



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IME
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



GRUPOS DE TRANÇAS VIRTUAIS SINGULARES

GABRIELE DE JESUS SILVA

Salvador-Bahia

GRUPOS TRANÇAS VIRTUAIS SINGULARES

GABRIELE DE JESUS SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. OSCAR EDUARDO
OCAMPO URIBE**

Salvador-Bahia
Julho de 2023

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Nome do discente.

Abreviação do título / Nome do discente. – 2020.

54 f. : il

Orientador: .

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2020.

1.

CDD - 519.72

CDU - 519.72

Grupos de tranças virtuais singulares

Gabriele de Jesus Silva

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora

Oscar E Ocampo

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (UFBA)

Kisney E. de Almeida

Prof. Dr. Kisney Emiliano de Almeida (UEFS)

Olga Patricia Salazar Díaz

Prof. Dr^a. Olga Patricia Salazar Diaz (Universidad Nacional de Colombia)

*Dedico a todas as pessoas que
me acompanharam.*

Agradecimentos

Agradeço ao Universo pela força, energia e pela vontade de sempre continuar tentando, mesmo em meio a pior fase.

A minha família por me apoiarem sempre, me incentivarem a não desistir e mais que isso, me impulsionarem a seguir o melhor dos caminhos. Amo vocês!

Ao meu esposo que caminhou comigo nessa estrada desde o começo e em todos os momentos. Muito obrigado, você é minha força.

Agradeço as minhas parceiras de jornada Mirele e Izamara por tornarem tudo mais leve com todas as conversas e horas dedicadas a me apoiar.

A minha gratidão ao prof. Oscar Ocampo, pela paciência, compreensão, pelos conselhos e conversas difíceis.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o meu mestrado.

A cada dia falta menos.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre algumas propriedades do grupo VSG_n , que representa tranças virtuais singulares para $n \geq 2$. Definimos invariantes numéricos para as tranças virtuais singulares, obtidos por meio de expoentes de palavras em VSG_n , e descrevemos o núcleo desses homomorfismos. Identificamos homomorfismos possíveis do grupo VSG_n para o grupo simétrico S_n , a menos de conjugação. No caso particular em que $n = 2$, apresentamos uma descrição e uma apresentação para o núcleo em cada caso. Para todos os homomorfismos possíveis, foram obtidas decomposições de VSG_n como produtos semidiretos do núcleo do homomorfismo e do grupo simétrico.

Palavras-chave: Grupos de tranças virtuais singulares; Núcleo; Homomorfismo; Invariantes.

Abstract

In this work, we present a study on some properties of the group VSG_n , which represents virtual singular braids for $n \geq 2$. We define numerical invariants for the virtual singular braids, obtained through word exponents in VSG_n , and describe the kernel of these homomorphisms. We identify all possible homomorphisms from the group VSG_n to the symmetric group S_n , up to conjugation. In the particular case where $n = 2$, we present a description and a presentation for the kernel in each case. For all possible homomorphisms, decompositions of VSG_n were obtained as semi-direct products of the kernel of the homomorphism and the symmetric group.

Keywords: Groups of singular virtual braids; Kernel; Homomorphism; Invariants.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Apresentação de grupos	7
1.2 Grupos livres e produtos livres	7
2 Teoria de Tranças Virtuais	9
2.1 Grupos de Tranças Clássicas	9
2.2 Grupo de Tranças Virtuais	12
2.3 Tranças Virtuais e suas permutações	12
3 Grupos de Tranças Virtuais Singulares	19
3.1 Algumas Propriedades	22
3.2 Invariantes de Tranças Virtuais Singulares	26
4 Homomorfismos de VSG_n no grupo simétrico S_m	31
4.1 Núcleo de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_2 \rightarrow S_2$	40
Referências	53

Lista de Figuras

2.1	Cruzamentos clássicos σ_i e σ_i^{-1} , para $i = 1, \dots, n - 1$.	10
2.2	Cruzamento virtual v_i , para $i = 1, \dots, n - 1$	12
3.1	Cruzamentos singulares τ_1 e τ_i^{-1} , para $i = 1, \dots, n - 1$	19
3.2	Movimentos clássicos e estendidos de Reidemeister	20
3.3	$v_i^2 = 1$	20
3.4	$\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$	21
3.5	$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$	21
3.6	$v_i v_j v_i = v_j v_i v_j$	21
3.7	$v_i \sigma_j v_i = v_j \sigma_i v_j$	21
3.8	$v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$	21
3.9	$\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$	21
3.10	P_3 representado geometricamente, onde o espaço em branco pode ser qualquer um dos cruzamentos.	22

Introdução

O estudo de tranças tem uma história longa e fascinante na matemática, e a teoria dos grupos de tranças de Artin tem sido objeto de intensa pesquisa desde sua introdução em 1925 [1]. Os grupos de tranças de Artin B_n fornecem uma ferramenta poderosa para entender a geometria e a topologia de curvas e superfícies, e suas aplicações se estendem além da matemática para a física e a criptografia. É possível descrever geometricamente cada elemento deste grupo através de uma configuração de n cordas trançadas que obedecem a determinadas restrições.

O desenvolvimento da teoria de tranças também levou ao estudo de generalizações do grupo B_n , que são objetos de estudo ativo tanto do ponto de vista geométrico quanto do ponto de vista algébrico. Um artigo de Caprau, De la Pena e McGahan [11], as tranças virtuais singulares foram introduzidas como uma generalização das tranças clássicas singulares definidas por Birman [9] e Baez [3], para estudar invariantes de Vassiliev e tranças virtuais definidas por Kauffman [16] e Vershinin [21]. Em [11], os autores provaram um teorema de Alexander e Markov para tranças virtuais singulares e apresentaram duas apresentações para o monóide de tranças virtuais singulares, denominado VSB_n . Em um artigo mais recente, Caprau e Yeung [4] mostraram que o monóide VSB_n está contido no grupo de tranças virtuais singulares VSG_n com n cordas. Eles também apresentaram o grupo de tranças puras singulares virtuais $VSPG_n$ e mostraram que VSG_n é um produto semidireto de $VSPG_n$ e o grupo simétrico S_n .

O interesse por esses objetos tem crescido e alguns progressos no seu estudo têm sido feitos nos últimos anos. Por exemplo, Caprau e Zepeda [13] construíram uma representação de VSB_n e, usando o método de Reidemeister-Schreier, encontraram uma apresentação para o monóide de tranças puras singulares virtuais. Além disso, Cisneros de la Cruz e Gandolfi [14] estudaram propriedades algébricas, combinatórias e topológicas de tranças virtuais singulares.

Neste trabalho vamos estudar propriedades do grupo de tranças virtuais singulares VSG_n , para $n \geq 2$. Definimos invariantes numéricos para as tranças virtuais singulares, obtidos por meio de expoentes de palavras em VSG_n , e descrevemos o núcleo desses homomorfismos. Identificamos todos os homomorfismos possíveis do

grupo VSG_n para o grupo simétrico S_n , a menos de conjugação. No caso particular em que $n = 2$, apresentamos uma descrição e uma apresentação para o núcleo em cada caso. Para todos os homomorfismos possíveis, foi possível obter uma decomposição de VSG_n como um produto semidireto do núcleo do homomorfismo e do grupo simétrico. Além disso, analisaremos se conceitos válidos para o grupo VB_n , se estendem para o contexto de VSG_n .

Começaremos no Capítulo 1 falando sobre conceitos importantes e resultados prévios que serão usados durante todo o trabalho. As referências usadas serão descritas ao longo do capítulo.

No Capítulo 2 recordaremos os conceitos de Grupos de tranças clássicas B_n . Além disso, com base nos artigos [2], [14], [6] e [4] definiremos os grupos de tranças virtuais VB_n e encontraremos alguns de seus homomorfismos.

Já no Capítulo 3, utilizando [8], [12] e [19], estudaremos o grupo de tranças virtuais singulares VSG_n , algumas de suas propriedades e alguns de seus invariantes.

Por fim, baseado em [19], no Capítulo 4 estudaremos os homomorfismos de VSG_n no grupo simétrico S_m e daremos as apresentações de seus núcleos utilizando o método de Reidemeister-Schreier descrito em [18].

Capítulo 1

Preliminares

Antes de começarmos o estudo dos grupos de tranças, falaremos de conceitos importantes que serão utilizados ao longo dos capítulos. O primeiro deles é o comutador. Dados um grupo G e x, y em G , o **comutador** de x e y é o elemento $[x, y]$ de G cuja definição é dada por $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, de forma que por convenção $[x_1] = x_1$ e $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$, para todos $x_1, \dots, x_n \in G$ e $n \geq 2$. Agora, dados x e y elementos de G , o **conjugado** de x por y é o elemento $x^y = y^{-1}xy$. Assim, podemos escrever $[x, y] = x^{-1}x^y$.

Uma **série central inferior** de um grupo é definida como

$$\begin{aligned}\Gamma_1(G) &= G \\ \Gamma_2(G) &= [G, G] \\ \Gamma_3(G) &= [\Gamma_2(G), G] \\ &\vdots \\ \Gamma_n(G) &= [\Gamma_{n-1}(G), G]\end{aligned}$$

Chamamos o segundo elemento da série de **subgrupo comutador**. O próximo lema vai nos dar ferramentas importantes de comutadores que serão usadas a seguir.

Lema 1.1. *Sejam G um grupo e x, y e z elementos de G . As seguintes identidades de comutadores valem:*

- (i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
- (ii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$;
- (iii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
- (iv) $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$.

Demonstração. Para o item (i) temos que

$$\begin{aligned}
 [x, y] &= x^{-1}y^{-1}xy \\
 &= (yx)^{-1}xy \\
 &= (yx)^{-1}(y^{-1}x^{-1})^{-1} \\
 &= (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} \\
 &= [y, x]^{-1}.
 \end{aligned}$$

As demonstrações dos itens (ii) e (iii) são análogas e portanto faremos apenas para o item (iii). Daí, segue que

$$\begin{aligned}
 [xy, z] &= (xy)^{-1}z^{-1}xyz \\
 &= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz \\
 &= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}yz \\
 &= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz \\
 &= [x, z]^y[y, z].
 \end{aligned}$$

Por fim, para o item (iv) temos que

$$\begin{aligned}
 [x^{-1}, y] &= xy^{-1}x^{-1}y \\
 &= xy^{-1}x^{-1}yxx^{-1} \\
 &= (y^{-1}x^{-1}yx)^{x^{-1}} \\
 &= [y, x]^{x^{-1}}.
 \end{aligned}$$

□

Ainda sobre comutadores, temos o **abelianizado** de um grupo G que nada mais é que o quociente dele pelo subgrupo comutador, ou seja, $\frac{G}{\Gamma_2(G)}$. Dizemos que um grupo G é **perfeito** se G é igual ao seu subgrupo comutador, ou seja, $G = \Gamma_2(G)$, e chamamos um subgrupo de G de **centro**, aqui denotaremos por $Z(G)$, se ele for da forma

$$Z(G) = \{s \in G \mid [s, g] = 1 \text{ para todo } g \in G\}.$$

Proposição 1.2. *Seja N subgrupo de G . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $gN = Ng$, para todo g pertencente a G ;
- (ii) $gNg^{-1} = N$, para todo g pertencente a G ;
- (iii) $gNg^{-1} \subset N$, para todo g pertencente a G ;
- (iv) $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ é grupo com a operação induzida de G .

Dizemos que N é **subgrupo normal** de G se respeita qualquer item da proposição anterior, aqui será denotado por $N \trianglelefteq G$.

Definição 1.3. Seja G um grupo e X um subgrupo de G . Definimos o **fecho normal** de X em G como a interseção de todo subgrupo normal N de G que contém X ,

$$\langle X \rangle^G = \langle g^{-1}xg \mid x \in X, g \in G \rangle$$

isto é, o menor subgrupo normal de G que contém X .

Um grupo G é dito **abeliano** se para todo par de elementos tomados em G , eles comutam. É chamado de **cíclico** se puder ser gerado por um único elemento.

O **grupo simétrico de grau n** , com $n \in \mathbb{N}$, é definido como sendo o grupo das simetrias de n elementos $Sym(\{1, 2, \dots, n\})$ e aqui será denotado por S_n .

Além de utilizarmos muito o grupo S_n ao decorrer do trabalho, será necessário também definirmos um de seus subgrupos. Seja α um homomorfismo tal que $\alpha : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$, o núcleo de α tem ordem $\frac{n!}{2}$, será denotado por A_n e o chamaremos de **grupo alternado** de grau n . Relembremos a definição de grupo simples: Dado G um grupo, ele é dito **simples** se seus únicos subgrupos normais são o trivial e o próprio G . Do Teorema 3.11 de [20], temos que para $n \geq 5$, o grupo alternado A_n é simples e disso podemos construir os seguintes lemas:

Lema 1.4. *Seja $n \geq 5$. Temos que A_n é perfeito.*

Demonstração. Como A_n é simples para $n \geq 5$, temos apenas duas opções para o subgrupo comutador $\Gamma_2(A_n)$: o próprio A_n ou o subgrupo trivial. Se $\Gamma_2(A_n)$ for o trivial, então o abelianizado $A_n/\Gamma_2(A_n)$ seria o próprio A_n , mas ele não é abeliano. Portanto, nos resta apenas a possibilidade de $\Gamma_2(A_n) = A_n$ fazendo com que A_n seja perfeito para $n \geq 5$. \square

Lema 1.5. *Seja $n \geq 5$. Os únicos subgrupos normais de S_n são o trivial, A_n e S_n .*

Antes de provarmos esse lema, provaremos a afirmação de que $Z(S_n)$ é trivial. Vamos supor que existe um elemento não trivial g no centro de S_n , ou seja, g não é o elemento neutro e comuta com todos os elementos do grupo.

Como g é não trivial, logo existem i e j em $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ com $i \neq j$, tal que $g(i) = j$.

Agora vamos considerar uma permutação h em S_n que não é igual a g . Seja $n \geq 3$, então existe k em $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ com $k \neq i \neq j$ tal que $h(i) = k$. Portanto

$$hg(i) = h(j) = j$$

$$gh(i) = g(k) \neq j,$$

já que g é bijetiva. Logo $hg \neq gh$, o que contradiz $g \in Z(S_n)$. Concluimos que não pode existir um elemento não trivial g no centro de S_n . Portanto, o centro de S_n é trivial, contendo apenas o elemento neutro. Vamos então a demonstração do Lema 1.5.

