemático dos cálculos dos agrupamentos de arranjo simples, utilizando a construção das soluções uma a uma, familiarizando a turma, para que a medida que se possa avançar com o conteúdo, estes possam entender o porquê de algumas relações e cálculos de resoluções. Por isso, inicialmente o que se pede para os grupos são os seguintes questionamentos:

- Quantas números distintos de dois algarismos podem ser feitos?
- A ordem dos números cria um resultado diferente?
- Quais são os números pares? E quais são ímpares?

Figura14. Agrupamento I



Fonte: Imagem do Autor

O resultado dessa atividade será apresentado em projeção para que possa ser visualizado por toda a turma, e assim possibilite que o professor transite pela sala, permitindo o atendimento de mesa em mesa, enquanto a apresentação das soluções da atividade esteja à disposição projetada em sala de aula, para todos.

Ao se finalizar a atividade, projeta-se uma nova sequência de números, apresentando novo exemplo a ser distribuído para cada mesa, acrescentado mais números a sequência, como na Figura 15. Então, pergunta-se:

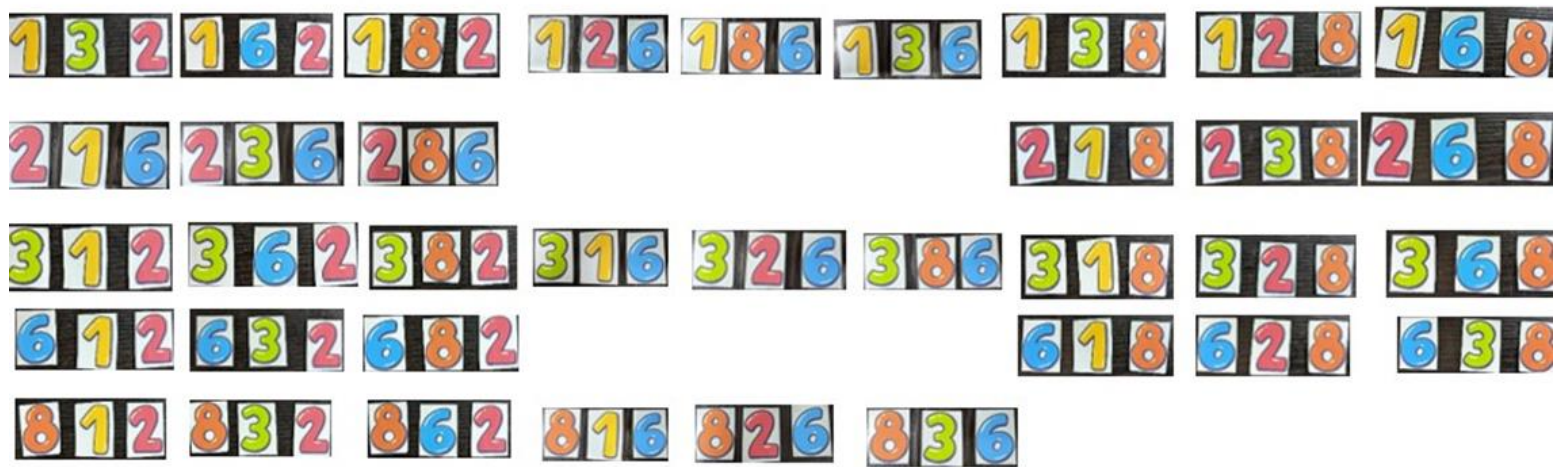
- Quantos números de três algarismos distintos são possíveis construir com esses cinco algarismos?
- Será que é possível utilizar a multiplicação como nos exemplos anteriores?
- Quantos são números pares?

Figura 15. Continuação de agrupamento I



Fonte: Imagem do Auto

Figura16. Agrupamentos de números pares



Fonte: Imagens do Autor

Para que se prossiga com outros exemplos de agrupamentos, primeiro são apresentadas as resoluções, como na Figura 16, lembrando aos estudantes que nos exemplos utilizados é possível perceber que a ordem dos números produz resultados diferentes.

Ao se trabalhar com os as sequencias de números, o ponto crucial é fazer com que a turma entenda que a natureza das construções dos números, ou em alguns agrupamentos, a ordem pode ser de extrema importância para observar alguns padrões.

Na sequência, a atividade II, exposta na Figura 17, pode ser introduzida. O material é colocado sobre a mesa de cada grupo, e a seguinte pergunta pode ser feita:

- Quantos sucos podem ser feitos com as cinco frutas escolhendo apenas duas?

Porém, antes de começar a seguinte atividade é preciso mostrar um dos exemplos da resolução, representado pela Figura 18. O objetivo é que os estudantes entendam que a ordem de utilização das frutas não produz um outro resultado, pois nesse caso se trata do mesmo sabor para o suco.

Figura 17. Agrupamento



Figura 18. Explicação do agrupamento II



Fonte: Imagens do Autor

No próximo encontro, pode-se prosseguir com a atividade sobre o agrupamento, continuando com as turmas separadas em grupo. Posteriormente, este assunto pode ser formalizado como combinação simples, porém seguindo a mesma estratégia, com modelo em formatos manipuláveis e intuitivo coloca-se os materiais na mesa, utilizando o projetor, e atendendo de mesa em mesa. Propõe-se então, a atividade III, representada pela Figura 19.

Figura 19. Atividade III



Fonte: Imagem do Autor

Os amigos de escola João, Alice, Maria, Carla, Valentina e Zé, representados na Figura 19, ganharam as Olimpíadas de História de sua escola. E por isso foram convidados para apresentar o Festival de Humanas, intitulado “A escravidão e a desigualdade no Brasil”. No entanto, precisam escolher exatamente três pessoas entre eles para a abertura do início do festival no teatro

Questiona-se:

- Será que é possível montar o total de possibilidades para a formação do trio que podem apresentar a abertura do festival?
- Quantos trios são compostos somente por meninas?
- Qual a porcentagem de trios com apenas um menino?
- Qual a porcentagem de trios com apenas uma menina?

Figura 20. Atividade III



Fonte: Imagem do Autor

E Para a finalização dessa primeira parte da apresentação dos agrupamentos, seguindo a mesma estratégia os modelos manipuláveis, e sem a formalização, aborda-se com a sala noção de anagramas. Nesse caso utilizando as letras das palavras AMO e ANA, representado nas Figuras 21 e 22, distribuídos para cada mesa e apresentando os resultados junto com a construção dos estudantes.

