Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Álgebra Vetorial no Ensino Médio para o Ensino da Física

Hugo Gabriel Rodrigues de Souza

Salvador - Bahia

Junho de 2023

Álgebra Vetorial no Ensino Médio para o Ensino da Física

Hugo Gabriel Rodrigues de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Salvador - Bahia

Junho de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

S729 Souza, Hugo Gabriel Rodrigues de

Álgebra vetorial no ensino médio para o ensino da Física / Hugo Gabriel Rodrigues de Souza. – Salvador, 2023.

70 f.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2023.

1. Física. 2. Álgebra Vetorial. 3. Ensino e Aprendizagem. I. Barbosa, José Nelson Bastos. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 53

"Álgebra Vetorial no Ensino Médio para o Ensino da Física"

Hugo Gabriel Rodrigues de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 20/06/2023.

Banca Examinadora:

JBarbosa

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (orientador)
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
Universidade Federal da Bahia - UFBA

Nascimento

Prof. Dr. Jorge Costa do Nascimento
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Criador e Deus, Jeová! Que por sua bondade imerecida permitiu as circunstâncias ideais para que eu cursasse este mestrado.

À minha amada e querida esposa Catarine, me faltam palavras para agradecer do apoio incondicional e estar constantemente ao meu lado, compreendendo nos momentos de dificuldade e até mesmo aprendendo LaTeX para me ajudar na escrita. TE AMO, minha gatinha!

À minha mãe e meu pai que sempre me incentivaram em especial quando pensei em desistir e esteve ao meu lado deste o início na inscrição até a conclusão deste.

As minhas irmãs que nunca deixaram de acreditar que eu sempre me concentraria no que é mais importante.

A todos os professores do PROFMAT e meus queridos colegas de curso que enfrentaram ombro a ombro este mestrado!

Aos membros da banca, professores Jorge Costa e Joseph Nee, por terem aceitado o convite de participar deste importante momento e pelas ponderações ao meu trabalho. E ao professor José Nelson que aceitou a árdua tarefa de me orientar, sei que consumi muito do seu tempo e energias e apoiou de forma sublime na estruturação deste trabalho, muito obrigado por ter aceitado me orientar.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela".

Albert Einstein

Resumo

O ensino de Física para o ensino médio sempre encontra diversos desafios no processo de ensino-aprendizagem. Pode-se elencar alguns fatores, desde intrínsecos aos agentes (como a falta de conhecimento nas séries passadas por estudantes e a descontinuada formação docente) à fatores políticos (estrutura física da escola, diferença de currículo). Mas, o próprio caráter dos tópicos de física também contribuem como um grande desafio a ser superado nos livros didáticos, quer pela sua apresentação anacrônica dos conceitos quer pela apresentação compartimentada dos tópicos abordados. As grandezas vetoriais, frequentemente apresentadas no ano inicial mas trabalhadas durante todo o ensino médio, são comumente apresentadas de formas diferentes que acabam por confundir os estudantes quanto a sua real natureza a depender da condução do docente no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, apresentar os conceitos primários da Álgebra Linear no ensino médio pode ser um meio de não somente adicionar novos saberes matemáticos como também facilitar a compreensão dos tópicos de física pelos estudantes, ainda mantendo outros recursos didáticos. Deste modo, este trabalho se debruça sobre este último ponto apresentado, que se objetiva demonstrar como o ensino de álgebra linear no ensino médio pode facilitar a condução do processo de ensino-aprendizagem na disciplina de Física. Ainda, busca também apresentar outros recursos didáticos para tal condução, que se sustenta no uso de tecnologias no ensino, na apresentação da calculadora gráfica Geogebra e suas funções para demonstração visual dos conceitos.

Palavras-chave: Ensino de Física; Ensino Médio; Álgebra Vetorial; Geogebra; Processo de ensino e de aprendizagem

Abstract

The teaching of Physics for high school always finds several challenges in the teaching-learning process. Some factors can be listed, from intrinsic to agents (such as lack of knowledge in the series passed by students and discontinued teacher training) to political factors (school physical structure, curriculum difference). But, the very character of physics topics also contribute as a major challenge to be overcome in textbooks, either by their anachronistic presentation of concepts or compartmentalized presentation of the topics covered. Vector quantities, often presented in the initial year but worked throughout high school, are commonly presented in different ways that end up confusing students as to their real nature depending on the conduct of the teacher in the teaching process learning. For this, presenting the primary concepts of Linear Algebra in high school can be a means of not only adding new mathematical knowledge but also facilitating the understanding of physics topics by students, while maintaining other didactic resources. Thus, this work focuses on this last point presented, which aims to demonstrate how the teaching of linear algebra in high school can facilitate the conduct of the teaching-learning process in the discipline of physics. Still, it also seeks to present other didactic resources for such conduction, which is based on the use of technologies in teaching, in the presentation of the GeoGebra graphic calculator and its functions for visual demonstration of the concepts.

Keywords: Physics Teaching; High School; Vector Algebra; GeoGebra; Teaching and Learning Process

Sumário

Introdução **13**

1 USO DE TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA **14**

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **17**

3 ENSINO DE ÁLGEBRA VETORIAL E SUA RELAÇÃO COM A FÍSICA **19**

4 A Álgebra Vetorial **23**

4.1 O QUE SÃO VETORES 24

4.2 COMBINAÇÃO LINEAR E DEPENDÊNCIA LINEAR 26

4.3 BASES, DIMENSÕES E COORDENADAS 27

4.4 OPERAÇÕES COM VETORES: SOMA, EIXOS, DECOMPOSIÇÕES E MULTIPLICAÇÕES 28

5 A Física Vetorial **37**

5.1 REFERENCIAL 38

5.2 CINEMÁTICA VETORIAL 39

5.3 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO 45

5.4 FORÇA GRAVITACIONAL 48

5.5 ELETROSTÁTICA 50

5.6 MAGNETOSTÁTICA 53

6 O ENSINO DA ÁLGEBRA VETORIAL NO ENSINO MÉDIO **55**

7 GEOGEBRA E ÁLGEBRA VETORIAL COMO FACILITARDORES NO ENSINO DA FÍSICA **60**

7.1 Grandezas Físicas Vetoriais e suas operações 61

7.1.1 SOMA VETORIAL DE GRANDEZAS FÍSICAS 61

7.1.2 PRODUTO DE UM VETOR POR UM ESCALAR: BASES, COORDENADAS E DECOMPOSIÇÕES 63

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS **66**

Referências Bibliográficas **68**

Introdução

Atualmente, vive-se a era da tecnologia, momento marcado pelo demasiado acesso à informação e a dispositivos eletrônicos como tablets, celulares e computadores. Na escola, essa realidade não é muito diferente, tanto o é que, mesmo naquelas mais carentes de recursos econômicos, encontram-se tais aparelhos.

Entretanto, apesar desse advento tecnológico, tais recursos ainda são pouco explorados em sala de aula, fazendo, muitas vezes, com que o educando, por vezes amante da tecnologia, sinta-se dissociado do ambiente escolar que é ainda tão "tradicional" ou ultrapassado.

Aliado a isso, existe na rede pública brasileira de ensino uma outra grande problemática, qual seja: a falta de professores com a licenciatura na disciplina a ser ensinada na escola básica, como é o caso da Física. Diante disso, para que não se prejudiquem os alunos integralmente, professores de disciplinas afins, como os de Matemática, são designados a lecionar a matéria de Física, possibilitando, assim, que os estudantes tenham acesso aos conteúdos da matéria.

Sendo assim, eu, como docente de Matemática da rede pública do estado da Bahia, acabei por vivenciar essa realidade e tive que lecionar a disciplina de Física, dada a ausência de professores com formação naquela disciplina e, diante dessa situação, deparei-me com uma grande questão: Como explicar os "porquês" de alguns conteúdos de física.

Diante disso, surgiu a minha inquietação, o questionamento do motivo pelo qual o aluno do ensino médio não tem acesso a Álgebra Vetorial sendo que esta, facilitaria o ensino da Física. Atrelado a este questionamento, como poderia valer-se da tecnologia para facilitar a aprendizagem da Fisica?

Uma das hipóteses levantadas sobre essa dificuldade de compreensão dos conteúdos é a de que se tem uma metodologia ultrapassada, além do que há a pouca valorização do professor, juntamente às precárias condições de trabalho, dentre vários outros motivos (BONADIMAN; NONENMACHER, 2007). Há ainda, conforme já citado, o fato de o aprendiz saber que vai chegar na sala e ter aquela aula de sempre, sem nada motivante ou interessante (MORAES, 2009).

A presente pesquisa, portanto, pautou-se em inserir ao ensino da Física, a Álgebra Vetorial de tal modo que se facilite o ensino desta última aos estudantes do ensino médio, sendo o aplicativo GeoGebra o elo entre esse conteúdo e o estudante. O professor de Matemática será o facilitador dessa conexão, cabendo somente a ele os conhecimentos pormenorizados da álgebra vetorial, uma vez que os educandos não precisam, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), explorar tais conteúdos.

Desse modo, a hipótese dessa pesquisa é de que os conhecimentos da álgebra vetorial, quando ligados à Física, e por intermédio do aplicativo GeoGebra podem facilitar o ensino da Física tanto para a parte docente quanto a discente.

Diante do exposto, este trabalho se justifica pela experiência pessoal do seu autor que, conforme supramencionado, deparou-se com essa dificuldade dos estudantes na aprendizagem da Física, além da relevância social e científica da temática.

Esta pesquisa é de relevante importância para a academia, para a ciência, tendo em vista que se trata de mais uma explanação acerca dos conhecimentos da álgebra vetorial, ampliando debates úteis e enriquecedores para a Matemática, Física e ciência no geral, usando do aplicativo GeoGebra como um facilitador de aprendizagem no ensino médio.

Além disso, da importância acadêmico-científica, há a importância social desta produção, uma vez que, nos tempos modernos, é de fundamental importância a adaptação de todos os pilares sociais à tecnologia e a escola, instituição basilar para a formação de cidadãos, não pode furtar-se disso.

Expõe-se, ainda, que essa temática foi escolhida por, dentre os fatores supracitados, ser estudo de interesse da pessoa autora deste trabalho, agregando-lhe conhecimento e ampliando a sua criticidade.

Por fim, a presente análise possui como objetivo geral mostrar como o estudo da álgebra vetorial, aliada ao GeoGebra, auxilia no estudo da Física no ensino médio. Como objetivos específicos são citados os seguintes: expor a trajetória da Física e sua relação com a Matemática; explicar conceitos da Física, como vetores; facilitar o entendimento de definições algébricas, a exemplo de combinações lineares.

Capítulo 1

USO DE TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Conforme já explicitado, vive-se, atualmente na era da tecnologia, inclusive no ambiente escolar, mas nem sempre foi assim, houve uma evolução desses recursos tecnológicos ao longo do tempo:

> A evolução dos principais recursos para exponenciar e popularizar o ensino ao longo do tempo, deu-se da seguinte forma: O rádio educativo na década de 20 foi usado como ferramenta para a educação, tentando atingir a transmissão de conhecimento a muitos, incluindo analfabetos; A correspondência na década de 40, a TV em 1950, a informática em 1970 e a atual internet, desde os anos 90. No entanto é bem visível que o Brasil está muito atrasado quando o assunto é tecnologia, a verdade é que a tecnologia não é a realidade da maioria das instituições de ensino, principalmente na rede pública, e o pior é que essa realidade se agrava quando adentramos ao interior do país (FELIPE, 2015, p. 12).

Tedesco (2004), por sua vez, afirma que é preciso que se tenha a tecnologia na educação como parte de uma estratégia política educativa.

> [...] dada a diversidade de situações e o enorme dinamismo que existe nesse campo, as estratégias políticas deveriam basear-se no desenvolvimento de experiências, inovações e pesquisas particularmente direcionadas a identificar melhores caminhos para um acesso universal a essas modalidades, que evite o desenvolvimento de novas formas de exclusão e marginalidade (TEDESCO, 2004, p. 12).

Pautando-se na realidade brasileira durante o império, é preciso que se diga que o ensino da Matemática, nessa época, baseava-se na transmissão oral. Entretanto, nas primeiras décadas do século xx, existiram alguns movimentos de reorientação curricular que não surtiram efeitos, conforme bem demonstra Gussi (2011 p.81-82):

> A matemática nesse período sofreu arranjos, para se ajustar ao mundo industrial, à tecnologia e as mudanças sociopolíticas brasileiras. Pode-se dizer que não houve grandes progressos no ensino dessa disciplina, que continuava com os conteúdos já indicados e com as formas de ensino verbalista, memorística, livresca, elitista, tal como herdou do império.

Porém, na década de 1970, tais movimentos retraíram-se e, no ano de 1980, o Conselho Nacional de matemática dos Estados Unidos elaborou uma novidade para o ensino de Matemática, por intermédio da chamada "agenda para a ação", na qual foi destacada a necessidade de se resolver os problemas do ensino da Matemática. Conforme Nogueira (2007, p.25) nações de todo o globo passaram a adotar mudanças, tais como:

> Direcionamento de ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas aquisição de pré-requisitos para estudos posteriores; importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; ênfase na resolução de problemas, na exploração da matemática do cotidiano e na interdisciplinaridade.

A partir disso, muitas mudanças vêm acontecendo, sendo algumas incorporadas, inclusive, no ensino da Matemática no Brasil que, apesar dos avanços, ainda enfrenta muitos obstáculos, uma vez que se sabe que a disciplina desperta, algumas vezes, emoções e sentimentos negativos em muitos educandos nacionais e uma das que tem elevado índice de reprovação. D'Ambrósio (2008, p.80) expõe essa questão criticamente ao falar que:

> A escola não se justifica pela apresentação de conhecimentos obsoletos e ultrapassados e muitas vezes mortos, sobretudo ao se falar de ciência e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão de conhecimento vivo, integrados nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização da tecnologia na educação, informática e comunicação dominarão a tecnologia educativa no futuro.

Assim sendo, à medida que o tempo passa, surgem novas e diferentes formas de se utilizar a tecnologia na escola e isso tanto administrativa quanto pedagogicamente. Sendo válido salientar que a utilização de tais meios é importante para se construir e melhorar o conhecimento. Entretanto, não se deve somente instalar computadores e afins nas escolas, é preciso, também, que se reflita sobre como tal ferramenta pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem.

> É certo que a escola é uma instituição que há cinco mil anos se baseia no falar/ditar do mestre, na escrita manuscrita do aluno e, há quatro séculos, em um uso moderado da impressão. Uma verdadeira integração da informática supõe o abandono antropológico mais que milenar o que não pode ser feito em alguns anos (LÉVY, 1993, p.34).

Sendo assim, o computador é fundamental para que o aluno crie hipóteses, pesquise, explore e seja capaz de construir o seu próprio conhecimento, isto é, as Tecnologias da Informação e da Comunicação (TICs) são essenciais na contemporaneidade, possibilitando, até mesmo, mais facilidade na construção de conhecimento e uma das importantes ferramentas tecnológicas que merece atenção das escolas é o GeoGebra, software a ser analisado, nesta pesquisa, em capítulo próprio.