Demonstração. Suponha que existe outro subgrupo normal não trivial N de S_n além de A_n . Como A_n tem índice 2 em S_n , os únicos subgrupos de S_n que contêm A_n são A_n e S_n . Note que a interseção de N com A_n é subgrupo normal de A_n . Como A_n é simples esta interseção só pode ser trivial ou o próprio A_n . Mas N não contém A_n , logo a interseção de N com A_n só pode ser trivial. Temos então que NA_n é um subgrupo de S_n que contém A_n e sua ordem será $|N||A_n| = |N|\frac{n!}{2}$. Daí segue que a ordem de N pode ser no máximo 2, caso contrário, não seria subgrupo de S_n . Como supomos N não trivial, então nos resta que $|N| = 2$ e $S_n \cong A_n \times N$. Vamos lembrar que N é normal, então para todo s em S_n temos $Ns = sN$. Dado $x \in N$ não trivial temos a igualdade $xs = sx$ e que x pertence ao centro de S_n , o que contradiz o fato de que para $n \geq 5$, o centro de S_n é trivial. \square

Lema 1.6. *Seja $n \geq 5$. Então $\Gamma_2(S_n) = A_n$.*

Demonstração. Do Lema 1.5 temos três possibilidades para o $\Gamma_2(S_n)$, com $n \geq 5$: O trivial, S_n e A_n . Se $\Gamma_2(S_n)$ fosse trivial, ao tomarmos o abelianizado de S_n teríamos $S_n/\Gamma_2(S_n) = S_n$, mas S_n não é abeliano. Caso $\Gamma_2(S_n) = S_n$ teríamos que o abelianizado de S_n seria trivial, mas isso não faz sentido já que existem elementos que comutam em S_n . Então nos resta que $\Gamma_2(S_n) = A_n$. \square

Outro conceito interessante é o de **produto semidireto**. Sejam G um grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. O grupo G é chamado de produto semidireto de N por H , aqui denotaremos por $N \rtimes H$, se a interseção de N e H for trivial e $G = NH$. Dizemos que uma sequência de grupos e homomorfismos

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \rightarrow 1,$$

é uma **sequência exata curta** se f for sobrejetor, g injetor e $Im(f) = Ker(g)$. Dizemos que tal sequência **cinde**, se existir um homomorfismo $\iota : K \rightarrow G$ satisfazendo $g(\iota(k)) = k$ para todo $k \in K$. Esse homomorfismo ι é chamado de **seção**. Além disso, vale a seguinte proposição:

Proposição 1.7. *Sejam H, G e K grupos. Se existe uma sequência exata curta*

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \rightarrow 1,$$

que cinde, então G é isomorfo a um produto semidireto de H por K .

Demonstração. Esta prova e mais detalhes podem ser encontrados na demonstração do Corolário 4.38 em [10]. \square

1.1 Apresentação de grupos

Nesta seção vamos definir o conceito de **apresentação de grupos** que usaremos no decorrer de todo trabalho.

Definição 1.8. Dizemos que o grupo G tem apresentação $\langle X|R \rangle$ se $G \cong F(X)/\langle R \rangle^{(F(X))}$.

Tomaremos S_n como exemplo e explicitaremos uma de suas apresentações que será usada ao longo do trabalho. Dados $X = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ os geradores e $R = \{R_1, R_2, R_3\}$ as seguintes relações:

$$R_1 : v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$R_2 : v_i v_j = v_j v_i \text{ com } |i - j| \geq 2;$$

$$R_3 : v_i^2 = 1 \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Então, uma apresentação de S_n é:

$$S_n = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \mid R_1, R_2, R_3 \rangle.$$

Teorema 1.9 (Teorema de von Dyck). *Seja H um grupo, $f : X \rightarrow H$ uma função qualquer e $G = \langle X|R \rangle$. Então, se $\varphi : F(X) \rightarrow H$ é o homomorfismo induzido por f em $F(X)$ e $R \subset \ker(\varphi)$ então existe um homomorfismo $\psi : G \rightarrow H$ tal que $\psi|_X = f$.*

1.2 Grupos livres e produtos livres

Seja X um conjunto não-vazio. Vamos definir o conceito de **palavra** em X .

Definição 1.10. Uma palavra em X é uma função cujo domínio é $I_n = \{1, \dots, n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e contradomínio $X \times \mathbb{Z}$. Se w é uma palavra em X e $w(i) = (x_i, b_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, então denotaremos esta palavra por $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$.

Quando em uma palavra $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$, vale que $x_i = x_{i+1}$ para algum $i \in I_{n-1}$, dizemos que a substituição de $x_i^{b_i} x_{i+1}^{b_{i+1}}$ por $x_i^{b_i+b_{i+1}}$ é uma **contração**. Se não for possível realizar uma contração em uma palavra, dizemos que ela é uma **palavra reduzida**.

O conjunto de palavras reduzidas de X , que aqui denotaremos por F , é um grupo **livre gerado por X** , com a operação produto $w_1 \cdot w_2$ definida da seguinte forma: Sejam $w_1 : I_r \rightarrow X \times \mathbb{Z}$ e $w_2 : I_s \rightarrow X \times \mathbb{Z}$ duas palavras reduzidas em X e seja a palavra w' definida da seguinte maneira:

$$w' : I_{r+s} \rightarrow X \times \mathbb{Z}$$

$$i \mapsto \begin{cases} w_1(i), & \text{se } i \leq r \\ w_2(i-r), & \text{se } i \geq r \end{cases}$$

Se w é a palavra reduzida obtida a partir das contrações de w' , então temos $w_1.w_2 = w$.

Sejam os grupos $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle Y \mid S \rangle$ tais que X e Y são disjuntos. Chamamos de **produto livre** entre G e H , aqui denotado por $G * H$, o grupo da forma:

$$G * H = \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle.$$

Lema 1.11. *Sejam G e H dois grupos. Se $G * H$ é o produto livre, então $Z(G * H)$ é trivial.*

Demonstração. Sejam G e H dois grupos não triviais e $w \in Z(G * H)$. Tome $w = w_1 \dots w_2 g_r$, com g_r sendo uma palavra reduzida de G . Agora tomemos $h \in G * H$, então $hw = hw_1 \dots w_2 g_r$ e $wh = w_1 \dots w_2 g_r h$. Mas $hw_1 \dots w_2 g_r \neq w_1 \dots w_2 g_r h$, já que g_r e h não possuem relações entre si por estarem em grupos diferentes de um produto livre e portando não poderão fazer contração. Logo $hw \neq wh$ e w não pertence a $Z(G * H)$. Como w é arbitrário, então nos resta somente o elemento trivial no centro de $(G * H)$ ou seja, $Z(G * H)$ é trivial. \square

Agora suponha que temos um único grupo G com dois subgrupos isomorfos A, B em G , onde $\rho : A \rightarrow B$ é um isomorfismo. Considere $t \notin G$ e $\langle t \rangle$ o grupo cíclico de ordem infinita, uma **extensão HNN** de G em relação a A, B e ρ , denotada por

$$\langle G, t \mid t^{-1}at = \rho(a), a \in A \rangle$$

é o grupo quociente do produto livre $G * \langle t \rangle$ pelo fecho normal do conjunto

$$\{t^{-1}at\rho(a)^{-1} \mid a \in A\}.$$

Capítulo 2

Teoria de Tranças Virtuais

Antes de falarmos sobre os grupos de tranças virtuais, iremos relembrar alguns conceitos a respeito da teoria de tranças clássicas que serão importantes para melhor compreensão do presente capítulo. Além disso, determinaremos as notações que serão utilizadas no decorrer do presente trabalho. As principais referências utilizadas são [2], [14] e [6].

2.1 Grupos de Tranças Clássicas

Nessa seção vamos introduzir o conceito de grupos de tranças de Artin, também conhecido com grupos de tranças clássicas B_n [2].

Definição 2.1. Um **grupo de tranças** de n cordas, o qual denotaremos por B_n , é um grupo gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ que respeitam as seguintes relações:

$$R_1 : \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ para } |j - i| \geq 2.$$

$$R_2 : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Além disso, uma apresentação para B_n é

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid R_1, R_2 \rangle.$$

Geometricamente os cruzamentos clássicos são vistos como na Figura 2.1.

Existe um homomorfismo de B_n sobre o grupo simétrico S_n , de forma que este homomorfismo leva σ_i para a transposição $(i, i + 1)$, com $i = 1, 2, \dots, n - 1$. O núcleo desse homomorfismo é chamado de **grupo de tranças puras** e denotado por P_n . O grupo P_n é gerado por $a_{i,j}$ com $1 \leq i < j \leq n$. Esses geradores podem ser expressos pelos geradores de B_n de forma que

$$a_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n.$$

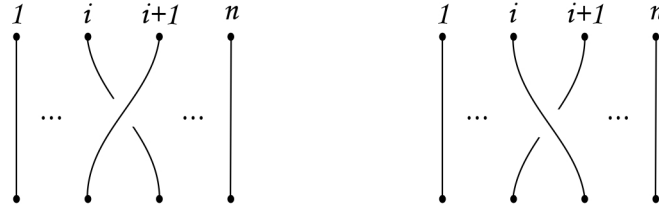


Figura 2.1: Cruzamentos clássicos σ_i e σ_i^{-1} , para $i = 1, \dots, n - 1$.

O subgrupo P_n é normal em B_n , e o quociente B_n/P_n é o grupo simétrico S_n .

Proposição 2.2. *Seja $n \geq 3$. Então o grupo $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$.*

Demonstração. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{\Gamma_2(B_n)}{\Gamma_3(B_n)} \xrightarrow{h} \frac{B_n}{\Gamma_3(B_n)} \xrightarrow{p} \frac{B_n}{\Gamma_2(B_n)} \rightarrow 1.$$

Como todos os σ_i de $\frac{B_n}{\Gamma_3(B_n)}$ se projetam no mesmo elemento do abelianizado de B_n , para cada $1 \leq i \leq n - 1$, existe t_i em $\frac{\Gamma_2(B_n)}{\Gamma_3(B_n)}$, onde $t_1 = 1$ tal que $\sigma_i = t_i \sigma_1$. Ao tomarmos a segunda relação de B_n vemos que $t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 = t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1$. Mas os t_i são centrais em $\frac{B_n}{\Gamma_3(B_n)}$, então

$$\begin{aligned} t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 &= t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 t_i t_{i+1} t_i &= \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 t_{i+1} t_i t_{i+1} \\ t_i t_{i+1} t_i &= t_{i+1} t_i t_{i+1} \\ t_i &= t_{i+1}. \end{aligned}$$

Ou seja, $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 1$. Segue que, por $\sigma_i = t_i \sigma_1$ obtemos $\sigma_i = \sigma_1$. Então o homomorfismo sobrejetor p é um isomorfismo, fazendo com que $\ker(p) = \text{Im}(h) = 1$ e por consequência $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$. \square

Ao falarmos de grupo perfeito nas preliminares, tínhamos a intenção de analisar se os grupos de tranças definidos ao longo do trabalho seriam perfeitos. Neste sentido, temos a proposição a seguir válida para B_n .

Proposição 2.3. *Seja B_n , com $n \geq 5$. Então o grupo $\Gamma_2(B_n)$ é perfeito.*

Demonstração. Seja B_n com $n \geq 5$. Note que podemos reescrever $\sigma_3\sigma_1^{-1}$ de forma que

$$\begin{aligned}
\sigma_3\sigma_1^{-1} &= \sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 \\
&= (\sigma_1\sigma_2)^{-1}(\sigma_3\sigma_1^{-1})^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2) \\
&= (\sigma_1\sigma_2)^{-1}[\sigma_3\sigma_1^{-1}, \sigma_1\sigma_2^{-1}](\sigma_1\sigma_2).
\end{aligned}$$

Com isso, se tomarmos $\sigma_3\sigma_1^{-1} = g_1$ e $\sigma_1\sigma_2^{-1} = g_2$, percebemos que $g_1, g_2 \in \Gamma_2(B_n)$ e que $g_1 \in [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$. Tomemos agora o subgrupo normal $N = \langle g_1 \rangle$ de B_n , temos que N também está contido em $[\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$.

Para $n \geq 5$, segue das relações de B_n que $N = \langle g_1 \rangle$ contém todo o $\Gamma_2(B_n)$. De fato, a apresentação de $\frac{\Gamma_2(B_n)}{N}$ envolve os geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, as relações R_1, R_2 de B_n e a adicional $\sigma_3\sigma_1^{-1} = 1$. Vamos analisar como seria essa apresentação. Tomando R_1 temos que $\sigma_3\sigma_4 = \sigma_4\sigma_3$ o que implica que de R_2 temos

$$\begin{aligned}
\sigma_3\sigma_4\sigma_3 &= \sigma_4\sigma_3\sigma_4 \\
\sigma_4\sigma_3\sigma_3 &= \sigma_4\sigma_4\sigma_3 \\
\sigma_3 &= \sigma_4.
\end{aligned}$$

De forma análoga e recursiva, basta repetirmos o mesmo processo para os outros geradores de B_n , daí vamos ter que $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{n-1}$. Com isso as relações R_1 e R_2 serão descartadas, $\frac{B_n}{N}$ terá apenas um gerador e será um grupo livre. Portanto $\frac{B_n}{N} \cong \mathbb{Z}$, mas como $\Gamma_2(B_n)$ é o menor subgrupo que abelianiza B_n , logo N contém $\Gamma_2(B_n)$. Então temos a seguinte sequência de inclusões

$$\Gamma_2(B_n) \subseteq N \subseteq [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)].$$

Segue que $\Gamma_2(B_n) \subseteq [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$. Como $[\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)] \subseteq \Gamma_2(B_n)$ por definição de série central inferior, logo $\Gamma_2(B_n) = [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$ e $\Gamma_2(B_n)$ é perfeito. \square

2.2 Grupo de Tranças Virtuais

O grupo de tranças virtuais, o qual denotaremos por VB_n , tem uma apresentação dada por

$$VB_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1} \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 \rangle.$$

Onde os R_k , com $k = 1, \dots, 7$, são as relações tais que

$$R_1 : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$R_2 : \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ com } |i - j| \geq 2;$$

$$R_3 : v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$R_4 : v_i v_j = v_j v_i \text{ com } |i - j| \geq 2$$

$$R_5 : v_i^2 \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$R_6 : v_i v_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} v_i v_{i+1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$R_7 : \sigma_i v_j = v_j \sigma_i \text{ com } |i - j| \geq 2.$$

Geometricamente o cruzamento virtual é visto como na Figura 2.2.

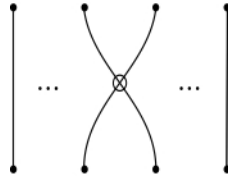


Figura 2.2: Cruzamento virtual v_i , para $i = 1, \dots, n-1$

2.3 Tranças Virtuais e suas permutações

A partir das apresentações de VB_n e S_n , podemos ver dois epimorfismos de VB_n em S_n . De forma que o primeiro, o qual chamaremos de π_P , e o segundo, aqui chamado de π_B , estão definidos por

$$\pi_P(\sigma_i) = \pi_P(v_i) = s_i,$$

$$\pi_B(\sigma_i) = 1, \quad \pi_B(v_i) = s_i,$$

para todo $1 \leq i \leq n-1$. Ao analisarmos os núcleos de tais aplicações vemos que o $\ker(\pi_P)$ é o grupo das tranças virtuais puras VP_n . Uma apresentação desse subgrupo foi dada por Bardakov [4]. Já o $\ker(\pi_B)$, será denotado por KB_n .

Antes de falarmos sobre a próxima proposição, lembrando o conceito de seção e adaptando para nosso caso, definiremos $\iota : S_n \rightarrow VB_n$, de forma que $\iota(s_i) = v_i$ para todo i maior ou igual que 1 e a partir destes conceitos, temos como resultado a Proposição 2.4.

