UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

DOMINGOS ARCANJO ANTÓNIO NHAMPINGA

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO JOGO "NTXUVA" NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENRIQUECIMENTO DO CURRÍCULO LOCAL NO NÍVEL MÉDIO DO SNE EM MOÇAMBIQUE

Salvador – BA
2023

DOMINGOS ARCANJO ANTÓNIO NHAMPINGA

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO JOGO "NTXUVA" NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENRIQUECIMENTO DO CURRÍCULO LOCAL NO NÍVEL MÉDIO DO SNE EM MOÇAMBIQUE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração em Educação Científica e Formação de Professores, linha de Pesquisa de Ensino de Ciências, Especialização em Didáctica de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA – Brasil).
Co-orientadora: Profª. Drª. Corine Castela (Universidade de Rouen – França).

Salvador - BA
2023

SIBI/UFBA/Faculdade de Educação – Biblioteca Anísio Teixeira

Nhampinga, Domingos Arcanjo António.
Contribuição para o estudo das potencialidades do jogo NTXUVA no ensino da matemática [recurso eletrônico] : uma proposta para o enriquecimento do currículo local no nível médio do SNE em Moçambique / Domingos Arcanjo António Nhampinga. - Dados eletrônicos- 2023.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientadora: Profª. Drª. Corine Castela.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2023.
Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.
Disponível em formato digital.
Modo de acesso: https://repositorio.ufba.br/

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação decolonial. 3. Descolonização. 4. Didática- Estudo e ensino. 4. Práxis pedagógica. 5. Instituições acadêmicas. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Castela, Corine. III. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós- Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. IV. Universidade Estadual de Feira de Santana. V. Título.

CDD 372. 7 - 23. ed.

DOMINGOS ARCANJO ANTÓNIO NHAMPINGA

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DAS POTENCIALIDADES DO JOGO "NTXUVA" NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENRIQUECIMENTO DO CURRÍCULO LOCAL NO NÍVEL MÉDIO DO SNE EM MOÇAMBIQUE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, área de concentração em Educação Científica e Formação de Professores, linha de Pesquisa de Ensino de Ciências, Especialização em Didáctica de Matemática.

Aprovada em: 25 de Outubro de 2023, Salvador – Bahia – Brasil

Banca examinadora:

Luiz Marcio Santos Farias – Orientador: ______________________________
Doutor em Didáctica da Matemática pela Université de Montpellier II – França.
Professor na Universidade Federal da Bahia – Brasil.

Corine Castela – Coorientadora: ______________________________
Doutora em Didáctica da Matemática – Formação de professores.
LDAR-Universités de Rouen, Paris Diderot, Paris-Est Créteil, Artois et Cergy Pontoise: Rouen, Normandia – França.

Saddo Ag Almouloud – Examinador interno: ______________________________
Doutor em matemática e aplicações pela universidade de Rennes - França.
Professor na Universidade Federal da Bahia – Brasil.

Documento assinado digitalmente
gov.br
Rosileia Oliveira de Almeida
Data: 26/08/2023 09:46:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Rosiléia Oliveira de Almeida – Examinadora interna: ______________________________
Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas – Brasil.
Professora na Universidade Federal da Bahia – Brasil.

BOSCH CASABO MARIANA - 46124704K
Firmado digitalmente por BOSCH CASABO MARIANA - 46124704K
Fecha: 2023.08.28 11:59:37 +01'00'

Marianna Bosch – Examinadora externa: ______________________________
Doutora em Matemática.
Professora na Universitat Ramon Llull – Espanha.

Avenilde Romo Vázquez – Examinadora externa: ______________________________
Doutora em Educação Matemática.
Professora no Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – CINVESTAV – México

Pierre Job – Examinador externo: ______________________________
Doutor em Ciências Matemáticas.
Professor no ICHEC Brussels Management School: Brussels – Bélgica

Daniel Nivagara – Examinador externo: ______________________________
Doutor em Ciências da Educação pela Universidade de Nantes – França.
Ministro da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior – Moçambique.

Kabengele Munanga – Examinador externo: ______________________________
Doutor em Ciências Humanas (área de concentração – Antropologia Social) – Brasil
Professor emérito na Universidade de São Paulo (USP) – Brasil.

Salvador - BA
2023

À

Beatriz Dauce Piriquito *(In memoriam*) e Arcanjo António Nhampinga (*In memoriam*), meus pais, por me trazerem ao mundo e pela inspiração que tenho por eles.

Velma C. N. Simindila, minha esposa, pela força e suporte emocional.

Alícia, Sofia da Beatriz e Bianca, minhas filhas, pelo sentido de vida que me têm dado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e saúde que me concedeu nesse percurso acadêmico.

À minha mãe, Beatriz Dauce Piriquito *(In memoriam*), uma humilde doméstica, sem muito letramento, mas que, com sua visão de ouro influenciou para o meu apego e interesse pela escola. Aquela senhora que de forma incansável acordava pelas 4 horas da manhã para praticar a agricultura de subsistência com a enxada de cabo curto, podendo vender um pouco do que produzia para comprar o material didático para seus filhos. Aquela senhora que quando seus filhos não queriam ir à escola, os perseguia com o chinelo na mão, para os pressionar a retomar a escola. Aquela senhora que sempre ligava para me saudar e consolar em vários momentos de angustia social e acadêmica. A ela, vão os meus mais profundos agradecimentos.

Ao meu pai, Arcanjo António Nhampinga (*In memoriam*), que desde cedo acreditou no meu potencial acadêmico, permitindo-me iniciar a escolarização aos 6 anos de idade, em 1993, como aluno assistente na Escola Primaria de Mucupia, distrito de Inhassunge, Província da Zambézia, bem ao lado do seu posto de trabalho, para que pudesse controlar e acompanhar de perto a minha iniciação escolar.

À minha esposa, Velma. C. N. Simindila e filhas, Alícia, Sofia da Beatriz e Bianca, pela força que me tem dado, pela tolerância da minha constante ausência em suas vidas por causa da frequência do doutorado em solo Brasileiro, um país que dista cerca de 9239 km de Moçambique. Pelo tempo tomado na produção desta tese e que contribuiu significativamente para a minha falta de atenção a elas em vários momentos.

Às minhas irmãs Isabel Arcanjo António Nhampinga, Tina Arcanjo António Nhampinga, Maria Dauce Nhampinga e meu irmão António Arcanjo Nhampinga pela força e incentivo moral, financeiro que me têm dado na vida inteira. A sua contribuição na formação da minha identidade e personalidade moral-ética, dentro de um país com uma diversidade cultural e linguística enorme. À mana Chica Arcanjo António Nhampinga (*in memoriam*) pelo espírito guardião que tem certamente tido sobre mim.

Retomando, ao meu irmão António Arcanjo Nhampinga com quem tive oportunidade de partilhar vários momentos de vida, pela amizade, conselhos e cumplicidade vai o meu *Tapereka takhuta*.

Ao Mano Rodrigues Carlos Faustino, ou simplesmente mano Zé, como carinhosamente o tratamos, meu cunhado e amigo, que acreditou nas minhas potencialidades desde cedo e participou de forma incondicional na minha formação, desde da base, aceite por gentileza, o meu *Dinoutamalelani*.

Ao professorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC), com quem tive o prazer de partilhar os espaços de discussão e construção do conhecimento científico e contribuíram para formação da minha personalidade acadêmica.

Aos professores, Luiz Marcio Santos Farias e Corine Castela, que aceitaram orientar a presente tese e, incansavelmente, me deram o suporte emocional e científico necessário para que a tese tivesse o padrão científico aceitável para obtenção do grau de Doutor.

Aos membros da banca, que aceitaram participar na qualificação e na defesa, e que produziram contribuições interessantes para o aprofundamento da tese.

À professora Rosiléia Oliveira de Almeida pelo encorajamento e contribuições que prestou para o enriquecimento da tese. Pela inspiração que tive em suas aulas na disciplina “Pluralismo Cultural e Aprendizagem Escolar de Ciências” para levantar o diálogo entre a TAD e a Decolonialidade.

Ao Professor Pierre Job pelas valiosas contribuições e enriquecimento da tese, sobretudo, na construção do *script de Python* para simular o sistema de distribuição de dados na primeira jogada em uma partida do “Ntxuva”, no desenho e implementação do experimento didático, nas dicas para realização da análise a priori e a posteriori da experimentação.

Aos colegas do PPGEFHC, especialmente aos pesquisadores do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias (NIPEDICMT) – UFBA, em que sou membro, pelos momentos de estudo e compartilhamento de conhecimento que contribuíram para construção da minha personalidade científica, que como produto culmina com a produção desta tese, de artigos científicos, de livros e capítulos de livros diversos.

Ao professor Anderson Souza Neves, pela amizade e valiosas contribuições prestadas ao longo da produção da Tese. Pelo tempo que dispendia para ler e discutir capítulos do desenvolvimento desta tese.

Aos anciões da Localidade de N’temangau, posto Administrativo de Luenha, Distrito de Changara, em especial, ao professor e especialista em jogos Tradicionais Pita Jhon Tembo (*in memoriam*), treinador dos alunos que participavam do Festival

Nacional dos Jogos Tradicionais, pela colaboração na pesquisa, pelo conhecimento histórico e prático compartilhado sobre o jogo “Ntxuva” na sociedade Moçambicana.

À Direção da Escola Secundária de Zóbuè, por permitir realizar o experimento didático nessa escola.

Ao Professor Mateus Fernando Djodjo e Marques Joao Manhicana que dispensaram seu tempo e seus alunos para que pudesse implementar a experimentação didáctica proposta nesta tese.

Ao Paulino Biquitone, a quem me ajudou a localizar praticantes diversos do jogo “Ntxuva” no Distrito de Tsangano, Província de Tete – Moçambique, com os quais tive os primeiros contatos com o jogo no âmbito do desenvolvimento da tese.

Ao Argentino Patrício Traçada Jino, quem me apresentou alguns praticantes do jogo “Ntxuva” instalados no mercado Kuatchena, Cidade de Tete, Moçambique.

Aos alunos, os sujeitos de pesquisa, que com outras tarefas escolares, aceitaram o desafio de participar na experimentação didática proposta, como parte de um projecto didático, com finalidade de integrar práticas socioculturais locais ao ensino da matemática.

Ao Ademar Máquina e Claudio Tendai, não querendo me esquecer daquele momento inusitado de produção de dados, no qual não me esquecerei das surpresas tradicionais e míticas havidas pela caminhada na estrada terra-batida de regresso a Cidade de Tete, saindo da localidade de N’Temangau, posto Administrativo de Luenha, Distrito de Changara, em meu último encontro de produção de dados no contacto com os anciões e o especialista dos jogos tradicionais.

Ao Alfeu Dias Martinho, com quem tive o prazer de discutir um pouco sobre o Python, para correr o script do sistema de distribuição de dados na primeira jogada em uma partida do “Ntxuva”.

Ao José João Divala, por me ter emprestado seu saber na língua Nyúngwe e produzir a tradução da tese nessa língua. Por me ter ajudado em identificar o tradutor para o resumo da tese em ci-Sena, o meu Tatenda.

Ao Inoque Conselho, quem providenciou a tradução do resumo da tese na língua ci-Sena.

Ao Júlio Bernado Sandaca, por me ter ajudado em identificar o tradutor para o resumo da tese em EChuwabo e por se ter encarregue em realizar a revisão do mesmo.

Ao Joao Salazar Aduge, quem providenciou a tradução do resumo da tese na língua Chuwabo.

Ao Rufino Alfredo, meu compadre, por me emprestar o seu saber linguístico, que muito contribuiu para a correção linguística do presente trabalho.

Ao Grupo de Cooperação Internacional de Universidades Brasileiras (GCUB) em parceria com o Ministério da Ciência e Tecnologia, Ensino Superior e Técnico Profissional de Moçambique (MCTESTP), pela conceção da bolsa de estudos pelo Edital GCUB/ProAfri nº 001/2018, com que tive a oportunidade de cursar o PPGEFHC.

Ao instituto de bolsa de estudo de Moçambique (IBE), pela coordenação da cooperação com o GCUB e o apoio nos tramites de documentos auxiliares para garantia da viagem e concessão da bolsa de estudos em solo Brasileiro.

A Universidade Púnguè pela conceção da licença para estudos a tempo inteiro e comparticipação nas despesas de passagem aérea.

Aos que não pude mencionar, mas que directa ou indirectamente contribuíram para o fortalecimento do meu espírito vencedor, vão os meus mais profundos e sinceros agradecimentos e,

Tapereka takhuta (língua ci-Sena)

Dinoutamalelani (língua Chuabo)

Tatenda (língua Nyúngwe)

Obrigado a todas e todos!

Ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de aprimorar em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina, a constituição de significados que não compreende nem a autonomia que não pode construir.

Mello (2001, p. 102)

Resumo

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Contribuição para o estudo das potencialidades do jogo “Ntxuva” no ensino da matemática: uma proposta para o enriquecimento do currículo local no nível médio do SNE em Moçambique. Orientador: Luiz Márcio Santos Farias. Coorientadora: Corine Castela. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia: Salvador, 2023.

A prática de ensino em vários países tem sido dominada pela pedagogia da visita as obras, em que os saberes são colocados aos alunos de forma única e linear, sem que sejam questionados a partir da realidade. Essa pedagogia para além de não privilegiar uma prática de ensino libertadora e problematizadora, ela coloca os educadores (matemáticos) numa posição de dependência epistemológica, ao naturalizarem as epistemologias do pensamento moderno eurocêntrico-colonial na produção do conhecimento acadêmico. Essa dependência que é fruto da dominação cultural é consequência da dominação econômica, política e social de umas culturas que se consideram hegemônicas em relação as outras, o que se configura na colonialidade (epistemológica). A presente tese que leva o título “contribuição para o estudo das potencialidades do jogo “Ntxuva” no ensino da matemática”, apresenta-se como uma proposta de pesquisa que visa contribuir para a desconstrução dessa ideia universal de ciência, propondo discutir possibilidades de construção do conhecimento acadêmico através da integração de práticas culturais (dominadas) de povos originários ao ensino (da matemática). Essa discussão que se insere no campo da decolonialidade (didáctica), encontra na TAD elementos teóricos essências para, primeiramente, problematizar e investigar como a colonialidade está instaurada no currículo (da matemática), segundo discutir as possibilidades de circulação de praxeologias entre instituições socioculturais de povos originários a instituição de ensino (da matemática). Para isso, a pesquisa se debruça em dois objetivos fundamentais, “OBG1 – Analisar as contribuições e mostrar as potencialidades da TAD na análise da manutenção e questionamento das epistemologias dominantes no ensino e, da circulação de praxeologias entre instituições produtoras de saberes contra-hegemônicos a instituição de ensino da matemática e OBG2 – Conceber um modelo didático de referência que integre o jogo “Ntxuva” ao ensino da matemática”. Esse diálogo TAD e decolonialidade alimenta na tese a ideia da “decolonialidade didática” como uma posição política-epistêmica que permite o investigador em didática assumir o compromisso de alteridade, como ponto de partida para emancipação e pensar no processo de difusão e acesso ao saber a partir do outro. A pesquisa é desenvolvida por meio da metodologia da engenharia didática e como sujeitos de pesquisa conta com anciões com os quais visamos investigar o “Ntxuva” a partir do seu contexto sociocultural e alunos a quem implementamos a experimentação didática. Os resultados da pesquisa apontam que a TAD é uma teoria potencial para estudo dos problemas levantados no campo da decolonialidade. Que a manutenção da colonialidade nas sociedades de países outrora colonizados deve-se ao facto de se pretender alcançar o modelo de vida ocidental, com seus valores baseados no crescimento, no consumo de bens materiais, no desenvolvimento industrial, etc. Que os documentos oficiais do SNE em Moçambique orientam a integração de saberes locais no ensino, mas as propostas metodológicas apresentadas nos programas de ensino da matemática não apresentam propostas concretas para integração de saberes locais. Que o jogo “Ntxuva” agrega várias potencialidades matemáticas no campo da aritmética básica e álgebra. A experimentação didática possibilitou comprovar a tese de que praxeologias oriundas de práticas socioculturais de povos originários podem ser exportadas para acessar saberes acadêmicos. Assim, a partir das praxeologias do sistema de jogo “Ntxuva” foi possível fazer emergir e acessar conhecimentos relativo à contagem, adição, subtração, sucessão numérica, divisão euclidiana, sistema de equação, acima de tudo, de potenciar os alunos em capacidades de formulação ou modelização matemática de um problema real. Ainda que a organização didática tenha se revelado boa, constatamos que necessitará de ajustes, sobretudo nas tarefas 1 e 2. Futuros trabalhos podem ser desenvolvidos utilizando outros contextos socioculturais para comprovar o funcionamento do modelo de circulação de praxeologia entre instituições proposto na tese, mas também, um estudo que integra a formação de professores deverá ser considerado para que se possa potencializar os professores em estratégias de integração de saberes locais no ensino, ao mesmo te que, se consciencializam da importante de pautar por uma prática de ensino libertadora e problematizadora a partir da realidade dos alunos.

Palavras-chave: Ensino da matemática. Teoria antropológica do didático. Decolonialidade didática. Circulação de praxeologias entre instituições.

Cigwagwa (ci-Sena)

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Ciphedzo kuli maganizo akupereka mapfundziro na udidi wa Ntxuva (Ntsuwa) kuli upfundisi wa Matematica: Maso a mphenya towera kuthimizira pa nsumbhu wa mabhukhu a mapfundziro, ku SNE, muno Moçambique. Nyakutsogolera: Luís Márcio Santos Farias. Npfundhisi waluso, Corine Castela. Ndzeru ya tsambha ya kumalisa mapfundziro a mabhukhu a padzulu ya Filosofia na Historia pa udziwisi wa ndimwemwene ku Universidade Federal da Bahia: Salvador 2023.

Maganizo a mapfundziro nkati mwa madziko akusiyana siyana asasebhendzesa luso ya ndzeru ya kawona padhuzi mabhasa, towera udziwisi upite kuli apfundzi pa ndjira ibhodzi ya mu ndhondhomeko mwace, mwa kukhonda kudzumwatirisa kutomera pa makhaliro. Luso iney ya mapfunziro maseze ikhonde kupasa khodzo mafundziro a kufungula maso towera kutsudzula anthu pa nyatwa, iyo isaikha apfundisi a matemática, pa mbuto ya kuganira mafundziro a pyandimwemwene na ntemo wa cikhulupiro. Pa kuwonesa makhaliro a cikhulupiro ca ntemo wa cincino, towera kupasa khondzo makhaliro a madziko aku ntunda wa Europa, na kuluka ndzeru za mabhukhu. Ipi ndi thangui ya ukapolo wa makhaliro ninga copwa ca unyagrinya wa npfuma, ndale, kuphatana kwa makhaliro a mbumba kuweza mwa kutukuka na kuleseza na anthu anango, pinapangiza utsamunda na mapfundziro a makhaliro a luso yadidi. Ndzeru za tsamba ici inansolo wa wakuti, "Ciphedzo kuli maganizo akupereka mapfundziro na udidi wa Ntxuva (Ntsuwa) kuli upfundisi wa Matematica:" ikupangizwa ninga maso a mphenya a nyakadhinga-dhinga towera kuphedzera kupfudza matemática kuli anthu onsene anaudziwisi, towera kudyesana ntondho pa ndzeru za kupfuna kuluka maganizo a luso ya bhukhu ya matemática na kubhulukira kwa makhaliro a anthu akhali pa ukapolo. Kudyesana ntondo kunalongwa kukugumanika pakati pa kusaka-saka udziwisi towera kugumana TAD, nsumbhu wa ndzeru zakupfunika pa nthoma toma nkandzo na kucita nyakadhinga-dhinga, towera kudziwa utsamundha walikha tany misumbhu ya mabhukhu a mapfudziro a matemática. Kaciwiri, kudyesana ntondo pa mapfundziro analonga pya makhaliro a mbumba nkati mwa pigawiko pya basa pya kuyanganira pya makhaliro anthu akhale a upfundisi wa matemática. Naypyo, nyakadhinga-dhinga uyu asalonga pyakupfunika piwiri. " OBG1 kupenenga copwa cidhadzepswa na kuwonesa udidi wa TAD, towera kulikhisa na kubvundza undimwemwene na ntemo, adhathonyiwa pa upfundisi, wa makhaliro a mbumba nkati mwa pigawiko pya basa, pinaweza ndzeru, towera kumalisa kutukuka kwa nyumba za mapfundziro za matemática, na OBG2-kupereka citsandzo ca luso ya kufundhisa, mwa kubvungazira Ntsuwa kuli mapfundziro ya matemática" nthango inei TAD na luso ya utsamunda isaphedzera maganizo a ndzeru ya tsamba ya kusanya na mibvundzo ya luso ya mapfundziro" ninga cidzo ca piphano pya nyakadhinga-dhinga wa ndale na udziwisi towera munthu anacita nyakadhinga-dhinga akhale na mpako wa kundhendhemezeka na munthu unango, ninga cinthu ca kutoma kupasa khondzo usawa-sawa wa anthu na kukumbuka pa kumwaza mapfala towera kupereka mpako wa udziwisi kuna anthu anango. Nyakadhinga-dhinga acitwa pa kusebendzesa luso ya padzulo, ninga mwanacinthu akulonga, thangui ya kucedza na nkhalamba, towera kudziwa kugwa ntsuwa kubhulukira pa makhaliro awo akalene, na apfundzi analesera ipfe na dzeru inei. Copwa ca nyakadhinga-dhinga cikupangiza pa TAD kuti ndi ndjira yadidi idasebheedzepswa towera kusaka dzambhukiro ya nyatwa kupenenga pa kusanya na mibvundzo. Towera kukhazikisa utsamunda kuli mbhumbha ya madziko akusiyana- siyana akhali pa ukapolo ndi thangui ya kuti akhapfuna kulandana na azungu, towera kukhala na khodzo ya kukula, kudya unyomo-nyomo na npfuma, kundjipa kwa matxapo, kulonga nkhuda. Maphaso a SNE mu dziko ya Moçambique, asathonyeza luso ya mapfundziro a mpisa, mbwenye, maso amphenya a mapfundziro a matemática nkhabe kupangiza pinthu pyakuwoneka niga pinacitwa mpisa, ninga ntsuwa ina udidi uzindji pa mapfundziro a bhukhu ya matemática na, khundi ya matemateca inanacita cipendo, (álgebra). Kulesera ndjira zakusiyana-siyana za kupereka mapfundziro, pyadzindikirisa ndzeru ya kupfundza makhaliro a nthu, pinakwanisika kukwata ndzeru na luso ya makolo, towera kazisebhendzesa m'mapfundziro a mabhukhu apadzulu. Nayipyo, kutomera pa luso ya kupfundza magwero a ntsuwa, zabwera ndzeru za kulengesa, kubvungaza, kupambula, kupita pa mbuto, kugawa, pa kufuna kuthimizira luso ya udziwisi apfundzi, kubhulukira pa citsandzo ca kuwona na maso, maseze kulongodza kwa luso kukhale kwadhidhi, tadzindhikira kuti pisapfunika kuphindhuza pang'ono maka-maka mabasa 1 na 2. Mabasa a ntsogolomuno, anadzacitwa pa kutoweza nkwakwa wa makhaliro a mbumba, towera kuwonesa kusebhendza kwa pinthu pinacitwa na anthu, ninga mudhapilongera ife pa ndzeru ya tsamba, ku khundi inango mapfundziro anaperekwa na apfundisi asafunika kuthimizira luso ya mafundziro a mpisa, thangwi pisapfunika kupfundhisa towera kupfungula maso apfundzi pa kusanya na mibvundzo.

Mphinga ya mapfala: Mapfundziro a matemática. Maganizo akupfundza makhaliro na pinacitwa na anthu. Mapfundziro akusanha na mibvundzo. Mapfambhiro a mpinthu pinacitwa na mbhumbha nkati mwa mbuto za basa.

Mazu ogwadhela (Echuabo)

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Nicamiedo ya masunzo wa oderetu wa nivego Ntxuva mwa masunzio wa mpadho oh wenghesa: zelo yofumiana dha osunzihiwa dha mmawani mwa tharu ya masunzo wa vari, mwari mwa masunzo a elabo yeu, Moçambique. Musongoreli: Luiz Marcio Santos Farias. Musongoreli owili: Corine Castela.(Namasunza mundimuwaya wa osunzia, wa makani otene ohokalao, na wa etxirhapi ya ononelamo). Muthego ohosunzia mundhimuaya ya Bahia:Salvador, yaka matxikwi meli na kumi na tharu.

Makalelo a masunzio muilaboni mendjene ankosiwa makamaka na mikalelo yohona manivuru, masunzioya eikiwaga mwa anamasunza na ekalelo modha bai, vina onyalene, mbwenye se ovuzia ebaribaria. Esunzio etxi kinzuzumela mikalelo yosunzia enfurula, obe entikina, etxia enoamaga anamasunzia(wa mpadho oh wenghesa) emanha yosunzia na zelo dha apatxae. Omageleliua oku wa dha apatxae ompadhuela sabwa vilabo vina dhikana ofumu opitha, avikosiaga anddimua a vilabo vina, etonyiedaga opatxae mmasunzioni. Nivuru nthi ninithaniwa “Nicamiedo ya masunzo wa oderettu wa mavego Ntxuva mwa masunzio oh wenghesa” enolagiedda ninga zelo yosunza inveda ocamiedda otatula zelo edji ya muilaboni motene, ya dinsunzihiwa, efunaga ologela marhe omaga dha osunzihiwa niriaga medhelo(apithiwe) ya malogo a anammawani mwa masunzo(ya mpadho oh wenghesa). Makani aba anvoloa mwa opatxae(ohosunzia) anofwanya va eubuelo ya osunzia medhelo dha mmawani, dhologiwa dha makamaka, sabwa voromavene, otikina na osunza dhavi opatxae oyamo mmasunzioni(wa mpadho oh wenghesa), vowili ologela eodelo yowedhia merelo mwari mwa malogo a anammawani muthego dha masunzo(a mpadho oh wenghesa). Mwa dhaene, esunzo etxi enlabela osoria dhima bili, yoroma- ombeza macamiedo na olagia oderetu wa eubuelo ya osunzia medhelo dha mmawani mwa ombeza dha othidelela na mavuzo mwa dha osunzihiwa dhopitha mmasunzoni na mwa owedha dha merelo mwa mithego enlabela myambo yohivithithimia mu nsunzioni mwa mpadho oh wenghesa. Ddima yonawili- oita medhelo ya osunzia osibea, vamodha na nivego Ntxuva, mwa masunzio wa mpadho oh wenghesa. Makani aba a eubuelo ya osunzia na medhelo ya mmawani na ovanya dhopatxae ddinoruvia munivuruni ompu zelo dha ovanya dhopatxae mmasunzioni ninga malamulo a anamathonga a elabo envaya eodhelo namasunza wa mikalelo yosunzia, orumela ovapa ninga dila yoroma ya othithimia na oubuela merelo a olalea na othambira dha osunzihiwa na muthu mwina. Nsunzo enthi ninkosiwa na dila ya omesiri wa osunzia, athuya avuziwe dha Ntxuva ba andhimua a mmawani, na anamasunza atagihiwena dha merelo a osunzia. Ddipuriemo mu nsunzoni ompu ddintonha wila eubuelo ya osunzia na medhelo dha mmawani eubuelo endhimua yosunza makani avenyihiwe mu ovanya dhopatxae. Esi dhopatxae ddikalahovi vilabo epile vipudjiwe wale na apatxae sabwa athuya anofuna afanye ekalelo ya vilabo epi vya apatxae, na thima ddawa dhounua, na olabana ddilobo, na ounua wa mutcini, na vina. Ma djangarha atxibarene a masunzo muilaboni ya Moçambique anolaga oria onona wa mmawani mmasunzoni, mbwenye zelo dha dhila ddilagihiwe mmatadeloni a masunzio a mpadho oh wenghesa kanlagia zelo ya txibarene ya oria onona wa mmawani. Nivego Ntxuva nikana oderettu ondjene mwari mwa mpadho oh wenghesa, mwari mwa wenghesa ohoroma, na vina. Otagia wa merelo ya osunzia aivaya eodhelo ya osoria, wila eubuelo edji ya merelo a mmawani a malogo abaliwe mmawanimwa anofwanyela operekeliwa kwati obe vilabo vina, vowi ofanyiwe onona ondimua. Dhaene, oromana merelo a nivego Ntxuva eiodhea ofwanya onona wa wenghesa ohoroma,ovuganya, oburutxavo, ohofarana, ogawa, makamaka oavaya anamasunza eodhelo ya oleba dha mpadho wa wenghesa, mwari mwa makani a txibarene. Niziwaga wene wila matadelo ya merelo wa osunzia aioniedda oderettu, nionavo wila anofuna onyalihiwa, makamaka mabasa yoroma na yowili. Mabasa ohosongoro anofwanyela olebiwa elabiwaga na athu ya kwathi ddina sabwa osoria elabelo ya merelo yoweddia eubuelo enria ohodda wa anammawani ninga enlagiwa munivuruni ompu, mbwenye vina nsunzo ninkuela osunzihiwa wa anamasunzia enofwanyela erihiwe vowi aunuhiwe anamasunziaya na malago a oria onona wa mmawani mmasunzioni, mudidi modhavi onlagiwa anamasunzia vowi alibele merelo yosunzia anfurula, oromana ebaribari ya anamasunza.

Mazu a makamaka: Osunzia wa oh wenghesa. Eubuelo ya osunzia medhelo dha mmawani. Ovanya dhopatxae mu omesirini mwa osunzia. Owedha wa merelo wa athu mmabasani.

Cigwathwa (Cinyungwe)

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. cithandizo pakupfunza matemátika kudzera masenzeko ya Ntxuva: lingaliro la kuyendesa patsogolo gawo la mamaliziro ya SNE m`mapfunziso ya m`Musambike. Mulangizi: Luiz Márcio Santos Farias. Mulangizi wakuthandizira: Corine Castela. Nfundo (Luso m`Mapfunziso, yaPhilosophy na Mbiri ya Udziwi). Universidade Federal ya kuBahia: Salvador, 2023.

Cizolowezo ca kapfunzisidwe m'madziko mazinji cakhala cakutoweza mkhomeko wa miyambo ya kutoweza ndondomeko ibodzi-na-yibodzi yokha ya bzicito bzakupalizira nabzo mapfunzo kwa aphunzi, mwakusaya kulangalira makhalidwe yaciumbwe. Maphunziroya, mwakusya kuwerengera kusakhala na mwawi wopfunzisa padeka na wakufuza, umbayikha apfunzisi (anayaluso wa matematilka) pambuto yakudalira luso, yakutomedwa na lingaliro lamakono la ciwutsamunda ya katalidwe ka mapfunziro. Kudalira kumweneku, ni thangwe la utongi bwa cikhalidwe, na kutowerera mphanvu ya zacuma, ndale na mbiri ya cikhalidwe ca wanthu winango omwe ambabzilatiza kuposa mwakudzindendemeza na winango wense, omwe acilatizika ninga aponderezi wa maluso yinango yali yense. Luso lino, lomwe nfundo yace in`ti: "cithandizo pakupfunza matemática kudzera masenzeko ya Ntxuva", lin`dziwonesa ninga kafuku-fuku wa kulinga bzowe bzin`thandizira kukonza pomwe lingaliro la cilengedwe cense ca luntha (siensia), ninga mwawi wakumanga udziwi bwa maphunziro mciphatano na miyambo ya cikhalidwe (cakutongedwa) ya wanthu wa mbiri yakale mciwerengero (matematika). Nkambirano uno, omwe unifundussa uponderezi mu upfunzi (didactica), un`gumana mu TAD bzakufunikira kufotokoza kuti, pakutoma, bzibvunzise na kufufudza momwe utsamunda umbakhazikisidwira mu mapfunziro ya miwerengo (m`matematika), kaciwiri kubverana bza kukwanisika kwa dongosolo la bzicito pakati pa mbiiri ya cikhalidwe ca wanthu. Kuti ibzi bzikwanisike, kafuku-fukuyu akhalinga mathangwe mawiri yakufunika, "OBG1 - kuzindikira bzomwe bzaperekedwa na kulatizidwa mu TAD pakati pa mibvunzo yaluso yakuperekedwa bwino-bwino napo pakuphunzisa ndipo pakupaliza msambo wa pakati pa mabungwe yomwe yambapfunzisa mwa kusemphanisa yina yali yense na yachidziwiso ca kawerengedwe ka OBG2 - phatizirani pfunziso lomwe limaphatikiza masenzkero ya Ntxuva mu pfunziso la matematika ” ninga njira ya tcenkha nayo mnsempho ndipo la kalimbikisidwe ka langaliro la "pace-pace wa luso la kapfunzisidwe" ninga phathi la zandale lomwe limbabvuma wafufudzi mu didactica wacitsira thupo kudzipereka kwa wina, ninga paciyambi kufotokoza na kukumbukira za njira ya yakugumanira luso kucokera kwa wina. Kafuku-fukuyu ambacitidwa kudzera mu njira ya umisiri bwa kapfunzisidwe na pomwe momwe mapfunziro yakuphatikizidwa na wale omwe tin`funa kutenga nawo luso la senzeka Ntxuva kucokera mcikhalidwe ca wanthu napo apfunzira omwe tiniwaphatisa basa ya kupima nayo pfunziro. Bzakutowerera bzakafuku-fukuyu bzikulatiza kuti TAD ni lingo lomwe lingakwanise kuwerengera nyathwa zomwe zimbwera m'minda mwa wene pace-pace. Kukhazikisa utsamunda m'mphimpha zomwe kale mukhana atsamunda ni thangwe la cakulinga kukhazikisa moyo wacipandu, na cakulinga ca kulatizira ukulu, kuphatisa bassa bzinthu bzakuthupi, chitukuko ca mafabrika, na bzinango bzazinji. Nfundo za m`Mosambike, zakutawiridwa mu SNE yankupereka lini malingaliro cayio-iyo ya bzitalo bza apfunzisi wa matematika malingana citsimikizo cace. Na ibzo, masenzeko ya Ntxuva yambathandizira, pokhapokhapo, luso pa nkhani ya teweza matematika na kuwerenga nembo. Na ibzo, kuyezeza kwa Didatika kudatsimikizira mfundo yakuti bzinfunika kuti kutoweza mbiri ya cikhalidwe ca mitundu ya wanthu kutumizidwe kunja kuti akwanise luso la mapfunziro. Thangwe, kale-na-kale, msambo wa masenzeka ya Ntxuva, yakhapasa luso lakukhudzana na kuwerengera, kuthimizira, kupambula, kutewererana kwa nembo, magawo ya ci-Euclideano, dongosolo la ma-equação, mpaka kufika pakutengela luso la citsanzo. Napo bungwe la didactica lidakhale labwino, pan`funika kutsintha, makamaka m`mabasa 1 na 2 pakati pa cikhalidwe ca anthu kuti yatsimikize makhalidwe pakati pa nfundo ino, napo, kuti apfunzisi akwanise kupitiriza njira yakupfunzisa kafotokozedwe ka luso cayiro-iro.

Mafala yakufunikira: Kuphunzisa matematika. Uwunthu bwa kapfunzisiro ka cipfunziso. Cipfunziso ca kugawikana. Macitidwe ya mbiri pakati pa mabungwe.

Summary

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Contribution to the study of the potential of the Ntxuva game in the teaching of mathematics: a proposal for the enrichment of the local curriculum at the secondary level of SNE in Mozambique. Supervisor: Luiz Márcio Santos Farias. Co-supervisor: Corine Castela. Thesis (Doctorate in Teaching, Philosophy and History of Sciences). Federal University of Bahia: Salvador, 2023.

Teaching practice in several countries has been dominated by the pedagogy of the visit to the works, in which knowledge is placed to students in a single and linear way, without being questioned from reality. In addition to not favouring a liberating and problematising teaching practice, this pedagogy places (mathematical) educators in a position of epistemological dependence, by naturalising the epistemologies of modern Eurocentric-colonial thinking in the production of academic knowledge. This dependence, which is the result of cultural domination, is a consequence of the economic, political and social domination of some cultures that consider themselves hegemonic in relation to others, which is configured in (epistemological) coloniality. The present thesis, which bears the title "contribution to the study of the potential of the Ntxuva game in the teaching of mathematics", is presented as a research proposal that aims to contribute to the deconstruction of this universal idea of science, proposing to discuss possibilities for the construction of academic knowledge through the integration of (dominated) cultural practices of native peoples into teaching (mathematics). This discussion, which is part of the field of (didactic) decoloniality, finds in the TAD essential theoretical elements to, firstly, problematise and investigate how coloniality is established in the (mathematics) curriculum, secondly, to discuss the possibilities of circulation of praxeologies between sociocultural institutions of native peoples and the (mathematics) teaching institution. To this end, the research focuses on two fundamental objectives, "OBG1 - To analyse the contributions and show the potential of TAD in the analysis of the maintenance and questioning of dominant epistemologies in teaching and, of the circulation of praxeologies between institutions producing counter-hegemonic knowledge and the institution of mathematics teaching and OBG2 - To design a didactic reference model that integrates the Ntxuva game into mathematics teaching". This dialogue between TAD and decoloniality feeds into the thesis the idea of "didactic decoloniality" as a political-epistemic position that allows the researcher in didactics to assume the commitment to alterity, as a starting point for emancipation and to think about the process of dissemination and access to knowledge from the other. The research is developed through the methodology of didactic engineering and as research subjects it counts on elders with whom we aim to investigate the Ntxuva from their sociocultural context and students to whom we implement didactic experimentation. The results of the research indicate that TAD is a potential theory for studying the problems raised in the field of decoloniality. That the maintenance of coloniality in the societies of formerly colonised countries is due to the fact that it is intended to achieve the Western model of life, with its values based on growth, consumption of material goods, industrial development, etc. That the official documents of the SNE in Mozambique guide the integration of local knowledge in teaching, but the methodological proposals presented in the mathematics teaching programmes do not present concrete proposals for the integration of local knowledge. That the Ntxuva game adds several mathematical potentialities in the field of basic arithmetic and algebra. The didactic experimentation made it possible to prove the thesis that praxeologies originating from sociocultural practices of native peoples can be exported to access academic knowledge. Thus, from the praxeologies of the Ntxuva game system, it was possible to bring out and access knowledge related to counting, addition, subtraction, numerical succession, Euclidean division, equation system, above all, to empower students in capacities of formulation or mathematical modelling of a real problem. Although the didactic organisation has proved to be good, we note that it will require adjustments, especially in tasks 1 and 2. Future work can be developed using other socio-cultural contexts to prove the functioning of the praxeology circulation model between institutions proposed in the thesis, but also, a study that integrates teacher training should be considered so that teachers can be empowered in strategies for integrating local knowledge into teaching, while becoming aware of the importance of guiding a liberating and problematising teaching practice based on the students' reality.

Keywords: Maths teaching. Anthropological theory of the didactic. Didactic decoloniality. Circulation of praxeologies between institutions.

Résumé

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Contribution à l'étude du potentiel du jeu Ntxuva dans l'enseignement des mathématiques : une proposition pour l'enrichissement du curriculum local au niveau secondaire du SNE au Mozambique. Superviseur : Luiz Márcio Santos Farias. Co-directeur : Corine Castela. Thèse (Doctorat en enseignement, philosophie et histoire des sciences). Université fédérale de Bahia: Salvador, 2023.

La pratique de l'enseignement dans plusieurs pays a été dominée par la pédagogie de la visite des œuvres, dans laquelle les connaissances sont transmises aux étudiants de manière unique et linéaire, sans être remises en question par rapport à la réalité. En plus de ne pas favoriser une pratique d'enseignement libératrice et problématisante, cette pédagogie place les enseignants (de mathématiques) dans une position de dépendance épistémologique, en naturalisant les épistémologies de la pensée moderne eurocentrique-coloniale dans la production du savoir académique. Cette dépendance, qui est le résultat d'une domination culturelle, est une conséquence de la domination économique, politique et sociale de certaines cultures qui se considèrent comme hégémoniques par rapport à d'autres, ce qui se traduit par une colonialité (épistémologique). La présente thèse, qui porte le titre de "contribution à l'étude du potentiel du jeu Ntxuva dans l'enseignement des mathématiques", se présente comme une proposition de recherche qui vise à contribuer à la déconstruction de cette idée universelle de la science, en proposant de discuter des possibilités de construction du savoir académique à travers l'intégration des pratiques culturelles (dominées) des peuples natifs dans l'enseignement (des mathématiques). Cette discussion, qui s'inscrit dans le domaine de la décolonialité (didactique), trouve dans la TAD des éléments théoriques essentiels pour, premièrement, problématiser et étudier la manière dont la colonialité est établie dans le programme d'enseignement (des mathématiques) et, deuxièmement, discuter des possibilités de circulation des praxéologies entre les institutions socioculturelles des peuples autochtones et l'institution d'enseignement (des mathématiques). A cette fin, la recherche se concentre sur deux objectifs fondamentaux, "OBG1 - Analyser les contributions et montrer le potentiel de la TAD dans l'analyse du maintien et de la remise en question des épistémologies dominantes dans l'enseignement et, de la circulation des praxéologies entre les institutions produisant des connaissances contre-hégémoniques et l'institution de l'enseignement des mathématiques et OBG2 - Concevoir un modèle de référence didactique qui intègre le jeu Ntxuva dans l'enseignement des mathématiques". Ce dialogue entre TAD et décolonialité alimente dans la thèse l'idée de " décolonialité didactique " comme position politico-épistémique qui permet au chercheur en didactique d'assumer l'engagement dans l'altérité, comme point de départ de l'émancipation et de penser le processus de diffusion et d'accès aux savoirs de l'autre. La recherche est développée à travers la méthodologie de l'ingénierie didactique et compte comme sujets de recherche des aînés avec lesquels nous cherchons à étudier la Ntxuva à partir de son contexte socioculturel et des étudiants auxquels nous appliquons l'expérimentation didactique. Les résultats de la recherche indiquent que la TAD est une théorie potentielle pour étudier les problèmes soulevés dans le domaine de la décolonialité. Que le maintien de la colonialité dans les sociétés des pays anciennement colonisés est dû au fait qu'elle vise à atteindre le modèle de vie occidental, avec ses valeurs basées sur la croissance, la consommation de biens matériels, le développement industriel, etc. Les documents officiels de l'END au Mozambique orientent l'intégration des savoirs locaux dans l'enseignement, mais les propositions méthodologiques présentées dans les programmes d'enseignement des mathématiques ne présentent pas de propositions concrètes pour l'intégration des savoirs locaux. Le jeu Ntxuva ajoute plusieurs potentialités mathématiques dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre de base. L'expérimentation didactique a permis de démontrer la thèse selon laquelle les praxéologies issues des pratiques socioculturelles des peuples autochtones peuvent être exportées pour accéder aux connaissances académiques. Ainsi, à partir des praxéologies du système de jeu Ntxuva, il a été possible de faire émerger et d'accéder à des connaissances liées au comptage, à l'addition, à la soustraction, à la succession numérique, à la division euclidienne, au système d'équations, et surtout, d'habiliter les étudiants à formuler ou à modéliser mathématiquement un problème réel. Bien que l'organisation didactique se soit avérée bonne, nous notons qu'elle nécessitera des ajustements, en particulier dans les tâches 1 et 2. Des travaux futurs peuvent être développés en utilisant d'autres contextes socioculturels pour prouver le fonctionnement du modèle de circulation de la praxéologie entre les institutions proposé dans la thèse, mais aussi, une étude qui intègre la formation des enseignants devrait être envisagée afin que les enseignants puissent être habilités dans les stratégies d'intégration des connaissances locales dans l'enseignement, tout en prenant conscience de l'importance de guider une pratique d'enseignement libératrice et problématisante basée sur la réalité des étudiants.

Mots-clés : Enseignement des mathématiques. Théorie anthropologique de la didactique. Décolonialité didactique. Circulation des praxéologies entre les institutions.

Resumen

NHAMPINGA, Domingos Arcanjo António Nhampinga. Contribución al estudio del potencial del juego Ntxuva en la enseñanza de las matemáticas: una propuesta para el enriquecimiento del currículo local en el nivel secundario del SNE en Mozambique. Supervisor: Luiz Márcio Santos Farias. Co-supervisora: Corine Castela. Tesis (Doctorado en Enseñanza, Filosofía e Historia de las Ciencias). Universidad Federal de Bahía: Salvador, 2023.

La práctica docente en varios países ha estado dominada por la pedagogía de la visita a las obras, en la que el conocimiento es colocado a los alumnos de forma única y lineal, sin ser cuestionado desde la realidad. Además de no favorecer una práctica docente liberadora y problematizadora, esta pedagogía coloca a los educadores (matemáticos) en una posición de dependencia epistemológica, al naturalizar las epistemologías del pensamiento moderno eurocéntrico-colonial en la producción del conocimiento académico. Esta dependencia, fruto de la dominación cultural, es consecuencia de la dominación económica, política y social de unas culturas que se consideran hegemónicas frente a otras, lo que se configura en colonialidad (epistemológica). La presente tesis, que lleva por título "contribución al estudio de las potencialidades del juego Ntxuva en la enseñanza de las matemáticas", se presenta como una propuesta de investigación que pretende contribuir a la deconstrucción de esta idea universal de ciencia, proponiendo discutir las posibilidades de construcción del conocimiento académico a través de la integración de las prácticas culturales (dominadas) de los pueblos originarios en la enseñanza (de las matemáticas). Esta discusión, que se inscribe en el campo de la decolonialidad (didáctica), encuentra en la TAD elementos teóricos esenciales para, en primer lugar, problematizar e investigar cómo se establece la colonialidad en el currículo (de matemática), en segundo lugar, discutir las posibilidades de circulación de praxeologías entre las instituciones socioculturales de los pueblos originarios y la institución de enseñanza (de matemática). Para ello, la investigación se centra en dos objectivos fundamentales, "OBG1 - Analizar las aportaciones y mostrar las potencialidades de la TAD en el análisis del mantenimiento y cuestionamiento de las epistemologías dominantes en la enseñanza y, de la circulación de praxeologías entre instituciones productoras de conocimiento contrahegemónico y la institución de enseñanza de las matemáticas y OBG2 - Diseñar un modelo didático de referencia que integre el juego Ntxuva en la enseñanza de las matemáticas". Este diálogo entre TAD y decolonialidad alimenta en la tesis la idea de "decolonialidad didáctica" como posición político-epistémica que permite al investigador en didáctica asumir el compromiso con la alteridad, como punto de partida para la emancipación y para pensar el proceso de difusión y acceso al conocimiento desde el otro. La investigación se desarrolla a través de la metodología de la ingeniería didáctica y como sujetos de investigación cuenta con ancianos con los que pretendemos investigar la Ntxuva desde su contexto sociocultural y estudiantes a los que implementamos la experimentación didáctica. Los resultados de la investigación indican que la TAD es una teoría potencial para estudiar los problemas planteados en el campo de la decolonialidad. Que el mantenimiento de la colonialidad en las sociedades de los antiguos países colonizados se debe a que se pretende alcanzar el modelo de vida occidental, con sus valores basados en el crecimiento, el consumo de bienes materiales, el desarrollo industrial, etc. Que los documentos oficiales del SNE en Mozambique orientan la integración de los conocimientos locales en la enseñanza, pero las propuestas metodológicas presentadas en los programas de enseñanza de las matemáticas no presentan propuestas concretas para la integración de los conocimientos locales. Que el juego Ntxuva añade varias potencialidades matemáticas en el campo de la aritmética básica y del álgebra. La experimentación didáctica permitió comprobar la tesis de que las praxeologías provenientes de las prácticas socioculturales de los pueblos originarios pueden ser exportadas para acceder al conocimiento académico. Así, a partir de las praxeologías del sistema de juego Ntxuva, fue posible hacer emerger y acceder a conocimientos relacionados con el conteo, la suma, la resta, la sucesión numérica, la división euclidiana, el sistema de ecuaciones, sobre todo, para potenciar en los alumnos capacidades de formulación o modelización matemática de un problema real. Si bien la organización didáctica ha resultado buena, advertimos que requerirá ajustes, especialmente en las tareas 1 y 2. Futuros trabajos pueden desarrollarse utilizando otros contextos socioculturales para comprobar el funcionamiento del modelo de circulación de la praxeología entre instituciones propuesto en la tesis, pero también, debe considerarse un estudio que integre la formación docente para que los profesores se empoderen en estrategias de integración de los saberes locales en la enseñanza, a la vez que tomen conciencia de la importancia de orientar una práctica docente liberadora y problematizadora a partir de la realidad de los estudiantes.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Teoría antropológica de la didáctica. Decolonialidad didáctica. Circulación de praxeologías entre instituciones.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE MAPAS

LISTA E DIAGRAMAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABREVIAÇÃO/SIGLA	DESIGNAÇÃO
AEP	Atividade de Estudo e Pesquisa
PA	Progressão aritmética
DM	Didáctica da Matemática
EM	Ensino da Matemática
ESG	Ensino Secundário Geral
INDE	Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação
LHN	Local Histórico de Nwadjahane
MINED	Ministério da Educação
MINEDH	Ministério de Educação e Desenvolvimento Humano
OD	Organização Didáctica
OM	Organização Matemática
OP	Organização pontual
OL	Organização local
OR	Organização regional
OG	Organização global
PCEB	Plano Curricular do Ensino Básico
PCESG	Plano Curricular do Ensino Secundário Geral
PEA	Processo de ensino e aprendizagem
PEE	Plano Estratégico da Educação
$S(X, Y, O)$	Sistema didático: O – objeto de saber, X aprendente (estudante, etc.), Y – entidade de ajuda (professor, orientador, etc.).
SD	Sistema Didático
SNE	Sistema Nacional de Educação
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TSD	Teoria das Situações Didáticas
TTD ou TD	Teoria da Transposição Didática ou Transposição Didática
I_{SC}	Instituição sociocultural
I_{eM}	Instituição de ensino da Matemática
O_{SC}	Objeto Sociocultural

O_{eM}	Objeto de Ensino da Matemática
$R(X,O)$	Relação pessoal de X para O
$R_I(X,O)$	Relação pessoal de X para O, sujeito a instituição I
NC-DD	Nível de Co-determinação Didática
NDD	Nível de Determinação Didáctica
FNJT	Festival nacional dos jogos tradicionais
FJE	e nos festivais dos jogos escolares
Exp.	Expressão
i	Jogador i
j	Casa j
c_{ij}	Casa j do jogador i

SUMÁRIO

0. INTRODUÇÃO

0.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

O presente trabalho da tese refere-se à uma pesquisa de doutorado, com o título “*contribuição para o estudo das potencialidades do jogo “Ntxuva” no ensino da matemática: uma proposta para o enriquecimento do currículo local no nível médio do SNE em Moçambique*”.

A nossa proposta é a de que a partir do olhar que temos vindo a dar sobre a prática de ensino da matemática, em que muitas das vezes o acesso ao saber da matemática tem sido marcado e dominado pelas formas e/ou práticas de produção da ciência imbuídas na matriz do pensamento moderno colonial, instaladas no mundo como formas únicas e Lineares de produção e acesso ao saber no meio escolar, em particular, no ensino da matemática.

A manutenção da hegemonização dessa prática de ensino é ainda acentuada na medida em que, grande parte de educadores matemáticos é formada nessa matriz colonial, fazendo-os não ter uma abertura e/ou leitura de outras experiências de produção de saber da matemática (escolar), que não se alicerçam somente dentro da matriz do pensamento moderno colonial de produção da ciência. Assim, as suas aulas, em grande medida, são orientadas de forma mecânica e não problematizadas, a partir de uma leitura invariante de saberes, que não produzem sentido e afeto aos alunos, contribuindo em grande medida para não visibilidade e subalternização de outras sabedorias, que podem ser úteis para “fazer e elaborar matemática dentro e fora da escola ou da sala de aulas” (GERDES, 2014, p. 64).

Deste modo, gerações e gerações de alunos são formados e formatados nessa relação de poder, que não lhes permite reconhecer a importância de suas práticas socioculturais na produção da ciência, em particular, na matemática, alimentando essa ideia universalista de produção da ciência. Consequentemente, olham a matemática como algo de outro mundo e, às vezes, sem nenhuma relação com seu contexto sociocultural e suas práticas diárias.

Moçambique é um país colonizado cerca de 500 anos e que veio a ter a sua independência total e completa em 1975, não é excluído dessa relação de poder, que por muito tempo contribuiu para subalternização da cultura e do povo moçambicano. A educação, nesse país da perola do indico, também foi e continua sendo influenciada pela hegemonia do pensamento moderno colonial, tanto pela herança da educação colonial que se propunha moldar os moçambicanos aos padrões de vida e de educação Portuguesa, quanto pela presença massiva de professores europeus, que no período pós-independência se propunham apoiar o país na formação de seus quadros, entretanto, impondo sua maneira de fazer ciência, que excluía a produção do conhecimento a partir das práticas socioculturais locais.

Num período em que o país se ressentia da falta de quadros qualificados, moçambicanos de diversos cantos do país eram enviados para países como a Rússia, a Alemanha, a Cuba para serem formados e, retornando a Moçambique para formar outros quadros moçambicanos. Estes moçambicanos, também formados e formatados numa matriz do pensamento moderno colonial, de certa forma, transmitiam sua experiência de produção científica em uma base que subalternizava e não visibilizava a produção da ciência a partir da cultura e práticas locais moçambicanas.

É neste contexto que o autor, também teve a sua formação, a partir de professores de uma geração formados e formatados nessa relação de poder, em que a hegemonia do pensamento moderno eurocêntrico-colonial estava e continua estando implantada nas políticas educacionais do país. Embora tenha estado em contato direto com suas práticas socioculturais, ao logo de sua escolarização, pelo menos ao nível do ensino básico e do ensino secundário entre 1994 e 2005, o conhecimento local não era objeto de discussão em diferentes disciplinas escolares, em particular, na disciplina de matemática.

Em sua formação superior, ao nível da licenciatura em ensino de Matemática entre 2007 e 2010, também feita em Moçambique, as disciplinas sempre foram orientadas isentando a integração de saberes locais ao ensino das mesmas. Mas problemático ainda, tratando-se de um curso superior que visava potenciar a formação de professor de matemática, as disciplinas sobre metodologia e didáctica de matemática, em particular, não faziam referência a integração de sabedorias contra-hegemônicas para o ensino da matemática.

Entretanto, ao longo do curso supracitado, sobretudo no 4º ano, é ofertada a disciplina designada "Etnomatemática", que visava discutir, a partir de um censo critico, acerca do ensino tradicional da matemática, o ensino mecanizado e não problematizado a partir de sabedorias de povos originários. É com base nas discussões desenvolvidas nessa disciplina, que o autor começa a ter as primeiras impressões da importância de integração de saberes locais no ensino da matemática.

Ainda assim, era possível notar que as abordagens discutidas nesta disciplina não iam além da discussão em sala de aulas, sem, no entanto, que sejam implementadas efectivamente em contextos de ensino aos diferentes níveis de escolaridade no país. Portanto, digamos que, tudo o que fora discutido, não passava de uma ilusão, uma vez que a prática lectiva denotava outra experiência de ensino, imbuída em sabedorias hegemônicas. De qualquer forma, esta fase não influenciou notoriamente o autor a olhar para a cultura e sabedorias local com tanta importância a integração no ensino, de modo que as aulas tivessem sentido e afecto aos alunos.

Em 2014, o autor faz parte da turma de Mestrado em Estatística, realizado em Moçambique, mas que as disciplinas são exclusivamente orientadas por professores espanhóis. Pela natureza e identidade do professorado, talvez ainda, pela natureza do curso, dificilmente os saberes locais foram integrados ao processo de construção do conhecimento estatístico ao longo de todo curso.

No período de 2012 a 2018, em sua primeira experiência profissional, lidando com diferentes disciplinas da área de matemática, como resultado de sua formação e formatação no modelo de produção do conhecimento, poucas vezes, se não, quase nunca teve experiência e curiosidade de integração de outras sabedorias para potencializar as aulas de matemática.

Nesse mesmo período, sobre tudo, no período pós-mestrado, em sua tarefa docente, quando retorna o contato com as disciplinas de matemática na história e Etnomatemática, disciplinas com que trabalhou de 2016 à 2018 e, influenciado pela política de integração do currículo local que o país havia definido em 2008 como uma das inovações curriculares, começa a questionar-se sobre como efetivar essa política diante de um grande número de professores formados e formatados nas práticas de ensino da matemática enraizadas na matriz do pensamento moderno eurocêntrico colonial, em que o autor também esteve imbuído por muito tempo. É nesse interregno que o autor começa a se interessar nas discussões sobre as possibilidades de integração de saberes locais no ensino da matemática.

Quando fez parte do doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC), em 2019, em solo brasileiro e na Universidade Federal da Bahia, o autor, confrontado com seu Orientador, Prof. Doutor Luiz Marcio Santos Farias, inicia as discussões em torno da possibilidade de integração de saberes locais no ensino da matemática. Com esta discussão, inicia-se uma mudança da linha de investigação, centrada no estudo da importância da História da Matemática nas aulas de

Matemática, para uma proposta que discute a integração das práticas socioculturais locais no ensino da matemática e que se efetive em sala de aulas.

Entretanto, a questão era: por onde começar essa discussão? Que embasamentos teóricos permitiriam levantar esta discussão e como poderiam potenciar uma prática de ensino que não se feche somente dentro das epistemologias do pensamento moderno eurocêntrico colonial?

Estas questões começam a ser respondidas quando o autor, dentro do PPGEFHC começa a se aproximar das leituras sobre a didática da matemática na linha francesa, ao se atentar especificamente a Teoria antropológica do Didático (TAD) como a principal referência teórica utilizada para o desenvolvimento desta tese.

Entretanto, como ponto de partida para enquadramento e problematização do estudo, dentro da inquietação que veio levantando ao longo de seu percurso escolar e profissional, sobre "o vazio didático e a incompletude do trabalho institucional em relação a integração de práticas socioculturais de povos originários no ensino da matemática" e, para uma discussão alinhada ao contexto, o autor se interessa pelos estudos decoloniais e inicia a aproximar-se da leitura a produção cientifica sobre a área.

Como forma de se aproximar mais a essa lente de estudos decoloniais, o autor interessa-se a cursar a disciplina de "pluralismo cultural e aprendizagem escolar de ciências" oferecida pela Professora Rosiléia Oliveira de Almeida e a disciplina de "descolonização de saberes: contribuições da ciência africana e Afrodiaspórica" oferecida pelas professoras Katemari Diogo da Rosa e Bárbara Carine Soares Pinheiro. Com uma grande comunidade estudantil e científica que participava dessas disciplinas, as discussões promovidas nelas possibilitaram o autor abrir ainda mais sua visão sobre a importância da integração das culturas dominadas no ensino. Portanto, aqui que se inicia a paixão por combinar os campos de estudos da didática da matemática por meio da TAD e a decolonialidade, para desenvolver a presente pesquisa, que se foca no estudo das contribuições das potencialidades de "Ntxuva", enquanto um dos elementos de identidade da cultura moçambicana, para o ensino da matemática.

Portanto, é baseado nestes factos, que se propõe, nesta pesquisa inserida no campo da Didáctica (da Matemática) através da Teoria Antropológica do Didático no diálogo com a Política do Pensamento (De)colonial, apresentar um estudo que auxilie ou forneça ferramentas metodológicas ao didata, o professor, o investigador, etc., primeiramente que lhe potenciem nas possibilidades de questionamento e denúncia das condições colonizadas no ensino ou no currículo escolar, segundo, propor uma ferramenta teórica-didáctica que permita analisar praxeologias oriundas de outras sabedorias, não eurocêntricas, e poder transpô-las para produção da ciência em instituições diversas (formais ou informais, de ensino ou não). Esse último fenômeno designamos neste trabalho do fenômeno de transposição institucional de praxeologias.

Nesse viés, a pesquisa se debruça em dois principais objectivos, um a nível teórico e outro a nível prático, respectivamente: 1 – analisar as contribuições e mostrar as potencialidades da TAD na análise da manutenção e questionamento das epistemologias dominantes no ensino e, da circulação de praxeologias entre instituições produtoras de saberes contra-hegemônicos a instituição de ensino da matemática; 2 – conceber um modelo didático de referência que integre o jogo Ntxuva ao ensino da matemática".

Para alcançar estes objectivos, o estudo realiza-se dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa, porque a análise de dados não é baseada em métodos estatísticos. De acordo com os procedimentos levantados para alcançar os objetivos, ela tem um foco teórico e experimental, que é esclarecido devidamente na subsecção 3.2. Em geral, a parte experimental-didática insere-se na abordagem da Engenharia Didáctica como um corpo metodológico principal que incorpora outras metodologias auxiliares que são esclarecidas na subsecção 3.2.2.

0.2. ORGANIZAÇÃO DA TESE

A tese é estruturada em seis partes e nove secções, para além da introdução, das referências bibliográficas, da conclusão, dos anexos, dos apêndices e do breve currículo do autor.

A primeira parte que é intitulada "caminhos para compreensão da pesquisa" é constituída por secção única designada "notas sobre o contexto educacional em Moçambique". Nesta secção, faz se uma apresentação da contextualização da pesquisa, com o objetivo de mostrar como a colonialidade está instaurada no sistema de educação (SNE) em Moçambique a partir da sua gênese, a partir daí, mostrar a pertinência e o enquadramento teórico da pesquisa.

A segunda parte é intitulada “construto teórico que alicerça o desenvolvimento da tese” e é constituída por uma secção que a designamos por “construindo significado para (de)colonialidade didática à luz da teoria antropológica do didático”. Nesta secção, faz-se apresentação dos conceitos sobre os elementos teóricos que alicerçam a pesquisa. Começa-se por apresentar a noção da didática matemática a partir de perspectivas diversas. Segundo, apresenta-se a noção da teoria da transposição didática (TTD) que é o ponto de partida para compressão da finalidade desta pesquisa. Terceiro, apresentam-se os principais elementos que caracterizam a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a teoria que dá suporte maior a nossa pesquisa. Quarto, a partir dos elementos que fundamentam os estudos (de)coloniais, na articulação com os elementos que fundamentam a TAD, desenvolve-se a ideia da “(de)colonialidade didática” na ótica desta pesquisa e, a seguir, se propõe a partir dos elementos da TAD, metodologias para realizar estudos ou responder os questionamentos decoloniais em didática (matemática).

A terceira parte que é intitulada “declaração das questões de pesquisa, dos objetivos e o percurso metodológico” também é constituída por secção única designada “questões de pesquisa, objetivos e o percurso metodológico”. Nesta secção, faz-se a declaração das questões de pesquisa, anunciam-se os objetivos e apresenta-se a metodologia de pesquisa que se utilizou no percurso dessa pesquisa, desde a produção de dados a sua análise.

A quarta parte da tese é intitulada “análise ecológica e das relações institucionais presentes no SNE – Moçambique”. Esta parte é constituída por secção única, designada “condições e restrições para integração de saberes locais e as relações institucionais previstas e presentes no SNE”. Nesta secção, faz-se uma análise das restrições que impedem ou influenciam para o impedimento e as condições que favorecem ou influenciam para o favorecimento à integração da cultura e/ou dos saberes locais no SNE em Moçambique. Esta análise que é designada por análise ecológica, é apresentada a partir dos níveis de determinação e co-determinação das organizações didáticas.

A quinta parte que é intitulada “construção do corpo de conhecimento sobre ”Ntxuva” e sua integração no ensino” é composta por três secções, respectivamente, a secção 5 designada “Ntxuva: a variante da família de jogos Mancala IV”, a secção 6 designada “praxeologias expertas e potencialidades matemáticas na prática com o jogo Ntxuva" e a secção 6, designada "pesquisas sobre Ntxuva: o que tem sido estudado sobre sua integração no ensino da matemática?".

Na secção 5 apresenta-se o jogo Ntxuva a partir de sua gênese na família de jogos Mancala. Aqui, faz-se menção à origem do jogo, a sua expansão pelo mundo, suas diferentes designações e modalidades, bem como a prática do jogo em Moçambique. Na secção 6 explora-se e apresenta-se as praxeologias espertas dos jogadores, procurando-se analisar sempre que possível a razão de ser das estratégias de jogo empregues nos diferentes estágios das jogadas. A partir da análise das praxeologias expertas, tenta-se analisar padrões e/ou relações matemáticas que podem ser úteis para o jogo bem como para o ensino da matemática. Para complementar o corpo de conhecimento sobre o Ntxuva e sua integração no ensino, na secção 7 apresenta-se um estudo a partir de dissertações e teses, que responde à questão "como são construídas e implementadas as organizações didáticas que integram o Ntxuva para o ensino?".

A sexta e última parte é intitulada "concepção e implementação da organização didática". Esta parte é constituída por duas secções, respectivamente, a secção 8, designada "construção e análise a priori da organização didática" e a secção 9, designada "apresentação e análise de dados". Na secção 8 apresenta-se e faz-se uma análise a priori da proposta da organização didática que integra o Ntxuva no ensino da matemática. Na secção 9, se apresenta, descreve e analisa os dados produzidos no âmbito da implementação da organização didática proposta. Aqui, primeiramente se descreve e analisa os dados produzidos na fase pré-experimental, segundo se descreve e analisa os dados produzidos na fase experimental, um analise que é designada de analise a posteriori. No final, são tecidas algumas considerações sobre a experimentação.

PARTE 1: CAMINHOS PARA A COMPREENSÃO DA PESQUISA

Nesta parte, apresenta-se uma gênese do processo educacional e da construção do Sistema Educacional em Moçambique (SNE), como parte que fundamenta a importância do desenvolvimento desta pesquisa. Para isso, se descreve em síntese, ao longo da subsecção 1.1.1, como foi a educação em Moçambique antes, durante e após a colonização, fazendo ponte com o perfil intencional da pesquisa. Na subsecção 1.1.2, apresentamos as primeiras impressões sobre a importância de considerar neste estudo a decolonialidade e o diálogo com a Teoria Antropológica do Didático como caminho para emancipação de classes e culturas dominadas.

Para além disso, na subsecção 1.2 apresenta-se uma abordagem que pretende esclarecer a intensão e limites da pesquisa, bem como a importância de considerar o diálogo entre a TAD e a decolonialidade em pesquisas inseridas no campo da didática com fomo na emancipação de práticas socioculturais de povos originários.

1. DA ORIGEM DO FENÔMENO À COMPREENSÃO DO ESTUDO

1.1. NOTAS SOBRE O CONTEXTO EDUCACIONAL EM MOÇAMBIQUE

1.1.1. Uma gênese do processo educacional em Moçambique

A história da humanidade nos ensina que o mundo sempre se constituiu na diversidade. De acordo com Piva (2017, p. 4700), “a diversidade se particulariza em todos os espaços e de acordo com o seu período de emergência”, apontando entre várias formas de representação, a diversidade de gênero, sexual, raça, etnia, linguística, geográfica. Pode-se então notar que, em cada ponto geográfico do mundo a diversidade deveria estar, mas nem sempre pode ser vista, se manifestando, entre os seres humanos, no seu modus de vida, suas ideologias, políticas e visão de mundo.

É comum que grupos de indivíduos compartilhem determinados hábitos e costumes, sujeitos à alteração por determinadas influências, a partir do qual se pode caracterizar sua civilização. A humanidade registrou diversas civilizações entre os seis continentes no mundo, que isoladamente desenvolveram sua visão do mundo e contribuíram para o avanço da ciência e tecnologia no mundo, a partir de saberes diversos que os constituíam.

Civilizações antigas como Egípcias, Persas, Mayas, etc. se constituíram importantes no desenvolvimento da Ciência e tecnologia a partir de suas práticas locais, utilizadas para resolver problemas pontuais. Por exemplo, no Egito antigo, foi notado o desenvolvimento da técnica (agrimensura) para resolução do problema da demarcação e divisão de espaços usados para a prática da agricultura nas margens rio Nilo, uma técnica que deu origem as frações (unitárias). Igualmente, foram notadas as técnicas de mumificação para conversação de corpos humanos e de outros animais, entre outras técnicas desenvolvidas por este povo.

Portanto, civilizações diversas, constituídas antes da colonização, em reinos, povoados, aldeias, etc., operavam sob uma visão própria e diferenciada, e a História demonstra que diferentes povos participaram da construção do que hoje chamamos de ciência moderna, como sinaliza D’Ambrósio (2011, p.28 citado por Silva, G., 2018, p.59) ao referir que “todas essas civilizações contribuíram para o que hoje definimos como Civilização Moderna, que começa a se moldar a partir do século XV, na chamada Era das Navegações”.

A África e o povo Africano em particular, exerceu inúmeras contribuições e influências sobre o desenvolvimento da ciência e tecnologia no mundo. Por exemplo, Asante (2015), Boyer (1974), Cunha (sd), Eves (2011), Roque (2012) elucidam que, para além das contribuições e influências africanas no desenvolvimento de diversas áreas como medicina (a prática de mumificação, odontologia, dos métodos contraceptivos, etc.), já conhecidos pelos egípcios, da astronomia Dogon praticada na região do Mali, da arquitetura africana representada pelas pirâmides Egípcias, as muralhas do grande Zimbabwe, etc., que ilustravam capacidade arquitetônica africana de excelência, da peonagem na sofisticada prática de navegação egípcia, no desenvolvimento da matemática, física, etc.

Para além do exposto no parágrafo anterior, também o Egipto contribuiu para/na formação de grandes nomes da ciência no mundo, o caso por exemplo de Apolônio, Arquimedes, Aristóteles, Diofanto, Euclides, Platão, Pitágoras, Ptolomeu, Tales de Mileto, etc., pois, maior parte da vida juvenil e adulta desses pensadores foi vivida no Egipto onde tiveram a oportunidade de estudar e construir seu corpo de conhecimentos a partir das sabedorias originarias do povo egípcio. Essas sabedorias, contribuíram sobremaneira para que estes pensadores pudessem desenvolver teorias diversas sobre a astronomia, a física, a química, a matemática, a medicina, etc. que hoje são utilizadas para explicar vários fenômenos na natureza.

Com o advento da colonização, um processo pelo qual “pessoas indo de uma região para outra com objetivo de habitar e/ou explorar” (SOUZA, 2008 citado por ZALAMENA, 2018a, p.4), especificamente a invasão da Europa as Américas, Asia e África, diferentes padrões de poderes que desembocaram na “discriminação social e posteriormente codificadas como raciais, étnicas, antropológicas ou nacionais, de acordo com os momentos, os agentes e as populações envolvidas” (QUIJANO, 1992, p. 12), foram instauradas as colônias. Este processo, que visou a ocupação de terras alheias e a eliminação e/ou escravização, pilhagem de recursos e conhecimentos de seus povos, foi acompanhado com a relegação ou destruição de culturas, práticas e princípios de con(sobre)vivência de distintas civilizações, tidas (até hoje) como primitivas, forçando-as a enveredar por práticas, princípios políticos-epistêmicos de cultura branca-europeia, tidos até então, como modelo único e universal de civilização no mundo.

Reconhecendo que a intensidade da destruição das culturas foi diferente entre os continentes e ou países dominados, em África, como sustenta Quijano (1992, p.13), “a destruição cultural foi sem dúvida muito mais intensa do que na Ásia, mas menos do que na América”. Entretanto, muitas práticas socioculturais conseguiram sobreviver à colonização, pelo menos, parcialmente, porém, continuamente descaracterizadas, “aos lhes serem retirados a legitimidade e reconhecimento na ordem cultural mundial dominada pelas normas europeias” (QUIJANO, 1992, p.13).

Nesta linha de pensamento, também Munanga se refere que, a destruição das estruturas tradicionais, religiosas e visões de mundo africanas não foi significativa, mesmo após mais de dois séculos de violência colonial, pois, “a realidade do campo, das aldeias onde a maioria do povo africano se localiza, não mostra a destruição total das religiões ou aspectos culturais locais, dado que, a industrialização entre outros aspectos de influência colonial não estiverem permanentemente presentes nestes locais” (MUNANGA, 2009, p.). O posicionamento de Quijano e Munanga já havia sido antes referenciado por Machel, como parte de seu discurso proferido na Segunda Conferência do Departamento de Educação e Cultura, em pleno período de luta de libertação de Moçambique, contra o colonialismo Português, ao se referir que, “embora os colonialistas tenham desferido um poderoso golpe na sociedade tradicional, a educação tradicional ainda é a forma dominante de educação em Moçambique” (MACHEL, 1970, p.11).

Contudo, embora as práticas socioculturais tenham sobrevivido à exacerbada colonização, o processo em si deixou marcas severas, que constituem ainda hoje legados que colocam o corpo e a sabedoria branca-europeia acima de tudo e todos, enraizadas em muitos domínios “sociais, culturais, da economia, da política, etc., que encontram eco no desenvolvimento dos países ainda nos dias atuais” (ZALAMENA, 2018a, 2018b).

Estes legados, que tem a principal cara o racismo[1] estrutural, ainda ditam “processos de exclusão social e política, articulados historicamente em um modelo de desenvolvimento predatório que instituiu uma divisão internacional do trabalho, a partir da subjugação de outros povos e culturas não europeias” (BRAGATO, CASTILHO, 2014, p. 15). Portanto, embora estes países tenham sido descolonizados e se tornado independentes, as heranças do colono foram suficientemente fortes, de tal modo que

[1] De acordo com Almeida (2019, p. 22), racismo é uma forma sistemática de discriminação que tem a raça como fundamento, e que se manifesta por meio de práticas conscientes e inconscientes, e que culminam em desvantagens ou privilégios para indivíduos, a depender do grupo social ao qual pertençam.

a descolonização se constituiu apenas do desmembramento político-administrativo, tornando os países livres e sob governação própria, porém, perpetuando as práticas e políticas-epistêmicas do colono europeu, subestimado outras práticas e sabedorias, constituindo-se assim uma “colonização disfarçada da mente” (ESTERMANN; TAVARES; GOMES, 2017, p. 19), como reforça Quijano, ao sinalizar que,

> embora o colonialismo político tenha sido eliminado, a relação entre a cultura europeia, também chamada "ocidental", e as outras, continua a ser uma relação de domínio colonial. Não é apenas uma subordinação das outras culturas à cultura europeia, numa relação externa. É uma colonização das outras culturas, embora sem dúvida com intensidade e profundidade diferentes, dependendo do caso. Consiste, antes de mais, numa colonização do imaginário dos dominados. Ou seja, atua na interioridade deste imaginário. (QUIJANO, 1992, p. 12).

Moçambique, como parte da África e outrora colônia portuguesa, também passou e ainda passa por um processo de dominação, exclusão social e política, influenciada pelo legado das políticas segregacionistas coloniais, que durante anos de colonização, subjugou e descaracterizou seu povo, sua cultura e práticas de (com)(sobre)vivência, denotando os nativos de indígenas e sem civilização. Em um trecho do relatório sobre Moçambique de 1896 a 1898, prestado ao Rei de Portugal por Mousinho de Albuquerque, por ocasião da sua estada em Moçambique, mostra como era caracterizado de forma discriminatória o povo moçambicano, ao se referir que “[...] o seu estado de civilização muito primitivo era naturalmente um obstáculo a que ali existam as Khuanerias[2] ou confrarias maometanas, tão poderosas na África do Norte. A única povoação que tinha aparência de civilização europeia era a pequena vila do Ibo, na ilha do mesmo nome[...]” (ALBUQUERQUE,1896 – 1898, p.28). Este pronunciamento, que coloca a cultura e sabedoria branca-europeia como modelo de civilização, é generalizado ainda hoje em vários domínios de gestão dos países outrora colonizados, mesmo depois de terem conquistado a independência.

Com essa descriminação, o colono visava descredibilizar as práticas culturais locais e desestabilizar o povo, ao lhe atribuir o estatuto de primitivo, para depois, impor-lhe suas práticas, as que consideravam civilizatórias, aculturando os nativos. Essa descriminação, que era acentuada pela raça, também fluía no sistema educacional colonial, que se caracterizava por ser elitista e seletiva. Embora estes países colonizados tenham conquistado sua independência (política), ainda hoje, a

---

[2] As Khuanerias ou confrarias maometanas se referem a um grupo de pessoas ou fieis que no período colonial seguiam a religião muçulmana em Moçambique.

Educação continua sendo (em grande ou pequena medida), um caminho de/para implantação e difusão do pensamento moderno colonial europeu, embora atualmente, países diversos tenham estado a adotar políticas educacionais que visam a valorização de suas práticas socioculturais no ensino.

A Educação em Moçambique não ficou alheia a essa influência, tendo ao longo dos anos experimentado várias fases, antes, durante e depois da colonização, sendo as fases posteriores à educação tradicional, as que mais sofreram a influência das políticas coloniais, que ainda hoje vigoram explicita ou implicitamente. Entre as fases que a Educação em Moçambique experimentou, anotamos as seguintes:

A educação tradicional, anterior a penetração portuguesa em Moçambique, que consistia na transmissão de conhecimentos, convicções e valores de geração em geração. A educação antes da independência, que compreendeu a educação colonial e a educação no governo de transição, caracterizada por uma educação discriminatória, devido ao regime colonial. A educação nas zonas libertadas (durante a luta armada de libertação), que tinha o principal objectivo ensinar a ler e escrever as populações nas zonas libertas. Com a efectivação da independência, é introduzida em 1983 a lei 4/83 que vem a regular o sistema nacional de educação (SNE), que visava a formação de um homem novo, livre da opressão e ideias coloniais, uma lei que viria a ser reformulada em 1992 pela lei 6/92. (BASÍLIO, 2014; QUIMUENHE, 2018; MARTINS, CHIRINDZA, HUMBERTO, 2018).

Portanto, com a penetração colonial nas terras Moçambicanas, a educação tradicional foi descaracterizada e marginalizada, instituindo-se um sistema de ensino que beneficiava quase que exclusivamente o colono português e suas famílias e, uns poucos Moçambicanos, aos quais depois de uma formação básica, inferior à do colono, eram atribuídos o título de assimilado.

A educação colonial compreendia dois subsistemas de ensino: o Ensino Oficial, que era frequentado especificamente pelos filhos dos colonos ou assimilados, que visava à transmissão de valores e padrões aristocráticos e o Ensino Rudimentar, que era frequentado exclusivamente pelos povos nativos, caracterizados como indígenas, que visava apenas aprender a ler, escrever e a domesticação. (MARTINS, CHIRINDZA, HUMBERTO, 2018, p.34).

Portanto, a política educacional colonial, “assumia um carácter segregacionista e elitista, visando reproduzir e promover desigualdades” (BASTOS, DUARTE, 2017, p. 17768), ao fragmentar o sistema de ensino em oficial (para filhos de colonos) e rudimentar (para os chamados indígenas ou nativos). Ela servia essencialmente aos interesses do colono e a raça era utilizada como elemento para divisão do sistema de ensino, como segue contestando Machel[3], em seu discurso, proferido em 1970, na 2ª Conferência do Departamento de Educação e Cultura – DEC, elucidando com desapontamento, como era esse sistema, ao afirmar que "em Moçambique, um país colonial, a discriminação social no ensino era acentuada pela discriminação racial".

Por razões discriminatórias raciais, que visavam a descaraterização da cultura e educação negra Moçambicana, o ensino rudimentar era o menos privilegiado em equipamentos e oferecido aos nativos nas zonas rurais e controlado pelos missionários da igreja católica, encarregues de assimilar e aculturar os nativos, o que constituía uma forma inequívoca de dominação e discriminação. Nos artigos 4 e 6 do estatuto dos indígenas Portugueses, é possível constatar a política de educação colonial, que visava essencialmente transformar os nativos para integrá-los à cultura branca-europeia. Trata-se de uma prática que não permitia que os nativos aprendessem a partir de uma visão alimentada em sua prática sociocultural (caracterizada como primitiva, por conseguinte não civilizada na visão do colono), o que facilitaria dominá-los para prestar serviços aos colonos, como segue na descrição dos artigos 4 e 6:

> Art.4º. O estado promoverá por todos os meios o melhoramento das condições materiais e morais da vida dos indígenas, o desenvolvimento das suas aptidões e faculdades naturais e, de maneira geral, a sua educação pelo ensino e pelo trabalho para transformação dos seus usos e costumes primitivos, valorização da sua actividade e integração ativa na comunidade, mediante acesso a cidadania. Art. 6º. O ensino que for especialmente destinado aos indígenas deve visar aos fins gerais de educação moral, cívica, intelectual e física, estabelecidos nas leis e também a aquisição de hábitos e aptidões de trabalho, de harmonia com os sexos, as condições sociais e as convivências das economias regionais (PORTUGAL, 1954, p.202).

Rodney (1975, citado por Taimo, 2010, p.67), reforça ainda que, "a educação colonial visava treinar os africanos para servir como homens da administração, capazes de serem manipulados para fornecer uma mão-de-obra para as firmas capitalistas privadas europeias, portanto, ela não visava transmitir aos jovens o

---

[3] Machel, ou melhor, Samora Moises Machel, foi o primeiro presidente de Moçambique independente, de 25 de junho de 1975 a 19 de outubro de 1986 (data de sua morte). Dirigiu a luta de libertação de Moçambique pelo partido Frente de Libertação de Moçambique (FRELIMO), de 1970 até a data da independência, ao suceder a Eduardo Chivambo Mondlane, primeiro presidente da FRELIMO, morto a 3 de fevereiro de 1969.

orgulho e a confiança de membros da sociedade africana, mas sim a implantar um sentimento de submissão face ao europeu e ao capitalista”.

Esta política educacional, juntamente com outras políticas Coloniais segregacionistas, foram sempre alvo de contestação e resistência pelos Moçambicanos, que se viam oprimidos e/ou marginalizados, ao lhes serem retirados o direito de uma cidadania livre em seu próprio território e uma educação livre de preconceitos socioculturais. Com a concessão da independência às colônias por vários países, após a segunda guerra mundial e, a renegação de Portugal em tornar suas colônias independentes, constando-as como territórios ultramarinos da metrópole, vários grupos políticos anticoloniais nacionais, a destacar, a União Democrática Nacional de Moçambique (UDENAMO), a Mozambique African National Union (MANU), a União Nacional Africana de Moçambique Independente (UNAMI), se organizarem para resistir contra o colonialismo, e que mais tarde vieram a se fundir em uma única frente de resistência, a Frente de libertação de Moçambique (FRELIMO), fundada em 1962.

Com a fundação da FRELIMO, em 1964 inicia a resistência ao colonialismo, por meio da luta armada, que resultou nas primeiras zonas libertadas ao norte do país. Nestas zonas, além de terem sido abolidos diversos sistemas de exploração humana, eliminação de impostos pesados cobrados aos nativos, destituição da administração repressiva e outras formas de opressão colonial, foram instaurados centros de educação que objectivavam garantir a alfabetização das populações (MONDLANE, 1977). A alfabetização nas zonas libertadas não visava somente ensinar as populações a ler, escrever e garantir uma base de formação técnica em algumas áreas para assegurar a gestão destas zonas, mas também, a consciencialização política das populações para o entendimento das causas da luta armada e, com isso, obter mais apoio da base popular para resistir-se ao colonialismo.

Portanto, o período que marca o início da luta armada de libertação nacional em 1964 e a instauração nas zonas libertadas, a FRELIMO elabora os primeiros documentos criticando os conteúdos na escola colonial, propondo ações educativas nessas regiões com os seguintes objectivos : criar uma escola de formação política; apressar a formação de quadros técnicos; promover uma campanha de alfabetização de adultos; aumentar o número de escolas primárias; preparar voluntários para o desencadeamento de campanha de alfabetização. (MUHACHA, 2021).

Importante referir que, segundo Muhacha (2021), como mais uma das ações educativas, após a intensificação da luta armada, realizou-se um seminário pedagógico que visava preparar os estudantes para a campanha de alfabetização nas zonas libertadas que contam com a participação de Paulo Freire[4] que naquela ocasião divulgou suas concepções. O seminário reafirmou o papel relevante da educação na construção da unidade nacional, pois do ponto de vista político a educação devia levar e desenvolver a consciência nacional. Sobre sua participação neste seminário de formação, Freire descreve:

> Aquele encontro em Lusaka, tal qual o que tive em Dar-es-Salam, com a liderança da FRELIMO que me levou ao Campus de Formação de quadros, um pouco afastado de Dar, num lindo sítio cedido pelo governo da Tanzânia, me marcou fortemente. Afinal, eu era convidado a dialogar com militantes experimentados na luta, cujo tempo não podia ser gasto com devaneios ou com arrancadas intelectualistas. O que eles queriam era entregar-se comigo à reflexão crítica, teórica, sobre sua prática, sobre sua luta, enquanto um "facto cultural e um fator de cultura" (Cabral, 1976). Sua confiança em mim, como um intelectual progressista, me era realmente importante. Eles não me criticavam porque, citando Marx, citava também um camponês. Nem tampouco me consideravam um educador burguês porque eu defendia a importância do papel da consciência na história. (FREIRE, 1992, p. 75).

Portanto, a postura educacional instituída nas zonas libertadas, como é descrita por Muchanga e Mondlane, caracterizou a “descolonização das práticas educacionais discriminatórias”, implantadas pelo colono nas regiões aonde tinham o domínio territorial e Paulo Freire, participando nesse processo consciencializando os estudantes moçambicanos a desenvolver a coincidência de unidade nacional, tomado assim a educação como instrumento para emancipação individual e social do homem. Assim, de acordo com Neto N. (2016, p.36), a descolonização das práticas educacionais segregacionistas colônias significava para FRELIMO, “assimilar em bases equitativas as diversas formas de pensar e produzir conhecimentos, de tal maneira que, entre estas epistemologias não seja estabelecida nenhuma forma de hierarquização entre as formações escolares e acadêmicas com as experiências de viver, sentir e pensar localizadas para além do mundo colonial”. Portanto, a educação nas zonas libertadas representou o símbolo de resistência à educação colonial e

[4] Declaração de Paulo Freire sobre sua estada em Tanzânia e o encontro com os líderes da FRELIMO: “Depois de Zâmbia, fui para a Tanzânia. Testemunhei ali muitas das mesmas coisas que já vira em Zâmbia. Na Universidade da Tanzânia, fui abordado por um tanzaniano profundamente envolvido com a FRELIMO. Perguntou-me se aceitaria um convite para encontrar-me com representantes da FRELIMO em Dar-es-Salam. Aceitei. Entre os presentes, encontrava-se a viúva de Mondlane, o líder assassinado da FRELIMO. O então Ministro da Educação de Moçambique também estava lá”. (FREIRE; MACEDO, 2011, p. 86).

revolução para massificação de uma educação igualitária e para todos, sem distinção da raça e religião.

Neste caminho de “descolonização educacional”, a postura educacional implantada nas zonas libertadas é também implementada em todo território Moçambicano, no período de transição entre o governo colonial e a FRELIMO, que antecede a assinatura dos acordos de paz em Lusaka, em 1974, que viria a desembocar, mas tarde, a 25 de junho de 1975, na proclamação da independência total e completa de Moçambique. Após a independência, a educação em Moçambique é marcada por muitas reformas, espelhadas nas políticas educacionais implementadas nas zonas libertadas. Estas reformas visavam, de acordo com Martins e Chirindza (2018, p.37), “adequar a formação dos moçambicanos aos contextos sócio-políticos, econômicos e culturais, marcados pelo alcance da Independência”. Entre elas destacam-se a lei 4/83 que aprova a Lei do SNE e define os princípios fundamentais na sua aplicação; a lei 6/92 que reajusta o quadro geral do SNE e adequa as disposições nele contidas; o Plano Curricular do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral que contempla diversas inovações curriculares, entre elas o currículo local e; a Lei 18/2018 que estabelece o regime jurídico do SNE na República de Moçambique.

Nestes documentos oficiais sobre o SNE, especificamente as leis 4/83 e 6/92, são registrados elementos que contrapõem o sistema Educacional que havia sido instalado no período colonial e revolucionam a Educação em Moçambique, propondo ajustes importantes, entre eles a garantia de uma educação igualitária e para todos e a valorização das práticas culturais no espaço escolar. No PCEB e PCESG, a posição da integração da cultura no ensino já é mais clara, quando entre as inovações que contemplam o plano, consta a integração do currículo local, de que falaremos na subsecção 1.1.2.

Entretanto, a lei 18/2018 não apresenta grandes alterações relativamente a integração da cultura no ensino, uma vez que, nela se propõe principalmente à restruturação dos subsistemas de Educação, entre eles O “subsistema de Educação Pré-escolar, Geral, de Adultos, Profissional, Educação e Formação de Professores e Ensino Superior” (MOÇAMBIQUE, 2018, p. 21).

1.1.2. O currículo local no SNE e o enquadramento teórico

O sistema Nacional de Educação (SNE), nasce do aprimoramento e consolidação da prática educacional instituída nos campos de treinamento político-militar da FRELIMO e nas zonas libertadas como é descrito na lei 4/83 de 23 de março de 1983, ao sinalizar-se que “o SNE se fundamenta nas experiências da educação desde a luta armada até a fase da construção do socialismo, nos princípios universais do Marxismo-Leninismo e no patrimônio comum da Humanidade (MOÇAMBIQUE, 1983, p.13). O modelo e as políticas do SNE foram construídos como uma parte para consolidação da luta armada e de libertação nacional, em particular, para libertação educacional, ao se propor ser um currículo que pudesse desconstruir as políticas educacionais coloniais, cujo “ensino era reservado quase exclusivamente aos filhos de colonos e, particularmente o ensino superior, que se destinava aos filhos dos colonos ricos” (MACHEL, 1970, p.10).

O SNE seria então a expressão de ruptura ao modelo e política educacional segregacionista, elitista, racista, etc., que vigorava no país, no período colonial. Portanto, a resistência às políticas colônias em Moçambique não se limitava apenas à libertação do homem e da terra, mas também, uma luta constante de resistência e reinvenção para uma educação igualitária e para todos, que se alicerçasse na realidade Moçambicana, como se nota no discurso de Machel, ao expressar que, “a educação deveria dar-nos uma personalidade moçambicana que, sem subserviência alguma, assumindo a nossa realidade, saiba, em contato com o mundo exterior, assimilar criticamente, as ideias e experiências de outros povos, transmitindo-lhes também o fruto da nossa reflexão e prática” (MACHEL, 1970, p.12).

Assim, o SNE é introduzido e regido pelos seguintes princípios:

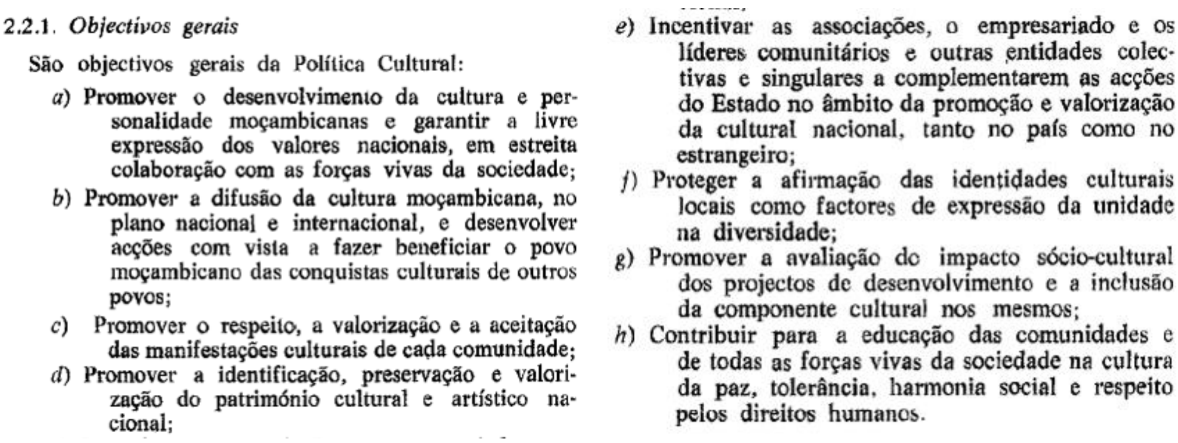
> A educação é um direito e um dever de todo o cidadão, o que se traduz na igualdade de oportunidades de acesso a todos os níveis de ensino e na educação permanente e sistemática de todo povo. É também o instrumento principal da criação do homem novo, homem liberto de toda a carga ideológica e política da formação colonial e dos valores negativos da formação tradicional capaz de assimilar e utilizar a ciência e a técnica ao serviço da revolução. (MOÇAMBIQUE, 1983, p. 14).

Deste modo, o SNE passa a “garantir o acesso à educação dos operários, dos camponeses e dos seus filhos a todos os níveis de ensino, e permitir a apropriação da ciência, da técnica e da cultura pelas classes trabalhadoras” (MOÇAMBIQUE, 1983, p. 13). A educação é então consignada como direito para todos, a cultura local deixa de ser marginalizada, passando a ser promovida e difundida no espaço nacional e internacional, em particular, contemplada no ambiente escolar, como é descrito no artigo 15 da constituição da república de 1975, e reforçado no artigo 53 da constituição da república de 1990, ao estabelecer que:

> A república Popular de Moçambique realiza um combate energético contra o analfabetismo e obscurantismo, e promove o desenvolvimento da cultura e personalidade nacionais, garante a livre expressão das tradições e valores da sociedade moçambicana. O estado age para promover e difundir internacionalmente o conhecimento da cultura moçambicana e desenvolve acções para fazer beneficiar o povo moçambicano das conquistas culturais revolucionárias dos outros povos (MOÇAMBIQUE, 1975, p. 2, 1990, p. 5).

Como consequência dessa base legal, que estabelece a promoção e difusão (em partes)[5] da cultura moçambicana, é promulgada a resolução nº 12/97, que aprova a Política Cultural e Estratégia de sua Implementação, que reforça, em seus objetivos gerais, a promoção, difusão, proteção, etc. da cultura moçambicana no plano nacional e internacional, como se pode ver na Figura 1. Em seu objetivo específico, alínea c, a resolução 12/97 já é mais clara em relação a promoção e integração da cultura no ensino, ao estabelecer como objetivo "a promoção a integração dos valores socioculturais nos currículos do ensino" (MOÇAMBIQUE, 1997, p. 6).

Figura 1: Objetivos gerias da política cultural


2.2.1. *Objectivos gerais*

São objectivos gerais da Política Cultural:

a) **Promover o desenvolvimento da cultura e personalidade moçambicanas e garantir a livre expressão dos valores nacionais, em estreita colaboração com as forças vivas da sociedade;**

b) **Promover a difusão da cultura moçambicana, no plano nacional e internacional, e desenvolver acções com vista a fazer beneficiar o povo moçambicano das conquistas culturais de outros povos;**

c) **Promover o respeito, a valorização e a aceitação das manifestações culturais de cada comunidade;**

d) **Promover a identificação, preservação e valorização do património cultural e artístico nacional;**

e) **Incentivar as associações, o empresariado e os líderes comunitários e outras entidades colectivas e singulares a complementarem as acções do Estado no âmbito da promoção e valorização da cultural nacional, tanto no país como no estrangeiro;**

f) **Proteger a afirmação das identidades culturais locais como factores de expressão da unidade na diversidade;**

g) **Promover a avaliação do impacto sócio-cultural dos projectos de desenvolvimento e a inclusão da componente cultural nos mesmos;**

h) **Contribuir para a educação das comunidades e de todas as forças vivas da sociedade na cultura da paz, tolerância, harmonia social e respeito pelos direitos humanos.**

Fonte: Moçambique (1997, p. 6)

[5] Aqui, defendemos que a promoção e difusão não foi na totalidade, uma vez que, alguns valores que faziam parte da cultura Moçambicana, como o caso da prática do obscurantismo (como a feitiçaria, prática de medicina tradicional, etc.), foram colocadas em causa mesmo depois do país se tornar independente. Entende-se que, ainda que se tenha conquistado a independência, a educação transita de uma dominação ocidental para uma dominação marxista-leninista (também de origem branca), regime político-ideológico a que o país estava seguindo e que deveria também estar interferindo na construção de políticas internas. Este regime político-ideológico influenciava de certa forma a renegando de certos hábitos e costumes aos povos originários.

Embora, os primeiros documentos oficiais pós–independência apontassem e abrissem espaço para promoção e difusão da cultura, a nível nacional e internacional, nestes documentos, sobretudo, as leis que definem o SNE, não são apontadas políticas e práticas pedagógicas-didáticas concretas para integração da cultura ao ensino, como se pode notar na Figura 2, Figura 3 e Figura 2, onde são apresentados os princípios pedagógicos do SNE, estabelecidos na lei 4/83 que define o SNE, na lei 6/92 que propõe o reajuste da lei 4/83, na lei 18/2018 que estabelece o regime jurídico do SNE na República de Moçambique, bem como na constituição da república de 1975 e 1990.

Figura 2: Princípios pedagógicos do SNE estabelecidos na lei 4/83

ARTIGO 3

Princípios pedagógicos

O processo educativo orienta-se pelos seguintes princípios pedagógicos:

a) Desenvolvimento das capacidades e da personalidade de uma forma harmoniosa, equilibrada e constante, conferindo uma formação integral nas áreas político-ideológica e moral, da comunicação, das ciências matemáticas, das ciências naturais e sociais, politécnica e laboral, estético-cultural e da educação física;

b) Unidade dialéctica entre a educação científica e a educação ideológica, devendo os programas e conteúdos do ensino reflectir a orientação política e ideológica do Partido Frelimo;

c) Desenvolvimento de iniciativa criadora, da capacidade de estudo individual e da assimilação crítica dos conhecimentos;

d) Ligação entre a teoria e a prática, que se traduz no conteúdo e método do ensino das várias disciplinas, no carácter politécnico da educação conferida e na ligação entre a escola e a comunidade;

e) Ligação do estudo ao trabalho produtivo socialmente útil como forma de identificação com as classes trabalhadoras, de aplicação dos conhecimentos científicos à produção e de participação no esforço de desenvolvimento económico e social do País;

f) Ligação estreita entre a escola e a comunidade, em que a escola actua como centro de dinamização do desenvolvimento sócio-económico e cultural da comunidade e recebe desta a orientação necessária para a realização de um ensino e formação que respondam as exigências da edificação socialista no país.

Fonte: Moçambique (1983, p. 14)

Figura 3: Princípios pedagógicos do SNE estabelecidos na lei 6/92

ARTIGO 2

Princípios pedagógicos

O processo educativo orienta-se pelos seguintes princípios pedagógicos:

a) desenvolvimento das capacidades e da personalidade de uma forma harmoniosa, equilibrada e constante, que confira uma formação integral;

b) desenvolvimento da iniciativa criadora, da capacidade de estudo individual e de assimilação crítica dos conhecimentos;

c) ligação entre a teoria e a prática, que se traduz no conteúdo e método do ensino das várias disciplinas, no carácter politécnico do ensino conferido e na ligação entre a escola e a comunidade;

d) ligação do estudo ao trabalho produtivo socialmente útil como forma de aplicação dos conhecimentos científicos à produção e de participação no esforço de desenvolvimento económico e social do país;

e) ligação estreita entre a escola e a comunidade, em que a escola participa activamente na dinamização do desenvolvimento sócio-económico e cultural da comunidade e recebe desta a orientação necessária para a realização de um ensino e formação que respondam as exigências do desenvolvimento do país.

Fonte: Moçambique (1992, p. 8)

Figura 4: Princípios pedagógicos do SNE estabelecidos na lei 18/2018

ARTIGO 4

(Princípios pedagógicos)

O processo educativo orienta-se pelos seguintes princípios pedagógicos:

a) desenvolvimento das capacidades e da personalidade de forma harmoniosa, equilibrada e constante, que confira uma formação integral e de qualidade;

b) desenvolvimento da iniciativa criadora da capacidade de estudo individual e de assimilação crítica dos conhecimentos;

c) liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber;

d) ligação do estudo ao trabalho produtivo e socialmente útil, como forma de aplicação dos conhecimentos científicos à produção e de participação no esforço para o desenvolvimento económico e social do País;

e) dotação do indivíduo de conhecimentos que lhe permitam aprender a ser, aprender a viver juntos e com os outros;

f) inclusão, equidade e igualdade de oportunidades em todos os subsistemas de ensino e na aprendizagem de alunos com necessidades educativas especiais;

g) ligação entre a escola e a comunidade, em que a escola participa activamente na dinamização do desenvolvimento socio-económico e cultural da comunidade e recebe desta a orientação necessária para a realização de ensino e formação que respondam às exigências do desenvolvimento do País;

h) desenvolvimento de actividades e medidas de apoio e complementos educativos, visando contribuir para a igualdade de oportunidades de acesso à educação e ao sucesso escolar.

Fonte: Moçambique (2018, p. 20)

O país, ainda em construção e se constituindo em um regime democrata-socialista, no período após a independência nacional, as escolas estavam sob responsabilidades do estado, não havendo ainda escolas particulares, o que já é liberado com a entrada em vigor da constituição da república de 1990, como se pode notar no artigo 52, número 3, e mais especificamente na constituição da república de 2004, artigo 113, número 4, ao se sinalizar que “o ensino ministrado pelas coletividades e outras entidades (privadas) é exercido nos termos da lei e sujeito ao controlo do estado” (MOÇAMBIQUE, 1990, p. 5; 2004, p. 32). Ainda nesse período, que vai da proclamação da independência à promulgação da lei 4/83 que define o SNE e da constituição da república de 1990, é verificado um grande movimento de formação de quadros moçambicanos em países como Cuba, Alemanha, Rússia, etc., países de ideologia marxista, para suprir a falta de quadros que o país vivia no momento, mas também, a vinda de um grande número de estrangeiros europeus e americanos a Moçambique, prestando apoio a vários setores de interesse para a edificação e desenvolvimento do país.

Como nos referimos anteriormente, embora houvesse a indicação em documentos oficiais para promoção e difusão da cultura, não havia até ao momento uma política pedagógica concreta para integração da cultura ao ensino. Isso, associado ao facto de que maior parte do pessoal do quadro do estado (professores e outros funcionários) tenham sido formados sob políticas educacionais coloniais, outros, no período pós-independência, tenham sido formandos na Europa e nas Américas, e ainda, com a vinda de estrangeiros (europeus, americanos, ...) para apoio a vários sectores no país, em particular, o ensino superior, é suposto que, em escolas moçambicanas, o caso de professores, promovessem a difusão do conhecimento científico (disciplinar), a partir de uma visão mergulhada nas práticas de produção cientifica do pensamento moderno eurocêntrico, sem no entanto, levar em consideração a integração de práticas culturais locais, ou ainda, sem que o acesso ao saber tivesse algum significado direto para a vida do aluno. Assim, embora a lei 4/83 e constituição da república de 1990 abrisse espaço para integração da cultura no ensino, a efetivação dessa prática era quase impraticável, pelo modelo de formação e visão colonial a que maior parte dos quadros que respondiam a educação em Moçambique tinham sido submetidos.

Podemos então dizer, que neste aspeto, o ensino em Moçambique, embora estivesse liberto das políticas e práticas de ensino segregacionista colonial, ainda reproduzia a colonialidade, isto é, embora não houvesse aparentemente um ensino que descriminasse os indivíduos pela raça, a prática corrente da difusão e acesso do/ao conhecimento disciplinar ainda estava imbricada em um modelo do pensamento moderno colonial e eurocêntrico de produção de conhecimento científico, que se supõe dominante.

Portanto, após a independência, ainda que se tenha introduzido políticas educacionais que visassem resistir aos resíduos coloniais “de reprodução da exploração e da opressão e a continuidade das estruturas colonial-capitalistas de dominação” (MOÇAMBIQUE, 1983, P. 13), o sistema educacional em Moçambique continuaria fragilizado, primeiramente, como sinaliza Gerdes, devido a “importação de currículos, carregado em grande medida de uma visão política educacional eurocêntrica", segundo, pelo sector de educação, em grande medida na educação superior, tenha estado a ser assegurada por estrangeiros europeus, como sinaliza Admin (2014), ao afirmar que “depois da independência de Moçambique, em 1975, a mudança entusiástica do regime para o comunismo[6] atraiu cooperantes de alguns países ocidentais (professores, médicos, etc.)”.

No quadro das inovações e reajustes curriculares, surge a lei 6/92 de 6 de maio de 1992, que visava o “reajuste do quadro geral do sistema educativo e adequar as disposições contidas na Lei n.º 4/83, de 23 de março, às condições sociais e económicas do país, tanto do ponto de vista pedagógico como organizativo”

[6] Oficialmente o país nunca assumiu o comunismo como regime político.

(MOÇAMBIQUE, 1992, p. 8). Como consequência desse reajuste e compreendendo-se que o currículo baseado na lei 6/92 não indicava propostas concretas de integração da cultura ao ensino, em 2004 é introduzido o Plano Curricular do Ensino Básico (PCEB) e o Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG), em decorrência de ter sido feito um estudo para avaliar a implementação do SNE, onde constatou-se que "o currículo anterior do Ensino Primário, não abria, de uma forma explícita, a possibilidade de integração do currículo local, o que fazia com que os conteúdos temáticos fossem abordados de modo uniforme e homogéneo em todo o País" INDE/MINED (2008, p. 17).

Assim, entre as reformas e inovações, é contemplado a partir do PCEB e PCESG, "Conteúdos de Interesse Local" no ensino, visando essencialmente "[...] considerar aspectos de interesse local de maneira a responder às necessidades das comunidades, sendo as estratégias de abordagem desses conteúdos feitas através da valorização de experiências locais no PEA, articulando os conteúdos propostos nos programas de ensino com a realidade local [...]" (INDE/MINED, 2007, p. 31).

Paralelamente e para se efectivar os objectivos e as inovações constantes no PCEB e do PCESG, são construídos os "programas de ensino" para as disciplinas específicas, onde se tenta especificar as estratégias concretas para o ensino integrando o currículo local. Nestes programas, é colocado o desafio das escolas em "preparar os jovens (alunos) de modo a torná-los cidadãos activos e responsáveis na família, no meio em que vivem (cidade, aldeia, bairro, comunidade) ou no trabalho, o que passaria necessariamente por [...] oferecer uma formação em que o ensino e as matérias leccionadas tivessem significado para a vida do jovem (aluno) e pudessem ser aplicados a situações reais" (INDE/MINED, 2007, p. 6). Entretanto, a semelhança das leis que definem o SNE, aqui não é igualmente apontada ações concretas que pudessem conduzir o professor a integrar conteúdos de interesse local ou de saberes que vivem em práticas socioculturais locais ao diverso conteúdo das disciplinas, o que em tese, possibilita que, os conteúdos sejam ainda hoje lecionados de forma linear e não problematizada a partir das situações vivenciadas pelos alunos no seu cotidiano.

Portanto, pensa-se que com a integração do currículo local, abre-se dentro do currículo Moçambicano, possibilidades inúmeras que propiciem a condução de um ensino que valorize as práticas locais, podendo possibilitar acessar o conhecimento de disciplinas diversas através dos saberes locais. Assim, práticas culturais que sobreviveram a colonização podem ser deslocadas ao ambiente escolar e integrados ao ensino de conteúdos diversos, em particular, de conteúdos da disciplina de Matemática, permitindo “conferir dignidade ontológica aos povos originários e dignidade epistemológica aos seus saberes que contribuirá sobremaneira para a construção de uma nova geopolítica do conhecimento” (ESTERMANN, TAVARES, GOMES, 2017, p. 17).

Entretanto, embora haja abertura para consideração de conteúdos de interesse local nas diversas disciplinas, pensa-se que ainda hoje há resistência para sua implementação, sobretudo no ensino da matemática. Esta rigidez coloca o estado atual do Ensino da Matemática em Moçambique, marcado em grande medida, pela “noção linear e universal de progresso, ao apresentar as epistemologias dominantes, imbuídas em um modelo de construção do conhecimento alimentado no pensamento moderno eurocêntrico, como forma única e linear de produção do conhecimento matemático” (GERALDO, 2000a).

Considerando que “um dos grandes obstáculos da aprendizagem da Matemática (em Moçambique) é a hierarquização dos conteúdos, bem como a sua abordagem de forma linear e rígida sem, contudo, os alunos terem a oportunidade de explorá-los na sua vida quotidiana” (INDE/MINED, 2007, p. 8), apresentamos a presente pesquisa, como um estudo que possa possibilitar a implementação do “currículo local”, na disciplina de Matemática, abrindo a partir de elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) no diálogo com a Decolonialidade, caminhos metodológicos que possam possibilitar “refletir sobre a dicotomia entre ensino e aprendizagem, fomentando um novo olhar sobre as análises normalmente fragmentadas da realidade escolar” (FARIAS, CARVALHO, SOUZA, 2018).

Portanto, o nosso estudo embasa-se na TAD enquanto uma teoria da Didáctica da Matemática que se debruça sobre análise da actividade matemática, como parte das actividades humanas, com um olhar epistemológico-institucional sobre o conteúdo de aprendizagem. Com base na TAD, tenciona-se investigar e analisar o sistema de organização dos saberes que se podem observar em práticas culturais de matriz africana, para posteriormente construir e aplicar situações de ensino que propiciem a aprendizagem de conteúdos matemáticos a partir desses saberes, que estão ali, presentes no dia-dia dos alunos, mas que não são levados em consideração em ambiente de ensino.

Neste sentido, foi identificado o jogo Ntxuva como o contexto sociocultural local, a partir do qual se constroem tarefas que visam explorar a sua dimensão histórica e epistemológica bem como as potencialidades no ensino da matemática (ver secção 8).

Considerando que com a TAD, qualquer estudo inicia pela análise das condições de vida do conteúdo, para analisar como este conteúdo está instaurado em seu ambiente conceitual, buscamos a TAD no diálogo com o pensamento decolonial, primeiramente para problematizar as formas de manutenção da colonialidade no processo de difusão e acesso ao saber da matemática escolar em Moçambique e, a partir dos traços apontados, levantar caminhos que nos levem a investigação e análise das condições e restrições para integração dos saberes locais, aqueles que não se fecham dentro da hegemonia do pensamento moderno colonial, ao acesso de saberes da Matemática escolar.

Supomos que com essa articulação, possamos de acordo com Dutra et al., (2019, p.15), “achar caminhos que nos possibilitem levar a uma prática libertadora a fim de promover justiça social, por meio do reconhecimento e resgate dos diversos saberes não eurocêntricos, renegados pelas relações de dominação, o combate ao racismo e a busca de nossas identidades culturais “, na construção do conhecimento científico, uma posição política-epistêmica que caminhará para o princípio da “Decolonização Didáctica”.

1.2. DECOLONIALIDADE E A TAD COMO CAMINHOS PARA EMANCIPAÇÃO DE CLASSES E CULTURAS DOMINADAS

Nesta subsecção não pertentemos apresentar conceituações profundas sobre a decolonialidade e a TAD, pois, essa finalidade deixamos para a secção 2. Aqui, visamos mostrar os limites da nossa pesquisa e a importância que tem o diálogo entre a decolonialidade e a TAD em pesquisas didáticas com práticas de ensino libertadoras da mente e emancipatórias das classes e culturas dominadas.

Primeiramente iniciamos esclarecendo que, em muitos países ainda há predominância da pedagogia da visita as obras. Essa pedagogia faz com que os objetos de saber, em particular, da matemática, sejam ensinados de forma única e linear, dando-se primazia a construção do conhecimento matemático a partir de epistemologias que não produzem sentido e afeto ao aluno. Para além disso, contribuem para o bloqueio psicológico, na medida em que, não privilegiam uma prática de ensino libertadora ou problematizadora, que leve o aluno a aprender questionando-se sobre a realidade. Portanto, trata-se de uma pedagogia que não prepara os alunos para uma verdadeira democracia não baseada na delegação de poder.

Está problemática já é discutida na TAD e como parte da solução se propõe a integração no ensino da pedagogia do questionamento do mundo, uma proposta pedagógica que visa colocar o aluno no centro da construção de seu universo cognitivo, propondo que questione a forma como o saber está sendo construído. Entretanto, essa visão de questionamento do mundo na TAD tem si limitado ou centrado, muita das vezes, na análise das condições e restrições de difusão de praxeologias de objetos de saber acadêmico, que não levam em conta as classes e culturas dominadas na produção do conhecimento.

Este elemento se constitui, ao nosso ver, em uma fragilidade nos desenvolvimentos actuais da TAD e que se evidencia na expressão “questionar o mundo”, que ao ser utilizada como tal assim no singular, leva a não reconhecimento da existência ao mesmo tempo na terra de diversas sociedades humanas de igual valor. Daí a necessidade de falar de “questionar os mundos”, no plural como um marcador que contempla múltiplas visões do mundo nas pesquisas que tem a TAD como principal arcabouço teórico.

Portanto, esse fenômeno que é de dominação cultural, é consequência da dominação econômica, social e política, que invisibiliza e marginaliza a cultura, as praxeologias das classes e culturas dominadas e que influencia sobremaneira no sistema educacional.

Em países outrora colonizados, esse fenômeno é muita das vezes vinculado a colonialidade, um conceito que se deve diferenciar com profundidade da colonização e que diz respeito aos efeitos ou formas de manutenção sofisticada e actualizada do colonialismo. A decolonialidade (na educação), neste caso, apresenta-se como um caminho para questionar a naturalização desses padrões de dominação cultural em vários segmentos da sociedade. Deste modo, falar da decolonialidade na educação é tentar trazer um debate que visa discutir, desconstruir e remediar essas assimetrias de dominação no processo de produção do conhecimento acadêmico.

De qualquer jeito, esse fenômeno também existe nos países ocidentais em relação à cultura e às praxeologias não acadêmicas desenvolvidas pelas classes trabalhadoras, mas também às praxeologias técnicas desenvolvidas em todo o mundo do trabalho. Digamos que, esse fenômeno é em partes generalizado e que não se restringe apenas aos países colonizados.

Daí a importância de falar da decolonialidade didática no ensino, em particular, no ensino da matemática, como uma forma de despertar atenção aos fazedores da educação e coloca-los a refletir sobre suas práticas de ensino, que na maioria das vezes, estão dentro da pedagogia da visita as obras.

Em Moçambique, os dois aspectos (a predominância da pedagogia as obras e o fenômeno de dominação cultural) se unem, porque, para além de parte do povo (uma minoria) ser descendente dos antigos colonizados e uma maioria nativa ter se aculturado aos padrões culturais europeu, há ainda uma dependência econômica externa muito forte que influencia e determina, em partes, como o país deve seguir, se alinhando as visões do mundo dos países dominantes.

Por exemplo, após a proclamação da independência, por falta de quadros qualificados, o país teve que pedir apoio aos países aliados europeus em quadros qualificados para dar continuidade as diversas atividades no país. Nesse mesmo período, a educação teve que herdar vários aspectos e formas de organização do sistema educacional português, além disso, teve que herdar o português como língua de unidade nacional e, diferentemente do Brasil, por causa das condições econômicas que não permitiram recriar seus próprios matérias acadêmicos, também teve que herdar o sistema ortográfico português.

Mais recentemente, pelas condições políticas e econômicas, o país foi colocado na lista cinzenta do grupo de ação financeira internacional pelo Guia Internacional de Risco. Todavia, para sair dessa lista, foi lhes colocado um conjunto de condições as quais o país deve cumprir para que seja retirado dessa lista de modo que possa se beneficiar de créditos internacionais, etc.

Estes e outros elementos, revelam uma prática de dominação e que os países dominados têm de seguir de forma linear as orientações dos países dominantes para que se enquadrem dentro daquilo que os dominantes consideram melhor para o mundo. O sistema educacional não é exceção dessas práticas de dominação.

De forma geral, o fenômeno da predominância da pedagogia da visita as obras e o fenômeno de dominação das culturas se configuram como uma problemática geral e que, pelos argumentos apontados anteriormente, tornam a abordagem decolonial generalizada, pois, estes fenômenos também se aplicam aos países ocidentais, embora não na mesma intensidade que os países subdesenvolvidos. Portanto, não se trata apenas de descolonização, mas de forma mais geral, da emancipação das classes e culturas dominadas através da entrada nos objectos de estudo oferecidos aos alunos do país em consideração de elementos da cultura ou culturas dominadas e, portanto, ignoradas pelos currículos.

Geralmente é sobre isso que se tenta introduzir nos currículos de países subdesenvolvidos, ou aqueles que outrora foram colonizados, como por exemplo, Moçambique, Brasil, Peru, entre outros países, e que é defendido por vários pesquisadores como Paulus Gerdes (Moçambique), Ubiratan D'Ambrósio (Brasil), Aníbal Quijano (Peru), Catherine Walsh (EUA), Boaventura de Souza Santos (Portugal), Walter Mignolo (Argentina), entre outros. Entretanto, a introdução dessa prática nesses currículos pode estar a ter dificuldades devido ao facto de que a classe no poder mostra pouco entusiasmo sobre isso.

Por exemplo, no brasil é introduzido em 2003 a Lei 10.639/03, que é aprimorada em 2008 pela lei 11.645, cujo objetivo fundamental é tornar obrigatório o ensino de história e cultura africana, afro-brasileira e indígena no sistema de educação Brasileira.

Em Moçambique, a partir da resolução nº 12/97 em seu objetivo específico c) também é declarada a intenção da promoção a integração dos valores socioculturais nos currículos do ensino. Nos próprios currículos do SNE em Moçambique essa pretensão é introduzida em 2004 como uma das inovações que é designada por currículo local no ensino. A ideia é de que o currículo local seja contemplado em todas as disciplinas, visando compartilhar a cultura entre todos os alunos, independentemente do seu status social.

É aproveitando isso que buscamos neste estudo, primeiramente questionar como esses padrões de poder estão instaurados e naturalizados no currículo moçambicano, um questionamento que advém das inquietações despertadas pela perspectiva de pensamento decolonial no ensino. Depois, propomos alternativas de análise e de integração das práticas socioculturais dominadas no ensino, no caso especifico, da integração do jogo Ntxuva no ensino da matemática.

Como a decolonialidade não detém um método específico para questionar e propor alternativas de remediação da colonialidade no ensino, trazemos a TAD como uma potencial teoria, que pelas suas abordagens da ecologia do didático, da relação ao objeto e da abordagem praxeológica, enquanto propostas metodológicas, possam auxiliar a decolonialidade a responder as questões: como é que a colonialidade se manifestou ou manifesta no currículo moçambicano (no passado, no presente)? Como é que a mesma esta instaurada e naturalizada e porquê? Que possibilidades se podem levantar para que praxeologias dominadas possam participar do processo de construção do conhecimento matemático escolar, ou por outra, como o aluno pode construir seu universo cognitivo em relação aos conhecimentos acadêmicos, questionando-os a partir da sua realidade, das suas práticas socioculturais, de modo que façam sentido para eles?

Assim, ao responder estes questionamentos, pensamos que a tese se insere dentro do questionamento “dos mundos”, na medida em que, propomos uma proposta de trabalho em que os alunos possam aprendem por meio de suas práticas socioculturais a buscar respostas para questões que fazem sentido para eles. Por esta razão, o nosso estudo assenta-se em duas principais hipóteses, que se resumem no seguinte:

- Criar o meio para o compartilhamento da cultura e ou das práticas locais entre os alunos: nesta hipótese, contamos com situações da cultura originária, que terão a vantagem de unir a pedagogia do questionamento do mundo e o projeto decolonial – emancipatório, pela visibilização de praxeologias originárias no sistema educacional. Nesta hipótese, tomamos o jogo Ntxuva como o contexto sociocultural e dedicamos um tempinho da nossa experimentação para compartilhar aos alunos o jogo, do contexto histórico-social a sua prática.
- Integração da cultura no ensino da matemática: nesta hipótese, tomamos as praxeologias originarias na prática com os contextos socioculturais para o ensino de elementos de conhecimento da matemática acadêmica. Nesta hipótese, construímos Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) que possibilitem a circulação de praxeologias originarias no sistema de jogo Ntxuva ao conhecimento matemático acadêmico. Esta parte é estritamente dependente da primeira.

PARTE 2: CONSTRUTO TEÓRICO QUE ALICERÇA O DESENVOLVIMENTO DA TESE

Nessa parte, apresentamos e desenvolvemos o quadro teórico que alicerça o desenvolvimento da tese, que tem a Teoria Antropológica do didático (TAD) como principal aporte teórico. Olhando a natureza da nossa pesquisa e as finalidades que são destacadas na parte 3, nos alicerçamos também na perspetiva do pensamento decolonial, para discutir e/ou propor, a partir dos elementos teóricos da TAD, sobretudo, da ecologia do didático, da relação ao objeto e do modelo praxeológico (estendido), possibilidades de engendrar-se para o que vamos designar "decolonização didática".

Portanto, apresentam-se primeiramente os elementos teóricos essenciais, depois, discute-se o dialogo teórico entre a TAD e decolonialidade para construção do significado que damos a "decolonização didática" na tese.

2. CONSTRUINDO SIGNIFICADO PARA "*(DE)COLONIALIDADE DIDÁTICA*" À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A didática é um campo de estudos que se debruça na análise dos fenômenos inerentes ao Processo de Ensino e Aprendizagem (PEA), com principal foco para os conteúdos de ensino. Ela se subsidia de abordagens teóricas específicas para análise destes fenômenos, na estreita relação entre o professor, aluno e o conteúdo de aprendizagem, levando ainda em consideração o ambiente conceitual deste conteúdo e o lugar pelo qual se dão as relações de ensino e aprendizagem.

Para cada ambiente conceitual, este conteúdo apresenta determinadas caraterísticas, que definem a estrutura de conhecimento que lhe permite viver e ser ensinado e/ou acessado pelo professor e/ou aluno, em uma classe ou um nível de escolaridade. É sobre esse saber que nos debruçamos, ao percebermos que na maior parte das vezes o seu acesso é hierarquizado e abordado de forma linear, colocando as sabedorias eurocêntricas como forma única para acessá-lo, o que não permite em certa medida, que este saber seja explorado a partir das práticas locais, aonde se dão as relações de ensino e aprendizagem.

Portanto, para analisar como e por que esses saberes são acessados de forma única e linear, sob fundamentos epistemológicos do pensamento moderno eurocêntrico-colonial e, discutir uma possibilidade que permita a valorização dos saberes socioculturais não eurocêntricos na construção do conhecimento científico escolar, apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) articulada com Pensamento decolonial, enquanto uma posição política epistêmica de denúncia e resistência às formas de manutenção da colonialidade.

Assim, nesta secção, pretendemos elucidar e discutir possibilidades em que a Didática da Matemática por meio da TAD, enquanto a teoria que alimenta a tese, pode subsidiar para uma discussão sobre a decolonização epistemológica de saberes no ensino da Matemática. Portanto, trata-se de apresentar uma alternativa metodológica que possa propiciar ao questionamento das formas de manutenção da colonialidade do saber no PEA da matemática e, a partir desse questionamento, se mobilizar caminhos que permitam o ensino e acesso ao conhecimento (matemático escolar) a partir de sabedorias outras, que não se fecham apenas dentro das formas únicas e lineares de produção do conhecimento científico, embutidos no pensamento moderno colonial.

Para isso, primeiramente caracterizamos a Didática (da Matemática) dentro do arcabouço teórico da TAD, de modo que possamos apresentar um significado sobre a “(De)colonialidade Didática” dentro da nossa perspetiva teórica. A essa caracterização, soma-se a apresentação dos principais elementos de análise na TAD, que contribuíram para uma possibilidade metodológica que nos permita o diálogo com “o pensamento decolonial”, caminhar para uma abordagem da decolonialidade epistemológica no ensino da Matemática.

2.1. DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: NOÇÕES QUE NORTEIAM O TRABALHO

“O PEA sendo um sistema de trocas de informações entre professores e alunos” (SILVA, DELGADO, 2018, p.40), se configura em uma complexidade que perpassa pelas políticas educacionais as questões mais específicas que permeiam a relação professor, aluno e o conteúdo de aprendizagem. Esta relação, é quase geralmente dada sob determinadas condições e restrições de entidades específicas, que definem e regulam o próprio sistema de ensino, instaurando políticas e determinando os conteúdos que podem viver e como podem ser mobilizados ao aluno em diferentes estágios da sua aprendizagem.

Nesse processo de interação, caracterizado pela troca permanente de informações entre o aluno e professor, fatores diversos podem ocorrer e influenciar o PEA. Estes fatores, podem ser determinantes para que o aluno constitua seu corpo de conhecimento em relação a determinado conteúdo, por esta razão, faz se necessário analisá-los de maneiras que, primeiramente se compreenda a sua razão de ser, segundo que se crie condições gerais ou específicas que permitam o aluno aprender ou construir sua própria aprendizagem. É então aqui, onde a didática inicia a sua atuação, enquanto uma ciência que se dedica quase exclusivamente ao estudo dos fenômenos de ensino, ou como nos situa Libâneo, ao se referir que,

> A didática investiga os fundamentos, condições e modos de realização da instrução e do ensino. A ela, cabe converter objetivos sociopolíticos e pedagógicos em objetivos de ensino, selecionar conteúdos e métodos em função desses objetivos, estabelecer os vínculos entre ensino e aprendizagem, tendo em vista o desenvolvimento das capacidades mentais dos alunos. (LIBÂNEO, 2013, p.25).

Ela visa o ensino como mediação da relação professor, aluno e os conteúdos de aprendizagem, permitindo que sejam criadas condições e possibilidades estratégicas que permeiam a “produção, registros e comunicação de conteúdos escolares” (PAIS, 2002, p.11). Portanto, ela é essencialmente “a ciência, e a arte da difusão dos conhecimentos úteis para a sociedade e para as instituições humanas” (BROUSSEAU, 2006, p.269).

Astolfi e Develay apresentam a didática sob duas abordagens, uma que opera acima da reflexão pedagógica e leva em conta os conteúdos de ensino como objeto de estudo e outra, que opera abaixo da reflexão pedagógica e tem a preocupação com o aprofundamento e a análise das situações da sala de aulas, como seguem explicando:

> A abordagem didática trabalha de um lado, acima da reflexão pedagógica, levando em conta os conteúdos do ensino como objetos de estudo. A didática permite, então, a referência dos principais conceitos que funcionam na disciplina e análise de suas relações. Ela se interessa por sua história, suas retificações respetivas, as modalidades, de sua introdução no ensino. Examina o funcionamento social desses conceitos, as práticas sociais as quais eles remetem, [...] as ideias de tramas conceituais, de níveis de formulação, de transposição didática, de práticas sociais de referência estão aqui presentes; e, de outro lado, abaixo, aprofundamento a análise das situações de sala de aulas, para melhor compreender do interior como isso funciona e o que está em jogo. O estudo das representações dos alunos, de seus modos de raciocínio e da maneira como decodificam as expetativas do ensino intervém nesse assunto. Mas também a análise do modo de intervenção do docente a fim de lhe sugerir uma gama de possibilidades e não seu fechamento numa modalidade única de intervenções. (ASTOLFI, DEVELAY, 1990, pp. 12 -13).

Conforme as diferentes idealizações sobre a didática, podemos dizer que ela se situa na especificidade de análise dos fenômenos inerentes a difusão e apropriação dos saberes escolares ao ensino e aprendizagem, uma posição que tomamos inicialmente, mas que, refinaremos com o foco na TAD. Assim, quando os fenômenos estudados se relacionam a conteúdos escolares de disciplinas específicas, a didática sai do seu estado geral e passa para o especifico, como é caso da DM, que assume características específicas, debruçando-se sobre análise dos fenômenos e fatores que influenciam o PEA da Matemática e os seus modos de realização.

Há entre as concepções, de acordo com a adoção das teorias da DM, várias nuances e foco sobre a DM, as quais apresentamos alguns pontos de vista, porém, sem tirar o nosso olhar sobre a DM imbuído na TAD. Do ponto de vista de Pais,

> A didática de matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudos é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos

> matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2002, p. 11).

A DM é então, concebida como um subconjunto da educação matemática, com um olhar sobre a formação de teorias que possibilitem a análise dos fenômenos e fatores que influenciam a difusão e apropriação do conhecimento matemático. A partir dos diversos campos teóricos que a constituem, ela investiga e analisa as influências sobre a estrutura do conhecimento matemático, sob condições de vida em um nível especifico de escolaridade, de que é seu ambiente conceitual, como é sustentado por Almouloud (2010, p.17), ao referir-se que ela "é vista como uma ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática e o estudo das condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos".

De acordo com Brousseau (2006, p. 269), "a DM estuda as condições específicas da difusão de conhecimentos e atividades matemáticas". Ela tem uma grande preocupação sobre o objeto matemático (um termo que discutiremos mais adiante na ótica da TAD, mas que no momento, adjudicaremos ao conteúdo de aprendizagem), na sua relação com outros dois componentes importantes, o professor e o aluno, uma relação didática inadiável em ambiente de sala de aulas, conhecida por Sistema Didático (SD).

Este sistema, permeia as inter-relações entre os sujeitos que ocupam determinadas posições institucionais em sala de aulas e o conteúdo de aprendizagem. Simbolicamente é representado por $S(X, Y, O) \curvearrowright M$, sendo especificamente, "O[7], o conteúdo de aprendizagem (adiante designado por objecto) que X (coletivo de alunos) é suposto esforçar-se para conhecer e que Y (coletivo de professores, assistentes de estudo, etc.) é suposto ajudar X a conhecer O, e M os mídias e meios pelos quais X utiliza para alcançar uma boa relação com O" (CHEVALLARD, 2011, 2017). Neste sistema, "Y pode ser vazio ($Y = \emptyset$), o que o torna então autodidático, porém, deve haver ao menos um $x \in X$ e um objecto O" (CHEVALLARD, 2017, p. 31), pelo qual o

---

[7] De acordo com Douady (1986, p. 9, tradução nossa), objeto ou objeto didático refere-se ao "objeto cultural que tem o seu lugar num edifício maior, que é o conhecimento académico num dado momento, socialmente reconhecido". Para Chevallard (2018), ao objeto refere-se a "qualquer entidade, material ou imaterial, que existe, ao menos, individualmente, ou particularizando, qualquer trabalho ou produto intencional da actividade humana, entre artefactos, noções, símbolos, etc.". Estas ideias, são sumarizadas por Almouloud (2010) ao se referir de forma mais precisa que um objeto é nada mais que um conteúdo de aprendizagem, ou seja, um conteúdo que se deseja aprender em um dado instante e em um lugar especifico.

sistema funcione e a didática se interesse estudar, sendo o objeto “O” o foco da DM, como se refere Chevallard, ao destacar:

> Este é, naturalmente, um ponto de vista que a didática da matemática não pode deixar de contestar: sua própria inclusão no campo do conhecimento científico está em jogo. Seu postulado, e digamos até mesmo seu ato de fé, do qual a perspectiva de seus esforços é ordenada, é que existe um objeto pré-existente em nosso objetivo, e dotado de uma necessidade, de um determinismo próprio; portanto, um objeto conhecido, no sentido de que a atividade científica, em todos os campos em que foi implantada até agora, afirma conhecer o mundo. Este objeto é o obstáculo onde a pesquisa de ação tropeça - este objeto não é inteiramente da ordem da natureza; é o que chamarei de objeto tecnocultural, cuja forma está inscrita na história (para algumas de suas características, em uma história relativamente recente: três séculos no máximo). E, assim como existe um "espírito" das Leis, existe um "espírito" de nosso objeto, que cabe a nós elucidar. O que é exatamente este objeto? O didata da matemática está interessado no jogo que é jogado - como ele pode observá-lo, depois reconstruí-lo, em nossas salas de aula concretas - entre um professor, alunos e conhecimentos matemáticos. Três lugares, então: este é o sistema didático. Uma relação ternária: esta é a relação didática. (CHEVALLARD, 1982. p.2-3, tradução nossa).

Portanto, o cerne da ação nos estudos em DM não é essencialmente sobre o indivíduo que ensina ou que aprende, mas sim, sobre o objeto, ou melhor, a investigação e compreensão das condições e restrições que se impõem no processo de difusão e/ou (re)construção da estrutura lógica do conhecimento matemático em torno do objeto de saber. Para potencializar e tornar consistentes essas análises, que recaem sobre o trabalho do didático, a DM desenvolve e se apoia de diversos arcabouços teóricos, que possuem metodologias próprias para investigação e experimentação das situações de ensino. De entre estas teorias, o nosso trabalho se situa no campo de estudos e pesquisa da TAD.

Entretanto, antes de trazer qualquer abordagem sobre a TAD, apraz-nos apresentar algumas ideias sobre um fenômeno importante que ocorre no PEA, da qual a TAD é originaria, denominado Transposição Didáctica (TD), ou melhor, a Teoria da Transposição Didáctica (TTD). Cremos que esta noção nos será bastante importante para construção das hipóteses teóricas que nos permitirão descrever a partir da TAD, suas contribuições e potencialidades no processo de circulação de saberes entre instituições.