Capítulo 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o presente trabalho foram abordadas diferentes metodologias com o objetivo de alcançar a complexidade da temática. Para tal, foram utilizadas as seguintes metodologias: pesquisa bibliográfica, o uso da internet e análise do software GeoGebra.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu através do uso do método qualitativo. Foram utilizadas fontes bibliográficas e documentais, associando-as entre si como elementos interdependentes. As fontes bibliográficas utilizadas compreendem não somente especificamente a temática em estudo, mas obras correlacionadas, articulando-as com o cenário social e com a temática em estudo.

Foram utilizadas fontes através do uso da internet, tais como o geogebra.org, software necessário para dinamicidade e melhor entendimento da Matemática e da Física. Além disso, foram consultados estudos dos últimos anos disponíveis no Google Acadêmico, sendo artigos que envolvem, ainda que não integralmente, partes dos assuntos abordados nesta pesquisa, podendo citar: "O uso das TIC nas aulas de Matemática" de Felipe (2015) e "Ensino de Matemática com o uso das TIC" de Souza (2015).

Segundo Marconi e Lakatos (2007), a metodologia nasce da concepção sobre o que pode ser realizado e a partir da "tomada de decisão fundamenta-se naquilo que se afigura como lógico, racional, eficiente e eficaz". Lüdke e André (1986), por sua vez, afirmam que "para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele". Sendo assim, as metodologias apresentadas foram de suma importância para a concretização deste trabalho.

Por fim, no decorrer no trabalho, grandezas vetoriais serão denotadas por letras latinas representativas em negrito (**v**). Grandezas e entes escalares serão notadas por letras latinas ou gregas representativas sem formatação específica (v).

Capítulo 3

ENSINO DE ÁLGEBRA VETORIAL E SUA RELAÇÃO COM A FÍSICA

A natureza, o meio material em que vivemos, e seus comportamentos existem antes do aparecimento das primeiras espécies complexas na Terra; de fato, antecede, até mesmo, a formação do nosso planeta. A natureza e se permite independente de qualquer influência subjetiva do ser humano. O conhecimento da "natureza da natureza" se faz fundamental para que possamos, assim, transformá-la.

O estudo do comportamento natural é narrado nas paredes de cavernas em pinturas rupestres; em achados arqueológicos das mais antigas civilizações, como a egípcia e a mesopotâmica; em documentos da era de ouro da civilização Grega; nas transformações políticas e econômicas dos feudos europeus; e, nas pesquisas científicas das instituições que procuram respostas a comportamentos ainda não descritos (BONJORNO et al., 2016).

Os humanos, como seres sociais, tentam compreender e sistematizar estes distintos comportamentos de diversas maneiras, a fim de transformar a natureza para criação de tecnologias que ajudam o desenvolver da sociedade. A exemplos, foi conhecendo a natureza de "dureza" que se criou a pedra lascada; assim, facilitou o conhecimento do ciclo de vida "biológico" de animais e plantas que firmaram a sedentarização dos primeiros Homo sapiens nômades; a complexificação das tarefas iniciava e necessitava uma "comunicação" tão complexa quanto; e, assim, o desenvolver destas necessidades humanas nos levam aos dias atuais.

O desenvolvimento do estudo da natureza e suas aplicações não é linear nem inerente aos seres humanos, este segue a necessidade da comunidade; assim, à medida que a comunidade se complexifica, tal estudo precisa também se rearranjar, a fim de tornar tal sistematização do comportamento natural o mais próximo possível da materialidade. Essa sistematização mais complexa e firme se findou como "método científico", necessário para a comunhão e aceitação dos pesquisadores de uma comunidade não mais é concentrada em um assentamento, mas globalizada.

Não são poucas as maneiras cuja natureza se debruça, assim, se faz por necessário definir em convenção eventos naturais fundamentais que são refletidos em processos mensuráveis; estes processos mensuráveis se nominou por "grandezas físicas" – tudo aquilo que se consegue medir – cada uma com sua respectiva unidade de medida – a caracterização dimensional destas grandezas (TRANCANELLI, 2016).

Durante grande parte do século XX a comunidade científica não tinha convencionado unidades de medidas globais para tais grandezas. A evolução histórica destas grandezas fundamentais e suas unidades levaram cada comunidade a elaborar o seu próprio "sistema de medidas":

> Durante a idade média, era comum que cada reino determinasse suas unidades de comprimento de acordo com as partes do corpo do rei. Assim, surgiram unidades como pé, braça, polegada. No entanto, à medida que um povo entrava em contato com outros, principalmente para comprar e vender mercadorias, a diferença de unidades causa problemas, visto que o comprimento do pé de um soberano muito provavelmente não seria o mesmo do outro. Ainda que não se usasse as partes do corpo de uma pessoa como padrão, se cada cidade ou vilarejo adotasse sua unidade arbitrariamente, a confusão estaria armada na hora de travar relações comerciais (BONJORNO et al., 2016, p. 22).

Apesar da Revolução Francesa ter criado o Sistema Internacional de Unidades (SI) em 1790, com objetivo de internacionalizar as unidades das grandezas (Quadro 1), o SI se convencionou globalmente por volta de meio século depois (BONJORNO et al., 2016). O estudo da natureza se torna, com isso, facilmente comunicável entre os naturalistas de todo o globo.

Quadro 1: Unidades de medida do Sistema Internacional.

GRANDEZA	UNIDADE	SÍMBOLO
Comprimento	Metro	m
Massa	Quilograma	kg
Tempo	Segundo	s
Intensidade de Corrente Elétrica	Ampere	A
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de matéria	Mol	mol
Intensidade Luminosa	Candela	cd

Fonte: Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro)

Apesar da dificuldade de elencar um período para o surgimento da Física como grande área da ciência sem cair num grande anacronismo, convenciona-se que durante o período de Renascimento e na fundamentação de uma explicação metodológica e material em detrimento à vinculação religiosa.

Assim, a Física como área da ciência que estuda a "natureza" da natureza se faz fundamental, não apenas como uma matéria escolar ou área de estudo superior, mas como uma ferramenta científica determinada a conhecer mais aproximadamente a materialidade, a realidade em que vivemos e nos desenvolvemos enquanto seres sociais.

Sem dúvidas, os filósofos naturais descreviam suas observações, principalmente, por meio de descrições empíricas e discorridas. Porém, uma grande mudança na sistematização dos comportamentos naturais se fez essencial não apenas na descrição per si, mas também na previsão de eventos: a matemática.

A linguagem matemática foi uma ferramenta de comunicação imprescindível para com a natureza; seus métodos lógicos, axiomas, corolários etc. são fundamentais na descrição de eventos naturais. Kantorovich (1993, p. 59), ao falar sobre Galileu, aponta que "the book of nature is written in the language of mathematics"[1].

Assim como estudar um novo idioma, quanto mais conhecimento – e treino – neste, consegue-se melhor se comunicar com um não falante português, o melhor jeito de facilitar a compreensão nos comportamentos da natureza é aprender a se comunicar através de uma linguagem: a matemática.

[1]Em tradução livre: "O livro da natureza é escrito na linguagem da matemática".

A Álgebra Vetorial, área da matemática, é fundamental, nesse sentido, pois os sistema de equações lineares descrevem, majoritariamente, grande parte da linguagem trabalhada pela Mecânica Clássica, área da física que será foco neste trabalho.

Capítulo 4

A Álgebra Vetorial

Um dos tópicos principais nas discussões de Física durante as primeiras aulas no Ensino Médio, com certeza, são os entes denominados “vetores”.

Os vetores são comumente apresentados nos livros didáticos como seguimentos de retas orientados. Nicolau (2012, p. 74) não apresenta uma definição formal de vetores, apenas introduz aos leitores estudantes que “um vetor pode ser representado por um segmento de reta, que indica a direção, dotado de uma seta, indicativa de seu sentido”. Hewitt (2015, p. 28), ao comentar sobre soma de grandezas, comenta que “quando o comprimento e a direção de tais setas são desenhadas em escala, chamamos a seta de vetor”. Calçada et al. (2012 p. 143) descreve “consideremos um segmento orientado AB, não nulo. Consideremos, em seguida, o conjunto de todos os segmentos orientados que tenham o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Esse conjunto é um vetor”. Ramalho (2009, p. 119) explica que “vetor é o ente matemático caracterizado pelo que há de comum ao conjunto dos segmentos orientados acima descrito: o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido”. Por fim, Doca (2012, p. 97) os definem como “um ente matemático constituído de um módulo, uma direção e um sentido, utilizado em Física para representar as grandezas vetoriais [...] pode ser esboçado graficamente por segmento de reta orientado”.

Percebemos que todos estes autores de livros didáticos de Física utilizados nas escolas de ensino médio concordam sobre características dos vetores, mas apresentam definições formalmente diferentes. Ramalho e Calçada explicam vetores como algo que representa um “conjunto” de segmentos orientados de mesmas características; Hewitt os explicita como “setas desenhadas”; Doca como um “ente matemático” que apresenta características específicas e Nicolau acaba por não apresentar nenhuma definição formal, apenas sua representação. Apesar disso, todos os autores supracitados concordam que tal ente possui “módulo, direção e sentido”.

A divergência apresentada entre o conceito de vetores em diferentes livros didáticos pode gerar dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, assim, uma maneira de eliminar tal divergência é buscar a definição primária, e é a álgebra linear que dispõe da definição precisa de vetores.

4.1 O QUE SÃO VETORES

Para entender o que de fato a Álgebra Linear considera por vetores, precisa-se definir o Espaço Vetorial. Um conjunto V é um espaço vetorial quando obedece às seguintes propriedades (ZANI, 2003, p. 9-10):

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \ \forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$
- $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}, \ \forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$
- $\exists| \ 0 \in \mathbb{R} \mid 0{+}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}; \ \forall \ \boldsymbol{u} \in V$
- $\forall \ \boldsymbol{u} \in V, \ \exists \ \boldsymbol{v} \in V \,|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 0$
- $\lambda(\mu\boldsymbol{u}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{u}, \ \forall \ \boldsymbol{u} \in V \, e \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}, \ \forall \ \boldsymbol{u} \in V \, e \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}, \ \forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \, e \ \lambda \in \mathbb{R}$
- $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}; \ \forall \ \boldsymbol{u} \in V,$

com $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ $\in V, \ \forall \ \boldsymbol{u} \in V \, e \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ainda, Zani (2003) expressa:

> É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial de **vetores**, independente da natureza dos mesmos. Também chamamos de escalares os números reais quando estes desempenham o seu papel na ação de multiplicar um vetor (ZANI, 2003, p. 10, grifo nosso).

Qualquer ente matemático que pertence a um conjunto que obedece a tais propriedades e independentes de sua natureza é considerado, pela álgebra linear, um vetor – uma definição divergente da apresentada anteriormente por Calçada. Desse modo, matrizes, funções, conjunto de ordenados e, também, segmentos orientados de retas são representações distintas de um mesmo ente, os vetores.

Existem vantagens a trabalhar e operar com a definição formal de vetores do que com suas diversas representações. Cada representação possui pontos altos e baixos quando são dispostas a representar alguma característica física; por exemplo, matrizes são comumente apresentadas para representar tensores devido a sua facilidade de demonstrar as coordenadas que participam da natureza do evento, porém, pecam quanto a representação do comportamento de uma onda pois deixa implícito elementos importantes da mesma; de mesmo modo, funções são costumeiramente apresentadas para determinar o comportamento de uma onda – ou as movimentações de corpos na cinemática – pois demonstram facilmente elementos físicos nas equações, mas fica difícil interpretá-las quando representam campos físicos ou correntes de fluidos; ainda, segmentos orientados de reta são perfeitamente funcionais quando são representados para caracterizar linhas de força pois facilitam na interpretação de direção e sentido, porém são insuficientes para interpretar características de eventos quânticos.

Não há nada, porém, que impeça que matrizes possam representar o comportamento de ondas pois são vetores assim como funções, mas a imaginação do evento pelo estudante pode ser dificultada. Assim, a apresentação de grandezas vetoriais – a ser definidas mais a frente – exige do docente uma certa maturidade de compreensão da melhor forma de condução do processo de ensino-aprendizagem das disciplinas da ciência da natureza (VEIT e TEODORO, 2002).

Quadro 2: Exemplo de diferentes representações vetoriais.

Natureza do vetor	Representação
Função	$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$
Matriz	$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
Segmento de reta orientado	$\longrightarrow$

Fonte:ZANI, 2003

4.2 COMBINAÇÃO LINEAR E DEPENDÊNCIA LINEAR

Ao operar, por meio da soma e da multiplicação, dois vetores que pertencem a um espaço vetorial, resulta em um novo elemento também pertencentes ao espaço vetorial; assim a "combinação" destas duas operações é chamada de "combinação linear" (ZANI, 2003). Seja um conjunto V um espaço vetorial, que contém os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$, a combinação linear destes, geram um novo vetor $\boldsymbol{u}$ também pertencente à V, de forma:

$$\boldsymbol{u}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n$$

Esta definição é necessária para entender as dependências e independências entre vetores; ambas as relações traduzem efeitos e análises distintas em eventos físicos. Suponha-se o mesmo espaço vetorial V anteriormente descrito os mesmos vetores pertencentes; dizemos que tais vetores são linearmente independentes (LI) se a combinação linear entre eles resultarem numa anulação quando (ZANI, 2003):

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0, \text{ quando}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Caso contrário, dizemos que o conjunto de vetores são linearmente dependentes (LD).

4.3 BASES, DIMENSÕES E COORDENADAS

Zani (2003, p. 45) define base como “um conjunto de geradores que seja o menor possível, isto é, um conjunto que gere o espaço”. Tais geradores são conjuntos de vetores pertencentes a um espaço vetorial que, por meio de combinações lineares, pode-se obter outros vetores também pertencentes a tal espaço. Porém, não somente, “uma base de V é uma sequência de vetores linearmente independentes B de V **que também gera V** (ZANI, 2003, p. 45, grifo nosso).

Um exemplo importante de uma base é o conjunto de vetores $B = \{\mathbf{(1{,}0{,}0);(0{,}1{,}0);}$ $\mathbf{(0{,}0{,}1)}\}$, pertencentes a um espaço vetorial V. São LI pois a única combinação linear possível para que

$$\alpha_1\mathbf{(1{,}0{,}0)} + \alpha_2\mathbf{(0{,}1{,}0)} + \alpha_3\mathbf{(0{,}0{,}1)} = 0,$$

é quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, Assim, é possível construir todos os vetores possíveis pertencentes à V por meio de combinações lineares somente entre esses três vetores.