Proposição 2.4. *Seja $1 \leq i \leq n - 1$, existem decomposições de VB_n em produtos semi-diretos.*

$$1. \quad VB_n = VP_n \rtimes S_n$$

$$2. \quad VB_n = KB_n \rtimes S_n$$

Demonstração. Como tanto VP_n , quanto KB_n são núcleos, conseguimos escrever duas sequências exatas curtas

$$1 \rightarrow VP_n \rightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_P} S_n \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad 1 \rightarrow KB_n \rightarrow VB_n \xrightarrow{\pi_B} S_n \rightarrow 1$$

Note que ι é claramente uma seção, tanto de π_P e π_B e injetiva, já que $\pi_P(\iota(s_i)) = s_i$ e $\pi_B(\iota(s_i)) = s_i$, podemos escrever VB_n como produto semidireto de forma que $VB_n = VP_n \rtimes S_n$ e $VB_n = KB_n \rtimes S_n$. \square

Proposição 2.5. *Seja VB_n , com $n \geq 5$. Então o grupo $\Gamma_2(VB_n)$ é perfeito.*

Demonstração. Vamos considerar um comutador $[a, b] \in \Gamma_2(VB_n)$, para provar nossa afirmação precisaremos mostrar que $[a, b]$ também pertence a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$. Como VB_n é gerado por cópias de B_n e S_n , logo podemos encarar $VB_n = \langle B_n, S_n \rangle$. Reescreveremos $[a, b]$ como produto de comutadores utilizando a igualdade no parágrafo anterior e as identidades de comutadores dadas no Lema 1.1. Este produto de comutadores será da forma

$$[x, y]^k, \text{ onde } x, y \in \{\sigma_i, v_i \mid 1 \leq i < j \leq n - 1 \text{ e } k \in VB_n\},$$

ou seja, $[\sigma_i, \sigma_j]^\alpha$, $[v_i, v_j]^\beta$, $[\sigma_i, v_j]^\lambda$, com $k = \alpha, \beta, \lambda \in VB_n$. Observe que $\Gamma_2(B_n)$ é perfeito pela Proposição 2.3 e que $\Gamma_2(S_n)$ também é, já que pelos Lemas 1.4 e 1.6 temos que $\Gamma_2(S_n) = A_n$ e que A_n é perfeito, então $[\sigma_i, v_j] \in [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$. Do mesmo modo $[v_i, v_j] \in [\Gamma_2(S_n), \Gamma_2(S_n)]$, com isso $[\sigma_i, \sigma_j]^\alpha$ e $[v_i, v_j]^\beta$ pertencem a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$. Portanto provaremos apenas que os comutadores do tipo $[\sigma_i, v_j]$ pertencem a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Se considerarmos $[\sigma_i, v_j]$ quando $|i - j| > 1$, então $[\sigma_i, v_j] = 1$, já que eles comutam. Porém, quando $|i - j| \leq 1$, existe um par de índices m, l com $1 \leq m, l \leq n - 1$ e $|m - l| > 1$ e dois elementos $c_{i,m}$ e $d_{j,l}$ onde $c_{i,m} \in \Gamma_2(B_n)$ e $d_{j,l} \in \Gamma_2(S_n)$ de forma que $\sigma_i = c_{i,m}\sigma_m$ e $v_j = d_{j,l}v_l$. Daí

$$[\sigma_i, v_j] = [c_{i,m}\sigma_m, d_{j,l}v_l].$$

Utilizando as identidades dos comutadores podemos escrever que

$$\begin{aligned} [c_{i,m}\sigma_m, d_{j,l}v_l] &= [c_{i,m}\sigma_m, v_l][c_{i,m}\sigma_m, d_{j,l}]^{v_l} \\ &= [c_{i,m}, v_l]^{\sigma_m}[\sigma_m, v_l]([c_{i,m}, d_{j,l}]^{\sigma_m}[\sigma_m, d_{j,l}])^{v_l} \\ &= [c_{i,m}, v_l]^{\sigma_m}[c_{i,m}, d_{j,l}]^{\sigma_m v_l}[\sigma_m, d_{j,l}]^{v_l}. \end{aligned}$$

Analisando o resultado, é claro que $[c_{i,m}, d_{j,l}] \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$ e portanto, $[c_{i,m}, d_{j,l}]^{\sigma_m \tau_l}$ também pertence a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Consideremos agora o comutador $[c_{i,m}, v_l]^{\sigma_m}$ que pode ser reescrito como,

$$[c_{i,m}, v_l]^{\sigma_m} = \sigma_m^{-1} c_{i,m}^{-1} v_l^{-1} c_{i,m} v_l \sigma_m = \sigma_m^{-1} c_{i,m}^{-1} v_l c_{i,m} v_l \sigma_m = (c_{i,m}^{-1} c_{i,m}^{v_l})^{\sigma_m},$$

como $c_{i,m}$ está em $\Gamma_2(B_n)$ que é perfeito, então $c_{i,m}$ está em $[\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$ e, portanto, $[c_{i,m}, v_l]^{\sigma_m} \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$. Agora vamos observar o comutador $[\sigma_m, d_{j,l}]$ que pode ser reescrito como,

$$[\sigma_m, d_{j,l}]^{v_l} = v_l^{-1} \sigma_m^{-1} d_{j,l}^{-1} \sigma_m d_{j,l} v_l = ((d_{j,l}^{-1})^{\sigma_m} d_{j,l})^{v_l},$$

analogamente como $d_{j,l}$ está em $\Gamma_2(S_n)$ que é perfeito, então $d_{j,l}$ também está em $[\Gamma_2(S_n), \Gamma_2(S_n)]$ e, portanto, $[\sigma_m, d_{j,l}]^{v_l} \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$ fazendo com que $\Gamma_2(VB_n)$ seja perfeito para $n \geq 5$. \square

Dado um grupo G , um **automorfismo** de G é um isomorfismo $\alpha : G \rightarrow G$. O conjunto dos automorfismos de G será denotado por $Aut(G)$. É fácil verificar que a composição de dois automorfismos de G é um automorfismo de G e que $Aut(G)$ é um grupo, com operação de composição. Para os próximos passos definamos os automorfismos $\varsigma_1, \varsigma_2 : VB_n \rightarrow VB_n$ de forma que

$$\varsigma_1(\sigma_i) = v_i \sigma_i v_i \quad \varsigma_1(v_i) = v_i \quad \varsigma_2(\sigma_i) = \sigma_i^{-1} \quad \varsigma_2(v_i) = v_i$$

e v_6 o homomorfismo de S_6 em S_6 por

$$\begin{aligned} v_6(1) &= (1) & v_6(s_1) &= (12)(34)(56) & v_6(s_2) &= (23)(15)(46) \\ v_6(s_3) &= (13)(24)(56) & v_6(s_4) &= (12)(35)(46) & v_6(s_5) &= (23)(14)(56) \end{aligned}$$

Além disso, precisaremos da definição e proposição a seguir.

Definição 2.6. Sejam G e H dois grupos e ψ um homomorfismo de G em H . Dizemos que ψ é **abeliano**, se sua imagem é um subgrupo abeliano de H .

Proposição 2.7. Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5, m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\varphi : S_n \rightarrow S_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades.

1. φ é abeliano,
2. $n = m$ e $\varphi = Id$,
3. $n = m = 6$ e $\varphi = v_6$.

Essa proposição é um resultado conhecido e foi utilizado em [8] para poder demonstrar o Teorema 2.8. Agora que temos o necessário, definiremos e analisaremos os possíveis automorfismos de VB_n a S_m , S_n a VB_m e VB_n a VB_m .

Teorema 2.8. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq 5, m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\psi : VB_n \rightarrow S_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades.*

1. ψ é abeliano,
2. $n = m$ e $\psi \in \{\pi_B, \pi_P\}$,
3. $n = m = 6$ e $\psi \in \{v_6 \circ \pi_B, v_6 \circ \pi_P\}$.

Demonstração. Note que $\varphi = \psi \circ \iota : S_n \mapsto S_m$ é homomorfismo, portanto, pela Proposição 2.7 temos que três possibilidades.

- 1) Suponha que $\psi \circ \iota$ seja abeliano. Logo existe uma imagem $\omega_1 \in S_m$ tal que

$$\omega_1 = (\psi \circ \iota)(s_i) = \psi(v_1)$$

para todo i no conjunto $I = \{1, \dots, n-1\}$. Seja $s_i^2 = 1$, nós temos $\omega_1^2 = 1$. Tomemos agora $\omega_2 = \psi(\sigma_1)$. Pela relação $v_i v_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} v_i v_{i+1}$ segue então que

$$\psi(\sigma_i) = \omega_1^2 \psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_{i+1}) \omega_1^2$$

para todo i em $\{1, \dots, n-2\}$, como $\psi(\sigma_i) = \omega_2$ para todo i em I podemos concluir pela relação $v_1 \sigma_3 = \sigma_3 v_1$ que

$$\begin{aligned} \psi(v_1 \sigma_3) &= \psi(\sigma_3 v_1) \\ \psi(v_1) \psi(\sigma_3) &= \psi(\sigma_3) \psi(v_1) \\ \omega_1 \omega_2 &= \omega_2 \omega_1. \end{aligned}$$

Portanto ψ é abeliano.

- 2) Suponha que $n = m$ e $\psi \circ \iota = Id$, então $\psi(v_i) = s_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Da relação $\sigma_1 v_i = v_i \sigma_1$, segue que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= v_i \sigma_1 v_i^{-1} \\ \psi(\sigma_1) &= \psi(v_i \sigma_1 v_i^{-1}) \\ \psi(\sigma_1) &= s_i \psi(\sigma_1) s_i^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $\psi(\sigma_1)$ está no centralizador de s_i que é $\langle s_i \rangle = \{1, s_i\}$. Daí temos duas opções para $\psi(\sigma_1)$:

- Para $\psi(\sigma_1) = 1$, então $\psi(\sigma_i) = 1$. Provando tal afirmação temos que pela relação $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ temos que

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1) &= \psi(\sigma_2)\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2) \\ 1\psi(\sigma_2)1 &= \psi(\sigma_2)1\psi(\sigma_2) \\ \psi(\sigma_2)\psi(\sigma_2)^{-1} &= \psi(\sigma_2) \\ \psi(\sigma_2) &= 1.\end{aligned}$$

Vamos supor que $\psi(\sigma_k) = 1$ então

$$\begin{aligned}\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k &= \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1} \\ \psi(\sigma_k)\psi(\sigma_{k+1})\psi(\sigma_k) &= \psi(\sigma_{k+1})\psi(\sigma_k)\psi(\sigma_{k+1}) \\ 1\psi(\sigma_{k+1})1 &= \psi(\sigma_{k+1})1\psi(\sigma_{k+1}) \\ \psi(\sigma_{k+1})\psi(\sigma_{k+1})^{-1} &= \psi(\sigma_{k+1}) \\ \psi(\sigma_{k+1}) &= 1.\end{aligned}$$

Portanto $\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_i) = 1$ e $\psi = \pi_B$.

- Para $\psi(\sigma_1) = s_1$ faremos a prova por indução de que $\psi(\sigma_i) = s_1$. É verdade por hipótese que para $i = 1$ é verdade. Suponhamos agora que para $i \geq 2$ e $\psi(\sigma_{i-1}) = s_{i-1}$. Então pela relação $v_{i-1}v_i\sigma_{i-1} = \sigma_i v_{i-1}v_i$ temos que

$$\begin{aligned}\sigma_i &= v_{i-1}v_i\sigma_{i-1}v_i^{-1}v_{i-1}^{-1} \\ \psi(\sigma_i) &= \psi(v_{i-1})\psi(v_i)\psi(\sigma_{i-1})\psi(v_i)\psi(v_{i-1}) \\ \psi(\sigma_i) &= s_{i-1}s_i s_{i-1} s_i s_{i-1} \\ \psi(\sigma_i) &= s_{i-1}s_{i-1} s_i s_{i-1} s_{i-1} \\ \psi(\sigma_i) &= s_i.\end{aligned}$$

Logo $\psi(v_i) = \psi(\sigma_i) = s_i$, ou seja, $\psi = \pi_P$.

- 3) Por fim, vamos supor que $n = m = 6$ e $\psi \circ \iota = v_6$. Então $v_6^{-1} \circ \psi \circ \iota = Id$ e pela suposição anterior, temos que $v_6^{-1} \circ \psi = \pi_B$ ou $v_6^{-1} \circ \psi = \pi_P$. Daí segue que $\psi = v_6 \circ \pi_B$ ou $\psi = v_6 \circ \pi_P$.

□

Teorema 2.9. *Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5, m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\varphi : S_n \rightarrow VB_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades:*

1. φ é abeliano,

2. $n = m$ e $\varphi = \iota$,
3. $n = m = 6$ e $\varphi = \iota \circ \nu_6$.

Teorema 2.10. *Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5, m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\psi : VB_n \rightarrow VB_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, uma das seguintes possibilidades é válida.*

1. ψ é abeliano,
2. $n = m$ e $\psi \in \{\iota \circ \pi_B, \iota \circ \pi_P\}$,
3. $n = m = 6$ e $\psi \in \{\iota \circ \nu_6 \circ \pi_B, \iota \circ \nu_6 \circ \pi_P\}$,
4. $n = m$ e $\psi \in \{id, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_1 \circ \varsigma_2\} = \langle \varsigma_1, \varsigma_2 \rangle$.

As provas dos Teoremas 2.9 e 2.10 podem ser encontrados em [8].

Um grupo G é dito **Hopfiano** sempre que dado um homomorfismo sobrejetivo $\psi : G \rightarrow G$, ele também seja injetivo, isto é, para cada $N \trianglelefteq G$ se $G/N \cong G$, então $N = \{1\}$. Um exemplo de grupo Hopfiano é o \mathbb{Q} , já que dada $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $\psi(x) = ax$, $a \in \mathbb{Q}$, é claramente um homomorfismo sobrejetivo, o que implica $a \neq 0$ e que ψ também é injetivo. Já um grupo é dito **co-Hopfiano** sempre que dado um homomorfismo injetivo $\psi : G \rightarrow G$, ele também seja sobrejetivo. Pelos teoremas anteriores, chegamos ao corolário a seguir.

Corolário 2.11. *Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$. Então VB_n é Hopfiano e co-Hopfiano.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.10 temos que, a menos de conjugação, os únicos homomorfismos sobrejetivos de VB_n em VB_n são os elementos de $\{id, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_1 \circ \varsigma_2\}$, os quais são todos automorfismos, portanto VB_n é Hopfiano e pelo mesmo argumento VB_n é co-Hopfiano. \square

Seja G um grupo e $I_g : G \rightarrow G$. Se I_g é um automorfismo de G definido por $I_g(x) = gxg^{-1}$, dizemos que ele é **automorfismo interno** associado ao elemento $g \in G$. O conjunto dos automorfismos internos de G será denotado por $Inn(G)$. Note que $Inn(G)$ é um subgrupo normal de $Aut(G)$. O grupo quociente $Aut(G)/Inn(G)$ é também chamado de grupo dos **automorfismos externos** de G e será denotado por $Out(G)$.