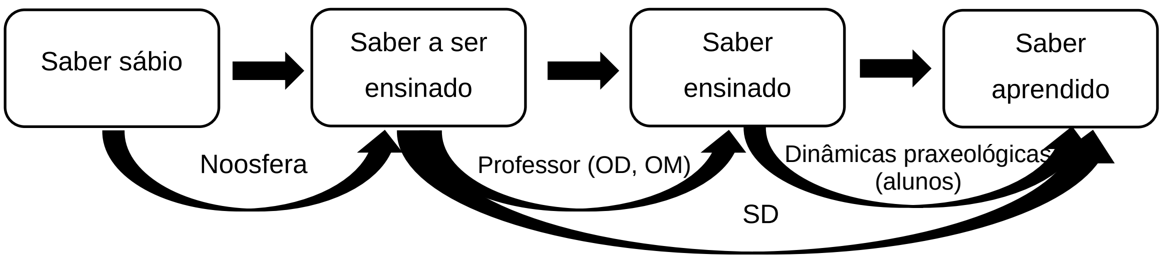
2.2. TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A Transposição Didática (TD) é o processo pelo qual “um conteúdo de saber que foi designado como saber a ser ensinado, sofre um conjunto de transformações adaptativas que o tornam adequado para ocupar um lugar entre os objetos de ensino, ou melhor, o processo que transforma um objeto de saber a ser ensinado em objeto de ensino” (CHEVALLARD, 1998a, p. 45, tradução nossa). Trata-se então de um processo adaptativo, pelo qual se dá a transição das estruturas de conhecimento ao redor de um saber sábio ao saber ensinado. De acordo com Polidoro e Stigar,

> esse processo de transformação do conhecimento se dá porque os funcionamentos didático e científico do conhecimento não são os mesmos. Eles se inter-relacionam, mas não se sobrepõem. Assim, para que um determinado conhecimento seja ensinado, em situação acadêmico-científica ou escolar, necessita passar por transformação, uma vez que não foi criado com o objectivo primeiro de ser ensinado (POLIDORO, STIGAR, 2010, p. 155).

Portanto, isso nos leva a considerar que nem toda estrutura de organização do conhecimento relativo ao saber sábio faz-se necessário para a (re)construção do saber escolar, ou aquele saber aprendido pelo aluno e legitimado pela escola. Ao concordamos com essa hipótese, concordamos também que durante o processo de transformação, existe uma dinâmica de (re)adaptação e (re)formulação do conhecimento, que obedece a três fases de transição, como é ilustrado no Diagrama 1, do saber sábio ao saber a ser ensinado, do saber a ser ensinado ao saber ensinado e do saber ensinado ao saber aprendido.

Diagrama 1: Processo de transposição didáctica e seus determinantes



Fonte: os autores (2021)

Estas transformações são primeiramente reguladas pela Noosfera, o conjunto de entidades que determina e legitima o que, e porque deve ser ensinado em determinado nível escolar, ou mais geralmente, que conteúdos terão que ser reconhecidos por instituições, sejam elas de ensino, familiares, etc. (CHEVALLARD, 1992, 2018b). Trata-se de um marco importante que permite responder questões como “de onde vem os conteúdos de saber estudados em uma sala de aula? Qual é a origem destes conteúdos?” (CHEVALLARD, 2018a, p. 22).

Portanto, ao responder estas questões, que permite marcar a transição entre o saber sábio ao saber a ser ensinado, ela procura respostas em outras entidades, as quais deva negociar para definir qual o conteúdo a ser ensinado. Tais entidades, podem ser segundo Chevallard (2018a, p. 23) e (Kaspary (2019, p. 231) “a escola ou sistemas de escola onde vive o sistema didático, a sociedade, as instituições produtoras do saber a ser ensinado (esfera acadêmica), a associação de professores, as editoras de livros didáticos, o ministério da educação, a comunidade de pesquisadores em educação, a igreja no caso dos estados não-laicos ou pseudo-laicos, as comunidades nativas, etc.”.

Após a determinação e legitimação do que deverá ser ensinado, o que muitas das vezes encontramos já definido nos documentos oficiais e programas curriculares, segue um processo de transformações devido a construção das organizações didáticas (OD), que permitem o professor planejar as estratégias do encontro entre o aluno e o saber matemático, e definir a priori a estrutura de conhecimento matemático (organizações matemáticas – OM) que deverá ser considerada.

Esta transformação marca a transição do saber a ser ensinado para o saber ensinado, que vai desde a planificação do professor à implementação da OD em sala de aulas, que segue duas etapas: a primeira, a que os livros didáticos oferecem um suporte aos documentos oficiais, que se apresentam muito generalistas em relação ao conhecimento a ser ensinado, ao mesmo tempo, contribuindo para explicar a organização a ser ensinada. A segunda etapa, aquela em que o professor define o que vai ensinar, talvez[8] os conhecimentos ensinados.

Um processo quase final que ocorre é devido as dinâmicas praxeológicas do aluno no seu encontro com o saber, ou seja, ao acessar e se apropriar do saber, que marca uma transição do que foi ensinado a o que foi aprendido. Assim, o processo geral que marca a transição do saber a ser ensinado ao saber aprendido, é todo imbuído no SD, que permeia a inter-relação entre o objeto-aluno-professor.

[8] Insinuamos a palavra “talvez” porque o que acontece na sala de aula geralmente não condiz exatamente com o projeto inicial do professor.

2.3. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: NOÇÕES FUNDAMENTAIS

A TAD é uma teoria desenvolvida no campo da DM, embora hoje seja amplamente utilizada para várias outras áreas de estudo. Ela aparece como uma evolução da TTD, que constitui a primeira rotura epistemológica a abordagem clássica do fazer didático, que tende a colocar no centro da atenção, a "explicação do que acontece em sala de aulas, mais especificamente em um SD, quase exclusivamente pelo que os alunos realizam e pelo que o professor desenvolve, a partir das condições e restrições endógenas" (CHEVALLARD, 2018a, p. 23), sem considerar elementos externos ao SD, que possam influenciar no fazer didático.

Assim, o cerne da ruptura epistemológica da TAD a abordagem clássica do fazer didático, reside primeiramente na TTD, ao considerar não só elementos internos ao SD para análise do fazer didático, mas também, outros elementos exteriores ao SD, a sala de aulas ou ainda a escola onde se insere o sistema de ensino, a partir da problemática que norteia a TTD, questionadora da origem dos conteúdos que são ensinados em sala de aulas e os seus processos de transformação que ocorrem até a aprendizagem pelos alunos. A evolução da TTD para TAD é então marcada pela introdução e aprofundamento de noções importantes, que norteiam o trabalho do didático ou didata – ξ, tais como, a noção de saber, objeto, praxeologia, instituição, individuo, pessoa, sujeito e mais importante ainda, "a noção de relação a um objeto, que completa o conceito de TD (e, mais amplamente, de transposição institucional, de uma instituição a outra) aprofunda a ruptura epistemológica ampliando a orientação 'antropológica' da TAD" (CHEVALLARD, 2018a, p. 24).

Esta orientação, é ainda fomentada a partir da problemática ecológica (ecologia do didático), expressão emprestada da Biologia, questionadora do objeto a partir do seu habitat e o nicho, que a TAD utiliza para análise das condições de existência, sua função e das interações entre os fenômenos didáticos sobre determinado objeto em seu ambiente de sobrevivência. Estas noções são apresentadas com clareza na subsecção 2.3.1.

A TAD coloca-se assim, como uma das teorias fundamentais nos estudos e pesquisa em DM, "situando seus problemas a nível da antropologia epistemológica e institucional, em contraste com outras estruturas teóricas que abordam problemas ligados a dimensões cognitivas, sociológicas, linguísticas, etc." (GARCÍA,

BARQUERO, FLORENSA, BOSCH, 2019, P. 77, tradução nossa). O seu caráter antropológico reside no facto de que, “ela situa a atividade matemática, ou melhor, a atividade de estudo em Matemática, no conjunto das atividades humanas e instituições sociais” (CHEVALLARD, 1999; ALMOULOUD, 2010).

Ela propõe o estudo do saber ‘Matemático’, no complexo das interações e relações entre o homem e o saber em seu ambiente conceitual, considerando ainda o lócus para o qual se dá o sistema de relações. Este caráter permiti então, que o ξ consiga estudar e explicar a natureza dos fenômenos didáticos inerentes aos objetos de saber ‘matemático’, desde a sua condição de existência em sua realidade institucional à difusão e apropriação pelo aluno.

Estes elementos, permitem então que a nossa proposta de trabalho adote e mergulhe nessa teoria, e se aprume de seus elementos de análise, sendo que passamos a apresentar algumas de suas ideias a seguir.

2.3.1. A noção de ecologia, habitat e nicho

Ao colocar o objeto no seu interesse de estudo, a TAD empresta a expressão “ecologia” para situar a natureza do objeto diante de sua condição de existência, ou melhor, em seu meio de sobrevivência. Trata-se de uma expressão emprestada da Biologia e “proposta pela primeira vez pelo biólogo alemão Ernest Haeckel, em 1869, em sua obra Generelle Morphologie der Organismen” (ODUM, 1988; CASSINI, 2005, p. 2).

> Em sua gênese, ecologia provém do grego Oikós, que significa casa ou lugar onde se vive, e logos que significa estudo. Literalmente é associada a ciência do habitat, ou o estudo do organismo em sua casa. Usualmente, é definida como o estudo das relações dos organismos ou grupos de organismos com o seu ambiente, ou a ciência das inter-relações que ligam os organismos vivos ao seu ambiente. Trata-se então, da ciência de que nos servimos para o estudo das condições de existência dos seres vivos e as interações, de qualquer natureza, existentes entre esses seres vivos e seu meio. (ODUM, 1988, p. 4; CASSINI, 2005, p. 2).

No campo da DM, a expressão é introduzida nos finais dos anos 80 por Chevallard, juntamente com a TTD e por Landy Rajoson em 1988 (FARRAS, 2009; CASTELA, 2019). Ela aparece como uma metodologia que permite descrever e caracterizar o objecto em seu meio de sobrevivência, apontando as condições e restrições para o qual pode ou não pode sobreviver em determinado ambiente. Trata-se de apresentar e caracterizar a razão de ser do objecto e das condições que permitem ele ser, isto é, caracterizar onde ele vive, como vive, porque vive, em que circunstancias vive ou não deveria viver neste ambiente, etc. Por exemplo, quais os objetos que já deveriam existir no meio para que esse novo objeto possa ser introduzido.

Levando em conta o fenômeno de TD, um processo pelo qual objetos de saber sofrem diversas transformações, quando sujeitos a migração de um ambiente para outro, do qual devam se inserir, “a ecologia do didático ou análise ecológica”, como adiante trataremos, permite ao didata ξ que se questione continuamente sobre: “de onde vêm estes novos objetos ensinados? como é que chegaram lá? que inter-relações, com que outros objetos, estabelecem lá? E, também, acima de tudo: por que chegaram lá?” (CHEVALLARD, 1994, p. 5).

Em uma palestra proferida na PUCP em 2019, onde ela conta com o curso de M. Artaud, na IX Escola de Verão de Didáctica da Matemática (Artaud, 1999), Castela apresenta a ecologia do didático como “o ramo da didática que estuda as relações e interações entre fenômenos didáticos e os ambientes em que são desenvolvidos” (CASTELA, 2019, p. 5). A autora enfatiza ainda que a metodologia que conduz a análise ecológica, permite que o didata ou investigador “se livre do que designa de ilusão de transparência, ou seja, a problematização da realidade didática do objeto, no seu passado, presente e das leis que regem à ecologia do objeto” (CASTELA, 2019, p. 7). Esta problematização, permite caracterizar a natureza ecológica do objeto, podendo então ser requerida ao responder determinados questionamentos, como os apontados por Chevallard (1994), ou como os apresentados em mais detalhes por Castela:

> No presente: o que existe e por quê? e também, o que não existe e por quê? No passado: o que desapareceu, se alguma coisa, e por quê? Em outro lugar: o que existe e não existe aqui? Porque? Na busca por leis que regem a ecologia da didática: em que condições esse fenômeno pode ocorrer? Que restrições evitam que tal fenômeno ocorra? (CASTELA, 2019, P. 7).

Assim, a partir destes questionamentos e de acordo com Farras (2009), a TAD socorre-se da abordagem ecológica para questionar e esclarecer quais as condições que favorecem que certas atividades possam ser ensinadas ou aprendidas melhor, que certas atividades matemáticas e didáticas possam desenvolver-se num determinado ambiente institucional e quais são as restrições que dificultam a realização dessas atividades. Portanto, a análise ecológica se torna assim indispensável em qualquer estudo ou investigação em didática, pois, permite clarificar em que condições, determinado objeto sobrevive em um ambiente, que funções vai poder ou não poder desempenhar nesse ambiente. Como é de salutar, esta metodologia leva em consideração dois conceitos importantes, "o de habitat, que se refere ao lugar específico onde o objeto pode ser encontrado, isto é, o seu endereço dentro do ecossistema e ao nicho ecológico, que se refere ao papel que o objeto desempenha no ecossistema, isto é, a função do objeto no ecossistema" (CHEVALLARD, 1994; CASSINI, 2005; ALMOULOUD, 2015).

Portanto, a TAD utiliza esses conceitos para situar a vida institucional de um objeto de saber, cuja problematização e caraterização é melhor discorrida a partir dos níveis de determinação e co-determinação didática (noção que desenvolvemos na secção 4), a partir do qual, buscamos trazer respostas sobre a ecologia do objeto desde o nível de civilização ao assunto ou conteúdo de aprendizagem.

2.3.2. A noção de relação objeto-pessoa-instituição

Na TAD, a noção de relação ocupa um papel central na análise da atividade matemática, ao complementar a noção de transposição didática. Esta noção aparece para tornar mais compreensível e claros os vínculos entre os elementos que caracterizam o SD, especificamente "os três elementos primitivos da TAD, o objeto (O), a pessoa (X[9]) e a instituição (I)" (CHEVALLARD, 1992, p. 86), e descrever melhor as peculiaridades do processo de transposição didáctica, ou mais geralmente, a transposição de saberes entre instituições.

Para Chevallard (1992, p. 86, 2018b, p. 31), um objecto é "qualquer entidade, material ou imaterial, que existe, ao menos, individualmente, ou particularizando, qualquer trabalho ou produto intencional da actividade humana, entre artefactos, noções, um conteúdo de aprendizagem, símbolos, etc, portanto, tudo é objecto". Se um objecto existe, ele é institucional e reconhecido por uma pessoa, como é referenciado por Chevallard (1992, p. 86), ao se referir que "um objecto existe logo que uma pessoa X ou uma instituição I reconheça este objecto como existente (para ele)". Desta forma, um objecto pode viver ou habitar em diferentes instituições, podendo assumir funções distintas em cada ambiente para o qual possa viver. Assim, X poderá se relacionar com O em I, de acordo com as condições e restrições impostas

[9] X denota um coletivo de pessoas, que podem ser professores, diretores de estudo, investigadores, alunos, etc. Assim, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto de pessoas em que $x_i \in X$, com $i = 1, 2, \dots$ ou simplesmente $x \in X$ refere-se a uma pessoa especifica.

em seu ambiente de sobrevivência, o que tornará X uma pessoa diferente em cada instituição para qual se relaciona com O.

Estas relações são denotadas genericamente por $R(X,O)$ e $R_I(O)$ ou $R(I,O)$, que de acordo com Chevallard (1992) significa respectivamente, uma relação pessoal de X a O e institucional de I para O. O encontro de X com O resulta em uma aprendizagem, quando X constrói uma relação não vazia a O de acordo as condições e restrições impostas por I [$R_I(X,O) \neq \emptyset$], ou melhor, quando I legitima a relação de X para O. Assim, se I não legitima a relação de X para O, digamos que X não aprendeu, porém, pode ser que teve uma relação diferente com O, que I não reconhece, isto é, $R_I(X,O) = \emptyset$, uma relação que possivelmente possa ser legitimada ou não em uma outra instituição. Entretanto, essa relação também merece ser analisada no sentido de que precisa se entender quais os caminhos, qual a estrutura de conhecimento utilizada para que X alcance O de forma diferente a desejável em I. Esta relação, objeto-pessoa-instituição provoca ou resulta em uma dinâmica praxeológica, na qual X constitui ou constrói seu universo cognitivo em relação à O, isto é, $U(X) = \{(O, R(X;O)/R(X;O) \neq \emptyset\}$ (CHEVALLARD, 2018b).

Duas noções foram utilizadas nesta abordagem, a noção de Instituição e de pessoa. A questão é, o que é uma instituição e uma pessoa no âmbito da TAD? A resposta para essa questão nos é apresentada por Chevallard (2018b), ao se referir que “uma instituição é um dispositivo social que permite e impõe aos sujeitos que ocupam diferentes posições nela, implementam maneiras de fazer e pensar próprias”. Trata-se de uma entidade para o qual, uma pessoa X ao se sujeitar, deverá se submeter as condições e restrições para as quais os objetos que nela vivem são impostas, o que torna imprescindível numa investigação em didática, analisar-se a ecologia desse objeto.

Para Chevallard (1992, p. 88), “uma escola, uma sala de aulas é uma instituição; mas há também a instituição dos 'tutoriais', a instituição das 'aulas', a instituição da 'família”, etc. Portanto, toda instituição é uma instituição sociocultural, na medida em que cada uma delas impõe suas próprias formas de organizar as actividades, possui conduta e padrão de controle próprio das actividades ao qual X deva se assujeitar.

Essa é a noção de instituição ao qual o nosso trabalho estará se sustentando, e estaremos concretamente nos assujeitando a duas instituições, a instituição de produção de saberes locais (I_L), especificamente, a instituição de jogo (Ntxuva), cuja função social é desenvolver praxeologias (noção que desenvolvemos na subsecção 2.3.3) diversas, por exemplo, para vencer o jogo, e, a instituição de ensino da Matemática I_{eM}, cuja função social é mobilizar praxeologias para que X se relacione com os objetos matemáticos. O ponto de interesse aqui reside na possibilidade de desenvolver uma transposição de I_L para I_{eM}, isto é, levantar possibilidades que permitem mobilizar saberes que vivem em I_L e que permitam ensinar/aprender objetos de saber em I_{eM}.

Nesta perspectiva, imaginamos que as relações de X ao objeto matemático (O_{eM}) se dê através das adaptações ou transformações que "partem das considerações dos saberes locais (do lócus) das comunidades onde a escola se situa" (INDE/MINED, 2008, p. 27). Para isso, cogitamos que X (professor-investigador) deverá primeiramente se sujeitar a I_L, conhecer os seus objetos, o que vai lhe permitir sugerir possibilidades para (re)construir uma abordagem para ensinar e/ou aprender objetos matemáticos, a partir dos saberes locais. Este processo vai permitir que o universo cognitivo da pessoa X evolua, conforme vai ser a sua relação com os objetos nas suas diferentes instituições, ou melhor, na trajetória ou processo de adaptação que leva a relação de X para O_L (objeto local) em I_L à X para O_{eM} em I_{eM}, designadamente, $R_{I_L}(X, O_L)$ e $R_{I_{eM}}(X, O_{eM})$, respectivamente.

Com esta relação, queremos dizer que uma pessoa evolui de acordo as relações que terá aos objetos nas instituições às quais ele se sujeite. Neste contexto, uma pessoa difere em parte de um indivíduo, que se torna um sujeito institucional ao se submeter às condições e restrições de determinada instituição. Assim, "o indivíduo passa a ser sujeito de uma instituição ao ocupar uma das posições (de sujeito) presentes nessa instituição, procurando se adequar ao contrato que a caracteriza" (CASTELA, 2016, p. 12-13, tradução nossa). Uma pessoa, é então um indivíduo cujo seu status evolui cada vez que guarda alguma relação (não vazia) com diferentes objetos e o indivíduo, permanece o mesmo, invariante, como é sinalizado por Chevallard, ao se referir que:

> A palavra pessoa, como usada aqui, não deve iludir: todo indivíduo é uma pessoa, incluindo a criança, os infantes (etimologicamente aquele que ainda não fala). Claro que, ao longo do tempo, o sistema de relações pessoais de x evolui; para outros a relação pessoal de x muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa. (CHEVALLARD, 2018, p. 31)

Portanto, X é uma pessoa que ocupa diferentes posições existentes em I, ou melhor dizendo, diferentes topos. Então, no sentido mais restrito, X pode ser professor X_p ou aluno X_a, etc., que se relacionam com O de diferentes formas, na construção de seu U(x).

2.3.3. Abordagem praxeologia: noções fundamentais

A noção de praxeologia está no cerne da TAD e constitui a principal unidade de análise da atividade humana, em especial a atividade matemática, que é modelada por determinado tipo de tarefas, realizadas por X quando mantém sua relação com O em I. Baseada nessa noção, a TAD é então sustentada por dois postulados importantes, “primeiro que toda a atividade humana pode ser analisada em estruturas de ação chamada de tipos de tarefas, segundo, a realização de qualquer tarefa de um determinado tipo requer uma certa maneira de fazê-lo, a que designamos de técnica” (CHEVALLARD, 2006, p. 2-3, 2017, tradução nossa).

Estes postulados suscitam outros dois, que alicerçam o trabalho do didático ξ e permitem justificar todas ações, realizações, passos, procedimentos, etc., utilizados para desenvolvimento da atividade humana, que são as noções de tecnologia e teoria. Assim, os quatro postulados sustentam e completam a noção de praxeologia na TAD, que em parte designa a organização de qualquer atividade movida pela ação humana, quer seja matemática, sociocultural, etc. Em geral e do ponto de vista de Chevallard,

> A noção de praxeologia generaliza diferentes noções culturais comuns – a de saber e de saber-fazer ou, em inglês, de skill, palavra que designa de maneira genérica “an ability that has been acquired by training”. Ela deve permitir designar, sem afeções epistemológicas-culturais (isto é saber, isto não é saber, é um simples saber-fazer etc.), sem prejuízos de valor a priori ou a posteriori, toda a estrutura de conhecimento possível. (CHEVALLARD, 2018b, p. 34).

Assim, as praxeologias ao fazerem parte do processo da modelação da atividade humana, são caraterizadas pelo quarteto praxeológico $[T, \tau, \theta, \Theta]$, subdivididas em dois blocos fundamentais, a práxis, relativo ao saber-fazer, e o logos, relativo ao saber – sábio (CHEVALLARD, 2018), como são descritas no Quadro 1.

Quadro 1: descrição dos elementos do quarteto praxeológico

Bloco	Esclarecimento
	✓ T: Refere-se a um tipo de tarefa, que é identificável ou descrita por um verbo de ação (calcular ..., jogar..., lavar..., etc.) e complementos fixos associados a objetos de uma disciplina (calcular a área de um triangulo, jogar o Ntxuva, legendar o corpo humano, ..., etc.) (CHAACHOUA, 2018).

Práxis - $[T, \tau]$ Saber – fazer ou técnico – prático	✓ Assim, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ constitui conjunto de tarefas, em que $t_i \in T$, com $i = 1,2,3, \ldots$ é uma tarefa especifica, um artefato, uma obra ou uma construção institucional, cuja (re)construção em I, ou especificamente em uma sala de aula, é um problema por si só, implica ou é o próprio objeto da didática (CHEVALLARD, 1998b, p. 2). ✓ De acordo Chaachoua (2018, p. 8), um tipo de tarefa pode ser gerado por um "gerador de tarefas" definido por: GT = [Verbo de ação; Complemento fixo; Sistema de Variáveis], onde o verbo de ação define o gênero de tarefas, o complemento define o nível do gerador, ou em geral, o conjunto verbo de ação e complemento definem um tipo de tarefa. O sistema variável é composto por uma lista de variáveis e valores que podem tomar.
	✓ τ: Refere-se as técnicas, ou seja, a maneira de executar/resolver uma tarefa. Estas, estão sujeitas as condições e restrições da instituição a que a tarefa pertence, isto é, as restrições que são impostas aos objectos em uma instituição. ✓ De acordo com Chevallard (1998b, p. 2), "uma técnica tem sucesso apenas em uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T a que é relativa, parte que é chamada de escopo da técnica: ela tende a falhar em $T \backslash P(\tau)$, de maneiras que podemos dizer que "não se sabe, em geral, como realizar tarefas do tipo T". ✓ Em uma instituição I, há sempre uma técnica ou conjunto de técnicas reconhecidas para determinado tipo de tarefa T. Há, no entanto, sobre uma mesma tarefa T, técnicas que podem viver em I_i e não em I_j, com $i \neq j$, o que permite legitimar T em I_i ou I_j, respectivamente e excluir algumas na realização de T. Como é reforçado por Chaachoua (2018, p.7) "há pelo menos uma técnica τ que realiza pelo menos uma tarefa de T de tal forma que ou o escopo da técnica $P(\tau)$ é um subconjunto de T, ou T é um subconjunto de $P(\tau)$".
Logos - $[\theta, \Theta]$ Saber – saber ou tecnológico-teórico	✓ θ: Refere-se à tecnologia da técnica, isto é, as justificações que se podem dar à técnica utilizada para resolver $\tau \in \mathrm{T}$, isto é, garantir com que a técnica funcione de acordo o esperado, o que constitui a primeira função da θ. A sua segunda função é de explicar e tornar inteligível a técnica, isto é, dizer porque esta técnica é ou deve ser utilizada desta maneira. A terceira função constitui-se da produção da técnica. Este discurso ou justificações podem ser de natureza teórica ou prática. Às vezes, este discurso pode assumir o papel duplo, tanto da técnica, quando permite encontrar o resultado solicitado da tarefa, quanto de tecnologia, quando permite ao mesmo tempo justificar que o resultado achado é realmente o esperado (CHEVALLARD, 1999).
	✓ Θ: Refere-se à teoria subjacente à tecnologia. Uma maneira geral de justificar a gênese das técnicas aplicadas para resolução de determinada tarefa.

Fonte 1: Adotado de (Chevallard, 1998b, 1999, 2006, 2017, 2018b)

Estes quatro elementos, nomeadamente tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), permitem caracterizar e analisar toda ação humana, assumindo um papel importante na análise da atividade humana, em particular, da atividade Didáctica e Matemática. Eles compõem o que designamos de praxeologia ou organização praxeológica (OP) pontual, que designa praxeologias sobre uma única tarefa (CHEVALLARD, 1998b), e que constitui a unidade ou estrutura mínima de análise das atividades na TAD.

Assim, enquanto no bloco da práxis a pessoa X é colocada diante de uma tarefa, para a qual, de acordo com a instituição a que está sujeito, deverá mobilizar técnicas e recursos para resolver $t_i \in T$, o bloco logos permite então que se explore uma explicação racional e justificada das ações que X desencadeia no seu encontro com $t_i \in T$, com $i = 1, 2, 3, \dots$. O bloco logos permite, em geral, que se levante vários questionamentos em torno dos procedimentos utilizados para resolver $t_i \in T$. Estes questionamentos vêm ajudar a perceber como X deve ou não deve se relacionar com $t_i \in T$, tais como: que τ_i utilizar para resolver t_i? Por que e quando utilizar τ_i para t_i? Por que esta τ_i leva X a uma boa relação com t_i, e por que não? Por que foi utilizado este caminho que não leva X ao encontro de t_i em I? entre outros questionamentos.

Portanto, é assim que a análise praxeológica ajuda ou ajudará a explicar toda ação diante das actividades realizadas por X, na sua estrita relação com $t_i \in T$ em I, o que, por consequência, implicará sua relação com objecto de saber a considerar. Digamos que esta análise se alicerça na "ecologia das praxeologias, concebida como o conjunto de condições e restrições impostas às tarefas e que permitem as técnicas funcionar, evoluir e serem suficientemente compreensíveis, legíveis e justificáveis num dado ambiente institucional" (BOSCH, CHEVALLARD, 1999).

As actividades ora analisadas podem ser de distintas ordens, tais como, social, didáctica, ou de uma disciplina específica. Assim, quando uma actividade é de ordem didáctica, as praxeologias mobilizadas para esta actividade são designadas de "organização didáctica (OD)", quando a actividade é matemática, as praxeologias em alusão são designadas "organização matemática (OM), etc. Estas organizações podem então agrupar-se em Organizações Pontais, Locais, Regionais e Globais.

As organizações pontuais (OP) referem-se ao conjunto de organizações praxeológicas desenvolvidas para responder a um tipo de tarefa T, denotado pelo quarteto $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$. As organizações locais são constituídas pelo conjunto de organizações pontuais da mesma espécie, isto é, o conjunto de organizações pontuais centradas numa mesma tecnologia θ, denotadas por $[\mathrm{T}_i, \tau_i, \theta, \Theta]_i$. As organizações regionais (OR) referem-se ao conjunto das organizações locais, centradas em uma mesma teoria Θ, denotadas por $\left[\mathrm{T}_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta\right]_{i,j}$. As organizações globais (OG) são a agregação das organizações regionais em torno de varias Θ_k, denotada por $\left[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_\mathrm{k}\right]_{i,j,k}$. (CHEVALLARD, 1998b e 1999; BOSCH, M., CHEVALLARD, 1999).

Em geral, e de acordo com Chevallard (1999, p. 229, tradução nossa) "em uma determinada instituição I, uma teoria Θ responde a várias tecnologias θ_j, cada uma das quais, por sua vez, justifica e faz inteligíveis várias técnicas τ_{ij}, correspondentes a tantos tipos de tarefas T_{ij}".

2.4. (DE)COLONIALIDADE DIDÁTICA: O QUE QUEREMOS DIZER COM ISSO?

Nesta subsecção, pretendemos apresentar as ideias centrais que norteiam a (De)colonialidade, ou melhor, o pensamento decolonial, a partir do qual, discutiremos dentro da perspectiva teórica da TAD, o que adjetivamos por (De)colonialidade didática.

A Decolonialidade é um movimento político epistêmico de lutas e resistências contra os resquícios da colonização, que sobrevivem e se manifestam ainda hoje no mundo, assumindo formas diversas de discriminação de práticas socioculturais não enraizadas nas perspectivas do pensamento eurocêntrico, ou melhor, as lutas e resistências às posições políticas epistêmicas que tem a Europa como modelo único de civilização e construção da humanidade. Estas lutas e resistências decorrem de um processo histórico que começa com a invasão, ocupação e exploração da Europa a territórios da África, Asia e as Américas, impondo seus modos, hábitos e costumes aos povos originários dessas regiões, uma ação histórica e política que ficou caracterizada como colonialismo[10], decorrente das ações da colonização. O colonialismo configurou assim, segundo Quijano,

> a estrutura de dominação/exploração onde o controlo da autoridade política, dos recursos de produção e do trabalho de uma população determinada domina outra de diferente identidade e cujas sedes centrais estão, além disso, localizadas noutra jurisdição territorial. Mas nem sempre, nem necessariamente, implica relações racistas de poder. (QUIJANO,2009, p.73).

O colonialismo não se caracterizou apenas pela ocupação/exploração de terras e exploração do homem, antes, porém, envolveu a dimensão educacional por onde os regimes dominantes com o poder capitalista se socorriam para aculturar os nativos, de maneiras que pudessem fragilizar suas práticas socioculturais, podendo manipulá-los e explorá-los melhor. Com as lutas e resistências à colonização, deu-se o fim ao colonialismo, instaurando-se um facto político e histórico que demarcou a

[10] O colonialismo foi um padrão operacional da colonização (um sistema de dominação política formal de algumas sociedades sobre outras), que estabeleceu uma relação de dominação direta, política, social e cultural dos europeus sobre os povos conquistados de todos os continentes (QUIJANO, 1992, p.11).

emancipação das terras e dos povos originários das colônias, que se designou por descolonização e que deu origem às independências. A descolonização caracterizou-se então por ser um processo que visou o desmembramento político-administrativo das colônias, com objetivo de livrar os povos do jugo colonial.

Entretanto, mesmo após as independências, estes povos continuaram em suas práticas a operar sob uma visão eurocentrista[11] na construção de suas sociedades, sobretudo no sistema educacional, importando e implantados currículos escolares Europeus, tidos, até então, como modelos "racionais, que foram impostos e admitidos no conjunto do mundo capitalista como a única racionalidade válida e como emblema da modernidade" (QUIJANO, 2009, p.74).

> De facto, o fim do colonialismo político, enquanto forma de dominação que envolve a negação da independência política de povos e/ou nações subjugados, não significou o fim das relações sociais extremamente desiguais que ele tinha gerado, (tanto relações entre Estados como relações entre classes e grupos sociais no interior do mesmo Estado) (SOUZA SANTOS; MENEZES, 2010, p. 19).

Estes padrões de poder, enquanto efeitos e herança da colonização, se mantiveram naturalizados e sustentados sob a hegemonia do pensamento moderno eurocêntrico-colonial, como matriz única e linear para o desenvolvimento da humanidade, o que se configurou num novo padrão de colonização disfarçada da mente, que tem sido designada teoricamente por colonialidade. Portanto, "o colonialismo, embora extinto, continuou sob a forma de colonialidade de poder e de saber" (SOUZA SANTOS; MENEZES, 2010, p. 19). De acordo com Girado,

> A colonialidade configura-se em um padrão de poder que emerge do colonialismo territorial moderno, mas que sobrevive a esse e não se limita à dominação formal de uma nação sobre outra, operando nas formas como o trabalho, o conhecimento e as relações intersubjetivas se manifestam e se articulam entre si. (GIRALDO, 2021, p.2).

Frente a este padrão de poder, que centraliza e naturaliza as sabedorias brancas e eurocêntricas como formas únicas e universais de construção da ciência e do desenvolvimento do mundo, descaracterizando e neutralizando outras práticas e

[11] O eurocentrismo não é exclusivamente, portanto, a perspectiva cognitiva dos europeus, ou apenas dos dominantes do capitalismo mundial, mas também do conjunto dos educados sob a sua hegemonia. E embora isso implique um componente etnocêntrico, este não o explica, nem é a sua fonte principal de sentido. Trata-se da perspectiva cognitiva durante o longo tempo do conjunto do mundo eurocentrado do capitalismo colonial/moderno e que naturaliza a experiência dos indivíduos neste padrão de poder. Ou seja, faz com que eles entendam essa experiência como natural, consequentemente, como dada, não susceptível de ser questionada (QUIJANO, 2009, p. 74 – 75).

sabedorias não eurocêntricas, surge a pensamento decolonial[12], que ao contrário da colonialidade,

> Objetiva problematizar a manutenção das condições colonizadas da epistemologia, buscando a emancipação absoluta de todos os tipos de opressão e dominação, ao articular interdisciplinarmente cultura, política e economia de maneira a construir um campo totalmente inovador de pensamento que privilegie os elementos epistêmicos locais em detrimento dos legados impostos pela situação colonial. (REIS; ANDRADE, 2028, p. 3).

A decolonialidade procura então questionar e denunciar as formas de manutenção da colonialidade, ou melhor, questionar os modelos que tem as epistemologias eurocêntricas como únicas formas de construção da ciência e do mundo, ao mesmo tempo que procura estabelecer possibilidades que permitam se sair desse vício implantado pela colonialidade, ao se propor ser uma opção que permita discutir a inclusão de outras práticas e sabedorias subalternizadas, a partir de sua história, cultura, etc. dos locais na construção do pensamento cientifico e do mundo.

É sobre esse último ponto de vista que destacamos a TAD, a partir de seus elementos teóricos e metodológicos, como uma teoria que nos possa permitir mergulhar no pensamento decolonial para questionar as formas de manutenção da colonialidade do saber[13], enquanto uma "relação de dependência no âmbito da produção de saber, que resulta de uma estrutura de dominação no campo do conhecimento, que não impede outras formas de sua produção, porém, descaracteriza-os" (SILVA; BALTAR; LOURENCO, 2018, p. 72). Este entrelaçamento entre a TAD e Decolonialidade, tem em vista não só questionar e problematizar a

---

[12] Na perspetiva do projeto decolonial, as fronteiras não são somente este espaço onde as diferenças são reinventadas, são também loci enunciativos de onde são formulados conhecimentos a partir das perspetivas, cosmovisões ou experiências dos sujeitos subalternos. O que está implícito nessa afirmação é uma conexão entre o lugar e o pensamento. Contudo, é preciso distinguir o lugar epistêmico e o lugar social. O facto de alguém se situar socialmente no lado oprimido das relações de poder não significa automaticamente que pense sistemicamente a partir do lugar epistêmico subalterno. Justamente, o êxito do sistema-mundo moderno/colonial reside em levar os sujeitos socialmente situados no lado oprimido da diferença colonial a pensarem sistemicamente como aqueles que se encontram em posições dominantes. Em outras palavras, o que é decisivo para se pensar a partir da perspectiva subalterna é o compromisso ético-político em elaborar um conhecimento contra-hegemônico (BERNARDINO-COSTA; GROSFOGUEL, 2016, p. 18).

[13] A colonialidade do saber é resultado do legado cultural, histórico e político do colonialismo, que resulta no desenvolvimento de uma relação de dependência no âmbito da produção de saber, resultante de uma estrutura de dominação no campo do conhecimento. O que resulta deste processo é o que chamamos de dependência acadêmica. Trata-se de uma relação que no campo das ideias implica na dominação de padrões de investigação, ensinamento e estudo. Essa dependência, apesar de não impedir a produção de conhecimento fora da perspectiva hegemônica, nega espaço para o seu reconhecimento e desenvolvimento. (SILVA; BALTAR; LOURENCO, 2018, p. 72).

colonialidade, em particular no ensino da matemática, mas também, apresentar possibilidades que permitem resgatar e analisar outras sabedorias, de matriz não eurocêntrica, que possam conduzir-nos à construção do conhecimento matemático escolar. Estas proposições vão nos conduzir a aquilo que vamos designar de decolonialidade didática, que discutiremos na secção 2.4.1.

2.4.1. Colonialidade e Decolonialidade Didática no ensino da Matemática: como entendemos e caraterizamos?

A nossa discussão é centrada em torno das formas de acesso ao saber sobre os objetos de ensino, as quais o processo de difusão em ambientes escolares, em grande medida, pensa-se que é dependente e dominado pelos padrões de construção do conhecimento enraizados no pensamento moderno eurocêntrico colonial.

A normalização desta dependência nos espaços de produção do conhecimento tem sido caracterizada por colocar as sabedorias eurocêntrica como ponto de referência única e linear para justificar o desenvolvimento e o avanço da ciência. Ao tornarem-se únicas, desmerecem outras formas de saber contra-hegemônicas, invisibilizando-as, silenciando-as e, de certo modo, colocando impedimento a sua integração no processo de construção do conhecimento cientifico e/ou escolar, “relegando-as ao lugar do atraso e do primitivismo” (GIRALDO, 2021, p.2). A esse respeito, Giraldo também reforça argumentado que,

> Essas epistemologias dominantes ou hegemônicas apresentam-se como possibilidades únicas, ou seja, as sabedorias dominantes têm uma característica delas para preservar o seu próprio projeto de poder, que é apresentarem-se em si próprias como a única possibilidade ou a maneira natural de fazer as coisas, a partir de uma noção linear e universal de progresso. Essa noção de progresso tem como referência a cultura e sabedoria branca e eurocêntrica. Assim, tudo que se alinha a essa noção de progresso é alçado ao lugar de desenvolvimento e tudo que não está alinhado a essa noção, referenciada numa cultura branca e eurocêntrica é relegado ao lugar de primitivismo e de atraso. Portanto, essa noção linear de progresso ela naturaliza certas relações de dominação na nossa sociedade e é usado para justificar determinado esquema de relação de poder na sociedade, para naturalizar. (GIRALDO, 2020a).

O ensino da Matemática tem sido, em grande medida, marcado por essa noção linear e universal de ciência, que naturaliza praxeologias matemáticas ao apresentarem-se de forma inquestionável e não problematizada[14] a partir de outros saberes que não se fecham dentro da hegemonia do pensamento moderno eurocêntrico-colonial, ou ainda, apresentando-as como um monumento. Essa linearização tem contribuído sobremaneira para o silenciamento de histórias das matemáticas produzidas fora do Ocidente, marginalização e subalternização de outras praxeologias, que podem ser observadas e exploradas em diversos contextos socioculturais não eurocêntricos e que possam propiciar o acesso ao saber matemático, podendo colocar a matemática em estreita relação com a vida cotidiana do aluno. Como elucida Gerdes,

> as histórias dominantes da matemática sugerem que (quase) não houve matemática fora da Europa, esquecendo de que a colonização contribuiu para a estagnação e a eliminação de tradições científicas nas Américas, África, Ásia e Austrália, assumindo que, isso deve-se a implantação de currículos importados, que reproduzem práticas que reprimem e perturbam a matemática-da-vida, aprendida e desenvolvida fora da escola, o que condiciona a que muitas crianças desenvolvam um sentimento de falhanço e de dependência. (GERDES, 2012, p. 19).

Com esta visão, assume-se frequentemente no ensino da matemática a ideia de uma matemática única e universal, com "referências a cultura e sabedoria branca e eurocêntrica" (GIRALDO, 2020a), caraterizado por muita abstração e distanciando da realidade sociocultural a que os alunos vivem, ou melhor, distanciado de uma matemática que cria afeto aos alunos, propiciando o "bloqueio ao processo de educação" (PAPERT, 2008). Portanto, nessa visão, o PEA tende a tornar-se rotineiro, levando com que se instaure uma pedagogia caraterizada pelo "paradigma escolar de inventário de saberes", em que, os objetos matemáticos são apresentados aos alunos a partir de uma "leitura invariante do universo dos saberes" (CHEVALLARD, 2018), imerso nas epistemologias e/ou sabedorias eurocêntricas/ocidentais, que propiciam a discriminação de sabedorias provenientes do lócus aonde a escola e os alunos estão inseridos. Aqui, há também uma hegemonia da pedagogia do colonizador, que não trata apenas de negar a relevância dos saberes locais, mas de impor o modelo

---

[14] Giraldo (2019, p. 8) apresenta a ideia de Matemática problematizada como sendo uma "concepção de possibilidades matemáticas, situadas em diversos contextos e práticas históricas e sociais de produção e de mobilização de saberes e de formas de estar no mundo. Assim, ele sinaliza que uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de factos, procedimentos e informações. Este ponto de vista ele traz em oposição à Matemática não Problematizada, que se refere a uma concepção da matemática estabelecida como um corpo de conhecimentos que sempre foi e sempre será da forma que é hoje, ou que evolui linearmente de um estado "mais atrasado" para um estado "mais avançado", por meio da inspiração isolada de "gênios com talento inato".

pedagógico e didático dominante na Europa ao mundo e que fortalece a naturalização das formas de produção do conhecimento enraizado nas epistemologias dominantes.

Desta forma, os objetos de saber matemático são difundidos aos alunos sem qualquer questionamento e não problematizados, de modo que possam "privilegiar a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de factos, procedimentos e informações (GIRALDO, 2019, p. 8). Portanto, estas práticas rotineiras que naturalizam a produção escolar de saberes da matemática a partir da epistemologia hegemônica eurocêntrica/ocidental como única forma de produção do saber, constituem para nós a colonialidade do saber no ensino da matemática, ou melhor, podemos dizer que, com estas práticas, o ensino da matemática reproduz a colonialidade.

É sobre esta colonialidade epistemológica do saber no ensino da matemática, que situamos nesta tese, a decolonialidade didática como uma perspetiva política epistêmica, que articulada com a TAD, enquanto "um campo de investigação em DM, que permite refletir sobre a dicotomia entre o ensino e aprendizagem, fomentando um novo olhar sobre as análises normalmente fragmentadas da realidade escolar" (FARIAS, CARVALHO, SOUZA, 2018), nos permitirá levantar "questionamentos ao projeto moderno, eurocêntrico e ocidental de ciência, podendo o didata colocar uma lente capaz de denunciar e questionar de modo complexo a sofisticação discriminatória das bases epistêmicas na ciência, no ensino da matemática" (SANTOS, 2018, p.2). Portanto, a decolonialidade apresenta-se aqui como uma posição que possa permitir apontar rupturas ao processo de difusão de praxeologias matemáticas, procurando questionar e denunciar a manutenção da colonialidade e, levantar possibilidades que nos permitam desenvolver ações para a desconstrução da naturalização e da linearização do ensino da matemática.

Assim, consideramos a decolonialidade didática como uma ruptura da colonialidade didática, um campo que nos permite pensar e debruça-se sobre a desnaturalização das práticas de ensino da matemática, que se mantêm rotineiras e sob domínio das epistemologias do pensamento moderno colonial, como únicas formas para acessar o conhecimento matemático. Deste modo, ao analisar o processo de difusão de praxeologias sociais, por via da TAD, este campo permite primeiramente a partir da análise ecológica, questionar e denunciar a manutenção da colonialidade, investigando como ela é instaurada em relação a determinado objeto de saber, em seu ambiente conceitual. Segundo, por meio da abordagem praxeologia, estudar possibilidades de análise da difusão social das praxeologias a partir de outras sabedorias não eurocentralizadas, ou melhor, a partir de saberes que se observam e podem ser explorados em práticas socioculturais de matriz não eurocêntrica.

Portanto, a análise ecológica e a abordagem praxeológica constituem as abordagens metodológicas essenciais na TAD, para que a Didáctica da Matemática questione como as praxeologias hegemônicas se mantêm naturalizadas no acesso ao saber matemático, que outras praxeologias podem ser exploradas a partir das práticas socioculturais locais, para acessar o saber matemático escolar, como estas praxeologias podem ser acessadas para construção do conhecimento matemático escolar?

2.4.2. Análise ecológica: abordagem didática para problematização e questionamento da manutenção das epistemologias hegemônicas

Um dos focos da perspetiva decolonial é a problematização da naturalização das epistemologias dominantes, que se impõem como opção única na construção das bases epistemológicas da ciência. Ao mesmo tempo que estas epistemologias são naturalizadas, há um processo dissimulado de silenciamento, subalternização e descredibilização de outras formas de produção de conhecimento, relegando ao esquecimento e o lugar do primitivismo. Este descrédito das epistemologias outras, que não se articulam dentro do pensamento moderno colonial, transcendem aos objetos matemático, cujo acesso escolar, quase frequentemente é sob praxeologias matemáticas hegemônicas, que impedem que o aluno acesse tais objetos a partir de saberes que podem ser explorados de seus contextos cotidianos e socioculturais.

Portanto, a decolonialidade como uma opção política-epistêmica de reinvindicação as epistemologias contra-hegemônicas[15], questiona porque que estas epistemologias estão enraizadas neste espaço, cujo saber local é negado a sua participação na construção do conhecimento. Ao mesmo tempo que faz este questionamento, denúncia tais formas de manutenção e propõe alternativas que

---

[15] Contra-hegemônico seriam experiências, significados e valores que não fazem parte da cultura dominante efetiva; formas alternativas e opositoras que variam historicamente nas circunstâncias reais; práticas humanas que ocorrem "fora" ou em "oposição" ao modo dominante; formas de cultura alternativa ou opositora residuais, abrangendo experiências, significados e valores que não se expressam nos termos da cultura dominante, embora sejam praticados como resíduos culturais e sociais de formações sociais anteriores; formas de cultura emergente, englobando novos valores, significados, sentidos; novas práticas e experiências que são continuamente criadas. (DORE; SOUZA, 2018, p. 254).

permitam discutir as possibilidades para construção de situações didáticas para o ensino (da Matemática) baseadas nestas epistemologias ignoradas.

Para questionar a manutenção da hegemonização destas epistemologias e por conseguinte propor estratégias que possibilitem a visibilização de outras sabedorias na construção do conhecimento, a didática da matemática se subsidia da análise ecológica, para questionar a razão de ser do objeto de saber, em seu lócus. Portanto, a abordagem ecológica do didático "visa explorar as condições de possibilidades ou impossibilidades dos factos econômicos[16] observáveis ou imagináveis, condições que os incitam a acontecer ou, inversamente, impedem que ocorram" (CHEVALLARD, 2018a, p. 27). Pensamos que com esta abordagem, que caracteriza um elemento metodológico da didática da matemática no campo teórico da TAD, possamos levantar questionamentos que nos permitem perceber as circunstâncias pelas quais as epistemologias hegemônicas se mantêm hegemônicas e que outras possibilidades se podem desenvolver para contrapor essa hegemonia. Neste sentido, Chevallard levanta alguns questionamentos, que permitem o estudo ecológico levantar possibilidades para refletir sobre a decolonialidade do saber.

> Assim, ele considera que, nessa base metodológica, a primeira pergunta que se deve fazer é: Qual é a instância[17] que o pesquisador considera em suas pesquisas? Porque são essas e não outras? Estes questionamentos suscitam outros tantos, que complementam o questionamento ecológico sobre o objeto de saber, como: Quais são os núcleos cognitivos (pessoa, objeto, posição institucional, instância avaliadora) que o investigador em didática está interessado? Quais são as pessoas que ocupam determinadas posições institucionais que são examinadas em suas relações e a que objetos *o*? Por quê? Por outro lado, quais são as pessoas que são ignoradas, em sua relação e a que objetos o? Por quê? Quais são as posições institucionais, que podem ser pensadas na análise da relação $R(x,o)$? Quais, as que são ignoradas? Por quê? Quais são as instâncias, que estão previstas na revisão da relação $R(x,o)$? Por quê? Quais são as instâncias, que são ignoradas? Por quê? Quais são as instâncias avaliadoras que aparecem nos núcleos cognitivos e tomadas em conta pelos professores? Por quê? Quais são as instâncias que estão ausentes? Por quê? (CHEVALLARD, 2018a, p. 27).

[16] Em didática de matemática os "fatos econômicos" referem-se ao estudo da economia do didático que de acordo com Chevallard (2018b, p. 27), objetiva explicitar as decisões, gestões, julgamentos das instâncias pessoais ou institucionais envolvidas ou capazes de intervir nas possíveis situações didáticas.

[17] Na TAD, uma instância é uma pessoa ou uma entidade que ocupa determinada posição em uma instituição. Essa pessoa pode ser um aluno cuja a missão é construir sua relação com um objeto *O* em uma instituição *I*, pode ser um professor cuja a tarefa é organizar e orientar o processo que leva o aluno a sua relação ao saber considerado, pode ser um investigar cuja a missão é analisar determinado fenômeno didático, etc. Uma instância avaliadora é uma pessoa que analise e dá juízo sobre a relação de uma outra pessoa a um objeto de saber em uma instituição.

Em tese, primeiramente identificamos o nosso objeto de estudo, a partir do qual levantamos os questionamentos que nos permitem investigar a sua ecologia, tais como: qual é o lugar conceitual desse objeto? a que grupo alvo (alunos, professores e outros intervenientes educacionais) interessa o estudo sobre este objeto? Que condições e restrições ao objeto são impostas pelos documentos oficias (currículos, leis, livros didáticos, etc.), ou melhor, como é que os objetos matemáticos estão instaurados nestes documentos? Que praxeologias são levadas em consideração no acesso ao saber sobre estes objetos? Que praxeologias são ignoradas e como podem ser reconsideradas para o acesso aso saber sobre este objeto, considerando o lócus onde a escola e os intervenientes do sistema didático estão inseridos? O que inviabiliza que estas praxeologias vivam em espaços escolares para produção do conhecimento relativo a este objeto de saber? Porque são inviabilizadas? etc.

Portanto, a ecologia do didático ou análise ecológica permite ao ditada ξ que se questione sobre a vida do objeto em seu habitat, questionamentos esses que procuram e permitem problematizar a manutenção das epistemologias dominantes em espaços escolares. Como se refere Farras (2009), a Didática da Matemática por meio da TAD, procura a partir desses questionamentos problematizar e esclarecer quais as condições que favorecem que certas atividades possam ser ensinadas ou aprendidas melhor, que certas atividades matemáticas e didáticas possam desenvolver-se num determinado ambiente institucional e quais são as restrições que dificultam a realização dessas atividades. Portanto, a análise ecológica se torna assim indispensável em qualquer estudo ou investigação em didática, pois, permite clarificar em que condições, determinado objeto sobrevive em um ambiente, que funções vai ou não vai poder desempenhar nesse ambiente.

Ao questionarmos o que existe ou o que está posto e porque, levanta-se possibilidades de desvendar, a partir da análise de documentos oficiais (programas de ensino, livros didáticos, entre outros), de relatos de professores e entidades externas ao sistema didático, como e por que as epistemologias hegemônicas se enraízam no processo de difusão de praxeologias matemáticas, relegando-se praxeologias que se podem explorar em práticas locais ao segundo plano. Esta análise far-se-á a partir do que Chevallard designa por níveis de determinação e co-determinação didática, que é definida e detalhada na subsecção 4.1.

A partir daqui, pode-se então compreender porque que a epistemologia dominante é dominante no ensino da matemática e, como este sistema de relações pessoais ao objeto que é apresentado no sistema de ensino reproduz a colonialidade. Este esclarecimento favorece, então, que ao compreendermos como estão postas as praxeologias no ensino da matemática, possamos pensar em ações que permitam desnaturalizar estas práticas que hegemonizam as sabedorias eurocêntricas/ocidentais e subalternizam as não ocidentais, no processo de produção de saberes escolares da matemática. Estas possibilidades outras podem ser (re)construídas ao analisarmos didaticamente "o que não existe e como poderia existir" no sistema de relações pessoais aos objetos de saber.

Portanto, com estas considerações entendemos que a abordagem ecológica do didático constitui uma primeira ruptura para um estudo que pretende caminhar para uma didática decolonial, ao permitir que, em sua análise, o didata possa antes de tudo, questionar as condições colonizadas no currículo escolar, as condições que favorecem e as restrições que impedem a integração de outras sabedorias, contra-hegemônicas no espaço de produção do conhecimento escolar.

2.4.3. Transposição de praxeologias entre instituições: uma possibilidade para emancipação das epistemologias subalternas em ambiente de ensino

A segunda ruptura neste projeto de emancipação das epistemologias contra-hegemônicas é, portanto, pensar a partir das epistemologias subalternas, como buscar uma possibilidade de ensino que leve em conta e valorize as epistemologias oriundas de práticas socioculturais contra-hegemônicas, ou melhor, como pensar na produção e acesso ao saber escolar a partir de uma perspectiva subalterna.

Sobre este ponto, a Didáctica da Matemática, por meio da TAD recorre a noção de relação ao objeto, da abordagem praxeológica e de transposição institucional para explicar, como pode ser possível assumir um processo de transposição de saberes subalternos (aqueles cuja história encarregou-se de negar seu espaço, na contribuição para (re)construção da ciência) aos saberes escolares diversos. Com estas duas noções, o nosso projeto é pensado para busca de possibilidades que permitam explorar e analisar praxeologias que nos levam à relação com objetos Contra-hegemônicos, aqueles que têm o seu habitat nas instituições socioculturais não eurocêntricas. Tais praxeologias vamos designar por Etnopraxeologias, por serem provenientes de instituições socioculturais não eurocêntricas.

Com estas análises e partir da noção de transposição institucional[18], também são analisadas as possibilidades de construção de situações didáticas que permitem transpor saberes entre instituições, socioculturais não eurocentralizadas a instituição de ensino, de modo que objetos (matemáticos) escolares possam ser acessados por via da relação que se pode ter aos objetos socioculturais não eurocêntricos. Este processo, que se pensa propiciar a emancipação de práticas socioculturais não eurocentradas na construção de saberes escolares, vai além de uma simples transposição didática, isto é, envolve o que vamos a designar de transposição institucional, ou, mais especificamente, a transposição de praxeologias entre instituições que Chevallard explica nos seguintes termos:

> Constantemente, em uma dada instituição I, novas praxeologias são vistas, pelo menos por alguns dos atores de I, como necessárias para um melhor funcionamento de I. Essas praxeologias terão, portanto, de ser produzidas lá ou, mais frequentemente, reproduzidas, na medida em que já existem em alguma outra instituição I' – da qual pode ser possível propor 'importá-las' para I. As condições impostas pela ecologia de I significam então que a praxeologia desejada não pode ser reproduzida de forma idêntica, mas que sofrerá, nesta 'transferência', várias modificações adaptativas: não falaremos, portanto, de transferência, mas de transposição de I' para I. (CHEVALLARD, 1999, p. 231, tradução nossa).

Esta noção, da transposição institucional, de uma instituição a outra, está no cerne da noção de relação a um objeto, que permite explicar e compreender, os processos adaptativos sobre as organizações praxeológicas que (possa) circula(r) de uma instituição I' para I, quando X procura conhecer O em I – $R_I(X,O)$. Importa sinalizar que, em muitas ocasiões, as praxeologias que se observam ou exploram em I' não foram essencialmente pensadas resolver diretamente os problemas imbricados em I, ou seja, não são automaticamente reconhecidas em I. Assim, para acessar O em I, ocorreram modificações diversas das praxeologias de I' ao serem importadas para I, de modo que permitam clarificar ou melhorar a $R_I(X,O)$, um processo de

[18] A transposição institucional é uma abordagem para além da transposição didática. Enquanto na abordagem da transposição didática o investigador em didática centra-se na análise do processo que leva a transformação e/ou adaptação que um saber sofre ao passar do saber a ser ensinado, ao saber ensinado e/ou aprendido (CHEVALLARD, 1998), influenciadas pela noosfera, porém, limitado aos processos dentro das instituições de ensino (ao nível escolar da escala dos níveis de determinação e co-determinação didática – ver subseção 4.1), a abordagem da transposição institucional tem em vista a análise do processo que leva a transformação e/ou adaptação de saberes quando circulam de uma instituição para outra. Esta abordagem constitui uma extensão da transposição didática e permite descrever e analisar a transposição de praxeologias, produzidas em outros contextos não escolares, ao ensino de objeto de saber de disciplinas diversas.

transposição normal, que não pode ser confundido como destrutivo das praxeologia importadas. Com se refere Chevallard,

> Processos de transposição institucional não produzem necessariamente versões degradadas – inferiores, por exemplo, na qualidade de seu bloco tecnológico-teórico – de organizações praxeológicas transpostas. Pelo contrário, [...] é uma oportunidade de melhorar a praxeologia assim reformulada – simplificando-a, especificando certos elementos, etc. De qualquer forma, a transposição enriquece o mundo das praxeologias socialmente disponíveis – na medida em que cria uma praxeologia adaptada às novas condições institucionais. (CHEVALLARD, 1999, p. 231).

Importar praxeologias de I' para I, implica antes de tudo, X (re)conhecer que há um objeto O' de I', que as utiliza, produz, etc., para o qual deva se assujeitar e manter uma relação não vazia, isto é, $R_{I'}(X, O') \neq 0$. Dessa relação[19], X poderá enxergar as modificações adaptativas necessárias das praxeologias oriundas de O', que o façam alcançar uma relação com O em I, uma relação de transposição que esquematizaremos da seguinte forma: $R_{I'}(X, O') \hookrightarrow R_I(X, O)$, que corresponde ao fenômeno de circulação ou importação de praxeologias de I' para I. Assim, praxeologias de uma instituição podem ser analisadas e reproduzidas para diversas finalidades em outras instituições, no caso especifico do ensino, podem ser (re)utilizadas para acessar determinado objecto de saber escolar.

Para caracterizar e analisar esse processo transpositivo, Castela propõe o modelo de transposição de praxeologias entre instituições, o modelo que "representa os efeitos de transposição devido a circulação de uma praxeologia de uma instituição que produz (I_r) para uma instituição que a utiliza (I_p)" (CASTELA, 2018, p. 539, tradução nossa), ilustrado no Diagrama 2. Embora no modelo proposto, a autora se interesse pela circulação de praxeologias da matemática acadêmica para instituições que as utilizam, o modelo permite estabelecer diversas relações gerais relativas ao processo de transposição institucional.

[19] Aqui é preciso vincar que, o que é importante é a instituição e não X, isto é, a relação $R_{I'}(X, O')$ pode estar vazia, ao contrário, $R(I, I')$ e $R(I, O')$ devem ser relações não vazias. No caso, podemos dizer que existe um grupo de sujeitos de I' (a noosfera) que desempenha o papel de X. Isso não significa que para cada sujeito X de I' a afirmação seja verdadeira.

Diagrama 2: o modelo de transposição de saberes entre instituições I_r a I_p

$$[\mathrm{T}, \tau, \theta^r, \Theta] \leftarrow I_r \qquad \left[T^*,\ \tau^*, \begin{matrix}\theta^{*r}, \Theta^* \\ \theta^p, \Theta^{\mathrm{p}}\end{matrix}\right] \begin{matrix} \leftarrow I_r^* \begin{matrix}\swarrow I_r \\ \nwarrow I_p\end{matrix} \\ \leftarrow I_p \end{matrix}$$

Fonte: Castela (2017, p. 422)

Com base nesse modelo, é suposto poder-se analisar a estrutura de conhecimento em instituição de investigação ou produtora I_r e estudar os mecanismos pelos quais suas praxeologias podem ser modificadas e adaptadas a uma instituição de uso ou que utiliza I_p. O processo de adaptação ocorrera pelo facto de que, I_r não está diretamente interessado em lidar com praxeologias que vivam em I_p. De acordo com Castela (2017, p. 422, tradução nossa), no modelo “os asteriscos expressam a ideia de que todos os componentes da praxeologia original podem evoluir. Essa transformação é objecto de transações institucionais concluídas em uma instituição específica I_r^*, criada e controlada por Ir e Ip. I_r^* está mais ou menos desaparecendo, as transações são mais ou menos difíceis e controversas, dependendo de vários factores”.

Consideramos que todas as instituições são instituições socias ou socioculturais. Reconhecendo em nosso meio diferentes tipos de transposição, em nossa pesquisa, nos interessamos na circulação de praxeologias de uma instituição de produção de saberes socioculturais locais (I_{SL}) contra-hegemônico, isto é, do lócus, ou melhor, do lugar, da comunidade onde se localiza o sistema didático, a instituição de ensino da Matemática (I_{eM}). Assim, em nosso estudo, no modelo proposto por Castela, substituímos I_r por I_{SL} e I_p por I_{eM}, do qual o modelo de transposição correspondera ao seguinte:

Diagrama 3: Processo de transposição de saberes entre instituições I_{SL} a I_{eM}

$$[\mathrm{T}^{\mathrm{SL}}, \tau^{SL}, \theta^{SL}, \Theta^{\mathrm{SL}}] \qquad \left[T^{*SL},\ \tau_{eM}^{*SL}, \begin{matrix}\theta^{*SL}, \Theta^* \\ \theta_{eM}, \Theta_{eM}\end{matrix}\right] \begin{matrix} \leftarrow I_{SL}^* \begin{matrix}\swarrow I_{SL} \\ \nwarrow I_{eM}\end{matrix} \\ \leftarrow I_{eM} \end{matrix}$$

Fonte: Adaptado de Castela (2017, p. 422)

Aqui, primeiramente apontamos que, no caso especifico na nossa pesquisa, I_{SL} refere-se a uma instituição de jogo, neste caso, o jogo Ntxuva, para o qual se imagina desenvolver uma transposição para uma instituição de Ensino de Matemática I_{eM}. Trata-se de um processo que se supõe possibilitar a desnaturalização da prática rotineira e invariante de acesso ao saber da matemática, que se tem comumente fechado dentro da perspectiva do pensamento moderno ocidental de produção e difusão do conhecimento Matemático. Obviamente que, no trabalho ou prática com o Ntxuva, vários outros processos transpositivos podem ser mobilizados dependendo das finalidades, que são representados de I_{SL} para I_{SL}^{*}, cuja transações são controversas, às vezes difíceis de controlar.

Ao penetrarmos nesta possibilidade, encontramos no modelo de Castela (2017), uma ferramenta que possibilite a quebra de fronteiras entre a produção de saberes socioculturais locais ao ensino da matemática, permitindo que saberes matemáticos, especificamente escolares, sejam acessados por meio de outras sabedorias, que não se fecham somente dentro do pensamento moderno e hegemônico ocidental, ou mais especificamente, através de saberes localmente produzidos. Para analisar o processo de transposição que possa viabilizar esta possibilidade, (re)interpretamos o modelo de Castela (2017), ao nível inferior, isto é, $[T, \tau, \theta^{r}, \Theta] \leftarrow I_{r} \hookrightarrow [T^{*}, \tau^{*}, \theta^{p}, \Theta^{\mathrm{p}}] \leftarrow I_{p}$, que corresponde a transposição $[\mathrm{T}^{\mathrm{SL}}, \tau^{SL}, \theta^{SL}, \Theta^{\mathrm{SL}}] \leftarrow I_{SL} \hookrightarrow [T^{*SL},\ \tau_{eM}^{*SL}, \theta_{eM}, \Theta_{eM}] \leftarrow I_{eM}$, reconfigurado no esquema apresentado no Diagrama 4, que ilustra de modo geral, como se dão as relações que ocasionam os efeitos transpositivos quando saberes circulam ou são importados de I_{SL} para I_{eM}.

Diagrama 4: Modelo de circulação de praxeologias entre instituições I_{L} a I_{eM} e da relação ao objecto.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL})} \neq \emptyset \arrow[drr] & & \boldsymbol{R_{I_{eM}}(X_i,\ O_{eM})} \neq \emptyset \\
\boldsymbol{P_{SL}} = [\boldsymbol{T^{SL}}, \boldsymbol{\tau^{SL}},\ \boldsymbol{\theta^{SL}},\ \boldsymbol{\Theta^{SL}}] \leftarrow \boldsymbol{I_{SL}} \arrow[u] \arrow[rr, bend right, "\text{Dinâmicas praxeológicas}"'] & \hookrightarrow & \boldsymbol{P_{eM}} = [\mathbf{T}^{*SL}, \boldsymbol{\tau_{eM}^{*SL}},\ \boldsymbol{\theta_{eM}},\ \boldsymbol{\Theta_{eM}}] \leftarrow \boldsymbol{I_{eM}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Fonte: Os Autores (2020), adoptado de Chevallard e Castela

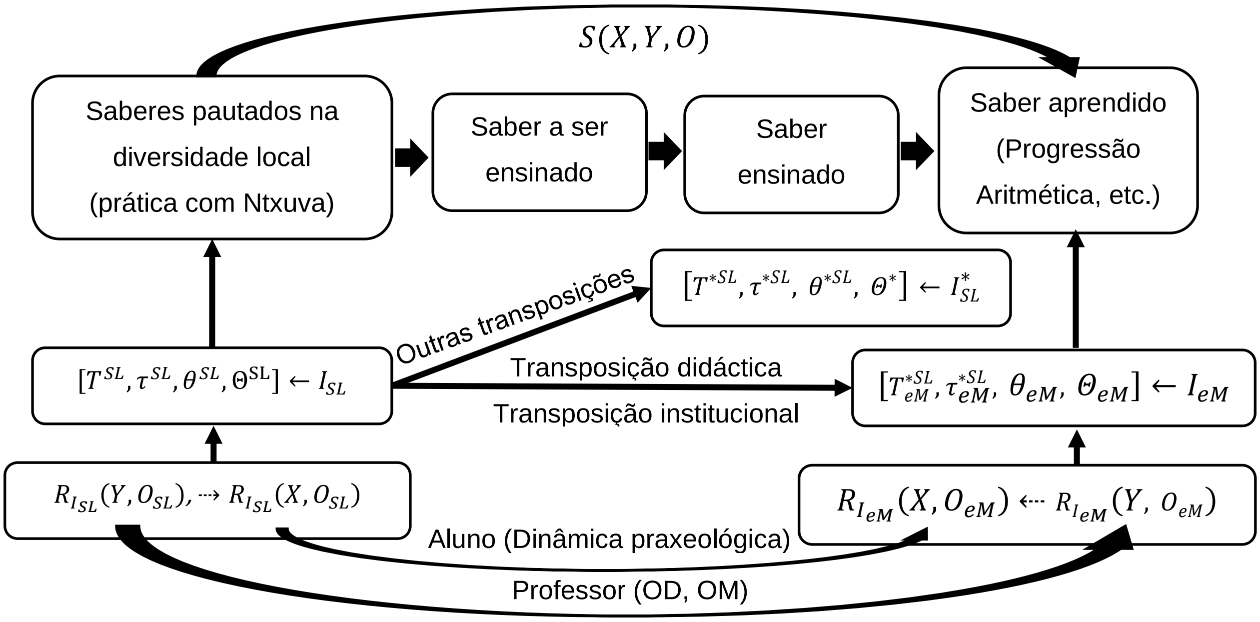
Lembramos que, toda simbologia assinalada por SL, representa um objecto (objecto no seu conceito geral) de origem ou produção sociocultural local de matriz não eurocêntrica e eM de (re)construção escolar, com especificidade para (re)construção no ensino da matemática. O que nos é indicado no Diagrama 4 é simplesmente um processo que ocasiona as modificações adaptáveis dos saberes produzidos ou que vivem em I_{SL}, que permitem acessar e/ou (re)construir saberes em I_{eM}.

Assim, para acessar os saberes em I_{eM}, na interpretação do modelo, é suposto que X_i (i = estudante, professor, ajudante de estudo, investigador, etc.) aproxime-se primeiramente do objecto local - O_{SL} em I_{SL}, cuja função social de I_{SL} é produzir e implementar praxeologias P_{SL} que permitam X_i ser um bom sujeito em I_{SL} ou simplesmente, que permitam X_i (re)construir seu $U(x)$ com relação a O_{SL}, denotado aqui por $R_{I_{SL}}(X_i, O_{SL})$.

Dessa relação, se obterá elementos que permitam o professor ou ajudante de estudo construir Atividades de Estudo, que constituirão parte de sua OD, do qual levará a sala para implementar com os estudantes, sob sua direção. Nesta ocasião, o professor construirá as atividades preliminares que permitirão levar o estudante a (re)construção de praxeologias P_{eM}, ocasionadas pelas modificações adaptáveis, que lhe permitam manter sua relação com objeto de ensino O_{eM} da matemática em I_{eM}, ou ainda, que X_i enquanto estudante seja um bom sujeito de I_{eM}, a que denotamos por $R_{I_{eM}}(X_i, O_{eM})$. Claramente, aqui o sistema de relações objeto – instituição – pessoa dentro do sistema escolar altera significativamente, sendo neste caso monitorado ou explicado pelo esquema de transposições de saberes e praxeologias entre instituições I_{SL} a I_{eM}, ilustrado no Diagrama 4.

No Diagrama 5, nos alicerçamos nos elementos da transposição didática, para representar todo movimento que ocasiona as mudanças adaptativas entre institucionais, com especificidade para transposição didática, apontando o ciclo de construção do saber deste à relação ao objeto imerso nos saberes socioculturais locais aos diferentes saberes que podem ser produzidos, incluindo os saberes matemáticos escolares. Aqui, reconhecemos que, qualquer saber para se mantiver em uma instituição para o qual não foi criado, sempre sofrerá modificações adaptáveis a este novo ambiente de vida.

Diagrama 5: Esquema das modificações adaptáveis do saber local ao saber matemático ensinado/aprendido



Fonte: os autores (2021)

Neste esquema, substituímos intencionalmente o saber-sábio pelos saberes pautados na diversidade local, acreditando que o fluxograma apresenta uma dinâmica que explica o processo transpositivo que tem por objectivo apontar ruptura as práticas de ensino que naturalizam o processo de difusão de praxeologia matemática escolar, pautada em uma única visão cultural, da hegemonia do pensamento moderno colonial, admitindo ou abrindo espaço para que outras epistemologias, de produção local, possam participar do processo de (re)construção do conhecimento matemático escolar.

Deste modo, a didáctica da matemática por meio da TAD, possibilitará que saberes que vivem em I_{SL}, cuja história se encarregou de silenciá-las e relegando-os lugar de atraso e do primitivismo, possam participar do processo de construção do conhecimento cientifico.

PARTE 3: DECLARAÇÃO DAS QUESTÕES DE PESQUISA, DOS OBJETIVOS E O PERCURSO METODOLÓGICO

Nessa parte, declaramos as questões e os objetivos que norteiam a pesquisa e, esclarecemos o caminho metodológico que seguimos em cada etapa, tanto para produção de dados quanto para análise dos mesmos.

3. QUESTÕES DE PESQUISA, OBJETIVOS E O PERCURSO METODOLÓGICO

Na tese, é defendida a ideia vinculada a uma postura de ruptura ao modelo de ensino alimentado por meio da exposição e hierarquização de conhecimentos e, que tem as praxeologias hegemônicas ocidentais como forma única para acessar o conhecimento de disciplinas diversas. Esta ideia é baseada na proposição de que, o modelo de ensino que tem sido praticado em sistemas de ensino diversos, como destacamos por exemplo, na subsecção 1.1 em relação ao SNE-Moçambique, tem criado uma espécie de silenciamento das sabedorias locais contra-hegemônicas.

Este silenciamento, que é fruto da colonização epistemológica e subalternização de sabedorias outras não eurocêntricas, leva a uma forte dependência epistêmica na construção escolar do conhecimento. Esta dependência, propicia então, que os alunos terminem seus ciclos de escolaridade sem, no entanto, terem construído uma ideia que lhes permita vincular a importância de suas práticas locais na construção de conhecimentos diversos, mas também, nas possibilidades que conhecimentos diversos podem propiciar a resolução de problemas locais próprios.

Com base nessa problemática, tentamos aqui levantar uma discussão a nível teórico que proponha utilizar uma pedagogia que visa o questionamento “dos mundos”, partindo de questões socioculturais locais, como ponto de partida para o ensino e aprendizagem de objetos de saber da disciplina de matemática. Portanto, nessa proposta pedagógica, com ajuda do professor, cogita-se que o aluno formalizará sua relação com o objeto matemático a partir de seu envolvimento aos saberes locais, considerando as transformações necessárias que possam existir no processo de deslocamento de praxeologias, como reforça D’Ambrósio (2013), ao sinalizar que, “no encontro de culturas há uma importante dinâmica de adaptação e reformulação desse ciclo” de transposição de saberes.

Nesta pesquisa, é tomado para o contexto sociocultural o jogo *Ntxuva*[20], que com a sua função social, se desenvolve na secção 8 um modelo didático de referência

[20] O ***Ntxuva*** é um jogo tradicional praticado no território Moçambicano, considerado também patrimônio cultural e que faz parte das modalidades de jogos praticados no FNJT/FJE. Trata-se de uma variante da família dos Jogos Mancala, jogo de tabuleiro, feito em madeira, betão ou outro material, mas também, podem ser feitas covas no chão para jogá-lo. (Paiva, 2018). Na sessão 5 são apresentados pormenores detalhados sobre o jogo.

baseado em AEP que integra o jogo para ensino da matemática. Assim, como ponto de partida para dar continuidade a pesquisa considerando a problemática levantada e a proposta que se deseja desenvolver, levantamos os seguintes questionamentos:

- Que articulações se podem estabelecer a partir dos elementos teóricos da TAD, que permitam a didática da matemática assumir uma postura teórica e prática de ruptura ao modelo de ensino que tem as epistemologias hegemônicas como forma única para acessar os objetos de saber da matemática escolar?
- Partindo de saberes que vivem ou podem ser exportados em práticas socioculturais contra-hegemônicos, como se pode conceber e implementar uma organização didática que integra o jogo Ntxuva ao ensino da matemática?

3.1. OBJECTIVOS GERAIS

Para responder aos questionamentos levantados e de acordo com as finalidades, a pesquisa segue desenvolvida na base de dois objetivos gerais, um a nível teórico, o objetivo geral 1 (OBG1) e outro, a nível prático, o objetivo geral 2 (OBG2), anunciados a seguir:

- **OBG1** – Analisar as contribuições e mostrar as potencialidades da TAD na análise da manutenção e questionamento das epistemologias dominantes no ensino e, da circulação de praxeologias entre instituições produtoras de saberes contra-hegemônicos a instituição de ensino da matemática;
- **OBG2** – Conceber um modelo didático de referência que integre o jogo Ntxuva ao ensino da matemática.

3.1.1. Objetivos específicos

O objetivo geral 1 como o objetivo geral 2 são materializados com base nos seguintes objetivos específicos:

- **OBE1.1** – Descrever e explicar como a TAD por meio da análise ecológica questiona e analisa a dependência acadêmica pelas epistemologias hegemônicas na produção e acesso aos objetos de saber da matemática escolar;

- **OBE1.2** – Explicar como o modelo praxeológico e de transposição de saberes entre instituições possibilita analisar os fenômenos de transposição de praxeologias entre instituições contra-hegemônicas a instituição de ensino da matemática;
- **OBE2.1** – Analisar por meio da abordagem da ecologia do didático como está instaurado e naturalizado a colonialidade no SNE-Moçambique e que objetos vivem nesse sistema;
- **OBE2.2** – Investigar e explicar o contexto sociocultural e a estrutura de funcionamento do jogo Ntxuva;
- **OBE2.3** – Conceber um modelo didático de referência baseado em AEP que integre o Ntxuva ao ensino da matemática;
- **OBE2.4** – Descrever e analisar as relações pessoais dos alunos da 12ª classe com os objetos de saber da matemática emergentes do encontro com as AEP que integram o Ntxuva para o ensino da matemática;

3.2. ABORDAGEM DE PESQUISA

A pesquisa segue uma abordagem qualitativa, primeiramente por não se embasar em métodos estatísticos para produção e análise de dados, mas também, por privilegiar o ambiente natural como fonte direta de coleta e produção de dados, propondo o contato direto do pesquisador com o ambiente e a situação investigada (LUDKE; ANDRE, 2018). De acordo com os objetivos e procedimentos, dentro dessa abordagem, a pesquisa possui um foco de investigação teórica e experimental no âmbito didático.

A investigação teórica alimenta o objetivo geral OBG1, no qual nos subsidiamos dela, primeiramente, para descrever e explicar como a abordagem ecológica permite questionar e analisar o modelo de ensino que hierarquiza conhecimentos e, torna linear e única as epistemologias dominantes, no acesso ao saber. Segundo, para descrever e explicar as relações entre os elementos que constituem o modelo praxeológico e de transposição de saberes, reconstituindo-os, descrevendo como estes modelos podem explicar e compreender os fenômenos de transposição de praxeologias entre instituições de produção de saberes contra-hegemônicos a instituição de ensino, no acesso ao saber da matemática escolar (FAUCHER, 2015; SPRENGER-CHAROLLES et al, 1987).

No objetivo geral OBG2, a perspectiva de investigação teórica incide sobre a crítica centrada na análise de produtos tais como documentos oficiais (leis, decretos e programas de ensino que norteiam os SNE), buscando pistas que permitam ilustrar os argumentos que justificam as condições e restrições de vida dos objetos de saber que emergem do encontro dos alunos com AEP que integra o jogo Ntxuva (SPRENGER-CHAROLLES et al., 1987, p. 66).

A experimentação alimenta o objetivo geral OBG2, e ela é sustentada pela metodologia da Engenharia didática e baseada em "realizações didáticas em aulas, ou seja, na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino" (ARTIGUE, 1995, p. 36). Diferentemente de outras abordagens experimentais em que a validação é externa, baseada em métodos estatísticos para comparação de grupos (pré e pós teste, experimental e controle), a experimentação didática que é levantada nesta pesquisa e que tem a engenharia didática como seu suporte metodológico, é baseada na validação interna, a partir do confronto entre a análise a priori, feita no processo de concepção da OD e, a análise a posteriori, feita a partir dos registros das realizações dos alunos no encontro com a OD específica (ARTIGUE, 1995).

Portanto, embora a experimentação seja baseada em realizações didáticas em aula, ela começa em um processo anterior, designadamente a análise preliminar, a concepção e análise a priori da situação didática, posteriormente após a experimentação propriamente dita, termina na avaliação e análise a posteriori (ARTIGUE, 1995, p. 38). Assim, concordando com Margolinas, Bessot e Coulange, o campo experimental em didática, se compõe por pelo menos dois sistemas, o sistema de turmas e o sistema de instituições:

> O sistema de turmas, formado pela turma, as fichas de preparação e todos os membros envolvidos ou que intervém neste contexto. O sistema de instituições de ensino, constituídas por textos oficiais, programas, manuais, revistas destinadas aos professores: coleta de informação sobre o presente, o passado e a evolução das instituições; caracterizar os possíveis estados de conhecimento de um determinado professor, em relação a um projeto de ensino, ou a um conhecimento matemático a ser ensinado. (MARGOLINAS, BESSOT, COULANGE, 2005 citado por DAINA, 2012, p. 63).

Na subsecção 3.2.2 apresentamos o percurso metodológico em que se descreve as ações demandadas nas diferentes fases da implementação da pesquisa.

3.2.1. Local de pesquisa

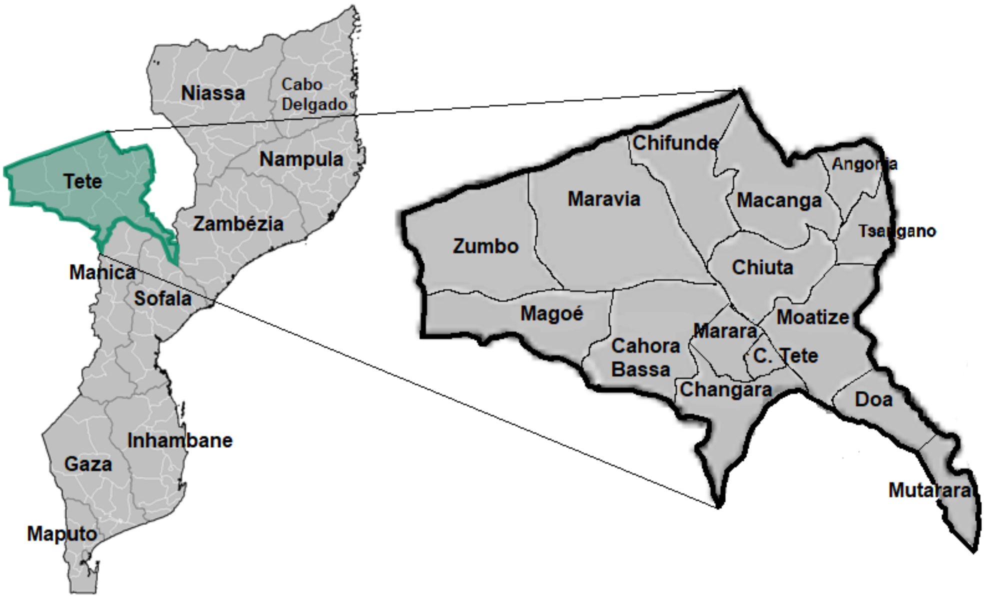
A pesquisa é realizada em Moçambique, especificamente na Província de Tete. Moçambique é um país africano, que é banhado a leste pelo oceano indico e faz fronteira com outros seis países da África austral, designadamente, Tanzânia a norte; Malawi e Zâmbia a noroeste, Zimbábue, África do Sul e Suazilândia (Eswatini) a oeste e África do Sul ao sul, como é ilustrado no Mapa 1 (MOÇAMBIQUE, 2015; GUAMBE, 2017). Cosmologicamente situa-se entre os paralelos $10^\circ\ 27'$ e $26^\circ\ 52'$ de latitude Sul e entre os meridianos $30^\circ\ 12'$ e $40^\circ\ 51'$ de latitude Este (GUAMBE, 2017, p. p. 18).

Mapa 1: Localização de Moçambique

Fonte: (GUAMBE, 2017)

O país tem como capital a Cidade de Maputo e possui 11 províncias distribuídas em três regiões, nomeadamente região norte, centro e sul. A província de Tete situa-se na região centro do país e é limitada por três países, nomeadamente, Malawi, Zâmbia e Zimbabwe, sendo Zâmbia e Malawi a norte, Malawi a este, Zâmbia e Zimbabwe a oeste e a sul com o Zimbabwe e três províncias Moçambicanas, Zambézia a este, Manica e Sofala a sul e entre as coordenadas de $14º\ 00'S$ e $17º\ 42'01''\ S$ e $30º\ 13'E$ e $35º\ 20'07''E$ (TETE, 2017). A província possui 15 distritos, designados respectivamente, Angónia, Cahora-Bassa, Changara, Chifunde, Chiuta, Dôa, Macanga, Magoé, Marara, Marávia, Moatize, Mutarara, Tete, Tsangano, Zumbo, como é ilustrado no Mapa 2.

Mapa 2: Divisão administrativa de Moçambique e da Província de Tete



Fonte: os autores (2022)

A escolha do local para pesquisa é movida pelo facto de ainda manter os traços culturais e/ou tradições históricas que sobreviveram à colonização a nível do país, em particular, na província de Tete. Entres as práticas culturais sobreviventes destacamos o jogo Ntxuva, que é hoje considerado patrimônio cultural nacional e é dos principais jogos que é disputado no torneio do festival nacional dos jogos tradicionais (FNJT) e nos festivais dos jogos escolares (FJE) em Moçambique. Na secção 4 é apresentado o jogo e suas caraterísticas.

3.2.2. Percurso e procedimentos de pesquisa

Como foi explicado ao iniciar a subsecção 3.2, a pesquisa compreendeu um estudo teórico e experimental. Iniciamos a nossa pesquisa com um estudo teórico, por meio do qual nos familiarizamos com os construtos teóricos e possibilitou-nos delinear os elementos metodológicos que embasam a pesquisa, o que é explicado na secção 3.2. A partir da compreensão destes construtos teóricos, levantamos uma discussão que possibilitou abrir o caminho para o diálogo teórico entre a TAD e a decolonialidade, que se inicia na secção 2 e é continuada na secção 4. A finalidade foi de discutir dentro do construto teórico da TAD e de acordo as finalidades do nosso estudo, o que consideraríamos uma posição decolonial na didática da matemática, ou melhor, como por meio da TAD entenderíamos a "decolonialidade didática" e, que mecanismos se podem desenrolar da TAD para explicar o fenômeno de circulação de praxeologias entre instituições contra-hegemônicas e instituição de ensino da matemática.

Com base nesse entendimento, foram traçadas possibilidades metodológicas para o questionamento da manutenção das epistemologias dominantes no ensino, a partir da abordagem ecológica do didático. Igualmente, a partir do modelo praxeológico e de transposição de saberes entres instituições, foi reconstruída uma possibilidade para delinear e explicar o processo de transposição de praxeologias que se observam e se podem explorar em práticas socioculturais contra-hegemônicas a instituição de ensino da matemática, como possibilidade para o acesso ao saber da matemática escolar a partir dos saberes socialmente subjugados e relegados ao primitivismo.

O estudo experimental compreendeu quatro fases, dentro do arcabouço metodológico da engenharia didática. Na fase 1 das análises preliminares, realizamos primeiramente um estudo quase etnográfico, em que visamos desenvolver uma pesquisa que se propôs a compreender a natureza do Jogo Ntxuva, a partir de sua função social. Esta subfase iniciou-se com o reconhecimento do local e dos potenciais praticantes do jogo, neste caso, localizados no Distrito de Changara, posto Administrativo de Luenha, localidade de N'temangau, Escola Primaria do 1º e 2º graus de Capimbi. A identificação do local e do principal praticante (o especialista em jogos tradicionais – in memoriam), foi feita a partir de um contato que tivemos com a representante do departamento do desporto escolar da província de Tete, quem nos indicou e nos colocou em contato com o especialista. Ainda assim, realizamos uma conversa técnica com a chefe do departamento do desporto escolar para compreender as nuances sobre o jogo Ntxuva e o FNJT/FJE que tem sido organizado por essa entidade, a nível da província de Tete.

Depois que contactamos o especialista, fomo-nos apresentar a localidade de N'temangau, onde é o seu local de trabalho e onde nos sediamos para realizar a nossa atividade investigativa referente a essa fase. A partir dele, foram identificados alguns anciões locais, com que trabalhamos conjuntamente na produção de dados. Desta feita, o trabalho de campo nesta fase contou com uma chefe do Departamento do Desporto Escolar da Província de Tete, um especialista e treinador de jogo Ntxuva para os torneiros do FNJT e FJE em Moçambique e quatro anciões da localidade de N'temangau.

Com estes intervenientes, a partir de uma observação direta participante e não participante e, uma entrevista não estruturada, procuramos obter informações acerca dos jogos tradicionais locais, com particular incidência sobre o jogo Ntxuva. Enquanto se realizava as entrevistas, foram realizadas algumas partidas demonstrativas entre os anciões, bem como o especialista. O pesquisador participou das atividades assistindo/observando as realizações do jogo e depois, praticando, ou efetuando algumas jogadas com os experientes, no objetivo de compreender e aprender melhor o jogo a partir da sua prática. As entrevistas, não formais, tinham como objetivo coletar informações que ao longo da observação não conseguimos captar ou compreender, para além de que, serviu para que pudéssemos saber um pouco mais sobre a história do jogo no local de estudos e organização do FNJT e FJE.

Com o especialista e os anciões, organizamos e realizamos um mini torneiro amigável sobre o *Ntxuva*, em 2020, que teve duração de um mês, realizado duas vezes por semana, a partir do qual, o investigador participou com duplo papel de observador (simples e participante). Nesta fase, os dados foram coletados através de gravador de áudio, captação de fotografia, filmagem e anotações. Tratou-se de um momento que permitiu não só observar, mas também investigar o funcionamento do *Ntxuva*, explorando as potencialidades praxeológicas utilizadas. Na Figura 5 ilustramos alguns momentos de trabalho de campo com o especialista e os anciões. Este estudo, cujas informações coletadas são apresentadas e analisadas na secção 4 e 6, permitiu a partir da análise dos múltiplos significados que os praticantes atribuem ao jogo, compreender sua praxeologia para posterior constituição das ideias que levaram à construção da OD, experimentada com os alunos da 12ª classe do SNE-Moçambique.

Figura 5: Realização de mini torneio de Ntxuva


Fonte: Autor (2021)

Ainda nas análises preliminares, realizou-se uma análise documental com a finalidade de compreender as condições e restrições instaurados no SNE, que possibilitassem a integração de práticas socioculturais no ensino, com especificidade para o ensino da matemática, bem como, a análise das relações institucionais esperadas e presentes no SNE. Esta análise que é apresentada na secção 4, foi feita a partir de um olhar analítico sobre os níveis de determinação e co-determinação didática, dentro dos questionamentos embasados na abordagem ecológica do didático, permitindo identificar, primeiramente, como a colonialidade está instaurada no SNE em Moçambique, segundo, que condições e restrições possibilitam incorporar nossa proposta de pesquisa no SNE, terceiro, identificar quais os ambientes de vida no SNE dos objetos de saber que emergem no encontro do os alunos com as AEP.

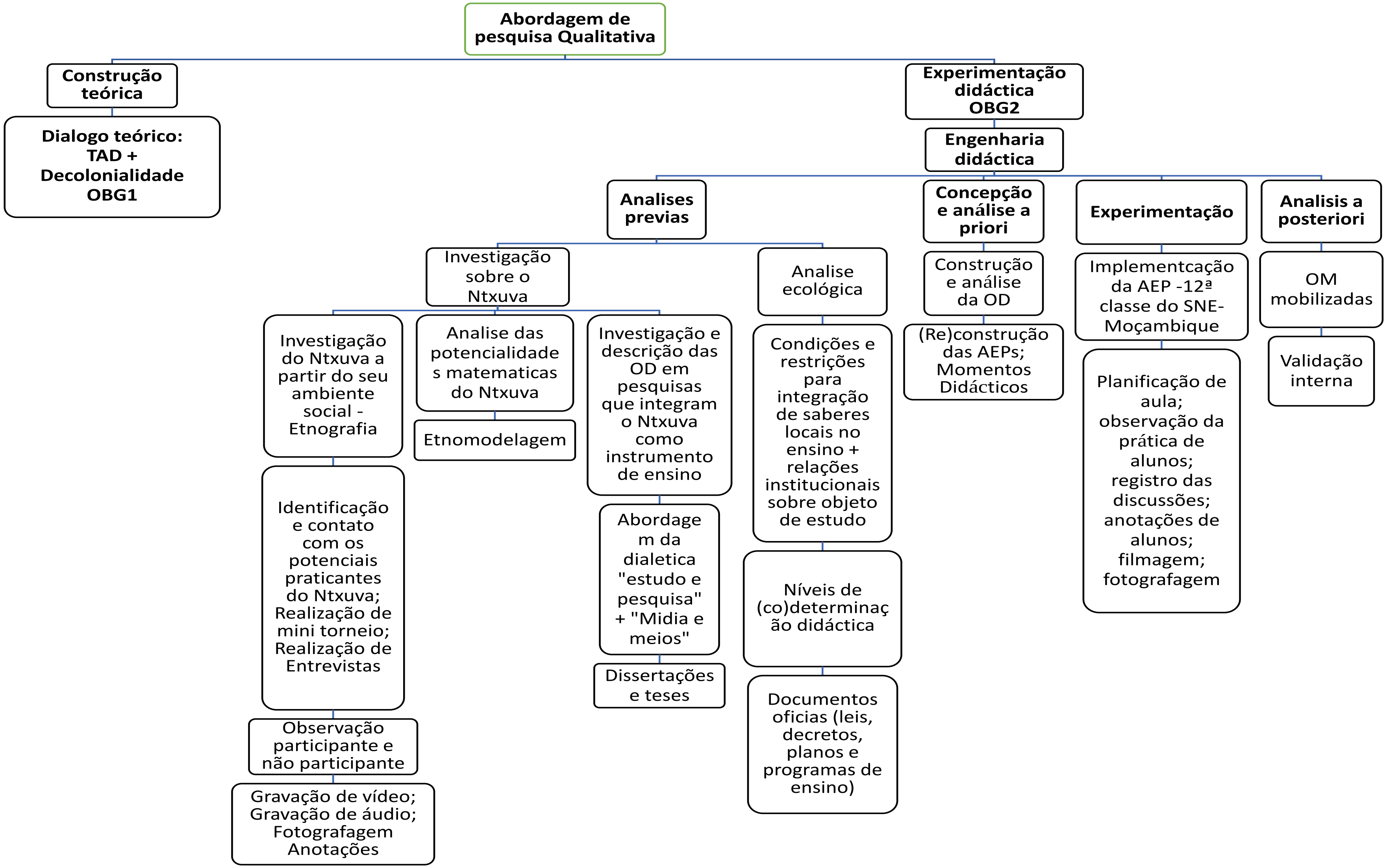
Para lograr nossa finalidade foram coletamos informações nas leis que definem a constituição da república de Moçambique (1975, 1990, 2004, 2018), do Plano Estratégico da Educação 2020- 2029, das leis que definem ou definiram o SNE em Moçambique (1992, 2018, 1983), da lei que aprova a Política Cultural e Estratégia de sua Implementação, do Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG) e dos programas de ensino da matemática no SNE em Moçambique.

Na secção 7, através da articulação da abordagem da dialética de “questões e respostas” ou de “estudo e pesquisa” enquanto abordagem metodológica, buscamos identificar e analisar nas teses e dissertações como foram construídas e implementadas as organizações didácticas que integram jogos da família Mancala como possiblidade para ensino.

Seguidamente, após as análises anteriores feitas, que nos permitiram compreender melhor o estudo, concebemos a proposta da OD baseada em AEP que foram implementadas a partir do sistema de classes, aos alunos da 12ª classe (compreendem a idade de 17 a 23 anos) da escola secundária do Zóbuè, província de Tete. A construção da organização didáctica e sua análise a priori é feita na secção 8. Na secção 9 são apresentados os resultados e feita a análise a posteriori e validação interna da experimentação.

Na Figura 6 é apresentada a síntese geral do percurso metodológico.

Figura 6: Síntese do percurso metodológico



Fonte: os autores (2022)

PARTE 4: ANÁLISE ECOLÓGICA E DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAL PRESENTES NO SNE – MOÇAMBIQUE

Esta parte é constituída pela secção 4. Nesta secção, apresentamos a análise documental com vista a perceber como a colonialidade está instaurada no SNE em Moçambique e quais as condições e restrições que possibilitam e impedem a integração da cultura no ensino. Esta análise é feita a partir de leis, decretos, programas de ensino que delineiam as políticas educacionais em Moçambique. Para alcançar os objetivos, a análise é feita a partir dos níveis de determinação e co-determinação didática.

4. CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES PARA INTEGRAÇÃO DE SABERES LOCAIS E AS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS PREVISTAS E PRESENTES NO SNE

Nesta secção, pretendemos apresentar os argumentos que delimitam e justificam a pesquisa, a partir de uma releitura teórica-crítica sobre os documentos oficiais, com incidência para análise exploratória das condições e restrições institucionais que permitem ou não permitem a integração da cultura e/ou de saberes locais no ensino. Também, tenta-se analisar o habitat e o nicho dos objetos de saber que emergem do contato dos alunos com as AEP.

Desta feita, buscamos compreender o que e como está posto no SNE sobre a integração da cultura e de saberes locais no ensino, mas também, analisamos o lugar e a função que os objetos de saber que emergem das AEP desempenham no SNE em Moçambique, através dos programas de ensino.

Esta análise, que é imbuída dentro do estudo da ecologia didática, propomo-la fazer à luz dos níveis de determinação e co-determinação didática, cujos elementos conceituais são apresentados na subsecção 4.1. Na subsecção 4.2, nos subsidiamos deste conceito para fazer a leitura dos documentos oficiais nesta lente de análise.

Assim, entre os documentos oficias de que buscaremos coletar os dados temos: as constituições da república de 1975, 1990, 2004; as leis que definem o SNE de 1983, 1990, 2018; a lei que define a integração cultural no ensino e sua implementação; o plano curricular do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral; o programa do ensino básico; os programas do ensino primário do 1º e 2º ciclo; os programas de ensino do ensino secundário (8ª, 9ª, 10ª, 11ª e 12ª classe).

4.1. NOÇÃO DE NÍVEIS DE DETERMINAÇÃO E CO-DETERMINAÇÃO DIDÁTICA

O PEA é mergulhado em um sistema complexo, regido por políticas que definem a natureza institucional às quais os intervenientes devem se sujeitar. Estas políticas constituem um conjunto de condições e restrições, internas ou externas, pelas quais as instituições são regidas e vão desde a definição geral das políticas educativas, as questões mais particulares que interferem diretamente no ensino, ou mais precisamente, na inter-relação objeto-instituição-pessoa.

Estas condições e restrições permitem situar e organizar a estrutura ecológica dos objetos de saber que emergem do encontro com a OD que integra o Ntxuva no ensino da Matemática. Elas permitem ainda descrever e compreender os argumentos que justificam e delimitam as condições de vida e/que determinam as OM sobre as quais os objetos vivem em seu ambiente conceitual, e que interferem no modo como são disseminadas essas OM, não só, mas também que interferem no modo como são constituídas as OD e vice-versa. Enfim, elas permitem descrever, compreender e monitorar as dinâmicas “didáticas ↔ matemática”.

Estas condições e restrições apresentam-se hierarquizadas em níveis de co-determinação (NC-DD) e de determinação (NDD) da OD e da OM, ilustrados na Figura 7, para o qual, o didata deverá se interessar para compreender o seu papel cientifico e político no PEA (CHEVALLARD, 2001, p. 2, 2002, p. 1).

Cada um destes níveis, referem-se a uma realidade e caracterizam a natureza do objeto em determinado ambiente de vida, isto é, o habitat e nicho ecológico dos objetos de saber, para as OM e OD, que permitirão tanto o didata enquanto investigador, quanto o professor enquanto ajudante de estudo, enxergar o que (não) é necessário se fazer para estudar/ensinar determinado objeto, diante das relações recíprocas mais gerais e específicas entre os elementos do SD (CHEVALLARD, 2001, p.3; ALMOULOUD, 2010, p.127; SILVA, R., 2017).

Os níveis -3, -2 representam as influências informais que podem interferir em outros domínios para além da escola. Os níveis -1, 0, 1 representam as influências políticas, que são expressas, em muitos casos, através de documentos oficiais e, os níveis 2, 3, 4, 5 representam as organizações praxeológicas.

Figura 7: Níveis de determinação ou co-determinação das OD e OM

Nível			Organização didática		Organização Matemática	O que representa?
- 3	↑↓	C-DD	Civilização			Influências informais
- 2			Sociedade			
- 1			Escola			Influências políticas, Documentos oficiais
0			Pedagogia			
1		DD	Didático	↔	Disciplina	
2			Domínio	↔	Global	Organizações praxeológicas
3			Setor	↔	Regional	
4			Tema	↔	Local	
5			Objeto	↔	Pontual	

Fonte: os autores (2021), adaptado de Chevallard (2002), Chacón (2008, p.73).

A hierarquia estabelecida constitui um caminho a ser percorrido de forma recíproca, para compreensão das condições e restrições que determinam as organizações praxeológicas, dos níveis mais baixos aos mais altos e vice-versa. De acordo com Chevallard (2002), ao nível mais baixo, encontramos o objeto, a unidade mínima, que é sobremaneira, de interesse dos alunos para o qual (re)constroem organizações praxeológicas correspondentes, de que serão sujeitos a serem avaliados, ao serem confrontados com determinado tipo de tarefa. Estas organizações pontuais são retiradas de uma organização local, que é de interesse direto do professor, para o qual se debruça para (re)criar organizações praxeológicas (OD e OM) sobre o tema, que deva levar a sala de aulas. O tema, é por sua vez, extraído de um sector, que corresponde ao agrupamento de organizações locais em torno de uma única teoria, mais precisamente a organização regional, que também, são extraídos de uma organização maior, a organização global, sendo esta última extraída de uma determinada disciplina.

O nível 0, a pedagogia, que se situa na confluência entre os NC-DD e NDD, apresenta-se então como “a sede das condições e restrições que moldam a atividade do professor – y (e do aluno – x), sem, naturalmente, determinar o que está atividade tem a ver com a especificidade do número dos conteúdos de aprendizagem” (CHEVALLARD, 2009, tradução nossa). Trata-se de um nível bastante estratégico, para o qual são definidos, produzidos e propostos modelos que elucidem “às ações destinadas a conduzir x ao objeto O” (CASTELA, 2019, p. 22), ou melhor, a sede das condições e restrições que define a posição e o papel institucional de y e x, quando x é conduzido a O. Entretanto, de acordo com Chevallard,

> No nível de pedagogia não há nada especificado, pois, em muitos casos, tudo se passa como se cada um dos níveis de determinação fosse vivido de forma isolada por aqueles que nele intervêm em plena legitimidade. Ao mesmo tempo, e, portanto, de forma aparentemente taxativa, a intenção de mudar uma restrição de um determinado nível só se justifica pelos seus efeitos – em geral não explicitados – a outros níveis da hierarquia didática. (CHEVALLARD, 2002, p. 12, tradução nossa).

Em alusão à citação de Chevallard, digamos que o professor possui neste caso, liberdade absoluta de estruturar e definir as formas, as ações que possam conduzir o aluno ao encontro do objeto de saber, entretanto, estas ações devem observar o cumprimento dos objetivos. Chevallard (2002) chama atenção que, ainda que se pense na liberdade pedagógica do professor, essa liberdade é, no entanto, limitada, pois, ela é exercida respeitando as condições e restrições pedagógicas.

Acima do nível de pedagogia, encontramos o nível de escola, sociedade e civilização, que constituem os níveis de co-determinação didática. O nível de escola refere-se as restrições e pontos de apoio relacionados com a própria instituição escola, que interferem nas condições de estudo (CHEVALLARD, 2002). Trata-se do que materialmente permite e legitima socialmente as ações pedagógicas e didáticas (CASTELA, 2019, p. 22). Os níveis de sociedade e civilização representam influências que podem ser informais e que influenciam outros domínios para além da escola. Por exemplo, a civilização colonial ocidental e a civilização resiliente africana podem determinar o PEA, bem como a relação dos professores com a matemática.

Em geral, e de acordo com Chevallard (2002, p. 10, tradução nossa), “enquanto os professores estão confinados ao nível dos temas e os alunos ao nível do objeto, as várias entidades da noosfera operam nos níveis superiores – sectores, domínio, disciplinas”. Estas entidades atuam na transição entre os níveis descritos, no controle dos vários domínios disciplinares/didático, assumindo um papel que lhes permite regulamentar e legitimar o que e como (não) se deve ensinar. O nível de pedagogia é um tanto quanto representado pelos especialistas pedagógicos-didáticos e o da escola tem um caráter representativo mais politizado.

4.2. ARGUMENTOS QUE DELIMITAM E JUSTIFICAM A PESQUISA: CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES INSTITUCIONAIS

Estabelecemos os NC-DD e NDD para descrever os argumentos que justificam e delimitam a pesquisa. Estes níveis nos ajudaram a demarcar uma primeira análise didática, pelo qual se irá descrever as condições e restrições impostas para integração de saberes locais no ensino, com especificidade para integração do jogo Ntxuva. Também, analisamos como é o habitat e nicho dos objetos de saber que emergem do contato com as AEP proposta na secção 8.

Compreender estas condições e restrições, bem como o lugar de vida e função dos objetos no SNE, permitirá posteriormente nos situarmos melhor na abordagem da proposta da OD e OM que se pretende desenvolver, através da conexão entre o lócus e a prática sobre o Ntxuva”. Portanto, ao tentarmos explorar as praxeologias sobre o jogo Ntxuva, que possibilitem acessar determinados objeto matemáticos, precisamos,

> por meio dos NC-DD identificar as relações entre os grandes princípios que regem a Educação em Moçambique e as Diretrizes que permitem a incorporação de conteúdos locais no ensino. Assim, as diretrizes, os

> documentos oficiais elaborados pelo Ministério da Educação e outras entidades governamentais, geram condições e restrições, ou melhor, pontos de apoio ou não apoio que terá influência sobre o modo como é conduzido o estudo de objetos matemáticos específicos (CARVALHO, BELLEMAIN, 2015, p.127).

Embora possamos identificar nos documentos oficiais elementos que nos possibilitam, em partes, descrever as condições e restrições para integração de saberes locais no ensino, ao NC-DD, buscamos também analisar as influências informais que podem propiciar ou não propiciar esta integração, olhando sobretudo, como a esfera da civilização e da sociedade tem estado a influenciar na implementação das políticas educacionais.

No Quadro 2, é apresentado como a proposta de estudo está situada em relação ao NC-DD e NDD das OD e OM. Nas subsecções a seguir descrevemos dentro dos diferentes níveis, os elementos, as condições e restrições que justificam e delimitam o estudo.

Quadro 2 - Níveis de determinação ou co-determinação no contexto da pesquisa

Níveis	OD e OM	Contexto da pesquisa
-3	Civilização	Africana: influenciada pela civilização colonial capitalista, socialista-marxista e nativa-tradicional
-2	Sociedade	Moçambicana
-1	Escola	Ensino secundário geral (ESG) – II ciclo
0	Pedagogia	12ª classe do SNE
1	Disciplina	Matemática
2	Domínio (Global)	Aritmética com transição para algébrico
3	Sector (regional)	Funções reais de variável natural
4	Tema (local)	Sucessões numéricas
5	Objecto (pontual)	Progressão aritmética

Fonte: os autores (2021)

4.2.1. Condições e restrições impostas ao nível de civilização e sociedade

Antes de qualquer avanço para descrever esta subsecção, nos propomos a questionar: o que realmente está posto a nível da civilização e da sociedade, que incita ou impede a integração da cultura/saberes locais no SNE em Moçambique? Para responder esta questão, que é um tanto quanto complexa, recuamos um pouco a subsecção 1.1 para (re)contextualizar alguns elementos que caracterizam ou caracterizaram o SNE em Moçambique.

Na subsecção 1.1 foi apontado que, o SNE em Moçambique passou por três momentos, respectivamente, a educação tradicional, a educação colonial e a educação pós-independência. Cada um desses momentos foi marcado por práticas e políticas educacionais próprias, que foram influenciadas pela civilização que dominava, ancorada na ideologia política-administrativa do momento.

A educação tradicional marca o primeiro momento do SNE em África, em particular, em Moçambique e, ela baseava-se na transmissão de hábitos, costumes e saberes que permitiam os jovens ministrar suas vidas na comunidade, conferindo-lhes elementos para inserção e aceitação em suas sociedades, (BASÍLIO, 2014). Esta prática educacional, é em partes, rompida com a colonização, que, sob uma visão ancorada ao padrão de civilização europeia, é introduzida um sistema de ensino diferenciado do tradicional, que pressupunha “formar uma mão-de-obra alfabetizada para atender o desenvolvimento das relações coloniais e garantir a posse e o domínio sobre o território colonial” (BASÍLIO, 2014, p. 123).

Aqui, afirmamos “rompida em partes”, pois, pelo menos em Moçambique, nas zonas urbanas, as ditas metrópoles, os locais onde as famílias dos colonos estavam majoritariamente instaladas e umas poucas famílias nativas, eram os locais de maior influência da educação colonial, por onde o governo colonial dava maior atenção em relação a criação de condições para educação (CASTIANO, 2005). Portanto, embora a colonização pudesse afetar as zonas rurais, os locais onde encontravam-se instalada a maior parte da população nativa, a educação tradicional, ainda que proibida pelo colono, era praticada nestes locais. Este facto permitiu a sobrevivência, ainda hoje, de boa parte da cultura, dos hábitos e costumes locais africanos e de Moçambique.

A educação colonial marca então o segundo momento que o SNE em Moçambique observou, sob forte influência dos padrões de civilização e de produção de ciência europeia. Este momento foi então marcado pela exclusão/restrição, ou melhor, impedimento da integração de práticas socioculturais dos nativos na educação/ensino, entendidas como primitivas e não civilizadas, à luz do padrão de civilização Europeia.

O terceiro momento que demarca o SNE em Moçambique é o pós-independência. Este momento é caracterizado por se introduzir diversas reformas políticas e curriculares no sistema de educação. Com estas reformas, visava-se criar um sistema que fosse alternativo ao sistema de educação colonial, cuja educação pudesse estar ao serviço de todos moçambicanos, ao mesmo tempo que se pudesse garantir a qualidade de ensino, o que é destacado no artigo 92 da constituição da república de 1990, sinalizando que: “na República de Moçambique a educação constitui direito e dever de cada cidadão. O Estado promove a extensão e a igualdade de acesso de todos os cidadãos ao gozo deste direito” (MOÇAMBIQUE, 1990, p. 8). Neste momento, foram abolidas algumas políticas coloniais, que instigavam o racismo e segregacionismo educacional, porém, as reformulações curriculares continuariam herdadas do padrão de ensino europeu, conduzindo o SNE, em grande medida, à manutenção do padrão de produção de ciência ocidental no acesso ao saber escolar.

Enfim, a educação formal no Moçambique pós-independência não retornou ao sistema de educação tradicional e não se distanciou do padrão europeu. Este elemento é sinalizado por Basílio (2014, p. 113), quando afirma que “o sistema de educação em Moçambique, neste momento, foi fruto da organização dos movimentos revolucionários nativos, que subverteu os horizontes da educação colonial, porém, sem distanciar-se dos padrões europeus de organização do ensino”.

A manutenção do padrão educacional europeu no SNE em Moçambique, na produção e acesso ao saber, deve-se por um lado à falta de condições econômicas e infraestruturais que visassem garantir a introdução das novas políticas de massificação da educação, o que levou o estado a beneficiar-se do material educacional colonial e de suas infraestruturas, para implementação das novas políticas educacionais. Por outro lado, a insuficiência do quadro do pessoal docente formado e qualificado, também conduziu numa primeira instância da edificação da educação, a solicitação de ajuda estrangeira europeia de profissionais para apoio na formação e massificação da educação e outros sectores de desenvolvimento do país. Obviamente que, estes profissionais conduziam o PEA sob uma visão de ciência europeia.

Portanto, a tentativa de deserdar-se do sistema de educação colonial foi controverso, na medida em que, ao tentar implementar as novas políticas educacionais, o estado moçambicano se socorria das bases herdadas do colono para suportar e suprir as necessidades que demandavam a massificação e qualidade da educação. A esse respeito, Castiano fundamente que:

> Na busca da afirmação de um sistema de educação que fosse uma alternativa ao colonial, implementa-se, em 1977 até 1982, passo a passo, uma administração centralizada[21]. No entanto, neste processo, socorre-se, paradoxalmente, a herança do sistema colonial: teve que recorrer-se aos

[21] “Na administração centralizada, a intenção do governo de Moçambique era a de construir um sistema que refletisse a política de massificação e garantia da unidade nacional”. (CASTIANO, 2005, p. 36). O estado detinha todo poder e controle sobre a educação. Não havia privatizações.

> professores formados, a uma parte do então existente material escolar colonial. (CASTIANO, 2005, p. 36-36).

Obviamente que, as condições econômicas e a falta de mão de obra qualificada para responder aos desafios de desenvolvimento do país pós-independente, contribuíram para que, ainda o sistema educacional se tornasse refém dos padrões educacionais europeus, tanto que, para a comunicação oficial a nível nacional, adota-se o Português como língua oficial. Em princípio, essa língua é adotada porque boa parte do material escolar utilizado estava na língua portuguesa[22] e o país, até ao momento não disponha de condições para produzir seu próprio material, para além do factor ligado à diversidade linguística no país.

Portanto, a civilização colonial ainda continuará a influenciar o sistema educacional, mesmo que implicitamente. Embora a constituição da república incentivasse a difusão da cultura e da língua[23] local, na prática, no período compreendido entre a proclamação da independência e as reformulações curriculares de 2004, o sistema de ensino não integrava na prática a cultura e/ou os saberes locais como possibilidade para acessar saberes de disciplinas diversas, pois, o sistema de ensino privilegiava em grande medida os padrões epistemológicos do pensamento moderno colonial no acesso ao saber.

Outro elemento que não se pode deixar de lado quando se fala das influências no sistema educacional é o da ideologia adotada pelo país, a ideologia socialista-marxista[24], que ao nosso ver, contribuiu de alguma maneira para não integração da cultura e/ou dos saberes locais no ensino, uma vez que, em seu modo de operacionalização, tende a sobrevalorizar a ciência e a tecnologia, ao mesmo tempo que leva a uma rejeição de certos aspectos das culturas nativas.

No artigo 52, ponto 1 da constituição da república de 1990, pode-se compreender esta proposição, quando se formula que: “a República de Moçambique

---

[22] Actualmente o país possui cerca de 43 variantes linguísticas de origem Bantu, sendo as mais faladas, a língua macua ocupando cerca de 26,3% da população, o changana em 11,4% e o elomwe em 7,9%.

[23] Artigo 5, ponto 1 e 2 da constituição da república de 1990: “na República de Moçambique a língua portuguesa é a língua oficial. O Estado valoriza as línguas nacionais e promove o seu desenvolvimento e utilização crescente como línguas veiculares e na educação dos cidadãos”. (MOÇAMBIQUE, 1990, p. 2).

[24] As políticas educacionais do novo estado de 1975, ou melhor, do Moçambique pós-independente, orientava-se por uma série de princípios gerais que se pensava serem práticas bem sucedidas nos pais socialistas, entre os quais o mais sagrado é a garantia do acesso de todas as crianças à educação através da nacionalização da escola. (CASTIANO, 2005, p. 16-17).

promove uma estratégia de educação visando a unidade nacional, a erradicação do analfabetismo, o domínio da ciência e da técnica, bem como a formação moral e cívica dos cidadãos" (MOÇAMBIQUE, 1990, p. 5). Como é de notar, em suas estratégias educacionais não é aqui pontuado a necessidade da integração da cultura e dos saberes locais no ensino.

Com "a abertura da economia e uma transição política entre 1984 a 1992" (CRUZ, SILVA, 2001), em que o país começa a liberar-se pouco a pouco do socialismo-marxista, entrando numa economia capitalista, vai se pensando nas estratégias de integração da cultura no ensino. Assim, em 1997 é aprovada a política cultural e sua implementação, sendo que entre seus objectivos é destacada a integração da cultura no ensino. Entretanto, embora esse desejo seja expresso a partir dos documentos oficias, na prática não havia integração da cultura no ensino, pelo facto de muito dos educadores matemáticos terem sido formados e terem estado a agir dentro da matriz do pensamento moderno colonial.

Esta tendência de rejeição da integração da cultura e dos saberes locais no ensino perdura até a reformulação curricular de 2004, onde entre várias inovações curriculares, é integrado o currículo local no ensino, visando pensar-se em cada disciplina nas possibilidades de situações de ensino problematizadas a partir do contexto real dos alunos. Esta reformulação curricular dá uma abertura mais clara à integração da cultura e dos saberes locais no ensino o que em partes, abre espaço mais claro para integração da proposta de ensino em que a pesquisa se debruça, sobre a integração do jogo Ntxuva no ensino da matemática.

Perante essa relutância à implementação da integração da cultura e/ou dos saberes locais nos diversos espaços de produção de saber em Moçambique, por exemplo, um questionamento ecológico sobre um objecto de saber genérico, ao nível da civilização, da sociedade e da escola pode ser: o que faz com que não se explore ou utilize praxeologias de práticas culturais dos povos nativos no ensino?

Uma resposta hipotética pode associar-se à problemática de que as sociedades dominantes nos países descolonializados pretendem alcançar o modelo de vida ou civilizatório ocidental, com seus valores baseados no crescimento, no consumo de bens materiais, etc., no desenvolvimento industrial. Daí eles se remetem a essa ideia de construção de um projeto universal de construção das suas sociedades, para aproximar se aos níveis de uma civilização hipoteticamente aceita, na visão ocidental. Assim, as políticas destes países tendem a caminhar para formação de engenheiros e outros profissionais que devam atender esse projeto universal da ciência e de construção das sociedades. O ensino, como um dos segmentos para construção destas sociedades, acaba sendo enraizado nesse modelo de construção da ciência e do conhecimento escolar assente na matriz epistêmica ocidental. Além disso, como o tempo escolar tem limites, muitas das vezes os educadores não tentam usar esse tempo para ensinar culturas diferentes, incluindo a integração de conhecimentos de povos originários no ensino.

De qualquer forma, em nível da civilização a educação em Moçambique encontra-se influenciada por três civilizações diferentes: a civilização nativa (tradicional), a civilização colonial capitalista, a civilização ancorada na ideologia socialista-marxista. Relativamente na civilização tradicional nativa, o trabalho encontra sua acomodação na cultura Africana, justificada pelo facto de estudos como de Culin (1894), Murray (1952), Perreira (2011), entre outros, apontarem fortemente a origem do Jogo Ntxuva na África, mas também, porque a pesquisa ocorrerá em solo Africano, especificamente em Moçambique. Na subsecção 7.1, é feita a descrição histórica e da localização geográfica do Ntxuva na África.

Portanto, o jogo Ntxuva constitui um objecto comum nesta sociedade moçambicana, tanto que em 2008 é decretado como patrimônio cultural e posteriormente tendo estado a incorporar os jogos que compõem o FNJT/FJE moçambicanos. Neste caso, o jogo Ntxuva é justificado pelo Decreto N.º 65/2008, de 23 de dezembro, que classifica o Local Histórico de Nwadjahane (LHN) como Patrimônio Cultural e o Diploma Ministerial n.º 185/2013 que estabelece os princípios e as regras de conservação, gestão e uso do LHN, a partir do qual são definidos 8 elementos que constituem o LHN, entre eles o Ntxuva. Na secção 7 caracterizamos o jogo Ntxuva, entre sua origem a sua prática.

4.2.2. Condições e restrições impostas a nível de escola e de pedagogia

Ao nível de escola e pedagogia, a pesquisa tem a sua base no Plano Estratégico da Educação (PEE), PCESG, e na resolução nº 12/97 de 10 de junho de 1997, que abre espaço para integração do currículo local nas diferentes disciplinas. Embora esses documentos não indiquem diretamente o uso do Ntxuva no ensino, eles preveem e promovem a integração de elementos culturais no ensino, como é expresso na resolução nº 12/97 que “aprova a Política Cultural e Estratégia de sua Implementação”, ao estabelecer em seus objectivos específicos alínea c) a “promoção a integração dos valores socioculturais nos currículos do ensino" (MOÇAMBIQUE, 1997, p. 6).

Os documentos oficiais PEE, PCESG/PCEB são mais precisos ao apontarem "para a melhoria da qualidade do ensino, a utilização de pedagogias centradas no aluno, o recurso ao currículo nacional, incluindo o currículo local" MINEDH (2020, p.73), o que relata uma condição importante para nossa pesquisa, uma vez que, estaremos desenvolvendo uma proposta de ensino em que o aluno será em grande medida o percursor da construção de seu próprio universo cognitivo, a partir das AEP que levaram em conta o Ntxuva como dispositivo didático.

Considerando o nível de pedagogia "a sede das condições e restrições que moldam a actividade do professor (e dos estudantes), sem, naturalmente, determinar o que está actividade tem a ver com a especificidade do número dos conteúdos de aprendizagem" (CHEVALLARD, 2009), notamos a partir dos documentos oficiais acessibilidade das condições e possibilidade para operacionalidade da nossa pesquisa, no SNE-Moçambique. Estas condições que dão vida e permitem justificar a implementação da pesquisa no SNE-Moçambicano, são ainda reforçados no PCEB e PEE, ao se reafirmar que;

> Um dos grandes objectivos da presente proposta curricular é formar cidadãos capazes de contribuir para a melhoria da sua vida, a vida da sua família, da comunidade e do país, partindo da consideração dos saberes locais das comunidades onde a escola se situa. Para tal, os programas de ensino devem prever uma margem de tempo, que permite a acomodação do currículo local. Isto é, a escola tem à sua disposição um tempo para a introdução de conteúdos locais, que se julgar relevante para uma inserção adequada do educando na respectiva comunidade. Os conteúdos locais devem ser estabelecidos em conformidade com as aspirações das comunidades, o que implica uma negociação permanente entre as instituições educativas e as respectivas comunidades. As matérias propostas para o currículo local, devem ser integradas nas diferentes disciplinas curriculares, o que pressupõe uma planificação adequada das lições. A carga horária do currículo local é de 20% do total do tempo previsto para a leccionação em cada disciplina. (INDE/MINED, 2003, p. 27; MINEDH, 2020).

A citação anterior é mais exaustiva e clarificadora sobre a implementação do currículo local no SNE-Moçambique, apontando não só condições, mas também restrições e recomendações importantes, que se devem levar em consideração nos programas de ensino das respectivas disciplinas. Os saberes locais devem estar alinhados às comunidades onde a escola está inserida, uma condição e restrição importante, que permitirá permear os conteúdos matemáticos à produção de sentidos e afectos a aqueles para quem se deseja ensinar a matemática, posição importante para a ação/postura epistemológica decolonial que pretende sustentar a pesquisa. O Ntxuva, sendo um jogo local moçambicano, praticado por quase todo o país, encontra a esses níveis de determinação e co-determinação das OD e OM, argumentos básicos que justifiquem a sua utilização em ambiente de ensino. Entretanto, embora seja estabelecida uma percentagem de 20% do tempo previsto para lecionação das disciplinas, os documentos oficiais ainda não são claros nas orientações metodológicas para integração efectiva do currículo local nas diferentes disciplinas, em particular, na disciplina de matemática.

4.2.3. Condições e restrições impostas a nível de determinação didáctica

Com relação ao nível da disciplina, a pesquisa se articula no campo da matemática, cuja aprendizagem ao nível do ESG do 2º ciclo visa, entre outros aspetos, "contribuir para o desenvolvimento das capacidades de utilizar a matemática como instrumento que permite reconhecer, interpretar, intervir e resolver problemas reais existentes nos diversos campos de actividade humana (social, econômico e cultural) e nas diversas áreas curriculares" (INDE/MINED, 2007, P. 53). A nível do domínio, ela se insere no campo da aritmética, com uma transição para o algébrico.

Trabalha-se com este ciclo de escolaridade, primeiramente pelo facto de ser o ciclo de ensino que incorpora as classes terminais do SNE em Moçambique, no caso, a 11ª e 12ª classe. Segundo, pelo facto de que entre os objectos que emergem do contato com as AEP, consta o objecto sucessão numérica que é ensinada na 12ª classe. Terceiro, ao nível da 12ª classe o aluno terá reunido, mesmo que implicitamente, conhecimentos prévios que o possam auxiliar no trabalho com as tarefas propostas na AEP, como os casos de conhecimentos sobre: aritmética (contagem, adição, subtração, divisão euclidiana, sucessão numérica), conhecimentos sobre álgebra (transição do domínio numérico para algébrico, trabalho com equações, inequações e sistema de equações).

Estes conteúdos, que constituem ferramentas essências para que o aluno possa trabalhar com as AEP propostas, tem o seu habitat ao longo de diferentes classes do SNE em Moçambique. Por exemplo, a aritmética básica (contagem, adição, subtração) é objecto de ensino no subsistema do ensino primário do primeiro ciclo. Portanto, logo que o aluno entra na escola, sobre tudo na 1ª classe, já se depara com estes objectos, como é ilustrado no Quadro 3, nas unidades temáticas "vocabulário básico" e "números naturais e operações". Nas classes subsequentes este objecto continua sendo ensinado, evoluindo-se na complexibilidade da quantidade de algarismos com que se realiza as operações.

Quadro 3: visão geral de conteúdos da disciplina de matemática, 1º ciclo do ensino primário

Unidade Temática	Conteúdos (1ª classe)	Carga Horária	Conteúdos (2ª classe)	Carga Horária	Conteúdos (3ª classe)	Carga Horária
VOCABULÁRIO BÁSICO	Noções de: quantidade, tamanho, posição, distância, direcção/sentido e massa-peso.	40 Tempos				
NÚMEROS NATURAIS E OPERAÇÕES	– Leitura e escrita de números naturais até 50; – Operações de adição e subtracção até 50.	280 Tempos	– Revisão dos números naturais até 50; – Números naturais até 100; – Números ordinais até 20º; – Adição e subtracção até 100; – Multiplicação e divisão de números naturais até 50.	260 Tempos	– Revisão dos números naturais até 100; – Números naturais até 1 000; – Números ordinais até 30º; – Números romanos até vinte (XX).; – Adição e subtracção até 1000; – Multiplicação e divisão de números naturais até 1000.	260 Tempos
ESPAÇO E FORMA	– Identificação de linhas e segmentos; – Identificação de figuras planas (quadrado, rectângulo, triângulo e círculo); – Noção de ponto.	20 Tempos	– Linhas curvas e rectas; – Noção de segmento de recta; – Figuras planas (quadrado, rectângulo, triângulo e círculo); – Sólidos geométricos (bloco, cubo, esfera e cilindro).	35 Tempos	– Rectas e segmentos de recta; – Figuras Planas (quadrado, rectângulo, triângulo e círculo); – Círculo e a circunferência; – Sólidos geométricos (bloco, cubo, esfera e cilindro).	40 Tempos
GRANDEZAS E MEDIDAS	– Noções elementares de medição de comprimentos, capacidades, volumes e massa.	20 Tempos	– Medição de comprimentos (noção do metro); – Capacidades (noção do litro); – Massas (noção de quilograma); – Relógio (horas inteiras); – Calendário (dia, semana, mês e ano); – O dinheiro moçambicano.	65 Tempos	– Unidades de comprimento; – Perimetro de figuras planas; – Unidades de massa: O quilograma (kg) e o grama (g); – Unidades de capacidade: O litro (*l*) e o mililitro (ml); – O dinheiro moçambicano; – Relógio (horas e minutos); – Calendário (o dia, a semana e os meses do ano).	40 Tempos
Revisão		20		20		40
TOTAL		380		380		380

NOTA: Os 20% do Currículo Local já estão inclusos nos 380 Tempos lectivos.

Fonte: INDE/MINEDH (2018)

A divisão euclidiana, que é outro objecto que emerge no trabalho com as AEP propostas, também é de conhecimento dos alunos, pois, a partir da 2ª classe os alunos já começam a operar com a divisão, embora não trabalhem direto com os critérios de divisibilidade. Como é ilustrado no Quadro 3, unidade temática “números naturais e operações”, a partir da 2ª classe o aluno começa a trabalhar com a multiplicação e divisão de números naturais até 50. Nas classes subsequentes a complexibilidade no trabalho com a divisão vai evoluindo, como se pode ver no Quadro 4, na unidade temática “número naturais e operações” para 4ª, 5ª e 6ª classe.

Quadro 4: visão geral de conteúdos da disciplina de matemática, 2º ciclo do ensino primário

UNIDADE TEMÁTICA	4ª classe		5ª classe		6ª classe	
	Conteúdos	Carga Horaria	Conteúdos	Carga Horaria	Conteúdos	Carga Horaria
NÚMEROS NATURAIS E OPERAÇÕES	• Revisão dos números naturais até 1000 • Os números naturais até 1 000 000 • Números ordinais até quinquagésimo (50º);Números romanos até cem (C).Múltiplos de 1000, 10 000, e 100 000	170	• Revisão dos números naturais até 1 000 000 • Os números naturais até 1 000 000 000 • Números ordinais até centésimo (100º); • Números romanos até mil (M); • Múltiplos de 1000 000 e 10 000 000 e 100 000 000.	155	• Revisão dos números naturais até 1 000 000 000 • Números naturais até um bilhão (1 000 000 000 000); – Números romanos maiores que 1 000; • Múltiplos de 1 000 000 000, 10 000 000 000 e 100 000 000 000	135
	• Adição e subtracção até 1 000 000.		• Adição e subtracção até 1 000 000 000.		• Adição e subtração até 1 000 000 000 000,	
	• Multiplicação e Divisão até 1 000 000;.		• Multiplicação e divisão de números naturais até 1 000 000 000 • Noção de potência • Valores aproximados • Valores médios		• Multiplicação e divisão até 1 000 000 000 000. • Operações com potências de base e expoente natural • Adição e subtracção de potências; • Multiplicação e divisão de potências • Divisibilidade de números naturais	

Fonte: INDE/MINEDH (2019)

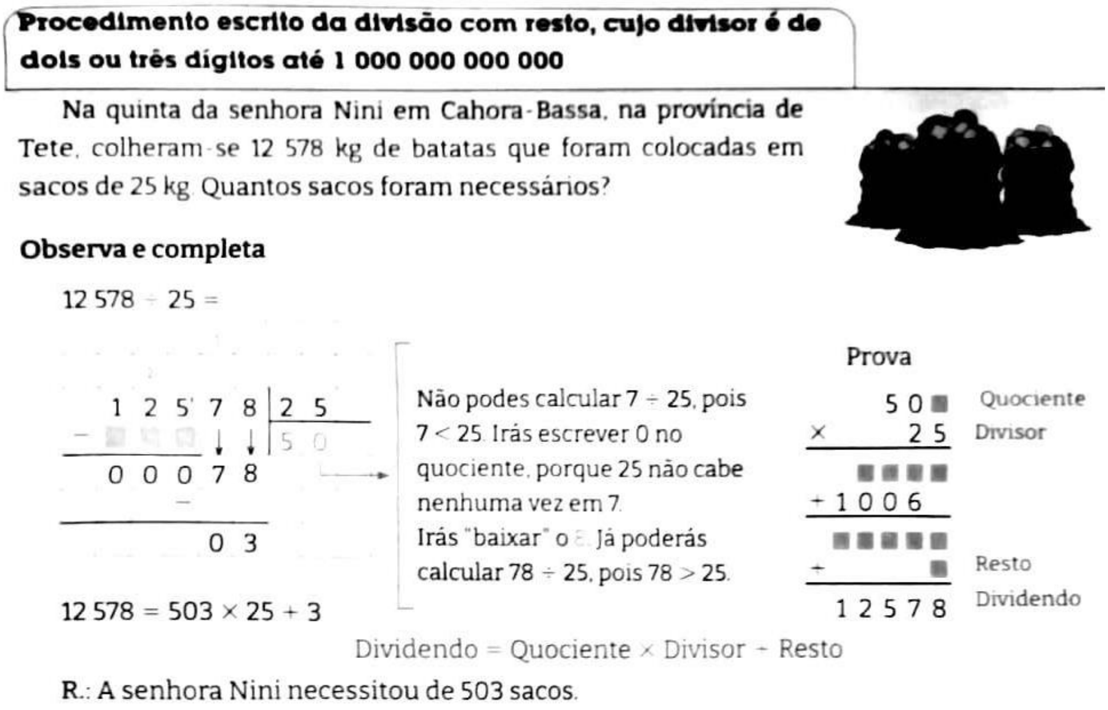
Depois de um trabalho com a divisão da 1ª a 6ª classe, ainda na 6ª classe os alunos iniciam a trabalhar com a “divisibilidade de números”, como é ilustrado no último conteúdo da 6ª classe apresentado no Quadro 4, e mais especificado no Quadro 5 e Figura 8, onde se ilustra parte dos conteúdos programados para lecionação na 6ª classe. No Anexo 32 apresentamos detalhes de parte do livro do aluno da 6ª classe. Portanto, o algoritmo da divisão euclidiana até ao 6º ano de escolaridade já é de conhecimento do aluno.