A dimensão de um espaço vetorial é determinada pelo número de vetores em uma base (ZANI, 2003). No exemplo anterior, o conjunto B, composto por três (3) vetores, são linearmente independentes e formam uma base; assim, a dimensão de V também é três (3). Por fim, ainda no exemplo anterior, vimos que qualquer vetor que pertence a V pode ser gerado por uma combinação linear das bases que constroem o referido espaço vetorial. Assim, um vetor $\boldsymbol{u}$ qualquer é gerado, nesse caso, por:

$$\text{u=}\alpha_1\mathbf{(1{,}0{,}0)} + \alpha_2\mathbf{(0{,}1{,}0)} + \alpha_3\mathbf{(0{,}0{,}1)}$$

Por exemplo, o vetor v=(3,2,1) pertence a V, pois pode ser gerado por uma combinação linear da supracitada base se os coeficientes escalares forem:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (3,2,1)$$

$$\boldsymbol{v} = (\alpha_1 \cdot 1,0,0) + (0,\alpha_2 \cdot 1,0) + (0,0,\alpha_3 \cdot 1) = (3,2,1)$$

$$\alpha_1 = 3; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 1$$

Estes escalares $\alpha_1 = 3; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 1$ são chamados de coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$. De um modo geral, as coordenadas de um vetor $\boldsymbol{v}$ pertencente a um espaço vetorial de dimensões finitas – ou seja, é gerado por uma quantidade finitas de vetores que formam uma base – são os coeficientes escalares da combinação linear da base que geram $\boldsymbol{v}$; $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots \alpha_n$ (ZANI, 2003).

Até aqui, representamos tais vetores como $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$, mas, assim como o comentário feito nos tópicos anteriores, não há inconsistências caso representássemos as mesmas definições mas em forma de matrizes ou funções. Inclusive, há vantagens na escolha de representações vetoriais diferentes na explicação apresentada acima; neste penúltimo exemplo, as coordenadas do vetor v pode ser mais facilmente identificadas por meio da representação matricial:

$$\mathrm{v}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De mesmo modo, se definirmos os vetores da base B como $\hat{\mathbf{i}} = (1,0,0); \hat{\mathbf{j}} = (0,1,0); \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, podemos representar o mesmo vetor $\boldsymbol{v}$ na representação funcional:

$$v_B = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

4.4 OPERAÇÕES COM VETORES: SOMA, EIXOS, DECOMPOSIÇÕES E MULTIPLICAÇÕES

Algumas operações dentre os vetores são necessárias pois a Física, como possuidora destes entes vetoriais, eventualmente operar-se-á a fim de analisar eventos naturais derivados.

Apesar de semelhantes palavras, os processos de soma vetorial são distintos. Considera-se os vetores $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v} \in V$, sendo V gerado por uma base $B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$, podemos escrever os mesmos como uma combinação linear dos vetores que formam a base B, tal que $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{b}_n$ *e* $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{b}_n$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; logo, um vetor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ é escrito como:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{w} = (\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n) + (\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{b}_n)$$

$$\boldsymbol{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{b}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{b}_n$$

Assim, escrevendo na forma funcional com respeito à base B, no novo vetor $\boldsymbol{w}$, a soma realizada se faz nas coordenadas das componentes semelhantes dos vetores somados (ZANI, 2003). A subtração se faz de maneira semelhante. Na representação matricial, o processo é similar, dados:

$$\boldsymbol{u}_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} e\ \boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

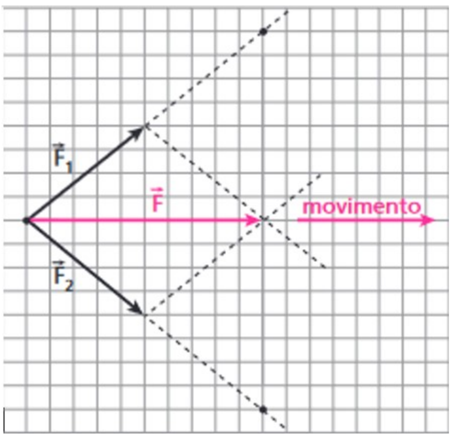
$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{u}_B + \boldsymbol{v}_B$$

$$\mathbf{w}_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

Porém, o processo não é tão trivial quanto a representação por segmentos de retas orientados. Um dos meios é a regra do paralelogramo, em que:

> [...] fazemos que os segmentos orientados representativos dos vetores tenham 'origens' coincidentes; da ponta aguçada do segmento orientado que representa um dos vetores, traçamos uma paralela ao segmento orientado que representa o outro vetor e vice-versa; o segmento orientado representativo do vetor resultante está na diagonal do paralelogramo obtido (DOCA, 2012).

Figura 1: Soma de vetores na representação de segmentos orientados pela regra do paralelogramo.



Fonte:DOCA, 2012

Deve-se atentar, ainda, a subtração de vetores nessa representação. Lembremos da definição de espaço vetorial que dispõe: "para cada $\boldsymbol{u} \in V$, existe $\boldsymbol{v} \in V$ tal que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 0$"

(ZANI, 2003). Assim, existe um vetor oposto tal que $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}$; portanto, precisamente ao definir, a subtração de vetores, na verdade, é uma adição de vetores, só que pelo seu vetor oposto. Isso, na representação por segmentos orientados, muda completamente de cara, modificando a natureza do evento caso ocorra algum desleixo.

Figura 2: Soma e subtração de vetores pela representação por segmentos orientados.

Fonte: DOCA, 2012

Assim, cabe a arguição do estudante ao resolver problemas ou do professor no seu processo de condução do ensino-aprendizagem a adotar a melhor maneira de abordar a operação a depender da aplicação desejada.

Já o produto em vetores pode-se dar de diferentes formas. O produto de um vetor por um escalar, inclusive, já foi descrito durante as definições do espaço vetorial; assim, na representação funcional em relação a uma base B de um espaço V de dimensões finitas, seja $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n$:

$$\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{w} = \lambda(\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n)$$

$$\boldsymbol{w} = (\lambda\alpha_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)\boldsymbol{b}_n$$

Assim, podemos aplicar a associatividade e analisar que tal operação “dilata” um vetor nas unidades do escalar. A representação matricial:

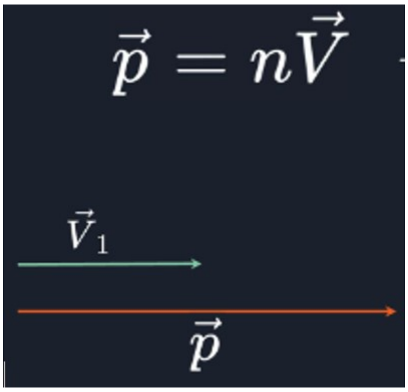
$$\boldsymbol{u}_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_B = \lambda \boldsymbol{u}_B$$

$$\boldsymbol{w}_B = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

possui operações semelhantes. Já a representação por seguimentos de retas:

Figura 3: Multiplicação de um vetor por um escalar na representação por segmentos orientados



Fonte: DOCA, 2012

Nesta última representação, demonstra-se que a multiplicação por um escalar apenas dilata o tamanho do vetor original, a não mudar sua direção; seu sentido altera-se, porém, a depender da natureza negativa do escalar.

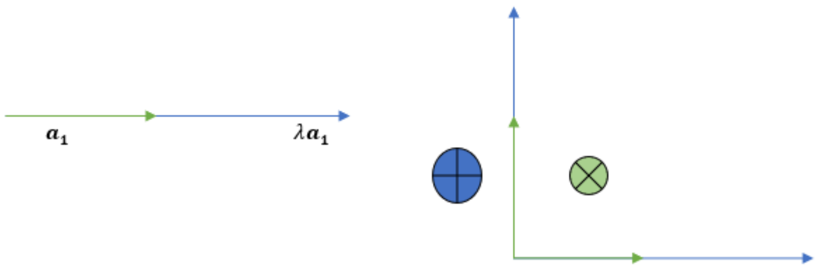
Precisadas estas operações e já conhecedores da definição de base de um espaço vetorial, podemos, finalmente, explicitar o motivo pelo qual vetores possuem "direção e sentido". Um eixo é um segmento de reta orientado que irá representar alguma grandeza, podendo ser vetorial ou não; um sistema de eixos, é o conjunto de mais de um eixo.

Uma características interessante das bases é que elas seus vetores constituintes formam um sistema de eixos para o espaço vetorial a qual pertence (ZANI, 2003), de modo em que eles são os vetores **unitários**¸ uma vez que qualquer vetor pode ser gerado por uma combinação linear dos vetores constituintes da base. Tomemos como exemplo um espaço vetorial V^1 de dimensão 1, cuja base é $A = (\boldsymbol{a}_1)$; a base pode gerar qualquer vetor pertencente a V^1, pois qualquer vetor $\boldsymbol{w}$ pertencente ao espaço vetorial pode ser escrito $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{a}_1$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Um outro bom exemplo é a base $B = \{\mathbf{(1{,}0{,}0);(0{,}1{,}0);(0{,}0{,}1)}\}$ geradora de um espaço vetorial V^3. Assim, esta base forma um sistema de eixos, de dimensão três. Ela é comumente apresentada como **"base canônica"** pois, caso suas coordenadas forem escalares reais, geram o espaço real $\mathbb{R}^3$, espaço físico em três dimensões que conhecemos na física apenas como “espaço” (ZANI, 2003).

O conceito de eixos fica mais palpável na representação por segmentos de retas:

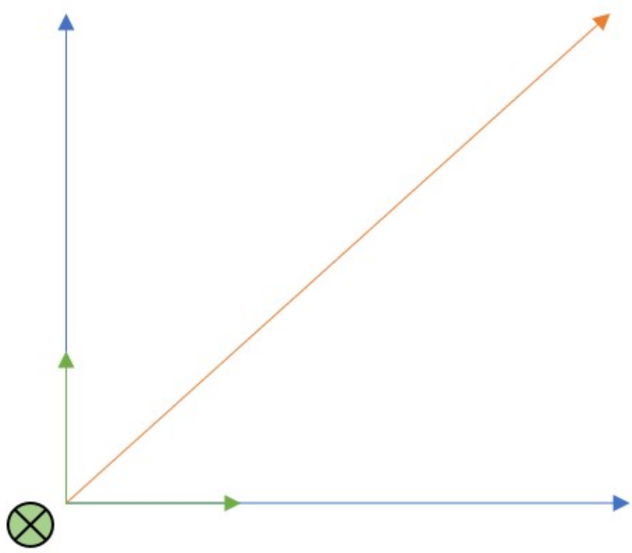
Figura 4: Eixos vetoriais em 1 e em 2 dimensões; em verde são os vetores da base e em azul qualquer vetor gerado pela base; em representação por segmento orientado



Fonte: ZANI, 2003

Nesse sentido, o que chama-se de decomposição nada mais é do que, dado um vetor $\boldsymbol{w}$ qualquer, pertencente a um espaço vetorial V,eu posso escrevê-lo na sua representação funcional em relação a alguma base de V. A exemplo, dado um espaço vetorial V de três dimensões cuja base $B =$ **{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}**;um vetor $\boldsymbol{u}$ é gerado como: $\boldsymbol{u} = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$, para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Isso significa que os vetores unitários serão dilatados em cada componente pelo valor do respectivo escalar. Considere um exemplo em que $\alpha_3 = 0$. Ver na figura a seguir:

Figura 5: Representação por segmento orientado do referido exemplo



Fonte: Elaboração própria;ZANI, 2003

Em laranja temos o vetor u, em verde o sistema de eixos formato pela base canônica B do $\mathbb{R}^2$, e em azul as suas componentes, na mesma direção dos eixos, mas "dilatadas" por valores escalares maiores que 1.

Com o sistema de eixos definidos, cujas orientações são convencionadas pelos pesquisadores, consegue-se adotar uma "referência", uma origem, de modo que os vetores sempre serão representados – na forma de segmentos orientados – por meio da relação com a mesma. É uma interpretação derivada da própria definição de vetores e pode ser facilmente observada por meio da representação funcional; a escrita de um vetor u se faz por meio das componentes de uma base, tal base, por consequência de sua natureza, é identificada como um sistema de eixos na representação por segmentos orientados e determinam uma "origem", da qual u está diretamente relacionado.

Há, também, as multiplicações "intravetoriais", que são operações multiplicativas entre vetores, que obedecem a regras diferentes da multiplicação por um escalar; são: o produto escalar, e o produto vetorial.

O produto escalar possui esse nome pois o resultado da operação resulta num escalar, conforme veremos abaixo; por exemplo, dados os vetores $\boldsymbol{u} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2$ e $\boldsymbol{v} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2$, o produto escalar entre eles é representado pelo símbolo "$\cdot$" e podemos escrever:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2) \cdot (\beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2)$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [(\alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \beta_1\boldsymbol{b}_1) + (\alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \beta_2\boldsymbol{b}_2) + (\alpha_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \beta_1\boldsymbol{b}_1) + (\alpha_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \beta_2\boldsymbol{b}_2)]$$

usando a propriedade distributiva, sétima propriedade da definição de vetores. Agora, pela quinta propriedade, podemos isolar os números escalares:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [(\alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \beta_1\boldsymbol{b}_1) + (\alpha_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \beta_2\boldsymbol{b}_2) + (\alpha_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \beta_1\boldsymbol{b}_1) + (\alpha_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \beta_2\boldsymbol{b}_2)]$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = [(\alpha_1\beta_1)\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1) + (\alpha_1\beta_2)\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2) + (\alpha_2\beta_1)\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1) + (\alpha_2\beta_2)\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2)]$$

Nota-se que, apesar da dura notação, já há familiaridade com o conceito de base e coordenadas, de modo que sabemos que $\mathbf{b}_n$ são vetores linearmente independentes entre si e representam uma base; inclusive, os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são escritos na mesma base; como as bases são vetores unitários, sabemos que seu "módulo", sua magnitude, é igual a 1.

Porém, existem tipos diferentes de base na matemática, mas, na física, a maioria dos eventos naturais são descritos por meio de uma **base ortonormal**: normal pois os vetores da base são unitários (normalizados) e ortogonais pois, formam um ângulo de 90º entre si. A representação por segmentos de reta orientados se torna mais evidente para enxergar essa característica, como quando tomamos a base canônica por exemplo, descrita nos parágrafos acima.

Numa base ortonormal, deriva-se a seguinte consequência:

- $\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{b}_n = \begin{cases} 0 & se\ m \neq n \\ 1 & se\ m = n \end{cases}$

Desse modo, para nosso exemplo, os produtos escalares de vetores ortogonais, da base, $\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_2}$ e $\mathbf{b_2} \cdot \mathbf{b_1}$ são iguais a 0; e, os produtos escalares de vetores da base, iguais, $\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_1}$ e $\mathbf{b_2} \cdot \mathbf{b_2}$ são iguais a 1; logo, obtemos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [(\alpha_1\beta_1)\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_1} + (\alpha_1\beta_2)\mathbf{b_1} \cdot \mathbf{b_2} + (\alpha_2\beta_1)\mathbf{b_2} \cdot \mathbf{b_1} + (\alpha_2\beta_2)\mathbf{b_2} \cdot \mathbf{b_2}]$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\alpha_1\beta_1) + (\alpha_2\beta_2)$$

Como resultado da operação, obtemos um escalar, que é a soma da multiplicação das coordenadas de cada vetor. Podemos expandir para um caso geral, para dois vetores de uma base com dimensão N qualquer:

$$u \cdot v = (\alpha_1\beta_1) + (\alpha_2\beta_2) + \cdots + (\alpha_n\beta_n)$$
$$\sum_{m=1}^{N}(\alpha_m\beta_m)$$

Que é a definição formal do produto escalar. Podemos expandir essa definição pelas regra:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathbf{cos}(\theta)$$

com θ sendo o ângulo que $\mathbf{u}$ faz com $\mathbf{v}$. Perceba que essa formulação sintética satisfaz as consequências apresentadas anteriormente, o módulo dos vetores unitários é 1, e, o ângulo entre eles é 90° (base ortonormal), assim, os termos ortogonais resultam zero, pois $cos(90°)= 0$.

