



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
TESE DE DOUTORADO



GRUPOS DE TRANÇAS VIRTUAIS, GRUPOS DE TRANÇAS
PLANAS VIRTUAIS E GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

PAULO CESAR CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR

Salvador, BA
Julho de 2023

GRUPOS DE TRANÇAS VIRTUAIS, GRUPOS DE TRANÇAS PLANAS VIRTUAIS E GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

PAULO CESAR CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR

Tese de Doutorado apresentada ao
Colegiado do curso de Doutorado em Ma-
temática da Universidade Federal da Bahia,
como parte dos requisitos necessários à obtenção
do grau de Doutor em Matemática.

Universidade Federal da Bahia

Orientador: Prof. Dr. Oscar Ocampo.

Salvador, BA
Julho de 2023

"Grupos de tranças virtuais, grupos de tranças planas virtuais e grupos cristalográficos"

PAULO CESAR CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR

Tese apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Banca Examinadora

Oscar E Ocampo

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (Orientador - UFBA)

Carolina Pereira

Prof.^a. Dr.^a. Carolina de Miranda e Pereira (UFES)

Daciberg Lima Gonçalves

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (USP)

J. Guaschi

Prof. Dr. John Guaschi (CAEN)

[Signature]

Prof. Dr. Daniel Juan Pineda (UNAM)

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cerqueira dos Santos Júnior, Paulo Cesar

Grupos de tranças virtuais, grupos de tranças planas virtuais e grupos cristalográficos / Paulo Cesar Cerqueira dos Santos Júnior. – Salvador, 11 de Julho de 2023.
67 f.: il.

Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, SALVADOR, BA, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Ocampo

1. Grupo de tranças virtuais. 2. Grupo de tranças planas virtuais. 3. Grupo cristalográfico. I. Ocampo, Oscar. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

*Dedico este trabalho aos
meus pais e a minha esposa,
pela compreensão, atenção e
por toda ajuda.*

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus pela oportunidade de acordar todos os dias e por me dar toda força e proteção para finalizar mais uma etapa.

A minha família por acreditar que a educação é a melhor opção para mudarmos o nosso futuro. Anailtes e Paulo Cesar, meus queridos pais, sem vocês esse sonho não seria possível.

Serei eternamente grato a minha companheira de todas as horas, Cleidinha. Muito obrigado, você é minha maior fonte de inspiração.

Agradeço a todos os amigos que de alguma maneira contribuíram para a realização desse sonho. Em especial quero agradecer a Gilvan, Salvador e Ênio obrigado por me ajudar a superar as dificuldades.

A minha gratidão à Oscar, por todo tempo dedicado na realização desse trabalho ao longo desses anos. Espero ser, um dia, um professor tão bom quanto você. Muito obrigado pelos conselhos e pela confiança.

A todos os professores que tive durante a minha vida. Em especial a Renato e Vinícius, amigos que quero levar durante toda minha vida.

Agradeço a banca examinadora desse trabalho por todas as contribuições e pela disponibilidade.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido.

“Ubuntu: eu sou porque nós somos.”

Resumo

Considere $n \geq 2$. Sejam VB_n (resp. VP_n) o grupo de tranças virtuais (resp. o grupo de tranças puras virtuais) e VT_n (resp. PVT_n) o grupo de tranças planas virtuais (resp. o grupo de tranças planas puras virtuais). Seja Π um dos seguintes grupos quocientes: $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ ou $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ onde $\Gamma_2(H)$ é o subgrupo comutador de H . Nesta tese, mostramos que Π é um grupo cristalográfico, caracterizamos os elementos de ordem finita e as classes de conjugação de elementos em Π . Além disso, realizamos explicitamente alguns grupos de Bieberbach e grupos virtualmente cíclicos infinitos em Π . Finalmente, estudamos outros grupos parecidos com o grupo de tranças (*welded*, *unrestricted*, *flat virtual*, *flat welded* e grupo de tranças virtuais de Gauss) módulo ao respectivo subgrupo comutador em cada caso. Ainda mais, mostramos que os grupos $B_n(M)/\Gamma_k(P_n(M))$, sendo M a esfera finitamente perfurada, $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$, $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ e $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$ são grupos quase cristalográficos.

Palavras-chave: Grupo de tranças virtuais, Grupo de tranças planas virtuais, Grupo cristalográfico.

Abstract

Let $n \geq 2$. Let VB_n (resp. VP_n) be the virtual braid group (resp. the pure virtual braid group), and let VT_n (resp. PVT_n) be the virtual twin group (resp. the pure virtual twin group). Let Π be one of the following quotients: $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ or $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ where $\Gamma_2(H)$ is the commutator subgroup of H . In this thesis, we show that Π is a crystallographic group and we characterize the elements of finite order and the conjugacy classes of elements in Π . Furthermore, we realize explicitly some Bieberbach groups and infinite virtually cyclic groups in Π . Finally, we also study other braid-like groups (welded, unrestricted, flat virtual, flat welded and Gauss virtual braid group) modulo the respective commutator subgroup in each case. Even more, we show that the groups $B_n(M)/\Gamma_k(P_n(M))$, where M is the finitely punctured sphere, $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$, $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ and $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$ are almost-crystallographic group.

Keywords: Virtual braid group, Virtual twin group, Crystallographic group.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
1.1 Grupos cristalográficos e quase cristalográficos	7
1.2 Grupos virtuais	9
1.2.1 O grupo de tranças virtuais	9
1.2.2 O grupo de tranças planas virtuais	14
2 Grupos cristalográficos e os grupos de tranças virtuais	19
2.1 O grupo de tranças virtuais módulo o comutador do subgrupo de tranças puras virtuais	19
2.1.1 Realizando subgrupos de Bieberbach em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$	33
3 Grupos cristalográficos e grupos de tranças planas virtuais	36
4 Resultados gerais e aplicações	43
4.1 Resultados gerais	43
4.1.1 Estrutura dos grupos $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$ e $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$	48
4.2 Produtos quase diretos e grupos de tranças sobre superfícies	51
4.2.1 Quais outros grupos de tranças puras são produtos quase diretos?	53
4.3 Grupos quase cristalográficos	55
4.4 Generalizações do grupo de tranças e os grupos cristalográficos	58
4.4.1 O grupo de tranças loop puras estendido	60
Referências Bibliográficas	62

Introdução

Seja B_n o grupo de tranças de Artin com n cordas. Existem várias generalizações do grupo de tranças de Artin B_n , do ponto de vista geométrico e do ponto de vista algébrico, por exemplo, os *mapping class groups*, grupos de tranças de superfície, grupos de tranças virtuais, grupos de Artin-Tits, grupos de Garside, grupos de tranças planas (twin) e os grupos de tranças planas virtuais.

O grupo de tranças virtuais é um companheiro natural da categoria de nós virtuais, assim como o grupo de tranças de Artin é para os nós e links usuais. Os Teoremas de Alexander e Markov para o grupo de tranças virtuais foram provados por Kamada em [39, 2007]. Notemos que um diagrama de nó virtual é como um diagrama de nó clássico com um tipo extra de cruzamento, chamado de nó virtual. O conceito de nó virtual foi introduzido por Kauffman em veja [40, 1999] e, nesse mesmo artigo, foi introduzido o grupo de tranças virtuais como uma ferramenta para trabalhar com links e nós virtuais. O grupo de tranças virtuais tem uma interpretação em termos de diagramas, que pode ser encontra em [39, 2007], [40, 1999] e [57, 2001]. As tranças virtuais têm chamado a atenção de diversos pesquisadores, por exemplo, suas propriedades homológicas foram estudadas por Vershinin em [57, 2001]; propriedades e aspectos estruturais foram mostrados por Bardakov em [7, 2004] e por Bardakov e Bellingeri em [8, 2009]; e em [16, 2020] os autores Bellingeri e Paris determinaram todos os homomorfismos possíveis de VB_n para S_m , de S_n para VB_m e de VB_n para VB_m onde $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $m \geq 2$ e $n \geq m$.

Os grupos de tranças planas estão ligados ao conceito de *doodle*. Um *doodle* é uma classe de homotopia de uma coleção finita de círculos imersos na 2-esfera sem interseções triplas ou superiores, essa ideia foi introduzida por Fenn e Taylor em [32, 1979] e por Khovanov em [41, 1997]. A noção de um *doodle* foi generalizada para um *doodle* virtual em [13, 2018]. Os grupos de tranças planas virtuais VT_n , juntamente com os grupos de tranças planas puras virtuais, foram introduzidos de maneira abstrata por Bardakov, Singh e Vesnin em [6, 2019] como sendo uma generalização do grupo de tranças planas T_n . O grupo de tranças planas puras virtuais PVT_n é definido como o núcleo da sobrejeção natural de VT_n para S_n . O grupo VT_n desempenha o mesmo papel na teoria de *doodle* virtuais que o grupo de tranças planas T_n desempenha na teoria dos *doodle*. No artigo [51, 2021] Nanda e Singh, provaram os Teoremas de Alexander e Markov para os *doodle* virtuais. No trabalho de Naik, Nanda e Singh (veja [50, 2020]), o grupo de tranças

planas virtuais VT_n e o grupo de tranças planas puras virtuais PVT_n foram estudados com mais detalhes. O grupo de tranças planas virtuais VT_n contém o grupo de tranças planas T_n e o grupo simétrico S_n e, de maneira similar ao grupo de tranças virtuais, possuem uma interpretação geométrica.

Muitos quocientes de grupos de tranças virtuais também são interessantes, em particular, o grupo de tranças soldadas (welded) WB_n , o grupo de tranças irrestritas (unrestricted) virtuais UVB_n , o grupo de tranças flat virtuais FVB_n , o grupo de tranças flat soldadas FWB_n , e o grupo de tranças virtuais de Gauss GVB_n . Para mais detalhes sobre esses grupos veja [10, 2015], [22, 2017], [39, 2007], [40, 1999] e [45, 2022]. Assim como para grupos de tranças virtuais, é muito natural definir quocientes semelhantes para grupos de tranças planas virtuais. Por exemplo, o grupo de tranças planas soldadas foi definido em [6, 2019]. Na Figura 1.4, definimos o grupo de tranças planas de Gauss.

Tratando-se dos grupos cristalográficos, eles desempenham um importante papel no estudo de grupos de isometrias dos espaços Euclidianos. Um grupo cristalográfico livre de torção é chamado de grupo de Bieberbach, esses grupos são importante na geometria Riemanniana, devido a existência de um correspondência entre a classe dos grupos Bieberbach e a classe das variedades Riemanniana compactas planas, via grupo fundamental (veja [56, 2012] e [60, 2011]).

A primeira conexão entre os grupos de tranças e os grupos cristalográficos foi estabelecida por Gonçalves, Guaschi e Ocampo em [35, 2017]. Os autores mostraram que o grupo quociente $B_n/\Gamma_2(P_n)$, do grupo de tranças de Artin B_n pelo subgrupo comutador do grupo de tranças puras de Artin P_n , é um grupo cristalográfico. Além disso, varias propriedades do grupo $B_n/\Gamma_2(P_n)$ foram estudadas em [35, 2017], por exemplo, a torção, as classes de conjugação de elementos de ordem finita e a realização de subgrupos finitos em $B_n/\Gamma_2(P_n)$. Posteriormente os autores Ocampo e Santos Júnior em [54, 2021], estudaram o problema de conjugação de elementos e a realização de grupos virtualmente cíclicos no grupo $B_n/\Gamma_2(P_n)$ e, em [15, 2022], Bellingeri, Guaschi e Makri, mostraram que o grupo de tranças irrestritas virtuais UVB_n contém uma cópia do grupo $B_n/\Gamma_2(P_n)$.

A conexão entre os grupos cristalográficos e os grupos de tranças de Artin foi estendida para outros grupos, por exemplo para os grupos de reflexão complexos arbitrários por Marin em [46, 2016], para os grupos de tranças das superfícies fechadas orientáveis de genus positivos em [36, 2021] e para os grupos de tranças das superfícies perfuradas (orientáveis ou não) por Diniz em [24, 2020]. Recentemente, em [42, 2022], Kumar, Naik e Singh estabeleceram uma relação entre os grupos de tranças planas e os grupos cristalográficos, provando que os grupos $T_n/\Gamma_2(PT_n)$ e T_n/T_n'' , sendo PT_n o grupo de tranças planas puras, são grupos cristalográficos. Também foi provado em [36, Proposition 17, 2021] que se M é a esfera ou uma superfície fechada não orientável então, para cada $n \geq 1$, o grupo quociente $B_n(M)/\Gamma_2(P_n(M))$ não é um grupo cristalográfico.

Dessa forma, é natural se perguntar quais grupos que têm alguma ligação com os

grupos de tranças de Artin possuem algum quociente que seja um grupo cristalográfico. Neste trabalho lidamos com esse problema para o caso dos grupos de tranças virtuais e tranças planas virtuais (e seus quocientes relacionados). Vamos provar que se G é um dos seguintes grupos VB_n , VT_n , WB_n , FVB_n e FWB_n e se N é o respectivo subgrupo puro em cada caso então $G/\Gamma_2(N)$ é um grupo cristalográfico para cada $n \geq 1$. Em cada caso, estudamos aspectos estruturais respectivo quociente cristalográfico. Vale observar que em [5, Section 3] os autores provaram que existe a decomposição $VB_n/\Gamma_2(VP_n) = VP_n/\Gamma_2(VP_n) \rtimes S_n$ e que $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupos cristalográfico, e também estudaram as representações lineares desse grupo. Nesta tese, iremos reprovar a conexão entre grupos de tranças virtuais e grupos cristalográficos e então estudaremos profundamente aspectos estruturais de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. O Capítulo 1 é dedicado as preliminares da tese. Onde encontramos as notações, definições e propriedades dos conceitos utilizados no decorrer do texto, inclusive, as apresentações dos principais grupos abordados nesse trabalho VB_n e VT_n .

No Capítulo 2 estabelecemos uma ligação entre os grupos cristalográficos e os grupos de tranças virtuais, mostrando que o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupo cristalográfico (veja Teorema 2.2). Ainda mais, estudamos os aspectos estruturais desse grupo. Na Proposição 2.3, mostramos que o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ contém uma cópia do grupo $B_n/\Gamma_2(P_n)$. Já no Teorema 2.6 caracterizamos os elementos de ordem finita de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ e nos Teoremas 2.8 e 2.11, estudamos as classes de conjugação dos elementos de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Destacamos que com os Teoremas 2.8 e 2.11 possuímos as condições necessárias e suficientes para determinar se duas palavras são conjugadas em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, com isso, podemos identificar palavras não conjugadas em VB_n (veja o Exemplo 2.12). Além disso, realizamos grupos virtualmente cíclicos em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ no Teorema 2.16 e grupos de Bieberbach no Teorema 2.17.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo no grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Enunciamos e provamos resultados semelhantes aos obtidos para o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ no grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Estabelecemos uma conexão entre os grupos de tranças planas virtuais e os grupos cristalográficos (veja Teorema 3.1) e o restante do capítulo é dedicado a estudar os elementos de ordem finita, as classes de conjugação de elementos e a realização de alguns grupos virtualmente cíclicos em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.

Seja G um grupo sob as seguintes condições. Considere a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1 ,$$

onde $\mathbb{Z}X$ é um grupo Abeliano livre sobre um conjunto finito X e S_n age em $\mathbb{Z}X$ como uma representação de permutação injetiva. No Capítulo 4 caracterizamos os elementos de ordem finita em G (veja Teorema 4.1) e estudamos as classes de conjugação de elementos

em G nos Teoremas 4.3 e 4.4. Para provar esses resultados, usamos equações no grupo Abelian livre $\mathbb{Z}X$ para transformar nossa questão inicial em um problema de encontrar uma solução de um sistema de equações sobre os números inteiros. Os Teoremas 4.1, 4.3 e 4.4 são generalizações de alguns resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3. Além disso, no Teorema 4.15 apresentamos uma condição suficiente para que um grupo possua como quociente um grupo quase cristalográfico (uma generalização dos grupos cristalográficos). Utilizamos esse resultado para mostrar que os grupos $B_n(M)/\Gamma_k(P_n(M))$, sendo M a esfera finitamente perfurada, $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$, $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ e $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$ são grupos quase cristalográficos (veja os Teoremas 4.16, 4.17 e 4.18 respectivamente). Mostramos também nesse capítulo que o grupo $VB_n/\Gamma_2(KB_n)$ não é um grupo cristalográfico para $n \geq 3$ (veja Proposição 4.20).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições iniciais e as notações que utilizaremos no decorrer do texto. Assumiremos que o leitor tem conhecimento sobre grupos. Assim, seja S_n o grupo simétrico definido sobre um conjunto X de n símbolos e fixaremos a seguinte operação sobre o grupo simétrico. Dados $\sigma, \tau \in S_n$ utilizaremos nesse texto a operação dada por $\sigma\tau(x) = \tau(\sigma(x))$ para todo x no conjunto X .

A **série central inferior** $\{\Gamma_i(G)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de um grupo G é definida indutivamente por $\Gamma_1(G) = G$, e $\Gamma_{i+1}(G) = [G, \Gamma_i(G)]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. O próximo lema será usado exaustivamente por nós, durante todo o trabalho.

Lema 1.1. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G . Então $\Gamma_k(H)$ é um subgrupo normal de G .*

Demonstração. Faremos indução em k . Considere $k = 2$, veja que

$$\alpha[a, b]\alpha^{-1} = [\alpha a \alpha^{-1}, \alpha b \alpha^{-1}],$$

para todos $a, b \in H$ e $\alpha \in G$. Pela normalidade de H , temos que $\Gamma_2(H)$ é normal em G . Suponha que para k o lema seja verdadeiro. Por definição, $\Gamma_{k+1}(H) = [\Gamma_k(H), H]$, assim

$$\alpha\Gamma_{k+1}(H)\alpha^{-1} = \alpha[H, \Gamma_k(H)]\alpha^{-1} = [\alpha H \alpha^{-1}, \alpha\Gamma_k(H)\alpha^{-1}],$$

usando a hipótese de indução e o fato de H ser normal em G concluímos a demonstração. \square

Utilizando o Lema 1.1, podemos sempre tomar o quociente de um grupo G por $\Gamma_k(H)$ para todo subgrupo normal H de G . O próximo resultado garante, com certas condições, a existência de uma ação de um quociente de G em um subgrupo H de G .

Lema 1.2. *Seja*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\rho} F \longrightarrow 1,$$

uma sequência exata curta de grupos sendo N um subgrupo normal Abeliano de G . Então, existe um homomorfismo $F \rightarrow \text{Aut}(N)$ definido por $f \mapsto \varphi_f: N \rightarrow N$ tal que $\varphi_f(n) = gng^{-1}$, onde $g \in G$ e $\rho(g) = f$.

Demonstração. Devemos mostrar que o homomorfismo $F \rightarrow \text{Aut}(N)$ está bem definido. Sejam $g_1, g_2 \in G$ tais que $\rho(g_1) = \rho(g_2) = f$. Mostraremos que $g_1ng_1^{-1} = g_2ng_2^{-1}$ para todo $n \in N$. Veja que $m = g_2^{-1}g_1 \in N$ e assim $mnm^{-1}n^{-1} = 1 \in N$ para todo $n \in N$. Assim, $g_1ng_1^{-1} = g_2ng_2^{-1}$ para todo $n \in N$. \square

De acordo com o Lema 1.2, sempre que temos uma sequência exata curta com núcleo Abeliano

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\rho} F \longrightarrow 1,$$

temos uma ação induzida por conjugação, de F em N .

1.1 Grupos cristalográficos e quase cristalográficos

Nesta seção, apresentaremos a definição geométrica dos grupos cristalográficos e dos grupos quase cristalográficos. Também exibiremos uma caracterização algébrica dessas definições, as quais serão bastante úteis para o desenvolvimento do texto. Para mais detalhes, sobre esses grupos, veja [20, 23, 60].

Considere um conjunto G e suponhamos que existe uma terna (G, \cdot, τ_G) , tal que:

1. (G, \cdot) é um grupo;
2. (G, τ_G) é um espaço topológico com a topologia τ_G .
3. As funções $g: G \times G \rightarrow G$ e $q: G \rightarrow G$ dadas por $g(x, y) = xy$ e $q(x) = x^{-1}$ são contínuas.

Nesse caso, diremos que G é um **grupo topológico**. Um grupo topológico G é chamado de **Hausdorff** se (G, τ_G) é Hausdorff. Um subgrupo H de G é dito ser **subgrupo discreto** se visto como subespaço de G é discreto. Além disso, se H é um subgrupo fechado de G , então o conjunto das classes laterais G/H tem a topologia quociente para a projeção $\Pi: G \rightarrow G/H$. Por fim, o subgrupo H é chamado **uniforme** se G/H é compacto.

Um subgrupo discreto e uniforme Π de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ é dito ser um **grupo cristalográfico** de dimensão n . Se, além disso, Π é livre de torção, então Π é chamado um **grupo de Bieberbach** de dimensão n .

Considere um grupo qualquer Φ . Uma **representação integral** de posto n de Φ é um homomorfismo $\Theta: \Phi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Nós dizemos que Θ é uma **representação fiel** se Θ é um monomorfismo.

Existe uma caracterização algébrica dos grupos cristalográficos, usaremos essa caracterização no decorrer desse trabalho. Pelo Lema 8 de [35] temos a seguinte caracterização.

Definição 1.3. *Um grupo Π é dito ser cristalográfico se existe um inteiro $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\zeta} \Phi \longrightarrow 1 \quad (1.1)$$

tal que:

(i) Φ é finito.

(ii) A representação integral $\Theta: \Phi \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, induzida por conjugação em \mathbb{Z}^n e definida por $\Theta(\varphi)(x) = \pi x \pi^{-1}$, onde $x \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi \in \Phi$ e $\pi \in \Pi$ é tal que $\zeta(\pi) = \varphi$, é fiel.