Quadro 5: parte do programa da 6ª classe

UNIDADE TEMÁTICA	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS O ALUNO DEVE SER CAPAZ DE:	CONTEÚDOS	COMPETÊNCIAS BÁSICAS O ALUNO:
I Números naturais (Revisão)	– Estabelecer a relação matemática: Dividendo = divisor x quociente + resto. – Empregar o algoritmo da divisão para calcular o quociente de uma divisão. – Usar o algoritmo da divisão para calcular o quociente de divisões cujo divisor tem mais do que um algarismo.	16. Procedimento escrito da divisão: algoritmo da divisão onde o divisor tem mais do que 2 algarismos	• Identifica, numa divisão, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. • Estabelece a relação: D = d x q + r . • Usa o algoritmo da divisão para resolver problemas e valoriza a sua utilização • Usa correctamente o algoritmo da divisão para obter o quociente e o resto de dois números através do procedimento escrito da divisão.

Fonte: INDE/MINED (2003)

Figura 8: parte do livro da 6ª classe do SNE em Moçambique



Procedimento escrito da divisão com resto, cujo divisor é de dois ou três dígitos até 1 000 000 000 000

Na quinta da senhora Nini em Cahora-Bassa, na província de Tete, colheram-se 12 578 kg de batatas que foram colocadas em sacos de 25 kg. Quantos sacos foram necessários?

Observa e completa

12 578 ÷ 25 =

Não podes calcular 7 ÷ 25, pois 7 < 25. Irás escrever 0 no quociente, porque 25 não cabe nenhuma vez em 7. Irás "baixar" o 8. Já poderás calcular 78 ÷ 25, pois 78 > 25.

Prova

Quociente
Divisor
Resto
Dividendo

12 578 = 503 × 25 + 3

Dividendo = Quociente × Divisor + Resto

R.: A senhora Nini necessitou de 503 sacos.

Fonte: MORGADINHO (2021. p.67)

Ainda na 6ª classe o aluno inicia um primeiro encontro com as equações que começam a ter o seu desenvolvimento mais aprofundado na 7ª, 8ª e outras classes (ver Quadro 6). Na 8ª classe o aluno trabalha com sistema de duas equações lineares a duas incógnitas e na 11ª, na unidade temática álgebra (ver Anexo 33) ele amplia esse conhecimento trabalhando com o sistema de equações a três incógnitas. Na unidade "função real de variável natura", dada no 2º semestre da 12ª classe o aluno encontra pela primeira vez o objecto sucessões numéricas.

Quadro 6: Visão geral dos conteúdos do 1º e 2º ciclo do ensino secundário

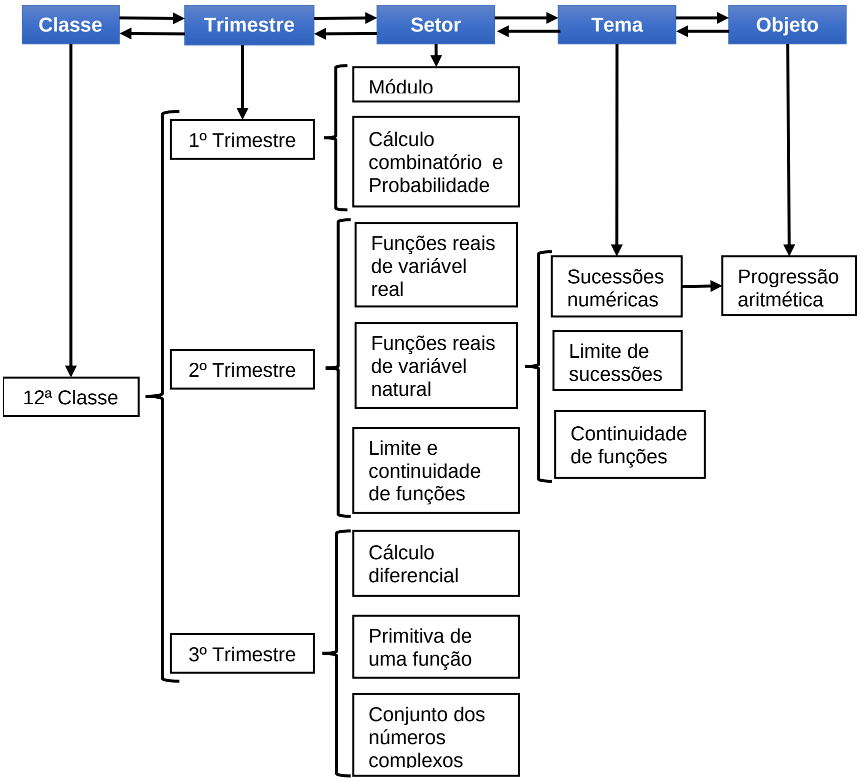
	Unidades temáticas por classe do ensino secundário				
Trimestre	**1º ciclo**			**2º ciclo**	
	8ª	**9ª**	**10ª**	**11ª**	**12ª**
1º	Números racionais; Equações lineares.	Números reais e Radiciação; Inequações lineares e sistemas de inequações lineares com uma variável; Noção de	Teoria de conjunto Polinómios Função quadrática; Inequação quadrática.	Introdução à lógica Matemática; Álgebra.	Módulos. Cálculo combinatório e Probabilidades.

		monômios e polinómios.			
2º	Proporcionalidade e funções lineares; Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas.	Equação quadrática; Quadriláteros; Semelhanças de triângulos.	Função exponencial; Equação e inequação exponencial; Logaritmo e Função logarítmica; Equação e inequações logarítmicas.	Equações e inequações exponenciais; Equações e inequações logarítmicas.	Funções reais de variável real; Funções reais de variável natural; Limites e continuidade de funções.
3º	Circunferências e Círculos; Congruência de triângulos e Teorema de Pitágoras.	Noções básicas de estatística; Cálculo de áreas e volumes de Sólidos geométricos.	Trigonometria; Estatística.	Geometria analítica no plano; Funções, inequações e equações trigonométricas.	Cálculo diferencial; Primitiva de uma função; Números complexos.

Fonte: INDE/MINED (2010a, 2010b, 2010c, 2010d, 2010e)

De qualquer jeito, embora todos o objecto que descrevemos anteriormente emerjam no encontro dos alunos com a AEP, o objecto sucesso numérica se evidencia mais. É por isso, que justificamos trabalhar com alunos da 12ª classe, porque este objecto tem o seu habitat nesta classe. Assim, podemos de longe, dizer que a nível de tema o nosso trabalho possa se situar nas sucessões numéricas, com uma particular atenção para a progressão aritmética, que ilustramos no Diagrama 6 resumidamente a estrutura do Programa da 12ª classe e, no Quadro 7 a organização dos conteúdos da unidade “funções reais de variável natural”.

Diagrama 6 - Estrutura do programa de matemática da 12ª classe



Fonte: os autores (2021), adaptados a partir do Programa de Matemática da 12ª classe INDE/MINED (2010a, 2010b)

Quadro 7: Organização dos conteúdos da unidade funções reais de variável natural

Unidade temática	Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:	Carga horária
III Funções reais de variável natural (sucessões)	Determinar qualquer termo geral de uma sucessão; Verificar se um dado número é ou não termo de uma dada sucessão; Verificar se uma sucessão é ou não limitada; Verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é progressão geométrica; Resolver problemas que incidam sobre a soma de n termos de consecutivos de uma progressão; resolver problemas práticos da vida conducentes a progressão aritmética e geométrica; aplicar o termo geral de uma sucessão na resolução de problemas práticos da vida e matemáticos; determinar o domínio e imagem de uma função real de variável real aplicar as propriedades dos limites de funções para o cálculo de limites; Calcular limites de uma função, de casos notáveis e de limites laterais; estudar a continuidade de funções.	Sucessões numéricas 2.1. Noção de sucessão. 2.2. Termo geral de uma sucessão. 2.3. limite de uma sucessão. Cálculo de limites e operações com limites. 2.4. indeterminações 2.5. limites notáveis 2.6. sucessão infinitamente grande e infinitamente pequena. 2.7. Progressão aritmética e progressão geométrica: fórmula do termo geral e soma de n termos de uma progressão. 2.8. Progressão infinita 2.9. aplicações. Limites de sucessões – definição e cálculo 2.1 Limites e continuidade de funções 2.1.2. Limites de uma função Definição de limite de uma função num ponto Função infinitamente pequena e infinitamente grande. Propriedades dos limites de funções. Operações com limites. Limites notáveis. Calculo de limites. Indeterminações 2.1.3. Continuidade de funções Definição Funções contínuas. Limites laterais. Propriedades e operações sobre funções contínuas. Limites infinitos.	Distingue função real de sucessão e respectivas representações gráficas Reconhece e dá exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados; Tem noção do significado de limite Identifica uma função de uma variável como um modelo matemático. Analisa gráficos de sucessões e funções reconhecendo e atribuindo significado a: domínio, contradomínio, estudo da variação de sinal, intervalos de monotonia, continuidade, simetrias, paridade e pontos notáveis: zero(s), intersecção com o eixo dos YY, extremos(relativos e absolutos), etc. Desenvolve o espírito crítico, nomeadamente no referente à utilização de instrumentos tecnológicos. Resolve problemas da vida real , nomeadamente de modelação, envolvendo sucessões e funções. Sabe comunicar, sob diversas formas, e fundamentar os raciocínios efectuados. .	24

Fonte: INDE/MINED (2010a)

Assim, os argumentos que justificam a pesquisa a esses níveis se embasam nos Programas de matemática da 1ª a 12ª classe do SNE-Moçambique, com particular destaque para 12ª classe que é onde sobressai mais o objecto sucessão numérica no trabalho com as AEP.

De qualquer jeito, o programa de Matemática da 12ª Classe do SNE-Moçambique, ao assumir que “um dos grandes obstáculos da aprendizagem da Matemática é a hierarquização dos conteúdos, bem como a sua abordagem de forma linear e rígida, sem contudo, os alunos terem a oportunidade de explorá-los na sua vida quotidiana” (INDE/MINED, 2010a, 2010b, p.8), evoca uma postura de subalternização e inferiorizacão das sabedorias não eurocêntricas no ensino da matemática, à qual documentos oficiais se propõem a resistir, mas na prática, os educadores matemáticos continuam a perpetuá-la. Como fundamenta Nivagara, essa hierarquização de conteúdos

> [...] desvincula o ensino dos saberes locais e, no caso, dos saberes das comunidades rurais, da sua cultura local e torna o professor “alienado da realidade”, fazendo com que muito do que se desenvolve dentro das quatro paredes das salas de aulas esteja fora da vida real das comunidades e com carécter de muito menor objectivação e concretização no dia-a-dia do aluno sobre o que se ensina. (NIVAGARA, 2018, 303).

É sobre esta prática que o INDE/MINED apresenta como obstáculo no ensino da matemática, que a pesquisa se propõe como uma possibilidade que permite a implementação do “currículo local” no ensino da matemática, através de uma proposta que integre o Ntxuva ao ensino da matemática, podendo a partir da prática, a partir do sistema de jogo, fazer emergir conhecimentos diversos sobre contagem, adição, subtração, sucessão numérica, divisão numérica, inequações, sistema de equações.

Portanto, embora haja indícios de não implementação do currículo local no ensino da matemática, os programas oficiais de ensino abrem claramente espaço para que se possa implantar uma prática de ensino cuja organizações praxeológicas (pontuais) para produção do conhecimento matemático escolar não se fechem só dentro da hegemonia do pensamento moderno colonial/eurocêntrico, ao destacar por exemplo que,

> [...] o ensino da Matemática deverá participar, pelos princípios e métodos de trabalho praticados, na educação do jovem para a autonomia e solidariedade, independência empreendedora, responsável e consciente das relações em que está envolvido e do ambiente em que vive. Deve dotar, o aluno de conhecimentos básicos necessários para a resolução de problemas, através de exploração de situações vividas no quotidiano [...] e adotar como perspectiva metodológica, dentre outras varias, a resolução de problemas, explorando situações vividas no dia-a-dia, mostrando a necessidade da aprendizagem da Matemática na solução dos problemas da vida (INDE/MINED, 2010a, p.8).

Contudo, o mesmo programa nas suas estratégias metodológicas deixa muito aberto como é que estas possibilidades poderão operar, pois não apresenta exemplos claros e concretos de utilização de situações vividas no dia-a-dia, para explicar o processo de produção do conhecimento matemático, em particular, para o ensino de "progressão aritmética". Portanto, não são apontadas propostas de OD e OM pontuais, locais, regionais, globais concretas, problematizando o ensino da matemática a partir de situações vividas no dia-a-dia, ou em particular, do uso de jogos (Ntxuva) para ensino da Matemática.

A citação seguinte, ilustra parte das sugestões metodológicas para o ensino de sucessões, que evidencia a tendência de utilização de aspectos da vida real para problematizar o conceito, mas, na prática tende a marginalizá-las, ao apontar exemplos concretos que caminham para hegemonização epistemológica no tratamento do conceito de sucessão, como se pode notar na citação;

> As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria – por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia – por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia – por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento, etc. (INDE/MINED, 2010a, p.24, 2010b, p.41).

Portanto, ao descrevermos os argumentos que permitem justificar e delimitar a nossa pesquisa, dentro dos níveis de determinação e co-determinação da OD e OM, percebe-se que ela encontra condições necessárias para que seja implementada por um lado, porque os documentos oficiais que justificam cada um dos níveis no contexto da pesquisa, apontam para uma abertura à prática de ensino da matemática problematizada a partir de sabedorias que não se fecham apenas no pensamento moderno hegemônico colonial/eurocêntrico. Por outro lado, embora haja condições necessárias, elas não são suficientes, pois os documentos oficiais não explicitam claramente como operacionalizar essa prática, que tende a manter-se rotineiras e linearizadas no PEA da matemática.

Em geral, o que é previsto no programa de ensino da matemática da 1ª a 12ª classe é suficientemente claro sobre como deve operacionalizar a implementação do currículo local, ou melhor, como a partir do contexto da vida real deverão ser problematizadas os objectos matemáticos que integram estes programas de ensino.

PARTE 5: CONSTRUÇÃO DO CORPO DE CONHECIMENTO SOBRE NTXUVA E SUA INTEGRAÇÃO NO ENSINO

Esta parte inclui as secções 5, 6, 7. Na secção 5 constrói-se um cenário histórico inicial sobre os jogos da família Mancala, dos quais o Ntxuva faz parte deles. Mostra-se como o Ntxuva é apresentado em Moçambique, desde sua constituição às regras do jogo e prática.

A secção 6, complementa a 5. Nela se aprofunda e se descreve as praxeologias expertas que são utilizadas pelos jogadores na prática com o jogo Ntxuva, buscando-se analisar relações importantes que podem ser utilizadas em contexto de ensino. Para além das praxeologias expertas, explora-se também outras relações além dos expertos que podem interessar na prática do jogo bem como no ensino da matemática.

No interesse que se tem na tese de se construir uma OD que integre o Ntxuva para o ensino, na secção 7 apresenta-se um estudo que descreve a partir de teses e dissertações como os jogos da família Mancala tem sido integrado para o ensino de diferentes objectos de saber. Aqui, é analisado como são construídas e implementadas as organizações didácticas que integram o Ntxuva ou em geral o Mancala no ensino.

5. NTXUVA: A VARIANTE DA FAMÍLIA DE JOGOS MANCALA IV

Nesta secção apresenta-se o jogo Ntxuva. Descreve-se ao longo do texto a possível origem do jogo, sua caraterística a partir da sua função social e as possíveis variantes que o jogo apresenta. Com o propósito de ensino em que a pesquisa se debruça, procura-se explorar e apresentar alguns elementos que podem servir para explorar objectos matemáticos, dentro do contexto da prática com jogo.

5.1. ORIGEM E PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DO JOGO NTXUVA

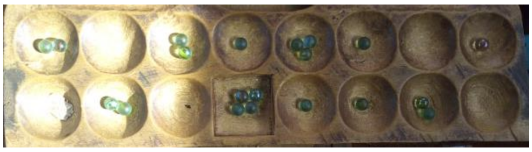
Ntxuva, também conhecido por xadrez africano, "é um antigo e tradicional jogo de tabuleiro jogado correntemente em Moçambique. Faz parte da família dos jogos Mancala, com mais de duzentas variantes" (ALI, GIMO, SAIDE, 2020; BORGES, PAIVA, SILVA, 2010). Portanto, não se pode falar do jogo Ntxuva sem mencionar o Mancala, que não é nome de um determinado jogo, mas sim, de uma família de jogos, cujo termo, "Mancala", deriva da palavra árabe, 'naqaala', que significa 'mover' (BORGES; PAIVA; SILVA, 2010; TOWNSHEND, 1979).

Voogt (2021, p. 3) sinaliza que "os jogos de Mancala consistem em um conjunto abstrato de buracos e contadores, nos quais várias actividades locais de construção de significado podem ser projetadas". De facto, esta família de jogos é constituída de um conjunto de buracos feitos em tabuleiros e madeira, betão ou no chão, dispostos em linhas e colunas, devidamente organizadas. Nestes buracos, também designados por casas, são feitas semeaduras de peças idênticas, mediante determinadas regras. Estas peças constituem os dados do jogo, as quais os jogadores vão semeando de casa em casa, ao mesmo tempo que realizam determinadas contagens estratégicas, que lhes permitem visualizar as possibilidades de eliminar os dados do adversário e poder vencê-lo. Estes dados podem ser de sementes diversas, conchas, pedrinhas, berlindes, etc. Townshend, reforça a caracterização do Mancala apontando que:

> O Mankala é o nome árabe de um tipo de jogo discutido, mas foi adotado pelos antropólogos como o termo genérico. O material utilizado consiste em um número de sementes idênticas, pedras etc. que são semeadas em 2, 3 ou 4 linhas (ou às vezes uma formação circular ou quadrada) de buracos feitos em uma tábua ou arrancado do chão. Após uma distribuição inicial de sementes nos buracos, os jogadores revezam-se em tirar todas as sementes de um de seus buracos e semeá-las em uma determinada direção (sentido anti-horário, salvo indicação em contrário) (TOWNSHEND, 1979, p. 110).

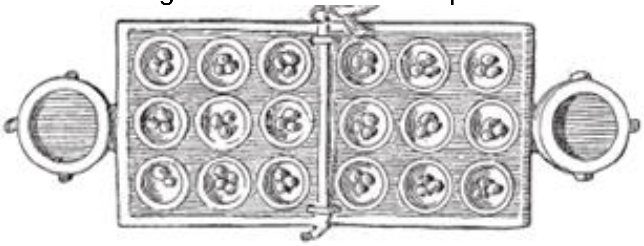
O Mancala é distinguido por três tipos, de acordo com o número de linhas que o compõem, neste caso, o Mancala II, III, IV, cujos tabuleiros possuem respectivamente duas, três e quatros linhas, ou ainda, apresentados em formato circular (BINSBERGEN, 1999; MURRAY, 1952; TOWNSHEND, 1979). Nas Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12 podemos ver os tipos de Mancala II, III, IV e o circular.

Figura 9: Mancala do tipo II



Fonte: os autores (2019)

Figura 10: Mancala do tipo III

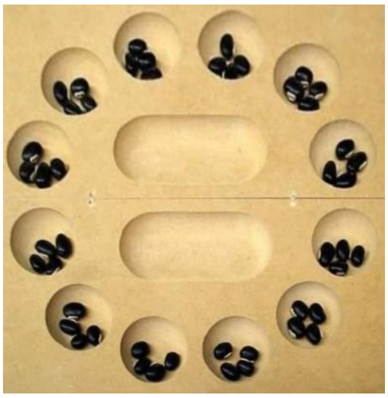


Fonte: Culin (1896, p. 601)

Figura 11: Mancala do tipo IV

Fonte: os autores (2021)

Figura 12: Mancala circular



Fonte: https://m.media-amazon.com/images/I/51yj7FRH6jL._AC_SL1000_.jpg

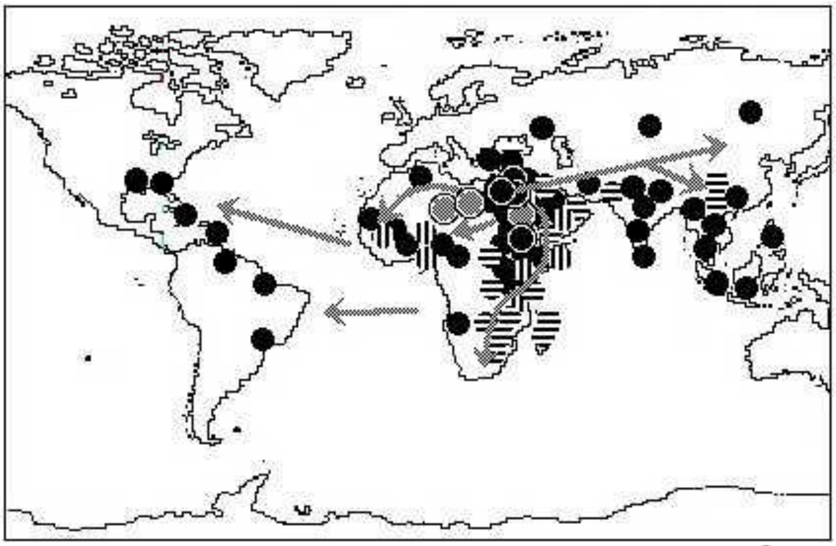
A origem dessa família de jogos é ainda hoje controversa, sendo que o tempo de vida (o status antigo) e a sua introdução em determinada sociedade não podem ser confirmados devido à escassez de evidências arqueológicas e/ou históricas (VOOGT, 2021; TOWNSHEND, 1979), entretanto, Borges; Paiva e Silva (2010, p. 52) sinalizam que os Mancalas “se originaram na África, por volta de 2000 a.C.”.

Estudos diversos apontam a sua origem tanto na África como na Asia, entretanto, uma boa parte destes estudos sugerem fortemente que o Mancala tenha surgido na África e de lá, tenha se distribuído a outros cantos do mundo, através do processo de migração forçada, associada ao contexto de escravatura e do processo de trocas comercias entre África e outros continentes. A esse respeito Voogy explica que “a ligação entre a África Ocidental e o Caribe por meio do comércio transatlântico de escravos explica as configurações de tabuleiro de jogo quase idênticas e as regras de jogo encontradas em ambas as regiões (HERSKOVITS, 1932; MURRAY, 1952, citados por VOOGT, 2021).

Dentre as controvérsias sobre a origem do Mancala, há entre os especialistas e antropólogos que versaram estudos sobre esta família de jogos, uma ideia consensual de que o jogo tenha surgido na África oriental, com particular incidência para a Etiópia, e de lá, tenha se espalhado para outros cantos do mundo (GUIL, 2021; ALI, GIMO, SAIDE, 2020). A esse respeito, Guil esclarece o seguinte sobre a origem do Mancala:

> Os mais antigos tabuleiros de Mancala já encontrados vieram da região onde hoje se localiza Israel; feitos de barro e argila, eles estavam nas ruínas de uma casa de banho romana na cidade de Gedera, e estima-se que tenham sido fabricados entre os séculos II e III - menos de dois mil anos atrás. Parece ser consenso dentre os especialistas, porém, que o jogo de Mancala não foi inventado no Oriente Médio, e sim na Etiópia, se espalhando para outros lugares a partir de lá. Uma das evidências é o texto Mistérios do Céu e da Terra, escrito pelo monge ortodoxo Georges de Sagla no século XIV, no qual ele se refere a um jogo chamado qarqis, que usava as mesmas regras do Mancala, e era jogado na região da Etiópia desde antes do nascimento de Cristo; estudos recentes sobre a origem do Mancala que usam rotas migratórias de povos africanos para estudar como o jogo se espalhou também confirmam que o mais provável seria ele ter surgido na Etiópia. Arqueólogos já encontraram tabuleiros de Mancala onde hoje se localizam a Etiópia e a Eritreia, mas estimam que eles foram criados entre os séculos VI e VII; a teoria mais provável para a falta de tabuleiros sobreviventes mais antigos que isso é a de que eles eram feitos de madeira, e não puderam ser propriamente preservados. (GUIL, 2021, p.2).

Mapa 3: Distribuição geográfica de Mancala e provável padrão de sua difusão



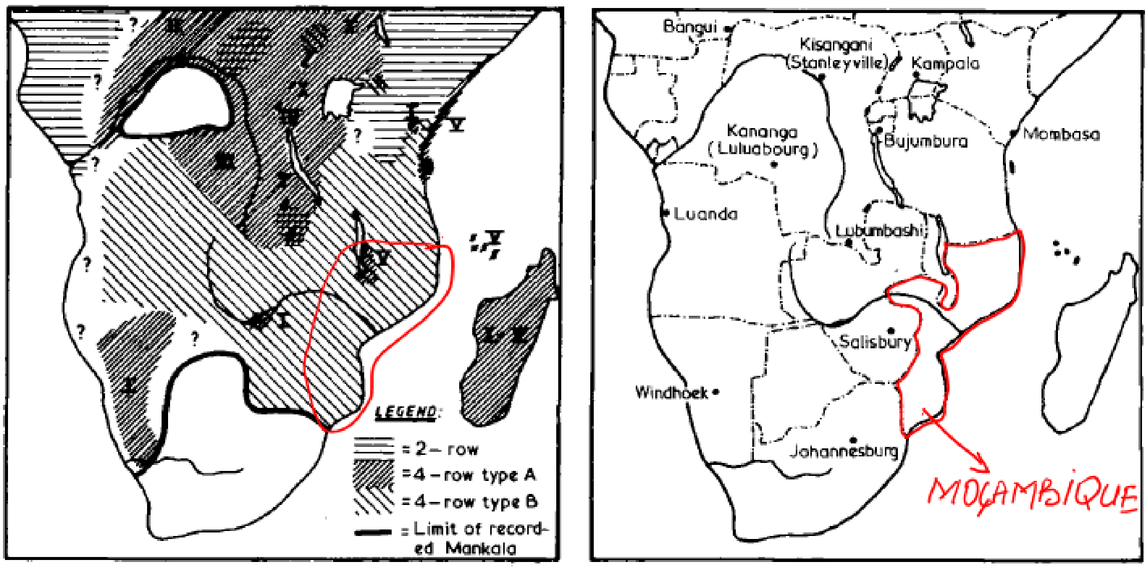
→ Mancala neolitico (Africa oriental) → Mancala II → Mancala III → Mancala IV

Fonte: BINSBERGEN (1999)

No Mapa 3, Binsbergen (1999) apresenta uma provável distribuição geográfica e difusão do Mancala. Neste mapa, pode-se notar primeiramente uma distribuição do Mancala em toda África, com particular incidência para África negra (TOWNSHEND, 1979, p. 109). Indica uma provável origem do Mancala na África oriental, sendo de lá, difundido para outras regiões da África, das Américas e da Asia.

Em todo caso, diante de toda controvérsia, pela distribuição e abrangência no continente, pode-se dizer que o Mancala constitui uma marca africana, tanto que, diversos investigadores já o tratam de “jogos africanos ou nacionais de África”, como é o caso de Culin (1896), que o designou “jogos nacionais de África”. No Mapa 4, pode-se observar como os Mancalas (os seus tipos) estão distribuídos pela África negra, em que Moçambique também faz parte (ver a marcação feita em vermelho no mapa).

Mapa 4: Distribuição aproximada dos principais tipos de Mancala no século XX.



Fonte: (TOWNSHEND, 1979, p. 109)

Agbinya em seu livro “Computer Board Games of Africa” mostra que há vários nomes e tipos de jogos de tabuleiro, distribuídos por regiões diversas de África, alimentando a ideia de existência de uma diversidade de jogos do tipo Mancala em África, fundamentando a distribuição apresentada no Mapa 3 e Mapa 4, ao sinalizar que:

> Os jogos de tabuleiro encontrados na África Ocidental são principalmente versões de 2 linhas e seis colunas. Na África Central, Oriental e Austral, muitos deles são versões de 4 linhas e 8 colunas. Outras extensões na região

> da África Austral incluem Moruba com 36 colunas e 4 linhas. Moruba provavelmente tem o tabuleiro mais elaborado e complexo com 36 buracos por linha. Gemeta (Eritreia) no norte da África usa três linhas. (AGBINYA, 2004, p. 21).

No Anexo 5, são apresentados dois quadros extraídos e traduzidos de Agbinya (2004) que fornecem uma distribuição dos nomes, tipo de tabuleiros, local aonde pode se encontrar o Mancala e a aproximação dos nomes atribuídos ao jogo, que demonstra a sua adaptação por vários grupos étnicos.

Por Moçambique pertencer à região da África Austral, a partir da visualização do Mapa 3 e Mapa 4 e das constatações apresentadas por Agbinya, nota-se que o país é predominado pelo Mancala do tipo IV, sendo que o Ntxuva é parte dessa família. Este grupo de jogos, o Mancala IV, tem uma caraterística única de possuírem quatro linhas e um número de colunas igual ou superior a quatro. De acordo com Townshend (1979, p. 110), este grupo de Mancala “pode ser dividido em dois tipos principais”:

> A – Jogos onde as sementes capturadas são colocadas nos próprios buracos do jogador, ou seja, o número de sementes em jogo permanece constante. B – Jogos onde as sementes capturadas são colocadas fora de jogo, ou seja, o número de sementes em jogo diminui gradualmente. Em quase todos os jogos de 4 linhas conhecidos, um movimento pode consistir em vários revezamentos, ou seja, se a última semente na mão cai em um buraco ocupado sem direito de captura, essas sementes são por sua vez levantado e semeado. (TOWNSHEND, 1979, p. 110)

Para além do Ntxuva, existem dentro da distribuição geográfica do Mancala IV em África, várias outras designações, algumas das quais destacamos a seguir por pais:

> No Sudão temos “bare. yit e tok kurou”, Mancala do tipo 4×12 ou 13; “soro”, Mancala do tipo 4×8 ou ainda “ryakati”. Na Etiópia temos “bare. yit e tok kurou”, Mancala do tipo 4×12 ou 13; “ngikileth ou amom”, Mancala do tipo 4×11 a 13. Na Uganda temos “owmeso, ngikileth ou amom”, Mancala do tipo 4×11 a 13; “pereauni”, Mancala do tipo 4×8; “ngikilees”, Mancala do tipo 4×8 ou 10. Em Kenya temos “ngikiles”, Mancala do tipo 4×12; “keci(g)”, Mancala do tipo 4×9 a 15; “kecutk”, Mancala do tipo 4×10 a 12 e “cepenet”, Mancala do tipo 4×4,8,12,16. Em Zaire temos “lusolo, nsumbi, kisumbi, isolo e mulabalaba”, Mancala do tipo 4×8. Em Tanzânia, “Bao\Bawo”. Em congo, “Nsumbi”. Em Ruanda, “Igisoro”. Na Somália, “bosh”. (TOWNSHEND, 1979, p. 111; AGBINYA, 2004, p. 20; PEREIRA, 2016, p. 37).

Estas e outras variedades diferenciam-se pelas regras do jogo e extensão do tabuleiro. Em Moçambique, a designação e as regras também variam de província para província e o Ntxuva é a modalidade de jogo Mancala predominante na região sul do país, mas que foi adotada em todo país, por causa do FNJT/FJE. Na secção

5.2, apresenta-se e descreve-se as caraterísticas da variante do Mancala IV em Moçambique.

5.2. NTXUVA: A VARIANTE DO MANCALA IV EM MOÇAMBIQUE

Ntxuva ou Ntchuva, da família de línguas tsonga, como é designado originalmente na região sul, é um tradicional jogo Moçambicano, praticado em quase todo território nacional. De acordo com Paiva (2018) e Francisco (2020), trata-se de um jogo de tabuleiro, feito de madeira ou betão, mas também, podem ser feitos buracos no chão (ver Figura 13 a Figura 17). O jogo é praticado majoritariamente por homens, entre crianças com mais de 7 anos aos mais velhos, tendo sido também usado no passado como um passatempo preferido pelos soldados em tempos de guerra (JOSÉ , 2013).

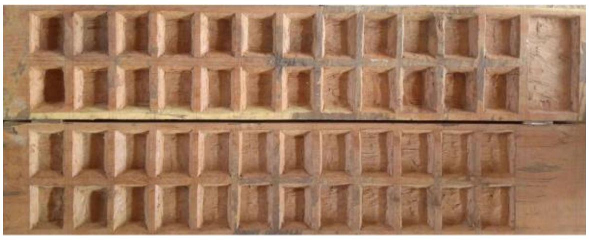
Trata-se de uma variante da família dos jogos Mancala IV, considerada complexa pelo facto do seu tabuleiro ser constituído por quatro linhas, com um número variável de colunas, não menos que quatro, ou seja, “pela configuração do tabuleiro ser ampla e flexível, ao contrário da maioria dos jogos Mancala” (ALI, GIMO, SAIDE, 2020). Portanto, o número de colunas pode ser par ou ímpar, mas geralmente, é comum e mais fácil achar tabuleiros com um número par de colunas.

Assim, o número de colunas pode variar de quatro, seis, oito, nove, dez, doze, treze (PEREIRA, 2016; ALI, GIMO, SAIDE, 2020), ou mais, isto é, os tabuleiros podem ser do tipo $4 \times n$, com $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$ ..., em que n representa o número de colunas de um determinado tabuleiro. Nas Figura 13 a Figura 17 são mostrados alguns tipos de tabuleiros do jogo Ntxuva.

Figura 13: Ntxuva 4×8

Fonte: os autores (2020)

Figura 14: Ntxuva 4×12



Fonte: os autores (2020)

Figura 15: Ntxuva 4×16

Fonte: os autores (2020)

Figura 16: Ntxuva do tipo 4×22 feito em betão

Fonte: Imagem recortada do vídeo disponível em O AFRICANO (2023)

Figura 17: Ntxuva com um número extenso de colunas feito no chão

Fonte: Imagem recortada do vídeo disponível em SWAHILI TIMES (2022)

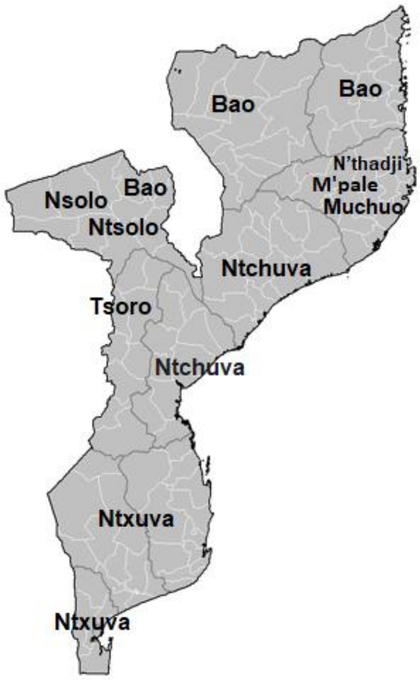
Ntxuva é a designação popular, tanto que esta é a designação que tem sido usada nos FNJT/FJE. No país, existem outras designações, distribuídas pelas regiões, províncias, distritos, etc. tais como: M'pale na província de Nampula, N'thadji no distrito de Angoche – província de Nampula, Bao na Província de Niassa, cabo delegado e nos distritos de Angónia e Tsangano – província de Tete (PEREIRA, 2016; ALI, GIMO, SAIDE, 2020). Há ainda designações como Ntsolo, Nsolo na província de Tete, Tsoro na província de Manica, etc.

No Mapa 5 apresentamos a distribuição das diferentes designações do Mancala IV em Moçambique. Notamos que podem haver outras designações, as quais não conseguimos alcançar, pois as que apresentamos foram baseadas na tese de Pereira (2016) e de um contato informal com internautas moçambicanos na página do facebook do pesquisador, como ilustra a Figura 18.

Figura 18: pesquisa realizada a partir do facebook para coleta de outras designações do Ntxuva[25]

Fonte: Os autores (2020)

Mapa 5: Designação do Mancala IV em províncias/regiões de Moçambique



Fonte: os autores (2022)

É comum utilizar-se, como dados, sementes de Canhoeiro (*marula*), sementes de feijão-maluco (*Mucuna pruriens*) e outros tipos de sementes, coletadas de frutas oriundas de plantas típicas Africanas, com um significado cultural forte. A concha de *Cerithideopsis californica* ("thodoe" na língua Echuwabu, um marisco utilizado para preparar um prato típico da Cidade de Quelimane), também tem sido usado bastante na cidade de Quelimane e seus arredores da província da Zambézia, como dados para este e outros jogos, como é o caso de Matacuzana, etc. Também se tem utilizado, como dados, pedrinhas diversas ou ainda berlindes. Na Figura 19, Figura 20, Figura 21 são ilustrados alguns dos tipos de dados utilizados para jogar o Ntxuva.

[25] Para acessar a página, clique no seguinte link: https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=pfbid02PSC8eGUj4jhBMFic3LQfDn4tqXkFpA4vNk48eTPuSfcNcVEtL28xGRgTRg85b5Zgl&id=100003802608318

Figura 19: Sementes de marula (canhoneiro)[26]

Figura 20: sementes de Mucuna pruriens (feijão-maluco)

Fonte: os autores (2020)

Figura 21: conchas de Cerithideopsis californica (thodoe)

Fonte: os autores (2020)

Relativamente às regras do jogo, há uma diversidade, adaptadas ao contexto do jogo ao longo do tempo e de sua circulação pelo mundo, o que denota também facilidade de (re)adaptação das regras a outras situações de sua prática. Em Moçambique o Ntxuva apresenta-se com uma variedade de regras.

Provavelmente, o Bao seja o jogo com as regras um pouco mais distanciadas do Ntxuva. Portanto, não existe hipoteticamente uma regra comum utilizada em todo país, entretanto, por causa do FNJT/FJE, foi adotada e institucionalizada uma determinada regra, com finalidades para atender de forma linear esta competição. É sobre esta regra que o nosso trabalho se debruçará a descrever e reconstruir, com particular finalidade para integração do Ntxuva no ensino da Matemática.

5.3. REGRAS DO JOGO NTXUVA NO FESTIVAL NACIONAL DOS JOGOS TRADICIONAIS

O Festival Nacional dos Jogos Tradicionais (FNJT) é um evento nacional que é realizado a cada dois anos e contempla a prática de forma competitiva dos Jogos Ntxuva e Muravarava, porém, há outros jogos que fazem parte do festival, mas apenas de forma demonstrativa (MUOCHA, 2019, p. 40; INADE, 2016).

> O Festival visa essencialmente a divulgação e preservação do vasto e diferenciado mosaico cultural e histórico do país, inserido no jogo popular e na criação de um movimento nacional de sensibilização sobre a importância do jogo tradicional e popular no processo de formação da cidadania e educação das gerações vindouras, bem como, a demonstração da tradição e

[26] Para acessar as imagem das sementes de cangueiro (marula), clique no link seguinte: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-849966660-amarula-marula-2-sementes-sclerocarya-birrea-fruta-pmudas-_JM?quantity=1

> cultura que, com raízes fortes e profundas nos identificam como um povo com história e cultura. (INADE, 2016).

Portanto, é um evento que se destaca a nível nacional por possibilitar a preservação da identidade cultural, em particular, da identidade desportiva, ao permitir que se juntem alunos de todo o país (representados pelas províncias) para praticar e competir os jogos tradicionais.

A organização do festival é feita pelo Ministério da Juventude e Desporto, através da Direção Nacional de Desporto (INADE) e sob coordenação do Governo da província anfitriã (MUOCHA, 2019; INADE, 2016). De acordo com o disposto na resolução n.º 27/2021, artigo 20, alínea f), é através do Departamento da História do Desporto que o INADE “promove certames, concursos ou diversas realizações históricas do desporto envolvendo jogos tradicionais ou quaisquer modalidades desportivas praticadas no país” (MOÇAMBIQUE, 2021, p. 1128). Portanto, o INADE tem responsabilidades não só de organizar o FNJT, mas também, no desenvolvimento de ações que possibilitem a identificação e registo dos jogos tradicionais não documentados (MUOCHA, 2019).

Até o momento foram realizadas cinco edições, sendo a primeira em 2010 e a última, neste caso, a quinta, em 2018. Devido à eclosão da pandemia do COVID-19, a sexta edição que deveria ocorrer em 2020 não foi realizada.

A impressão que se teve em relação à organização do festival foi em 2020, com o contato e/ou entrevista com a responsável do departamento do desporto escolar, cujo nome será preservado e será designada por respondente A. A partir da respondente A, foi identificado o especialista e treinador dos alunos nos jogos tradicionais, o senhor “Pita Jhon Tembo”, a quem vamos designar por respondente B, com o qual realizamos conversas diversas acerca do FNJT e da sua organização.

Na subsecção 7.3.1, se apresentará as impressões que se teve sobre a organização do festival, a partir da conversa com os respondentes A e B. Na subsecção 7.3.2, se discorre sobre as regras que são utilizadas na competição do Ntxuva, no FNJT. As informações sobre as regras são a partir da experiência que se teve no campo de pesquisa, na observação direta e indireta com a prática do jogo Ntxuva, na base do testemunho havido a partir da conversa com a respondente A e o respondente B e das descrições que são apresentadas no regulamento de competição do Ntxuva.

5.3.1. Organização do festival nacional dos jogos tradicionais

Nesta subsecção é apresentado o sistema de organização do FNJT, a partir da entrevista/conversa que se teve com os respondentes A e B. A conversa foi feita em separado, entretanto, os dados informativos mostraram-se concordantes, razão pela qual não serão apresentadas em separado as posições informativas apresentadas pelos respondentes A e B. Em certos casos, em que o dado é exclusivo de um respondente, faz-se a identificação.

A conversa com a respondente A foi realizada na Direção Provincial de Educação - província de Tete, no dia 14/09/2020. A partir desta conversa, foi possível identificar o respondente B, com o qual desenvolveu-se a actividade de campo nos dias 28/09/2020, 05/10/2020 e 06/11/2020, na localidade de N'temangau, posto Administrativo de Luenha, distrito de Changara. A seguir, descrevemos a organização do festival a partir do extrato da conversa que se teve com os dois respondentes.

Pesquisador: Quem organiza o FNJT?

Respondentes A e B: O FNJT é organizado pelo Instituto Nacional do Desporto, tutelado pelo Ministério da Juventude e Desporto (atualmente Secretaria de Estado de Desportos), em coordenação com as Direções Provinciais de Educação, por meio do Departamento do Desporto Escolar. As Direções Provinciais são responsáveis pela seleção dos atletas e a seleção é iniciada nos distritos, designada fase distrital, depois, vão à fase provincial. Há, no entanto, em cada temporada do festival uma província anfitriã que acolhe o festival na fase nacional. A equipe técnica dessa província, além de preparar a seleção dos atletas de sua província, também se junta à Direção Nacional dos Desportos para organizar conjuntamente o festival na sua fase nacional.

Pesquisador: quem são os atletas que participam das competições?

Respondentes A e B: Os atletas são alunos do ensino básico ou secundário.

Pesquisador: Como é feita a seleção dos atletas?

Respondentes A e B: a seleção dos atletas é feita inicialmente nos distritos, denominada fase distrital. Os distritos organizam uma competição, entre alunos (candidatos à competição) de escolas diversas. Dessa competição são selecionados duas meninas e dois rapazes, que são levados à fase provincial, de onde competirão em duas séries para cada gênero (feminino e masculino). Na fase provincial, são selecionados três atletas femininas e três masculinos que são levados para representar a provincial na fase nacional. Na fase nacional, que é a última, são selecionados três atletas que serão premiados no primeiro, segundo e terceiro lugar.

Pesquisador: como é o sistema de competição e premiação?

Respondentes A e B: As disputas são feitas em séries, num sistema de todos contra todos. Na fase nacional, em particular, são construídas duas ou três séries, conforme o número de atletas que estarão competindo. Cada série é constituída de um número de atletas que varia de cinco a dez. Em cada série são selecionados dois atletas, que vão compor a fase da semi final, constituída de uma única série. No caso de existir por exemplo duas séries iniciais, a fase da semi final será constituída de quatro atletas. Na fase da semi final são também selecionados dois atletas que vão compor a fase final, onde são definidos os vencedores. Na figura 34 é ilustrado como o sistema de séries para apuração dos atletas à fase seguinte é feito.

No final do campeonato, são premiados três atletas de cada gênero e cada modalidade, neste caso, três atletas masculinos para a modalidade Ntxuva e três para modalidade Muravarava, três atletas femininas para a modalidade Ntxuva e três para modalidade Muravarava. O primeiro e segundo classificados de cada modalidade e gênero vêm da fase final, enquanto que o terceiro classificado é apurado na fase da semi final. As províncias também são classificadas. No caso, a classificação é baseada no número de jogadores vencedores, isto é, a província com mais jogadores na primeira posição, também é classificada na primeira posição, seguindo assim a classificação para as restantes classificações.

Figura 22: mapa de organização das séries

Ntxuva Feminino Série A

Data: 23/09/2016 — Pavilhão da Liga Muçulmana de Chimoio

Série A	Jogadora	Sex	Prov	1	2	3	4	5	Total	Pos
1	[redacted]	F	P. Maputo						0	
2	[redacted]	F	Inhambane	1					0	
3	[redacted]	F	Manica						0	
4	[redacted]	F	Tete						0	
5	[redacted]	F	Niassa						0	
6	[redacted]	F	Zambezia	0					0	
7	[redacted]	F	Gaza						0	

Pesquisador: quais são as modalidades de jogo que são disputadas?

Respondentes A e B: as modalidades competitivas são duas, a do jogo Ntxuva e o Muravarava. Para além destas modalidades, há outras modalidades, que são designadas demonstrativas, pois não entram para competição e nem são premiadas. Geralmente, estas são apresentadas pelos treinadores ou outros participantes. Entretanto, os atletas devem estar habilitados para as duas modalidades. Na Figura 23 e na Figura 24 são mostradas as competições do Ntxuva e Muravarava no FNJT e na Figura 25 é mostrado como é formado o tabuleiro do jogo Muravarava.

A nível provincial e nacional, as competições são feitas em tabuleiros de madeiras ou cartolina para o caso de Muravarava. A nível dos distritos, são utilizados tanto tabuleiros, cartolinas, como buracos no chão para Ntxuva e desenhado o jogo no chão no caso do Muravarava.

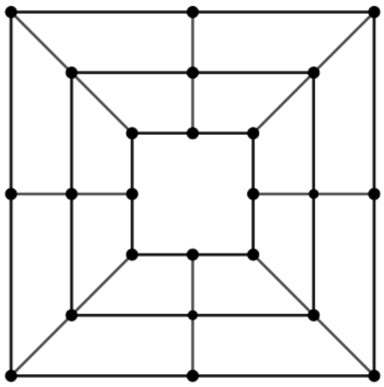
Figura 23: competição do Ntxuva no FNJT

Fonte: arquivo eletrônico do INADE (2016)

Figura 24: competição do Muravarava no FNJT

Fonte: arquivo eletrônico do INADE (2016)

Figura 25: caraterística física do Muravarava



Fonte: os autores (2022)

Pesquisador: para além da competição que é feita, há outras actividades, por exemplo, didácticas que se tem levantadas no festival com os jogos?

Respondente B: Não, somente a competição para apuração dos vencedores. Entretanto, há cálculos mentais que são feitos para que o jogador possa conseguir eliminar o mais rápido possível as peças do adversário, ao mesmo tempo que tenta defender seus dados, para não ser eliminado.

Pesquisador: No caso especifico do Ntxuva, quais são as regras e como as mesmas são interpretadas?

Esta questão foi feita à respondente A, entretanto, ela preferiu que fosse respondida pelo respondente B, pois, sendo especialista e treinador nos jogos tradicionais, teria mais elementos para clarificar a questão. Mesmo assim, fez a cópia do regulamento de competição de Ntxuva e do Muravarava que estava em seu arquivo e disponibilizou. Também, fez a ponte de ligação entre o pesquisador e o respondente B. Assim, as respostas a essa questão foram dadas pelo respondente B, mas também, algumas considerações foram observadas na prática com jogo aquando do trabalho de campo com o mesmo especialista e um grupo de anciões da localidade de N'temangau. Também, subsidiou-se do regulamento para aprimorar o entendimento das regras do jogo.

Na secção 5.3.2, apresentamos as regras, conforme o entendimento que se teve do trabalho de campo.

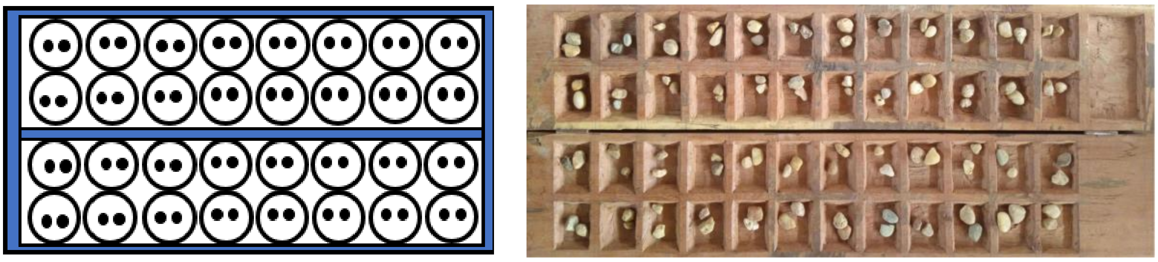
5.3.2. Regras do jogo Ntxuva no FNJT

Ao longo da secção 7 foi descrito que o jogo Ntxuva possui uma multiplicidade de regras pelo mundo bem como em Moçambique. Nesta subsecção, serão descritas as regras do Ntxuva adotadas para o FNJT.

As partidas do Ntxuva "são disputadas de forma individual ou em duplas" (PEREIRA, 2016, p. 151). Quando o tabuleiro é muito extenso, cada equipe pode ter mais de dois jogadores. No caso do Ntxuva disputado no FNJT escolares, é utilizado o tabuleiro de desasseies colunas e disputado de forma individual ou em duplas, num sistema de todos contra todos, como é sinalizado no artigo 4 do regulamento de competição de Ntxuva (INADE, sd.), ver Anexo 1.

Inicialmente, as casas devem ser preenchidas por dois ou mais dados idênticos. No caso das disputas feitas no FNJT, as casas do Ntxuva devem ser preenchidas somente por dois dados, como é ilustrado na Figura 26.

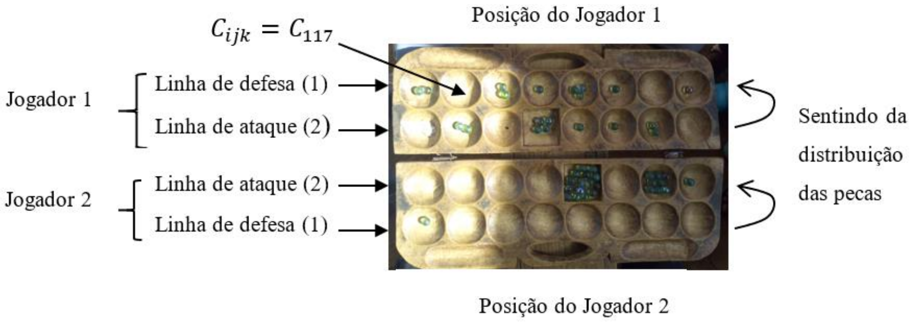
Figura 26: Configuração inicial do tabuleiro de Ntxuva em uma partida



Fonte: os autores (2022).

Como se observa na Figura 27, a disposição das linhas do tabuleiro, cada jogador atua ou joga em seu campo, que corresponde às duas linhas próximas a ele. A linha mais próxima ao jogador é designada por linha de defesa (Figura 27), aquela em que possibilita o jogador proteger seus dados, nos casos em que a casa de frente está vazia. A linha de frente, aquela que separa o campo do jogador com a de seu adversário, é designada linha de ataque (Figura 27), pois, é a partir desta linha que o jogador consegue subtrair ou eliminar dados do adversário.

Figura 27: Tabuleiro de Ntxuva



Fonte: os Autores (2020)

Para interpretar o jogo e suas regras, irá se considerar as seguintes indicações ilustradas na Figura 27:

- ✓ i → indica o jogador ou grupo de jogadores. Neste caso, i variará de entre 1 e 2, pois, estaremos aqui a considerar uma disputa de dois jogadores ou de duas equipes de jogadores.
- ✓ j → indica a posição da linha de um determina jogador ou equipe de jogadores. Também, j variará entre 1 e 2, pois, o campo de jogo de cada jogador ou equipe de jogadores possui apenas duas linhas.
- ✓ k → indica a posição de casa, em um determinado campo de jogo. K variará em função do número de casas em cada linha, no caso da Figura 27, k variará

de 1 a 8 e, no caso do Ntxuva praticado no FNJT, k variará de 1 a 16. A contagem é feita no sentido anti-horário, a partir da primeira casa da linha.

- ✓ C_{ijk} → indica de forma geral a localização de uma casa k, em uma linha j, em que o jogador i esteja a fazer as movimentações dos dados. Por exemplo, C_{117} nos indicará, neste momento, que o jogador 1, está jogando na linha 1, casa sete, considerando o movimento dos dados no sentido anti-horário.

Feitas estas considerações, indicamos a seguir os objectivos do jogo: boa parte dos jogos da família Mancala IV possuem dois objectivos, que são de acordo com Townshend (1979, p. 110), "adquirir por vários meios de captura e/ou acumular a maioria das sementes em jogo, ou às vezes, simplesmente para torná-lo impossível para o outro jogador se mover". A respeito destes objectivos, o respondente B apresentou três modelos de jogos, em que um deles é o utilizado no FNJT.

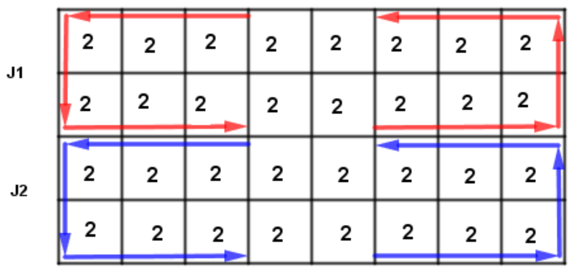
No modelo que se ajusta ao utilizado no FNJT, o objectivo é de acordo com o disposto no artigo 8, alínea d) do regulamento de competição de Ntxuva, o de capturar e eliminar todos os dados do adversário (INADE, sd.), ver Anexo 1. A eliminação destes dados segue determinadas regras, estabelecidas no regulamento de competição de Ntxuva e socializadas a priori aos jogadores, para que possam treinar e praticar o jogo, mediante estas regras. Descreve-se a seguir as regras, a partir do entendimento que se teve no contato e conversa com o especialista do jogo (respondente B), da prática com o jogo ao se realizar o mini-torneio de Ntxuva e das descrições apresentadas no regulamento de competição de Ntxuva no FNJT.

- ✓ Designação do júri. Antes do início da competição ou da partida do jogo é designado um júri que acompanhará a partida. Este júri, composto por especialista no jogo, tem a missão de fazer cumprir as regras, verificar a disposição dos dados no tabuleiro, controlar os casos de violação e aplicar a devida sanção. Em princípio, cada partida é acompanhada por dois júris que devem ser provenientes de uma província diferente dos jogadores da partida;
- ✓ Não falar durante a partida. Durante a partida, não é permitida a comunicação entre os jogadores, bem como a comunicação dos jogadores com os espectadores. Esta medida visa não permitir haver especulação e orientação exterior relativa às estratégias do jogo, pois, cada um deve atuar por si só ou, em caso de jogos em equipe, atuar apenas dentro da equipe, entre os jogadores que a compõem. O júri são os únicos autorizados a se comunicarem

durante a partida. No caso de se detectar alguma comunicação anormal, o jogador em causa é imediatamente eliminado da partida.

- ✓ Preenchimento do tabuleiro com os dados. Antes do início da partida, o tabuleiro deverá ser preenchido por dois dados em cada casa, como é ilustrado na Figura 27;
- ✓ Sorteio do jogador que iniciará a partida. A partida não é iniciada arbitrariamente, pois tem de haver, entre os jogadores que disputam, alguém que possa iniciar a partida. Para isso, o júri mediante algum critério aleatório, tem a tarefa de realizar um sorteio para identificar o jogador que deverá abrir a partida. De acordo com o respondente B, o júri utiliza uma moeda e solicita que os jogadores escolham a face com que se identificam, depois disso, realiza um lançamento da moeda e verifica a face para a qual a moeda se encontra posicionada no chão. Neste caso, inicia o jogo o jogador cuja face escolhida terá aparecido depois do lançamento.
- ✓ Movimentação dos dados. Os dados devem ser movimentados no sentido anti-horário. Neste caso, cada jogador ou grupo de jogadores (i) movimenta os dados pertencentes ao seu campo de ação, distribuindo-os um a um em casas consecutivas. Portanto, não se pode deliberadamente saltar uma casa na distribuição dos dados. Na Figura 28 é ilustrado o sistema de movimentação de dados na marcação em vermelho para o jogado 1 e em azul para o jogador 2.

Figura 28: Sentido da movimentação de dados



Fonte: os Autores (2020)

- ✓ Casa em que se inicia a partida. A distribuição dos dados é iniciada em qualquer uma das casas C_{ijk}, pertencente ao campo de jogo do jogador (i). Assim, sempre que o jogador retoma a jogada, depois que seu adversário não pode mais continuar, também escolhe qualquer casa por onde deve dar continuidade à distribuição dos dados. Entretanto, esta escolha é feita mediante algumas estratégias, sobretudo de cálculo mental, que o jogador deverá delinear para que possa capturar e subtrair o máximo de dados, ou melhor, para que possa subtrair, quando possível, todos os dados do adversário para poder vencê-lo.

- ✓ Processo de distribuição e captura de dados. A distribuição de dados é feita no sentido anti-horário, como foi anteriormente sinalizado, colocando, de cada vez, um dado em cada casa.

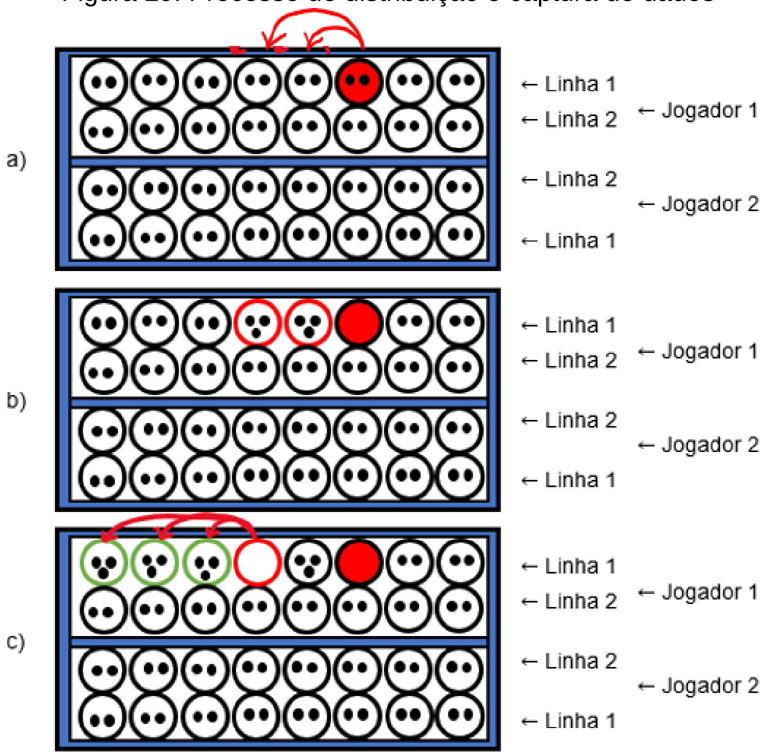
Por exemplo, na Figura 29.a, se o jogador 1 inicia sua jogada na casa 3, linha 1, isto é, casa C_{113}, ele deverá pegar nos dois dados dessa casa (preenchimento vermelho) e distribuir um a um para as casas seguintes (C_{114} e C_{115}). Neste caso, a casa C_{113} ficará vazia, isto é, $\#C_{113} = 0$ e as casas seguintes C_{114} e C_{115}, ficaram com três dados, isto é, $\#C_{114} = \#C_{115} = 2 + 1 = 3$, como se ilustra na Figura 29.b.

Ao se realizar a distribuição de dados, duas situações podem ocorrer:

Primeira situação: o último dado da distribuição terminar em uma casa não vazia. Neste caso, o jogador deverá juntar este último dado em sua mão aos dados da casa em que o mesmo terminaria, depois, seguir com a distribuição. Este processo, deverá ser repetido até que em alguma fase, o último dado coincida ou seja colocado em uma casa que tenha sido encontrada vazia.

Por exemplo, na Figura 29.a., o jogador 1 leva dois dados da casa C_{113} e distribui um a um para as casas C_{114} e C_{115}. Aqui, vemos que a casa C_{115} é a última nesta distribuição e ela é não vazia ($\#C_{115} \neq 0$), isto é, antes da distribuição a casa C_{115} tinha dois dados, sendo que, depois da distribuição, passando a ter três dados ($\#C_{115} = 2 + 1 = 3$). Neste caso, o jogador deverá continuar com a jogada, levando estes três dados desta casa (C_{115}) e distribuí-los às casas C_{116}, C_{117} e C_{118}, como é ilustrado na Figura 29.c. O processo continua até que ocorra a segunda situação. Ver Anexo 2.

Figura 29: Processo de distribuição e captura de dados

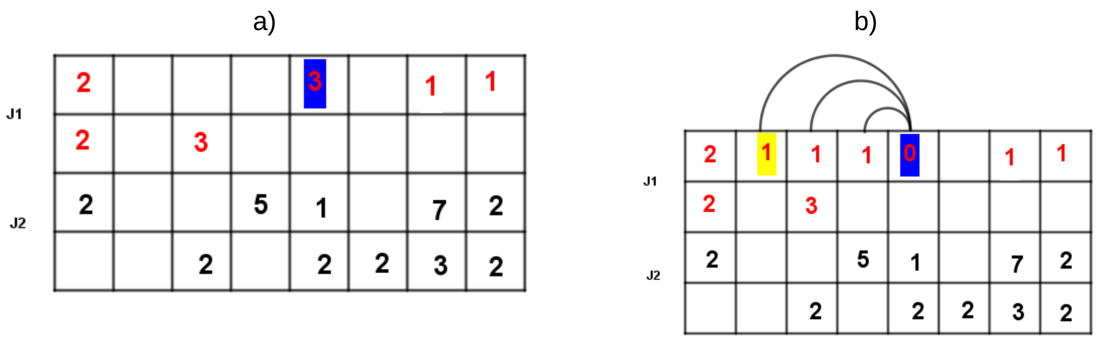


Fonte: os autores (2022)

Segunda situação: o último dado da distribuição corrente terminar em uma casa vazia. Neste caso, o jogador deverá parar com a jogada e três situações associadas ocorrerão:

- **Situação A**: a distribuição terminou em uma casa vazia da linha de defesa (C_{i1k}). Neste caso, o jogador deverá parar com a jogada e imediatamente passar a jogada para o adversário.

Figura 30: Representação da situação A



Fonte: os autores (2022)

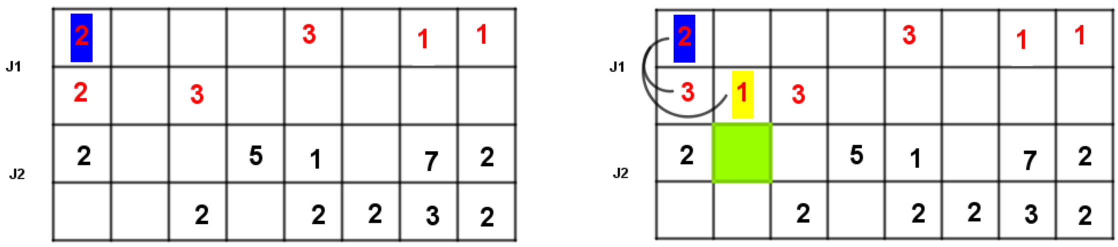
Na Figura 30 é ilustrada a situação A. Por exemplo, o jogador 1 decide distribuir os dados da casa com preenchimento azul (Figura 30. a). Como a casa possui apenas três dados, a distribuição contínua de dados irá terminar na casa com o preenchimento amarelo (Figura 30. b), que estava anteriormente vazia, mas agora passou a ter um dado. Como a jogada terminou na casa pertence à linha da defesa, o jogador 1 deverá parar a jogada e liberar a jogada seguinte ao jogador 2.

- **Situação B**: a distribuição terminou em uma casa vazia da linha de ataque (C_{i2k}) e a casa oposta da linha de ataque do adversário (C'_{j2k}) está vazia, isto é, ($\#C'_{i2k} = 0$). Neste caso, também o jogador para a jogada e passa ao adversário.

Na Figura 31 é ilustrada a situação B. Por exemplo, o jogador 1 decide distribuir os dados da casa com preenchimento azul (Figura 31. a). Como a casa possui apenas dois dados, a distribuição contínua de dados irá terminar na casa com o preenchimento amarelo (Figura 31. b), que estava anteriormente vazia, mas agora passou a ter um dado. Embora a casa onde a jogada terminou pertença à linha de ataque, como a casa oposta da linha de ataque do adversário não possui dados, a casa com preenchimento verde, o jogador 1 deverá parar a jogada e liberar a jogada seguinte ao jogador 2.

Figura 31: Representação da situação B

a) b)



Fonte: os autores (2022)

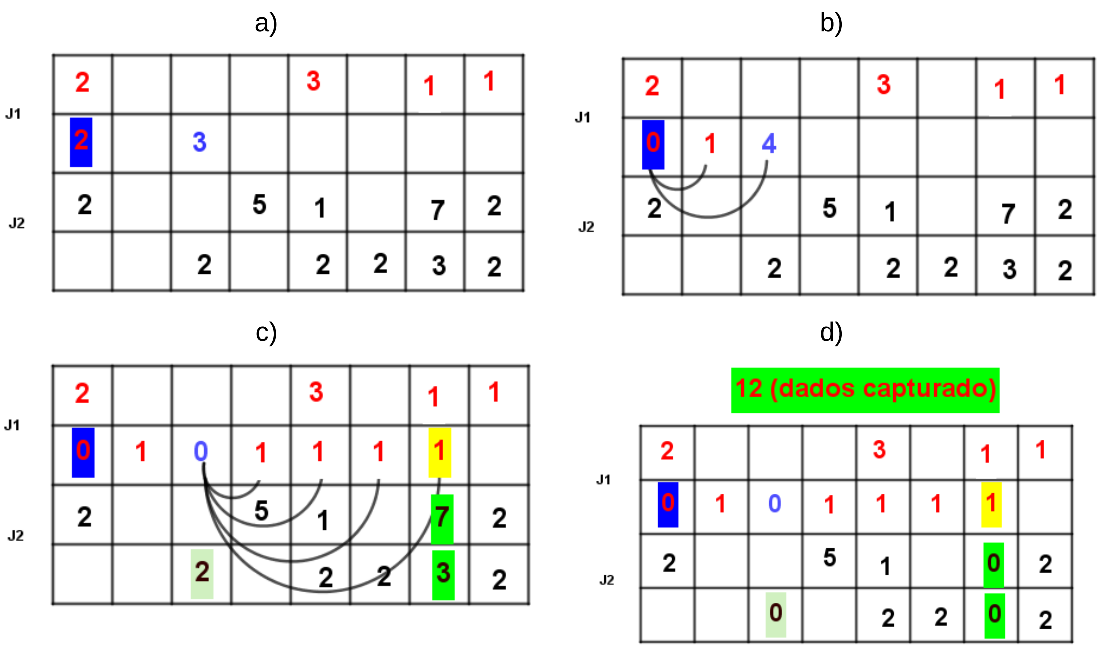
- **Situação C:** a distribuição terminou em uma casa vazia da linha de ataque (C_{i2k}) e, a casa oposta da linha de ataque do adversário (C'_{i2k}) é não vazia, isto é, ($\#C'_{i2k} \neq 0$). Neste caso, o jogador deverá parar a jogada, porém, antes de liberar a jogada seguinte ao adversário, deverá capturar ou subtrair a seu favor dados do campo de jogo de seu adversário. Primeiramente, captura os dados do adversário, da coluna onde terminou a jogada, depois, escolhe outra coluna e captura mais dados do adversário.

A segunda captura é uma captura tática, na medida em que, ao mesmo tempo que o jogador elimina o máximo de dados do adversário para zerar as suas covas, deverá analisar melhor em que casa ele pode capturar dados de modo a desestabilizar o adversário, no sentido de não lhe permitir ter chances de avançar com a captura de seus dados, ou ainda, minimizar o número de dados capturados.

Portanto, esta é a única vez em que o jogador deverá tocar nos dados do adversário. Depois que fizer essa captura, sobretudo a segunda, o adversário poderá iniciar sua jogada.

Na Figura 32 é ilustrada a situação C. Por exemplo, o jogador 1 decide distribuir os dados da casa com preenchimento azul (Figura 32. a). Distribuindo os dois dados ali existentes, a distribuição termina na casa onde possui três dados com a cor do número em azul (Figura 32. a), passando a casa a ter quatro $(3 + 1 = 4)$ dados (Figura 32. b). Pelo facto de a casa não ter estado vazia anteriormente, o jogador continua com a distribuição, levando os quatro dados e distribuindo nas casas seguintes, terminando a distribuição e a jogada na casa com o fundo do número 1 em amarelo (Figura 32. c).

Figura 32: Representação da situação C



Fonte: os autores (2022)

Observe que a casa oposta do adversário (com fundo do número marcado em verde carregado – Figura 32. c) não está vazia. Nesta circunstância, o jogador 1 captura os dados do adversário de coluna $(7 + 3 = 10)$, depois escolhe outra coluna e captura mais dados. No caso, escolheu-se arbitrariamente realizar a segunda captura na coluna onde o fundo do número foi marcado com a cor verde claro, tendo sido capturados mais dois dados. Assim, o jogador 1 pode capturar doze ($7 + 3 + 2 = 12$) dados. Na Figura 32. d, é ilustrada a configuração final do tabuleiro, após a captura de dados feita pelo jogador 1.

A partida é finalizada, de acordo com os objectivos do jogo adotado no festival nacional dos jogos tradicionais em Moçambique, quando o campo de jogo de um dos jogadores fica completamente sem dados.

6. PRAXEOLOGIAS EXPERTAS E POTENCIALIDADES MATEMÁTICAS NA PRÁTICA COM O JOGO NTXUVA

Nesta secção, objectiva-se identificar e descrever as praxeologias expertas e potencialidades matemáticas na prática com o jogo Ntxuva. Na secção anterior, privilegiou-se destacar o Ntxuva a partir de sua história, descrevendo-se não só a sua origem, mas também a sua distribuição pela África a partir dos tipos de jogo que caracterizam na generalidade a família de jogos Mancalas, de que o Ntxuva faz parte, bem como alguma das regras que estão ancoradas a práticas do Jogo.

Nesta secção, propõe-se ampliar o conhecimento sobre o Jogo Ntxuva, procurando explorar e descrever as praxeologias de acordo com a sua função social (P_{SL}), as Etnopraxeologias na prática com Ntxuva. Deste modo, descreve-se alguns elementos do processo de construção dos tabuleiros, buscando uma relação com os conceitos e propriedades matemáticas que se podem revelar neste processo. A seguir, se explora e se descreve a estrutura da configuração inicial do tabuleiro, procurando revelar alguns elementos matemáticos imediatamente observáveis. Também se descreve o processo do jogo, a partir de uma partida realizada no campo, com objectivo de descrever e caracterizar as praxeologias expertas que advém da expertise dos jogadores no processo de distribuição, eliminação e acumulação de dados no tabuleiro, um processo que é realizado considerando a possibilidade do jogador se defender, para não sofrer perdas de dados e, de atacar, para conseguir eliminar (todos) dados do adversário e, poder ganhar o jogo.

A partir destas descrições, nos casos possíveis, serão revelados padrões, conceitos e propriedades matemáticas, que podem ser considerados úteis na prática do jogador com Ntxuva, além do mais, que podem ser elementos interessantes que sirvam de apoio para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

6.1. A ESTRUTURA DO TABULEIRO DO JOGO NTXUVA

Na secção 7 foi esclarecido que o jogo Ntxuva é um jogo de tabuleiro, porém, podem também ser feitas covas no chão. As covas são dispostas em um número fixo de quatro linhas e, um número variável de colunas (n), não menos que quatro. Na prática, os tabuleiros mais comuns, utilizado nas comunidades onde se prática o jogo Ntxuva são do tipo 4×8.

Em muitos casos, o tabuleiro é construído por um artesão (carpinteiro), aplicando o máximo de rigor, para que as colunas não fiquem desalinhadas, pois, um tabuleiro com as colunas desalinhadas ou desajustadas pode criar dificuldades na implementação das regras do jogo e gerar um distúrbio na sua prática, sobretudo no processo de captura de dados.

Nesta rigorosidade, vivem de forma implícita noções e propriedades matemáticas, que permitem a construção de um tabuleiro que seja modesto e permita que os jogadores efetuem suas jogadas sem constrangimento. São essas noções e propriedades, sobretudo geométricas, que se podem explorar na construção do tabuleiro na base de madeira, no chão ou em cartolina, que se busca descrever e apresentar nesta subsecção.

A descrição é baseada na análise que se fez do recorte do vídeo apresentado por Francisco (2020), em que demonstra a construção da base do jogo no chão e posteriormente as regras básicas para disputa do Ntxuva, mas também, de uma entrevista a um carpinteiro, com quem tive contato para produzir tabuleiros que foram utilizados para o trabalho de campo e no final ofertados à comunidade onde se realizou parte do trabalho de campo desta pesquisa (ver Figura 33).

Figura 33: Oferta de um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×16 à localidade de N’temangau

Fonte: os autores (2020)

6.1.1. Praxeologias na construção do tabuleiro de Ntxuva

No processo de confeccionam-no do tabuleiro, quer feito no chão como em base de madeira, um tipo de tarefa, que dessigamos tarefa principal (T_p) e as subtarefas (t_{pi}), cuja a sua realização levam o artesão a construção do tabuleiro. A seguir, descrevemos a organização praxeológica associada a construção do tabuleiro.

Tarefa principal ($\boldsymbol{T_p}$): construir e/ou confeccionar o tabuleiro do jogo Ntxuva.

Para realização da T_p duas subtarefas são consideradas:

Subtarefa 1 – $\boldsymbol{t_{p1}}$: Demarcar a estrutura do tabuleiro de Ntxuva.

Conjunto de técnicas associadas a $\boldsymbol{t_{p1}}$: O conjunto de técnicas que alicerçam a realização da t_{p1} inclui os seguintes procedimentos: traçado de segmentos de retas, paralelos e perpendiculares; divisão de segmentos de reta em partes iguais.

Na prática, na construção do tabuleiro ou da estrutura do Ntxuva, primeiramente faz se a marcação da área onde se deseja fazer os buracos. É neste processo de marcação que se exige uma certa rigorosidade geométrica, para que, quando se for fazer as covas, elas não fiquem desalinhadas. O artesão que trabalha com a madeira, utiliza matérias próprios para garantir a perfeição no alinhamento dos buracos, enquanto que, os que constroem a base do jogo no chão, utilizam uma rigorosidade intuitiva, uma vez que, a marcação não é feita mediante regras geométricas rígidas, como se pode ver a marcação das linhas exibidas na Figura 34.

Figura 34: Marcação das medições para construção

Fonte: Francisco (2020)

Considerando o Ntxuva do tipo 4×6 na Figura 34, no chão, os jogadores fazem a marcação desenhando 5 ou 6 linhas paralelas equidistantes (horizontais, em relação à posição que os jogadores se encontram diante da estrutura da base do jogo), depois, desenham 7 linhas verticais paralelas e equidistantes, formando uma malha hipoteticamente quadrangular, como é ilustrado na Figura 34.

Conjunto tecnológico teórico associado a $\boldsymbol{t_{p1}}$: O conjunto de instruções para realização da marcação da base do jogo Ntxuva que é esclarecido ao detalhe nos parágrafos que seguem, encontra sua base formal na geometria plana, sobretudo no que refere às construções geometrias sobre retas e figuras geométricas.

Considerando um tabuleiro do tipo $m \times n$, para realizar a marcação da base do tabuleiro do jogo, o jogador ou o artesão precisa desenhar $m + 1$ linhas finitas (o que designamos a seguir por segmento de reta) paralelas e equidistantes. Com a mesma distância de separação entre as $m + 1$ linhas indicadas anteriormente, também se desenha $n + 1$ linhas finitas e equidistantes, que sejam perpendiculares às $m + 1$ linhas. No caso, as extremidades das $n + 1$ linhas são pontos que pertencem a 1ª e última linhas das $m + 1$ linhas.

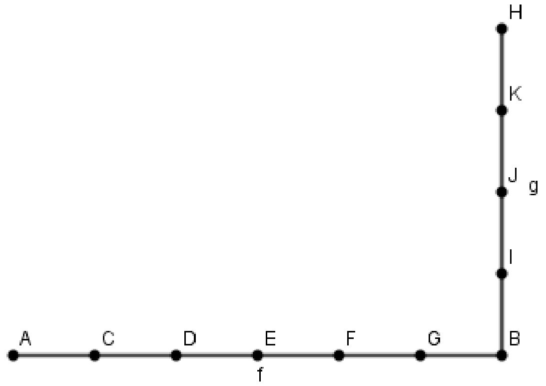
Assim, a marcação começa pelo traçado do segmento de reta $\overline{AB}$, que é em seguida, dividido por estimativa (um exercício mental) em algumas partes iguais, correspondentes ao número de colunas (C) que se deseja ter no tabuleiro. No caso da Figura 35, é apresentado a divisão do segmento $\overline{AB}$ em seis partes iguais, respectivamente $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GB}$, uma requalificação da divisão apresentada na Figura 34. Em geral, com auxílio de um pauzinho ou um objecto que permita riscar o chão, o jogador traça a linha $\overline{AB}$ na presunção de ter um segmento de reta, depois, marcam-se sobre o mesmo segmento $\overline{AB}$ os pontos C, D, E, F, G que devem ser hipoteticamente equidistantes e colineares por pertencerem ao mesmo segmento, isto é, $C, D, E, F, G \in \overline{AB}$.

Seguidamente, é traçado o segmento de reta $\overline{BH}$, levantando-se uma perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ a partir de B. Pelos mesmos procedimentos explicados no parágrafo anterior é dividido $\overline{BH}$ em quatro partes iguais, pelo facto de o Ntxuva pertencer à família manca IV. Para a divisão de $\overline{BH}$, são tomadas as mesmas medidas da divisão de $\overline{AB}$. O objectivo é que se monte uma estrutura composta por $4 \times C$ quadrados, por onde se deve fazer os buracos.

O segmento $\overline{BH}$ é traçada de tal modo que seja perpendicular a $\overline{AB}$, isto é, $\overline{BH} \perp \overline{AB}$. Depois que se tem os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BH}$ e suas respetivas divisões, a partir dos pontos I, J, K, H (ver Figura 36), são traçados segmentos de retas ($\overline{IL}$, $\overline{JM}$, $\overline{KN}$,

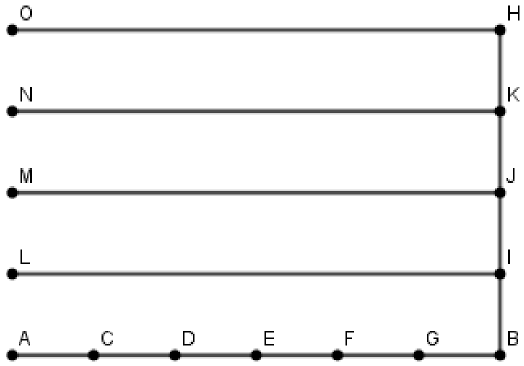
$\overline{HO}$) paralelos a $\overline{AB}$. Para completar a marcação, a partir dos pontos A, B, C, D, E, F, G (ver Figura 37), são traçados segmentos de retas ($\overline{AO}$, $\overline{CP}$, $\overline{DQ}$, $\overline{ER}$, $\overline{FS}$, $\overline{GT}$), hipoteticamente de mesmas medidas e paralelos a $\overline{BH}$.

Figura 35: Iniciação da marcação da estrutura para construção do Ntxuva



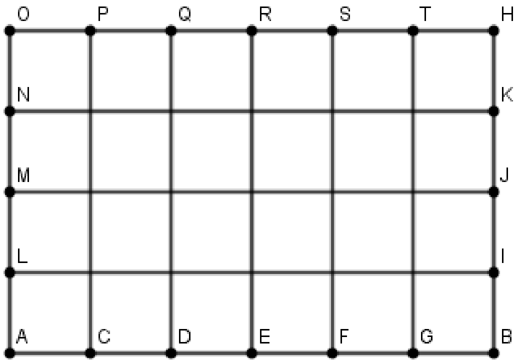
Fonte: os autores (2022)

Figura 36: Marcação das linhas da estrutura do tabuleiro



Fonte: os autores (2022)

Figura 37: Marcação completa da estrutura do tabuleiro



Fonte: os autores (2022)

Aqui, os pontos L, M, N, O são construído desenhando paralelas à linha $\overline{AB}$ para que as medidas de $\overline{IL}$, $\overline{JM}$, $\overline{KN}$, $\overline{HO}$ e $\overline{AB}$ sejam iguais. Pela propriedade "um quadrilátero não cruzado $[ABIL]$ com lados $[AB]//[LI]$ e da mesma medida é um paralolegrama", vem que: $[AL]//[BI]$. Utilizando esta mesma propriedade prova-se também que $[ML]//[IJ]$, $[MN]//[JK]$ e $[NO]//[KH]$. Portanto, pelos axiomas de Euclides podemos deduzir que as linhas $[AL] \wedge [LI]$, $[LM] \wedge [MJ]$, $[MN] \wedge [NK]$, $[NO] \wedge [OH]$ coincidem e L, M, N, O, alinhados sobre o segmento de reta $[AO]$.

Depois que a marcação é feita, tanto no chão como na madeira, segue a fase de escavar o chão ou a madeira para fazer os buracos. A maioria opta por buracos circulares e outros, a minoria, por buracos quadrangulares. Na Figura 38, é ilustrado como fica a estrutura do Jogo Ntxuva, depois de se ter feito os barracos.

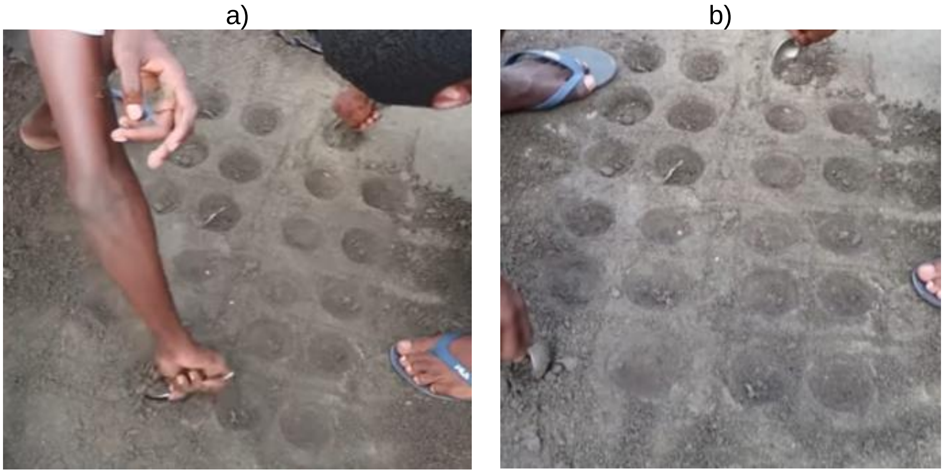
Este processo, que leva à construção da estrutura do jogo Ntxuva é aplicado tanto aos que constroem o jogo no Chão, nas cartolinas ou em madeira, embora nesta última haja uma pequena particularidade a observar. Geralmente, na madeira é feita a marcação sobre duas estruturas de madeiras, devido à diferença entre a área que é necessária para formar a estrutura do jogo e as dimensões da madeira já processada. Neste caso, o tabuleiro é feito em partes para cada campo de jogo.

Subtarefa 2 – $\boldsymbol{t_{p2}}$: Abrir buracos ou covas nos quadrados marcados.

Conjunto de técnicas associadas a $\boldsymbol{t_{p2}}$: O conjunto de técnicas que alicerçam a realização da t_{p2} inclui o procedimento único de escavação na terra ou na madeira, para criação de covas com formato semiesférico, cuja circunferência base possui um diâmetro mais ou menos igual aos lados dos quadrados que são formados após a demarcação da base do jogo. No caso, o jogador ou o artesão utiliza algum material perfurador para cavar no chão ou fazer a cova na madeira. Na Figura 38 a) e b) é ilustrado jogadores a realizarem o processo de escavação no chão.

Figura 38: Abertura dos buracos (casas) do Ntxuva

a) b)



Fonte: Francisco (2020)

Conjunto tecnológico teórico associado a $\boldsymbol{t_{p2}}$: Os jogadores baseiam-se nas dimensões dos quadrados e fazem covas que permitam colocar as peças do jogo. Embora a rigorosidade não seja absoluta, implicitamente a criação da cova semiesférica remete a algum conhecimento sobre círculo e circunferência e não menos indicado, da geometria tridimensional.

6.1.2. Noções e propriedades matemáticas que podem ser exploradas na construção do tabuleiro de Ntxuva

Objectivamos nesta subsecção identificar e mostrar como são apresentadas as noções e propriedades matemáticas que estão implícitas e se podem explorar nas praxeologias ancoradas na construção da estrutura do tabuleiro de Ntxuva, descritas na subsecção 6.1.1.

Na construção da estrutura da base do jogo Ntxuva, observa-se o emprego de várias noções e propriedades da geometria plana. Todas estas noções estão associadas à "tração geométrico com régua e esquadro", com exceção dos desenhos feitos no chão, que não utilizam estes instrumentos para o traçado.

A primeira noção que se constata é a noção de ponto. Embora não se fale exatamente sobre ponto, na prática, o conceito é presente no processo de demarcação na medida em que é utilizado para marcar onde deva se fixar a régua para traçar segmentos diversos. Por exemplo, quando se traça o primeiro segmento (ver Figura 35), são marcados na madeira os pontos A e B, depois, por meio de uma régua, são unidos formando o segmento $\overline{AB}$. De acordo com Pessoa, Santos, Silva (2010, p.18) "alguns destes pontos são gráficos, resultantes do toque do lápis na madeira e outros, geométricos resultantes da intersecção de duas linhas".

Uma segunda noção que é implicitamente utilizada é a noção de segmento de reta, que de acordo com Pessoa, Santos, Silva (2010, p. 20) "é porção de reta compreendida entre dois pontos distintos da mesma, designados de extremidades". Esta noção acompanha outras duas noções que são utilizadas: as de paralelismo e

perpendicularidade de retas. Na descrição feita na subsecção 6.1.1 e também olhando a Figura 35, é possível compreender a presença da noção de perpendicularidade, no momento em que se traça o segmento de reta $\overline{BH}$. Este segmento é construído tendo em conta que deve ser perpendicular e consecutivo não colinear a $\overline{AB}$, isto é, $\overline{BH} \perp \overline{AB}$.

Uma noção que é utilizada de forma implícita é a noção de medida e congruência. Portanto, dois segmentos se dizem congruentes se eles possuem a mesma medida (PESSOA, SANTOS, SILVA, 2010, p. 21). No processo de marcação da estrutura do tabuleiro essa noção é utilizada, por exemplo, quando o artesão traça os segmento s $\overline{IL}$, $\overline{JM}$, $\overline{KN}$, $\overline{HO}$, que devem ter a mesma medida que o segmento $\overline{AB}$, isto é, $\overline{IL} = \overline{JM} = \overline{KN} = \overline{HO} = \overline{AB}$ (ver Figura 36). O artesão utiliza esta noção e traça os segmentos de reta iguais e paralelos com base em uma régua. Portanto, em várias fases de marcação da base para construção do tabuleiro, quer na madeira ou no chão, esta noção é utilizada, para garantir o rigor na construção do tabuleiro.

É possível verificar que a finalidade da marcação é obter uma malha com formato de um paralelogramo do tipo retângulo (ver Figura 37), por assumir certas propriedades como: possuir lados opostos paralelos ($\overline{AB} \parallel \overline{OH} \wedge \overline{AO} \parallel \overline{BH}$), lados opostos congruentes ($\overline{AB} = \overline{OH} \wedge \overline{AO} = \overline{BH}$), ângulos iguais a 90º ($\hat{A} = \hat{B} = \hat{H} = \hat{O}$). A malha é dividida em quadrados, que são também um tipo de paralelogramo com lados e ângulos congruentes. (PESSOA, SANTOS, SILVA, 2010).

6.2. CONFIGURAÇÃO INICIAL DO TABULEIRO DE NTXUVA

Nas descrições apresentadas na secção 7, foi mostrado que o Ntxuva faz parte da família Mancala IV, por possuir 4 linhas e um número variado de colunas, não menos que quatro. Assim, a primeira tarefa para iniciar uma jogada é: preencher o tabuleiro com dois ou mais dados em cada casa. A técnica que é ancorada a essa tarefa é de contagem, o que permite certificar, antes de iniciar a jogada, se todas as casas têm o mesmo número de dados. O conjunto tecnológico-teórico encontra sua base de sustento na aritmética básica.

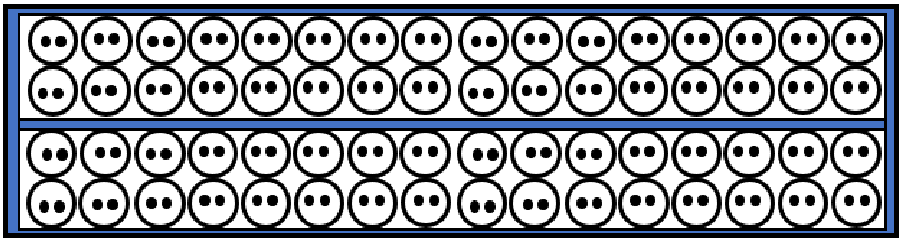
Na prática, em Moçambique, tem-se utilizado na maior parte das vezes dois dados e em alguns poucos casos quatro dados para preencher cada casa do tabuleiro do jogo Ntxuva. Na Figura 39 é ilustrada a configuração inicial do jogo Ntxuva, jogado em uma base de jogo providenciada no chão.

Figura 39: configuração inicial do Ntxuva do tipo 4×6

Fonte: Francisco (2020)

No caso do Ntxuva praticado no FNJT, utiliza-se um tabuleiro do tipo 4×16, sendo cada casa preenchida por dois dados, como é ilustrado na Figura 40, que representa a simulação da configuração ou estado inicial do tabuleiro de Ntxuva.

Figura 40: Estado inicial do Mancala do tipo 4×16



Fonte: os autores (2022)

De acordo com Agbinya (2004), a configuração ou o estado inicial de cada jogo de Ntxuva, pode ser representado por uma matriz do tipo $m \times n$, no caso da Figura 40, $m = 4 \wedge n = 16$, onde os elementos da matriz são todos iguais a dois, isto é, $a_{ij} = 2$, como é representada na Figura 41.

Figura 41: Matriz representativa da configuração ou estado inicial do Mancala do tipo 4×16

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Fonte: os autores (2022)

Sobre esta configuração inicial diversos questionamentos podem ser feitos, com vista a explorar algumas relações matemáticas implícitas nela, entre elas, a questão sugerida por Pereira (2011, 2016, p.): quantos dados existem no tabuleiro? Este questionamento demanda a utilização de praxeologias diversas que possam levar o sujeito questionado a apresentar alguma resposta satisfatória a ela. Para emersão dessas praxeologias, um questionamento intrínseco pode ser feito: como determinar o número de dados que compõem a configuração inicial do Ntxuva? Este questionamento constitui uma tarefa, não essencialmente produzida no processo de jogo, mas que se pode fazer aos praticantes e anunciada da seguinte forma:

Tarefa: Determinar o número de dados que compõem a configuração inicial do Ntxuva.

Conjunto de técnicas: o conjunto de técnicas que pode alicerçar esta tarefa inclui o processo de contagem acumulada de dados casa a casa, a realização das operações de adição e multiplicação.

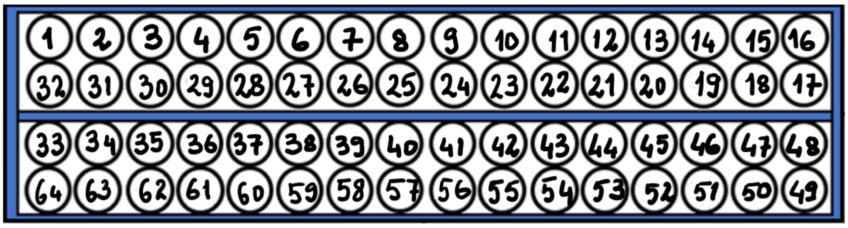
Conjunto tecnológico-teórico: para resolver esta tarefa, Pereira (2011, 2016) avança algumas ideias, sugerindo que o sujeito possa utilizar o conceito de multiplicação e fazer a operação aritmética. Nessa ideia, conhecendo o número de casas que possui o tabuleiro, pode ser que o sujeito pense em multiplicar o número de casas que compõem o tabuleiro pelo número de dados contidos em cada casa no início de cada jogada. No caso do Ntxuva praticado no FNJT, esta operação seria: $64 \times 2 = 128$ dados.

Como a configuração inicial do jogo pode ser representada por uma matriz do tipo $m \times n$, o número de dados que compõem a configuração inicial do tabuleiro poderá ser determinado pela multiplicação do número de linhas (m) pelo número de colunas (n) e o número (p) de dados em cada casa, isto é, $N = m \times n \times p$. No caso do Ntxuva praticado no FNJT teríamos: $N = 4 \times 16 \times 2 = 128$.

Outra possibilidade que pode ser levantada está associada ao processo de contagem, que resultaria na acumulação de dados. Sabendo que cada casa possui dois dados, no caso do Ntxuva praticado no FNJT, pode ser que o sujeito que é questionado sobre o número de dados total no tabuleiro, pense em realizar uma contagem de dados, casa-a-casa. Esta contagem levaria à realização de uma soma sucessiva de elementos que compõem a matriz de dados, resultante da configuração inicial do jogo Ntxuva. Neste caminho, o sujeito pode ser levado a desenvolver o seguinte procedimento:

Vamos considerar uma contagem feita na ordem que é apresentada na Figura 42. Os dados contidos em cada uma das casas na configuração inicial (Figura 41) representaram, no caso, o termo de uma sucessão numérica constante, isto é, $a_1 = a_2 = \cdots a_n = a = 2$. O processo de contagem casa a Casa, resultaria na seguinte acumulação de dados: $y_1 = a_1 = 2$, $y_2 = y_1 + a_2 = 2 + 2 = 4$, $y_3 = y_2 + a_3 = 4 + 2 = 6$, assim sucessivamente até $y_{64} = y_{63} + a_{64} = 126 + 2 = 128$, como é ilustrado no Quadro 8. Este procedimento, pode ser o mais comum entre os que estiverem a praticar o jogo.

Figura 42: identificação arbitrária das casas do tabuleiro de Ntxuva



Fonte: os autores (2022)

Trata-se então de uma contagem acumulada, que o sujeito iria realizar para chegar até o número total de dados que compõem o tabuleiro na sua configuração inicial, na qual a operação de adição é explicitamente evidenciada e, uma multiplicação implícita. Esta contagem acumulada pode ser, por exemplo, expressa como é ilustrado no Quadro 8.

Quadro 8: Operação que se pode desenvolver para determinar o número de dados em um tabuleiro de Ntxuva

Número da cova (n)	Dados em cada cova (a_i)	Soma acumulada (y_i)	Dados acumulados
1	2	$y_1 = a_1 = 2$	2
2	2	$y_2 = y_1 + a_2 = 2 + 2$	4
3	2	$y_3 = y_2 + a_3 = 4 + 2$	6
4	2	$y_4 = y_3 + a_4 = 6 + 2$	8
5	2	$y_5 = y_4 + a_5 = 8 + 2$	10
...	...	...	...
64	2	$y_{64} = y_{65} + a_{64} = 126 + 2$	128
...	...	...	...
n	2	$y_n = y_{n-1} + a_n$	

Fonte: os autores (2022)

Este processo será hipoteticamente seguido até que o sujeito alcance a cova $n = 64$, onde poderá ter acumulado 128 dados. Como é possível notar, os dados acumulados representam uma sucessão numérica $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 128\}$, que resulta na soma dos dados acumulados em uma cova anterior ao da cova presente e constante, isto é, $y_n = y_{n-1} + a_n = y_{n-1} + a$, como por exemplo: $y_3 = y_2 + a_3 = 4 + 2 = 4 + 2 = 6$. De acordo com Nhêze, Paulo, Langa (2009, p. 96), “esse tipo de sucessão, em que cada termo, depois do primeiro, é obtido pela soma de uma constante, designada de razão com o termo precedente é designado de progressão aritmética”.

Veja que a constante referida anteriormente, que é a razão da progressão, é igual ao número de dados em cada cova no estado inicial do jogo Ntxuva, isto é, $r = a_1 = \cdots = a_n = a$, ou simplesmente $r = a$. Analisando a aritmética que dá origem aos dados acumulados, a partir da reconstituição do Quadro 8 e de acordo com a definição de Nhêze, Paulo, Langa (2009) sobre progressão aritmética, pode-se deduzir a seguinte ralação:

Considerando que o primeiro termo é $y_1 = a_1$, o segundo o termo y_2 obtemos da soma de y_1 por a_2, isto é, $y_2 = y_1 + a_2$. Como $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = a$, então, fazemos a substituição obtendo $y_2 = y_1 + a$. Na sequência e do Quadro 8, o terceiro termo é $y_3 = y_2 + a_3 = y_2 + a$. Substituindo y_2 por $y_1 + a$, obtemos, $y_3 = y_1 + a + a = y_1 + 2a$. E o quarto termo, como fica? Na mesma abordagem se tem: $y_4 = y_3 + a_4 = y_1 + 2a + a = y_1 + 3a$. E o quinto, sexto, ..., termo, como serão?

Veja que, quando estamos na casa 3 $(n = 3)$, acumulamos $y_3 = y_1 + 2a = y_1 + (3 - 1)a$. Quando estamos na casa 4 $(n = 4)$, acumulamos $y_4 = y_1 + 3a = y_1 + (4 - 1)a$ e na casa 5 $(n = 5)$ acumulamos $y_5 = y_1 + 4a = y_1 + (5 - 1)a$. Nota-se aqui que cada acumulação depois da primeira cova é obtida através de y_1 somando a constante "a", que é a razão da progressão, $(n - 1)$ vezes, isto é, $y_n = y_1 + (n - 1)a$. Esta última expressão achada é designada de termo geral de uma progressão aritmética (NHÊZE, PAULO, LANGA, 2009).

Observe que, quando isolamos "$a_i = a$" no processo ou na aritmética de acumulação de dados, que dá origem à sequência $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, obtemos:

(1) $y_n = y_{n-1} + a$	expressão resultante do processo de acumulação de dados.
(2) $y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-1} + a$	subtração de y_{n-1} em ambos membros da expressão 1.
(3) $y_n - y_{n-1} = a$	cancelamento de $+y_{n-1}$ e $-y_{n-1}$ no segundo membro da expressão 2.

No caso do Ntxuva jogado no FNJT, em que $a = 2$, temos:

$$y_2 - y_1 = 4 - 2 = 2$$

$$y_3 - y_2 = 6 - 4 = 2$$

$$y_4 - y_3 = 8 - 6 = 2$$

...

$$y_n - y_{n-1} = 2$$

Como é de se notar, a diferença entre um termo e o seu precedente, para além de ser constante, é também positivo. De acordo com Nhêze, Paulo, Langa (2009), progressões aritméticas que se comportam dessa forma são designadas crescentes e o contrário, são designadas decrescentes. No caso, podemos dizer que a sucessão gerada no processo de acumulação de dados para determinação do número total de dados contidos no tabuleiro, na configuração inicial do Ntxuva é uma PA crescente, independentemente da extensão do tabuleiro e do número de dados colocados inicialmente em cada cova.

E qual é a caraterística da sucessão de dados contidos em cada cova $a = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, na configuração inicial do tabuleiro? Como $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = a$, é possível notar que a diferença entre um termo e seu precedente é igual a zero, isto é, $a_n - a_{n-1} = a - a = 0$, para todo tipo $m \times n$ de tabuleiro de Ntxuva. Nestas condições e de acordo com Nhêze, Paulo, Langa (2009), a sucessão de dados contidos inicialmente no tabuleiro de Ntxuva é uma progressão aritmética constante.

6.3. JOGANDO O NTXUVA: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE ALGUMAS DAS ETAPAS DO JOGO

Nesta subsecção se descreve o processo do jogo a partir de uma partida que se realizou entre os anciões. Nessa descrição, são revelados algumas das estratégias decorrentes das técnicas utilizadas pelos jogadores, ao longo da partida, para justificar as suas ações enquanto competidores que pretendem ganhar o jogo, capturando dados do adversário, ao mesmo tempo que se devem defender, para que seus dados não sejam capturados ou eliminados do tabuleiro.

No processo de jogo, os jogadores partilham um único tipo principal de tarefa que é:

Tarefa principal - $\boldsymbol{T_p}$: Ganhar o jogo.

Esta tarefa é efectivada, utilizando-se técnicas e tecnologias articuladas nas regras do jogo, que se inserem na aritmética básica, a partir do cálculo mental, do processo de contagem e da adição. A concretização da tarefa “ganhar o jogo”, conduz o jogador a realizar duas subtarefas importantes, que são:

Subtarefa 1 – $\boldsymbol{t_1}$: Capturar ou eliminar dados do campo de jogo do adversário.

Subtarefa 2 – $\boldsymbol{t_2}$: Defender os dados em seu campo de jogo.

Estas tarefas são resolvidas por vezes de forma simultânea, pois elas decorrem de um processo de distribuição de dados, no qual o jogador deverá se atentar em cada jogada efetuada, por onde iniciar sua jogada, de tal modo que, ao mesmo tempo que pensa em capturar o maior número de dados no campo de jogo do adversário, consiga defender seus dados, de modo que o adversário não tenha chance de capturá-los, ou, capturá-los mais no menor número possível.

Portanto, o conjunto de técnicas que alicerçam essa tarefa está associado ao cálculo mental, ao processo de contagem, de adição e ao processo de distribuição de dados, esta última que suscita a realização da tarefa:

Subtarefa 3 – t_3: Identificar a melhor casa para iniciar a distribuição de dados.

No caso, no processo de identificação da casa onde deve iniciar a distribuição de dados, o jogador deverá sempre pensar: iniciando a jogada nessa casa, capturarei dados? que vantagem e desvantagem o adversário terá se iniciar a jogada nesta casa? Se não tenho possibilidade nenhuma de capturar dados, qual seria a melhor jogada para que o adversário não possa capturar meus dados, ou, possa capturar o menor número de dados possível? Iniciando nessa casa, poderei capturar dados, entretanto, é seguro capturar dados nessa jogada? Portanto, estas e outras questões podem ser levantadas no processo de identificação da melhor casa para realizar a distribuição de dados.

Na subsecção 8.3.1., apresentamos o conjunto tecnológico-teórico sobre as tarefas t_1, t_2 e t_3, a partir da descrição e análise de algumas jogadas de uma partida realizada sobre o jogo Ntxuva. Na apresentação ou descrição, buscamos mostrar de forma minuciosa como os jogadores procedem para jogar e alcançar a vitória no jogo. Em alguns momentos, faremos a exposição de algumas explicações dadas pelos jogadores na tomada de decisões no jogo, em outros momento, analisaremos as decisões sob a visão estratégica que observamos a partir das ações levantadas pelos jogadores para realizar as jogadas.

6.3.1. Exposição e análise de uma partida do jogo Ntxuva: conjunto tecnológico-teórico sobre as tarefas t_1, t_2 e t_3

Nesta subsecção, se faz a exposição de uma partida do jogo Ntxuva. A exposição é acompanhada com descrição e justificação das principais ações desenvolvidas pelos jogadores, adiante designados jogadores A e B, para cumprir com o objectivo de ganhar o jogo, que caraterizam o bloco tecnológico-teórico que alicerça a explicação das técnicas que integram os procedimentos para que as tarefas t_1, t_2 e t_3 sejam efectivadas. Estas descrições e explicações são apresentadas nas alienas a), c), d), e).

A partida que é descrita e utilizada para explicar as tarefas 1, 2, 3 foi realizada no distrito de Changara, posto administrativo de Luenha, localidade de N'temangau, povoado de Capimbi. Os tabuleiros utilizados e que estão disponíveis na comunidade eram do tipo 4×12, cuja sua configuração inicial é ilustrada na Figura 43.

Figura 43: configuração inicial do Ntxuva do tipo 4×12

Fonte: os autores (2020)

a) Primeira jogada da partida

A partida foi iniciada pelo jogador B, sendo a primeira jogada iniciada na casa 3 (casa circulada em azul) como é ilustrado na Figura 44. Ele começa o jogo recolhendo dois dados dessa casa inicial (casa 3), em seguida distribui, adicionando um a um, no sentido anti-horário, às casas seguintes, isto é, às casas 4 (c_{B4}) e 5 (c_{B5}), passando as casas a ter três dados, ou seja, $c_{B4} = 2 + 1 = 3$, $c_{B5} = 2 + 1 = 3$. Como é de notar, a distribuição termina na c_{B5}, mas como antes da distribuição a casa não estava vazia, isto é, $c_{B5} \neq 0$, o jogador coleta os dados atuais nesta casa 5 ($c_{B5} = 2 + 1 = 3$) e segue realizando a distribuição de dados às casas seguintes c_{B6}, c_{B7} e c_{B8}.

Figura 44: início da partida do jogo Ntxuva entre o jogador A e B

Fonte: os autores (2020)

As casas c_{B6}, c_{B7} e c_{B8} agora passam a ter três dados. Esta que foi a segunda distribuição feita ainda na primeira jogada do jogador B, terminou na casa c_{B8} que não estava vazia ($\#c_{B8} \neq 0$). A semelhança do que ocorreu na primeira distribuição de dados que terminou na casa c_{B5}, aqui também o jogador terá que recolher os dados atuais da casa c_{B8} e continuar a distribuição de dados. No caso, esse processo continua e só termina quando no processo de distribuição de dados, o último dado da distribuição coincida ou seja adicionado a uma casa que esteja vazia (sem dados), passando a casa a ter apenas um dado.

O detalhe da distribuição de dados feita pelo jogador B na primeira jogada é:

- 1ª distribuição (da casa 3 a 5): $c_{3B} = 0 \rightarrow c_{4B} = 2 + 1 = 3 \rightarrow c_{5B} = 2 + 1 = 3$.
- 2ª distribuição (da casa 5 a 8): $c_{5B} = 0 \rightarrow c_{6B} = 2 + 1 = 3 \rightarrow c_{7B} = 2 + 1 = 3 \rightarrow c_{8B} = 2 + 1 = 3$.
- ...
- 8ª distribuição (da casa 23 a 2): $c_{23B} = 0 \rightarrow c_{24B} = 2 + 1 = 3 \rightarrow c_{1B} = 2 + 1 = 3 \rightarrow c_{2B} = 2 + 1 = 3$.
- 9ª distribuição (da casa 2 a 5): $c_{2B} = 0 \rightarrow c_{3B} = 0 + 1 = 1 \rightarrow c_{4B} = 3 + 1 = 4 \rightarrow c_{5B} = 0 + 1 = 1$.

No detalhe do processo de distribuição de dados, vemos que na jogada que o jogador B faz, a primeira distribuição de dados inicia na casa 3 e termina na casa 5, marcada em azul, para distinguir que antes da distribuição não estava vazia. No caso, o jogador continuou a sua jogada até finalizá-la na casa 5, marcada em vermelho, no detalhe de distribuição de dados, para ilustrar que antes do jogador ter colocado um dado, a casa estava vazia.

Portanto, pode-se notar que o processo de distribuição de dados é finalizado se e somente se, depois que for colocado ou adicionado o último dado da distribuição em mão do jogador, a casa possuir ou ficar preenchida por um único dado, correspondente ao último dado que o jogador tinha em mão, isto é, o número atual de dados da casa for um ($\#c_{Bk} = 1$). Se colocado o último dado da distribuição em uma casa e o número atual de dados nessa casa for superior a um ($\#c_{Bk} > 1$), o jogador deverá continuar com a jogada, distribuindo os dados dessa casa às casas seguintes.

Na Figura 45, é ilustrada a configuração final da 1ª jogada realizada pelo jogador B, iniciada na casa 3 e finalizada na casa 5 (circulada e, azul). As casas circuladas em amarelo e vermelho no campo de jogo do jogador A, são as casas onde o jogador B eliminou dados após terminar a sua primeira jogada.

Figura 45: configuração final da 1ª jogada, iniciada na casa 3 pelo jogador B

Fonte: os autores (2020)

As casas ficaram vazias porque o jogador B, ao terminar sua 1ª jogada na casa c_{B5} da sua linha de ataque, a casa c_{A8} de ataque do adversário não estava vazia ($\#c_{A8} \neq 0$) e, nestas condições e de acordo com as regras do jogo, o jogador B teve que eliminar todos dados do adversário na coluna onde terminou a sua jogada, no caso, os dados das casas c_{A8} e c_{A17} (marcadas em vermelho) do adversário, e depois, teve que procurar outra coluna para eliminar mais dados, no caso, escolheu para eliminar dados nas casas c_{A5} e c_{A20} (marcadas em amarelo).

Assim, o jogador B acabou coletando em sua primeira jogada 8 dados, acumulando igual número de dados se ($c_{A8} + c_{A17} + c_{A5} + c_{A20} = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$). Ao acumular, diminuiu o mesmo número de dados no campo de jogo do adversário, isto é, o adversário sobrou com $48 - 8 = 40$ dados em seu campo de jogo, como é ilustrado no Quadro 9.

Quadro 9: Dados acumulados, eliminados pelo jogador B na 1ª jogada e que sobram no campo de jogo do jogador B

Jogador	Ação	Conf. Inicial	1ª jogada
A	Dados capturados no campo de jogo de B	0	----
	Dados acumulados até a jogada i	0	----
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	$48 - 8 = 40$
B	Dados capturados no campo de jogo de A	0	8
	Dados acumulados até a jogada i	0	8
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	48

Fonte: os Autores (2022)

Em relação à 1ª jogada do jogar B, duas questões foram levantadas pelo pesquisador ao jogador, para compreender as ações desenvolvidas em dois episódios.

- Primeira questão: Por que iniciou sua jogada nesta casa (no caso, na casa c_{B3})?

Sobre esse questionamento, a resposta apontada pelo jogador B centrou-se na experiência com o jogo, explicando que, baseando-se na experiência que tem com o jogo, consegue notar por onde começar a jogar para capturar dados nessa primeira jogada. Portanto, a resposta não foi além de um jogo de experiência e intuição.

Essa resposta nos levou a deduzir que, como em muitos casos os jogadores utilizam o mesmo estilo de tabuleiro Ntxuva para jogar, e por estarem jogando várias vezes no mesmo, acabam decorando algumas jogadas que lhes possibilitam capturar dados do adversário, sem, no entanto, terem uma especificação técnica mais apurada das jogadas. Os jogadores, não trocando do tipo de tabuleiro, não têm uma imagem das possíveis regularidades que podem ocorrer na primeira jogada em um jogo de Ntxuva.

Diante desta constatação, a partir de simulações que realizamos, com diferentes estilos de tabuleiros, na subsecção 8.4, descrevemos e analisamos a primeira jogada de uma partida do jogo Ntxuva.

- Segunda questão: depois que terminou a sua jogada, você coletou dados do seu adversário nesta coluna onde a jogada terminou e depois, foste coletar, mais dados de seu adversário em outra coluna. Por que esta segunda coleta de dados foi justamente nessa coluna (c_{A5}, c_{A20}) e não em outra?

Sobre esse questionamento, o jogador B justificou-se que escolheu para a segunda coleta a coluna constituída pelas casas c_{A5} e c_{A20} do adversário, as casas cujo número de dados foi marcado a azul na Figura 46, porque, na condição inicial do jogo, eliminando dados em outras colunas fora das que foram eliminados os dados, o adversário teria chance de capturar meus (seus) dados em primeira instância. Só eliminando ali, o adversário não teria a possibilidade de coletar meus dados, pois, as minhas casas também estão vazias.

Com este esclarecimento entendemos que, há aqui uma técnica e uma tecnologia explicita que desempenha a função de "motivação", que visa tornar a técnica inteligível, descrevendo seus objectivos, de fazer com que o jogador A pare em frente das casas vazias do jogador B, ou melhor, aumentar a probabilidade de que o jogado A pare em uma situação que não lhe possibilite capturar dados ao jogador B. Portanto, o alcance desse objectivo dessa maneira resulta do facto de que em torno de A se para a jogada se a última casa de sua distribuição estiver vazia.

Figura 46: reconstrução da configuração final da 1ª jogada, iniciada na casa 3 pelo jogador B

A	2	2	2	2	0	2	2	0	2	2	2	2
	2	2	2	2	0	2	2	0	2	2	2	2
B	3	0	3	3	0	3	3	1 fim	4	1 inicio	0	3
	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3

Fonte: os autores (2022)

Diante dessa resposta, observando a configuração final do tabuleiro após a primeira jogada do jogador B, vemos que da explicação dada, o jogador B poderia também eliminar dados do adversário nas casas c_{A11} e c_{A14}, ou nas casas c_{A2} e c_{A23}, pois, como ali também a casa de ataque do jogador B (c_{B2} ou c_{B11}) está vazia, o jogador A não teria chance de capturar dados de B, ao terminar sua jogada em sua casa de ataque oposta (c_{A11} ou c_{A2}) a de B.

b) Relação entre a casa de ataque em que se finaliza uma jogada com chance de captura de dados, com as casas opostas do adversário onde se eliminará dados

Depois das observações feitas à primeira jogada do jogador B, uma curiosidade levou-nos a tentar entender a relação entre a casa de ataque por onde determinado jogador termina sua jogada com chance de capturar de dados, com as casas opostas do campo de jogo adversário, por onde eliminará dados. A questão que nos auto colocamos foi: por exemplo, se o jogador B termina sua jogada na casa 5 (c_{B5}) por onde tem a chance de capturar dados, qual é a identidade do par de casas $\binom{c_{Ak''}}{c_{Ak'}}$ em que eliminará dados do adversário? ver Figura 47.

Dessas questões, outras questões foram colocadas:

- se a jogada de B terminou na casa k qual é a identidade da casa k' imediatamente oposta, por onde o jogador eliminará dados?
- se k' é a casa imediatamente oposta onde o jogador eliminará dados, qual é a identidade da casa k'' do par de casa do adversário da mesma coluna onde o

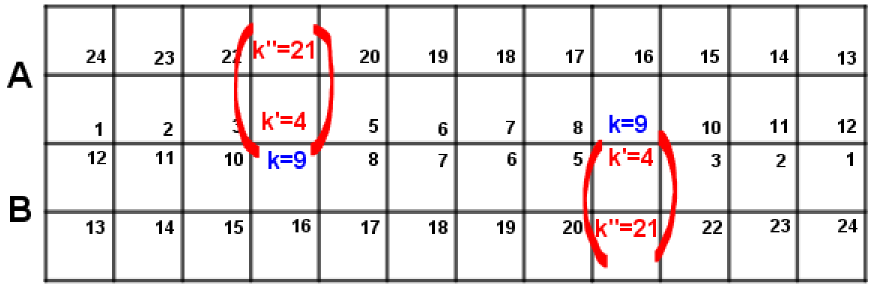
jogador terminou a jogada?

As mesmas questões podem ser feitas para o caso em que, por exemplo, o jogador A termina sua jogada na casa 5 (c_{A5}) por onde tem a chance de capturar dados, qual é a identidade do par de casas $\binom{c_{Bk'}}{c_{Bk''}}$ em que eliminará dados do adversário? Ver Figura 47.

Dessas questões, outras questões foram colocadas:

- se a jogada de A terminou na casa k qual é a identidade da casa k' imediatamente oposta, por onde o jogador eliminará dados?
- se k' é a casa imediatamente oposta onde o jogador eliminará dados, qual é a identidade da casa k'' do par de casa do adversário da mesma coluna onde o jogador terminou a jogada?

Figura 47: ilustração do par de casas por onde determinado jogador realiza sua 1ª captura após terminar sua jogada em uma casa k



Fonte: os autores (2022)

As questões colocadas acima traduzem-se na seguinte tarefa:

Tarefa $\boldsymbol{t_b}$: identificar o par de casas $\binom{k''}{k'}$ ou $\binom{k'}{k''}$ por onde determinado jogador realizará a 1ª coleta de dados, após terminar sua jogada em uma casa k $(1 \leq k \leq 12)$, com chance de captura de dados.

Conjunto de técnicas, tecnologia e teoria associadas a $\boldsymbol{t_b}$: nesta tarefa, procuramos encontrar uma relação que nos permita identificar o par de casas onde determinado jogador realiza sua primeira captura de dados, em uma chance de captura. O conjunto de técnicas que é utilizado para determinação dessa relação apresenta-se simultaneamente ao conjunto de tecnologia. Elas podem ser observadas analisando a configuração final da 1ª jogada realizada pelo jogador B, em um tabuleiro do tipo $4 \times n = 4 \times 12$, que é ilustrada na Figura 48. Na figura, observa-se que o jogador B terminou sua jogada na casa c_{B5}, com $k = 5$, e, a casa do adversário imediatamente oposta de onde terminou a jogada é c_{A8}, com $k' = 8$. Na Figura 48 se pode observar que $k' = 8 = 12 - 4 = 12 - (5 - 1)$, que é essencialmente, $k' = n - (k - 1)$. Por exemplo, se o jogador B tivesse terminado na casa c_{B10}, com $k = 10$, a identidade da casa de ataque imediatamente oposta do adversário seria $k' = 12 - (10 - 1) = 12 - 9 = 3$.

Na Figura 48 vemos que a identidade do par k'' da casa k' foi 17. Das observações que se fez vem que $17 = 8 + 2 \times (12 - 8) + 1$, que é essencialmente $k'' = k' + 2 \times (n - k') + 1$. Como no parágrafo anterior foi posto que $k' = n - (k - 1)$, vem que $k'' = n - (k - 1) + 2 \times (n - [n - (k - 1)] + 1 = n - (k - 1) + 2 \times (\cancel{n} - \cancel{n} + k - 1) + 1 = n - (k - 1) + 2(k - 1) + 1 = n + k - 1 + 1 = n + k$.

Essa relação resulta do seguinte facto:

Considerando as duas linhas de ataque, vem que: A_1 a A_n são os números das casas de A (da esquerda para a direita) e B_1 a B_n são os números das casas de B (da direita para a esquerda). As somas dos índices das casas de ataque imediatamente opostas (A_1 e B_n, A_2 e B_{n-1},A_3 e B_{n-2}, ... , A_n e B_1) são constantes e igual a $n + 1$, isto é, $1 + n = 2 + (n - 1) = 3 + (n - 2)$ ... $= n + 1$. Esta ocorrência se verifica porque cada vez que você vai de uma coluna para a próxima da esquerda, A_k aumenta em 1 quando $B_{k'}$ diminui em 1. Da mesma forma, na coluna de um determinado jogador, a soma dos índices das casas de ataque e defesa é sempre igual a $2n + 1$, por exemplo, para A na Figura 48, $1 + 24 = 2 + 23 = 3 + 22 = \cdots = 2n + 1$. Portanto, um cálculo fornece que o índice $n + 1 - k$ de A na coluna k de B, por exemplo, corresponde ao índice $2n + 1 - (n + 1 - k) = n + k$.

Em geral, a relação resulta pelo facto de que as sequências de índice de ataque para B e índice de defesa para A são sequências aritméticas de razão 1, mas com um primeiro termo diferente. A diferença entre os dois termos do mesmo índice é constante, igual ao primeiro, ou seja, n.

Dessa proposição podemos anunciar que:

Em um tabuleiro do tipo $4 \times n$, se um jogador termina a jogada em sua casa de ataque k, com chance de captura de dados, fara sua primeira captura de dados dessa jogada no par de casas $\binom{c_{n+k}}{c_{n-(k-1)}} = \binom{c_{n+k}}{c_{n-k+1}}$ ou $\binom{c_{n-k+1}}{c_{n+k}}$, onde a casa c_{n+k+1} é a casa de ataque do adversário.

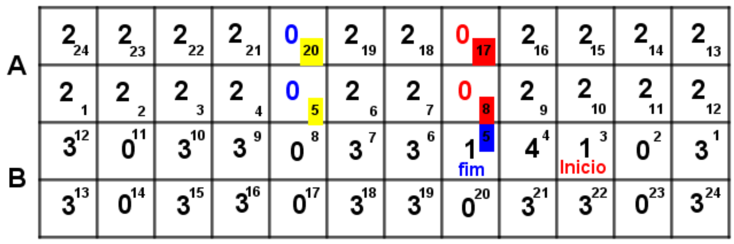
E a sua segunda captura como fica?

Nas análises que tomamos, contatou-se que o segundo par de casas onde o jogador eliminará dados não tem nenhuma relação direta com a casa onde a jogada termina, também, não tem nenhuma relação direta com o par $\binom{c_{n+k}}{c_{n-k+1}}$ de casas onde o jogador realiza a primeira captura de dados em uma determinada jogada.

Em todo caso, observamos que, sendo k^* o número da casa de ataque por onde determinado jogador realizará sua segunda captura de dados, o seu par de casas da mesma coluna a efetuar captura de dados é $c_{k^*+2(n-k^*)+1}$, isto é, o par de casas para realização da segunda captura de dados é: $\binom{c_{k^*+2(n-k^*)+1}}{c_{k^*}}$ ou $\binom{c_{k^*}}{c_{k^*+2(n-k^*)+1}}$.

Na subsecção 6.3.3. é apresentado e explicado algum detalhe sobre como é que determinado jogador determina o par de casas para realizar a segunda captura de dados, ou seja, responde-se nessa subsecção a seguinte questão: quais são as colunas que determinado jogador pode escolher para realizar a segunda captura de dados, após ter realizado a primeira captura?

Figura 48: configuração final da 1ª jogada do jogador B



Fonte: os autores (2022).

Por exemplo, o jogador B terminou sua jogada com chance de captura na casa c_{B5}. Nessa jogada, a sua primeira captura foi feita no par de casas do adversário $\binom{c_{A(12+5)}}{c_{A(12-(5-1)}} = \binom{c_{A17}}{c_{A8}}$. A sua segunda captura foi feita no par de casas do adversário $\binom{c_{A(5+2(12-5)+1)}}{c_{A5}} = \binom{c_{A20}}{c_{A5}}$.

c) Primeira jogada do jogador A e a segunda jogada do jogador B

Na Figura 49 é ilustrada a primeira jogada realizada pelo jogador A. O jogador recolhe dois dados da casa c_{A3} e distribui às casas c_{A4} e c_{A5}, passando estas casas a ter 3 e 1 dado respectivamente, isto é, $c_{A4} = 2 + 1 = 3$ e $c_{A5} = 0 + 1 = 1$. O jogador A termina a jogada na casa de ataque c_{A5}, entretanto, não elimina dados do adversário porque a casa de ataque imediatamente oposto do adversário ($c_{B(12-5+1)} = c_{B8}$) não possui dados, isto é, $\#c_{B8} = 0$, como é ilustrado na Figura 49.

Figura 49: configuração final do tabuleiro após a 1ª jogada do jogador A

A	2_{24}	2_{23}	2_{22}	2_{21}	0_{20}	2_{19}	2_{18}	0_{17}	2_{16}	2_{15}	2_{14}	2_{13}
	2_{1}	2_{2}	Inicio 0_{3}	3_{4}	fim 1_{5}	2_{6}	2_{7}	0_{8}	2_{9}	2_{10}	2_{11}	2_{12}
B	3^{12}	0^{11}	3^{10}	3^{9}	0^{8}	3^{7}	3^{6}	1^{5}	4^{4}	1^{3}	0^{2}	3^{1}
	3^{13}	0^{14}	3^{15}	3^{16}	0^{17}	3^{18}	3^{19}	0^{20}	3^{21}	3^{22}	0^{23}	3^{24}

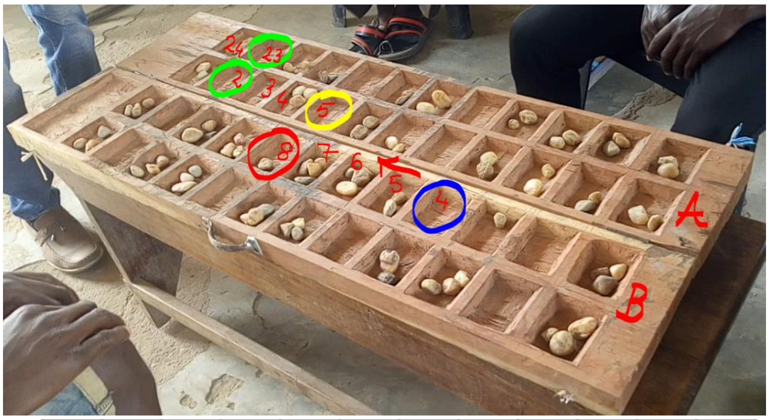
Fonte: os autores (2022)

Eventualmente, não questionamos porque o jogador A procedeu assim, isto é, por que não optou por uma jogada em que poderia ter chance de capturar dados do adversário. Por exemplo, se tivesse que iniciar sua jogada na casa c_{A6} e terminando na casa c_{A8}, teria a chance de realizar a primeira captura de dados no par de casa $\binom{c_{B(12-8+1)}}{c_{B(12+8)}} = \binom{c_{B5}}{c_{B20}} = \binom{1}{0}$ do adversário, e ainda teria que capturar dados em mais outras duas casas. Não só essa, também o jogador A teria várias outras chances de jogadas para capturar dados.

Embora não tenha tido questionado, entendemos que essa foi uma jogada que o jogador efetuou despercebidamente, pois, no vídeo [minutos 04:59 – 05:04] é notável que o jogador parece assustado com a escolha, entretanto, mesmo notando a falha, teria que continuar com a jogada, pelo facto de que, pelas regras do jogo, o jogador bastou segurar os dados, não poderá recuar a jogada. Em parte, essa escolha significou que o jogador A realizou mal a contagem de dados e cálculo mental, ou, mesmo tendo realizado bem, se confundiu na casa que deveria iniciar a jogada.

Assim que o jogador A termina sua jogada, sem chance de captura de dados, o jogador B realiza a sua segunda jogada, que a inicia na casa c_{B4}, levando os 4 dados ali existentes, distribuindo-os até finalizar jogada na casa c_{B8}, como é ilustrado na Figura 50. Como a casa c_{B8} é uma casa da linha de ataque e a casa de ataque imediatamente oposta do adversário $c_{A(12-8+1)} = c_{A5}$ é não vazia ($\#c_{A5} = 1$) (ver Figura 50, o jogador B coletou ou eliminou um dado do adversário no par de casas $\binom{c_{A(12+8)}}{c_{A(12-8+1)}} = \binom{c_{A20}}{c_{A5}} = \binom{0}{1}$. Depois, eliminou mais 4 dados no par de casas $\binom{c_{A(2+2(12-2)+1)}}{c_{A2}} = \binom{c_{A23}}{c_{A2}} = \binom{2}{2}$.

Figura 50: configuração final do tabuleiro após a 2ª jogada do jogador B



A	2_{24}	0_{23}	2_{22}	2_{21}	0_{20}	2_{19}	2_{18}	0_{17}	2_{16}	2_{15}	2_{14}	2_{13}
	2_{1}	0_{2}	0_{3}	3_{4}	0_{5}	2_{6}	2_{7}	0_{8}	2_{9}	2_{10}	2_{11}	2_{12}
B	3^{12}	0^{11}	3^{10}	3^{9}	1^{8} fim	4^{7}	4^{6}	2^{5}	0^{4} Inicio	1^{3}	0^{2}	3^{1}
	3^{13}	0^{14}	3^{15}	3^{16}	0^{17}	3^{18}	3^{19}	0^{20}	3^{21}	3^{22}	0^{23}	3^{24}

Fonte: os autores (2022)

Assim, em sua segunda jogada, o jogado B acumulou $\#c_{A5} + \#c_{A20} + \#c_{A2} + \#c_{A23} = 1 + 0 + 2 + 2 = 5$ dados, o mesmo número de dados que elimina do campo de jogo do adversário. Deste modo, na 1ª e 2ª jogada, o jogador B acumula $8 + 5 = 13$ dados, eliminando igual número de dados no campo de jogo do adversário. No Quadro 10 é apresentado o detalhe da acumulação e eliminação de dados até a 2ª jogada do jogador B.

Quadro 10: Dados acumulados, eliminados pelo jogador B na 2ª jogada e que sobram no campo de jogo do jogador B

Jogador	Ação	Conf. Inicial	1ª jogada	2ª jogada
A	Dados capturados no campo de jogo de B	0	0	----
	Dados acumulados até a jogada i	0	0	----
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	$48 - 8 = 40$	$40 - 5 = 35$
B	Dados capturados no campo de jogo de A	0	8	5
	Dados acumulados até a jogada i	0	8	$8 + 5 = 13$
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	48	48

Fonte: os Autores (2022)

d) Segunda jogada do jogador A

Na Figura 51 é ilustrada a configuração final da segunda jogada do jogador A, que é iniciada na casa c_{A1} e finalizada na casa c_{A3}, onde tem a chance de capturar dados do adversário no par de casas $\binom{c_{B10}}{c_{B15}} = \binom{3}{3}$. A segunda captura dessa jogada é feita no par de casas $\binom{c_{B8}}{c_{B17}} = \binom{1}{0}$.

Figura 51: configuração final da 2ª jogada do jogador A

A	2_{24}	0_{23}	2_{22}	2_{21}	0_{20}	2_{19}	2_{18}	0_{17}	2_{16}	2_{15}	2_{14}	2_{13}
	Inicio 0_{1}	1_{2}	fim 1_{3}	3_{4}	0_{5}	2_{6}	2_{7}	0_{8}	2_{9}	2_{10}	2_{11}	2_{12}
B	3^{12}	0^{11}	0^{10}	3^{9}	0^{8}	4^{7}	4^{6}	2^{5}	0^{4}	1^{3}	0^{2}	3^{1}
	3^{13}	0^{14}	0^{15}	3^{16}	0^{17}	3^{18}	3^{19}	0^{20}	3^{21}	3^{22}	0^{23}	3^{24}

Fonte: os autores (2022)

Nessa jogada, o jogador A captura $\#c_{B10} + \#c_{B15} + \#c_{B8} + \#c_{B17} = 3 + 3 + 1 + 0 = 7$ dados. No Quadro 11, é ilustrado o número de dados acumulados e eliminados entre os jogadores A e B, depois da 2ª jogada do jogador A.

Quadro 11: Dados acumulados, eliminados pelo jogador B e A após a 2ª jogada de A

Jogador	Ação	Conf. Inicial	1ª jogada	2ª jogada
A	Dados capturados no campo de jogo de B	0	0	7
	Dados acumulados até a jogada i	0	0	7
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	$48 - 8 = 40$	$40 - 5 = 35$
B	Dados capturados no campo de jogo de A	0	8	5
	Dados acumulados até a jogada i	0	8	$8 + 5 = 13$
	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	48	48	$48 - 7 = 41$

Fonte: os Autores (2022)

Ao longo dessa jogada não foi feita nenhuma questão ao jogador, entretanto, assistindo a gravação do jogo questionamos: Por que o jogador A optou por iniciar sua jogada na casa c_{A1}? Poderia ter optado em iniciar em outra casa?

Respondemos esta questão analisando a disposição dos dados depois da última jogada (Figura 51), realizada antes da 2ª jogada do jogador A. A priori, de acordo com a disposição dos dados no tabuleiro (Figura 51), sem precisar de muita atenção, a casa 1 é a que parece a melhor para iniciar a movimentação de dados e ter ao mesmo tempo chance de capturar maior número de dados possíveis do adversário na primeira captura desta jogada, no caso, 6 dados.