Um outro tipo de multiplicação é o produto vetorial. Possui esse nome pois resulta em um outro vetor, perpendicular, ao mesmo tempo, aos dois vetores participantes da operação. Representado pelo símbolo "×", sua definição é:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathbf{sen}(\theta)\hat{n}$$

Sendo θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e $\hat{n}$ um vetor unitário perpendicular à $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Para melhor visualização, tomemos vetores em apenas uma dimensão; considere $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{b_1}$ e $\mathbf{v} = \beta\mathbf{b_1}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha\mathbf{b_1} \times \beta\mathbf{b_1}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\alpha\beta)\mathbf{b_1} \times \mathbf{b_1}$$

Usando a definição:

$$\mathbf{b_1} \times \mathbf{b_1} = |\mathbf{b_1}||\mathbf{b_1}|\mathbf{sen}(0)\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{b_1} \times \mathbf{b_1} = 1\hat{\mathbf{n}}$$

Como dito, $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular a $\mathbf{b_1}$, assim, o produto escalar adiciona mais uma dimensão ao sistema. Podemos convencionar $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{b_2}$ a fim de manter a coerência com a notação apresentada e, finalmente apresentar:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\alpha\beta)\mathbf{b_1} \times \mathbf{b_1}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\alpha\beta)\mathbf{b_2}$$

O produto vetorial entre dois vetores de uma dada dimensão resulta em um novo vetor em uma dimensão perpendicular à anterior. Podemos expandir essa explicação e apresentar a "regra cíclica da base canônica do $\mathbb{R}^3$":

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \qquad\qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \text{-}\hat{\mathbf{j}}$$

Com os elementos supracitados em mente, podemos partir para diferentes tópicos da Mecânica Clássica utilizando esses conceitos mas, devido às diferentes representações, acabam por serem apresentados ao estudante como entes distintos e desconexos.

Capítulo 5

A Física Vetorial

No ensino de Física no Ensino Médio se convencionou na apresentação primeira da Cinemática Escalar. A Cinemática é o estudo dos movimentos sem se preocupar com as causas que os motivaram (BONJORNO et al., 2016); em que são apresentados os conceitos de espaço percorrido, velocidade, aceleração, etc.. Porém, a cinemática escalar acaba por mascarar a real natureza desses conceitos, que são descritos em suas conformidades em tópicos mais a frente nos livros.

Grande parte dos eventos naturais que a Física estuda não podem ser descritos em sua completude quando se limita o horizonte de observação em prol da melhor "assimilação" dos conceitos por quem estuda. Apesar do aparente "formalismo" e do primeiro estranhamento dos tópicos de álgebra anteriormente apresentados por pessoas que não possuem contato direto com a área, curiosas, recém-chegadas ou estudantes sem o conhecimento fundamental, a aparência que se expressa é que a álgebra é um assunto "difícil" e que o estudo compartimentado é a melhor opção na hora de apresentar aos estudantes alguns eventos naturais, mesmo que em detrimento da real natureza do evento.

Na evolução do ensino dos tópicos de Física no Ensino Médio se estuda, por exemplo, "funções horárias" dos diversos tipos de movimento; o "princípio da interdependência dos movimentos" e "lançamentos oblíquo" de uma maneira tão compartimentada que associa-se que o estudo de tais assuntos são descritos por métodos diferentes, e não por entes que, podem não ter a mesma natureza, mas possuem as mesmas propriedades entre si, e que não há problema na mudança de representação.

Isso é muito bem exemplificado na seção anterior ao quanto as distintas definições de vetores apresentadas por autores de livros didáticos de Física para o Ensino Médio. A definição apresentada pela Álgebra Linear pode parecer, na sua aparência, em uma abstração muito grande, porém, é o professor, responsável por conduzir o processo de ensino-aprendizagem, é que deve ter a arguição suficientemente didática para exprimir a formalidade e exemplificá-la, utilizando exemplos comuns presentes na vida dos estudantes, a fim de retirar a abstração e trazer para a materialidade da vida cotidiana de quem aprende.

O estudante que se encontra no ensino médio, quando no melhor dos casos não apresentou dificuldades no aprendizado da matemática básica nos anos anteriores, já carrega em si conhecimentos das operações de soma e multiplicação, pode conseguir compreender com facilidade os conteúdos de álgebra uma vez que os conceitos de associatividade e distributividade são, justamente, as principais propriedades que definem um espaço vetorial; para além da existência de um vetor nulo, o vetor unitário, e um vetor oposto, que pode ser definido perfeitamente em sala de aula, dispensando a apresentação formal das propriedades "abstratas" do espaço vetorial.

5.1 REFERENCIAL

Um referencial é um ente físico, material, do qual se convenciona a "origem" de um sistema físico. Tal ente físico pode ser dotado de outras propriedades, como massa, velocidade e aceleração (DOCA, 2012).

A análise quantitativa de um referencial está ligada diretamente ao conceito de base da álgebra linear. Ao analisar um movimento vetorialmente, não faz sentido falar de direção ou sentido sem antes se convencionar um sistema de eixos de modo que tais movimentos irão se relacionar. A exemplo, não podemos dizer que um móvel está se movimentando para a direita e para cima caso não se saiba **o que é direita e cima**, ou seja, é necessária a existência de um referencial. Com a base de um espaço vetorial poderemos ter a condição de montar um sistema de eixos, pois, uma grandeza cinemática vetorial será um ente desse espaço, e poderá ser descrito por meio de uma combinação linear das componentes da base que gera o espaço.

Na Física, o conceito de "espaço físico" não é um ponto pacífico, mas, a Mecânica Clássica com suas leis, postulados, toda teoria per se, foi descrita por meio da visão de mundo newtoniana cuja

> [. . .] física newtoniana não só é coerente, mas é estruturalmente dependente da idéia [sic] de um espaço absoluto, na medida em que distingue dois tipos de observadores: aqueles para os quais são válidas as três leis fundamentais da mecânica, chamados de inerciais, e os não inerciais, para quem os fenômenos mecânicos não obedecem às Leis de Newton. De fato, se formos capazes de identificar um observador para quem as Leis de Newton constituem uma verdade física, todos aqueles que se movam com velocidade constante em relação a ele também serão inerciais, ao passo que aqueles que se moverem com aceleração não nula em relação ao primeiro serão não inerciais. [...] No entanto, segundo a física newtoniana, aparentemente a Natureza possui um critério absoluto de distinção entre as duas afirmações, um caráter absoluto da aceleração dos corpos, não em relação uns aos outros, mas com referência a um suposto espaço absoluto (PORTO e PORTO, 2008).

Assim, podemos descrever um "espaço vetorial" que representa o nosso "espaço físico" por meio de três dimensões: frente e trás; esquerda e direita; cima e baixo. Tal espaço de dimensão 3 pode ser gerado por uma base composta por 3 vetores unitários; vimos que, em tal caso, a básica canônica, apresentada nas seções acima, geram as grandezas físicas vetoriais pretendidas que pertencem ao espaço vetorial, ou seja, ao espaço material newtoniano.

5.2 CINEMÁTICA VETORIAL

Já explicitado mais acima sobre a definição de grandeza física, Bonjorno et al. (2016) exprime a existência de dois diferentes tipos de grandezas:

> Ao medir a temperatura de um paciente, a enfermeira constatou que ele estava com febre, pois o termômetro marcou 38 °C. Ela o encaminhou ao médico, que receitou ao paciente 5 ml de um medicamento antitérmico. Na cena descrita [...] são citadas duas grandezas físicas: a temperatura (38 °C) e o volume (5 ml). Essas grandezas físicas são chamadas de **escalares**¸ pois sua expressão depende simplesmente de um **valor numérico** e de uma **unidade de medida**. [...] Existem grandezas físicas, no entanto, que não ficam claramente caracterizadas pela expressão de um valor numérico e de uma unidade de medida [...]. Para expressar o deslocamento de um móvel, são necessários um valor numérico, uma unidade de medida, **uma direção e um sentido** em que deverá seguir. Esses elementos caracterizam uma **grandeza física vetorial** (BONJORNO et al., 2016, p.88, grifo do autor).

Portanto, grandezas como deslocamento, velocidade, aceleração, força, bem como seus derivados, possuem caráter vetorial. Majoritariamente, tais grandezas vetoriais são representadas por um segmento de reta orientado, uma seta, possuidor de módulo, seu "tamanho" ou "intensidade", direção e sentido (além da unidade de medida).

O vetor deslocamento **d**, por exemplo, é o vetor que une o ponto de partida ao ponto de chegada de um movimento (BONJORNO et al., 2016); a exemplo, um carro que sai de Caxias-MA à Teresina-PI pela BR 316, representado na figura a seguir.

Figura 6: Foto satélite que apresenta a trajetória (azul) e deslocamento (vermelho) de um móvel entre as cidades de Caxias - MA e Teresina - PI

Fonte: Elaboração própria

O destaque de cor azul representa a trajetória percorrida pelo móvel, enquanto o segmento orientado em vermelho representa o vetor deslocamento.

Quanto a rapidez deste deslocamento, a grandeza responsável por isso é a velocidade vetorial média, definida como (BONJORNO et al., 2016):

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{d}}{\Delta t}$$

Ainda, quanto a característica do movimento, a aceleração vetorial média é definida como (BONJORNO et al., 2016):

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dentre estas três grandezas apresentadas, estuda-se compartimentadamente, cada qual com suas características intrínsecas e não relacionadas entre si.

Quadro 3: Esquema de resumo das três principais grandezas da mecânica cinemática

Grandeza vetorial	Descrição	Característica
Deslocamento	Vetor que liga do ponto de partida ao de chegada em um movimento	Direção e Sentido a depender do movimento
Velocidade Vetorial Média	Determina a quantidade de comprimento percorrida no tempo	Mesma direção e sentido do vetor deslocamento
Aceleração Vetorial Média	Determina "o quanto muda" da velocidade vetorial média no tempo	Mesma direção e sentido da variação da velocidade vetorial média.

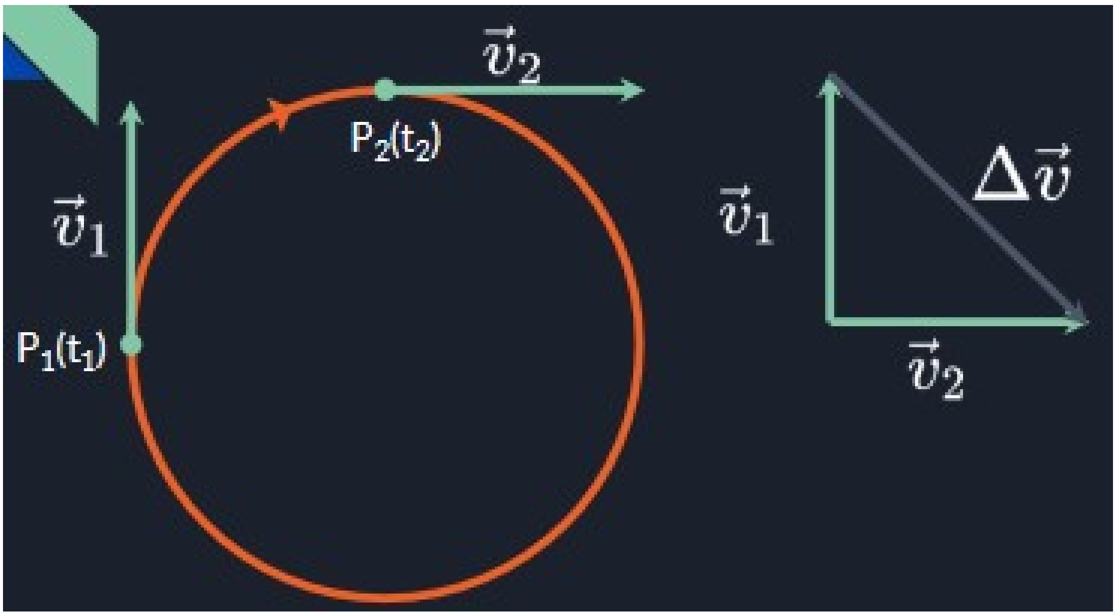
Fonte: (BONJORNO et al. 2016)

Isso pode gerar uma pequena confusão, principalmente quanto à aceleração, pois a mesma possui mesma direção e sentido da variação da velocidade vetorial média, e não da velocidade vetorial média por si.

Esta confusão é precisamente eliminada ao tratar tais entes como de mesmo comportamento, por realizar as operações descritas nos tópicos acima. Um vetor, ao ser multiplicado por um escalar, mantém suas características de direção e sentido, porém, o mesmo não ocorre quanto à subtração de dois vetores – mais precisamente, a soma com o oposto; vimos como fazer tal operação em diferentes representações. Assim, fica mais eficaz o processo de ensino-aprendizagem pois elimina possíveis falsas interpretações acerca da natureza dos eventos físicos, principalmente ao estudante que aprendeu anteriormente sobre a aceleração **escalar** média, que pode o levar a confundir os processos e achar que os fenômenos de subtração entre as "velocidades" são de mesma natureza.

Ao entender que a letra grega Δ (Delta) na operação de subtração e conhecer que velocidade é um vetor, o processo de subtração entre vetores, aprendido na álgebra, se torna bem mais evidente e explícito, passível, inclusive, de exploração e curiosidade pelo docente para com os estudantes. O Movimento Circular Uniforme pode ser apresentado, desde cedo, para instigar os estudantes quanto a existência de uma aceleração mesmo o movimento sendo "uniforme".