Figura 21. Apresentação da Permutação



Fonte: Imagens do Autor

Figura 22. Soluções para o Anagrama



Fonte: Imagens do Autor

Após essa atividade sugere-se a seguinte reflexão sobre as diferenças: “Como a mesma quantidade de letras pode determinar quantidades distintas de anagramas produzidos?”.

Após os exemplos de permutação com e sem repetição, parte-se para a atividade IV. Apresentando no projetor as palavras PATO e PATA, entregando os materiais manipuláveis para cada grupo de estudantes, para que se possa aplicar as atividades.

Figura 23. Atividade III



Fonte: Imagem do Autor

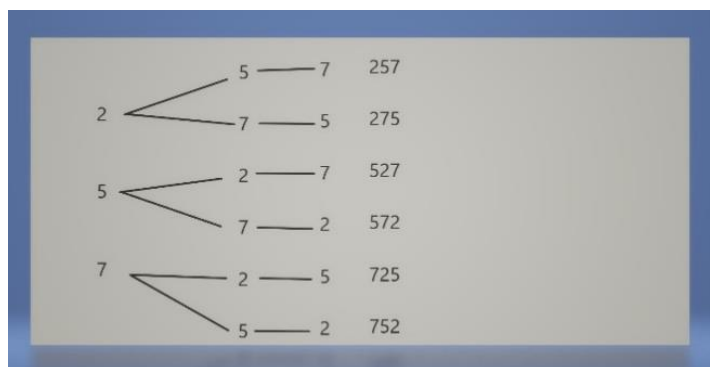
Pode propor que os estudantes produzam um vídeo, explicando todo o processo de resolução da atividade. Explicando, também, a diferença do número de elementos do conjunto solução dos anagramas das palavras PATA E PATO. Determinando a quantidade de soluções que as vogais aparecem juntas. E a porcentagem de soluções que as consoantes aparecem juntas.

Com o retorno das atividades, a correção e a apresentação em sala de aula para toda a turma, passa-se agora para a fase de formalização do que se vem estudando em sala de aula, após essa primeira etapa de apresentação dos agrupamentos, tendo um enfoque nas resoluções das atividades didáticas com ajuda dos materiais manipuláveis, mas sem utilizar as definições, classificações e as conceituações de cada tipo de agrupamentos: Arranjo Simples, Permutação e Combinação Simples.

Inicialmente, apresenta-se a resolução do diagrama em árvore, como no exemplo da Figura 24.

- Quais são os números de três algarismos distintos que podemos formar usando os algarismos 2, 5 e 7?

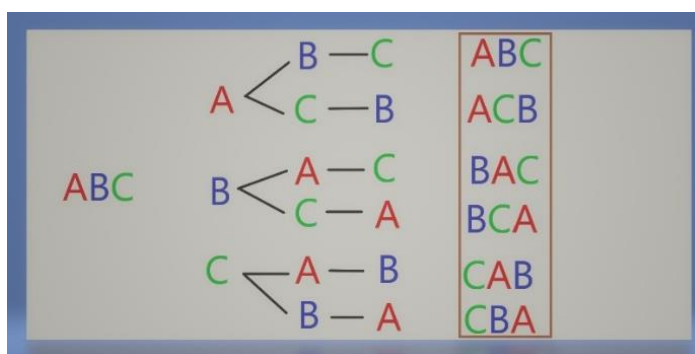
Figura 24. diagrama de árvore



Fonte: Imagens do Autor

Segundo a BNCC, é preciso estimular a resolução de problemas envolvendo os princípios da contagem, utilizando os diagramas de árvore. Por isso, é preciso apresentar de forma diversa as resoluções, como exemplificado na Figura 25.

Figura 25. Diagrama de árvore na resolução de anagramas



Fonte: Imagens do Autor

A partir desse momento, apresentando a resolução da quantidade de anagramas da palavra Amor. E após a explicação das Figuras 27 e 28, pode-se introduzir ao estudo e conceito dos Fatoriais.

Figura 26. Anagramas do AMOR

Quantos anagramas são possíveis montar com as letras da palavra AMOR ?

A M O R	M A O R	O A M R	R A O M
A M R O	M A R O	O A R M	R A M O
A O M R	M O A R	O M A R	R M A O
A O R M	M O R A	O M R A	R M O A
A R M O	M R A O	O R A M	R O A M
A R O M	M R O A	O R A M	R O M A

São 24 possibilidades

Figura 27. Diagrama de árvore anagramas

Quantos anagramas são possíveis montar com as letras da palavra AMOR ?
 É possível resolver de outra forma? 4 letras

A M O R	M A O R	O A M R	R A O M
A M R O	M A R O	O A R M	R A M O
A O M R	M O A R	O M A R	R M A O
A O R M	M O R A	O M R A	R M O A
A R M O	M R A O	O R A M	R O A M
A R O M	M R O A	O R A M	R O M A

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Figura 28. Diagrama de árvore continuação

ABC

A $\begin{cases} B - C \\ C - B \end{cases}$

B $\begin{cases} A - C \\ C - A \end{cases}$

C $\begin{cases} A - B \\ B - A \end{cases}$

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

$3 \times 2 \times 1$

Fonte: Imagens do Autor

Nos exemplos das Figuras 27 e 28 é de se observar a multiplicação de números naturais consecutivos. E isso é muito frequente na Análise Combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Por exemplo, pode-se retornar para o exemplo da Figura 24, onde os números de elementos do conjunto solução dos três algoritmos distintos, utilizando 2, 5 e 7, é dada por $3 \times 2 \times 1$.

Para simplificar as operações com expressões desse tipo, adota-se o símbolo $n!$ que indica o produto dos números naturais consecutivos $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$, com $n \geq 2$.

Segundo Paiva (2020), essa notação ajuda muito em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, porque permite simplificar expressões e apresentar resoluções extensas de maneira abreviada.

Pode-se definir fatorial como: “Seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o fatorial de n , representado por $n!$ como o produto dos números naturais consecutivos $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$. Isto é, $n! = (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 1$ ”.

Após esse encontro, parte-se para uma atividade em grupo de resoluções dos problemas apresentados no anexo II. O objetivo é que os estudantes resolvam as atividades utilizando os esquemas apresentados no desenvolvimento das práticas. Seja construindo de forma concreta, montando e somando as soluções, ou aplicando o princípio multiplicativo. Por isso, o professor deve ter todas as soluções já preparadas para projetar e poder intervir, verificando se estão entendendo a resolução. Caso haja a dúvida, é preciso parar e explicar antes de seguir adiante.