Para responder à questão "o jogador poderia ter iniciado a jogada em outra casa?", realizou-se algumas simulações de início da jogada. Esta simulação levou-nos a compreender que, o jogador A poderia ter iniciado sua segunda jogada com chance de captura de dados nas casas c_{A4}, c_{A6}, c_{A11}, c_{A14}, c_{A7}, c_{A10}, c_{A13}, c_{A16}, c_{A19}, c_{A22}. Iniciando na casa c_{A4} a jogada terminaria na casa c_{A4}, podendo capturar 6 dados no par de casas $\binom{c_{B9}}{c_{B16}} = \binom{3}{3}$. Iniciando nas casas c_{A6}, c_{A11} ou c_{A14} a jogada terminaria na casa c_{A8}, podendo capturar 2 dados no par de casas $\binom{c_{B5}}{c_{B20}} = \binom{2}{0}$. Iniciando nas casas c_{A7}, c_{A10}, c_{A13}, c_{A16}, c_{A19} ou c_{A22} a jogada terminaria na casa c_{A3}, podendo capturar 6 dados no par de casas $\binom{c_{B10}}{c_{B15}} = \binom{3}{3}$.

Portanto, as maiores capturas nessas jogadas seriam feitas pelo jogador A se iniciasse a sua segunda jogada nas casas c_{A4}, c_{A7}, c_{A10}, c_{A13}, c_{A16}, c_{A19} ou c_{A22}. A suposição que se tem de ter iniciado a jogada na casa c_{A1} e não nas outras em que teria chance de capturar dados é de que, provavelmente, iniciando em outras casas, poderia adicionar mais dados às casas, aumentando a chance do jogador B na sua próxima jogada, capturar muitos dados em seu campo de jogo.

No caso, iniciando a jogada na casa c_{A1}, as casas seguintes teriam um dado apenas, contrariamente se iniciasse em outras casas, em que o processo de distribuição resultaria na passagem de dois a três dados ou mais, aumentaria a chance de o jogador B em sua próxima jogada capturar muitos dados. Portanto, nessa jogada, esse era o objectivo principal, não aumentar dados em outras casas, para que o jogador B não possa ter chance de capturar muitos dados.

Neste caso, o elemento tecnológico que aqui se verifica, pode ser anunciado no seguinte: quanto mais longo é o jogo de um jogador, mais aumenta o número de dados em certas casas. Ou seja, os dados se acumulam em determinadas casas, aumentando as chances do outro jogador ganhar mais dados. Portanto, uma técnica aparente aqui é escolher a casa inicial que produz o caminho mais curto.

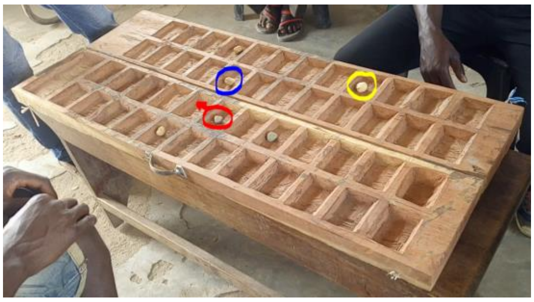
E por que a segunda captura foi feita na casa c_{A8}? Essa questão respondemos na subsecção 8.3.3., com detalhes desta e mais algumas outras jogadas.

e) Últimas jogadas do jogador A e B

A partida entre o jogador A e B teve duração de aproximadamente 16 minutos. Nestes 16 minutos, o jogador B, que foi o vencedor da partida, realizou 38 jogadas, enquanto que, o jogador A realizou 37 jogadas. Nas aleias a), b), c), d) descrevemos e explicamos a dinâmica do jogo a partir da 1ª e 2ª jogadas efetuadas pelos jogadores A e B, que é quase que um processo rotineiro que exige do jogador muita concentração e atenção para determinar as escolhas certas, que o fazem capturar muitos dados ao mesmo tempo, bloquear o adversário para não ter possibilidades de capturar dados. Por considerar um processo rotineiro, ousamos nesta alínea descrever e analisar as últimas jogadas (36ª a 38ª jogada), que nos pareceram diferentes sob o ponto de vista da aplicação das regras, especificamente quando determinado jogador sobra com um e único dado em seu campo de jogo.

A descrição começa da jogada 36 do jogador B (Figura 52), com a finalidade de eliminar dados do adversário. Ele movimentou o único dado da casa 7 para a casa 8 ($c_{B7} \rightarrow c_{B8}$), onde termina sua 36ª jogada, com chance de captura de dados na casa 5 (c_{A5}) do adversário. Nesta chance, o jogador B realiza a sua primeira captura de dados no par de casas $\binom{c_{A20}}{c_{A5}} = \binom{0}{1}$ e, sua segunda captura no par de casas $\binom{c_{A16}}{c_{A9}} = \binom{1}{0}$, como é ilustrado na Figura 52, nas casas marcadas em azul e amarelo. O jogador B captura assim dois dados, fazendo com que no campo de jogo do adversário sobre apenas um dado.

Figura 52: jogada 36 do jogador B

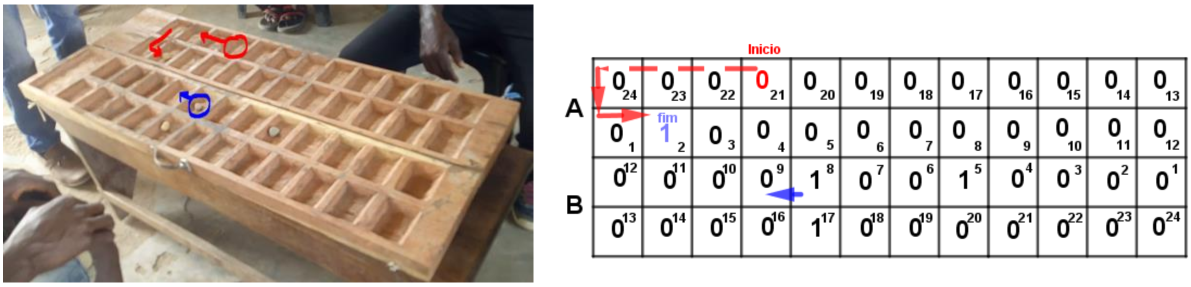


A	0_{24}	0_{23}	0_{22}	1_{21}	0_{20}	0_{19}	0_{18}	0_{17}	1_{16}	0_{15}	0_{14}	0_{13}
	0_{1}	0_{2}	0_{3}	0_{4}	1_{5}	0_{6}	0_{7}	0_{8}	0_{9}	0_{10}	0_{11}	0_{12}
B	0^{12}	0^{11}	0^{10}	0^{9}	0^{8} fim	1^{7} Inicio	0^{6}	1^{5}	0^{4}	0^{3}	0^{2}	0^{1}
	0^{13}	0^{14}	0^{15}	0^{16}	1^{17}	0^{18}	0^{19}	0^{20}	0^{21}	0^{22}	0^{23}	0^{24}

Fonte: os autores (2022)

Após o jogador B ter realizado a captura de dados, o jogador A, na sua 36ª jogada, tendo sobrado apenas com um dado em seu campo de jogo, faz um movimento que perpassa por casas, iniciado na casa c_{A21} a casa c_{A2} onde deposita o único dado que tinha e finaliza a jogada, como é ilustrado pela seta marcada a vermelho na Figura 53. Está jogado se tornou estranha, uma vez que ao longo das regras de competição não foi anunciada, o que nos levou a realizar alguns questionamentos.

Figura 53: 36ª jogada do jogador A e 37ª do jogador B



Fonte: os autores (2022)

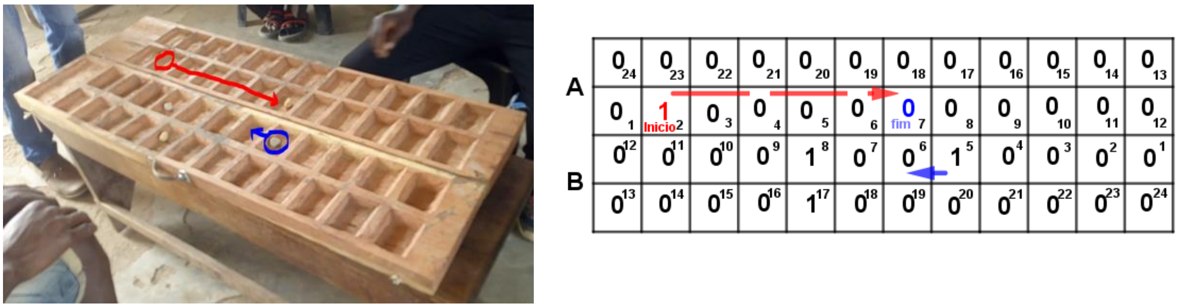
Portanto, sobre essa jogada, nos minutos 18:42 a 20:02 foi desenvolvida a seguinte conversa (a seguir, texto extraído directamente da conversa):

> **Pesquisador**: Não percebi essa última volta. [questão feita depois de constatar uma jogada diferenciada, em que o jogador sobrou com um dado em seu campo de jogo e, ao movimentar o dado, passou por 5 casas].
> **Especialista**: Quando o jogador fica com um dado, o movimento do dado é de cinco em cinco casas. No caso, a casa onde tem o dado é zero, em frente vai contar cinco casas (uma, duas, três, quatro, cinco), até que o outro tenha possibilidade de bater. Se consegue bater, com este único dado pode vencer o jogo, capturando todos dados do adversário.
> **Pesquisador**: Agora, se ele parar num sítio onde vai ser batido, ele pode contar menos?
> **Especialista**: Nada.
> **Pesquisador**: Imagine que ele para aqui, vai ser batido, então ele tem opção de dizer vou contar três ou menos, para não ser batido?
> **Especialista**: Não. Não há recuo. Mesmo que seja perigoso, ele deve avançar.

Como é relatado pelo especialista no jogo Ntxuva, quando o jogador sobra com um dado em seu campo de jogo ele deverá fazer o movimento de cinco em cinco casas, sendo a casa onde se encontra o dado considerada como casa zero. No caso, o jogador não tem outras articulações estratégicas a realizar para se defender do adversário, pois, o movimento é obrigatório e, mesmo sabendo que realizando esse movimento poderá ser eliminado, ele terá que o fazer, salvo erro ou distração do adversário.

No caso dessa partida, foi o que aconteceu, pois, na sua 37ª jogada, o jogador A movimenta o dado da casa c_{A2} para casa c_{A7}, passando por cinco casas mesmo sabendo que, o jogador B, tinha um dado na casa c_{B5}, que poderia movimentar para a casa c_{B6} e eliminar seu dado na casa c_{A7} (ver Figura 54). Praticamente, o jogador A realizou esta jogada já sabendo que o jogo estava perdido.

Figura 54: 37ª jogada do jogador A e 38ª do jogador B



Fonte: os autores (2022)

6.3.2. A sequência de dados acumulados e eliminados no processo do jogo

No modelo de jogo Ntxuva praticado no Festival Nacional de Jogos Tradicionais o objectivo é eliminar todos os dados no campo de jogo do adversário, e, quem o fizer primeiro é consagrado vencedor do jogo. Assim, em cada jogada de uma determinada partida, cada jogador procura a todo custo, capturar o maior número de dados possível, acumulando e eliminando dados do adversário.

Este processo de acumulação gera um conjunto de dados que podem ser entendidos como sequências numéricas, podendo ser utilizadas em simulações hipotéticas para situações de ensino. No Quadro 12 é ilustrado o conjunto de dados gerado no processo de captura e eliminação de dados.

Quadro 12: conjunto de dados produzidas no processo de captura e eliminação de dados

Jogador	A			B		
Ação	Capturas em B	Dados acumulados até a jogada i	Dados em seu campo de jogo até a jogada i	Capturas em A	Dados acumulados até a jogada i	Dados em seu campo de jogo até a jogada i
Inicio	0	0	48	0	0	48
1ª jogada	0	0	40	8	8	48
2ª jogada	7	7	35	5	13	41
3ª jogada	3	10	30	5	18	38
4ª jogada	10	20	30	0	18	28
5ª jogada	7	27	22	8	26	21
6ª jogada	0	27	16	6	32	21
7ª jogada	0	27	16	0	32	21
8ª jogada	0	27	16	0	32	21
9ª jogada	0	27	9	7	39	21
10ª jogada	0	27	9	0	39	21
11ª jogada	0	27	9	0	39	21
12ª jogada	0	27	9	0	39	21
13ª jogada	0	27	9	0	39	21
14ª jogada	0	27	9	0	39	21
15ª jogada	2	29	9	0	39	19
16ª jogada	0	29	9	0	39	19
17ª jogada	3	32	9	0	39	16
18ª jogada	0	32	9	0	39	16
19ª jogada	0	32	9	0	39	16
20ª jogada	2	34	9	0	39	14
21ª jogada	0	34	6	3	42	14
22ª jogada	0	34	6	0	42	14
23ª jogada	7	41	6	0	42	7
24ª jogada	0	41	6	0	42	7
25ª jogada	0	41	6	0	42	7
26ª jogada	0	41	3	3	45	7
27ª jogada	0	41	3	0	45	7
28ª jogada	0	41	3	0	45	7
29ª jogada	0	41	3	0	45	7
30ª jogada	0	41	3	0	45	7
31ª jogada	4	45	3	0	45	3
32ª jogada	0	45	3	0	45	3
33ª jogada	0	45	3	0	45	3
34ª jogada	0	45	3	0	45	3
35ª jogada	0	45	3	0	45	3
36ª jogada	0	45	1	2	47	3
37ª jogada	0	45	1	0	47	3
38ª jogada	0	45	0	1	48	3

Fonte: os Autores (2022)

É possível notar a partir do Quadro 12, que ao longo das jogadas efetuadas pelos jogadores, são formados três conjuntos de dados, respectivamente: O conjunto de dados gerado pelo processo de captura de dados no campo de jogo do adversário (1ª coluna do jogador A e B), o conjunto de dados obtido pela acumulação dos dados capturados no campo de jogo do adversário (2ª coluna do jogador A e B) e, o conjunto de dados obtidos pelo número de dados que sobram no campo de jogo de um determinado jogador, após ter sido feito uma jogada com ou sem captura de dados (3ª coluna do jogador A e B).

Como se pode notar a partir das descrições feitas nas alíneas a), c), d), e), especificamente nos quadros 2, 3, 4, estes conjuntos de dados são estabelecidos a partir de uma relação unívoca entre o conjunto de números que indicam a ordem da jogada realizada por um determinado jogador e, o conjunto de números capturados, acumulados e que sobram depois de capturados no campo de jogo de determinado jogador. No caso, como é de observar, a cada finalização de uma jogada i, corresponde a um e único número de dados p capturados, acumulados ou que sobram no campo de jogo de um determinado jogador após terem sido eliminados dados na jogada i, o que configura uma relação que é designada de função.

Como a ordem i de jogada, que constituí o domínio, pertence ao conjunto dos números naturais, isto é, $i \in IN$, essa função é entendida como sequência numérica, que Barroso (2010, p. 553) define como "uma função cujo o domínio está contido em IN^* e cujo contradomínio é IR".

No caso, no processo da prática com o jogo Ntxuva, são produzidas três sequências numéricas. Estas sequências, por exemplo, $seq_1, seq_2 \wedge seq_3$, não apresentam um padrão ou uma lei especifica que explique a sua formação. A sua formação depende de como é operacionalizado o sistema de jogo de cada partida realizada pelos jogadores.

	i	$Inicio$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	32ª	33ª	34ª	35ª	36ª	37ª	38ª
seq_1	$f(i)$	0	8	5	5	0	8	6	0	...	0	0	0	0	2	0	1

	i	$Inicio$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	32ª	33ª	34ª	35ª	36ª	37ª	38ª
seq_2	$f(i)$	0	8	13	18	18	26	32	32	...	45	45	45	45	47	47	48

seq_3	i	$Inicio$	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	...	32ª	33ª	34ª	35ª	36ª	37ª	38ª
	$f(i)$	48	48	41	38	28	21	21	21	...	3	3	3	3	3	3	3

6.3.3. Como é que o jogador determina o par de casas para segunda captura de dados?

A captura e eliminação de dados estão associadas ao processo de movimentação de dados, um processo que de acordo com Pereira (2016, p. 301) "é feito mediante uma leitura interpretativa das peças do jogo, para então fazer simulações por intermédio das estimativas, aritméticas, cálculo mental e estatística, tudo isso com muita rapidez mental". Portanto, a captura e eliminação de dados é um processo inteligente que exige do jogador um raciocínio rápido, envolvendo a aplicação da operação de adição, da subtração, e da contagem que o conduz à análise das chances para efetuar as melhores jogadas possíveis, por um lado, para capturar o maior número possível de dados, por outro lado, para bloquear movimentações espertas do adversário e defender seus dados.

No sistema de jogo Ntxuva praticado no Festival Nacional dos Jogos Tradicionais, essa leitura é feita em dois momentos. O momento da primeira leitura é quando se inicia uma determinada jogada, o que já foi em síntese, esclarecido na subsecção 8.3.1. nas alíneas a), c), d), e). O momento da segunda leitura se dá quando o jogador tem uma chance de captura e, por imperativo das regras do jogo, precisa realizar a segunda captura de dados nesta mesma chance. A tarefa do jogador nesse segundo momento é:

Tarefa $\boldsymbol{T_i}$ – Realizar a segunda captura de dados.

Para realizar esta tarefa o jogador precisar se atentar a uma tarefa auxiliar, que consiste em:

Tarefa auxiliar $\boldsymbol{t_i}$ – identificar o par de casas para segunda captura de dados.

Conjunto de técnicas associada a $\boldsymbol{t_i}$: à semelhança da primeira captura, a segunda captura não obedece a nenhuma estrutura que permite ser reproduzida sempre, pois, ela depende do ponto de vista de análise do esquema do jogo pelo jogador. Esta análise que se reduz ao processo de contagem é feita primeiramente para capturar o maior número de dados possível do adversário, mas também, para criar desestabilização nas possíveis jogadas que o adversário fará a seguir à sua jogada, de modo que não tenha possibilidades de capturar dados ou que capture o menor número de dados possíveis. Nos minutos 06:26 a 08:40 da partida entre o jogador A e B que descrevemos na secção 8.3.1., foi desenvolvida uma conversa (da qual a seguir é apresentado o extrato direto), que dá um ponto de esclarecimento básico:

> **Pesquisador**: Estou a ver que ele nas jogadas que foram batidas levou dois sítios, é isso?
> **Especialista**: Sim, leva-se em dois sítios. Significa, isso chama-se duas colunas. Porque que leva duas colunas? Porque o próprio dado é rei. Por

> isso, tem a potencialidade de bater em uma coluna, mas leva em dois lados (duas colunas).
> **Pesquisador**: O primeiro lado é ali onde ele bate. E o segundo lado?
> **Especialista**: O segundo lado pode escolher da sua livre vontade. Se quer na ponta, no meio, aonde, depende da livre vontade da pessoa que bateu.
> **Pesquisador**: Mas essa vontade tem a ver com alguma estratégia de jogo?
> **Especialista**: Sim, ele vai fazer cálculos. Se eu levo aqui o adversário vira me bater ou não? Então, é por aí, faz cálculos. Mas não pode indicar a dedo, deve fazer cálculos mentais com os olhos só a contar. Pensar, quando eu levo aqui e movimento os dados, o adversário virá me bater? Se nada, então levo aqui e continuo a jogada. Quando se bate, não pode levar muito tempo a pensar para capturar os dados, automaticamente fica fraude. Em poucos minutos ou segundo ele deve levar os dados.

Em síntese, essa conversa atesta o ponto de vista de que, não há no processo da realização da segunda captura de dados um padrão tático que se possa reproduzir sempre para que o jogador consiga obter ótimos resultados. Entretanto, o conjunto de técnicas que alicerçam o jogador na identificação do par de casas para realizar a segunda captura de dados inclui o cálculo mental a partir do processo de contagem, da realização das operações de adição e subtração.

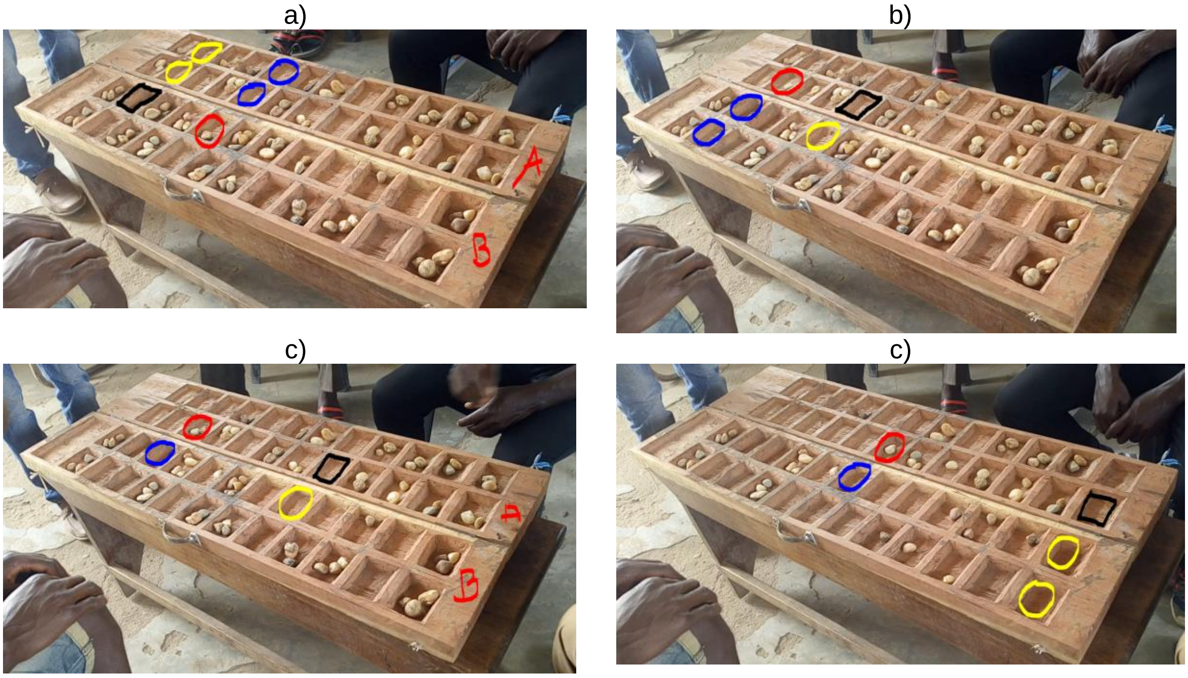
Conjunto tecnológico-teórico associado a t_i: Nas alíneas a), b) são apresentados e analisados alguns recortes de jogadas de partidas diversas, para ilustrar alguns pensamentos que são tomados pelos jogadores para realização da segunda captura. Trata-se da descrição de alguns procedimentos e as respectivas justificações para escolha do par de casas para segunda captura de dados.

a) Primeira situação

Na Figura 55 são ilustradas 4 imagens que demostram uma caraterística quase comum na escolha do para de casas para realização da segunda captura de dados, em uma jogada com chances de captura. A segunda captura feita é ilustrada nas casas marcadas em amarelo. Nelas, observa-se que, em todas essas capturas, a casa oposta de ataque do jogador que efetua a captura está sempre vazia, como é observado nas marcações feitas em preto.

Por exemplo, na Figura 55 a), o jogador B termina sua jogada na casa marcada em vermelho e realiza sua primeira captura nas casas marcadas em azul, depois, realiza a segunda captura de dados nas casas marcadas em amarelo. Como se pode notar na figura Indicada, a casa de ataque do campo de jogo do jogador B, oposta ao par de casas por onde realizou a segunda captura (casa marcada a preto) encontra-se vazia. Essa caraterística é verificável em todos os outros casos representados na Figura 55 b), c) e d) apresentadas como uma amostra de algumas jogadas cujo escolha das casas para realizar a segunda captura apresenta essa mesma caraterística.

Figura 55: primeira situação demonstrativa da segunda captura de dados



Fonte: os autores (2022)

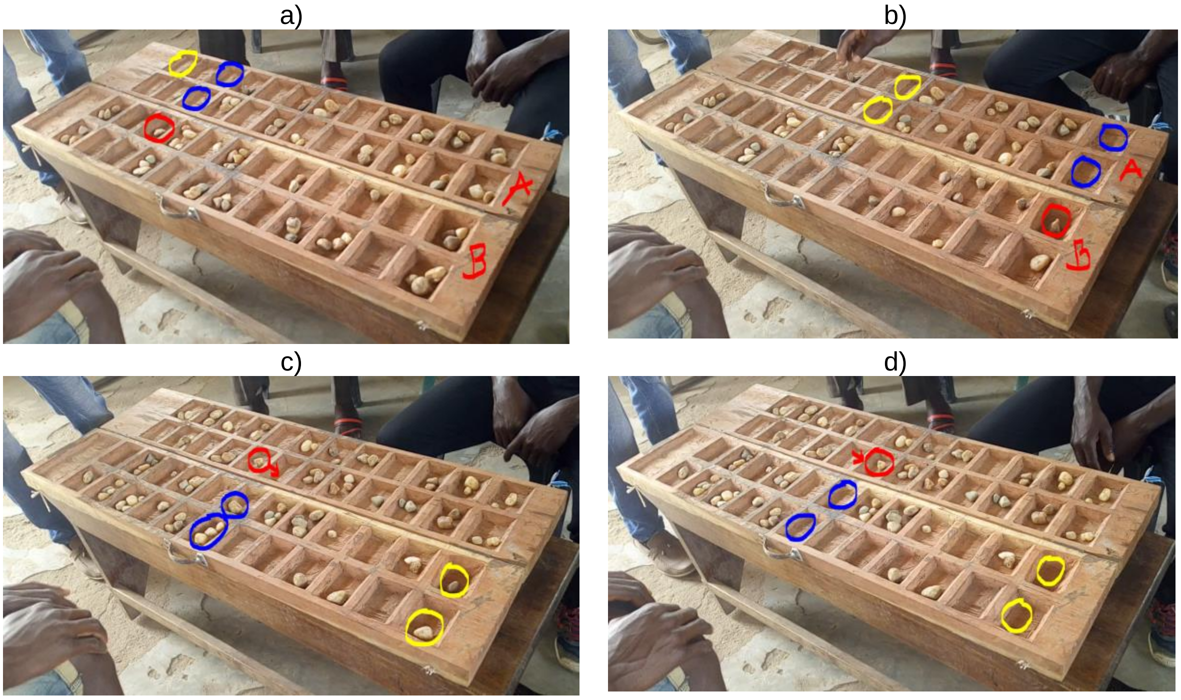
Por que os jogadores procedem assim para realizar a segunda captura de dados? A proposição que encontramos para dar resposta a essa questão, é de que, os jogadores procuram realizar a segunda captura no par de casas de adversário oposta à sua casa de ataque que esteja sem dados, no sentido de reduzir o risco de aumentar as chances de o adversário ter mais opções de realizar captura de seus dados.

b) Segunda situação

Na Figura 56 é ilustrado um outro cenário diferente do descrito anteriormente na primeira situação. Aqui, o jogador realiza a segunda captura de dados eliminando dados em casas onde o adversário poderia iniciar a distribuição de dados, podendo finalizá-la em uma casa onde teria a chance de capturar dados. Por exemplo, na Figura 56 a), o jogador B realiza a segunda captura de dados da casa c_{A24} marcada em amarelo, que tinha 3 dados. No caso, o jogador opta por essa captura por perceber que, o jogador A optando em iniciar sua jogada na casa marcada em amarelo, com $\#c_{A24} = 3$, finalizaria a jogada na casa vazia marcada em azul ($\#c_{A3} = 0$), o que lhe valeria uma chance de capturar dados do jogador B da casa marcada em vermelho (c_{B10}).

Pela disposição dos dados na Figura 56 a), o jogador A teria a chance de capturar dados nas casas c_{A3} e c_{A8}. A escolha anterior permitiu então que, o jogador B diminuísse as opções do jogador A para realização de sua primeira captura de dados.

Figura 56: segunda situação demonstrativa da segunda captura de dados



Fonte: os autores (2022)

Na Figura 56 b), o jogador B realiza sua segunda captura no par de casas $\binom{c_{A19}}{c_{A6}} = \binom{2}{3}$, marcadas em amarelo. O objectivo dessa escolha foi essencialmente diminuir as possibilidades que o jogador A tinha para iniciar uma jogada com chance de captura de dados. Ora vejamos, a partir da disposição dos dados no tabuleiro, percebe-se que o jogador A, para qualquer possibilidade de distribuição de dados que fizesse, teria apenas uma única opção para capturar dados do jogador B, nas seguintes possibilidades para iniciar e finalizar a jogada:

1ª possibilidade: $\#c_{A6} = 3 \rightarrow \#c_{A9} = 2 + 1 = 3 \rightarrow \#c_{A12} = 0 + 1 = 1$

2ª possibilidade: $\#c_{8} = 1 \rightarrow \#c_{A9} = 2 + 1 = 3 \rightarrow \#c_{A12} = 0 + 1 = 1$

3ª possibilidade: $\#c_{A10} = 2 \rightarrow \#c_{A12} = 0 + 1 = 1$

Assim, o jogador B, para reduzir tais possibilidades, poderia realizar a sua segunda captura de dados em um dos seguintes pares de casas: $\binom{c_{A19}}{c_{A6}} = \binom{2}{3}$, $\binom{c_{A17}}{c_{A8}} = \binom{0}{1}$ e $\binom{c_{A15}}{c_{A10}} = \binom{2}{2}$. Como é ilustrado na Figura 56 b), o jogador B preferiu realizar a segunda captura de dados no par de casas $\binom{c_{A19}}{c_{A6}} = \binom{2}{3}$, porque entre as possibilidades colocadas, essa é a que, para além de diminuir as possibilidades do jogador A iniciar uma jogada com chance de captura, capturaria o maior número de dados ($\#c_{A19} + \#c_{A6} = 2 + 3 = 5$), contrariamente às outras possibilidades em que poderia capturar respectivamente $\#c_{A17} + \#c_{A8} = 0 + 1 = 1$ e $\#c_{A15} + \#c_{A10} = 2 + 2 = 4$ dados.

Na Figura 56 c) e d), a ideia da segunda captura também se cinge na eliminação da opção que possibilita o jogador adversário iniciar sua jogada com uma chance de captura de dados. Na Figura 56 c), pode-se notar que o jogador A inicia sua jogada na casa c_{A5} marcada em vermelho e finaliza na casa c_{A6}, marcada em vermelho na Figura 56 d). Nessa jogada, o jogador A realiza a sua segunda captura de dados no par de casas $\binom{c_{B1}}{c_{B24}} = \binom{1}{1}$.

Por que o jogador A realiza a sua segunda captura nessa casa? A resposta a essa questão é dada fazendo uma análise básica da configuração do tabuleiro na Figura 56 c), antes do jogador A realizar a sua jogada. A partir da configuração do tabuleiro, nota-se que, em termos de possibilidades do jogador B iniciar uma jogada com chance de captura de dados após o jogador A ter realizado sua jogada é apenas uma, no caso, iniciando sua jogada na casa c_{B24}, finalizando na casa c_{B3}, isto é, realizando a seguinte distribuição: $\#c_{B24} = 1 \rightarrow \#c_{B1} = 1 + 1 = 2 \rightarrow \#c_{B3} = 0 + 1 = 1$. Nas condições da disposição dos dados, quaisquer outras possibilidades de início de uma jogada pelo jogador B não resultaria em uma chance de captura de dados.

Nessa lógica, o jogador A para evitar que o seu adversário capture seus dados, realiza a sua segunda captura na única opção que o jogador B tinha para realizar uma jogada em que poderia eliminar algum dado do jogador A.

6.3.4. A primeira jogada de uma partida: por onde se inicia e por onde se termina?

Uma das regras sobre o Ntxuva e que foi descrita na secção 7.3.2. faz referência à movimentação de dados, que segue o sentido anti-horário e, a casa por onde o jogador deverá iniciar a sua jogada. No que se refere à casa por onde o jogador deverá iniciar a sua jogada, não há uma regra especifica, pois, o jogador pode iniciar a jogada em qualquer uma das casas em seu campo de jogo.

Portanto, a escolha da casa para iniciar a movimentação de dados depende do jogador, entretanto, ele deverá ter em conta que precisa em princípio, terminar sua jogada em uma casa da linha de ataque por onde possa conseguir capturar dados do adversário. Embora não haja uma regra dentro do espírito do jogo Ntxuva para determinar a casa por onde o jogador deve iniciar a jogada, pela necessidade de captura de dados para eliminar o mais rápido possível o adversário, o jogador deverá iniciar sua jogada em uma casa estratégica, que lhe leve a finalizar a sua primeira jogada em uma casa de ataque do adversário.

Neste sentido, o jogador deverá sempre pensar ou se questionar: em que casa deve iniciar a jogada para que termine em uma casa de ataque que lhe possibilite realizar a capturar de dados do adversário? Este questionamento leva o jogador a realizar a tarefa:

Tarefa $\boldsymbol{t_{pj}}$: identificar a casa por onde iniciar a primeira jogada com chance de captura de dados.

Conjuntos de técnicas associadas a $\boldsymbol{t_{pj}}$: Na prática, o jogador utiliza a experiência que tem com o jogo para identificar a casa por onde iniciar a sua primeira jogada em uma partida. Por ter praticado o jogo diversas vezes, ele tem em décor algumas opções para iniciar a jogada, em uma maior parte dos casos, para os tabuleiros do tipo 4×8 em que cada casa é preenchida por dois dados. em todo caso, para qualquer tipo de tabuleiro do tipo $4 \times n$, o jogador precisa apenas saber da casa onde se inicia i a jogada a casa onde se finaliza f a mesma, quantas casa d devem ser passadas ou percorridas. No caso, a casa por onde a jogada iniciada casa i finaliza é: $f = i + d$. Então, com essa ideia, para identificar onde finalizará a jogada, o jogador apenas realiza uma contagem mental, e sobretudo, as propriedades da divisão euclidiana, como é descrito e justificado nas subsecções 6.3.4.1 a 6.3.4.5.

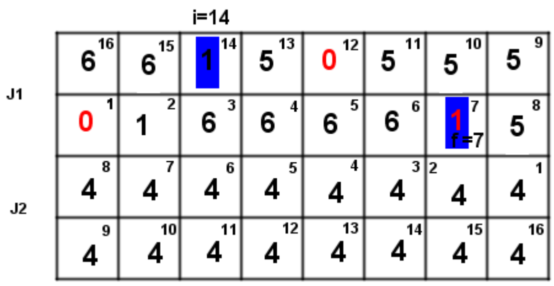
Uma outra opção é a que tentamos destacar na subsecção 6.4, em que se tenta descrever um padrão geral que permita, sob certas condições e restrições, conhecendo a casa i onde se inicia a primeira jogada e o número de dados inseridos em cada casa do tabuleiro para compor a configuração inicial do mesmo, determinar a casa onde a joga irá finalizar. Portanto, na secção 6.4, são apresentados os detalhes tecnológicos-teóricos, produzidos a partir de ensaios, em um tabuleiro diverso do tipo $4 \times n$, em que cada casa é preenchida na sua configuração inicial por $c_i = p = 4$ dados.

6.3.4.1. A primeira jogada da partida – por onde se inicia e por onde se termina: O caso de um tabuleiro do tipo 4×8.

Depois de várias simulações, foi possível perceber uma certa regularidade no processo de movimentação de dados na primeira jogada de uma partida. Esta regularidade está associada à possibilidade de identificação da casa por onde determinado jogador poderá terminar a sua jogada, após iniciá-la em uma casa qualquer. Entretanto, esta regularidade depende do tipo de tabuleiro e do número de dados em cada casa na configuração inicial do mesmo.

Na Figura 57, é ilustrada a configuração do tabuleiro de Ntxuva 4×8, em que o jogador 1, em sua primeira jogada, inicia na casa 14 e termina na casa 7 (ver as marcações em azul). Em uma observação simples ou fazendo contagem, pode-se perceber que da casa 14 à casa 7, percorrem-se 9 casas. Nos ensaios que foram feitos, iniciando a movimentação de dados em outras, também se constatou essa regularidade, fazendo crer que, se se inicia a movimentação em uma casa i, a jogada terminará em uma casa $i + 9$, isto é, $c_f = c_{i+9} = 1$.

Figura 57: Primeira movimentação de dados em uma partida de Ntxuva do tipo 4×8



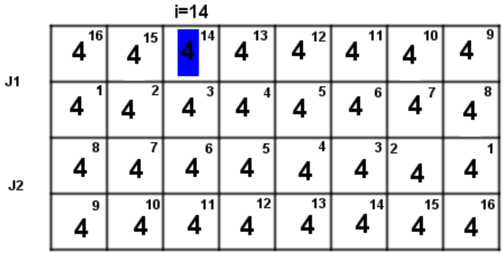
Fonte: os Autores (2022)

Mas então, na prática são exatamente 7 casas percorridas para terminar a jogada em um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×8?

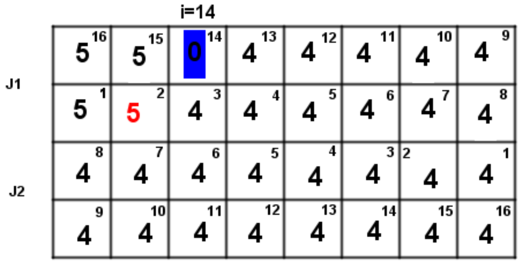
Nas Figura 58, Figura 59, Figura 60 é ilustrada passo-a-passo a saída da casa 14 até a casa 7. Na Figura 58 a), são mostradas a configuração inicial do tabuleiro e a indicação da casa 14 por onde o jogador 1 iniciou sua jogada. O jogador inicia a sua jogada na casa 14 onde possui inicialmente quatro dados ($c_{14} = 4$) e os distribui um a um para as casas seguintes, isto é, as casas c_{15}, c_{16}, c_1 e c_2, que possuíam antes quatros dados (ver Figura 58 a) e agora, passam a ter cinco dados (ver Figura 58 b), sendo a casa $c_2 = 5$, a última na distribuição e não da partida. No caso, para chegar à casa 2, o jogador percorre 4 casas, número equivalente ao número de dados distribuídos.

Figura 58: configuração inicial e a primeira movimentação de dados

a) Configuração inicial do tabuleiro



b) Primeira movimentação de dados

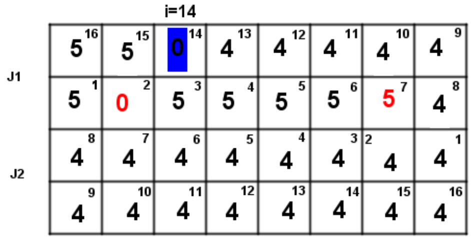


Fonte: Os Autores (2022)

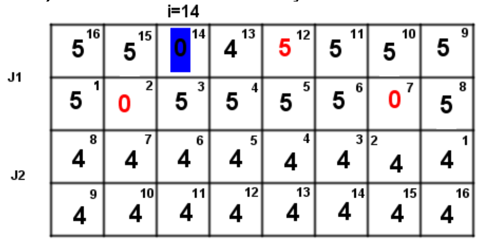
Como a casa 2, onde terminou a primeira movimentação não estava vazia, o jogador continua a movimentar os dados. No caso, o Jogador recolhe os dados da casa 2 ($c_2 = 5$) e segue distribuindo nas casas seguintes (c_3, c_4, c_5, c_6, c_7), onde inicialmente tinha quatro dados (ver Figura 58 b) e agora cinco dados (ver Figura 59 a). A saída da casa 2 para casa 7 são percorridas cinco casas, igual ao número de dados da casa 2 ($c_2 = 5$).

Figura 59: Segunda e terceira movimentação de dados

a) segunda movimentação de dados



b) terceira movimentação de dados

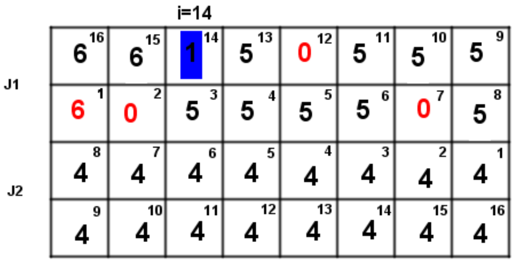


Fonte: os Autores (2022)

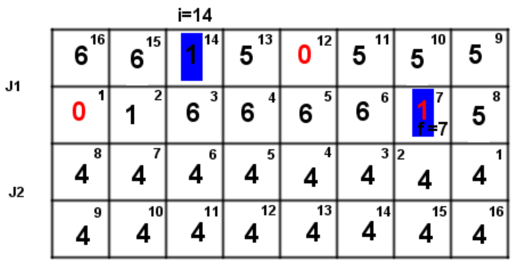
Do mesmo jeito que anterior, como a casa 7 não estava vazia, o jogador leva os dados ali encontrados e o que ele iria colocar lá, que totalizam cinco e segue-se com a distribuição. Neste caso, os dados são distribuídos para as casas c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, passando estas casas a ter cinco dados (ver Figura 59 b). Como a casa 12 não estava anteriormente vazia, a distribuição continua distribuindo os dados da casa 12 ($c_{12} = 5$) às casas c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_1 (ver Figura 60 a). O jogador termina a quarta movimentação na casa 1, onde terá 6 dados e, para chegar a essa casa percorre cinco casas. Leva os dados dessa casa, neste caso, os seis dados e distribui às casas c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 (ver Figura 60 b).

Figura 60: Quarta e quinta movimentação de dados

a) quarta movimentação de dados



b) configuração final do Ntxuva, após o término da 1ª jogada



Fonte: os Autores (2022)

A quarta destruição de dados é a última, pois, o último dado a ser distribuído recai na casa 7, que anteriormente estava vazia (ver a casa 7 na Figura 60 a → $c_7 = 0$) e agora passa a ter um dado ($c_7 = 1$). Na passagem da casa 1 à casa 7 foi necessário percorrer por 6 casas. Mas então, quantas casas foram necessárias passar por elas para terminar a jogada na casa 7?

É simples verificar que houve quatro movimentações em que:

- 1ª movimentação: da casa 14 para casa 2, foi necessário passar por 4 casas;
- 2ª movimentação: da casa 2 para casa 6, foi necessário passar por 5 casas;
- 3ª movimentação: da casa 6 para casa 12, foi necessário passar por 5 casas;
- 4ª movimentação: da casa 12 para casa 1, foi necessário passar por 5 casas;
- 5ª movimentação: da casa 1para casa 7, foi necessário passar por 6 casas.

Em geral, podemos dizer que, para iniciar a movimentação de dados da casa 14 e terminar na casa 7 foi necessário passar por $4 + 5 + 5 + 5 + 6 = 25$ casas. Entretanto, em uma contagem direta, da casa 14 para casa 7 passam-se 9 casas. Assim, de um modo geral, em um tabuleiro do tipo 4×8, iniciada uma jogada em uma determinada c_i, a sua primeira jogada terminará na 9ª em uma contagem direta ou na 25ª casa em uma rodada completa de distribuição de dados na respectiva jogada, contadas a partir da casa seguinte à casa onde se inicia a jogada. A partir dessa ideia, o jogador poderá saber onde começar a sua primeira jogada, para que possa terminar em uma casa onde ele possa capturar dados do adversário.

No caso do exemplo anterior, em que o jogador inicia sua jogada na casa 14, nas duas técnicas em que se pode percorrer para chegar à casa final da jogada temos:

1ª técnica: em um tabuleiro do tipo 4×8, de uma direta, sabendo que a primeira jogada se iniciou na casa i, para se chegar à casa final (f) é necessário passar por 9 casas, isto é, $f = i + 9$. No caso do exemplo dado, em que se inicia a jogada na casa $i = 14$, a casa final será: $f = i + 9 = 14 + 9 = 23$. Entretanto, em um tabuleiro do tipo 4×8, cada campo de jogo é composto por 16 casas, sendo que a numeração delas não chega até o número 23. No caso, o que quer dizer que a casa final é igual a 23 ($f = 23$)?

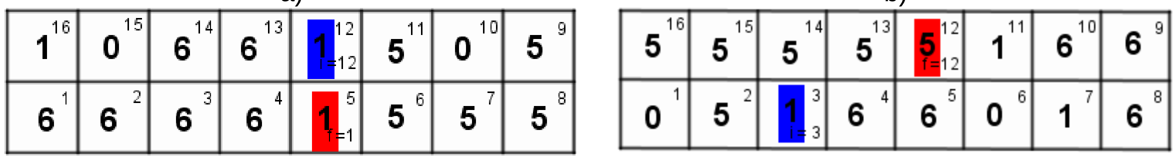
Ora vejamos: 23 passa 16 (último número na numeração do campo de jogo de um jogador) em 7 unidades, isto é, $23 = 16 + 7 = 1 \times 16 + 7$, ou seja, $23 - 16 = 23 - 1 \times 16 = 7$. Portanto 7, que resulta do resto da divisão de 23 por 16 vem a coincidir com a casa onde o J_1 terminou a sua jogada, no caso, $f = 23 \leftrightarrow f = 7$ (ver Figura 60).

Na Figura 61, são apresentadas duas situações em um recorte do campo de jogo de um jogador. Na primeira situação, o jogador inicia a primeira jogada na casa 12 ($i = 12$) e termina na casa 5 ($f = 5$), na segunda, inicia a sua primeira jogada na casa 3 ($i = 3$) e termina na casa 12 ($f = 12$). Com base nas relações apresentadas no parágrafo anterior, vem que:

- No caso da Figura 61 a), em que a jogada se inicia na casa 12 ($i = 12$), a casa onde a jogada se finalizará será: $f = i + 9 = 12 + 9 = 21$. Como o tabuleiro é do tipo 4×8 e $21 > 16$, vem que, $21 = 1 \times 16 + 5$ ou $21 - 1 \times 16 = 5$. No caso, 5 que é o resto da divisão de 21 por 16, representa a casa onde o jogador finalizou a sua primeira jogada, isto é, $f = 21 \Leftrightarrow f' = 5$.
- No caso da Figura 61 b), em que a jogada se inicia na casa 3 ($i = 3$), a casa onde a jogada se finalizará será: $f = i + 9 = 3 + 9 = 12$. Igualmente, como o tabuleiro é do tipo 4×8 e $12 < 16$, vem que, $12 = 0 \times 16 + 12$ ou $12 - 0 \times 16 = 12$. No caso, 12 que é o resto da divisão de 12 por 16, representa a casa onde o jogador finalizou a sua primeira jogada.

Figura 61: configuração final do Ntxuva, após o término da 1ª jogada iniciada nas casas $i = 12$ e $i = 3$

a) b)



Fonte: os Autores (2022)

2ª técnica: em um tabuleiro do tipo 4×8 preenchido por 4 dados em cada casa, sob ponto de vista concreto, sabendo que a primeira jogada se iniciou na casa i, para se chegar à casa final (f) é necessário passar por 25 casas, isto é, $f = i + 25$. Por exemplo, se o jogador inicia a sua primeira jogada na casa $i = 14$, finalizará a mesma na casa $f = i + 25 = 14 + 25 = 39$. Como $36 > 16$, do ponto de vista exposto no 1º caso, vem que $39 = 2 \times 16 + 7$ ou $39 - 2 \times 16 = 7$. Portanto, 7 que é o resto divisão de 39 por 16 representa aqui o número da casa por onde a jogada iniciada na casa 14 finalizará.

Por exemplo, na Figura 61 a), o jogador inicia a sua 1ª jogada na casa 12 ($i = 12$) e finaliza na casa $f = i + 25 = 12 + 25 = 37$. Como $37 > 16$, vem que $37 = 2 \times 16 + 5$ ou $37 - 2 \times 16 = 5$. No caso, 5 que é o resto da divisão entre 37 e 16 representa a casa por onde a jogada iniciada na casa 12 finalizará. Assim, $f = 37 \Leftrightarrow f' = 5$.

Na Figura 61 b), a 1ª jogada é iniciada na casa 3 ($i = 3$) e finalizada na casa $f = i + 25 = 3 + 25 = 28$. Como $28 > 16$, vem que $28 = 1 \times 16 - 12$ ou $28 - 1 \times 16 = 12$. No caso, 12 que ‘e o resto da divisão de 28 por 16 representa a casa por onde a jogada iniciada na casa 3 finalizará. Assim, $f = 28 \Leftrightarrow f' = 12$.

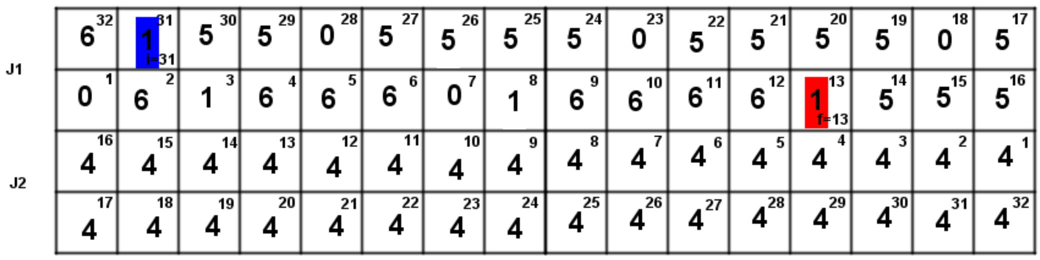
6.3.4.2. A primeira jogada da partida – por onde se inicia e por onde se termina: O caso de um tabuleiro do tipo 4×16.

Para este caso, apresentamos um exemplo demonstrativo, sem passar por todas as fases mostradas na subsecção 6.3.4.1, considerando que, as descrições anteriores foram suficientes para compreender o processo de distribuição de dados. Na Figura 62 é ilustrada a configuração do tabuleiro de Ntxuva 4×16 em que o jogador 1 inicia sua 1ª jogada na casa 31 (ver a marcação em azul na Figura 62) e termina na casa 13 (ver a marcação em vermelho na Figura 62).

Em uma observação direta no tabuleiro da Figura 62, pode-se notar que, da casa em que se inicia a jogada até a casa onde é finalizada, percorre-se 14 casas.

Com este dado, conhecendo a casa onde se inicia a 1ª jogada, a casa onde a mesma finalizará poderá ser identificada pela relação $f = i + 14$, isto é, $c_f = c_{i+14} = 1$.

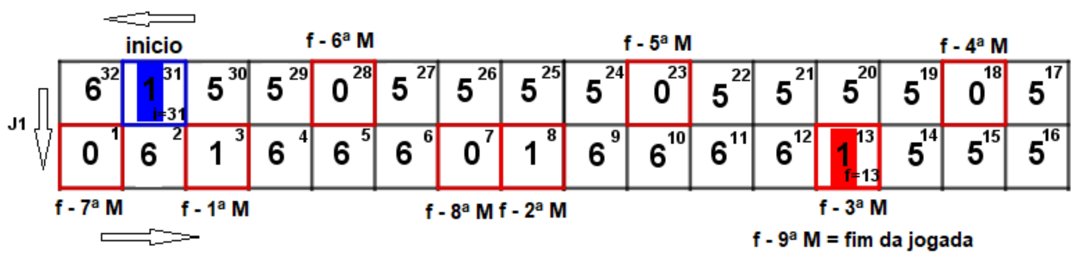
Figura 62: configuração final da movimentação de dados na 1ª jogada de Ntxuva do tipo 4×16



Fonte: os Autores (2022)

No caso da Figura 62, em que se inicia a movimentação de dados na casa 31 ($i = 31$), o jogador finalizará a sua jogada na casa $f = i + 14 = 31 + 14 = 45$. Pelos entendimentos anteriores, vem que, em um tabuleiro do tipo 4×16, o campo de jogo de um determinado jogador é constituído por $2 \times 16 = 32$ casas. Como $45 > 32$, vem que a casa por onde o jogador finalizará a jogada será $45 = 32 + 13 = 1 \times 32 + 13$ ou $45 - 1 \times 32 = 13$. No caso, 13 que é o resto da divisão entre 45 e 32 representa o número da casa por onde a jogada iniciada na casa 31 é finalizada. Assim, $f = 45 \Leftrightarrow f' = 13$.

Figura 63: esquema completo da movimentação de dados na 1ª jogada de Ntxuva do tipo 4×16



Fonte: os Autores (2022)

O que foi mostrado é fruto de uma observação rápida, contando no sentido anti-horário para achar o número de casas que vai desde a casa onde se inicia a jogada à casa onde se finaliza. Na prática, para se sair de i e f, o jogador faz uma volta completa e algumas casas, como é mostrado a seguir, a partir da descrição da Figura 63. Assim, iniciada a distribuição de dados na casa $i = 31$, a distribuição de dados segue o seguinte ciclo (ver. Figura 63):

- 1ª movimentação: da casa 31 para a casa 3, onde finaliza a 1ª movimentação de dados (f – 1ª M), foi necessário passar por 4 casas;

- 2ª movimentação: da casa 3 para casa 8, foi necessário passar por 5 casas;
- 3ª movimentação: da casa 8 para casa 13, foi necessário passar por 5 casas;
- 4ª movimentação: da casa 13 para casa 18, foi necessário passar por 5 casas;
- 5ª movimentação: da casa 18 para casa 23, foi necessário passar por 5 casas;
- 6ª movimentação: da casa 23 para casa 28, foi necessário passar por 5 casas;
- 7ª movimentação: da casa 28 para casa 1, foi necessário passar por 5 casas;
- 8ª movimentação: da casa 1 para casa 7, foi necessário passar por 6 casas;
- 9ª movimentação: da casa 7 para casa 13, foi necessário passar por 6 casas.

Com esta informação, pode-se dizer que, se a primeira jogada inicia na casa 31 ($i = 31$), para terminar a mesma precisará percorrer por $4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 = 46$ casas. Assim, percorrendo todas estas casas o jogador finalizará a jogada na casa 13 ($f = 13$). De modo geral, em um tabuleiro do tipo 4×16, se iniciada a jogada em uma i, a sua primeira jogada terminará na 14ª casa em uma contagem direta de onde se inicia e onde se termina a jogada, ou na 46ª casa, fazendo uma contagem real do número de casas percorridas na distribuição de dados, contados a partir a partir da casa seguinte à casa onde se inicia a jogada.

A partir da constatação acima referenciada, deduzimos que, se se inicia a movimentação de dados em uma casa i, a jogada terminará em uma casa $i + 46$, isto é, $c_f = c_{i+46}$.

Por exemplo, na Figura 63, a 1ª jogada iniciada na casa 31 ($i = 31$) é finalizada na casa $f = i + 46 = 31 + 46 = 77$. Como $77 > 32$, vem que $77 = 2 \times 32 + 13$ ou $77 - 2 \times 32 = 13$. Então, 13 que é o resto da divisão entre 77 e 32 representa a casa em que a jogada é finalizada. Assim, $f = 77 \Leftrightarrow f' = 13$.

À semelhança do que acorreu no tabuleiro do tipo 4×8, aqui também verificamos duas técnicas a considerar:

1ª técnica: em um tabuleiro do tipo 4×16, a partir de uma contagem direta, sabendo que a primeira jogada se iniciou na casa i, para se chegar à casa final (f) é necessário passar por 14 casas, isto é, $f = i + 14$. Assim,

a) Se $i + 14 \leq 32$, então $f = i + 14$;

b) Se $i + 14 > 32$, então $f' = f - k \times 32 = i + 14 - k \times 32$, om $k \in IN^*$.

Em todo caso, podemos dizer que f deve ser estritamente menor que 32, ou seja, k deve ser o maior possível.

2ª técnica: em um tabuleiro do tipo 4×16, em uma contagem real do que ocorre no jogo, sabendo que a primeira jogada se iniciou na casa i, para se chegar à casa final (f) é necessário passar por 46 casas, isto é, $f = i + 46$. Como f deve ser estritamente menor que 32 e $i + 46 > 32$, então $f' = f - k \times 32 = i + 46 - k \times 32$, com $k \in IN$.

Com estas relações, o jogador, conhecendo a regularidade a partir do tipo de tabuleiro que estiver usando, pode saber determinar a priori, a casa onde deseja terminar sua jogada, para poder capturar dados do adversário. É importante frisar aqui que, esta regularidade é apenas verificada na primeira jogada do jogador, pois, pela movimentação de dados, as jogadas seguintes não poderão apresentar uma regularidade concreta. Também, a regularidade a que nos referimos depende do tipo de tabuleiro utilizado e do número de dados que venham a compor as casas do tabuleiro na sua configuração inicial.

6.3.4.3. A identificação da casa por onde o jogador finalizará a sua primeira jogada a partir da noção da "regra dos nove".

A partir dos ensaios realizados, foi possível descrever na secção 6.3.4.2 a relação que permite a identificação da casa por onde a primeira jogada terminará, conhecendo a casa onde se inicia a jogada e quantas casas se deve percorrer para chegar à casa final. Pode se notar que esta relação está associada à noção de "algoritmo da divisão", que Martos enuncia na seguinte forma:

"Dados dois inteiros m e n, $n > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que $m = qn + r$, com $0 \leq r < n$ (q é chamado de quociente e r de resto da divisão de m por n)" (MARTOS, 2018, p. 22). Para o caso da relação observada na movimentação de dados do tabuleiro do Ntxuva, o resto r identifica a casa por onde o jogador terminará a jogada e n representa o número de casas que constituem o campo de jogo de um determinado jogador no Ntxuva.

Por detrás dessa noção do "algoritmo da divisão", esconde-se a noção da "regra dos nove", uma noção que julgamos interessar ao jogador para identificação da casa por onde terminará a sua primeira jogada, nas condições apresentadas na secção 8.2.4.

Na prática, a intenção aqui é se apropriar da “regra dos nove”, que está ancorada ao sistema de numeração da base[27] 10, o sistema decimal, para refletir de modo geral sobre o que se designará “regra dos $b-1$”, em que b representa a base de um sistema qualquer de numeração, bem como essa regra dará suporte para identificação da casa por onde um jogador terminará sua primeira jogada. Para começar, trazemos aqui a noção da “regra dos nove” a partir da definição apresentada por Martos, que sinaliza:

> Seja n um número natural. Retirar os “noves fora” de um natural n significa determinar o resto de sua divisão por 9, ou, em outras palavras podemos dizer que, retirar os “noves fora” de n significa retirar o maior múltiplo de 9 de n. Por exemplo, 13 “noves fora” 4, pois $13-9 = 4$, ou ainda, podemos dizer que 4 é o resto da divisão de 13 por 9, isto é, $13 = 1\cdot 9 + 4$. Um outro exemplo pode ser, 57 “noves fora” 3, pois $57 - 6\cdot 9 = 3$, isto é, 3 é o resto da divisão de 57 por 9, ou seja, $57 = 6\cdot 9 + 3$. (MARTOS, 2018, p. 33).

Essa definição, que se esconde por detrás do “algoritmo da divisão”, possui uma ampla associação com a relação que permite a identificação da casa por onde determinado jogador terminará a sua primeira jogada. Veja que, no caso de um tabuleiro do tipo 4×8, por exemplo, na Figura 64, para identificação da casa por onde o jogador terminará a sua primeira jogada, quando inicia a distribuição de dados na casa 15, se procederá com o seguinte:

- Se a contagem for direta: $f = i + 9 = 15 + 9 = 24$. Como $24 > 16$, achamos o resto da divisão por 16, o número de casas que compõem o campo de jogo de um determinado jogador, que será: $24 = 1\times 16 + 8$, ou seja, $f' = 24 - 1\times 16 = 8$.

---

[27] Para um lembrete, a base de numeração define o sistema de agrupamentos dos números nesta mesma base. Por exemplo, o sistema decimal, que tem a base 10, define o agrupamento de números nessa base de 10 em 10. De acordo com Neto E. (2016, p. 23-24), “a base de um sistema de numeração informa a quantidade de algarismos, mas esse número não está entre eles, por exemplo, na base 10, temos dez algarismos que o compõem, que são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9”. Estes algarismos, que compõem a base do sistema de numeração, são utilizados para formar novos números nesta mesma base, por exemplo, o 13 é formado pelos algarismos 1 e 3 que fazem parte da base do sistema de numeração decimal.

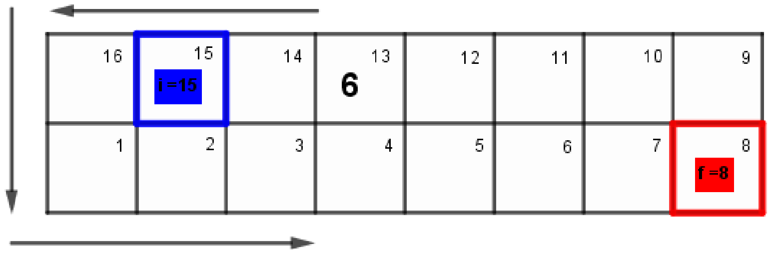
Assim, um sistema de numeração de uma base qualquer $b \in IN$ é composto por b algarismo, em que o b não é não faz parte, isto é, o conjunto de números naturais que compõem a base b e $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, b-1\}$. Neste caso, $b-1$ é o último número que compõe a base só sistema de numeração de base b. Estes algarismos, que compõem a base b, são utilizados para formar outros números dentro desse sistema de numeração.

Por exemplo, o sistema de numeração de base 14 é composto por 14 algarismos, e o último algarismo que compõe essa base é $14-1 = 13$, isto é, o 14 não faz parte da base. Assim, o conjunto dos algarismos que formam essa base são: $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9, A, B, C, D\}$, onde A representa 10, B representa 11, C representa 12 e D representa 13.

- Se a contagem real: $f = i + 25 = 15 + 25 = 40$. Como $40 > 16$, vem que: $40 = 2 \times 16 + 8$, ou seja, $f' = 40 - 2 \times 16 = 8$.

Neste caso, 8 representa a casa ou identificação da casa por onde o jogador terminará a sua primeira jogada. Como se pode notar, para achar essa identificação, foi preciso determinar o resto da divisão de um número 24 por 16 ou 40 por 16, uma operação que tem um significado equivalente à da “regra dos nove”.

Figura 64: esquema que indica o início da primeira jogada na casa 15 e finalizada na casa 8



Fonte: os Autores (2022)

Portanto, 16 que representa o número de casas que compõem o campo de jogo de um determinado jogador, nesta relação é equivalente ao 9 que vem da base de numeração 10 menos uma unidade, isto é, $9 = 10 - 1$, que é equivalente ao último algarismo na ordem natural da base do sistema decimal. Do mesmo jeito, 16 que representa o último número na ordem natural na contagem do número de casas que compõem o campo de jogo de um determinado jogador no Ntxuva, também está ancorada à base de numeração $16 + 1 = 17$, ou melhor, à base hexadecimal, em que o conjunto de algarismos que o compõem são: $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9, A, B, \dots, F, G\}$.

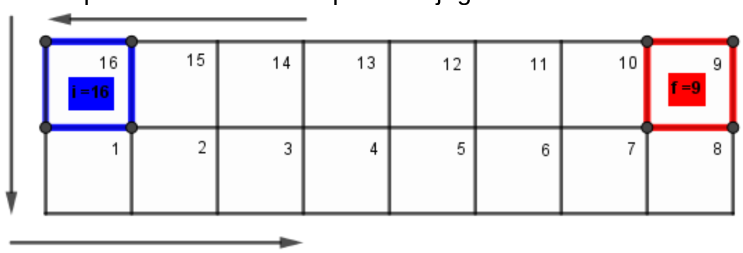
Então, no lugar da “regra dos nove” ancorada à base decimal, podemos designar “regra dos dezesseis” ancorada a base hexadecimal, ou em geral, da “regra dos $b - 1$”, ancorada a base de numeração b. Deste modo, conhecendo a casa por onde se inicia a primeira jogada e o número de casas a percorrer para se chegar à casa onde a jogada será finalizada, pela “regra dos $b - 1$”, em que $b - 1$ representa o número de casas que compõem o campo de jogo de um determinado jogador no tabuleiro de Ntxuva, pode-se determinar e identificar a casa por onde será finalizada a jogada.

6.3.4.4. Identificação da casa por onde se finalizará a primeira jogada a partir da definição 2 da “regra dos nove” em um tabuleiro do tipo 4×8

A segunda definição sobre a “regra dos nove” apresentada por Martos (2018) e que a considera mais prática é de que: o “noves fora” de um natural n é determinado pela soma dos algarismos de n. Por exemplo, “187 “noves fora” 7, significa que o resto da divisão de 187 por 9 é 7, mas também, $187 = 20 \cdot 9 + 7$, ou, equivalente, $1 + 8 + 7 = 16$ e $1 + 6 = 7$” (MARTOS, 2018, p. 35), lembrando que essa operação é feita no sistema decimal.

Como na subsecção 6.3.4.3 foi mostrado que a casa por onde o jogador terminará a sua primeira jogada é determinada pela “regra dos $b - 1$”, é suposto que a segunda definição apresentada sobre a “regra dos nove” também permitirá identificar a casa final da primeira jogada. No caso da Figura 65, se se inicia a jogada na casa 16, ela será finalizada na casa $f = i + 9 = 16 + 9 = 25$ ou $f = i + 25 = 16 + 25 = 41$. Como $f > 16$, vem que $f' = 25 - 1 \times 16 = 9$ ou $f' = 41 - 2 \times 16 = 9$. No caso, o jogo terminará na casa 9, como é ilustrado na Figura 65 com a marcação em vermelho.

Figura 65: esquema que indica o início da primeira jogada na casa 16 e finalizada na casa 9



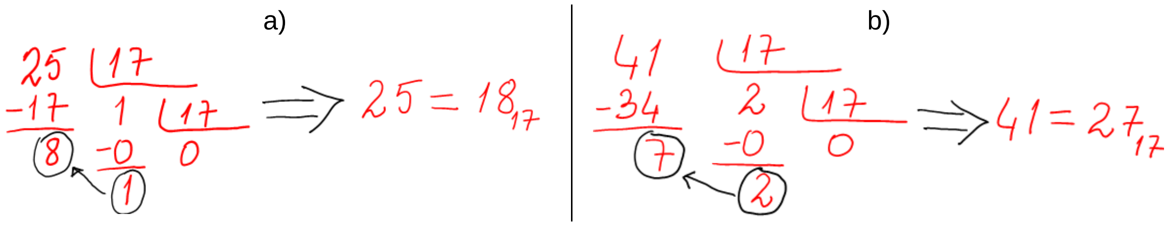
Fonte: os Autores (2022)

Mas então, como é utilizando a segunda definição da “regra dos nove”? Era suposto que se $f = 25$ ou $f = 41$, de acordo com a definição 2 da “regra dos nove”, então a casa onde o jogador terminaria a sua primeira jogada seria dada pela soma dos algarismos de f, isto é, $f' = 2 + 5 = 7$ ou $f' = 4 + 1 = 5$. Como se pode notar, 7 e 5 não constituem a casa por onde a jogada iniciada em $i = 16$ (Figura 65), terminará. Neste caso, poderíamos dizer que a definição 2 da “regra dos nove” não funciona?

A “regra dos nove” como foi explicitada está ancorada à base decimal, o sistema numérico que agrupa os números 10 em 10 unidades. A configuração do campo de jogo de um jogador em um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$ é composto por $2 \times n$ casas, que corresponde ao ciclo de rotação completa da distribuição de dados. Este ciclo, como foi explicado anteriormente, corresponde a uma base de numeração $2 \times n + 1 = b$.

No caso especifico do tabuleiro do jogo Ntxuva do tipo 4×8, a base numérica a considerar será: $b = 2 \times n + 1 = 2 \times 8 + 1 = 16 + 1 = 17$. Como se pode notar, os valores de $f = 25$ e $f = 41$ a que correspondem à casa onde a jogada iniciada na casa 16 termina, são maiores que a base 17 e, eles estão inscritos na base decimal. Para que a “regra dos nove” funcione, teremos que converter os f para base hexadecimal, dividindo estes números por 17, para separar as unidades, em grupos de 17, de 17^2, e assim por diante, como é ilustrado na Figura 66.

Figura 66: Conversão dos números 25 e 41 para base 17



Fonte: os Autores (2022)

Neste caso, a divisão sucessiva de 25 e 41 por 17 sinalizam que: há um grupo de 17 e oito unidades para 25, isto é, $25 = 1 \times 17 + 8 \times 17^0 = 18_{17}$. Há também dois grupos de 17 e sete unidades, isto é, $41 = 2 \times 17 + 7 \times 17^0 = 27_{17}$. Após converter os números para a base 17, aplicamos a “regra dos 16” para achar a casa onde a jogada irá finalizar, que será:

- $f = 25 = 18_{17} \Rightarrow f' = 1 + 8 = 9$.
- $f = 41 = 27_{17} \Rightarrow f' = 2 + 7 = 9$.

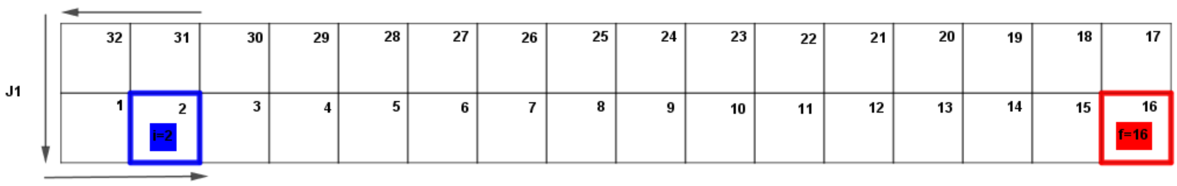
Neste caso, $f' = 9$, determinada pela soma dos algarismos de f_{17} representa a casa por onde um jogador termina a sua primeira jogada, quando iniciada na casa $i = 16$, em um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×8.

6.3.4.5. Identificação da casa por onde se finalizará a primeira jogada a partir da definição 2 da "regra dos nove" em um tabuleiro do tipo $\mathbf{4 \times 16}$

Aqui mostramos mais um ensaio feito da utilização da definição 2 da "regra dos nove" para identificação da casa por onde a primeira jogada de um jogador de Ntxuva finalizará, tendo iniciado a jogada em uma casa i. Para identificar a casa final, começamos por identificar à base de nomeação que vai representar o ciclo de distribuição de dados, para o qual serão convertidos os números que serão achados na base da relação que permite determinar a casa onde se finaliza a primeira jogada. Como o tabuleiro utilizado é do tipo 4×16, a base, como foi explicado na secção 8.2.4.1 será dada por: $b = 2 \times n + 1 = 2 \times 16 + 1 = 33$, cujo conjunto de símbolos que o compõem é $\{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, \ldots, V, W\}$.

A seguir determinamos f, a identificação a priori da casa onde terminará a jogada. Na Figura 67 foi tomada a casa $i = 2$ como onde se inicia a jogada e a casa 16 onde se finaliza. Como foi esclarecido nas secções anteriores, em um tabuleiro do tipo 4×16 em que na configuração inicial cada casa é preenchida por quatro dados ($c_i = 4$), se se inicia a primeira jogada em uma casa i, ela se finalizará na casa $f = i + 14$ ou $f = i + 46$. Assim, supondo que se iniciou a jogada na casa $i = 2$, a jogada terminará na casa $f_1 = i + 14 = 2 + 14 = 16$ ou $f_2 = i + 46 = 2 + 46 = 48$.

Figura 67: esquema que indica o início da primeira jogada na casa 2 e finalização na casa 15, em um tabuleiro do tipo 4×16

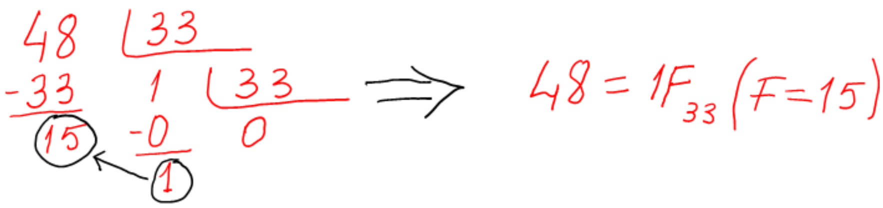


Fonte: os Autores (2022)

Como $f_1 < 33$ (a base de numeração a ser considerada), vem que $f_1 = 16$ representa imediatamente a casa onde a jogada terminará. No caso de $f_2 = 48 \geq 33$, teremos que convertê-lo para base 33, dividindo 48 por 33 sucessivamente, separando as unidades em grupo de 33^0, 33, 33^2, etc. como é ilustrado na Figura 68.

.

Figura 68: Conversão dos números 48 para base 33



Fonte: os Autores (2022)

Neste caso, a divisão sucessiva de 48 por 33 sinaliza que: há um grupo de 33 e F (F representa 15 na base 33) unidades de 33^0, isto é, $48 = 1 \times 33 + F \times 33^0 = 1F_{33}$. Após converter 48 para base 33, aplicamos a “regra dos 32” para achar a casa onde a jogada irá finalizar, que será: $f_2 = 48 = 1F_{33} \Rightarrow f' = 1 + F = 1 + 15 = 16$.

Neste caso, $f = f' = 16$, determinada pela soma dos algarismos de f_{33} representa a casa por onde um jogador termina a sua primeira jogada, quando iniciada na casa $i = 16$, em um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×8.

6.4. RELAÇÕES QUE SE PODEM EXPLORAR NA PRIMEIRA JOGADA DE UMA PARTIDA DE NTXUVA

O jogo Ntxuva, como foi descrito na secção 0, é um jogo típico de distribuição de dados, ou de semeaduras como é indicado em alguns artigos, que tem por objetivo principal eliminar todos os dados do campo de jogo do adversário. A eliminação de dados do adversário é acompanhada de um processo estratégico e implícito de simulação de situações de jogadas, com vista a poder prever as melhores saídas para distribuição de dados, que permitam ao jogador, ao mesmo tempo que vá capturar e eliminar dados do adversário, procure ao máximo se defender, de modo que seus dados não possam ser eliminados ou seja, eliminados na mínima possibilidade.

A prática com o jogo agrega ao jogador uma possibilidade de desenvolvimento ou estímulo do raciocínio rápido, do cálculo mental, ao lidar de forma implícita com a operação de adição e subtração, isto é, a realização de cálculo mental sem revelar ao adversário o seu pensamento para distribuição, captura e eliminação de dados. Portanto, qualquer movimentação de dados que o jogador faz é mediante um cálculo feito.

Nesse processo de raciocínio e cálculos e serem feitos, o jogador articula as suas estratégias sempre se questionando, para obter certeza nas estimativas que vai fazendo para criar jogadas espertas. Alguns questionamentos podem ser: por onde iniciarei a primeira jogada de modo que possa terminar em uma casa que me permita capturar dados do adversário, ao mesmo tempo, não permita que o adversário capture os meus dados, ou, capture o mínimo possível? Após a primeira jogada, qual a melhor casa para efetuar uma jogada? Em uma determinada jogada, em que casa não iniciar uma jogada? Em uma jogada com chance de captura de dados do adversário, qual a melhor segunda opção de captura de dados?

Algumas destas questões foram respondidas nas descrições das secções anteriores. Nesta subsecção, apresenta-se algumas relações que foram destacadas a partir da análise que se fez da simulação da primeira jogada de uma partida em diferentes tamanhos de tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, bem como utilizando-se diferentes quantidades de peças $c_i = p$ para o preenchimento da configuração inicial dos tabuleiros.

O registro das simulações, que permitiu analisar as relações que permitem a identificação da casa onde finaliza a primeira jogada de uma partida, é apresentado no Quadro 13, que pela extensão foi repartido em três. No quadro, n representa a extensão do tabuleiro (o número de colunas que compõem o tabuleiro de Ntxuva), p representa o número de dados que compõem cada casa do tabuleiro de Ntxuva na sua configuração inicial, D divisível e N não divisível, d o número de casas percorridas de forma direta da casa onde se finaliza a jogada à casa onde se inicia a mesma.

Para descrever uma relação possível que explique como identificar a casa por onde um jogador finalizará sua jogada, sabendo que a inicia na casa i, iniciou se a verificação das seguintes condicionalidades:

- ✓ Verificar se $2n$ é divisível por $p + 1$ e determinar o resto r dessa divisão;
- ✓ Analisar como o resto r, o número p de dados se relacionam e determinam o número de casas percorridas de forma direta para sair da casa onde a jogada foi finalizada à casa onde foi iniciada a jogada.
- ✓ Construir as relações que permitem identificar a casa onde se finaliza a primeira jogada de uma partida do Ntxuva.

Com base nisso, identificamos algumas constatações que são descritas a seguir:

a) Primeira constatação

No Quadro 13, por exemplo, para $n = 4$, que corresponde a um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n = 4 \times 4$, a simulação para $p = 1$ indicou que a diferença d de casas a percorrer de onde se finaliza a jogada f à casa i onde se iniciou é 1, que coincide com o número p de dados que compõem as casas na configuração inicial do tabuleiro, isto é, $d = p$. Além disso, a divisão $2n$ por $p + 1$ resulta em zero como resto da divisão ($r = 0$). No Quadro 13, essa constatação pode se ver repetida para $n = 5, 7, 11$ e $p = 1$; $n = 6, 12$ e $p = 1, 2, 3$; $n = 8, 16$ e $p = 1, 3$; $n = 9$ e $p = 1, 2$; $n = 10$ e $p = 1, 3, 4$; $n = 14$ e $p = 1, 3, 6$, levando-nos a deduzir que:

Se um jogador inicia sua primeira jogada na casa i, em um tabuleiro do tipo $4 \times n$ cuja configuração inicial é constituída por p dados em cada casa e, o resto da divisão de $2n$ por $p + 1$ for zero, então, a casa onde o jogador finalizará a jogada será $f = i + p$. Entretanto, se $i + p > 2n$, $f \Leftrightarrow f' = (i + p) - 2n \times k$, com $k \in IN^*$. No caso, f' resulta do resto da divisão de $f = i + p$ por $2n$.

Essa constatação poderia também ser enunciada da seguinte forma:

> Considere uma partida de Ntxuva, realizada em um tabuleiro do tipo $4 \times n$ em que na configuração inicial cada casa é preenchida por p dados.
>
> i) $\forall n, p \in IN$, se $\exists k \in IN^* | \ 2n - k(p + 1) = 0$ sempre que $2n \geq p + 1$, então se se inicia a primeira jogada da partida na casa i, ela finalizará na casa $f = i + p$.

Teoricamente podemos dizer que essa relação funciona sempre, nas condições dadas, pelo seguinte facto: considerando a volta completa que se dá para sair de i a f, em uma rodada com alternância de 0 e $p + 1$, assegura-se a propriedade:

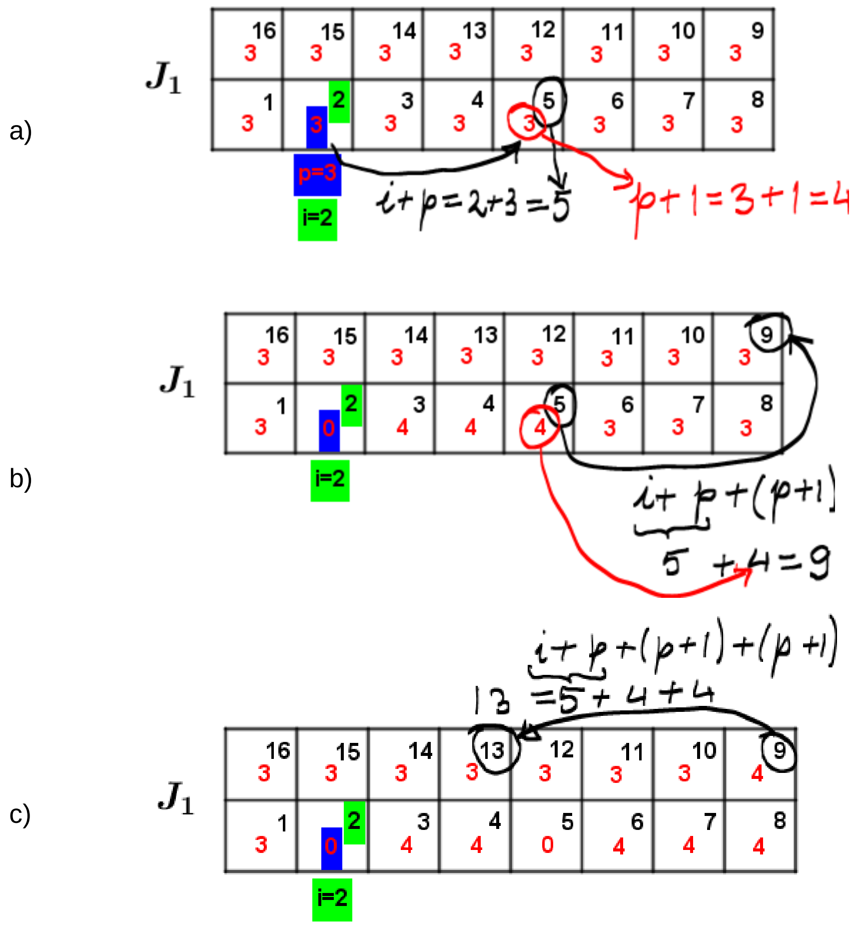
$$i + 2n - 1 = i + p + (p + 1) + (p + 1) + \cdots + (p + 1) \ = \ i + p + \ (k - 1)(p + 1)$$

Em que k representa o número de movimentos completos, que se efetuam na distribuição de dados, em uma rodada do jogo e, $i,\ i + p,\ i + p + (p + 1), i + p + 2(p + 1), \dots, i + p + \ (k - 1)(p + 1)$ os movimentos sucessivos que se efetuam para alcançar a próxima casa onde a movimentação, hipoteticamente para, mas continua pelo facto da casa não estar vazia. Portanto, há um 0 imediatamente antes de retornar a i, nesta última casa da primeira rodada, há $p+1$ dados que se distribuem entre i e $i+p$. É por isso que o jogo para em $i+p$. Parte deste processo é ilustrado a título de exemplo na Figura 69 a), b), c).

Figura 69: ilustração do processo que fundamenta a proposição i) imediatamente referenciada acima

$$2n = 2 \times 8 = 16$$
$$\mathbf{p+1=3+1=4}$$

$$2n \div (p+1) = 16 \div 4 = 4 \vee 16 = 4 \times 4 + 0$$



Fonte: Os autores (2022)

ii) Se $i + p > 2n$, então $f \Leftrightarrow f' = (i+p) - 2n \times k$, com $k \in IN^*$.

b) Segunda constatação

Uma outra constatação observada na base da simulação da 1ª jogada de uma partida, foi por exemplo, a ilustrada no Quadro 13, para $n = 4$. A observação e análise dessa simulação para $p = 2$ indicou que, a diferença d de casas a percorrer de onde se finaliza a jogada f à casa i onde se iniciou é zero, isto é, a partida inicia e termina onde iniciou ($f = i$). Esta constatação é verificável para outros valores de n e p, sempre que a divisão $2n$ por $p+1$ é igual a p, isto é, sempre que $r = p \Leftrightarrow p - r = 0$. No Quadro 13, pode-se observar essa regularidade para: $n = 7, 10$ e $p = 2$, $n = 12$ e $p = 4$, levando-nos a deduzir que:

> Considere uma partida de Ntxuva, realizada em um tabuleiro do tipo $4 \times n$ em que na configuração inicial de cada casa é preenchida por p dados.
>
> $\forall n, p \in IN$, se $\exists k, r \in IN^* | \; 2n - k(p+1) = r \wedge r = p$, sempre que $2n \geq p+1$, então, se se inicia a primeira jogada da partida na casa i, ela finalizará na mesma casa onde se iniciou a jogada, isto é, $f = i$.

Teoricamente podemos dizer que essa relação funciona sempre, nas condições dadas, pelo seguinte facto: considerando a volta completa que se dá para se sair de i a f, em uma rodada com alternância de 0 e $p+1$, assegura-se a propriedade:

$$2n = p + (k-1)(p+1)$$

Em que k representa o número de movimentos completos, que se efetuam na distribuição de dados, em uma rodada do jogo e, $i,\; i+p,\; i+p+(p+1), i+p+2(p+1), \dots, i+p+\;(k-1)(p+1)$ os movimentos sucessivos que se efetuam para alcançar a próxima casa onde a movimentação, hipoteticamente para, mas continua pelo facto da casa não estar vazia. Portanto, a casa seguinte a ser esvaziada ($c = 0$) é obtida pela relação $i + p + (k-1)(+1) = i + 2n$, ou seja, i, que é a casa em que se finaliza a jogada.

Quadro 13: registro das simulações sobre a primeira jogada de uma partida no jogo Ntxuva em tabuleiros do tipo $4 \times n$

n	4				5				6				7				8			
$2n$	8				10				12				14				16			
p	1	**2**	3	**4**	1	2	**3**	4	1	2	3	4	1	**2**	3	**4**	1	2	3	4
$p+1$	2	**3**	4	**5**	2	3	**4**	5	2	3	4	5	2	**3**	4	**5**	2	3	4	5
Divisível	D	**N**	D	**N**	D	N	**N**	D	D	D	D	N	D	**N**	N	**N**	D	N	D	N
Resto da divisão (r)	0	**2**	0	**3**	0	1	**2**	0	0	0	0	2	0	**2**	2	**4**	0	1	0	1
d	1	**0**	3	**4**	1	5	**1**	4	1	2	3	2	1	**0**	11	**0**	1	5	3	9
Relação possível ($d = \cdots$)	p	**p-r**	p	**?**	p	p+r(p+1)	**?**	p	p	p	p	p+r(p+1)-12	p	**p-r**	p+r(p+1)	**p-r**	p	p+r(p+1)	p	p+r(p+1)

n	9				10					11				
$2n$	18				20					22				
p	1	2	3	4	1	**2**	3	4	5	1	2	3	4	**5**
$p+1$	2	3	4	5	2	**3**	4	5	6	2	3	4	5	**6**
$Divisível$	D	D	N	N	D	**N**	D	D	N	D	N	N	N	**N**
Resto da divisão (r)	0	0	2	3	0	**2**	0	0	2	0	1	2	2	**4**
d	1	2	11	1	1	**0**	3	4	17	1	5	11	14	**4**
Relação possível ($d = \cdots$)	p	p	p+r(p+1)	p+r(p+1)-18	p	**p-r**	p	p	p+r(p+1)	p	p+r(p+1)	p+r(p+1)	p+r(p+1)	**?**

n	12						14							16				
$2n$	24						28							32				
p	1	2	3	**4**	5	6	1	2	3	4	5	6	**7**	1	2	3	4	**5**
$p+1$	2	3	4	**5**	6	7	2	3	4	5	6	7	**8**	2	3	4	5	**6**
$Divisível$	D	D	D	**N**	D	N	D	N	D	N	N	D	**N**	D	N	D	N	**N**
Resto da divisão (r)	0	0	0	**4**	0	3	0	1	0	3	4	0	**4**	0	2	0	2	**2**
d	1	2	3	**0**	5	3	1	5	3	19	1	6	**12**	1	0	3	14	**11**
Relação possível ($d = \cdots$)	p	p	p	**p-r**	p	p+r(p+1)-24	p	p+r(p+1)	p	p+r(p+1)	p+r(p+1)-28	p	**?**	p	r=p	p	p+r(p+1)	**?**

Fonte: os autores (2022)

c) Terceira constatação

Uma terceira constatação observada na simulação da 1ª jogada de uma partida, foi por exemplo, a ilustrada no Quadro 13, para $n = 5$ e $p = 2$, cuja análise da simulação indicou que, a diferença $d = 5$ de casas a percorrer de onde se finaliza a jogada f à casa i onde se iniciou relaciona-se com o número de dados p e o resto r da divisão de $2n$ por $p + 1$ da seguinte forma: $d = 5 = 2 + 1 \times (2 + 1)$, o que equivale genericamente a $d = p + r(p + 1)$. Esta constatação é verificada também para outros valores de n e p, sempre que $p + 1$ não é divisível por $2n$ e $p + r(p + 1) < 2n$. No Quadro 13, pode-se observar essa regularidade para $n = 7, 9$ e $p = 3$, $n = 8, 14$ e $p = 2, 4$, $n = 10$ e $p = 5$, $n = 11$ e $p = 2, 3, 4$, $n = 16$ e $p = 4$.

Entretanto, para $n = 9$ e $p = 4$, $n = 12$ e $p = 6$, $n = 14$ e $p = 5$ verificou-se que $d \neq p + r(p + 1) \geq 2n$. No caso, foi notado que $d = p + r(p + 1) - 2kn$, com $k \in IN$. Com estas observações e análise, foi deduzido que:

> Considere uma partida de Ntxuva, realizada em um tabuleiro do tipo $4 \times n$ em que na configuração inicial cada casa é preenchida por p dados. $\forall n, p \in IN$, se $\exists k, r \in IN^* | \; 2n - k(p + 1) = r \wedge 0 < r < p$, sempre que $2n \geq p + 1$, então:
>
> i) $f = i + p + r(p + 1)$ se $i + p + r(p + 1) < 2n$
>
> ii) $f \Leftrightarrow f' = i + p + r(p + 1) - 2n \times k$, com $k \in IN^*$ se $i + p + r(p + 1) \geq 2n$

Teoricamente podemos dizer que essa relação funciona sempre, nas condições dadas, pelo seguinte facto: considerando a volta completa que se dá para se sair de i a f, em uma rodada com alternância de 0 e $p + 1$ e, seja $i, \; i + p, \; i + p + (p + 1), i + p + 2(p + 1), \ldots, i + p + \; (k - 1)(p + 1)$ os movimentos sucessivos que se efetuam para alcançar a próxima casa onde a movimentação, hipoteticamente para, mas continua pelo facto da casa não estar vazia, assegura-se a propriedade:

$$2n = p + (k - 1)(p + 1) + 1 + r$$

Em que k representa o número de movimentos (não completo, ou seja, até a primeira volta para onde se distribui sucessivamente $p + 1$ dados). Designamos $j =$

$i + p + (k-1)(p+1)$ e substituímos nela $2n$ teremos: $j = i + p + (k-1)(p+1) + 1 + r - 1 - r = i + 2n - 1 - r$.

A partir de j temos que distribuir $p+1$ dados. De j a $i + 2n - 1$, distribuímos r dados, isto é, $(2n-1) - j$ e ainda sobram $p + 1 - r$ dados para distribuir entre i e $i + p - r$. Como $r > 0$, $p - r < p$, ou seja, na casa $j' = i + p - r$ obtemos p+2 dados, sendo $i + p - j' = r$. O próximo 0 será em $j'' = j' + p + 2 = i + p - r + p + 2 = i + p + (p+1) - (r-1)$. Se $r = 1$, o caso final é $i + p + (p+1)$. Caso contrário, distribuímos (p+2) dado de j'' a $J'' + p + 2 = i + p + p + p + 1 - (r-1) + p + 2 = i + p + 2(p+1) - (r-2)$. Se $r = 2$, a caixa final é $j'' = i + p + 2(p+1)$.

Aqui, o que deve ser compreendido é que a distância entre o 0 da segunda volta e o 0 da primeira volta diminui 1 de cada vez que são distribuídos $p+2$ dados (em vez de $p+1$ na primeira volta). Depois será finalmente 0 para r distribuições de $(p+2)$ dados. O jogo para em $i + p + r(p+1)$.

Nota: embora tenhamos chegado a essa premissa, ao longo das simulações destacamos alguns contra exemplos ilustrados no Quadro 13 para $n = 11, 16$ e $p = 5$, $n = 14$ e $p = 7$, que a partir da prática real com o jogo Ntxuva, nos levaram a redefinir algumas das deduções apresentadas, com vista a descrever uma premissa mais generalizada sobre a identificação da casa por onde se finaliza a primeira jogada de uma partida de jogo Ntxuva, que é apresentado na alínea d).

d) Identificação da casa onde se finaliza (f) a 1ª jogada de uma partida de Ntxuva iniciada na casa i

Nas alíneas a) b) c) do subponto 8.4 apresentou-se algumas premissas que nos permitem compreender como identificar a casa por onde a 1ª jogada, iniciada na casa i é finalizada. Nesta alínea, apresenta-se uma compilação das mesmas, com intuito de apresentar uma relação que permita descrever as condições que permitem e, as restrições que impedem a identificação da casa por onde a 1ª jogada de uma partida de Ntxuva finalizará.

No capitulo 7 destacou-se que o jogo Ntxuva é diverso na extensão e modalidade. Entre sua diversidade se destaca o número de dados que é colocado em cada casa para compor a configuração inicial do tabuleiro, que deve varia de 1 à p. Na prática, ou em maior parte dos casos da prática com o jogo Ntxuva, p se encontra no intervalo de 1 à 4, isto é, $1 \leq p \leq 4$. Raras vezes, se não nunca, os jogadores que praticam essa modalidade têm utilizado $p > 4$ para compor a configuração inicial do tabuleiro de Ntxuva. Até porque, quando p for demasiadamente grande, as casas ficam saturadas e dificulta o sistema de distribuição dos dados nas jogadas que o jogador vai efetuando.

Com base nesse preceito, e nas premissas apontadas nas alíneas a), b), c) do subponto 8.4, destacamos que, em um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$ e p o número de dados que compõem cada casa na configuração inicial do tabuleiro, a identificação da casa por onde uma jogada finalizará sabendo que se iniciou na casa i segue as seguintes condições e restrições:

1) p deve ser restrito nas seguintes condições:
   i) $1 \leq p \leq 4$, e com $p \in IN^*$;
   ii) $p \leq \frac{n}{2}$ se n for par, ou, $p \leq \frac{n-1}{2}$ se n for ímpar.
2) Nas condições de p dadas em 1), a casa f onde a 1ª jogada de uma partida iniciada na casa i finaliza é:

$$f = \begin{cases} i & se \quad r = p \\ i + p + r(p+1) & se \;\; i + p + r(+1) < 2n \\ i + p + r(p+1) - 2n \times k & se \;\; i + p + r(p+1) \geq 2n \end{cases}$$

.

7. PESQUISAS SOBRE NTXUVA: O QUE TEM SIDO ESTUDADO SOBRE SUA INTEGRAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA?

Na secção 5 nos propusemos a apresentar o jogo Ntxuva e sua caraterísticas, como forma de situar o leitor sobre a estrutura social do jogo. Na secção 6 foram apresentadas algumas potencialidades matemáticas que se podem explorar ou aplicar no contato e prática com o jogo Ntxuva. A construção destas duas secções, 5 e 6, para além de situar o leitor sobre o status social e possibilidades que o jogo pode oferecer para a preservação e o estudo de sua história e da África, bem como para exploração de conceitos e propriedades matemáticas, permitiu aos pesquisadores ampliar e potencializar seu conhecimento sobre o jogo, com vista a que se possa alcançar o objetivo principal da proposta desta tese, que é o da construção e implementação de uma OD para o ensino de “Progressão Aritmética” que integre a prática com o jogo Ntxuva.

Ainda assim, existindo pesquisas já realizadas no campo da Educação que integram o Ntxuva como potencial instrumento para o ensino, em particular, para o Ensino da Matemática, nesta secção, pretende-se identificar o cenário e descrever como estão as pesquisas relativas à integração do jogo Ntxuva, ou em geral, Mancala no ensino da Matemática. Objectiva-se com isso agregar mais uma base de conhecimento que permita ampliar, ainda mais, o nosso olhar sobre a OD que se pretende construir e apresentar na secção 8. No caso, procura-se a partir de dissertações e teses compreender como têm sido concebidas e implementadas situações de Ensino, em particular, de Ensino da Matemática através da integração do jogo Ntxuva, ou em geral, a família de jogos Mancala.

Para o alcance dos objectivos estabelecidos nesta secção nos apoiamos na abordagem da dialética de “questões e respostas” ou de “estudo e pesquisa”, “caracterizada pela busca genuína de respostas a uma questão Q_0, que gera outras questões dentro de uma comunidade de estudos que tem autonomia para decidir como e quando serão respondidas” (JUNIOR, CARVALHO, FARIAS, 2019; COSTA, ARLEGO, OTERO, 2015). Esta abordagem está no cerne do Sistema Didático $[S(X, Y, Q_o) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{♥}$, a posterior, Sistema de Estudo e Pesquisa, com $X = \emptyset$, isto é, $[S(\emptyset, Y, Q_o) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{♥}$.

Nesta abordagem, o(s) investigador(es) Y ao se debruçar(em) para estudar ou investigar sobre a questão norteadora Q_o, se (re)questiona(m) Q_i, com $i \neq 0$, buscando respostas R_i provisórias, que ao serem validadas por um meio M, o(s) leva(m) a uma relação não vazio com a Q_0, isto é, $R(Y, Q_0) \neq \emptyset$, construída a partir de um reportório de questões-respostas $[R(Y, Q_o) \hookrightarrow \{(Q_1, R_1), \ldots, (Q_i, R_i)\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Na busca por respostas R_i, o meio $M = \{R_1, \ldots, R_i, O_{i+1}, \ldots, O_j\}$ se torna indispensável, na medida em que é a fonte fundamental para que Y se adentre e busque nele as obras O_j, no caso, ferramentas diversas, teorias, montagens experimentais, praxeologias úteis para descodificar R_i e que possivelmente o levem a achar a resposta satisfatória $R^{\heartsuit}$ a Q_0 (CHEVALLARD, 2018b). Pela indissociabilidade por causa da relação que vem da evolução e/ou o enriquecimento do meio, fruto da "necessidade de se ter a disposição, para a elaboração de sucessivas respostas provisórias R_i, algumas respostas pré-estabelecidas acessíveis através da mídia (construções elaboradas para dar respostas a perguntas já elaboradas, talvez diferentes daquelas colocadas no processo de estudo)" (COSTA; ARLEGO; OTERO, 2015, p. 149, tradução nossa), nos ancoramos também na abordagem da dialética das "Mídias e Meios", que Chevallard descreve no seguinte:

> A palavra mídia designará aqui qualquer sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social para um determinado público: o "curso" do professor de matemática, um tratado de química, o diário de um apresentador de televisão, um jornal diário, um site da Internet, etc., estão sob o sistema de mídia nesse sentido. Um meio é entendido aqui em um sentido próximo ao meio adidático na teoria das situações didácticas. Com efeito, designaremos como meio qualquer sistema que possa ser considerado desprovido de intenção na resposta que possa trazer, de forma explícita ou implícita, a uma questão tão determinada. O sistema considerado, então, comporta-se a esse respeito como um fragmento da "natureza". Em contrapartida, no que diz respeito a muitas das questões que lhes pretendemos colocar, os meios de comunicação são geralmente movidos por uma determinada intenção, por exemplo, a intenção de "informar". É claro que uma mídia pode, em relação a uma questão específica, ser considerado um meio e ser usado como tal. (CHEVALLARD, 2007a, p. 1, 2007b, p. 40, tradução nossa).

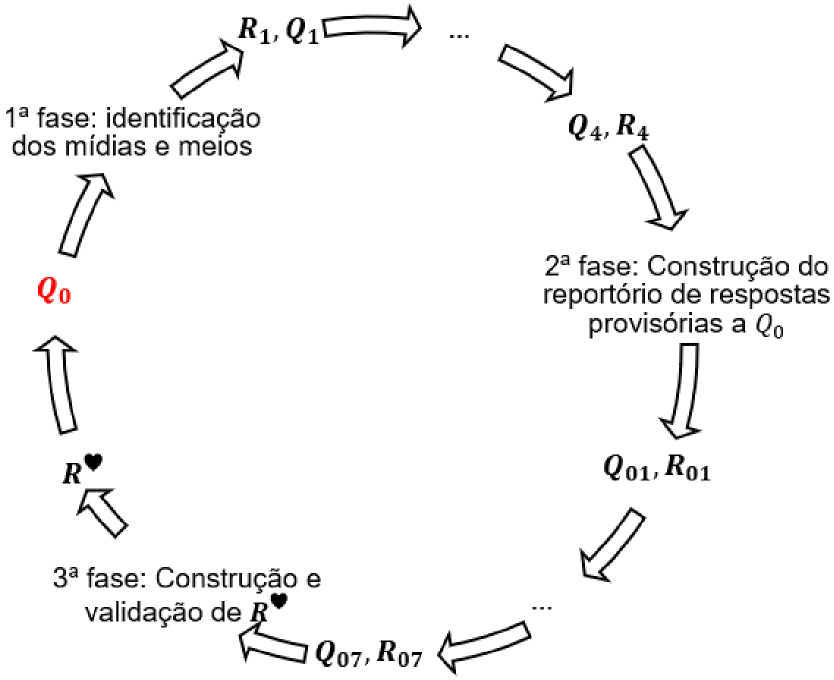
Portanto, é a partir dos Mídias e Meios que Y busca respostas para responder as questões que são geradas pela necessidade de apresentar uma resposta satisfatória a Q_0, complementando e preenchendo o seu reportório de questões-respostas. Assim, de acordo com os objectivos desta secção, o estudo se direcionará com base na seguinte questão norteadora: Q_o – *como têm sido concebidas e implementadas as organizações didácticas que integram a família de jogos Mancala, ou em particular, o Ntxuva como uma ferramenta potencial para ensino da Matemática?*

7.1. IDENTIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DO REPORTÓRIO DAS MÍDIAS E MEIOS UTILIZADOS PARA RESPONDER A Q_0

Em busca de uma resposta genuína a Q_0, nesta abordagem metodológica que contempla a dialética de "questões e respostas" e das "mídias e meios", três fases foram consideradas: a primeira, que será descrita nesta subsecção, a identificação e construção do reportório das mídias e meios utilizados para responder a Q_0, através das questões respostas (Q_i, R_i); a segunda, a construção do reportório de respostas provisórias R_{0i}, as questões Q_{0i}, isto é, (Q_{0i}, R_{0i}), acessadas a partir das mídias e meios identificados na 1ª fase e, a terceira fase, a construção e validação da resposta satisfatória $R^{♥}$, que responde a Q_0 – $(Q_0, R^{♥})$. O esquema a seguir, que se apresenta na Figura 70 resume o processo de busca por respostas, que gera novas questões, que nos fazem buscar por respostas que nos aproximem de uma resposta a Q_0.

$$Q_0 \to \{(Q_i, R_i)\} \to \{(Q_{0i}, R_{0i})\} \to (Q_0, R^{♥})$$

Figura 70: Mapa ilustrativo do percurso metodológico na base da abordagem da dialética "estudo e pesquisa" e "mídia e meios"



Fonte: os Autores (2022)

Assim, para identificação e construção do reportório das mídias e meios com vista a alcançar uma resposta satisfatória a Q_0, seguiu-se o seguinte roteiro de questões e respostas – $Q_0 \to \{(Q_i, R_i)\} = \{(Q_1, R_1), (Q_2, R_2), (Q_3, R_3), (Q_4, R_4)\} \ldots$, a seguir descritas:

Q_1 – *Em que pesquisas foram observadas e analisadas as organizações didáticas que integram o Ntxuva como ferramenta de ensino?* R_1 – Dissertações e teses.

Q_2 – *Em que mídias e que descritores foram utilizados para achar as teses e dissertações?* R_2 – As dissertações e teses foram achadas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[28], no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES[29] e no Google Acadêmico. O Google Acadêmico foi uma opção para obter dissertações e teses identificadas na BDTD e no catálogo da CAPES, mas que não estavam disponíveis para baixar. Para identificação delas, foram utilizados os seguintes descritores: Mancala, Ntxuva e Ntchuva. Entretanto, só foram achadas dissertações e teses com base no descritor "Mancala" e o acesso a essas bases foi feita até ao dia 27/05/2022.

Q_3 – *Quantas dissertações e teses foram achadas com base nos descritores utilizados e de que período correspondem as produções?* R_3 – Foram identificados 16 trabalhos, entre eles, 15 dissertações e 01 tese, produzidas no período compreendido entre 2006 e 2019. No Anexo 6 é apresentado a relação das Dissertações e Teses identificadas.

Q_4 – *Dos trabalhos identificados, quantos foram incluídos e excluídos para análise e, que critérios de inclusão e exclusão foram utilizados?* R_4 – Foram incluídos para análise 6 trabalhos, todos eles do tipo dissertação, desenvolvidas para as áreas de psicologia, educação e educação matemática, catalogadas no Quadro 14.

Assim, foram incluídos trabalhos que em seu propósito, desenvolveram e ou implementaram uma proposta de ensino que integrasse o Mancala como potencial ferramenta de ensino. Na sequência, excluíram-se trabalhos que não atendiam os critérios apresentados, mas também, cuja proposta de pesquisa não se mostrou clara no que tange a construção de uma proposta de ensino e também, que não tenha usado exclusivamente o Mancala em sua proposta de pesquisa.

[28] A BDTD pode ser acessada por meio do link: https://bdtd.ibict.br/vufind/
[29] O Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES pode ser acessado por meio do link: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

Quadro 14: Relação de dissertações e teses que utilizam o Mancala como recurso exclusivo para o Ensino

Ano	Autor	Titulo	Tipo de Mancala	Banco de dado
2006	Daniela Dadalto Ambrozine Missawa	O jogo Mancala como instrumento de ampliação da compreensão das dificuldades de atenção	II	CAPES
2009	Dias Leticia Pires	A construção do conhecimento em crianças com dificuldades em matemática, utilizando o jogo de regras Mancala	II	BDTC
2011	Rinaldo Pevidor Pereira	O jogo africano Mancala e o ensino de matemática em face da lei Nº 10.639/03	II	CAPES
2016	Glaucia Bomfim Barbosa	O ensino de matemática através de jogos educativos africanos: um estudo de caso em uma turma de educação de jovens e adultos (eja) de uma escola municipal de Aracaju	II	CAPES
2016	Leonardo Dourado de Azevedo Neto	"vem jogar mais eu": mobilizando conhecimentos matemáticos por meio de adaptações do jogo Mankala Awalé	II	CAPES
2018	Vanessa Galhardo de C. V. de Oliveira	Mancala: um jogo de estratégia contribuindo para o aprendizado da matemática	II	CAPES

Fonte: os autores (2022)

7.2. INTEGRAÇÃO DO MANCALA AO ENSINO: UM OLHAR ACERCA DAS PROPOSTAS DE SITUAÇÕES DE ENSINO CONCEBIDAS E IMPLEMENTADAS A PARTIR DAS DISSERTAÇÕES E TESES

A partir das dissertações selecionadas na subsecção 7.1, cujas propostas de pesquisa tinham em vista a integração da família de jogos Mancala no ensino, buscamos nesta subsecção descrever e analisar como foram construídas e/ou implementadas as situações de ensino propostas. O principal objetivo é ampliar a nossa relação pedagógica-didática com o Jogo, diferentemente das secções 0 e 6, cujo foco era ampliar a nossa relação epistemológica, visitando as obras O_i (dissertações) para responder a Q_o.

Nesta sequência, a partir destes trabalhos buscamos construir o nosso reportório de questões e respostas $\dots\{(Q_{0i}, R_{0i})\} = \{(Q_{01}, R_{01}), \dots, (Q_{07}, R_{07})\}\dots$, que nos levaram a $(Q_0, R^{\heartsuit})$. Assim, procuramos nas teses identificar o seguinte:

$Q_{01} \rightarrow$ Que finalidade a pesquisa pretendia responder?

$Q_{02} \rightarrow$ Em que teoria e metodologia estavam ancoradas as situações de ensino construídas?

$Q_{03} \rightarrow$ Com que grupo alvo a situação foi implementada?

$Q_{04} \rightarrow$ Como foram concebidas ou organizadas as situações de ensino?

$Q_{05} \rightarrow$ Como foram implementadas as situações de ensino?

$Q_{06} \rightarrow$ Que conhecimentos foram discutidos ou mobilizados na implementação da situação?

$Q_{07} \rightarrow$ Como foram coletados e analisados os dados produzidos da implementação da situação?

Respondemos estes questionamentos acessando dissertação a dissertação do Quadro 14, a partir do qual descrevemos como foram construídas e implementadas as situações de ensino propostas.

Começamos por fazer a exposição das observações coletadas na Dissertação de Missawa (2006), cujo objetivo visava "avaliar a possibilidade de utilização do jogo Mancala, como uma forma de ampliar a compreensão acerca das dificuldades de atenção, seus sintomas e efeitos e para favorecer a construção de estratégias de diagnósticos dessa dificuldade" (MISSAWA, 2006, p. 48). A pesquisa foi virada para a área de psicologia e não tinha algum interesse na integração do Mancala para o ensino da Matemática. Ainda assim, interessou-nos verificar como foi delineada a oficina proposta para utilização do Mancala como instrumento de observação das dificuldades de atenção nas crianças com idade compreendida entre 9 e 11 anos.

Nesta pesquisa, utiliza-se o jogo Mancala II como fonte para coleta de dados. A actividade com o Mancala foi organizada em 7 oficinas, filmadas mediante o consentimento dos pais dos alunos. Participaram das oficinas como sujeitos de pesquisa 4 alunos escolhidos às cegas, sendo três da 4ª série e uma da 3ª série e, na prática com o Mancala foram organizados em dois grupos. De acordo com Missawa (2006, p. 53), "as oficinas iniciais ocorreram no primeiro tempo de aula e as finais, por solicitação da escola onde decorreu a actividade, ocorreram no horário do recreio".

Na 1ª oficina, foi apresentado aos participantes o jogo, mediante um protocolo de instrução (Anexo 7), que visa padronizar a forma de apresentação das regras do jogo para os participantes, fazendo com que isso não se converta em uma variável que pudesse ser capaz de modificar significativamente o resultado final da atividade" (MISSAWA, 2006). Os participantes jogaram com o pesquisador, depois que se percebeu que as regras tinham sido bem entendidas pelos participantes, foram realizadas partidas em duplas.

Da 2ª a 6ª oficina os participantes jogaram entre si num sistema de todos contra todos, na presença do pesquisador como observador e juiz das partidas. Para além de serem filmadas, as partidas foram registradas mediante um protocolo de registro das partidas (Anexo 8).

Na sétima e última oficina “foi apresentada aos participantes uma situação-problema sobre Mancala, inspirada por Macedo, Petty, Passos (2000), com a finalidade de observar a evolução dos participantes no que se refere a busca da melhor jogada possível” (MISSAWA, 2006, p. 56). De acordo com o autor, “as situações-problemas foram registradas em um protocolo, descrito de forma resumida no Quadro 15 ou com mais detalhes no Anexo 9.

Quadro 15: Protocolo de registro dos dados sobre a situação-problema.

<table>
<tr><td>1. Observe a situação ao lado. A partida será iniciada pelo jogador A. Qual a melhor casa para iniciar o jogo? Justifique.</td><td><table><tr><td></td><td></td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td rowspan="2">(0)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td rowspan="2">(0)</td></tr><tr><td>B</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2. O jogo está como mostra a situação ao lado.
a) Se você fosse o jogador A, em qual casa mexeria?
b) Suponha que o jogador A mexeu na casa 7 e ganhou, portanto, 3 sementes. O que o B poderia fazer para ganhar mais que essa quantia de sementes já na próxima vez?</td><td><table><tr><td></td><td></td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td rowspan="2">(1)</td><td>(4)</td><td>(4)</td><td>(0)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td rowspan="2">(0)</td></tr><tr><td>B</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td><td>(3)</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>3. Observe a figura ao lado.
a) Descreva a sequência de movimentos que o jogador A deve fazer para colocar o maior número de sementes em seu oásis.
b) Quantas sementes ganhou?</td><td><table><tr><td></td><td></td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td rowspan="2">(9)</td><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(0)</td><td>(0)</td><td>(0)</td><td rowspan="2">(13)</td></tr><tr><td>B</td><td>(0)</td><td>(0)</td><td>(0)</td><td>(1)</td><td>(3)</td><td>(4)</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>4. Análise a situação ao lado e responda as questões a seguir:
a) Qual jogador você gostaria de ser? Justifique.
b) Suponhamos que A seja o próximo a jogar, descreva a sequência necessária para ele conseguir 12 sementes nesta jogada.</td><td><table><tr><td></td><td></td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td rowspan="2">(5)</td><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(10)</td><td>(3)</td><td>(0)</td><td>(0)</td><td rowspan="2">(3)</td></tr><tr><td>B</td><td>(1)</td><td>(1)</td><td>(0)</td><td>(2)</td><td>(1)</td><td>(7)</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Fonte: Missawa (2006, p. 101)

Embora a pesquisa não tivesse um foco para investigação em Ensino da Matemática, os questionamentos propostos no protocolo levavam os sujeitos de pesquisa a refletir sobre conceitos e propriedades matemáticas, como por exemplo, o cálculo mental, as operações de adição e subtração, o conceito de chances, etc., mesmo que esse não fosse o olhar do pesquisador.

A segunda pesquisa explorada foi a dissertação de Pires (2009) cujo objectivo foi de “analisar as etapas de aquisição e do domínio dos aspectos referentes às regras e às estratégias do jogo Mancala, na modalidade designada Kalah, em crianças que apresentam dificuldades em matemática e em crianças que não apresentam dificuldades nessa área de conhecimento”. (PIRES, p. 75). A pesquisa foi vltada para a área de Educação, baseada na Teoria Psicogenética de Jean Piaget e, e tinha um interesse maior na integração do Mancala para o ensino da Matemática, como é descrito no resumo da Tese, ao se referir que:

> A fundamentação da tese era: identificar nos grupos de participantes os conhecimentos prévios relativos às operações aritméticas e noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo; analisar os erros relativos às regras e estratégias; analisar os argumentos apresentados nas sessões de intervenção e comparar a evolução de desempenho no jogo dos dois grupos de participantes. (PIRES, 2009, p. XV).

Nesta pesquisa, utilizou-se o Mancala II (Kalah) como fonte para coleta de dados. A experimentação foi feita em 7 sessões individuas com cada participante, duas vezes por semana, com tempo médio de 50 minutos cada uma e, para o registro dos dados foram feitas filmagens de todas as partidas feitas (PIRES, 2009). Os sujeitos de pesquisa foram alunos da 3ª ou 4ª série do ensino fundamental, de 9 a 10 anos de idade, que compuseram uma amostra de 24 unidades amostrais, selecionadas por indicação. Esta amostra foi dividida em dois grupos de 12 membros cada. “Um grupo foi composto por alunos com dificuldades em matemática e outro grupo com alunos que não demonstravam dificuldades nessa área de conhecimento. Pires (2009, p. 76).

Na 1ª sessão, foi apresentado o jogo aos participantes a partir de um protocolo sobre o jogo Mancala (Anexo 10). A seguir, foram propostas questões aos participantes com vista a verificar os conhecimentos prévios que tinham sobre as operações aritméticas e sobre a noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo (Anexo 11). Os participantes responderam as questões em papel. Quando não conseguiam responder, lhes eram disponibilizadas as peças do jogo e, para algumas questões, foi necessário anunciar algumas regras e praticar a movimentação das peças. Depois dos dois procedimentos anteriores, foi então partilhadas todas as regras de jogo. (PIRES, 2009).

Na 2ª sessão, foram anunciadas todas as regras do jogo e realizadas 4 partidas com a finalidade de aprendizagem do jogo. Da 3ª à 6ª sessão, foram realizadas duas partidas em cada encontro. Nestas sessões, foram colocadas em prática três questões de estilos e finalidades diferentes: questões de exploração, de planejamento e de justificação. Com estas questões, visava-se criar situações para maior reflexão dos participantes no que diz respeito ao domínio das regras, análise das possibilidades de ação e estratégias do jogo de acordo com um roteiro de intervenção adotado de Dias e Brenelli (2008) (Anexo 12). (PIRES, 2009).

Portanto, para a experimentação, nesta pesquisa foram utilizados três instrumentos fundamentes: O tabuleiro do Mancala II (Kalah) no qual foram realizadas as partidas, ao mesmo tempo que os participantes eram submetidos a responder vários formulários de questionamentos, como,

> O roteiro de questões sobre o conhecimento das operações aritméticas e noção de conservação das quantidades discretas implícitas no jogo Mancala-Kalah (Anexo 11), o formulário que contém a representação de 12 tabuleiros e também a indicação para o registro dos seguintes dados: nome do participante, data e número de cada partida (Anexo 13) e o roteiro de intervenção com o jogo Mancala-Kalah (Anexo 12) (PIRES, 2009).

A terceira pesquisa a ser explorada foi a dissertação de Pereira (2011). Nesta pesquisa visava-se "promover aprendizagem matemática e aprendizagem sobre história e cultura afro-brasileira como medida socioeducativa para intervenção nos conflitos étnico-raciais e para desconstrução do pressuposto de que a matemática é difícil" (PEREIRA, 2011, p. 22). Para alcançar este objetivo, o pesquisador constrói toda sua metodologia para intervenção em torno do jogo Awalé, uma variante da família de jogos Mancala II (Awalé), a partir do qual, com os alunos do 6º a 9º ano como seus sujeitos de pesquisa, "realizou observações em sala de aula sobre aprendizagem matemática e sobre as relações sociais em relação ao negro e sua cultura, aplicou questionários e realizou entrevistas semi-estruturadas para coleta de dados" (PEREIRA, 2011, p. 55).

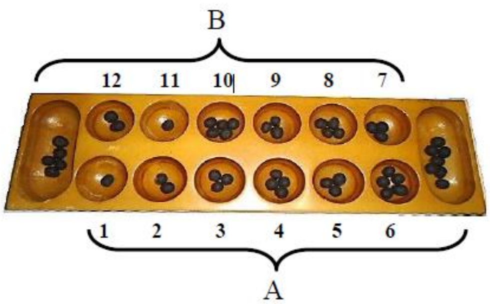
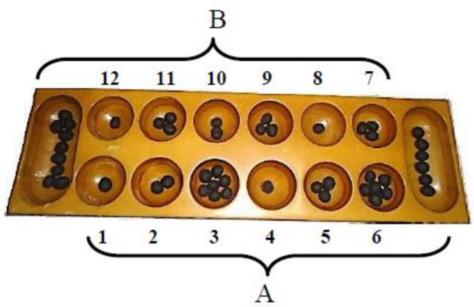
A pesquisa foi do tipo intervenção e procurou explorar duas vertentes pedagógicas: por um lado explorar conceitos e propriedades matemáticas através da compreensão da lógica da prática do jogo Awalé, a outra, discutir com os alunos sobre as questões relativas ao racismo nas relações étnicas na educação brasileira e explorar um pouco sobre a história e cultura africana e afro-brasileira através do jogo Awalé, como possibilidade de implementação da lei 10.639/03 no seio da matemática. Na descrição metodológica não são muito claras as diferentes fases da implementação, entretanto, a pesquisa foi desenvolvida entre 2007 e 2010 e estava ancorada no conceito de aprendizagem significativa da psicologia sob alçada de estudos etnomatemáticos.

De forma geral, o pesquisador implementou o jogo físico com os alunos, utilizando em primeira instância caixas de ovo como tabuleiro e as sementes de feijão como dados, mais tarde, foram adquiridos tabuleiros esculpidos em madeira. As estratégias de implementação consistiram na divisão dos alunos em grupos para investigação da história e lendas sobre o jogo e a árvore baobá[30] a partir da internet. Foram organizados círculos de debates, para discutir os achados dos alunos na internet. Houve também a formação de duplas para prática do jogo. Também foi praticado o jogo no formato online. Na transcrição a seguir, o autor elucida como se deu esse processo:

> [...] usamos sementes, pequenas pedras ou conchas como peças para jogar. Para a dinâmica de sala de aula, improvisei um tabuleiro a partir de caixa de ovos e sementes de feijão, aprendi a jogar, organizei as regras [...]. Em sala de aula, solicitei aos alunos que formassem duplas [....]. No dia seguinte, separamos o material, as duplas, escrevi as regras no quadro, desenhei um tabuleiro e a partir dele simulei uma partida para ensinar as regras do jogo para os alunos. (PEREIRA, 2011, p. 86)

Para trabalhar conceitos e propriedades matemáticas, a estratégias que o pesquisador utiliza é a simulação de jogo, para trabalhar a estratégia de estimativa, cálculo mental, raciocínio lógico, conceito de combinatória e probabilidade. A simulação do jogo é apresentada a partir de um projetor. No Quadro 16 é apresentado como foi descrita a situação.

Quadro 16: estratégias para exploração de conceitos e propriedades matemáticas

Estratégia para trabalhar estimativa, cálculo mental nas operações aritméticas e raciocínio lógico. Na situação do jogo ao lado, a melhor estratégia para o jogador (A) é captura ou defesa das sementes do tabuleiro?	
Estratégia para trabalhar conceito de probabilidade e porcentagem por intermédio do jogo Awalé. Para este caso, foi considerada a situação representada no tabuleiro abaixo em que todas as casas do tabuleiro possuem sementes e estão numeradas de 1 a 6 para o jogador (A), de 7 a 12 para o jogador (B). Nesta situação, o problema proposto para discussão foi: • O jogador (A) escolhe aleatoriamente um de seus buracos e efetua um movimento. Qual a probabilidade de haver uma captura de sementes com esse movimento. Como os alunos não tinham ainda noções sobre probabilidade, o pesquisador adoptou uma outra pergunta:	

[30] Para as regiões onde a árvore do baobá é abundante, como por exemplo a província de Tete onde a mesma é designada de imbondeiro, as suas sementes são utilizadas como peças para o jogo Ntxuva. Pra além disso, o fruto que é designado localmente por malambe é utilizado para preparar um yogurt afrodisíaco de malambe que as vezes os jogadores tomam enquanto jogam.

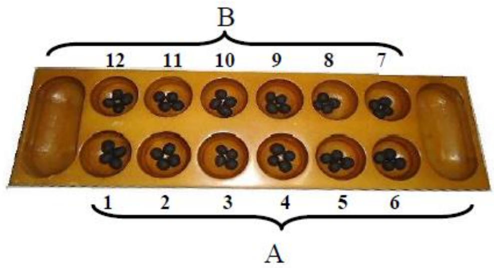
<table>
<tr><td colspan="2">

- Quantas possibilidades de movimento possui o jogador (A)?
- Pode ocorrer captura das sementes em qualquer movimento do jogador (A)?
- Quanto por cento de chances de captura possui o jogador (A) escolhendo um de seus seis buracos?

Esta última pergunta foi trabalhada com base nas respostas da pergunta anterior.
</td></tr>
<tr><td>

Estratégia para trabalhar análise combinatória

O objectivo nesta situação era para trabalhar a análise combinatória, entretanto, como o conteúdo não é tratado no ensino fundamental, o ensino no qual os sujeitos de pesquisa estavam inseridos, trabalhou-se uma situação do jogo que recaiu num problema de análise combinatória. Pela complexidade e extensão da situação, ela pode ser vista no Anexo 14.
</td><td>



</td></tr>
</table>

Fonte: Pereira (2011)

A quarta pesquisa que a ser explorada foi a dissertação de Barbosa (2016). A pesquisa de Barbosa objetivava “analisar de que maneira os jogos educativos da família Mancala, especificamente o “Ouri” interferem no processo de aprendizagem matemática (operações adição, subtração e multiplicação)” (BARBOSA, 2016, p. 15). A pesquisa foi delineada numa lente de estudos em Etnomatemática e visava a implementação de uma intervenção pedagógica em um estudo de caso com os alunos da Educação de Jovens e Adultos de uma unidade de ensino da rede pública do município de Aracaju/SE como os sujeitos de pesquisa.

De acordo com Barbosa (2016, p. 56), a atividade foi desenvolvida com base em uma sequência didáctica que integrou a família de jogos Mancala e, para coleta de dados foram adotados os seguintes instrumentos: diário de campo, entrevista semiestruturada, questionários, observações assistemática e sistemática e gravações de áudio. No texto não é bem claro como a sequência foi construída. Também, foram aplicados aos alunos exercícios para exploração de assuntos matemáticos abordados, mas não ligados à prática do jogo Mancala (Anexo 15). Estes exercícios serviram para avaliar a evolução dos alunos nos conceitos abordados, pois, percebe-se que estes exercícios foram tomados como pré-teste e pós-teste.

Antes da intervenção, realizou-se um primeiro encontro com os alunos, com vista a esclarecer os objectivos da pesquisa, coletar dados sobre a caraterização dos sujeitos de pesquisa. A turma para qual a sequência didáctica foi aplicada tinha 23 alunos, entretanto, devido a critérios como por exemplo, “pontualidade e a assiduidade, participação nas actividades, atitude de interesse e curiosidade frente ao jogo, foram escolhidos seis alunos que jogaram pelo menos quatro partidas de Ouri ao longo das aulas em que a sequência didáctica foi desenvolvida” (Barbosa, 2016,

p. 65). A sequência didáctica foi implementada em quatorze encontros (aulas), distribuídos em sete momentos, como é descrito no Quadro 17.

Quadro 17: Descrição dos encontros (aulas) para desenvolvimento da sequência didática

NÚMERO DA AULA	RESUMO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA
AULA 1	Apresentação da pesquisadora aos alunos
AULA 2	Explicação detalhada sobre a pesquisa e seus objectivos/entrevista com os alunos
AULAS 3, 4	Entrevista com os alunos
AULA 5	Conversa sobre o uso das operações básicas (adição, subtração e multiplicação) / Aplicação de exercícios sobre os conteúdos.
AULA 6	Apresentação do jogo “Ouri” e conversa sobre o Continente Africano.
AULA 7	Apresentação das regras do jogo “Ouri” / Familiarização com tabuleiro de madeira/ Roda de conversa sobre achados das curiosidades do jogo/ Oficina de construção do próprio tabuleiro.
AULAS 8, 9, 10, 11, 12, 13	Prática do jogo com a amostra da turma Prática do jogo e entrevista com os alunos.
AULA 14	Campeonato do jogo/Aplicação de exercícios após a intervenção.

Fonte: Barbosa (2016, p. 66)

De acordo com a autora, a intervenção propriamente dita ocorreu efetivamente entre as aulas 8 e 13. Entretanto, no texto não há um esclarecimento exaustivo sobre como foi construída esta intervenção e como foi implementada. No entanto, o relato a seguir, extraído da dissertação esclarece que:

> A pesquisadora apresentou o tabuleiro com as sementes e explicou detalhadamente aos participantes individualmente as regras do jogo. Em seguida, jogou diversas vezes com cada um dos alunos para que dominassem a prática do jogo, tirando todas as dúvidas e corrigindo os erros nas jogadas iniciais. Ao final de cada partida do jogo, a pesquisadora perguntava quantas sementes haviam em cada depósito, no intuito de praticar a adição e solicitava que dissessem também a diferença de sementes entre um depósito e outro, utilizando assim a subtração. Era solicitado também que multiplicassem as sementes da casa retirada com a casa que se colocava a última semente da jogada. (BARBOSA, 2016, p. 93-94).

Na prática com o jogo, durante a intervenção, a pesquisadora notou a presença nos alunos da realização do cálculo mental, antecipado em cada jogada efetuada, no sentido de prever a coleta de maior número possível de sementes (dados), para poder vencer o jogo. Outras operações presentes que a pesquisadora notou foram: a adição e subtração e muito pouco a multiplicação.

A quinta dissertação explorada foi a de Neto L. (2016). Nesta pesquisa o autor tinha como objetivo “analisar a mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental a partir de adaptações do jogo Mankala (Awalé)” (NETO L., 2016, p. 25). A abordagem na descrição dos objectivos e da metodologia é clara sobre a pretensão de integração do Mancala no ensino da Matemática. Entre os conteúdos, noções, etc. matemáticas que se pretendiam analisar estão: "contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo o conteúdo divisão de um número natural por meio do jogo adaptado" (NETO L., 2016, p. 25).

A pesquisa foi desenhada sob alçada da Teoria das Situações Didáticas e a experimentação didática foi baseada na Engenharia Didática, como é clarificado pelo pesquisador, ao se referir que:

> Tentando responder à questão de pesquisa, apresentamos [...] elementos da Teoria das Situações Didáticas que constitui o nosso referencial teórico. [....] Também apresentamos a Engenharia Didática [...], nosso referencial metodológico, que nos orienta na elaboração, aplicação e análise da nossa sequência de atividades. [...] A Engenharia Didática foi desenvolvida para analisar as situações didáticas, focando o sistema didático (aluno, professor, saber), em que incluem uma parte experimental utilizada para que o aluno tenha a possibilidade de apreender um conteúdo novo, ou simplesmente um elemento do mesmo" (NETO L., 2016, p. 27 e 33).

Assim, a pesquisa seguiu sendo construída obedecendo as quatro fases da Engenharia didática, nomeadamente, análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e da validação. Sob nosso interesse nesta secção, ao buscarmos explorar como foram construídas e implementadas a sequência de atividade nesta pesquisa, a partir de um olhar sobre o que o pesquisador designou de "a construção da base experimental, análises a priori e a posteriori".

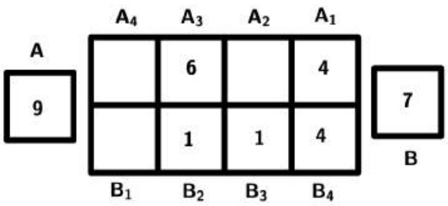
Destacamos que a experimentação ocorreu em cinco encontros, duas vezes por semana. Em cada um deles, foram colocadas aos sujeitos de pesquisa a realização de uma ou duas atividades. Antes destes encontros, houveram o que o autor designou de encontros pré-experimentação, nos quais o objetivo era de apresentar os objectivos de pesquisa, as regras do jogo e convidar os alunos a participar da pesquisa.

Os sujeitos de pesquisa foram organizados em duplas para praticar o jogo. O número de alunos foi variado em cada encontro, mediante a disponibilidade deles, em geral, a experimentação ocorreu com 4 alunos. Para integração do Mancala (Awalé), suas regras formam adaptadas (Anexo 16) para que o jogo pudesse corresponder às atividades propostas. As atividades estavam na sua maioria ligadas a práticas simuladas com o jogo Awalé, como é mostrado no Quadro 18.

Quadro 18: sequência de atividades propostas para mobilização do conhecimento matemático através da integração do Awalé como ferramenta de ensino

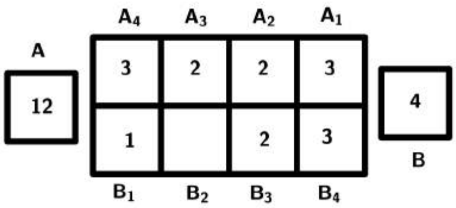
<table>
<tr><th>Encontros da fase de pré-experimentação</th></tr>
<tr><td>1º encontro: Foi realizado com os alunos do 5º ano. Neste encontro, fez-se a apresentação do projeto, depois, separou-se os alunos em duplas para iniciarem as partidas. No final do encontro, por causa da dinâmica, foram selecionados 8 alunos para continuarem nos encontros seguintes.</td></tr>
<tr><td>2º encontro: Foi realizado com os alunos do 6º ano. Também se fez a apresentação do jogo, onde participaram 19 alunos e no final do encontro, selecionados 8.</td></tr>
<tr><td>3º encontro: Não foi bem explícita a atividade realizada, entretanto, supõe-se que os alunos efetuaram algumas jogadas e no final do encontro, o pesquisador entregou para cada aluno um tabuleiro adaptado do jogo Mankala – Awalé e uma ficha contendo as regras com suas adaptações, para que os alunos pudessem jogar em casa.</td></tr>
<tr><th>Encontros da fase experimental</th></tr>
<tr><td>1º encontro: neste encontro foram disponibilizadas duas atividades aos alunos, uma de cada vez. As atividades envolviam momentos de uma partida entre dois jogadores A e B, simulada na configuração de um tabuleiro. Com estas atividades, visava-se explorar os movimentos de ataque e de defesa, havendo capturas ou não.

1ª atividade: Análise a situação abaixo, de um momento de uma partida entre os jogadores A e B, e responda às questões a seguir:



a) Qual jogador você gostaria de ser? Justifique.
b) Suponha que a distribuição das sementes fosse feita pelo jogador A. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.
c) E se fosse feita pelo jogador B. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.

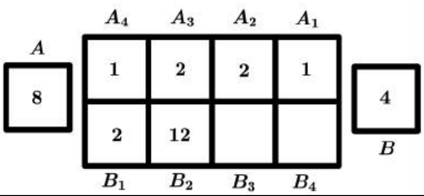
2ª atividade: Considere o jogo como está na situação ao lado:



Análise a situação e responda: “Se você fosse o jogador A, em qual recipiente mexeria? Por quê?”</td></tr>
<tr><td>2º encontro: neste encontro aplicou-se a 3ª atividade que foi a prática com o jogo. No caso, os alunos jogaram entre si e também tinham que registrar os momentos. O objetivo desse encontro era analisar as estratégias mobilizadas pelos alunos durante toda a partida e não somente em uma situação isolada como foi aplicado no primeiro encontro. Para isso, foram analisadas quatro partidas. Ainda assim, ao longo das jogadas, a pesquisadora foi fazendo questionamentos aos praticantes. Por exemplo:

Pesquisador: X, por que você realizou essa movimentação?
Pesquisador: E o que aconteceria se você tivesse começado do recipiente A4?
Pesquisador: E Y poderia capturar?
X e Y representam nomes dos alunos envolvidos na partida.</td></tr>
<tr><td>3º encontro: neste encontro, foram aplicadas duas atividades, a 4ª e a 5ª. Essas atividades envolviam momentos de uma partida entre os jogadores A e B e, tinham como objectivos encontrar os divisores de determinados números naturais e também explorar movimentos de ataque e de defesa havendo ou não capturas. Ambas foram realizadas individualmente. Diferentemente da 1ª atividade, aqui foram disponibilizados tabuleiros aos alunos para que pudessem acompanhar visualmente os movimentos das jogadas.