Figura 7: Representação do movimento circular uniforme, destacando dois pontos

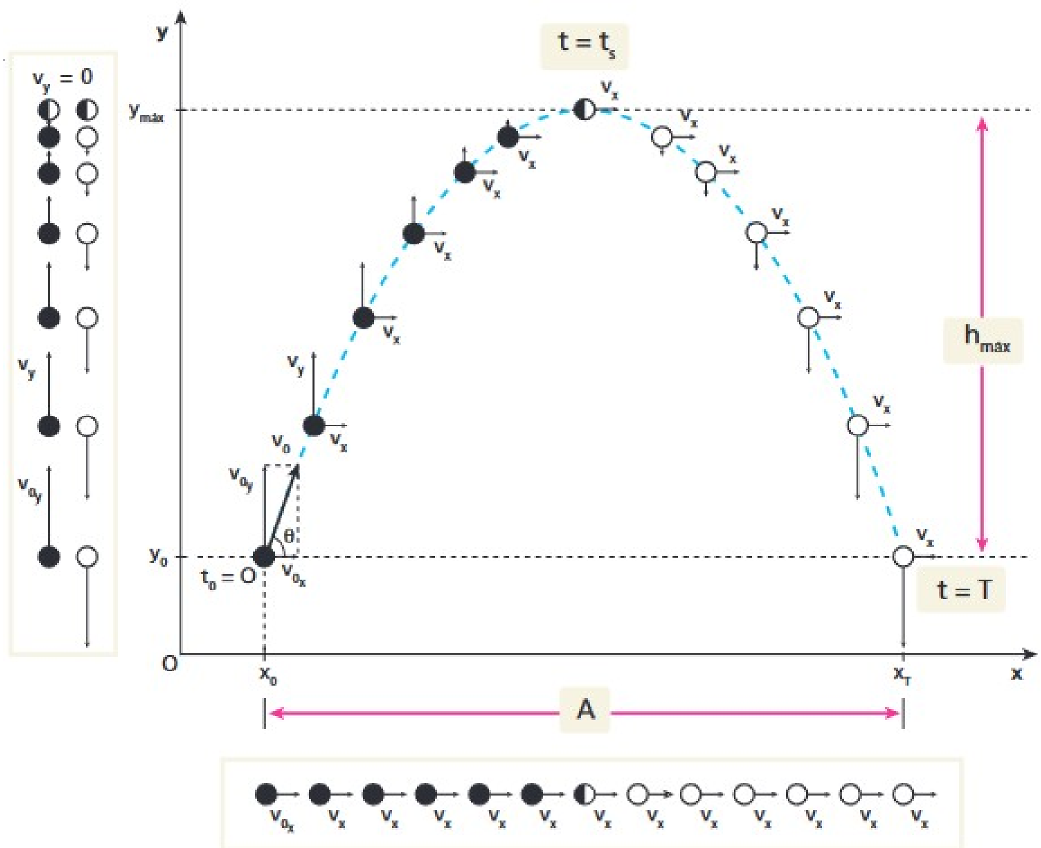


Fonte: Doca, 2012

Ao definir conceitualmente que a aceleração é responsável por "mudar" a velocidade, o docente pode apresentar que, mesmo que o módulo da velocidade do movimento seja constante, houve uma mudança no sentido e direção – em síntese, houve uma mudança no vetor, assim, existe uma aceleração, não tangencial, mas centrípeta (BONJORNO et al., 2016). Facilita, ainda, mostrar a diferença entre as velocidades vetoriais e a variação destas, que possui sentido e direção distintos entre si.

Para além da interpretação da natureza dos eventos, existe, também, uma facilitação quanto ao estudo de determinados movimentos específicos, como o lançamento obliquo, também estudado como se fosse independente dos outros assuntos. Entender que o lançamento oblíquo obedece ao **princípio da superposição**, uma composição dos movimentos uniformes e uniformemente acelerados, e tratá-los como vetores, facilita na compreensão mais abrangente da natureza do evento.

Figura 8: Representação vetorial em momentos distintos do movimento obliquo



Fonte: DOCA, 2012

Como já amplamente explicitado nesse trabalho, uma mudança na representação vetorial não necessariamente perde a natureza do evento natural. O lançamento obliquo é comumente apresentado no livro didático com vetores representados por segmentos de retas orientados (BONJORNO et al., 2016; RAMALHO et al., 2009; DOCA et al., 2012; CALÇADA et al., 2012; HEWITT, 2015; NICOLAL et al., 2012); assim, o estudante, ao responder problemas sobre, precisa dominar o processo de decomposição de vetores em componentes do referencial adotado, além de exigir um certo domínio nas funções trigonométricas.

Apresentar o mesmo evento físico, mas desta vez na representação funcional, por meio dos vetores unitários da base do sistema, facilitam a visualização, tanto das componentes do vetor, quanto nas operações a serem realizadas. Assim, o estudante, para além de confiar na explicação empírica de que "na horizontal não existe aceleração", também irá interpretar por si próprio esta proposição visualizando as mudanças ou não nos vetores bem mais facilmente que nas representação gráfica por setas.

Por exemplo, sabe-se que os movimentos na horizontal é uniforme e segue a função horária de velocidade $\mathbf{v}_x(t) = v_x\hat{\mathbf{i}}$; na vertical é uniformemente variado, dada a aceleração da gravidade, e obedece a função horária de movimento $\mathbf{v}_y(t) = (v_{oy} - at)\hat{\mathbf{j}}$, por exemplo, num caso cuja velocidade inicial seja $30m/s$ a $45°$ com a horizontal, sabe-se que $v_x = v_o \cdot cos45° = 30 \cdot 0,7 = 21m/s$ e $v_{oy} = v_o \cdot sin45° = 30 \cdot 0,7 = 21m/s$.

Tabela 1: Representação funcional do vetor v nas condições apresentadas

Tempo (s)	Vetor velocidade na representação funcional $\boldsymbol{v(t)} = \boldsymbol{v}_x\hat{\imath} + \boldsymbol{v}_y\boldsymbol{\hat{j}}$ (m/s)
1	$\boldsymbol{v}(1) = 21\hat{\imath} + 11(-\boldsymbol{\hat{j}})$
2	$\boldsymbol{v}(2) = 21\hat{\imath} + 1(-\boldsymbol{\hat{j}})$
3	$\boldsymbol{v}(3) = 21\hat{\imath} + 9\boldsymbol{\hat{j}}$
4	$\boldsymbol{v}(4) = 21\hat{\imath} + 19\boldsymbol{\hat{j}}$

Fonte: Elaboração própria

Fonte: Elaboração própria

Por meio da representação funcional se pode perceber que a componente de $\hat{\mathbf{i}}$,que determina as direções e sentidos horizontais, se mantém constante durante todo o movimento, explicado pelo seu caráter uniforme, enquanto a componente $\hat{\mathbf{j}}$, que determina as direções e sentidos verticais, varia no tempo, também conforme seu caráter. Assim como na representação vetorial, também se consegue perceber a inversão de sentido pela análise do sinal, as operações de soma, subtração e produtos se debruçam mais facilmente por meio da representação funcional que forçar o estudante a aplicar a regra do paralelogramo em cada instante.

Em consequência desta mesma análise, o principio da interdependência dos movimentos, apresentado também nos livros didáticos citados no tópico anterior, é mais facilmente compreendido nessa representação, pois mudanças de módulo direção e sentido são percebidas com mais rapidez e assimilação devido a sua apresentação já "decomposta" nos eixos que denotam a base do espaço.

Em síntese, as grandezas físicas vetoriais, existentes extensivamente nesta grande área da natureza, são entes que possuem os mesmos comportamentos e mesmas propriedades, de modo que a escolha da representação, seja por segmentos orientados, matrizes ou funções, a depender da característica que o docente quer destacar atenção. Cabe a este a maturidade de conhecimento de tais eventos naturais e apresentá-las das diversas maneiras representativas a fim de julgar a que melhor conduz o processo ensino-aprendizagem, a universalizar as categorias vetoriais, e não compartimentar o ensino como entes de comportamentos diferentes.

5.3 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

Para além do estudo do movimento sem se preocupar com as causas, na física existem várias grandezas que são de natureza vetorial; os momentos lineares e angulares também o são. O **momento** $(\boldsymbol{p})$,definido por Newton sob uma gama de estudiosos antecessores, é a inércia em movimento (HEWITT, 2015) e é matematicamente definido como o produto da **massa** pela **velocidade**:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

E antes de comentar sobre as propriedades físicas da grandeza, nota-se que, o momento e a velocidade são grandezas vetoriais e a massa é uma grandeza escalar.

Como, a "inércia em movimento", o momento muitas vezes é descrito em outros livros didáticos como **quantidade de movimento**; para um caminhão e um carro, paralelos e com mesma velocidade na mesma direção e sentido, apesar de estarem lado a lado com velocidade relativa nula, o primeiro possui momento maior comparado com o segundo devido a sua massa.

O momento foi apresentado de uma maneira geral, mas devemos lembrar que existem movimentos que não são somente retilíneos; por isso se faz a distinção entre linear e angular, mas, para esta última precisaremos definir multiplicações intravetoriais que fogem ao escopo deste trabalho. Mas, o estudo do momento linear, apenas, já é suficiente para descrevermos diversos fenômenos da natureza.

Da mesma forma que você não consegue colocar um carro em movimento empurrando *dentro* do carro, as **condições internas ao sistema** – chamemos assim – não alteram as características do evento. Dessa forma, o momento de um sistema físico em um determinado recorte temporal não deve mudar quando comparado com outro período; a não ser, claro, se o sistema for perturbado por alguma ação externa (alguém empurrando o carro do lado de fora, seguindo a analogia). Quando uma característica não muda no tempo, é comum apontar que ela foi *conservada*, assim, nesse caso, o momento é conservado. Logo, podemos dizer que, para um sistema de massa m:

$$\boldsymbol{p}_o = \boldsymbol{p}_t$$

$$m\boldsymbol{v}_o = m\boldsymbol{v}_t$$

A conservação do momento é importante quando estudamos sistemas envolvendo dois ou mais corpos e, principalmente, suas colisões. A princípio, o estudo de colisões pode parecer trivial e com aplicações práticas somente nas áreas de balística ou acidentes aeroviários, hidroviários, rodoviários, mas, em verdade, a física moderna está sustentada neste estudo; o descobrimento de novos átomos, partículas elementares, eventos radioativos, etc. estão na fronteira do atual estado da arte da física das altas energias. O professor pode usar desse fato para estimular interesse de estudantes pelo assunto.

Para dois corpos, por exemplo:

$$\boldsymbol{p}_{1,0} + \boldsymbol{p}_{2,0} = \boldsymbol{p}_{1,t} + \boldsymbol{p}_{2,t}$$

$$m_{1,0}\boldsymbol{v}_{1,0} + m_{2,0}\boldsymbol{v}_{2,0} = m_{1,t}\boldsymbol{v}_{1,t} + m_{2,t}\boldsymbol{v}_{2,t}$$

Onde as notações $\boldsymbol{p}_{1,0}$ e $\boldsymbol{p}_{1,t}$ são os momentos do corpo 1 num estado inicial, antes, e após um tempo t, respectivamente; a descrição se estende para $\boldsymbol{p}_{2,0}$ e $\boldsymbol{p}_{2,t}$, respectivamente, mas para o disposto na descrição 2 $m_{1,0}$ e $\boldsymbol{v}_{1,0}$ é a massa do corpo 1 e a sua velocidade, respectivamente, em um estado inicial, antes (a descrição se estende para $m_{1,t}$ e $\boldsymbol{v}_{1,t}$, respectivamente, mas para um estado após um tempo t); de modo semelhante, a descrição se repete para $m_{2,0}$, $\boldsymbol{v}_{2,0}$, $m_{2,t}$ e $\boldsymbol{v}_{2,t}$.

O momento possui natureza tridimensional, portanto, operá-lo requer atenção redobrada, e, assim como argumentado acima, trabalhar com a representação de segmentos orientados de retas exige de estudantes uma prática cansativa e demonstra pouca informação necessária do evento para além da direção e sentido – informação esta que pode muito bem ser absorvida por discentes na representação por componentes unitárias – que podem levar ao desinteresse da prática de exercícios de fixação, principalmente àqueles semelhantes à histogramas. O método funcional permite a soma das grandezas de modo mais fácil que utilizando essas regras e ainda sem perder a noção de direção e sentido (que, erroneamente, é o foco da maioria das questões sobre o assunto nos livros didáticos). O discente, uma vez aprendido as operações com vetores no estudo da álgebra linear, se torna hábil a resolver problemas de uma maneira rápida, prazerosa e capaz de explicar fisicamente o problema sem pecar na falta de alguma informação vetorial.

Por exemplo, se o problema pedir para calcular o momento total de um sistema de dois corpos, de massas iguais m, respectivamente, e com velocidades $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, respectivamente, os discentes podem lembrar das propriedades de operação de vetores e realizar as operações:

$$\boldsymbol{p}_{total} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{p}_{total} = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2$$

$$\boldsymbol{p}_{total} = m(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

E observar os fenômenos de velocidade relativa de uma forma mais clara.

Os livros didáticos aqui analisados apresentam como método de resolução de problemas de momento por meio de operações na representação de segmentos orientados, ou seja, acabam por obrigar o discente no rápido manuseio das regras do paralelogramo, decomposição vetorial e relações trigonométricas, principalmente quando este assunto geralmente é abordado após tópicos como Força (HEWITT, 2015) ou somente após Trabalho e Energia (RAMALHO, 2009; CALÇADA ET AL., 2012; DOCA, 2012); mesmo que, na obra original, Newton tenha definido primeiramente o conceito de momento, e posteriormente definindo força e trabalho a partir dele.

5.4 FORÇA GRAVITACIONAL

O estudo do movimento dos corpos celestes sempre foi alvo de compreensão pela humanidade. Durante toda influência aristotélica nas ciências naturais existiu uma clara e firme distinção entre os eventos naturais intralunares, impuros e corruptíveis, e os eventos extralunares, perfeitos e divinos (PEDUZZI, 2008). A "síntese newtoniana", como ficou conhecida, foi a proposta de Newton de equivaler o movimento dos corpos celestes (extralunar) com "a queda" dos corpos no planeta (intralunar); unir a corrupção com o divino foi uma tarefa difícil e, de fato, demorou décadas para que a visão newtoniana começasse a se sobressair à aristotélica (HEWITT, 2015).

Newton afirmou que os corpos celestes se atraem por meio de uma "força" que seria diretamente proporcional às massas de cada e indiretamente proporcional ao quadrado da distância entre eles:

$$\mathbf{F}_g \sim \frac{m_1 m_2}{\mathbf{d}^2}$$

$$\mathbf{F}_g = G\,\frac{m_1 m_2}{\mathbf{d}^2}$$

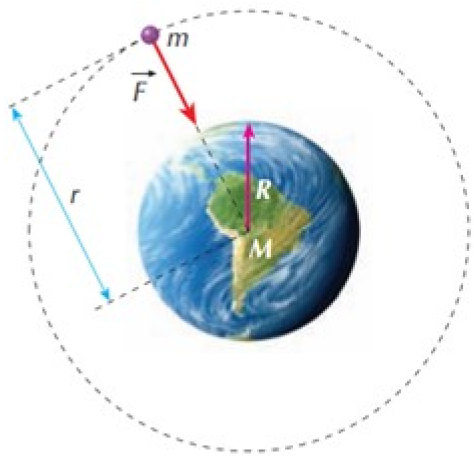
Ao propor tal formulação, Newton animou toda comunidade científica da sua época, tornava o evento natural de atração das massas não mais compartimentando em puros e corruptos, mas, **universal**.