O objetivo da aplicação de atividades em sala de aula é uma forma de avaliação contínua, que para Tomlinson (2016) diz respeito ao modo como os professores coletam e analisam as informações sobre os seus estudantes, sendo usadas para o planejamento das próximas aulas e direcionando aos objetivos das aprendizagens, respondendo apropriadamente às necessidades e especificidades de todos.

Assim, o processo de conhecer os estudantes deve ser intencionalmente utilizado como parte integrante do plano de ensino, com o objetivo de conhecer toda a turma. Por isso, essa forma de avaliação contínua é primordial para a qualidade do processo de informação e a efetividade da participação de todos em sala de aula.

No caso da presente proposta, é essencial para o progresso do processo de criação das práticas. Segue-se, então, para a formalização dos conceitos de arranjos e combinações, que seria a próxima etapa do ensino de Análise Combinatória.

CONCEITOS MATEMÁTICOS

Conjuntos

A Introdução ao estudo de Conjuntos é fundamentada nos estudos de Lima(2016), que foram apresentadas com o intuito de embasar teoricamente as práticas em sala de aula e enriquecer a pesquisa e orientar os professores de Ensino Médio, podendo não ser apresentada em uma turma de ensino básico.

Um Conjunto é formado por objetos, chamados de seus elementos. A relação básica entre um objeto e o seu conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto é elemento x que compõe o conjunto A , dizemos que x pertence a A :

$$x \in A$$

Se, porém, x não é elemento do conjunto dizemos que x não pertence a A :

$$x \notin A .$$

Um conjunto fica definido, quando se dá uma regra que permita decidir se o elemento em questão pertence ou não ao conjunto.

O método mais comum de definir um conjunto é através de uma propriedade comum e exclusiva de seus elementos.

No entanto, as vezes nenhum elemento goza da propriedade de pertencer a um conjunto qualquer. E neste caso o conjunto não possui elemento algum. Sendo assim caracterizado como um conjunto vazio.

O conjunto vazio é representado pelo símbolo \emptyset .

Dados dois conjuntos A e B , e se todos os elementos de A também são elementos de B , dissemos que A é subconjunto de B , ou seja, que a A está contido em B ($A \subset B$).

E quando $A \subset B$, diz-se também que A é parte de B , e que A está incluído em B . E esta relação $A \subset B$ chama-se de relação de inclusão.

Pode-se afirmar que a relação de inclusão $A \subset B$ é:

- a) Reflexiva: $A \subset A$, seja qualquer que seja o conjunto A ;
- b) Anti-simétrica: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
- c) Transitiva: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Pois, ao afirmarmos que $\emptyset \subset X$, onde X um conjunto qualquer, não poderíamos negar pois se o conjunto vazio $\emptyset \not\subset X$, teríamos que admitir que qualquer outro elemento que não pertencesse a X poderia pertencer ao conjunto vazio. E como não existe $x \in \emptyset$ temos que admitir que vazio está contido em qualquer conjunto.

Além disso, dado um conjunto A , o conjunto das partes de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A , ou seja:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \text{ é um subconjunto de } A\}.$$

Dado um conjunto A qualquer:

- a) O conjunto \emptyset sempre está no conjunto das partes de A , pois $\emptyset \subset A$;
- b) O conjunto A sempre está no conjunto das partes de A , pois $A \subset A$.

Portanto, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.

Como exemplo, pode-se considerar o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Pela definição, o conjunto das partes de A é:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Pode-se indagar: este conjunto contém, de fato, todos os subconjuntos do conjunto A ? A verificação pode ser realizada utilizando a seguinte propriedade do conjunto das partes: “Conjunto A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos, ou seja,

$$n(A) = n \Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^n$$

Para demonstrar pode-se utilizar o princípio fundamental da contagem para contar quantos subconjuntos um conjunto A com n elementos tem.

Para começar, considere um subconjunto B qualquer de A . Observe que para cada um dos n elementos de A , só existem duas possibilidades:

- a) Ou o elemento pertence ao subconjunto B ;
- b) Ou o elemento não pertence ao subconjunto B .

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, pode-se montar o conjunto B de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ maneiras diferentes.

Portanto, há 2^n subconjuntos de A em $\mathcal{P}(A)$.

A reunião entre dois conjuntos A e B , é o conjunto $A \cup B$ formado pelos elementos de A com os elementos de B , se $x \in A \cup B$, isso significa dizer que umas das afirmações seguintes são verdadeiras: $x \in B$ ou $x \in A$.

Pode-se então escrever que $A \cup B = \{x; x \in B \text{ ou } x \in A\}$.

A intersecção dos conjuntos A e B , é o conjunto $A \cap B$ formado pelos elementos comuns a A e a B . Assim, se $x \in A \cap B$, significa dizer que se tem ao mesmo tempo $x \in B$ e $x \in A$.

Pode-se então escrever que $A \cap B = \{x; x \in B \text{ e } x \in A\}$.

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto $A - B$, formado pelos elementos de A que não estão em B , ou seja, A menos B .

O estudo de Conjunto nesse trabalho foi apresentado devido a importância das operações e da resolução de problemas em sala de aula como um forma de revisar objetos dos conhecimentos do Ensino Médio, como fração e porcentagem, como também para apresentar algumas técnicas na resolução de problema que serviriam como pré-requisito para o entendimento dos objetos do conhecimento de contagem e agrupamento.

Princípio Fundamental da Contagem

As relações, demonstrações apresentadas nesse parte de trabalho tem como base Hazzan(2013), que foram apresentadas com o intuito em embasar teoricamente as práticas em sala de aula e enriquecer a pesquisa e orientar os professores de Ensino Médio, podendo não ser apresentada em uma turma de ensino básico.

De maneira geral, segundo Morgado et al (2006), pode-se definir a Análise Combinatória como a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. E dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em análise combinatória são: demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e contar ou classificar os subconjuntos de conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

O princípio fundamental da contagem está relacionado a ferramenta básica que se permite determinar o número de elementos em um conjunto ou em uma relação entre conjuntos. Por exemplo, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem.

Pode-se enunciar: “Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos”.

Exemplificando, ao se trabalhar com dois grupos de estudantes, um grupo A com três estudantes, $\{a_1, a_2, a_3\}$ e um grupo B com 4 estudantes, $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ pode-se questionar: “de quantos modos é possível selecionar uma dupla composta por um estudante de A e um estudante de B ?”.

Tem-se o seguinte resultado: $\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4)\}$.

Pode-se verificar que existem 4 duplas com a_1 , 4 duplas com a_2 e 4 duplas com a_3 . O número de duplas é, portanto, $4 + 4 + 4 = 4 \times 3 = 12$.

Este exemplo ilustra o princípio fundamental da enumeração ou princípio da multiplicação, o qual afirma: “Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1

, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$ ".