4ª atividade: Análise a situação abaixo, de um momento de uma partida entre os jogadores A e B, e responda às questões a seguir:

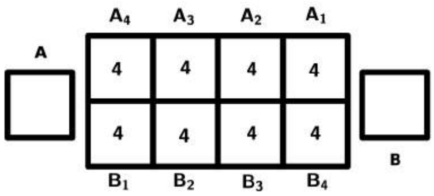


a) Suponha que a próxima jogada seja do jogador B. Ele escolheu o recipiente B2 para realizar a distribuição das</td></tr>
</table>

sementes. De quantas maneiras distintas o jogador B pode realizar a distribuição. Quais são essas maneiras?
*b) Se você fosse o jogador **B** qual das maneiras de distribuir as sementes você escolheria? Justifique.*

5ª atividade: Considere a situação inicial de uma partida entre os jogadores A e B, e responda às questões a seguir:

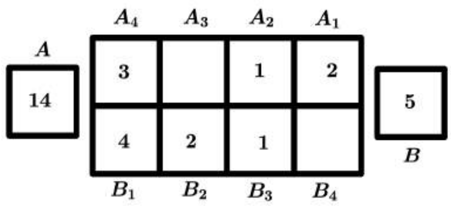
a) Qual a quantidade mínima de movimentos para que haja a primeira captura? Quantas sementes serão capturadas? Justifique.
b) Registre os movimentos até ocorrer a primeira captura.
c) Após ocorrer a primeira captura o próximo jogador também poderá capturar sementes? Justifique.
*d) Considere a situação inicial de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, escolha um dos jogadores **A** ou **B**. Qual o melhor recipiente para iniciar a partida? Justifique.*



4º encontro: neste encontro foram aplicadas duas actividades, a 6ª e 7ª. Essas actividades envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B** e, tinham como objectivo explorar movimentos de ataque e de defesa havendo ou não capturas.

*6ª sexta actividade: Represente no tabuleiro a seguinte situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda a questão a seguir:*

*Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.*



*7ª actividade: Elabore uma situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B** para o caso a seguir: "Próximo movimento será do jogador **A** e nessa jogada ele irá capturar 3 sementes. Justifique".*

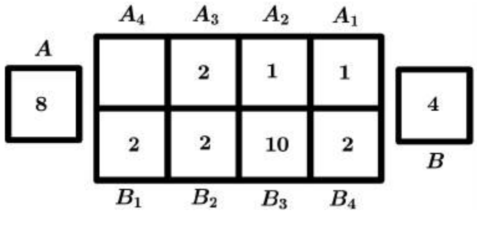
5º encontro: neste encontro foram aplicadas duas atividades, a 8ª e 9ª, que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores A e B.

Antes desse encontro, foi realizado um encontro extra que tinha como objetivo apresentar a regra que envolvia as capturas múltiplas. Na sequência, os alunos jogaram algumas partidas podendo realizar capturas múltiplas. Participaram do encontro todos os alunos sujeitos da pesquisa, que foram igualmente acompanhados pelo pesquisador.

As atividades do 5º encontro são:

*8ª atividade: Análise a seguinte situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda à questão a seguir:*

*Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.*



9ª atividade:
*a) Elabore uma situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B** em que o jogador **B** será o próximo a movimentar e nessa jogada ele irá capturar 5 sementes. Justifique.*
b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.

Fonte: Neto L. (2016)

Os dados dessa experimentação foram coletados por meio de filmagem (alguns encontros) e do registro que as alunas faziam à medida que resolviam a atividade, isto e, foram coletados os cadernos de anotação dos alunos. O pesquisador realiza uma análise a priori mostrando as respostas possíveis que poderiam emergir na implementação da sequência de atividades, depois, realizou uma análise a posteriori, fazendo depois uma confrontação entre o que fora preconizado como resposta e o que foi mobilizado pelos alunos no encontro com as atividades.

A sexta e última dissertação explorada foi a de Oliveira (2018). Nesta pesquisa o autor tinha como objetivo "reaproximar seus alunos às suas aulas de Matemática, além de promover uma atividade prazerosa no âmbito escolar, o que lhe fez pesquisar sobre jogos que estimulassem atividades ligadas à disciplina" (OLIVEIRA, 2018, p. 12). A pesquisa foi desenvolvida numa base de estudos em Etnomatemática, envolvendo uma experiência de ensino com alunos da 3ª série, desenvolvida em 5 etapas, como é mostrado no Quadro 19.

Quadro 19: experiência de ensino que integra o jogo Mancala II desenvolvida com alunos da 3ª série

Etapas	Atividades desenvolvidas
1ª etapa: Apresentação do jogo	Apresentação do jogo, desde o seu contexto histórico às regras, como a autora designou, um bate-papo sobre o que sabia sobre Mancala.
2ª etapa: Experiência	Realização de algumas partidas em duplas, a partir de tabuleiros feitos de caixas de ovos. As regras do jogo foram escritas no quadro.
3ª etapa: Confecção	Utilizando materiais recicláveis, incentivar os alunos a confeccionar os próprios tabuleiros. Um dos objectivos era fomentar nos alunos a conscientização ambiental, no reaproveitamento de materiais.
4ª etapa: Actividade escrita:	Aplicação de algumas perguntas escritas aos alunos, a partir de jogadas simuladas. O objetivo era de testar a capacidade dos alunos de abstrair as experiências matemáticas às quais foram submetidos.
5ª etapa: Coleta de dados:	Nesta etapa foram analisadas individualmente as respostas dos alunos que participaram na 4ª etapa. O objetivo era apurar os registros. Os resultados foram expressos em gráficos de barras e depois comentados.

Fonte: Oliveira (2016, p. 22-23)

Olhando a sequência das etapas mostradas no Quadro 19, a experiência de ensino nesta pesquisa começa com a apresentação do jogo aos alunos, uma apresentação que vai do contexto histórico até as regras do jogo. Conhecendo um pouco as regras, os alunos são divididos em duplas e colocados a realizar algumas partidas, para aprimorar as regras e depois, são submetidos a uma pequena oficina para aprender a confeccionar o tabuleiro do jogo, mediante suas caraterísticas. Nestas três primeiras etapas a pesquisadora não teve a pretensão de coletar quaisquer dados para análise, sendo isso reservado à 4ª etapa, em que foram aplicadas aos alunos, como a autora designa, "actividades escritas" (ver Anexo 17).

No caso, na 4ª etapa foi disponibilizada a “actividade escrita” aos alunos, tendo resolvido e entregue as anotações das respostas a pesquisadora. Na 5ª e última etapa, é feita a análise da actividade da 4ª etapa. Ao fazer-se essa análise, a pesquisadora apresenta antes de tudo, as respostas esperadas, depois, a partir da representação gráfica, apresenta as respostas dadas pelos alunos, apresentando algum comentário sobre estas respostas, finalizando a construção da dissertação.

7.3. COMO FORAM CONCEBIDAS E IMPLEMENTADAS AS ORGANIZAÇÕES QUE UTILIZAM A FAMÍLIA DE JOGOS MANCALA PARA O ENSINO?

Nesta subsecção buscamos descrever alguma síntese, a partir das respostas R_{oi} às questões intermediarias Q_{oi}, que possa ser uma possível resposta $R^{\heartsuit}$ a questão Q_0 delineada no início da secção 9: Q_o – *como têm sido concebidas e implementadas as organizações didácticas que integram a família de jogos Mancala, ou em particular, o Ntxuva como uma ferramenta potencial para ensino da Matemática?*

A partir da exploração das dissertações catalogadas no quadro 16, percebe-se que as situações de ensino, ou como vamos designar nesta tese de acordo com a TAD, organizações didácticas, são concebidas nas lentes teóricas e metodológicas da Psicologia, aprendizagem significativa, etnomatemática, teoria das situações didácticas, engenharia didáctica. Embora os trabalhos se subscrevam em lentes teóricas e metodológicas diferentes, há elementos que se assemelham na sua concepção e implementação.

Para realizar uma síntese sobre as caraterizações que compõem a concepção e implementação, iniciamos nos questionando: qual tem sido a intenção, ou ainda, o que estas situações têm pretendido responder? De acordo com os objectivos e finalidades descritas nas dissertações exploradas, as situações de ensino concebidas tem em vista desenvolver possibilidades de integração da família de jogo Mancala para o ensino da cultura e história africana e afro-brasileira, como uma forma de minimizar os conflitos étnico-raciais, através dos contos e histórias que giram em torno da origem, expansão e dos significados socioculturais ancorados aos movimentos que se efetuam na prática com o jogo.

Entretanto, como os Mancalas têm uma caraterística de ser um jogo de estratégias, sobretudo no que se refere aos processos de movimentação, que devem ser feitos de forma cuidadosa, por um lado para que o jogador possa capturar um número maior de dados ou eliminar primeiro o adversário, por outro lado, que as capturas realizadas permitam de certo modo, bloquear o adversário de modo que não possa ter chances de capturar muitos ou nenhum dado, a concepção de situações de ensino que integram o jogo tem tido um foco para trabalhar conceitos, propriedades, etc. matemáticas. Entre os conhecimentos matemáticos discutidos e mobilizados mediantes estas situações, estão os seguintes:

- Operações aritméticas: contagem; cálculo mental, ancorado a adição, subtração e multiplicação; simulação de jogadas;
- Combinatória e probabilidade: contagem; chances de realização de jogadas certas;
- Elaboração de conjunturas, envolvendo divisão de um numero natural por meio da adaptação do Mancala;
- Noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo;

Estas são as principais intenções que as situações de ensino proposta tem se encarregado de estudar e responder. Mas então, como é que as situações têm sido organizadas e implementadas, para que estas intenções sejam alcançadas? Muitas das vezes, as situações de ensino são organizadas em fases designadas de sessões ou encontros. Em cada uma das fases são desenvolvidas determinadas actividades, dependendo da intenção da pesquisa. Em geral, as fases incluem:

- A apresentação do projeto: nesta fase, que tem sido frequentemente a primeira, os pesquisadores têm se encarregado de apresentar os objectivos do projeto que os leva a trabalhar com o grupo alvo, aqueles que poderão ser os potenciais sujeitos de pesquisa. A partir dessa apresentação, de acordo com o interesse para envolvimento nas actividades decorrentes da implementação do projeto pedagógico, são selecionados ou indicados os sujeitos de pesquisa. Que pela natureza, são alguns de escolas de níveis diversos.
- Apresentação do jogo: nesta fase, que as vezes tem sido confundida com a primeira ou segunda, os pesquisadores têm se debruçado em apresentar o jogo, a partir dos seus aspectos históricos, quem vêm a si ligar com as questões históricas e culturais africana e afro-brasileira. Tem sido um momento em que se pretende valorizar a cultura, a história africana e afro-brasileira que fora

invisibilizada a partir de um processo histórico de colonização, escravatura, etc. associadas as questões étnicas-raciais.

- Realização das partidas: nesta fase, os pesquisadores têm se debruçado em apresentar as regras do jogo aos sujeitos de pesquisa e realizar algumas partidas. Pela variedade do jogo na sua expansão e facilidade de adaptação, algumas regras são (re)adaptadas para dar conta dos objetivos de ensino propostos para a pesquisa, como é o caso das regras adaptadas na dissertação de Neto (2016). Dependendo da complexidade do entendimento das regras, podem ocorrer várias fases de modo que as regras fiquem consolidadas. Dependente do número das unidades amostrais, o pesquisador às vezes procurar realizar no início jogadas com cada sujeito de pesquisa e depois, organiza os jogadores em duplas, que podem variar ou não em cada prática, de modo que possam jogar e praticar entre estudantes. O pesquisador pode fazer questionamentos e registrar as respostas ao longo das jogadas.
- Aplicação de atividades: esta fase pode ocorrer em vários encontros, dependente da complexidade das atividades a serem aplicadas. Aqui, os pesquisadores muitas das vezes se debruçam na implementação de atividades de estudo e pesquisa, embora na prática não designem assim. Estas atividades, que tem sido mais de caráter de exploração e/ou mobilização do conhecimento matemático, são concebidas baseando-se na interpretação de jogadas simuladas em papel. No Quadro 15, Quadro 16, Quadro 18 são mostradas algumas atividades desenvolvidas nas dissertações de Missawa (2006), Pereira (2011), Neto L. (2016). Também, nos Anexo 14, Anexo 15 e Anexo 17 podem ser encontradas atividades desenvolvidas na implementação das situações de ensino nas teses de Pereira (2011), Barbosa (2016) e Oliveira (2018).
- Realização de entrevista/inquérito com sujeitos de pesquisa: esta tem sido uma das últimas ou penúltimas fases. Com base em um formulário, os pesquisadores procuram muitas das vezes realizar uma entrevista ou um inquérito aos sujeitos de pesquisa para avaliar o trabalho que foi realizado com a integração do jogo Mancala.
- Coleta e apresentação de dados: esta não é necessariamente uma fase da implementação da situação de ensino, mas sim, uma atividade que ocorre em quase todas as fases descritas acima. Aqui, o pesquisador se debruça no

processo de coleta e apresentação da informação, cujo instrumento varia de acordo com a atividade desenvolvida em cada fase descrita acima. De uma forma geral, são utilizados para coleta de dados alguns dos seguintes técnicas e instrumentos: filmagens, captura de fotografias, gravação de áudio; entrevista semi-estruturada; questionários; anotações das resoluções das atividades; diário de campo; observações assistemática e sistemática; registro das interpretações das simulações de jogadas; realização de pré-teste e pós-teste.

Portanto, o delineamento e implementação de situação de ensino que integre o Mancala como ferramenta de ensino, de acordo com as descrições das teses listadas no Quadro 14, têm sido realizados como é descrito na síntese que se acaba de apresentar. Na secção que segue, secção 8, com base nos conhecimentos construídos sobre o Mancala nas secções 0, 6, 7, apresentaremos a proposta da organização didática que se pretende desenvolver nesta pesquisa.

PARTE 7: CONCEPÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

Esta parte inclui duas secções, 8 e 9. Na secção 8 apresenta-se a OD pelo qual se tenciona estudar como os alunos da 12ª classe do SNE modelagem o conhecimento matemático na sua interação com o jogo Ntxuva. Na sequência, realiza-se uma análise a priori, mostrando-se como a partir dessa OD os alunos poderão desenvolver seu raciocínio diante do problema que lhes é colocado sobre o jogo. Na secção 9, se apresenta e analisar os resultados obtidos a partir da experimentação desta OD com alunos da 12ª classe do SNE – Moçambique. Aqui, faz-se também uma análise a posteriori e avaliação das organizações praxeológicas pontuais que emergem do encontro dos alunos com as diversas tarefas.

8. CONSTRUÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

No quadro da proposta dessa tese, nesta secção objetivamos descrever a Organização Didática (OD) que será experimentada com alunos da 12ª classe. Iniciamos explicando como será a estrutura da OD, depois, descrevemos as sucessivas fases que acompanharam a experimentação.

8.1. A ESTRUTURA DA OD E O ENCONTRO DO SUJEITO DE PESQUISA COM A OD

Na subsecção 2.3.3, destacamos que a noção de OD refere-se à Organização Praxeológica relativa a uma atividade de ordem didática, a estrutura de conhecimento sobre a atividade didática, ou seja, "as formas possíveis de organizar o processo de ensino-aprendizagem de uma disciplina em uma instituição de ensino específica" (GASCÓN, 2003, p. 19, tradução nossa). Nesta pesquisa, a OD foi concebida em termos de Actividade de Estudo e Pesquisa (AEP) que, de acordo com Chevallard e Stromskarg (2022, p. 33) "consiste no estudo de uma questão Q, que, realizada sob certas condições e sob certas restrições, vai fazer encontrar uma obra[31] O normalmente determinada de antemão".

Em um Sistema Didático $[S(X, Y, Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R$, a implementação de uma AEP demanda a adaptação de Q a uma situação de estudo direcionada e especifica, ou melhor, Y deverá conceber Q de modo que, ao leva-la para X possa gerar uma situação de estudo programada sobre um tema específico ou pontual. Portanto, como se refere Chevallard (2009), "a AEP pressupõe uma infra-estrutural matemática[32] adaptada localmente, geralmente parcialmente a ser criada".

Assim, a AEP como qualquer OD, "é articulada em tipos de tarefas (geralmente cooperativas), em técnicas, em tecnologias, em teorias. Mas como descrever essa organização? Por exemplo, quais são os principais tipos de tarefas?" (CHEVALLARD, 1998b, p. 19, tradução nossa). Para responder este questionamento, Chevallard explica que:

> A AEP pelo qual o Organização Matemática Especifica ou pontual (OMP) $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ será concebida para a turma, deve, antes de tudo, motivar o tipo de

[31] Chevallard e Stromskarg (2022, p. 27) salientam que a obra no sentido em que é referenciada refere-se a qualquer entidade criada pelo homem. No sentido a que utilizamos neste parágrafo, ressignificamos ao conteúdo de aprendizagem e/ou o objeto didático.
[32] Referimo-nos a "infraestrutural matemática" por se tratar de modelação de AEP para o ensino da Matemática.

> tarefas T, apresentando pelo menos uma de suas razões de ser. O esquema geral que permite esta motivação é: escolher uma tarefa de um tipo familiar ao aluno, mas cuja realização segundo uma determinada técnica leva este a encontrar uma determinada dificuldade, uma tarefa problemática $t^* \in T^*$, que a realização de uma tarefa $t \in T$ possibilitaria a superação. O tipo de tarefas T surge assim como permitindo realizar tarefas do tipo T^*: T^* motiva T, para o qual aparece então como razão de ser. (CHEVALLARD, 2009, p.7, tradução nossa).

Para exemplificar, Chevallard (2009) descreve um esboço de uma AEP, constituída em um tipo de tarefa T^*, que consiste em realizar uma divisão (em IN*). A tarefa é apresentada nos seguintes termos:

> - A tarefa t^* aqui, não é da responsabilidade do aluno, mas sim de uma personagem evocada pela Afirmação: “Um agricultor deve enviar um lote de 250 ovos em caixas que possam conter 6 ovos cada”;
> - Também é *evocada* a *dificuldade* que surge diante do personagem evocado – aqui, o camponês – na realização de t^*: “quantas caixas este camponês deve obter?”. O autor sinaliza que, responder a essa pergunta equivale a realizar uma tarefa do tipo T*: “Determinar o número *N* de caixas que podem conter *n* objetos de um determinado tipo para que nelas possamos armazenar *m* objetos desse tipo”;
> - O tipo de tarefa T* é suposto ser *problemático* para a personagem evocada, mas também – e sobretudo – *para os alunos;*
> - O trabalho então solicitado *à turma, sob a direção do professor,* é a criação de uma OMP do tipo $[T^*, \tau^*, \theta^*, \Theta^*]$, a técnica τ^* impondo a realização *de uma tarefa como* T (uma divisão), e portanto o desenvolvimento de um OMP $[T, \tau, \theta, \Theta]$: no exemplo dado, temos $N = \left[\frac{m}{n}\right] + 1 = \left[\frac{250}{6}\right] + 1 = 41 + 1 = 42$. (CHEVALLARD, 2009, p. 7, tradução nossa).

Portanto, o encontro de X com a tarefa decorrente da AEP proposta, deverá levá-lo à necessidade de enfrentar uma questão Q, que lhe faça refletir sobre: “como realizar, de forma inteligível e justificada, as tarefas t^* de um certo tipo de T^*? Portanto, a questão Q é de acordo com Chevalard, nestas condições, o princípio de uma determinada AEP” (CHEVALLARD, 2009). Entretanto, enfrentar Q decorre de um processo no qual X enfrentará determinadas situações que o levam a alcançar uma resposta. Chevallard (1998b) designa estas situações de “momentos de estudo ou momentos didáticos, que se refere à aparência estrutural e temporal do processo de estudo”, que é delineada em seis momentos, nomeadamente:

> 1º – O encontro com a organização O que é o objecto de estudo → consiste em encontrar O através de pelo menos um dos tipos de tarefas T_i que constituem O. Mas o que é encontrado? A questão da identidade do objecto, que merece ser examinada;
> 2º – A exploração do tipo de tarefas T_i e o desenvolvimento de uma técnica relacionada a esse tipo de tarefas → trata-se do momento onde se estabelece a dialética “estudo de problemas e desenvolvimento de técnicas”, expressa no seguinte sentido: estudar problemas é um meio de criar e desenvolver uma

> técnica para problemas do mesmo tipo, uma técnica que será então o meio de resolver problemas deste tipo;
> 3º – A constituição do ambiente tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ relativo a τ_i → trata-se de uma continuidade do 1º e 2º momento, pois, desde o primeiro encontro com a organização, existe uma ligação com o ambiente teórico-tecnológico previamente desenvolvido, ou com as sementes de um ambiente a ser criado, que se tornará mais clara numa relação dialética com a emergência da técnica. É importante sinalizar que, este momento não é essencialmente cronológico, pode, no entanto, aparecer antes do primeiro encontro com a o tipo de tarefa.
> 4º – O trabalho sobre a técnica → trata-se do momento em que se deve trabalhar para melhorar a técnica tornando-a mais eficiente e fiável, como aumentar o domínio da mesma.
> 5º – A institucionalização → trata-se do momento em que se especifica a organização matemática trabalhada, distinguindo por um lado, os elementos que, tendo contribuindo para a sua construção, não serão comtemplados nela, por outro lado, os elementos que serão definitivamente incluídos na organização matemática pretendida.
> 6º – A avaliação → trata-se do momento complementar ao da institucionalização em que se faz o balanço, ou melhor, a reflexão que leva a examinar o valor do que foi mobilizado ou aprendido, a partir de determinados critérios. (CHEVALLARD, 1998b, p. 20 – 22).

A partir dos elementos elucidados nesta subsecção, na subsecção 8.2 apresentamos a concepção da AEP que será desenvolvida com os alunos da 12ª classe do SNE – Moçambique, com a qual se pretende analisar como os alunos mobilizam conhecimentos matemáticos diversos quando se integração o jogo Ntxuva ao Ensino.

8.2. DESCRIÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS AEPS QUE INTEGRA O NTXUVA NO PROCESSO DE ESTUDO DA NOÇÃO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Como será descrita a AEP?

A AEP que apresentamos é descrita em 3 fases, designadamente: fase pré-experimental, fase experimental e fase pós-experimental. Cada uma das fases incorpora actividades específicas. A fase pré-experimental visa familiarizar os sujeitos de pesquisa no ambiente da proposta de trabalho. A fase experimental visa o encontro e exploração das situações-problemas que é desenvolvida a partir de uma prática simulada com o jogo Ntxuva. A fase pós-experimental tem em vista a análise das produções coletadas após a experimentação.

A fase experimental incorpora os primeiros cinco momentos de estudo propostos por Chevallard (1998b), em que propõe a modelização do conhecimento, designadamente: o encontro com a organização, no caso, o encontro com as AEP; a exploração do tipo de tarefas T_i e o desenvolvimento de uma técnica relacionada a esse tipo de tarefas; a constituição do ambiente tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ relativo a τ_i; o trabalho sobre a técnica e a institucionalização. A fase pós-experimental incorpora a sexto momento de estudo, a que Chevallard (1998b) designa de momento de avaliação.

Na subsecção 8.2.1 apresentamos o desenvolvimento das fases de estudo para a experimentação.

8.2.1. Informações gerais sobre a implementação do experimento

Constituem sujeitos para implementação da experimentação alunos da 12ª classe, que em média possuem 18 anos, a contar a partir da idade mínima de 6 anos para ingresso ao ensino primário (MOÇAMBIQUE, 2018). Os alunos serão selecionados por voluntariedade. Participarão da experimentação 12 alunos, escolhidos por voluntariedade de várias turmas, um tamanho significativo para amostra qualitativa, que nos permitirá realizar a produção e coleta de dados de forma mais exaustiva, buscando coletar com fidelidade o maior número de informação, uma que a pesquisa é qualitativa, sem objetivo quantitativo baseada em experimentação em larga escala.

8.2.2. Descrição da fase pré-experimental

A fase pré-experimental inicia-se com a apresentação do pesquisador a Escola Secundária de Zóbuè, de onde foi familiarizado à proposta de trabalho com a Direção da escola e posteriormente o coletivo de Professores de Matemática. A partir do encontro com o coletivo de Professores de Matemática foi indicado um professor de Matemática que leciona a 12ª classe com o qual trabalhamos a proposta e que colaborou na indicação dos participantes da pesquisa, muitos deles seus alunos e, na implementação da proposta de actividades.

Nesta fase, haverá três encontros com os praticantes da pesquisa, que passamos a descrever e explicar a seguir.

a) 1º Encontro: Aplicação de questionário preliminar aos participantes

Neste encontro será aplicado um questionário preliminar aos alunos (ver Apêndice 2). Objectiva-se coletar informações que permitam aferir o nível de conhecimento que os participantes têm sobre o jogo Ntxuva, antes do contato com o jogo no processo de experimentação, ou simplesmente, para analisar qual é a relação inicial dos participantes com o jogo, isto é, $R_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL})$, a relação que é esclarecido na subsecção 2.4.3. Aqui, SL representa o jogo Ntxuva. Para além dos dados particulares dos participantes, o questionário é constituído de perguntas abertas que permitam explorar de forma livre o ponto de vista dos participantes.

O que se espera da actividade realizada do 1º encontro?

Esta actividade é dependente das respostas que os participantes fornecerão no questionário. Considerado que o jogo Ntxuva é praticado em todo território moçambicano, embora com designações e possivelmente regras diferentes, espera-se que os sujeitos de pesquisa demostrem o mínimo conhecimento sobre o jogo e sua prática, pelo menos a nível local, isto é, que a relação com o jogo Ntxuva não seja essencialmente vazia.

Relativamente à utilização do jogo em ambiente escolar, como meio que possibilite mobilizar diferentes conhecimentos para aprendizagem dos alunos, é esperado em grande medida que os participantes não tenham tido contato com o jogo em ambiente de sala de aulas ou para uma proposta de ensino.

b) 2º Encontro: apresentação do jogo Mancala

Este encontro é realizado depois que for administrado o questionário. Nele, objectiva-se apresentar aos sujeitos de pesquisa, o jogo Mancala, a partir do contexto histórico, desde a origem, a expansão e a natureza relativo as diferentes designações e tipos. Esta exposição, dialogada, visa na essência cobrir as lacunas em relação ao nível de conhecimento inicial que os participantes poderão demonstrar após responderem o questionário aplicado no primeiro encontro. A discussão é baseada no resumo sobre as descrições apresentadas no corpo do texto da Tese, especificamente secção 7. O resumo das descrições também foi impresso e entregue aos alunos para acompanhamento da exposição e leitura em casa.

Embora se tenha apurado dados a partir do questionário sobre o nível de conhecimentos que os participantes têm sobre o jogo Ntxuva, o investigador inicia questionando os sujeitos de pesquisa se conhecem o jogo Ntxuva, evocando outros nomes, utilizados na província de Tete (local de pesquisa) para designar o Ntxuva, como “Bao” e “Ntsolo”, com a finalidade de provocar uma breve discussão em torno do que os alunos sabem sobre o jogo. Ao longo da discussão, o investigador mostrará o tabuleiro do jogo aos alunos, para terem uma melhor lembrança, caso não conheçam, de modo que os possa levar a despertar mais curiosidade e, buscar mais elementos em si, para descrever o jogo. Depois disso, o investigador pedirá que cada participante registe tudo o que sabe sobre o jogo em seu caderno de notas.

A seguir, a partir do resumo feito sobre a secção 0 da tese, fez-se uma exposição dialogada sobre o Ntxuva a partir de seu contexto histórico. Depois, segue-se a fase da realização de um mini torneio, previsto para o 3º e 4º encontro.

O que se espera da actividade realizada do 2º encontro?

Com a actividade do 2º encontro espera-se que se inicie a criação do meio pelo qual os participantes devam iniciar sua familiarização com o jogo Ntxuva. Trata-se da construção inicial de uma relação histórica cultural não vazia dos participantes com o jogo Ntxuva, isto é, $R^1_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL}) \neq \emptyset$. No caso, o índice 1, vem a indicar a construção da primeira relação não vazia. Esta relação, visa essencialmente a criação de um lugar institucional para elementos da cultura moçambicana, a fim de o partilhar entre todos os alunos, qualquer que seja a sua origem. Portanto, o objectivo desse encontro é criar uma nação moçambicana, um povo que partilha a mesma cultura, que é complementado pela actividade realizada no 3º e 4º encontro.

c) 3º e 4º Encontro: realização da prática com o jogo Ntxuva

Neste encontro objectiva-se a partir das actividades que serão desenvolvidas, criar o meio pelo qual os sujeitos de pesquisa se assujeitarão ao jogo Ntxuva na sua prática, isto é, cria-se possibilidades a partir da prática para que a relação dos participantes com a prática do jogo não seja vazia ($R^2_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL}) \neq \emptyset$). No caso, o índice 2, vem a indicar a construção da segunda relação não vazia, uma relação com a prática, diferentemente da relação 1 que foi essencialmente histórico-cultural.

No caso, a relação não vazia construída no 2º e 3º encontros levará os participantes a uma relação não vazia mais completa com o jogo Ntxuva, isto é, $R_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL}) \neq \emptyset$, com $R_{I_{SL}} = R^1_{I_{SL}} \cup R^2_{I_{SL}}$. A constituição dessa relação no sujeito x (participante da pesquisa) constituirá o princípio para o processo de circulação de saberes entre instituições (ver subsecção 2.4.3).

A actividade deste encontro constitui na realização de um torneiro de Ntxuva entre os participantes, que será organizado da seguinte forma:

- Explica-se aos participantes como ocorrerá o torneiro, no caso, como serão estruturadas as diferentes fases e como serão selecionados os três primeiros vencedores, bem como as regras do jogo.

No caso, com os 14 participantes, que foram aleatoriamente formados seis pares de jogadores, que vão disputar a primeira fase do torneio. Na segunda fase participarão seis jogadores, aqueles que saíram vencedores na primeira fase e que vão compor três duplas formadas aleatoriamente. Os vencedores da segunda fase passam automaticamente para fase final do torneiro, onde irão realizar um sistema de jogo de todos contra todos, podendo ser classificados em primeiro, segundo e terceiro lugar. No Quadro 20 é ilustrada a estrutura de organização do torneio.

Quadro 20: Organização do torneio entre alunos

1ª fase do torneiro		**2ª fase do terneiro**		**Fase final**		
Pares de jogadores	**Vencedor**	**Pares de jogadores**	**Vencedor**	**1**	**2**	**total**
$A_1 \times A_2$	A_i	$A_i \times B_i$				
$B_1 \times B_2$	B_i	$C_i \times D_i$				
$C_1 \times C_2$	C_i	$E_i \times F_i$				
$D_1 \times D_2$	D_i					
$E_1 \times E_2$	E_i					
$F_1 \times F_2$	F_i					

Fonte: os autores (2022)

Depois de explicar-se como decorrerá o torneiro, o investigador realizará uma jogada demonstrativa com um dos participantes, escolhido aleatoriamente, para que eles possam observar a operacionalização das mesmas na prática. A seguir, será disponibilizado aos pares um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×8, confeccionado em madeira, para realizar as partidas relativas ao torneio.

Após a realização do torneiro, serão colocadas duas questões de reflexão aos alunos, uma de cada vez. As questões visam consolidar a prática realizada no âmbito do torneiro e sobretudo, verificar como está a relação dos participantes com o jogo, aquela relação que designamos $R_{I_{SL}}(X_i,\ O_{SL}) \neq \emptyset$. Portanto, espera-se com estas questões que os alunos formulem seus conhecimentos em relação ao jogo.

- **Questão 1:** Após realizar algumas partidas do Ntxuva, certamente que teve ou ganhou alguma experiência com o jogo. Suponha que tivesses que dar algumas dicas e/ou treinamento a alguns de seus colegas ou amigos que pretendessem participar de um torneio do mesmo jogo.

a) Que jogadas você aconselharia e que jogadas não aconselharia seus amigos ou colegas a repetir se fossem realizar um torneio de Ntxuva? Justifique detalhadamente o seu posicionamento.
b) Quais estratégias de jogo você aconselharia aos seus amigos ou colegas a realizar para ganhar as partidas que for realizar com o jogo Ntxuva? Por favor, apresente uma explicação detalhada.

- **Questão 2**: Considere a figura abaixo, que representa a simulação da configuração inicial do tabuleiro do jogo Ntxuva em você esteve jogando.

J1	2 (16)	2 (15)	2 (14)	2 (13)	2 (12)	2 (11)	2 (10)	2 (9)
	2 (1)	2 (2)	2 (3)	2 (4)	2 (5)	2 (6)	2 (7)	2 (8)
J2	2 (8)	2 (7)	2 (6)	2 (5)	2 (4)	2 (3)	2 (2)	2 (1)
	2 (9)	2 (10)	2 (11)	2 (12)	2 (13)	2 (14)	2 (15)	2 (16)

Com base nele, responda:

a) Se fosse jogar novamente, em quais casas você preferiria iniciar a primeira movimentação de dados? Porque que você escolheria iniciar a jogada nesta(s) casa(s)? Por favor, apresente uma explicação detalhada.
b) Em quais casas você não preferiria iniciar a primeira movimentação de dados? Porque que você não escolheria iniciar a jogada nesta(s) casa(s)? Por favor, apresente uma explicação detalhada.

A resposta a estas questões podem ser diversas, dependente do entendimento que tiveram, sobre as regras do jogo e sua prática. No entanto, espera-se que se demonstre uma relação não vazia com relação à prática com o jogo, como foi comentado logo no início da descrição deste encontro.

Terminada essa fase, passaremos para a fase propriamente experimenta, que é descrita a seguir.

8.2.3. Descrição da fase experimental

Na fase pré-experimental cria-se o meio para que x (os alunos) se aproximem do jogo construindo em si uma relação não vazia, com elementos explícitos e conscientes sobre o jogo. Nessa relação, x ao se sujeitar ao jogo, produz e implementa praxeologias $P_{SL} = [T^{SL}, \tau^{SL}, \theta^{SL}, \Theta^{SL}]$ que lhe permitem ser um bom sujeito institucional com relação ao jogo (quer em seu contexto sociocultural como na sua prática).

Nesta fase, designada fase experimental, objetiva-se explicitar o dispositivo didático que será experimentado, como será implementado e as praxeologias que se espera serem mobilizadas pelos alunos. Com o dispositivo se visa identificar, compreender e analisar conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados pelos alunos através de situações-problema que contempla a prática com o jogo Ntxuva, como forma de estudar as potencialidades do jogo no ensino da Matemática. Na secção 0 apresentou-se o Ntxuva, suas características e regras, na secção 6 analisou-se as praxeologias expertas e explorou-se algumas potencialidades matemáticas que se podem mobilizar na prática com o jogo.

Ao descrever as praxeologias expertas e explorar as potencialidades matemática na secção 6, especificamente na prática com o jogo, pode-se notar um certo padrão que explica como identificar a casa onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa onde se inicia a mesma e o número de dados que compõem as casas do tabuleiro na sua configuração inicial. Entretanto, essa regularidade ou padrão não é verificada nas movimentações seguintes, uma vez que os dados em cada casa, depois da primeira movimentação de dados, apresentam-se de uma forma não estruturada.

Portanto, considerando a complexidade do jogo, delineamos que o nosso experimento será desenvolvido em torno da questão: $Q \rightarrow$ *Em um tabuleiro do tipo* $4 \times n$*, como identificar a casa onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa onde se inicia a movimentação de dados e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro?*

Com o estudo dessa questão objectiva-se modelizar ou tentar modelizar algum conhecimento matemático, que envolva álgebra e/ou a divisão euclidiana, sequencias, para explicar como identificar a casa onde a primeira movimentação de dados finaliza. Ciente de que este objectivo pode ser ou não ser alcançável, de todo jeito, valerá descrever e analisar as praxeologias que poderão emergir na tentativa de acessar uma resposta ao questionamento fundamental que é colocado para o estudo, ou seja, as praxeologias que permitiram explicar diferentes casos que forem identificados pelos alunos no contato com a situação-problema.

Assim, na subsecção 8.2.3.1 descrevemos as AEP que serão implementadas para o estudo da questão Q e, na subsecção 8.2.3.1.2 apresentamos a sua análise a priori.

8.2.3.1. Descrição das AEPs concebidas para experimentação

Nesta subsecção apresentamos as AEPs constituídas de tarefas concebidas para experimentação. Na sequência, esclarecemos como é a experiência será realizada e em que circunstâncias, ou melhor, deixamos clarificado qual o ambiente e as variáveis didácticas envolvidas no processo da experimentação. A seguir, realizamos uma análise prévia.

8.2.3.1.1. Apresentação geral da actividade de estudo e pesquisa

Apresentamos aqui as tarefas que são levadas a experimentação. As tarefas são pensadas para explorar a primária jogada de uma partida do jogo Ntxuva, para responder à questão Q, fundamental de estudo, anunciada na subsecção 8.2.3. Apresentamos *a priori* cinco questões com alíneas que variam de a) à d), como são mostradas a seguir:

Tarefa 1: Na figura abaixo é ilustrado a configuração inicial do tabuleiro do jogo Ntxuva em que você esteve jogando. Na configuração, vê-se um tabuleiro do tipo 4×8, em que, cada casa é preenchida por dois dados.

J1	2 [16]	2 [15]	2 [14]	2 [13]	2 [12]	2 [11]	2 [10]	2 [9]
	2 [1]	2 [2]	2 [3]	2 [4]	2 [5]	2 [6]	2 [7]	2 [8]
J2	2 [8]	2 [7]	2 [6]	2 [5]	2 [4]	2 [3]	2 [2]	2 [1]
	2 [9]	2 [10]	2 [11]	2 [12]	2 [13]	2 [14]	2 [15]	2 [16]

Se coloque na posição do jogador 1 (J_1) e responda as perguntas seguintes, mostrando com detalhes o seu raciocínio:

a) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 4. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

b) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 6. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

c) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 7. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

d) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 10. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

e) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 14. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

f) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa i. Em que casa f a jogada finalizaria? Qual seria o número de passos necessários para finalizara essa jogada? Como determinaria o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio.

g) Que constatações você observou e que pode descrever depois de realizar as simulações das jogadas que fez?

Tarefa 2: Se em vez de um tabuleiro do tipo 4×8, você fosse jogar em tabuleiro do tipo 4×9, 4×10, 4×11,..., 4×254 ou de uma dimensão menor e supondo que sua primeira jogada fosse iniciar na casa 1, 2, 3, ... , i: Quantos passos seriam necessários para finalizar a primeira jogada? Como você determinaria o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza? Em que casa f a jogada finalizaria? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio.

Tarefa 3: Suponha que você fosse jogar o Ntxuva em tabuleiro do tipo $4 \times n$ e que na configuração inicia do tabuleiro cada casa fosse preenchida por dois dados.

a) Sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 16 em um tabuleiro do tipo 4×21. Determine a casa onde a jogada foi iniciada.

b) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 21 em um tabuleiro do tipo 4×40. Em que casa a jogada foi iniciada?

c) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 3 em um tabuleiro do tipo 4×254. Em que casa essa jogada foi iniciada

Tarefa 4: A sequência de números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43 representam as casas onde o primeiro, segundo, ..., e o último passo da primeira jogada de Ntxuva do tipo $4 \times n$ finaliza. Com base nessa informação, responda as seguintes perguntas:

a) Com quantos dados cada casa foi preenchida na configuração inicial do tabuleiro?

b) Em que casa a jogada terá iniciado?

a) Quantas casas compuseram o campo de jogo de um jogador?

Tarefa 5: Considere um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×101 em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados.

a) Quantos passos seriam necessários para finalizar a primeira jogada?

b) Suponha que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 25. Em que casa a jogada finalizaria no passo 51?

c) Suponha que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 13. Em que passo a jogada finalizaria na casa 117?

Tarefa 6: Suponha que se tenha um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, em que, na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados.

a) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado na casa 2 e finalizado na casa 4, sendo que, para finalizar a jogada foram necessários 65 passos. Qual foi a dimensão do tabuleiro utilizado para o jogo?

b) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado e terminado na casa 2 e, para finalizar a mesma foram necessários 59 passos. Determine a dimensão do tabuleiro utilizado.

c) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado na casa 2 e terminado na 7 e, para finalizar a mesma foram necessários 71 passos. Determine a dimensão do tabuleiro.

8.2.3.1.2. Análise a priori da experimentação

A proposta de trabalho com os alunos inclui uma séria de actividades desenvolvidas em várias sessões de aula. Este trabalho começa a partir de uma fase preparatória, a que designamos na subsecção 8.2.2 de fase pré-experimental, onde são desencadeadas diversas actividades que visam estabelecer o meio para que o aluno se familiarize com o jogo. Nesta fase preparatória, aplica-se um questionário de sondagem aos alunos, com a intencionalidade de saber o quão os alunos estão informados sobre o jogo Ntxuva. Embora o jogo seja praticado em quase todo pais, reconhecendo que pode haver alunos que não o conheçam ou não tenham praticado, se realiza algumas partidas do jogo, com a intencionalidade de colocar os alunos ao mesmo nível de familiaridade com o mesmo e suas regras.

Na sequência, segue a fase experimental, em que são propostas e colocadas aos alunos, uma série de tarefas, as que são apresentadas na subsecção 8.2.3.1.1. As tarefas exploraram a primeira jogada em uma partida do Ntxuva. Com elas, se tem a finalidade de investigar, fundamentalmente, "como identificar a casa onde a primeira jogada finaliza em um tabuleiro do tipo $4 \times n$, conhecendo-se a casa i onde a jogada inicia e o número d de dados que compõe cada casa, na configuração inicial do tabuleiro".

Para levantar esse estudo, foram estabelecidas seis tarefas supracitadas, colocadas a alunos da 12ª classe, do SNE em Moçambique (alunos que compreendem em média 18 anos de idade). As tarefas estão inseridas numa perspectiva de exploração do potencial matemático do jogo Ntxuva, num contexto de enriquecimento do currículo local no ensino da Matemática.

As tarefas são colocadas em sequência, uma de cada vez e, trabalhadas em grupo de dois alunos. O trabalho com as tarefas não finaliza no grupo, pois, se haverá discussões que possibilitem os grupos partilharem suas ideias, justificarem suas escolhas e, sobretudo, que os outros grupos deem suas sugestões. Ainda assim, subtarefas repetidas serão trabalhadas directamente com todos os alunos, aproveitando-se o máximo de tempo, para tirar maior proveito no trabalho com os alunos.

As produções são coletadas com base nos registros que os grupos forem a fazer em blocos de nota, que lhes serão disponibilizados no acto da experimentação, mas também, haverá filmagens em determinados momentos, sobretudo, nas discussões apontadas no parágrafo anterior. São estes registros que serão objecto de análise na análise a posteriori.

Para a primeira, segunda e possivelmente a terceira tarefa, os alunos são entregues papeis A4 contendo malhas quadriculadas, que representam o campo de jogo de um jogador. Estas malhas constituem parte do meio para garantir que os alunos tenham algo para experimentar e ajudá-los hipoteticamente a responder as questões que lhes são colocadas nas alíneas das tarefas indicadas. Mas também, as malhas em si, constituem uma fonte de produção e coleta de dados, na medida em que os alunos as utilizaram para poder realizar a simulação do jogo, o que contribuirá para minimização do tempo de análise do processo de distribuição de dados (reprodução do processo de distribuição de dados), que os levará a construção de uma estrutura funcional que o permita identificar a casa onde a primeira jogada finaliza.

Com estas breves considerações iniciais, a seguir, destacamos as variáveis didáticas que contemplam tarefas propostas e que, a partir delas, são definidas as situações possíveis decorrentes do encontro dos alunos com as tarefas propostas.

a) Variáveis didáticas

Considerando a complexidade do jogo Ntxuva e as múltiplas contribuições que podem ser exploradas, uma primeira e principal variável didática que é considerada nessa experimentação é a limitação do trabalho com o jogo, focalizando-se no trabalho e análise da primeira jogada em uma partida do Ntxuva. Nesta delimitação, são propostas uma série de tarefas que pressupõe levar o aluno a desenvolver um trabalho matemático racional, que leve a formulação de uma relação que o permita determinar a casa onde a primeira jogada em uma partida de Ntxuva finaliza, conhecendo a casa onde a jogada inicia, o tipo de tabuleiro a que o jogo é praticado e o número de dados que compõe cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial.

Para além da delimitação do trabalho com o jogo, as tarefas em si, constituem uma variável didáctica, na medida em que, cada uma delas apresenta um desafio diferente, acima de tudo, possibilitam a abstração do aluno ao se encontrar com ela, permitindo evoluir o seu estado de análise, do processo cíclico de distribuição de dados a uma relação mais geral que explica o processo. Portanto, elas permitem o aluno evoluir de um simples problema circular a uma relação matemática geral que determina a casa onde a primeira jogada é finalizada.

De todo jeito, o desenvolvimento das tarefas propostas leva-nos a definição das seguintes variáveis didácticas, que contribuem na discrição e caracterização das situações possíveis emergente contato dos alunos com as tarefas:

- ✓ n – Correspondente ao número de colunas que compõe o tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. n defini a extensão do tabuleiro. Esta variável possibilita o aluno analisar o comportamento do processo de distribuição de dados no Ntxuva a partir de tabuleiro distintos. Trabalhar com tabuleiros distintos permite, primeiramente, que se identificar as características do processo de distribuição de dados, segundo que se faça comparações com vista a identificar estruturas comuns que possibilitam explicar de forma geral o processo de distribuição de dados entre tabuleiros distintos.
- ✓ k – Corresponde ao número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador e é expresso por $k = 2 \times n$. $k \in \mathbb{N}^*$ e é uma mesma variável que apresenta as mesmas características que a variável n.
- ✓ d – Correspondente ao número de dados que compõe cada casa do tabuleiro de Ntxuva na sua configuração inicial. Ela assume valores naturais, isto é, $d \in \mathbb{N}^*$.
- ✓ i – Correspondente a casa em que se inicia a primeira jogada. $i \in \mathbb{N}^*$ e assume valores entre 1 e k. Em um tabuleiro do tipo $4 \times n$, a utilização de diferentes valores de i para simular a primeira jogada, permite ao aluno, visualizar primeiramente que, o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada é constante, segundo que é independente de i, terceiro, que independentemente da casa onde se inicia a jogada, a relação que determina a casa onde a primeira jogada finaliza possui a mesma estrutura dentro do tabuleiro.
- ✓ p – Correspondente ao p-ésimo passo de uma jogada, sendo $p \in IN$.

- ✓ f_p – Correspondente ao número da casa onde termina o p-ésimo passo. $f_p \in IN$ e varia de 1 à k.
- ✓ f – Correspondente a casa onde finaliza a primeira jogada. $f \in \mathbb{N}^*$ e depende tanto dos valores assumidos por k, d e i.

Estas variáveis são articuladas ao longo das tarefas propostas e permitem gerar outras variáveis, que se manifestam na maneira como são colocados os questionamentos e, que contribuem para que o aluno compreenda ou sinta a necessidade, por exemplo, de formular uma relação geral que o possa ajudar a determinar a casa onde a primeira jogada finaliza.

Por exemplo, enquanto na Tarefa 1 se pede para determinar a casa f onde a primeira jogada finaliza, utilizando-se distintas casas i para o início da jogada, com $n = 8$ (fixo), na Tarefa 2, sobre a mesma questão da Tarefa 1, trabalha-se com tabuleiros mais extensões com vista a analisar padrões entre tabuleiros, no processo de distribuição de dados na primeira joga. Portanto, enquanto a primeira tarefa o aluno a responde preenchendo simplesmente as malhas quadriculadas, na segunda, pela complexidade que os tabuleiros vão tomando na medida que se amplia sua extensão, a simulação ou experimentação material vai se tornando complexa, exigindo a formulação de uma lei geral que ajude o aluno a responder à questão rapidamente.

Estas formas como as questões são colocadas e que propiciam o aluno a maior reflexão para prover uma solução aproximada a proposta de trabalho, constitui em si uma variável didática. De todo jeito, as demais articulações das variáveis didáticas que contemplam o trabalho com as tarefas propostas são descritas a seguir, na análise a priori, em que procuramos descrever as possíveis situações que podem ocorrer no encontro dos alunos com as tarefas.

b) Análise da Tarefa 1

A Tarefa 1 colocada aos alunos é formulada da seguinte forma: *Na figura abaixo é ilustrado a configuração inicial do tabuleiro do jogo Ntxuva em que você esteve jogando. Nela se vê um tabuleiro do tipo* 4×8*, em que, cada casa é preenchida por dois dados.*

J1	2^{16}	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}
	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}
J2	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}
	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}

Se coloque na posição do jogador 1 (J_1) e responda as perguntas seguintes, mostrando com detalhes o seu raciocínio:

h) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 4. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?*

i) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 6. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?*

j) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 7. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?*

k) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 10. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?*

l) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 14. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?*

m) *Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa i. Em que casa f a jogada finalizaria? Qual seria o número de passos necessários para finalizara essa jogada? Como determinaria o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio.*

n) *Que constatações você observou e que pode descrever depois de realizar as simulações das jogadas que fez?*

A principal tarefa colocada é do tipo "determinar a casa f onde finaliza a primeira jogada de uma partida, em um jogo de Ntxuva do tipo 4×8, sabendo que a jogada iniciou em uma certa casa i e que, na configuração inicial do tabuleiro, cada casa é preenchida por 2 dados. A essa tarefa são associadas outras duas descritas no seguinte: Determinar o número p de passos necessários para finalizar a primeira jogada e determinar o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza.

A tarefa coloca o aluno hipoteticamente, em um primeiro contato com o jogo Ntxuva e o confronta a realização da primeira jogada em um tabuleiro simulado em papel (folha de papel A4 com malhas quadriculadas que simulam o modelo de tabuleiro de Ntxuva), com vista a construir as primeiras impressões que o levam a identificação da casa onde uma jogada iniciada na casa i finaliza.

Nela, assume-se $n = 8$, por consequência, $k = 2 \times n = 2 \times 8 = 16$. Para o desenvolvimento da tarefa, nas alíneas a), b), c), d), e) são tomadas para a variável i, a casa onde a primeira jogada inicia, os valores 4, 6, 7, 10, 14 das casas inicias que se sucedem, para as primeiras variações nas questões, com a intencionalidade de facilitar o surgimento da ideia de invariante do número de passos necessários para se finalizar a primeira jogada. A tarefa deve permitir aos alunos a compreensão de que o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada não depende da casa onde a jogada inicia. Mas também, que o processo de distribuição de dados gera uma sequência de números, oriundos da identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza.

Para esta tarefa, o aluno ou grupo de alunos são dados folhas de papeis A4 contendo malhas quadriculadas, que representam o campo de jogo de um jogador. Os alunos utilizaram estas malhas para simular a jogada na medida em que forem construir seu raciocínio. Na base do processo de distribuição de dados, que se associa ao processo de contagem, se espera em primeiro lugar que, se identifique a natureza ou estrutura da sequência de dados formados pelo número de casas onde cada passo da jogada finaliza. Em segundo lugar, com base nesse descobrimento, que se construa uma estrutura ou formula geral que o permita, sem simular o jogo, identificar a casa onde a jogada finaliza.

De todo jeito, inicia-se a atividade com o professor distribuindo as folhas de papel A4 contendo a tarefa e as malhas quadriculadas, como segue o exemplo ilustrado no Quadro 21. A seguir, se explica a constituição das malhas, deixando claro, por exemplo, que o numeral 2 apresentado repetidamente na malha refere-se ao número de dados que compõe cada casa do tabuleiro de Ntxuva na sua configuração inicial e, os índices 1, 2, 3, ..., 16 apresentadas no canto superior direito de quadrado representa a identidade de cada casa no tabuleiro.

Quadro 21: ilustração da estrutura e conteúdo do papel A4 entregue aos alunos

Na figura abaixo é ilustrado a configuração inicial do tabuleiro do jogo Ntxuva em que você esteve jogando. Nela se vê um tabuleiro do tipo 4×8, em que, cada casa é preenchida por dois dados.

J1	2^{16}	2^{15}	2^{14}	2^{13}	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}
	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}	2^{8}
J2	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}
	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}

Se coloque na posição do jogador 1 (J_1) e responda as perguntas seguintes, mostrando com detalhes o seu raciocínio:

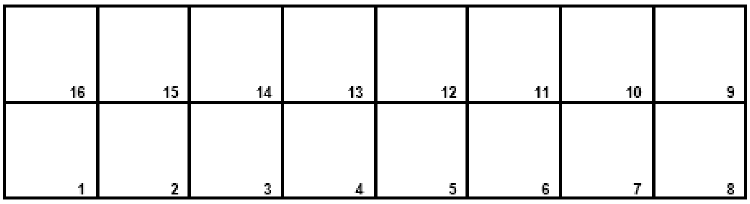
a) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 4. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza?

Use as malhas quadriculadas abaixo, para simular o jogo, quando necessário

2_{16}	2_{15}	2_{14}	2_{13}	2_{12}	2_{11}	2_{10}	2_{9}
2_{1}	2_{2}	2_{3}	2_{4}	2_{5}	2_{6}	2_{7}	2_{8}

16	15	14	13	12	11	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8

...



Fonte: os autores (2023)

O uso da malha quadriculada constituirá então o meio pelo qual o aluno utilizará e se apoiará para responder às questões dada na alínea a). No caso, responder às questões implicará o aluno realizar a jogada de forma simulada a partir da malha quadriculada que estará a sua disposição. A primeira intenção do aluno é efetuar a jogada, e como não terá um tabuleiro a disposição, a malha quadriculada lhe será bastante útil neste momento.

No caso, sobre as questões da alínea a),

a) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 4. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finalizou?

É certo que, a partir da casa 4, os alunos comecem a realizar o processo de distribuição de dados de casa em casa, passo a passo. Neste caso, no primeiro passo, o aluno coleta dois dados da casa inicial $i = 4$ $(c_4 = 2)$ e distribui um-a-um as casas 5 e 6. A casa 4 fica sem dados $(c_4 = 0)$ e as casa 5 e 6 passam a ter três dados $(c_5 = c_6 = 2 + 1 = 3)$, isto é, dois dos dados que estavam anteriormente nas casas mais um dado colocado nas mesmas decorrente da distribuição feita.

Seguindo a lógica do processo de distribuição de dados no Ntxuva, como a casa 6 onde o passo anterior finalizou não estava vazia, o aluno coleta três dados dessa casa e distribui um-a-um as casas 7, 8 e 9. Assim, a casa 6 fica sem dados $(c_6 = 0)$ e as casa 7, 8 e 9 passam a ter três dados $(c_7 = c_8 = c_9 = 2 + 1 = 3)$, isto é, dois dos dados que estavam anteriormente nas casas mais um dado colocado nas mesmas decorrente da distribuição feita.

Este processo é realizado sucessivamente até que o último dado que os alunos estejam distribuindo seja colocado em uma casa vazia, a casa onde a jogada finaliza, no caso dessa tarefa, a casa 9. Com este mesmo processo e uma simples observação das representações feitas nas malhas quadriculadas em folhas de papel A4, o aluno facilmente deduzira que o número de passos para finalizar a jogada é 7. Do mesmo jeito, a observação permitirá que o aluno veja que, iniciando a jogada na casa 4, as casas seguintes onde cada passo da jogada finaliza são respetivamente: 6, 9, 12, 15, 2, 5, 9. Portanto, o aluno não precisará aqui de técnicas sofisticadas adicionais para determinar este conjunto de números. No Quadro 22 é ilustrado o processo completo que o aluno seguirá, distribuindo os dados, iniciando da casa 4 e finalizando na casa 9.

Importa ressaltar que o símbolo de equivalência (⇔) apresentado no Quadro 22, coluna 3, na quinta, sexta e sétima movimentação de dados, significa que a casa real onde o passo da jogada finaliza é o resto da divisão da numeração obtida somando-se $2 + 1$ dados ao número da casa onde finaliza o passo anterior. Isso ocorre sempre que o número da casa onde cada passo finaliza, obtido através da soma sucessiva de $2 + 1$ dados é maior que o número de casas que compõe cada campo de jogo.

Por exemplo, na quinta movimentação de dados, ilustrada no Quadro 22, quando se soma $2 + 1 = 3$ dados ao número da casa onde finaliza o passo anterior se obtém $15 + 3 = 18$. Como 18 é maior que o número total de casas de um campo de jogo no tabuleiro do tipo $\times 8$, isto é, $18 > 2 \times 8 = 16$, a casa onde o quinto passo finaliza se obtém subtraindo 16 de 18, isto é, $18 - 16 = 2$. Assim, a quinta jogada finaliza na casa 2.

Quadro 22: quadro para simulação do jogo

Passos	**Representação do campo de jogo de um jogador**	**Casa em que cada passo da jogada finaliza**
Configuração inicial do tabulário	2_{16} 2_{15} 2_{14} 2_{13} 2_{12} 2_{11} 2_{10} 2_{9} 2_{1} 2_{2} 2_{3} 2_{4} 2_{5} 2_{6} 2_{7} 2_{8}	Início da jogada ($c_2 = 4$)
Primeira movimentação de dados	2_{16} 2_{15} 2_{14} 2_{13} 2_{12} 2_{11} 2_{10} 2_{9} 2_{1} 2_{2} 2_{3} 0_{4} 3_{5} 3_{6} 2_{7} 2_{8}	Distribui-se 2, um-a-um as casas 4 e 6. $6 = 4 + 2$
Segunda movimentação de dados	2_{16} 2_{15} 2_{14} 2_{13} 2_{12} 2_{11} 2_{10} 3_{9} 2_{1} 2_{2} 2_{3} 0_{4} 3_{5} 0_{6} 3_{7} 3_{8}	Distribui-se 3, um-a-um, da casa 7 a 9. $9 = 6 + 3$
Terceira movimentação de dados	2_{16} 2_{15} 2_{14} 2_{13} 3_{12} 3_{11} 3_{10} 0_{9} 2_{1} 2_{2} 2_{3} 0_{4} 3_{5} 0_{6} 3_{7} 3_{8}	Distribui-se 3, um-a-um, da casa 10 a 12. $12 = 9 + 3$

Quarta movimentação de dados	2_{16} 3_{15} 3_{14} 3_{13} 0_{12} 3_{11} 3_{10} 0_{9} 2_{1} 2_{2} 2_{3} 0_{4} 3_{5} 0_{6} 3_{7} 3_{8}	Distribui-se 3, um-a-um, da casa 13 a 15. $15 = 12 + 3$
Quinta movimentação de dados	3_{16} 0_{15} 3_{14} 3_{13} 0_{12} 3_{11} 3_{10} 0_{9} 3_{1} 3_{2} 2_{3} 0_{4} 3_{5} 0_{6} 3_{7} 3_{8}	Distribui-se 3, um-a-um, da casa 16 a $18 \Leftrightarrow 2$. $18 = 15 + 3 \Leftrightarrow 2$
Sexta movimentação de dados	3_{16} 0_{15} 3_{14} 3_{13} 0_{12} 3_{11} 3_{10} 0_{9} 3_{1} 0_{2} 3_{3} 1_{4} 4_{5} 0_{6} 3_{7} 3_{8}	Distribui-se 3, um-a-um, da casa $19 \Leftrightarrow 3$ a $21 \Leftrightarrow 5$. $21 = 18 + 3 \Leftrightarrow 5$
Sétima movimentação de dados e fim da primeira jogada	3_{16} 0_{15} 3_{14} 3_{13} 0_{12} 3_{11} 3_{10} 1_{9} 3_{1} 0_{2} 3_{3} 1_{4} 0_{5} 1_{6} 4_{7} 4_{8}	Distribui-se 4, um-a-um, da casa $22 \Leftrightarrow 6$ a $25 \Leftrightarrow 9$. $25 = 21 + 4 \Leftrightarrow 9$

Fonte: Os Autores (2023)

Quadro 23: simulação equivalente do Quadro 22 para simulação do jogo Ntxuva tipo 4×8 para $i = 4$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	0	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	0	3	0	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	3	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	3	2
Etapa 5	3	3	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 6	3	0	3	1	4	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 7	3	0	3	1	0	1	4	4	1	3	3	0	3	3	0	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

A seguir a realização desse processo, o professor convida o grupo de alunos para discutir e esclarecer o processo que os leva a identificação da casa onde finaliza a jogada. Esta discussão visará captar alguns elementos de seus raciocínios que poderão estar implícitos no preenchimento das malhas quadriculada e em suas anotações.

Depois, o professor distribui as folhas de papel contendo a alínea b), que é descrita no seguinte:

b) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa 6. Em que casa a jogada finalizaria? Quantos passos foram necessários para finalizar a jogada? Qual o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finalizou?

Na alínea b) altera-se apenas a casa onde a jogada inicia, neste caso, da casa 4 para casa 6. Praticamente, aqui os alunos utilizaram os mesmos procedimentos da alínea a) para resolver as questões. O aluno começa por coletar dois dados da casa 6 ($c_6 = 2$), distribui-os um-a-um as casas 7 e 8, que passam a ter três dados, resultantes da adição dos dois dados anteriormente existentes e o dado colocado, isto é, $c_7 = c_8 = 2 + 1 = 3$. Em seguida, colecta os três dados da casa 8 e distribui-os um-a-um as casas 9, 10 e 11, que passam a ter três dados, resultantes da adição dos dados anteriormente existentes nestas casas e o dado recentemente colocado na casa, isto é, $c_9 = c_{10} = c_{11} = 2 + 1 = 3$.

Como é ilustrado no Quadro 24, este processo é continuado distribuindo-se dados um-a-um, seguindo as regras do jogo, até que o último dado do jogador seja colocado em uma casa vazia, como se segue:

- Passo 3: $c_{11} = \cancel{3} \rightarrow c_{11} = 0$ distribuídos as casas $c_{12} = c_{13} = c_{14} = 2 + 1 = 3$.
- Passo 4: $c_{14} = \cancel{3} \rightarrow c_{14} = 0$ distribuídos as casas $c_{15} = c_{16} = c_1 = 2 + 1 = 3$.
- Passo 5: $c_1 = \cancel{3} \rightarrow c_1 = 0$ distribuídos as casas $c_2 = c_3 = c_4 = 2 + 1 = 3$.
- Passo 6: $c_4 = \cancel{3} \rightarrow c_4 = 0$ distribuídos as casas $c_5 = c_6 = 2 + 1 = 3$ e $c_7 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 4$.
- Passo 7: $c_7 = \cancel{4} \rightarrow c_7 = 0$ distribuídos as casas $c_8 = 1$, $c_9 = c_{10} = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 4$, $c_{11} = 1$.

Quadro 24: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×8 para i=6

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Início da jogada	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2
Etapa 4	**3**	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 5	0	3	3	**3**	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 6	0	3	3	0	3	1	**4**	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 7	0	3	3	0	3	1	0	1	4	4	**1**	3	3	0	3	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Finalizado a jogada, o aluno observa que terminou a jogada na casa 11 e que foram necessários 7 passos para finalizar a mesma. Também, identifica e registra o conjunto de números onde cada passo da jogada foi finalizando, que são, respectivamente: 8, 11, 14, 1, 4, 7, 11.

Os procedimentos utilizados nas alíneas a) e b) serão repetidos pelos alunos para dar resposta as questões das alíneas c), d), e), que tem a mesma natureza. No Quadro 25 é ilustrado a simulação por meio do Python que resultará hipoteticamente da experimentação material dos alunos iniciada a joga nas casas 7, 10, 14. Para o início da jogada nessas casas é possível notar também que:

- Iniciando na casa 7 a jogada termina na casa 12. Para finalizar a jogada são necessários 7 passos e, o conjunto de número que identificam as casas onde cada passo finaliza é respectivamente: 9, 12, 15, 2, 5, 8, 12.
- Iniciando na casa 10 a jogada termina na casa 15. Para finalizar a jogada são necessários 7 passos e, o conjunto de número que identificam as casas onde cada passo finaliza é respetivamente: 12, 15, 2, 5, 8, 11, 15.
- Iniciando na casa 14 a jogada termina na casa 3. Para finalizar a jogada são necessários 7 passos e, o conjunto de número que identificam as casas onde cada passo finaliza é respectivamente: 16, 3, 6, 9, 12, 15, 3.

Quadro 25: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×8 para i=7, 10, 14

c) simulação do Ntxuva 4×8 para $i = 7$																
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2
Etapa 4	3	**3**	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 5	3	0	3	3	**3**	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 6	3	0	3	3	0	3	1	**4**	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 7	3	0	3	3	0	3	1	0	1	4	4	**1**	3	3	0	3
d) simulação do Ntxuva 4×8 para $i = 10$																
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2
Etapa 3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3
Etapa 4	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3
Etapa 5	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	0	3	0	3	3	0	3
Etapa 6	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	**4**	0	3	3	0	3
Etapa 7	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	0	1	4	4	**1**	3
e) simulação do Ntxuva 4×8 para $i = 14$																
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	**3**

Etapa 2	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0
Etapa 3	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0
Etapa 4	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	0	3	0
Etapa 5	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	0	3	0
Etapa 6	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	**4**	0
Etapa 7	4	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	0	1

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Mas então, o que dessas questões se pode reter? Para trazer uma discussão que propicie o levantamento de nuances relativas as constatações feitas pelos alunos ao longo da experimentação material que fizeram, o professor coloca-os a seguinte questão:

a) Que constatações você observou e que pode descrever depois de realizar as simulações das jogadas que fez?

Essa questão possibilitará levantar um debater que visa trazer à tona as características fundamentais que os alunos observam da experimentação material que fizeram. De todo jeito, o mais interessante nesta tarefa é que o aluno começa a tomar consciência de que, para o tabuleiro do tipo 4×8, independentemente da casa onde a jogada inicia, o número de passos para finalizar a jogada é constante e igual a 7. Possivelmente, o aluno possa insinuar que a casa onde a primeira jogada finaliza é dada pela adição de da casa i onde inicia a jogada por cinco, pois, em uma contagem directa, da casa onde a jogada inicia para a casa onde finaliza passam-se 5 casas, como é ilustrado a seguir, a partir dos dados que os alunos observaram em sua experimentação material:

- A jogada iniciada na casa 4 ela finaliza na casa 9, isto é, $9 = 4 + 5$.
- A jogada iniciada na casa 6 ela finaliza na casa 11, isto é, $11 = 6 + 5$.
- A jogada iniciada na casa 7 ela finaliza na casa 12, isto é, $12 = 7 + 5$.
- A jogada iniciada na casa 10 ela finaliza na casa 15, isto é, $15 = 10 + 5$.

Esse detalhe levaria o aluno a pensar que a casa f onde finaliza uma jogada iniciada na casa i é dada por: $f = i + 5$. Obviamente que, para um tabuleiro do tipo 4×8 em que na sua configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados, essa relação é válida. Entretanto, ela não é uma relação válida para todos tipos de tabuleiros de Ntxuva.

Como forma de colocar os alunos a pensar um pouco mais sobre a problemática de determinação da casa onde a primeira jogada finaliza em uma partida de Ntxuva, é lhes colocado a tarefa 2 que possibilita alargar sua visão de análise.

c) Análise da Tarefa 2

Após ter se trabalhado com o tabuleiro do tipo 4×8 na Tarefa 1, é colocada aos alunos a Tarefa 2 que propõe ampliar o trabalho dos alunos com os tabuleiros do tipo 4×9, 4×10, 4×11,..., 4×254, tomando para o inicio da jogada a casa 1, 2, 3, 4, ..., i. A tarefa em referência é fórmula da seguinte forma:

Se em vez de um tabuleiro do tipo 4×8, você fosse jogar em tabuleiro do tipo 4×9, 4×10, 4×11,..., 4×254 ou de uma dimensão menor e supondo que sua primeira jogada fosse iniciar na casa 1, 2, 3, ... , i. Quantos passos seriam necessários para finalizar a primeira jogada? Como você determinaria o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza? Em que casa f a jogada finalizaria? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio.

Esta tarefa objetiva alargar o espetro de análise do processo que leva a construção das ideias gerais sobre o cálculo para determinação da casa onde se finaliza a primeira jogada em uma partida de Ntxuva. Aqui, a variável n e $k = 2n$ (dimensão do tabuleiro e o número de casas que compõe o campo de um jogador) é operacionalizada e assumem um papel fundamental na simulação com os tabuleiros, que deva sair do processo de experimentação material para construção de uma relação geral, que facilite o aluno determinar: o número de passos necessários para finalizar uma jogada, a relação que o permite identificar a casa onde cada passo de uma jogada finaliza, bem como, a relação que o permite determinar a casa onde a jogada finaliza.

Aqui, o aluno começa realizando a simulação da jogada usando modelos diferentes de tabuleiros, sendo forçado a tentar aumentar as malhas quadriculadas para adequar a dimensão do tabuleiro. No entanto, cada vez que n vai aumentando, essa tentativa de alargar as malhas quadriculadas se torna inviável, pela complexidade que o processo vai tomando. Ai, a preocupação do aluno deixa de ser centrada numa simples experimentação material, para um olhar mais geral do processo de distribuição de dados, com vista a observar e identificar as principais características que o permita conjecturar uma relação que possibilita:

- Determinar o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada;
- Gerar a sequência de números que identifica a casa onde cada passo finaliza;
- Determinar a casa onde a primeira jogada finaliza.

Portanto, o preenchimento das malhas quadriculadas de acordo com as regras de distribuição de dados no Ntxuva é parte da relação que o aluno terá com o objeto social Ntxuva. De qualquer jeito, para dar resposta as questões que são colocados na Tarefa 2, o aluno partirá da experimentação material o que lhe ajudará a destacar algumas das principais características do processo de distribuição de dados na primeira jogada de uma partida de Ntxuva.

A seguir, apresentamos os caminhos possíveis que o aluno pode seguir no desenvolvimento da Tarefa 2.

i) Se o aluno toma a casa 1 para o início da primeira jogada em tabuleiro do tipo $\mathbf{4 \times 9}$.

Ele prossegue distribuindo dados de casa em casa, passo a passo, analisando os detalhes, as características do processo como é mostrado a seguir e resumido no Quadro 26:

- Primeiro passo: o aluno coleta 2 dados da casa 1 e distribui as casas 2 e 3, passando a casa 1 a ter zero dados e as casas 2 e 3 a ter 3 dados, isto é, $c_1 = \cancel{2} \rightarrow c_1 = 0$ distribuídos as casas $c_2 = c_3 = 2 + 1 = 3$.

  Portanto, a jogada do primeiro passo inicia na casa 1 e finaliza na casa 3, isto é, $f_1 = 3$. Este valor, $f_1 = 3$, resulta da adição do número 1, que corresponde a casa onde a jogada iniciou e os dois (2) dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é:

  $$f_1 = 1 + 2 = 3.$$

- Segundo passo: o aluno coleta 3 dados da casa 3 e distribui as casas 4, 5, 6, passando a casa 3 a ter zero dados e as casas 4 e 5 a ter 3 dados, isto é, $c_3 = \cancel{3} \rightarrow c_3 = 0$ distribuídos as casas $c_4 = c_5 = c_6 = 2 + 1 = 3$.

Assim, a jogada do segundo passo inicia na casa 3 e finaliza na casa 6, isto é, $f_2 = 6$. Este valor, $f_2 = 6$, resulta da adição do número 3, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_1 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_2 = f_1 + 3 = 3 + 3 = 6$. Aqui, deve-se notar que, $f_1 = 1 + 2$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_2 = f_1 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) = 6$$

- Terceiro passo: o aluno coleta 3 dados da casa 6 e distribui as casas 7, 8, 9, passando a casa 6 a ter zero dados e as casas 7, 8, 9 a ter 3 dados, isto é, $c_6 = \cancel{3} \rightarrow c_6 = 0$ distribuídos as casas $c_7 = c_8 = c_9 = 2 + 1 = 3$.

  A jogada do terceiro passo inicia na casa 6 e finaliza na casa 9, isto é, $f_3 = 9$. Este valor, $f_3 = 9$, resulta da adição do número 6, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_2 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_3 = f_2 + 3 = 6 + 3 = 9$. Igualmente à explicação anterior, aqui, deve-se notar que, $f_2 = f_1 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_3 = f_2 + 3 = f_1 + 3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) = 9$$
$$f_3 = 1 + 2 + 2 \times (2 + 1) = 9$$

- Quarto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 9 e distribui as casas 10, 11, 12, passando a casa 9 a ter zero dados e as casas 10, 11, 12 a ter 3 dados, isto é, $c_9 = \cancel{3} \rightarrow c_9 = 0$ distribuídos as casas $c_{10} = c_{11} = c_{12} = 2 + 1 = 3$.

  A jogada do quarto passo inicia na casa 9 e finaliza na casa 12, isto é, $f_4 = 12$. Este valor, $f_4 = 12$, resulta da adição do número 9, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_3 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_4 = f_3 + 3 = 9 + 3 = 12$. Tal como explicado no passo anterior, aqui, deve-se notar que, $f_3 = f_2 + 3 = f_1 + 3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_4 = f_3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$
$$f_4 = 1 + 2 + 3 \times (2 + 1) = 12$$

- Quinto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 12 e distribui as casas 13, 14, 15 passando a casa 12 a ter zero dados e as casas 13, 14, 15 a ter 3 dados, isto é, $c_{12} = \cancel{3} \to c_{12} = 0$ distribuídos as casas $c_{13} = c_{14} = c_{15} = 2 + 1 = 3$.

  A jogada do quinto passo inicia na casa 12 e finaliza na casa 15, isto é, $f_5 = 15$. Este valor, $f_5 = 15$, resulta da adição do número 12, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_4 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_5 = f_4 + 3 = 12 + 3 = 15$. Tal como explicado no passo anterior, aqui, deve-se notar também que, $f_4 = f_3 + 3 = f_2 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_5 = f_4 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_5 = 1 + 2 + 4 \times (2 + 1) = 15$$

- Sexto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 15 e distribui as casas 16, 17, 18 passando a casa 15 a ter zero dados e as casas 16, 17, 18 a ter 3 dados, isto é, $c_{15} = \cancel{3} \to c_{15} = 0$ distribuídos as casas $c_{16} = c_{17} = c_{18} = 2 + 1 = 3$.

  A jogada do sexto passo inicia na casa 15 e finaliza na casa 18, isto é, $f_6 = 18$. Este valor, $f_6 = 18$, resulta da adição do número 15, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_5 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_6 = f_5 + 3 = 15 + 3 = 18$. Tal como explicado no passo anterior, aqui, deve-se notar que, $f_5 = f_4 + 3 = f_3 + 3 + 3 = f_2 + 3 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_6 = f_5 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_6 = 1 + 2 + 5 \times (2 + 1) = 18$$

- Sétimo passo: o aluno coleta 3 dados da casa 18 e distribui as casas 1, 2, 3 passando a casa 18 a ter zero dados e a casa 1 a ter 1 dado, a casa 2 a ter 4 dados e a casa 3 a ter 1 dado, isto é, $c_{18} = \cancel{3} \to c_{18} = 0$ distribuídos as casas $c_1 = 0 + 1 = 1$, $c_2 = 3 + 1 = 4$ e $c_3 = 0 + 1 = 1$.

  A jogada do sétimo passo inicia na casa 18 e finaliza na casa 3, isto é, $f_7 = 3$. Este valor, $f_7 = 3$, resulta da adição do número 18, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_6 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_7 = f_6 + 3 = 18 + 3 = 21 \Leftrightarrow 3$. Tal como explicado no passo anterior, aqui, deve-se notar que, $f_6 = f_5 + 3 = f_4 + 3 + 3 = f_3 + 3 + 3 + 3 = f_2 + 3 + 3 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_7 = f_5 + 3 = 1 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_7 = 1 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 21 \Leftrightarrow 3$$

Nota: Nesse processo de identificação da casa onde a primeira jogada finaliza, há duas coisas a considerar e que precisam ser diferenciadas. Estas duas coisas estão relacionadas com os dois valores diferentes achados no sétimo passo da jogada anterior, em que no processo de contagem foi achado $f_7 = 21$ que na identificação da casa onde a jogada finaliza corresponde a casa 3, isto é, $f_7 = 21 \Leftrightarrow 3$.

Aqui, observamos que $f' = 21$ decorre do número de casas percorridas da casa $i = 18$, a casa onde a jogada inicia até ao final da jogada. Este número surge do processo de contagem das casas. Enquanto que, $f = 3$ refere-se ao número (índice) da casa no tabuleiro, que é efetivamente a identificação da casa onde a jogada finaliza.

No caso, achamos o 3 retirando 18 (número de casas que compõem um campo de jogo do Ntxuva do tipo $2 \times n$) de 21, isto é, $3 = 21 - 18 = f' - k$, um procedimento que é explicado mais adiante.

Quadro 26: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×9 para $i = 1$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2
Etapa 6	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**
Etapa 7	1	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Com essa experimentação material, o aluno percebe que, começando a jogada da casa 1, em um tabuleiro do tipo 4×9, em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados, a jogada finaliza em 7 passos e na casa 3. Nessa jogada, cada passo finaliza nas casas, respectivamente: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 3. Há três elementos que os alunos podem constatar aqui, descritas no seguinte:

- O número 7, de passos necessários para finalizar a jogada, resulta da soma entre o número 1 relativo ao primeiro passo em que se distribui 2 dois dados (1×2) e o número 6 relativos aos seis próximos passos em que se distribuem $2 + 1 = 3$ dados $(6 \times (2 + 1))$, isto é, $7 = 1 + 6$.
- A casa onde a jogada finaliza a jogada é determinado por:

$$f = 1 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 1 + 2 + 6 \times 3 = 1 + 2 + 18 = 21 \Leftrightarrow 3$$

Aqui, também pode se notar que $6 \times (2 + 1) = 18 = k$, portanto, $f = 1 + 2 + k$. Neste caso, se $k = 18 = 6 \times (2 + 1)$, então o 6 da relação $7 = 1 + 6$ provem do quociente entre k e $2 + 1$. Se chamarmos esse quociente de m, sendo $k = m \times (2 + 1)$, então o número de passos para finalizar a jogada é $1 + m$.

- O conjunto de números que corresponde as casas onde cada passo da jogada finaliza é dado por:

$$f_p = \begin{cases} 1 + 2 = 3, & p = 1 \\ 1 + 2 + 1 \times (2 + 1) = 6, & p = 2 \\ 1 + 2 + 2 \times (2 + 1) = 9, & p = 3 \\ 1 + 2 + 3 \times (2 + 1) = 12, & p = 4 \\ 1 + 2 + 4 \times (2 + 1) = 15, & p = 5 \\ 1 + 2 + 5 \times (2 + 1) = 18, & p = 6 \\ 1 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 21, & p = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 + (1 - 1)(2 + 1) = 3, & p = 1 \\ 1 + 2 + (2 - 1)(2 + 1) = 6, & p = 2 \\ 1 + 2 + (3 - 1)(2 + 1) = 9, & p = 3 \\ 1 + 2 + (4 - 1)(2 + 1) = 12, & p = 4 \\ 1 + 2 + (5 - 1)(2 + 1) = 15, & p = 5 \\ 1 + 2 + (6 - 1)(2 + 1) = 18, & p = 6 \\ 1 + 2 + (7 - 1)(2 + 1) = 21, & p = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 0 \times 18 = 3, & p = 1 \\ 6 - 0 \times 18 = 6, & p = 2 \\ 9 - 0 \times 18 = 9, & p = 3 \\ 12 - 0 \times 18 = 12, & p = 4 \\ 15 - 0 \times 18 = 15, & p = 5 \\ 18 - 0 \times 18 = 18, & p = 6 \\ 21 - 1 \times 18 = 3, & p = 7 \end{cases}$$

Sabendo-se que m identifica o número de vezes que em que se distribui $2 + 1$ dados, vem que, o número de casas percorridas de $i = 1$ até ao final da jogada é:

$$f_p = 1 + 2 + (p - 1)(2 + 1), \text{ para } p = 1, 2, \ldots, 7$$

É importante sinalizar que, se $f_p > 18$, teremos que subtrair o valor encontrado por 18, 2×18, 3×18, etc., para achar o índice da casa do tabuleiro, ou melhor, para identificar a casa onde a jogada finaliza. Assim, f_p deverá ser o resto da divisão do valor encontrado por 18. É o caso, por exemplo, do passo 7, em que $f_7 = 1 + 2 + 6 \times 3 = 21 > 18$. No caso, $f_7 = 21 - 18 = 3$. De qualquer jeito, o índice ou o número da casa onde cada passo da jogada se finaliza é dada pela expressão:

$$f_p = 1 + 2 + (p-1)(2+1) - 18r, \text{ para } p = 1, 2, \ldots, 7 \text{ e } r \in IN$$

Aqui, r representa o quociente da divisão do valor obtido da expressão $1 + 2 + (p-1)(2+1)$ por 18, isto é, $1 + 2 + (p-1)(2+1) = rk + f_p$.

ii) Se o aluno toma a casa 2 para o início da primeira jogada em tabuleiro do tipo 4×9.

Bem, após ter realizado a experimentação com o tabuleiro do tipo 4×9 para $i = 1$, o aluno tenderá a simular a jogada com mesmo tabuleiro, escolhendo para o início da jogada outra casa. Supõe-se que as ilações que tirará da experimentação anterior o trarão formulações e curiosidade, que precisará verificar se as mesmas funcionam iniciando a jogada em outras casas.

Supondo que o aluno escolha a casa 2, ele procederá à experimentação material do mesmo jeito que iniciado a jogada com a casa 1, distribuindo dados de casa em casa, passo a passo, analisando os detalhes, as características do processo como é mostrado a seguir e resumido no Quadro 27. Assim,

- No primeiro passo: o aluno coleta 2 dados da casa 2 e distribui as casas 3 e 4, passando a casa 2 a ter zero dados e as casas 3 e 4 a ter 3 dados, isto é, $c_2 = \cancel{2} \to c_2 = 0$ distribuídos as casas $c_3 = c_4 = 2 + 1 = 3$. Portanto, a jogada no primeiro passo inicia na casa 2 e finaliza na casa 4, isto é, $f_1 = 4$. Este valor, $f_1 = 4$, resulta da adição do número 2, que corresponde a casa onde a jogada iniciou e os dois (2) dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é:

$$f_1 = 2 + 2 = 4.$$

- No segundo passo: o aluno coleta 3 dados da casa 4 e distribui as casas 5, 6, 7 passando a casa 4 a ter zero dados e as casas 5, 6, 7ter 3 dados, isto é, $c_4 = \cancel{3} \to c_4 = 0$ distribuídos as casas $c_5 = c_6 = c_7 = 2 + 1 = 3$. Nesse passo, a jogada inicia na casa 4 e finaliza na casa 7, isto é, $f_2 = 7$. Este valor, $f_2 = 7$, resulta da adição do número 4, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_1 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_2 = f_1 + 3 = 4 + 3 = 7$. Aqui, deve-se notar que, $f_1 = 2 + 2$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_2 = f_1 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) = 7$$

- No terceiro passo: o aluno coleta 3 dados da casa 7 e distribui as casas 8, 9, 10 passando a casa 7 a ter zero dados e as casas 8, 9, 10 a ter 3 dados, isto é, $c_7 = \cancel{3} \rightarrow c_7 = 0$ distribuídos as casas $c_8 = c_9 = c_{10} = 2 + 1 = 3$. Nesse passo a jogada inicia na casa 7 e finaliza na casa 10, isto é, $f_3 = 10$. Este valor, $f_3 = 10$, resulta da adição do número 7, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_2 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_3 = f_2 + 3 = 7 + 3 = 10$. Aqui, $f_2 = f_1 + 3 = 4 + 2 + (2 + 1)$ e o número 3 a que é adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_3 = f_2 + 3 = f_1 + 3 + 3 = 4 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) = 10$$

$$f_3 = 4 + 2 + 2 \times (2 + 1) = 10$$

- No quarto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 10 e distribui as casas 11, 12, 13 passando a casa 10 a ter zero dados e as casas 11, 12, 13 a ter 3 dados, isto é, $c_{10} = \cancel{3} \rightarrow c_{10} = 0$ distribuídos as casas $c_{11} = c_{12} = c_{13} = 2 + 1 = 3$. A jogada do quarto passo inicia na casa 10 e finaliza na casa 13, isto é, $f_4 = 13$. Este valor, $f_4 = 13$, resulta da adição do número 10, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_3 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_4 = f_3 + 3 = 10 + 3 = 12$. Tal como explicado no passo anterior, aqui, deve-se notar que, $f_3 = f_2 + 3 = f_1 + 3 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_4 = f_3 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_4 = 2 + 2 + 3 \times (2 + 1) = 13$$

- No quinto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 13 e distribui as casas 14, 15, 16 passando a casa 13 a ter zero dados e as casas 14, 15, 16 a ter 3 dados, isto é, $c_{13} = \cancel{3} \rightarrow c_{13} = 0$ distribuídos as casas $c_{14} = c_{15} = c_{16} = 2 +$

$1 = 3$. Nesse passo a jogada inicia na casa 13 e finaliza na casa 16, isto é, $f_5 = 16$. Este valor, $f_5 = 16$, resulta da adição do número 13, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_4 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_5 = f_4 + 3 = 13 + 3 = 16$. Aqui, deve-se notar que, $f_4 = f_3 + 3 = f_2 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_5 = f_4 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_5 = 2 + 2 + 4 \times (2 + 1) = 16$$

- No sexto passo: o aluno coleta 3 dados da casa 16 e distribui as casas 17, 18, $19 \Leftrightarrow 1$ passando a casa 16 a ter zero dados e as casas 17, 18, $19 \Leftrightarrow 1$ a ter 3 dados, isto é, $c_{16} = \cancel{3} \rightarrow c_{16} = 0$ distribuídos as casas $c_{17} = c_{18} = c_{19} = 2 + 1 = 3$. Nesse passo, a jogada inicia na casa 16 e finaliza na casa 19, isto é, $f_6 = 19$. Este valor, $f_6 = 19 \Leftrightarrow 1$, resulta da adição do número 16, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_5 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_6 = f_5 + 3 = 16 + 3 = 19$. Deve-se notar aqui que, $f_5 = f_4 + 3 = f_3 + 3 + 3 = f_2 + 3 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_6 = f_5 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_6 = 2 + 2 + 5 \times (2 + 1) = 19 \Leftrightarrow 19 - 18 = 1$$

- No sétimo passo: o aluno coleta 3 dados da casa 19 e distribui as casas 2, 3, 4 passando a casa 1 a ter zero dados e a casa 2 a ter 1 dado, a casa 3 a ter 4 dados e a casa 4 a ter 1 dado, isto é, $c_{19\Leftrightarrow 1} = \cancel{3} \rightarrow c_{19\Leftrightarrow 1} = 0$ distribuídos as casas $c_2 = 0 + 1 = 1$, $c_3 = 3 + 1 = 4$ e $c_4 = 0 + 1 = 1$. Nesse passo, a jogada inicia na casa 19 e finaliza na casa 4, isto é, $f_7 = 4$. Este valor, $f_7 = 4$, resulta da adição do número 19, que corresponde a casa onde a jogada iniciou, no caso, f_6 e os 3 dados retirados da mesma casa e distribuídos as casas seguintes, isto é, $f_7 = f_6 + 3 = 19 + 3 = 22 \Leftrightarrow 3$. Aqui, $f_6 = f_5 + 3 = f_4 + 3 + 3 = f_3 + 3 + 3 + 3 = f_2 + 3 + 3 + 3 + 3 = f_1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$ e o número 3 a que adicionado resulta da soma de $2 + 1$ dados. Assim,

$$f_7 = f_5 + 3 = 2 + 2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1)$$

$$f_7 = 2 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 22 \Leftrightarrow 22 - 18 = 4$$

Quadro 27: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×9 para $i = 2$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2
Etapa 5	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2
Etapa 6	**3**	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 7	0	1	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Nessa experimentação material, tal como a anterior, o aluno percebe que, começando a jogada da casa 2, em um tabuleiro do tipo 4×9, em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados, a jogada finaliza em 7 passos e na casa 3. Nessa jogada, cada passo finaliza nas casas, respectivamente: 4, 7, 10, 13, 16, $19 \Leftrightarrow 1$, $22 \Leftrightarrow 4$. Alguns elementos que o aluno observará nesta jogada são:

- O número 7, de passos necessários para finalizar a jogada, resulta da soma entre o número 1 relativo ao primeiro passo em que se distribui 2 dois dados (1×2) e o número 6 relativos aos seis próximos passos em que se distribuem $2 + 1 = 3$ dados $(6 \times (2 + 1))$, isto é, $7 = 1 + 6$.
- A casa onde a jogada finaliza a jogada é determinado por:

$$f = 2 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 2 + 2 + 6 \times 3 = 2 + 2 + 18 = 22 \Leftrightarrow 4$$

Aqui, também pode se notar que $6 \times (2 + 1) = 18 = k$, portanto, $f = 2 + 2 + k$.

Neste caso, se $k = 18 = 6 \times (2 + 1)$, então o 6 da relação $7 = 1 + 6$ provem do quociente entre k e $2 + 1$. Se chamarmos esse quociente de m, sendo $k = m \times (2 + 1)$, então o número de passos para finalizar a jogada é $1 + m$.

- O conjunto de números que corresponde as casas onde cada passo da jogada finaliza é dado por:

$$f_p = \begin{cases} 2+2=4, & p=1 \\ 2+2+1\times(2+1)=7, & p=2 \\ 2+2+2\times(2+1)=10, & p=3 \\ 2+2+3\times(2+1)=13, & p=4 \\ 2+2+4\times(2+1)=16, & p=5 \\ 2+2+5\times(2+1)=19, & p=6 \\ 2+2+6\times(2+1)=22, & p=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2+(1-1)(2+1)=4, & p=1 \\ 2+2+(2-1)(2+1)=7, & p=2 \\ 2+2+(3-1)(2+1)=10, & p=3 \\ 2+2+(4-1)(2+1)=13, & p=4 \\ 2+2+(5-1)(2+1)=16, & p=5 \\ 2+2+(6-1)(2+1)=19, & p=6 \\ 2+2+(7-1)(2+1)=22, & p=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-0\times 18=4, & p=1 \\ 7-0\times 18=7, & p=2 \\ 10-0\times 18=10, & p=3 \\ 13-0\times 18=13, & p=4 \\ 16-0\times 18=16, & p=5 \\ 19-0\times 18=19, & p=6 \\ 22-1\times 18=4, & p=7 \end{cases}$$

Sabendo-se que m identifica o número de vezes que em que se distribui $2+1$ dados, vem que, o índice ou o número da casa onde a jogada finaliza é identificada pela relação:

$$f_p = 2+2+(p-1)(2+1)-18r, \text{ para } p=1,2,\dots,7 \text{ e } r \in IN$$

Como foi insinuado anteriormente, aqui também o r representa o quociente da divisão do valor obtido da expressão $1+2+(p-1)(2+1)$ por 18, isto é, $1+2+(p-1)(2+1)=rk+f_p$.

iii) Se o aluno toma a casa 3, 4, 5, ..., i para o início da primeira jogada em tabuleiro do tipo 4×9.

A cada experimentação material feita, o aluno começa a despertar alguma atenção nas características que as jogadas apresentam. Por exemplo, na experimentação simulada com o tabuleiro do tipo 4×9 para o inicio da jogada nas casas 1 e 2, o aluno observa, tal como na tarefa 1, que independentemente da casa onde a jogada inicia, o número de passos para finalizar uma jogada permanece constante. O aluno observa também que, tanto a lei de formação dos números que correspondem as casas onde passo de uma jogada finaliza e a casa onde a jogada finaliza a jogada depende da casa onde se inicia a jogada e do número de passos.

De todo jeito, o aluno poderá jogar iniciando em outras casas para aferir se as características que está observando neste tabuleiro se mantem regular e, se pode conjecturar uma fórmula que o permita, no tabuleiro do tipo 4×9, determinar a casa onde a primeira jogada finaliza sem necessariamente ter que recorrer a experimentação matéria.

No caso, o aluno pode estar simulando a jogada iniciando-a em outras casas, para analisar melhor as regularidades do jogo. De querer jeito, se o aluno toma a casa 3, 4, 5, ..., i para o início da primeira jogada em tabuleiro do tipo 4×9, se procederá da mesma maneira como foi simulando a jogada em i) e ii), iniciando a jogada na casa 1 e respectivamente.

Nessa simulação, que também é ilustrado no Quadro 28, para o início da jogada na casa 3, 4, 5, o aluno observa que o número de passos para finalizar a primeira jogada é constante e igual a sete, isto é 7. O número 7 se obtém da soma de 1 que representa o primeiro passo em que se distribui 2 dados e 6 que representa o número de passos em que se distribui $2+1$ dados, isto é, $1+m=1+6=7$.

Também, percebe que a casa onde a primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passos. Por exemplo, iniciando a jogada na casa 3, 4, 5, ..., i se tem:

Para $i=3$ se tem $f=3+2+6\times(2+1)=23 \Leftrightarrow 23-1\times 18=5$

Para $i=4$ se tem $f=4+2+6\times(2+1)=24 \Leftrightarrow 24-1\times 18=6$

Para $i=5$ se tem $f=5+2+6\times(2+1)=25 \Leftrightarrow 25-1\times 18=7$

...

Para $i=17$ se tem $f=17+2+6\times(2+1)=37 \Leftrightarrow 37-2\times 18=1$

Para $i=18$ se tem $f=17+2+6\times(2+1)=38 \Leftrightarrow 38-2\times 18=2$

...

Para i genérico se tem $f=i+2+6\times(2+1)-18r$.

Aqui, também o aluno consegue notar que $6\times(2+1)=18=k$, que corresponde ao número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador, portanto, k é escrito como produto de dois factores 6 e $2+1$. Supondo que $k=m\times(2+1)$, sendo $m=6$ e o números de passos por necessário para finalizar a jogada é igual à $1+m=1+6=7$, pode-se insinuar que a casa onde a jogada finaliza em um tabuleiro do tipo 4×9 é dado por:

$$f=i+2+(p-1)(2+1)-18r, \text{ com } p=1+m$$

Aqui, como f é a casa onde a jogada finaliza, m e p são parâmetros fixos.

Também, pela experimentação material que é feita, o aluno tomará coincidência de que o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passo para alcançar aquele passo.

Por exemplo, sabendo-se que o número de passos para finalizar uma jogada é $1+m$ e m o número de vezes em que se distribui $2+1$ dados, iniciando a jogada na casa 3, 4, 5, ..., i se tem:

Para $i=3$ se tem:

$$f_p = 3+2+(p-1)(2+1)-18r \text{ para } p=1,2,\dots,m+1 \text{ e } r \in IN$$

Para $i=4$ se tem:

$$f_p = 4+2+(p-1)(2+1)-18r \text{ para } p=1,2,\dots,m+1 \text{ e } r \in IN$$

Para $i=5$ se tem:

$$f_p = 5+2+(p-1)(2+1)-18r \text{ para } p=1,2,\dots,m+1 \text{ e } r \in IN$$

...

Para i genérico se tem:

$$f_p = i+2+(p-1)(2+1)-18r \text{ para } p=1,2,\dots,m+1 \text{ e } r \in IN$$

Aqui, para além de incrementar a ideia segundo a qual o número de passos em um tabuleiro é constante e independente da casa onde a jogada inicia, também, tenderá a ter alguma noção da origem desse número de passo. Entretanto, a tomada de consciência clara sobre este último ponto poderá ser efetivada na experimentação que fará com outros modelos de tabuleiro, cujo resumo do trabalho que os alunos poderão fazer é apresentado a seguir.

Quadro 28: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×9 para i=3, 4, 5

a) simulação do Ntxuva 4×9 para i=3																		
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2
Etapa 5	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2
Etapa 6	3	**3**	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 7	3	0	1	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
b) simulação do Ntxuva 4×9 para i=4																		

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2
Etapa 5	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**
Etapa 6	3	3	**3**	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
Etapa 7	3	3	0	1	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
c) simulação do Ntxuva 4×9 para i=5																		
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	2	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2
Etapa 5	**3**	2	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 6	0	3	3	**3**	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 7	0	3	3	0	1	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

iv) Se o aluno toma a casa 1, 2, 3, ..., i para o início da primeira jogada em tabuleiro do tipo 4×10, 4×11, 4×12, ..., 4×254.

Bem, após ter realizado a formulação para o tabuleiro 4×9, por cauda da natureza da pergunta, os alunos tenderam a ampliar a simulação da primeira jogada para outros tabuleiros, por exemplo, para tabuleiro do tipo 4×10, 4×11, 4×12, ..., com a finalidade, primeiramente de averiguar se as características achadas para o tabuleiro do tipo 4×9 se estendem aos outros tipos de tabuleiros, segundo, para identificar outras características que o permitem descrever um relação mais geral sobre a “determinação da casa onde a primeira jogada finaliza”.

Cogitamos que o aluno continue realizando a experimentação material, mas a dado momento, sobretudo quando o tabuleiro for tomando uma dimensão extensa, por exemplo, no caso do tabuleiro do tipo 4×254. Aqui, certamente que o aluno terá que analisar as caraterísticas mais gerais do processo de distribuição de dados na primeira jogada de modo a conjeturar uma formula geral.

De qualquer jeito, a simulação que o aluno fará iniciando a primária jogada na casa para $i = 1, 2, 3, ..., i$, os levará as seguintes relações:

Para o caso do tabuleiro do tipo 4×10, observará que:

Nessa simulação, que também é ilustrado no Quadro 29 para o tabuleiro do tipo 4×10, para o início da jogada na casa 1, 2, 3, ..., i, o aluno observa que o número de passos para finalizar a primeira jogada é constante e igual a 7. Como foi notado nas experimentações anteriores, o número 7 se obtém da soma de 1 que representa o primeiro de passo em que se distribui 2 dados e 6 que representa o número de passos em que se distribui $2+1$ dados, isto é, $1+m=1+6=7$. No caso, a casa onde a jogada finaliza pode ser expressa pela relação $f=i+2+6\times(2+1)$.

Percebe igualmente que, a casa onde a primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passos. Por exemplo, iniciando a jogada na casa 1, 2, 3, ..., i se tem:

Para $i=1$: $f=1+2+6\times(2+1)=21 \Leftrightarrow 21-20=1$

Para $i=2$: $f=2+2+6\times(2+1)=22 \Leftrightarrow 22-20=2$

Para $i=3$: $f=3+2+6\times(2+1)=23 \Leftrightarrow 23-20=3$

...

Para i genérico: $f=i+2+6\times(2+1)-20r=i$

Quadro 29: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×10 para $i=1,2,3$

a) simulação do Ntxuva 4×10 para i=1																				
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Início da jogada	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2
Etapa 6	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2
Etapa 7	**1**	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
b) simulação do Ntxuva 4×10 para i=2																				
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Início da jogada	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2

Etapa 5	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2
Etapa 6	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2
Etapa 7	3	**1**	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
c) simulação do Ntxuva 4×10 para i=3																				
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Início da jogada	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2
Etapa 6	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**
Etapa 7	3	3	**1**	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

A partir da leitura desse processo de simulação, o aluno observa também que, na relação $f = i + 2 + 6 \times (2+1)$, $2 + 6 \times (2+1)$ é igual a k, o número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador, isto é, $2 + 6 \times (2+1) = 20 = k$. Portanto, k é escrito na forma $m \times (2+1) + t = 6 \times (2+1) + 2$, sendo $m = 6$ e $t = 2$. Um olhar atento é possível que o aluno ainda perceba que, para tabuleiro do 4×10, na relação $f = i + 2 + 6 \times (2+1)$, $t = 2$ coincide o número de dados colocados em cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial, isto é, $t = d$. No caso, o índice ou o número da casa onde a jogada finaliza pode ser identificada pela relação:

$$f = i + t + (p-1)(2+1) - 20r = i$$

com $p = 1 + m$ e $r \in IN$, sempre que $t = d$ e $k = m \times (2+1) + t$.

A semelhança da experimentação anterior, o aluno toma coincidência de que o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passo para alcançar aquele passo, fortificando o seu entendimento feito a partir da experimentação anterior. Por exemplo, iniciando a jogada na casa 1, 2, 3, ..., i se tem:

Para $i = 1$ se tem:

$$f_p = 1 + 2 + (p-1)(2+1) - 20r \text{ para } p = 1, 2, \dots 2, 1 + m \text{ e } r \in IN$$

Para $i = 2$ se tem:

$$f_p = 2 + 2 + (p - 1)(2 + 1) - 20r \text{ para } p = 1, 2, \dots, 1 + m \text{ e } r \in IN$$

Para $i = 3$ se tem:

$$f_p = 3 + 2 + (p - 1)(2 + 1) - 20r \text{ para } p = 1, 2, \dots, 1 + m \text{ e } r \in IN$$

...

Para i genérico se tem:

$$f_p = i + 2 + (p - 1)(2 + 1) - 20r \text{ para } p = 1, 2, \dots, 1 + m \text{ e } r \in IN$$

Para o caso do tabuleiro do tipo $\mathbf{4 \times 11}$, observará que:

Nessa simulação, que também é ilustrado no Quadro 30 para o tabuleiro do tipo 4×11, para o início da jogada na casa 1, 2, 3, ..., i, o aluno observa que o número de passos para finalizar a primeira jogada é constante e igual a 9. O aluno observa que o número 9 se obtém da soma de 1 que representa o primeiro passo em que se distribui 2 dados, 7 que representa o número de passos em que se distribui $2 + 1$ dados e 1 que representa o número de passos em que se distribui $2 + 2$ dados, isto é, $9 = 1 + 6 + 1$. No caso, a casa onde a jogada finaliza pode ser expressa pela relação: $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) - 22r$.

Tal como a experimentação anterior, também percebe que, a casa onde a primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passos. Portanto, iniciando a jogada na casa 1, 2, 3, ..., i se tem:

Para $i = 1$: $f = 1 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) = 28 \Leftrightarrow 28 - 1 \times 22 = 6$

Para $i = 2$: $f = 2 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) = 29 \Leftrightarrow 29 - 1 \times 22 = 7$

Para $i = 3$: $f = 3 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) = 30 \Leftrightarrow 30 - 1 \times 22 = 8$

...

Para $i = 15$: $f = 15 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) = 45 \Leftrightarrow 45 - 2 \times 22 = 1$

Para $i = 16$: $f = 16 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) = 46 \Leftrightarrow 46 - 2 \times 22 = 2$

...

Para i genérico: $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2) - rk$

Quadro 30: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×11 para $i = 1$

a) simulação do Ntxuva 4×11 para i=1																						
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Início da jogada	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 6	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2
Etapa 7	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2
Etapa 8	1	**4**	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
Etapa 9	1	0	1	4	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3
b) simulação do Ntxuva 4×11 para i=2																						
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Início da jogada	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2
Etapa 6	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2
Etapa 7	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**
Etapa 8	3	1	**4**	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
Etapa 9	3	1	0	1	4	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
c) simulação do Ntxuva 4×11 para i=3																						
Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Início da jogada	2	2	**2**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	0	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 2	2	2	0	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 3	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 4	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2
Etapa 5	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2
Etapa 6	2	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2
Etapa 7	**3**	2	0	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 8	0	3	1	**4**	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3
Etapa 9	0	3	1	0	1	4	4	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

A partir da leitura desse processo de simulação, o aluno observa que na relação $f = i + 2 + 7 \times (2+1) + 1 \times (2+2)$, $k = 2 \times 11 = 22 = 7 \times (2+1) + 1 = m \times (2+1) + t$, sendo $m = 7$ e $t = 1$. Nessa análise, fazendo substituições diretas, ele chega hipoteticamente à ideia de que $f = i + 2 + m \times (2+1) + t \times (2+2)$. Por esse olhar, ele observa também que o número de passos para finalizar a primeira jogada é constante e igual a $9 = 1 + 7 + 1 = 1 + m + t$, onde m representa o número de passos em que se distribui $2+1$ dados e t o número de passos em que se distribui $2+2$ dados, sempre que $t \neq d$.

Portanto, aqui o aluno nota que m é o quociente da divisão de $2n = k$ por $2+1$ e t o resto desta divisão, isto é, $2n = k = m(2+1) + t$.

Ainda pela análise do processo de distribuição de dados, o aluno percebe que o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza depende da casa onde a jogada inicia e o número de passo para alcançar aquele passo, fortificando o seu entendimento feito a partir da experimentação anterior.

Portanto, iniciando a jogada na casa 1, 2, 3, ..., i se tem:

Para $i = 1$ se tem:

$$f_p = \begin{cases} 1 + 2 + (p-1)(2+1) - rk, & para\, p = 1, 2, \dots, 1+m \\ 1 + 2 + m(2+1) + (p-1-m)(2+2) - rk, & para\, p = 9 \end{cases}$$

Para $i = 2$ se tem:

$$f_p = \begin{cases} 2 + 2 + (p-1)(2+1) - rk, & para\, p = 1, 2, \dots, 1+m \\ 2 + 2 + m(2+1) + (p-1-m)(2+2) - rk, & para\, p = 9 \end{cases}$$

Para $i = 3$ se tem:

$$f_p = \begin{cases} 3 + 2 + (p-1)(2+1) - rk, & para\, p = 1, 2, \dots, 1+m \\ 3 + 2 + m(2+1) + (p-1-m)(2+2) - rk, & para\, p = 9 \end{cases}$$

...

Para i genérico se tem:

$$f_p = \begin{cases} i + 2 + (p-1)(2+1) - rk, & para\, p = 1, 2, \dots, 1+m \\ i + 2 + m(2+1) + (p-1-m)(2+2) - rk, & para\, p = 9 \end{cases}$$

O aluno continua experimentando e identificando características diversas sobre o processo de distribuição de dados na primeira jogada em uma partida do Ntxuva. Obviamente que a dado momento ele terá que parar com a experimentação para analisar as características identificadas no processo de distribuição de dados para poder achar um procedimento mais rápido e eficaz que o permita determinar, sem realizar a experimentação material, a casa onde a primeira jogada finaliza. Portanto, nesse momento eles estarão conjecturando formulas para minimizar o seu esforço e achar com facilidades as soluções para o problema que lhes é colocado.

No Quadro 31, apresentamos o resumo das possíveis experimentações matérias que o aluno fará e algumas das características que podem ser identificadas. Com base nesses dados, o aluno constrói as ideias gerais que o permitem determinar a casa onde a primeira jogada finaliza em uma partida de Ntxuva num tabuleiro genérico $4 \times n$, tomando a casa i genérica onde a jogada se inicia. No entanto, acreditamos que os alunos não experimentem tudo, na medida em que procurarão um procedimento mais eficaz. Portanto, o Quadro 31 é apenas ilustrativo.

A seguir, são apontadas algumas das reflexões que podem advir dessa experimentação.

Quadro 31: resumo do potencial fluxo da tarefa no processo de experimentação material dos alunos

		n	9	10	11	12	13	14	…
		k=2n	18=6×(2+1) k=m×(2+1)	20=6×(2+1)+2 k=m×(2+1)+t	22=7×(2+1)+1 k=m×(2+1)+t	24=8×(2+1) k=m×(2+1)	26=8×(2+1)+2 k=m×(2+1)+t	28=9×(2+1)+1 k=m×(2+1)+t	…
		m	6	6	7	8	8	9	…
		t	0	2	1	0	2	1	…
		d	2	2	2	2	2	2	…
		t e d	$t \neq d$	$t = d$	$t \neq d$	$t \neq d$	$t = d$	$t \neq d$	
		p	7=1+6 p=1+m	7=1+6 p=1+m	9=1+7+1 p=1+m+t	9=1+8 p=1+m	9=1+8 p=1+m	11=1+9+1 p=1+m+t	…
i	1	f	1+2+6×(2+1)	1+2+6×(2+1)	1+2+7×(2+1)+1×(2+2)	1+2+8×(2+1)	1+2+8×(2+1)	1+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	2	f	2+2+6×(2+1)	2+2+6×(2+1)	2+2+7×(2+1)+1×(2+2)	2+2+8×(2+1)	2+2+8×(2+1)	2+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	3	f	3+2+6×(2+1)	3+2+6×(2+1)	3+2+7×(2+1)+1×(2+2)	3+2+8×(2+1)	3+2+8×(2+1)	3+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	4	f	4+2+6×(2+1)	4+2+6×(2+1)	4+2+7×(2+1)+1×(2+2)	4+2+8×(2+1)	4+2+8×(2+1)	4+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	5	f	5+2+6×(2+1)	5+2+6×(2+1)	5+2+7×(2+1)+1×(2+2)	5+2+8×(2+1)	5+2+8×(2+1)	5+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	6	f	6+2+6×(2+1)	6+2+6×(2+1)	6+2+7×(2+1)+1×(2+2)	6+2+8×(2+1)	8+2+8×(2+1)	6+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	7	f	7+2+6×(2+1)	7+2+6×(2+1)	7+2+7×(2+1)+1×(2+2)	7+2+8×(2+1)	7+2+8×(2+1)	7+2+9×(2+1)+1×(2+2)	…
	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	i	f	i+2+m×(2+1)	i+2+m×(2+1)	i+2+m×(2+1)+t×(2+2)	i+2+m×(2+1)	i+2+m×(2+1)	i+2+m×(2+1)+t×(2+2)	…

Fonte: Os Autores (2023)

v) Que reflexões o aluno pode tirar do trabalho com a Tarefa 1 e Tarefa 2?

As reflexões que se ancorarão ao trabalho com a Tarefa 1e Tarefa 2 surgirão da resposta que se poderá prover ao questionamento dado na Tarefa 2: É possível determinar a casa onde a primeira jogada finaliza, o número de passos e a sequência de números que constituem as casas onde cada passo de uma jogada finaliza sem utilizar a representação gráfica ou experimentação material do jogo? Explique o seu raciocínio.

Certamente que, com base na experimentação feita e nas características identificadas, no trabalho com o tabuleiro genérico $4 \times n$ tomando a casa i genérica onde a jogada se inicia, o aluno poderá tirar as seguintes ilações:

- O número k de casas que compõe o campo de jogo de um jogar pode ser expresso pela relação: $k = m \times (2 + 1) + t$. Este resultado lembra a divisão euclidiana, cujo o teorema é anunciado no seguinte teorema:

"Dados dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$, existem um único par de números inteiros q e r tais que $a = qb + r$, com $0 \leq r < b$. Os números q e r são designados respectivamente de quociente e resto da divisão de a por b" (MARTOS, 2018, p. 22). Os números a e b são respectivamente designados de dividendo e divisor.

Portanto, a expressão $k = m \times (2 + 1) + t$ resulta também da divisão euclidiana do dividendo k pelo divisor $2 + 1$, onde m é o quociente e t é o resto dessa divisão. Conforme o teorema supracitado, o resto t deverá estar entre 0 e $2 + 1$, isto é, $0 \leq t < 2 + 1$. Assim, como foi notado na experimentação material feita anteriormente e pelo teorema da divisão euclidiana t pode tomar os valores 0, 1, 2.

Conforme as características identificadas na experimentação material, podem ser apontadas as seguintes condições e restrições importantes:

- Se $k = m \times (2 + 1)$, isto é, $t = 0$, o número de passos para finalizar a jogada será $1 + m$. Nesse caso, o índice ou o número da casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $f = i + 2 + (p - 1)(2 + 1) - rk$, com $p = 1 + m$.

Aqui, se f resulta do resto da divisão do dividendo $i + d + (p - 1)(2 + 1)$ (o número de casas percorridas da casa i até ao final da jogada) pelo divisor k. Este resultado denota a operação "congruência módulo m", cujo Martos define da seguinte forma:

"Sejam a, b, $m \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$. Dizemos que a é congruente a b módulo m, se os restos das divisões a e b por m são iguais, e denotamos por $a \equiv b(\text{módulo}\, m)$" (MARTOS, 2018, p. 27). No caso, a operação $a(\text{módulo}\, m)$ ou $b(\text{módulo}\, m)$ denota o resto da divisão de a ou b por m, isto é, $r = a(\text{módulo m}) = \text{b(módulo m)}$ ou abreviadamente $r = Mod(a, m) = Mod(b, m)$.

Usando a notação e tomando $r = f$, $a = i + 2 + (p - 1)(2 + 1)$ e $m = k$, a expressão $f = i + 2 + (p - 1)(2 + 1) - rk$ pode ser rescrita em termos da operação módulo da seguinte forma: $f = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k)$. Assim, pelo teorema da divisão euclidiana vem que $0 \leq f < k$.

Aqui, é possível observar que: como $k = m(2 + 1)$, $f = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k) = Mod\big(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); m(2 + 1)\big) = Mod\big(i + 2 + m(2 + 1); m(2 + 1)\big) = Mod(i + 2; k)$.

Portanto, $f = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k) = Mod(i + 2; k)$, isto é, $\text{i} + 2 + (\text{p} - 1)(2 + 1)$ é congruente a $i + 2$ módulo k. Entretanto, o conjunto de números que correspondem as casas onde cada passo da jogada finaliza é dada pela expressão:

$$f_p = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k), \text{ para } p = 1, 2, \dots, 1 + m$$

- $k = m \times (2 + 1) + t$ com $t = 2$, isto é, $k = m \times (2 + 1) + 2$, o número de passos para finalizar a jogada é dado também por $1 + m$. Nesse caso, a casa onde a jogada finaliza é dada também pela expressão $f = i + 2 + (p - 1)(2 + 1) - rk$ com $p = 1 + m$ ou melhor, como indicado anteriormente, $f = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k)$.

Como $k = m(2 + 1) + 2$, $f = Mod(\, i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k) = Mod(\, i + 2 + (p - 1)(2 + 1); m(2 + 1) + 2) = Mod(\, i + 2 + m(2 + 1); m(2 + 1) + 2) = Mod(\, i; k) = i$.

Aqui, $f = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k) = Mod(i; k) = i$, isto é, $\mathrm{i} + 2 + (\mathrm{p} - 1)(2 + 1)$ é congruente a i módulo k. Portanto, a casa onde a jogada finaliza é $f = i$, ou seja, a jogada inicia e termina na mesma casa. Entretanto, o conjunto de números que correspondem as casas onde cada passo da jogada finaliza é dada pela expressão:

$$f_p = Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k), \text{ para } p = 1, 2, \ldots, 1 + m$$

- Se $k = m \times (2 + 1) + t$ com $t \neq 2 \wedge t \neq 0$, o número de passos para finalizar a jogada é dado por $1 + m + t$. Nesse caso, a casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $f = i + 2 + (p - 1) \times (2 + 1) + t \times (2 + 2) - rk$ com $p = 1 + m$, ou seja, $f = Mod(i + 2 + (p - 1) \times (2 + 1) + t \times (2 + 2);\ k)$. O conjunto de números que correspondem as casas onde cada passo da jogada finaliza é dada pela expressão:

$$f_p = \begin{cases} Mod(i + 2 + (p - 1)(2 + 1); k), & para\ \ p = 1, 2, \ldots, 1 + m \\ Mod(i + 2 + m \times (2 + 1) + (p - 1 - m)(2 + 2); k), & para\ \ p = 1 + m + t \end{cases}$$

vi) Em que os alunos poderão ficar travados nesse processo?

O desenvolvimento da Tarefa 2, pode suscitar algumas contradições e perturbações nos alunos, quando estes tentam compreender a essência da relação que determina a casa onde finaliza o movimento na primeira jogada e o número de passos necessários para finalizar a mesma. Estas contradições e perturbações podem constituir um obstáculo no avanço para compreensão efetiva desta relação, obstáculos que podem estar associados aos seguintes problemáticas:

- ✓ O que determina o número de passos necessários para distribuir $2 + 1$, $2 + 2$?
- ✓ Por exemplo, no tabuleiro tipo Ntxuva 4×9 as casas são numeradas de 1 a $2 \times 9 = 18$. Nessas condições, o que significa que a jogada terminou na casa 21 neste tabuleiro ou a que casa do tabuleiro este resultado é equivalente?

Em relação à primeira problemática, pode ser interessante perguntar aos alunos: *qual a relação entre o número de passos e o número de casas que compõe o campo de um jogador?*

Assim, para ajuda-los a compreender essa relação, os convidaria, por exemplo, a analisarem as relações $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$ (que determina o número de casas percorridas desde a casa i a casa onde a jogada finaliza) para os tabuleiros 4×9 e 4×10 e $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2)$ para o tabuleiro 4×11. No caso, a tarefa mais direta seria, pedir aos alunos que, através do processo de distribuição de dados que fez, analisem:

- ✓ A relação ou o significado que tem, por exemplo, o valor 6 tem na relação $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$ e o número k de casas que constituem o campo de um jogador para o tabuleiro do tipo 4×9 e 4×10.
- ✓ A relação ou o significado que tem, por exemplo, o valor 7 e 1 tem na relação $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2)$ e o número k de casas que constituem o campo de um jogador para o tabuleiro do tipo 4×11.

Para o tabuleiro do tipo 4×9, tem-se $k = 2 \times 9 = 18$. Analisando por exemplo o Quadro 28, o aluno observa atentamente que, na relação $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1)$, o número 6 resulta do número de vezes em que $2 + 1$ dados são distribuídos. Nesse caso, distribuir $2 + 1$ dados 6 vezes significa passar ou percorrer por $6 \times (2 + 1) = 6 \times 3 = 18$ casas completas de 1 à 18, que correspondem ao número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador. Portanto, dessa relação é fácil deduzir que, 6 resulta também da divisão de 18 por $3 = 2 + 1$. Portanto, neste caso, o número de passos para finalizar a jogada é dada por $1 + 6 = 7$, onde 1 se refere a ao primeiro passo, onde se distribui 2 dados. Por esta razão, a casa onde a jogada finaliza é dada por: $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$, onde $k = 18 = 6 \times (2 + 1)$.

Para o tabuleiro do tipo 4×10, tem-se $k = 2 \times 10 = 20$. Analisando por exemplo o Quadro 29, o aluno observa novamente que, na relação $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1)$, o número 6 resulta do número de vezes em que $2 + 1$ dados são distribuídos. Nesse caso, distribuir $2 + 1$ dados 6 vezes significa passar ou percorrer por $6 \times (2 + 1) = 6 \times 3 = 18$. Assim, 18 não completa uma volta completa de 1 à 20, faltando para tal duas casas, isto é, uma volta é completada na relação $20 = 18 + 2 = 6 \times (2 + 1) + 2$. Portanto, dessa relação é fácil deduzir novamente que, 6 resulta da divisão de 20 por $3 = 2 + 1$, mas também, que 2 é referente ao resto dessa divisão.

Em uma análise anterior, foi visto também que, nestas condições, do tabuleiro do tipo 4×10, o resto 2 da divisão de 20 por $3 = 2 + 1$ é igual ao número de dados distribuídos no primeiro passo. Com isso, o número de passos para finalizar a jogada é dada por $1 + 6 = 7$, onde 1 se refere a ao primeiro passo, onde se distribui 2 dados e, casa onde a jogada finaliza é dada por: $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$, onde $k = 20 = 2 + 6 \times (2 + 1)$.

Para o tabuleiro do tipo 4×11, tem-se $k = 2 \times 11 = 22$. Analisando por exemplo o Quadro 30, o aluno observa que, na relação $f = 7 + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2)$, o número 7 resulta do número de vezes em que $2 + 1$ dados são distribuídos. Nesse caso, distribuir $2 + 1$ dados 7 vezes significa passar ou percorrer por $7 \times (2 + 1) = 7 \times 3 = 21$. Portanto, 21 não completa uma volta completa de 1 à 22, faltando para tal uma casa, isto é, uma volta é completada na relação $22 = 21 + 2 = 7 \times (2 + 1) + 1$. A partir dessa relação é fácil deduzir que, 7 resulta da divisão de 22 por $3 = 2 + 1$, que tem como resto 1.

Aqui, o número de passos para finalizar a jogada é dada por $1 + 6 + 1 = 9$, onde o primeiro 1 se refere a ao primeiro passo, o segundo 1 se refere ao número de passos em que se distribui $4 = 2 + 2$ dados. Assim, a casa onde a jogada finaliza é dada por: $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2)$, onde $k = 22 = 2 + 6 \times (2 + 1) + 1$.

Pode se então considerar que, o número de vezes em que se distribui $3 = 2 + 1$ dados seja m e o número em que se distribuem $2 + 2$ dados seja t. Com isso, fazendo se substituição directa pode ser ter:

- ✓ Para 4×9: $k = 2 \times 9 = 18 = 6 \times (2 + 1)$, $0 < p \leq 1 + 6$ e $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$ se equivale a $k = m(2 + 1)$, $0 < p \leq 1 + m$ e $f = i + 2 + m(2 + 1)$.
- ✓ Para 4×10: $k = 2 \times 10 = 20 = 6 \times (2 + 1) + 2$, $0 < p \leq 1 + 6$ e $f = i + 2 + 6 \times (2 + 1)$ se equivale a $k = m(2 + 1) + t$, $0 < p \leq 1 + m$ e $f = i + 2 + m(2 + 1) = i + t + m(2 + 1)$ sendo $d = t$.
- ✓ Para 4×11: $k = 2 \times 11 = 22 = 7 \times (2 + 1) + 1$, $0 < p \leq 1 + 7 + 1$ e $f = i + 2 + 7 \times (2 + 1) + 1 \times (2 + 2)$ se equivale a $k = m(d + 1) + t$, $0 < p \leq 1 + m + t$ e $f = i + 2 + m(2 + 1) + t \times (2 + 2)$ sendo $d \neq t$.

Com estas observações, o aluno pode chegar à ideia de que o número de passos para finalizar uma jogada é $1 + m + t$, sendo m e t obtidos da relação $k = m \times (d + 1) + t$, isto, m resulta da divisão de k por $2 + 1$ dados distribuídos em cada passo, após a distribuição dos primários 2 dados e, t o resto dessa divisão. No entanto, sempre que $t = 2$ o numero de passos se mantem igual a $1 + m$.

Em relação à segunda problemática, pode ser interessante perguntar aos alunos: *suponha que fosse iniciar a sua jogada na casa i em um tabuleiro do tipo $4 \times n$. Qual a relação de equivalência entre a número da casa f' onde cada passo da jogada, obtido pela formula geral finaliza e o número de casa real f, identificada de 1 à k na malha quadriculada, quando $f' > k$? É possível determinar essa relação de equivalência sem recorrer a representação gráfica na malha quadriculada? Explique seu raciocínio.*

Assim, para ajuda-los a compreender essa relação, convidaria os alunos, por exemplo, a responder uma tarefa mais direta, que seria:

Considere uma jogada realizada em um tabuleiro do tipo 4×9, 4×10, 4×11,...., em que na configuração inicial cada casa do tabuleiro é preenchida por dois dados. Suponha que a primeira jogada foi iniciada na casa 17.

a) Sabe-se que o número de casas percorridas para finalizar o terceiro passo é 25. A que casa do tabuleiro 4×9, 4×10, 4×11 corresponde essa identificação?
b) Sabe-se que o número de casas percorridas para finalizar o quarto passo é 28. A que casa do tabuleiro 4×9, 4×10, 4×11 corresponde essa identificação?
c) Sabe-se que o número de casas percorrida para finalizar o quarto passo é 31. A que casa do tabuleiro 4×9, 4×10, 4×11 corresponde essa identificação?
d) Sabe-se que o número de casas percorrida para finalizar o quarto passo é 37. A que casa do tabuleiro 4×9, 4×10, 4×11 corresponde essa identificação?
e) Suponha agora que, para finalizar um certo passo p tenham sido percorrido 280 casas. A que casa do tabuleiro 4×131, 4×132, 4×133, etc., corresponde essa identificação?
f) E se inicia a jogada na casa i genérica e o número f'_p de casas percorridas para finalizar o passo p da primeira jogada seja maior que k, isto é, $\mathrm{f}'_\mathrm{p} > \mathrm{k}$, a que índice ou número de casa corresponde no tabuleiro? É possível responder estas questões sem recorrer a representação gráfica na malha quadriculada? Explique seu raciocínio.

Para responder o desafio dessa tarefa, primeiramente o aluno gerará, com base na formula geral, o conjunto de números que corresponde as casas onde cada passo da primeira jogada finaliza, como é mostrado a seguir, segundo, simulará a jogada na malha quadriculada, como ilustrado no Quadro 32, para gerar o conjunto de números de casa real. Depois disso, compararam os números e analisam a relação exorte entre os dois conjuntos numéricos. Assim:

Para o tabuleiro do tipo 4×9, iniciando a jogada na casa 17 se tem:

$k = 2 \times 9 = 18 = 6 \times (2 + 1)$, sendo $m = 6$ e $t = 0$. Assim o número de passos para finalizar a jogada é $1 + m = 1 + 6 = 7$. Neste caso, o número de casas percorridas para finalizar cada passo da jogada é:

Passo 1: $f_1' = 17 + 2 = 19$

Passo 2: $f_2' = 17 + 2 + (2 + 1) = 19 + 3 = 22$

Passo 3: $f_3' = 17 + 2 + 2 \times (2 + 1) = 19 + 6 = 25$

Passo 4: $f_4' = 17 + 2 + 3 \times (2 + 1) = 19 + 9 = 28$

Passo 5: $f_5' = 17 + 2 + 4 \times (2 + 1) = 19 + 12 = 31$

Passo 6: $f_6' = 17 + 2 + 5 \times (2 + 1) = 19 + 15 = 34$

Passo 7: $f_7' = 17 + 2 + 6 \times (2 + 1) = 19 + 18 = 37$

Este exercício fará o aluno determinar o conjunto de números 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, que corresponde ao número de casas percorridas para finalizar cada passo da jogada. Com base na simulação material feita e ilustrada no Quadro 32, também é gerado a seguinte conjunto de números ou índices do tabuleiro, equivalente aos construído anteriormente pela formula geral: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 1.

Quadro 32: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×9 para $i = 17$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2
Etapa 1	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3
Etapa 2	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3
Etapa 3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3
Etapa 4	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	0	3
Etapa 5	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	0	3
Etapa 6	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	0	3
Etapa 7	**1**	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	1	4

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Depois de ter os dois conjuntos de números, o aluno faz a comparação entre os números equivalentes para estudar as características que tomam. Para isso, o aluno analisa o comportamento da diferença entre os números da 2ª e 3ª coluna do Quadro 33. Nessa análise, é possível observar a priori que, cada vez que $f_p' > 18$, a diferença $f_p' - f_p = 18$ ou múltiplo de 18, isto é, $f_p' - f_p = r \times 18$, com $r \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo:

Para $p = 1$ temos:$f_1' = 19 > 18$ e $f_1' - f_1 = 19 - 1 = 1 \times 18$;

Para $p = 2$ temos: $f_2' = 22 > 18$ e $f_2' - f_2 = 22 - 4 = 1 \times 18$;

...

Para $p = 6$ temos: $f_6' = 34 > 18$ e $f_6' - f_6 = 34 - 16 = 1 \times 18$;

Para $p = 7$ temos: $f_6' = 37 > 18$ e $f_6' - f_6 = 37 - 1 = 36 = 2 \times 18$;

Quadro 33: comparação do conjunto de números de casas percorridas para finalizar determinado passo da jogada e o índice ou número de casa no tabuleiro 4×9 para $i = 17$.

$\boldsymbol{p}$	**Número de casas percorridas para finalizar o passo $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{f_p'}$)**	**Índice ou número da casa no tabuleiro ($\boldsymbol{f_p}$)**	$\boldsymbol{f_p' - f_p}$
0	17	17	$17 - 17 = 0 = 0 \times 18$
1	19	1	$19 - 1 = 18 = 1 \times 18$
2	22	4	$22 - 4 = 18 = 1 \times 18$
3	25	7	$25 - 7 = 18 = 1 \times 18$
4	28	10	$28 - 10 = 18 = 1 \times 18$
5	31	13	$31 - 13 = 18 = 1 \times 18$
6	34	16	$34 - 16 = 18 = 1 \times 18$
7	37	1	$37 - 1 = 36 = 2 \times 18$

Fonte: Os autores (2023)

O aluno observa que, 18 representa o número k de casas que compõem um campo de jogo, no caso, para o tabuleiro do tipo 4×9, $k = 2 \times 9 = 19$. Com base nesse conhecimento, os alunos tomam coincidência de que $f_p' - f_p = r \times k$ com $r \in \mathbb{N}^*$. Assim, se $f_p' - f_p = r \times k$ então $f_p' = r \times k + f_p$, o que significa que f_p é o resto da divisão de f_p' por k, ou seja, $f_p = MOD(f_p'; k)$.

Mas será sempre assim? Será que funciona sempre?

Pode ser que funcione ou não, essa será uma dúvida no aluno. De qualquer jeito, de certeza que o aluno analisará outros casos para averiguar a consistência dessa relação. No caso, poderá trabalhar com outras opções de simulação, como os casos do tabuleiro tipo 4×10, 4×11 e outros tipos de tabuleiro, iniciando a jogada em outras casas, para ver se essa relação funciona mesmo. Assim,

Para o tabuleiro do tipo $\mathbf{4 \times 10}$ e $\mathbf{4 \times 11}$ se tem:

Para tabuleiro do tipo 4×10: $k = 2 \times 10 = 20 = 6 \times (2+1) + 2$, sendo $m = 6$ e $t = d = 2$. Neste caso, o número de passos para finalizar a jogada é $1 + m = 1 + 6 = 7$.

Para o tabuleiro do tipo 4×11: $k = 2 \times 11 = 22 = 7 \times (2+1) + 1$, sendo $m = 6$ e $t = 1 \neq d = 2$. Neste caso, o número de passos para finalizar a jogada é $1 + m + t = 1 + 7 + 1 = 9$.

Para ambos os casos, iniciando a jogada na casa 17, o número de casas percorridas para finalizar cada passo da jogada é dado a seguir:

Passos (p)	Relação que determina o número de casas necessárias para finalizar o passo p da primeira jogada	f_p' para 4×10	f_p' para 4×11
1	$f_1' = 17 + 2$	19	19
2	$f_2' = 17 + 2 + (2+1) = 19 + 3$	22	22
3	$f_3' = 17 + 2 + 2 \times (2+1) = 19 + 6$	25	25
4	$f_4' = 17 + 2 + 3 \times (2+1) = 19 + 9$	28	28
5	$f_5' = 17 + 2 + 4 \times (2+1) = 19 + 12$	31	31
6	$f_6' = 17 + 2 + 5 \times (2+1) = 19 + 15$	34	34
7	$f_7' = 17 + 2 + 6 \times (2+1) = 19 + 18$	37	37
8	$f_8' = 17 + 2 + 7 \times (2+1) = 19 + 21$		40
9	$f_9' = 17 + 2 + 6 \times (2+1) + (2+2) = 19 + 21 + 4$		44

Mais uma vez, para o tabuleiro do tipo 4×10, a partir da relação que determina o número de casas percorridas apara finalizar determinado passo da jogada o aluno obtém o conjunto de números 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37 e, com base na simulação material e ilustrado no Quadro 34, o aluno obtém o conjunto 19, 2, 5, 8, 11, 14, 17 de índices ou números que identificam as casas no tabuleiro, que é equivalente ao conjunto anterior.

Quadro 34: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×10 para $i = 17$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	**3**	2
Etapa 2	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3
Etapa 3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3

Etapa 4	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3
Etapa 5	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	0	3	0	3
Etapa 6	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	0	3	0	3
Etapa 7	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**1**	3	0	3

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

Com estes dois conjuntos de numéricos, o aluno faz a comparação entre os números equivalentes para estudar as características que tomam. No caso, ele analisa o comportamento da diferença entre os números da 2ª e 3ª coluna do Quadro 35. Nessa análise, é possível observar a priori que, cada vez que $f_p' > 20$, a diferença $f_p' - f_p = 20$ ou múltiplo de 20, isto é, $f_p' - f_p = r \times 20$, com $r \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo:

Para $p = 2$ temos: $f_2' = 22 > 20$ e $f_2' - f_2 = 22 - 2 = 1 \times 20$;

Para $p = 3$ temos: $f_3' = 22 > 20$ e $f_3' - f_3 = 25 - 5 = 1 \times 20$;

...