Um século depois, Cavendish, e posteriormente Philip von Jolly, mediram o valor da constante gravitacional $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, um valor extremamente pequeno comparado com as outras constantes físicas da natureza. A determinação da constante permitiu calcular o valor da massa da Terra; ao saber a força que ela exerce num corpo de $1kg$ na sua superfície, $10N$, e a distância entre seus respectivos centros de massa – o raio da Terra, medida conhecida historicamente – achou-se o valor $m_1 = 6 \cdot 10^{24}$.

O cálculo da massa da Terra causou uma excitação geral da comunidade científica pois, levava em consideração toda densidade irregular de distribuição de massa do planeta, a massa dos oceanos, dos animais, das plantas, numa época que boa parte da superfície da Terra ainda estava a ser "descoberta" pelos ocidentais, em uma "simples" multiplicação (HEWITT, 2015). O estudo da gravitação universal permitiu a descrição de vários eventos naturais: a formação das marés, a existência de buracos negros, a descoberta de Netuno e Plutão.

Assim, assim com suas companheiras de natureza, a força gravitacional também é uma grandeza vetorial; o estudo da sua ação nos corpos terrestres pode ser relembrado no tópico de Cinemática Vetorial acima, mas a análise é interessante também para um sistema isolado de dois corpos, por exemplo:

Figura 9: Representação de um sistema de dois corpos; Terra , de massa $\boldsymbol{M}$ e um outro corpo, de massa $\boldsymbol{m}$:



Fonte: NICOLAU et al, 2012

Percebe-se que a força gravitacional possui componentes verticais e horizontais quando decompomos em um sistema de eixos, assim, podemos representar em termos de $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$, como já discutido amplamente nesse trabalho. Mas, percebamos também que, a qualquer ponto da circunferência tracejada, a distância entre o corpo de massa M e m não varia. Se a distância entre os corpos não varia, o módulo da força gravitacional deve ser o mesmo em qualquer ponto ao longo desta circunferência; o mesmo pensamento se equivale para qualquer circunferência de qualquer raio R.Assim, pode existir um meio onde "eliminamos" essa visualização bidimensional e analisamos o vetor força gravitacional somente em função de um único componente.

Por causa dessa natureza, podemos adotar um vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$, que aponta para "fora" da circunferência numa direção **"radial"**, e assim denotar:

$$\mathbf{F}_g = -G\,\frac{Mm}{\mathbf{R}^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

Cujo sinal menos surge apenas para informar que a força gravitacional é de atração, ou seja, aponta no sentido contrário à $\hat{\mathbf{r}}$, para o centro da circunferência.

As operações vetoriais advindas dos exercícios desse assunto são facilitadas, uma vez que, trabalha-se agora como uma única componente, se aproximando do caso unidimensional. Este truque pode ser apresentado pelo docente de uma maneira bem mais descrita em sala de aula, uma vez que o discente do ensino médio terá as habilidades de calcular "distância entre dois pontos" nas aulas de geometria do ensino fundamental. Assim como anteriormente, trabalhar na representação funcional facilita os cálculos necessários ao discente e não perde informações a cerca do sentido e direção da grandeza, que é a informação dada pela representação por segmentos orientados de reta. Por fim, o professor que trabalhar bem em sala de aula o assunto de bases, dimensões e coordenadas em álgebra linear, poderá introduzir facilmente uma "nova base esférica" para descrever o espaço em $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$(ARFKEN; WEBER, 1999) e justificar com maior embasamento a natureza radial da força gravitacional para além do argumento apresentado.

É comum trabalhar apenas com o módulo da força gravitacional em sala de aula e ignorar sua natureza vetorial; isso pode trazer incompreensões em sala de aula e até erros na descrição de eventos físicos. Assim, apresentar desde cedo sua natureza vetorial e o cuidado da escolha da representação vetorial pode estimular o entendimento criterioso da natureza da gravitação pelos discentes.

5.5 ELETROSTÁTICA

A eletricidade é um fenômeno físico também estudado a bastante tempo. O âmbar, do grego "eléctron", foi alvo de estudo de diversas sociedades por suas características que hoje conhecemos como eletricidade estática (PEDDUZI, 2008).

Assim como a massa (gravitacional) possui propriedades intrínsecas de atração mútua, as **cargas elétricas** possuem propriedades de atração e repulsão a depender de suas características. Convencionou-se chamar as cargas positivas de **prótons** e as negativas de **elétrons**, e, junto aos **nêutrons** (partículas neutras), tais partículas fundamentais são formadoras do átomo.

Charles Coulomb estudou as cargas elétricas e elaborou uma relação para as força de interação entre duas partículas:

$$\mathbf{F}_E = k\ \frac{q_1 q_2}{\mathbf{R}^2}$$

Onde $\mathbf{F}_E$ é a Força Eletrica, q_1 e q_2 são as quantidades de carga da partícula 1 e 2 respectivamente; $\boldsymbol{R}$ é a distância de separação entre as mesmas; k é uma constante de proporcionalidade aproximadamente igual a $9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.Tal ordem de grandeza denota um valor extremamente forte para forças elétricas. Ainda, a unidade no SI (Sistema Internacional de Unidade) da carga elétrica é o Coulomb.

Assim como na discussão anterior, a força elétrica atuando em uma carga de prova q_2 devido a uma carga **fonte** q_1 é a mesma para qualquer distância R em volta de q_1, e adquire, assim, um caráter radial:

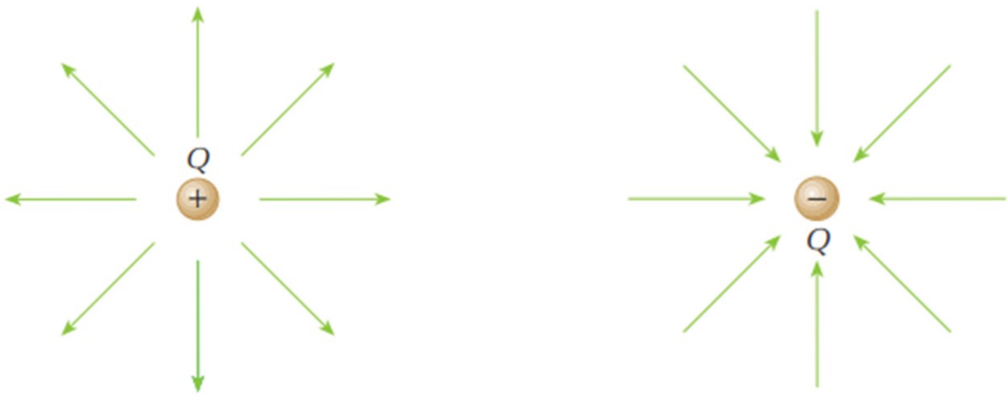
$$\mathbf{F}_E = k\ \frac{q_1 q_2}{\mathbf{R}^2}\ \hat{\mathbf{r}}$$

A fim de não rediscutir as mesmas características abordadas no tópico força gravitacional, o **campo elétrico E**, também uma grandeza vetorial, possui propriedades interessantes quanto a escolha de sua representação vetorial. O campo elétrico **E**, produzido por uma carga fonte q, é dado por:

$$\mathbf{E} = k\ \frac{q}{\mathbf{R}^2}\ \hat{\mathbf{r}}$$

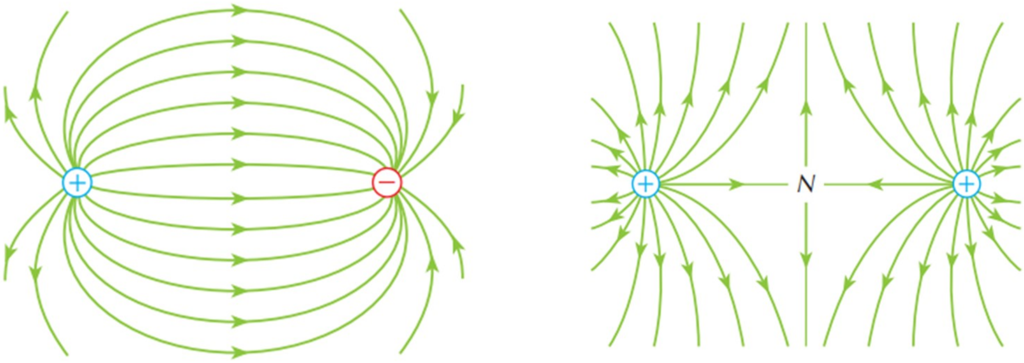
Assim como a força elétrica, o campo elétrico também possui natureza radial e, para cálculos matemáticos, a representação funcional ainda facilita o discente nas suas operações. Mas, a representação por segmentos de reta orientados facilita na compreensão mais completa sobre as “linhas de campo” produzidas.

Figura 10: Linhas de campo produzidas por cargas positivas e negativas:



Fonte: NICOLAU, (2012)

Figura 11: Linhas de campo devido a duas cargas opostas e duas cargas iguais



Fonte: NICOLAU, (2012)

A união das múltiplas representações vetoriais podem aferir as informações apresentadas por cada uma. As linhas de campo são tangentes ao campo elétrico naquele ponto, o que condiz com a característica de "um escalar dilatando ou contraindo um vetor" apresentado nos tópicos anteriores; ainda, pode-se aferir o comportamento radial do campo elétrico para além da definição da componente radial. Quando o discente compreende que a função que ele está vendo no papel e as "setas" desenhadas são da mesma natureza e denotam a mesma grandeza, apenas com representações exalam informações diferentes, mas complementares, faz a compreensão do fenômeno se tornar mais completa e evita incompreensões.

5.6 MAGNETOSTÁTICA

Outro evento natural de estudo da física são as propriedades magnéticas dos materiais. O nome "magnetismo" advém de um distrito Grego, Magnésia, onde eram encontradas pedras "incomuns" que atraiam ou repeliam outros materiais (HEWITT, 2015). Os estudos envolvendo propriedades magnéticas possuem uma grande escala de aplicação: a bússola, por exemplo, nas navegações; aparelhos de ressonância magnética, na medicina; trens-bala por levitação magnética, na engenharia; entre várias outras.

As interações magnéticas são parecidas com as interações elétricas, como a existência de "polos"; há um polo positivo e um negativo, de modo que ao aproximar dois do mesmo tipo, eles se repelem, e dois opostos, se atraem. Essa força de repulsão e de atração também foi analisada e conceituada. Experimentos também revelaram que essa força magnética varia inversamente com o quadrado da distância, assim como a lei de Coulomb.

Porém, apesar de semelhante, as interações magnéticas possuem suas especificidades. Percebe-se que os materiais magnéticos não possuem monopolos (assim como as cargas elétricas, que podem ser positivas ou negativas), sempre existem com dois polos. Mesmo que se separe fisicamente, os materiais magnéticos sempre possuem dipolos, sendo inseparáveis (RAMALHO, 2009).

Existe uma relação intrínseca entre as interações elétricas com as interações magnéticas. Observa-se que a movimentação de cargas elétricas afeta materiais magnéticos ao eu redor, atraindo ou repulsando. Assim, define-se o campo magnético $\mathbf{B}$, uma grandeza vetorial, assim como o campo elétrico, denota a magnitude e direção do vetor campo magnético naquele ponto. Observações empíricas foram levadas em conta e foi formulado a definição da força magnética ($\mathbf{F}_m$) devido a velocidade destas cargas elétricas:

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}$$

onde q é o valor da carga em movimento, $\mathbf{v}$ a sua velocidade, e $\mathbf{B}$ o vetor campo magnético.

Geralmente, os livros didáticos apresentam o campo magnético e a força magnética apenas como uma "fórmula" definida que denota apenas a sua magnitude; para explicar seu caráter vetorial, afirmam que o sentido e direção obedecem a "regras" de posição de mãos. Apesar de útil na resolução dos problemas, pode se tornar confuso para o estudante principalmente na troca de livros ou de metodologia do professor. Por exemplo, Ramalho et al. (2015) apresenta duas regras da mão direita, diferentes, para achar o sentido e direção do campo magnético e da força magnética, que denominou de $n^o 1$ e $n^o 2$, respectivamente; já Calçada et al. (2012) apresenta uma regra da mão direita para achar o sentido e direção do campo magnético e uma regra da mão esquerda para achar o sentido e direção da força magnética. Doca et al. (2012) coloca que para achar o sentido e direção da força magnética usa-se uma regra da mão direita "espalmada" e para achar o campo magnético uma regra da mão direita "envolvente".

A fim de evitar essas diferentes denotações que, as vezes, usam diferentes mãos e diferentes posições dos dedos, além de usar uma característica física do estudante, que pode excluir pessoas com deficiência, o docente pode mudar a forma de representação vetorial.

Apresentar a forma funcional, após o discente aprender as propriedades do produto vetorial, a intuição de observar o sentido da força magnética advém do entendimento que o produto vetorial entre dois vetores gera um novo vetor perpendicular aos dois primeiros. Doca et al. (2012) até apresenta quando diz: "A direção de $\mathbf{F}_m$ é perpendicular ao plano definido por $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{B}$", que sintetiza o caráter do produto vetorial. A decomposição nas componentes $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ também pode ser de grande ajuda após a boa exposição do docente sobre a regra cíclica da base canônica.

Percebe-se, no geral, que as grandezas naturais vetoriais podem ser melhor apresentadas aos discentes, sem perca de informação, quando combinadas diferentes formas de representação destes vetores, evidenciando, no momento da explicação, a informação que o docente quer explicar melhor. Mas, a fim de evitar confusões quanto ás diferentes formas de representar um vetor, entender o que de fato ele o é, é fundamental; assim, o discente consegue assimilar que os vetores são os mesmos, independentes da sua forma de representação. Isso evita incompreensões dos próprios fenômenos físicos e sua explicação, mantendo o rigor teórico e contribuindo, de fato, no estudo e caracterização dos fenômenos naturais. Os próprios cálculos podem ser facilitados quando se evita certos manejos geométricos e trigonométricos, sem fundamentação teórica a explicar a verdadeira natureza das operações vetoriais.

Capítulo 6

O ENSINO DA ÁLGEBRA VETORIAL NO ENSINO MÉDIO

Nos últimos capítulos foi demonstrado como o estudo de álgebra linear no ensino médio pode, além de manter o rigor teórico, facilitar no ensino de física, porém, não foi apresentado como. Este capítulo visa indicar uma sequência didática sobre o como docentes conseguem apresentar os conceitos da álgebra linear para seus discentes.

A fim de ajudar na compreensão, o docente pode, em primeiro momento, relembrar os discentes sobre o uso de letras na representação de algumas características variáveis; assim, já incube aos alunos uma maior familiaridade com a "abstração" que será apresentada nas aulas futuras.

Neste sentido, os docentes podem apresentar a diferença entre a aritmética e álgebra, e sobre como identificá-las em um problema. Tal etapa visa dirimir as dificuldades carregadas pelos discentes e equiparar os conhecimentos da turma para os assuntos a serem abordados na disciplina.