De acordo com Hazzan (2013), o Princípio Fundamental da Contagem consta de duas partes (A e B) ligeiramente diferentes. Segundo o autor, antes de enunciar e demonstrar este princípio, deve-se provar dois lemas (teoremas auxiliares).

Lema 1

- Seja o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$. Pode-se formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Este Lema 1 pode ser verificado fixando o primeiro elemento do par e variando o segundo.

Obtém-se

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \rightarrow n \text{ pares ordenados} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \rightarrow n \text{ pares ordenados} \\ \vdots \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n) \rightarrow n \text{ pares ordenados} \end{array} \right. \quad (1.0)$$

Logo, o número o total de pares é n somado m vezes.

Então,

$$n + n + n + \dots + n = m \cdot n \quad (1.1)$$

Ou seja, quando se pede quantos números de dois algarismos podem ser formados, usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) em que $a \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ e $b \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$.

Logo, o resultado procurado é: $8 \cdot 8 = 64$.

Lema 2

- Neste caso, o número de pares ordenados para a resolução (a_i, b_j) tais que:

$$\begin{aligned} a_i \in A &= \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\} \\ a_j \in A &= \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}, \\ a_i &\neq a_j \text{ é } m \cdot (m - 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pode-se verificar fixando o primeiro elemento do par, e fazendo variar o segundo:

$$m \text{ linhas} \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_m) \rightarrow (m-1) \text{ pares ordenados} \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \dots, (a_2, a_m) \rightarrow (m-1) \text{ pares ordenados} \\ \vdots \\ \vdots \\ (a_m, a_1), (a_m, a_3), \dots, (a_m, a_{m-1}) \rightarrow (m-1) \text{ pares ordenados} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Logo, o total de pares é $(m-1)$ somado m vezes.

Então,

$$(m-1) + (m-1) + (m-1) + \dots + (m-1) = m \cdot (m-1). \quad (1.4)$$

Assim, quando se pede para determinar a quantidade de números com dois algarismos distintos, pode-se formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) em que: $a \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, $b \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ e $a \neq b$.

Logo, o resultado é $8 \cdot 7 = 56$.

Passa-se agora para a demonstração e prova das partes A e B do Princípio fundamental da contagem.

- Parte A

Considerando r conjuntos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_1}\} \text{ com } n_1 \text{ elementos} \quad (1.5)$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n_2}\} \text{ com } n_2 \text{ elementos}$$

⋮

⋮

⋮

$$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n_r}\} \text{ com } n_r \text{ elementos } n_p$$

Então, o número de r -uplas (sequência de r elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \dots, z_p)$$

onde $a_i \in A$, $b_j \in B \dots z_p \in P$ é $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_p$

- Demonstração (pelo Princípio da indução finita).

Se $r = 2$ é imediato, pelo Lema 1 já visto.

Suponha-se que a fórmula seja válida para o inteiro $(r - 1)$ e prova-se que daí decorre que ela seja válida para o inteiro r .

Para $(r - 1)$ toma-se as sequências de $(r - 1)$ elementos $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$

Por hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes ao conjunto Z .

Cada sequência $(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p)$ consiste de uma sequência (a_i, b_j, \dots, w_k) e um elemento $z_p \in P$.

Portanto, pelo Lema 1, o número de sequência do tipo:

$$(a_i, b_j, \dots, w_k, z_p) \text{ é } (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_{r-1} \cdot n_r. \quad (1.6)$$

Segue-se então que o teorema é válido $\forall r \in N$ e $r \geq 2$.

- Parte B

Consideremos um conjunto A com $(m \geq 2)$ elementos. Então o número de r -uplas ordenadas (sequência com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \dots [m - (r - 1)]\} \text{ com } r \text{ fatores} \quad (1.7)$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ o número de sequência do tipo

$(a_j, a_l, \dots, a_i, \dots, a_{km})$ com r elementos

$$\text{Com } \begin{cases} a_i \in A, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ a_i \neq a_p \text{ para } i \neq p \end{cases}$$

Tem-se então,

$$\{m \cdot (m - 1) \dots [m - (r - 1)]\} \text{ com } r \text{ fatores} \quad (1.8)$$

- Demonstração (pelo Princípio da indução finita).

Se $r = 2$ é imediato, pelo Lema 2 já visto. (1.9)

Suponha-se que a fórmula seja válida para o inteiro $(r - 1)$ e prova-se que daí decorre que ela seja válida para o inteiro r .

Para que seja válida para o inteiro $(r - 1)$, toma-se as sequências de $(r - 1)$ elementos (a_i, a_j, \dots, a_l) pertencentes a A todos distintos dois a dois. Por hipótese de indução, existem $m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot [m - (r - 1 - 1)]$ sequências e $[m - (r - 1)]$ elementos em A distintos dos elementos que formam a sequência anterior.

Cada sequência $(a_i, a_j, \dots, a_l, a_k)$ consiste de uma sequência (a_i, a_j, \dots, a_l) e de um elemento $a_k \in A$ e distinto dos elementos da sequência anterior.

Pelo Lema 2, conclui-se que o número de sequências do tipo $(a_i, a_j, \dots, a_l, a_k)$ formadas com r elementos de A distintos dois a dois se dá por:

$$\begin{aligned} & (m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot [m - (r - 1 - 1)]) \cdot [m - (r - 1)] \\ & = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot [m - (r - 2)] \cdot [m - (r - 1)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Segue-se então que o teorema é válido $\forall r \in \mathbb{N} e r \geq 2$.

Tanto para Morgado et al. (2006) e Hazzan (2013), o Princípio Fundamental da Contagem serve de instrumento básico para a análise combinatória, entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode as vezes tornar-se trabalhosa. Por isso, a importância segundo os autores da classificação dos vários modos de agrupamento, os utilizados no Ensino Médio que são:

- Arranjo com repetição e simples
- Permutação Simples
- Combinação simples

Torna-se interessante a utilização das fórmulas que permitam a resolução, em cada caso particular a ser estudado. Por isso, esse trabalho traz não só as fórmulas, mas as suas deduções de acordo dos estudos de Hazzan (2013).

Arranjo

- Com repetição

Seja M um conjunto com m elementos, $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ Chama-se arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r , toda r -uplas ordenadas formadas (sequência de tamanho r) com elementos de M não necessariamente distintos.

Seja $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e indica-se por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r .