O grupo Φ é o grupo de holonomia de Π e n é a dimensão de Π .

Os grupos de Bieberbach são interessantes pela sua relação com geometria Riemanniana e sistemas dinâmicos. É bastante conhecido (veja [60, Section 3.3]) que, usando os Teoremas de Bieberbach, via o grupo fundamental, existe uma correspondência entre a coleção de grupos de Bieberbach de dimensão m e a coleção de variedades Riemannianas, planas, conexas e compactas de dimensão m .

Uma generalização dos grupos cristalográficos são os grupos quase (almost) cristalográficos. Sejam N um grupo de Lie nilpotente, conexo e simplesmente conexo e C um subgrupo compacto maximal de $\text{Aut}(N)$. Um subgrupo discreto uniforme de $N \rtimes C$ é chamado de **grupo quase cristalográfico** e sua dimensão é igual a dimensão de N . Um grupo quase cristalográfico livre de torção é dito ser um **grupo quase Bieberbach** e o espaço quociente E/N é chamada de *infra-nilmanifold*.

Um **grupo policíclico** é um grupo solúvel o qual todos os seus subgrupos são finitamente gerados. Um **grupo policíclico por finito** é um grupo que possui um subgrupo normal policíclico de índice finito. Pelo Teorema 3.1.3 de [23] temos a seguinte caracterização algébrica para os grupos quase cristalográficos, a qual utilizaremos como definição.

Definição 1.4. *Seja E um grupo policíclico por finito. Então E é quase cristalográfico se possui um grupo nilpotente e não possui subgrupo normal finito não trivial.*

Existe uma correspondência entre os grupos quase Bieberbach e as *infra-nilmanifolds* via grupos fundamentais, veja [3].

1.2 Grupos virtuais

1.2.1 O grupo de tranças virtuais

O **grupo de tranças virtuais** VB_n foi introduzido por Kauffman em [40]. O grupo de tranças virtuais pode ser definido de maneira análoga ao grupo de tranças B_n . Para mais detalhes sobre o grupo de tranças B_n veja [1] e [2]. A diferença, entre o grupo de tranças virtuais e o grupo de tranças clássico, é que dois tipos de cruzamentos são permitidos: os cruzamentos usais de tranças como na Figura 1.1 e o cruzamento virtual visto na Figura 1.2. Para mais detalhes sobre o grupo de tranças virtuais veja os artigos de [51] e [39], onde são dadas interpretações geométricas das tranças virtuais.

O grupo de tranças virtuais tem uma estrutura que pode ser descrita por geradores e relações. Veja a seguir uma apresentação para o grupo VB_n .

Teorema 1.5 (Teorema 4, [8]). *O grupo VB_n admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\sigma_i \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

$$\rho_i \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

- *Relações:*

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i - j| > 1.$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \text{ para } |i - j| > 1.$$

$$\rho_i^2 = 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \text{ para } |i - j| > 1.$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Os elementos σ_i e ρ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, são geometricamente representados pelas Figuras 1.1 e 1.2 respectivamente.

O grupo VB_n contém um cópia do grupo de tranças de Artin B_n . Além disso, a função $\iota: S_n \rightarrow VB_n$ dada por $\iota(\tau_i) = \rho_i$, para $i = 1, \dots, n - 1$, é um homomorfismo (veja [8, Proposição 6]). Assim, o grupo VB_n contém uma cópia do grupo S_n . Com isso, temos a seguinte consequência imediata.

Lema 1.6. *O elemento $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{t-1}$ tem ordem t em VB_n .*

Observação 1.7. *De maneira geral, é possível mostrar que $(\rho_r \rho_{r+1} \dots \rho_{r+t})^{t+2} = 1$ em VB_n para $1 \leq r \leq n - 2$, $t \geq 1$ e $r + t \leq n - 1$.*

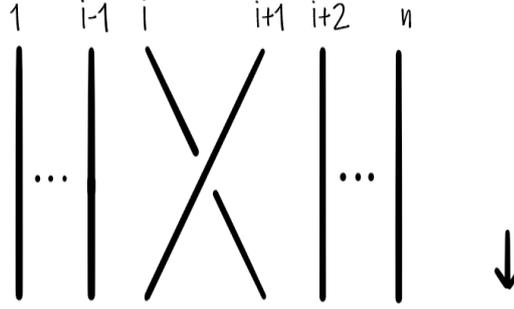


Figura 1.1: Representação geométrica do elemento σ_i em VB_n .

Seja $\pi_P: VB_n \rightarrow S_n$ o homomorfismo dado por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n - 1$ e $\tau_i = (i, i + 1)$. Dessa forma, temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow VP_n \longrightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_P} S_n \longrightarrow 1, \tag{1.2}$$

obtendo, assim, a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow VP_n/\Gamma_2(VP_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_n \longrightarrow 1, \tag{1.3}$$

onde $\bar{\pi}_p$ é o homomorfismo induzido por $\pi_p: VB_n \rightarrow S_n$. O grupo VP_n é chamado **grupo de tranças puras virtuais** em [16].

Considere os elementos

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}; \quad \lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \rho_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2,$$

e os elementos

$$\lambda_{i,j} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1}^{-1} \dots \rho_{j-2}^{-1} \rho_{j-1}^{-1},$$

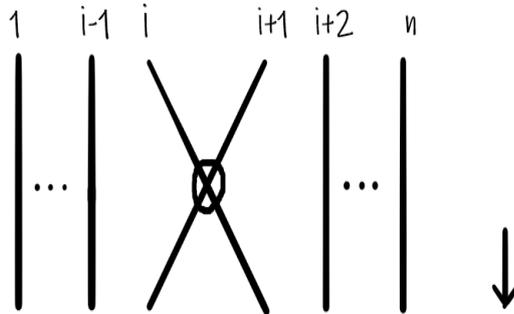


Figura 1.2: Representação geométrica do elemento ρ_i .

$$\lambda_{j,i} = \rho_{j-1}\rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1}\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}^{-1} \cdots \rho_{j-2}^{-1}\rho_{j-1}^{-1},$$

para $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$.

No Teorema 1.8 é dada uma apresentação para o grupo de tranças puras virtuais VP_n . Além disso, foi mostrado em [7, Teorema 2] que VP_n é um produto semidireto de grupos livres (em geral de posto infinito).

Teorema 1.8 (Teorema 9, [8]). *O grupo VP_n admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\lambda_{i,j} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

- *Relações:*

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ para } i, j, k, l \text{ distintos.}$$

$$\lambda_{k,i}(\lambda_{k,j}\lambda_{i,j}) = (\lambda_{i,j}\lambda_{k,j})\lambda_{k,i} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

No Lema 1 de [7] foi mostrado o seguinte resultado.

Lema 1.9. *Seja $1 \leq i < j \leq n$. As seguintes regras de conjugação são satisfeitas em VB_n*

- (i) *Para $k < i - 1, i < k < j - 1$ e $k > j$ temos:*

$$\rho_k\lambda_{i,j}\rho_k^{-1} = \lambda_{i,j} \text{ e } \rho_k\lambda_{j,i}\rho_k^{-1} = \lambda_{j,i}.$$

- (ii) *Para $k = i - 1$ temos:*

$$\rho_{i-1}\lambda_{i,j}\rho_{i-1}^{-1} = \lambda_{i-1,j} \text{ e } \rho_{i-1}\lambda_{j,i}\rho_{i-1}^{-1} = \lambda_{j,i-1}.$$

- (iii) *Para $i < j - 1$ temos:*

$$\rho_i\lambda_{i,i+1}\rho_i^{-1} = \lambda_{i+1,i} \text{ e } \rho_i\lambda_{i,j}\rho_i^{-1} = \lambda_{i+1,j},$$

$$\rho_i\lambda_{i+1,i}\rho_i^{-1} = \lambda_{i,i+1} \text{ e } \rho_i\lambda_{j,i}\rho_i^{-1} = \lambda_{j,i+1}.$$

- (iv) *Para $i + 1 < j$ temos:*

$$\rho_{j-1}\lambda_{i,j}\rho_{j-1}^{-1} = \lambda_{i,j-1} \text{ e } \rho_{j-1}\lambda_{j,i}\rho_{j-1}^{-1} = \lambda_{j-1,i}.$$

- (v) *Para $k = j$ temos:*

$$\rho_j\lambda_{i,j}\rho_j^{-1} = \lambda_{i,j+1} \text{ e } \rho_j\lambda_{j,i}\rho_j^{-1} = \lambda_{j+1,i}.$$

Podemos concluir que a ação por conjugação de $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ em VP_n é descrita como segue: sejam $w \in S_n$ e $\lambda_{i,j}$ um gerador de VP_n , com $1 \leq i \neq j \leq n$, então,

$$w \cdot \lambda_{i,j} = w\lambda_{i,j}w^{-1} = \lambda_{w^{-1}(i),w^{-1}(j)}. \quad (1.4)$$

Um outro homomorfismo de VB_n para S_n tem sido objeto de estudos recentes, veja por exemplo [16]. Seja $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ o homomorfismo dado por $\pi_K(\sigma_i) = 1$ e $\pi_K(\rho_i) = (i, i+1)$ para $i = 1, \dots, n-1$. Com isso, temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow KB_n \longrightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_K} S_n \longrightarrow 1,$$

da qual obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow KB_n/\Gamma_2(KB_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(KB_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_K} S_n \longrightarrow 1. \quad (1.5)$$

A seguir, apresentaremos, em termos de geradores e relações, o grupo KB_n .

Proposição 1.10 (Proposição 3.1, [16]). *O grupo KB_n admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:* Para $1 \leq i < j \leq n$,

$$\delta_{i,j} = \rho_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \sigma_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \rho_i.$$

$$\delta_{j,i} = \rho_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \rho_{j-1} \sigma_{j-1} \rho_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \rho_i.$$

- *Relações:*

$$\delta_{i,j} \delta_{k,l} = \delta_{k,l} \delta_{i,j} \text{ para } i, j, k, l \text{ distintos.}$$

$$\delta_{i,j} \delta_{j,k} \delta_{i,j} = \delta_{j,k} \delta_{i,j} \delta_{j,k} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

No trabalho de Bellingeri e Paris o grupo KB_n ([16]) é estudado com mais detalhes. Os autores, utilizando a estrutura do grupo KB_n , determinam todas as possibilidades para os homomorfismo de VB_n para S_n , S_n para VB_n e VB_n para VB_m .

Observação 1.11. *A função $\iota: S_n \rightarrow VB_n$ dada por $\iota(\tau_i) = \rho_i$, para $i = 1, \dots, n-1$, é um homomorfismo (veja [8, Proposição 6]). Com isso, $VB_n = VP_n \rtimes S_n$ e $VB_n = KB_n \rtimes S_n$. Além disso, o homomorfismo ι induz um homomorfismo $\bar{\iota}: S_n \rightarrow VB_n/\Gamma_2(VB_n)$ o qual é uma seção para as sequências exatas curtas (1.5) e (1.3).*

A partir do grupo VB_n podemos obter outros grupos realizando quocientes ou, equivalentemente, adicionando um relação a apresentação de VB_n . Apresentaremos alguns desses grupos.

O **grupo de tranças soldadas (welded) WB_n** é obtido adicionando a relação $\sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} = \rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-2$ ao grupo VB_n . No Teorema 1.12, é dada uma apresentação para o WB_n . Em [22] o grupo WB_n é denotado por LB_n .

Teorema 1.12 (Corolário 3.15, [22]). *O grupo WB_n admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\sigma_i \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\rho_i \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

- *Relações:*

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i-j| > 1.$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \text{ para } |i-j| > 1.$$

$$\rho_i^2 = 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \text{ para } |i-j| > 1.$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} = \rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

O grupo WB_n admite outras definições equivalentes. Por exemplo, foi mostrado em [31] que o grupo WB_n é isomorfo ao grupo de tranças de permutação BP_n o qual é um subgrupo do grupo de automorfismos de um grupo livre de posto n , $\text{Aut } F_n$, e em [22] o grupo WB_n é chamado de grupo de tranças de *loop* LB_n .

Podemos definir um homomorfismo $\pi_P: WB_n \rightarrow S_n$ dado por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = (i, i+1)$. O núcleo $\ker(\pi_P)$ é chamado de **grupo de tranças soldadas puras** e é denotado por WP_n . Na Proposição 1.13 é dada uma apresentação para WP_n . O grupo WP_n é denotado por PLB_n em [22].

Proposição 1.13 (Corolário 3.19, [22]). *O grupo WP_n admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\alpha_{i,j} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

- *Relações:*

$$\alpha_{i,j} \alpha_{k,l} = \alpha_{k,l} \alpha_{i,j} \text{ para } i, j, k, l \text{ distintos.}$$

$$\alpha_{i,j} (\alpha_{i,k} \alpha_{j,k}) = (\alpha_{i,k} \alpha_{j,k}) \alpha_{i,j} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

$$\alpha_{i,k} \alpha_{j,k} = \alpha_{j,k} \alpha_{i,k} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

Lema 1.14. *A ação de S_n no conjunto $\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ é dada por:*

$$w \cdot \alpha_{i,j} = \alpha_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)},$$

para $w \in S_n$ e $1 \leq i \neq j \leq n$.

Demonstração. Esse resultado segue do Lema 1 de [7] e da Proposição 2 de [55]. \square

O **grupo de tranças irrestrita (unrestricted) virtuais** UVB_n pode ser visto como um quociente do grupo VB_n pelo subgrupo normal gerado pelas relações $\rho_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}$ e $\rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\rho_i$ para $i = 1, \dots, n-2$. Na Definição 2.3 de [10] é dada uma apresentação para UVB_n . O núcleo do homomorfismo $\pi_P: UVB_n \rightarrow S_n$, dado por $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = (i, i+1)$ onde $1 \leq i \leq n-1$, é chamado de **grupo de tranças irrestrita puras virtuais** e é denotado por UVP_n . Uma apresentação de UVP_n é dada no Teorema 2.7 de [10]. Os grupos UVB_n e UVP_n são estudados com mais detalhes em [45].

Para os grupos WB_n e UVB_n não podemos definir homomorfismos similares ao homomorfismo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$, já que para uma função ser um homomorfismo ela deve respeitar as relações do grupo do seu domínio.

1.2.2 O grupo de tranças planas virtuais

Considere um conjunto Q_n de n pontos em \mathbb{R} . Um diagrama plano virtual em n cordas é um subconjunto D de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ consistido de n intervalos chamados de corda com $\partial D = Q_n \times \{0, 1\}$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. A projeção natural $\mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ envia cada corda homeomorficamente ao intervalo unitário $[0, 1]$.
2. O conjunto $V(D)$ de todos os cruzamentos do diagrama D é formado por dois tipos de cruzamento: os cruzamentos planos clássicos representados na Figura 1.3 e o cruzamento virtual representado pela Figura 1.2.

Considere \mathcal{VT}_n o conjunto formado por todos diagramas planos virtuais com n cordas. Em [51, p.3] foi dada uma relação de equivalência \sim em \mathcal{VT}_n e uma operação binária, de forma que \mathcal{VT}_n/\sim se torna um grupo. Além disso, em [51, Proposição 3.3] foi mostrado que o **grupo de tranças planas virtuais** VT_n , introduzido por [6] como uma generalização do grupo de tranças planas T_n , é isomorfo a \mathcal{VT}_n/\sim .

A seguir, temos uma apresentação para o grupo VT_n .

Teorema 1.15 ([50]). *O grupo de tranças planas virtuais VT_n , $n \geq 2$, admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\sigma_i, \rho_i \text{ para } i = 1, \dots, n-1.$$

- *Relações:*

$$\sigma_i^2 = 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i - j| \geq 2. \\
\rho_i^2 &= 1 \text{ para } i = 1, \dots, n - 1. \\
\rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i \text{ para } |i - j| \geq 2. \\
\rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2. \\
\rho_i \sigma_j &= \sigma_j \rho_i, \text{ para } |i - j| \geq 2. \\
\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n - 2.
\end{aligned}$$

Os elementos σ_i e ρ_i , $i = 1, \dots, n - 1$, são geometricamente representados pelas Figuras 1.3 e 1.2 respectivamente.

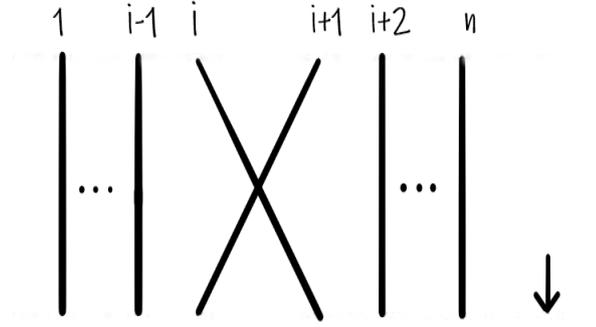


Figura 1.3: Representação geométrica do elemento σ_i em VT_n .

Em [50] foi mostrado que VT_n é residualmente finito e tem centro trivial (Corolário 3.5 e Corolário 4.2).

Seja $n \geq 2$ e seja $\pi: VT_n \rightarrow S_n$ o homomorfismo definido por $\pi(\sigma_i) = \pi(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n - 1$ e $\tau_i = (i, i + 1)$. O grupo de tranças planas puras virtuais PVT_n é definido como sendo o núcleo do homomorfismo π . Assim, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow PVT_n \longrightarrow VT_n \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1. \quad (1.6)$$

Conforme visto em [50], na página 4 desse texto, o grupo de tranças planas virtuais admite uma decomposição como um produto semidireto $VT_n = PVT_n \rtimes S_n$, a função $\iota: S_n \rightarrow VT_n$ dada por $\iota(\tau_i) = \rho_i$, para $i = 1, \dots, n - 1$, é naturalmente uma seção para π . Portanto, uma versão do Lema 1.6 é verdadeira no grupo VT_n .

Lema 1.16. *O elemento $\rho_r \rho_{r+1} \cdots \rho_{r+t}$ tem ordem $t + 2$ em VT_n para $1 \leq r \leq n - 2$, $t \geq 1$ e $r + t \leq n - 1$.*

Demonstração. A prova desse lema segue do fato que $VT_n = PVT_n \rtimes S_n$ onde $\iota: S_n \rightarrow VT_n$ dado por $\iota(\tau_i) = \rho_i$, para $i = 1, \dots, n - 1$, é naturalmente uma seção para π . \square

A seguir, temos uma apresentação para o grupo de tranças planas puras virtuais PVT_n .

Teorema 1.17 (Teorema 3.3, [50]). *O grupo de tranças planas puras virtuais PVT_n em $n \geq 2$ admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\lambda_{i,j} \text{ para } 1 \leq i < j \leq n.$$

- *Relações:*

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ para inteiros distintos } i, j, k, l.$$

Observação 1.18. *Na apresentação de PVT_n dada em [50] o elemento $\lambda_{i,i+1}$ é igual a $\sigma_i\rho_i$, para $i = 1, \dots, n-2$. Na outra mão, na apresentação de VP_n dada em [7] o elemento $\lambda_{i,i+1}$ é igual a $\rho_i\sigma_i^{-1}$, para $i = 1, \dots, n-2$. Notemos que $(\sigma_i\rho_i)^{-1} = \rho_i\sigma_i^{-1}$ para $i = 1, \dots, n-2$.*

No Teorema 4.1 de [50] foi mostrado que PVT_n pode ser escrito como um produto semidireto de grupos livres de posto infinito, para $n \geq 3$. Além disso, foi dada uma descrição do grupo de automorfismo de PVT_n em [50, Teorema 5.6].

Pela observação 3.2 de [50], usando a apresentação do grupo de tranças planas puras virtuais dada no Teorema 1.17, concluímos que a ação dada por conjugação de $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ em PVT_n é dada por:

$$\rho \cdot \lambda_{i,j} = \lambda_{\rho^{-1}(i), \rho^{-1}(j)}, \quad (1.7)$$

onde $\lambda_{j,i} = \lambda_{i,j}^{-1}$ para todo $1 \leq i < j \leq n$.

Não podemos definir um homomorfismo em VT_n de maneira similar ao homomorfismo $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$. Isso acontece porque para uma função $f: VT_n \rightarrow S_n$ ser um homomorfismo ela deve respeitar as relações do grupo, ou seja, $f(r) = 1$ se r é uma relação do grupo VT_n .

Um quociente de VB_n que foi estudado em [10] é chamado de **grupo de tranças flat virtuais** e é denotado por FVB_n . O grupo FVB_n é obtido adicionando a relação $\sigma_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, ao grupo VB_n . Veja também que, como descrito na Figura 1.4, podemos definir FVB_n como sendo um quociente de VT_n pelo subgrupo normal gerado pelas relações:

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-2.$$

Um outro quociente de VB_n , também estudado em [10], é chamado **grupo de tranças flat soldadas virtuais**. De maneira similar, FWB_n pode ser definido como um quociente de WB_n (veja Seção 5.2 de [10]). Também, como descrito na Figura 1.4, podemos definir FWB_n sendo um quociente de FVB_n pelo subgrupo normal gerado pelas relações

$$\rho_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-2.$$

Seja $\pi_P: FWB_n \rightarrow S_n$ (resp. $\pi_P: FVB_n \rightarrow S_n$), onde $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $\tau_i = (i, i+1)$. O **grupo de tranças flat puras soldadas** FWP_n (resp. **grupo de tranças flat puras virtual** FVP_n) é definido como o núcleo de π_P , com isso, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow FWP_n \longrightarrow FWB_n \xrightarrow{\pi_P} S_n \longrightarrow 1,$$

$$(\text{resp. } 1 \longrightarrow FVP_n \longrightarrow FVB_n \xrightarrow{\pi_P} S_n \longrightarrow 1,)$$

a qual nos fornece a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow FWP_n/\Gamma_2(FWP_n) \longrightarrow FWB_n/\Gamma_2(FWP_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_n \longrightarrow 1. \quad (1.8)$$

$$(\text{resp. } 1 \longrightarrow FVP_n/\Gamma_2(FVP_n) \longrightarrow FVB_n/\Gamma_2(FVP_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_n \longrightarrow 1.) \quad (1.9)$$

Apresentações desses grupos podem ser encontradas no parágrafo antes da Proposição 5.5 de [10] para FWP_n e na Proposição 5.1 de [10] para FVP_n .