Corolário 2.12. *Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$. Então $Out(VB_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, e é gerado pelas classes de ς_1 e ς_2 .*

Demonstração. Segue do Teorema 2.10 que $Out(VB_n)$ é gerado pelas classes de ς_1 e ς_2 . Também sabemos que esses dois automorfismos são de ordem dois e comutam. Assim, basta mostrarmos que nenhum dos elementos $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_1 \circ \varsigma_2$ é um automorfismo interno.

Pelo Lema 2.6. de [8], temos que ς_1 não é um automorfismo interno de VB_n . Para analisarmos ς_2 , tomemos uma apresentação do abelianizado de VB_n é dada por

$$\frac{VB_n}{\Gamma_2(VB_n)} = \langle \sigma_1, v_1 \mid v_1^2 = 1 \text{ e } \sigma_1 v_1 = v_1 \sigma_1 \rangle.$$

Analisando essa apresentação temos que $\frac{VB_n}{\Gamma_2(VB_n)}$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, onde a cópia de \mathbb{Z} é gerada pela classe de σ_1 e a cópia de \mathbb{Z}_2 é gerada pela classe de v_1 . Como $\varsigma_2(\sigma_1) = \sigma_1^{-1}$, logo ς_2 não é a identidade no abelianizado de VB_n , portanto ς_2 não é um automorfismo interno. A transformação $\varsigma_1 \circ \varsigma_2$ também não é um automorfismo interno pela mesma argumentação usada para ς_2 . \square

Capítulo 3

Grupos de Tranças Virtuais Singulares

O grupo de tranças singulares com n cordas, denotado por SG_n , é o grupo gerado pelos cruzamentos clássicos (σ_i) e singulares (τ_i) apresentados geometricamente nas Figuras 2.1 e 3.1 respectivamente.

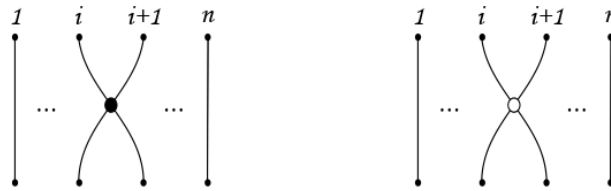


Figura 3.1: Cruzamentos singulares τ_1 e τ_i^{-1} , para $i = 1, \dots, n - 1$

Uma apresentação de SG_n é dada da seguinte maneira:

$$SG_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 \rangle$$

onde os R_k , com $k = 1, \dots, 5$, são as relações tais que

$$R_1 : \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ com } |i - j| \geq 2;$$

$$R_2 : \tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i \text{ com } |i - j| \geq 2;$$

$$R_3 : \tau_i \sigma_i = \sigma_i \tau_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$R_4 : \sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ com } i = 1, 2, \dots, n - 2;$$

$$R_5 : \sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} = \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

De acordo com a Definição 3 de [12], um elemento em VSG_n é chamado de trança singular virtual estendida ou simplesmente uma trança singular virtual. Como as tranças virtuais singulares são uma generalização das tranças clássicas, além dos cruzamentos comuns, elas possuem cruzamentos virtuais e singulares. A operação de duas tranças singulares α e β com n cordas é realizada por concatenação vertical. A trança resultante $\alpha\beta$, é formada colocando α no topo de β e conectando as extremidades

inferiores de α aos pontos finais superiores de β . Além dos movimentos clássicos de Reidemeister, agora também temos um movimento estendido, conforme mostrado na Figura 3.2.

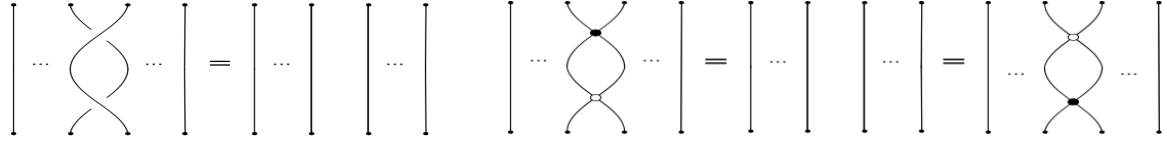


Figura 3.2: Movimentos clássicos e estendidos de Reidemeister

Definição 3.1. O Grupo de Tranças Virtuais Singulares, aqui denotado por VSG_n , possui a seguinte apresentação:

$$VSG_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1} \mid P_1, P_2, P_3 \rangle.$$

Onde P_1 é o pacote que contém relações R_1 e R_2 formadas por dois geradores, onde $i = 1, 2, \dots, n - 1$ e

$$R_1 : v_i^2 = 1$$

$$R_2 : \sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$$

Já o P_2 é formado por relações R_3, R_4, R_5, R_6 e R_7 com três geradores onde $|i - j| = 1$.

$$R_3 : \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$$

$$R_4 : v_i v_j v_i = v_j v_i v_j$$

$$R_5 : v_i \sigma_j v_i = v_j \sigma_i v_j$$

$$R_6 : v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$$

$$R_7 : \sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$$

E por fim, o P_3 que é o pacote das relações comutativas com $|i - j| \geq 2$ e $g_i h_j = h_j g_i$, onde $g_i, h_i \in \{\sigma_i, \tau_i, v_i\}$.

Note que facilmente conseguimos construir a apresentação de B_n, VB_n e SG_n a partir de VSG_n . Além disso, por [12] e [14] podemos concluir que eles estão contidos em VSG_n . Além disso estudaremos VSG_n com $n \geq 2$, já que para o caso $n = 1$, VSG_1 é trivial.

Todas as relações de VSG_n podem ser geometricamente representadas como nas imagens a seguir.

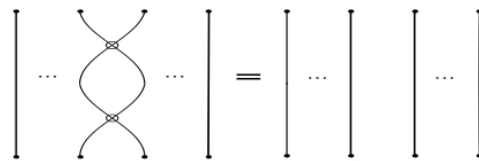


Figura 3.3: $v_i^2 = 1$

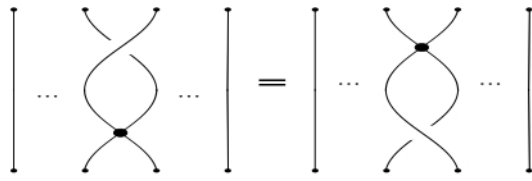


Figura 3.4: $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$

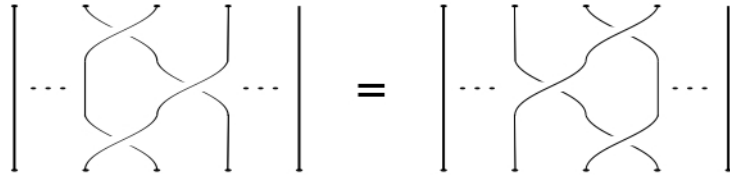


Figura 3.5: $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$

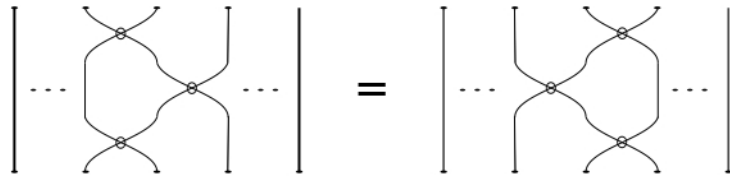


Figura 3.6: $\nu_i \nu_j \nu_i = \nu_j \nu_i \nu_j$

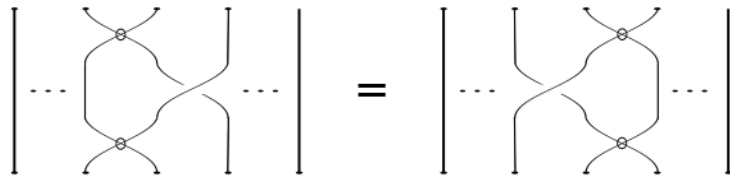


Figura 3.7: $\nu_i \sigma_j \nu_i = \nu_j \sigma_i \nu_j$

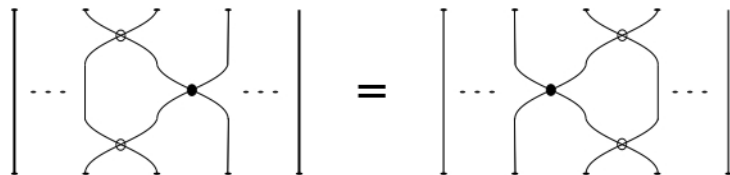


Figura 3.8: $\nu_i \tau_j \nu_i = \nu_j \tau_i \nu_j$

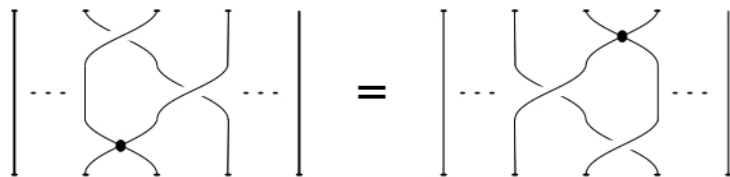


Figura 3.9: $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$

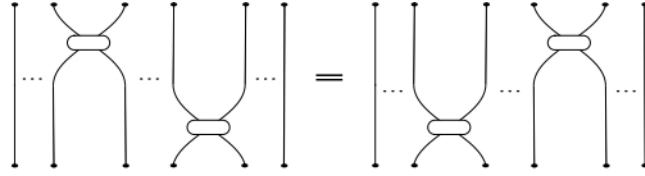


Figura 3.10: P_3 representado geometricamente, onde o espaço em branco pode ser qualquer um dos cruzamentos.

3.1 Algumas Propriedades

O grupo de tranças virtuais singulares VSG_n possui algumas propriedades, as quais veremos a seguir.

Proposição 3.2. *Seja VSG_n o grupo de tranças virtuais singulares com $n = 2$. Então VSG_2 é isomorfo a $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Dada a apresentação dada na Definição 3.1 temos que

$$VSG_2 = \langle \sigma_1, \tau_1, \nu_1 \mid P_1 \rangle.$$

Onde P_1 é o pacote que contém relações R_1 e R_2 formadas por dois geradores, onde $i = 1$ e

$$R_1 : \nu_1^2 = 1$$

$$R_2 : \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1$$

Note que P_2 e P_3 não se configuram, já que necessitaríamos que os índices dos geradores respeitassem a distância $|i - j| \geq 1$ e $|i - j| \geq 2$ respectivamente.

Logo podemos deduzir que σ_1 e τ_1 geram uma cópia de $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ e ν_1 gera a cópia de \mathbb{Z}_2 . \square

O próximo resultado será sobre o abelianizado de VSG_n .

Proposição 3.3. *Seja $n \geq 2$. Então o abelianizado de VSG_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Para encontrarmos o abelianizado de VSG_n , $VSG_n/[VSG_n, VSG_n]$, é suficiente considerarmos a apresentação de VSG_n dada na Definição 3.1 e adicionarmos algumas relações comutativas. Ao olharmos os pacotes de relações P_1 e P_3 , não há o que ser feito. Já para o pacote P_2 ao introduzirmos as relações de P_3 para todo n , temos para R_3 , com $|i - j| = 1$

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$$

$$\sigma_j \sigma_i^2 = \sigma_j^2 \sigma_i$$

$$\sigma_i = \sigma_j$$

Para R_4 , com $|i - j| = 1$

$$\begin{aligned} v_i v_j v_i &= v_j v_i v_j \\ v_i^2 v_j &= v_j^2 v_i \\ v_j &= v_i \end{aligned}$$

Para R_5 , com $|i - j| = 1$

$$\begin{aligned} v_i \sigma_j v_i &= v_j \sigma_i v_j \\ v_i^2 \sigma_j &= v_j^2 \sigma_i \\ \sigma_j &= \sigma_i \end{aligned}$$

Para R_6 , com $|i - j| = 1$

$$\begin{aligned} v_i \tau_j v_i &= v_j \tau_i v_j \\ v_i^2 \tau_j &= v_j^2 \tau_i \\ \tau_j &= \tau_i \end{aligned}$$

Para R_7 , com $|i - j| = 1$

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \tau_i &= \tau_j \sigma_i \sigma_j \\ \sigma_i \sigma_i \tau_j &= \tau_i \sigma_i \sigma_i \\ \sigma_i^2 \tau_i &= \sigma_i^2 \tau_j \\ \tau_i &= \tau_j \end{aligned}$$

Portanto, a apresentação do abelianizado de VSG_n é dada por

$$\frac{VSG_n}{[VSG_n, VSG_n]} = \{\sigma_1, \tau_1, v_1 \mid P_1 \text{ e } P\},$$

com P sendo o pacote de relações comutativas entre σ_1, τ_1 e v_1 . Note que σ_1 gera uma cópia de \mathbb{Z} , τ_1 gera outra cópia de \mathbb{Z} e v_1 gera uma cópia de \mathbb{Z}_2 , fazendo com que $\frac{VSG_n}{[VSG_n, VSG_n]}$ seja isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. \square

Sejam G um grupo e \mathcal{P} uma propriedade de grupos. Dizemos que o grupo é residualmente \mathcal{P} , se para algum elemento não trivial g em G , existe um grupo H com \mathcal{P} e um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ onde $\varphi(g) \neq 1$. Por exemplo, dado G um grupo, então G é **residualmente nilpotente** se, e somente se, $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$. O próximo resultado vai garantir que VSG_n não possui esta característica.

Proposição 3.4. *Seja VSG_n , com $n \geq 3$. Então o grupo VSG_n não é residualmente nilpotente.*

Demonstração. Vamos supor que VSG_n é residualmente nilpotente. Então temos que

$$X = \bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(VSG_n) = \{1\}$$

Como VB_n é subgrupo de VSG_n , logo $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(VB_n)$ também é subgrupo de $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(VSG_n)$.