Cada arranjo com repetição é uma sequência de r elementos onde cada elemento pertence a M .

$$(_, _, _, \dots, _) \text{ com } r \text{ vezes} \quad (2.0)$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte A), o número de arranjos $(AR)_{m,r}$ será

$$(AR)_{m,r} = m.m.m \dots m = mr$$

Observa-se que se $r = 1, (AR)_{m,1} = m$ e a fórmula continua válida $\forall r \in N^*$. (2.1)

- **Simplex**

Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_1}\}$ Chamamos arranjo com repetição dos m elementos tomados r a r ($1 \leq r \leq m$) a qualquer r 'uplas (sequência de r elementos) formadas de M todos distintos. E indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r .

Cada arranjo é uma sequência de r elementos, onde cada elemento pertence a M , e são todos distintos.

$$(_, _, _, \dots, _) \text{ com } r \text{ vezes.}$$

Pelo princípio fundamental da contagem (parte B) o número de arranjos $A_{m,r}$ será

$$A_{m,r} = m.(m - 1).\dots [m - (r - 1)] \quad (2.2)$$

Em particular, se $r = 1$, é fácil perceber que $A_{m,1} = m$.

Nota-se ainda que de acordo com a definição de arranjo, temos necessariamente que:

$$1 \leq r \leq m.$$

Permutação

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$. Chama-se de permutação de m elementos a todo arranjo em que $r = m$. E indica-se P_m o número de permutações dos m elementos de M .

Tem-se:

$$P_m = A_{m,m}, \text{ logo } P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot [m - (m - 1)] \quad (2.3)$$

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular se $m = 1$ é fácil perceber que $P_1 = 1$.

- Permutação com elementos repetidos

Considera-se a palavra ANA e procura-se seus anagramas. Indica-se por A^* o segundo A. Termos então:

ANA*, AA*N, NAA*, NA*A, A*NA, A*NA

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Nota-se que as permutações:

(1) e (5) São iguais

(2) e (6) São iguais

(3) e (4) São iguais

Na verdade, não tem-se 6 permutações distintas, mas apenas 3 que são: ANA, AAN, NAA.

É intuitivo perceber que o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas acarreta uma diminuição do número de permutações em relação ao número que teríamos se todos fossem distintas.

Calcula-se, então, o número de permutações que se pode formar quando alguns elementos a serem permutados são iguais.

- 1º caso

Considera-se n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 .

Indica-se por $P_n^{n_1}$ o número de permutações nestas condições e calcula-se esse número.

Cada permutação dos n elementos é uma n '-upla ordenada de elementos onde devem figurar a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos

$(_, _, \dots, _)$ com n elementos

Pode-se fazer o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação, escolhe-se $n - n_1$ posições para colocar os elementos todos distintos de a_1 .

Isso quer dizer que existem $\binom{n}{n - n_1} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}$ formas de dispor os elementos distintos de a_1 , nessa permutação.

Uma vez colocados estes elementos distintos, a posição dos elementos repetidos, a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes.

Logo, existem $\frac{n!}{n_1!}$ permutações n_1 elementos iguais a a_1 . Isto é:

$$\boxed{P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}} \quad (2.4)$$

- 2º Caso

Considera-se n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 :

$a_1, a_1, a_1, a_1, \dots, a_1$ com n_1 elementos

n_2 são iguais a a_2 :

$a_2, a_2, a_2, \dots, a_2$ com n_2 elementos

E os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_2 e de a_1 , indicando por $P_n^{n_1, n_2}$, o número de permutações, nestas condições.

Cada permutação dos n elementos é uma n -upla ordenada de elementos onde devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 , n_2 elementos iguais a a_2 e os $n - n_1 - n_2$ elementos restantes.

Das n posições que existem na permutação escolhe-se $n - n_2$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_2 . Existem $\binom{n}{n - n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n - n_2}^{n_1}$ modos em que os $n - n_2$ elementos podem ser permutados (lembra-se que, dos elementos agora a serem permutados, existem n_1 iguais a a_1)

Ao todo existirão

$$\binom{n}{n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n-n_2)!n_2!}, \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_1!n_2!} \quad (2.5)$$

formas de arranjar na permutação, todos os elementos, com exceção de a_2 .

Uma vez arranjados estes elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinados (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo existirão $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2 . Isto é:

$$P_n^{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!} \quad (2.6)$$

Consideremos n elementos dos quais

n_1 são iguais a a_1

n_2 são iguais a a_2

n_3 são iguais a a_3

.

n_r são iguais a a_r

Usando raciocínio análogo ao do 1º e 2º caso pode-se calcular o número de permutações nestas condições (indicadas por $P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r}$), através da fórmula:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3! \dots n_r!} \quad (2.7)$$

Combinações

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$. Chama-se de combinações dos m elementos tomados r a r , aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.

Exemplo:

$$M = \{a, b, c, d\} \quad (3.0)$$

As combinações dos 4 elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$.

$\{b, d\}, \{b, c\}$

$\{c, d\}$

Nota-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$ pois, conforme definição, combinação é um conjunto, portanto não depende da ordem dos elementos.

É importante notar a diferença entre uma combinação(conjuntos) e uma sequência, pois numa combinação não importa a ordem dos elementos, ao passo que numa sequência importa a ordem dos elementos.

Seja $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$. e indica-se como $C_{m,r}$ ou $\binom{m}{r}$ o número de combinações dos m elementos tomados r a r .

Toma-se uma combinação $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r+1}\}$. Se permuta-se os elementos E_1 , obteremos $r!$ arranjos. Se se toma outra combinação $E_2 = \{a_2, a_3, \dots, a_{r+1}\}$ e permuta-se os elementos E_2 , obteremos $r!$ arranjos.

Chama-se de x o número de combinações, isto é, $x = C_{m,r}$ e suponha formadas todas as combinações dos m elementos r a r . São elas

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_r \tag{3.1}$$

Cada combinação E_i dá origem a $r!$ arranjos. Chama-se de F_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de E_i .

Temos então a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} E_1 &\rightarrow F_1 \\ E_2 &\rightarrow F_2 \\ E_3 &\rightarrow F_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E_x &\rightarrow F_x \end{aligned}$$

Verifica-se que:

$$\begin{cases} I - F_i \cap F_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \\ II - F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x = F \end{cases} \tag{3.2}$$

Onde F é os números de arranjos dos elementos M tonados r a r .

Tem-se:

$F_i \cap F_j = \emptyset$ para $i \neq j$ então existiria um arranjo que pertenceria a F_i e F_j simultaneamente.