O **grupo de tranças virtuais de Gauss** GVB_n é o grupo obtido de FVB_n adicionando as relações $\sigma_i \rho_i = \rho_i \sigma_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Seja $\pi_P: GVB_n \rightarrow S_n$, onde $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $\tau_i = (i, i+1)$. O **grupo de tranças virtuais puras de Gauss** GVP_n é o núcleo de π_P . Uma apresentação para GVP_n foi dada na Proposição 5.6 de [10].

O grupo VP_n^+ é o subgrupo de VP_n gerado por $\lambda_{i,j}$ para $1 \leq i < j \leq n$. O grupo VP_n^+ é chamado de **grupo tranças puras virtuais upper** em [55]. Um resultado interessante sobre esse grupo é o seguinte.

Proposição 1.19 (Proposição 5.1, [10]). *O grupo VP_n^+ é isomorfo a FVP_n .*

Usando a relação $\sigma_i^2 = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$, podemos mostrar que $\lambda_{j,i} = \lambda_{i,j}^{-1}$ para $1 \leq i < j \leq n$ em FVB_n . Dessa forma, a ação de S_n em FVB_n por permutação nos índices está bem definida.

Na Figura 1.4, exibimos, em um diagrama, alguns quocientes do grupo de tranças virtuais e do grupo de tranças planas virtuais. O homomorfismo sobrejetivo (seta direcionada) entre dois grupos significa que o contradomínio é obtido, do outro grupo, somente adicionando na apresentação do grupo anterior o conjunto de relações indicado pelo número dado na seta, como segue:

$$(1) \quad \rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-2,$$

$$(2) \quad \sigma_i^2 = 1, \text{ para } i = 1, \dots, n-1,$$

$$(3) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-2,$$

$$(4) \quad \rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\rho_i, \text{ para } i = 1, \dots, n-2,$$

$$(5) \quad \sigma_i\rho_i = \rho_i\sigma_i, \text{ para } i = 1, \dots, n-1.$$

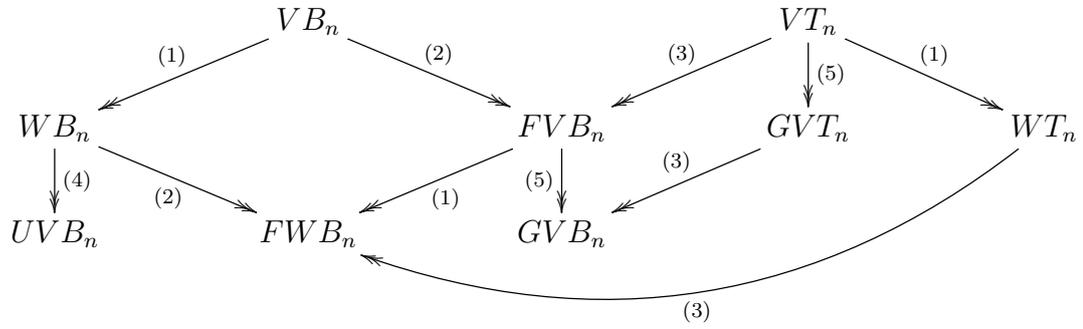


Figura 1.4: Quocientes do grupo de tranças virtual e do grupo de tranças planas virtuais.

Capítulo 2

Grupos cristalográficos e os grupos de tranças virtuais

Neste capítulo, iremos relacionar os grupos de tranças virtuais com os grupos cristalográficos. Mais precisamente, mostraremos que o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupo cristalográfico e estudaremos aspectos estruturais desse grupo.

Dado $\nu \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, a ação de ν em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ é a restrição da ação de S_n em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ ao grupo gerado por $\bar{\pi}_P(\nu)$. Denotaremos uma transversal da ação de ν em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ por T_θ e a órbita de um elemento $\lambda_{i,j}$ por $\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i,j})$ onde $\theta = \bar{\pi}_P(\nu)$.

2.1 O grupo de tranças virtuais módulo o comutador do subgrupo de tranças puras virtuais

Lema 2.1. *O grupo $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é abeliano livre de posto $n(n-1)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.5 o grupo VP_n é gerado por $\lambda_{k,l}$ para $1 \leq k \neq l \leq n$ com as relações:

- $\lambda_{i,j}\lambda_{k,l}\lambda_{i,j}^{-1}\lambda_{k,l}^{-1} = 1$ para i, j, k, l distintos,
- $\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i}$ para i, j, k distintos,

onde, $1 \leq i \neq j \leq n$. Veja que os geradores de $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ são os elementos $\lambda_{k,l}$ para $1 \leq k \neq l \leq n$ e as relações do grupo VP_n são triviais em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$. Logo, $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é abeliano livre de posto $n(n-1)$. \square

A seguir, mostraremos que os grupos cristalográficos e os grupos de tranças virtuais estão relacionados.

Teorema 2.2. *Seja $n \geq 2$. Existe uma seqüência exata curta que cinde:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)} \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_n \longrightarrow 1 \quad (2.1)$$

e o grupo do meio é um grupo cristalográfico.

Demonstração. Consideremos a seguinte seqüência exata curta,

$$1 \longrightarrow VP_n \longrightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_P} S_n \longrightarrow 1,$$

com isso, obtemos a seguinte seqüência exata curta:

$$1 \longrightarrow VP_n/\Gamma_2(VP_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_n \longrightarrow 1.$$

O homomorfismo ι , uma seção para π_P descrita na Observação (1.11), induz um homomorfismo $\bar{\iota}: S_n \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ que é uma seção para $\bar{\pi}_P$, assim obtemos a decomposição $VB_n/\Gamma_2(VP_n) = VP_n/\Gamma_2(VP_n) \rtimes S_n$. No Lema 2.1, mostramos que $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupo abeliano livre gerado por $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, ou seja, $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$.

Para mostrar que $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupo cristalográfico, resta mostrar que a ação de S_n , induzida por conjugação, em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é injetiva (veja Definição 1.3). A ação de S_n em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é induzida pela ação de S_n em VP_n dada em (1.4).

Seja $\beta \in S_n$ tal que $\beta \cdot \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}$ para todo $\lambda_{i,j} \in VP_n/\Gamma_2(VP_n)$, veja que

$$\begin{aligned} \beta \cdot \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j} &\Leftrightarrow \beta \lambda_{i,j} \beta^{-1} = \lambda_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\beta^{-1}(i), \beta^{-1}(j)} = \lambda_{i,j}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Sabemos que $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ é uma base do grupo Abelian livre $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$, dessa forma, concluímos que $\beta = 1$. Portanto, a ação de S_n em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ é injetiva. \square

No artigo [35], os autores mostraram que o grupo de tranças B_n módulo o subgrupo comutador do grupo de tranças puras $\Gamma_2(P_n)$ é um grupo cristalográfico. No próximo resultado mostramos que o grupo $B_n/\Gamma_2(P_n)$ pode ser mergulhado em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.

Proposição 2.3. *O mergulho de B_n em VB_n induz um mergulho de $B_n/\Gamma_2(P_n)$ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.*

Demonstração. Seja $\varphi_n: B_n \hookrightarrow VB_n$ o homomorfismo natural definido por $\sigma_i \mapsto \sigma_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ (veja Proposição 2 de [55]). Em [12, Proposição 4.8] os autores mostraram que o homomorfismo φ_n se restringe a um monomorfismo $P_n \hookrightarrow VP_n$, dado por

$$A_{i,j} \mapsto (\lambda_{j-1,j} \cdots \lambda_{i+1,j}) \lambda_{i,j} \lambda_{j,i} (\lambda_{j-1,j} \cdots \lambda_{i+1,j})^{-1},$$

onde $A_{i,j}$ são os geradores de P_n para $1 \leq i < j \leq n$. Assim, o homomorfismo φ_n induz um homomorfismo $\widetilde{\varphi}_n: B_n/\Gamma_2(P_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. A restrição $\varphi_n|_{P_n}$ induz um monomorfismo $\widetilde{\varphi}_n|_H: P_n/\Gamma_2(P_n) \longrightarrow VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ onde $H = P_n/\Gamma_2(P_n)$. Com isso, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & P_n/\Gamma_2(P_n) & \longrightarrow & B_n/\Gamma_2(P_n) & \longrightarrow & S_n \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \widetilde{\varphi}_n|_H & & \downarrow \widetilde{\varphi}_n & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & VP_n/\Gamma_2(VP_n) & \longrightarrow & VB_n/\Gamma_2(VP_n) & \longrightarrow & S_n \longrightarrow 1. \end{array}$$

Usando o Lema dos cinco concluímos que o homomorfismo $\widetilde{\varphi}_n: B_n/\Gamma_2(P_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é injetivo. \square

Observação 2.4. *Seguindo a Proposição 2.3, concluímos que em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ existem infinitos elementos de ordem finita pertencentes a $B_n/\Gamma_2(P_n)$ (veja [35, Theorem 3]). Os grupos de Bieberbach com grupo de holonomia Abeliano finito realizados em $B_n/\Gamma_2(P_n)$ em [35] e [52] são naturalmente realizados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.*

Provaremos que existem outros elementos de ordem finita (veja o Teorema 2.6 e o Corolário 2.7) e outros subgrupos de Bieberbach (veja o Teorema 2.17) em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.

Neste capítulo iremos estudar o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Uma pergunta natural é o que ocorre com quocientes equivalentes dos grupos definidos no capítulo anterior, por exemplo, os grupos $WB_n/\Gamma_2(WP_n)$ e $UVB_n/\Gamma_2(UVP_n)$ são grupos cristalográficos? Responderemos essa pergunta no próximo resultado, para isso, tendo em vista a Figura 1.4, mostraremos que as relações que diferenciam os grupos WB_n e UVB_n do grupo VB_n pertencem ao $\Gamma_2(VP_n)$.

Teorema 2.5. *Seja $n \geq 2$. Os grupos $WB_n/\Gamma_2(WP_n)$ e $UVB_n/\Gamma_2(UVP_n)$ são isomorfos a $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1}$ e $\rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\rho_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}$ são elementos de $\Gamma_2(VP_n)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-2$ (veja Figura 1.4). Provaremos apenas que $\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \in \Gamma_2(VP_n)$, já que a prova da afirmação $\rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\rho_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1} \in \Gamma_2(VP_n)$ pode ser verificada de maneira similar. Usamos as relações dadas no Teorema 1.5

veja que

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} &= \rho_{i+1}\rho_{i+1}\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\rho_i\rho_i\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\rho_i\rho_i\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}\lambda_{i+1,i}\rho_i\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+1,i}\rho_{i+1}\lambda_{i+1,i}\rho_i\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\rho_i^{-1} \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\lambda_{i,i+1}\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\rho_i \\
&= \rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}^{-1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\rho_i \\
&= \lambda_{i+1,i+2}^{-1}\lambda_{i,i+2}^{-1}\rho_i\lambda_{i,i+2}\lambda_{i+1,i+2}\rho_i \\
&= \lambda_{i+1,i+2}^{-1}\lambda_{i,i+2}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}\lambda_{i,i+2}.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, $\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \in \Gamma_2(VP_n)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-2$. \square

É natural se perguntar para quais valores de $k \in N$ temos os grupos $WB_n/\Gamma_k(WP_n)$ e $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$ isomorfos a $VB_n/\Gamma_k(VP_n)$?

Já sabemos que o grupo $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ possui elementos de ordem finita, pois $S_n \leq VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. No próximo resultado vamos caracterizar os elementos de ordem finita de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ e, além disso, será possível exibir elementos de ordem finita de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ que não pertencem a S_n .

Teorema 2.6. *Seja $2 \leq t \leq n$. Considere uma coleção $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{t-1} \leq n$ de inteiros consecutivos. Sejam $\bar{\pi}_P(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}})^{-1} = \theta$ e T_θ uma transversal da ação de $\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$. O elemento $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}})$, onde $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, tem ordem t em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ se, e somente se, $\sum_{\lambda_{i_1,j_1} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i,j})} a_{i_1,j_1} = 0$ para todo $\lambda_{i,j} \in T_\theta$.*

Demonstração. Por simplicidade vamos assumir $r_i = i$ para todo $i = 1, \dots, t-1$, os outros casos são provados de maneira similar. Pelo Lema 1.6, sabemos que o elemento $\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1}$, para $2 \leq t \leq n$, tem ordem t em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Considere $\bar{\pi}_P(\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1}) =$

Demonstração. Sejam $m, t \in \mathbb{N}$ e n_1, n_2, \dots, n_t inteiros positivos. Uma vez que $\sum_{i=1}^t n_i \leq m$, então $n_i < m$ para todo $i = 1, \dots, t$. Pelo Teorema 2.6, existem $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ e δ_k de ordem n_k em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ para todo $k = 1, \dots, t$, sendo $\delta_k = \prod_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_{\theta_k}(\lambda_{r_k, s_k})} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} \rho_{\sum_{l=1}^{k-1} n_l+1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^k n_l-1}$

para todo $2 \leq k \leq t$, $\delta_1 = \prod_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_{\theta_1}(\lambda_{1,2})} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} \rho_1 \cdots \rho_{n_1-1}$, onde, $r_k = \sum_{l=1}^{k-1} n_l+1$, $s_k = \sum_{l=1}^{k-1} n_l+2$

e $\bar{\pi}_P(\delta_k)^{-1} = \theta_k$. Portanto, o elemento $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_t$ tem ordem $\text{mmc}(n_1, n_2, \dots, n_t)$ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, já que $\rho_{\sum_{l=1}^{k_i-1} n_l+1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^{k_j} n_l-1}$ comuta com $\rho_{\sum_{l=1}^{k_j-1} n_l+1} \cdots \rho_{\sum_{l=1}^{k_j} n_l-1}$ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ para $i \neq j$.

Pela construção do elemento dada nessa prova é claro que $\bar{\pi}_P(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_t)$ é um elemento do tipo ciclo (n_1, n_2, \dots, n_t) . \square

Sejam β_1 e β_2 elementos de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Suponha que β_1 e β_2 se projetam na mesma permutação em S_n , considere a sequência exata curta (1.3), assim, $\beta_2 = \gamma \beta_1$ para algum $\gamma \in VP_n/\Gamma_2(VP_n)$. Suponha que β_1 e β_2 se projetam em permutações de S_n conjugadas, assim, existe $\alpha \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $\alpha \beta_1 \alpha^{-1}$ e β_2 se projetam na mesma permutação em S_n . Suponha que β_1 e β_2 se projetam em permutações de S_n não conjugadas, logo, β_1 e β_2 não podem ser elementos conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Dessa forma, no estudo das classes de conjugação de elementos em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, a menos de conjugação, é suficiente estudar apenas as classes de conjugação dos elementos que se projetam na mesma permutação em S_n .

Com os Teoremas 2.8 e 2.11 demonstrados a seguir, seremos capazes de determinar se quaisquer dois elementos em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ são conjugados. As demonstrações dos Teoremas 2.8 e 2.11 são análogas, respectivamente, as demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2 de [54].

Teorema 2.8. *Seja $k \geq 1$. Sejam $\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k} \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, $\bar{\pi}_P(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})^{-1} = \theta$ e uma transversal T_θ da ação de $\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Os elementos $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, onde, $S_{i_q, j_q} = \sum_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}(\lambda_{i_q, j_q})} a_{r,s}$ para todo $\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que os elementos $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, para isso, precisamos mostrar que existe $X \in VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que

$$X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}) X^{-1} = \prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}),$$

ou equivalentemente,

$$X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}) X^{-1} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})^{-1} = \prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}}.$$

Considere $X = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \in VP_n / \Gamma_2(VP_n)$ onde $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Vejamos quais são as condições sobre $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ para que os elementos $\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})$ sejam conjugados em $VB_n / \Gamma_2(VP_n)$

$$\begin{aligned} X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}) X^{-1} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})^{-1} &= \prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}} \\ \Leftrightarrow X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{\theta(i), \theta(j)}^{-x_{i,j}} &= \prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}}, \end{aligned}$$

como $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$, são geradores do grupo Abeliano livre $VP_n / \Gamma_2(VP_n)$ temos:

$$\begin{aligned} X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}) X^{-1} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})^{-1} &= \prod_{\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta} \lambda_{i_q, j_q}^{S_{i_q, j_q}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{i,j} + a_{i,j} - x_{\theta^{-1}(i), \theta^{-1}(j)} = 0, & \text{se } \lambda_{i,j} \notin T_\theta \\ x_{i_q, j_q} + a_{i_q, j_q} - x_{\theta^{-1}(i_q), \theta^{-1}(j_q)} = S_{i_q, j_q}, & \text{se } \lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Veja que o sistema de equações (4.1) possui solução se, e somente se, os seguintes subsistemas de equações possui solução

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\theta^t(i_q), \theta^t(j_q)} + a_{\theta^t(i_q), \theta^t(j_q)} - x_{\theta^{-(1+m-t)}(i_q), \theta^{-(1+m-t)}(j_q)} = 0 \\ x_{i_q, j_q} + a_{i_q, j_q} - x_{\theta^{-1}(i_q), \theta^{-1}(j_q)} = S_{i_q, j_q} \end{cases}, \quad (2.3)$$

para todo $1 \leq t < m$ e para todo $\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta$ onde $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_q, j_q})|$.

Mostraremos que os subsistemas de equações (4.2) admitem solução. Seja $\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta$ e considere $e_1 = \lambda_{i_q, j_q}$, $e_2 = \lambda_{\theta(i_q), \theta(j_q)}$, \dots , $e_m = \lambda_{\theta^{m-1}(i_q), \theta^{m-1}(j_q)}$, onde, $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_q, j_q})|$. Com isso, a matriz de permutação da orbita de λ_{i_q, j_q} pela ação de θ com respeito ao

conjunto ordenado $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é dada pela matriz M_{i_q, j_q}

$$M_{i_q, j_q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, para todo $\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta$, podemos reescrever os subsistemas de equações (4.2) como segue:

$$(\star) \quad [I_{i_q, j_q} - M_{i_q, j_q}] \begin{pmatrix} x_{i_q, j_q} \\ x_{\theta(i_q), \theta(j_q)} \\ \vdots \\ x_{\theta^{m-1}(i_q), \theta^{m-1}(j_q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{i_q, j_q} + S_{i_q, j_q} \\ -a_{\theta(i_q), \theta(j_q)} \\ \vdots \\ -a_{\theta^{m-1}(i_q), \theta^{m-1}(j_q)} \end{pmatrix}$$

onde, $I_{i_q, j_q} = (Id)_{m \times m}$ e $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_q, j_q})|$. Analisando a matriz dos coeficientes e a matriz estendida associada, nós concluímos que (\star) possui solução se, e somente se, $S_{i_q, j_q} = \sum_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}(\lambda_{i_q, j_q})} a_{r,s}$ para todo $\lambda_{i_q, j_q} \in T_\theta$. \square

Uma consequência do Teorema 2.8 é que existe uma correspondência biunívoca entre as classes de conjugação de elementos de ordem finita em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ e as classes de conjugação de elementos em S_n .

Corolário 2.9. *Sejam β_1 e β_2 elementos de ordem τ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Então, β_1 e β_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ se, e somente se, $\bar{\pi}_P(\beta_1)$ e $\bar{\pi}_P(\beta_2)$ são conjugados em S_n .*

Demonstração. É claro que se β_1 e β_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ então, $\bar{\pi}_P(\beta_1)$ e $\bar{\pi}_P(\beta_2)$ são conjugados em S_n .

Provaremos agora a recíproca. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\bar{\pi}_P(\beta_1) = \bar{\pi}_P(\beta_2)$. Seja $\theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_r$ a decomposição de $\bar{\pi}_P(\beta_1)$ e $\bar{\pi}_P(\beta_2)$ em S_n , onde θ_i é uma transposição. Conjugando $\bar{\pi}_P(\beta_1)$ e $\bar{\pi}_P(\beta_2)$ se necessário, podemos supor que $\bar{\pi}_P(\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_r})^{-1} = \bar{\pi}_P(\beta_1) = \bar{\pi}_P(\beta_2)$ onde $\bar{\pi}_P(\rho_{i_j})^{-1} = \theta_j$. Logo, existem $X = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}$ e $Y = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{b_{i,j}}$ em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ tais que $\beta_1 = X(\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_r})$ e $\beta_2 = Y(\rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_r})$. Como β_1 e β_2 tem ordem finita, concluímos pelo Teorema 2.6 que $\sum_{\lambda_{i_1, j_1} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i,j})} a_{i_1, j_1} = 0$ e $\sum_{\lambda_{i_1, j_1} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i,j})} b_{i_1, j_1} = 0$ para todo $\lambda_{i,j} \in T_\theta$. Portanto, pelo Teorema 2.8, β_1 e β_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. \square

Corolário 2.10. *Sejam H_1 e H_2 subgrupos cíclicos finitos de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Então, H_1 e H_2 são conjugados se, e somente se, os grupos $\bar{\pi}_P(H_1)$ e $\bar{\pi}_P(H_2)$ são conjugados em S_n .*

Demonstração. Sejam $H_1 = \langle \beta_1 \rangle$ e $H_2 = \langle \beta_2 \rangle$ subgrupos cíclicos finitos de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Suponha que $\bar{\pi}_P(\langle \beta_1 \rangle)$ e $\bar{\pi}_P(\langle \beta_2 \rangle)$ são conjugados em S_n , em particular, $\bar{\pi}_P(\beta_1)$ e $\bar{\pi}_P(\beta_2)$ são conjugados em S_n . Então, β_1 e β_2 têm a mesma ordem em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, pois o núcleo $\text{Ker}(\bar{\pi}_P)$ é livre de torção. Logo, pelo Corolário 2.9, β_1 e β_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ e portanto, H_1 e H_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Reciprocamente, se H_1 e H_2 são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ existe $X \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $XH_1X^{-1} = H_2$, logo, $\bar{\pi}_P(X)\bar{\pi}_P(H_1)\bar{\pi}_P(X)^{-1} = \bar{\pi}_P(H_2)$ em S_n . \square

Denotaremos por $C_{S_n}(\theta)$ o centralizador de θ em S_n . Utilizando o próximo resultado podemos determinar a classe de conjugação de qualquer elemento em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.