Assim que avaliado tal etapa como completo pelos docentes, a apresentação direta das propriedades de vetores devem ser apresentadas, e, aí, deve-se haver um cuidado quanto à sua definição. Vimos nos capítulos anteriores sobre como os livros didáticos analisados neste trabalho tratam a definição de vetores de diferentes formas, o que pode levar à confusão de estudantes numa eventual troca de livro ou de metodologia do professor.

Neste sentido, não subestimar a capacidade dos estudantes de entenderem a "abstração", apresentar vetores como o conjunto de **entes** matemáticos que obedecem propriedades em comum e apresenta-las, além de ser necessária para o estudante compreender que um vetor não é apenas uma seta; existem diferentes entes na matemática, como funções e matrizes, que obedecem tais propriedades e são vetores.

Quando o docente mantém claro que existem diferentes entes de naturezas diferentes que são vetores, deve delimitar, desde já, quais representações serão utilizadas no decorrer de sua disciplina. Assim, na explicação das propriedades vetoriais, mostrá-las por meio de diferentes representações mostra ao discente que, apesar de diferentes, todas representação a mesma operação contida nas propriedades. Nesse caso, a fim de não diferir muito do guia dos livros didáticos, principal meio de estudo dos discentes, a representação por segmentos orientados de reta deve ser utilizada, mas não como única. Apresentar o Quadro 2 já aqui pode ir por acostumar os discentes quanto às representações.

Ainda, a apresentação destas propriedades podem ser distintas por tópicos de operação, como comutatividade, associatividade, elemento oposto, elemento neutro, e, a medida da apresentação, mostrando-as com suas diferentes representações. Por exemplo, a relembrar as propriedades (ZANI, 2003), temos:

- $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u},\ \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$
- $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w},\ \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$
- $\exists|\ 0\in\mathbb{R}\ |\ 0+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u};\ \forall\ \boldsymbol{u}\in V$
- $\forall\ \boldsymbol{u}\in V,\ \exists\ \boldsymbol{v}\in V\,|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=0$
- $\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u},\ \forall\ \boldsymbol{u}\in V\ e\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
- $(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u},\ \forall\ \boldsymbol{u}\in V\ e\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
- $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v},\ \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\ e\ \lambda\in\mathbb{R}$
- $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u};\ \forall\ \boldsymbol{u}\in V$

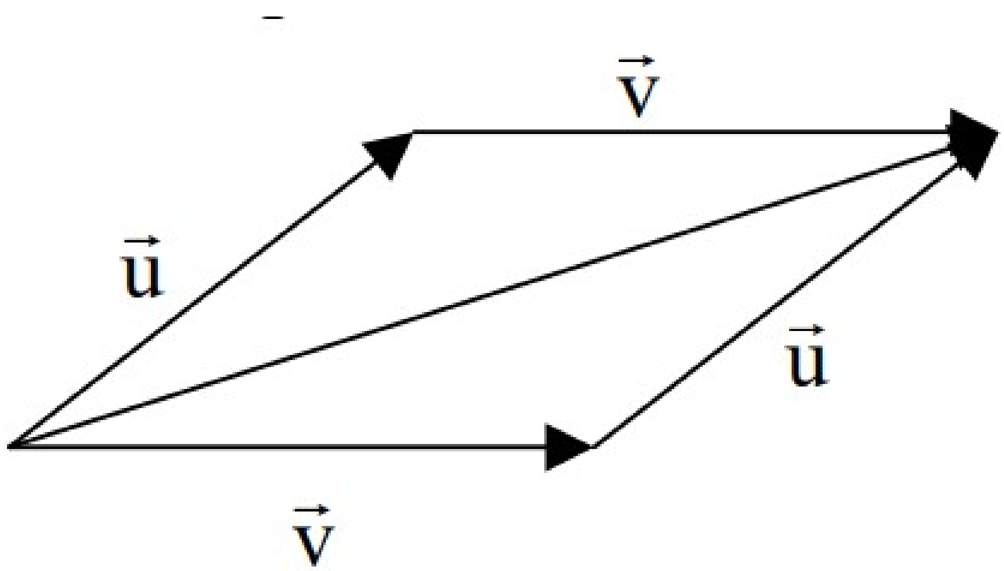
Nesse sentido, a turma preparada para o uso de letras na representação de entes matemáticos, com o professor como guia, podem compreender esta densa notação. As propriedades de comutatividade e associatividade (1 e 2) são de maior contato com os discentes e podem ser apresentadas conjuntamente. Assim, o docente pode afirmar que, dados os vetores **u** e **v**, que pertencem a um conjunto que obedece às regras vetoriais, podemos operá-los e achar um novo vetor soma, tal que:

$$\boldsymbol{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Assim, consegue-se mostrar na representação por segmentos orientados de reta que a ordem da operação de soma não altera o vetor resultado.

.

Figura 12: Representação por segmentos orientados de reta da soma de vetores

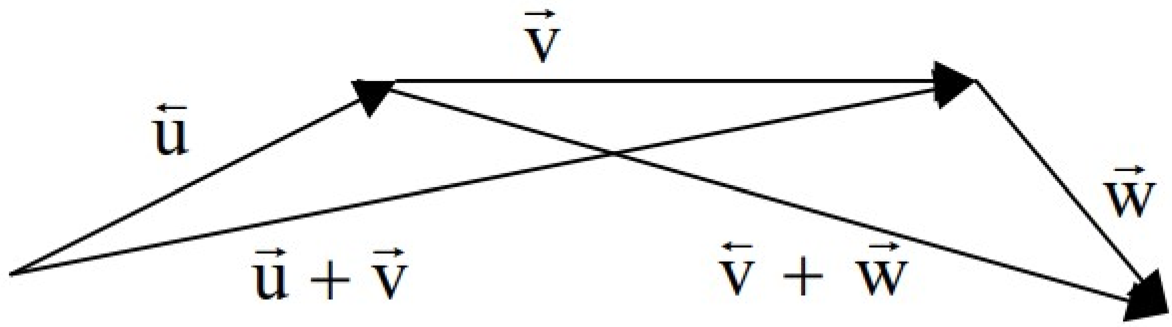


Fonte: Elaboração própria

Neste caso, não foi apresentado ainda aos discentes a forma funcional por componentes e como operá-la pois esta apenas será compreendida na sua completude após apresentado os conceitos de base, dimensões e coordenadas. Como, ainda, detalhar a representação por segmento orientado com "módulo, direção e sentido" podem ser apresentadas posteriormente.

A propriedade de associatividade pode ser mais detalhada pelos professores, a utilizar de notações que preferirem e a lembrar aos discentes da regra de prioridade de operações

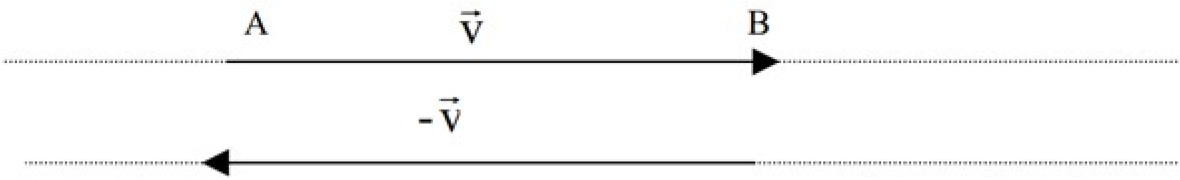
Figura 13: Representação por segmentos orientados de reta da propriedade de associatividade



Fonte: Elaboração própria

No momento de apresentação das outras propriedades, o vetor nulo e o vetor oposto podem ser apresentados também de maneira mais rápida, uma vez já realizado o processo anterior de familiarização da turma com a álgebra.

Figura 14: Representação por segmento orientado de reta do vetor oposto



Fonte: Elaboração própria

As propriedades vetoriais envolvendo escalares podem ser trabalhadas nestes momentos com um nível de abstração, mas lembrando aos estudantes que são, regras que os entes devem obedecer para serem considerados vetores. Assim, quando o docente prosseguir para os próximos assuntos, poderá resgatar as propriedades demonstrando a confiabilidade destas. Medidas para síntese podem ser também utilizadas; Zani (2003), por exemplo, denota cada propriedade por "EVs" (EV1, EV2, etc.).

Trabalhar com estas propriedades deve ser o foco principal das primeiras aulas, onde o docente deve lançar mão diversos exemplos e ir adaptando sua metodologia baseando na sua análise pessoal sobre o desenvolvimento da durma, conduzindo da melhor forma o processo de ensino aprendizagem.

Posteriormente, com a turma acostumada com "o que é necessário para considerar um ente um vetor", o docente pode prosseguir a apresentação dos assuntos com o mesmo guia apresentado neste trabalho. Apresentar o conceito de combinação linear e a (in)dependência linear servirão de suporte para a apresentação dos conceitos de base, dimensões e coordenadas, que são fundamentais para compreensão dos assuntos de física como discutido nos capítulos anteriores.

Quando a turma estiver acostumada com tais conceitos, a operação entre vetores não deve ser uma etapa complicada na sua apresentação, uma vez que foi trabalhada indiretamente durante cada seção apresentada.

Neste sentido, as orientações colocadas nos capítulos anteriores podem servir como guia ao docente na condução desta parte inicial da álgebra. Os produtos escalares e vetoriais podem ser a parte mais demorada a ser detalhada pelo docente devido a sua alta abstração, mas, se os tópicos basilares forem bem trabalhados pelos docentes, sempre atentos às dúvidas e desempenho da turma nos exercícios, tais ocasiões podem ser diminuídas.

É importante, também, os docentes se atentarem quanto a linguagem apresentada no momento da condução do ensino. Devido ao alto grau de abstração na apresentação das propriedades, por exemplo, adotar uma linguagem explicativa mais qualitativa que quantitativa pode ajudar os discentes a se familiarizarem com as figuras e signos da linguagem matemática. Neste sentido, falar por extenso as operações e exemplificar qualitativamente pode ser uma abordagem interessante.

Capítulo 7

GEOGEBRA E ÁLGEBRA VETORIAL COMO FACILITARDORES NO ENSINO DA FÍSICA

O uso de tecnologias como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem já foi estudado e apresentado positivamente por diversos autores (DIOGINIS, 2022). O GeoGebra, sua própria definição

> [...] é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, a GeoGebra oferece uma plataforma online com mais de 1 milhão de recursos gratuitos criados por nossa comunidade de vários idiomas. Esses recursos podem ser facilmente compartilhados através de nossa plataforma de colaboração GeoGebra Classroom, onde o progresso dos alunos pode ser monitorado em tempo real (GEOGEBRA, 2022).

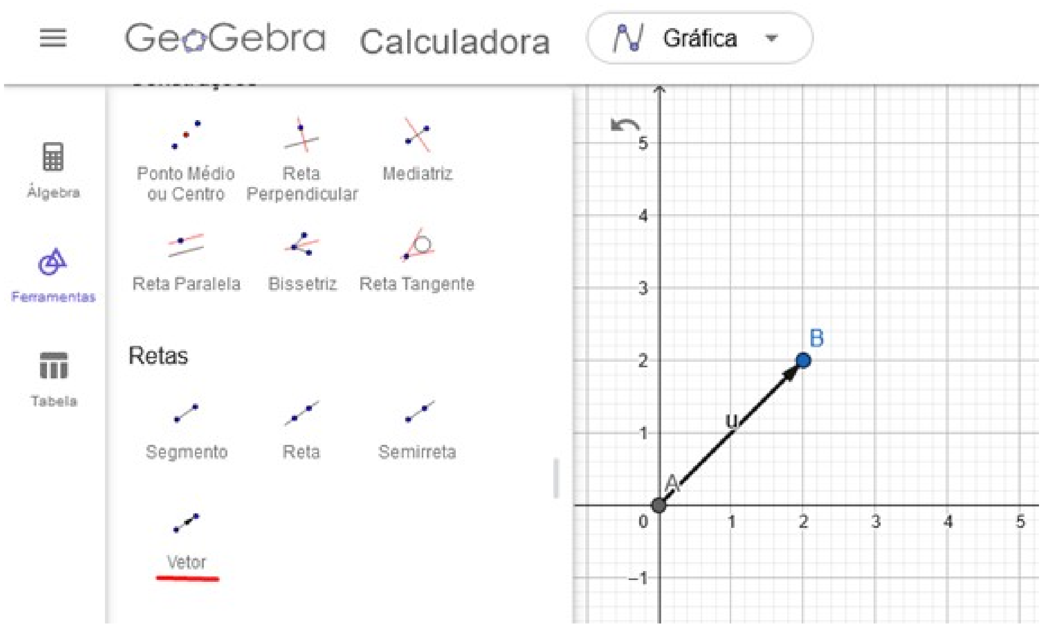
Assim, este software pode ser utilizado como meio facilitador em sala de aula pois pode deixar a aula mais dinâmica para os estudantes.

7.1 Grandezas Físicas Vetoriais e suas operações

7.1.1 SOMA VETORIAL DE GRANDEZAS FÍSICAS

A soma vetorial descrita no primeiro tópico do capítulo anterior é facilmente vista ao "desenhar" vetores no software:

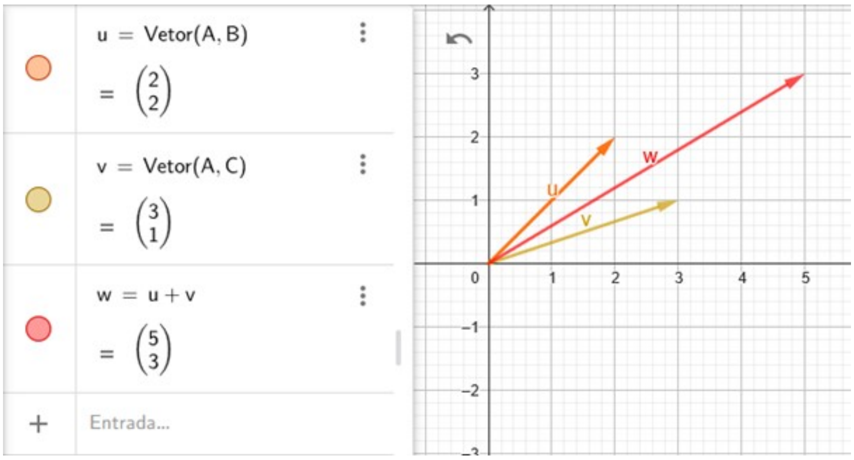
Figura 15: Captura de tela mostrando a opção de desenhar vetores



Fonte: Elaboração própria

O GeoGebra mostra, a sua esquerda, os vetores desenhados na forma matricial.