Toma-se os elementos desse arranjo e obtêm-se que coincidiria com E_i e E_j . Isto á absurdo, pois quando se constrói todas as combinações, $E_i \neq E_j$ (para $i \neq j$).

$$\text{Logo } F_i \cap F_j = \emptyset \quad (3.3)$$

$$\text{II} \quad - \quad F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x = F, \quad \text{prova-se} \quad \text{que} \quad F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x \text{ e } F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x \quad (3.4)$$

a) Seja um arranjo tal que

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x,$$

então $a \in F_i$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, x\}$ e evidentemente $a \in F$

Logo:

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x \subset F \quad (3.5)$$

b) Seja agora a um arranjo tal que $a \in F$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a obteremos uma das combinações, digamos E_j . Ora como E_i gera o conjunto dos arranjos E_j , então $a \in F_j$ e, portanto,

$$a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x \quad (3.6)$$

Então:

$$F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x$$

De (a) e (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x = F \quad (3.7)$$

Sabe-se ainda que, se x conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um.

Isto é,

$$n(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \dots F_x) = n(F) \rightarrow n(F_1) + n(F_2) + n(F_3) + n(F_4) + \dots n(F_x) = n(F)$$

$$r! + r! + r! + \dots r! = \frac{m!}{(m-r)!} \quad \rightarrow \quad x \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Logo

$$\boxed{x = \frac{m!}{r! \cdot (m-r)!}} \quad (3.8)$$

O processo de construção do conhecimento em matemática é gradual e requer do professor de Matemática uma compreensão de que é essencial primeiramente o engajar dos estudantes, estimulando sua participação e envolvimento em sala de aula. E a apresentação da formalização sem antes tentar captar a atenção da turma sobre a importância da temática, pode ser uma estratégia desestimulante ao longo do ano letivo. A apresentação dessa parte teórica visa proporcionar uma fonte de estudo para os professores que buscam aprimorar suas práticas em sala de aula, por meio de pesquisa e análise de trabalhos acadêmicos e artigos científicos.

5. CONCLUSÃO

A opção pelo DUA é vista no presente estudo como possibilidade de contribuir com a prática dos professores de Matemática que trabalham os objetos do conhecimento previstos na Base Nacional Comum Curricular, dentre eles, o estudo de Conjuntos e Análise Combinatória. São apresentadas propostas pedagógicas para o ensino, que incluem a elaboração de materiais didáticos e o planejamento de práticas variadas para aplicação em sala de aula.

Ao se planejar e organizar as práticas docentes baseadas nos princípios do DUA, o que se permite na verdade é o poder ensinar Matemática com todos os estudantes, respeitando o ritmo de aprendizagem de cada um. Pois, a filosofia da inclusão escolar reconhece a pluralidade humana, implicando na transformação e desenvolvimento do sistema de ensino para atender às especificidades de cada estudante, exigindo igualdade de condições, acessibilidade ao currículo e permanência na escola.

Sendo assim, é crucial a participação do professor de Matemática nesse processo de adaptação das práticas para atender a todos os estudantes, incluindo aqueles do Público-alvo da Educação Especial (PAEE). Por isso, o presente estudo, ressalta a necessidade de tornar o currículo acessível a todos, reconhecendo a especificidades de cada estudante, destacando a importância de proporcionar modos múltiplos de apresentação, ação e expressão, promovendo a participação e engajamento dos estudantes em sala de aula.

A partir deste estudo espera-se que o professor de Matemática consiga entender que a educação inclusiva é uma realidade, e existe uma diversidade de estudantes com diferentes motivações, capacidades e dificuldades em sala e eles podem aprender se forem estimulados e tiverem suas necessidades e características contempladas no processo de ensino e aprendizagem.

Neste trabalho foi adotada uma visão geral sob a ótica do professor sobre a temática da inclusão em uma turma do Ensino Médio, desde adaptações curriculares até a transformação do ambiente em sala de aula. Contudo, é preciso pontuar que pelo lado dos estudantes vão existir dúvidas e dificuldades, e nestes momentos ao invés de dar prosseguimento a aula, é importante parar, conversar e propor novas estratégias, trabalhando com novos exemplos e formatos, para que se possa dar o devido prosseguimento.

Contudo, pelo lado do professor o que este estudo propõe não é uma fuga das práticas tradicionais, mais um incremento de inovações em todas as aulas de Matemática, por se tratar de uma ciência abstrata que teve nascimento em observações de padrões concretos e vivos aos

olhos das civilizações humanas ao longo de sua trajetória histórica, e cabe ao professor em sala de aula enriquecer e promover o aprendizado de todos os estudantes.

Por isso, com esta dissertação almeja-se mostrar que existe a possibilidade de construir um ambiente em sala de aula que inclui, que garante a permanência por meio de aprendizagem, com enriquecimento das práticas pedagógicas pensando em todos, sem o empobrecimento do currículo, focando na participação e engajamento dos estudantes ao processo de ensino e da sua aprendizagem, fazendo com que compreendam conceitos, sua usabilidade e representação, pois este é o objetivo de se ensinar Matemática.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ANDRADE, M. J., Carvalho, M. C., Alves, R. J. R., & Ciasca, S. M. (2016). Desempenho de escolares em testes de atenção e funções executivas: estudo comparativo. *Revista Psicopedagogia*, 33(101), 123-132.

AMTE. ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS. Standards for Preparing Teachers of Mathematics. Available online at amte.net/standards. (2017).

BELLO, M. M. S.; CAPELLINI, V. L. M. F.; RIBEIRO, J. A. G. Inclusão: concepções dos docentes da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Educação*, Santa Maria, v. 42, n. 3, p. 689-704. set. /dez. 2017.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. LDB 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 12 Mar. 2020

BRASIL. Decreto n. 3.298, de 20 de dezembro de 1999. Regulamenta a Lei nº 7.853, de 24 de outubro de 1989, dispõe sobre a Política Nacional para a Integração da Pessoa Portador de Deficiência, consolida as normas de proteção, e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, 1999.

BRASIL. Lei Federal n.º 10.172, de 9 de janeiro de 2001. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. Resolução n. 2, de 11 de setembro de 2001. Institui as Diretrizes Nacionais da Educação Especial na Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação/ SEESP, 11 de setembro de 2001.

BRASIL. Resolução CNE/CEB 1/2002 - Institui Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas do Campo. MEC: Brasília - DF, 2002.

BRASIL. Lei nº 10.436, de 24 de abril de 2002. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, 25 abr. 2002.

BRASIL. Decreto nº 5.626, de 22 de dezembro de 2005. Regulamenta a Lei nº 10.436, de 24 de abril de 2002, que dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais - Libras, e o art. 18

da Lei nº 10.098, de 19 de dezembro de 2000. Diário Oficial da União, Brasília, 23 dez. 2005.