Teorema 2.11. *Seja $k \geq 1$. Sejam $\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k} \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, $\bar{\pi}_P(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})^{-1} = \theta$ e $c \in C_{S_n}(\theta)$. Considere uma transversal T_θ da ação de $\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ e $\tilde{c} = \rho_{c_1}\rho_{c_2}\dots\rho_{c_k} \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $\bar{\pi}_P(\tilde{c}) = c$. Então, os elementos $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})$ são conjugados se, e somente se,*

$$(i) \ a_{r,s} = b_{r,s}, \text{ para } \lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s}) \text{ onde } \lambda_{r,s} \in T_\theta.$$

$$(ii) \ a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} = b_{r,s} \text{ para } \lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \notin \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s}), \text{ sendo, } a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} = \sum_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)})} a_{i,j}$$

e $\lambda_{r,s} \in T_\theta$.

Demonstração. Para mostrar que $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})$ são conjugados, precisamos encontrar um elemento $X \in VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que

$$X\tilde{c} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})\tilde{c}^{-1}X^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k}), \quad (2.4)$$

onde, $\tilde{c} = \rho_{c_1}\rho_{c_2}\dots\rho_{c_k} \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $\bar{\pi}_P(\tilde{c}) = c$.

Considere $X = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Analisaremos quais são as condições sobre X para que a equação (4.3) seja verdadeira,

$$\begin{aligned} & X\tilde{c} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})\tilde{c}^{-1}X^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k}) \\ \Leftrightarrow & X\tilde{c} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})\tilde{c}^{-1}X^{-1}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ \Leftrightarrow & X \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{c(r),c(s)}^{a_{r,s}}\tilde{c}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})\tilde{c}^{-1}X^{-1}(\rho_{t_1}\rho_{t_2}\dots\rho_{t_k})^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}, \end{aligned}$$

como $\bar{\pi}_P(\tilde{c}) = c$ e $c \in C_{S_n}(\theta)$ temos:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow X \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{c(r),c(s)}^{a_{r,s}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k}) X^{-1} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \cdots \rho_{t_k})^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ &\Leftrightarrow \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{c(r),c(s)}^{a_{r,s}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{\theta(i),\theta(j)}^{-x_{i,j}} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}. \end{aligned}$$

Suponha que $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \notin \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})$. Afirmamos que $a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)}$, o expoente de $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)}$, é igual a um expoente de algum elemento na transversal T_θ . De fato, se $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \notin T_\theta$, então existe $\lambda_{r_1,s_1} \in T_\theta$ tal que $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r_1,s_1})$. Como pelo item (ii) $a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} = \sum_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)})} a_{i,j}$ e $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r_1,s_1})$, concluímos que $a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} = a_{r_1,s_1}$. Assim, a última equação é verdadeira se os seguintes sistemas de equações possuem solução

$$\begin{cases} x_{\theta^k(r),\theta^k(s)} - x_{\theta^{-(1+m-k)}(r),\theta^{-(1+m-k)}(s)} = 0 \\ x_{r,s} + a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} - x_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)} - b_{r,s} = 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

para $1 \leq k < m$, onde $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ e $m = |\mathcal{O}(\lambda_{r,s})|$. Seguindo o mesmo feito na demonstração do Teorema 2.8, podemos concluir que a equação (4.4) é equivalente a:

$$(I) \quad [I_{r,s} - M_{r,s}] \begin{pmatrix} x_{r,s} \\ x_{\theta(r),\theta(s)} \\ \vdots \\ x_{\theta^{m-1}(r),\theta^{m-1}(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} + b_{r,s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})|$, $I_{r,s} = (Id)_{m \times m}$ e $M_{r,s}$ é a matriz de permutação da órbita de $\lambda_{r,s}$ com respeito ao conjunto ordenado $\{e_1 = \lambda_{r,s}, e_2 = \lambda_{\theta(r),\theta(s)}, \dots, e_m = \lambda_{\theta^{m-1}(r),\theta^{m-1}(s)}\}$. Analisando a matriz dos coeficientes e a matriz estendida associada, concluímos que (I) possui solução se, e somente se, $a_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} = b_{r,s}$ provando assim o item (ii). Da mesma forma, se $\lambda_{c^{-1}(r),c^{-1}(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})$ para $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ o sistema (I) tem solução se, e somente se, $a_{(r),(s)} = b_{r,s}$. \square

Sabemos que o problema de conjugação em VB_n não possui solução conhecida, como afirmam Bellingeri e Paris em [16] na p.1342. Nos Teoremas 2.8 e 2.11 damos condições necessárias e suficientes para que um par de palavras em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ seja conjugado. Podemos, então, utilizar esses resultados para encontrar elementos não conjugados em VB_n .

Dados α e β em VB_n considere as permutações $\pi_P(\alpha) = \theta_1$ e $\pi_P(\beta) = \theta_2$ associadas a α e β respectivamente. Os elementos θ_1 e θ_2 podem ser ou não conjugados em S_n , vamos analisar essas duas situações. Se θ_1 e θ_2 não são conjugados em S_n , podemos

concluir que α e β não são conjugados em VB_n . Caso θ_1 e θ_2 sejam conjugados em S_n , até então, nada podemos afirmar sobre α e β . Vejamos, no exemplo a seguir, como podemos utilizar os Teoremas 2.8 e 2.11 para encontrar elementos não conjugados em VB_n .

Exemplo 2.12. *Considere os elementos $\beta = \lambda_{1,2}\lambda_{2,1}\rho_1$ e $\alpha = \lambda_{1,2}\lambda_{3,2}\rho_1\rho_2\rho_1$ em VB_4 . Veja que $\pi_P(\beta) = (1, 2)$ e $\pi_P(\alpha) = (1, 3)$, portanto, $\pi_P(\beta)$ e $\pi_P(\alpha)$ são conjugados em S_4 . Ainda mais, $(2, 3)(1, 2)(2, 3) = (1, 3)$ em S_4 . Em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$ temos que α e $\lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_1$ são conjugados. De fato,*

$$\begin{aligned}\rho_2\alpha\rho_2^{-1} &= \rho_2\lambda_{1,2}\lambda_{3,2}\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2^{-1} \\ &= \lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_2\rho_1\rho_2\rho_1\rho_2^{-1} \\ &= \lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_1\rho_2\rho_1\rho_1\rho_2^{-1} \\ &= \lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_1.\end{aligned}$$

Utilizaremos os Teoremas 2.8 e 2.11 para mostrar que β e $\lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_1$ não são conjugados em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$, conseqüentemente, β e α não serão conjugados em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$. Estudando as órbitas da ação de $\rho_1 = \theta$ na base de $VP_4/\Gamma_2(VP_4)$ temos:

$$\mathcal{O}_\theta(\lambda_{1,2}) = \{\lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}\} \text{ e } \mathcal{O}_\theta(\lambda_{2,3}) = \{\lambda_{2,3}, \lambda_{1,3}\}.$$

Considerando um transversal que contém $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{2,3}$ da ação de θ na base de $VP_4/\Gamma_2(VP_4)$ e utilizando o Teorema 2.8, concluímos que β é conjugado a $\lambda_{1,2}^2\rho_1$ e $\lambda_{1,3}\lambda_{2,3}\rho_1$ é conjugado a $\lambda_{2,3}^2\rho_1$.

Para finalizar, utilizaremos o Teorema 2.11 para mostrar que $\lambda_{1,2}^2\rho_1$ e $\lambda_{2,3}^2\rho_1$ não são conjugados em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$. Primeiro observe que $C_{S_4}(\theta) = \{(3, 4)\}$. Considere $\bar{c} \in VB_4/\Gamma_2(VP_4)$ tal que $\bar{\pi}_P(\bar{c}) = c \in C_{S_4}(\theta)$, por exemplo, tome $\bar{c} = \rho_3$. Como $\lambda_{c^{-1}(1), c^{-1}(2)} = \lambda_{1,2} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{1,2})$, devemos ter, pelo item (i) do Teorema 2.11, $a_{1,2} = b_{1,2}$, sendo $a_{1,2}$ o expoente de $\lambda_{1,2}$ e $b_{1,2}$ o expoente de $\lambda_{1,2}$ em $\lambda_{1,2}^2\rho_1$ e $\lambda_{2,3}^2\rho_1$, respectivamente. Visto que $a_{1,2} = 2$ e $b_{1,2} = 0$, concluímos que $\lambda_{1,2}^2\rho_1$ e $\lambda_{2,3}^2\rho_1$ não são conjugados em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$. Portanto, β e α não são conjugados em $VB_4/\Gamma_2(VP_4)$.

Teorema 2.13. *Seja H um subgrupo de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ isomorfo a S_n . Então, H e $\bar{\iota}(S_n)$ são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.*

Demonstração. O grupo $\bar{\iota}(S_n)$ é gerado por ρ_i , onde $i = 1, \dots, n-1$. Como H é isomorfo a S_n , podemos supor que H é gerado por α_r , onde $\alpha_r^2 = 1$ para todo $r = 1, \dots, n-1$. Ainda mais, $\bar{\pi}_P(\alpha_r) = (r, r+1)$. Dessa forma, existem $c_{i,j}^r \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha_r = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r$ para todo $r = 1, \dots, n-1$. Mostraremos que existe $X \in VP_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $X\rho_rX^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r$ para cada $r = 1, \dots, n-1$.

Considere $\bar{\pi}_P(\alpha_r) = \bar{\pi}_P(\rho_r) = \theta_r$ e $X = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}}$. Vamos analisar quais são as condições sobre $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ para que $X\rho_r X^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r$ para cada $r = 1, \dots, n-1$, veja que:

$$\begin{aligned} X\rho_r X^{-1} &= \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r \Leftrightarrow X\rho_r X^{-1} \rho_r^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \\ &\Leftrightarrow X \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{\theta_r(i), \theta_r(j)}^{-x_{i,j}} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \\ &\Leftrightarrow \left\{ x_{i,j} - x_{\theta_r^{-1}(i), \theta_r^{-1}(j)} = c_{i,j}^r, \right. \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Seja T_{θ_r} um transversal para ação de ρ_r em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, dessa forma, temos

$$X\rho_r X^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r \Leftrightarrow \begin{cases} x_{t,q} - x_{\theta_r(t), \theta_r(q)} = c_{t,q}^r \\ x_{\theta_r(t), \theta_r(q)} - x_{t,q} = c_{\theta_r(t), \theta_r(q)} \end{cases}, \quad (2.6)$$

para todo $\lambda_{t,q} \in T_{\theta_r}$. De maneira análoga ao feito para o sistema de equações (4.2), podemos concluir, o sistema de equações (2.6) possui solução se, e somente se, $c_{\theta_r(t), \theta_r(q)} + c_{t,q} = 0$. Veja que $\alpha_r = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}^r} \rho_r$ tem ordem finita, portanto, pelo Teorema 2.6, $c_{\theta_r(t), \theta_r(q)} + c_{t,q} = 0$. Logo, para todo $1 \leq r \leq n-1$ o sistema de equações (2.6) possui solução. Obtemos uma solução do sistema considerando $x_{\theta_r(t), \theta_r(q)} = x_{t,q} + c_{\theta_r(t), \theta_r(q)}^r$ em (2.6). Agora devemos encontrar um único X que satisfaz a equação (2.6) para todo $r = 1, \dots, n-1$.

Sejam $T_{\theta_{r_1}}$ e $T_{\theta_{r_2}}$ transversais da ação de θ_{r_1} e de θ_{r_2} em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$, respectivamente, onde, $\lambda_{1,2} \in T_{\theta_{r_1}}$ e $1 \leq r_1 \neq r_2 \leq n-1$. Veja que existe $\lambda_{t_1, q_1} \in T_{\theta_{r_2}}$ tal que $\lambda_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)} \in \mathcal{O}_{\theta_{r_2}}(\lambda_{t_1, q_1})$. Levando em consideração a solução do sistema (2.6) para cada r , temos $x_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)} = c_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)}^{r_1} + x_{1,2}$. Como $\lambda_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)} \in \mathcal{O}_{\theta_{r_2}}(\lambda_{t_1, q_1})$, temos:

$$x_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)} = c_{\theta_{r_2}(t_1), \theta_{r_2}(q_1)}^{r_2} + x_{t_1, q_1},$$

logo,

$$x_{t_1, q_1} = -c_{\theta_{r_2}(t_1), \theta_{r_2}(q_1)}^{r_2} + c_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)}^{r_1} + x_{1,2}.$$

Por outro lado, existe $\lambda_{t_2, q_2} \in T_{\theta_{r_1}}$ tal que $\lambda_{t_1, q_1} \in \mathcal{O}_{\theta_{r_1}}(\lambda_{t_2, q_2})$. Novamente, levando em consideração a solução do sistema (2.6) para cada r e que $\lambda_{t_1, q_1} \in \mathcal{O}_{\theta_{r_1}}(\lambda_{t_2, q_2})$ temos:

$$x_{t_2, q_2} = -c_{\theta_{r_1}(t_2), \theta_{r_1}(q_2)}^{r_1} - c_{\theta_{r_2}(t_1), \theta_{r_2}(q_1)}^{r_2} + c_{\theta_{r_1}(1), \theta_{r_1}(2)}^{r_1} + x_{1,2}.$$

Seguindo essa ideia, encontraremos um X tal que $X\rho_rX^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_r} \rho_r$ para todo $r = 1, \dots, n-1$. Dessa forma, H e $\bar{i}(S_n)$ são conjugados em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. \square

Dado um homomorfismo $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$, α é determinado pela imagem do gerador x de \mathbb{Z} . Ainda mais, existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ com $\text{mdc}(n, k) = 1$ tal que $\alpha(x) = \alpha_k$, onde, $\alpha_k: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é dada por $\delta \mapsto k\delta$.

Agora estamos interessados em realizar grupos virtualmente cíclico em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. A classificação de subgrupos virtualmente cíclicos em um grupo G é um problema interessante por conta própria, além de nos ajudar a entender a estrutura do grupo G . A definição de grupo virtualmente cíclico é apresentada a seguir e pode ser encontrada na introdução de [29].

Definição 2.14. *Um grupo G é virtualmente cíclico se tem um subgrupo cíclico H de índice finito.*

Visto que todo grupo finito é virtualmente cíclico, estamos interessados em grupos virtualmente cíclicos infinitos. Existem dois tipos de grupos virtualmente cíclicos infinitos, os grupos virtualmente cíclicos infinitos dados pelo produto semidireto e os dados pelo produto *amalgamado*, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 2.15 ([37, Theorem 17]). *Seja G um grupo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) G é um grupo com duas extremidades (*with two ends*).
- (b) G é um grupo virtualmente cíclico infinito.
- (c) G tem um subgrupo normal finito F tal que G/F é isomorfo a \mathbb{Z} ou ao grupo diedral infinito $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Equivalentemente, G é da forma:

- (i) $F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ para alguma ação $\theta \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, \text{Aut}(F))$, ou
- (ii) $G_1 *_F G_2$, onde, $[G_i : F] = 2$, para $i = 1, 2$, onde G_1 , G_2 e F são grupos finitos.

O Teorema 2.15 é bem conhecido, boa parte da prova das primeiras afirmações é devida a Epstein [25] e Wall [59], a prova da implicação (c) implica (b) e a segunda parte pode ser encontrada em [37]. A seguir, realizaremos subgrupos virtualmente cíclicos em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ obtidos através do produto semi direto.

Teorema 2.16. *Seja $n \geq 2$. Então, para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\text{mdc}(n, k) = 1$, o grupo virtualmente cíclico $\mathbb{Z}_n \rtimes_{\alpha_k} \mathbb{Z}$ pode ser realizado em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$.*

Demonstração. Mostraremos que existem elementos A e B em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tais que $A^n = 1$, $BAB^{-1} = A^k$ e $\mathbb{Z} = \langle B \rangle$. Considere $A = \rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1}$, dessa forma, $A^n = 1$. Suponha que exista $B \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $BAB^{-1} = A^k$, logo, $\bar{\pi}_P(BAB^{-1}) = \bar{\pi}_P(A^k)$. Como, por hipótese, $\text{mdc}(n, k) = 1$, os elementos $\bar{\pi}_P(A)$ e $\bar{\pi}_P(A^k)$ são conjugados em S_n . Então, existe $\gamma \in S_n$ tal que $\gamma\bar{\pi}_P(A)\gamma^{-1} = \bar{\pi}_P(A^k)$. Considere $\tilde{\gamma}$ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $\bar{\pi}_P(\tilde{\gamma}) = \gamma$.

Seja $B = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \tilde{\gamma}$. Vamos analisar quais são as condições sobre $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$, onde $1 \leq i \neq j \leq n$, para que $BAB^{-1} = A^k$ e $\mathbb{Z} = \langle B \rangle$. Para que $\mathbb{Z} = \langle B \rangle$, basta considerar B de ordem infinita. Por outro lado, $BAB^{-1} = A^k$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} BAB^{-1} = A^k &\Leftrightarrow \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \tilde{\gamma} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1}) \tilde{\gamma}^{-1} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{-x_{i,j}} = (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k \\ &\Leftrightarrow \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \tilde{\gamma} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1}) \tilde{\gamma}^{-1} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{-x_{i,j}} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^{-k} = 1. \end{aligned}$$

Como $\bar{\pi}_P(\tilde{\gamma}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})\tilde{\gamma}^{-1}) = (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k$, existem $c_{i,j} \in \mathbb{Z}$, onde $1 \leq i \neq j \leq n$, tais que $\tilde{\gamma}(\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})\tilde{\gamma}^{-1} = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k$. Assim, considerando $\theta = \bar{\pi}_P((\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k)$ temos:

$$\begin{aligned} BAB^{-1} = A^k &\Leftrightarrow \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{-x_{i,j}} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^{-k} = 1 \\ &\Leftrightarrow \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{\theta(i),\theta(j)}^{-x_{i,j}} = 1. \end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos o seguinte sistema de equações,

$$\left\{ x_{i,j} + c_{i,j} - x_{\theta^{-1}(i),\theta^{-1}(j)} = 0, \right.$$

para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Esse sistema de equações é equivalente aos seguintes subsistemas de equações,

$$\left\{ \begin{aligned} x_{r,s} + c_{r,s} - x_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)} &= 0 \\ x_{\theta^m(r),\theta^m(s)} + c_{\theta^m(r),\theta^m(s)} - x_{\theta^{m-1}(r),\theta^{m-1}(s)} &= 0 \end{aligned} \right. , \quad (2.7)$$

para $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ e $1 \leq m < |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})|$. O sistema de equações (2.7) possui solução se, e somente se, $c_{r,s} + c_{\theta(r),\theta(s)} + \dots + c_{\theta^l(r),\theta^l(s)} = 0$ para $l = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})| - 1$ e $\lambda_{r,s} \in T_\theta$. Veja que

$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{c_{i,j}} (\rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1})^k$ tem ordem finita e portanto, pelo Teorema 2.6, $c_{r,s} + c_{\theta(r),\theta(s)} + \dots + c_{\theta^l(r),\theta^l(s)} = 0$. Logo, o sistema de equações (2.7) possui solução para todo $\lambda_{r,s} \in T_\theta$. Dessa forma, existe $B \in VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ tal que $BAB^{-1} = A^k$. \square

2.1.1 Realizando subgrupos de Bieberbach em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$

No próximo resultado exibimos explicitamente subgrupos de Bieberbach em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ com grupo de holonomia cíclico. A demonstração do próximo teorema é análoga a demonstração do Teorema 3 de [36].

Teorema 2.17. *Seja G_n o subgrupo de S_n gerado por $(1, n, n-1, \dots, 2)$. Existe um subgrupo de Bieberbach \widetilde{G}_n em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ de dimensão $n(n-1)$ e grupo de holonomia G_n . Ainda mais, o centro de \widetilde{G}_n é um grupo abeliano livre de posto $n-1$.*

Demonstração. Sejam $\alpha_{n-1} = \rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1}$, $\tau = \bar{\pi}_P(\alpha_{n-1}) = (1, n, n-1, \dots, 2)$ e G_n o subgrupo de S_n gerado por τ . Já sabemos pelo Lema 1.6 que $\alpha_{n-1}^n = 1$ em $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$. Usando a ação de α_{n-1} em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ temos:

$$(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^n = \prod_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{r,s}. \quad (2.8)$$

Para simplificar a notação, tome $\prod_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{r,s} = O_{1,2}$. Considere os conjuntos $X = \{\lambda_{1,2}\alpha_{n-1}, \lambda_{i,j}^n \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ e $Y = \{O_{1,2}, \lambda_{i,j}^n \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Sejam \widetilde{G}_n o subgrupo de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ gerado por X e L o subgrupo de $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ gerado por Y . Dessa forma, a função $\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}} : \widetilde{G}_n \rightarrow G_n$ é sobrejetiva e, pela equação (2.8), L é um subgrupo de \widetilde{G}_n . Ainda mais, $L = \ker(\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}})$. De fato, pela construção de Y já temos $L \subset \ker(\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}})$. Por outro lado, dado $w \in \ker(\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}})$, podemos escrever w da seguinte maneira:

$$w = (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^m \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{nt_{i,j}},$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $t_{i,j} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \neq j \leq n$. Como $w \in \ker(\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}})$, temos que n divide m , assim,

$$\begin{aligned} w &= ((\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^n)^{\frac{m}{n}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{nt_{i,j}} \\ &= O_{1,2}^{\frac{m}{n}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{nt_{i,j}} \in L. \end{aligned}$$

Logo, temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow \widetilde{G}_n \xrightarrow{\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}}} G_n \longrightarrow 1.$$

O grupo L é um subgrupo de $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$. O conjunto

$$Y' = \{O_{1,2}, \lambda_{i,j}^n \mid 1 \leq i \neq j \leq n \text{ e } (i,j) \neq (1,2)\},$$

é um base para o grupo L , pois $\lambda_{1,2}^n = O_{1,2}^n \prod_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{i,j}^{-n}$ onde $(i,j) \neq (1,2)$. Logo, L é abeliano livre de posto $n(n-1)$. Usando a ação de G_n em L , a qual é uma restrição da ação de S_n em $VP_n/\Gamma_2(VP_n)$, concluímos que \widetilde{G}_n é um grupo cristalográfico de dimensão $n(n-1)$ e holonomia G_n . Resta mostrar que \widetilde{G}_n é livre de torção.