Mas VB_n não é residualmente nilpotente (veja em [4]). Assim $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(VB_n) \neq 1$ e consequentemente $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(VSG_n) \neq 1$, ou seja, contradição. \square

Proposição 3.5. *Seja VSG_n , com $n \geq 4$. Então $\Gamma_2(VSG_n) = \Gamma_3(VSG_n)$.*

Demonstração. Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \frac{\Gamma_2(VSG_n)}{\Gamma_3(VSG_n)} \xrightarrow{h} \frac{VSG_n}{\Gamma_3(VSG_n)} \xrightarrow{p} \frac{VSG_n}{\Gamma_2(VSG_n)} \rightarrow 1.$$

Pela Proposição 3.3 temos que o abelianizado de VSG_n é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ gerados por σ_1, τ_1 e v_1 respectivamente. Assim, temos que todos os σ_i se projetam em σ_1, τ_i se projetam em τ_1 e v_i se projetam em v_1 por p em $\frac{VSG_n}{\Gamma_2(VSG_n)}$, para cada $1 \leq i \leq n-1$, então vai existir t_i em $\frac{\Gamma_2(VSG_n)}{\Gamma_3(VSG_n)}$, onde $\sigma_i = t_i \sigma_1$ com $t_1 = 1$. Ao tomarmos a relação R_3 de VSG_n vemos que $t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 = t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1$. Mas os t_i são centrais em $\frac{VSG_n}{\Gamma_3(VSG_n)}$, então

$$\begin{aligned} t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 &= t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 t_i t_{i+1} t_i &= \sigma_1 \sigma_1 \sigma_1 t_{i+1} t_i t_{i+1} \\ t_i t_{i+1} t_i &= t_{i+1} t_i t_{i+1} \\ t_i &= t_{i+1}. \end{aligned}$$

Ou seja, $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 1$. Segue que, por $\sigma_i = t_i \sigma_1$ obtemos $\sigma_i = \sigma_1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

De forma análoga, vai existir l_i em $\frac{\Gamma_2(VSG_n)}{\Gamma_3(VSG_n)}$, onde $v_i = l_i v_1$ com $l_1 = 1$. Ao tomarmos a relação R_4 de VSG_n vemos que $l_i v_1 l_{i+1} v_1 l_i v_1 = l_{i+1} v_1 l_i v_1 l_{i+1} v_1$. Mas os l_i são centrais em $\frac{VSG_n}{\Gamma_3(VSG_n)}$, então

$$\begin{aligned} l_i v_1 l_{i+1} v_1 l_i v_1 &= l_{i+1} v_1 l_i v_1 l_{i+1} v_1 \\ v_1 v_1 v_1 l_i l_{i+1} l_i &= v_1 v_1 v_1 l_{i+1} l_i l_{i+1} \\ l_i l_{i+1} l_i &= l_{i+1} l_i l_{i+1} \\ l_i &= l_{i+1}. \end{aligned}$$

Ou seja, $l_1 = l_2 = \dots = l_{n-1} = 1$. Segue que, por $v_i = l_i v_1$ obtemos $v_i = v_1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Para o caso de τ_i , vai existir k_i em $\frac{\Gamma_2(VSG_n)}{\Gamma_3(VSG_n)}$, onde $\tau_i = k_i\tau_1$ com $k_1 = 1$. Ao tomarmos a relação R_7 de VSG_n vemos que $\sigma_i\sigma_{i+1}k_i\tau_1 = k_{i+1}\tau_1\sigma_i\sigma_{i+1}$. Mas sabemos que $\sigma_i = \sigma_1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ em $\frac{\Gamma_2(VSG_n)}{\Gamma_3(VSG_n)}$, então $\sigma_1^2 k_i \tau_1 = k_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2$. Mas os k_i são centrais em $\frac{VSG_n}{\Gamma_3(VSG_n)}$ e por R_2 temos

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 k_i \tau_1 &= k_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \\ k_i \tau_1 \sigma_1^2 &= k_{i+1} \tau_1 \sigma_1^2 \\ k_i &= k_{i+1}.\end{aligned}$$

Ou seja, $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1$. Segue que, por $\tau_i = k_i\tau_1$ obtemos $\tau_i = \tau_1 = 1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Então o homomorfismo sobrejetor p é um isomorfismo, fazendo com que $\ker(p) = \text{Im}(h) = 1$ e consequentemente que $\Gamma_2(VSG_n) = \Gamma_3(VSG_n)$. \square

A proposição a seguir é uma versão da Proposição 2.5 para o grupo de tranças virtuais singulares, VSG_n .

Proposição 3.6. *Seja VSG_n , com $n \geq 5$. Então o grupo $\Gamma_2(VSG_n)$ é perfeito.*

Demonstração. Do Teorema 1.1 de [15] temos que o subgrupo comutador de tranças singulares $\Gamma_2(SG_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. Além disso, pelos Lemas 1.5 e 1.6, $\Gamma_2(S_n) = A_n$ e portanto é perfeito para $n \geq 5$. Note que VSG_n é gerado pelo grupo de tranças singulares e pelo grupo simétrico, ou seja, $VSG_n = \langle SG_n, S_n \rangle$. Note que pela definição de série central inferior dada anteriormente, $[\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)] \subseteq \Gamma_2(VSG_n)$. Basta então que provemos que $\Gamma_2(VSG_n) \subseteq [\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)]$.

Seja $[a, b]$ um elemento do subgrupo comutador de $\Gamma_2(VSG_n)$, vamos reescrevê-lo como um produto de comutadores

$$[x, y]^\alpha, \text{ onde } x, y \in \{\sigma_i, \tau_i, v_i \mid 1 \leq i < j \leq n-1\} \text{ e } \alpha \in VSG_n.$$

Observe que os elementos $[\sigma_i, \sigma_j]$, $[\tau_i, \tau_j]$, $[\sigma_i, \tau_j]$ e $[v_i, v_j]$ pertencem a $[\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)]$, para $1 \leq i, j \leq n-1$, já que os grupos $\Gamma_2(SG_n)$ e $\Gamma_2(S_n)$ são perfeitos para $n \geq 5$. Portanto, resta mostrar que $[x_i, v_j]$ pertence a $[\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)]$, com $x_i = \sigma_i, \tau_i$ e $1 \leq i, j \leq n-1$. Note que, se $|i-j| \geq 2$, então $[x_i, v_j] = 1$ pelas relações comutativas de VSG_n .

Antes de continuarmos, vamos analisar o abelianizado do grupo de tranças singulares $SG_n/\Gamma_2(SG_n)$. Nele as igualdades $\sigma_i = \sigma_k$ e $\tau_i = \tau_k$ valem, para todo $1 \leq i, k \leq n-1$. Além disso, $v_i = v_l$ no abelianizado do grupo simétrico $S_n/\Gamma_2(S_n)$, para todo $1 \leq i, k \leq n-1$.

Agora, suponha que $|i-j| \leq 1$, então existem $c_{i,k} \in \Gamma_2(SG_n)$ e $d_{j,l} \in \Gamma_2(S_n)$ para $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$ com $|k-l| \geq 2$ tal que $x_i = c_{i,k}x_k$ e $v_j = d_{j,l}v_l$, respeitando a

correspondência $x_k = \sigma_k$ se $x_i = \sigma_i$ e $x_k = \tau_k$ se $x_i = \tau_i$. Portanto, usando identidades de comutador do Lema 1.1 temos

$$\begin{aligned}
[x_i, v_j] &= [c_{i,k}x_k, d_{j,l}v_l] \\
&= [c_{i,k}, d_{j,l}v_l]^{x_k} [x_k, d_{j,l}v_l] \\
&= ([c_{i,k}, v_l][c_{i,k}, d_{j,l}]^{v_l})^{x_k} [x_k, v_l][x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= x_k^{-1} [c_{i,k}, v_l][c_{i,k}, d_{j,l}]^{v_l} x_k [x_k, v_l][x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= x_k^{-1} [c_{i,k}, v_l] x_k x_k^{-1} [c_{i,k}, d_{j,l}]^{v_l} x_k [x_k, v_l][x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= [c_{i,k}, v_l]^{x_k} x_k^{-1} [c_{i,k}, d_{j,l}]^{v_l} x_k [x_k, v_l][x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= [c_{i,k}, v_l]^{x_k} x_k^{-1} v_l^{-1} c_{i,k}^{-1} d_{j,l}^{-1} c_{i,k} d_{j,l} v_l x_k x_k^{-1} v_l^{-1} x_k v_l [x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= [c_{i,k}, v_l]^{x_k} x_k^{-1} v_l^{-1} c_{i,k}^{-1} d_{j,l}^{-1} c_{i,k} d_{j,l} x_k v_l [x_k, d_{j,l}]^{v_l} \\
&= [c_{i,k}, v_l]^{x_k} [c_{i,k}, d_{j,l}]^{x_k v_l} [x_k, d_{j,l}]^{v_l}.
\end{aligned}$$

Como $c_{i,k} \in \Gamma_2(SG_n)$ e $d_{j,l} \in \Gamma_2(S_n)$ então $[c_{i,k}, d_{j,l}]^{x_k v_l} \in \Gamma_2(VSG_n)$. Também, notamos que

$$\begin{aligned}
[c_{i,k}, v_l]^{x_k} &= x_k^{-1} c_{i,k}^{-1} v_l^{-1} c_{i,k} v_l x_k \\
&= x_k^{-1} c_{i,k}^{-1} c_{i,k}^{v_l} x_k \\
&= (c_{i,k}^{-1} c_{i,k}^{v_l})^{x_k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[x_k, d_{j,l}]^{v_l} &= v_l^{-1} x_k^{-1} d_{j,l}^{-1} x_k d_{j,l} v_l \\
&= v_l^{-1} (d_{j,l}^{-1})^{x_k} d_{j,l} v_l \\
&= ((d_{j,l}^{-1})^{x_k} d_{j,l})^{v_l}
\end{aligned}$$

pertencem a $[\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)]$ já que $c_{i,k} \in [\Gamma_2(SG_n), \Gamma_2(SG_n)]$ e $d_{j,l} \in [\Gamma_2(S_n), \Gamma_2(S_n)]$, uma vez que o subgrupo comutador de SG_n e de S_n são perfeitos. Com isso concluímos que, para $n \geq 5$, $[\Gamma_2(VSG_n), \Gamma_2(VSG_n)] = \Gamma_2(VSG_n)$ fazendo com que $\Gamma_2(VSG_n)$ seja perfeito. □

3.2 Invariantes de Tranças Virtuais Singulares

Um **invariante** é uma propriedade de um objeto matemático (ou uma classe de objetos matemáticos) que permanece inalterada após operações ou transformações serem aplicadas aos objetos. A classe particular de objetos e o tipo de transformação geralmente são indicados pelo contexto em que o termo é usado. A este respeito, no contexto de tranças, foi definido em [18] que dada uma aplicação f do conjunto de todas

as tranças para algum objeto algébrico, por exemplo, um número, polinômio ou alguma outra quantidade matemática, f é um invariante se respeita a seguinte propriedade: $\beta \sim \beta'$ implica que $f(\beta) = f(\beta')$, onde \sim é uma relação de equivalência.

No contexto do grupo de tranças virtuais singulares VSG_n , tomando $n \geq 2$ e $Abmap : VSG_n \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ sendo a aplicação de abelianização onde a primeira cópia de \mathbb{Z} no grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ é gerado por σ_1 , a segunda por τ_1 e o grupo \mathbb{Z}_2 gerado por v_1 . Considere os seguintes homomorfismos $\varphi' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ de forma que $\varphi'(x, y, z) = x + y$, $\pi' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ com $\pi'(x, y, z) = x$ e $\pi'' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\pi''(x, y, z) = y$.

Definimos a aplicação **singular clássica da soma dos expoentes** $exp^{SC} = \varphi' \circ Abmap : VSG_n \rightarrow \mathbb{Z}$, a aplicação **clássica da soma dos expoentes** $exp^C = \pi' \circ Abmap : VSG_n \rightarrow \mathbb{Z}$ e a aplicação **singular da soma dos expoentes** $exp^S = \pi'' \circ Abmap : VSG_n \rightarrow \mathbb{Z}$. E então teremos o seguinte resultado sobre invariantes.

Proposição 3.7. *Sejam os homomorfismos exp^{SC} , exp^C e exp^S , temos então invariantes de VSG_n .*

Demonstração. Analisaremos cada um dos candidatos a invariantes. Consideremos exp^{SC} , ao aplicarmos nas relações de VSG_n dadas na Definição 3.1 temos que:

$$\begin{aligned} exp^{SC}(v^2) &= 0 + 0 = 0 \\ exp^{SC}(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \\ exp^{SC}(\sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \\ exp^{SC}(v_i v_j v_i v_j^{-1} v_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ exp^{SC}(v_i \sigma_j v_i v_j^{-1} \sigma_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ exp^{SC}(v_i \tau_j v_i v_j^{-1} \tau_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ exp^{SC}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Para o caso $exp^{SC}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1})$ teremos duas possibilidades. A primeira delas é se g_i e h_j estiverem em $\{\sigma_i, \tau_i\}$, logo

$$exp^{SC}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Já a segunda possibilidade é para o caso de g_i ou h_j ser igual a v_i , daí

$$exp^{SC}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 1 + 0 - 1 + 0 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Para $\boxed{\exp^C}$ temos

$$\begin{aligned} \exp^C(v^2) &= 0 + 0 = 0 \\ \exp^C(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ \exp^C(\sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \\ \exp^C(v_i v_j v_i v_j^{-1} v_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ \exp^C(v_i \sigma_j v_i v_j^{-1} \sigma_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ \exp^C(v_i \tau_j v_i v_j^{-1} \tau_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ \exp^C(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= 1 + 1 + 0 - 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Para o caso $\exp^C(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1})$ teremos duas possibilidades. A primeira delas é se g_i e h_j estiverem em $\{v_i, \tau_i\}$, logo

$$\exp^C(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Já a segunda possibilidade é para o caso de g_i ou h_j ser igual a σ_i , daí

$$\exp^C(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 0 + 1 + 0 - 1 = 1 + 0 - 1 + 0 = 0.$$

Para $\boxed{\exp^S}$ fazendo a mesma análise anterior temos

$$\begin{aligned} \exp^S(v^2) &= 0 + 0 = 0 \\ \exp^S(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= 0 + 1 + 0 - 1 = 0 \\ \exp^S(\sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ \exp^S(v_i v_j v_i v_j^{-1} v_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ \exp^S(v_i \sigma_j v_i v_j^{-1} \sigma_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ \exp^S(v_i \tau_j v_i v_j^{-1} \tau_i^{-1} v_j^{-1}) &= 0 + 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ \exp^S(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Para o caso $\exp^S(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1})$ teremos duas possibilidades. A primeira delas é se g_i e h_j estiverem em $\{\sigma_i, v_i\}$, logo

$$\exp^S(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Já a segunda possibilidade é para o caso de g_i ou h_j ser igual a τ_i , daí

$$\exp^S(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) = 0 + 1 + 0 - 1 = 1 + 0 - 1 + 0 = 0.$$

Podemos concluir então que os homomorfismos \exp^{SC} , \exp^C e \exp^S , são invariantes de VSG_n . \square

Teorema 3.8. *Seja VSG_n o grupo de tranças virtuais singulares. Temos então que as seqüências a seguir são exatas curtas.*

$$(i) \quad 1 \rightarrow \langle B_n \rangle^{VSG_n} \rightarrow VSG_n \rightarrow \mathbb{Z} \times S_n \rightarrow 1;$$

$$(ii) \quad 1 \rightarrow \langle \{\tau_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n} \rightarrow VSG_n \rightarrow VB_n \rightarrow 1;$$

$$(iii) \quad 1 \rightarrow \langle \{\tau_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n} \rightarrow VSG_n \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1. \text{ O homomorfismo sobrejetor coincide com } \exp^C \text{ e } \text{Ker}(\exp^C) = \langle \{\tau_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n};$$

$$(iv) \quad 1 \rightarrow \langle VB_n \rangle^{VSG_n} \rightarrow VSG_n \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1. \text{ Nesse caso o homomorfismo sobrejetor coincide com o } \exp^S \text{ e } \text{Ker}(\exp^S) = \langle VB_n \rangle^{VSG_n};$$

$$(v) \quad 1 \rightarrow \langle \{\sigma_i \tau_i^{-1}, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n} \rightarrow VSG_n \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1. \text{ O homomorfismo sobrejetor coincide com } \exp^{SC} \text{ e } \text{Ker}(\exp^{SC}) = \langle \{\sigma_i \tau_i^{-1}, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n}.$$

Demonstração. Analisaremos o grupo $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n}$ tomando a apresentação de VSG_n dada na Definição 3.1 e considerando algumas relações adicionais como $\sigma_i = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$ proveniente da apresentação de B_n dada na Definição 2.1. Da relação $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$ de VSG_n , como $\sigma_i = 1$ nos resta que $\tau_i = \tau_j$ em $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n}$, para $i = 1, \dots, n-1$. Das relações comutativas P_3 , que são da forma $g_i h_j = h_j g_i$ com $|i - j| \geq 2$, onde $g_i, h_i \in \{\sigma_i, \tau_i, v_i\}$, segue que $\tau_1 h_j = h_j \tau_1$ para qualquer que seja h_j , ou seja, em $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n}$ o elemento τ_1 comuta com cada gerador de S_n . Portanto, $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n} = \langle \tau_1 \rangle \times S_n = \mathbb{Z} \times S_n$, daí segue o item (i).