BRASIL. Política Nacional de Educação Especial na perspectiva da Educação Inclusiva – versão preliminar. Brasília, setembro de 2007.

BRASIL. Política nacional de educação especial na perspectiva da educação inclusiva Brasília, 2008.

BRASIL. Resolução CNE/CEB 1/2011. Diário Oficial da União, Brasília, 11 de março de 2011, Seção 1, p. 10.

BRASIL. Lei n. 13.146, de 6 de julho de 2015. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF, 7 jul. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) 2022. Censo da Educação Básica : notas estatísticas.

BROWDER, DIANE M., FRED SPOONER, YA-YU LO, ALICIA F. SAUNDERS, JENNY R. ROOT, LUANN LEY DAVIS, AND CHELSI R. BROSH. "Teaching students with moderate intellectual disability to solve word problems." *The Journal of Special Education* 51, no. 4 (2018): 222-235.

CAPP, M. (2017). The effectiveness of universal design for learning: A meta-analysis of literature between 2013 and 2016. *International Journal of Inclusive Education*

CAST. CENTER FOR APPLIED ESPECIAL TECHNOLOGY. Universal Design for Learning Guidelines version 2018. Learn About Universal Design for Learning (UDL).

CAPELLINI, Vera Lúcia Messias Fialho. Adaptações Curriculares na inclusão escolar: contrastes e semelhanças entre dois países. 1. ed. Curitiba: Appris, 2018.

DESOETE, A., & WEERDT, F. D. (2013). Can executive functions help to understand children with mathematical learning disorders and to improve instruction? *Learning Disabilities*, 11(2), 27-39. <https://biblio.ugent.be/publication/5671674>

EDYBURN, D. L. (2010). Would you recognize universal design for learning if you saw it? Ten propositions for new directions for the second decade of UDL. *Learning Disabilities Quarterly*, 33, 33-41.

ELIDA V. Laski, JAMILAH R. Jor'dan, CAROLYN Daoust, and ANGELA K. Murray (2015). What makes mathematics manipulatives effective? lessons from cognitive science and montessori education, volume 5 issue 2, Sage Journal 2015.

FONSÊCA, Patrícia Nunes da et al. Engajamento escolar: explicação a partir dos valores humanos. *Psicologia escolar e educacional*, v. 20, p. 611-620, 2016.

GANDA, Danielle Ribeiro; BORUCHOVITCH, Evely. A autorregulação da aprendizagem: principais conceitos e modelos teóricos. *Psicologia da Educação*, n. 46, 2018. <https://revistas.pucsp.br/psicoeduca/article/view/39147>

GARCIA, Rosalba Maria Cardoso; MICHELS, Maria Helena. A política de educação especial no Brasil (1991-2011): uma análise da produção do GT15-educação especial da ANPED. *Revista brasileira de educação especial*, v. 17, p. 105-124, 2011.

GERVÁZIO, S. N. (2017). Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Análise Combinatória e Probabilidade, Volume 5. 8ª Edição. São Paulo(2013).

HEREDERO, E.S. Diretrizes para o Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA) 23. *Revista Brasileira de Educação Especial*, v. 26, p. 733-768, 2020.

KINGS DORF, Sheri; KRAWEC, Jennifer. A broad look at the literature on math word problem-solving interventions for third graders. *Cogent Education*, v. 3, n. 1, p. 1135770, 2016.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise. Rio de Janeiro , RJ. Impa. 2006

LAMBERT, Rachel. Increasing Access to Universally Designed Mathematics Classrooms. Policy Analysis for California Education, PACE, 2020.

LAMBERT, R., IMM, K., SCHUCK, R., CHOI, S., & MCNIFF, A. (2021). "UDL Is the What, Design Thinking Is the How:" Designing for Differentiation in Mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(3), 54-77.

LOPES, S. Adaptação Curricular: O Que É? Por Quê? Para Quem? E Como Fazê-La? *Educação Básica Revista*, vol.3, n.1, p.1-27, 2017.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 1a. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, p. 3-37, 2006.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér et al. Inclusão escolar: o que é. Por quê, v. 12, 2003.

MANZINI, Eduardo José. Tecnologia assistiva para educação: recursos pedagógicos adaptados. *Ensaio pedagógico: construindo escolas inclusivas*. Brasília: SEESP/MEC, p. 82-86, 2005

MENDES, M. F. C.; DELGADO, C. R. S. C. A. A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido do número. In: BROCADO, J; SERRAZINA, L.: ROCHA, I. O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2008, pp. 159 -182

MERLINI, Vera et al. ESTRUTURA MULTIPLICATIVA: EXISTE RELAÇÃO ENTRE O QUE O PROFESSOR ELABORA E O DESEMPENHO DE SEUS ESTUDANTES? XII Encontro Nacional de Educação Matemática 2016.

MORGADO, Augusto César et al. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Coleção do Professor de Matemática, ed, v. 9, 2006.

MOURA, Bruna Ligabo de. Aplicação do Peer Instruction no ensino de matemática para alunos de quinto ano do ensino fundamental. 2017.

NEUENSCHWANDER, R., RÖTHLISBERGER, M., CIMELI, P., & ROEBERS, C. M. . How do different aspects of self-regulation predict successful adaptation to school?. *Journal of experimental child psychology*, v. 113, n. 3, p. 353-371, 2012.

OLANOFF, Dana E.; KIMANI, Patrick M.; MASINGILA, J. O.(2009) Learning to teach via problem solving and supporting pre-service teachers in learning via problem solving.

In: Proceedings for the 31st annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education, Atlanta, GA. 2009.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Ensino médio 2**. Cidade: São Paulo, Ed. Moderna Editora, 2020

RAPP, W. Universal design for learning in action. **Baltimore MD: Brooks**, 2014.

RELVAS, Marta Pires. **Fundamentos psicológicos da educação**. Despertando inteligência e afetividade no processo de aprendizagem. 4 ed. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2009.

RELVAS, Marta Pires. **Neurociência na prática pedagógica**. Digitaliza Conteúdo, 2023.

ROSE, D. H., & MEYER, A. (2002). Teaching Every Student in the Digital Age. *Educational Technology. Research and Development*, 55(5), 521-525. DOI: 10.1007/s11423-007-9056-3

ROSE, D. H., MEYER, A., & HITCHCOCK, C. (2005). *The Universally Designed Classroom*. Harvard Education. Press: Cambridge.13

ROSE, D. H., & MEYER, A. (2006). *A Practical Reader in Universal Design for Learning*. Harvard Education. Press: Cambridge.