Seja $w \in \widetilde{G}_n$ um elemento de ordem finita. Como L é livre, a ordem de w é igual a ordem de $\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}}(w)$. Como $\bar{\pi}_{P|_{\widetilde{G}_n}}(w)^n = 1$, pois G_n tem ordem n , concluímos que $w^n = 1$. Usando a ação de G_n em L , garantimos a existência de $P \in L$ e $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tais que

$$w = P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k.$$

Podemos escrever o elemento P na base Y' , fazendo isso temos:

$$P = (O_{1,2})^{t_{1,2}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \lambda_{i,j}^{nt_{i,j}},$$

onde, $(i,j) \neq (1,2)$ e $t_{x,y} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq x \neq y \leq n$. Dessa maneira, obtemos

$$\begin{aligned} 1 = w^n &= P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k \cdots P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k \\ &= P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-k} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{2k} P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-2k} \\ &\quad \cdots (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{(n-1)k} P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-(n-1)k} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{nk} \\ &= P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-k} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{2k} P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-2k} \\ &\quad \cdots (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{(n-1)k} P(\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-(n-1)k} O_{1,2}^k. \end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k O_{1,2} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-k} &= (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^k \prod_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{r,s} (\lambda_{1,2}\alpha_{n-1})^{-k} \\ &= \prod_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{r,s} \\ &= O_{1,2}, \end{aligned}$$

assim, o expoente de $\lambda_{1,2}$ é igual a $n \left(\sum_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} t_{r,s} \right) + k$. Sabemos que $w^n = 1$ e L é livre de torção, assim,

$$n \left(\sum_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} t_{r,s} \right) + k = 0.$$

Como $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $t_{r,s} \in \mathbb{Z}$, temos uma contradição. Portanto, não existe w em \widetilde{G}_n de ordem finita. Assim \widetilde{G}_n é um grupo de Bieberbach de dimensão $n(n-1)$ e com grupo de holonomia G_n .

Para calcular o centro de \widetilde{G}_n usaremos o Lema 5.2 de [56], o qual garante que o centro de \widetilde{G}_n é formado pelos elementos de L que são fixos pela ação de G_n . Usando a base Y' de L concluímos que:

$$\left\{ \prod_{\lambda_{r,s} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2})} \lambda_{r,s}, \prod_{\lambda_{x,y} \in \mathcal{O}_\tau(\lambda_{t,q})} \lambda_{x,y}^n \mid \lambda_{t,q} \in T_\tau \setminus \mathcal{O}_\tau(\lambda_{1,2}) \right\},$$

é uma base para o centro de \widetilde{G}_n , onde T_τ é um transversal da ação de G_n em L . Veja que $\#T_\tau = n - 1$ e portanto, o centro de \widetilde{G}_n é um grupo abeliano livre de posto $n - 1$. \square

Capítulo 3

Grupos cristalográficos e grupos de tranças planas virtuais

Lembramos que o grupo de tranças virtuais puras PVT_n é definido como sendo o núcleo do homomorfismo $\pi: VT_n \rightarrow S_n$ dado por $\pi(\sigma_i) = \pi(\rho_i) = (i, i + 1)$. A sequência exata curta que cinde (1.6) fornece, para cada $n \geq 2$, a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow PVT_n/\Gamma_2(PVT_n) \longrightarrow VT_n/\Gamma_2(PVT_n) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1. \quad (3.1)$$

Notemos que ι , a seção de π descrita no parágrafo abaixo da equação (1.6), induz um homomorfismo $\bar{\iota}: S_n \rightarrow VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ o qual é uma seção para $\bar{\pi}$, assim, nós obtemos a decomposição $VT_n/\Gamma_2(PVT_n) = PVT_n/\Gamma_2(PVT_n) \rtimes S_n$.

Neste capítulo, relacionaremos o grupo de tranças planas VT_n com os grupos cristalográficos. Mostraremos que o grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é um grupo cristalográfico e, além disso, estudaremos aspectos estruturais do grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.

No primeiro resultado desse capítulo provaremos que $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é um grupo cristalográfico de dimensão $n(n-1)/2$ e grupo de holonomia S_n .

Teorema 3.1. *Seja $n \geq 2$. Existe uma sequência exata curta que cinde:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n(n-1)/2} \longrightarrow VT_n/\Gamma_2(PVT_n) \xrightarrow{\bar{\pi}} S_n \longrightarrow 1, \quad (3.2)$$

e o grupo do meio é um grupo cristalográfico.

Demonstração. Usando a apresentação do grupo de tranças planas virtuais puras dada no Teorema 1.17 não é difícil mostrar que $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é isomorfo ao grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$ gerado pelo conjunto

$$\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}. \quad (3.3)$$

A ação de S_n em $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é induzida pela ação de S_n em PVT_n (veja equa-

ção (1.7)).

Seja $\beta \in S_n$ tal que $\beta \cdot \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}$ para todo $\lambda_{i,j} \in PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, assim, temos:

$$\begin{aligned}\beta \cdot \lambda_{i,j} = \lambda_{i,j} &\Leftrightarrow \beta \lambda_{i,j} \beta^{-1} = \lambda_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \lambda_{\beta^{-1}(i), \beta^{-1}(j)} = \lambda_{i,j},\end{aligned}$$

para todo $1 \leq i < j \leq n$. Uma vez que $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ é uma base para o grupo Abelian livre $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, concluímos que $\beta = 1$. Portanto, a ação de S_n em $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é injetiva. \square

No Capítulo 1, apresentamos alguns grupos os quais são quocientes do grupo VT_n . Ao considerar os quocientes desses grupos módulo o subgrupo comutador da sua parte pura, por exemplo, o grupo $FVB_n/\Gamma_2(FVP_n)$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Seja $n \geq 2$. Os grupos FWB_n e $FVB_n/\Gamma_2(FVP_n)$ são isomorfos a $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.*

Demonstração. É necessário mostrar que $\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1}$ e $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}$ são elementos de $\Gamma_2(PVT_n)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-2$ (veja Figura 1.4). Seguindo a prova do Teorema 2.5, podemos concluir que $\sigma_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\rho_i^{-1} \in \Gamma_2(PVT_n)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-2$. Provaremos que $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \in \Gamma_2(PVT_n)$ para todo $i+1, 2, \dots, n-2$, para fazer isso, usaremos as relações dadas no Teorema 1.15, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} &= \rho_i\rho_i\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\sigma_{i+1}\rho_{i+1}\rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\sigma_i\rho_i\rho_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_{i+1}\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\sigma_i^{-1}\rho_i\rho_i\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\rho_{i+1}\lambda_{i,i+1}^{-1}\rho_i\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1}\lambda_{i+1,i}\rho_i\lambda_{i+2,i+1}\rho_{i+1} \\ &= \lambda_{i,i+1}^{-1}\lambda_{i,i+2}^{-1}\rho_i\rho_{i+1}\rho_i\lambda_{i+1,i}^{-1}\lambda_{i+2,i+1}\lambda_{i+2,i}\rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}\lambda_{i+1,i+2} \\ &= \lambda_{i,i+1}^{-1}\lambda_{i,i+2}^{-1}\lambda_{i+1,i+2}^{-1}\lambda_{i,i+1}\lambda_{i,i+2}\lambda_{i+1,i+2}.\end{aligned}$$

Assim, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \in \Gamma_2(PVT_n)$ para todo $i+1, 2, \dots, n-2$. \square

Naturalmente podemos se perguntar para quais valores de $k \in N$ temos os grupos FWB_n e $FVB_n/\Gamma_2(FVP_n)$ isomorfos a $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.

Como o grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ possui um cópia do grupo S_n , já sabemos que $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ possui elementos de ordem finita. No próximo teorema caracterizamos os elementos de ordem finita de $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.

Teorema 3.3. *Seja $2 \leq t \leq n$ e considere uma coleção $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{t-1} \leq n$ de inteiros consecutivos. Sejam $\bar{\pi}_p(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}})^{-1} = \theta$ e T_θ uma transversal da ação de $\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. O elemento $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{r_1}\rho_{r_2}\dots\rho_{r_{t-1}})$, onde $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, tem ordem t em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ se, e somente se, para todo $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ temos*

$$a_{r,s} + (-1)^{k_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)}} a_{\theta^{-1}(r),\theta^{-1}(s)} + (-1)^{k_{\theta^{-2}(r),\theta^{-2}(s)}} a_{\theta^{-2}(r),\theta^{-2}(s)} + \dots + (-1)^{k_{\theta^{-q}(r),\theta^{-q}(s)}} a_{\theta^{-q}(r),\theta^{-q}(s)} = 0,$$

onde, $\lambda_{\theta^i(r),\theta^i(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})$, $k_{\theta^i(r),\theta^i(s)} = 0$ se $1 \leq \theta^i(r) < \theta^i(s) \leq n$ e $k_{\theta^i(r),\theta^i(s)} = 1$, $a_{\theta^i(r),\theta^i(s)} = a_{\theta^i(s),\theta^i(r)}$ se $1 \leq \theta^i(s) < \theta^i(r) \leq n$.

Demonstração. A prova segue de maneira análoga a prova do Teorema 2.6. Por simplicidade, assumiremos que $r_i = i$ para todo $i = 1, \dots, t-1$, os outros casos são provados de maneira similar. Pelo Lema 1.16, sabemos que o elemento $\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1}$, para $2 \leq t \leq n$, tem ordem t em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Examinaremos quais são as condições sobre $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, de modo que o elemento $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1})$ possua ordem t em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Para encontrar essas condições, sejam $\bar{\pi}_p(\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1})^{-1} = \theta$ para $2 \leq t \leq n$ e $T_\theta = \{\lambda_{r_1,s_1}, \lambda_{r_2,s_2}, \dots, \lambda_{r_m,s_m}\}$ uma transversal da ação de $\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1}) \right)^t &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{\theta(i),\theta(j)}^{a_{i,j}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{\theta^2(i),\theta^2(j)}^{a_{i,j}} \\ &\dots \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{\theta^{t-1}(i),\theta^{t-1}(j)}^{a_{i,j}}. \end{aligned}$$

Como $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ é um conjunto de geradores do grupo Abelian livre $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, notemos que o elemento $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_1\rho_2\dots\rho_{t-1})$ tem ordem t se, e

de forma que $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})$ e $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})$ sejam conjugados em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Já que $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, são os geradores do grupo Abelian livre $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ temos:

$$\begin{aligned} X \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) X^{-1}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})^{-1} &= \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\theta^t(r), \theta^t(s)} + a_{\theta^t(r), \theta^t(s)} - x_{\theta^{-(1+m-t)}(r), \theta^{-(1+m-t)}(s)} = 0, \\ x_{r,s} + a_{r,s} - x_{\theta^{-1}(r), \theta^{-1}(s)} = b_{r,s}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

para todo $1 \leq t < m$ e $\lambda_{r,s} \in T_\theta$, sendo $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})|$. Como $a_{j,i} = -a_{i,j}$, para $1 \leq i < j \leq n$, temos:

$$\begin{aligned} X \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{a_{i,j}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) X^{-1}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})^{-1} &= \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^{k_{\theta^t(r), \theta^t(s)}} x_{\theta^t(r), \theta^t(s)} + (-1)^{k_{\theta^t(r), \theta^t(s)}} a_{\theta^t(r), \theta^t(s)} + (-1)^{k_{\theta^{-(1+m-t)}(r), \theta^{-(1+m-t)}(s)}} \\ x_{\theta^{-(1+m-t)}(r), \theta^{-(1+m-t)}(s)} = 0, \\ x_{r,s} + a_{r,s} + (-1)^{k_{\theta^{-1}(r), \theta^{-1}(s)}} x_{\theta^{-1}(r), \theta^{-1}(s)} = b_{r,s}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $k_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = 0$ se $1 \leq \theta^l(r) < \theta^l(s) \leq n$, e $k_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = 1$ com $a_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = a_{\theta^l(s), \theta^l(r)}$ se $1 \leq \theta^l(s) < \theta^l(r) \leq n$. Usando a equação (3.5) e seguindo a ideia da prova do Teorema 2.8, podemos concluir a prova desse resultado. \square

Lembramos que o centralizador de θ em S_n é denotado por $C_{S_n}(\theta)$.

Teorema 3.5. *Sejam $\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k} \in VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, $\theta = \bar{\pi}_p(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})^{-1}$, $c \in C_{S_n}(\theta)$ e T_θ um transversal da ação de $\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}$ em $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Considere $\tilde{c} = \rho_{c_1} \rho_{c_2} \dots \rho_{c_k} \in VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ tal que $\bar{\pi}_p(\tilde{c})^{-1} = c$. Os elementos $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})$*

e $\prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}}(\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})$ são conjugados em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ se, e somente se,

(1) *Para todo $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ tal que $\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s}) \neq \{\lambda_{r,s}, \lambda_{r,s}^{-1}, \dots, \lambda_{r_k, s_k}, \lambda_{r_k, s_k}^{-1}\}$ temos:*

(i) $(-1)^{k_{r,s}} a_{r,s} = b_{r,s}$, se $\lambda_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})$.

(ii) $(-1)^{k_{r,s}} a_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} = b_{r,s}$, se $\lambda_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} \notin \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})$ para $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ e

$$a_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} = \sum_{\lambda_{i,j} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)})} a_{i,j},$$

onde $k_{r,s} = 0$ se $c(r) < c(s)$ e $k_{r,s} = 1$ se $c(r) > c(s)$.

(2) Para todo $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ tal que $\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s}) = \{\lambda_{r,s}, \lambda_{r,s}^{-1}, \dots, \lambda_{r_k, s_k}, \lambda_{r_k, s_k}^{-1}\}$ devemos ter $2k + a_{r,s} = b_{r,s}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. A prova segue de maneira análoga a prova do Teorema 2.11. Precisamos encontrar um elemento $X \in PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ tal que

$$X\tilde{c} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) \tilde{c}^{-1} X^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}), \quad (3.6)$$

onde $\tilde{c} = \rho_{c_1} \rho_{c_2} \dots \rho_{c_k} \in VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ é tal que $\bar{\pi}_p(\tilde{c})^{-1} = c$.

Seja $X = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \in VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, onde $x_{i,j} \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i < j \leq n$.

Como $\{\lambda_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ é um conjunto de geradores do grupo Abelian livre $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$, $\bar{\pi}_p(\tilde{c})^{-1} = c$ e $c \in C_{S_n}(\theta)$ temos:

$$\begin{aligned} & X\tilde{c} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{a_{r,s}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) \tilde{c}^{-1} X^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) \\ \Leftrightarrow & X \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{c(r), c(s)}^{a_{r,s}} \tilde{c} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k}) \tilde{c}^{-1} X^{-1} (\rho_{t_1} \rho_{t_2} \dots \rho_{t_k})^{-1} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ \Leftrightarrow & \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j}^{x_{i,j}} \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{c(r), c(s)}^{a_{r,s}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{\theta(i), \theta(j)}^{-x_{i,j}} = \prod_{\lambda_{r,s} \in T_\theta} \lambda_{r,s}^{b_{r,s}} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_{\theta^k(r), \theta^k(s)} + (-1)^{k_{\theta^{-(1+m-k)}(r), \theta^{-(1+m-k)}(s)}} x_{\theta^{-(1+m-k)}(r), \theta^{-(1+m-k)}(s)} = 0. \\ x_{r,s} + (-1)^{k_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)}} a_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} + (-1)^{k_{\theta^{-1}(r), \theta^{-1}(s)}} x_{\theta^{-1}(r), \theta^{-1}(s)} - b_{r,s} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

para $1 \leq k < m$, $\lambda_{r,s} \in T_\theta$ e $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{r,s})|$, sendo $k_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = 0$ se $1 \leq \theta^l(r) < \theta^l(s) \leq n$, $k_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = 1$, $x_{\theta^l(r), \theta^l(s)} = x_{\theta^l(s), \theta^l(r)}$ se $1 \leq \theta^l(s) < \theta^l(r) \leq n$, $k_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} = 0$ se $1 \leq c^{-1}(r) < c^{-1}(s) \leq n$, $k_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} = 1$ e $a_{c^{-1}(r), c^{-1}(s)} = a_{c^{-1}(s), c^{-1}(r)}$ se $1 \leq c^{-1}(s) < c^{-1}(r) \leq n$. Seguindo de forma similar ao feito na prova do Teorema 2.11, usando a ação de S_n em $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$ descrita em (1.7), obtemos o resultado desejado. \square

Recentemente, o problema de conjugação em T_n foi solucionado em [49]. Para resolver o problema, o primeiro passo dado pelos autores foi apresentar o conceito de palavra reduzida ciclicamente (veja seção 2.4 de [49]). Os autores mostraram que qualquer palavra em T_n é conjugada a uma palavra reduzida ciclicamente, reduzindo o estudo das classes de conjugação em T_n para o estudo das classes de conjugação de palavras reduzida ciclicamente em T_n . No Teorema 3.1, do mesmo artigo, foi dada uma condição necessária e suficiente para que duas palavras reduzidas ciclicamente sejam conjugadas em T_n . Os Teoremas 3.4 e 3.5 nos fornece uma maneira de identificar palavras não conjugadas em T_n .

Utilizando as mesmas técnicas, podemos provar versões similares dos Teoremas 2.16 e 2.17 para o grupo $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. A principal diferença é o comportamento da ação de S_n na base de $PVT_n/\Gamma_2(PVT_n)$. Por exemplo considerando $1 \leq i < j \leq n$, então $\rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i^{-1} = \lambda_{i+1,i} = \lambda_{i,i+1}^{-1}$ em $VT_n/\Gamma_2(PVT_n)$.

Capítulo 4

Resultados gerais e aplicações

Neste capítulo, apresentamos generalizações de alguns resultados apresentados nos capítulos anteriores e algumas aplicações. Destacamos os Teoremas 4.1, 4.3 e 4.4 que são generalizações dos Teoremas 2.6 e 3.3, Teoremas 2.8 e 3.4 e Teoremas 2.11 e 3.5 respectivamente.

4.1 Resultados gerais

A ideia apresentada no Teorema 4.1 para exibir elementos de ordem finita foi apresentada inicialmente, em um contexto particular, em [35] na Proposição 21. Os autores mostraram que existem infinitos elementos de ordem n em $B_n/\Gamma_2(P_n)$ sendo n um número ímpar maior ou igual a 3. Essa ideia vem sendo aplicada em outros grupos que têm alguma ligação com os grupos de tranças B_n , por exemplo, nos Teoremas 2.6 e 3.3.

Seja $\mathbb{Z}X$ o grupo Abelian livre sobre o conjunto finito X . No que segue, considere um grupo G tal que exista a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

onde S_n age no grupo Abelian livre $\mathbb{Z}X$ com uma representação de permutação injetiva (i.e. a ação de S_n que é induzida por conjugação e é dada pela permutação dos elementos da base de $\mathbb{Z}X$ é injetiva).

O Teorema 4.1 mostra como podemos caracterizar os elementos de ordem finita de G .

Teorema 4.1. *Seja $\mathbb{Z}X$ o grupo Abelian livre sobre o conjunto finito X . Considere a seguinte sequência exata curta:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

onde S_n age no grupo Abelian livre $\mathbb{Z}X$ com uma representação de permutação injetiva.

Considere $\alpha \in G$ de ordem t . Sejam $\pi(\alpha)^{-1} = \theta$ e T_θ uma transversal da ação de α em $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$. O elemento $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$, tem ordem t em G se, e somente se,

$$\sum_{\lambda_r \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})} a_r = 0 \text{ para todo } \lambda_{i_j} \in T_\theta.$$

Demonstração. Examinaremos quais são as condições sobre $a_i \in \mathbb{Z}$ para que o elemento $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$ possua ordem t em G . Considere $\pi(\alpha)^{-1} = \theta$ e seja T_θ uma transversal da ação de α em $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \right)^t &= \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \cdots \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \\ &= \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha^{-1} \alpha^2 \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha^{-2} \alpha^3 \cdots \alpha^{t-1} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha^{-(t-1)} \alpha^t \\ &= \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta(i)}^{a_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta^2(i)}^{a_i} \cdots \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta^{t-1}(i)}^{a_i}. \end{aligned}$$

Visto que $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$ é uma base para o grupo Abelian livre $\mathbb{Z}X$ notemos que, escolhendo a transversal $T_\theta = \{\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_m}\}$, solucionar a seguinte equação em $\mathbb{Z}X$

$$\left(\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \right)^t = \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta(i)}^{a_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta^2(i)}^{a_i} \cdots \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta^{t-1}(i)}^{a_i} = 1,$$

é equivalente a solucionar o seguinte sistema de equações nos inteiros,

$$\begin{cases} a_{i_1} + a_{\theta^{-1}(i_1)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(i_1)} = 0 \\ a_{i_2} + a_{\theta^{-1}(i_2)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(i_2)} = 0 \\ \vdots \\ a_{i_m} + a_{\theta^{-1}(i_m)} + \cdots + a_{\theta^{-(t-1)}(i_m)} = 0 \end{cases},$$

i.e., $\left(\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha \right)^t = 1$ se, e somente se, $\sum_{\lambda_r \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})} a_r = 0$ para todo $\lambda_{i_j} \in T_\theta$. \square

Corolário 4.2. *Seja $\mathbb{Z}X$ o grupo Abelian livre sobre o conjunto finito X . Considere a seguinte sequência exata curta que cinde:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

onde S_n age no grupo Abelian livre $\mathbb{Z}X$ com uma representação de permutação injetiva. Considere $\alpha \in S_n$ de ordem t . Sejam $\pi(\alpha)^{-1} = \theta$ e T_θ uma transversal da ação de α em

$\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$. O elemento $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$, onde $a_i \in \mathbb{Z}$, tem ordem t em G se, e somente se, $\sum_{\lambda_r \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})} a_r = 0$ para todo $\lambda_{i_j} \in T_\theta$.