Figura 16: Vetores dispostos no GeoGebra na representação matricial e por segmentos orientados



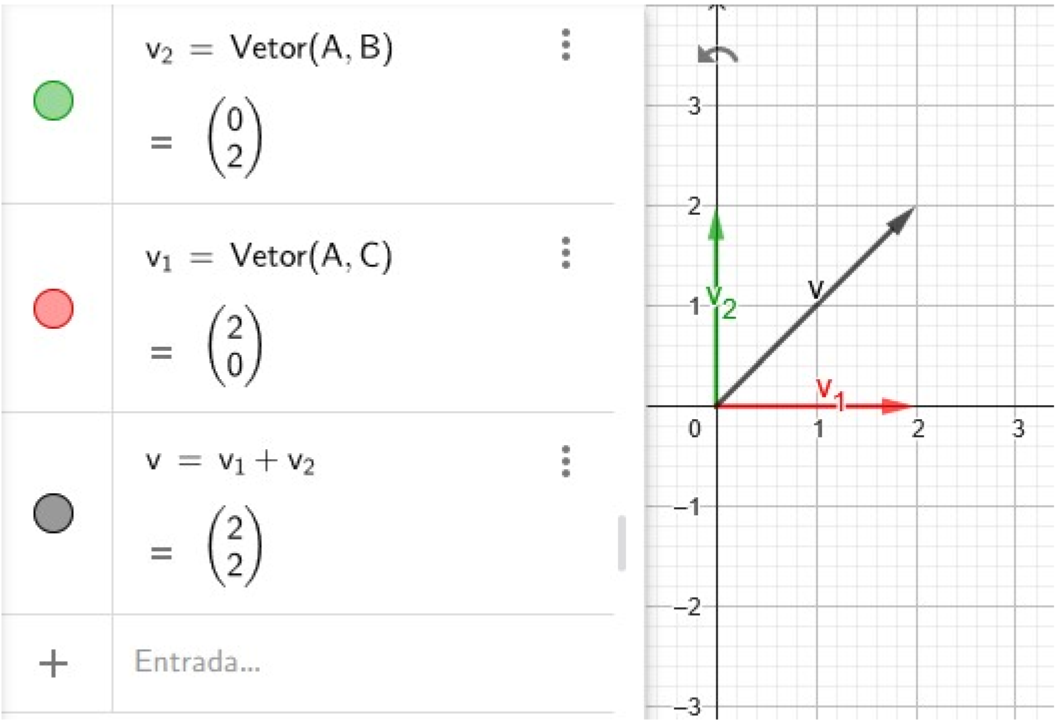
Fonte: Elaboração própria

Desenhados os vetores u e v, na caixa “Entrada”, pode-se digitar uma soma u+v que o próprio software reconhece como uma soma vetorial w, a aplicar a regra do paralelogramo e, ainda, apresentar automaticamente também a forma matricial. Isso também pode ser feito da forma contrária, o operador pode digitar o vetor na representação matricial e, automaticamente, representação por segmento orientado aparece no plano cartesiano. Isso pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem pois, tanto ao dar liberdade de desenho para o estudante, como o colocar a frente de descrever, e identificar, as características do vetor.

Como, no capítulo anterior, descrevemos que a soma vetorial pode ser mais facilmente nas forma de representação matricial e funcional, também se observa diretamente as propriedades da soma vetorial, pois, o software dá liberdade, de certa forma, artística, ao estudante, e observar os resultados gerados, como, ainda, entender os processos da operação.

Questões de exercícios a respeito de assuntos como a interdependência dos movimentos são exemplos que podem ser amplamente utilizados na apresentação da aula como na resolução pelos estudantes.

Figura 17 : Representação de soma vetorial nas representações matriciais e por segmentos orientados



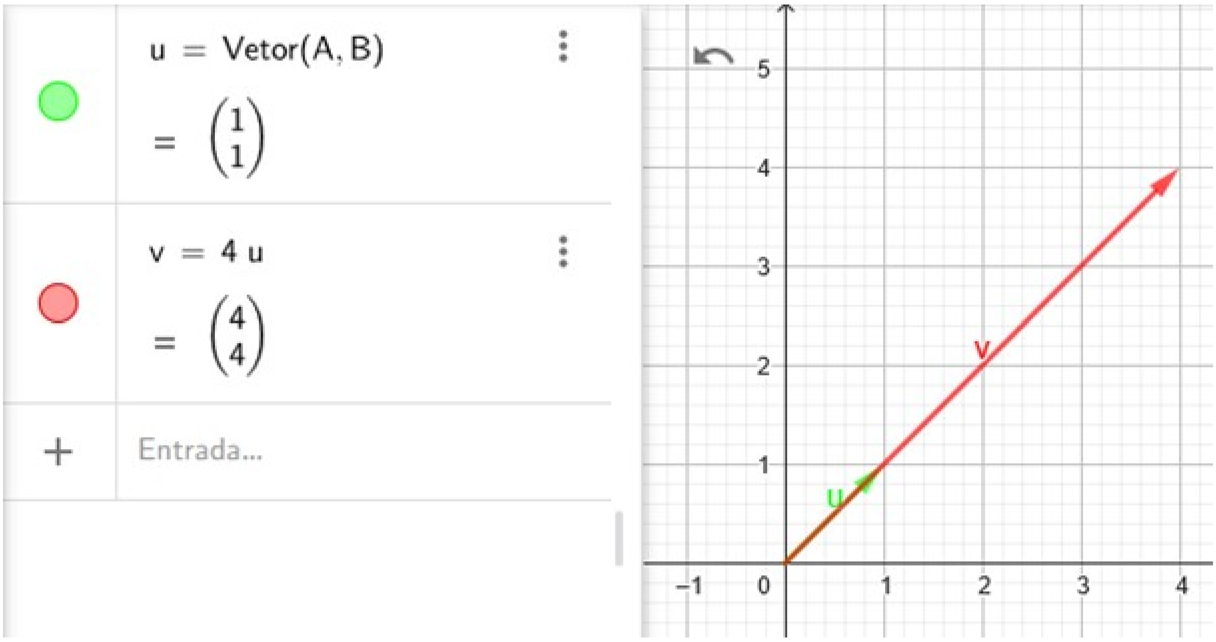
Fonte: Elaboração própria

Diversos assuntos de física podem ser abordados contemplados pela soma de vetores uma vez que, praticamente, as grandezas físicas obedecem ao princípio de superposição.

7.1.2 PRODUTO DE UM VETOR POR UM ESCALAR: BASES, COORDENADAS E DECOMPOSIÇÕES

O produto de um vetor por um escalar, também já expresso nas seções anteriores, pode ser contemplado também no GeoGebra ao desenhar um vetor e operar, também, na caixa “Entrada”.

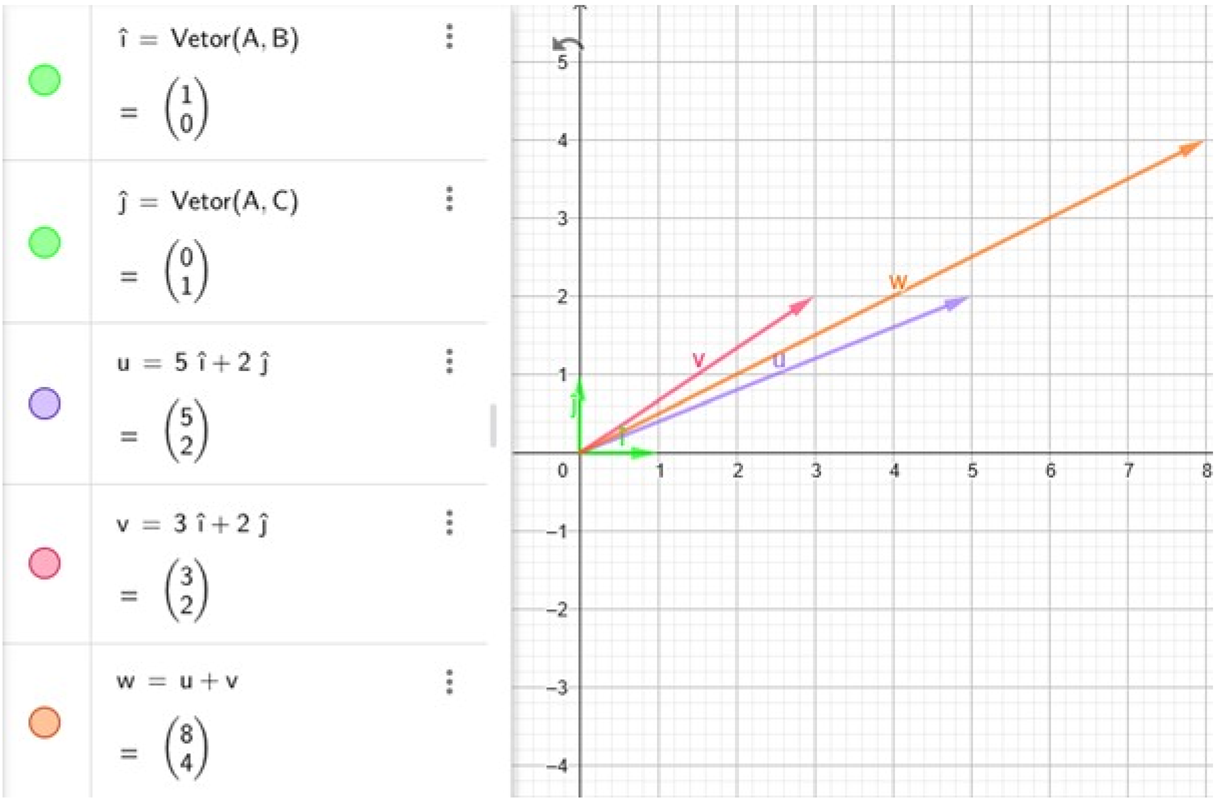
Figura 18: Multiplicação de um vetor por um escalar



Fonte: Elaboração própria

Isso pode ser apresentado em aula ao tratar do aumento do comprimento dos vetores unitários que formam uma base de duas dimensões e mostrar que a soma vetorial também pode ser apresentada por meio da multiplicação dos vetores da base por escalares:

Figura 19: Representação funcional, matricial e por segmento orientado de vetores



Fonte: Elaboração própria

Ao definirmos os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$, conseguimos construir os vetores na caixa "entrada" por meio de sua representação funcional, que nada mais é do que o aumento do comprimento dos vetores unitários pela multiplicação destes por escalares maiores que 1; ainda, pode-se também construir vetores soma e facilitar a identificação da decomposição vetorial, apresentada no capítulo anterior, pelo mesmo processo.

Com isso, ainda, também pode-se apresentar o conceito de referencial no momento em que definimos a origem do sistema; o docente pode ainda, orientar observar, a divergência das características dos vetores ao colocar um referencial deslocado da origem já orientada pelo software; atividades como mudança de base, apesar de não apresentadas nesse trabalho, podem ser apresentadas aos estudantes por meio desses processos, sem utilizar o formalismo da álgebra linear.

Capítulo 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, é notório que o tradicional já não é o bastante. É preciso se reinventar e se adaptar às novas tecnologias em diversos âmbitos da vida, incluindo o escolar. Isso faz com que seja preciso que se inclua as chamadas TICs no processo educacional e isso deve ser feito de forma organizada e consciente, pois de nada adianta ter o computador, por exemplo, e não saber utilizá-lo em prol do aprendizado.

Dessa forma, o professor aparece como peça-chave, elemento fundamental na estimulação e utilização corretas dessas tecnologias que são essenciais para a aprendizagem, fazendo com que o estudante se sinta mais próximo da escola, uma vez que já consegue perceber nela aquilo que ele geralmente utiliza no dia a dia: a tecnologia.

É justamente aqui que aparece a figura central desta pesquisa o conhecimento da Álgebra Vetorial aliando ao GeoGebra, o professor a partir da representação semiótica proporcionada pelo GEoGebra, possibilita a compreensão do sistema de representação vetorial na Mecânica, no estudo do movimento dos corpos. Apresentando um ensino de Física mais compreensível para os estudantes, a partir da Álgebra vetorial, campo de estudo da Matemática, promovendo uma relação interdisciplinar da Matemática e a Física.

A Álgebra Vetorial permite ao discente interrelacionar conteúdos e ter diferentes visões para um mesmo assunto, além de ser uma ponte entre o ensino médio e o superior. O *software* usado mostra conceitos físicos de uma forma prática e dinâmica, como o conceito vetorial exposto anteriormente, que sai de sua forma clássica, por meio de setas, e passa a ser visto em forma de função e o GeoGebra facilita isso.

Finalizando, é importante que o professor utilize métodos atraentes e que estimulem os educandos e, quando se fala de Física e Matemática no ensino médio, é necessário que o docente se valha de meios didáticos que sensibilizem e despertem o interesse dos alunos pela ciência. Ademais, quando o professor se vale dessas metodologias, cria também um laço efetivo entre ele e o estudante, promovendo as condições no ambiente escolar, para que se alcance a meta principal da educação: a construção do aprendizado.

Referências Bibliográficas

ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. **Mathematical methods for physicists**. 1999.

BONADIMAN, H.; NONENMACHER, S. E. B. O gostar e o aprender no ensino de física: Uma proposta metodológica. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Catarina; Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**, Florianópolis, SC, v. 24, p. 194-223, 2007. ISSN 2.

BONJORNO et al. **Física**: Mecânica, 1º ano. 3ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

CALÇADA, Caio Sérgio et al. **Física Clássica**. 1ª ed. São Paulo: Atual, 2012.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à prática**. 16.ed. Campinas/SP: Papirus, 2008.

DIOGINIS, Maria Lucineide et al. As novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem. **Encontro Nacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, Presidente Prudente**, v. 19, 2022.

DOCA et al. **Tópicos de Física**: volume 1. 21ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

FELIPE, Francisco Anderson Moreira. **O uso das TIC nas aulas de matemática**. 2015. 43 f. TCC (Graduação em Matemática) - Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará, Quixadá, 2015.

GUSSI, João Carlos. **O ensino da matemática no Brasil**: análise dos programas de ensino do Colégio Pedro II (1837 a 1931). 2011. 141f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba (SP), 2011.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 12ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA. **Sistema Nacional de Unidades (SI)**. s. l, 2022. Disponível em: ¡https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/noticias/tabela-atualizada-de-unidades-de-base-do-si¿. Acesso em: 12 dez. 2022.

KANTOROVICH, Aharon. **Scientific discovery: Logic and tinkering**. Suny Press, 1993.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro; Ed. 34, 1993.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Metodologia cientifica: ciência e conhecimento científico, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MORAES, J. U. P. **A visão dos alunos sobre o ensino de física: um estudo de caso**. Disponível em :http://www.scientiaplena.org.br/sp$_v5_1 14401.pdf.Acessoem : 12dez.$2022.

NICOLAU, Ferraro Gilberto et al. **Física, volume único**. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. **Classificação, seriação e contagem no ensino do número**: um estudo de epistemologia genética. Marília (SP): Oficina Universitária Unesp, 2007.

PORTO, Claudio M.; PORTO, MBDSM. Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, p. 1603.1-1603.8, 2008.

RAMALHO, Junior Francisco et al. **Os fundamentos da Física**. 10ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.

TRANCANELLI, Diego. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, 2016.

VEIT, Eliane A.; TEODORO, Vitor Duarte. Modelagem no ensino: aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 24, p. 87-96, 2002.

ZANI, Sérgio Luıs. **Álgebra linear**. São Carlos: ICMC, 2003.