SARMENTO, A. K. C. A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 6., 2010, Teresina, Anais... Teresina: Universidade Federal do Piauí, 2010. p. 1-12.

SCHAUFELI, Wilmar B., et al. The measurement of engagement and burnout: A two sample confirmatory factor analytic approach. *Journal of Happiness studies*, 2002, vol. 3, no 1, p. 71-92. <https://www.wilmarschaufeli.nl/publications/Schaufeli/178.pdf>

SCHWARTZ, S. *Motivação para ensinar e aprender: teoria e prática*. Petrópolis: Vozes, 2014.

SILVA, Josimar. Combinatória... não ouse pensar diferente!. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, V. 106, p. 26-30 2022.

SKOVSMOSE, Ole. Um convite à educação Matemática crítica. Papirus editora, 2015.

TOMLINSON, Carol Ann. *The Differentiated Classroom: Responding to the Needs of All Learners* 2. ed. Alexandria, VA: ASCD, 2016.

UNESCO. Declaração mundial sobre educação para todos e plano de ação para satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, Tailândia: UNESCO, 1990

UNESCO (1994). Declaração de Salamanca e o Enquadramento da Acção – Necessidades Educativas Especiais. Adaptado pela Conferência Mundial sobre Necessidades Educativas Especiais: Acesso e Qualidade, Salamanca. UNESCO, 1994

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Intituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VIANA, S. L. D. S., & Lozada, C. D. O. (2020). Aprendizagem baseada em problemas para o ensino de probabilidade no Ensino Médio e a categorização dos erros apresentados pelos alunos. *Educação Matemática Debate*, 4(10), 1-28.Z

VYGOTSKY, L.S. *Formação social da mente* São Paulo: Martins Fontes, 1984.

VYGOTSKY, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

ANEXO

ANEXO A – Questões de Conjunto

01) Sabendo que o conjunto A tem 20 elementos; que o conjunto $A \cap B$ tem 12 elementos e que o conjunto $A \cup B$ tem 60 elementos, então o número de elementos do conjunto B é:

- a) 28
- b) 36
- c) 40
- d) 48
- e) 52

02) Em um levantamento com 100 vestibulandos da PUC, verificou-se que o número de ests que estudou para as provas de Matemática, Física e Português foi o seguinte:

Matemática, 47;

Física, 32; Português, 21;

Matemática e Física, 7;

Matemática e Português, 5;

Física e Português, 6;

as três matérias, 2.

Quantos dos 100 estudantes incluídos no levantamento não estudaram nenhuma das três matérias?

03) Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi o seguinte: 250 delas lêem o jornal A, 180 lêem o jornal B e 60 lêem os dois jornais.

Pergunta-se:

- a) Quantas pessoas lêem apenas o jornal A?
- b) Quantas pessoas lêem apenas o jornal B?
- c) Quantas pessoas lêem jornais?
- d) Quantas pessoas não lêem jornais?

04)Analisando-se as carteiras de vacinação das 84 crianças de uma creche, verificou-se que 68 receberam a vacina Sabin, 50 receberam a vacina contra o sarampo e 12 não foram vacinadas. Quantas dessas crianças receberam as duas vacinas?

05)Numa prova constituída de dois problemas, 300 estudantes acertaram somente um deles, 260 o segundo, 100 estudantes acertaram os dois e 210 erraram o primeiro, quantos estudantes fizeram a prova?

06)Em uma aula de Matemática, o professor propôs 2 problemas para serem resolvidos pela turma. 76% dos estudantes resolveram o primeiro problema, 48% resolveram o segundo e 20% dos estudantes não conseguiram resolver nenhum dos dois. Se apenas 22 estudantes resolveram os dois problemas, pode-se concluir que o número de estudantes dessa classe é:

- a) maior que 60
- b) menor que 50
- c) múltiplo de 10
- d) múltiplo de 7
- e) ímpar 11.:

07)Numa empresa multinacional, sabe-se que 60% dos funcionários falam inglês, 45% falam espanhol e 30% deles não falam nenhuma daquelas línguas. Se exatamente 49 funcionários falam inglês e espanhol, podemos concluir que o número de funcionários dessa empresa é igual a:

- a) 180
- b) 140
- c) 210
- d) 165
- e) 127

08) Em uma escola de idiomas que oferece formação para vários tipos de línguas, foi feita uma pesquisa para saber o número de estudantes matriculados em espanhol, inglês e alemão e outros idiomas. Os dados foram anotados na tabela a seguir:

Inglês	110
Espanhol	84
Alemão	32
Inglês e Espanhol	30
Inglês e Alemão	20
Alemão e Espanhol	6
Inglês, Espanhol e Alemão	2
Outros	45

09) O total de estudantes que participaram da pesquisa foi:

Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados leem o jornal A.
- 55% dos entrevistados leem o jornal B.
- 35% dos entrevistados leem o jornal C.
- 12% dos entrevistados leem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados leem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados leem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados leem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que o número total de entrevistados foi:

10) O professor de Literatura do Cursinho Mil sugeriu a leitura dos livros Helena, Senhora e A Moreninha. Foi constatado que nos 1000 estudantes consultados:

Calcule:

Alunos	Leitura
600	A Moreninha
400	Helena
300	Senhora
200	A Moreninha e Helena
150	A Moreninha e Senhora
100	Senhora e Helena
20	A Moreninha, Senhora e Helena

- A) O número de estudantes que leu apenas uma das obras
- B) O número de estudantes que não leu nenhuma das três obras
- C) O número de estudantes que leu duas ou mais obras.

01) Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Quatro candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

02) Para concorrer à eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 3 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor. Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?

03) Um auditório em forma de um salão circular dispõe de 6 portas, que podem ser utilizadas tanto como entrada ou para saída do salão. De quantos modos distintos uma pessoa que se encontra fora do auditório pode entrar e sair do mesmo, utilizando como porta de saída uma porta diferente da que utilizou para entrar?

04) Um estudante terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse estudante pode escrever essa palavra é

06)As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto $S = \{3, 4, 5, 6\}$. Nessas condições, é **correto** afirmar que o número máximo de quartos desse hotel é:

09)Com os algarismos 4, 5, 6 e 7 posso escrever ____ números pares de quatro algarismos distintos.

10)A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A , B , C e D , para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde.

Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é:

11) Para mostrar aos seus clientes alguns dos produtos que vende, um comerciante reservou um espaço em uma vitrine, para colocar exatamente 3 latas de refrigerante, lado a lado. Se ele vende 4 tipos diferentes de refrigerante, de quantas maneiras distintas pode expô-los na vitrine?