Abordaremos, agora, o problema de conjugação em G . Utilizaremos as informações as quais possuímos sobre G para transformar o problema de conjugação em G em um problema de resolução de sistemas de equações nos inteiros. Com os Teoremas 4.3 e 4.4, seremos capazes de decidir quando duas palavras quaisquer do grupo G são conjugadas. O Teorema 4.3 é uma generalização do Teorema 5 de [35].

Teorema 4.3. *Seja $\mathbb{Z}X$ o grupo Abeliano livre sobre o conjunto finito X . Considere a seguinte seqüência exata curta:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

onde S_n age no grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}X$ com uma representação de permutação injetiva. Sejam $\alpha \in G$, $\theta = \pi(\alpha)^{-1}$ e T_θ uma transversal da ação de α em $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$. Os elementos $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$ e $\prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}} \alpha$ são conjugados em G , onde $S_{i_j} = \sum_{\lambda_r \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})} a_r$ para todo $\lambda_{i_j} \in T_\theta$.

Demonstração. Para mostrar que $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$ e $\prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}} \alpha$ são elementos conjugados em G , provaremos a existência de um elemento $Y \in \mathbb{Z}X$ tal que

$$Y \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha Y^{-1} = \prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}} \alpha,$$

ou equivalentemente,

$$Y \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha Y^{-1} \alpha^{-1} = \prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}}.$$

Usando a base do grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}X$, considere $Y = \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{y_i} \in \mathbb{Z}X$ sendo $y_i \in \mathbb{Z}$. Analisaremos quais são as condições sobre os expoentes $y_i \in \mathbb{Z}$ de modo que os elementos $\prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha$ e $\prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}} \alpha$ sejam conjugados em G . Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned} Y \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha Y^{-1} \alpha^{-1} &= \prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}} \\ \Leftrightarrow Y \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta(i)}^{-y_i} &= \prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}}, \end{aligned}$$

e como os elementos λ_i são geradores do grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}X$, então, podemos concluir

o seguinte

$$Y \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{a_i} \alpha Y^{-1} \alpha^{-1} = \prod_{\lambda_{i_j} \in T_\theta} \lambda_{i_j}^{S_{i_j}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_i + a_i - y_{\theta^{-1}(i)} = 0, & \text{se } \lambda_i \notin T_\theta. \\ y_{i_j} + a_{i_j} - y_{\theta^{-1}(i_j)} = S_{i_j}, & \text{se } \lambda_{i_j} \in T_\theta. \end{cases} \quad (4.1)$$

O sistema de equações (4.1) tem solução se, e somente se, os seguintes subsistemas de equações nos inteiros têm solução

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{\theta^t(i_j)} + a_{\theta^t(i_j)} - y_{\theta^{-(1+m-t)}(i_j)} = 0. \\ y_{i_j} + a_{i_j} - y_{\theta^{-1}(i_j)} = S_{i_j}. \end{cases}, \quad (4.2)$$

para todos $1 \leq t < m$ e $\lambda_{i_j} \in T_\theta$ sendo $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})|$.

Assim, buscando provar o teorema, provaremos a existência de soluções para os subsistemas de equações (4.2). Seja $\lambda_{i_j} \in T_\theta$ e considere $e_1 = \lambda_{i_j}, e_2 = \lambda_{\theta(i_j)}, \dots, e_m = \lambda_{\theta^{m-1}(i_j)}$ sendo $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})|$. Portanto, a matriz de permutação da orbita de λ_{i_j} pela ação de θ com respeito ao conjunto ordenado $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ é dada pela matriz M_{i_j}

$$M_{i_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para cada $\lambda_{i_j} \in T_\theta$, podemos escrever os subsistemas de equações (4.2) como segue,

$$(\star) \quad [I_{i_j} - M_{i_j}] \begin{pmatrix} y_{i_j} \\ y_{\theta(i_j)} \\ \vdots \\ y_{\theta^{m-1}(i_j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{i_j} + S_{i_j} \\ -a_{\theta(i_j)} \\ \vdots \\ -a_{\theta^{m-1}(i_j)} \end{pmatrix},$$

onde, $I_{i_j} = (Id)_{m \times m}$ e $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})|$. Analisando a matriz dos coeficientes e a matriz estendida associada a esse sistema, concluímos que (\star) tem solução se, e somente se, $S_{i_j} = \sum_{\lambda_r \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{i_j})} a_r$ para todo $\lambda_{i_j} \in T_\theta$. \square

Com o Teorema 4.3 efetuamos uma redução no problema de determinar se duas palavras em G são conjugadas. Além disso, o Teorema 4.3, em conjunto com o Teorema 4.1, é suficiente para decidir se dois elementos de ordem finita de G são conjugados. Com o próximo resultado seremos capazes de decidir se quaisquer duas palavras em G são

conjugadas.

Teorema 4.4. *Seja $\mathbb{Z}X$ o grupo Abeliano livre sobre o conjunto finito X . Considere a seguinte seqüência exata curta:*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}X \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} S_n \longrightarrow 1,$$

onde S_n age no grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}X$ com uma representação de permutação injetiva. Sejam $\alpha \in G$, $\theta = \pi(\alpha)^{-1}$ e $c \in C_F(\theta)$. Considere uma transversal T_θ da ação de α no conjunto de geradores $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$, $\tilde{c} \in G$ tal que $\pi(\tilde{c})^{-1} = c$ e $\tilde{c}\alpha\tilde{c}^{-1} = \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{c_i} \alpha \in \mathbb{Z}X$.

Então, os elementos $\prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{a_r} \alpha$ e $\prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \alpha$ são conjugados em G se, e somente se,

$$(i) \quad \sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}(\lambda_r)} c_i + a_r = b_r, \text{ para } \lambda_{c^{-1}(r)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_r) \text{ onde } \lambda_r \in T_\theta.$$

$$(ii) \quad \sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}(\lambda_r)} c_i + a_{c^{-1}(r)} = b_r, \text{ para } \lambda_{c^{-1}(r)} \notin \mathcal{O}_\theta(\lambda_r) \text{ onde } a_{c^{-1}} = \sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{c^{-1}(r)})} a_i \text{ e } \lambda_r \in T_\theta.$$

Demonstração. Para confirmar que $\prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{a_r} \alpha$ e $\prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \alpha$ são elementos conjugados em G precisamos encontrar um elemento $Y \in \mathbb{Z}X$ tal que

$$Y\tilde{c} \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{a_r} \alpha \tilde{c}^{-1} Y^{-1} = \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \alpha, \quad (4.3)$$

onde, $\tilde{c} \in G$ é tal que $\pi(\tilde{c})^{-1} = c$.

Considere $Y = \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{y_i} \in \mathbb{Z}X$. Exploraremos quais são as condições sobre Y de modo que a equação (4.3) seja verdadeira. Para isso, usamos a seguinte equivalência de equações no grupo Abeliano livre $\mathbb{Z}X$ a fim de transformar a questão inicial em um problema de encontrar uma solução de um sistema de equações sobre números inteiros,

$$\begin{aligned} Y\tilde{c} \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{a_r} \alpha \tilde{c}^{-1} Y^{-1} &= \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \alpha \\ \Leftrightarrow Y\tilde{c} \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{a_r} \alpha \tilde{c}^{-1} Y^{-1} \alpha^{-1} &= \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \\ \Leftrightarrow Y \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_{c(r)}^{a_r} \tilde{c} \alpha \tilde{c}^{-1} Y^{-1} \alpha^{-1} &= \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r}, \end{aligned}$$

visto que $\pi(\tilde{c})^{-1} = c$ e $c \in C_{S_n}(\theta)$ temos $\tilde{c}\alpha\tilde{c}^{-1} = \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{c_i} \alpha \in \mathbb{Z}X$, assim,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow Y \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_{c(r)}^{a_r} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{c_i} \alpha Y^{-1} \alpha^{-1} = \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r} \\ &\Leftrightarrow \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{y_i} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_i^{c_i} \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_{c(r)}^{a_r} \prod_{\lambda_i \in X} \lambda_{\theta(i)}^{-y_i} = \prod_{\lambda_r \in T_\theta} \lambda_r^{b_r}. \end{aligned}$$

Suponha que $\lambda_{c^{-1}(r)} \notin \mathcal{O}_\theta(\lambda_r)$. Afirmamos que $a_{c^{-1}(r)}$, o expoente de $\lambda_{c^{-1}(r)}$, é igual ao expoente de algum elemento da transversal T_θ . De fato, se $\lambda_{c^{-1}(r)} \notin T_\theta$, então existe $\lambda_{r_1} \in T_\theta$ tal que $\lambda_{c^{-1}(r)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r_1})$. Pelo item (ii) a igualdade $a_{c^{-1}(r)} = \sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{c^{-1}(r)})} a_{i,j}$ é verdadeira e como $\lambda_{c^{-1}(r)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_{r_1})$, temos $a_{c^{-1}(r)} = a_{r_1}$. Assim, a última equação é verdadeira se o seguinte sistema de equações nos inteiros tem solução

$$\begin{cases} y_{\theta^k(r)} + c_{\theta^k(r)} - y_{\theta^{-(1+m-k)}(r)} = 0, \\ y_r + c_r + a_{c^{-1}(r)} - y_{\theta^{-1}(r)} - b_r = 0. \end{cases}, \quad (4.4)$$

para $1 \leq k < m$, $\lambda_r \in T_\theta$ e $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_r)|$. Aplicando os mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 4.3, podemos concluir que a equação (4.4) é equivalente a

$$(I) \quad [I_r - M_r] \begin{pmatrix} x_r \\ x_{\theta(r)} \\ \vdots \\ x_{\theta^{m-1}(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_r - a_{c^{-1}(r)} + b_r \\ -c_\theta(r) \\ \vdots \\ -c_\theta^{m-1}(r) \end{pmatrix},$$

onde, $m = |\mathcal{O}_\theta(\lambda_r)|$, $I_r = (Id)_{m \times m}$ e M_r é a matriz de permutação da orbita de λ_r pela ação de θ em $\{\lambda_i \mid \lambda_i \in X\}$ com respeito o conjunto ordenado $\{e_1 = \lambda_r, e_2 = \lambda_{\theta(r)}, \dots, e_m = \lambda_{\theta^{m-1}(r)}\}$. Analisando a matriz dos coeficientes e a matriz estendida associada a esse sistema, concluímos que (I) tem solução se, e somente se, $\sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}(\lambda_r)} c_i + a_{c^{-1}(r)} = b_r$ provando

o item (ii). De maneira similar, se $\lambda_{c^{-1}(r)} \in \mathcal{O}_\theta(\lambda_r)$ para $\lambda_r \in T_\theta$ o sistema (I) tem solução se, e somente se, $\sum_{\lambda_i \in \mathcal{O}(\lambda_r)} c_i + a_r = b_r$. \square

4.1.1 Estrutura dos grupos $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$ e $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$

No desenvolvimento dessa seção consideraremos que $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Em [8, Lema 14] é mostrado que o grupo (Abeliano livre) $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$ é gerado por

$$\mathcal{U}^+ = \{[\lambda_{3,2}, \lambda_{3,1}], [\lambda_{3,2}, \lambda_{2,3}], [\lambda_{3,2}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}], [\lambda_{3,1}, \lambda_{2,1}], [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,3}], \\ [\lambda_{2,3}, \lambda_{2,1}], [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]\}.$$

Considere as seguintes sequências exatas curtas:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3) \longrightarrow VB_3/\Gamma_3(VP_3) \xrightarrow{f} VB_3/\Gamma_2(VP_3) \longrightarrow 1,$$

e

$$1 \longrightarrow VP_3/\Gamma_3(VP_3) \longrightarrow VB_3/\Gamma_3(VP_3) \xrightarrow{\bar{\pi}_P} S_3 \longrightarrow 1.$$

Seja $\delta \in VB_3/\Gamma_3(VP_3)$. Denotaremos a classe de δ em $VB_3/\Gamma_2(VP_3)$ por δ . Veja que a ação, induzida por conjugação, de $VB_3/\Gamma_2(VP_3)$ em $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$, é dada por:

$$\delta[\lambda_{i,j}, \lambda_{r,s}]\delta^{-1} = [\delta\lambda_{i,j}\delta^{-1}, \delta\lambda_{r,s}\delta^{-1}] = [\lambda_{\theta(i),\theta(j)}, \lambda_{\theta(r),\theta(s)}]. \quad (4.5)$$

Seja \mathcal{U} o conjunto formado pela base \mathcal{U}^+ de $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$ e seus inversos.

Lema 4.5. *A ação de $\rho_{r_1} \dots \rho_{r_{t-1}}$ em $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$ é invariante no conjunto \mathcal{U} , para $t \in \{2, 3\}$.*

Seguindo a ideia da prova dos Teoremas 4.1 e 4.3, podemos exibir elementos de ordem finita e elementos conjugados de $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$. Faremos um exemplo para ilustrar a aplicação dessa ideia no grupo $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$.

Exemplo 4.6. *Considere o elemento $\rho_1\rho_2 \in VB_3/\Gamma_2(VP_3)$. Veja que $\pi_P(\rho_1\rho_2) = (3, 2, 1)$.*

Vamos estudar as órbitas da ação, induzida por conjugação, de $(3, 2, 1)$ na base de $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$.

Temos as seguintes órbitas

- $[\lambda_{3,2}, \lambda_{3,1}] \longrightarrow [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}] \longrightarrow [\lambda_{2,3}, \lambda_{2,1}]^{-1}$.
- $[\lambda_{3,2}, \lambda_{2,3}] \longrightarrow [\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^{-1} \longrightarrow [\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]$.
- $[\lambda_{3,1}, \lambda_{2,1}] \longrightarrow [\lambda_{3,2}, \lambda_{1,2}]^{-1} \longrightarrow [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,3}]$.

Seja $T = \{[\lambda_{3,2}, \lambda_{3,1}], [\lambda_{3,2}, \lambda_{2,3}], [\lambda_{3,1}, \lambda_{2,1}]\}$, uma transversal da ação de $(1, 2, 3)$ na base de $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$. O elemento $[\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2\rho_1\rho_2$ tem ordem 3 em $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$.

De fato,

$$\begin{aligned} ([\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2\rho_1\rho_2)^3 = 1 &\Leftrightarrow [\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2(\rho_1\rho_2)[\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2(\rho_1\rho_2)^{-1} \\ &\quad (\rho_1\rho_2)^2[\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2(\rho_1\rho_2)^{-2}(\rho_1\rho_2)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow [\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^2[\lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}]^{-2}[\lambda_{3,2}, \lambda_{2,3}]^2 \\ &\quad [\lambda_{3,2}, \lambda_{2,3}]^{-2}[\lambda_{3,1}, \lambda_{1,3}]^{-2} = 1. \end{aligned}$$

Para estudar aspectos estruturais do grupo $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$, precisamos exibir uma base para o grupo $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$. Utilizaremos a mesma técnica utilizada em [8], dada na página 1076, para encontrar uma base para $\Gamma_2(VP_3)/\Gamma_3(VP_3)$. Sabemos que o grupo $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ é gerado pelos comutadores básicos de peso 2 (veja [44, Teorema 5.4]).

Definindo a seguinte ordem nos geradores de PVT_4 ,

$$\lambda_{1,2} < \lambda_{1,3} < \lambda_{1,4} < \lambda_{2,3} < \lambda_{2,4} < \lambda_{3,4},$$

e reescrevendo as relações de PVT_4 em $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ usando os comutadores básicos de peso 2 concluímos que o conjunto Ω^+ é uma base para $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$, sendo

$$\begin{aligned} \Omega^+ = \{ & [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{1,4}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{2,4}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{1,4}, \lambda_{1,3}], [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,3}], [\lambda_{3,4}, \lambda_{1,3}], \\ & [\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}], [\lambda_{3,4}, \lambda_{1,4}], [\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}], [\lambda_{3,4}, \lambda_{2,3}], [\lambda_{3,4}, \lambda_{2,4}] \}. \end{aligned}$$

Seja $\delta \in VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$. A ação, induzida por conjugação, de $VT_4/\Gamma_2(PVT_4)$ em $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ é dada por

$$\delta[\lambda_{i,j}, \lambda_{r,s}]\delta^{-1} = [\delta\lambda_{i,j}\delta^{-1}, \delta\lambda_{r,s}\delta^{-1}] = [\lambda_{\theta(i),\theta(j)}, \lambda_{\theta(r),\theta(s)}]. \quad (4.6)$$

Se $1 \leq i < j \leq n$ temos $\lambda_{j,i} = \lambda_{i,j}^{-1}$. Assim, em $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$, obtemos as seguintes igualdades:

1. $[\lambda_{i,j}, \lambda_{i,k}] = [\lambda_{j,i}, \lambda_{i,k}]^{-1}$ se $j < i$ e $i < k$.
2. $[\lambda_{i,j}, \lambda_{i,k}] = [\lambda_{j,i}, \lambda_{k,i}]$ se $j < i$ e $k < i$.
3. $[\lambda_{i,j}, \lambda_{i,k}] = [\lambda_{i,j}, \lambda_{k,i}]^{-1}$ se $i < j$ e $k < i$.

Seja Ω o conjunto formado pela base Ω^+ de $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ e seus inversos.

Lema 4.7. *A ação de $\rho_{r_1} \dots \rho_{r_{t-1}}$ em $\Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ é invariante no conjunto Ω , para $t \in \{2, 3, 4\}$.*

Podemos utilizar a ideia da demonstração dos Teoremas 4.1 e 4.3 para garantir a existência de elementos de ordem finita e exibir elementos conjugados em $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$. Ilustraremos a utilização dessa ideia no grupo $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$ com o seguinte exemplo.

Exemplo 4.8. *Considere o elemento $\rho_1\rho_2\rho_3 \in VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$. Veja que $\pi_P(\rho_1\rho_2\rho_3) = (4, 3, 2, 1)$. Vamos estudar as órbitas da ação de $(4, 3, 2, 1)$ na base de $\Gamma_2(VT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$. Obtemos as seguintes órbitas*

$$\bullet \quad [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}] \longrightarrow [\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}] \longrightarrow [\lambda_{3,4}, \lambda_{1,3}] \longrightarrow [\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}].$$

- $[\lambda_{1,4}, \lambda_{1,2}] \longrightarrow [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,2}] \longrightarrow [\lambda_{3,4}, \lambda_{2,3}] \longrightarrow [\lambda_{3,4}, \lambda_{1,4}]$.
- $[\lambda_{3,4}, \lambda_{2,4}] \longrightarrow [\lambda_{1,4}, \lambda_{1,3}] \longrightarrow [\lambda_{2,4}, \lambda_{1,2}] \longrightarrow [\lambda_{2,3}, \lambda_{1,3}]$.

Seja $T = \{[\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{1,4}, \lambda_{1,2}], [\lambda_{3,4}, \lambda_{2,4}]\}$ uma transversal da ação de $(4, 3, 2, 1)$ na base $\Gamma_2(VT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$. Os elementos $[\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}]\rho_1\rho_2\rho_3$ e $[\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}]^2\rho_1\rho_2\rho_3$ são conjugados em $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$. De fato, devemos exibir um elemento $X \in \Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ tal que

$$X[\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}](\rho_1\rho_2\rho_3)X^{-1}(\rho_1\rho_2\rho_3)^{-1} = [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}]^2.$$

Considere, $X = [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}]^{-1}$. Obtemos:

$$\begin{aligned} X[\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}](\rho_1\rho_2\rho_3)X^{-1}(\rho_1\rho_2\rho_3)^{-1} &= [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}]^{-1}[\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}] \\ &\quad (\rho_1\rho_2\rho_3)[\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}]^{-1}[\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}](\rho_1\rho_2\rho_3)^{-1} \\ &= [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}]^{-1}[\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}][\lambda_{2,4}, \lambda_{1,4}] \\ &\quad [\lambda_{2,4}, \lambda_{2,3}]^{-1}[\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}] \\ &= [\lambda_{1,3}, \lambda_{1,2}]^2. \end{aligned}$$

Para encontrar o elemento $X \in \Gamma_2(PVT_4)/\Gamma_3(PVT_4)$ resolvemos o sistema de equações nos inteiros dada na demonstração do Teorema 4.3.

4.2 Produtos quase diretos e grupos de tranças sobre superfícies

Uma generalização dos grupos de tranças são os grupos de tranças sobre superfícies. Seja N um superfície compacta, conexa sem bordo e considere a superfície M obtida de N deletando uma quantidade finita de pontos, digamos $\{x_1, \dots, x_p\}$ para $p \geq 1$. Então, pelo Teorema 2 em [34], a sequência exata curta de Fadell and Neuwirth (veja [26]) dos grupos de tranças puras

$$1 \longrightarrow P_m(M \setminus \{t_1, \dots, t_n\}) \xrightarrow{\iota_*} P_{n+m}(M) \xrightarrow{p_*} P_n(M) \longrightarrow 1, \quad (4.7)$$

cinde para todo m e n .