Para o item (ii) ao tomarmos a relação adicional $\tau_i = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$, o que acontece com as relações de VSG_n ? Em P_1 a relação $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$ perde o sentido, já que sabemos que $\sigma_i = \sigma_i$. Já em P_2 a relação $v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$, também desaparece já que $v_i^2 = v_j^2$. Ainda em P_2 a relação $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$ perde o sentido, já que $\sigma_i \sigma_j = \sigma_i \sigma_j$. Portanto, temos a apresentação de VB_n dada na Definição 3.1 provando o item (ii).

Agora provaremos as primeiras partes dos itens (iii), (iv) e (v). No item (iii) a relação adicional será $\tau_i = v_i = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$. No pacote de relações P_2 , a relação $v_i \sigma_j v_i = v_j \sigma_i v_j$ nos fornece $\sigma_i = \sigma_j$. Todas as outras relações se tornam triviais e, portanto, temos $\langle \{\tau_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n}$ um grupo livre gerado por σ_1 de forma que $\langle \sigma_1 \rangle = \mathbb{Z}$.

Verificando o item (iv), analisaremos o grupo $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n}$ apenas tomando a apresentação de VSG_n e considerando as relações adicionais $\sigma_i = 1$ e $v_i = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$. Do pacote de relações P_1 não resta nenhuma relação, já que $1^2 = 1$ e $\tau_i = \tau_i$. De P_2 restam $v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$ e $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$ e ambas fornecem que $\tau_i = \tau_j$ em $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n}$, para $i = 1, \dots, n-1$. Então $VSG_n / \langle B_n \rangle^{VSG_n} = \langle \tau_1 \rangle = \mathbb{Z}$, disso segue a primeira parte do item (iv).

Já no item (v) tomemos a relação adicional $\sigma_i \tau_i^{-1} = v_i = 1$, para $i = 1, \dots, n-1$. Então em P_1 a relação $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$ nos fornece $\sigma_i = \tau_i$ em $\langle \{\sigma_i \tau_i^{-1}, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n}$, já que $\sigma_i = \tau_i \sigma_i \tau_i^{-1}$. Em P_2 da relação $v_i \sigma_j v_i = v_j \sigma_i v_j$, temos que $\sigma_j = \sigma_i$ e da relação $v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$, temos que $\tau_j = \tau_i$. As demais relações se tornam triviais e, portanto, temos $\langle \{\sigma_i \tau_i^{-1}, v_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} \rangle^{VSG_n}$ um grupo livre gerado por τ_1 de forma que $\langle \tau_1 \rangle = \mathbb{Z}$.

A segunda parte dos itens (iii), (iv) e (v) segue das definições dos homomorfismos $exp^C, exp^S, exp^{SC} : VSG_n \rightarrow \mathbb{Z}$ respectivamente. \square

Capítulo 4

Homomorfismos de VSG_n no grupo simétrico S_n

Nesse capítulo, assim como feito por Bellingeri e Paris[8], vamos construir os homomorfismos do grupo de tranças virtuais singulares VSG_n no grupo simétrico S_n e analisar suas decomposições a partir dos núcleos desses homomorfismos.

Definição 4.1. Seja $n \geq 2$ e seja $\epsilon_k \in \{0, 1\}$, para $k = 1, 2, 3$. Tome $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_n \rightarrow S_n$ a função definida por

$$\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}(\sigma_i) = (i, i + 1)^{\epsilon_1} \quad \varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}(\tau_i) = (i, i + 1)^{\epsilon_2} \quad \varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}(v_i) = (i, i + 1)^{\epsilon_3}$$

para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

Proposição 4.2. Seja $n \geq 3$. A aplicação $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$ de VSG_n em S_n é um homomorfismo se só se a tripla $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, for igual a um desses:

- (i) $(0, 0, 0)$;
- (ii) $(1, 1, 1)$;
- (iii) $(1, 0, 1)$;
- (iv) $(0, 0, 1)$.

Demonstração. Seja $n \geq 3$ e ϵ_k com $k \in \{0, 1\}$, para $k = 1, 2, 3$. Tomando $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_n \rightarrow S_n$ definido em 4.1, verificaremos cada possível tripla.

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 0, 0)$ temos que $\varphi_{0,0,0}$ é o homomorfismo trivial de forma que

$$\varphi_{0,0,0}(\sigma_i) = \varphi_{0,0,0}(\tau_i) = \varphi_{0,0,0}(v_i) = (i \ i + 1)^0 = 1_{S_n}.$$

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, 1, 1)$

$$\varphi_{1,1,1}(\sigma_i) = \varphi_{1,1,1}(\tau_i) = \varphi_{1,1,1}(v_i) = (i \ i + 1).$$

Para R_1 temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1,1}(v_i^2) &= \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(v_i) \\ &= (i \ i + 1)(i \ i + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_2 temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1,1}(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(\sigma_i) \varphi_{1,1,1}(\tau_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\tau_i^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)(i \ i + 1)(i \ i + 1)(i \ i + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_3 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0,1}(\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(\sigma_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j) \varphi_{1,1,1}(\sigma_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_4 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0,1}(v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} v_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(v_j) \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,1,1}(v_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_5 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0,1}(v_i \sigma_j v_i v_j^{-1} \sigma_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j) \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_6 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1,1}(v_i \tau_j v_i v_j^{-1} \tau_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(\tau_j) \varphi_{1,1,1}(v_i) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\tau_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1)(i \ i + 1)(j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}. \end{aligned}$$

Para R_7 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(\sigma_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j) \varphi_{1,1,1}(\tau_i) \varphi_{1,1,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(\tau_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para as relações de comutatividade de VSG_n , quando $|i - j| \geq 2$ temos

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1,1}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) &= \varphi_{1,1,1}(g_i) \varphi_{1,1,1}(h_j) \varphi_{1,1,1}(g_i^{-1}) \varphi_{1,1,1}(h_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) \\ &= (i \ i + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, 0, 1)$ teremos

$$\varphi_{1,0,1}(\sigma_i) = \varphi_{1,0,1}(v_i) = (i \ i + 1) \text{ e } \varphi_{1,0,1}(\tau_i) = (i \ i + 1)^0 = 1_{S_n}$$

Para R_1 temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(v_i^2) &= \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(v_i) \\ &= (i \ i + 1)(i \ i + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_2 temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(\sigma_i) \varphi_{1,0,1}(\tau_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\tau_i^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (1) (i \ i + 1) (1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_3 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(\sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(\sigma_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j) \varphi_{1,0,1}(\sigma_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_4 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(v_i v_j v_i v_j^{-1} v_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(v_j) \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,0,1}(v_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_5 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(v_i \sigma_j v_i v_j^{-1} \sigma_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j) \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i+1) (j \ j+1) (i \ i+1) (j \ j+1) (i \ i+1) (j \ j+1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_6 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(v_i \tau_j v_i v_j^{-1} \tau_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(\tau_j) \varphi_{1,0,1}(v_i) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\tau_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i+1) (j \ j+1)^0 (i \ i+1) (j \ j+1) (i \ i+1)^0 (j \ j+1) \\ &= (i \ i+1) (i \ i+1) (j \ j+1) (j \ j+1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_7 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(\sigma_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j) \varphi_{1,0,1}(\tau_i) \varphi_{1,0,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(\tau_j^{-1}) \\ &= (i \ i+1) (j \ j+1) (i \ i+1)^0 (j \ j+1) (i \ i+1) (j \ j+1)^0 \\ &= (i \ i+1) (j \ j+1) (j \ j+1) (i \ i+1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para as relações de comutatividade de VSG_n , quando $|i - j| \geq 2$, analisaremos em duas partes: quando g_i e h_j estiverem em $\{\sigma_i, v_i\}$ e quando g_i ou h_j estiverem em $\{\tau_i\}$.

Na primeira parte temos

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(g_i) \varphi_{1,0,1}(h_j) \varphi_{1,0,1}(g_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(h_j^{-1}) \\ &= (i \ i+1)^0 (j \ j+1)^0 (i \ i+1)^0 (j \ j+1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Já na segunda

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) &= \varphi_{1,0,1}(g_i) \varphi_{1,0,1}(h_j) \varphi_{1,0,1}(g_i^{-1}) \varphi_{1,0,1}(h_j^{-1}) \\ &= (i \ i+1) (j \ j+1)^0 (i \ i+1) (j \ j+1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 0, 1)$ teremos

$$\varphi_{0,0,1}(\sigma_i) = \varphi_{0,0,1}(\tau_i) = (i \ i+1)^0 = 1_{S_n} \text{ e } \varphi_{0,0,1}(v_i) = (i \ i+1).$$

Para R_1 temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(v_i^2) &= \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(v_i) \\ &= (i \ i + 1)(i \ i + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_2 temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_i^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(\sigma_i) \varphi_{0,0,1}(\tau_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\tau_i^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (i \ i + 1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_3 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(\sigma_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j) \varphi_{0,0,1}(\sigma_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_4 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(v_j) \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(v_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(v_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(v_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_5 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(v_i \sigma_j v_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j) \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(v_i^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1) \\ &= (i \ i + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_6 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(v_i \tau_j v_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(\tau_j) \varphi_{0,0,1}(v_i) \varphi_{0,0,1}(\tau_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\tau_j^{-1}) \varphi_{0,0,1}(v_i^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1) (j \ j + 1) (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1) \\ &= (i \ i + 1) (i \ i + 1) (j \ j + 1) (j \ j + 1) \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para R_7 com $|i - j| = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(\sigma_i \sigma_j \tau_i \sigma_i^{-1} \tau_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(\sigma_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_j) \varphi_{0,0,1}(\tau_i) \varphi_{0,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\sigma_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(\tau_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Para as relações de comutatividade de VSG_n , quando $|i - j| \geq 2$, analisaremos em duas partes: quando g_i e h_j estiverem em $\{\sigma_i, \tau_i\}$ e quando g_i ou h_j estiverem em $\{v_i\}$.

Na primeira parte temos

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0,1}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(g_i) \varphi_{0,0,1}(h_j) \varphi_{0,0,1}(g_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(h_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1)^0 (j \ j + 1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

Já na segunda

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0,1}(g_i h_j g_i^{-1} h_j^{-1}) &= \varphi_{0,0,1}(g_i) \varphi_{0,0,1}(h_j) \varphi_{0,0,1}(g_i^{-1}) \varphi_{0,0,1}(h_j^{-1}) \\ &= (i \ i + 1) (j \ j + 1)^0 (i \ i + 1) (j \ j + 1)^0 \\ &= 1_{S_n}.\end{aligned}$$

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, 1, 0)$

$$\varphi_{1,1,0}(\sigma_i) = \varphi_{1,1,0}(\tau_i) = (i \ i + 1) \text{ e } \varphi_{1,1,0}(v_i) = (i \ i + 1)^0 = 1_{S_n}$$

Note que no caso da relação R_6 com $i = 1$ e $j = 2$ temos, $v_1 \tau_2 v_1 = v_2 \tau_1 v_2$, quando aplicamos $\varphi_{1,1,0}$ nesta relação encontramos

$$\varphi_{1,1,0}(v_1 \tau_2 v_1) = \varphi_{1,1,0}(v_2 \tau_1 v_2) \quad (4.1)$$

por outro lado,

$$\varphi_{1,1,0}(v_1 \tau_2 v_1) = \varphi_{1,1,0}(v_1) \varphi_{1,1,0}(\tau_2) \varphi_{1,1,0}(v_1) = (1 \ 2)^0 (2 \ 3) (1 \ 2)^0 = (2 \ 3)$$

$$\varphi_{1,1,0}(v_2 \tau_1 v_2) = (2 \ 3)^0 (1 \ 2) (2 \ 3)^0 = (1 \ 2)$$

fazendo com que, por (4.1), $(2 \ 3) = (1 \ 2)$ o que não é verdade. Logo $\varphi_{1,1,0}$ não preserva R_6 e não é homomorfismo.

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, 0, 0)$

$$\varphi_{1,0,0}(\sigma_i) = (i \ i + 1) \text{ e } \varphi_{1,0,0}(\tau_i) = \varphi_{1,0,0}(v_i) = (i \ i + 1)^0 = 1_{S_n}$$

Note que no caso da relação R_5 com $i = 1$ e $j = 2$ temos, $v_1 \sigma_2 v_1 = v_2 \sigma_1 v_2$, quando aplicamos $\varphi_{1,0,0}$ nesta relação encontramos

$$\varphi_{1,0,0}(v_1 \sigma_2 v_1) = \varphi_{1,0,0}(v_2 \sigma_1 v_2) \quad (4.2)$$

por outro lado,

$$\varphi_{1,0,0}(v_1 \sigma_2 v_1) = \varphi_{1,0,0}(v_1) \varphi_{1,0,0}(\sigma_2) \varphi_{1,0,0}(v_1) = (1 \ 2)^0 (2 \ 3) (1 \ 2)^0 = (2 \ 3)$$

$$\varphi_{1,1,0}(v_2\sigma_1v_2) = (2 \ 3)^0(1 \ 2)(2 \ 3)^0 = (1 \ 2)$$

fazendo com que, por (4.2), $(2 \ 3) = (1 \ 2)$ o que não é verdade. Logo $\varphi_{1,0,0}$ não preserva R_5 e não é homomorfismo.