Para $p = 6$ temos: $f_6' = 34 > 20$ e $f_6' - f_6 = 34 - 14 = 1 \times 20$;

Para $p = 7$ temos: $f_6' = 37 > 20$ e $f_6' - f_6 = 37 - 17 = 1 \times 20$;

Quadro 35: comparação do conjunto de números de casas percorridas para finalizar determinado passo da jogada e o índice ou número de casa no tabuleiro 4×10 para $i = 17$.

p	Número de casas percorridas para finalizar o passo p (f_p')	Índice ou número da casa no tabuleiro (f_p)	$f_p' - f_p$
0	17	17	$17 - 17 = 0 = 0 \times 20$
1	19	19	$19 - 19 = 0 = 0 \times 20$
2	22	2	$22 - 2 = 20 = 1 \times 20$
3	25	5	$25 - 5 = 20 = 1 \times 20$
4	28	8	$28 - 8 = 20 = 1 \times 20$
5	31	11	$31 - 11 = 20 = 1 \times 20$
6	34	14	$34 - 14 = 20 = 1 \times 20$
7	37	17	$37 - 17 = 20 = 1 \times 20$

Fonte: Os autores (2023)

Tal como observou anteriormente para o tabuleiro do tipo 4×9, aqui o aluno observa que, o 20 da diferença entre f_p' e f_p representa o número k de casas que compõem o campo de jogo de um jogador para o tabuleiro do tipo 4×10, isto é, $k = 2 \times 10 = 20$. Com base nesse entendimento, mas uma vez os alunos sustentam a ideia de que $f_p' - f_p = r \times k$ com $r \in IN$ e que f_p resulta do resto da divisão de f_p' por k, isto é, $f_p = MOD(f_p'; k)$.

E agora, para o tabuleiro do tipo 4×11, a partir da formula geral o aluno obtém o conjunto de números 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 44 e, com base na simulação material e ilustrado no Quadro 36, obtém o conjunto 19, 22, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 22 de números equivalentes ao conjunto anterior.

Quadro 36: simulação do jogo Ntxuva tipo 4×11 para $i = 17$

Identificação da casa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Início da jogada	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	2	2	2	2	2
Etapa 1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	**3**	2	2	2
Etapa 2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	**3**
Etapa 3	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0
Etapa 4	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0
Etapa 5	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0
Etapa 6	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	2	2	2	0	3	0	3	3	0
Etapa 7	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	**3**	2	0	3	0	3	3	0
Etapa 8	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	**4**	0	3	3	0
Etapa 9	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	3	0	3	1	0	1	4	4	**1**

Fonte: Os Autores (2023), simulado do Python.

A seguir, o aluno faz a comparação entre os números equivalentes dos dois conjuntos numéricos, para estudar as características que tomam. Para isso, ele analisa o comportamento da diferença entre os números da 2ª e 3ª coluna do Quadro 37. Nessa análise, a semelhança do que se observou nas análises anteriores, é possível notar que, cada vez que $f_p' > 22$, a diferença $f_p' - f_p = 22$ ou múltiplo de 22, isto é, $f_p' - f_p = r \times 22$, com $r \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo:

Para $p = 3$ temos: $f_3' = 25 > 22$ e $f_2' - f_2 = 25 - 3 = 1 \times 22$;

Para $p = 4$ temos: $f_4' = 28 > 22$ e $f_4' - f_4 = 28 - 6 = 1 \times 22$;

...

Para $p = 8$ temos: $f_8' = 40 > 22$ e $f_6' - f_6 = 40 - 18 = 1 \times 22$;

Para $p = 9$ temos: $f_9' = 44 > 22$ e $f_9' - f_9 = 44 - 22 = 1 \times 22$;

Quadro 37: comparação do conjunto de números de casas percorridas para finalizar determinado passo da jogada e o índice ou número de casa no tabuleiro 4×11 para $i = 17$.

p	**Número de casas percorridas para finalizar o passo p (f'_p)**	**Índice ou número da casa no tabuleiro (f_p)**	$f'_p - f_p$
0	17	17	$17 - 17 = 0 = 0 \times 22$
1	19	19	$19 - 19 = 0 = 0 \times 22$
2	22	22	$22 - 22 = 0 = 0 \times 22$
3	25	3	$25 - 3 = 22 = 1 \times 22$
4	28	6	$28 - 6 = 22 = 1 \times 22$
5	31	9	$31 - 9 = 22 = 1 \times 22$
6	34	12	$34 - 12 = 22 = 1 \times 22$
7	37	15	$37 - 15 = 22 = 1 \times 22$
8	40	18	$40 - 18 = 22 = 1 \times 22$
9	44	22	$44 - 22 = 22 = 1 \times 22$

Fonte: Os autores (2023)

Analisando essas diferenças, tal como as observações anteriores, o aluno nota que, o 22 que resulta da diferença entre f'_p e f_p representa o número k de casas que compõem o campo de jogo de um jogador para o tabuleiro do tipo 4×11, isto é, $k = 2 \times 11 = 22$. Como atesta as constatações anteriores, para outros tabuleiros, aqui, o aluno nota igualmente que, $f'_p - f_p = r \times k$ com $r \in IN$ e que f_p resulta do resto da divisão de f'_p por k, isto é, $f_p = MOD(f'_p; k)$.

Portanto, com base nas simulações que o aluno vai fazendo, ele constata esta regularidade, que o permite responder à questão que foi colocada: *E se inicia a jogada na casa i genérica e o número f'_p de casas percorridas para finalizar o passo p da primeira jogada seja maior que k, isto é, $f'_p > k$, a que índice ou número de casa corresponde no tabuleiro? É possível responder estas questões sem recorrer a representação gráfica na malha quadriculada? Explique seu raciocínio.*

Com base nas constatações anteriores, o aluno diria que sim, é possível responder a este tipo de questão sem necessariamente recorrer a representação gráfica na malha quadriculada. No caso, sempre $f'_p > k$ o índice ou o número da casa equivalente no tabuleiro é dada por $f_p = f'_p - r \times k$, ou seja, f_p se refere ao resto da divisão entre f'_p e k, isto é, $f_p = MOD(f'_p, k)$.

Assim, por exemplo, como é pedido alínea e) “Suponha agora um certo passo p tenha finalizado na casa 280. A que casa do tabuleiro 4×131, 4×132, 4×133 corresponde essa identificação?”, o aluno facilmente resolveria fazendo:

- Para tabuleiro 4×131: $k = 2 \times 131 = 262 < 280$.
  Assim, $f = MOD(280, 262) = 18$.
- Para tabuleiro 4×132: $k = 2 \times 132 = 264 < 288$.
  Assim, $f = MOD(280, 132) = 16$.
- Para tabuleiro 4×133: $k = 2 \times 133 = 266 < 280$.
  Assim, $f = MOD(280, 266) = 14$

i) Da tarefa 1, 2 o que ficará institucionalizado?

A seguir, descrevemos o resumo de todo conhecimento construído durante o trabalho com a Tarefa 1e Tarefa 2. Trata-se de esclarecer aos alunos o que na essência se pretende com as tarefas propostas e, quais os conhecimentos foram construídos.

Portanto, nesta fase, explicaremos aos alunos que, as Tarefa 1 e Tarefa 2 visam essencialmente responder à questão principal: Em um tabuleiro do tipo $4 \times \mathrm{n}$, como identificar a casa f onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa i onde se inicia a movimentação de dados e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro?

Para responder essa questão, começamos por explicar que:

Se considerarmos um tabuleiro do tipo $4 \times n$, em que n representa o número de colunas que compõe o tabuleiro, o número de casas que compõe o campo de jogo de um jogar é expresso por $k = 2 \times n$. Como foi ilustrado nas diversas simulações, cada casa deste campo de jogo é numerada de 1 à k, no sentido anti-horário, numeração que identifica cada casa desse campo de jogo, como é ilustrado no Quadro 38.

Quadro 38: numeração que identifica as casas do tabuleiro de Ntxuva tipo $4 \times n$, com $k = 2 \times n$ casas que compõe cada campo de jogo

k	k-1	k-2	k-3	k-4	k-5	...
1	2	3	4	5	6	...

Fonte: Os autores (2023)

Quando se vai jogar, inicialmente cada casa é preenchida por d dados, como é ilustrado no Quadro 39.

Quadro 39: configuração inicial do tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, em que cada casa é preenchida por d dados.

d k	**d** k-1	**d** k-2	**d** k-3	**d** k-4	**d** k-5	**d** ...
d 1	**d** 2	**d** 3	**d** 4	**d** 5	**d** 6	**d** ...

Fonte: Os autores (2023)

Assim, iniciando a jogada da casa i, pegamos d dados dessa casa e distribuímos um-a-um nas d casas seguintes e a jogada, que é a primeira, finaliza na casa $i + d$, que no caso, passa a ter $d + 1$ dados. A seguir, pegamos os $d + 1$ dados da casa $i + d$ e distribuímos novamente, um-a-um, as $d + 1$ casas seguintes, que passam a ter também $d + 1$ dados. Esta distribuição, que corresponde ao segundo passo da jogada, finaliza na casa $i + d + (d + 1)$.

A próxima casa onde a jogada finalizará, que corresponderá ao terceiro passo da jogada é $i + d + (d + 1) + (d + 1) = i + d + 2 \times (d + 1)$. Igualmente, esta casa passará a ter $d + 1$ dados.

Prosseguindo assim, as próximas casas onde a jogada finalizará, distribuindo de $d + 1$ dados é expressa por $i + d + \underbrace{(d + 1) + \cdots + (d + 1)}_{m\ vezes} = i + d + m \times (d + 1)$. Portanto, a distribuição de $d + 1$ dados é possível desde que $m \times (d + 1) \leq k$ ou $d + m \times (d + 1) \leq k$, com $m \in IN^*$. No caso, se a jogada finaliza nessa rotação, a casa onde finaliza a jogada é expressa por: $f = i + d + m \times (d + 1)$. Aqui, já terá sido completado $p = 1 + m$ passos da jogada.

Portando, este constituí o primeiro caso no processo de distribuição de dados na primeira joga de uma partida de Ntxuva tipo $4 \times n$. Este caso ocorre sempre que $k = m \times (d + 1)$ ou $k = d + m \times (d + 1)$.

No entanto, quando distribuímos m vezes $d + 1$ dados e a jogada não finaliza, as casas do tabuleiro já terão estado preenchidas, quase todas elas por $d + 1$ dados. Neste caso, a casa $i + d + m \times (d + 1)$ terá $d + 1 + 1 = d + 2$ dados, que os pegamos e distribuímos um-a-um as $d + 2$ casas seguintes, que passam igualmente a ter $d + 2$

dados. Esta distribuição, que corresponde evidentemente ao passo $1+m+1$, finaliza na casa $i+d+m\times(d+1)+(d+2)$.

Na sequência e a semelhança do caso anterior, as próximas casas onde a jogada finalizará, distribuindo $d+2$ dados é expressa por $i+d+m\times(d+1)\underbrace{+(d+2)+\cdots+(d+2)}_{t\ vezes}=i+d+m\times(d+1)+t\times(d+2)$. Aqui, já terá sido completado $p=1+m+t$ passos da jogada, sendo $k=m\times(d+1)+t$. Como $k=m(d+1)+t$ resulta da divisão euclidiana, vem que $0<t<d+1$. Entretanto, a distribuição de $d+2$ dados é possível desde que $0<t<m$ e $t\neq d$.

De forma sumaria, nestes dois casos, conforme foi mostrado anteriormente, podemos distinguir os seguintes aspectos:

Seja $4\times n$ a dimensão do tabuleiro do jogo Ntxuva, em que n representa o número de colunas e $k=2n$ o número de casas que compõe cada campo de jogo.

- **1º aspecto**: o número de casas percorridas de i até onde a jogada finaliza (a contagem das casas) é dado pela expressão:

$$f'=\begin{cases} i+d+m(d+1), & se \quad k=m\times(d+1) \quad ou \quad k=d+m\times(d+1) \\ i+d+m(d+1)+t(d+2), & se \quad k=m\times(d+1)+t \end{cases}$$

Como é óbvio, $f'>k$ e não corresponde efectivamente ao índice f ou identificação da casa no tabuleiro. Sendo que as casas do tabuleiro são numeradas de 1 à k, o índice f no tabuleiro, da casa onde a primeira jogada finaliza, que é equivalente à f', é dada expresso por:

- Se $k=m(d+1)$, vem que:
  $f'=i+d+m(d+1)\Leftrightarrow f'=i+d+k\Leftrightarrow f'-k=i+d$
  $f'-1\times k=i+d\longrightarrow f'-2k=i+d\longrightarrow\cdots\longrightarrow f'-rk=i+d$, com $f'\leq rk$
  Assim, $f=MOD(f',k)=i+d$

- Se $k=d+m(d+1)$, vem que:
  $f'=i+d+m(d+1)\Leftrightarrow f'=i+k\Leftrightarrow f'-k=i$
  $f'-1\times k=i\longrightarrow f'-2k=i\longrightarrow\cdots\longrightarrow f'-rk=i$, com $f'\leq rk$
  Assim, $f=MOD(f',k)=i$

- Se $k = m(d+1) + t$, com $t \neq d$, vem que:

  $f' = i + d + m(d+1) + t(d+2) \Leftrightarrow f' = i + d + td + 2t + m(d+1)$

  $f' = i + d + td + t + [t + m(d+1)] \Leftrightarrow f' = i + d + t(d+1) + k$

  $f' - 1 \times k = i + d + t(d+1) \longrightarrow f' - 2k = i + d + t(d+1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow f' - rk = i + d + t(d+1)$

  Assim, $f = MOD(f', k) = i + d + t(d+1)$

De forma geral, o índice f no tabuleiro, da casa onde a primeira jogada finaliza e equivalente a f', em um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, com $k = 2n$ é: $f = MOD(f', k)$, isto é, $f = f' - rk$ ou $f' = rk + f$, onde $0 \leq f < k$. Portanto, a determinação de f é sustentada pelo teorema da divisão euclidiana que acaba de ser anunciado.

- **2º aspecto**: o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada é dado por:

$$Passos = \begin{cases} 1 + m, & se \quad k = m \times (d+1) \;\; ou \;\; k = d + m \times (d+1) \\ 1 + m + t, & se \quad k = m \times (d+1) + t \;\; com \;\; 0 < t < m \end{cases}$$

- **3º aspecto**: o processo de distribuição de dados na primeira jogada, em um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$ gera um conjunto de números f_p' que caracterizam o número de casas percorridas de i até a finalização de cada passo da jogada. Este conjunto de números constitui uma função real de variável natural, a que se pode designar de sucessão ou sequência numérica, em que, cada passo $p \in IN$ corresponde a uma e única casa $f_p' \in IR$ onde a mesma finaliza, isto é, $\begin{array}{c} f_p' : IN^* \longrightarrow IR \\ p \longrightarrow f_p \end{array}$.

Esta sucessão é definida em partes ou subsucessões constituídas por sequencias ou progressões aritméticas, como são definidas a seguir:

- Se $k = m \times (d+1) \;\; ou \;\; k = d + m \times (d+1)$, a sequência numérica é definida por:

$$f_p' = \begin{cases} i + d, & para \;\; p = 1 \\ i + d + (p-1)(d+1), & para \;\; p = 2, 3, \ldots, 1 + m \end{cases}$$

Esta sucessão é definida em duas partes. A primeira é aquela em que se distribuem d dados, isto é, $f_1' = i + d$. A segunda parte é aquela em se se distribuem $d + 1$ dados, isto é, $f_p' = i + d + (p-1)(d+1)$, com $p = 2, 3, \dots, 1 + m$. Entanto, a mesma pode ser rescrita na seguinte forma:

$$f_p' = i + d + (p-1)(d+1) \quad para \quad p = 1,2, \dots, 1 + m$$

De qualquer jeito, a segunda parte da sequência, que vai de $p = 2$ à $p = 1 + m$, constitui-se de uma progressão aritmética, pois, a diference entre dois termos consecutivos é constante e igual à $d + 1$, isto é:

$$f_{p+1}' - f_p' = i + d + p(d+1) - [i + d + (p-1)(d+1)]$$
$$f_{p+1}' - f_p' = i + d + p(d+1) - i - d - p(d+1) + (d+1)$$
$$f_{p+1}' - f_p' = \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{d} + \mathbf{1}) - [\boldsymbol{i} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{d} + \mathbf{1})]\} + (d+1)$$
$$f_{p+1}' - f_p' = d + 1 \text{ que é constante e a razão da progressão aritmética}$$

E os índices f_p equivalentes a f_p' que identificam as casas no tabuleiro são achados subtraindo rk de f_p', isto é, f_p resulta do resto da divisão de f_p' por k. Deste modo, $f_p = f_p' - rk$ uma expressão que denota a função resto ou modulo de notada por: $f_p = MOD(f_p'; k)$. Assim, do teorema da divisão euclidiana, vem que $0 \leq f_p < k$.

- Se $k = m \times (d+1) + t$, com $0 < t < m \wedge t \neq d$, a sequência numérica é definida por:

$$f_p' = \begin{cases} i + d, & para \ p = 1 \\ i + d + (p-1)(d+1), & para \ p = 2, 3, \dots, 1 + m \\ i + d + m \times (d+1) + (p - 1 - m)(d+2), & para \ p = 2 + m, \dots, 1 + m + t \end{cases}$$

Esta sucessão é definida em três partes.

A primeira é aquela em que se distribuem d dados, isto é, $f_1' = i + d$ e a segunda parte é aquela em que se distribuem $d + 1$ dados, isto é, $f_p' = i + d + (p-1)(d+1)$, com $p = 2, 3, \dots, 1 + m$. A semelhança do caso anterior, as duas partes podem ser rescritas em uma na seguinte forma:

$$f_p' = i + d + (p-1)(d+1) \quad para \quad p = 1,2, \dots, 1 + m$$

A segunda parte da sequência, que vai de $p = 2$ à $p = 1 + m$, constitui-se de uma progressão aritmética, pois, a diferença entre dois termos consecutivos é constante e igual a $d + 1$, isto é:

$$f'_{p+1} - f'_p = i + d + p(d+1) - [i + d + (p-1)(d+1)]$$
$$f'_{p+1} - f'_p = i + d + p(d+1) - i - d - p(d+1) + (d+1)$$
$$f'_{p+1} - f'_p = \{\boldsymbol{i + d + p(d+1) - [i + d + p(d+1)]}\} + (d+1)$$
$$f'_{p+1} - f'_p = d + 1 \text{ que é constante e a razão da progressão aritmética}$$

A terceira parte, que vai de $p = 2 + m$ à $p = 1 + m + t$ é aquela em que se distribuem $d + 2$ dados, isto é, $f'_p = i + d + m(d+1) + (p - 1 - m)(d+2)$, com $p = 2 + m, \ldots, 1 + m + t$. Portanto, a terceira parte da sequência, constitui-se também de uma progressão aritmética, pois, a diference entre dois termos consecutivos é constante e igual a $d + 2$, isto é:

$$f'_{p+1} - f'_p = i + d + m(d+1) + (p-m)(d+2) - [i + d + m(d+1) + (p-1-m)(d+2)]$$
$$f'_{p+1} - f'_p = i + d + m(d+1) + (p-m)(d+2) - [i + d + m(d+1) + (p-m)(d+2) - (d+2)\,)]$$
$$f'_{p+1} - f'_p = \{[\boldsymbol{i + d + m(d+1)} + (\boldsymbol{p-m})(\boldsymbol{d+2})] - [\boldsymbol{i + d + m(d+1)} + (\boldsymbol{p-m})(\boldsymbol{d+2})]\} + (d+2)$$
$$f_{p+1} - f_p = (d+2) \text{ que é constante e a razão da progressão aritmética}$$

A semelhança do caso anterior, os índices f_p equivalentes a f'_p que identificam as casas no tabuleiro são achados subtraindo rk de f'_p, isto é, f_p resulta do resto da divisão de f'_p por k. Deste modo, $f_p = f'_p - rk$ uma expressão que denota a função resto ou modulo de notada por: $f_p = MOD(f'_p; k)$. Assim, do teorema da divisão euclidiana, vem que $0 \leq f_p < k$.

d) Análise da Tarefa 3

A Tarefa 3 é invertida da Tarefa 1 quanto da Tarefa 2. A tarefa é do tipo "determine a casa i onde foi iniciada a primeira jogada, sabendo que a mesma finalizou na casa f, considerando um tabuleiro do tipo $4 \times n$ em que que cada casa na sua configuração inicial é preenchida por dois dados". De forma especifica, a tarefa que é levada ao aluno é apresentada da seguinte forma:

Suponha que você fosse jogar o Ntxuva em tabuleiro do tipo $4 \times n$ e que na configuração inicia do tabuleiro cada casa fosse preenchida por dois dados.

a) Sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 16 em um tabuleiro do tipo 4×21. Determine a casa onde a jogada foi iniciada.
b) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 21 em um tabuleiro do tipo 4×40. Em que casa a jogada foi iniciada?
c) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 506 em um tabuleiro do tipo 4×254. Em que casa essa jogada foi iniciada?

A tarefa, para além de estimular o raciocínio, objectiva consolidar o conhecimento dos alunos, construído no seu encontro com a Tarefa 1e Tarefa 2. Pela complexidade do sistema de jogo Ntxuva, a tarefa leva o aluno a utilização de uma formula concreta, que o possa ajudar determinar a casa onde a jogada inicia, conhecendo a casa onde a mesma terá iniciado.

A partir do trabalho com a Tarefa 1 e Tarefa 2, se pressupondo que o aluno já conhece as características ou a formulação que lhe permite determinar a casa onde a primeira jogada finaliza em uma partida de Ntxuva do tipo $4 \times n$, nesta tarefa, o aluno começa por:

- Identificar o número n de colunas que constitui o tabuleiro;
- Determinar o número $k = 2n$ de casas que compõe um campo de jogo no tabuleiro $4 \times n$;
- Escrever k na forma $m(d+1)+t$. O objectivo é determinar o valor de m e t, com os quais, a partir das características do processo de distribuição de dados na primeira jogada, o aluno identifica e descreve a formula para determinação da casa onde a jogada finaliza.
- Descrever a formula para determinação da casa onde finaliza a primeira jogada.

A seguir, se descreve para cada alínea da Tarefa 3, como os alunos estarão desenvolvendo a mesma.

i) Descrição da resolução da alínea a), Tarefa 3

Na alínea a) da Tarefa 3, se pede: *sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 16 em um tabuleiro do tipo 4×21. Determine a casa onde a jogada foi iniciada.*

Para resolver esta tarefa, o aluno começa por identificar o número n de colunas que constituem o tabuleiro proposto na alínea, que é $n = 21$. Depois disso, determina o número k de casas que compõe um campo de jogo no tabuleiro 4×21, no caso, fará $k = 2 \times n = 2 \times 21 = 42$. Sabendo que, no enunciado da tarefa 3 foi dito que, cada casa do tabuleiro é preenchida por dois dados ($d = 2$) na sua configuração inicial, o aluno divide $k = 42$ por $d + 1 = 2 + 1 = 3$, com a finalidade de escrever k na forma $k = m \times (d + 1) + t$, o que resulta no seguinte:

$$
\begin{array}{rr|l}
4 & 2 & 3 \\ \cline{3-3}
3 & \downarrow & 1\ \ 4 \\ \cline{1-2}
1 & 2 & \\
-1 & 2 & \\ \cline{1-2}
0 & 0 &
\end{array}
$$

Assim, fazendo a divisão de $k = 42$ por $d + 1 = 3$, o aluno obtém como resultado 16 e resto zero, isto é, $42 = 14 \times (2 + 1)$. A partir daqui o aluno percebe que $m = 14$ e que a jogada finaliza no passo $p = 1 + m = 1 + 14 = 15$. Neste caso, como $t = 0$, a relação para determinação do número de casas percorridas de i a casa $f = 16$ onde a primeira jogada finaliza é dada pela expressão:

$$f' = i + d + m \times (d + 1) = i + d + k, \text{ pois, } k = m \times (d + 1)$$

O índice f equivalente no tabuleiro que identifica a casa onde a jogada finaliza é dada por: $f = MOD(f', k)$ ou seja, $f = f' - r \times k$, sendo $r \in IN^*$. Substituindo f' nessa última relação se obtém: $f = i + d + k - rk = i + d + k(1 - r)$. Com os dados $f = 16$, $d = 2$, $k = 42$, o aluno substitui nas formulas respectivas e determina o i fazendo:

$$\begin{cases} f' = i + d + k \\ f = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 2 + 42 \\ 16 = f' - 42r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 44 \\ 16 = i + 44 - 42r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 44 \\ i = 42r - 44 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f' = i + 48 \\ i = 42r - 28 \end{cases}$$

Como $i \in IN^*$, então, $i = 42r - 28 > 0 \Leftrightarrow 42r > 28 \Leftrightarrow r > \frac{28}{42} \Leftrightarrow r > 0{,}6(6)$

Igualmente, como $r \in IN^*$, a inequação anterior pode resultar em: $r \geq 1$. Para o caso em resolução, o aluno toma o menor r possível, neste caso, $r = 1$.

Assim, $i = 42r - 28 = 42 \times 1 - 28 = 42 - 28 = 14$

Assim, se em um tabuleiro do tipo 4×21 se finaliza a jogada na casa 16, esta jogara terá iniciado na casa $i = 14$.

ii) Descrição da resolução da alínea b), Tarefa 3

Na alínea b) da Tarefa 3, se pede: *sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 21 em um tabuleiro do tipo* 4×40. *Em que casa a jogada foi iniciada?*

O processo de resolução desta tarefa segue o mesmo padrão que a da alínea a). No caso, o aluno começa por identificar o número n, que é igual a 40 ($n = 40$), depois, determina o número k, que será, $k = 2n = 2 \times 40 = 80$. A seguir, sabendo $d = 2$, o aluno divide $k = 80$ por $d + 1 = 2 + 1 = 3$, com a finalidade de escrever k na forma $k = m \times (d + 1) + t$, o que resultará no seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 8\ 0 & \underline{\ 3\qquad} \\ \underline{6\ } & 2\ 6 \\ 2\ 0 & \\ \underline{-1\ 8} & \\ 0\ 2 & \end{array}$$

Com estes cálculos, o aluno nota que, na divisão de $k = 80$ por $d + 1 = 3$ se obtém o quociente 26 e resto 2, podendo-se escrever 80 na forma: $80 = 26 \times (2 + 1) + 2$. A partir daqui o aluno percebe que $m = 26$ e $t = d = 2$.

Aqui, embora t não seja igual a zero, ele é igual ao número de dados que são colocados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro. Nestas condições, o aluno vem que esta jogada finaliza no passo $p = 1 + m = 1 + 26 = 27$. Assim, a expressão para determinação do número de casas percorridas de i a casa $f = 21$ onde a primeira jogada finaliza é dada pela expressão:

$$f' = i + d + m \times (d + 1) = i + k, \text{ pois, } k = d + m \times (d + 1)$$

Aqui, sendo o índice f equivalente no tabuleiro que identifica a casa onde a jogada finaliza é dada por $f = MOD(f', k)$ e $f' = i + k$, é evidente que $f = i + k - rk$ e $r = 1$, logo, $f = i + k - k = i$, isto é, $f = i = 21$. Portanto, a jogada inicia e terminada na mesma casa.

Entretanto, a quem possa caminhar por uma solução mais complexa. No caso, sabendo que o índice f no tabuleiro e equivalente à f' é dado por $f = MOD(f', k)$ ou seja, $f = f' - r \times k$, sendo $r \in IN^*$, substituí f' nessa última relação obtendo: $f = i + k - rk = i + k(1 - r)$. Com os dados $f = 21$, $d = 2$, $k = 80$, o aluno substitui nas formulas respectivas e determina o i fazendo:

$$\begin{cases} f' = i + k \\ f = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 80 \\ 21 = f' - 80r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 80 \\ 21 = i + 80 - 80r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 80 \\ i = 80r - 80 + 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f' = i + 80 \\ i = 80r - 59 \end{cases}$$

Como $i \in IN^*$, então, $i = 480r - 59 > 0 \Leftrightarrow 80r > 59 \Leftrightarrow r > \frac{59}{80} \Leftrightarrow r > 0{,}7$ ...

Como $r \in IN^*$, a inequação anterior pode resultar em: $r \geq 1$. Para o caso em resolução, o aluno toma o menor r possível, neste caso, $r = 1$.

Assim, $i = 80r - 59 = 80 \times 1 - 59 = 80 - 59 = 21$

Assim, se em um tabuleiro do tipo 4×40 se finaliza a jogada na casa 21, esta jogara terá iniciado na casa $i = 21$.

iii) Descrição da resolução da alínea c), Tarefa 3

Na alínea c) da Tarefa 3, se pede: *sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 3 em um tabuleiro do tipo* 4×254*. Em que casa a jogada foi iniciada?*

A resolução da tarefa segue o mesmo princípio que a da alínea a) e b). Aqui, o aluno começa por identificar o número n, que é igual a 254 ($n = 254$), depois, determina o número k, que será, $k = 2n = 2 \times 254 = 508$. A seguir, sabendo que $d = 2$, o aluno divide $k = 508$ por $d + 1 = 2 + 1 = 3$, e escreve k na forma $k = m \times (d + 1) + t$, o que resultará no seguinte:

5	0	8	3			
- 3	↓	↓	1	6	9	
2	0	↓				
- 1	8	↓				
0	2	8				
-	2	7				
	0	1				

Com estes cálculos, o aluno nota que, na divisão de $k = 508$ por $d + 1 = 3$ se obtém o quociente 169 e resto 1, podendo-se escrever 508 na forma: $508 = 169 \times (2 + 1) + 1$. A partir daqui o aluno percebe que $m = 169$ e $t = 1 \neq d = 2$. Nestas condições, o aluno vem que esta jogada finaliza no passo $p = 1 + m + t = 1 + 169 +$

$1 = 171$. Assim, a expressão para determinação do número de casas percorridas de i até a $f = 3$ a primeira jogada finaliza é dada por:

$$f' = i + d + m \times (d+1) + t \times (d+2)$$

O índice no tabuleiro que identifica a casa onde a jogada finaliza é dada por: $f = MOD(f', k)$ ou seja, $f = f' - r \times k$, sendo $r \in IN^*$. Com os dados $f = 3$, $d = 2$, $k = 508$, o aluno substitui nas formulas respectivas e determina o i fazendo:

$$\begin{cases} f' = i + d + m(d+1) + t(d+2) \\ f = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 2 + 169 \times (2+1) + 1 \times (2+2) \\ 3 = f' - 508r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f' = i + 513 \\ 3 = f' - 508r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 513 \\ 3 = i + 513 - 508r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = i + 513 \\ i = 3 - 513 + 508r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f' = i + 513 \\ i = -510 + 508r \end{cases} \Leftrightarrow$$

Como $i \in IN^*$, vem que, $i = -510 + 508r > 0 \Leftrightarrow 508r > 510 \Leftrightarrow r > \frac{510}{508} \Leftrightarrow r > 1{,}0039 \ldots$

Como $r \in IN^*$, a inequação anterior pode resultar em: $r \geq 2$. Para o caso em resolução, o aluno toma o menor r possível, neste caso, $r = 2$.

Assim, $i = -510 + 508r = -510 + 508 \times 2 = -510 + 1016 = 506$.

Assim, se em um tabuleiro do tipo 4×254 se finaliza a jogada na casa 3, esta jogada terá iniciado na casa $i = 506$.

e) Análise da Tarefa 4

A quarta tarefa que é colocada aos alunos é formulada no seguinte:

A sequência de números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43 representam a contagem das casas percorridas de i a finalização do primeiro, segundo, ..., e o último passo da primeira jogada de Ntxuva do tipo $4 \times n$ finaliza. Com base nessa informação, responda as seguintes perguntas:

a) Com quantos dados cada casa foi preenchida na configuração inicial do tabuleiro?
b) Em que casa a jogada terá iniciado?
b) Quantas casas compuseram o campo de jogo de um jogador?

A tarefa objectiva levar os alunos refletirem sobre o processo de construção da relação que permite determinar a casa onde a primeira jogada finaliza, mas também, levar os alunos a utilização ou aplicação da relação que determina o número de passos e o número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador.

Na tarefa, é apresentado a sequência de casas por onde cada passo de uma jogada finaliza. Com base nessa sequência, se pede para determinar a casa onde a jogada terá iniciado e, o número de casas que compõem o campo de jogo de um jogador.

Nesta tarefa, os estudantes já não serão entregues as malhas quadriculadas para simular as jogadas. Aqui, se utiliza a sua imaginação para articular e refletir em torno dos procedimentos utilizados para determinação da casa onde a primeira jogada finaliza, com a finalidade de determinar o número de casas que compõem o campo de jogo de um jogador, ou mesmo, determinar o tipo de tabuleiro em que a jogada teria decorrido. Basicamente, é um pouco do conceito de sequências numéricas que está por detrás da tarefa.

Para resolver esta tarefa, é possível se pense na estrutura que dá origem a contagem de casas desde a casa i até onde cada passo da jogada finaliza, que é dada por:

$$f'_p = \begin{cases} i + d, & para\ \ p = 1 \\ i + d + (p-1)(d+1), & para\ \ p = 2,3,\dots,1+m \\ i + d + m(d+1) + (p-1-m)(d+2), & para\ \ p = 2+m,\dots,1+m+t \end{cases}$$

Ou simplesmente

$$f'_p = \begin{cases} i + d + (p-1)(d+1), & para\ \ p = 1,2,\dots,1+m \\ i + d + m(d+1) + (p-1-m)(d+2), & para\ \ p = 2+m,\dots,1+m+t \end{cases}$$

No ponto de vista prático, esta fórmula nos indica que, a casa onde o primeiro passo finaliza é obtida adicionando o número da casa i onde a jogada inicia ao número de dados d que compõem cada casa na configuração inicial do tabuleiro, isto é, $f'_1 = i + d$. As casas consecutivas f'_2, f'_3, ..., f'_p, são obtidas:

- Adicionando $(p-1)(d+1)$ a f'_1, para $1 < p \leq 1 + m$;
- Adicionando $(p-1-m)(d+2)$ a f'_{1+m}, para $1 + m < p \leq 1 + m + t$.

Sendo a sequência de contagem de casas de i a cada finalização de um passo da jogada dada pelos números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43, em que a contagem para finalizar primeiro passo é 12 ($f'_1 = 13$) e a contagem para finalização do último passo é 43 ($f'_f = 43$), teremos:

a) **Para resolver a questão da alínea a) e b) “Com quantos dados cada casa foi preenchida na configuração inicial do tabuleiro?” e “em que casa a jogada terá iniciado?”, o aluno procede no seguinte:**

Aqui, o aluno se ancora aos conhecimentos que tem sobre a lei de formação do conjunto de números que identificam a contagem de casas para alcançar determinado passo da jogada. Esta lei de formação é ancorada a noção de sucessão monotonamente crescente. De todo jeito, o aluno sabe que:

$$f'_p = \begin{cases} f'_1 = f_0 + d, & para \;\; p = 1 \\ f'_2 = f'_1 + (d+1), & para \;\; p = 2 \\ \dots & \\ f'_p = f'_{p-1} + (d+1) \Leftrightarrow f'_{1+m} = f'_m + (d+1), & para \;\; p = 1+m \\ f'_p = f'_{p-1} + (d+2) \Leftrightarrow f'_{2+m} = f'_{1+m} + (d+2), & para \;\; p = 2+m \\ \dots & \\ f'_p = f'_{p-1} + (d+2) \Leftrightarrow f'_{1+m+t} = f'_{m+t} + (d+2), & para \;\; p = 1+m+t \end{cases}$$

Com base nesse conhecimento, para achar o número de dados que compõem a configuração inicial do tabuleiro o aluno fará:

$$\begin{cases} f'_1 = f_0 + d \\ f'_2 = f'_1 + (d+1) \end{cases} = \begin{cases} f'_1 = i + d \\ f'_2 = f'_1 + (d+1) \end{cases}$$

Como $f'_1 = 12$, $f'_2 = 15$, teremos:

$$\begin{cases} 12 = i + d \\ 15 = 12 + (d+1) \end{cases} = \begin{cases} i = 12 - d \\ 15 = 13 + d \end{cases} = \begin{cases} i = 12 - d \\ d = 15 - 13 \end{cases} = \begin{cases} i = 12 - d \\ d = 2 \end{cases} = \begin{cases} i = 12 - 2 \\ d = 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} i = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Portanto, com a sequência de números dados, pode se dizer que cada casa do tabuleiro onde foi efetuada a jogada foi preenchida por dois dados ($d = 2$) na sua configuração inicial. Além disso, a jogada terá iniciado na casa $i = 10$.

b) **Para a resolver a questão da alínea b) “quantas casas compuseram o campo de jogo de um jogador?”, o aluno procede no seguinte:**

O aluno começa efetuando as diferenças entre um termo e o seu antecessor, isto é, $f'_{p+1} - f'_p$. Ele faz isso para verificar quantos dados foram distribuídos em cada passo da jogada. Esta informação o ajudará a identificar a característica da lei de formação desse conjunto de números. Assim, o aluno começa efetuando:

$$f_1' - f_0 = 12 - 10 = 2$$
$$f_2' - f_1' = 15 - 12 = 3$$
$$f_3' - f_2' = 18 - 15 = 3$$
$$f_4' - f_3' = 21 - 18 = 3$$
$$f_5' - f_2' = 24 - 21 = 3$$
$$f_6' - f_5' = 27 - 24 = 3$$
$$f_7' - f_6' = 30 - 27 = 3$$
$$f_8' - f_7' = 33 - 30 = 3$$
$$f_9' - f_8' = 36 - 33 = 3$$
$$f_{10}' - f_9' = 39 - 36 - 3$$
$$f_{11}' - f_{10}' = 43 - 39 = 4$$

Com base essas diferenças, nessa jogada o aluno percebe que:

- No primeiro passo distribui-se dois ($d = 2$) dados;
- Do segundo ao decimo passo distribui-se três ($d + 1 = 2 + 1 = 3$) dados;
- No decimo primeiro passo distribui-se quatro ($d + 2 = 2 + 2 = 4$) dados;

Com estes detalhes e os conhecimentos que tem obtidos no encontro com as Tarefa 1 e Tarefa 2, o aluno percebe que, essa jogada foi finalizada com $1 + 9 + 1 = 11$ passos, portanto, o número de passos para finalizar esta jogada é $1 + m + t$, sendo $m = 9$ e $t = 1$. Isto significa que, o número de casas que compõe o campo de jogo de um jogador é da forma $k = m \times (d + 1) + t$, com $t \neq d \wedge t \neq 0$.

Assim, $k = m \times (d + 1) + t = 9 \times (2 + 1) + 1 = 9 \times 3 + 1 = 27 + 1 = 28$.

Portanto, o número de casas que compõe o campo de jogo é 28 e o tabuleiro é do tipo $4 \times \frac{28}{2} = 4 \times 14$.

Haverá outra possibilidade em que o aluno poderá se ancorar para resolver a questão?

Esta questão colocamos acreditando que o aluno pode utilizar as seguintes reflexões para resolver a tarefa da alínea b):

Partindo das reflexões tidas no encontro com as Tarefa 1 e Tarefa 2 e os conhecimentos institucionalizados, a contagem de casas para finalizar a primeira jogada finaliza pode ser escrita nas formas:

- $f = i + d + m(d+1)$ se $k = m(d+1)$ ou $k = d + m(d+1)$ ou;
- $f = i + d + m(d+1) + t(d+2)$ se $k = m(d+1) + t$ com $t \neq d$.

Assim, conhecendo a última contagem, substitui-se os valores conhecidos nas formulas dadas para determinar primeiramente os valores de m e t, depois, determinar o valor de k, como segue:

- Se $k = m(d+1)$ ou $k = m(d+1) + d$, se tem:
  $f' = i + d + m(d+1)$ e $p = m + 1$.
  Como $f' = 43$, $i = 10$, $d = 2$ e $p = 11$, o aluno monta um sistema de equações e resolve-o, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 43 = 10 + 2 + m \times (2+1) \\ 11 = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 31 \\ m = 11 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{31}{3} \cong 10{,}3 \\ m = 10 \end{cases}$$

Da na primeira equação vem que $m \cong 10{,}3 \notin IN^*$. Portanto, k não pode ser da forma $m(d+1)$ nem da forma $m(d+1) + d$. No caso, o aluno prossegue com outra condição.

- Se $k = m \times (d+1) + t$ com $t \neq d$, se tem:
  $f' = i + d + m(d+1) + t \times (d+2)$ e $p = 1 + m + t$.
  Como $f' = 43$, $i = 10$, $d = 2$ e $p = 11$, o aluno monta um sistema de equações e resolve-o, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 43 = 10 + 2 + m(2+1) + t(2+2) \\ 11 = 1 + m + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3m + 4t = 31 \\ m + t = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} 3m + 4t = 31 \\ -3m - 3t = -30 \end{cases} \\ \hline 0m + t = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + t = 10 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 1 = 10 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 - 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ t = 1 \end{cases}$$

Do cálculo feito, vem que $m = 9 \in IN^*$ e $t = 1 \in IN^*$. Portanto, com estes dados pode se dizer que k é da forma $m \times (d+1) + t$. Assim temos:

$$k = m \times (d+1) + t = 9 \times (2+1) + 1 = 9 \times 3 + 1 = 27 + 1 = 28$$

Portanto, o número de casas que compõe o campo de jogo é 28 e o tabuleiro é do tipo $4 \times \frac{28}{2} = 4 \times 14$.

f) Análise da Tarefa 5

A quinta tarefa que é colocada aos alunos é formulada no seguinte:

Considere um tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×101 em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados. a) Quantos passos seriam necessários para finalizar a primeira jogada? b) Suponha que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 25. Em que casa a jogada finalizaria no passo 51? c) Suponha que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 13. Em que passo a jogada finalizaria na casa 117?

A tarefa objectiva levar os alunos a utilização ou aplicação das fórmulas que permite determinar o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada e, determinar a casa onde a primeira jogada finaliza. Na tarefa, é apresentado o tipo de tabuleiro em que se supõe a jogar ser efetuada e, indicado o número de dados que compõem cada casa na configuração inicial do tabuleiro. Com nesses dados, pede-se, primeiramente para determinar o número de passos para finalizar a primeira jogada, segundo, para determinar a casa onde o passo 51 finaliza, terceiro, para determinar o passo em que a jogada finaliza na casa 117.

Tal como na Tarefa 4, nesta tarefa, os estudantes não serão entregues as malhas quadriculadas para simular as jogadas ou auxiliar-se para reflexão das tarefas. Visa-se com isso que estudante mobilize as reflexões sobre a tarefa a partir dos elementos estruturais que constituiu nas tarefas anteriores.

No casso, supõe-se que o estudante, como o então conhecimento construído anteriormente, consiga resolver as a tarefa nas suas alíneas a), b) e c). O estudante precisaria:

- Verificar em quantos passos a primeira jogada finalizaria no tabuleiro do tipo 4×101, o que responderia à questão da alínea a).

Esta questão é resolvida verificando se $k = 2 \times 101 = 202$ é escrito na forma $k = m \times (d + 1)$ ou $k = m \times (d + 1) + t$. No caso, divide-se 202 por $d + 1 = 2 + 1 = 3$, que terá como resultado 67 e resto 1, isto é, $202 = 67 \times (2 + 1) + 1$. Neste caso, como o resto $t = 1$ e $1 \neq d = 2$, o número de passos nessa jogada é dado por 1+$m + t = 1 + 67 + 1 = 69$. Assim, em um tabuleiro do tipo 4×101 em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados, são necessários 69 passos para finalizar a primeira jogada.

Como é possível notar, aqui o estudante simplesmente aplica e analisa a relação que lhe permite determinar o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada em uma jogada de Ntxuva do tipo $4 \times n$.

- Determinar o número da casa onde finaliza ao 51º passo, em uma jogada iniciada na casa 25, o que responderia a alínea b).

Para resolver esta questão, se recorreria a relação que dá origem a f_p', relativas à contagem de casas de i até onde cada passo p da jogada finaliza. A relação em referência é utilizada na Tarefa 4 e aqui, conhecendo os valores de $m = 67$, $t = 1$, $d = 2$, $i = 25$ a expressamos da seguinte forma:

$$f_p' = \begin{cases} i + d + (p-1)(d+1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 1+m \\ i + d + m(d+1) + (p-1-m)(d+2), & se\ \ p = 2+m, \dots, 1+m+t \end{cases}$$

Substituindo os dados temos:

$$f_p' = \begin{cases} 25 + 2 + (p-1)(2+1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 1+67 \\ 25 + 2 + 67(2+1) + (p-1-67)(2+2), & se\ \ p = 2+67, \dots, 1+67+1 \end{cases}$$

$$f_p' = \begin{cases} 27 + 3(p-1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 68 \\ 27 + 67 \times 3 + 4(p-68), & se\ \ p = 69 \end{cases}$$

$$f_p' = \begin{cases} 27 + 3(p-1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 68 \\ 228 + 4(p-68), & se\ \ p = 69 \end{cases}$$

Como é de notar, a partir da relação f_p', percebe-se que o 51º passo se encontra entre o 1º passo ao 68º passo, que equivale a expressão $27 + 3(p-1)$. No caso, para determinar a casa onde este passo finaliza utilizamos a expressão:

$$f_p = MOD\left(f_p'; k\right)$$

Para $p = 51$ teremos: $f_{51} = MOD(f_{51}'; k) = MOD(27 + 3(51-1); 202)$

$$f_{51} = MOD(27 + 3 \times 50; 202) = MOD(177; 202) = 177$$

Neste caso, a casa onde o 51º passo finaliza é 177.

- Determinar o passo que finaliza na casa 117 sabendo que a jogada tenha sido iniciada na casa 13, o que responderia a alínea c).

A questão colocada nesta alínea é invertida da questão colocada na alínea b). A resolução segue os mesmos padrões da resolução anterior. A primeira coisa que se poderá fazer, neste caso, é verificar qual das formulas que compõe a relação f_p' será utilizada.

Deste modo, conhecendo os valores de $m = 67$, $t = 1$, $d = 2$, $i = 13$, primeiramente se deverá compor a relação que determina f_p', que será:

$$f_p' = \begin{cases} i + d + (p-1)(d+1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 1+m \\ i + d + m(d+1) + (p-1-m)(d+2), & se\ \ p = 2+m, \dots, 1+m+t \end{cases}$$

Substituindo os dados temos:

$$f_p' = \begin{cases} 13 + 2 + (p-1)(2+1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 1+67 \\ 13 + 2 + 67(2+1) + (p-1-67)(2+2), & se\ \ p = 2+67, \dots, 1+67+1 \end{cases}$$

$$f_p' = \begin{cases} 15 + 3(p-1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 68 \\ 15 + 67 \times 3 + 4 \times (p-68), & se\ \ p = 69 \end{cases}$$

$$f_p' = \begin{cases} 15 + 3 \times (p-1), & se\ \ p = 1, 2, \dots, 68 \\ 216 + 4 \times (p-68), & se\ \ p = 69 \end{cases}$$

Determinamos os extremos para f_p', que será:

$$\begin{aligned} 15 \le f_p' \le 216, &\quad se\ \ 1 \le p \le 68 \\ f_p' = 220, &\quad se\ \ p = 69 \end{aligned}$$

Segundo verificar em que intervalo $f_p = 117$ se enquadra na relação anterior. No caso, a partir da relação f_p' expressada a partir de seus extremos, nota-se que 117 se encontra entre a casa 18 e 216, o que sugere que se utilizará a fórmula $f_p' = 15 + 3(p-1)$ para determinar o passo que finaliza na casa 117. Assim teremos:

$f_p = 117 \le k = 202 \Rightarrow f_p = f_p' = 117$, pois, $MOD(117, 202) = 117$, logo:

$$15 + 3(p-1) = 117 \Leftrightarrow 3(p-1) = 117 - 15 = 102$$

$$p - 1 = \frac{102}{3} = 34 \Leftrightarrow p = 34 + 1 = 35$$

Portanto, o passo que finaliza na casa 117, na primeira jogada de uma partida de Ntxuva do tipo 4×101 que é iniciada a casa 13 e, que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados é igual a 35.

g) Análise da Tarefa 6

A Tarefa 6 que é colocada aos alunos é formulada no seguinte:

Suponha que se tenha um tabuleiro de Ntxuva do tipo $4 \times n$, em que, na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados.

a) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado na casa 2 e finalizado na casa 4, sendo que, para finalizar a jogada foram necessários 65 passos. Qual foi a dimensão do tabuleiro utilizado para o jogo?
b) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado e terminado na casa 2 e, para finalizar a mesma foram necessários 59 passos. Determine a dimensão do tabuleiro utilizado.
c) Suponha que a primeira jogada tenha iniciado na casa 2 e terminado na 7 e, para finalizar a mesma foram necessários 71 passos. Determine a dimensão do tabuleiro.

Tal como a Tarefa 4 e Tarefa 5, a Tarefa 6 objectiva levar os alunos a utilização ou aplicação das fórmulas que permite determinar o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada e a fórmula que permite determinar a casa onde a primeira jogada finaliza, para identificação da dimensão do tabuleiro que se utiliza em determinada jogada.

Na tarefa, é apresentado quatro principais dados, o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro, a casa onde a jogada inicia, a casa onde a jogada finaliza e o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada. Com nesses dados, pede-se, nas alíneas a), b) e c) para determinar essencialmente a dimensão do tabuleiro em que determinada jogada com estas características ocorreu.

As actividades parecem iguais, mas na essência, elas exigem uma análise quase diferenciada na sua resolução. Na alínea a), o tabuleiro que se propõe achar a dimensão é de natureza $k = m(d+1)$ e, na alínea b), o tabuleiro que se pretende achar a dimensão é de natureza $k = m(d+1) + t$, com $t = d$, isto é, $k = m(d+1) + d$. Para ambos os casos, a casa onde a primeira jogada finaliza é dada pela relação

$f = MOD(f'; k)$, em que $f' = i + d + m(d + 1)$ e o número de passos é dado por $1 + m$.

Na alínea c), o tabuleiro que se pretende achar a dimensão é de natureza $k = m \times (d + 1) + t$, com $t \neq d \wedge 0 < t < m$. Para este caso, a casa onde a jogada finaliza é dada pela relação $f = MOD(f'; k)$, em que $f' = i + d + m \times (d + 1) + t \times (d = 2)$ e o número de passos é dado pela relação $1 + m + t$.

Portanto, estes são os principais conhecimento que os estudantes devem ter desenvolvido, ao longo do trabalho com a Tarefa 1, Tarefa 2, Tarefa 3, Tarefa 4 e que o ajudarão a resolver a Tarefa 5. Nos desdobramentos seguintes, mostramos como estes conhecimentos poderiam ser utilizados para resolver as tarefas constantes nas alíneas a), b) e c).

- Na alínea a) se pede para determinar a dimensão $4 \times n$ do tabuleiro, conhecendo-se: a casa onde a jogada foi iniciada ($i = 2$) e finalizada ($f = 4$) a primeira jogada, o número de passos ($p = 65$) necessários para finalizar a jogada e número de dados ($d = 2$) colocados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro.

Conhecendo os valores de $i = 2$, $f = 4$, $p = 65$, $d = 2$, supõe-se que os estudantes recorram as condições que seguem abaixo e testa-las com os dados que tem:

Condição primeira: Se k é da forma $k = m \times (d + 1)$ ou $k = m \times (d + 1) + t$, com $t = d$, então, a casa onde a primeira jogada finaliza é $f = MOD(f'; k)$, sendo $f' = i + d + (p - 1)(d + 1)$, com $p = 1 + m$ (número de passos para finalizar a jogada).

Condição segunda: Se k é da forma $k = m \times (d + 1) + t$, com $t \neq d \wedge 0 < t < m$, então, a casa onde a primeira jogada finaliza é $f = MOD(f'; k)$, sendo $f' = i + d + m(d + 1) + (p - 1 - m)(d + 2)$, com $p = 1 + m + t$ (número de passos para finalizar a jogada).

Utilizando a condição primeira, seria formado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 1 + m \\ f' = i + d + (p - 1)(d + 1) \\ f = f' - rk \end{cases}$$

Sabendo que $i = 2$, $f = 4$, $p = 65$, $d = 2$, substituímos os dados no sistema acima e teremos:

$$= \begin{cases} 65 = 1 + m \\ f' = 2 + 2 + (65-1)(2+1) \\ 4 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 64 \\ f' = 196 \\ 4 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 64 \\ f' = 196 \\ 4 = 196 - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 64 \\ f' = 196 \\ rk = 192 \end{cases}$$

Aqui, $r = 1, 2, 3, \ldots$. Entretanto, deve se ter em conta que a divisão de k por $d + 1 = 2 + 1 = 3$ deve ter como quociente $m = 64$. No caso, o r que admite a condição anterior é $r = 1$. Assim, $rk = 192 \Leftrightarrow 1 \times k = 192 \Leftrightarrow k = 192$.

Portanto, da resolução que foi apresentada nos levou a determinar o valor de $k = 192$, que indica que, dado $i = 2$, $f = 4$, $p = 65$, $d = 2$, cada campo de jogo de um jogador é composto por 192 casas.

A dimensão do tabuleiro $4 \times n$, como é pedido na tarefa, é dada pela relação $k = 2n$. Assim, realizando as devidas deduções se tem $n = \frac{k}{2} = \frac{192}{2} = 96$, significado que o tabuleiro a que se efetuou o jogo com as características supracitadas é do tipo 4×92.

Nota: com base nos conhecimentos anteriores, sobretudo, os construídos através do encoro com as Tarefa 1, Tarefa 2, Tarefa 3, Tarefa 4, o aluno poderia analisar simplesmente os valores de i e f. NO caso, verificando a relação entre eles.

Por exemplo, para esta alínea, pode se verificar que $f = i + d = 2 + 2 = 4$, sendo que $i = 2$ e $fd = 2$. Nestas condições o número de casas que compõem um campo de jogo é do tipo $k = m(d + 1)$. Assim, sendo $p = 1 + m = 65$, $d = 2$, k será: $k = m(d + 1) = (p - 1)(d + 1) = (65 - 1)(2 + 1) = 64 \times 3 = 192$.

- Na alínea b) se pede para determinar a dimensão $4 \times n$ do tabuleiro, sabendo-se que: a primeira jogada inicia e finaliza na mesma casa ($i = 2$), o número de passos necessários para finalizar a jogada é $p = 59$ e o número de dados colocados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro é $d = 2$.

Pelos conhecimentos construídos nas tarefas anteriores, sabe-se que se a jogada inicia e termina na mesma casa é porque o número de casas que compõe um campo de jogo é dado por $k = m(d + 1) + t$, com $t = d$, isto é, $k = m(d + 1) + d$. Nestas condições sabe-se também o passo em que a jogada finaliza é dada por $p = 1 + m$.

Assim, sabendo que que $p = 59$ e $d = 2$, o número de casas que compõem um o campo de jogo será: $k = (p - 1)(d + 1) + d = (59 - 1)(2 + 1) + 2 = 58 \times 3 + 2 =$

$174 + 2 = 176$. Deste modo, podemos dizer que se a jogada inicia e termina na casa 4 ($i = f = 2$) e o número de passos para finalizar a jogada é 59, o número de casas que compõem o campo um dos campos de jogo é 176. Neste caso, a dimensão do tabuleiro é do tipo $4 \times \frac{176}{2} = 4 \times 88$.

É possível que os alunos não trilhem por estes caminhos, talvez por esquecimento de algumas características construídas sobre o processo de distribuição de dados na primeira jogada de uma partida do Ntxuva. Contudo, cogitamos que, fora do caminho anterior, eles possam seguir o seguinte raciocínio:

Neste segundo raciocínio, os estudantes tenderam novamente a utilizar as relações apontadas anteriormente nas condições primeira e segunda. No caso, o estudante testa a condição primeira, se não dá certo, testa a condição segunda, como se descreve a seguir:

Utilizando a condição primeira, seria formado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 1 + m \\ f' = i + d + (p - 1)(d + 1) \\ f = f' - rk \end{cases}$$

Sabendo que $i = f = 2, p = 59, d = 2$, substituímos os dados no sistema acima e teremos:

$$\begin{cases} 59 = 1 + m \\ f' = 2 + 2 + (59 - 1)(2 + 1) \\ 2 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 58 \\ f' = 178 \\ 2 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 58 \\ f' = 178 \\ 2 = 178 - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 58 \\ f' = 178 \\ rk = 176 \end{cases}$$

Aqui, $r = 1, 2, 3, \ldots$. Entretanto, deve se ter em conta que a divisão de k por $d + 1 = 3$ deve ter como quociente $m = 58$. No caso, o r que admite a condição anterior é $r = 1$. Assim, $rk = 176 \Leftrightarrow 1 \times k = 176 \Leftrightarrow k = 176$.

Portanto, da resolução que foi apresentada nos levou a determinar o valor de $k = 176$, que indica que, dado $i = f = 2$, $p = 59$, $d = 2$, cada campo de jogo de um jogador é composto por 176 casas.

A dimensão do tabuleiro $4 \times n$, como é pedido na tarefa, é dada pela relação $k = 2n$. Assim, realizando as devidas deduções se tem $n = \frac{k}{2} = \frac{176}{2} = 88$, significado que o tabuleiro a que se efetuou o jogo com as características supracitadas é do tipo 4×88.

- Na alínea c) se pede para determinar a dimensão $4 \times n$ do tabuleiro, sabendo-se que: a primeira jogada é iniciada em $i = 2$, é finalizada em $f = 7$, o número de passos necessários para finalizar a jogada é $p = 71$ e o número de dados colocados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro é $d = 2$.

Tal como foi feito nas alíneas a) e b), o tratamento da tarefa da alínea b) é baseado na aplicação das condições primeira e segunda já descritas na alínea a) desta tarefa.

Então, o estudante poderá testar a primeira condição, formado primeiramente o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 1 + m \\ f' = i + d + (p-1)(d+1) \\ f = f' - rk \end{cases}$$

Sabendo que $i = 2$, $f = 7$, $p = 71$, $d = 2$, substituímos os dados no sistema acima e teremos:

$$\begin{cases} 71 = 1 + m \\ f' = 2 + 2 + (71-1)(2+1) \\ 7 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ f' = 214 \\ 7 = f' - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ f' = 214 \\ 7 = 214 - rk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ f' = 214 \\ rk = 207 \end{cases}$$

Aqui, $r = 1, 2, 3, \ldots$. Entretanto, deve se ter em conta que a divisão de k por $d + 1 = 3$ deve ter como quociente $m = 70$, ou seja, vede existir um $r \in IN^*$ tal que $\frac{207}{r} = 70 \times 3 + a$.

Assim, se tomamos $r = 1$ obtemos $k = \frac{207}{1} = 207$, que dividido por 3 se tem: $207 = 69 \times 3 + 0$. Como se pode ver, o quociente não da 70, isto é, $69 \neq 70$. Portanto, $k = 207$ não pode ser o número de casas procurado. Portanto, se tomarmos um r cada vez mais maior e aproximado a 207, k tenderá a 1 e, acima de tudo, o quociente da divisão de k por 3 também tenderá a ser cada vez menor e diferente de 70. Com isso, podemos dizer que k não pode ser escrito na forma $k = m(d + 1)$.

Além disso, no sistema de jogo Ntxuva k não pode ser ímpar, pois, $k = 2n$. No caso, para $r = 1$ vem que $n = \frac{k}{2} = \frac{207}{2} \notin PAR$. Tomando qualquer r também $\frac{k}{2} = \frac{207}{2r} \notin PAR$.

A ser assim, testamos a condição segunda para ver se k pode ser expresso na forma $m \times (d + 1) + t$, com $t \neq d \wedge 0 < t < m$.

Assim, se $k = 2n = m(d+1) + t$ com $t \neq d \wedge 0 < t < m$, então $f = i + d + m(d+1) + t(d+2) - rk$ e $p = 1 + m + t$. Nesta condição, formamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 1 + m + t \\ k = m(d+1) + t \\ f' = i + d + m(d+1) + t(d+2) \\ f = f' - rk \end{cases}$$

Sabendo que $i = 2$, $f = 7$, $p = 71$, $d = 2$, substituímos os dados no sistema acima e teremos:

$$\begin{cases} f' = 2 + 2 + m(2+1) + t(2+2) \\ 7 = f' - rk \\ k = m(2+1) + t \\ 71 = 1 + m + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = 4 + 3m + 4t \\ 7 = 4 + 3m + 4t - rk \\ k = 3m + t \\ m + t = 70 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{f' = 4 + 3m + 4t} \\ 3m + 4t - rk = 3 \\ 3m + t - k = 0 \\ m + t + 0k = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -1 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3m + 4t - rk = 3 \\ 3m + t - k = 0 \\ m + t + 0k = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4t - rk = 3 \\ -3m - t + k = 0 \\ -3m - 3t - 0k = -210 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3m + 4t - rk = 3 \\ 3t + (1-r)k = 3 \\ t - rk = -207 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4t - rk = 3 \\ 3t + (1-r)k = 3 \\ -3t + 3rk = 621 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4t - rk = 3 \\ 3t + (1-r)k = 3 \\ (1+2r)k = 624 \end{cases}$$

Na última equação do sistema de acima obtemos $(1+2r)k = 642$. Como alíneas anteriores, aqui o $r = 1, 2, 3, \ldots$. No entanto, a divisão de k por $d + 1 = 3$ deve ter como quociente m e resto t, de tal modo que, $1 + m + t = 71$, ou seja, deve existir um $r \in IN^*$ tal que $\frac{624}{1+2r} = 3m + t$ e $1 + m + t = 71$ $(m + t = 70)$.

Assim, tomando o menor r, isto é, $r = 1$, $k = \frac{624}{1+2\times 1} = \frac{624}{3} = 208$, que dividido por 3 se tem: $208 = 69 \times 3 + 1$, sendo $m = 69$ e $t = 1$. Como se pode notar, $1 + m + t = 1 + 69 + 1 = 71$. Portanto, 208 é o número de casas que compõem um campo de jogo Ntxuva.

Portanto, como $k = 2n$, vem que $n = \frac{k}{2} = \frac{208}{2} = 104$. Este dado nos indica que, nas condições dadas na alínea c), o tipo de tabuleiro a que realizou a jogada é 4×104.

9. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Nesta secção se apresenta e analisa os dados produzidos no âmbito da experimentação didáctica. Aqui, fizemos uma leitura dos acontecimentos didacticos em relação as actividades desenvolvidas com os alunos. Inicialmente descrevemos e analisamos os acontecimentos da fase pré-experimental, depois, os acontecimentos da fase experimental a que vamos designar de analise a posteriori.

9.1. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS ACONTECIMENTOS DA FASE PRÉ-EXPERIMENTAL

O trabalho com alunos iniciou-se nesta fase a que designamos fase pré-experimental. Nesta fase, tínhamos como principal objectivo criar o meio que possibilitasse os alunos se assujeitar ao jogo Ntxuva, antes de integrá-lo ao ensino da matemática. Por isso mesmo, dedicamos um tempinho inicial com os alunos para a disseminação da cultura sobre Ntxuva, contemplando o conhecimento histórico e de utilização prática do jogo.

Assim, depois que me fiz presente a escola e ter-me apresentado a direção da mesma, foi-me apresentado o professor da disciplina de Matemática, que cedeu seus alunos e apoiou no processo da operacionalização da experimentação. Assim, depois que nos foi apresentado os alunos, apresentamos os objectivos e plano de actividades sobre o que iriamos trabalhar e desenvolver com eles. Ainda que o professor nos tenha cedido seus alunos, depois que esclarecemos o propósito da actividade, pedimos que os alunos se voluntariassem para contemplar a equipe ou o colectivo de estudo, tendo sido contemplados 16 alunos.

Neste que constituiu o primeiro encontro com os estudantes, que durou cerca de uma hora e meia, antes de qualquer trabalho com o jogo Ntxuva, administramos um questionário preliminar aos alunos. O segundo encontro teve uma duração de uma hora e meia, onde foi apresentado aos alunos o jogo Ntxuva a partir do seu contexto histórico, social e da prática (uniformização das regras de jogo de acordo com as regras estabelecidas no FNJT, realização de algumas partidas para consolidação das regras). Neste mesmo encontro, iniciou-se a organização do torneiro, a formação das equipes da primeira fase do jogo e a explicação do sistema de torneiro que iria se efetuar.

No terceiro e quarto encontro foi realizado o torneiro, que finalizou com a administração de duas questões de reflexão e uma premiação simbólica aos alunos.

A seguir descrevemos os acontecimentos desta fase. Pela natureza da actividade, estes encontros foram muito longos, pois, cada jogo era efetuado numa variação de 20 a 30 minutos. Portanto, para finalizar o torneio, foi necessário um tempo total de sete horas, cerca de três horas e meia para cada encontro.

9.1.1. Resultados do questionário preliminar

O questionário preliminar visou perceber até que ponto os alunos tinham conhecimento sobre o jogo Ntxuva. Responderam ao questionário 16 alunos, entre eles, 9 rapazes e 7 meninas, com idades compreendidas entre 16 e 23 anos.

Para responder ao objectivo do mesmo, o questionário foi constituído de quatro partes essências, nomeadamente: conhecimento sobre jogos locais na comunidade; utilização dos jogos locais no espaço escolar; conhecimento geral e utilização do jogo em ambiente escolar e o conhecimento prático do jogo Ntxuva.

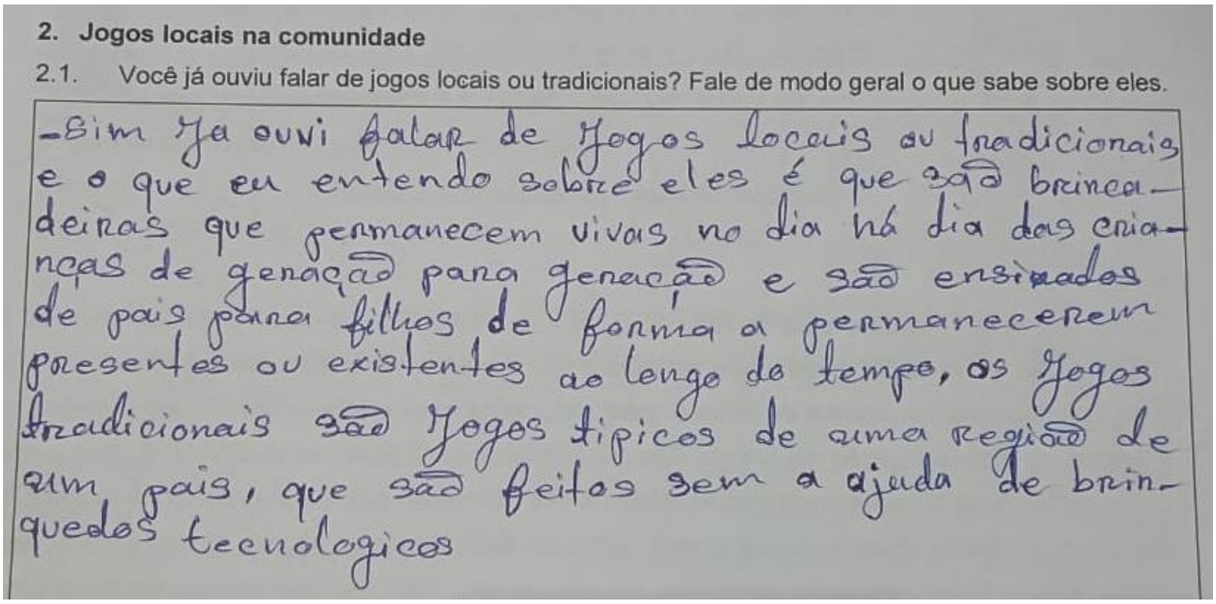
a) Conhecimento sobre jogos locais na comunidade

Esta parte foi constituída de 6 questões que visavam, a partir delas, compreender se aos alunos tinham noção ou conheciam jogos locais praticados em suas comunidades. A importância deste questionamento reside no facto de que, nos dias actuas, com as diversas influencias culturais e tecnológicas, as crianças tem estado menos familiarizados com a sua cultura o que leva determinadas práticas locais ao esquecimento.

No Anexo 19 são apresentados os questionários completos preenchidos pelos alunos. A seguir, apresentamos de forma sumarizada as respostas dadas.

Na primeira questão, questionamos se os alunos tinham ouvido falar de jogos locais ou tradicionais e que contassem um pouco do que sabem sobre eles. Como era de se esperar, todos alunos responderam que já ouviram falar sobre os jogos locais e que, entre outras atribuições, eles tinham haver com brincadeiras que permanecem vivas no dia-a-dia das crianças, transmitidas de geração a geração e são ensinados de pais para filhos. Ainda foi sinalizado que os jogos tradicionais são aqueles feitos sem ajuda da tecnologia convencional. Na Figura 71 é ilustrado parte das respostas dadas pelos alunos.

Figura 71: Parte de respostas da questão 2.1. do questionário dirigido aos alunos



2. Jogos locais na comunidade

2.1. Você já ouviu falar de jogos locais ou tradicionais? Fale de modo geral o que sabe sobre eles.

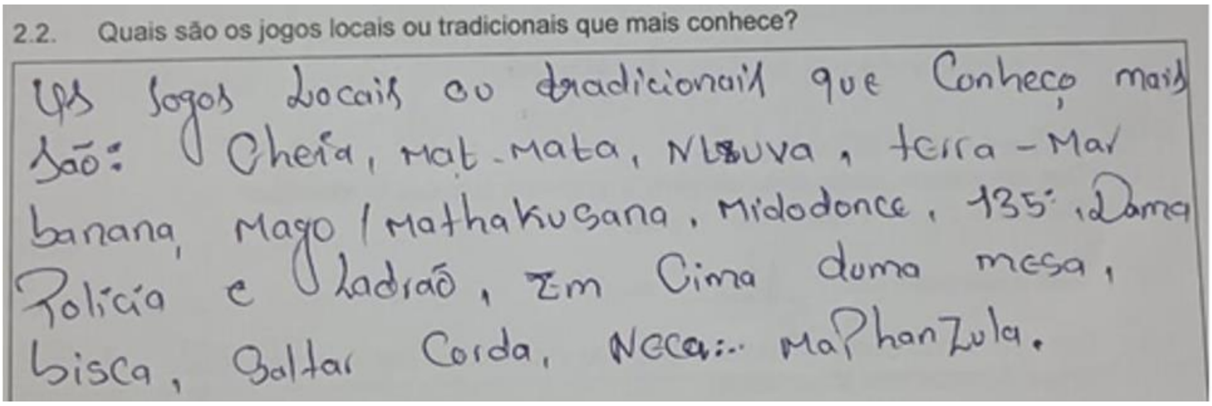
-Sim Ja ouvi falar de Jogos locais ou tradicionais
e o que eu entendo sobre eles é que são brinca-
deiras que permanecem vivas no dia há dia das cria-
nças de geração para geração e são ensinados
de pais para filhos de forma a permanecerem
presentes ou existentes ao longo do tempo, os Jogos
tradicionais são Jogos tipicos de uma região de
um pais, que são feitos sem a ajuda de brin-
quedos tecnologicos

Fonte: dados da pesquisa – Anexo 19 (2023)

Na segunda questão buscamos identificar quais jogos locais ou tradicionais os alunos conheciam. Das respostas dadas, percebemos que os alunos conhecem inúmeros jogos locais praticados em Moçambique. Alguns dos jogos apontado por eles são: banana ainda, bisca, cheia, corre sai, dama, gira garrafa, jogo 135, Mapanzura, Matacuzana, mata-mata, Midosse, Neca, nome-terra, Ntsolo (Ntxuva, Bao), polícia-ladrão, rouba bandeira, salto a corda, terra-mar, tic-tac, xadrez. Na Figura 72 é ilustrado parte das respostas dos alunos sobre a questão em referência.

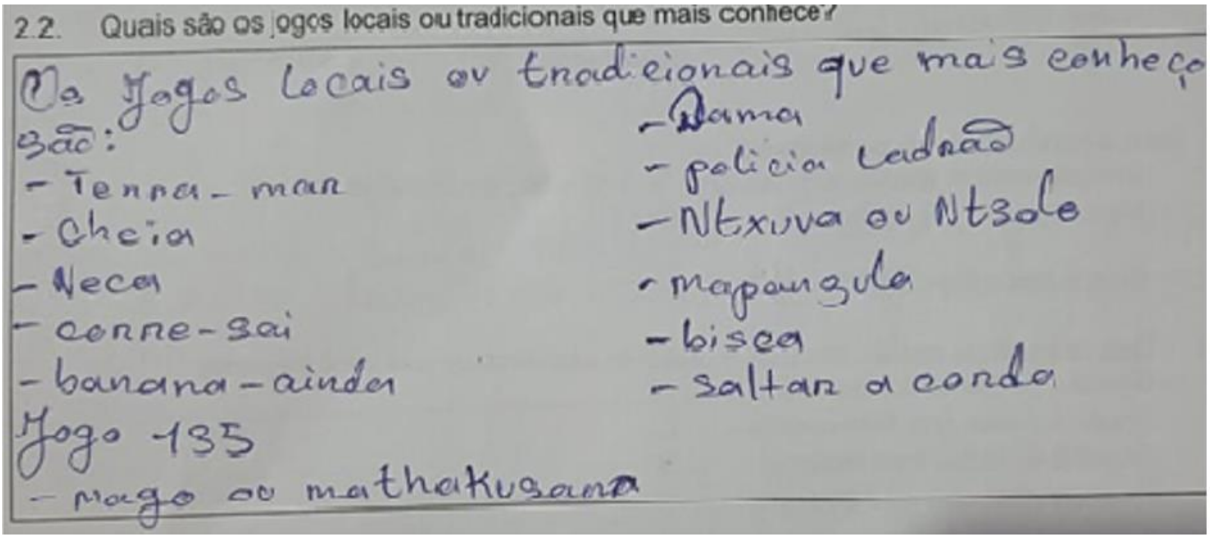
Estes jogos são jogados na maioria das vezes por crianças ou adolescentes entre 7 a 20 anos de idade, com exceção do jogo Ntxuva que é praticado pessoas de quase todas idades.

Figura 72: Parte de respostas da questão 2.2. do questionário dirigido aos alunos



2.2. Quais são os jogos locais ou tradicionais que mais conhece?

Os Jogos Locais ou tradicionais que Conheço mais são: Cheia, mat-mata, Ntxuva, terra-Mar banana, Mago / Mathakusana, Midodonce, 135, Dama Polícia e ladrão, Em Cima duma mesa, bisca, Saltar Corda, Neca:.. MaPhanZula.



2.2. Quais são os jogos locais ou tradicionais que mais conhece?

Os Jogos Locais ou tradicionais que mais conheço são:

- Terra-mar
- Cheia
- Neca
- corre-sai
- banana-ainda

Jogo 135

- mago ou mathakusana
- Dama
- policia Ladrão
- Ntxuva ou Ntsole
- mapangula
- bisca
- saltar a corda

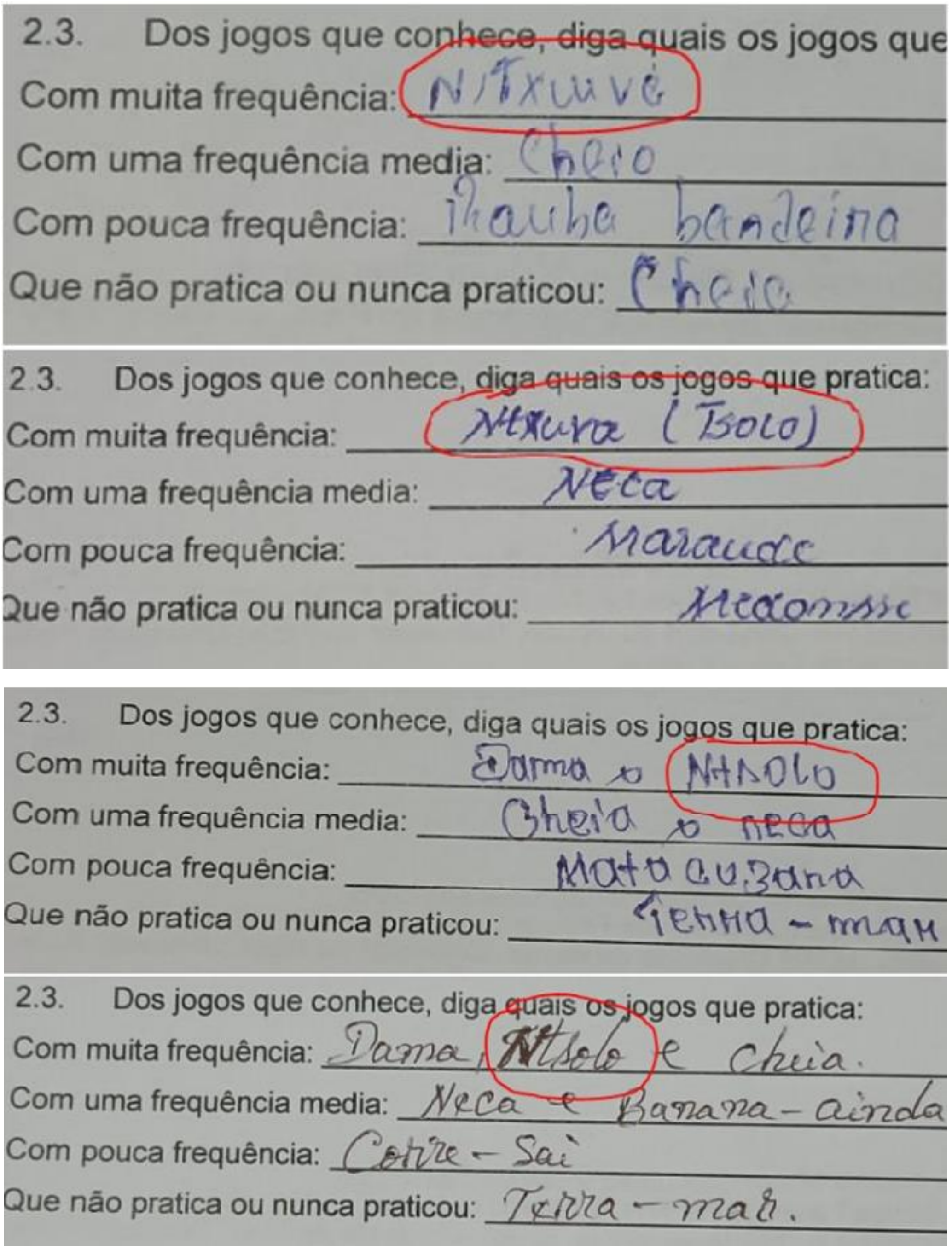
Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

Na terceira questão, buscamos identificar quais dos jogos locais indicados anteriormente os alunos praticam com muita frequência. Mas do que isso, visamos compreender se o Ntxuva estava entre as preferências dos alunos pelos jogos locais. De acordo com as respostas, os jogos mais praticados pelos alunos são: neca, cheia, dama, Ntxuva, Matacuzana, banana, jogo 135, saltar corda, midosse, mata-mata, tic-tac, etc.

Neste conjunto de jogos que constitui preferência dos alunos, boa parte deles aponta o jogo Ntxuva como o jogo que tem praticado frequentemente. Assim, ainda que o questionário tenha sido dirigido a um pequeno grupo alvo, os resultados desta questão nos remeteram a ideia de que o jogo Ntxuva é ainda um dos jogos potencialmente preferido e praticado em Moçambique. Na

Figura 73 é ilustrado parte das respostas da terceira questão.

Figura 73: Parte de respostas da questão 2.3. do questionário dirigido aos alunos


2.3. Dos jogos que conhece, diga quais os jogos que
Com muita frequência: Nitxuvé
Com uma frequência media: Cheio
Com pouca frequência: Ilhauha bandeira
Que não pratica ou nunca praticou: Cheio

2.3. Dos jogos que conhece, diga quais os jogos que pratica:
Com muita frequência: Ntxuva (Tsolo)
Com uma frequência media: Neca
Com pouca frequência: Marauce
Que não pratica ou nunca praticou: Nteomssi

2.3. Dos jogos que conhece, diga quais os jogos que pratica:
Com muita frequência: Dama e Ntsolo
Com uma frequência media: Cheia e Neca
Com pouca frequência: Mato Cuzana
Que não pratica ou nunca praticou: Terra - mar

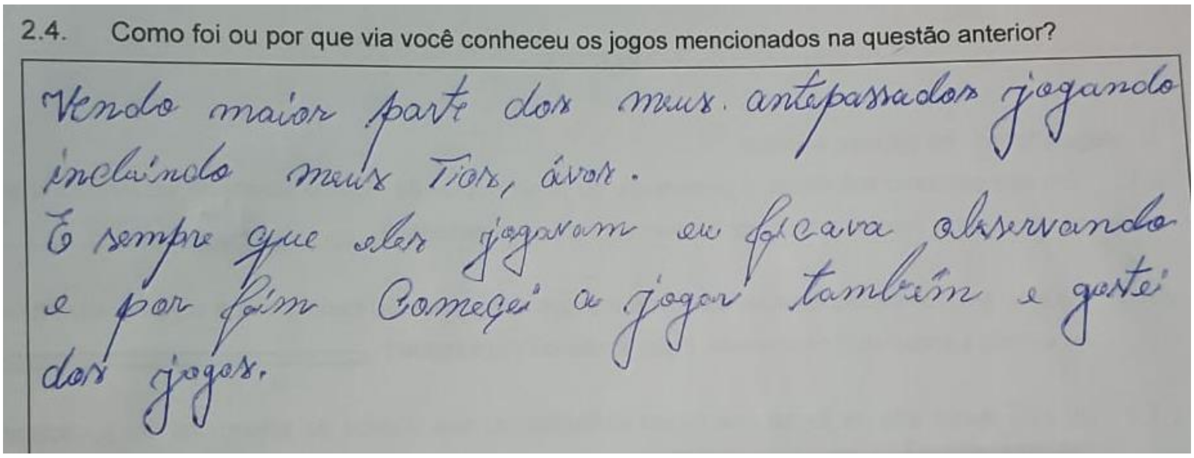
2.3. Dos jogos que conhece, diga quais os jogos que pratica:
Com muita frequência: Dama, Ntsolo e Chuia.
Com uma frequência media: Neca e Banana-ainda
Com pouca frequência: Corre - Sai
Que não pratica ou nunca praticou: Terra - mar.

Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

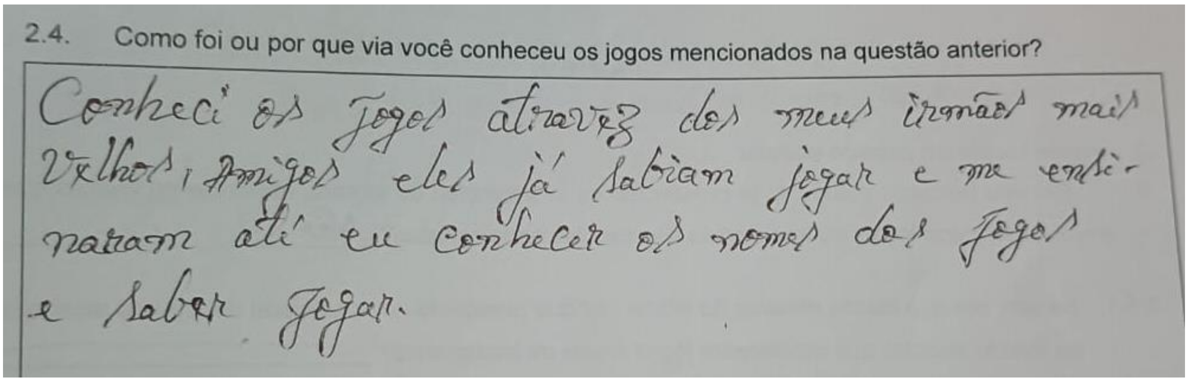
Na quarta questão, "*como foi ou por que via você conheceu os jogos mencionados na questão anterior?*", buscamos compreender como o aluno conheceu os jogos que identificou nas questões 2 e 3. As respostadas dadas apontaram que os alunos conheceram estes jogos por via de seus amigos, seus irmãos mais velhos, seus tios, pais e avós. Na Figura 74 são ilustradas algumas das respostas dadas pelos alunos.

De qualquer das formas, nota-se aqui que, há uma tendência destes jogos continuarem a ser passados uns aos outros de forma geracional, por exemplo, quando os alunos apontam ter conhecido o jogo por via de seus irmãos mais velhos, pais, tios e avós, uma prática que é típica de disseminação das práticas socioculturais locais ou tradicionais.

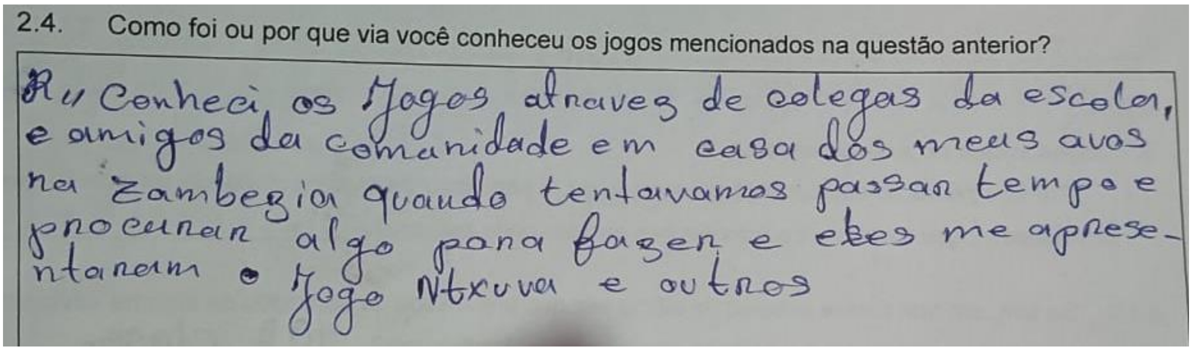
Figura 74: Parte de respostas da questão 2.4. do questionário dirigido aos alunos


2.4. Como foi ou por que via você conheceu os jogos mencionados na questão anterior?

Vendo maior parte dos meus antepassados jogando incluindo meus Tios, ávos.
E sempre que eles jogavam eu ficava observando e por fim Comecei a jogar também e gostei dos jogos.


2.4. Como foi ou por que via você conheceu os jogos mencionados na questão anterior?

Conheci os Jogos atravez dos meus irmãos mais velhos, Amigos eles já sabiam jogar e me ensi-naram até eu conhecer os nomes dos Jogos e saber jogar.


2.4. Como foi ou por que via você conheceu os jogos mencionados na questão anterior?

R/ Conheci os Jogos atraves de colegas da escola, e amigos da comunidade em casa dos meus avos na Zambezia quando tentavamos passar tempo e procurar algo para fazer e eles me aprese-ntaram o Jogo Ntxuva e outros

Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

A quinta questão, "s*e você se tivesse que participar de um campeonato, em qual dos jogos você preferiria se candidatar?*", foi colocada no sentido de perceber, indirectamente, até que ponto o jogo Ntxuva estaria entre as preferências dos alunos para praticá-lo, de modo que, o jogo não seja introduzido entre os alunos de forma forçada sem o seu interesse. Mas do que isso, o interesse pelo jogo levaria os alunos a mais engajamento nas actividades de pesquisas que seguem na fase de experimentação.

As respostas a esta questão apontaram, em uma maioria não absoluta, que os alunos optariam pelo jogo Ntxuva se fossem participar de um campeonato. Outros jogos como: dama, neca e salto de corda também foram apontados como preferencias para participar em um campeonato, mas não em grade número de alunos.

Ainda assim, questionamos também se os alunos teriam alguém que os pudesse treinar em caso de participar em um campeonato. Na sua totalidade, sinalizaram que sim, teriam. A ideia, era também de ter informações se em suas comunidades há pessoas potencialmente treinadas e conhecedoras dos jogos, capaz de os dar suporte em casos de duvidas extremas na prática dos jogos locais. A partir da resposta favorável que deram, é possível dizer que nestas comunidades ainda há potencias praticantes destes jogos e que conhecem as regras dos jogos apontados.

b) Utilização dos jogos locais no espaço escolar

Esta parte foi constituída de 2 questões que visavam compreender, se aos alunos ao longo de sua vida estudantil utilizaram jogos locais ou tradicionais em espaço escolar, quer para diversão como também pelos professores para o ensino de algum conteúdo escolar. No final das contas, a ideia era de saber se os alunos tem familiaridade com a utilização de jogos na produção do saber escolar.

Em relação a primeira questão, "*em seu percurso estudantil já presenciou ou já participou de alguma actividade ou evento que envolvesse jogos locais ou tradicionais nas escolas onde estudou?*", a maior parte dos alunos que responderam ao questionário sinalizaram que nunca utilizaram jogos locais em espaços escolares.

Ainda assim, há três alunos que afirmaram ter utilizado jogos locais em espaço escolar. Para esse grupo, como colocam em suas respostas, os jogos foram introduzidos em espaço escolar "para que tivessem conhecimentos gerais sobre os jogos locais e se divertissem". Estre os jogos utilizados em espaço escolar estão: Matacuzana, neca, mata-mata, cheia, jogo 135, midosse.

Em relação a segunda questão, "*especificamente em ambiente de sala de aulas, alguma vez teve oportunidade de praticar um jogo para aprender alguma matéria ou conteúdo?*", também boa parte dos alunos informaram que nunca praticaram jogos locais em sala de aulas para aprender alguma matéria. Os poucos que indicaram ter utilizado algum jogo em sala de aulas, apontam para aulas de "educação física", para tratar de conteúdos ligados a "movimentação de corpos, corridas de velocidade". Para estes conteúdos, foram utilizados jogos como: salto a corrida, futebol, cheia.

De todo jeito, as respostas dadas pelos alunos nesta parte apontaram, em espaços escolares, muito pouco se não nunca se tem utilizado jogos escolares como meio didático. Os poucos casos de utilização são apontados para uso de jogos locais na disciplina de Educação Física, o que não causa estranheza, tendo em conta a natureza da disciplina. Não foram apontados traços de utilização dos jogos locais para o ensino da matemática.

Neste caso, para os alunos que participaram da pesquisa, esta seria uma primeira experiência em trabalhar com jogos locais para o ensino da matemática.

c) Conhecimento geral sobre a utilização do jogo Ntxuva em ambiente escolar, em particular, no ensino da matemática

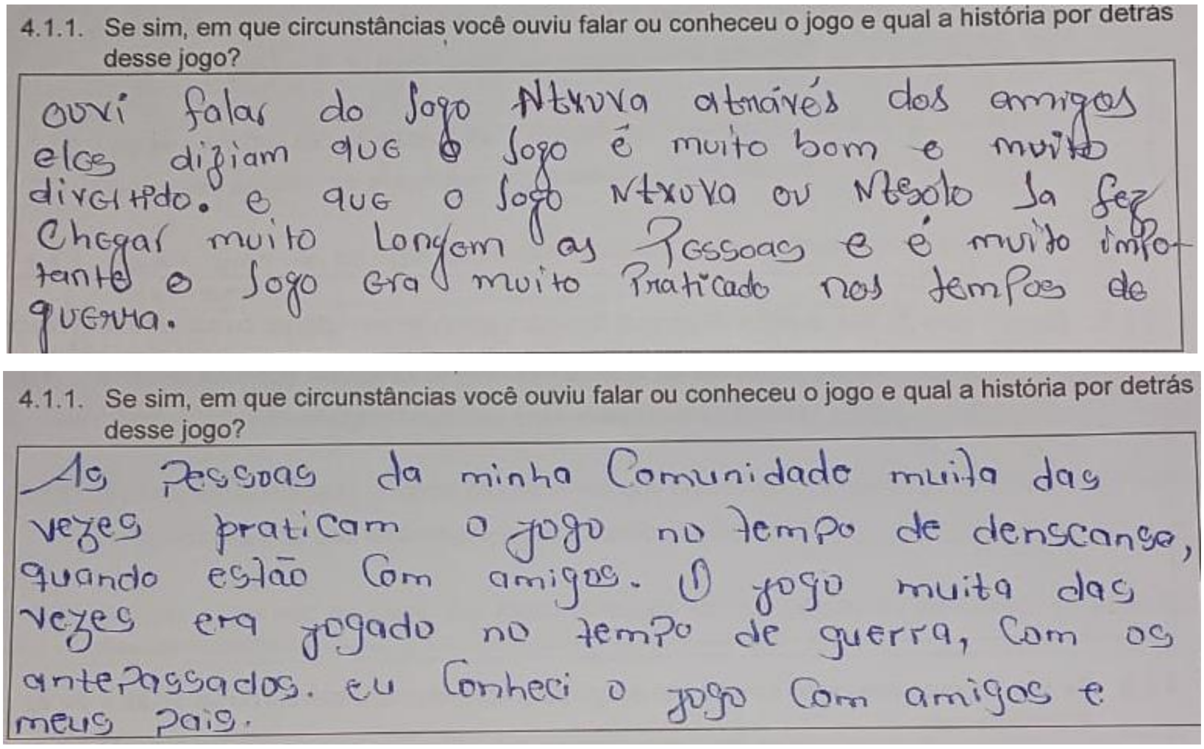
A terceira parte foi constituída de três questões, cada uma delas com suas subquestões. Nas questões anteriores, em perguntas não directas, percebeu-se que o Ntxuva vive nos espaços de lazer e diversão dos alunos. Com as questões desta parte, objectivávamos compreender de forma especifica, se os alunos tem o conhecimento sobre o jogo Ntxuva e sua integração no ensino da matemática.

Na primeira questão, questionamos se os alunos teriam ouvido falar ou conhecem o jogo Ntxuva. Como era de se esperar, todos os estudantes informaram em suas respostas que conhecem o jogo. Esta resposta positiva em relação ao conhecimento sobre o jogo levou os alunos a responderem outras três subquestões.

A primeira subquestão convidava os alunos a explicarem-se em que situação conheceram o Ntxuva e qual a história que conhecem sobre o jogo. Entre suas respostas destaca-se que os alunos conheceram o jogo Ntxuva através de seus amigos, irmãos mais velhos, seus primos, tios, avós, tal como conheceram outros jogos.

Com relação a história do jogo, pouco foi dito a respeito. Entretanto, o pouco relato sinaliza que o jogo era jogado pelos soldados locais no tempo colonial, para se relaxarem em tempos de descanso. Foi também sinalizado que o jogo é utilizado pelos comerciantes bem como os cambiadores locais em seu tempo de descanso, quando esperam por seus clientes. Aos demais praticantes, tem utilizado o jogo para se divertirem, se distraírem.

Figura 75: Parte de respostas da questão 4.1.1. do questionário dirigido aos alunos


4.1.1. Se sim, em que circunstâncias você ouviu falar ou conheceu o jogo e qual a história por detrás desse jogo?

Ouvi falar do jogo Ntxuva através dos amigos eles diziam que o jogo é muito bom e muito divertido. e que o jogo Ntxuva ou Ntsolo ja fez chegar muito longom as pessoas e é muito impor-tante o jogo era muito praticado nos tempos de guerra.

4.1.1. Se sim, em que circunstâncias você ouviu falar ou conheceu o jogo e qual a história por detrás desse jogo?

As pessoas da minha Comunidade muita das vezes praticam o jogo no tempo de denscanse, quando estão Com amigos. O jogo muita das vezes era jogado no tempo de guerra, Com os antepassados. eu Conheci o jogo Com amigos e meus pais.

Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

Na segunda e terceira subquestão objectivávamos saber se os alunos conheciam o jogo Ntxuva por outras designações. Colocamos está intensão em nossas questões pelo facto de, historicamente, o Ntxuva ser um jogo que tomou várias designações em diversas regiões onde foi se propagando e instalado como elemento cultural. O nome Ntxuva, como foi dito anteriormente, é a designação dada na zona sul de Moçambique, mas que tem sido uniformizado por conta do festival dos jogos tradicionais.

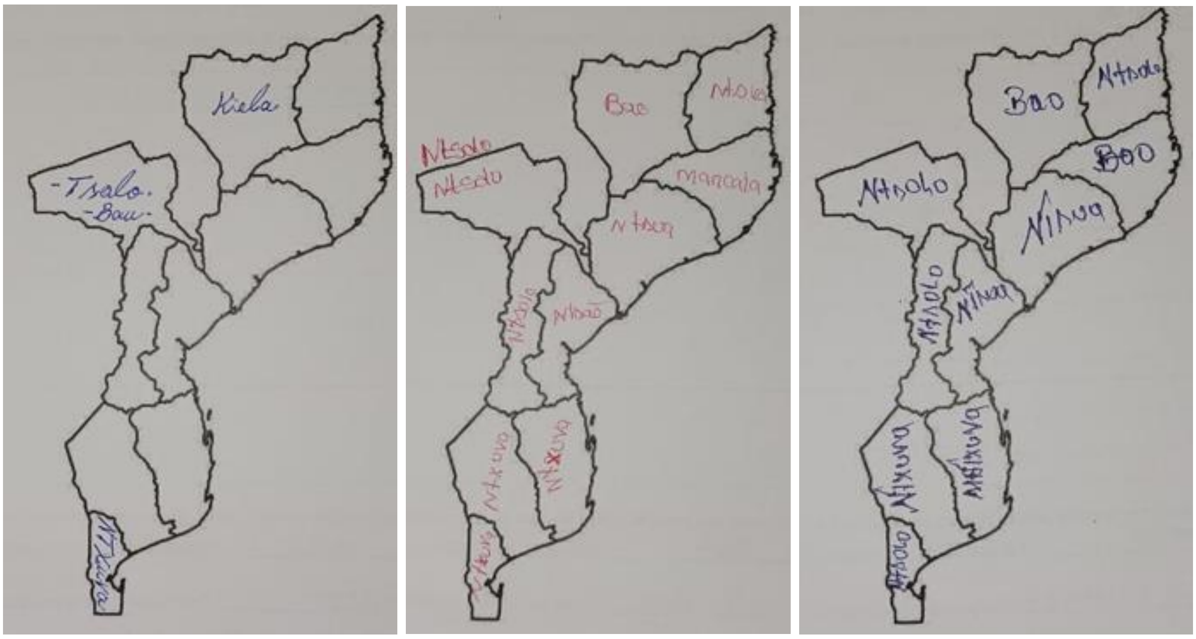
Assim, pedimos que os alunos mencionassem outras designações que conhecem sobre Ntxuva e que mapeassem as designações por província dentro do país Moçambique. Na Figura 76 é ilustrado parte do mapeamento das designações por províncias. Algumas dessas designações apontadas pelos alunos são: Kiala, Bao, Ntsua, Tsolo, Ntxuva, Mancala.

Estes dados que já foram apontados subsecção 5.1, mapa 5 atestam ainda mais que os alunos tem o conhecimento sobre o jogo Ntxuva, pelo que, a sua integração ao ensino da matemática poderia ser interessante, podendo-se associar a cultura e ao conhecimento acadêmico.

Ainda fizemos outros questionamentos para perceber se os alunos teriam em algum momento de sua vida estudantil utilizado o Ntxuva em sala de aulas para abordagem de algum conteúdo matemática. Nas duas questões que seguiram, nomeadamente "*alguma em sua trajetória estudantil algum professor já utilizou o jogo Ntxuva para ensinar alguma matéria ou conteúdo?*" e "*especificamente na disciplina de matemática, alguma vez já foi utilizado o jogo Ntxuva para ensinar alguma matéria ou conteúdo?*", os alunos responderam que nunca utilizaram o jogo Ntxuva para aprender a matemática.

De qualquer forma, esta resposta era de esperar, uma vez que foi demonstrado que o ensino da matemática no geral e em particular em Moçambique apresenta-se de forma rotineira e não leva em conta as sabedorias locais para produção do conhecimento escolar. Isso atesta mais uma vez o vazio didático que se tem no que concerne a integração das práticas socioculturais contra-hegemônicas no ensino da matemática.

Figura 76: Parte de respostas da questão 4.1.2. e 4.1.3 do questionário dirigido aos alunos



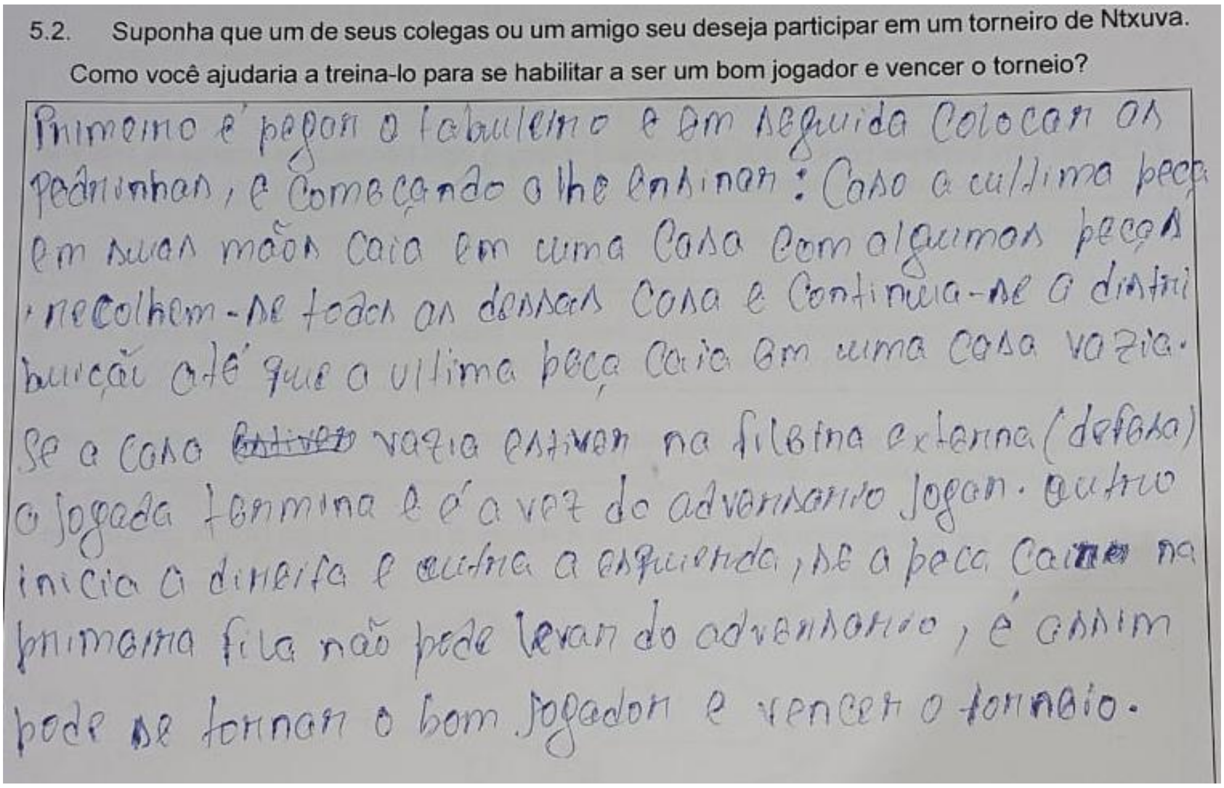
Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

d) Conhecimento da prática com o jogo Ntxuva

A quarta parte foi constituída por duas questões. A ideia das questões era de saber se os alunos poderiam participar de um torneiro de Ntxuva caso fossem convidados a participar e em caso de apoiar um amigo em um treinamento sobre o jogo, como faria para ajudá-lo. Estas questões foram importantes para compreender se o aluno tem a noção das exigências práticas para jogar o Ntxuva, um elemento importante e que nos conduziria a trazer, mais tarde, um alinhamento em termo das regras do jogo.

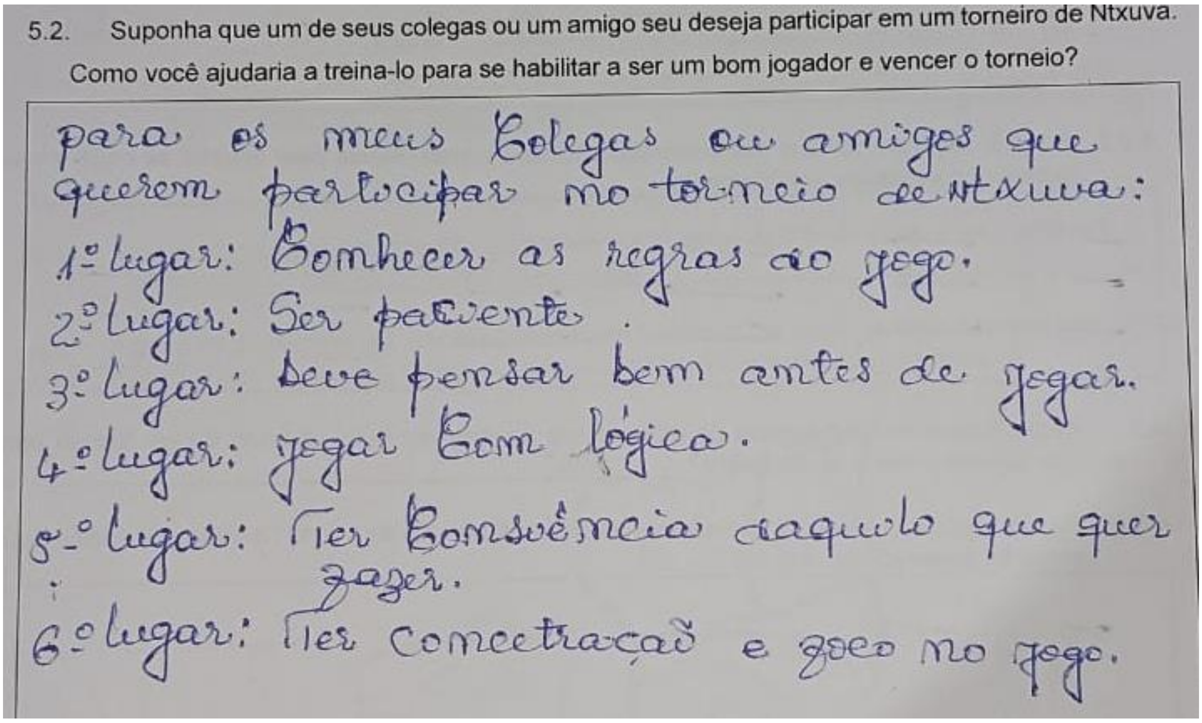
Em suas respostas, todos alunos responderam que poderiam claramente participar de um terneiro de Ntxuva e sobre a ajuda que poderiam prestar a algum amigo que quisesse participar do torneiro, os alunos apontaram alguns elementos, tais como: explicar as regras do jogo, ser atencioso, pensar ante de jogar, antes de iniciar a jogar pensar onde sua jogada irá terminar. Além disso, os alunos demostraram que conhecem um pouco das regras do jogo, explicando algumas das regras que são utilizadas para jogar o Ntxuva. Na Figura 77 é ilustrado algumas das respostas dos alunos sobre o questionamento em causa.

Figura 77: Parte de respostas da questão 5 do questionário dirigido aos alunos



5.2. Suponha que um de seus colegas ou um amigo seu deseja participar em um torneiro de Ntxuva. Como você ajudaria a treina-lo para se habilitar a ser um bom jogador e vencer o torneio?

Primeiro é pegar o tabuleiro e em seguida colocar as pedrinhas, e começando a lhe ensinar: Caso a ultima peça em suas mãos caia em uma casa com algumas peças recolhem-se todas as dessas casa e continua-se a distribuição até que a ultima peça caia em uma casa vazia. Se a casa ~~estiver~~ vazia estiver na fileira externa (defesa) a jogada termina e é a vez do adversario jogar. outro inicia a direita e outra a esquerda, se a peça cair na primeira fila não pode levar do adversario, é assim pode se tornar o bom jogador e vencer o torneio.



5.2. Suponha que um de seus colegas ou um amigo seu deseja participar em um torneiro de Ntxuva. Como você ajudaria a treina-lo para se habilitar a ser um bom jogador e vencer o torneio?

para os meus Colegas ou amigos que querem partecipar no torneio de Ntxuva:
1º lugar: Comhecer as regras do jogo.
2º lugar: Ser paciente.
3º lugar: deve pensar bem antes de jogar.
4º lugar: jogar Com lógica.
5º lugar: Ter Comsciência daquilo que quer fazer.
6º lugar: Ter concentração e foco no jogo.

Fonte: dados da pesquisa - Anexo 19 (2023)

9.1.2. Apresentação e prática com o Ntxuva

Após ter sido administrado o questionário preliminar aos alunos e sido analisadas as respostas dadas, no segundo encontro, a partir de um recorte da secção 5.1, fez-se a apresentação do jogo a partir de seu contexto histórico e social. Este encontro possibilitou aos alunos conciliar os conhecimentos que já tinham sobre o Ntxuva, ampliando a sua magnitude na relação com o jogo.

Entre os aspectos partilhado com os alunos estão: a origem do jogo Ntxuva na sua versão mais global, o Mancala; os tipos de jogos da família Mancala; a expansão do Mancala pelo mundo e as designações que foi tomando; o Mancala em Moçambique e sua função social; a versão Ntxuva do Mancala no FNJT em Moçambique, sua organização e regras. Aqui a intensão foi de compartilhar a cultura do jogo Ntxuva entre os participantes da pesquisa. Como parte desse compartilhamento cultural, ainda no segundo encontro realizou-se algumas partidas do jogo Ntxuva com base nas regras utilizadas no FNJT.

No terceiro e quarto encontro realizou-se, entre os alunos participantes da pesquisa, um minitorneio do jogo Ntxuva que antes de tudo que visou a consolidação das regras de jogo.

Figura 78: apresentação e prática com o Ntxuva

Fonte: os autores (2023)

Este torneiro constituiu mais um espaço para criação do meio pelo qual os alunos pudessem se adentrar ao jogo o que facilitaria os seus trabalhos no encontro com as tarefas na experimental. O torneiro ocorreu em três fases:

- Primeira fase: foram constituídas aleatoriamente oito duplas. Cada dupla efetuou uma partida em que o vencedor foi selecionado para a fase seguinte. No caso, foram selecionados para segunda fase oito alunos.
- Segunda fase: aqui, também foram constituídas aleatoriamente quatro duplas. Novamente, cada dupla efetuou uma partida em que o vencedor passou para a terceira fase. No caso, foram selecionados para terceira fase quatro alunos.
- Terceira fase: nesta fase o sistema de disputa foi diferente da primeira e segunda fase. Aqui, os alunos disputaram em um sistema de todos contra todos, sendo efetuados seis partidas e, cada um dos quatro jogadores efetuando três partidas. A classificação foi baseada na pontuação acumulada por cada jogo vencido, sendo dessa disputa classificados o primeiro, segundo e terceiro vencedor do torneiro.

Todos os participantes do torneiro foram premiados, embora os três vencedores tivessem uma premiação significativamente diferente as dos outros participantes.

Depois que foi finalizado o torneio, foi administrado duas questões de reflexão aos participantes, cujas as respostas descrevemos a seguir. Para além de reflexão em relação a prática com o jogo, implicitamente estas questões são a porta de entrada para a reflexão nas tarefas colocadas aos alunos na fase experimental. As respostas completas dadas pelos alunos podem ser encontradas no Anexo 20.

9.1.3. Resposta das questões de reflexão

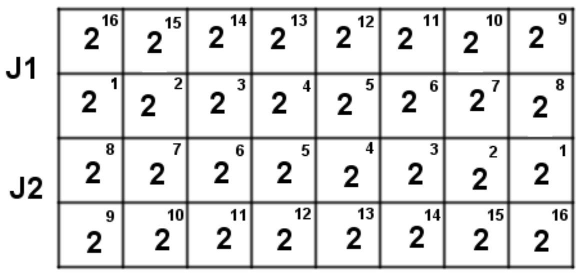
A primeira questão foi: após realizar algumas partidas do Ntxuva, certamente que teve ou ganhou alguma experiência com o jogo. Suponha que tivesses que dar algumas dicas e/ou treinamento a alguns de seus colegas ou amigos que pretendessem participar de um torneio do mesmo jogo.

a) Que jogadas você aconselharia e que jogadas não aconselharia seus amigos ou colegas a repetir se fossem realizar um torneio de Ntxuva? Justifique detalhadamente o seu posicionamento.
b) Quais estratégias de jogo você aconselharia aos seus amigos ou colegas a realizar para ganhar as partidas que for realizar com o jogo Ntxuva? Por favor, apresente uma explicação detalhada.

Sobre a alínea a) e b) as respostas foram quase que apresentadas de forma coincidente. Entre os aspectos os conselhos e estratégias mais citados em suas respostas, os alunos sinalizam que, se fossem aconselhar um amigo ou colega, o informariam para:

- Jogar sempre da esquerda para direita e não o contrário;
- Ser paciente e ter o controlo do jogo em todas as jogadas;
- Realizar as possíveis jogadas em que o adversário não encontre facilidades de jogar e capturar dados. De preferência, iniciar as jogadas nas casas 1 a 4 e 13 a 16 para que tenha possibilidades de capturar dados do adversário.
- Evitar jogar sem pensar, para isso, deve ter a capacidade de calcular mentalmente de forma rápida, para ter certeza de que, iniciando numa casa, finalizará a jogada em uma casa vazia de ataque onde consegue capturar dados do adversário, lembrando que a também a casa de ataque do adversário deverá ter dados.

A segunda questão foi: Considere a figura abaixo, que representa a simulação da configuração inicial do tabuleiro do jogo Ntxuva em você esteve jogando.



Com base nele, responda:

a) Se fosse jogar novamente, em quais casas você preferiria iniciar a primeira movimentação de dados? Porque que você escolheria iniciar a jogada nesta(s) casa(s)? Por favor, apresente uma explicação detalhada.

b) Em quais casas você não preferiria iniciar a primeira movimentação de dados? Porque que você não escolheria iniciar a jogada nesta(s) casa(s)? Por favor, apresente uma explicação detalhada.

Em ralação a alínea a), percebeu-se que, é quase unânime entre os alunos que prefiram iniciar suas jogadas nas casas 1 e 16. De acordo com as suas justificações, a preferência por iniciar a jogada nessas casas é pelo facto de que, iniciando a jogada nessas casas, o jogador teria facilidade de capturar dados na primeira chance de jogada. Algumas respostas apontam ainda que iniciando a jogada nessas casas é fácil ganhar o adversário, pois, sempre cairá em uma casa não vazia que permite capturar dados do adversário. Outros vão ainda mais longe sinalizando que as chances do adversário capturar dados são menores, quando se inicia a jogada nessas casas.

De facto, olhando o tabuleiro do tipo 4×8 com $d = 2$, em que o número de casas que compõe o campo um campo de jogo é $k = 2n = 2 \times 8 = 16$, iniciando a jogada na casa 16 e 1, a jogada finalizaria nas casas 5 e 6 respectivamente. Estas casas, onde a jogada finaliza, pertencem a linha de ataque, pois, estão entre as casas 1 e $n = 8$, oque possibilita o jogador capturar dados do adversário, havendo dados nas casas opostas da linha de ataque do adversário.

Obviamente que há outras casas onde o jogador possa iniciar sua jogada e finalizar em uma casa de ataque. Tais casas no tabuleiro proposto podem ser 2, 3, 12, 13, 14, 15, cuja a jogada iniciada nelas terminará nas casas de ataque 7, 8, 1, 2, 2, 4 respectivamente. Em todo caso, os alunos devem ter apontado apenas as casas 1 e 16 como as que prefeririam iniciar a jogada por terem utilizado as mesmas em suas partidas.

Em relação a alínea b), as respostas foram diversas. De qualquer jeito, os alunos informaram que não prefeririam iniciar suas jogadas em quase todas as casas diferentes das casas 1 e 16. Aqui, os alunos indicam até casas em que iniciando a jogada poderiam finalizar em uma casa da linha de ataque. Talvez, seja pelo facto de não terem experimentado ou explorado outras possibilidades de início das jogadas. Associa-se a não preferência por iniciar as jogadas nessas casas porque, o adversário teria muitas chances de vencer o jogador, que não teriam chances de capturar dados logo na primeira joga, etc.

De qualquer jeito, estas respostas e justificações dos alunos dão faze-nos perceber que eles têm a noção de que é preciso escolher casas em que possam capturar dados mais rapidamente antes que o adversário. Para isso, há casas estratégicas que devem ser utilizadas para iniciar a jogada. Algumas delas, como apontadas pelos alunos, são as casas 1 e 16. Obviamente que há outras, que apontamos acima e que supomos que, por causa do pouco tempo de prática que tiveram com o jogo, não os permitiu identificar.

Contudo, o ponto forte é de que os alunos tenham percebido a necessidade de escolher casas onde pode lhes permitir capturar dados antes que o adversário o faça. E então, em que casas essas jogadas devem iniciar? A resposta que é dada aqui constitui elementos inicias e essências para compreender a importância da experimentação que é desenvolvida na secção 2.2.

9.1.4. Considerações sobre a fase pré-experimental

A fase pré-experimental foi essencial para criação do meio pelo qual os alunos pudessem se aproximar mais do jogo, não só, mas também, como parte de uma proposta decolonial, foi um espaço de compartilhamento de culturas dominadas entre os participantes da pesquisa, no caso, de compartilhamento da cultura do jogo Ntxuva.

Embora o Ntxuva seja um elemento cultural bastante conhecido entre os alunos, ele apresenta-se por cada região do país de forma diversificada, em termos de designação, dimensão e regras do jogo. Este momento, da fase pré-experimental foi essencial, não só para partilhar a cultura do Ntxuva, mas também, para uniformizar as regras de jogo de o regulamento de jogos do FNJT.

Assim, foi possível nesta fase, colocar os alunos ao mesmo nível de conhecimento sobre o jogo Ntxuva e seus derivados, familiarizado os alunos com as regras fundamentais do jogo e sua prática.

9.2. ANÁLISE A POSTERIORI DA EXPERIMENTAÇÃO

Nesta subsecção se apresenta e analisa os dados produzidos na fase experimental, o que designamos de análise a posteriori. Aqui, objectiva-se a luz da análise a priori, fazer uma leitura dos acontecimentos didacticos no encontro dos alunos com as tarefas que fizeram parte da experimentação e que visaram explorar as potencialidades do jogo Ntxuva no ensino da matemática.

Para experimentação, foram colocadas aos alunos seis tarefas que procuravam responder à questão “*em um tabuleiro do tipo* $4 \times n$, *como identificar a casa onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa onde se inicia a movimentação de dados e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro?*”.

Ao responder essa questão, por via das tarefas propostas, os alunos puderam passar das ideias intuitivas alicerçadas nas regas do jogo (conhecimento da prática do jogo) ao conhecimento matemático acadêmico que os pudessem alicerçar em respostas mais eficazes e eficientes, o que nesta tese adjetivamento de circulação de saberes entre instituições, no caso, da instituição social cultural “jogo Ntxuva” a instituição de “ensino da matemática”. Assim, essa proposta de trabalho possibilitou aos alunos mergulhar em e fazer emergir vários conhecimentos matemáticos, entre eles, conhecimentos sobre: divisão euclidiana, sucessão numérica, sistema de equações.

A experimentação ocorreu em quadro encontros, que como previsão e combinado com os alunos, cada um deles iniciaria as 16 horas e terminaria as 18 horas, isto com cerca de duas horas de duração de cada encontro. Na prática, o tempo foi variando, alguns encontros tendo ido até 19 horas a 19 horas e trinta minutos, com exceção do penúltimo encontro realizado num sábado e o ultimo cujo o horário fora alterado, tendo iniciado as 10 horas e finalizado perto das 16 horas, com um intervalo mediano para o lanche.

O primeiro encontro teve duração de cerca de duas horas e meia e foi trabalhada a tarefa 1. O segundo encontro teve a duração de cerca de três horas, onde se deu a continuidade do trabalho com a tarefa 1, depois, trabalhou-se com a tarefa 2. O terceiro encontro teve a duração de duas horas e meia e trabalhou-se com a tarefa 3. No quarto e último encontro trabalhou-se as tarefas 4, 5 e 6. Este último encontro teve a duração de cerca de cerca de seis horas, contando com um intervalo de cerca de 40 minutos para o lanche ao meio dia.

Nestes encontros, as tarefas eram colocadas aos alunos, uma de cada vez, havendo um tempo de discussão intra-grupo (grupos constituídos por três a quatro alunos), depois, uma discussão geral comentada inter-grupo. A discussão inter-grupo foi importante para os alunos porque os possibilitou que ampliassem suas ideias em relação ao raciocínio desenvolvido dentro grupo, o que os permitiu evoluir nas ideias e propor formulações melhores para resolução das tarefas. Estas ideias, desenvolvidas pelos alunos são apresentadas e analisadas a seguir, a luz da análise desenvolvida na subsecção 8.2.3.

Como elucidamos na subsecção 4.2.3, de acordo com a análise feita sobre os programas de ensino da 1ª a 12ª classe, ao nível da 12ª classe, a classe em que se enquadra os sujeitos de pesquisa com que se implementou a experimentação, já reúnem conhecimentos prévios sobre contagem, adição, subtração, multiplicação, divisão e divisibilidade de números naturais, equações e inequações lineares, sistema de duas e três equações a duas e três incógnitas respectivamente, até mesmo, no segundo semestre da 12ª classe, os alunos já trabalham com o conceito de sucessão numérica.

É importante sinalizar, antes de tudo que, o trabalho dos alunos dentro do grupo (intra-grupo) possibilitou que partilhassem entre os alunos as ideias fundamentais que os levaram a resolver os problemas propostas nas tarefas. Estas ideias, registradas em suas anotações, puderam ser partilhadas e (re)discutidas por cada um dos membros dos grupos na discussão geral (registradas por filmagem) de socialização das propostas de resolução das tarefas. Por sua vez, a discussão geral foi importante para (re)definir conjuntamente (todos os alunos) as melhores saídas, estratégias e formalizações matemáticas que levassem os alunos a resolver tarefas do mesmo gênero que às apresentadas nas AEP sem recorrer a experimentação material.

A discussão geral, que foi participativa possibilitou que os alunos consolidassem os conhecimentos construídos, pois, foi possível observar que, os alunos que estavam do lado do quadro branco mostrando as ideias no quadro, também eram orientados, em muitos momentos, num debate aberto, pelos colegas que estavam de outro lado da carteira. Portanto, a construção do conhecimento foi um tanto compartilhada. Este elemento pode se observar nos registros dos vídeos feitos no ato da discussão dos alunos.

9.2.1. O trabalho com a tarefa 1

A tarefa 1 constituiu a porta de entrada para a compreensão do problema geral pelos alunos. Sendo o primeiro encontro com tarefas do gênero, em que se utiliza um elemento cultural para exploração de suas potencialidades matemáticas, o trabalho com esta tarefa demandou um pouco tempo, tanto para discussão intra-grupo quanto para discussão inter-grupo. Por isso mesmo, a tarefa foi trabalhada em dois encontros, o primeiro e segundo encontro.

No trabalho com a tarefa, iniciou-se distribuindo o material de trabalho aos grupos, que foi essencialmente a malha quadriculada (modelo simulado de um campo de jogo de Ntxuva do tipo 4×8) impressa em papel A4 para experimentação material (ver Apêndice 3), a tarefa 1 impressa em papel A4 (ver Apêndice 4) e papeis A4 em branco para tomada de nota.

A seguir a isso, foi dada um esclarecimento aos alunos sobre o desenvolvimento da tarefa, indicado o tempo de discussão intra-grupo, que foi cerda de 40 minutos no primeiro encontro. Depois disso, os grupos iniciaram suas discussões. Na Figura 79 é ilustrado parte dessa discussão.

Inicialmente estava previsto para que os alunos trabalhassem em grupos de dois, porém, na implementação, entendemos que seria melhor alargar o número de alunos por grupo para permitir maior debate, por isso mesmo, os grupos foram constituídos de três a quatro elementos, como é ilustrado na Figura 79.

Figura 79: *discussão intra-grupo sobre a tarefa 1*

Fonte: Os autores (2023)

Na tarefa 1 se pedia:

Dado um tabuleiro do tipo 4×8, em que na configuração inicial cada casa era preenchida por dois dados, conhecendo a casa i onde a jogada iniciou, determinar:

- A casa onde a primeira jogada finaliza;
- O número de passos necessários para finalizar a primeira jogada;
- O conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finalizava.

A tarefa possuía sete alíneas, isto é, da alínea a) a g). Nas alíneas a) a e) foram especificadas as casas onde a jogada inicia, sendo elas $i = 4, 6, 7, 10, 14$ respectivamente, para permitir que o aluno pudesse realizar a experimentação material, enquanto fosse analisando as características do processo de contagem e de distribuição de dados.

Na alínea f) a questão foi mais genérica para convidar os alunos, a partir das características identificadas entre as alíneas a) e e), a refletir sobre possibilidades de encontrar uma forma que o permita resolver sempre problemas de gênero, sem necessariamente recorrer a experimentação material. A alínea g) visou convidar o aluno a apresentar argumentos gerais sobre as principais constatações identificadas ao longo do trabalho com a tarefa.

A seguir, descrevemos e analisamos os acontecimentos didacticos havidos no trabalho com esta tarefa.

a) Desenvolvimento inicial da Tarefa 1 pelos alunos

Na resolução dessa tarefa, esperava-se que os alunos utilizassem na íntegra as malhas quadriculadas para experimentação material, pois, era um material preparado para o apoio da tarefa, pensando-se que poderia facilitar o processo de contagem e distribuição de dados na simulação das jogadas, além do mais, contribuiria para maximização do tempo no trabalho com a tarefa. O que fomos observar é que, mesmo os alunos tendo as malhas quadriculadas prontas, boa parte deles optava, sem se dar conta, em desenhar suas próprias malhas para simular a jogada, como se pode ver na Figura 81, alínea a).

Alguns grupos, na continuação para discussão da tarefa 1, no segundo encontro da fase experimental, preferiram mesmo adoptar um modelo de Ntxuva do tipo 4×8 em cartolina, para jogar e experimentar na prática, como é ilustrado na Figura 80.

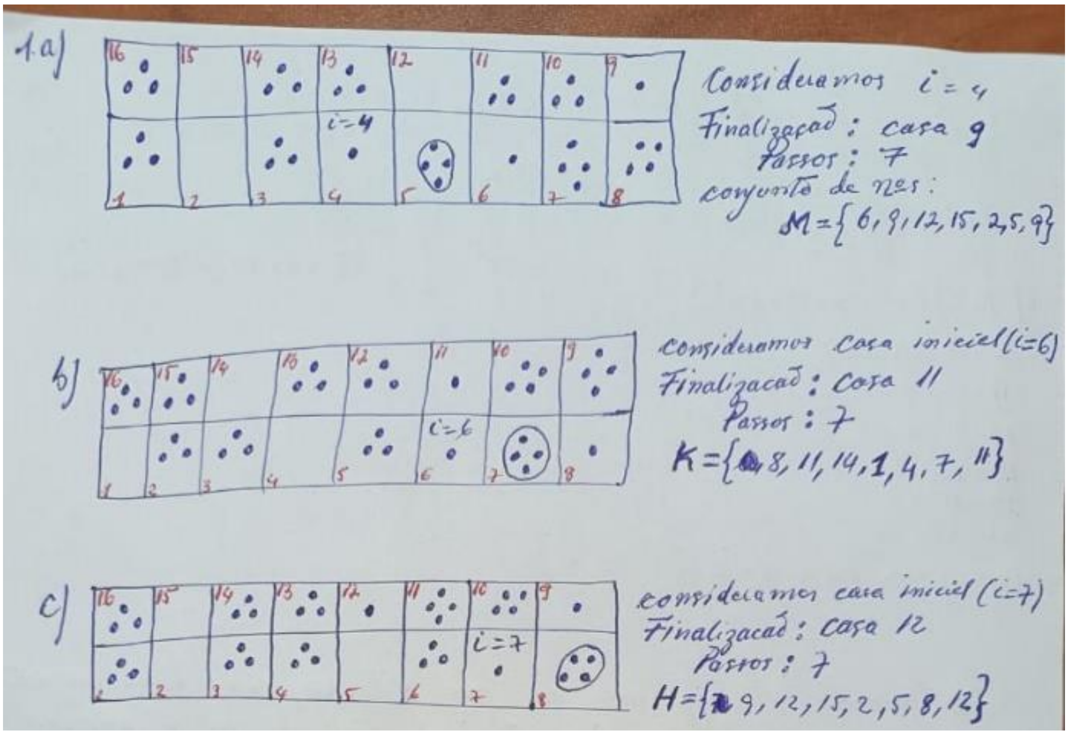
Figura 80: tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×8 improvisado em cartolina

Fonte: os autores (2023)

A segunda constatação que tivemos nesta tarefa foi que, a simulação de cada tarefa alínea da tarefa foi feita em uma única malha quadriculada. Como se pode ver na Figura 81, as alíneas a), b) e c) da tarefa 1 é simulada em uma só malha. Contrariamente no que foi pensando na analise a priori, esperava-se que, em cada folha de apoio se pudesse representar ou simular uma alínea da tarefa, sendo que, em cada malha estaria representada um passo da primeira jogada, como foi mostrado no Quadro 22 da analise a priori.

Figura 81: simulação da primeira jogada – recorte de parte da resolução da tarefa 1

a)



b)

Fonte: dados da pesquisa - Anexo 22 e Anexo 23 (2023)

Contudo, embora os alunos tivessem simulado cada jogada em uma única malha quadriculada, eles conseguiram simular perfeitamente, de tal modo que conseguiram nessa base de simulação determinar: a casa onde a primeira jogada finaliza, o número de passos e o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finalizava. Na Figura 81 a) pode se ver parte destes resultados, cuja a discussão de um dos grupos é mostrada no vídeo em Anexo 21.

Assim, para tarefa 1, tal como é ilustrado parte de resultados na Figura 81, para as alíneas a), b), c), d, e), os alunos determinaram os seguintes resultados:

Quadro 40: resumo dos resultados dos alunos em relação a resolução da tarefa 1

	a)	b)	c)	d)	e)
Início da jogada	4	6	7	10	14
Casa final	9	11	13	15	3
Passos	7	7	7	7	7
Conjuntos de números	6, 9, 12, 15, 2, 5, 9	8, 11, 14, 1, 4, 7, 11	9, 12, 15, 2, 5, 8, 12	12, 15, 2, 5, 8, 11, 15	16, 3, 6, 9, 12, 15, 3

Fonte: dados da pesquisa extraídos – Anexo 22 e Anexo 23 (2023)

No vídeo do Anexo 21, espelha-se como foi feita a simulação material para se ter a solução das questões colocadas e que são expressas na Figura 81 e resumidas no Quadro 40. Aqui, o aluno explica o seguinte:

Professor: pessoal, nós vamos iniciar aqui com a discussão da nossa actividade e, os grupos vão poder apresentar aqui as principais ideias do que discutiram, também, objectivamos tentar perceber porque que o grupo pensa desta e daquela forma. Então vamos debater.

Nota: É importante salientar que, para maximizar o tempo da experimentação, foi desencadeado um estilo de debate e discussão colectivo, em que todos os alunos participavam da discussão, sem necessariamente se dirigir ao quadro branco.

Aluno (representante do grupo): boa noite colegas, [...][33], vou iniciar a apresentação da tarefa com a alínea a). [34][o estudante faz leitura da parte inicial tarefa]. Já que nós vamos trabalhar apenas com o campo de um jogador, vou fazer aqui um esboço. [o aluno desenha a malha quadriculada do tipo 2×8 no quadro].

Temos aqui apenas o esboço do campo de apenas um jogador. [...]. [a seguir, o aluno faz a leitura da alínea a) e, enquanto lê, identifica os dados da tarefa. No caso, identifica a casa 4 onde a jogada inicia, ao mesmo tempo, coloca os indicies das casas no esboço de parte do Ntxuva que fez].

[...] então, se formos a iniciar a jogada na casa 4, em casa a jogada vai terminar? Tendo em conta que em cada uma das casas tem dois dados, eu vou tirar dois dados dessa casa [o aluno referia-se os dados da casa 4]. Sempre onde eu tiro vou representar por x[35], o x vai representar que não ficou nada [o aluno se referiria que colocaria x nas casas onde colectará dados para distribuir, isto é, $c_4 = 2$ passa a $c_4 = 2 - 2 = 0$]. Faço a distributiva.