Definição 4.9. *Sejam A e C dois grupos. Se C age em A por automorfismos, o produto semidireto $A \rtimes C$ é dito ser um produto quase direto se a ação de G em $A/\Gamma_2(A)$ é trivial.*

Pensando na sequência exata curta dada em (4.7), podemos nos perguntar sobre quais condições o grupo $P_{n+m}(M)$ é um produto quase direto.

Foi mostrado em [27] que o grupo de tranças puras de Artin P_n é um produto quase direto de grupo livres. Mostraremos no Teorema 4.10 que $P_m(M)$ é um produto quase direto de grupos livres sendo M a esfera finitamente perfurada.

Teorema 4.10. *Seja $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ onde $p \geq 2$. Então o grupo $P_m(M) = P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}) \rtimes P_{m-1}(M)$ é um produto quase direto para $m \geq 2$. Ainda mais, $P_m(M) = (((F_{p+m-2}) \rtimes F_{p+m-3}) \rtimes \dots \rtimes F_p) \rtimes F_{p-1}$ é um produto quase direto de grupos livres.*

Demonstração. Seja $p \geq 2$. Utilizando o Teorema 2 de [34], sabemos que a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}) \xrightarrow{\iota_*} P_m(M) \xrightarrow{p_*} P_{m-1}(M) \longrightarrow 1,$$

cinde para $m \geq 2$, ou seja, $P_m(M) = P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}) \rtimes P_{m-1}(M)$ para $m \geq 2$, onde p_* é aplicação que esquece a última corda. É necessário mostrar que a ação, induzida pela seção, de $P_{m-1}(M)$ em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$, é trivial. Mostraremos que a ação de $P_m(M)$ em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$ é trivial.

Usando a apresentação dada no Teorema 1 de [43], sabemos que $P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\})$ é gerado por $A_{r,m+p-1}$, para $1 \leq r \leq m+p-2$, em $P_m(M)$. Provaremos que $A_{i,j}A_{r,m+p-1}A_{i,j}^{-1} = A_{r,m+p-1}$, para $1 \leq i < j \leq m+p-1$ e $1 \leq r \leq m+p-2$, em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$. Observemos se $j = m+p-1$, então o elemento $A_{i,j}A_{r,m+p-1}A_{i,j}^{-1} \in Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$ nos outros casos usamos as relações dadas em [43, Teorema 1] e obtemos

$$A_{i,j}A_{r,m+p-1}A_{i,j}^{-1} = \begin{cases} A_{r,m+p-1}, & \text{se } i < j < r. \\ A_{r,m+p-1}, & \text{se } r < i < j. \\ A_{i,m+p-1}A_{r,m+p-1}A_{i,m+p-1}^{-1}, & \text{se } i < r = j. \\ A_{i,m+p-1}A_{j,m+p-1}A_{r,m+p-1}A_{j,m+p-1}^{-1}A_{i,m+p-1}^{-1}, & \text{se } r = i < j. \\ A_{i,m+p-1}A_{j,m+p-1}A_{i,m+p-1}^{-1}A_{j,m+p-1}^{-1}A_{r,m+p-1}A_{j,m+p-1}. \\ A_{i,m+p-1}A_{j,m+p-1}^{-1}A_{i,m+p-1}^{-1}, & \text{se } i < r < j. \end{cases},$$

observemos, em todos os casos $A_{i,j}A_{r,m+p-1}A_{i,j}^{-1} \in Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$, portanto, a ação de $P_m(M)$ em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{m-1}\}))$ é trivial. □

Corolário 4.11. *Seja $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ onde $p \geq 2$. O grupo $\Gamma_q(P_m(M))/\Gamma_{q+1}(P_m(M))$ é Abeliiano livre de posto igual a*

$$\frac{1}{q} \sum_{j=p-1}^{p+m-2} \sum_{d|q} \mu(d) j^{\frac{q}{d}},$$

onde, $\mu(d)$ é a função de Möbius.

Demonstração. Mostramos no Teorema 4.10 que o grupo $P_m(M) = F_{p+m-2} \rtimes F_{p+m-3} \rtimes$

$\cdots \rtimes F_{p-1}$ é um produto quase direto. Dessa forma, pela Proposição 1 de [9] temos:

$$\Gamma_q(P_m(M)) = \Gamma_q(F_{p+m-2} \rtimes F_{p+m-3} \rtimes \cdots \rtimes F_{p-1}) = \Gamma_q(F_{p+m-2}) \rtimes \Gamma_q(F_{p+m-3}) \rtimes \cdots \rtimes \Gamma_q(F_{p-1}).$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma_q(P_m(M))}{\Gamma_{q+1}(P_m(M))} = \frac{\Gamma_q(F_{p+m-2})}{\Gamma_{q+1}(F_{p+m-2})} \times \frac{\Gamma_q(F_{p+m-3})}{\Gamma_{q+1}(F_{p+m-3})} \times \cdots \times \frac{\Gamma_q(F_{p-1})}{\Gamma_{q+1}(F_{p-1})}.$$

Sabemos, também, pelo Teorema de Witt (veja Teorema 11.2.2 p.169 de [38]) que o posto de $\Gamma_q(F_n)/\Gamma_{q+1}(F_n)$ é igual a

$$\frac{1}{q} \sum_{d|q} \mu(d) n^{\frac{q}{d}},$$

onde, $\mu(d)$ é a função de Möbius. Logo, o posto de $\Gamma_q(P_m(M))/\Gamma_{q+1}(P_m(M))$ é igual a

$$\sum_{j=p-1}^{p+m-2} \frac{1}{q} \sum_{d|q} \mu(d) j^{\frac{q}{d}} = \frac{1}{q} \sum_{j=p-1}^{p+m-2} \sum_{d|q} \mu(d) j^{\frac{q}{d}}.$$

□

Proposição 4.12. *Seja $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ sendo $p \geq 2$. O grupo $P_m(M)$ é residualmente nilpotente livre de torção.*

Demonstração. Usando o Corolário 2 de [9], garantimos que o produto quase direto de dois grupos residualmente nilpotente livre de torção é residualmente nilpotente livre de torção. Os grupos livres são residualmente nilpotente livre de torção (veja [33]). Portanto, como uma consequência do Teorema 4.10, o grupo $P_m(M)$ é residualmente nilpotente livre de torção. □

4.2.1 Quais outros grupos de tranças puras são produtos quase diretos?

Seja M uma superfície orientável de genus $g \geq 1$, $p \geq 1$ vezes perfurada. De maneira geral, o grupo $P_n(M)$ não é um produto quase direto.

Considere a seguinte seqüência exata curta

$$1 \longrightarrow P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}) \xrightarrow{\iota_*} P_n(M) \xrightarrow{p_*} P_{n-1}(M) \longrightarrow 1,$$

onde, p_* é aplicação a qual esquece a última corda de $P_n(M)$. Já sabemos que $P_n(M) = P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}) \rtimes P_{n-1}(M)$ (veja [34, Teorema 2]). Considera a apresentação de $P_n(M)$ dada no Teorema 4.13.

Teorema 4.13 (Teorema 5.1 de [14]). *Seja M um superfície orientável de genus $g \geq 1$, $p \geq 1$ vezes perfurada. Então, o grupo das tranças puras $P_n(M)$ admite a apresentação dada por:*

Geradores: $A_{i,j}$, onde $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$, $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$ e $i < j$.

Relações:

(PR1) $A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} = A_{r,s}$, se $i < j < r < s$, ou $r + 1 < i < j < s$, ou $i = r + 1 < j < s$ para $r < 2g$ par ou $r \geq 2g$,

(PR2) $A_{i,j}^{-1} A_{j,s} A_{i,j} = A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s}^{-1}$, se $i < j < s$,

(PR3) $A_{i,j}^{-1} A_{i,s} A_{i,j} = A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}$, se $i < j < s$,

(PR4) $A_{i,j}^{-1} A_{r,s} A_{i,j} = A_{i,s} A_{j,s} A_{i,s}^{-1} A_{j,s}^{-1} A_{r,s} A_{j,s} A_{i,s} A_{j,s}^{-1} A_{i,s}^{-1}$, se $i + 1 < r < j < s$ ou $i + 1 = r < j < s$ para r ímpar e $r < 2g$ ou $r > 2g$,

(ER1) $A_{r+1,j}^{-1} A_{r,s} A_{r+1,j} = A_{r,s} A_{r+1,s} A_{j,s} A_{r+1,s}^{-1}$, se r é par e $r < 2g$,

(ER2) $A_{r-1,j}^{-1} A_{r,s} A_{r-1,j} = A_{r-1,s} A_{j,s} A_{r-1,s}^{-1} A_{r,s} A_{j,s} A_{r-1,s} A_{j,s}^{-1} A_{r-1,s}^{-1}$, se r é ímpar e $r < 2g$.

Utilizando o Teorema 4.13 temos as seguintes informações

- $P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\})$ é gerado por $A_{i,k}$ para $1 \leq i < k = 2g + p + n - 1$.
- $P_n(M)$ é gerado por $A_{i,j}$ para $1 \leq i \leq 2g + p + n - 2$, $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 1$ e $i < j$.
- $P_{n-1}(M)$ é gerado por $A_{i,j}$ para $1 \leq i \leq 2g + p + n - 3$, $2g + p \leq j \leq 2g + p + n - 2$ e $i < j$.

Lembrando, os elementos $A_{i,j}$ são os geradores de Artin apenas quando $2g + p \leq i$. Afirmção: a ação de $P_{n-1}(M)$ em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}))$ não é trivial. De fato, sejam $r < 2g$ e $j < k = 2g + p + n - 1$ com r par e $2g + p \leq j$, pela relação (ER1) dada no Teorema 4.13 temos:

$$A_{r+1,j}^{-1} A_{r,k} A_{r+1,j} = A_{r,k} A_{r+1,k} A_{j,k} A_{r+1,k}^{-1},$$

assim, em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}))$, concluímos que

$$A_{r+1,j}^{-1} A_{r,k} A_{r+1,j} = A_{r,k} A_{j,k}.$$

Visto que $A_{j,k}$ é um gerador do grupo Abelian livre $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}))$, a ação de $P_{n-1}(M)$ em $Ab(P_1(M \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}))$ não é trivial.

Agora, seja M é uma superfície não orientável de genus $g \geq 1$, $p \geq 1$ vezes perfurada. O fato de um grupo ser residualmente nilpotente livre de torção tem várias consequências importantes, uma delas é que o grupo é bi-ordenável (veja [48]). Por outro lado, se um grupo é um produto quase direto de grupos livres, uma das consequências é ser residualmente nilpotente livre de torção. Mas, no Corolário 1.8 de [47] foi mostrado que $P_n(M)$ não é bi-ordenável. Portanto, o grupo $P_n(M)$ não é um produto quase direto de grupos livres.

4.3 Grupos quase cristalográficos

No primeiro resultado dessa seção apresentaremos uma condição suficiente para que um grupo G tenha como quociente um grupo quase cristalográfico. O Lema 4.14 será fundamental na demonstração desse resultado.

Lema 4.14. *Seja G um grupo cristalográfico. Então G não possui subgrupo normal finito.*

Teorema 4.15. *Seja $k \geq 2$. Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G com $[G : N] < \infty$. Se $\Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N)$ é livre de torção, $N/\Gamma_{k+1}(N)$ é finitamente gerado e $G/\Gamma_k(N)$ não possui subgrupo normal finito, então $G/\Gamma_{k+1}(N)$ é um grupo quase cristalográfico de dimensão igual ao comprimento de Hirsch de $N/\Gamma_{k+1}(N)$ e grupo de holonomia G/N .*

Demonstração. Observe, inicialmente, que $N/\Gamma_{k+1}(N)$ é um subgrupo nilpotente de $G/\Gamma_{k+1}(N)$, finitamente gerado e de índice finito. Logo, $G/\Gamma_{k+1}(N)$ é policíclico por finito. Assim, para mostrar que $G/\Gamma_{k+1}(N)$ é quase cristalográfico, resta provar que $G/\Gamma_{k+1}(N)$ não possui subgrupo normal finito. Considere a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N) \xrightarrow{\iota} G/\Gamma_{k+1}(N) \xrightarrow{f} G/\Gamma_k(N) \longrightarrow 1,$$

e um subgrupo normal finito \tilde{G} de $G/\Gamma_{k+1}(N)$, sendo $f: G/\Gamma_{k+1}(N) \rightarrow G/\Gamma_k(N)$ a projeção natural e $\iota: \Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N) \rightarrow G/\Gamma_{k+1}(N)$ a inclusão natural. Como $\Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N)$ é livre de torção, a restrição de f ao subgrupo \tilde{G} é injetiva. Dessa maneira, o grupo $G/\Gamma_k(N)$ possui um subgrupo G isomorfo a \tilde{G} . Temos uma contradição, pois, por hipótese, $G/\Gamma_k(N)$ não possui subgrupo normal finito. Portanto, $G/\Gamma_{k+1}(N)$ não pode possuir subgrupo normal finito. \square

Seja M a superfície obtida de S^2 deletando uma quantidade finita de pontos, digamos $\{x_1, \dots, x_p\}$ para $p \geq 1$. Usaremos o Teorema 4.15 para mostrar que o grupo $B_n(M)/\Gamma_k(P_n(M))$ é quase cristalográfico.

Teorema 4.16. *Seja M a esfera finitamente perfurada. O grupo $B_n(M)/\Gamma_k(P_n(M))$ é quase cristalográfico com grupo de holonomia S_n e de dimensão $\sum_{q=1}^{k-1} \left(\frac{1}{q} \sum_{j=p-1}^{p+m-2} \sum_{d|q} \mu(d)j^{\frac{q}{d}}\right)$ para $n, k \geq 3$.*

Demonstração. Já mostramos no Corolário 4.11 que $\Gamma_q(P_m(M))/\Gamma_{q+1}(P_m(M))$ é livre de torção e tem posto igual a

$$\frac{1}{q} \sum_{j=p-1}^{p+m-2} \sum_{d|q} \mu(d)j^{\frac{q}{d}},$$

onde, $\mu(d)$ é a função de Möbius. Usando a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Gamma_k(P_n(M))/\Gamma_{k+1}(P_n(M)) \longrightarrow P_n(M)/\Gamma_{k+1}(P_n(M)) \longrightarrow P_n(M)/\Gamma_k(P_n(M)) \longrightarrow 1,$$

realizando indução em k e usando o fato que $P_n(M)/\Gamma_2(P_n(M))$ é livre de torção e finitamente gerado (veja [24, Corolário 2.4]), concluímos que o subgrupo nilpotente $P_n(M)/\Gamma_3(P_n(M)) \subset B_n(M)/\Gamma_3(P_n(M))$ é livre de torção e finitamente gerado. O grupo $B_n(M)/\Gamma_2(P_n(M))$ é um grupo cristalográfico (veja [24, Teorema 2.6]), portanto, não possui subgrupo normal finito. Assim, pelo Teorema 4.15, o grupo $B_n(M)/\Gamma_3(P_n(M))$ é quase cristalográfico. \square

A seguir estabeleceremos uma relação entre os grupos de tranças virtuais e os grupos quase cristalográficos.

Teorema 4.17. *O grupo $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$ é quase cristalográfico de dimensão $\frac{n(n-1)(2n-3)}{2}$ e grupo de holonomia S_n para $n \geq 3$.*

Demonstração. Usaremos o Teorema 4.15 para demonstrar esse resultado. Foi mostrado na Proposição 15 de [8] que o grupo $\Gamma_2(VP_n)/\Gamma_3(VP_n)$ é Abelian livre de posto $\frac{n(n-1)(2n-3)}{2}$ para $n \geq 3$. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \Gamma_2(VP_n)/\Gamma_3(VP_n) \longrightarrow VP_n/\Gamma_3(VP_n) \xrightarrow{f} VP_n/\Gamma_2(VP_n) \longrightarrow 1.$$

Os grupos das pontas dessa sequência exata curta são finitamente gerados, logo, $VP_n/\Gamma_3(VP_n)$ é finitamente gerado. Além disso, mostramos no Teorema 2.2 que $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$ é um grupo cristalográfico e, portanto não possui subgrupo normal finito. Assim, pelo Teorema 4.15, o grupo $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$ é quase cristalográfico. Além disso, observando a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow VP_n/\Gamma_3(VP_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_3(VP_n) \xrightarrow{f} S_n \longrightarrow 1,$$

concluímos que $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$ é quase cristalográfico de dimensão $n(n-1) + \frac{n(n-1)(2n-3)}{2}$ e grupo de holonomia S_n . \square

Também podemos utilizar o Teorema 4.15 para introduzir uma relação entre o grupo de tranças planas virtuais VT_n (resp. grupo de tranças irrestrita virtuais UVB_n) e os grupos quase cristalográficos. Para isso, vamos apresentar os grupos de Artin.

Os grupos de Artin são uma generalização dos grupos de tranças. Um grupo A é dito ser um **grupo de Artin** se é um grupo que admite uma apresentação da forma

$$A = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j}_{m_{ji}} \text{ para todo } i \neq j \rangle,$$

onde $m_{ij} = m_{ji}$ é um número inteiro maior ou igual a 2 ou $m_{ij} = \infty$ (caso em que omitimos a relação entre s_i e s_j). Um grupo de Artin é dito um **grupo de Artin right-angled** (abreviando RAAG) se $m_{ij} \in \{2, \infty\}$ para todo i, j . Para mais detalhes sobre os grupos de RAAG veja [21].

Bardakov, Bellingeri e Damiani mostraram no Teorema 2.7 de [10] que o grupo UVP_n é um grupo de RAAG e Naik, Nanda e Singh mostraram que o grupo PVT_n é, também, um grupo de RAAG (veja [50, Corolário 3.4]). Além disso, Wade mostrou que se A é um grupo de RAAG e $k \in \mathbb{N}$, então $\Gamma_k(A)/\Gamma_{k+1}(A)$ é Abeliano livre e $A/\Gamma_k(A)$ é um grupo nilpotente livre de torção (veja [58, Teorema 6.4]). Logo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.18. *Sejam $k, n \geq 3$.*

(i) *O grupo $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ é quase cristalográfico com holonomia S_n .*

(ii) *O grupo $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$ é quase cristalográfico com holonomia S_n .*

Demonstração. Considere G sendo $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ (resp. $UVB_n/\Gamma_k(UVP_n)$) e N sendo PVT_n (resp. UVP_n). Com o exposto acima sabemos que $\Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N)$ é grupo Abeliano livre e $N/\Gamma_{k+1}(N)$ é nilpotente. Além disso, $N/\Gamma_{k+1}(N)$ finitamente gerado. Para confirmar essa afirmação basta considerar a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N) \longrightarrow N/\Gamma_{k+1}(N) \xrightarrow{f} N/\Gamma_k(N) \longrightarrow 1,$$

e realizar indução em k . Já mostramos que $G/\Gamma_2(N)$ é um grupo cristalográfico (veja os Teoremas 2.5 e 3.1), sabemos que $G/\Gamma_2(N)$ não possui subgrupo normal finito (Lema 4.14). Considerando a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N) \xrightarrow{\iota} G/\Gamma_{k+1}(N) \xrightarrow{f} G/\Gamma_k(N) \longrightarrow 1,$$

e realizando indução em k garantimos que $G/\Gamma_{k-1}(N)$ não possui subgrupo normal finito. Portanto, pelo Teorema 4.15, o grupo $G/\Gamma_k(N)$ é quase cristalográfico. \square

Para conhecer a dimensão de $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ (resp. $UVB_n/\Gamma_k(UDP_n)$) devemos conhecer o posto de $\Gamma_k(PVT_n)/\Gamma_{k+1}(PVT_n)$ (resp. $\Gamma_k(UDP_n)/\Gamma_{k+1}(UDP_n)$) para $k \geq 1$. Ainda mais, podemos estudar a estrutura dos grupos $VB_n/\Gamma_3(VP_n)$, $VT_n/\Gamma_k(PVT_n)$ e $UVB_n/\Gamma_k(UDP_n)$ utilizando as ideias apresentadas nas demonstrações dos Teoremas 4.1, 4.3 e 4.4. Na seção 4.1.1, estudamos alguns aspectos estruturais dos grupos $VB_3/\Gamma_3(VP_3)$ e $VT_4/\Gamma_3(PVT_4)$.

4.4 Generalizações do grupo de tranças e os grupos cristalográficos

Nesta seção, buscaremos estabelecer uma relação entre outros grupos parecidos com grupos de tranças, por exemplo, os grupos definidos na Figura 1.4 com os grupos cristalográficos. Já mostramos que os grupos $WB_n/\Gamma_2(WP_n)$, $UVB_n/\Gamma_2(UDP_n)$, FWB_n e $FVB_n/\Gamma_2(FVP_n)$ são grupos cristalográficos (veja os Teoremas 2.5 e 3.2). Podemos utilizar os Teoremas 4.1, 4.3 e 4.4 para estudar a estrutura desses grupos. Em especial, podemos decidir quando dois elementos de FWB_n são conjugados, além disso, todos os elementos de ordem finita de FWB_n são conhecidos.

O **grupo de tranças virtuais de Gauss** GVB_n é o grupo obtido de FVB_n adicionando as relações $\sigma_i\rho_i = \rho_i\sigma_i$, para $i = 1, \dots, n-1$. Seja $\pi_P: GVB_n \rightarrow S_n$, onde $\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $\tau_i = (i, i+1)$. O **grupo de tranças virtuais puras de Gauss** GVP_n é definido como sendo o núcleo de π_P . Uma apresentação para GVP_n foi dada na Proposição 5.6 de [10], usando essa apresentação concluímos que $GVB_n/\Gamma_2(GVP_n)$ não é um grupo cristalográfico. Isso ocorre porque a abelianização do grupo de tranças virtuais puras de Gauss GVP_n possui elementos de ordem finita. No entanto, no que diz respeito aos aspectos estruturais, podemos tentar adaptar as mesmas técnicas para afirmar e provar versões equivalentes dos Teoremas 3.3, 3.4, 3.5 para o grupo $GVB_n/\Gamma_2(GVP_n)$.