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 1, 1)$

$$\varphi_{0,1,1}(\sigma_i) = (i \ i+1)^0 = 1_{S_n} \text{ e } \varphi_{0,1,1}(\tau_i) = \varphi_{0,1,1}(v_i) = (i \ i+1)$$

Note que no caso da relação R_7 com $i = 1$ e $j = 2$ temos, $\sigma_1\sigma_2\tau_1 = \tau_2\sigma_1\sigma_2$, quando aplicamos $\varphi_{0,1,1}$ nesta relação encontramos

$$\varphi_{0,1,1}(\sigma_1\sigma_2\tau_1) = \varphi_{0,1,1}(\tau_2\sigma_1\sigma_2) \quad (4.3)$$

por outro lado,

$$\varphi_{0,1,1}(\sigma_1\sigma_2\tau_1) = \varphi_{0,1,1}(\sigma_1)\varphi_{0,1,1}(\sigma_2)\varphi_{0,1,1}(\tau_1) = (1 \ 2)^0(2 \ 3)^0(1 \ 2) = (1 \ 2)$$

$$\varphi_{0,1,1}(\tau_2\sigma_1\sigma_2) = (2 \ 3)(1 \ 2)^0(2 \ 3)^0 = (2 \ 3)$$

fazendo com que, por (4.3), $(1 \ 2) = (2 \ 3)$ o que não é verdade. Logo $\varphi_{0,1,1}$ não preserva R_7 e não é homomorfismo.

- Para $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 1, 0)$

$$\varphi_{0,1,0}(\sigma_i) = \varphi_{0,1,0}(v_i) = (i \ i+1)^0 = 1_{S_n} \text{ e } \varphi_{0,1,0}(\tau_i) = (i \ i+1)$$

Note que no caso da relação R_7 com $i = 1$ e $j = 2$ temos, $\sigma_1\sigma_2\tau_1 = \tau_2\sigma_1\sigma_2$, quando aplicamos $\varphi_{0,1,0}$ nesta relação encontramos

$$\varphi_{0,1,0}(\sigma_1\sigma_2\tau_1) = \varphi_{0,1,0}(\tau_2\sigma_1\sigma_2) \quad (4.4)$$

por outro lado,

$$\varphi_{0,1,0}(\sigma_1\sigma_2\tau_1) = \varphi_{0,1,0}(\sigma_1)\varphi_{0,1,0}(\sigma_2)\varphi_{0,1,0}(\tau_1) = (1 \ 2)^0(2 \ 3)^0(1 \ 2) = (1 \ 2)$$

$$\varphi_{0,1,0}(\tau_2\sigma_1\sigma_2) = (2 \ 3)(1 \ 2)^0(2 \ 3)^0 = (2 \ 3)$$

fazendo com que, por (4.4), $(1 \ 2) = (2 \ 3)$ o que não é verdade. Logo $\varphi_{0,1,0}$ não preserva R_7 e não é homomorfismo.

□

Nesta proposição foram encontrados quatro homomorfismos para $n \geq 3$. Os núcleos $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})$ e $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$, são VSG_n e o **grupo de tranças puras virtuais singulares** $VSPG_n$ respectivamente. Já $\text{Ker}(\varphi_{1,0,1})$ será nomeado de VST_n e $\text{Ker}(\varphi_{0,0,1})$ de VSK_n .

Proposição 4.3. *Seja $n \geq 2$, existem decomposições de VSG_n em produtos semi-diretos.*

1. $VSG_n = VSPG_n \rtimes S_n$
2. $VSG_n = VST_n \rtimes S_n$
3. $VSG_n = VSK_n \rtimes S_n$

Demonstração. Seja $n \geq 2$ e $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ uma das triplas tal que $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$ é homomorfismo. Segue que para $\varphi_{1,1,1}$ temos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow VSPG_n \rightarrow VSG_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$$

Para $\varphi_{1,1,1}$ temos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow VST_n \rightarrow VSG_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$$

e para $\varphi_{1,1,1}$ temos a sequência exata curta

$$1 \rightarrow VSK_n \rightarrow VSG_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$$

ao admitirmos a seção natural $\iota_1 : S_n \rightarrow VSG_n$ definida por $\iota_1((i \ i+1)) = v_i$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Por isto e pela Proposição 1.7, temos os produtos semi-diretos descritos nos itens desta proposição. \square

Como a ideia deste trabalho, é justamente analisarmos resultados em diferentes grupos, vamos agora analisar uma versão do Teorema 2.8 de grupo de tranças virtuais VB_n para o grupo de tranças virtuais singulares VSG_n .

Teorema 4.4. *Seja $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5, m \geq 2$ e $n \geq m$ e seja $\psi_1 : VSG_n \rightarrow S_m$ um homomorfismo. Então, a menos de conjugação, temos uma das seguintes possibilidades.*

1. ψ_1 é abeliano,
2. $n = m$ e $\psi_1 \in \{\varphi_{(1,1,1)}, \varphi_{(1,0,1)}, \varphi_{(0,0,1)}\}$,
3. $n = m = 6$ e $\psi_1 \in \{v_6 \circ \varphi_{(1,1,1)}, v_6 \circ \varphi_{(1,0,1)}, v_6 \circ \varphi_{(0,0,1)}\}$.

Demonstração. Note que $\varphi = \psi_1 \circ \pi$, portanto vale uma das seguintes possibilidades da Proposição 2.7:

1. $\psi_1 \circ \pi$ é abeliano,
2. $n = m$ e $\psi_1 \circ \pi = Id$,
3. $n = m = 6$ e $\psi_1 \circ \pi = v_6$.

Suponha que $\psi_1 \circ \pi$ seja abeliano. Logo existe uma imagem $\omega \in S_m$ tal que

$$\omega = (\psi_1 \circ \pi)(s_i) = \psi_1(v_i)$$

para todo i no conjunto $I = \{1, \dots, n-1\}$. Como $s_i^2 = 1$, nós temos que

$$\omega^2 = ((\psi_1 \circ \pi)(s_i))^2 = (\psi_1 \circ \pi)(s_i^2) = (\psi_1 \circ \pi)(1)$$

Como $\psi_1 \circ \pi$ é homomorfismo, então $\omega^2 = 1$. Seja $\omega_1 = \psi_1(\sigma_i)$ e tomemos a relação $v_i \sigma_j v_i = v_j \sigma_i v_j$ para todo $|i - j| = 1$. Segue então que

$$\begin{aligned} \sigma_j v_i v_j^{-1} &= v_i^{-1} v_j \sigma_i \\ \psi_1(\sigma_j) \psi_1(v_i) \psi_1(v_j^{-1}) &= \psi_1(v_i^{-1}) \psi_1(v_j) \psi_1(\sigma_i) \\ \psi_1(\sigma_j) \omega^2 &= \omega^2 \psi_1(\sigma_i) \\ \psi_1(\sigma_j) &= \psi_1(\sigma_i) \end{aligned}$$

Agora vamos considerar a relação $\sigma_i v_j = v_j \sigma_i$ para $|i - j| \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma_i) \psi_1(v_j) &= \psi_1(v_j) \psi_1(\sigma_i) \\ \omega_1 \omega &= \omega \omega_1 \end{aligned}$$

Tome $\omega_2 = \psi_1(\tau_i)$, ao olharmos para a relação $v_i \tau_j v_i = v_j \tau_i v_j$ com $|i - j| = 1$, dai

$$\begin{aligned} \psi_1(v_i) \psi_1(\tau_j) \psi_1(v_i) &= \psi_1(v_j) \psi_1(\tau_i) \psi_1(v_j) \\ \omega \psi_1(\tau_j) \omega &= \omega \psi_1(\tau_i) \omega \\ \psi_1(\tau_j) &= \psi_1(\tau_i) \end{aligned}$$

Logo, utilizando $\tau_i v_j = v_j \tau_i$, vemos que $\psi_1(\tau_i) \psi_1(v_j) = \psi_1(v_j) \psi_1(\tau_i)$, ou seja, $\omega \omega_2 = \omega_2 \omega$.

Por fim, ao tomarmos a relação $\sigma_i \tau_i = \tau_i \sigma_i$, segue que

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma_i) \psi_1(\tau_i) &= \psi_1(\tau_i) \psi_1(\sigma_i) \\ \omega_1 \omega_2 &= \omega_2 \omega_1 \end{aligned}$$

Logo ψ_1 é abeliano.

Suponha que $n = m$ e $\psi_1 \circ \pi = Id$, então $(\psi_1 \circ \pi)(s_i) = s_i$ e, por $(\psi_1 \circ \pi)(s_i) = \psi_1(v_i)$, $\psi_1(v_i) = s_i$. Observe que, da relação $\sigma_j v_i = v_i \sigma_j$ com $|i - j| \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma_j) \psi_1(v_i) &= \psi_1(v_i) \psi_1(\sigma_j) \\ \psi_1(\sigma_j) s_i &= s_i \psi_1(\sigma_j) \\ s_i &= \psi_1(\sigma_j) s_i \psi_1(\sigma_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Analogamente, pela relação $v_i \tau_j = \tau_j v_i$ segue que $s_i = \psi_1(\tau_j) s_i \psi_1(\tau_j)^{-1}$, ou seja, tanto $\psi_1(\sigma_j)$ quanto $\psi_1(\tau_j)$ estão no centralizador de s_i (C_{s_i}) em S_n , como $(C_{s_i}) = \{1, s_i\}$ podemos ter quatro casos:

1. $\psi_1(\sigma_j) = \psi_1(\tau_j) = s_i$, fazendo com que ψ_1 seja $\varphi_{1,1,1}$;
2. $\psi_1(\sigma_j) = s_i$ e $\psi_1(\tau_j) = 1$, fazendo com que ψ_1 seja $\varphi_{1,0,1}$;
3. $\psi_1(\sigma_j) = \psi_1(\tau_j) = 1$, fazendo com que ψ_1 seja $\varphi_{0,0,1}$;
4. $\psi_1(\sigma_j) = 1$ e $\psi_1(\tau_j) = s_i$, fazendo com que ψ_1 fosse $\varphi_{0,1,1}$. Entretanto, pela demonstração da Proposição 3.2, $\varphi_{0,1,1}$ não é homomorfismo e por isso descartaremos esse caso.

Por fim, suponha que $n = m = 6$ e $\psi_1 \circ \pi = \nu_6$. Então

$$\nu_6^{-1} \circ \psi_1 \circ \pi = \nu_6^{-1} \nu_6$$

$$\nu_6^{-1} \circ \psi_1 \circ \pi = Id$$

Como vale a possibilidade demonstrada anterior e seus três primeiros casos, temos que

$$\nu_6^{-1} \circ \psi_1 = \psi_{1,1,1}$$

$$\psi_1 = \nu_6 \circ \psi_{1,1,1}$$

ou

$$\nu_6^{-1} \circ \psi_1 = \psi_{1,0,1}$$

$$\psi_1 = \nu_6 \circ \psi_{1,0,1}$$

ou

$$\nu_6^{-1} \circ \psi_1 = \psi_{0,0,1}$$

$$\psi_1 = \nu_6 \circ \psi_{0,0,1}.$$

□

4.1 Núcleo de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_2 \rightarrow S_2$

Analisaremos cada um dos núcleos de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$. Explicitaremos suas apresentações a partir do método **Reidemeister-Schreier** descrito em [9]. O método Reidemeister-Schreier nada mais é que determinação de apresentações de subgrupos a partir de uma apresentação do grupo. Para isso precisamos ter um conjunto de representantes das classes laterais do subgrupo no grupo que é chamado de **Transversal de Schreier** e uma manipulação dos geradores do grupo com os elementos da transversal. No caso de VSG_2 , usaremos a seguinte apresentação:

$$VSG_2 = \langle \sigma_1, \tau_1, v_1 \mid P_1 \rangle.$$

Onde P_1 é o pacote que contém relações R_1 e R_2 formadas por dois geradores, onde $i = 1$ e

$$R_1 : v_1^2 = 1;$$

$$R_2 : \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1.$$

Aplicando o método, precisamos definir uma Transversal de Schreier que chamaremos de Λ . O nosso núcleo será gerado por

$$S_{\lambda, a} = \{(\lambda a)(\overline{\lambda a})^{-1} \mid \lambda \in \Lambda, a \in \{\sigma_1, \tau_1, v_1\}\}$$

Começaremos com $\boxed{\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} = \varphi_{1,1,1}}$. Consideraremos

$$\Lambda = \{1, v_1\}$$

Então temos:

$$S_{1, \sigma_1} = (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 v_1^{-1} = \sigma_1 v_1$$

$$S_{1, \tau_1} = (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 v_1^{-1} = \tau_1 v_1$$

$$S_{1, v_1} = (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 v_1^{-1} = 1$$

$$S_{v_1, \sigma_1} = (v_1\sigma_1)(\overline{v_1\sigma_1})^{-1} = v_1\sigma_1(v_1^2)^{-1} = v_1\sigma_1$$

$$S_{v_1, \tau_1} = (v_1\tau_1)(\overline{v_1\tau_1})^{-1} = v_1\tau_1(v_1^2)^{-1} = v_1\tau_1$$

$$S_{v_1, v} = (v_1v_1)(\overline{v_1v_1})^{-1} = v_1^2(v_1^2)^{-1} = 1$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$ serão: $a = \sigma_1 v_1$, $b = \tau_1 v_1$, $c = v_1 \sigma_1$ e $d = v_1 \tau_1$.

Próximo passo do método será a análise das relações de VSG_2 , de forma a construir novas relações $r_{i,j}$ para $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$, com i indicando o número da relação e $j \in \Lambda$. Tomemos a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$r_{1,1} = 1v_1^2 1^{-1} = v^2 = 1$$

$$r_{1,v_1} = v_1 v_1^2 v_1^{-1} = v_1 v_1^2 v_1 = v_1^4 = 1$$

Já ao tomarmos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 = \tau_1 \sigma_1$ de forma que $\sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$ temos

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}1^{-1} \\ &= \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1 v_1^{-1} v_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} v_1^{-1} v_1 \tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1 v_1^{-1} v_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} v_1^{-1} v_1 \tau_1^{-1} \\ &= adc^{-1}b^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,v_1} &= v_1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}v_1^{-1} \\
&= v_1\sigma_1\tau_1v_1^{-1}v_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}v_1^{-1} \\
&= v_1\sigma_1\tau_1v_1^{-1}v_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}v_1^{-1} \\
&= cba^{-1}d^{-1}
\end{aligned}$$

Note que $cba^{-1}d^{-1} = 1 \Rightarrow cba^{-1} = d$ e também $adc^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow d = a^{-1}bc$, ou seja, o candidato a gerador d pode ser descartado já que pode ser escrito como combinação de a, b e c que serão os geradores de $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$. Além disso, podemos concluir que tais geradores respeitam a relação $cba^{-1} = a^{-1}bc \Rightarrow acb = bca$.

Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{(1,1,1)}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b, c \mid acb = bca \rangle.$$

De [12] em sua Definição 5, temos que $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$ é o **Grupo de Tranças Puras Virtuais Singulares** ($VSPG_2$). Além disso, por ser um núcleo, $VSPG_2$ é normal em VSG_2 e por tanto $VSG_2/VSPG_2 \cong S_2$.