[33] [...] Os três pontos (reticências) representados dentro de parênteses recto nos indica, neste caso, que há um discurso que não foi comtemplado, mas que não impacta na compreensão do que foi considerado na transcrição.

[34] [frase descrita pelo investigador] A frase que é apresentada dentro de parênteses recto se refere a uma explicação que o investigador esteja dar, interpretando ou explicando melhor a ideia que contempla a transcrição do discurso do debate inter-grupo feito pelos alunos.

[35] Onde o aluno se refere a "x" para designar que a casa está vazia, na realidade, ele apresenta o asterisco (*). Na sua explanação há um desiquilíbrio linguístico no que fala e no que representa. Contudo, entenda-se asterisco no lugar de "x", para estes casos. A nossa transcrição foi quase literal, para não distorcer a lógica da explicação do aluno.

Aqui já tenho dois dados [se referia ao número de dados iniciais da casa 5, isto é, $c_5 = 2$], então, dois mais um fico com um, dois, três [o aluno representa os dados em forma de pontinhos na casa 5, ao mesmo tempo que, adiciona um dado aos dois existentes na casa 5, isto é, $c_5 = 2 + 1 = 3$].

Aqui já tinha dois [o aluno se referia a casa 6, isto é, $c_6 = 2$]. Então, dois com esse outro fica três [$c_6 = 2 + 1 = 3$]. Já que tiro esses todos, totalizando três, coloco x [o aluno se referia no caso que a casa 6 ficaria vazia, isto é, $c_6 = 3 - 3 = 0$, pelo facto de que deveria retirar os dados e seguir com a distribuição de dados].

Então, aqui já tinha dois, ficamos com um, dois três. Aqui já tinha dois também, então ficamos com um, dois três. Aqui já tinha dois, já que eu vou levar todos dados daqui, coloco x, [...]. [aqui, o aluno explica que, no terceiro passo, ele colecta dos dados da casa 6 e distribui as casas 7, 8 e 9. No caso, a casa 7, 8 e 9 tinham 2 dados e passam a ter 3, isto é, $c_7 = c_8 = c_9 = 2 \rightarrow c_7 = c_8 = c_9 = 2 + 1 = 3$. Entretanto, como a casa 9 é onde o terceiro passo finaliza, recolhe os dados dessa casa e distribui as casas consecutivas]

O aluno repete esse processo explicativo até que a jogada finaliza. Embora de forma verbal, esse processo revela-se característico da análise a priori. O aluno utiliza o processo de contagem e adição de dados para proceder com o processo de distribuição de dados, que o leva da casa 4, onde a jogada inicia, a casa 9 onde a jogada finaliza. Assim, indicar a casa onde a jogada finaliza, o aluno explica:

Aluno (representante do grupo) – continuação: [...] [na última distribuição (último passo) o aluno recolhe 4 dados na casa 5 e distribui as casas seguintes, até finalizar na casa 9. Aí ele explica:] – já que na casa nove não tinha nada, então vamos afirmar e dizer que a jogada termina a casa nove. Então, essa era a primeira pergunta. Para dizer que, se nós iniciamos na casa 4 a nossa jogada vai terminar na casa 9. [...]

Como é de notar em seu discurso explicativo, a partir da regra de jogo para finalização de uma jogada, o aluno finaliza a sua jogada quando coloca o último dado em sua mão na casa 9 e, identifica o índice da casa onde a mesma finaliza, que é a casa 9.

A seguir, o aluno determina o número de passos para finalizar a jogada explicando:

> **Aluno (representante do grupo) – continuação**: [...] então, nós temos que perceber [...] o passo que está a se referir é de onde iniciou até onde terminou essa jogada. Se eu levei dois dados aqui na 4ª casa e fiz a distributiva para 5ª e 6ª casa, então, significa que o meu passo saiu da 5ª até 6ª casa, o primeiro passo. O segundo passo, 7ª, 8ª e 9ª casa. [...]. o quinto passo, 16ª, 1ª, 2ª casa. O sexto passo, 3ª, 4ª, 5ª. O último passo é este que saiu da 6ª a 9ª casa, porque terminou na casa 9. Logo, vamos afirmar que, nós precisamos de sete passos pra finalizar a jogada.

Nesta explicação há duas coisas que se percebe. Primeiro, através do processo normal de distribuição de dados, o colectivo de estudos identifica o número de passos para finalizar a jogada, no caso, ele faz contagem dos passos e chega à conclusão de que para finalizar a joga no tabuleiro do tipo 4×8 seroam necessários 7 passos.

Segundo, através da sua explicação, é possível perceber que o aluno já traz, de forma implícita, a ideia de adição de um certo número contante de dados para alcançar a cada casa onde determinado passo da jogada finaliza, praticamente, uma ideia intuitiva de uma sequência numérica.

Dá explicação que dá, pode se perceber, por exemplo que:

- Da casa 4 para casa 6 adiciona-se dois dados, quando diz, o primeiro passo saiu de 5ª a 6ª casa. Pode se entender intuitivamente que, o aluno adicionou dois e quatro para achar a casa 6 onde o primeiro passo finalizou, isto é, $6 = 4 + 2$.
- Da casa 6 para casa 9 adiciona-se três dados, quando diz, o segundo passo foi da 7ª, 8ª e 9ª casa. Pode se entender intuitivamente que, o aluno adicionou três e seis para achar a casa 9 onde o segundo passo finalizou, isto é, $9 = 6 + 3$.

...

- Da casa 2 para casa 5 adiciona-se três dados, quando diz, o sexto passo foi da 3ª, 4ª e 5ª casa. Igualmente, pode se perceber que o aluno adicionou três e dois para achar a casa 5 onde o sexto passo finalizou, isto é, $5 = 2 + 3$.

- Da casa 5 a casa 9 adiciona-se quatro dados, quando diz, o último passo foi da 6ª, 7ª, 8ª e 9ª. Aqui, também pode se perceber que o aluno adicionou quatro e cindo para achar a casa 9 onde o sétimo passo finalizou, isto é, $9 = 5 + 4$.

Entretanto, essa ideia intuitiva, nesse primeiro momento do trabalho com a Tarefa 1 não aparece explicitamente na explicação que os alunos dão.

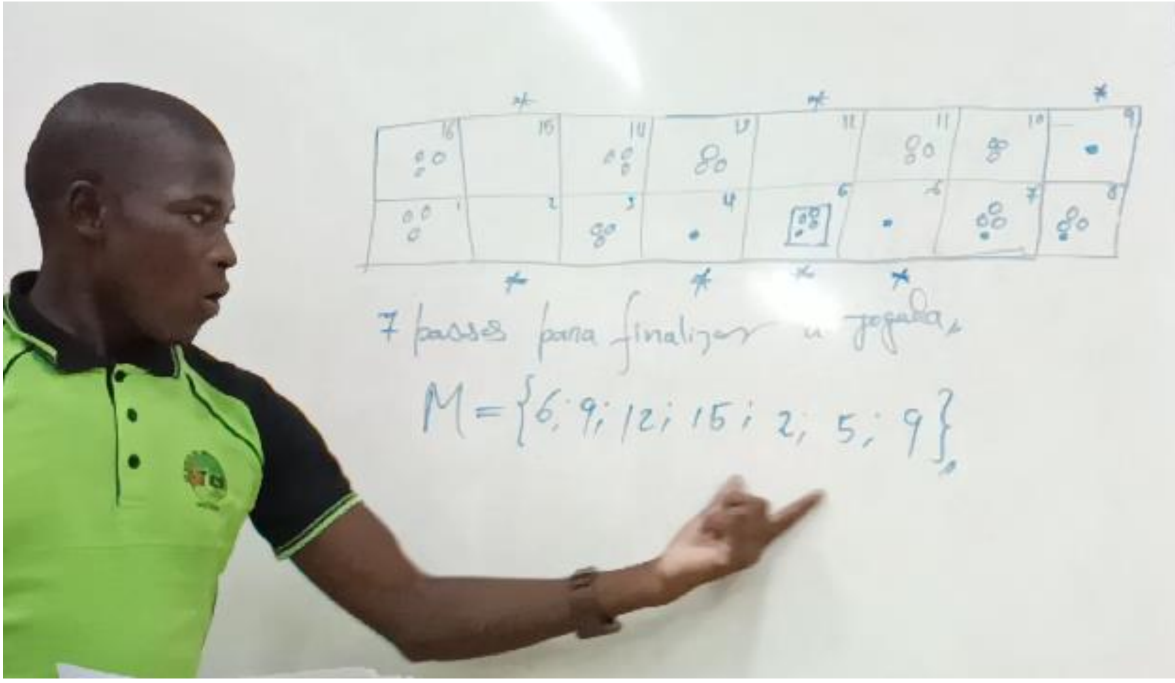
Depois que é determinado o número de passos para finalizar a jogada, o colectivo de alunos segue para determinar o conjunto de números que correspondem a identificação da casa onde cada passo finaliza. O aluno segue explicando:

Aluno (representante do grupo) – continuação: [...] aqui, se nós já afirmamos que temos sete passos, então, temos que construir um certo conjunto cujo os elementos são aquelas casas onde a jogada termina [onde vem “onde a jogada termina” o aluno quis dizer “onde cada passo da jogada termina”]. Então, esse conjunto vou representar ou chamar de conjunto M, por exemplo: aqui o nosso primeiro passo, saiu de 4 a 6; o nosso segundo passo saiu de 7 para 9; e depois, 9 para 12; depois de 12 para 15; de 15 para 2; de 2 para 5 e novamente de 5 para 9, isto é, $M = \{6, 9, 12, 15, 2, 5, 9\}$.

A explicação oferecida pelos alunos sobre a alínea a) alunos finaliza determinando o conjunto de números. De qualquer jeito, até aqui, notamos que os alunos não mostraram quaisquer dificuldades para achar a casa onde a jogada finaliza, o número de passos necessários para finalizar a jogada bem como o conjunto de dados que identificam a casa onde cada passo da jogada finaliza.

Nesse processo, o aluno utiliza de forma linear as regras do jogo para realizar a simulação material, colectando dados de uma casa, distribuindo-os um-a-um até a finalização da jogada. Esse processo, sobretudo, para as alíneas a), b), c), d), e), uma vez que decorre inteiramente da aplicação das regras do jogo interpretadas no problema proposto. Na Figura 82 é ilustrada um recorte de parte da exposição dos alunos em relação a resolução da tarefa 1.

Figura 82: *recorte de parte da explicação sobre o desenvolvimento da tarefa 1*



Fonte: Fonte: recorte de dados da pesquisa - Anexo 22Anexo 21 (2023)

Uma coisa que foi observada e que também era esperada, é que o conjunto de dados que identificam a casa onde cada jogada finaliza fosse expressa apenas pelos índices que identificam as casas no tabuleiro. Como é observado na explicação do aluno, o conjunto M foi dado pelos números 6, 9, 12, 15, 2, 5, 9.

Portanto, como o tabuleiro foi do tipo 4×8, o número de casas do campo de um campo de jogo foi $k = 2n = 2 \times 8 = 16$. No processo de distribuição de dados, a sequência dos dados acima foi obtida adicionando 2, 3, ..., dados aos índices das casas anteriores, entretanto, do índice 15 para 2, muda de estratégia, isto é:

- O índice 6 resultou de $4 + 2 = 6$, onde 4 é o índice da casa inicial e 2 o número de dados dessa mesma casa inicial;
- O índice 9 resultou de $6 + 3$, onde 6 é a casa onde finaliza o primeiro passo e 3 o número de dados dessa mesma casa, obtidos adicionando um dado aos dois dados inicias que lá existiam, isto é, $3 = 2 + 1$.

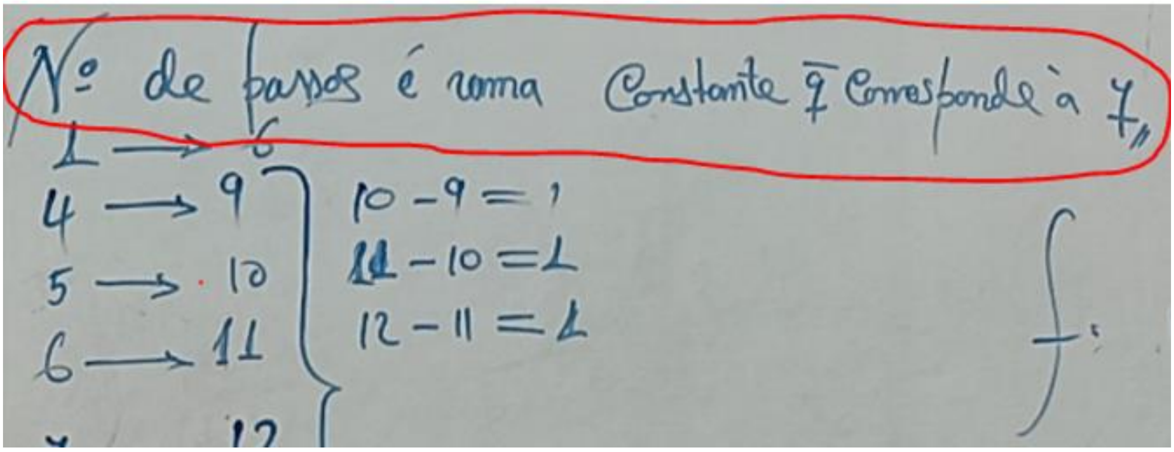
...

- Do índice 15 para 2, o aluno em vez de obter o índice 2 adicionado 3 dados como o fez anteriormente, isto é, que hipoteticamente $2 = 15 + 3$, ele simplesmente ignora (implicitamente) a adição e faz uma contagem normal dos três dados, explicando que: “recolhemos três dados da casa 15, colocamos um na casa 16, um na casa 1 e um na casa 2”.

De qualquer jeito, era de si esperar que o aluno fosse se proceder assim, pois, trata-se de uma aplicação directa das regras do jogo. Isto revelou também que, até aquele momento, o raciocínio do aluno ainda não se tinha aberto para pensar fora das regras do jogo, isto é, até este momento o aluno não emigra ou não se díscola das praxeologias originarias para as acadêmicas com vista a buscar relações matemáticas que o possam a resolver sempre problemas do gênero, sem necessariamente recorrer a experimentação material.

Assim, o procedimento acima descrito é repetido para dar solução as outras alíneas, isto é, as alíneas b), c), d) e), se obtendo os resultados resumidos no Quadro 40. Ainda nesse experimento material, uma das importantes ilações que os alunos tiram é de que o número de passos para finalizar a jogada iniciada em qualquer casa do Ntxuva do tipo 4×8 é constante e igual a 7, o que é ilustrado na Figura 83.

Figura 83: recorte da Parte 2 da discussão inter-grupo da tarefa 1



Fonte: dados da pesquisa - Anexo 24 (2023)

Com esta tarefa, a hipótese que havíamos firmado na analise a priori, de que ela poderia levar o aluno a perceber que, em um mesmo tabuleiro do tipo $4 \times n$ em que na configuração inicial é preenchido por dois dados, iniciando a primeira jogada em qualquer casa, o número de passos para finalizar a mesma é constante.

Portanto, nesse desenvolvimento inicial e sem interferência do professor, os alunos (todos os grupos) conseguem responder as questões colocadas nas alíneas a), b), c), d), e) utilizando o procedimento já esperado.

b) Tentativas de emigração de praxeologias originarias as acadêmicas

Como foi notado e observado na exposição e análise anterior, os alunos produziram as soluções sobre as alienas a) à e) da tarefa 1 se alicerçando no processo normal de distribuição de dados, ancorado as regras do jogo, isto é, se alicerçando as praxeologias originarias do jogo Ntxuva. No entanto, quando se deparam com a alínea f), cujo a questão apresenta dados genéricos, levantaram um questionamento colectivo ao professor, para esclarecimento do que é pedido e que não estavam compreendendo.

Para situar o questionamento dos alunos, retomamos a questão colocada na alínea f):

Tarefa 1, alínea f) Suponha que fosse iniciar sua primeira jogada na casa i. Em que casa f a jogada finalizaria? Qual seria o número de passos necessários para finalizara essa jogada? Como determinaria o conjunto de números a que correspondem a identificação das casas onde cada passo da jogada finaliza? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio.

Perante esta questão, a dúvida colocada ao professor foi:

Alunos: professor, qual é o valor de da casa onde inicia a jogada nessa? O que é i e o que é f?" [Traduzido do questionamento dos alunos]

Uma dúvida parece ingênua, mas a questão é que eles não estavam percebendo que se pretendia fazer exatamente. Foi aí que o professor retornou ao enunciado e esclareceu o seguinte:

Professor: e aí rapazes, entendam o i como uma casa qualquer onde se pode iniciar a jogada e f como a casa onde esta mesma jogada finaliza. A ideia é achar uma formula genérica que nos ajude a determinar a casa f onde a jogada finaliza, conhecendo a casa i onde a jogada inicia. Vocês compreenderam?
Aluno: professor, compreendemos. Então o i pode ser uma variável igual a x e f igual a y. Agora vamos fazer a tarefa.

Portanto, depois que o professor esclareceu a essência da tarefa, os alunos compreenderam imediatamente o que se pretendia naquela tarefa. Entretanto, o facto curioso nessa dúvida é que, os alunos não estavam enxergando i como uma variável de entrada e f como uma variável de saída de uma função qualquer, pelo habito de utilizarem frequentemente as letras mesmas letras para designar variáveis de entrada e saída em uma função. No caso, as letras x e y. Portanto, não estavam familiarizados com uso de letras diferentes de x e y como variáveis.

Primeira tentativa de generalização da resposta ao problema da tarefa 1

Em todo caso, depois da explicação do professor, os alunos seguiram tentando construir uma formula que os pudesse ajudar a identificar o índice da casa onde a jogada finaliza, sem necessariamente recorrer a experimentação material. Desde modo, a discussão inter-grupo seguiu, os alunos tendendo mostrar a possibilidade de achar uma formula, como segue na transcriação a seguir do debate:

Aluno (representante do grupo): [...] [o aluno anota no quadro $4 \to 9$, a casa onde a jogada da alínea a) iniciou e finalizou, em seguida, continua explicando].

Então o pedido dessa vez é um pouco diferente, mas ainda há uma pequena relação. Se formos a iniciar a jogada na casa 6, em que casa a jogada vai terminar? Então, o processo é o mesmo. [...] [depois desse discurso, o aluno explica novamente o processo de distribuição de dado iniciando na casa 6, depois disso, ele regista no quadro $6 \to 11$, a casa onde a jogada da alínea b) iniciou e finalizou].

Portanto, o aluno continua explicando o processo de identificação da casa onde a jogada finaliza, fazendo o registo da casa onde a joga inicia e onde finaliza, para as alíneas a), b), c), d) e), como segue representado a seguir e ilustrado na Figura 84.

$$i \to f$$

$$4 \to 9$$

$$6 \to 11$$

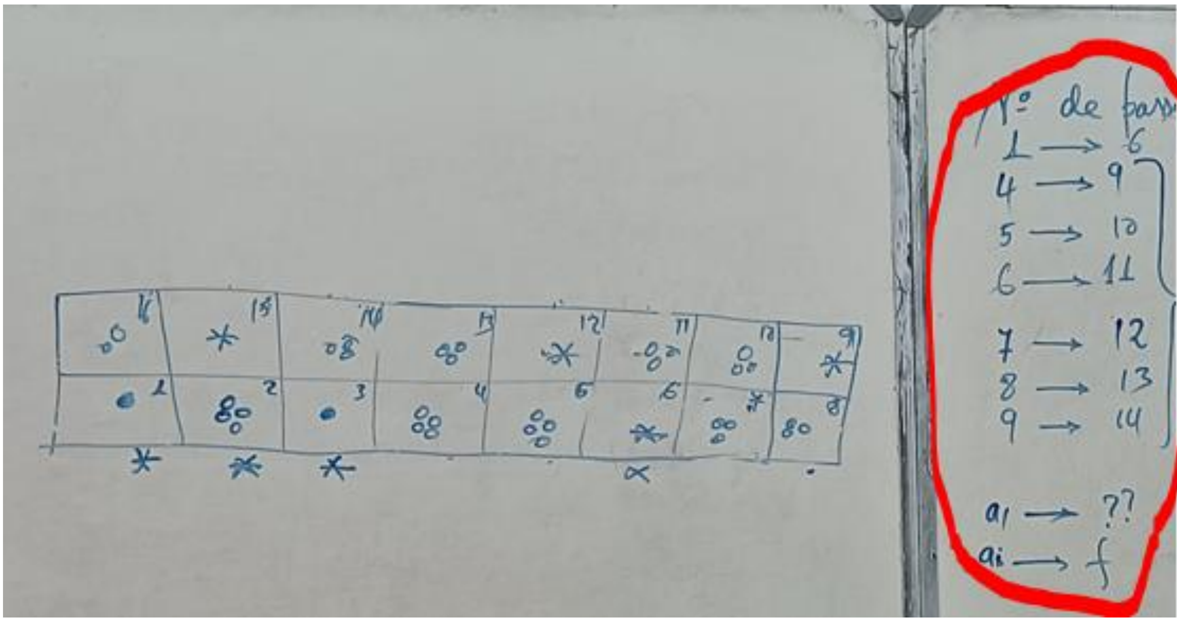
$$7 \to 12$$

$$10 \to 15$$

$$14 \to 3$$

As seguir a esse registo, o colectivo de alunos sugere que, para se chegar a uma possibilidade de generalização, deverá se apresentar ao registo acima na forma sequencial, isto é, iniciar a jogada nas casas 1, 2, 3, ..., até 16, para poder-se perceber a lógica do surgimento daqueles números. Feito isso, ele apresenta esse registro sequencial, como é ilustrado no registo circulado a vermelho na Figura 84.

Figura 84: recorte 1 da Parte 2 da discussão inter-grupo da tarefa 1



Fonte: dados da pesquisa - Anexo 24 (2023)

Para pensar numa possível generalização o aluno começa explicando:

Aluno (representante do grupo): [...] vamos pensar estes passos como se fosse uma sucessão [...] [penso que o aluno quis dizer “este conjunto de números como uma sucessão”, no lugar de “estes passos como se fosse uma sucessão”].

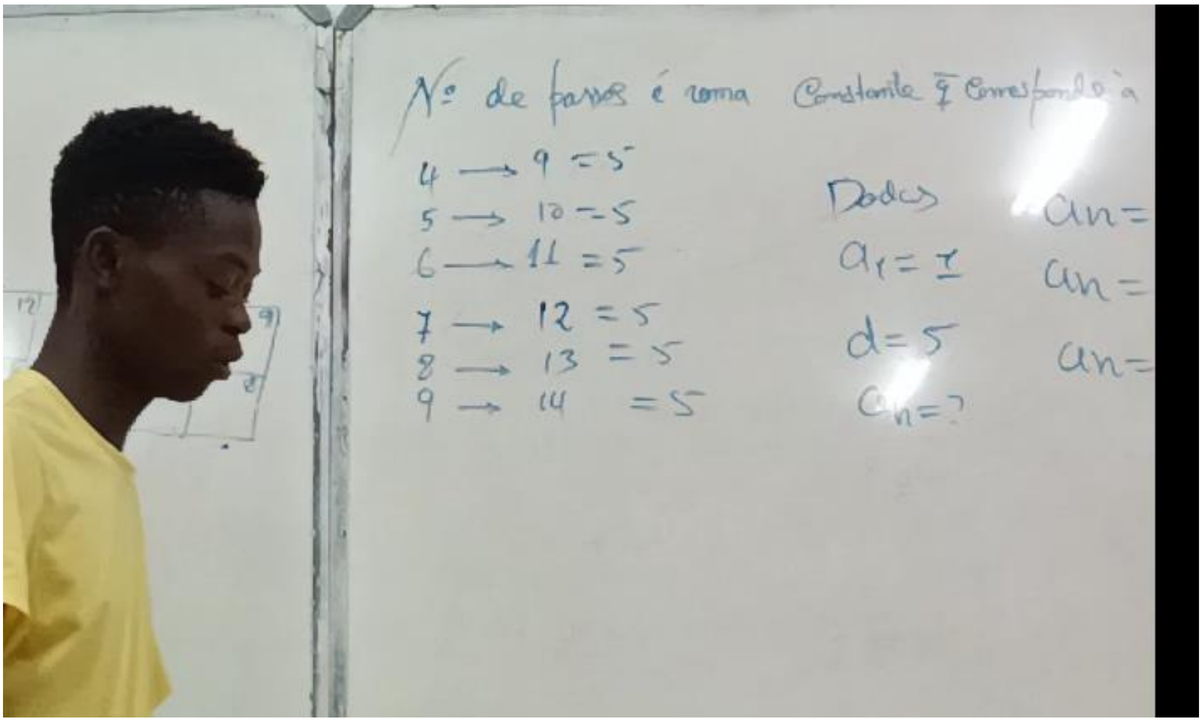
Onde teremos a diferença:

- Nove menos quatro igual a cinco: $9 - 4 = 5$;
- Dez menos cinco igual a cinco: $10 - 5 = 5$;
- Onze menos seis igual a cinco: $11 - 6 = 5$;

[...]

A seguir a isso, o aluno supõe que, como a enumeração das casas do tabuleiro inicia de um, então, a sucessão (progressão aritmética) que ele supõe existir tem como o primeiro termo $a_1 = 1$ e a razão $d = 5$. Nestas condições, ele determina a fórmula geral a partir da relação $a_n = a_1 + (n-1)d$ do termo geral de uma progressão aritmética. Como se vem na Figura 85[36], ele determina a formula geral efetuando: $a_n = 1 + (n-1) \times 5 = 5n - 5 + 1 = 5n - 4$.

Figura 85: recorte 2 da Parte 2 da discussão inter-grupo da tarefa 1



Fonte: dados da pesquisa - Anexo 24 (2023)

Nessa altura, o aluno que esteve no quadro e o colectivo de alunos assistentes percebem que a sua formulação não responde ao problema e, o outro colega o pede para substitui-lo e propõe apresentar uma nova abordagem da discussão. Mas antes de apresentar e analisar a segunda abordagem, o que temos a dizer sobre o que o aluno estava tentar apresentara?

Bom, do ponto de vista da análise a priori, esperava-se que, na lógica que o aluno esteve desenvolvendo seu raciocínio, pudesse perceber que a operação “$9 - 4 = 5$, 10$-5 = 5$, $11 - 5 = 5$, etc.” resulta da diferença entre a casa onde finaliza e inicia a jogada, que é constante e igual a 5, isto é, $f - i = 5$, o que resulta em $f = i + 5$. Entretanto, o aluno pensando nessa linha de raciocínio, deveria também sinalizar que essa fórmula só valeria apenas para as jogadas efectuadas em tabuleiro do tipo 4×8 em que na configuração inicial cada casa fosse preenchida por dois dados.

[36] O recorte não é visível porque a filmagem foi mal feita, ou melhor, o responsável pela câmera não estava atento para acertar direto a câmera na altura dessa discussão.

De qualquer jeito, o aluno deveria perceber que, a diferença que é apresentada entre a casa onde a jogada finaliza e inicia não resulta de uma progressão aritmética, pois, pela lógica de uma sequência aritmética teríamos, por exemplo, $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. Considerando que $10-5 = 5$ e $9 - 4 = 5$, teríamos: $10 - 5 = 9 - 4$. Neste caso, $a_{n+2} = 10$, $a_{n+1} = 5$ ou $a'_{n+1} = 9$ e $a_n = 4$. Aqui, se a sequência fosse aritmética, $a_{n+1} = a'_{n+1}$. Na prática, vemos que $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$, isto é, $5 \neq 9$.

Portanto, aqui, o aluno apresenta uma tentativa de generalização que aparenta ser ótima para o tabuleiro do tipo 4×8 em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados, mas faz uma leitura errônea da diferença dos índices da casa final e inicial da primeira jogada, confundido com uma sequência aritmética. Portanto, este elemento parece-nos aparecer como efeito do contrato com que os alunos tem com o conceito de sequências aritméticas que se supõe ter tido contato no segundo trimestre da 12ª classe, pois, eles simplesmente se propõem a encontrar diferenças iguais, a partir daí, respondem o pedido da tarefa como se fosse sequencias aritméticas.

Segunda tentativa de generalização da resposta ao problema da tarefa 1

Após a primeira tentativa, o outro aluno que se fez presente ao quadro, inicia sua explanação informando que o mais importante para prover uma fórmula geral é pensar inicialmente na no início da jogada a partir da primeira casa. Nisso, ele inicia explicando novamente o processo de distribuição de dados iniciando da casa 1 e que finaliza na casa. Posto isso, ele utiliza estes dados para descrever a sua formula geral explicando.

Aluno (representante do grupo): [...] se nós vamos achar a nossa fórmula usando o raciocínio de uma sucessão, já que se percebe que, falando de sucessão é uma função $f: n \to IR$ [representação circulada a rosa na Figura 86], em que n pertence ao conjunto dos números naturais, [...] sempre tempos que olhar nessa primeira casa [o aluno se referia a casa 1, onde inicia a numeração do índice que identifica cada casa].

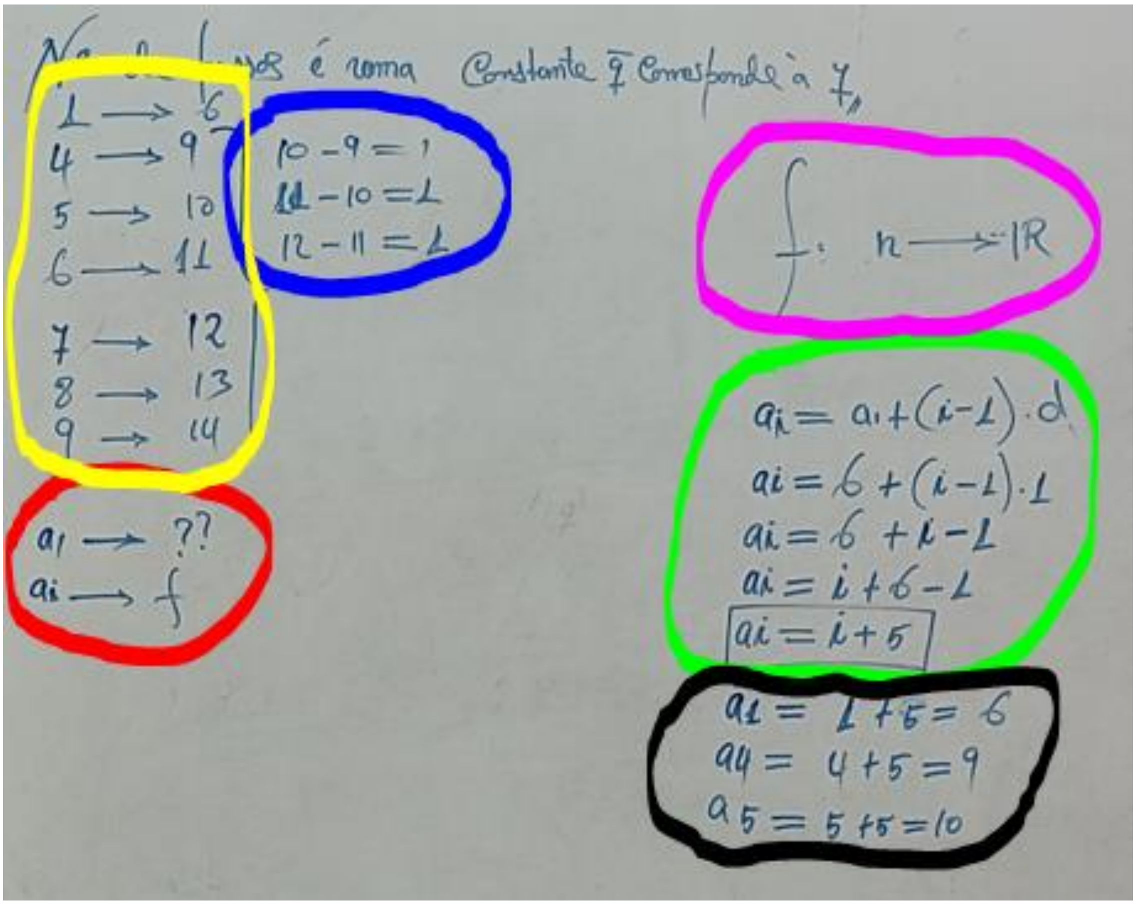
No caso, se usamos o raciocínio de uma sucessão, vamos dizer que isto é a_1 que cai num certo resultado. [...] numa certa posição a_i vou cair numa outra certa posição f, é isso aqui. [representação circulada a vermelho na Figura 86].

> Nos já conhecemos aquela formula que nos permite achara o termo geral que é dada por $a_i = a_1 + (i-1)d$. [representação circulada a verde na Figura 86].

Tal como a primeira tentativa de generalização, aqui, o aluno continua se assegurando da noção de sucessão, sobretudo, de sucessão aritmética para propor uma formula geral que o possibilite determinar a casa f onde a primeira jogada iniciada em i finaliza. Isso se pode observar claramente em seu discurso transcrito acima e que pode ser encontrado na íntegra no Anexo 24.

De qualquer jeito, nessa visão, o aluno considera a sequência de números da 1ª coluna na marcação amarela como os valores correspondentes a i e os da 2ª coluna correspondentes a f. Depois, considera a sequência de números da 2ª coluna ainda da marcação amarela como uma sucessão aritmética e determina as diferenças (como é ilustrado na marcação azul da Figura 86) que designa razão $d = 1$ da sucessão.

Figura 86: recorte 3 da Parte 2 da discussão inter-grupo da tarefa 1



Fonte: dados da pesquisa - Anexo 24 (2023)

Como a diferença entre os dados consecutivos resultante das casas onde as jogas finalizam é constante, o aluno toma isso e considera a sequência como uma sequência aritmética e, a partir da relação do termo geral de uma sequência aritmética o aluno determina a formula para determinação da casa onde a jogada finaliza, considerando:

- O primeiro termo da sucessão como o índice da casa onde a jogada iniciada na casa 1 (primeira casa da numeração do tabuleiro) finaliza, isto é, assim, $a_1 = 6$;
- A variável de entrada i como a casa onde a jogada inicia;
- A diferença $d = 1$ como a razão da sucessão aritmética que ele supõe existir.

Com estes dados, como é ilutado na marcação verde da Figura 86, ele determinada, a partir da formula geral de uma progressão aritmética, a fórmula para determinação da casa onde a primeira jogada finaliza, sendo ela expressa por: $a_i = i + 5$.

Digamos que o aluno chega a uma solução esperada na análise a priori, pois, a prova que é feita na marcação preta da Figura 86 mostra que, para o tabuleiro que é utilizado, do tipo 4×8, a formula é válida. Entretanto, a forma como esta fórmula é construída deixa muitos equívocos:

- Primeiro: será que essa relação funciona sempre? É extensiva a qualquer tabuleiro?
- Segundo: a relação $a_i = i + 5$ foi obtida com base nos dados relativos aos índices das casas onde a jogada finaliza, que formam determinadas na base da experimentação material. Na prática, os dados que teremos disponíveis são relativos aos índices das casas onde a jogada inicia. Para outros casos, digo, outros tabuleiros, precisaríamos de realizar a experimentação material para achar os índices das casas onde a jogada finaliza, depois, construir a formula geral, desembocando-se em um trabalho demasiadamente complicado e desnecessário.
- Terceiro: a relação deixa de lado vários factores (variáveis) de que depende a determinação da casa onde a jogada finaliza, entre eles, a dimensão do tabuleiro e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro.

De qualquer jeito, embora a formulação achada fosse a que esperávamos, de acordo com a análise a prior, para além dos incômodos colocados acimas, ela apresenta-se complexa, pois, para determinação da formula $f = i + 5$, bastava e, o mais correcto, o aluno perceber que as diferenças entre a casa onde a jogada finaliza e onde inicia é constante e igual a um certo número c, isto é, $f - i = c$, logo, $f = i + c$. No caso, para o tabuleiro do tipo 4×8 essa constante seria igual a 5, isto é, $c = 5$. Assim, $f = i + 5$.

Diante destes incômodos o professor questionou ao colectivo de alunos:

Professor: vocês acham que essa formula pode ser aplicada a outros tabuleiros? Será que é possível entrar uma formula geral que responda a problemas de gênero para outros tipos de tabuleiro? E o conjunto de números que correspondem a casa onde finaliza cada jogada, como determinamos?

Até aqui, o tempo de trabalho no primeiro encontro da experimentação já estava esgotado, além do mais, já era noite. Os alunos pediram em seguida dar continuidade a tarefa dia seguinte.

Então, o professor deu a tarefa 2 aos alunos para discutirem em casa, para se adiantarem na discussão do dia seguinte e o encontro primeiro foi finalizado.

Terceira tentativa de generalização da resposta ao problema da tarefa 1

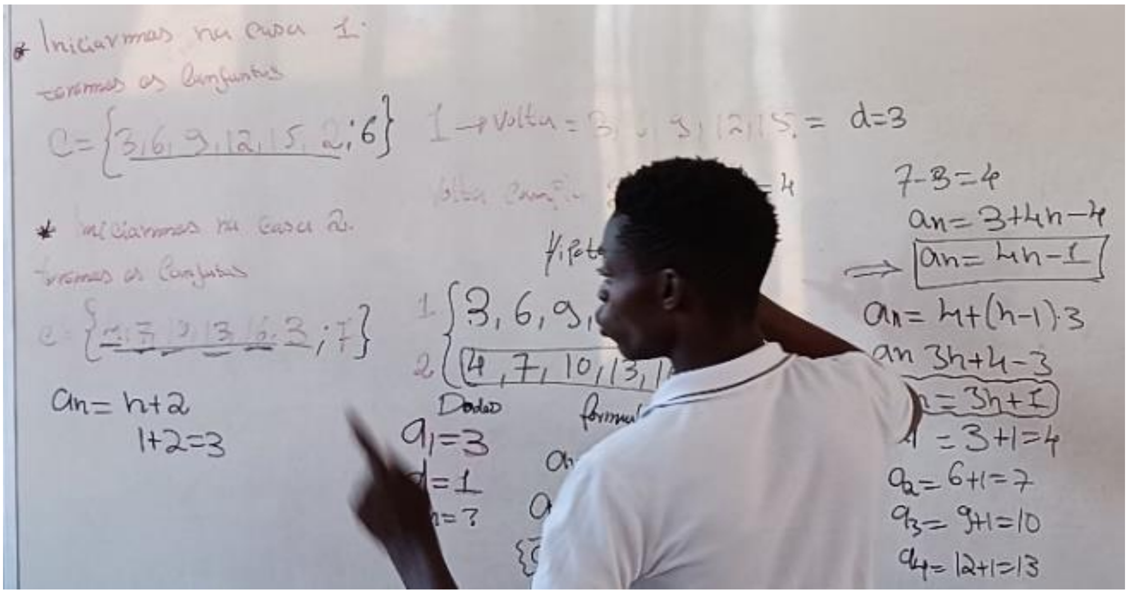
No segundo encontro, quando entramos a sala, encontramos os alunos já discutindo a questão sobre “a determinação do conjunto de números que correspondem a casa onde cada passo da jogada finaliza”, uma questão que não havia sido discutida no primeiro encontro. Como a discussão já estava avançada[37], o professor pediu que os alunos começassem para que pudesse se inteirar e entender e os alunos aceitaram, porém, ao longo do retorno a discussão, não se retomou ao que estavam discutindo no quadro.

Mas então, o que estava sendo discutido e que ficou registado no quadro, antes dos professores chegarem? Portanto, para responder esta questão, antes de apresentarmos a discussão que desencadeou entre os alunos, vamos tentar apresentar discutir o que foi antes registado no quadro.

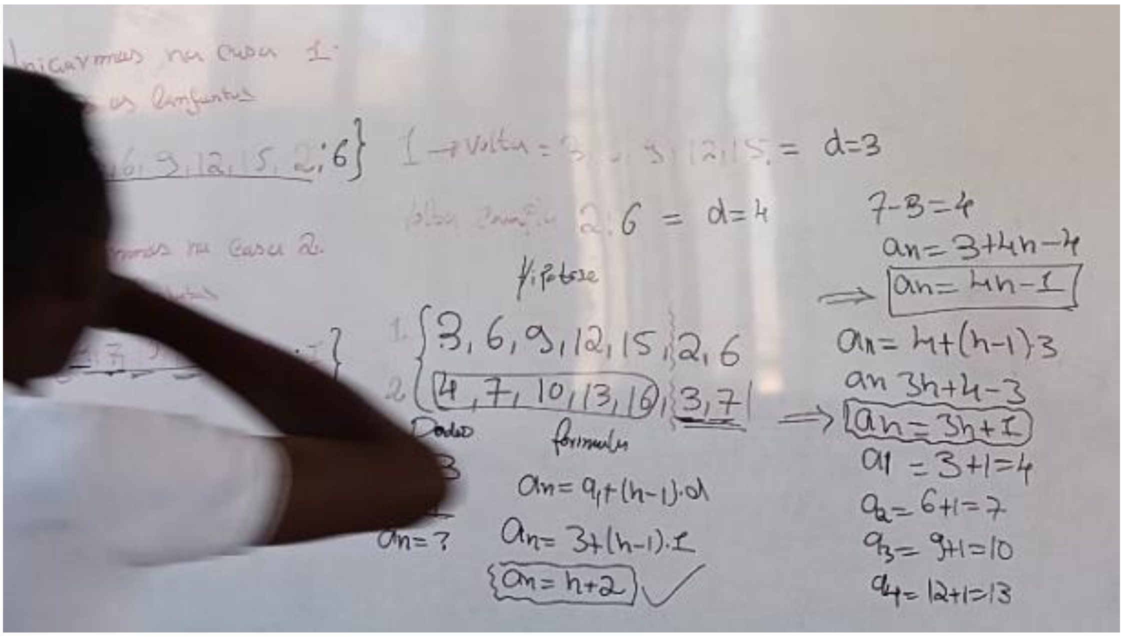
[37] Este ato observado nos alunos evidenciou de forma clara o quão os alunos estavam interessados e envolvidos nas questões associadas as tarefas propostas para experimentação.

No quadro, como é ilustrado na Figura 87, os alunos, a partir dos conjuntos de números que identificam a casa onde cada passo da joga finaliza, tentam pensar numa fórmula geral que os podem ajudar a determinar os mesmos números sem realizar a experimentação material.

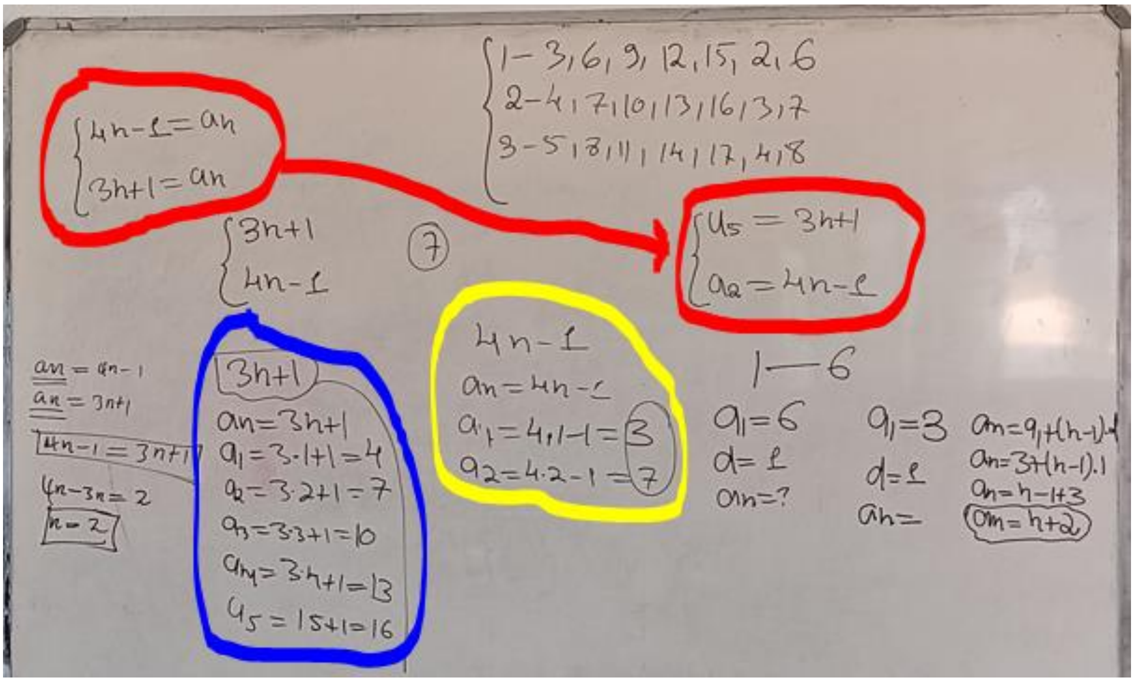
Figura 87: Possibilidade de determinação da fórmula para identificação do conjunto de números que corresponde ao índice de casa onde casa passo da jogada finaliza[38]



a)



[38] Colocamos duas imagens supostamente parecidas porque uma complementa a outra em relação a visibilidade do conteúdo. Ao se tirar a foto, não se teve o cuidado suficiente de pedir o aluno para que se afastasse um pouquinho do quadro branco, de modo que se pudesse tirar uma foto melhor.

b) 

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Aqui, os alunos voltam a utilizar a ideia de sucessão aritmética para os ajudar a determinar a formula geral. Nesse raciocínio, primeiramente, a partir da experimentação material, determinam os conjuntos $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 2, 6\}$, $B = \{4, 7, 10, 13, 16, 3, 7\}$, $C = \{5, 8, 11, 14, 1, 4, 8\}$ de números que corresponde a casa onde cada passo da jogada finaliza. Depois, o aluno utiliza a fórmula geral de uma sucessão aritmética ($a_n = a_1 + (n-1)d$) para determinar a relação que permite gerar os conjuntos de números descritos acima, fazendo:

- Consideram 3, 4 e 5 como o primeiro termo das sucessões A, B e C, respectivamente;
- Consideram $d = 3$ como sendo a razão destas sucessões, uma vez que, a diferença entre um termo e seu anterior é igual a 3. Mas também, na mesma sucessão consideram uma outra razão que é $d = 4$, proveniente da diferença do último e penúltimo termo das sucessões dadas;
- A partir da fórmula geral de uma sucessão aritmética ($a_n = a_1 + (n-1)d$), determinam a fórmula para achar a casa onde cada passo da jogada finaliza, substituindo os dados.

Na Figura 87, o aluno dá um exemplo utilizando a sucessão B, partindo-a em duas: $B_1 = \{4, 7, 10, 13, 16\}$ e $B_2 = \{3, 7\}$. Nisto, se obtém duas subsucessões, que resultam na seguinte formula definida em partes:

$$b_n = \begin{cases} b_n^1 = b_1^1 + (n-1)d_1 \\ b_n^2 = b_1^2 + (n-1)d_2 \end{cases}$$

Aqui, para b_n^1 os alunos consideram $b_1^1 = 4$ e $d_1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \cdots = 3$. Assim, a fórmula geral estabelecida é: $b_n^1 = 4 + (n-1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.

Para b_n^2 os alunos consideram $b_1^2 = 3$ e $d_1 = 7 - 3 = 4$. Assim, a fórmula geral estabelecida é: $b_n^2 = 3 + (n-1) \times 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$.

Assim, como é mostrado na marcação a vermelho da Figura 87, os alunos definem a fórmula geral da seguinte forma:

$$b_n = \begin{cases} b_n^1 = 3n + 1 \\ b_n^2 = 4n - 1 \end{cases}$$

O que temos a dizer sobre esse procedimento?

Bom, o procedimento que os alunos adotaram é semelhante ao esperado uma vez que o processo que leva a geração dos números que correspondem a cada onde cada passo da jogada finalize apresenta uma característica de uma sucessão de números. A partir deste procedimento, os alunos conseguem enxergar que:

- O processo de distribuição de dados gera uma sucessão;
- A sucessão gerada é definida em partes, sendo uma de razão 3 e a outra de razão 4;

Estes elementos revelam que os alunos já estavam compreendendo algumas características do processo de distribuição de dados, entretanto, há elementos que ainda estavam por ser compreendidos para complementar ou melhor seu raciocínio. Alguns dos elementos que nos referimos e que não são levados em conta nesse raciocínio dos alunos são: a casa onde a jogada inicia; o número de casas que compõe um campo de jogo; o passo correspondente a jogada[39].

No raciocínio dos alunos, esses elementos não são levados em consideração, o que faz com que a ideia, ainda que pareça boa, não seja consistente. De qualquer jeito, podemos dizer que os alunos estavam num bom caminho nesse raciocínio. Faltou-lhes perceber como é que o primeiro termo de todas aquelas sucessões aparece, o que os permitiria encaixar a casa onde a jogada início em sua fórmula.

[39] Nesta fase da actividade, os alunos se esquecem do jogo em si e trabalham apenas com os dados numéricos.

Por exemplo: na primeira parte da sucessão B, isto é, $B_1 = \{4, 7, 10, 13, 16\}$ os alunos propõem que a formula seja $b_n^1 = 4 + (n - 1) \times 3$. Aqui, os alunos poderiam entender que o primeiro termo $b_1^1 = 4$ é resultado da soma entre a casa onde inicia $i = 2$ e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro. No caso, $4 = i + d = 2 + 2$. Com esse raciocino, a ideia que eles trazem ficaria um pouco mais completa, isto é, poderia representar a fórmula da primeira parte de B da seguinte maneira: $b_n^1 = i + 2 + (n - 1) \times 3$. Querendo desenvolver mais, como eles sempre o fazem poderíamos ter: $b_1^1 = i + 2 + 3n - 3 = i + 3n - 1$.

Entretanto, como o professor não estava nessa discussão, ao propor que se retome, os alunos caíram num outro raciocínio que lhes causou um ponto de curiosidade e lhes despertou um outro raciocínio[40]. Este raciocínio estava em volta do auto questionamento que se faziam sobre a questão da contagem progressiva depois de passar pela casa 16 e questionamos: porque que quando passamos da casa 16 (no tabuleiro do tipo 4×8) não podemos continuar a contagem com os numerais 17, 18, 19, por aí em diante?

É sobre esse questionamento que, a seguir, extraímos os discursos da discussão dos alunos a partir do vídeo em Anexo 25, como segue:

Professor: já iniciamos, qual é a discussão que estão a ter?
Aluno A: [...] nós estamos a trabalhar apenas com um jogador. **Aluno B:** aqui, nós temos os dados do jogador 1. Nós estamos à procura dos conjuntos. Quando eu saio faço um dois, três é o meu conjunto [o aluno quis dizer que três é o elemento do nosso conjunto]. **Aluno A**: o nosso conjunto tem como elemento o número de passos [acreditamos que o aluno quis dizer “o número da casa onde o passo finaliza” em vez “o número de passos”]. Isso temos que tomar cuidado. Então, significa que daqui até aqui é esse passo terminou, em que casa esse passo terminou. Então, significa que o primeiro passo terminou na casa 3. É por isso que 3 tem de esta entrar aqui [o aluno regista o três como elemento do conjunto no quadro branco].

Os alunos, de forma conjunta, seguem explicado o processo e registando o número da casa onde cada passo finaliza, utilizando um tabuleiro real do tipo 4×8

[40] Este ponto evidenciou sobremaneira que o ambiente da atividade propostas é rico o suficiente para um desenvolvimento didáctico da atividade.

feito em cartolina. Essa explicação vai até ao quinto passo, em que a jogada finaliza na casa 15, tendo sido registado os seguintes dados $\{3, 6, 9, 12, 15\}$. É preciso lembrar que, nessa experimentação, os alunos iniciaram a jogada da casa 1.

Quando um dos alunos leva os três dados da casa 15, distribui um-a-um as casas 16, 1 e 3. Mas há aqui um facto curioso, pois, o aluno se questiona, ao mesmo tempo que questiona os outros o porquê de não continuar com a contagem em 17, 18 e por aí em diante. Antes de qualquer análise sobre isso, vamos continuar transcrição a discussão para melhor percebermos.

Aluno B: [...] agora o meu problema é esse: porque que quando nós vamos assim, assim, estamos a dizer de novo que estamos a recomeçar no um? Porque aqui eu não conto como 17 [o aluno se refere a considerar a casa 1 como casa 17]. [...]

Aluno A: Ok, perceba alguma coisa: o que se quer é o número de casa onde a jogada terminou. Aqui já temos o número de casa. Não tem como inventarmos mais outros números para além destes números que já estão aqui.

Nessa discussão, percebe-se que há um grupo de alunos que avança com o raciocínio da contagem continua no processo de distribuição de dadas, um raciocínio importante para compreensão do processo de construção de uma relação geral que permita determinar o conjunto de dados que correspondem a casa onde cada passo da jogada finaliza e, que também ajuda a determinar a casa onde a jogada finaliza.

Na discussão, quando o aluno chega na casa 15, ele já insinua que, em vez que retornarmos a contagem a um, se continue na mesma sequência crescente, no caso, fazendo $15 + 3 = 18$ a seguir $18 + 4 = 22$ para casa onde a jogada finaliza. No caso, em vez do conjunto ser $\{3, 6, 9, 12, 15, 2, 6\}$ passa a ser $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 22\}$.

Entretanto, há um outro grupo de alunos que discorda da ideia de uma contagem continua até finalizar a jogada, como é ilustrada na transcrição da discussão acima.

Para colocar um ponto de ordem na discussão, cujo o entendimento entre os grupos estava longe de fechar, o professor intervém fazendo algumas considerações e questionamos, cuja a transcrição é feita abaixo.

Professor: Agora, se nos supormos que realmente essa casa vai ser 17 [se referindo a casa 1] e a casa dois seja 18. Depois, no sétimo passo, a jogada vai cair na casa 22. Ficamos com o conjunto de dados $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 22\}$, certo? [...] .

Aqui, 18 e 22 é maior que 16, portanto, 18 e 22 não existem para um tabuleiro do tipo 4×8. Mas agora a minha questão é: o que significa esse 18 e 22 no tabuleiro em relação ao número de casas que compõe um campo de jogo, no caso, a 16?

Mas uma coisa: reconsiderando o processo normal de distribuição de dados, a partir da casa onde a jogada inicia, como é que o número de dados que é retirado em uma casa para realizar a distribuição ajuda na determinação da casa onde cada passo da jogada finaliza?

Com base nestes questionamentos, os alunos retornam ao debate intra-grupo, que teve uma duração de sensivelmente 30 minutos. Desse debate surgem novas ideias mais ambiciosas em termos de propostas para construção de uma formula geral que determina a casa onde a primeira jogada finaliza, cuja a transcrição e análise do debate e feita a seguir:

Mas uma tentativa de formalização matemática do processo que gera o índice da casa onde cada passo da primeira jogada finaliza

Portanto, depois que os alunos retomam a discussão colectiva (inter-grupo), observa-se que já regressão com uma ideia bem mais formada em relação a construção da formula que permite determinar a casa onde cada passo da jogada finaliza, embora não expliquem direito como obtiveram a formulação que apresentam. Entretanto, pelo que já vinha sendo discutido, acreditamos que ainda utilizaram a ideia de sucessão aritmética para trazer a discussão a messa. Antes de qualquer outra ilação, apresentamos a transcrição do debate (ver na íntegra no Anexo 26) para analisa-lo melhor.

Aluno (representante do grupo): [...] tentamos redefinir a formula para saber o conjunto de dados que procuramos [...], mas a fórmula que o grupa trás vamos debater todos em conjunto para chegarmos a uma conclusão. Agora, a fórmula que achamos que poderia ser viável ou ajudar-nos iniciar a processar é: $U_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$, onde $\forall u_n > 16$: $a = k \times b + r$.

Professor: como é que você chegou a essa relação? [...] o que te fez chegar aí? **Aluno (representante do grupo)**: Nos quando estamos a estudar as rotações[41] vamos ver que, há uma sequência que nós temos. Por exemplo: se iniciarmos na casa 16, 16 é o nosso i, é a casa onde estamos a iniciar. [...] Teremos o primeiro passo que será igual a $16 + 2 + (1 - 1)(2 + 1) = 18$. Depois, fizemos $18 - 16$ que vai nos dar 2. Portanto, quando nós fizemos a rotação no tabuleiro vai cair na casa 2. [o colectivo de aluno não consegue explicar direito a origem da formula].

Nessa discussão, o aluno traz ao quadro branco a formula $U_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ já estampada e sem explicações concretas da sua origem. Na nossa suposição, a discussão que levou a esta formulação deverá ter surgido da ideia do termo geral de uma sucessão aritmética, um conhecimento que os alunos vinham utilizando para tentar achar a formula que atende ao problema proposto na tarefa 1. Esta relação, que nas discussões anteriores deu origem, por exemplo, a fórmula $U_n = 2 + (n - 1) \times 3$, em que se tomava apenas a casa onde o primeiro passo finalizou como primeiro termo, ignorando-se, hipoteticamente a casa onde a jogada inicia $i = 16$.

No caso, nessa nova discussão, os alunos já abrem seu raciocínio e associam suas formulações a casa onde a jogada inicia, além do mais, já reconhecem a ideia de que o número de dados em cada casa aumenta em uma unidade cada vez que se vai realizar a distribuição de dados. Neste caso, a partir do conhecimento do termo geral de uma progressão aritmética, considerando a razão da progressão igual a 3, que é equivalente a dois mais um dado $(2 + 1)$, eles simplesmente formulam:

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times d$$

Aqui, os alunos reconhecem que $u_1 = i + 2$ e fazem a substituição, originando na fórmula:

$$u_n = i + 2 + (n - 1) \times 3 = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$$

Essa é a nossa suposição do que terá acorrido, contudo, não exploramos muito dos alunos, por alguma distração. De todo jeito, o aluno quando é pedido para explicar

[41] Os alunos utilizam frequentemente o termo “rotação” para se referir ao fenômeno de circularidade que ocorre no processo de distribuição de dados no sistema de jogo Ntxuva.

a origem da relação ele acaba caindo na explicação das causas pelo qual ele subtrair 16 de 18 para achar o número ou índice da casa onde o respectivo passo finaliza. Segue a descrição do debate para uma análise melhor.

Professor: porque? [o professor questiona porque é que a rotação vai cair na casa dois, enquanto que, pela relação ele achou 18].

Aluno (representante do grupo):porque? [risos da turma]. Certo, não sei se poderia demostrar usando o tabuleiro? para mostrar os movimentos.

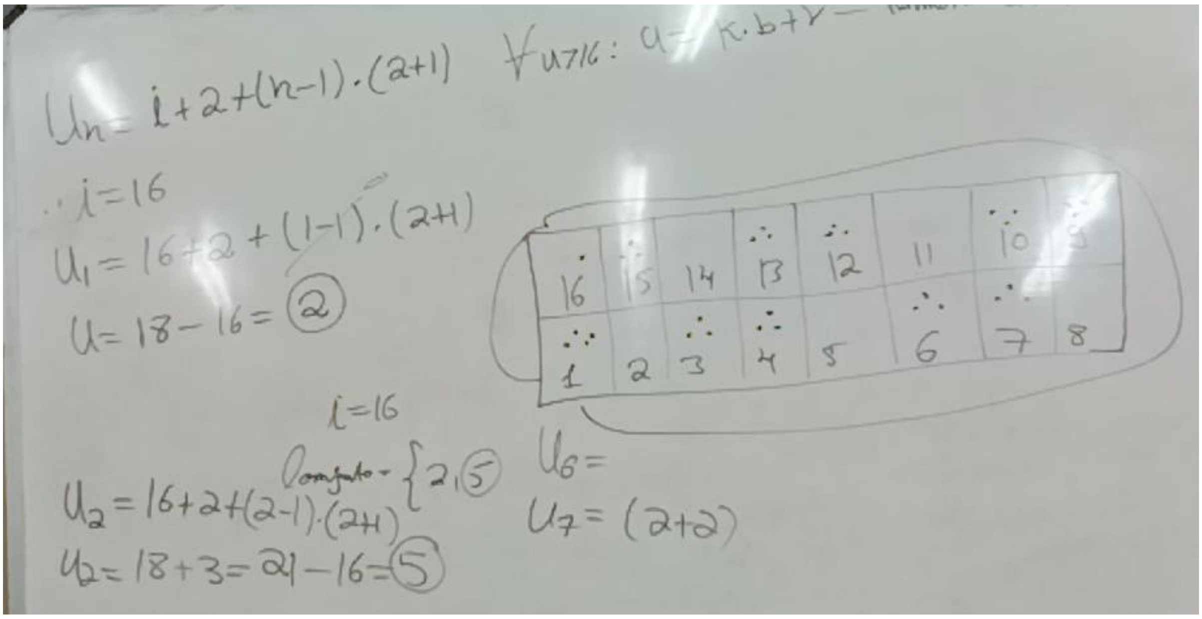
Professor: desenha o tabuleiro aí no quadro para todo mundo ver.

Aluno (representante do grupo): [desenha o tabuleiro no quadro, coloca os índices de cada casa e explica]. Temos aqui um tabuleiro e dois por oito, onde vamos ter aqui um, dois, três, ..., dezasseis. Então, como nós podemos ver, sempre o tabuleiro é constituído por dois dados [faz marcação de dois pontos em cada casa para representar o número de dados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro].

Eu dizia que, para observar o conjunto de números teremos: eu vou começar da casa 16. Vou levar dois dados, vou começar a fazer distribuição [explica o processo de distribuição de dados, enquanto regista o conjunto de números $\{2, 5, \dots\}$]. [continua] – Então, olhando nos resultados que obtemos aqui, poderemos observar que, sempre existirá essa fórmula [o aluno não explica direito a origem a fórmula e cai na explicação das razoes de subtrair 18 por 16].

Então, o aluno determina a contagem de casas até ao segundo passo a partir da fórmula que propõe e obtém: $u_2 = 16 + 2 + (2 - 1)(2 + 1) = 18$. Depois, subtrai este valor por 16, obtendo: $u_2 = 18 - 16 = 2$ (ver Figura 87). Nesse cálculo, há detalhe importante que o aluno apresenta, ao se referir que “podemos também determinar o 2 a partir da fórmula de Euclides $a = k \times b + r$, considerando o r como o número de caso onde o passo finaliza, a a contagem de casas até aquele passo e b o número de casas que compõe um campo de jogo.

Figura 88: Determinação da fórmula para identificação do conjunto de números que corresponde ao índice de casa onde casa passo da jogada iniciada na casa 16 finaliza



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 26 (2023)

A seguir, o aluno faz algumas considerações explicando esta é uma formula inicial porque só funcionava até ao sexto passo, pois, para o sétimo passo não dava certo. Ai, ele requere ajuda do grupo para entender essa parte, como se nota em seu discurso no Anexo 26, transcrito a seguir:

> **Aluno (representante do grupo)**: [...] só que quando eu disse que é uma fórmula inicial, vou precisar da ajuda da turma para podermos discutir, por essa fórmula só vai nos ajudar até a casa u_6. Porque? Porque até a casa 6 vamos ter dois dados e adicionamos mais um dado. Quando nós chegarmos na casa 7, vamos chegar uma fase que vamos adicionar dois mais dois dados. Portanto, nesta fórmula, falta alguma coisa para explicar a última rotação que é do sete [o aluno quis dizer que é do passo 7]. [...] então, a ajuda que nós estamos a precisar é enquadrar essa condição [...] em que adicionamos dois mais dois dados. É essa parte que ainda falta pro decifrar [...].

A seguir a essa colocação, outras discussões foram surgindo, de tal modo que um aluno explica que, para além da inquietação que o colega coloca, a outra é de saber se essa primeira parte e válida para outros tabuleiros. Notamos aqui que, os alunos, mesmo antes de trabalhar com a segunda questão, já levantam o questionamento cujo o trabalho com a tarefa 2 poderá decifra-lo. É aí que o professor sugere, sem necessariamente entrar para a tarefa 2 formalmente:

> **Professor**: não seria bom a gente testar com outros tabuleiros para vermos se a fórmula funciona?
>
> **Aluno**: podemos testar.

9.2.2. O trabalho com a tarefa 2[42]

Após o convite anterior feito aos alunos para tentar trabalhar com outros tipos de tabuleiros, o colectivo de alunos inicia trabalhando com um tabuleiro do tipo 4×6. No caso, um dos alunos desenha o tabuleiro do tipo 4×6 no quadro e em conjunto, com outros colegas, iniciam analisando as características, para averiguar se a formula que propõe pode funcionar naquele caso. Assim, um aluno se voluntária e começa a explicar o processo de geração dos índices das casas onde cada jogada finaliza, explicando:

> **Aluno**: [...] ok. Vamos tentar resolver aqui iniciando da casa 5. Vou tentar fazer a distribuição para ver se vamos ter os sete passos ou não [os sete passos, referia-se aos obtidos quando utilizado o tabuleiro do tipo 4×8].

O aluno realiza o processo de distribuição de dados e extrai o conjunto de números $M = \{7, 10, 1, 4, 7\}$. Depois, faz a contagem dos números e determina que o número de passos para finalizar a jogada no tabuleiro do tipo 4×6 é 5. Depois, um outro aluno sugere que se utilize a fórmula $U_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ para gerar os

---

[42] Começou-se a trabalhar com as ideias da tarefa 2 sem ter que se anunciar formalmente, mas pela necessidade analisar outros casos de jogo, com vista a buscar a comprovação de algumas ideias que estavam emergindo da discussão levantada pelos alunos em relação a alínea f) da tarefa 1.

Mas na essência, a tarefa 2 visava a ampliação do olhar ou raciocínio dos alunos em relação as características identificadas através do trabalho com a tarefa 2.

A tarefa 2, formalmente foi anunciada da seguinte forma: *Se em vez de um tabuleiro do tipo* 4×8*, você fosse jogar em tabuleiro do tipo* 4×9*,* 4×10*,* 4×11*,...,* 4×254 *ou de uma dimensão menor e supondo que sua primeira jogada fosse iniciar na casa 1, 2, 3, …,* i*: Quantos passos seriam necessários para finalizar a primeira jogada? Como você determinaria o conjunto de números que correspondem a identificação das casas onde cada passo da primeira jogada finaliza? Em que casa* f *a jogada finalizaria? É possível responder estas perguntas sem utilizar a representação gráfica do jogo? Explique o seu raciocínio*.

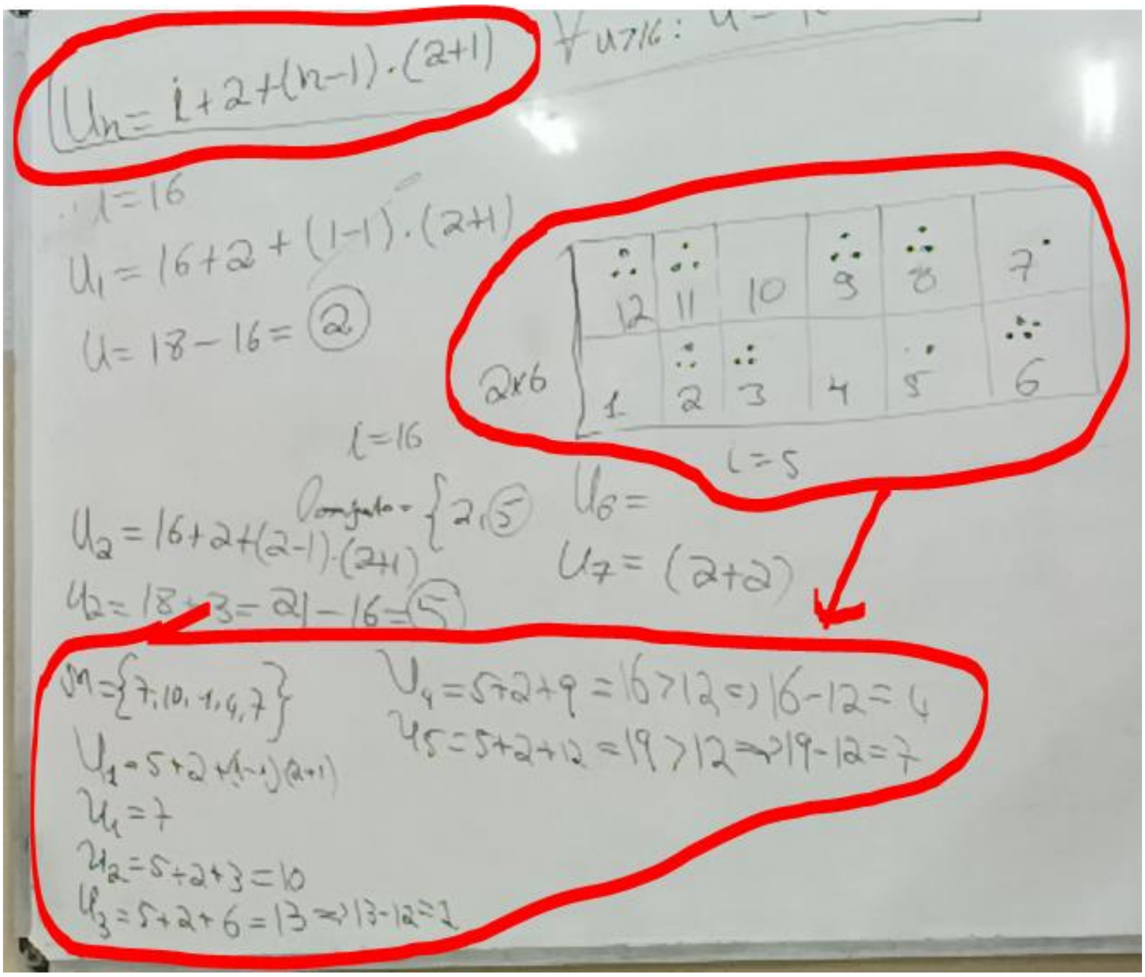
Olha que, os alunos, mesmo sem a tarefa, iniciaram a trabalhar com um tabuleiro menor do que foi utilizado na tarefa 1, no caso, entraram para tarefa 2 trabalhando com o tabuleiro do tipo 4×6.

números que correspondem aos índices das casas onde cada passo finaliza, efetuando:

> **Colectivo de alunos**: [...] [determinam o conjunto M]. [...]. n representa o número de passos, então pode colocar 1 no lugar de n. [determina-se $u_1 = 7$, $u_2 = 10$, $u_3 = 13$]. [...] treze é maior que 12, então fica 13 menos 12 que é igual a um. [...] $u_4 = 16$, 16 é maior que 12, então 16 menos 12 vai ser igual a 4. [...] $u_5 = 19$, 19 é maior que 12, então 19 menos 12 vai ser igual a 7. [...] agora, verifica se os números são os mesmos que os anteriores. São os mesmos (grito colectivo). [ver Figura 89]

Como é notado na descrição anterior e ilustrado na Figura 89, os alunos de forma colectiva, tentam testar a fórmula identificada na última discussão sobre a tarefa 1 e vê que a fórmula funciona taxativamente. No caso, para o tabuleiro do tipo 4×6 ela não vai até a segunda rodada, como os próprios alunos se referem.

Figura 89: confrontação da fórmula $u_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ para o tabuleiro do tipo 4×6



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 26 (2023)

Até aqui podemos dizer que os alunos estavam caminhando direitinho. Ainda estava sendo tudo desenvolvido no caminho esperado, embora a formulação ainda não tenha sido consistente. Mas há duas coisas que não estavam ainda indo bem, que são:

- Primeiro: que os alunos não estavam a enxergar que estavam perante uma sequência definida em partes e que a primeira parte seria definida pela relação $u_n = i + 2 + (n-1)(2+1)$ a que já tinham construído, com $n = 1,2,3, \dots, m+1$, cuja a razão da sequência é $2+1$. A segunda parte por $u_n = i + 2 + m(2+1) + (n-m-1)(2+2)$, onde m resultaria da divisão do número de casas que compõe um campo de jogo por $3 = 2+1$, a razão de dados distribuídos na primeira rotação (como eles designam).
- Segundo: que o número de passos total para finalizar a jogada estava inteiramente relacionado com o número de casas que compõe um campo de jogo, sendo dado na forma $1 + m + t$, com $k = m(2+1) + t$.

Para levantar uma discussão que coloque um direcionamento dos alunos a este raciocínio, o professor coloca alguns questionamentos a mais e, puxa um pouco o raciocínio deles tentando recordar aos alunos, a lógica da formação do conjunto de números que correspondem ao índice das casas onde cada passo da jogada finaliza, comparando para os casos do tabuleiro do tipo 4×6 e 4×8 cujo os launos já teriam apresentado o seu desenvolvimento, embora que incompleto para o tabuleiro do tipo 4×8.

Podendo se ver no Anexo 26 e Anexo 27, o professor intervém fazendo os seguintes questionamentos:

Professor: com o tabuleiro do tipo 4×8 cujo número de casas que compõe um campo de jogo é 16 ficou difícil achar u_7 (ultimo termo) com a fórmula $u_n = i + 2 + (n-1)(2+1)$. Mas com o tabuleiro do tipo 4×6 cujo número de casas que compe um campo de é 12 conseguimos encontrar u_5 (ultimo termo). Porque?

Aluno: falta sugerir aquele passo de $(2+1)$. [...] sim, porque aí quando vamos fazer a segunda rotação deixa de ser 2+1 passa a ser 2+2.

[...] [discussão entre alunos, meio desviada do assunto]

Professor: Mais uma pergunta. Existe uma relação entre o número de casas e o número de passos necessários para finalizar a jogada? Como é que a partir do número de casas de um campo de jogo podemos saber quantos passos a jogada vai ter? [...] Ou podemos saber quantas vezes podemos distribuir 2+1, quantas vezes podem distribuir 2+2? Na relação que vocês apresentam $U_n = i + 2 + (n-1)(2+1)$, oque representa

Depois que são levantadas estes questionamentos, os alunos tomam a dianteira e começam a tentar um novo esclarecimento. A seguir se transcreve parte do esclarecimento e que é ilustrado com detalhes no Anexo 27.

Aluno: [...] olhando para essa situação de 2×8 há uma pequena diferença com a de 2×6. [...] se nós formos a usar essa fórmula $u_n = i + \mathbf{2} + (n-1)(2+\mathbf{1})$, temos de perceber que, o um (1) que está em (2+1) vai representar o número da rotação, i é a casa pelo qual a nossa jogada está iniciando e esses dois (em $i + 2$) esta representar os dados que estão presentes em cada uma dessas casas [indicando as casas do tabuleiro, na verdade, na sua configuração inicial]. Então, o dois mais o i que é a casa onde a jogada inicia $(i+2)$, vai corresponder ao primeiro passo. E o $n-1$ em algumas vezes vamos ter um certo número [...] que vai representar [...] o número de passos.

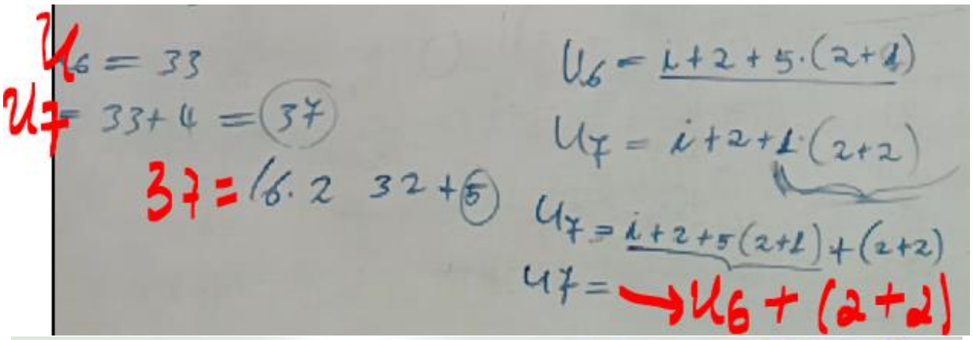
Depois desse comentário, o aluno toma o exemplo já existente, para 2×8 que possui sete passos e explica que: para $u_6 = i + 2 + 5(2+1)$ se tem 6 passos quem vem do primeiro passo em que se distribui dois dados de i a $i + 2$, mais 5 passos em que se distribui três dados. Para u_7, como inicia uma nova rotação, será dado pela soma do valor do passo anterior mais (2+**2**) em que o dois a vermelho representa a segunda rotação. Assim, sendo $u_6 = i + 2 + (n-1)(2+1)$, $u_7 = u_6 + (2+2)$.

Na Figura 90 a), o aluno apresenta um exemplo tomando hipoteticamente $i = 16$, substitui na expressão para u_6 e obtém $u_6 = 16 + 2 + (6-1)(2+1) = 33$. Depois, para u_7 leva o valor anterior adiciona a $2 + 2$, isto é, $u_7 = u_6 + (2+2) = 33 + 4 = 37$.

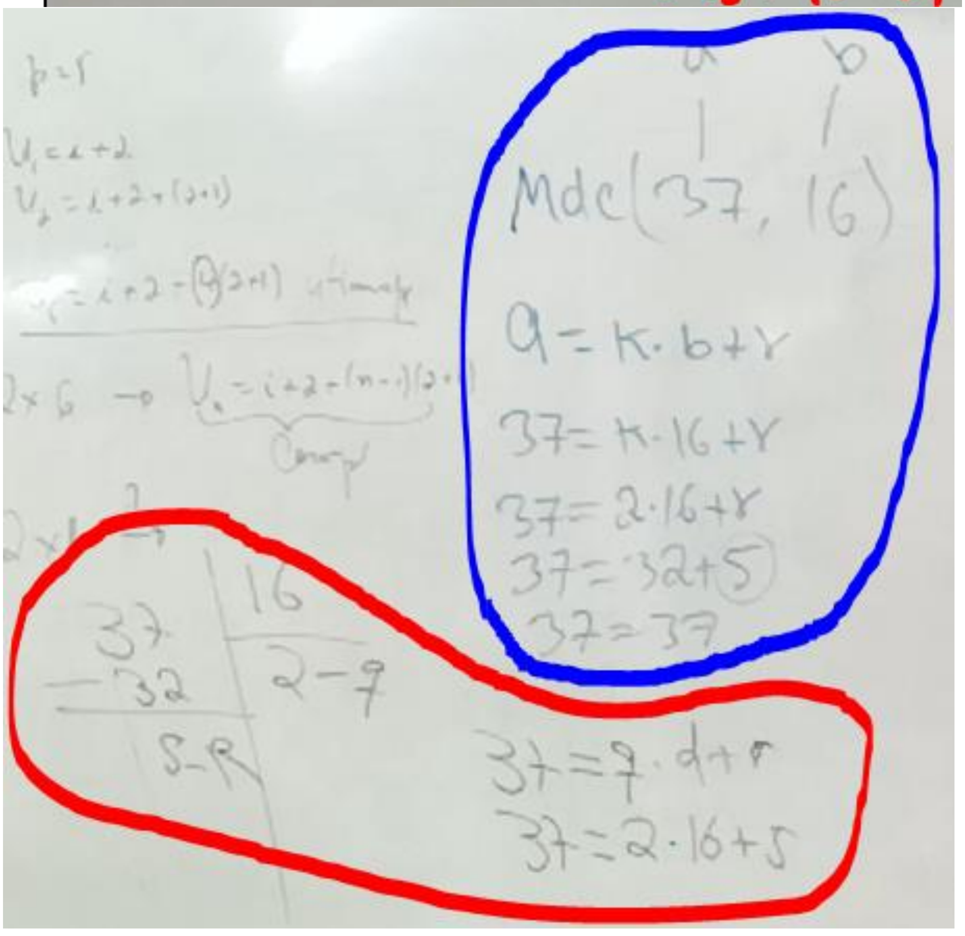
A seguir, explica que, como o campo de jogo tem 16 casas, isto é, $k = 2n = 2 \times 8 = 16$, isto é, $37 > 16$, deverá se achar o resto da divisão de 37 por 16 para determinar o índice da casa onde está suposta jogada finaliza. No caso, como é ilustrado na Figura 90 a), ele reduz essa divisão no seguinte: $37 = 16 \times 2 + 5$, indicando o resto 5 como o índice da casa onde finaliza a jogada iniciada na casa $i = 16$.

Figura 90: desenvolvimento da ideia da fórmula para determinação do índice da casa onde cada passo da jogada finaliza

a)



b)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 27 (2023)

Para explicar esse processo de divisão, um outro aluno propõe a dedução marcada a azul na Figura 90 b) fazendo $MDC(37, 16)$, considerando $a = 37$ e $b = 16$. Depois, propõe que se utilize a relação da divisão euclidiana $a = kb + r \Leftrightarrow 37 = k \times 16 + r$. A partir daqui pensar no valor de k que multiplicado por 16 de um número igual ou inferior e aproximadamente igual a 37. Aí ele acha esse valor como sendo 2 e substitui, fazendo: $37 = 2 \times 16 + r = 32 + r$. Feito isso, ele determina r retirando 23 de 37, isto é, $5 = 37 - 32$.

Um outro aluno entende que esse procedimento é demasiadamente complexo e por imaginação, pelo que, recomenda que se usa vertical fazendo:

$$\begin{array}{rr|l} 3 & 7 & 1\ \ 6 \\ \cline{3-3} -3 & 2 & 2 \\ \cline{1-2} & 5 & \end{array}$$

Assim, 37 poderia ser escrito como: $37 = 2 \times 16 + 5$.

Portanto, aqui o aluno já apresenta a ideia da sucessão definida em partes, mas não anuncia isso formalmente. De qualquer jeito, podemos afirmar que, até este estágio da experimentação, o colectivo de alunos já tinha a ideia formal do processo da formulação que leva a determinação do conjunto de números que correspondem as casas onde cada passo da primeira jogada finaliza. Embora não formalizado, mas sente-se aqui que os alunos já estavam caminhando na direção da proposta apresentada na analise a priori.

Uma outra coisa interessante aqui, é a ideia da divisão que surge para reduzir o valor achado da contagem de casas, para determinar a casa ou índice efectivo da casa onde a jogada finaliza. Aqui, embora também não formalizado, o contato com a tarefa 1 e 2 fez emergir nos alunos a ideai da divisão euclidiana.

Aqui, também já havia alguns indícios da formalização do cálculo de número de passos para finalizar uma jogada. Entretanto, como estávamos tempo, o debate sobre este ponto não foi alongado, tendo sido proposto para debate no encontro seguinte. No entanto, entregamos também aos alunos também a tarefa 3 para que fossem indo discutir em casa e debatêssemos em no dia seguinte.

Contudo, não ficou muito bem claro porque que o aluno teria utilizado a simbologia do MDC, uma vez que, nestes cálculos, não é necessário determinar o menor divisor comum. A nossa suposição é esse conhecimento saiu por acaso.

O debate e formalização da ideia de número de passos para finalizar uma jogada

O a descrição e análise de dados a seguir marcou o debate do terceiro encontro que dá continuidade do trabalho com a tarefa 2. Como os alunos no encontro anterior já tinha discernido, em partes, a formulação para determinação das casas onde cada passo da jogada finaliza, esse debate, se focou principalmente na discussão da formalização da relação que determina o número de passos necessários para finalizar uma jogada e sua relação com a relação que determina a casa onde a jogada finaliza.

No encontro anterior, os alunos haviam trabalhado com o tabuleiro do tipo 4×6. Neste, os alunos retomam o trabalho da experimentação material com tabuleiros do tipo 4×7, 4×9, 4×10 e outros, para compreender melhor as características do processo de distribuição de dados.

Assim, depois que o professor orienta o início do debate, o aluno simula no quadro branco um tabuleiro do tipo 4×9. Com início na casa $i = 1$, o aluno inicia o processo de distribuição dados registando os índices das casas onde cada passo da jogada finaliza, obtendo assim o seguinte conjunto de dados: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 4\}$. A seguir, ele conta o número de dados e informa que para aquele tabuleiro foram necessários sete passos para finalizar a jogada (vinde Anexo 28, vídeo 1).

Mas até aqui, os alunos não conseguem formalizar uma ideia geral para identificação do número de passos necessários para finalizar uma jogada. Ai, o professor tenta insistir questionando: *de que depende o número de passos? Sem jogar, como é que nós vamos saber que nesse tabuleiro precisaremos de tantos passos para finalizar a joga?*

Os alunos discutem e a seguir explicam que o número de passos depende do número de casas de um campo de jogo, mas na essência, não conseguem apresentar uma relação concreta para determinação desse mesmo número de passos.

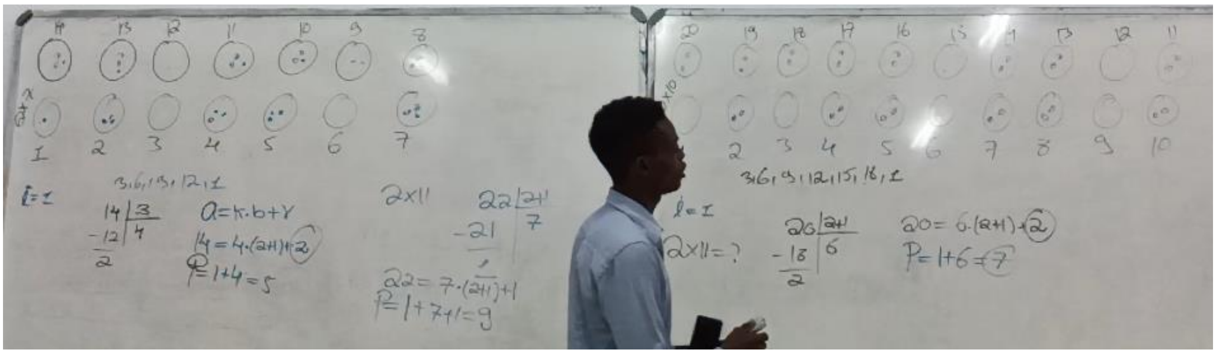
Depois que o professor percebe esse fracasso, alguns questionamentos direcionais, que nãos estavam previstos na analise a priori:

Professor: relacionem o número de casas de um campo de jogo com a primeira e segunda rodada do processo de distribuição de dados. Haverá alguma relação? Analisem naturalmente o processo de distribuição de dados, relacionem a primeira e segunda rodada de distribuição de dados com o número de casas que compõe um campo de jogo e vejam se é possível destacar alguma informação sobre o número de passos. Podemos discutir?

Feito essa consideração pelo professor, os alunos retomaram a discussão intra-grupo para discutir novamente sobre: *como determinar o número de passos em uma* *jogada*. Depois de cerca de 35 minutos de discussão intra-grupo, os grupos retomaram a discussão inter-grupo no quadro. Nessa retomada os alunos já trazem algumas ideias formadas em relação ao número de passos necessários para finalizar uma jogada e, trazem algumas interpretações que descreveremos a seguir.

Como é ilustrado no Anexo 28, vídeos 2, a 10, os alunos começam desenhando o tabuleiro de Ntxuva do tipo 4×7 e 4×10 no quadro. Depois disso, realizam o processo de distribuição de dados iniciando da casa $i = 1$ para ambos os tabuleiros e, registam os índices das casas onde cada passo da jogada finaliza, que resultaram nos conjuntos $\{3, 6, 12, 9, 1\}$ e $\{3, 6, 9, 12, 15,\ 1\}$, respectivamente, como é ilustrado na Figura 91.

Figura 91: discussão da ideia segundo a qual quando o resto de $k = m(2+1) + t$ por $2+1$ for igual ao número de dados ($t = d$), o número de passos se mante igual a $1 + m$



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 28 (2023)

Na discussão, vide Anexo 28, vídeos 1 e 2, depois que se faz a distribuição de dados, os alunos notam que, nos dois tabuleiros, a jogada inicia e finaliza na mesma casa, no caso, a jogada inicia e termina na casa 1. A seguir, o aluno explica a ideia do número de passos nessa condição, como segue a transcrição da apresentação do aluno e que pode ser vista na íntegra no Anexo 28 – vídeo 3 e 4, e Figura 91.

Aluno (representado do colectivo de alunos): [...] determinamos o nosso i que é um (1) e temonamos no um (1). Fizemos a rotação completa e vamos terminar onde nós começamos. Então, se for esse caso, [...] [para o tabuleiro do tipo 4×7 o aluno divide 14 por 3 e obtém $14 = 4 \times (2+1) + 2$]. [...]. Vejam só, aqui quando fizemos a distribuição, sempre voltamos a terminar onde começamos. [...]. Veja só, se fazemos o mesmo aqui, vamos ter [para o tabuleiro do tipo 4×10 o aluno divide 20 por 3 e obtém 20= $6 \times (2+1) + 2$].

Estes dois significa o número de dados [o aluno se refere ao dois resultando do resto da divisão feita anteriormente]. Então, não há necessidade de nos voltarmos a somar. No já tivemos o primeiro passo mais o quaro que dá cindo [o aluno representa no quadro $p = 1 + 4 = 5$, depois, confirma contando o conjunto de números gerados para o tabuleiro do tipo 4×7].

Vamos, temos número de passos, um passo mais seis, da sete [o aluno representa no quadro $p = 1 + 6 = 7$, em seguida, confirma contando o conjunto de números gerados para o tabuleiro do tipo 4×10].

Ao passo que, para outros tabuleiros, que é, por exemplo o 2×11, vamos ter 22 por dois mais um [o aluno divide 22 por 3 e obtém $22 = 7 \times (2 + 1) + 1$]. [...]. Então, aqui o que acontece? Temos o número de passos que é o primeiro passo mais sete mais um do resto da divisão nos dá nove [o aluno representa $p = 1 + 7 + 1 = 9$ como o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada no tabuleiro do tipo 4×11]. [...]

Aluno: [...] ok. vimos três casos né? [...]

Professor: [...] você pode dar uma sumula geral desses três casos? [...]

Aluno: [...] para este caso, que nos dá dois [...] nós somamos o primeiro passo mais este seis que é o número de vezes que repetimos o dois mais um. E para este caso, que vamos ter o resto como sendo um, o número de passos será o primeiro passo, mais o número de vezes que nós repetimos dois mais um, mais o resto. No primeiro caso não adicionamos o resto porque temos o dois que é o número de dados.

A partir desta transcrição, é possível notar que os alunos cainham na direção das hipóteses firmadas ou esperadas na análise a priori. Algumas características reveladas e que fazem parte do corpo de conhecimento sobre o processo de distribuição de dados até este momento são:

- Que é necessário utilizar a divisão euclidiana para determinar: primeiro, definir se a distribuição de dados irá até a primeira ou segunda rodada; segundo, para definir os parâmetros a serem utilizados para a determinação do número de passos necessários para finalizar a primeira jogada.
- Quando o resto da divisão do número de casas que compõe um campo de jogo por $3 = 2 + 1$ é igual a zero ou a 2 (número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro), a distribuição de dados será feira

em uma rodada. Nestas condições, o número de passos é dado pela soma do primeiro passo e o quociente da divisão explicada anteriormente $(1 + q)$.

- Quando o resto da divisão do número de casas que compõe um campo de jogo por $3 = 2 + 1$ é igual a um, a distribuição de dados vai até a segunda rodada. Nestas condições, o número de passos é dado pela soma do primeiro passo, mais o quociente da divisão explicada anteriormente e 1 d resto da divisão anterior $(1 + q + 1)$.

A seguir a apresentação do aluno anterior, um outro pede a palavra para falar e justifica que pretende fazer um resumo das colocações do colega. Na transcriação a seguir descrevermos as ideias que o aluno ousou em resumir:

Professor: seu colega levantou mão. Acho que quer falar. **Aluno**: Sim docente. Continuando, eu só quero tentar resumir o que o colega acabou de falar. Aqui nós temos três casos, mas primeiramente temos de perceber onde estas formulas. [...]. nós estamos a partir da fórmula $u_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$. Onde esse i representa a casa pela qual a jogada inicia. Aqui n vamos subtrair uma unidade sempre que formos a avançar para o passo seguinte. [...]. Então, a partir daqui, é onde nós podemos ter esse raciocínio. Para conhecermos a quantidade dos passos sempre temos que olhar apenas para a primeira rodada, não nos importa as outras próximas. Tendo em conta isso, a primeira rodada termina em $i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$. Mas também temos a formula $u_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1) + (2 + 2)$. Então, onde vamos usar a primeira fórmula e onde vamos usar esta fórmula? [...] então, $n - 1$ representa a quantidade de passos em que $2 + 1$ foi distribuído [discurso reorganizado].

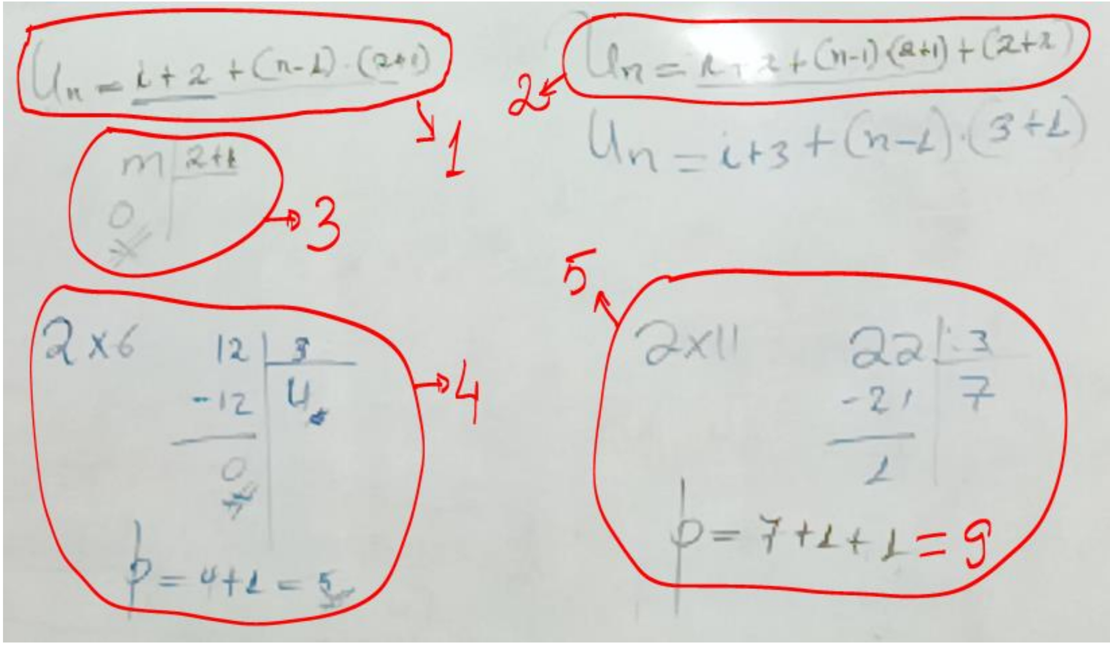
Aqui, o aluno já mostra uma formalidade mais elaborada da relação que permite determinar o índice da casa onde cada passo da primeira jogada finaliza, como se pode ver na Figura 92, ou no Anexo 28 vídeo 5, 6, 7.

Ao apresentar a primeira fórmula 1 – $u_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ (Figura 92), o aluno, primeiramente explica que, o número de passos para finalizar a jogada, depende da primeira rodada de distribuição de dados que é dada por $(n - 1)(2 + 1)$. No caso, essa expressão é resultante da um valor que ele m (número de casas que compõe um campo de jogo de um tabuleiro) que divide por $2+1$ e que resulta em resto zero (como é mostrado na marcação 3 da Figura 92).

Portanto, aqui, $n-1$ é um número de que indica as vezes em que se distribui na primeira rodada $2+1$ dados. Sendo assim, ele explica ainda que o número de passos se dará pela soma do primeiro passo, que vai da casa i onde a jogada inicia a casa $i+2$ mais o número $n-1$ de passos em que se distribui $2+1$ dados, o que daria sensivelmente $1+(n-1)$[43].

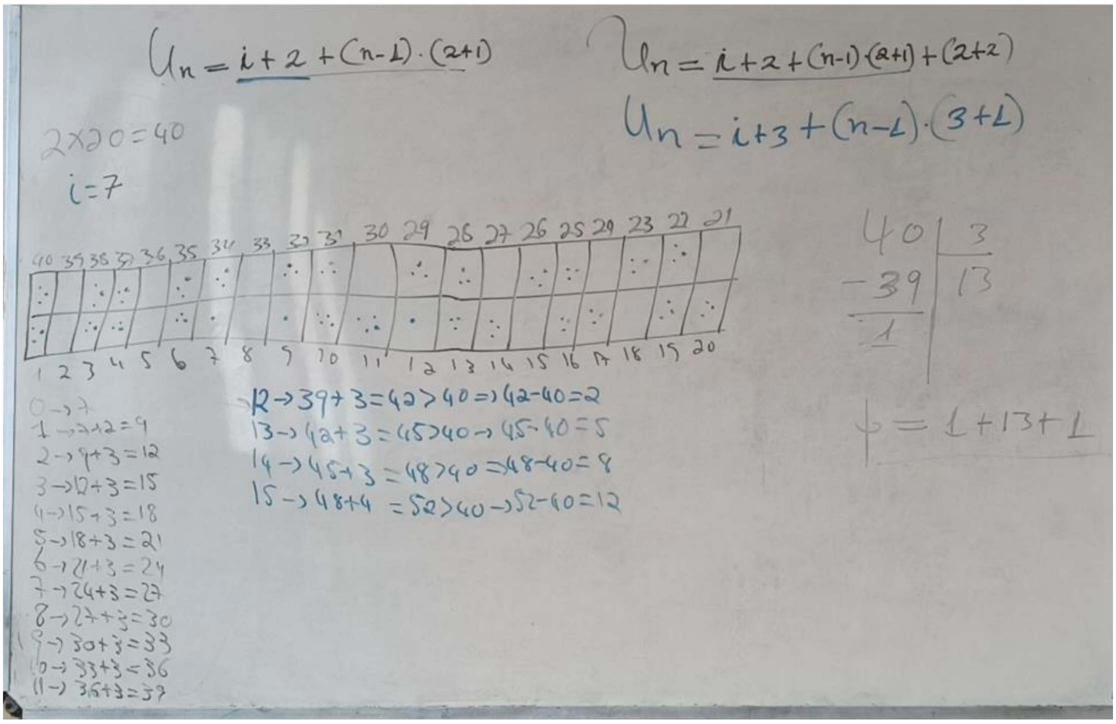
Figura 92: discussão sobre – quando e como usar as fórmulas $u_n = i + 2 + (n-1)(2+1)$ e $u_n = i + 2 + (n-1)(2+1) + (2+2)$

a)



[43] É importante sinalizar aqui que, os alunos na sua explicação, não esclareceram explicitamente que n é variável, tanto que, em algum momento utilizavam como um número fixo. Mas isso ficou esclarecido aos alunos na institucionalização. De qualquer jeito, os alunos até este momento já tinham reunido os conhecimentos esperados de acordo com a analise a priori.

b)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 28 - vídeo 7 e Anexo 29 – vídeo 1 (2023)

A seguir, ele expõe um exemplo ilustrativo que é apresentado na marcação 4 da Figura 92, para mostrar a validade do raciocino que apresenta. No caso, ele toma um tabuleiro do tipo 4×6 e divide $2 \times 6 = 12$ (o número de casa que compõe um campo de jogo) e divide por $2 + 1 = 3$, achando 4 como quociente e zero como resto. Tento resto zero, ele explica que não haverá necessidade de a jogada passar apara segunda rodada de distribuição de dados.

Nessa situação, o aluno explica que, para determinar o número de passos necessários para finalizar a jogada é só adicionar o número $n - 1$ ao primeiro passo. No caso, com os dados acima, o número de passos ficaria $1 + 4 = 5$.

Ao apresentar a primeira fórmula 2 – $u_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1) + (2 + 2)$ (

Figura 92), retoma explicar que para determinar o número de passos para necessários para finalizar a primeira jogada deve se levar em conta apenas rodada de distribuição de dados que é dada por $(n - 1)(2 + 1)$.

A seguir a essa explicação, ele toma o tabuleiro do tipo 4×11 como exemplo para determinar o número de passos. Como vem na marcação 5 da

Figura 92, o aluno divide $2 \times 11 = 22$ (o número de casa que compõe um campo de jogo) por $2 + 1 = 3$, achando 7 como quociente e 1 como resto. Com estes dados, ele determina o número de passos somando $1 + 7 + 1 = 9$ e explica que, o primeiro 1 é relativo ao primeiro passo em que se distribuem dois dados, o sete é o quociente da divisão de 22 por 3 e o ultimo um é o resto da mesma divisão. Aqui, o aluno argumenta ainda que, para além do resto ser diferente de zero é também diferente do número de dados que compõe o tabuleiro na sua configuração inicial.

Acrescendo a essa explica anterior, o aluno explica também que, quando o resto for igual ao número de dados que compõe cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial, não adicionamos o resto para o cálculo do número de passos. De qualquer jeito, o aluno queria dizer que o número de passos nessas condições é igual a $1 + (n - 1)$.

A discussão dessa tarefa finaliza, quando um outro aluno sugere que se comprove as formulações anteriores testando em algum tabuleiro. A seguir, o mesmo se dirige ao quadro e propõe trabalhar com um tabuleiro do tipo 4×20, cujo número de casas de um campo de jogo é $2 \times 20 = 40$. Como é ilustrado na Figura 92 b) e Anexo 29 – vídeo 1, no trabalho com este tabuleiro o aluno:

- Desenha o tabuleiro no quadro e realiza a distribuição de dados. Nesse processo ele vai fazendo o registo das casas onde cada passo da jogada finaliza, depois, conta o número de dados registados, que corresponde igualmente ao número de passos necessários para finalizar a jogada. No caso, ele observa que a jogada finaliza com 15 passos.

Aqui, pode se ver também que, o aluno utiliza o procedimento natural de distribuição de dados para gerar os índices das casas onde cada passo da jogada finaliza. Como é de observar, o aluno inicia o processo da casa $i = 7$. Para achar onde a primeira jogada finaliza, o aluno adiciona 2 a 7 obtendo 9, isto é, $7 + 2 = 9$, que equivale dizer que $f_1 = i + 2$. Do segundo ao decimo quarto passo, ele adiciona $3 = 2 + 1$ ao índice da casa do passo anterior, isto é, $f_{n+1} = f_n + 3$, para $n = 2, 3, \dots, 14$. Para achar o decimo quinto passo, o aluno adiciona $4 = 2 + 2$ ao decimo quarto passo, obtendo 52, que depois, por ser maior que 40, faz se $52 - 40 = 12$ que é o índice real da casa onde a jogada finaliza.

Nessa abordagem, pode se ver que o aluno segue a relação:

$$f_n = \begin{cases} f_1 = i + 2, & para\, n = 1 \\ f_{n-1} + 3, & para\, n = 2, 3, \dots, 14 \\ f_{15} = f_{14} + 4, & para\, n = 15 \end{cases}$$

Aqui, é possível notar que o aluno tem a noção de que, é preciso retirar 40 (número de casa correspondente a um campo de jogo) do valor, isto é, se $i + 2 +$

$(n-1)(2+1) > 40$ então o índice da casa onde cada passo finaliza se dá pela relação $u_n = i + 2 + (n-1)(2+1) - 40$. Obviamente que, este conhecimento os alunos já vêm construindo com os debates anteriores, por isso, não era de estranhar que o aluno usasse aqui.

Depois dessas discussões, que foram desenroladas no trabalho com a tarefa 1 e 2, com o qual os alunos fizeram emergir conhecimentos diversos e esperados de acordo coma analise a prior, o professor, realizou a seguir, uma síntese geral baseada nas ideias dos alunos, em jeito de institucionalização dos principais conhecimentos que emergiram no trabalho com a tarefa 1 e 2, como pode ser ver no Anexo 29 – vídeo 1. Assim, utilizando algumas das notações que os alunos já estavam utilizam, em jeito de institucionalização, sumarizamos o conhecimento construído em:

- Seja k o número de casas que compõe um campo de jogo. k pode ser escrito na forma $k = m \times (2+1) + t$[44], em que m é o quociente e t o resto.
- Como foi discutido, se t (o resto) for igual a zero, temos $k = m \times (2+1)$. Nestas condições, a distribuição de dados é feita em uma rodada, o número de passos para finalizar a primeira jogada é dada pela expressão $1 + m$ e, a casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $f = i + 2 + m \times (2+1) - rk$[45], ou, $f = MOD(i + 2 + m \times (2+1); k) = MOD(i + 2; k)$. O conjunto de números que identificam cada a casa onde cada passo finaliza é expresso por: $f_n = i + 2 + (n-1)(2+1) - rk = MOD(i + 2 + (n-1)(2+1); k)$.
- Se t (o resto) for igual a 2 (número de dados em cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial), temos: $k = m \times (2+1) + 2$. Tal como na condição anterior, aqui a distribuição de dados é feita em uma rodada, o número de passos para finalizar a primeira jogada é dada pela expressão $1 + m$ e, a casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $f = i + 2 + m \times (2+1) - rk$, ou, $f = MOD(i + 2 + m \times (2+1); k) = MOD(i; k) = i$. O conjunto de números que identificam cada a casa onde cada passo finaliza

[44] Aqui, como trabalhamos com $d = 2$ (número de dados que compõe cada casa do tabuleiro a sua configuração inicial) é importante salientar que t não está em sua forma mais genérica, pois ele representa unicamente a divisão de k por $3 = 2 + 1$. Assim, pelas propriedades da divisão euclidiana, $t = 0, 1, 2$, não mais que isso.

[45] Aqui r não se refere ao resto de uma divisão, mas sim, o número de vezes em que $i + 2 + m(2+1)$ é maior que k.

é expresso por: $f_n = i + 2 + (n-1)(2+1) - rk = MOD(i + 2 + (n-1)(2+1); k)$.

- Se t (o resto) for igual diferente de zero e do número de dados em cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial, temos: $k = m \times (2+1) + t$, ou mais especificamente, $k = m \times (2+1) + 1$. Nestas condições, a distribuição de dados é feita em duas rodadas, o número de passos para finalizar a primeira jogada é dada pela expressão $1 + m + t = 1 + m + 1 = 2 + m$ e, a casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $f = i + 2 + m \times (2+1) + 1 \times (2+2) - rk$, ou, $f = MOD(i + 2 + m \times (2+1) + 1 \times (2+2); k)$. O conjunto de números que identificam cada a casa onde cada passo finaliza é expresso por:

$$f_n = \begin{cases} i + 2 + (n-1)(2+1) - rk, & se\ n = 1, 2, \ldots, m+1 \\ i + 2 + m \times (2+1) + (n-m-1) \times (2+2) - rk, & se\ n = m+2 \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} MOD(i + 2 + (n-1)(2+1); k), & se\ n = 1, 2, \ldots, m+1 \\ MOD(f_{m+1} + (n-m-1) \times (2+2); k), & se\ n = m+2 \end{cases}$$

9.2.3. O trabalho com a tarefa 3

O trabalho com a tarefa 1 e 2 permitiu que os alunos desenvolvessem o raciocínio que o permitissem sair da ideia da experimentação material, baseada nas regras do jogo Ntxuva para resolução do problema principal (determinar a casa onde a jogada finaliza conhecendo a casa onde iniciou, o tipo de tabuleiro e o número de dados na sua configuração inicial) para uma formalização matemática do problema. Estes conhecimentos, que foram depois institucionalizados pelo professor, constituíram conhecimentos fundamentais para o prosseguir com a experimentação no trabalho com as tarefas seguintes.

Trabalhou se com a tarefa 3 no terceiro encontro da fase experimental. Nesse encontro, como os alunos já haviam levado a tarefa para discutir em casa, o professor pediu aos alunos que iniciassem o debate colectivo no quadro. A tarefa vinha anunciada da seguinte forma:

Suponha que você fosse jogar o Ntxuva em tabuleiro do tipo $4 \times n$ e que na configuração inicia do tabuleiro cada casa fosse preenchida por dois dados. a) Sabendo que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 16 em um

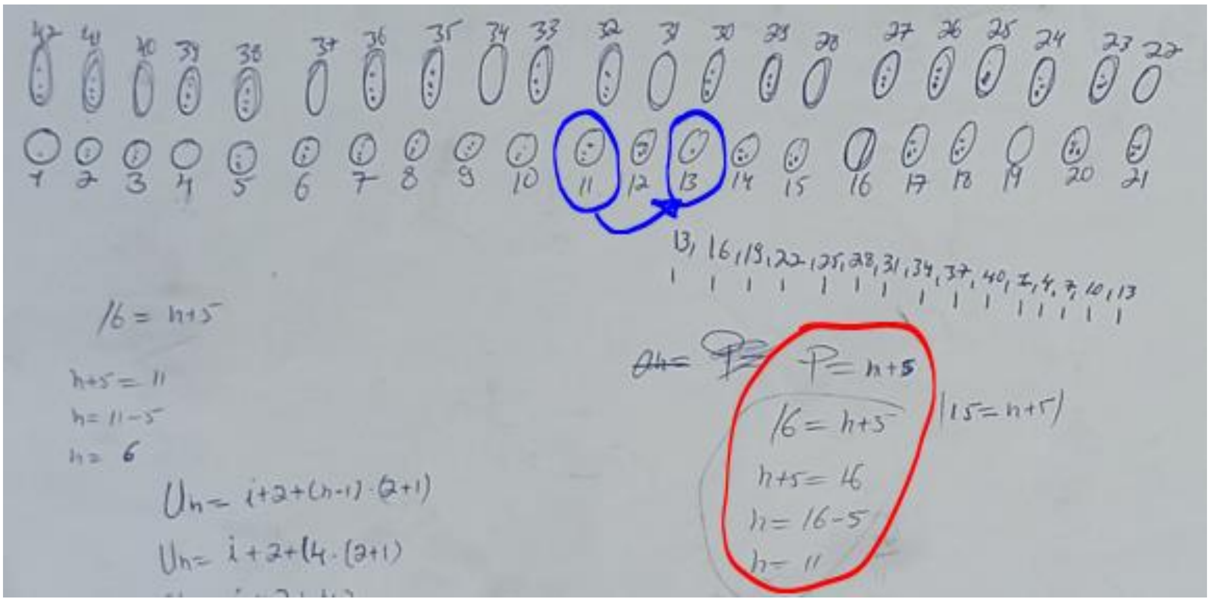
tabuleiro do tipo 4×21. Determine a casa onde a jogada foi iniciada. b) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 21 em um tabuleiro do tipo 4×40. Em que casa a jogada foi iniciada? c) Suponha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 3 em um tabuleiro do tipo 4×254. Em que casa essa jogada foi iniciada

Nesta tarefa esperava-se que os alunos utilizassem os conhecimentos construídos e institucionalizados no trabalho com a tarefa 1 e 2 como feramente para responder o problema colocado nesta tarefa. Entretanto, notou-se, por exemplo, para a alínea a) que os alunos iniciaram a resolução da tarefa se socorrendo da experimentação material para compreender a tarefa poder apresentar a partir dela uma solução ao problema. Entretanto, nas outras alíneas eles já se dão conta de recorrer a uma formula, mesmo porque a dimensão do tabuleiro não facilitava o desenho no quadro.

Na alínea a), ver Figura 93, se inicia a resolução da tarefa utilizando a relação $f = i + 5$, aquela obtida no trabalho com a tarefa 1 e que é especifica para trabalhar apenas com tabuleiro do tipo 4×8. O aluno efectua $16 = i + 5$ e obtém $i = 11$, como é ilustrado na marcação a vermelho da Figura 93.

Para certificar seu resultado, o aluno recorre a experimentação, desenhando um campo de jogo de Ntxuva do tipo 4×21 e, iniciando da casa 11, efectua a distribuição de dados, que finaliza na casa 13, como é ilustrado na marcação a azul da Figura 93. Entretanto, o aluno observa que a fórmula que utilizou não lhe dá uma resposta satisfatória, o que sinaliza que a fórmula utilizada não é geral, pois, é especifica apenas para tabuleiro do tipo 4×8.

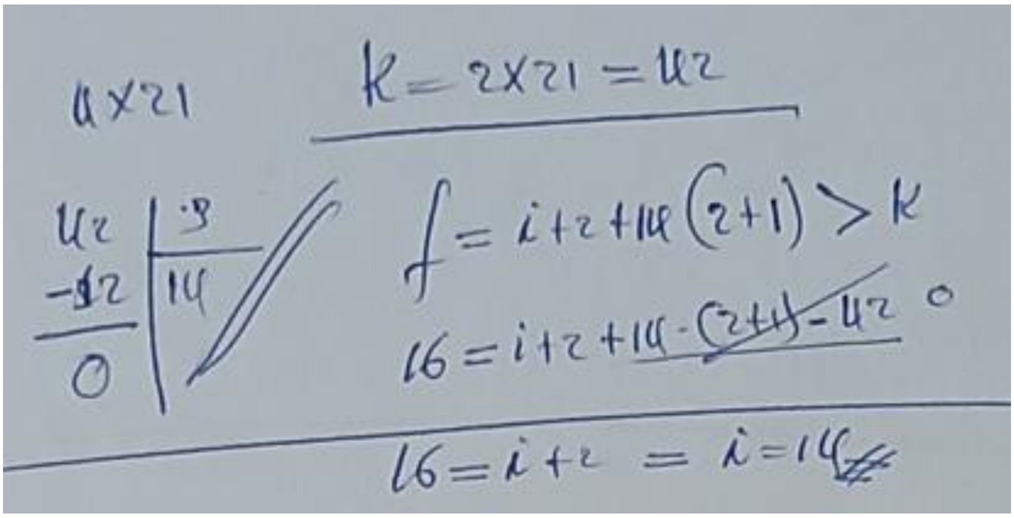
Figura 93: primeira tentativa de resolução da tarefa 3, alínea a)



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Despois dessa tentativa, o aluno recorre as relações construídas no trabalho com a tarefa 1 e 2 e institucionalizadas pelo professor para tentar novamente resolver a tarefa. Dessa vez, ele inicia utilizando a divisão euclidiana para dividir $42 = 2 \times 21$ por $3 = 2 + 1$, cujo resultado ilustrado na Figura 94 é $42 = 14(2 + 1) + 0$. A partir daí, como o resto da divisão é zero, ele utiliza a fórmula $f = i + 2 + 14(2 + 1)$ e considerando que $f > k$, efetctua, $16 = i + 2 + 14(2 + 1) - 42$ obtento $i = 14$.

Figura 94: segunda tentativa de resolução da tarefa 3, alínea a)



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Desta vez, o colectivo de alunos apresenta uma resolução que os leva a uma resposta satisfatória e esperada de acordo com a análise a priori. Entretanto, a resolução poderia ser ter sido mais simples se os alunos se atentassem ao ponto de vista segundo o qual, se o resto da divisão de k por $d+1$ é igual a zero, a casa onde finaliza a jogada é dada por $f = MOD(i+d+m(d+1);k) = MOD\big(i+d+m(d+1);m(d+1)\big) = i+d$. Assim, sendo $f = 16$, i deveria ser achado efetuando: $i = f - d = 16 - 2 = 14$.

Esta condição, não só os alunos, mas também na análise a priori não foi levada em consideração. De qualquer jeito, a resolução que é apresentada representa os casos mais gerais para resolução de tarefas desse gênero.

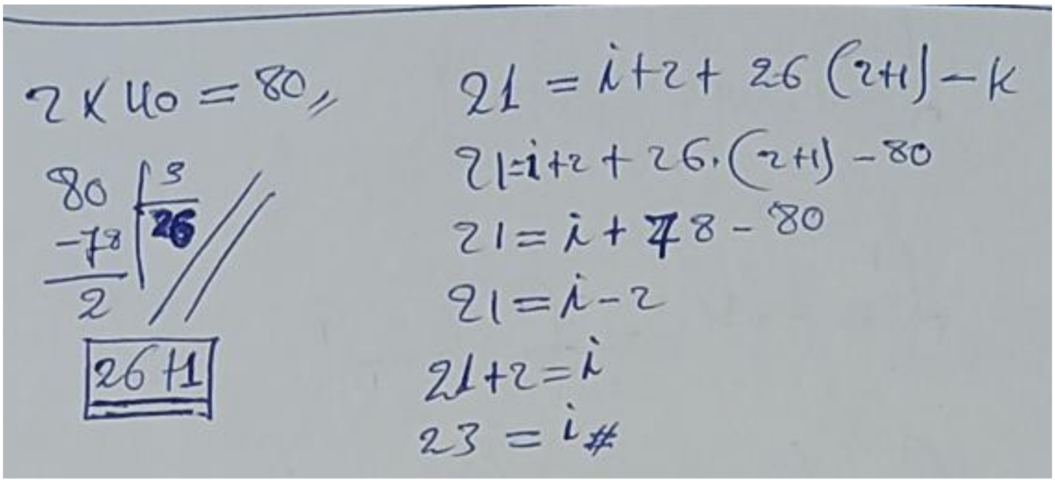
Na alínea b), a partir da experiencia que os alunos tiveram com na alínea a), não tiveram dificuldades em resolver a questão. Logo que se deparam coma tarefa, determinaram o número de casas que compõem um campo de jogo de Ntxuva do tipo 4×40, que foi $2 \times 40 = 80$. Achado esse número, fui utilizado também a divisão euclidiana para achar a divisão de 80 por $3 = 2 + 1$, cujo resultado foi $80 = 26(2+1) + 2$.

Aqui, como o resto da divisão deu 2, que é igual ao número de dados que são colocados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro, o aluno percebe que, utilizará a mesma fórmula, utilizada anteriormente para resolver a tarefa. Nisso, ele substitui dados na formula $f = i - 2 + m(d+1) - k$ obtendo $21 = i + 2 + 26(2+1) - k$. Portanto, as relações utilizadas são esperadas de acordo com a análise a priori.

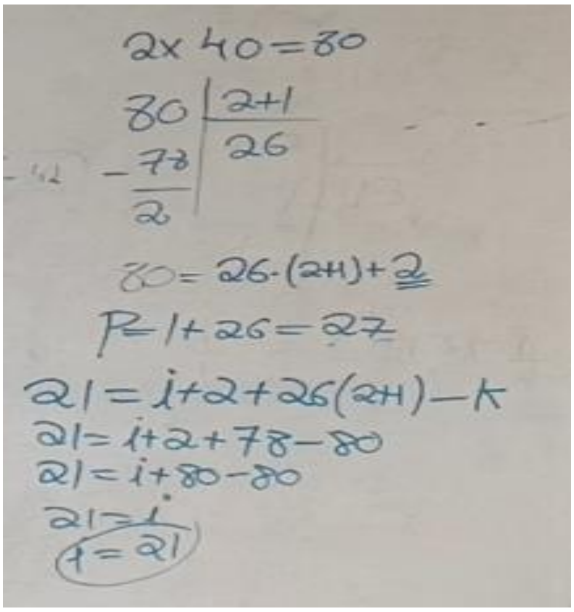
Na Figura 95 é ilustrada as resoluções apresentas, que são bem colocadas, embora em a) o aluno no terceiro passo, esquecesse de adicionar 2 a 78, para dar 80, o que lhe leva a um erro de cálculo, não obtendo o resultado esperado. De qualquer jeito, entendemos este erro como um equívoco aleatório, ligado ao esquecimento.

Figura 95: desenvolvimento da tarefa 3, alínea b)

a)



b)



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Ainda assim, a semelhança da alínea a), esta alínea poderia ter sido resolvida de forma bem mais simples. Sabendo-se que o resto da divisão de k por $d+1$ é igual a d, a jogada inicia e termina na mesma casa, isto é, se $k = m(d+1)+d$, então $f = MOD(i+d+m(d+1); k) = MOD(i+d+m(d+1); m(d+1)+d) = i$.

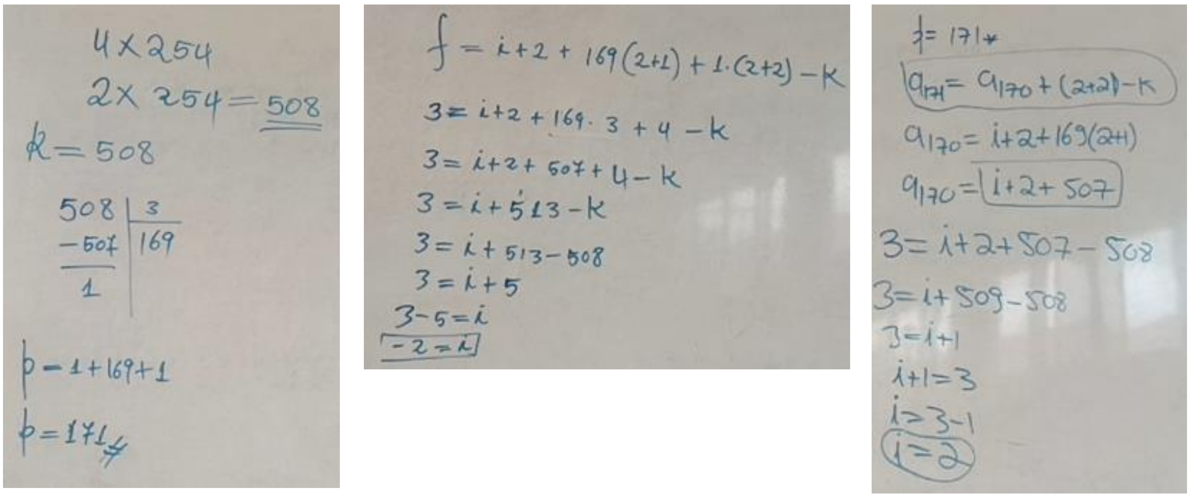
Assim, era simples só anuncia que a divisão de 80 por $3 = 2+1$ dá resto 2 e igual ao número de dados em cada casa na configuração inicial, então, $i = f = 21$. Portanto, a resolução seria bem mais simples. De qualquer jeito, o que foi apresenta é, como dissemos na alínea a) aplicável para todos os casos do genro da tarefa 3 nas suas alíneas a) e b).

Para a alínea c), os alunos já estavam devidamente calibrados e familiarizado com as fórmulas construídas, razão pelo qual, a resolução que apresentaram foi de acordo com o esperado e sem muita necessidade de intervenção do professor. A tarefa supunha que a primeira jogada tenha sido finalizada na casa 3 e o jogo realizado em um tabuleiro do tipo 4×254, em que na configuração inicial cada casa foi preenchida por dois dados.

Ela é resolvida coletivamente, com um representante no quadro para coordenar a resolução. No quadro, o representante dos alunos inicia dividindo $2 \times 254 = 508$ (número de casas que compõe um campo de jogo do tabuleiro do tipo 4×254) por 3 (o número de dados que é distribuído nas m casas do tabuleiro), se obtendo $508 = 169 \times (2+1) + 1$ (Figura 96 – a). Após isso, o aluno determina o número de passos necessários para finalizar a jogada, explicando que, como o resto da divisão anterior é diferente de zero e de dois, o número de passos será dado pela adição do primeiro passo, o quociente e resto da divisão anterior, isto é, $1 + 169 + 1 = 171$ passos (Figura 96 – a). Até aqui tudo estava perfeito e de acordo com o previsto na análise a priori.

Figura 96: determinação da casa onde inicia a primeira jogada que finaliza na casa $f = 3$, em um tabuleiro do tipo 4×254, com $d = 2$

a) b) c)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 1 (2023)

A segui, o aluno utiliza a fórmula $f = i + 2 + m(2 + 1) + 1(2 + 2) - k$ para achar o valor da casa onde inicia a jogada. Quando substitui os dados, como é ilustrado na (Figura 96 – b), ele acha o resultado $i = -2$, isto é, que a casa onde a jogada inicia nas condições colocadas na tarefa 3, alínea a é menos dois.

Na prática, o índice que identificam as casas de um campo de jogo do tabuleiro não é negativo, isto é, $i \in IN^*$. Sendo assim, o resultado obtido pelo aluno não pode fazer parte da solução do problema dado, ou seja, a resposta apresentada nessa resolução não é a esperada.

De acordo com o exposto na análise a priori, os alunos não alcançam o resultado esperado pelo facto de não considerar que, a contagem de casas f' pode ser uma, duas, três, etc., vezes maior que o número k de casas que compõe um campo de jogo de Ntxuva. Com isso, em vez de utilizar uma fórmula particular $f = i + 2 + m(2 + 1) + 1(2 + 2) - k$, deveria ter sido utilizada uma formula mais geral $f = i + 2 + m(2 + 1) + 1(2 + 2) - rk = f' - rk$, em que r se refere em quantas vezes f' é maior que k.

De qualquer jeito, os alunos percebem que a resolução apresentada não está distante da solução esperada, pelo facto i encontrado seja negativo, e entre eles, sugere iniciar os cálculos.

Assim, uma outra resolução é feita, como é ilustrado na Figura 96 – c. Nessa resolução os alunos propõem que $f_{171} = f_{170} + (2 + 2) - k$. Deste modo, determinam primeiro $f_{170} = i + 509$. Entretanto, em vez de f_{170} em $f_{171} = f_{170} + 4 - k$, eles simplesmente retiram de f_{170} o valor de k, obtendo $i = 2$, novamente, um resultado não esperado.

Quando confrontados sobre a implementação da relação que eles propõem, observam novamente que o resultado não era correcto. De qualquer jeito, o equívoco que é apresentado nessa segunda resolução é mesmo aleatório, entretanto, mesmo que tivessem utilizado a fórmula corretamente, tal como propuseram, retornaria a primai solução de $i = -2$.

Na verdade, o equívoco se origina na medida em que os alunos desconsideram a possibilidade explicada anteriormente, em que, o valor de $f' = i + 2 + m(2 + 1) + (2 + 2)$ pode ser superior a $k = m(2 + 1) + t$ uma, duas, três ou mais vezes. O professor notando essa persistência, nota alguns esquecimentos dos alunos nas três condições que delineiam o processo de distribuição de dados na primeira jogada do Ntxuva, apontadas na institucionalização.

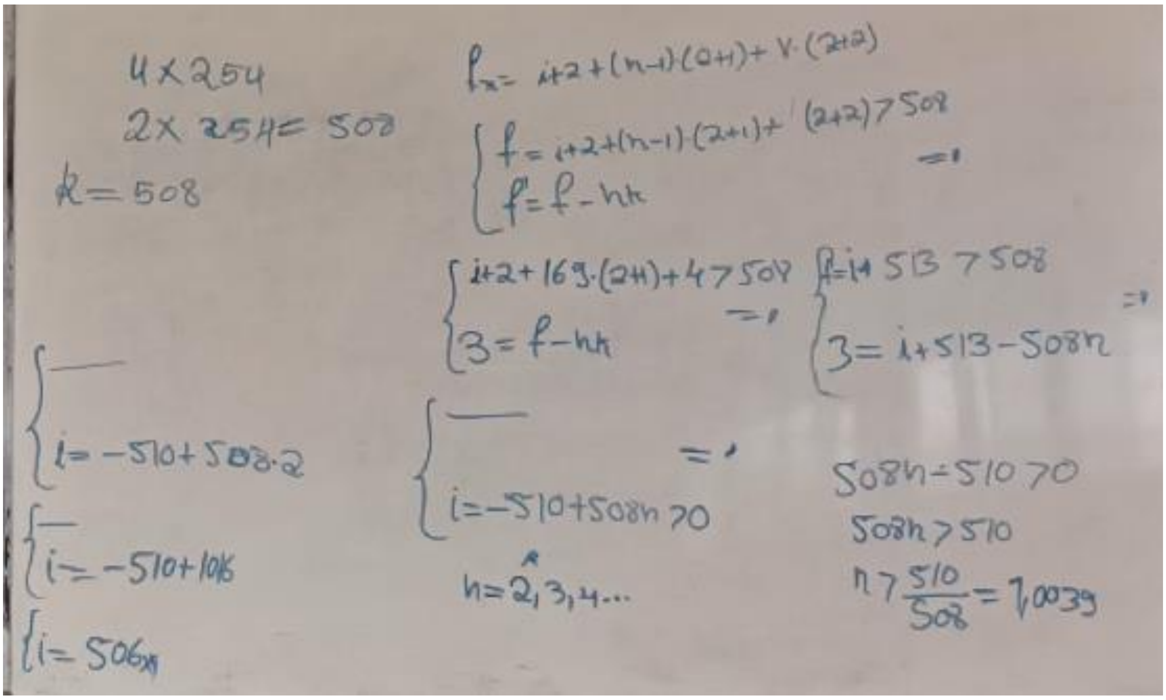
Assim, o professor pede que os alunos recordem as três condições. Depois disso, faz um pequeno ensaio, tentando explicar os possíveis caminhos em que os alunos se devem atentar para solucionar aquele problema, chamando os alunos a consciência:

Professor: voltem a pensar nas condições de delineiam o processo de distribuição de dados. Vocês já observaram que $f' = i + 2 + m(2 + 1) + (2 + 2)$ pode ser uma, duas, três, ou mais vezes que o número k de casas que compõem um campo de jogo de Ntxuva? Então, se f' for uma vez maior que k como fizemos? Se f' for duas vezes maior que k como fizemos? E se f' mais vezes maoir que k como fizemos? E como podemos usar a condição de i ser um número não negativo para auxiliar os cálculos? Pensando nessas possibilidades, como é que acham que podemos sair

desse problema? Podemos pensar juntos?

A partir destes questionamentos, os alunos retomam a discussão intra-grupo e, quando regressão ao quadro, apresentam uma nova versão da resolução do problema, que ilustrada na Figura 97.

Figura 97: determinação da casa onde inicia a primeira jogada que finaliza na casa $f = 3$, em um tabuleiro do tipo 4×254, com $d = 2$



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 1 (2023)

Nesta resolução, os alunos utilizam a relação $f = i + 2 + m(2+1) + (2+2)$, substituem os dados e obtém $f = i + 513$. Eles observam que este valor, para qualquer i será sempre maior que $k = 508$ (o número de casas que compõem um campo de jogo), por isso, na sua apresentação escrevem $f = i + 513 > 508$. Entretanto, como não se sabe ainda em quantas vezes ele será maior, com base nos questionamentos feitos anteriormente pelo professor, eles entendem que f pode ser maior que k em n vezes, o que expressa na forma $f' = f - nk$, que depois de substituído os dados, resultou na expressão final $i = -510 + 508n$.

Como é de observar na Figura 97 e tal como é proposto na análise a priori, também supõe que $i > 0$ e resolvem a inequação $-510 + 508n > 0$, obtendo $n > 1{,}0039$, cujo o conjunto de soluções é $\{2, 3, 4, \dots\}$, pois, $n \in IN$. Assim, tomando-se o menor números das soluções anteriores que é $n = 2$, substitui-se em $i = -510 + 508n$

tendo se obtido $i = 506$, que é a casa onde inicia a jogada que finaliza na casa $f = 3$.

9.2.4. O trabalho com a tarefa 4, 5 e 6

O trabalho com as tarefas 4, 5, 6 foram das mais simples, uma vez que, todos os princípios, todas as ideias já estavam construídas, afinal, era só uma questão que as utilizar como ferramentas. Por isso, mesmo, os alunos não tiveram as mesmas dificuldades que tiveram no trabalho com as tarefas 1, 2 e 3.

De forma geral, estas tarefas tinham como principal objectivo consolidar o conhecimento construído nas tarefas 1, 2 e 3, aplicando-os para resolver as tarefas propostas. Obviamente que, no trabalho com estas tarefas, os alunos estariam demonstrando o quanto interiorizam o raciocínio desenvolvido ao do trabalho com as tarefas 1, 2 e 3.

Por não apresentar muitas contradições em relação ao que é proposto na análise a priori, analisamos aqui as três últimas tarefas resolvidas pelos alunos:

a) O desenvolvimento da tarefa 4

Na tarefa 4 foi dada uma sequência de números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43 estavam representando a contagem das casas até ao primeiro, segundo, ..., e o último passo da primeira jogada finaliza. Nesta tarefa, o tipo de tabuleiro não é revelado. A partir das sequencias de números que é dada se pede para determinar:

a) O número de dados que é colocado em cada casa do tabuleiro na sua configuração inicial;
b) A casa em que a jogada que dá origem essa sequência de dados terá iniciado;
c) O número de casas que compuseram o campo de jogo do tabuleiro em que foi efetuado o jogo.

A semelhança de outras tarefas, os alunos foram dados um tempo para refletir sobre a tarefa, depois, foi discutida colectivamente, tendo alguns alunos apresentando as ideias desenvolvidas no quadro.

Sobre a alínea a) e b) ao apresentar sua explicação, o aluno começa por representar um tabuleiro de Ntxuva aleatório e descreve alguns elementos importantes e que o permitiriam compreender o problema e dar proporcionar um raciocínio melhor para dar solução.