Lembramos, $\pi_K: VB_n \rightarrow S_n$ é o homomorfismo definido por $\pi_K(\sigma_i) = 1$ e $\pi_K(\rho_i) = \tau_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $\tau_i = (i, i+1)$ e o núcleo de π_K é denotado por KB_n . Dessa forma, obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow KB_n \longrightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_K} S_n \longrightarrow 1,$$

com a qual obtemos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow KB_n/\Gamma_2(KB_n) \longrightarrow VB_n/\Gamma_2(KB_n) \xrightarrow{\bar{\pi}_K} S_n \longrightarrow 1. \quad (4.8)$$

Proposição 4.19 (Proposição 17 de [8]). *O grupo KB_n admite uma apresentação com os geradores $x_{k,l}$, $1 \leq k \neq l \leq n$, e as seguintes relações*

- $x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j}$,
- $x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}$,

onde letras diferentes indicam índices diferentes.

É possível provar que a ação de S_n em $KB_n/\Gamma_2(KB_n)$ não é injetiva, assim, podemos concluir que o grupo $VB_n/\Gamma_2(KB_n)$ não é cristalográfico para $n \geq 3$.

Proposição 4.20. *O grupo quociente $VB_n/\Gamma_2(KB_n)$ é cristalográfico se, e somente se, $n = 2$.*

Demonstração. Da Proposição 19 de [8] temos que $KB_n/\Gamma_2(KB_n)$ é isomorfo a \mathbb{Z}^2 para $n = 2, 3$ e é isomorfo a \mathbb{Z} para $n \geq 4$. A ação de permutação de S_n em KB_n foi descrita na Proposição 3.1 de [16] e induz uma ação de S_n em $KB_n/\Gamma_2(KB_n)$.

Notemos que $KB_2/\Gamma_2(KB_2)$ é gerado por $x_{1,2}$ e $x_{2,1}$ e claramente a representação de holonomia de $S_2 \rightarrow \text{Aut}(KB_2/\Gamma_2(KB_2))$ é injetiva.

Seja $n = 3$. Na prova da Proposição 19 de [8] os autores mostraram que $x_{1,2} = x_{2,3} = x_{3,1}$ e $x_{1,3} = x_{3,2} = x_{2,1}$ em $KB_3/\Gamma_2(KB_3)$. Assim, o automorfismo de $KB_3/\Gamma_2(KB_3) = \mathbb{Z}^2$ induzido pela permutação $(1, 2, 3)$ é a identidade. Portanto, a representação de $S_3 \rightarrow \text{Aut}(KB_3/\Gamma_2(KB_3))$ não é injetiva e $VB_3/\Gamma_2(KB_3)$ não é cristalográfico.

Não é difícil mostrar que a ação de S_n em $KB_n/\Gamma_2(KB_n)$ não é injetiva para $n \geq 4$, assim concluímos que o grupo $VB_n/\Gamma_2(KB_n)$ não é cristalográfico. \square

Mas, como foi feito nos Teoremas 2.6, 2.8 e 2.11 para $VB_n/\Gamma_2(VP_n)$, adaptando as técnicas utilizadas, podemos estudar a estrutura do grupo quociente $VB_n/\Gamma_2(KB_n)$.

O monoide de tranças singulares com n cordas SB_n foi introduzido de forma independente por Baez [4] e Birman [17]. Foi mostrado em [30] que o monoide de tranças singulares SB_n é realizado em um grupo chamado de **grupo de tranças singulares** denotado por SG_n . Na seção 2 de [30] é dada uma apresentação para o grupo SG_n .

Seja $\pi: SG_n \rightarrow S_n$ o epimorfismo que associa os geradores σ_i e τ_i de SG_n a transposição $(i, i + 1)$ para $i = 1, \dots, n - 1$. O núcleo de π é chamado de **grupo de tranças puras singulares** e denotado por SP_n . Uma apresentação para SP_2 (resp. SP_3) é dada no Lema 3.1 item (1) (resp. Teorema 3.9) de [11]. A ação de SG_2 (resp. SG_3) é dada no Lema 3.1 item (2) (resp. Proposição 4.1) de [11]. Com essas informações, podemos concluir que os grupos SG_2 e $SG_3/\Gamma_2(SP_3)$ são grupos cristalográficos de dimensão 2 e 6 com grupo de holonomia S_2 e S_3 respectivamente.

Um outro grupo o qual se relaciona aos grupos de tranças é o grupo de tranças singulares virtuais. As tranças singulares virtuais são semelhantes às tranças clássicas, com a diferença que contêm cruzamentos virtuais e cruzamentos singulares clássicos. O monoide de tranças singulares virtuais $VS B_n$ foi definido por Caprau e Yeung em [19], os autores também mostraram que o monoide $VS B_n$ mergulha em um grupo que é chamado

de **grupo de tranças singulares virtuais** e é denotado por VSG_n . Uma apresentação para o grupo VSG_n é dada no Teorema 9 de [19].

Podemos considerar um epimorfismo $\pi: VSG_n \rightarrow S_n$, que associa cada trança singular virtual com um elemento de S_n . O núcleo $\ker(\pi)$ desse epimorfismo é denotado por $VSPG_n$ e é conhecido como o **grupo de tranças puras singulares virtuais**. Uma apresentação do grupo $VSPG_n$ é dada no Teorema 14 de [19]. Foi mostrado no Corolário 13 de [19] que $VSG_n = VSPG_n \rtimes S_n$ e a ação de S_n em $VSPG_n$ é descrita no Corolário 11 desse mesmo artigo. Utilizando essas informações podemos mostrar que $VSG_n/\Gamma_2(VSPG_n)$ é um grupo cristalográfico de dimensão $2(n(n-1))$ e grupo de holonomia S_n .

4.4.1 O grupo de tranças loop puras estendido

Seja M uma variedade orientável, conexa, compacta e seja N uma subvariedade contida no interior de M . Um auto-homeomorfismo do par (M, N) é um homeomorfismo $f: M \rightarrow M$ que fixa o bordo de M , preserva a orientação em M e fixa globalmente N . Denotamos por $\text{Homeo}(M; N)$ o grupo formado com os auto-homeomorfismo de (M, N) que preserva a orientação em M e em N . A operação utilizada no grupo $\text{Homeo}(M; N)$ é composição usual de funções.

O **mapping class group** de uma 3-variedade M com respeito a uma subvariedade N , denotado por $MCG(M, N)$, é o grupo de classes de isotopia dos auto-homeomorfismos de $\text{Homeo}(M; N)$, onde a operação é a composição usual. O **pure mapping class group** de uma 3-variedade M com respeito a uma subvariedade N , denotado por $PMCG(M, N)$, é o subgrupo dos elementos de $MCG(M, N)$ que fixam as componentes conexas de N . Denotemos por $\text{Homeo}(M; N^*)$ o grupo dos auto-homeomorfismos de (M, N) , removendo a condição de preservar a orientação em N , onde a operação é a composição usual. O **extended mapping class group** de uma 3-variedade M com respeito a uma subvariedade N , denotado por $MCG(M, N^*)$, é o grupo das classes de isotopia dos auto-homeomorfismos de $\text{Homeo}(M; N^*)$, onde a operação é determinada pela composição. O **pure extended mapping class group** de uma 3-variedade M com respeito a uma subvariedade N , denotado por $PMCG(M, N^*)$, é o subgrupo dos elementos de $MCG(M; N^*)$ que fixam as componentes conexas de N . Para mais detalhes veja [28].

Seja $n \geq 1$. Sejam B^3 a bola de dimensão 3 e $C = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ uma coleção de n círculos disjuntos, orientados, sem nós, que formam uma ligação trivial de n componentes em \mathbb{R}^3 . O **grupo de tranças de loop** com n componentes, denotado por LB_n , é o **mapping class group** $MCG(B^3, C)$. O **grupo de tranças de loop puras** com n componentes, denotado por PLB_n , é o **pure mapping class group** $PMCG(B^3, C)$. Similarmente, o **grupo de tranças de loop estendido**, denotado por LB_n^{ext} , é o **extended mapping class group** $MCG(B^3, C^*)$. O **grupo de tranças de loop puras estendido**, denotado por PLB_n^{ext} , é

o *pure extended mapping class group* $PMCG(B^3, C^*)$. Para mais detalhes veja as seções 2 e 3 de [22].

Foi mostrado no Corolário 6.10 de [22] que o grupo LB_n é isomorfo ao grupo WB_n , o mesmo vale para suas respectivas partes puras. Utilizando a Proposição 2.2 de [18] e as informações contidas na demonstração da Proposição 3.12 de [22], podemos concluir que $PLB_n^{ext} = WP_n \rtimes (\mathbb{Z}_2)^n$. Como isso obtemos a seguinte apresentação para o grupo PLB_n^{ext} .

Teorema 4.21 (Proposição 4.8, [22]). *Para $n \geq 2$, o grupo WP_n^{ext} admite a seguinte apresentação:*

- *Geradores:*

$$\alpha_{i,j} \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

$$\tau_i \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

- *Relações:*

$$\alpha_{i,j}\alpha_{k,l} = \alpha_{k,l}\alpha_{i,j} \text{ para } i, j, k, l \text{ distintos.}$$

$$\alpha_{i,k}\alpha_{j,k} = \alpha_{j,k}\alpha_{i,k} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

$$\alpha_{i,j}(\alpha_{i,k}\alpha_{j,k}) = (\alpha_{i,k}\alpha_{j,k})\alpha_{i,j} \text{ para } i, j, k \text{ distintos.}$$

$$\tau_i^2 = 1 \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

$$\tau_i\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}\tau_i \text{ para } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

$$\tau_i\alpha_{j,k} = \alpha_{j,k}\tau_i \text{ para } 1 \leq j \neq k \leq n.$$

$$\tau_i\alpha_{j,i}\tau_i^{-1} = \alpha_{j,i}^{-1} \text{ para } 1 \leq j \neq i \leq n.$$

Na demonstração da Proposição 3.12 de [22] foi apresentada a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow WP_n \longrightarrow PLB_n^{ext} \xrightarrow{p} (\mathbb{Z}_2)^n \longrightarrow 1,$$

que nos fornece a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow WP_n/\Gamma_2(WP_n) \longrightarrow PLB_n^{ext}/\Gamma_2(WP_n) \xrightarrow{\bar{p}} (\mathbb{Z}_2)^n \longrightarrow 1. \quad (4.9)$$

A ação de $(\mathbb{Z}_2)^n$ em WP_n é descrita no Teorema 4.21, a qual escreveremos a seguir

$$\tau_k\alpha_{i,j}\tau_k = \begin{cases} \alpha_{i,j}^{-1}, & \text{se } k = j. \\ \alpha_{i,j}, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (4.10)$$

para todo $1 \leq i \neq j \leq n$ e $k = 1, \dots, n$.

A função $p: PLB_n^{ext} \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ é definida da seguinte maneira: envia um homeomorfismo invertendo a orientação na i -ésima componente de C e preserva a orientação de

todas as outras componentes, para $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ onde a entrada não nula é na posição i .

A seguir, relacionamos um quociente do grupo de tranças de loop puras estendido aos grupos cristalográficos.

Teorema 4.22. *O grupo $PLB_n^{ext}/\Gamma_2(WP_n)$ é um grupo cristalográfico de dimensão $n(n-1)$ e grupo de holonomia $(\mathbb{Z}_2)^n$.*

Demonstração. Utilizando a apresentação de WP_n , veja Proposição 1.13, é possível mostrar que $WP_n/\Gamma_2(WP_n)$ é isomorfo ao grupo Abelian livre $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$. A ação de $(\mathbb{Z}_2)^n$ em WP_n , dada em (4.10), induz uma ação injetiva de $(\mathbb{Z}_2)^n$ em $WP_n/\Gamma_2(WP_n)$. Portanto, a prova segue de forma análoga as provas dos Teoremas 2.2 and 3.1. \square

Notamos que a única torção possível em $PLB_n^{ext}/\Gamma_2(WP_n)$ é 2. Podemos estudar outros aspectos estruturais do grupo $PLB_n^{ext}/\Gamma_2(WP_n)$, como as classes de conjugação de elementos e a realização de grupo.

[53]

Referências Bibliográficas

- [1] ARTIN, E. Braids and permutations. *Annals of Mathematics. Second Series* 48 (1947), 643–649.
- [2] ARTIN, E. Theory of braids. *Annals of Mathematics. Second Series* 48 (1947), 101–126.
- [3] AUSLANDER, L. Bieberbach’s theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. *Annals of Mathematics. Second Series* 71 (1960), 579–590.
- [4] BAEZ, J. C. Link invariants of finite type and perturbation theory. *Letters in Mathematical Physics* 26, 1 (1992), 43–51.
- [5] BARDAKOV, V., EMEL’YANENKOV, I., IVANOV, M., KOZLOVSKAYA, T., NASYBULLOV, T., AND VESNIN, A. Virtual and universal braid groups, their quotients and representations. *Journal of Group Theory* 25, 4 (2022), 679–712.
- [6] BARDAKOV, V., SINGH, M., AND VESNIN, A. Structural aspects of twin and pure twin groups. *Geometriae Dedicata* 203 (2019), 135–154.
- [7] BARDAKOV, V. G. The virtual and universal braids. *Fundamenta Mathematicae* 184 (2004), 1–18.
- [8] BARDAKOV, V. G., AND BELLINGERI, P. Combinatorial properties of virtual braids. *Topology and its Applications* 156, 6 (2009), 1071–1082.
- [9] BARDAKOV, V. G., AND BELLINGERI, P. On residual properties of pure braid groups of closed surfaces. *Communications in Algebra* 37, 5 (2009), 1481–1490.
- [10] BARDAKOV, V. G., BELLINGERI, P., AND DAMIANI, C. Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 24, 12 (2015), 1550063.
- [11] BARDAKOV, V. G., AND KOZLOVSKAYA, T. A. On 3-strand singular pure braid group. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 29, 10 (2020), 20. Id/No 2042001.

- [12] BARTHOLDI, L., ENRIQUEZ, B., ETINGOF, P., AND RAINS, E. Groups and Lie algebras corresponding to the Yang-Baxter equations. *Journal of Algebra* 305, 2 (2006), 742–764.
- [13] BARTHOLOMEW, A., FENN, R., KAMADA, N., AND KAMADA, S. Doodles on surfaces. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 27, 12 (2018), 26. Id/No 1850071.
- [14] BELLINGERI, P. On presentations of surface braid groups. *Journal of Algebra* 274, 2 (2004), 543–563.
- [15] BELLINGERI, P., GUASCHI, J., AND MAKRI, S. Unrestricted virtual braids and crystallographic braid groups. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Third Series* 28, 3 (2022), 16. Id/No 63.
- [16] BELLINGERI, P., AND PARIS, L. Virtual braids and permutations. *Annales de l'Institut Fourier* 70, 3 (2020), 1341–1362.
- [17] BIRMAN, J. S. On braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 22 (1969), 41–72.
- [18] BRENDLE, T. E., AND HATCHER, A. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici* 88, 1 (2013), 131–162.
- [19] CAPRAU, C., AND YEUNG, A. Algebraic structures among virtual singular braids. *arXiv preprint arXiv:2201.09187* (2022).
- [20] CHARLAP, L. S. *Bieberbach groups and flat manifolds*. Universitext. Springer, Cham, 1986.
- [21] CHARNEY, R. An introduction to right-angled Artin groups. *Geometriae Dedicata* 125 (2007), 141–158.
- [22] DAMIANI, C. A journey through loop braid groups. *Expositiones Mathematicae* 35, 3 (2017), 252–285.
- [23] DEKIMPE, K. *Almost-Bieberbach groups: affine and polynomial structures*. Springer, 2006.
- [24] DINIZ, R. S. *Grupos de tranças de superfícies finitamente perfuradas e grupos cristalográficos*. PhD thesis, Universidade Federal de São Carlos, 2020.
- [25] EPSTEIN, D. B. A. Ends. In *Topology of 3-manifolds and related topics. Proceedings of the University of Georgia Institute 1961*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1962, pp. 110–117.

- [26] FADELL, E., AND NEUWIRTH, L. Configuration spaces. *Mathematica Scandinavica* 10 (1962), 111–118.
- [27] FALK, M., AND RANDELL, R. The lower central series of a fiber-type arrangement. *Inventiones mathematicae* 82, 1 (1985), 77–88.
- [28] FARB, B., AND MARGALIT, D. *A primer on mapping class groups*, vol. 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011.
- [29] FARRELL, F. T., AND JONES, L. E. Isomorphism conjectures in algebraic K -theory. *Journal of the American Mathematical Society* 6, 2 (1993), 249–297.
- [30] FENN, R., KEYMAN, E., AND ROURKE, C. The singular braid monoid embeds in a group. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 7, 07 (1998), 881–892.
- [31] FENN, R., RIMÁNYI, R., AND ROURKE, C. The braid-permutation group. *Topology* 36, 1 (1997), 123–135.
- [32] FENN, R., AND TAYLOR, P. Introducing doodles. *Topology of low-dimensional manifolds*, Proc. 2nd Sussex Conf. 1977, Lect. Notes Math. 722, 37–43 (1979)., 1979.
- [33] FOX, R. H. Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring. *Annals of Mathematics. Second Series* 57 (1953), 547–560.
- [34] GONÇALVES, D. L., AND GUASCHI, J. Braid groups of non-orientable surfaces and the Fadell–Neuwirth short exact sequence. *Journal of Pure and Applied Algebra* 214, 5 (2010), 667–677.
- [35] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., AND OCAMPO, O. A quotient of the artin braid groups related to crystallographic groups. *Journal of Algebra* 474 (2017), 393–423.
- [36] GONÇALVES, D. L., GUASCHI, J., OCAMPO, O., AND E PEREIRO, C. M. Crystallographic groups and flat manifolds from surface braid groups. *Topology and its Applications* 293 (2021), 107560.
- [37] GONÇALVES, D. L., AND GUASCHI, J. *The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups*. Cham: Springer, 2013.
- [38] HALL, M. *The theory of groups*. The Macmillan Company, 1963.
- [39] KAMADA, S. Braid presentation of virtual knots and welded knots. *Osaka Journal of Mathematics* 44, 2 (2007), 441–458.
- [40] KAUFFMAN, L. H. Virtual knot theory. *European Journal of Combinatorics* 20, 7 (1999), 663–690.

- [41] KHOVANOV, M. Doodle groups. *Transactions of the American Mathematical Society* 349, 6 (1997), 2297–2315.
- [42] KUMAR, P., NAIK, T. K., AND SINGH, M. Congruence subgroups and crystallographic quotients of small coxeter groups. *arXiv preprint arXiv:2212.09084* (2022).
- [43] LAMBROPOULOU, S. Braid structures in knot complements, handlebodies and 3-manifolds. In *Knots In Hellas' 98*. World Scientific, 2000, pp. 274–289.
- [44] MAGNUS, W., KARRASS, A., AND SOLITAR, D. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Courier Corporation, 2004.
- [45] MAKRI, S. The unrestricted virtual braid groups UVB_n . *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 31, 12 (2022), 21. Id/No 2250087.
- [46] MARIN, I. Crystallographic groups and flat manifolds from complex reflection groups. *Geometriae Dedicata* 182 (2016), 233–247.
- [47] MENESES, J. G. Ordering pure braid groups on compact, connected surfaces. *Pacific Journal of Mathematics* 203, 2 (2002), 369–378.
- [48] MURA, R. B., AND RHEMTULLA, A. *Orderable groups*, vol. 27 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1977.
- [49] NAIK, T. K., NANDA, N., AND SINGH, M. Conjugacy classes and automorphisms of twin groups. *Forum Mathematicum* 32, 5 (2020), 1095–1108.
- [50] NAIK, T. K., NANDA, N., AND SINGH, M. Structural aspects of virtual twin groups. *arXiv preprint arXiv:2008.10035* (2020).
- [51] NANDA, N., AND SINGH, M. Alexander and Markov theorems for virtual doodles. *The New York Journal of Mathematics* 27 (2021), 272–295.
- [52] OCAMPO, O. Bieberbach groups and flat manifolds with finite abelian holonomy from artin braid groups. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30, 9 (2021), 2150069.
- [53] OCAMPO, O., AND CERQUEIRA DOS SANTOS JÚNIOR, P. C. Virtual braid groups, virtual twin groups and crystallographic groups. *Journal of Algebra* (2023).
- [54] OCAMPO, O., AND SANTOS JÚNIOR, P. C. C. The conjugacy problem and virtually cyclic subgroups in the artin braid group quotient $B_n/[P_n, P_n]$. *Topology and its Applications* 293 (2021), 107564.
- [55] SUCIU, A. I., AND WANG, H. The pure braid groups and their relatives. In *Perspectives in Lie theory*. Springer, 2017, pp. 403–426.

- [56] SZCZEPANSKI, A. *Geometry of crystallographic groups*, vol. 4. World scientific, 2012.
- [57] VERSHININ, V. V. On homology of virtual braids and Burau representation. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 10, 5 (2001), 795–812.
- [58] WADE, R. D. The lower central series of a right-angled Artin group. *L'Enseignement Mathématique. 2e Série* 61, 3-4 (2015), 343–371.
- [59] WALL, C. T. C. Poincaré complexes. I. *Annals of Mathematics. Second Series* 86 (1967), 213–245.
- [60] WOLF, J. A. *Spaces of constant curvature*, vol. 372. American Mathematical Soc., 2011.