Inicialmente, o aluno usa sua intuição, a partir da prática costumeira da experimentação material para achar o número de dados em cada casa na configuração inicial do tabuleiro. O aluno descrevendo da seguinte forma (transcriação de parte do vídeo 2, Anexo 30):

Aluno: [...] para podermos determinar quantos dados estão preenchidos em cada casa desse tabuleiro é muito fácil. [...] se nós formos a perceber, estes números estão a representar em cada casa onde cada um daqueles passos finalizou. Saímos de uma casa que desconhecemos, viemos terminar na casa 12. Da casa 12 termina na casa 15. [...]. Então, o que é que nós vamos ter que fazer? [...]. [o aluno desenha um tabuleiro aleatório e informa que é que quer usá-lo para puxar o raciocínio].

[...] então o que está acontecer? Se eu pegar essa casa onde o primeiro passo terminou, vamos perceber que a diferença com a casa a seguir é constante e igual a 3. [...]. Onde é que vai nos dar um número diferente? É aqui, porque se formos a fazer 43 menos 39, aqui nós vamos ter 4. Portanto, de 12 até 39 vamos ter 3 como diferença.

Significa que, nos iniciamos em uma casa qualquer que no início tinha dois dados. [...]. [o aluno acha as diferenças entre os dados].

Se estamos a dizer que partimos de uma casa i que não conhecemos e fomos para casa 12 e de 13 para diante distribuímos três dados, então podemos dizer que cada casa foi preenchida por dois dados.

[...] Se nos pensarmos que no início tivemos dois dados em cada casa e inicia e distribuímos esses dados da casa i para terminar na casa 12, então, para achar a casa onde a jogada iniciou, posso só fazer a subtração de 12 menos 2. Assim, de forma mais simples, podemos dizer que a jogada iniciou a casa 10 para terminar na casa 43.

Portanto, como é de notar na transcriação acima, o aluno utiliza um raciocínio atrelado a experimentação material para determinar o número de dados que compõem cada casa na configuração inicial do tabuleiro. Aqui, ele não utiliza qualquer fórmula ou relação matemática formal para determinar esse valor.

Depois de realizar o cálculo de forma intuitiva, o aluno explica que, a mesma tarefa poderá ser resolvida utilizando uma fórmula. No caso, como é expresso na

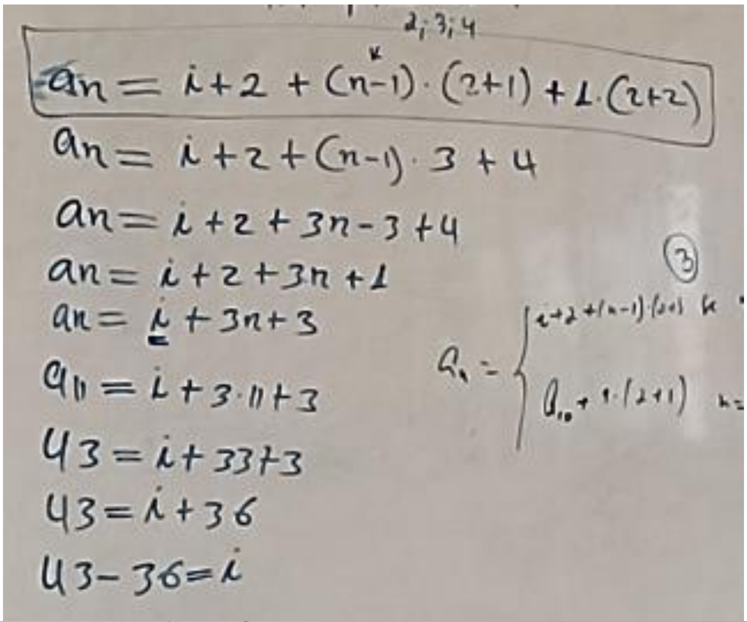
Figura 98 – a, o aluno utiliza a relação $a_n = i + 2 + (n-1)(2+1) + (2+2)$, que a deduz obtendo a relação $a_n = i + 3n + 3$. Nessa relação, sabendo que a jogada finaliza com 11 passos e na casa 43, o aluno realiza as substituições e obtém $43 - 36 = i \Leftrightarrow i = 7$, um valor diferente do que fora determinante intuitivamente, utilizando as ideias da experimentação material.

Nesse procedimento, o aluno esquecesse de que, a jogada em causa vai até a segunda rotação. Nesse caso, a casa onde a jogada finaliza deverá ser dada pela soma do índice da casa anterior a segunda rodada a rodada seguinte, isto é, $f_{m+1} = i + 2 + m(2+1)$ e $f_{m+2} = f_{m+1} + (2+2)$.

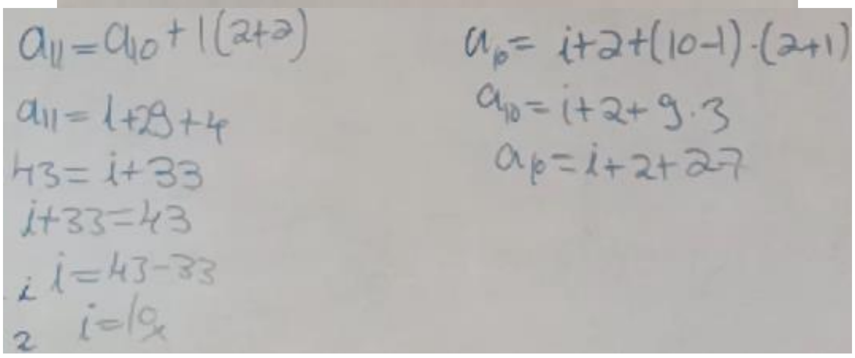
Um outro aluno percebe o entrave que o colega teve e se dirige ao quadro para apresentar sua versão, que se alinha a suposição que colocamos acima e que supostamente não terá sido levado em conta na resolução apresentada na Figura 98 – a.

Figura 98: primeira e segunda proposta de resolução da tarefa 4, alínea a e b.

a)



b)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 2 (2023)

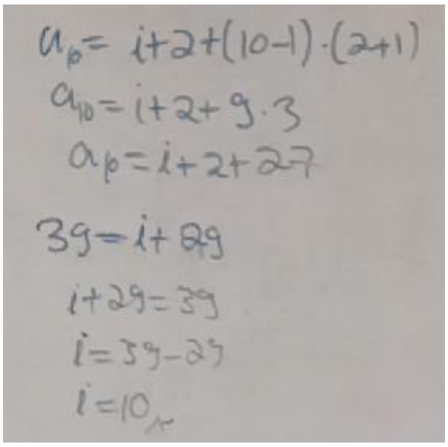
Para retomar a resolução, o aluno começa por recordar aos colegas, a partir de uma situação discutida nos encontros passados que, numa situação em que temos sete passos, de tal modo que $k = 6 \times (2+1) + 1$, a casa onde a jogada finaliza é dada pela expressão $a_7 = a_6 + 1 \times (2+2)$. A partir dessa lembrança, ele propõe para a situação dada na tarefa 4, alínea a), que a relação para determinar a casa onde a primeira jogada finaliza seja dada pela relação $a_{11} = a_{10} + (2+2)$.

Com base nesse raciocínio, o aluno determina $a_{10} = i + 2 + 9 \times 3 = i + 29$ e substitui em a_{11}, obtendo $a_{11} = i + 29 + 4 = i + 33$. Depois disso, substitui a_{11} pelo valor respectivo, obtendo $i = 10$, o valor esperado.

Ainda assim, como se pode ver na

Figura 98 – b, na resolução anterior, antes de tudo o aluno considera $a_{10} = i + 2 + 27 = i + 29$, expressão que é substituída em a_{11}. Mas a curiosidade que o professor coloca é: a partir do a_{10}, não poderíamos obter o valor de i? Depois que é feito esse questionamento, o aluno retorna ao quadro, substitui os dados em $a_{10} = i + 29$ e obtém o resultado $i = 10$, como é ilustrado na Figura 99.

Figura 99: uma tentativa a mais para resolução da tarefa 4, alínea b.



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 2 (2023)

De todo jeito, os alunos dão resposta esperada a questão colocada, mas o procedimento que utilizam não é esperado de acordo com a analise a priori, embora não se apresentem muito distanciados.

Para todos efeitos, era suposto que os alunos fossem formular um sistema de equações que o pudessem duplamente resolver alínea a e b, fazendo:

$$\begin{cases} a_1 = i + d, & para\, n = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (d+1), & para\, n = 1, 2, 3, \ldots, m+1 \\ a_n = a_{m+1} + (d+2), & para\, n = 1 + m + t \end{cases}$$

Ou mais especificamente:

$$\begin{cases} a_1 = i + d, & para\, n = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (d+1), & para\, n = 1, 2, 3, \ldots, m+1 \\ a_n = a_{m+1} + (d+2), & para\, n = 1 + m + 1 = 2 + m \end{cases}$$

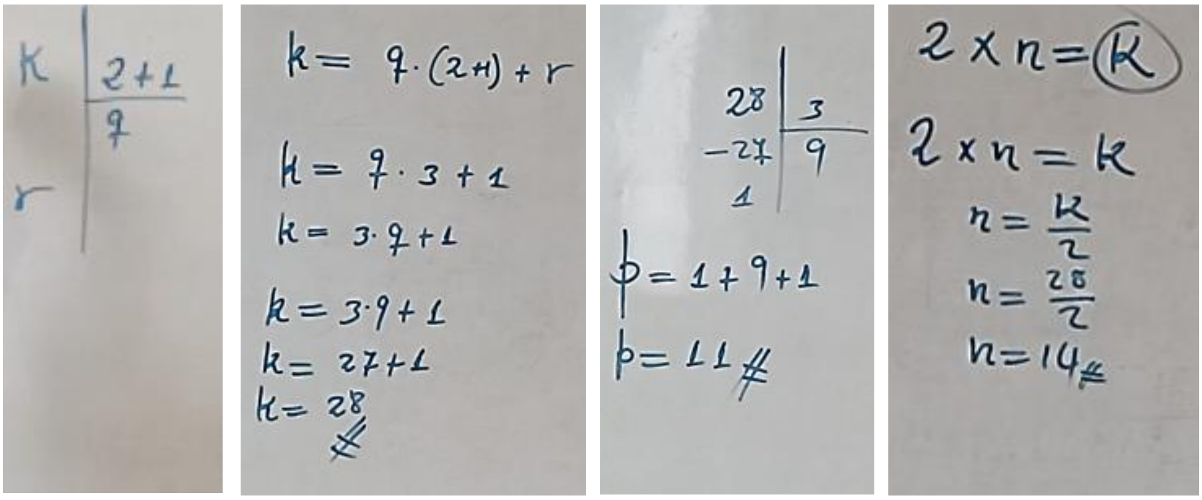
Aqui, como se conhece, por exemplo, $a_1 = 12$ e $a_2 = 15$, com estes dois dados se resolveria a alínea a e b de uma única vez, a partir da resolução do sistema:

$$\begin{cases} a_1 = i + d \\ a_2 = a_1 + (d+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = i + d \\ 15 = 12 + d + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

A alínea c) pareceu ser das mais simples tarefas que os alunos poderiam resolver. De acordo com o exposto no Anexo 30 – vídeo 4, como os alunos já conhece o número de dados que compõem cada casa na configuração inicial do tabuleiro, que é dois (2), eles entendem que precisam dividir o número k de casas que compõem um campo de jogo pelo número de dados que é distribuído em cada passo da primeira rodada, no caso, $2 + 1 = 3$, o que resulta em $k = q(2+1) + r = 3q + r$, como é ilustrado na Figura 100 – a, b.

Figura 100: uma tentativa a mais para resolução da tarefa 4, alínea b.

a) b) c) d)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 4 (2023)

O aluno recorre a relação $a_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 2) + 1 \times (2 + 2)$, que utiliza na alínea a), para explicar que, como o processo de distribuição de dados nessa jogada vai até a segunda rotação e, na segunda rotação só se distribui $2 + 2$ dados uma vez, então, esta jogada tem resto um (1), como é possível observar na Figura 82 - b. Como o número de passos é 11 e na primeira jogada se distribui dois dados, então se tem como número de passos necessários finalizar a jogada $11 = 1 + 9 + 1$, em que $q = 9$.

Deste modo, substitui-se o valor de q em $k = 3q + 1$, obtendo-se $k = 3 \times 9 + 1 = 28$, o número de casas que compõem um campo de jogo. O aluno vai mais longe e determina também o tipo de tabuleiro, dividindo 28 por 2 o que dá o 4×14 como o tipo de tabuleiro a que o jogo que originou o conjunto de números dados no enunciado foi utilizado para jogar. Portanto, nesta alínea, os alunos não tiveram quaisquer dificuldades em resolver esta tarefa e, a resolução foi feita de acordo o esperado e apresentado na análise a priori.

b) O desenvolvimento da tarefa 5

Na tarefa 5 foi dada o tabuleiro Ntxuva do tipo 4×101, em que na configuração inicial cada casa é preenchida por dois dados. Com base nesse tabuleiro, se pede para determinar:

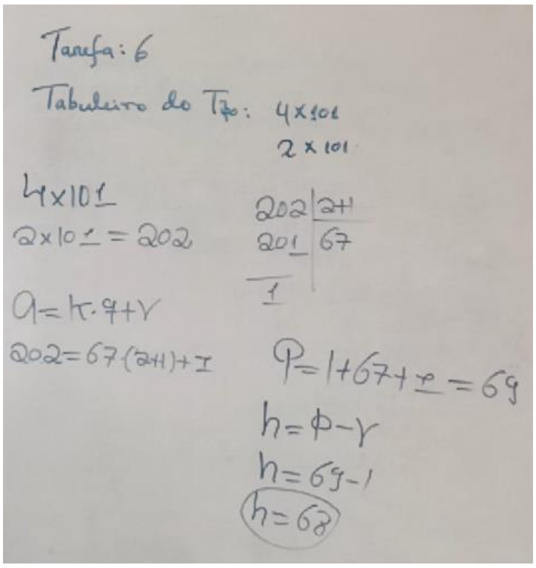
a) O número de passos necessários para finalizar a primeira jogada?
b) A casa que finaliza no 51º passo, sabendo que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 25.
c) O número de passos necessários para finalizar a jogada na casa 117, sabendo que a primeira jogada tenha sido iniciada na casa 13.

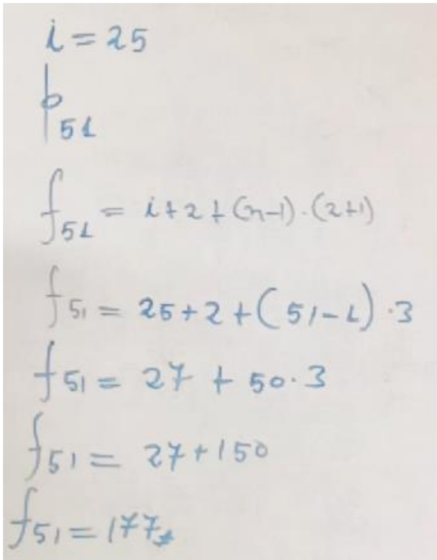
Tal como a tarefa 4, a resolução dessa tarefa também foi das mais simples pelos alunos, pois, até ao momento eles já tinham reunido o conhecimento necessário que o pudessem ajudar a resolver a tarefa.

Assim, na resolução da alínea a), ver Figura 101 – a, o aluno começa por determinar o número de casas que compõem um o campo de jogo, efetuando $2 \times 101 = 202$. Depois disso, divide 202 por $3 = 2 + 1$ e expressa 202 na forma da divisão euclidiana, isto é, $202 = 67 \times (2 + 1) + 1$. A seguir, como é pedido, ele determina o número de passos adicionando o primeiro passo em que se distribuem dois dados, mais, os 67 passos em que se distribuem dois mais um dado e um passo em que se distribui dois mais dois dados, que resulta em $1 + 67 + 1 = 69$.

Aqui, o aluno vais mais longe, mesmo sem aparecer no pedido, explicando que, como o resto da divisão anterior é um, então esta jogada vai até a segunda redação, portanto, a primeira rotação da jogada nestas condições é dada por $n = p - r = 69 - 1 = 68$. Com é de notar, esta tarefa dispensa muitos comentários, pois, para além dos alunos resolverem de cordo as proposições levantadas na análise a priori, permitiu mostra que os alunos já estavam em pleno domínio dos conhecimentos necessários para determinação do número de passos em uma jangada de Ntxuva.

Figura 101: desenvolvimento da tarefa 5, alínea a) e b)

a) 

b) 

Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 5 (2023)

Para a alínea b), como é ilustrado na Figura 101 – b, o aluno começa tentando explicar a natureza da tarefa par compreende-la melhor. A seguir, o aluno coloca os dados no quadro ($i = 25$ e $p = 51$). Depois disso, coloca a fórmula $f_{51} = 1 + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ e a utiliza para determinar o índice da casa que finaliza no passo 51, fazendo: $f_{51} = 25 + 2 + (51 - 1) \times 3 = 177$.

Mas antes do aluno prosseguir com a substituição de dados na fórmula exposta no parágrafo anterior, o professor o questiona:

Professor: nessa fórmula, porque é que não adicionas $1 \times (2 + 2)$?

Na sua formula você coloca $f_{51} = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$. Sabendo a nossa divisão deu resto um, significa que vai ter a segunda rotação. Porque que você não

colocou a segunda rotação na fórmula? **Aluno**: Aqui eu acho que não há necessidade de colocar a segunda rotação porque o número de passos 51 é muito inferior ao número de passos completos. Porque aqui, como são 69, tendo em conta que tem mais um passo na segunda rotação, então, mesmo fazendo sessenta e nove menos esse outro passo $(69 - 1)$ 59 ainda não chega a segunda rotação. “e por isso que eu achei não necessário colocar o passo que representa a segunda rotação.

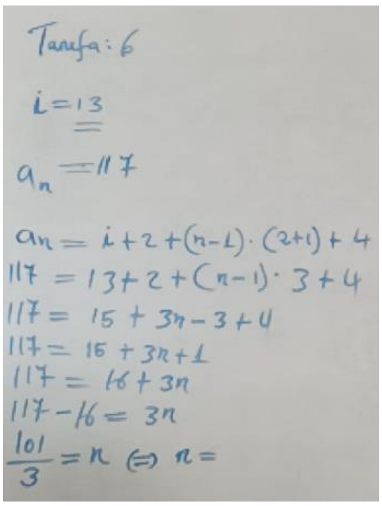
Portanto, a justificação que o aluno apresenta é mais ou menos aproximada a que é colocada em hipótese na análise a priori. Aqui, de qualquer jeito, o aluno já supõe que, a primeira rodada vai de do passo 1 a 68 e, o passo 51 encontra-se entre estes valores, logo, a relação que deverá ser utilizada para determinar o índice da casa é mesmo $f_n = i + 2 + (n - 1)(2 + 1)$.

Veja que, também o aluno acha $f_{51} = 177$ e não subtrai por 202, pois, ele constata também que $177 < 202$, por isso, o número determinado corresponde imediatamente ao indie da casa onde o 51º passo finaliza.

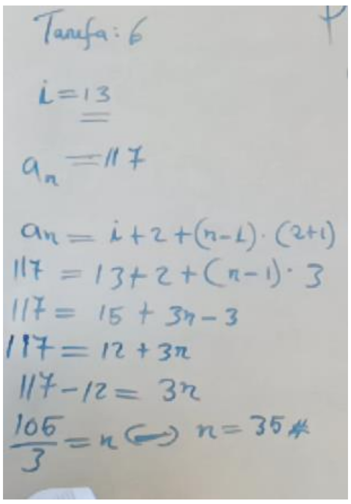
Para a alínea c), como é ilustrado na Figura 102 – a, o aluno lê a tarefa e coloca os dados no quadro ($i = 13$ e $f_n = 117$). Depois disso, o aluno coloca a fórmula $f_n = 1 + 2 + (n - 1)(2 + 1)$ e depois, sinaliza com certeza, de que precisaria nesta fórmula, para esta tarefa, acrescentar a segunda rotação, rescrevendo a fórmula no seguinte: $f_n = 1 + 2 + (n - 1)(2 + 1) + 4$. A seguir, ele substitui os dados e resolve a equação obtendo o resultado $n = \frac{101}{3} = 33,(6)$.

Figura 102: desenvolvimento da tarefa 5, alínea c)

a



b



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 5 (2023)

Portanto, o resultado encontrado, como se pode ver, não reflete ao que é esperado de acordo com a análise a priori, pois, $n \in IN^*$. De qualquer jeito, o aluno reconhece imediatamente que o resultado apresentado não é satisfatório, o que lhe faz retomar a resolução, desta vez, retirando da expressão $f_n = 1 + 2 + (n-1)(2+1) + 4$ o que 4 que é referente a segunda rotação.

Assim, o aluno considera que 117 não chega a segunda rotação, pelo que, para determinar o número de passos necessários para finalizar a jogada nessa casa ele utiliza a fórmula $f_n = 1 + 2 + (n-1)(2+1)$. A seguir, substitui os dados, resolve a equação e obtém o resultado $n = \frac{105}{3} = 35$ (ver Figura 102 – b).

Desta vez, a resolução e o resultado do aluno vão de acordo o esperado. Mas então, o que o aluno deveria fazer para não cair novamente nisso rolo? Obviamente que nada, pois, não existe um meio termo para saber se este ou aquele índice se refere a segunda rodada do jogo. O mais sensato é testar para ambas as possibilidades, que é o que o aluno fez. Entretanto, se tivesse testado a primeira, não teria levado muito tempo resolvendo.

Mas também, olhando o que foi apresentado pelos alunos, bem como a analise a priori, pensamos que, nessa resolução bem como na análise a priori algo não foi considerado, que é a relação $f = f' - rk$.

Ora vejamos, por exemplo, se tomarmos $i = 13$ e $n = 68$ obtemos $f_{68} = 13 + 2 + (68-1)(2+1) = 216$. Como $216 > 202$, então $f_{68} = 216 - 202 = 14$. A gora, vamos fazer o processo inverso, isto é, temos $i = 13$ e $f_{68} = 14$, como será obtido o valor de n?

Veja que, utilizando a fórmula utilizada pelos alunos, ignorando a relação $f = f' - rk$ teremos:

$$14 = 13 + 2 + 3(n-1)$$

$$14 = 12 + 3n$$

$$3n = 2$$

$$n = \frac{2}{3} \notin IN$$

Como se pode ver, a formulação parece correcta, mas não se chega a um resultado satisfatório. Nisto, tanto na análise a priori quanto na resolução dos alunos, entendemos que haja necessidade sempre de formular a relação da seguinte forma:

$$f = f' - rk$$
$$14 = 13 + 2 + 3(n - 1) - 202r$$
$$14 = 12 + 3n - 202r$$
$$3n = 2 + 202r$$
$$n = \frac{2 + 202r}{3} > 0$$
$$\frac{2 + 202r}{3} > 0 \Leftrightarrow 202r > -2 \Leftrightarrow r > -\frac{2}{202} = -0,(0099)$$
$$r \in IN^* \rightarrow r = 1, 2, 3, \ldots$$
$$n = \frac{2 + 202 \times 1}{3} = \frac{204}{3} = 68$$

É aqui onde notamos que faltou incluir a relação $f = f' - rk$, embora tanto a resolução quanto o resultado da análise a priori e dos alunos sejam ótimos.

c) O desenvolvimento da tarefa 6

Na tarefa 6 pede-se para determinar a dimensão $4 \times n$ do tabuleiro de Ntxuva, sendo dados a casa i onde tenha iniciado e f onde tenha finalizado a primeira jogada, bem como o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada. De forma especifica se pede para, determinar a dimensão $4 \times n$ do tabuleiro de Ntxuva sabendo que:

a) $i = 2$, $f = 4$ e $p = 65$;
b) $i = f = 2$ e $p = 59$;
c) $i = 2$, $f = 7$ e $p = 71$;

A tarefa 6 também foi das mais simples que os alunos resolveram. Embora os alunos tenham iniciado de forma receosa, foi lhes fácil enquadrar as ideias, uma vez que se tratava da operacionalização dos conhecimentos construídos nas tarefas anteriores. Depois que tiveram discutido dentro do grupo, veio a tarefa veio a uma discussão colectiva onde um dos alunos foi apresentar no quadro representando os demais. De qualquer jeito, a discussão no quadro foi colaborativa.

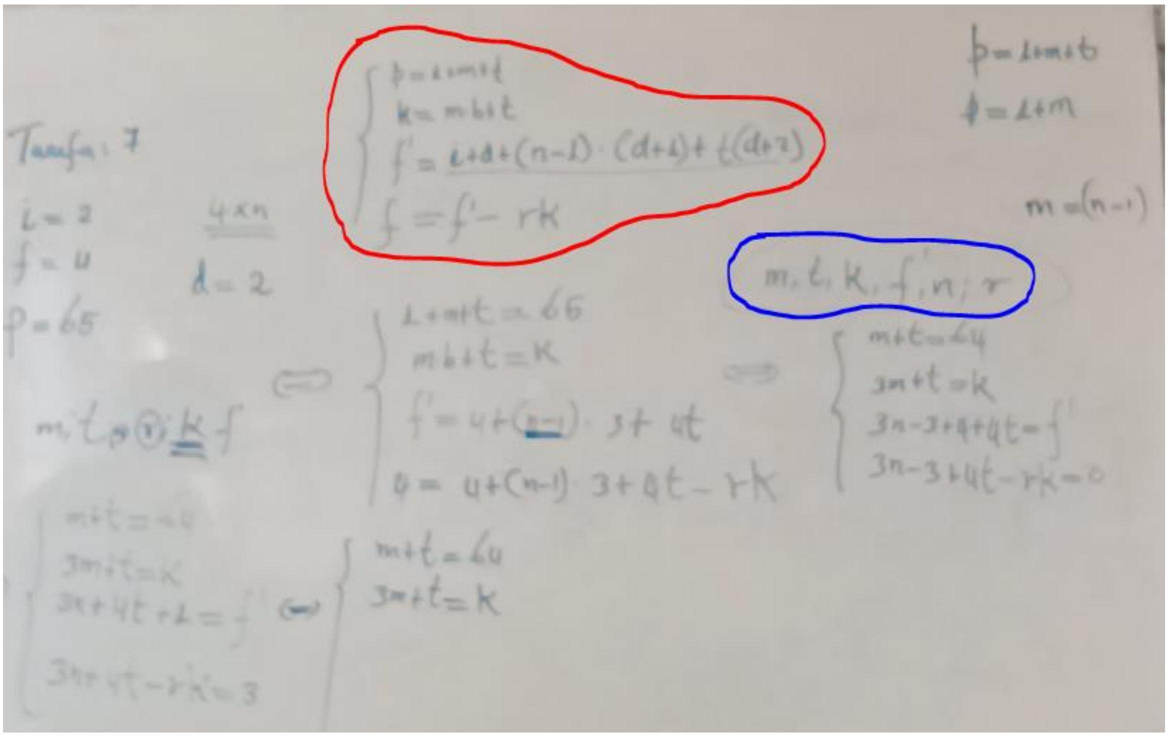
Para alínea a), ver Figura 103, depois que o aluno faz a leitura da tarefa, extrai os dados, em seguida, explica que o número de passos para finalizar a primeira jogada de Ntxuva pode ser dada por $p = 1 + m + t$ ou $p = 1 + m$, que representam três situações no processo de distribuição de dados da primeira jogada.

Depois disso, o aluno se questiona: *numa primeira fase nós devemos tentar perceber [...] nesse nosso caso, estamos perante que situação?*

Depois que se faz esse questionamento, o aluno supõe arbitrariamente utilizar a situação em que $p = 1 + m + t$. Nessa ideia, ele monta um sistema de quadro equações, como é ilustrado na marcação vermelha da Figura 105, substitui os dados e inicia resolução da tarefa.

Uma primeira curiosidade com que o aluno se depara é a questão do número de incógnitas no sistema de equação que foi montar. Como vem na marcação azul da Figura 105, o aluno enumera 6 incógnitas (m, t, k, f, n, r), o que é superior ao número de equações. Na prática, aqui o número de incógnitas poderia ter sido reduzido, se o aluno fosse supor que $m = n - 1$. Também, em vez f, a incógnita deveria ser f', pois, $f = 4$. Nesse caso as incógnitas seriam m, t, k, f', r.

Figura 103: primeira tentativa de desenvolvimento da tarefa 6, alínea a)



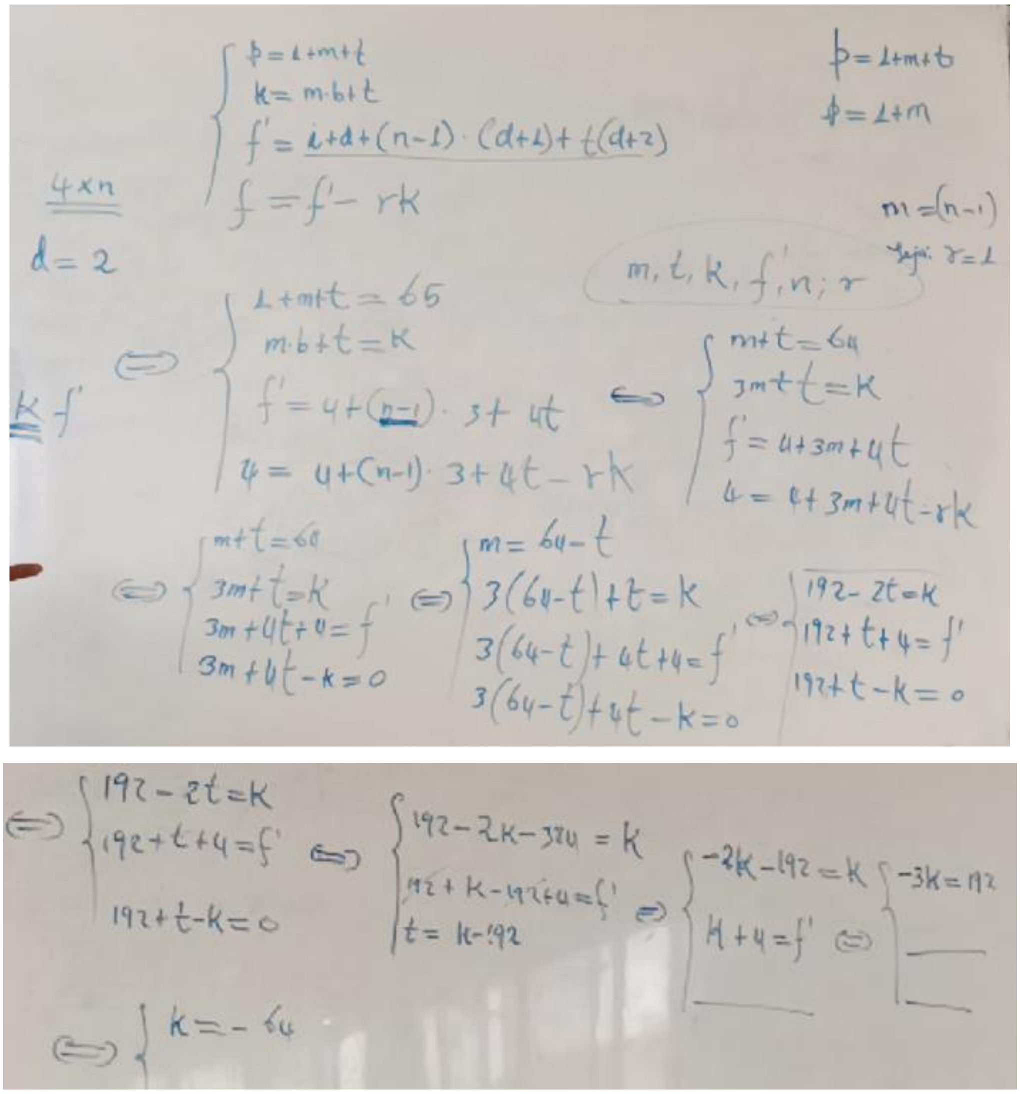
Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 6 (2023)

Mesmo assim, o aluno prossegue com a resolução, mas percebe que, por causa das inúmeras incógnitas, a resolução estava ficando complexa. Na tentativa de prestar ajuda, para que o aluno pense na possibilidade de diminuição das variáveis, o processor questiona ao aluno: *o que representa* $n - 1$ *para a casa onde a jogada finaliza?*

Diante deste questionamento, o aluno se recorda que $n - 1 = m$ (o quociente da divisão de k por $d + 1$). Então, substitui $n - 1$ por m e retoma a resolução, que é ilustrada na Figura 104. Ainda assim, a resolução que é apresentada leva a determinação de $k = -64 \notin IN$, uma resposta não esperada de acordo com a analise a priori.

Mas aqui, o problema não está ligado a falhas ou incongruências na resolução do sistema de equações, pois, o aluno resolve o sistema de equações de forma correcta, aplicando todas as regras como deve ser. O que leva a resposta não esperada é o facto de decidir-se utilizar a fórmula $f = i + d + m(d + 1) + t(d + 2)$, pensando-se que os dados colocados na questão são provenientes de uma jogada que vai até a segunda rotação para determinar a casa onde a primária jogada finaliza.

Figura 104: segunda tentativa de desenvolvimento da tarefa 6, alínea a)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 6 (2023)

Na prática, o aluno não levou em consideração alguns conhecimentos prévios sobre a casa onde a primeira jogada finaliza, que advém das três principais condições do processo de distribuição de dados e que são colocadas na análise a priori como hipóteses para identificação da formula que se pode utilizar em tarefas desse gênero. Estas condições e conhecimentos são especificamente:

- Se $k = m(2+1) = 3m$ então $p = 1+m$. Nessas condições $f = MOD(i+d+3m;k) = MOD(i+d+3m;3m) = i+d$.
- Se $k = m(2+1) = 3m+t$, com $t = d$ então $p = 1+m$. Nessas condições $f = MOD(i+d+3m;k) = MOD(i+t+3m;3m+t) = i$.
- Se $k = m(2+1) + t$[46] $= 3m+1$, com $t \neq d \wedge t \neq 0$ então $p = 1+m+t = 1+m+1 = 2+m$. Nessas condições $f = MOD(i+d+3m+4;k)$.

Como temos na tarefa $i = 2$, $f = 4$ e $d = 2$, o aluno, antes de montar qualquer sistema de equações, deveria analisar a relação entre estes três dados. No caso, para alínea a) temos: $f = i + d \Leftrightarrow 4 = 2+2 = 4$. Com esse resultado, é fácil perceber que a formula para determinar a casa onde a jogada finaliza é dada por $f = MOD(i+d+m(d+1);k)$, isto é, que a jogada só terá uma rotação.

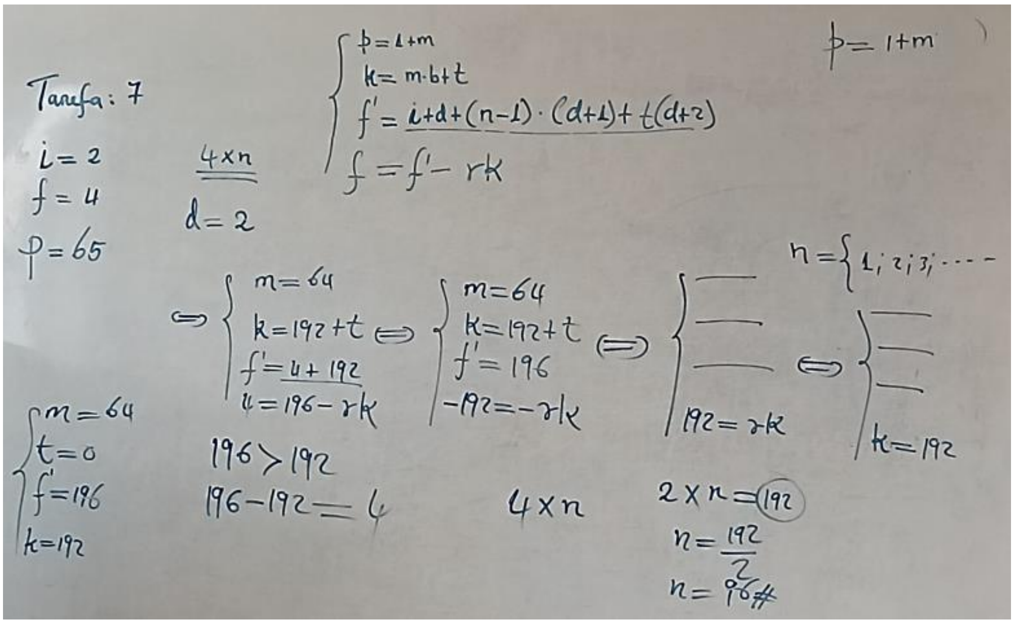
Assim, a dimensão do tabuleiro poderia ser achada a partir do sistema de equação ou, nas condições dadas anteriores, saber-se-ia imediatamente que $n = \frac{k}{2} = \frac{m(d+1)}{2} = \frac{(p-1)(d+1)}{2} = \frac{(65-1)(2+1)}{2} = \frac{64\times 3}{2} = 96$. Portanto, a dimensão do tabuleiro seria 4×96.

Portanto, tanto a primeira como a segunda tentativa dos alunos de resolução da aliena a) não deu certo por causa de ter sido ignorado estes elementos.

De qualquer jeito, os alunos conseguiram resolver a questão fazendo tentavas, isto e, testando as diferentes possibilidades até que deu certo a última proposta, que é apresentada na Figura 105.

[46] Como $d = 2$, a divisão de k por $3 = 2+1$ terá como resto $0, 1, 2$. Assim, se $t \neq d = 2 \wedge t \neq 0$ é logico que $t = 1$.

Figura 105: terceira tentativa de desenvolvimento da tarefa 6, alínea a)



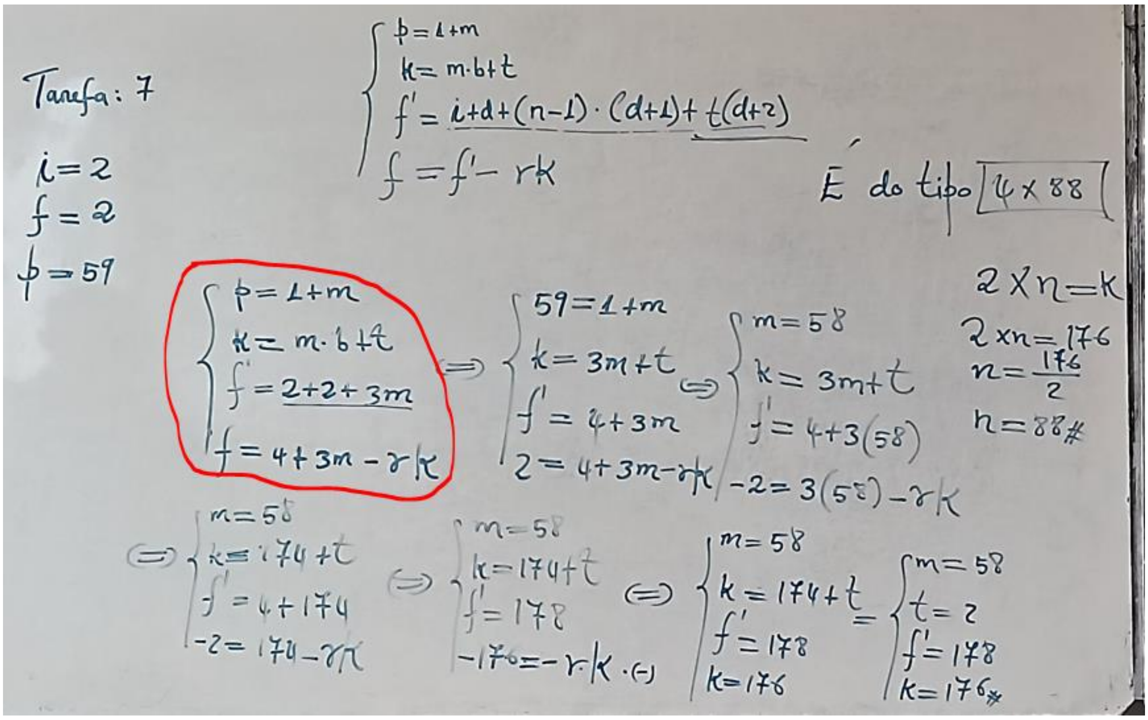
Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 7 (2023)

A alínea b) foi bem mais simples que a alínea a). Talvez a experiencia no trabalho com a alínea a) tenha feito os alunos se calibrar melhor no raciocínio. Aqui, depois que o aluno faz leitura da questão e extrai os dados. Depois, o aluno se recorda de uma condição importante que o possa facilitar a identificação da fórmula adequada ao problema e passa a explicar, como vem na transcriação a seguir (Anexo 30 – vídeo 8).

> **Aluno**: [...] aqui há uma coisa que vai nos facilitar. Se formos a perceber e prestar atenção, o enunciado diz: inicia e termina na mesma casa. Recordando um pouco o que nos vimos antes, dizia-se o seguinte: [...] se o resto for igual ao número de dados, a jogada não chega na segunda rotação, pois, ela termina onde começou. [...] com isso, o número de passos é $p = 1 + m$

Como vem na transcrição anterior, o aluno utiliza o conhecimento segundo o qual, se $k = m(d + 1) + t$, com $t = d$, temos $f = MOD(i + d + m(d + 1); k)$. Como $d = t$ e $k = m(d + 1) + d$, vem que $f \Leftrightarrow MOD(i + d + m(d + 1); m(d + 1) + d) = i$, isto é, $i = f$.

Figura 106: desenvolvimento da tarefa 6, alínea b)



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 8 (2023)

Depois dessa explicação e baseado nos conhecimentos que acabará de anunciar, o aluno monta um sistema de quatro equações, como é ilustrado na marcação a vermelho da Figura 106. Depois disso, substitui os dados e resolve o sistema normalmente, utilizando direitinho os procedimentos para resolução de um sistema de equações. Com esta resolução, o aluno chega à resposta esperada de acordo com a analise a priori de que, com os dados apresentados na questão, o tipo de tabuleiro que foi utilizado é do tipo 4×88.

Digamos que nessa alínea não há muito comentários. A proposição colocada na análise a priori foi alcançada sem dificuldades com pelos alunos. Em todo caso, conhecendo aqueles pressupostos inicias, a tarefa poderia ter sido resolvida de forma simples sem utilizar o sistema de equações, fazendo $n = \frac{k}{2} = \frac{m(d+1)+d}{2} = \frac{(p-1)(d+1)+d}{2} = \frac{(59-1)(2+1)+2}{2} = \frac{58\times 3+2}{2} = 88$.

Na alínea c), os alunos cometem o mesmo equivoco cometido na alínea a), que foi de não analisar os dados a partir das três condições lá mencionadas, para identificar com mais exatidão a fórmula que poderiam utilizar para determinar a casa onde a primeira jogada finaliza. O mesmo equivoco foi também contato na analise a posteriori.

Neste caso, devido a isso, os alunos tiveram que levar muito tempo na resolução dessa tarefa, uma vez que, tiveram que testar se a tarefa poderia ser resolvida:

- Primeiro: pela relação $f = i + d + m(d+1)$;
- Segundo: pela relação $f = i + d + m(d+1) + t(d+2)$.

Tratou-se em tese de utilizar um método de tentativas, quando muito bem poderia se ir directo aos sistema de equações mais adequado. Como $i = 2$, $f = 7$ e $d = 2$, é fácil ver que:

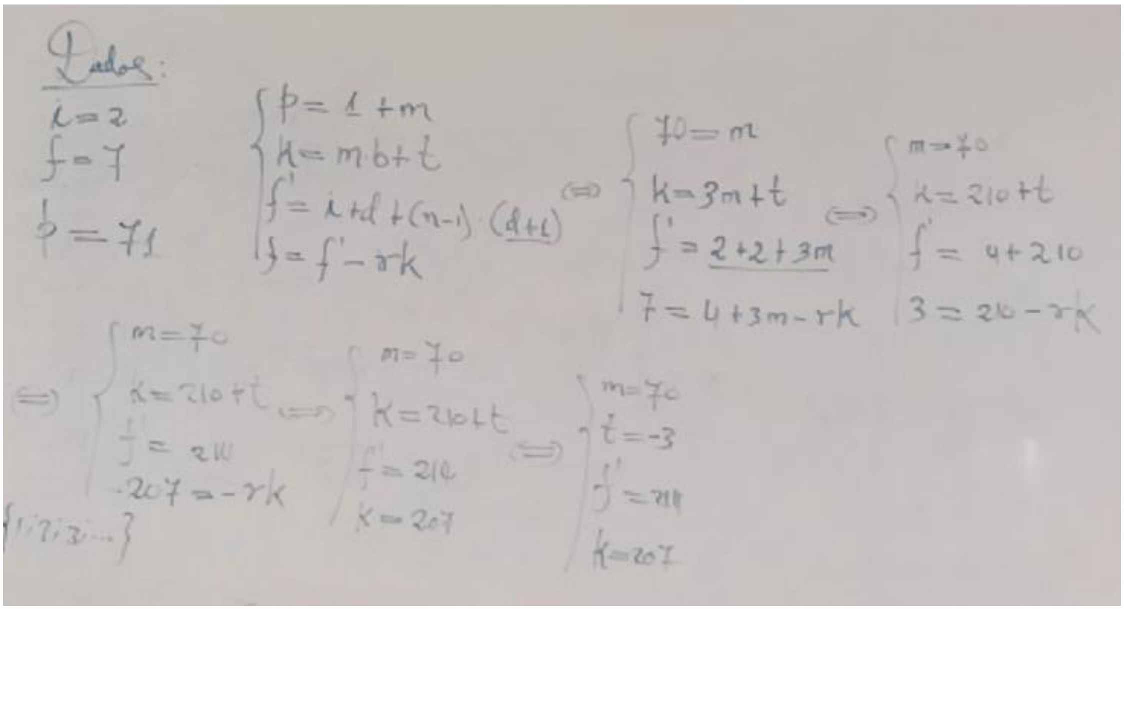
- Primeiro: $f \neq i + d$, isto é, $7 \neq 2 + 2 \Leftrightarrow 7 \neq 4$, logo, $k \neq m(d+1)$;
- Segundo: $f \neq i$, isto é, $7 \neq 2$, logo, $k \neq m(d+1) + d$;

Com estas duas condições não cumpridas, é fácil dizer que f é do tipo $f = i + d + m(d+1) + t(d+2)$. A partir daqui, era possível, sem utilizar método de tentativa, tentar formular um sistema de equações que responda ao problema colocado.

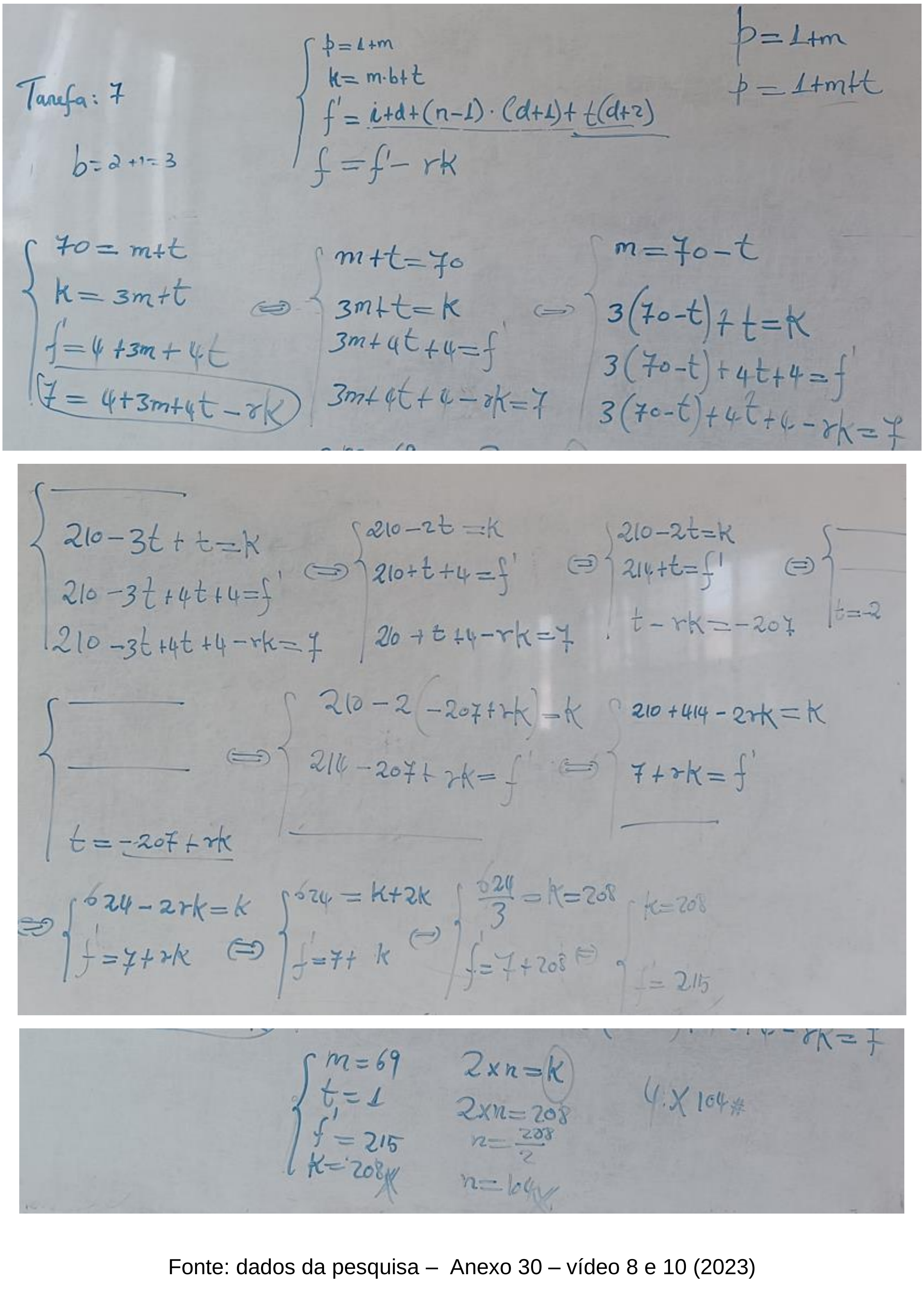
Esses pressupostos não levados tanto na análise a priori quanto pelos alunos, por esta razão, na análise a priori esta questão também foi tratada por tentativas, assim como foi o procedimento dos alunos, que é ilustrado na Figura 107-a-b, em que primeiro resolvem considerando $k = m(d+1)$, depois, resolvem considerando $k = m(d+1) + t$, com $t \neq d$ e $t \neq 0$.

Figura 107: Desenvolvimento da tarefa 6, alínea c)

a) primeira tentativa de resolução da T6-c



b) última tentativa de resolução da T6-c



Fonte: dados da pesquisa – Anexo 30 – vídeo 8 e 10 (2023)

9.2.5. Considerações sobre a fase experimental

A experimentação didáctica proposta nesta tese esteve fundamentada numa proposta de trabalho que integra práticas socioculturais de povos originários ao ensino da matemática, no caso específico, a integração do jogo Ntxuva ao ensino da matemática.

A proposta tinha em vista colocar em prática a principal hipótese da tese de que, saberes contra-hegemônicos, oriundos de práticas socioculturais de povos originários podem ser integrados ao ensino com vista a potencializar a aprendizagem de objectos acadêmicos formais, o que é aqui designado por “circulação de praxeologias entre instituições socioculturais de povos originários a instituição de ensino (da matemática)”.

É a partir dessa proposição que foi constituída a experimentação didáctica baseada em AEP desenvolvidas em torno da questão principal: $Q \rightarrow$ *Em um tabuleiro do tipo* $4 \times n$*, como identificar a casa onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa onde se inicia a movimentação de dados e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro?*

Para responder essa questão, foram constituídas seis tarefas, implementadas presencialmente com alunos do ensino médio do Sistema Nacional de Educação em Moçambique, de idades compreendida entre 17 e 23 anos. As tarefas foram trabalhadas em cinco encontros.

A tarefa 1, por ser a tarefa de entrada e que levaria o aluno a emigrar das suas relações de naturalidade com o saber ancorado ao processo distribuição de dados no sistema de jogo Ntxuva a imersão em conhecimentos acadêmicos formais para resolução do problema principal, foi discutida em dois encontros. No trabalho com esta tarefa, os alunos construíram sua relação com o problema. Essa relação foi fundamental e criou facilidades de compreensão e resolução das tarefas posteriores.

Nessa tarefa se pedia para determinar a casa onde a primeira jogada foi finalizada, conhecendo a casa i onde a jogada terá iniciado, o dimesao do tabuleiro 4×8 e o número $d = 2$ de dado que componham cada casa na configuração inicial do tabuleiro. Assim, nas alíneas a), b), c), d) e e) foram dados valores diversos de i, com o qual os alunos realizaram a experimentação material utilizando malhas quadriculadas para representar um campo de jogo de Ntxuva. Na alínea f) a questão foi genérica, com a finalidade de puxar os alunos a ideia de construção de relações que o possibilitassem determinar sempre a casa onde a jogada finaliza e sem necessidade de realizar a experimentação material.

Como era de se esperar, nas alíneas a) a e) os alunos realizaram a experimentação material para determinar a casa onde a primeira jogada finaliza, o número de passos necessários para finalizar a jogada e o conjunto de número que correspondem aos índices das casas onde casa passo da primeira jogada finaliza. Portanto, os alunos utilizaram as praxeologias originais do sistema de jogo Ntxuva para dar resposta as questões. Estas praxeologias estão explicitamente ligadas a processo de distribuição e contagem de dados e, implicitamente associadas a adição, subtração de dados e de geração de sequência de números.

Como os alunos já estavam familiarizados com o sistema de jogo do Ntxuva, resolver a tarefa utilizando as praxeologias originais do jogo foi bastante fácil e não gerou dúvidas no desenvolvimento da tarefa. É importante sinalizar que, ao resolver as questões da alínea a) a e), os alunos não se deram conta inicialmente da necessidade de construir uma relação que o pudesse ajudar a resolver a questão sem realizar a experimentação material, o que já era esperado, de acordo com as hipóteses levantas na análise a priori.

Contudo, o encontro dos alunos com as questões da alínea a) a e) permitiu-lhes explorar uma característica importante do processo de dados no jogo Ntxuva: que o número de passos necessários para finalizar uma a primeira jogada em um mesmo tabuleiro é constante.

O encontro dos alunos com a alínea f) marcou o primeiro desafio deles no processo de emigração de praxeologias originarias do sistema de jogo Ntxuva a uma formalização matemática geral que os pudessem ajudar a resolver tarefas do gênero sem necessidade de recorrer a experimentação material. Para trabalhar sobre esta formalização matemática, os alunos tiveram que retomar a experimentação material para estudar com mais cuidado os detalhes no processo de distribuição de dados e retirar dali características que pudessem ajudar a construir uma fórmula.

Aqui, os alunos utilizaram bastante os conhecimentos sobre sucessão numérica, especificamente, as ideias sobre sucessão aritmética, pois, logo a priori, o conjunto de dados que os alunos foram construindo nas alíneas anterior denotavam, parte deles, tratar-se de uma sucessão aritmética. Mas também, essa ideia de sucessão aritmética os deixava confuso por dois aspectos:

Primeiro, pelo facto de que certas diferenças entre os números consecutivos da sequência de dados obtida não ser a mesma, por exemplo, de u_1 a u_6 a diferença $u_{n+1} - u_n = 3$ ao passo que $u_7 - u_6 = 4$, pois, com esse problema, a fórmula que eles achavam $u_n = u_1 + (n-1)d$ não dava certo. Aqui, digamos que os alunos não avançaram para a ideia de que a sucessão em causa poderia ser definida em partes.

Segundo, que a relação $u_n = u_1 + (n-1)d$ não permitia determinar o índice da casa onde alguns passos finalizavam, sobretudo, quando os índices passam por 16 e tinha de se retornar a 1,2, 3,.... Por exemplo, na sequência de dados $U = \{3,6,9,12,15,2,6\}$ de u_1 a u_5 poderiam ser determinados pela formula $u_n = u_1 + (n-1)d$, mas para u_6 e u_7 já não era até aqui possível determina-los com base na fórmula dada.

Mas com base num exercício de raciocínio profundo e com ajuda do professor, sem necessariamente influenciar directamente na construção das ideias, os alunos foram capazes de decifrar:

- Que precisavam considerar a contagem progressiva de dados, para que a fórmula $u_n = u_1 + (n-1)d$[47] pudesse funcionar plenamente. Por exemplo, no conjunto de dados $U = \{3,6,9,12,15,2,6\}$, a contagem progressiva poderia gerar o seguinte conjunto de dados $U' = \{3,6,9,12,15,18,22\}$.
- Que quando $u'_n > k$, então o índice da casa onde o passo finalizou poderia ser dado retirando tantas vezes o k de u'_n, isto é, se $u'_n > k$ então $u_n = u'_n - rk$ e se $u'_n \leq k$ então $u_n = u'_n$.
- Que a sequência de dados gerada no processo de distribuição de dados no sistema de jogo Ntxuva pode ser definida em partes, isto é, $u_n = \begin{cases} a_1 + (n-1)d, & se\ n = 1,..,6 \\ a_6 + (2+2), & se\ n = 7 \end{cases}$.

Mais tarde os alunos precisaram decifrar que $a_1 = i + d$ e substituir na relação anterior para completar a ideia, isto é:

$$u_n = \begin{cases} i + d + (n-1)(d+1)^{48}, & se\ n = 1,..,6 \\ a_6 + (d+2), & se\ n = 7 \end{cases}$$

$$u_n = \begin{cases} i + 2 + (n-1)(2+1), & se\ n = 1,..,6 \\ a_6 + (2+2), & se\ n = 7 \end{cases} = \begin{cases} i + 2 + 3(n-1), & se\ n = 1,..,6 \\ a_6 + 4, & se\ n = 7 \end{cases}$$

De qualquer jeito, sentimos que nesta tarefa poderia ser acrescida uma pequena subtarefa que pudesse levar o aluno a refletir sobre a origem de u_1. Por exemplo, sabendo que a jogada iniciou na casa $i = 5$, em que passo a primeira jogada finalizaria. Seria interessante para levar os alunos a refletir que $u_1 = i + d$. Pois, na

[47] Aqui o d é referente a razão da progressão aritmética. $d = u_{n+1} - u_n$.
[48] Aqui, o d é referente ao número de dado que ‘e colocado em cada casa na configuração inicial do tabuleiro.

experimentação os alunos ficaram travados na formulação, ficando presos apenas ao conjunto de números gerados.

É importante lembrar que, a fórmula determinada no trabalho com a tarefa 1 não deixou os alunos satisfeito, no sentido de que, se ela valeira para outros tipos de tabuleiro, diferente do tipo 4×8. Por essa insatisfação, mesmo sem entrar de forma formal para a tarefa 2, os alunos já sentiram a necessidade de testar a fórmula para outros tipos de tabuleiro. Digamos então, dentro da experimentação que foi feita, a tarefa dois, mais do que ampliar a análise dos alunos em relação as formulações feitas na alínea f) da tarefa 1, serviu para testar se a formula realmente funciona para outros casos.

Com atarefa 2, os alunos desenvolveram também a ideia segundo o qual;

- Em um tabuleiro do tipo $4 \times n$, em que $k = 2n$ representa o número de casas que constituem um campo de jogo, o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada depende de k. No caso, para determinar o número de passos deve-se dividir k por $d + 1$, obtendo-se a relação $k = m(d + 1) + t$.
- No processo de distribuição de dados há três situações que se devem considerar. No caso, para $k = m(d + 1) + t$, se tem:
  - Se $t = 0$, o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada será dado $1 + m$. Neste caso, a jogada não chega na segunda rodada, isto é, $f = i + d + m(d + 1) - rk = MOD(i + d + m(d + 1); k) = i + d$;
  - Se $t = d$, o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada será dado por $1 + m$. Neste caso, a jogada não chega na segunda rodada, isto é, $f = i + d + m(d + 1) - rk = MOD(i + d + m(d + 1); k) = i + d$;
  - Se $t \neq 0 \wedge t \neq d$, o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada será dado por $1 + m + t$. Neste caso, a jogada chega na segunda rodada, isto é, isto é, $f = i + d + m(d + 1) + t(d + 2) - rk = MOD(i + d + m(d + 1) + t(d + 2); k)$;

Nessa tarefa, o grande problema foi a não facilidade de os alunos enxergarem que, da contagem normal de casas ($f' = i + d + m(d + 1)$ ou $f' = i + d + m(d + 1) + t(d + 2)$) pode se retirar $k, 2k, 3k, \ldots, rk$, com $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Talvez, se se pudesse colocar nas questões da tarefa 1, alguns i que permitisse a jogada finalizar em uma casa, cuja a contagem progressiva duas ou três vezes maior que k, isto é, $f' = 2k + f$ ou $f' = 3k + f$. Se calhar, o acréscimo dessa questão a tarefa 1 fosse levar os alunos a perceber, na tarefa 2, sem muito esforço, que para determinar o índice da casa onde a primeira jogada finaliza é necessário retirar $k, 2k, 3k, \dots, rk$ de f'.

O trabalho com a tarefa 1 e 2 permitiu que os alunos construíssem a base de conhecimentos fundamental para resolver as questões das tarefas 3, 4, 5, 6. Contudo, na tarefa 3, notou ainda que os alunos recorriam a experimentação material para comprovar seus resultados. Mas a ideia do uso da experimentação material ficou bloqueada nas alíneas a) e b) do número três, uma vez que, a dimensão de tabuleiro proposto para trabalhar com ele era muito maior, o que não dava chance de os alunos recorrer a experimentação material para comprovar seus resultados.

Propor trabalhar com tabuleiro de dimensão muito maior foi fundamental para levar os alunos definitivamente a optarem por trabalhar com fórmulas que respondem de forma geral o problema em vez de enveredar pela experimentação material. Talvez, num próximo experimento, se possa colocar para os alunos trabalharem com tabuleiro muito mais extensos que os colocados, para tirar a mínima chance de eles realizarem a experimentação material logo a priori.

De qualquer jeito, com esta tarefa, os alunos tomaram definitivamente a consciência de que era necessário conhecer estabelecer uma fórmula para resolver problemas desse gênero, pois, nem sempre seria possível realizar a experimentação material, pelo facto de que poderiam se deparar com tabuleiro de dimensão muito maior. Na prática tal como as tarefas posteriores, 4, 5 e 6, a tarefa três visava a consolidação dos conhecimentos construídos na tarefa 1 e 2.

As tarefas 4, 5 e 6 foram as que os alunos tiveram menos dificuldades em resolver, pois, a sua base de conhecimentos sobre a primeira jogada no sistema de jogo Ntxuva já está bem construída. Afinal, era o momento de consolidação dos conhecimentos construídos nas tarefas 1 e 2, até mesmo a tarefa 3.

De qualquer jeito, o encontro dos alunos com as tarefas propostas para experimentação possibilitou conferir a hipótese da tese de que, praxeologias oriundas de práticas socioculturais contra-hegemônicas podem ser integradas ao ensino da matemática e possibilitar acessar conhecimentos matemáticos. No caso, a experimentação, possibilitou acessar diferentes saberes, entre eles, o saber sobre contagem, adição, subtração, divisão euclidiana e sequências numéricas.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Primeiramente, estamos cientes de que qualquer investigação é inacabada. Levando em conta essa presunção, admitimos que esta investigação suscita ainda de elementos adicionais que possam ser levados em consideração para futuros desenvolvimentos em estudos que integram práticas socioculturais de povos originários (práticas socioculturais contra-hegemônicas) no ensino.

A pesquisa que é apresentada nesta tese esteve subordinada ao título "*contribuição para o estudo das potencialidades do jogo Ntxuva no ensino da matemática: uma proposta para o enriquecimento do currículo local no nível médio do SNE em Moçambique*" e foi desenvolvida baseada em dois objetivos, um a nível teórico e outro a nível prático.

A nível teórico, a pesquisa visou "analisar as contribuições e mostrar as potencialidades da Teoria Antropológica do Didático (TAD) na análise da manutenção e questionamento das epistemologias dominantes no ensino e, da circulação de praxeologias entre instituições produtoras de saberes contra-hegemônicos a instituição de ensino da matemática. A nível prático, visou "conceber um modelo didático de referência que integre o jogo Ntxuva ao ensino da matemática".

Estes objetivos foram levantados para responder duas principais questões de pesquisa:

- Que articulações se podem estabelecer a partir dos elementos teóricos da TAD, que permitam a didática da matemática assumir uma postura teórica e prática de ruptura ao modelo de ensino que tem as epistemologias hegemônicas como forma única para acessar os objetos de saber da matemática escolar?
- Partindo de saberes que vivem ou podem ser exportados em práticas socioculturais contra-hegemônicos, como se pode conceber uma organização didática que integra o jogo Ntxuva ao ensino da matemática?

Os sujeitos de pesquisa foram constituídos pelos anciões da localidade de N'Temangau, distrito de Changara, uma localidade onde o jogo Ntxuva é amplamente praticado, com os quais visamos realizar um levantamento exaustivo da gênese à prática do jogo Ntxuva, a partir da sua realidade social, das experiências e vivencias dos anciões com o jogo. Também envolveu alunos do ensino médio, com os quais visamos implementar a proposta da organização didática concebida na tese e que integra o jogo Ntxuva ao ensino da Matemática.

A investigação foi desenvolvida alicerçando-se na TAD em um diálogo com a decolonialidade, com a intencionalidade de propor uma discussão que possibilite olhar as práticas de ensino da matemática a partir de outras sabedorias, aqueles que são oriundas de práticas socioculturais dominadas (sabedorias contra-hegemônicas). Tratou-se de discutir as possibilidades que permitem romper com as barreiras que são instauradas no ensino da matemática e que não privilegiam a integração de outras sabedorias na produção do conhecimento escolar.

Este dialogo constituiu uma contribuição teórica importante na tese para o campo de investigação em didática, não só da matemática, mas também das ciências no geral. Esse diálogo visou responder as expetativas do objetivo teórico da tese (OBG1) e como contribuição teórica, possibilitou-nos discutir a ideia da *decolonialidade didática,* que nesta tese é defendida como "um campo de estudos que discute as possibilidades de desnaturalização e desconstrução das práticas de ensino que naturalizam as epistemologias dominantes como formas únicas e lineares no acesso e difusão social de praxeologias escolares".

O conceito que apresentamos aqui sobre a decolonialidade didática, advindo do diálogo entre a TAD e a decolonialidade foi-nos importante para conectar os elementos da TAD as propostas de estudo do campo da decolonialidade, constituindo-os em arcabouços metodológicos importante para o questionamento das condições colonizadas nos currículos escolares e propor a análise das condições e restrições para integração de práticas culturais dominadas no ensino, contribuindo sobremaneira para emancipação de culturas renegadas no espaço de produção do conhecimento científico. Além do mais, este dialogo contribui para que a TAD, por via do paradigma do questionamento do mundo, não se restringe apenas ao questionamento do conhecimento acadêmico como tal, mas sim, que assumi o seu verdadeiro papel de questionamento "dos mundos" a partir do reconhecimento da existência de outras sabedorias contra-hegemônicas que podem participar igualmente na construção do conhecimento científico.

Esse imbricamento teórico entre a TAD e a decolonialidade evidenciou que o problema da colonialidade é genérico tanto para países ocidentais quanto para países africanos e das américas, estes últimos, agravados pelo processo histórico de dominação colonial. Trata-se de um mesmo fenômeno decorrente do problema da dominação de umas culturas sobre as outras. No campo de construção do conhecimento matemático trata-se de um fenômeno de dominação cultural das matemáticas acadêmicas sobre as práticas culturais consideradas não cientificas de que se comprova na tese que podem ser exploradas e estudas suas relações que interessam a matemática acadêmica.

Portanto, a proposta da decolonialidade didática que é apresentada na tese deve ser entendida como uma proposta geral e não exclusiva aos países outrora colonizados, pois, o fenômeno de dominação de culturas é também geral. A proposta deve possibilitar ao didata, professor, investigador, etc. a desconstruindo da visão universal e linear de construção do conhecimento cientifico, podendo levantar a partir da visão do questionamento “dos mundos” possibilidades de construção do conhecimento científicos a partir de outras epistemologias não acadêmicas. Com isso, haveria de se contribuir para que as culturas acadêmicas e não acadêmicas convivam juntas e sem descriminação epistemológica, acima de tudo, que se mostre que cada prática ou identidade cultural acadêmica ou não acadêmica tem igual importância na construção da ciência e no desenvolvimento do mundo.

Assim, para conduzir uma pesquisa imersa no campo de estudo decoloniais, encontramos na TAD a abordagem da ecologia do didático, da relação ao objeto e da praxeologia como metodologias que possibilitem mergulhar nos currículos escolares e nas práticas socioculturais dominadas para produzir e implementar propostas de ensino libertadoras da mente e problematizadoras do conhecimento a partir do lócus (da realidade do aluno).

Deste modo, e numa primeira etapa, a partir da abordagem da ecologia do didático através dos níveis de co-determinação e determinação didáctica, foi-nos possível fazer uma leitura de como é que a colonialidade está instalada nos currículos escolares. Nessa lente metodológica são analisados os documentos oficiais que norteiam o sistema de Educação em Moçambique, entre eles, leis, decretos, programas de ensino, com as quais tivemos as seguintes impressões:

- Ao nível da civilização e sociedade – a manutenção da colonialidade nas sociedades deve-se ao facto dê-se pretender alcançar o modelo de vida ocidental, com seus valores baseados no crescimento, no consumo de bens materiais, no desenvolvimento industrial, etc. Como resultado, estas sociedades tendem a ter um elevado nível de colonialidade.

Assim, estas sociedades tendem a se remeter a ideia de um projeto universal de construção de suas sociedades para se aproximar da civilização ocidental hipoteticamente aceite como desejável, o que afecta na definição de políticas sobre a formação de profissionais, que devam atender esse projecto universalmente aceite.

- Ao nível da Escola, Pedagogia e Disciplina – a análise dos documentos oficiais em Moçambique mostrou que o Sistema Nacional de Educação (SNE) advoga a integração do conhecimento local na educação.
- A nível de domínio, sector, tema e objecto – percebe-se que as leis e políticas sobre a integração da cultura e do currículo local não são implementadas na íntegra, mesmo que o SNE de 20% do tempo letivo de cada disciplina para sua integração. Não há nos programas de ensino orientações ou estratégias metodológicas claras e especificas pra efectivação dessa integração. Além do mais, estes currículos dão muita primazia a uma prática de ensino que não é problematizada a partir do lócus dos alunos, que não produzem sentido e afecto aos alunos. Estes currículos tendem a atender um projeto de ciência universal que não respondem as especificidades locais.

Numa segunda etapa, são propostas formas de desconstrução destes padrões universais que linearizam e mantém rotineira as práticas de ensino da matemática, a partir do que designamos na tese de "circulação de saberes entre instituições socioculturais contra-hegemônicas ao ensino da matemática". Nessa proposta, mostramos que a TAD por meio da abordagem da relação ao objeto e da abordagem praxeológica pode participar no processo de emancipação das epistemologias subalternas, ao possibilitar explicar e analisar os processos de transposição de praxeologias entre instituições socioculturais ao ensino da matemática.

Assim, baseando-se nos pressupostos das abordagens anteriores, entende-se que, para que o coletivo X_i (i = estudante, professor, ajudante de estudo, investigador, etc.) acesse saberes acadêmicos a partir de saberes oriundos de práticas socioculturais contra-hegemônicas, antes de tudo deve guardar uma relação não vazia com o objeto local - O_{SL} em sua instituição sociocultural - I_{SL}, cuja a função social de I_{SL} é produzir e implementar praxeologias P_{SL} que permitam X_i ser um bom sujeito em I_{SL} ou simplesmente, que permitam X_i (re)construir seu universo cógnito em relação a O_{SL}, o que denotamos por $R_{I_{SL}}(X_i, O_{SL}) \neq \emptyset$. Essa relação permitirá que x_i (i

= professor) constitua AEP que implementadas a x_i (i = estudante) o levará a (re)construção de praxeologias P_{eM}, ocasionadas pelas modificações adaptáveis, que lhe permitam manter sua relação com objeto de ensino O_{eM} da matemática em I_{eM}, ou ainda, que X_i (estudante) seja um bom sujeito de I_{eM}, a que denotamos por $R_{I_{eM}}(X_i, O_{eM})$.

Para fundamentar o funcionamento desse processo e que nos leva a atingir o objetivo prático da tese (OBG2), tomamos para o nosso estudo o objeto sociocultural Ntxuva, que é um jogo tradicional amplamente praticado em Moçambique e que constitui patrimônio cultural nacional. Assim, como parte da construção da relação de X_i com o jogo, nosso objeto sociocultural, realizou-se um estudo para compreensão do jogo Ntxuva a partir do seu contexto histórico e social. Desse estudo, foi possível descrever e analisar as praxeologias expertas e as potencialidades matemáticas na prática com o jogo Ntxuva, o que nos possibilitou construir a organização didática, constituída de AEP, implementada com alunos do ensino médio, com idade compreendida entre 17 e 23 anos de idade, do SNE – Moçambique.

Por causa da natureza da intervenção didática, a organização didática foi constituída em duas fases, designadamente, fase pré-experimental e fase experimental. Na fase pré-experimental, visamos criar o meio pelo qual os alunos se relacionassem com o objeto social, no caso, o jogo Ntxuva. Trata-se de uma fase em que nos dedicamos ao compartilhamento da cultura do jogo Ntxuva entre os alunos, de modo que pudéssemos colocar os alunos ao mesmo nível da relação com o objeto social. Esta fase se constituiu importante porque, embora o Ntxuva seja um jogo amplamente praticado em Moçambique, em algumas regiões do país o jogo apresenta algumas regras diferentes. Por isso, administramos um questionário preliminar para compreender o nível de relação dos alunos com o jogo, depois disso, compartilhamos o contexto histórico do jogo e, finalmente, realizou-se um torneiro do jogo, que possibilitou os alunos harmonizar e interiorizarem as regras do jogo com mais profundidade.

Ainda assim, sentimos que poderíamos explorar mais essa fase, incorporando nela, a partir do jogo e como sociabilidade tradicional, o uso de sementes de embondeiro ou outras como peças e costumes ligados ao jogo, como o caso de bebidas servidas ou que possam ser servidas durante o jogo, por exemplo, o yogurt tradicional, mais conhecido localmente por malambe ou outros.

Na fase experimental implementamos as atividades de estudo e pesquisa que exploram as potencialidades matemáticas do jogo Ntxuva, como uma possibilidade para aprendizagem da matemática a partir do conhecimento que se explora na prática com este jogo. As AEP foram construídas para responder à questão principal de estudo: *Em um tabuleiro do tipo* $4 \times n$, *como identificar a casa* f *onde a primeira movimentação de dados finaliza, conhecendo a casa* i *onde se inicia a movimentação de dados e o número de dados que compõe cada casa na configuração inicial do tabuleiro?*

Nisso, foram constituídas 6 tarefas com que os alunos trabalharam para responder à questão principal. A partir da análise dos dados produzidos no ato da experimentação didática, constatamos que, ao trabalhar com as questões ancorada as tarefas propostas, os alunos exploraram diversos conhecimentos acadêmicos, entre eles, conhecimentos sobre aritmética básica (contagem, adição e subtração), sequência numérica, divisão euclidiana, sistema de equações.

Estes conhecimentos foram possíveis explorar a partir de um processo de migração das praxeologias observadas no processo de distribuição de dados no sistema de jogo Ntxuva ao conhecimento matemático necessário para explicar em que casa a primeira jogada finaliza, conhecendo onde a mesma foi iniciada, sem ser necessário jogar. Ao sair de um processo simples de distribuição e contagem de dados, os alunos conseguiram, nesse processo, sair do domínio de representação aritmética para algébrica, primeiramente, ao abandonarem o tabuleiro e trabalharem com as sequências produzidas no processo de distribuição de dados, segundo, ao construírem a partir dos dados numéricos relações matemáticas gerais que explicassem sempre o processo.

Com esta experimentação, comprova-se a tese que defendemos nesta investigação de que, praxeologias oriundas de práticas socioculturais contra-hegemônicas podem ser exportadas para o ensino, de modo a propiciarem a aprendizagem libertadora e questionadora dos objetos de saber de disciplinas diversas, em particular, objetos de saber da matemática. Esta tese é o que chamamos aqui de “circulação de praxeologias entre instituições de produção de saber local – I_L a instituição de ensino da matemática – I_{eM} e da relação ao objeto”.

Embora tenhamos comprovado a tese que defendemos nesta investigação, notamos ao longo da experimentação didática que alguns aspectos que precisariam ser melhorados em uma implementação oportuna da experimentação.

O primeiro ponto faz referência as dificuldades que os alunos tiveram em perceber que, quando a contagem progressiva f' dos dados fosse maior que o número $k = 2n$ de casas que compõem o tabuleiro, deveria se retirar dela r vezes o k de f' para achar o índice da casa equivalente, isto é, se $f' > k$ então $f = f' - rk$. Esta dificuldade deve-se ao facto de não se ter contemplado nas alíneas a, b, c, d, e da tarefa 1, índices de casas onde a jogada inicia para finalizar em uma casa em que a contagem progressiva de dados seja duas, três ou mais vezes maior que o número de casas que compõe o campo de um jogador.

O segundo ponto faz referência as dificuldades que os alunos tiveram na transição da experimentação material a formalização matemática (formulação do modelo) que respondesse à questão principal. De acordo com a Organização Didáctica proposta, essa transição iniciaria a partir da alínea f da tarefa 1 e tomaria na tarefa 2 contornos mais aprofundados para generalização ou formalização do modelo que respondesse à questão principal. Aqui, os alunos não conseguiram a priori entender que era possível achar um modelo que explicasse a circularidade no processo de distribuição de dados na primeira jogada de uma partida do Ntxuva. Ouve problema de:

- Entender e formular a relação que pudesse permitir determinar a casa onde cada passo da jogada finaliza na primeira jogada de uma partida do Ntxuva;
- Relacionar a casa onde a jogada inicia com a casa onde a jogada finaliza na primeira jogada de uma partida do Ntxuva;
- Relacionar o número de passos necessários para finalizar a primeira jogada em uma partida do Ntxuva;

Estas dificuldades fizeram com que o tempo didático no trabalho com a tarefa 1 e 2 fosse maior em relação ao tempo pedagógico previsto e foram originadas pelo facto de se ter utilizado nas alíneas anteriores a f, tarefa 1, simulações de tabuleiro Ntxuva com extensão menor, que não permitiram o aluno enxergar a priori, a necessidade de ter que abandonar a experimentação material para procurar uma relação que explicasse de forma geral o processo de distribuição de dados. Pois, com o tipo de tabuleiro que fora colocado nas alíneas a, b, c, d, e da tarefa 1, a experimentação material já era suficiente para resolver a tarefa.

O terceiro ponto faz referência ao caminho que os alunos seguiram para achar a fórmula que determina o índice da casa onde a jogada finaliza. Aqui, esperávamos que os alunos modelassem a fórmula geral a partir do processo de contagem ou de distribuição de dados. Para nossa surpresa, os alunos não trilharam por esse caminho da modelização, pois, a partir da sequência de dados que constituíam a contagem de casas, identificaram a priori que a mesma se tratava de uma sequência aritmética, tendo assim, utilizado a formula geral de uma progressão aritmética para pensar na resolução do problema.

Este terceiro ponto resulta do problema da modelização inicial originada pela forma como a atividade foi desenhada, que conduziu os alunos a utilizarem conhecimentos previamente conhecidos. Portanto, pelo período que a AEP foi implementada (2º trimestre letivo em Moçambique), pensa-se que os alunos já tenham tido o encontro com as sequências numéricas antes da experimentação.

Por essa razão, entendemos que algumas facilidades na compreensão quase fácil das tarefas devem-se por um lado ao efeito de contrato devido ao paradigma da visita as obras, em os alunos estão acostumados a fazer as coisas que já sabem e de forma como sabem fazer, o que não lhes possibilita levantar outros questionamentos sobre o saber em constituição ou constituído. Por outro lado, que a partir das sequências de números obtidos no processo de distribuição de dados é fácil entender que por exemplo que, $u_1 = a$, $u_2 = a + r$, $u_3 = a + 2r$, ..., $u_n = a + (n-1)r$.

Portanto, pensando que os alunos já teriam encontrado as sucessões numéricas anteriormente, pensa-se que o efeito de contrato tenha prevalecido de tal modo que não os permitiu pensar na possibilidade de modelização da relação que o permitisse determinar a casa onde a jogada finaliza, conhecendo a casa onde a primeira jogada de uma partida de Ntxuva inicia.

Uma observação que levantamos nesse ponto é a do estatuto epistemológico que as fórmulas obtidas tiveram nessa experimentação. A nossa esperança era de que as fórmulas tivessem o estatuto epistemológico de objeto, pensando que com as AEP propostas, elas surgiriam da construção organizada do conhecimento advindo do processo de contagem ou distribuição de dados no tabuleiro Ntxuva. Para nossa surpresa, as fórmulas nessa experimentação apareceram como ingredientes conhecidos para ajudar a resolver o problema, assumindo assim o estatuto epistemológico de ferramenta (DOUADY, 1986).

Nessa observação, o desafio que se tem para uma experimentação oportuna é que fórmulas possam aparecer com o estatuto de objeto, pois, elas devem ser construídas e não simplesmente aparecerem como produto acabado para ser utilizado para resolução de determinado problema.

Constatamos que estes três pontos resultaram de um problema na adequação da Organização Didáctica as finalidades da mesma, o que de certa forma se constituiu em obstáculo didático que impactou na evolução das ideias nos alunos. Portanto, para se sair desse obstáculo em uma experimentação oportuna, seria interessante:

- Contemplar nas tarefas 1 e 2 índices de casas em que a jogada iniciada nela finalizaria em uma casa onde a contagem progressiva de dados seja duas ou mais vezes maior que o número de casas que compõe o campo de um jogador;
- Tanto na tarefa 1 quando na 2, deve-se contemplar tabuleiros com dimensão mais extensa, para permitir que os alunos, logo a priori, achem dificuldades em realizar a experimentação material e pensem na possibilidade de formular relações que os facilite a achar a casa onde a jogada finaliza.
- Conferir que ao implementa a Organização Didáctica não tenham tido antes um contato inicial com o objeto sequência numérica, ou mais especificamente, sequência aritmética.
- Pensar a Organização Didáctica a sua fase de Experimentação em termos de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e detrimento de AEP.

Contudo, embora fosse pela primeira vez os alunos a explorarem os conhecimentos matemáticos através da integração do jogo Ntxuva e em geral da cultura no ensino, os alunos estiveram muito engajados na experimentação. Um exemplo claro disso foi marcado no episódio do segundo encontro, em que encontramos os alunos em uma discussão muito avançada que dava a continuação da tarefa discutida no dia anterior. De qualquer jeito, as nossas hipóteses indicam que as AEP produzidas podem ser integradas no ensino para um primeiro encontro dos alunos com as sequências numéricas.

Entretanto, para potenciar a ideia de que a AEP proposta pode ser introduzida para um primeiro encontro dos alunos com das sequências numéricas, seria interessante (re)experimentar a OD com outros alunos, que ainda não tenham sido ensinados sobre o objecto de sequências aritméticas. Considerando a organização curricular do sistema de ensino moçambicano, poderia ser alunos, ou da 11ª classe, ou da 12ª classe, porém, implementada logo no início do primeiro trimestre do aluno letivo escolar. Portanto, constamos isso como uma limitação, mas que, pode alimentar um futuro estudo.

Com isso, a proposta de ensino que é apresentada nessa tese pode ser utilizada no nível médio, especificamente na 12ª classe do SNE em Moçambique. No caso, ela deverá ser contemplada na unidade temática “Funções reais de variável natural (sucessões)”. Entretanto, a proposta deverá ser operacionalizada antes que o professor inicie a trabalhar sobre as sucessões numéricas, pois, a proposta da OD aqui apresentada deverá servir para colocar os alunos em um primeiro encontro com o objeto sequências numéricas.

Uma nota não menos importante que tiramos desse estudo é de que, como boa parte de educadores matemáticos tem as suas práticas de ensino imersas na pedagogia da visita as obras, em que os objetos são colocados aos alunos como um inventario de saberes, sem que os questionem a partir do lócus (da realidade dos alunos), a nossa segunda recomendação é que para futuros estudos se realize uma investigação em formato de uma formação continuada para professores que ensinam matemática em uma proposta que discute a decolonialidade didática e a integração de saberes locais no ensino.

Como é de notar, o desenvolvimento desta pesquisa foi feito de modo a comtemplar os principais pilares do Programa de Pós-graduação em Ensino Filosofia e História das Ciências, trazendo uma reflexão filosófica, histórica e de ensino, ao nos atentarmos e problematizarmos os pressupostos da decolonialidade didática dentro de um sistema de ensino que alimenta práticas de ensino que marginalizam a produção de saberes acadêmicos através de outras praxeologias oriundas de práticas socioculturais que tem sido marginalizadas e dominadas a favor das epistemologias do pensamento moderno colônia no ensino.

A pesquisa conseguiu apontar caminhos fundamentais para propor práticas de ensino alternativas, que não subjugam outras sabedorias contra-hegemônicas, que tem se constituído como uma lacuna ou um vazio didático no ensino da matemática.

A pesquisa evidenciou sua relevância acadêmica no desenvolvimento teórico da TAD, mostrando-se ser uma teoria potencialmente forte para questionamento da manutenção das epistemologias dominantes no ensino e propor alternativas de emancipação de sabedorias subalternas no ensino. Também evidenciou sua relevância social e de ensino ao possibilitar trazer um estudo que possibilitou levar os alunos a se relembrar e divertir-se com o jogo “Ntxuva”, ao mesmo tempo que exploravam o conhecimento matemático.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADMIN. Paulus Gerdes (1953 – 2014). **Jornal Verdade**. Maputo, 20 de novembro de 2014. Disponível em: https://verdade.co.mz/paulus-gerdes-1953-2014/. Acesso em: 01 de julho de 2021.

AGBINYA, Johnson Ihyeh. **Computer Board Games of Africa (Algorithms, Strategies & Rules)**. Department of Computer Science University of the Western Cape, Private Bg X17, Bellville 7535, South Africa. 2004. Disponível em: http://web.archive.org/web/20050712073151/http://services.eng.uts.edu.au/~agbinya/computer%20games/African_Board_Games.pdf. Acesso em: 09 junho de 2022.

ALBUQUERQUE, Mouzinho de. **Moçambique 1896-1898**. volume ii. República Portuguesa, Ministério das Colónias, Biblioteca Colonial Portuguesa – iv. Divisão de Publicações biblioteca, Agencia Geral das Colónias, 1934. Disponível em: https://www.fd.unl.pt/Anexos/Investigacao/1731.pdf.

ALI, Felermino D. M. A.; GIMO, Elton; SAIDE, Saide M. **A MiniMax Agent for Playing Ntxuva Game – The Mozambican Variant of Mancala**. International Conference on Artificial Intelligence, Big Data, Computing and Data Communication Systems (icABCD) - Durban, South Africa, 2020. Disponível em: https://pt.booksc.org/book/83573992/af3bcf

ALMEIDA, Silvio. **Racismo Estrutural**. São Paulo: Sueli Carneiro; Pólen, 2019.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didáctica da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2010.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos**. Revista Ibero-americana de educação matemática. N. 42. Noviembre de 2015, p. 09-34. ISSN: 1815-0640.

ARTAUD, M. **Introduction à l’approche écologique du didactique. L’écologie des organisations mathématiques et didactiques**. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J. L. Dorier, J. B. Lagrange, B. Parzysz & M. H. Salin (Éds), Actes de la IXe école d’été de didactique des mathématiques (pp. 101-139). Caen: ARDM et IUFM. 1999.

ARTIGUE, Michèle. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, Michèle (Org.); DOUADY, Régine (Org.); MORENO, Luis (Org.); GÓMEZ, Pedro (Editor). **INGENIERÍA DIDÁCTICA EM EDUCACIÓN MATEMÁTICA: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., 1995. pPp. 33 – 59.

ASANTE, Molefi Kete. **Raça na Antiguidade: na verdade, provém da África**. Capoeira-Humanidades e Letras, v. 1, n. 3, p. 105-113. 2015. Título original: **Race in Antiquity: truly out of Africa**. Tradução de Fernando Lopes Tomé. Disponível em http://filosofiapop.com.br/www.capoeirahumanidadeseletras.com.br/ojs-2.4.5/index.php/capoeira/article/view/32. Acesso em 04 de junho de 2021.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. **A Didáctica das ciências**. Tradução de Magda Sento Se Fonseca. 16ª edição. Campinas: Papirus, 1990.

BARBOSA, Glaucia Bomfim. **O ensino de matemática através de jogos educativos africanos: um estudo de caso em uma turma de educação de jovens e adultos (eja) de uma escola municipal de Aracaju**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2016.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões a matemática**. 1ª ed. São Paulo: moderna. 2010.

BASÍLIO, Guilherme. **O estado e a escola na construção da identidade política moçambicana**. Maputo: Publifix edições, 2014.

BASTOS, Juliano Neto de; DUARTE, Stela Mithá. **políticas educacionais e transformações socioeconómicas no período pós-colonial em Moçambique**. EDUCERE – XIII Congresso Nacional de Educação – PUCPR, IV Seminário Inter. de Representações Sociais, Subjetividade e Educação – SIRSSE e VI Seminário Internacional Profissionalização Docente (Cátedra Unesco), de 28 a 31 de agosto de 2017. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/27758_14288.pdf. Acesso em: 29 de junho de 2021.

BERNARDINO-COSTA, Joaze; GROSFOGUEL, Ramón. **Decolonialidade e perspectiva negra**. Revista Sociedade e Estado, v. 31, n. 1, p. 15-24, 2016.

BINSBERGEN, Wim van. **Board-games and divination in global cultural history**: a theoretical, comparative and historical perspective on mankala and geomancy in Africa and Asia. Quest: An African Journal of Philosophy. 10-04-1999. ISSN 1011-226X. disponível em: http://www.quest-journal.net/shikanda/ancient_models/gen3/mankala/mankala2.htm ou o pdf em: http://history.chess.free.fr/papers/van%20Binsbergen%201997.pdf

BORDA, Orlando Falsas. **Ciencia, compromiso y cambio social**. Compilação: Nicolás Armando Herrera Farfán e Lorena López Guzmán. 2ª edição. Buenos Aires: El Colectivo - Lanzas y Letras - Extensión Libros, 2014. Disponível em: https://www.extension.udelar.edu.uy/wp-content/uploads/2016/12/08_Ciencia_Compromiso_y_Cambio_Social-Fals_Borda.pdf. Acesso em: 03 de julho de 2021.

BORGES, José Silviano; PAIVA, Jéssica Rodrigues de; SILVA, Élida Alves da. **Jogos Mancala - Uma Ferramenta no Ensino de Matemática**. In: Anais do II Simpósio de Matemática e Matemática Industrial - SIMMI'2010, Vol. 1, pp. 51-57. ISSN 2175-7828. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_simmi_2010.pdf

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique**. Recherche en Didactique des Mathématiques, 19/1, 77-124, 1999. Disponível em: https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

BOYER, C. B. Egipto. In: ______. **História da Matemática**. Tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 7 - 17.

BRAGATO, Fernanda Frizzo; CASTILHO, Natalia Martinuzzi. A importância do pós-colonialismo e dos estudos descoloniais na análise do novo constitucionalismo latino-americano. In: **O pensamento pós e descolonial no novo constitucionalismo latinoamericano**. [recurso eletrônico] / organizadores:

Eduardo Manuel Val, Enzo Bello. - Caxias do Sul, RS : Educs, 2014, pp. 11 – 25. Disponível em: https://www.ucs.br/educs/livro/pensamento-pos-e-descolonial-no-novo-constitucionalismo-latino-americano/. Acesso em: 23 de junho de 2021.

BROUSSEAU, Guy. **A etnomatemática e a teoria das situações didácticas**. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 2, pp. 267-281, 2006. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/458. Acesso em: 29 de julho de 2021.

CARVALHO, Dierson Gonçalves de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **Ensino de Área de Figuras Geométricas Planas no Currículo de Matemática do Projovem Urbano**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 123-142, abr. 2015.

CASSINI, Sérvio. **Conceito de ecologia, nicho e habitat**: http://www.inf.ufes.br/~neyval/Gestao_ambiental/Tecnologias_Ambientais2005/Ecologia/CONC_BASICOS_ECOLOGIA_V1.pdf.

CASTELA, Corine. **Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing".** Revista Educación Matemática Vol 28-2, 8-29, 2016.

CASTELA, Corine. **Les praxéologies comme idiosyncrasies institutionnelles. VI congrès international de la TAD**. Autrans, 22-26 janvier 2018. Disponível em: https://citad6.sciencesconf.org/data/pages/Pre_proceedings_citad_8.pdf

CASTELA, Corine. **Un enfoque ecológico de lo didático**. Escola de Altos Estudos - Campo Grande-Brasil 3 de abril 2019. Disponível em: https://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2019/08/Conference_ecologie_Castela.pdf.

CASTELA, Corine. **When praxeologies move from an institution to another one: an epistemological approach of boundary crossing**. In Göller r, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H-G. (Eds.). Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings, pp. 418-425, 2017. Disponível em: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121.

CASTIANO, José P. **Educar para quê? As transformações no sistema de educação em Moçambique**. Maputo: INDE, 2005.

CASTRO, Domingos. **Matemática: enciclopédia Juvenil Ilustrada**. Braga: Edições Técnicas e Culturais, 1995.

CHAACHOUA, H. **T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH**. Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – pp. 5-22. Paris: 2018. Disponível em: https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018.pdf

CHACÓN, A. M. A**. La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques** : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. le 31 Janvier 2008. THÈSE Du Doctorat De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathematiques. 2008, p.361.

CHEVALLARD, Yves. A Teoria Antropológica do Didático face ao Professor de Matemática. In: ALMOULOUD, Saddo Ag (org.); FARIAS, Luiz Marcio Santos (org.); HENRIQUE, Afonso (org.). **Teoria Antropológica do Didático: Princípios e fundamentos**. Curitiba: CRV, 2018. P. 31 – 50.

CHEVALLARD, Yves. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, La Rochelle, 4-11 juillet 1998b; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

CHEVALLARD, Yves. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. Conférence donnée le 1er avril 2001 dans le cadre des XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) tenues à l'Escuela de Magisterio de Huesca (Université de Saragosse). 2001. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15. Acesso em 06 de julho de 2021.

CHEVALLARD, Yves. **Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992. Disponível em: https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/. Acesso em: 19 de julho de 2021.

CHEVALLARD, Yves. **Introdução à teoria antropológica do didático [bilingue]**. Plan et résumé d'un cours donné du 4 au 13 mai 2011 à l'université Bandeirante de São Paulo (Brésil). Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=210. Acesso em: 25 de julho de 2021.

CHEVALLARD, Yves. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique**. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19(2), 221–266, 1999. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/ m

CHEVALLARD, Yves. **La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées**. Dans G. Cirade et al. (Éds), Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société, pp. 27-65, 2017. Disponivel em: https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf.

CHEVALLARD, Yves. **La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique. Le point de vue d'un outsider**. Conférence plénière donnée le 24 mars 2006 au colloque Construction identitaire et altérité : Créations curriculaires et didactique des langues, Université de Cergy-Pontoise, 24 & 25 mars 2006. À paraître. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=70.

CHEVALLARD, Yves. **La transposision didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.** Buenos Aires: AINQUE, 1998a.

CHEVALLARD, Yves. **Les processus de transposition didactique et leu théorisatin**. In. ARSAC G., CHEVALLARD, Y., et al, (org.). La transposition didactique à l'épreuve. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994. p. 135-180. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=114

CHEVALLARD, Yves. **Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation**. Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 41-56, 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

CHEVALLARD, Yves. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. Texte de la conférence plénière donnée à Baeza (Espagne) en octobre 2005 dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. A paru dans les actes de ce congrès : L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didático, Universidad de Jaén, 2007b, pp. 705-746.

CHEVALLARD, Yves. **Pourquoi la transposition didactique**? 1982. Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les Actes de l'année 1981-1982, pp. 167-194. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=103&var_recherche=POURQUOI+LA+TRANSPOSITION+DIDACTIQUE+%3F

CHEVALLARD, Yves. **Prólogo: Uma Ruptura Epistemológica em ato**. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L.M.S; HENRIQUE, A. Teoria Antropológica do Didático: Princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018a.

CHEVALLARD, Yves. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. Lyon, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155. Acesso em: 08 de julho de 2021.

CHEVALLARD, Yves. **Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux.** Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007a, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366.

CHEVALLARD, Yves; STROMSKARG, Heidi. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In: ALMOULOUD, Saddo Ag (org.); GUERRA, Renato Borges (Org.); FARIAS, Luiz Marcio Santos (org.); HENRIQUE, Afonso (org.); NUNES, José Messildo Viana (Org**.). Percurso de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teóricos-metodológicos para a formação**. Volume 1. Curitiba: CRV, 2022.

CHILAÚLE, Arone; MACHANGO, Orlando. **M12 – Matemática 12ª classe – Letras**. Maputo: Texto Editores, Lda. – Moçambique, 2010.

CHILAÚLE, Arone; MACHANGO, Orlando. **M12 – Matemática 12ª classe**. Maputo: Texto Editores, Lda. – Moçambique, 2005.

COSTA, Manoel dos Santos; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Livro didático de matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria**. VIDYA, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010 - Santa Maria, 2010. ISSN 2176-4603 X.

COSTA, V. A.; ARLEGO, M. e OTERO, M. R. **Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad**. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria. Vol. 8, Nº 3, 146 161 (2015)

CRUZ, Teresa Maria; SILVA. **Moçambique: um perfil**. MacArthur Foundation, Fundação Calouste Gulbenkian. 2001. Disponível em: https://www.ces.uc.pt/emancipa/gen/mozambique.html#p1-4

CULIN, Stewart. **Mancala, the national game of Africa**. Annual Report of the U.S. National Museum of Arquiology and Paleontology, University of Pennsylvania. Washington: 1896. pp. 597 – 607. Disponível em: https://www.forgottenbooks.com/en/readbook/MancalatheNationalGameofAfrica_10608142#6

CUNHA, Lázaro. **Contribuição dos povos africanos para o conhecimento científico e tecnológico universal**. Disponível em: http://smec.salvador.ba.gov.br/documentos/contribuicao-povos-africanos.pdf. Acesso em 04 de junho de 2021.

D'AMBROSIO, U. **Matemática, etnomatemática e visões do mundo**. movimento-revista de educação, n. 14, 18 dez. 2013.

DAINA, Audrey et al. Expérimentation et position du chercheur en didactique des mathématiques: réflexions autour du thème du IVème séminaire des jeunes chercheurs de l'ARDM. In: ABBOUD-BLANCHARD, Maha (Org.); FLUCKIGER, Annick (Org.). **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2011 - ARDM - IREM de Paris 7**. Paris, France. 2012. hal-02321090. pp. 57 – 76.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro Didático de Matemática: uso ou abuso?** Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

DORE, Rosemary; SOUZA, Herbert Glauco de. **Gramsci nunca mencionou o conceito de contra-hegemonia**. Cad. Pesq., São Luís, v. 25, n. 3, jul./set. 2018.

DOUADY, Régine. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet**. Recherches En Didactique Des Mathématiques. França, Vol. 7, no 2, p. 5–31. 1986. Disponível em: https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/. Acesso em: 01 de julho de 2021.

DUTRA, Débora; CASTRO, Dominique; MONTEIRO, Bruno. **Educação em ciências e decolonialidade: em busca de caminhos outros**. Monteiro, Bruno. A.P. (Org.), Débora S.A. Dutra (Org.), Suzani Cassiani (Org.), Celso Sánchez (Org.), Roberto D.V.L. Oliveira (Org.). Decolonialidades na Educação em Ciências. 1ª ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019. – (Coleção culturas, direitos humanos e diversidades na educação em ciências)

ESTERMANN, Josef, TAVARES, Manuel e GOMES, Sandra. **Interculturalidade crítica e decolonialidade da educação superior: para uma nova geopolítica**

do conhecimento. Laplage em Revista (Sorocaba), vol.3, n.3, set.-dez. p.17-29, 2017. ISSN:2446-6220. Disponível em: https://laplageemrevista.editorialaar.com/index.php/lpg1/article/view/324. Acesso em: 22 de junho de 2021.

EVES, Howard. A matemática Babilônica e Egípcia. In: _____. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011. p. 57 - 89.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; SOUZA, E. S. (2018). **Reconstrução de praxeologias matemáticas: percurso para desenvolvimento da actividade matemática.** In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L.M.S; HENRIQUE, A. Teoria Antropológica do Didático: Princípios e fundamentos. Curitiba: CRV.

FARRAS, Berta Barquero. **Ecologia de la Modelización Matemática en la ensenanza universitária de las Matematicas**. Tesi de doutorado em Matematica, pela universidade Autonoma de Barcelona, Departamento de Matematica. Barcelona: 2009.

FAUCHER, Luc. **Théorie scientifique**. In: Sciences, technologies et sociétés de A à Z [en ligne]. Montréal: Presses de l'Université de Montréal, 2015 (généré le 29 janvier 2022). Disponível em: http://books.openedition.org/pum/4366.

FRANCISCO, Marcelino. **Ntxuva - O Xadrez Africano (aprenda como jogar)**. Youtube, 18 de abr. de 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=A8R51XKE2aE. Acesso em 29 de maio de 2022.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Esperança: Um Reencontro com a Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7657546/mod_resource/content/1/E5%20-%20Texto%201.pdf. Acesso em: 19 de junho de 2023.

FREIRE, Paulo; MACEDO, Donaldo. **Alfabetização: leitura do mundo leitura da palavra**. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011. Disponível em: https://pdfcoffee.com/alfabetizaao-leitura-do-mundo-leitura-da-palavra-pdf-free.html. Acesso em 19 de junho de 2023. ISBN 978-85-7753-215-5 (recurso eletrônico).

GARCÍA, Francisco Javier; BARQUERO, Berta; FLORENSA, Ignasi; BOSCH, Marianna. **Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didático**. AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática - 2019, 15, 75 – 94.

GASCÓN, Josep. La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 5, nº 2, pp. 11-37, 2003.

GÉRARD, François-Marie; ROEGIERS, Xavier. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Porto: Ed. Porto, 1998.

GERDES, Paulus. Geometria Sona de Angola: Explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia. Vol. 2. Boane: ISTEG, 2014.

GIRALDO, Victor. **Alargando Sentidos: o que queremos dizer por decolonizar currículos em matemática?** RIPEM, v. 11, n.2, 2021pp. 01-08. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2755/1905. Acesso em: 21 de junho de 2021.

GIRALDO, Victor. **Decolonialidade e Educação Matemática.** Rio de Janeiro: Laboratório de Ensino de Matemática - Curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ, campus Nilópolis. Youtube. 2020a. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=S79EDxBlhJk&t=2140s. Acesso em: 23 de junho de 2021. 2:00:35

GIRALDO, Victor. **Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada**. Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Cuiaba/MT: 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php. Acesso em: 28 de junho de 2021.

GIRALDO, Victor; MATOS, Diego; QUINTANEIRO Wellerson. **Entre epistemologias hegemônicas e sabedorias outras: a matemática na encruzilhada**. Revista Latinoamericana de Etnomatemática. Vol. 13, No. 1, de enero-abril de 2020b. Disponível em: https://www.etnomatematica.org/ojs/index.php/RevLatEm/article/view/600. Acesso em: 28 de junho de 2021.

GUAMBE, Gilda. **Módulo 5 de geografia**. Maputo: CEMOQE-Moçambique, 2017. Disponível em: http://ead.mined.gov.mz/site/wp-content/uploads/2020/03/GEOGRAFIA-5.pdf

GUIL. **Mancala**. Átomo. 16.5.21. Disponível em: https://atomo.blogspot.com/2021/05/mancala.html

https://youtu.be/LQfD6dWc1hg

INADE. **IV Festival Nacional dos Jogos Tradicionais**. 27 de setembro de 2016. Facebook: INADE. Disponível em: https://web.facebook.com/hashtag/iv_festival_nacionaldos_jogos_tradicionais. Acesso em: 29 de maio de 2022.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 10ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010e.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 11ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010f.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 12ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010a.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 12ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 8ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010c.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 9ª Classe**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010d.

INDE/MINED. **Matemática, Programa de Letras, II Ciclo**. ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2010b.

INDE/MINED. **Programa das disciplinas do ensino básico 3º ciclo.** ©INDE/MINED – Moçambique. Maputo. 2003.

INDE/MINEDH. **Programas das Disciplinas do 1º Ciclo do Ensino Primário.** INDE/MINEDH – Moçambique. Maputo. 2018.

INDE/MINEDH. **Programas do 2º Ciclo do Ensino Primário.** INDE/MINEDH – Moçambique. Maputo. 2019.

INDE/MINED. **Plano Curricular do Ensino Básico (PCEB) – Objectivos , Políticas, Estrutura, Plano de Estudos, e Estratégias de Implementação**. Maputo: INDE/MINED – Moçambique, 2008. Disponível em: http://www.mined.gov.mz/DN/DINEP/Pages/Plano-Curricular-do-Ensino-B%c3%a1sico.aspx. Acesso em 04 de julho de 2021.

INDE/MINED. **Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG) – Documento Orientador, Objectivos , Política, Estrutura, Plano de Estudos e Estratégias de Implementação**. Maputo: Imprensa Universitária da UEM, 2007. Disponível em: http://www.eln.co.mz/wp-content/uploads/2015/04/programa.pdf. Acesso em: 04 de Julho de 2021.

JUNIOR, J. V.N.; CARVALHO, Edmo Fernando; FARIAS, Luiz Marcio Santos. **As três dimensões do Percurso de Estudo e Pesquisa: teórica, metodológica de pesquisa e dispositivo didático**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.5, pp. 363-373, 2019

KASPARY, Danielly. **Noosfera e assujeitamento, duas noções da teoria antropológica do didático para problematizar o currículo e mudanças curriculares**. RPEM, Campo Mourão, Pr, v.8, n.17, p.229-247, jul.-dez. 2019. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/2010/pdf_364. Acesso em: 24 de julho de 2021.

LIBÂNEO, J. C. Didáctica. 2ª Ed. São Paulo: Cortez, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4559601/mod_resource/content/1/JC%20LIBANEO%20Didatica.pdf. Acesso em: 18 de julho de 2021.

LUDKE, Mega; ANDRE, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora pedagógica e universitária (EPU), 2018.

MACHEL, Samora M. **Educar o homem para vencer a guerra, criar uma sociedade nova e desenvolver a Pátria**. In: Mensagem do Camarada Samora Machel, Presidente da FRELIMO, à 2ª Conferência do Departamento de Educação e Cultura – DEC. Edição do departamento do trabalho ideológico da FRELIMO. Colecção «Estudos e Orientações», N° 2, novembro de 1973. 1970. Transcrição: Fernando A. S. Araújo. Disponível em: https://www.marxists.org/portugues/machel/1970/09/educar.htm. Acesso em: 02 de julho de 2021.

MARTINS, Valdemar; CHIRINDZA, Dino; Humberto. **Manual de Psicopedagogia – Formação de Professores do Ensino Primário e Educação de Adultos**. Maputo – Moçambique, 2018.

MARTOS, Suzana Paula. **A prova dos noves e estimativas de erros**. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2018. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/5539

MELLO, Guiomar Namo de. **Formação inicial de professores para a educação básica uma (re)visão radical**. Revista Iberoamericana de educação. ISSN 1022-6508, Nº 25, 2001, pg. 147-175.

Mensagem ao Povo de Moçambique - por ocasião da tomada de posse do governo de transição em 20 de setembro de 1974. Disponível em: https://pt.b-ok.africa/book/16788412/1bc135

MINEDH. **Plano Estratégico da Educação 2020- 2029**. Maputo: MINEDH – Moçambique, 2020.

MISSAWA, Daniela Dadalto Ambrozine. **O jogo Mancala como instrumento de ampliação da compreensão das dificuldades de atenção**. Dissertação de Mestrado em Psicologia. Universidade federal do espirito santo. Vitoria, 2006.

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. I serie, no 1, de 25 de junho de 1975. **Aprova a Constituição da República Popular de Moçambique**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://gazettes.africa/archive/mz/1975/mz-government-gazette-series-i-dated-1975-06-25-no-1.pdf

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. I serie, no 44, de 2 de novembro de 1990. **Aprova a Constituição da República de Moçambique**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://gazettes.africa/archive/mz/1990/mz-government-gazette-series-i-supplement-dated-1990-11-02-no-44.pdf

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. I serie, no 51, 22 de dezembro de 2004. **Aprova a Constituição da República de Moçambique**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://www.masa.gov.mz/wp-content/uploads/2018/01/Constituicao_republica_mocambique.pdf

MOÇAMBIQUE**.** BOLETIM DA REPÚBLICA. I SÉRIE, Número 150, 5 de agosto de 2021. **Resolução n.º 27/2021: Aprova o Estatuto Orgânico do Instituto Nacional do Desporto, IP, abreviadamente designado por INADE, IP e revoga a Resolução n.º 7/2017, de 31 de julho**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique: Disponível em: https://gazettes.africa/gazettes/mz-government-gazette-series-i-dated-2021-08-05-no-150

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. Lei no 1/2018. I serie no 115, de 12 de junho de 2018. **Lei da revisão pontual da Constituição da Republica de Moçambique**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://reformar.co.mz/documentos-diversos/lei_1-2018_revisao_pontual_constituicao_republica_mocambique_2018.pdf/view

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. Lei nº 18/2018. I serie, no 254, de 28 de dezembro de 2018. **Estabelece o regime jurídico do Sistema Nacional de Educação na Republica de Moçambique**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://mept.org.mz/wp-content/uploads/2020/02/Lei-n%C2%BA-18-2018-28-Dezembro_-SNE.pdf

MOÇAMBIQUE. Boletim da Republica. Lei nº 6/92. I serie, no 19, de 6 de maio de 1992. **Reajusta o quadro geral do Sistema Nacional de Educação (SNE) e adequa as disposições nele contidas**. Maputo: Imprensa Nacional de Moçambique. Disponível em: https://gazettes.africa/archive/mz/1992/mz-government-gazette-series-i-supplement-dated-1992-05-06-no-19.pdf

MOÇAMBIQUE. Boletim da República. Lei nº4/83. I Série, nº 12, de 24 de marco de 1983. **Aprova a Lei do Sistema Nacional de Educação e define os princípios fundamentais na sua aplicação**. Maputo: Imprensa Nacional, 1983. Disponível em: https://www.iese.ac.mz/lib/PPI/IESE-PPI/pastas/governacao/educacao/legislativo_documentos_oficiais/leiSNE.pdf. Acesso em: 01 de julho de 2021.

MOÇAMBIQUE. Boletim da República. Resolução nº 12/97. I Serie nº 23, de 10 de Junho 1997. **Aprova a Política Cultural e Estratégia de sua Implementação**. Maputo: Imprensa Nacional, 1997. Disponível em: https://gazettes.africa/archive/mz/1997/mz-government-gazette-series-i-supplement-no-3-dated-1997-06-10-no-23.pdf. Acesso em: 08 de julho de 2021.

MOÇAMBIQUE. Portal do Governo de Moçambique. **Geografia de Moçambique**. Instituto Nacional de Governo Electrónico (INAGE), 2015. Disponível em: https://www.portaldogoverno.gov.mz/por/Mocambique/Geografia-de-Mocambique. Acesso em: 29 de abril de 2022.

MOÇAMBIQUE. **Regulamento de competição de Ntxuva**. Maputo: Instituto Nacional do Desporto (INADE), sd.

MONDLANE, Eduardo. **Lutar por Moçambique**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1977. Disponível em: https://pt.b-ok.africa/book/12074840/c990c1

MORGADINHO, Stella. **Matemática divertida – livro do aluno**. Maputo: texto editores, Lda – Moçambique, 2021.

MUHACHA, Benney. **Educação em Moçambique nas Zonas Libertadas**. Sopra – Educação, 2021. Disponível em: https://sopra-educacao.com/2021/02/13/educacao-em-mocambique-nas-zonas-libertadas/

MUNANGA, Kabengele. **Origens africanas do Brasil contemporâneo: histórias, línguas, culturas e civilizações**. São Paulo: Global, 2009.

MUOCHA, Matilde. **Estudo sobre o Património Cultural da Província de Maputo**: Artesanato, Literatura Oral e Jogos Tradicionais e seu uso contemporâneo. Lisboa: Fundação fé cooperação, 2019.

MURRAY, H. J. R. **A history of board-games other than chess**. Oxford: The charendon Press, 1952, Chapter 7, pages 158 – 1959.

NETO E., João. **História da matemática**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. Disponível em: https://docplayer.com.br/156643489-Kls-historia-da-matematica-joao-eichenberger-neto-historia-da-matematica.html

NETO N. Francisco A. **Descolonizar a educação: os mestres dos saberes populares e tradicionais no contexto da formação cultural**. Interfaces Científicas – Educação. Aracaju. V.4, N.3, p. 31 – 42, jun. 2016.

NETO, Leonardo Dourado de Azevedo. **“Vem jogar mais eu”: mobilizando conhecimentos matemáticos por meio de adaptações do jogo Mankala Awalé**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do sul. Campo Grande – MS, 2016.

NHÊZE, Ismael Cassamo; PAULO, Luís do Nascimento; LANGA, Heitor. **Matemática: Manual de preparação para o ensino superior 10ª a 12ª classe**. Porto: Plural editores, 2009.

NIVAGARA, Daniel Daniel. **O currículo local como política para a preservação e/ou transformação da cultura rural (do campo)**. Revista Amazônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq/EDUA. Ano 11, Vol XXI, Número 1, Jan-jun, 2018, Pág. 302-320. ISSN 1983-3415 (impressa) - ISSN 2318-8774 (digital)-eISSN 2558 1441 – (On line).

O AFRICANO. **venham conhecer um jogo super divertido, para descontrair a mente. #ntxuva #followme #moçambique**. 15 de março de 2023. Youtuber: @O_AFRICANO. Disponível em: https://youtu.be/LQfD6dWc1hg: Acesso em: 05 de julho de 2023.

ODUM, Eugene. **Fundamentos de Ecologia**. 6ª edição. Editora da Calouste Gulbenkian, 1988. Disponível em: https://pt.br1lib.org/book/1164469/03f5ea

OLIVEIRA, Vanessa Galhardo de C. V. de. **Mancala: um jogo de estratégia contribuindo para o aprendizado da matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (ProfMat). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 2018.

PAIS, Luiz Carlos. **Didáctica da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª edição. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PAIVA, Thais. **Ntxuva, xadrez africano, ensina matemática de forma lúdica**. Centro de Referências de Educação Integral. 2018. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/reportagens/ntxuva-o-xadrez-africano-ensina-matematica-de-forma-ludica/. Acesso em: 08 de julho de 2021.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PEREIRA, R. P. (2016). **Potencialidades do jogo africano Mancala iv para o campo da educação matemática, história e cultura africana**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2016. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/21228

PEREIRA, Rinaldo Pevidor. **O jogo africano Mancala e o ensino de matemática em face da lei Nº 10.639/03**. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2011.

PERREIRA, Rinaldo Pevidor. **O jogo Africano mancala e o ensino de matemática em face da lei nº 10.639/03**. Universaidade Federal do Ceara, Programa de pos-graduacao em educação Brasileira, Mestrado em educação Brasileira. Fortaleza, 2011. Disponivel em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/3223. Acesso em: 08 de julho de 2021

PESSOA, Maria da Conceição L. R.; SANTOS, Elisabete Araújo U. dos; SILVA, António Andrade da. **Desenho Geométrico**. 3ª Edição. Salvador: quarteto, 2010.

PIRES, Dias Leticia. **A construção do conhecimento em crianças com dificuldades em matemática, utilizando o jogo de regras Mancala**.

Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 2009.

PIVA, Elisabete do Carmo Dal. **Diversidades: Todos Somos Um**. EDUCERE – XIII Congresso Nacional de Educação – PUCPR, IV Seminário Inter. de Representações Sociais, Subjetividade e Educação – SIRSSE e VI Seminário Internacional Profissionalização Docente (Cátedra Unesco), de 28 a 31 de agosto de 2017. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/25829_12355.pdf. Acesso em: 18 de junho de 2021.

POLIDORO, Lurdes de Fatima; STIGAR, Robson. **A transposição didáctica: a passagem do saber cientifico para o saber escolar**. Ciberteologia - Revista de Teologia & Cultura - Ano VI, n. 27. 2010. Pp. 153 – 159. Disponível em: https://ciberteologia.com.br/editorial/novo-ano-de-otimismo-e-esperanca/41. Acesso em: 19 de julho de 2021

PORTUGAL. Decreto-Lei no 39.668, de 20 de maio de 1954. **Estatuto dos Indígenas Portugueses, das províncias da Guine, Angola e Moçambique**. Disponível em: https://www.fd.unl.pt/Anexos/Investigacao/7523.pdf.

QUIJANO, Aníbal. '**Colonialidad y modernidad/racionalidad**', Perú Indíg. 13(29), pp. 11-20, 1992. Disponível em: https://www.lavaca.org/wp-content/uploads/2016/04/quijano.pdf. Acesso em: 13 de julho de 2021.

QUIMUENHE, A. **História da educação moçambicana no século xx: lei 4/83 e 6/92 do sistema nacional de educação**. Revista Científica de Educação, v. 3, p. e019011, 29 jul. 2019. Disponível em: http://seer.facmais.edu.br/rc/index.php/RCE/article/view/52

REIS, Maurício de Novais; ANDRADE, Marcilea Freitas Ferraz de. **O pensamento decolonial: análise, desafios e perspectivas**. Revista Espaço Acadêmico – n. 202 – Marco/2018 – mensal.

ROQUE, Tatiana. Matemáticas na Mesopotâmia e no antigo Egito. In: ______. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1a ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar; 2012.

ROSA, Milton e OREY, Daniel Clark. **Interlocuções Polissêmicas entre a Etnomatemática e os Distintos Campos de Conhecimento Etno-x**. Educação em Revista Belo Horizonte, v.30, n.03, p.63-97, julho-setembro, 2014.

SANTOS, Boaventura de Sousa; MENESES Maria Paula. Introdução. In: Boaventura de Souza Santos (Org.); Maria Paula Meneses (Org.). **Epistemologia do Sul**. São Paulo: Cortez Editora, 2010. Disponível em: https://pt.b-ok.africa/book/3522858/ef9ea6

SANTOS, V. M. **Notas desobedientes: decolonialidade e a contribuição para a crítica feminista à ciência**. Psicologia & Sociedade, 30, e200112 1. 2018.

SILVA, Eva Alves da; DELGADO Omar carrasco. **O processo de ensino-aprendizagem e a pratica docente: reflexões**. Rev. Espaço Acadêmico (ISSN 2178-3829), v. 8, n. 2, 2018, pp. 40-52.

SILVA, Fabricio Pereira da; BALTAR, Paula; LOURENCO, Beatriz. **Colonialidade do Saber, Dependência Epistêmica e os Limites do Conceito de Democracia na América Latina**. Revista de Estudos e Pesquisas sobre as Américas V.12 N.1 2018 ISSN: 1984-1639

SILVA, Getúlio Rocha. Uma proposta didáctica para descolonizar o "teorema de Pitágoras" em cursos de licenciaturas em matemática. In: **Descolonizando saberes: a Lei 10.639/2003 no ensino de ciências**. Organizadoras: Bárbara Carine Soares Pinheiro, Katemari Rosa. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. – (Coleção culturas, direitos humanos e diversidade na educação em ciências).

SILVA, Rita Cineia Meneses. M. **A integração de construtos didáticos à prática docente: a malamática para operar com a aritmética básica**. Dissertação (Mestrado em Filosofia e História da Ciência), Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador. 2017.

SPRENGER-CHAROLLES; LAZURE, Roger; GAGNÉ, Gilles; ROPÉ, Françoise. **Propositions pour une typologie des recherches**. in: Perspectives documentaires en sciences de l'éducation. 1987.

SWAHILI TIMES. **Tukumbushe sheria za mchezo huu**. 22 de abril de 2022, 07:01. Twitter: @swahilitimes. Disponível em: https://twitter.com/swahilitimes/status/1517549252926484490. Acesso em: 29 de maio de 2022.

TAHAN, Malba. **As maravilhas da matemática**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A., 1972.

TAIMO, Jamisse Uilson. **Ensino superior em Moçambique: história, política e gestão. Tese de Doutorado em Educação**. Universidade Metodista de Piracicaba, Faculdade de Ciências Humanas. Piracicaba, SP, 2010.

TEMBE, Cristina R. C. A.; MAXAIEIE, Joana; MATABEL, Felícia. **Manual de Didáctica de Língua Portuguesa – Língua Segunda Formação de Professores do Ensino Primário e Educação de Adultos**. Maputo - Moçambique: Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano: DNFP & INDE, 2019. Disponível em: http://ead.mined.gov.mz/manuais/Didatica%20de%20Lingua%20Portuguesa/files/docs/_didactica-lingua-portuguesa.pdf

TETE. Governo da Província de Tete. **Localização Geográfica e Situação Astronómica**. Instituto Nacional de Governo Electrónico (INAGE), 2017. Disponível em: https://www.tete.gov.mz/por/A-Provincia/Geografia2. Acesso em: 29 de abril de 2022.

TOWNSHEND, Philip. **Mankala in Eastern and Southern Africa: a Distributional Analysis.** Azania: Archaeological Research in Africa, 14:1, 109-138, 1979. DOI: 10.1080/00672707909511266. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1080/00672707909511266.

VOOGT, Alex de. **Misconceptions in the history of mancala games: antiquity and ubiquity**. Jogo de tabuleiro Studies Journal Volume 15, Issue 1, pp. 1–12. DOI: 10.2478/bgs-2021-0001.

VUMA, José Pedro; WATCHAVE Ângelo Dias. **Pré-universitário – Matemática 12ª classe**. Maputo – Moçambique: Longman Moçambique, Lda. 2010.

WERNHAM, Brian. **Omweso: The Royal Mancala Game Of Uganda - A General Overview Of Current Research**. In: Jogo de tabuleiro Studies Colloquium, V, 2001, Barcelona. Anais… Barcelona, 2001, p. 1-26. Disponível em: https://fdocuments.in/download/board-games-in-academia-v-omweso-the-royal-game-of-uganda. Acesso em 08 de junho de 2022.

ZALAMENA, Juliana Costa Meinerz. **Colonização e qualidade democrática na África segundo o Democracy Index**. Sinais, n. 22/1 Jan-Jun 2018a, Vitória – Brasil. S ISSN: 1981-3988. Disponível em: https://periodicos.ufes.br/sinais/article/view/17572. Acesso em 24 de junho de 2021.

ZALAMENA, Juliana. **Colonização e qualidade democrática: apontamentos com base no democracy index**. Revista Eletrônica de Ciência Política, vol. 9, n. 1, 2018b. ISSN 2236-451X. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/política/article/view/54493/35206. Acesso em: 24 de julho de 2021.

APÊNDICE

Apêndice 1: Questionário dirigidos aos professores de matemática que lecionam ou lecionaram a disciplina na 12ª classe.

Disponível em: https://terabox.com/s/1uUtS5-CS8MCgK3_9FRG8rQ
Password: walk

Apêndice 2: Questionário aos participantes da experimentação
Disponível em: https://terabox.com/s/1odlJKqT8NGd_-AL5HVYDjg

Apêndice 3: malha quadriculada entregue aos alunos
Disponível em: https://terabox.com/s/1enrqtq0eK5k8SmcrrQ78QQ

Apêndice 4: enunciado da tarefa 1 entregue aos alunos
Disponível em: https://terabox.com/s/1a9n53RLl9fad01Wsw5cEFQ

Apêndice 5: script python que descreve primeira jogada em uma partida de Ntxuva

Disponível em: https://terabox.com/s/1_kHyWphkdeHVWUEO39gIWQ

ANEXOS

Anexo 1: Regulamento de competição de Ntxuva.
Disponível em: https://terabox.com/s/1q2KHW930ZVe1QsPVDn8Hgw
Password: 2lia

Anexo 2: Processo de distribuição de dados – quando o dado termina em uma casa não vazia
Disponível em: https://terabox.com/s/12MMW8Hal8yRpI5nrKv6Jlw
Password: rgpu

Anexo 3: Processo de distribuição de dados – quando o dado termina em uma casa vazia
Disponível em: https://terabox.com/s/1X6sojESfJURLrJB2QRnotw
Password: q2hy

Anexo 4: Partida completa de Ntxuva
Disponível em: https://terabox.com/s/1Wh6oCnk4IenJmHS_oThb9w
Password: 21mf

Anexo 5: Tipos de Mancalas e sua designação a nível do continente Africano
Disponível em: https://terabox.com/s/13aW1tVJYMyWqJNXkEA5IQA
Password: m0jj

Anexo 6: Catalogo de dissertações e teses identificadas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no Google Acadêmico que utilizam qualquer tipo de Mancala como um dos objectos de sua pesquisa.
Disponível em: https://terabox.com/s/15H2ta7MnsLUa_dqeTJsjLg
Password: mdbq

Anexo 7: Protocolo de instrução padrão para apresentação do jogo Mancala aos participantes da pesquisa (MISSAWA, 2006).
Disponível em: https://terabox.com/s/18phTr2-0uU9hAgWPsiv2pg
Password: 4lys

Anexo 8: Protocolo de registo de jogadas por partidas (MISSAWA, 2006).
Disponível em: https://terabox.com/s/1-Up9JFFwuo6UEn68EwNDBQ
Password: 1aok

Anexo 9: Respostas dadas aos participantes a situação problema proposto (MISSAWA, 2006).
Disponível em: https://terabox.com/s/1Vh9DOIUKOVLgZmdsU5BJaA
Password: pbxj

Anexo 10: Protocolo de apresentação do jogo Mancala aos participantes da pesquisa (Pires, 2009).
Disponível em: Link: https://terabox.com/s/1kckn4D6IDtSxJncHhdxqUg
Password: tfml

Anexo 11: Roteiro de Questões sobre o Conhecimento Prévio das Operações Aritméticas e Noção de Conservação implícitas no Jogo Mancala-Kalah (Dias e Brenelli, 2009 citado por Pires, 2009).
Disponível em: https://terabox.com/s/1b7xO-5zS6GXyBXyhq7xjBg
Password: u1of

Anexo 12: Roteiro de Intervenção com o Jogo Mancala-Kalah (Dias e Brenelli, 2008 citado por Pires, 2009).
Disponível em: https://terabox.com/s/1WimLm9foIkbJ0xVFOrPScA
Password: pi16

Anexo 13: Formulário para o registro das partidas do Mancala (Queiroz, Dias, Stursa et al., 2005 citado por Pires, 2009).
Disponível em: Link: https://terabox.com/s/1jyg1m30SBH_d75scpZdyRA
Password: s5db

Anexo 14: Estratégia para trabalhar análise combinatória (Pereira, 2011)
Disponível em: https://terabox.com/s/1eW0-mjZ4ZLqM-al-aEs_HA
Password: jylw

Anexo 15: Exercícios de matemática aplicados antes e depois da intervenção (Barbosa, 2016).
Disponível em: https://terabox.com/s/1xi_5XfgUIvTTzyd7uTEB7A
Password: 1g5b

Anexo 16: As regras do jogo Awalé adaptadas (Neto L., 2016)
Disponível em: https://terabox.com/s/1OlaOVqcyJ3sZWMnb7gCxdw
Password: yzfv

Anexo 17: Actividade escrita com os alunos (Oliveira, 2018)
Disponível em: https://terabox.com/s/1w3LwnUU6-2b-FHpePIgazQ
Password: 9ktr

Anexo 18: Programa da 12ª classe – Matemática
Disponível em: https://terabox.com/s/1gX_H19AJiPbYgDT8NEd72w

Anexo 19: questionário preliminar dirigido aos alunos
Disponível em: https://terabox.com/s/1JHFbmmDLfn-FGRg45KcJNA

Anexo 20: respostas das questões de reflexão
Disponível em: https://terabox.com/s/1OLZAusYeBmenQGvn5n-DPA

Anexo 21: debate da tarefa 1 – parte 1
Disponível em: https://terabox.com/s/1R29PcN163aFs4uib--Qo7Q

Anexo 22: simulação da primeira jogada da tarefa 1 nas alíneas a), b), c), d), e), f), g).
Disponível em: https://terabox.com/s/190cZV1URXxb32v8Us3FeUQ

Anexo 23: descrição dos resultados da tarefa 1 nas alíneas a), b), c), d), e), f), g).
Disponível em: https://terabox.com/s/1y6UioE3VikB8eB2Fq9yT7A

Anexo 24: debate da tarefa 1 – parte 2
Disponível em: https://terabox.com/s/1Yc_HrlMXA2k9bcwZ76PGXQ

Anexo 25: debate da tarefa 1 – parte 3
Disponível em: https://terabox.com/s/1nE9UjhVQh_bUCzbFds8UQA

Anexo 26: debate da tarefa 2 – parte 4. 1
Disponível em: https://terabox.com/s/1KQnoYp4A1aQLsrNqg-iVmQ

Anexo 27: debate da tarefa 2 – parte 4. 2
Disponível em: https://terabox.com/s/1NM72sdsqZTUbHk7sZBgXfg

Anexo 28: debate da tarefa 2 – parte 4. 3
Disponível em: https://terabox.com/s/17iZSwyWAOjOGJ9aqEmtVmg

Anexo 29: quarto dia de debate – o trabalho com a tarefa 3
Disponível em: https://terabox.com/s/18XtC6ev43ADSU2bsvoD7mQ

Anexo 30: quinto dia de debate – o trabalho com a tarefa 4, 5, 6
Disponível em: https://terabox.com/s/1yPFjwAe3VgSPZyEB_nNfSw

Anexo 31: termo de consentimento livre e esclarecido, credencial, carta de apresentação.
Disponível em: https://terabox.com/s/1pzQSn_jHLPrc95-mHGeJmw

Anexo 32: descrição do tema sobre divisibilidade de números naturais (INDE/MINEDH – 2019).
Disponível em: https://terabox.com/s/1r8XarTqYGdW12CciGqYazA

Anexo 33: Programa da 11ª classe – Matemática
Disponível em: https://terabox.com/s/1pa89WjxALYMjwQ4hEnJFLw

BREVE CURRÍCULO DO AUTOR

Domingos Arcanjo António Nhampinga é moçambicano, natural da província da Zambézia, distrito de Mopeia, nascido aos 02 de fevereiro de 1987. É filho de Arcanjo António Nhampinga e de Beatriz Dausse Piriquito – Zambézia/Mopeia.

É Doutor (2023) em Ensino, Filosofa e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia em cooperação com a Universidade Estadual de Feira de Santana – Brasil. Sua grande área é Ciências Humanas. Sua área é Educação. Sua sub-área é Ensino-Aprendizagem. Sua área de concentração é Educação Científica e Formação de Professores. Sua linha de Pesquisa é Ensino de Ciências. Sua especialização é Teoria da Instrução com foco para Didáctica das Ciências e Matemática. Desenvolveu a tese de doutorado intitulada: *contribuição para o estudo das potencialidades do jogo Ntxuva no ensino da matemática: uma proposta para o enriquecimento do currículo local no nível médio do SNE em Moçambique*.

É Mestre em Estatística (2016) pela Universidade Pedagógica – Maputo/Moçambique em cooperação com a Universidade Complutense de Madrid – Espanha. Desenvolveu a dissertação intitulada: *Análise do comportamento de preços de produtos constituintes de uma cesta básica: Estudo baseado nas técnicas de Box-Jenkins e Função de Transferência.*

É Licenciatura e Bacharel em Ensino de Matemática (2011 e 2010) pela Universidade Pedagógica – Quelimane/Moçambique. Desenvolveu a monografia intitulada: *Visão dos estudantes do curso de Bacharelato em Ensino de Matemática sobre o uso do sistema de coordenadas polares*.

Actualmente é docente na Universidade Púnguè – Extensão de Tete desde 2019. Foi docente da extinta Universidade Pedagógica - Delegação de Tete de 2012 à 2019.

Possui experiência de lecionação nos cursos de graduação nos regimes Laboral, Pós-Laboral e Educação à Distância. Desenvolve pesquisas na área de educação e didáctica de Ciências e Matemática. Possuiu diversos artigos, capítulo de livros e livros publicados.

Dados adicionais: Lattes – http://lattes.cnpq.br/0202678327137080 e ORCID - https://orcid.org/0000-0001-9656-2216