Repetiremos agora o mesmo processo para $\boxed{\text{Ker}(\varphi_{1,1,0})}$. Neste caso, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, \sigma_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
S_{1,\sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1\sigma_1^{-1} = 1 \\
S_{1,\tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1\tau_1^{-1} = 1 \\
S_{1,v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_11^{-1} = v_1 \\
S_{\sigma_1,\sigma_1} &= (\sigma_1\sigma_1)(\overline{\sigma_1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1\sigma_1(1)^{-1} = \sigma_1^2 \\
S_{\sigma_1,\tau_1} &= (\sigma_1\tau_1)(\overline{\sigma_1\tau_1})^{-1} = \sigma_1\tau_1(1)^{-1} = \sigma_1\tau_1 \\
S_{\sigma_1,v} &= (\sigma_1v_1)(\overline{\sigma_1v})^{-1} = \sigma_1v\sigma_1^{-1}
\end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $\text{Ker}(\varphi_{1,1,0})$ serão: $a_1 = v_1$, $b_1 = \sigma_1^2$, $c_1 = \sigma_1\tau_1$ e $d_1 = \sigma_1v_1\sigma_1^{-1}$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= 1v_1^21^{-1} = a_1^2 \\
r_{1,\sigma_1} &= \sigma_1v_1^2\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1v_1v_1\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1v_1\sigma_1^{-1}\sigma_1v_1\sigma_1^{-1} \\
&= d_1^2
\end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}1^{-1} \\ &= \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= c_1c_1^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2,\sigma_1} &= \sigma_1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}\sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_1\tau_1\sigma_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}\sigma_1^{-1} \\ &= c_1c_1^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{1,1,0}$ é

$$Ker(\varphi_{1,1,0}) = \langle a_1, b_1, c_1, d_1 \mid a_1^2 = d_1^2 = 1 \rangle.$$

Para $\boxed{Ker(\varphi_{1,0,1})}$. Neste caso, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, v_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} S_{1,\sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 v_1^{-1} = \sigma_1 v_1 \\ S_{1,\tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 1^{-1} = \tau_1 \\ S_{1,v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 v_1^{-1} = 1 \\ S_{v_1,\sigma_1} &= (v_1\sigma_1)(\overline{v_1\sigma_1})^{-1} = v_1\sigma_1(v_1^2)^{-1} = v_1\sigma_1 \\ S_{v_1,\tau_1} &= (v_1\tau_1)(\overline{v_1\tau_1})^{-1} = v_1\tau_1(v_1)^{-1} \\ S_{v_1,v_1} &= (v_1v_1)(\overline{v_1v_1})^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $Ker(\varphi_{1,0,1})$ serão: $a_2 = \sigma_1 v_1$, $b_2 = \tau_1$, $c_2 = v_1 \sigma_1$ e

$d_2 = v_1\tau_1v_1^{-1}$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= 1v_1^21^{-1} \\ &= v_1\tau_1\tau_1^{-1}v_1 \\ &= v_1\tau_1v_1v_1^{-1}\tau_1^{-1}v_1 \\ &= d_2d_2^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,v_1} &= v_1v_1^2v_1^{-1} \\ &= v_1\tau_1\tau_1^{-1}v_1^2\tau_1\tau_1^{-1}v_1 \\ &= v_1\tau_1v_1^2\tau_1^{-1}v_1^2\tau_1v_1^2\tau_1^{-1}v_1 \\ &= d_2d_2^{-1}d_2d_2^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}1^{-1} \\ &= \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1v_1v_1\sigma_1\sigma_1^{-1}\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1v_1v_1\sigma_1\sigma_1^{-1}v_1v_1\tau_1v_1v_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= a_2c_2c_2^{-1}d_2a_2^{-1}b_2^{-1} \\ &= a_2d_2a_2^{-1}b_2^{-1} \end{aligned}$$

Note que por $a_2d_2a_2^{-1}b_2^{-1} = 1$ podemos concluir que $d_2 = a_2^{-1}b_2a_2$, ou seja, d_2 será descartado como gerador.

$$\begin{aligned} r_{2,v_1} &= v_1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}v_1^{-1} \\ &= v_1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}v_1^{-1}v_1\tau_1\sigma_1^{-1}v_1^{-1} \\ &= c_2b_2c_2^{-1}d_2^{-1} \end{aligned}$$

Como $c_2b_2c_2^{-1}d_2^{-1} = 1$ então $c_2b_2c_2^{-1} = d_2$, daí temos que $a_2^{-1}b_2a_2 = c_2b_2c_2^{-1}$, o que implica que $b_2a_2c_2 = a_2c_2b_2$. Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{1,0,1}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{1,0,1}) = \langle a_2, b_2, c_2 \mid b_2a_2c_2 = a_2c_2b_2 \rangle.$$

Para $\boxed{\text{Ker}(\varphi_{1,0,0})}$. Neste caso, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, \sigma_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
S_{1, \sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1\sigma_1^{-1} = 1 \\
S_{1, \tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 1^{-1} = \tau_1 \\
S_{1, v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 \\
S_{\sigma_1, \sigma_1} &= (\sigma_1\sigma_1)(\overline{\sigma_1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1^2 \\
S_{\sigma_1, \tau_1} &= (\sigma_1\tau_1)(\overline{\sigma_1\tau_1})^{-1} = \sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1} = \tau_1\sigma_1\sigma_1^{-1} = \tau_1 \\
S_{\sigma_1, v_1} &= (\sigma_1v_1)(\overline{\sigma_1v_1})^{-1} = \sigma_1v_1\sigma_1^{-1}
\end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $\text{Ker}(\varphi_{1,0,0})$ serão: $a_3 = \tau_1$, $b_3 = v_1$, $c_3 = \sigma_1^2$ e $d_3 = \sigma_1v_1\sigma_1^{-1}$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= 1v_1^2 1^{-1} \\
&= b_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1,\sigma_1} &= \sigma_1 v_1^2 \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1 v_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 v_1 \sigma_1^{-1} \\
&= d_3^2
\end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned}
r_{2,1} &= 1\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}1^{-1} \\
&= \sigma_1\tau_1 v_1 v_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\
&= \sigma_1\tau_1 v_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 v_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\
&= \tau_1 \sigma_1 v_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 v_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\
&= a_3 d_3^2 a_3^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,\sigma_1} &= \sigma_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_1^2 \tau_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\
&= \sigma_1^2 \tau_1 \sigma_1^{-2} \tau_1^{-1} \\
&= c_3 a_3 c_3^{-1} a_3^{-1}
\end{aligned}$$

Observe que $c_3 a_3 c_3^{-1} a_3^{-1} = 1$, ou seja, $c_3 a_3 = a_3 c_3$. Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{1,0,0}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{1,0,0}) = \langle a_3, b_3, c_3, d_3 \mid b_3^2 = d_3^2 = 1, c_3 a_3 = a_3 c_3 \rangle.$$

Para o caso $\boxed{Ker(\varphi_{0,1,1})}$, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, v_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} S_{1,\sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 \\ S_{1,\tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 v_1^{-1} \\ S_{1,v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 v_1^{-1} = 1 \\ S_{v_1,\sigma_1} &= (v_1\sigma_1)(\overline{v_1\sigma_1})^{-1} = v_1\sigma_1 v_1^{-1} \\ S_{v_1,\tau_1} &= (v_1\tau_1)(\overline{v_1\tau_1})^{-1} = v_1\tau_1 \\ S_{v_1,v_1} &= (v_1v_1)(\overline{v_1v_1})^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $Ker(\varphi_{0,1,1})$ serão: $a_4 = \sigma_1$, $b_4 = \tau_1 v_1$, $c_4 = v_1 \sigma_1 v_1$ e $d_4 = v_1 \tau_1$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= 1v_1^2 1^{-1} \\ &= v_1 \tau_1 \tau_1^{-1} v_1 \\ &= d_4 d_4^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,v_1} &= v_1 v_1^2 v_1^{-1} \\ &= v_1 \tau_1 \tau_1^{-1} v_1 v_1 \tau_1 \tau_1^{-1} v_1 \\ &= d_4 d_4^{-1} d_4 d_4^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1\sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} 1^{-1} \\ &= \sigma_1 \tau_1 v_1 v_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\ &= \tau_1 \sigma_1 v_1 v_1 \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1} \\ &= \tau_1 v_1 v_1 \sigma_1 v_1 v_1 \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1} \\ &= b_4 c_4 b_4^{-1} a_4^{-1} \end{aligned}$$

Note que por $b_4 c_4 b_4^{-1} a_4^{-1} = 1$ podemos concluir que $c_4 = b_4^{-1} a_4 b_4$, ou seja, c_4 será descartado como gerador.

$$\begin{aligned} r_{2,v_1} &= v_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} v_1^{-1} \\ &= v_1 \sigma_1 v_1 v_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} v_1^{-1} \\ &= c_4 d_4 a_4^{-1} d_4^{-1} \end{aligned}$$

Como $c_4 d_4 a_4^{-1} d_4^{-1} = 1$ e $c_4 = b_4^{-1} a_4 b_4$, logo

$$\begin{aligned} b_4^{-1} a_4 b_4 d_4 a_4^{-1} d_4^{-1} &= 1 \\ a_4 b_4 d_4 &= b_4 d_4 a_4 \end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{0,1,1}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{0,1,1}) = \langle a_4, b_4, d_4 \mid a_4 b_4 d_4 = b_4 d_4 a_4 \rangle.$$

Para o caso $\boxed{\text{Ker}(\varphi_{0,1,0})}$, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, \tau_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} S_{1, \sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 \\ S_{1, \tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 \tau_1^{-1} = 1 \\ S_{1, v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 \\ S_{\tau_1, \sigma_1} &= (\tau_1\sigma_1)(\overline{\tau_1\sigma_1})^{-1} = \tau_1 \sigma_1 \tau_1^{-1} = \sigma_1 \\ S_{\tau_1, \tau_1} &= (\tau_1\tau_1)(\overline{\tau_1\tau_1})^{-1} = \tau_1^2 \\ S_{\tau_1, v_1} &= (\tau_1v_1)(\overline{\tau_1v_1})^{-1} = \tau_1 v_1 \tau_1^{-1} \end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $\text{Ker}(\varphi_{0,1,0})$ serão: $a_5 = \sigma_1$, $b_5 = v_1$, $c_5 = \tau_1 v_1 \tau_1^{-1}$ e $d_5 = \tau_1^2$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= 1v_1^2 1^{-1} \\ &= b_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,\tau_1} &= \tau_1 v_1^2 \tau_1^{-1} \\ &= \tau_1 v_1 \tau_1^{-1} \tau_1 v_1 \tau_1^{-1} \\ &= c_5^2 \end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1\sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} 1^{-1} \\ &= \sigma_1 \tau_1 \tau_1 \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1 \tau_1^2 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \tau_1^{-1} \\ &= \sigma_1 \tau_1^2 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-2} \\ &= a_5 d_5 a_5^{-1} d_5^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,\tau_1} &= \tau_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} \tau_1^{-1} \\
&= \tau_1 \tau_1 \sigma_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-2} \\
&= \tau_1^2 \sigma_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-2} \\
&= d_5 a_5 a_5^{-1} d_5^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como $a_5 d_5 a_5^{-1} d_5^{-1} = 1$, logo $a_5 d_5 = d_5 a_5$. Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{0,1,0}$ é

$$Ker(\varphi_{0,1,0}) = \langle a_5, b_5, c_5, d_5 \mid b_5^2 = c_5^2 = 1 \text{ e } a_5 d_5 = d_5 a_5 \rangle.$$

Para o caso $\boxed{Ker(\varphi_{0,0,1})}$, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, v_1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
S_{1,\sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 \\
S_{1,\tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 \\
S_{1,v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 v_1^{-1} = 1 \\
S_{v_1,\sigma_1} &= (v_1\sigma_1)(\overline{v_1\sigma_1})^{-1} = v_1 \sigma_1 v_1^{-1} \\
S_{v_1,\tau_1} &= (v_1\tau_1)(\overline{v_1\tau_1})^{-1} = v_1 \tau_1 v_1 \\
S_{v_1,v_1} &= (v_1 v_1)(\overline{v_1 v_1})^{-1} = v_1^2
\end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $Ker(\varphi_{0,1,1})$ serão: $a_6 = \sigma_1$, $b_6 = \tau_1$, $c_6 = v_1 \sigma_1 v_1$ e $d_6 = v_1 \tau_1 v_1$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= 1v_1^2 1^{-1} \\
&= v_1 \tau_1 \tau_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1 v_1 \\
&= v_1 \tau_1 v_1 v_1 \tau_1^{-1} v_1 v_1 \sigma_1^{-1} v_1 v_1 \sigma_1 v_1 \\
&= d_6 d_6^{-1} c_6^{-1} c_6 \\
&= 1 \\
r_{1,v_1} &= v_1 v_1^2 v_1^{-1} \\
&= v_1 \tau_1 \tau_1^{-1} v_1 \\
&= v_1 \tau_1 v_1 v_1 \tau_1^{-1} v_1 \\
&= d_6 d_6^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} 1^{-1} \\ &= a_6 b_6 a_6^{-1} b_6^{-1} \end{aligned}$$

Note que por $a_6 b_6 a_6^{-1} b_6^{-1} = 1$ podemos concluir que $a_6 b_6 = b_6 a_6$.

$$\begin{aligned} r_{2,v_1} &= v_1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} v_1^{-1} \\ &= v_1 \sigma_1 v_1 v_1 \tau_1 v_1 v_1 \sigma_1^{-1} v_1 v_1 \tau_1^{-1} v_1^{-1} \\ &= c_6 d_6 c_6^{-1} d_6^{-1} \end{aligned}$$

Como $c_6 d_6 c_6^{-1} d_6^{-1} = 1$, logo $c_6 d_6 = d_6 c_6$. Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{0,0,1}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{0,0,1}) = \langle a_6, b_6, c_6, d_6 \mid a_6 b_6 = b_6 a_6 \text{ e } c_6 d_6 = d_6 c_6 \rangle.$$

Para o caso $\boxed{\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})}$, nossa Transversal de Schreier será

$$\Lambda = \{1, 1\}.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} S_{1,\sigma_1} &= (1\sigma_1)(\overline{1\sigma_1})^{-1} = \sigma_1 \\ S_{1,\tau_1} &= (1\tau_1)(\overline{1\tau_1})^{-1} = \tau_1 \\ S_{1,v_1} &= (1v_1)(\overline{1v_1})^{-1} = v_1 \end{aligned}$$

Logo, nossos candidatos a geradores de $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})$ serão: $a_7 = \sigma_1$, $b_7 = \tau_1$ e $c_7 = v_1$. Tomemos agora a primeira relação de VSG_2 , $R_1 : v^2 = 1$ então teremos

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= 1v_1^2 1^{-1} \\ &= c_7^2 \end{aligned}$$

Agora analisaremos a segunda relação $R_2 : \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} = 1$.

$$\begin{aligned} r_{2,1} &= 1 \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_1^{-1} 1^{-1} \\ &= a_7 b_7 a_7^{-1} b_7^{-1} \end{aligned}$$

Como $a_7 b_7 a_7^{-1} b_7^{-1} = 1$, logo $a_7 b_7 = b_7 a_7$. Portanto podemos concluir que a apresentação do núcleo de $\varphi_{0,0,0}$ é

$$\text{Ker}(\varphi_{0,0,0}) = \langle a_7, b_7, c_7 \mid c_7^2 = 1 \text{ e } a_7 b_7 = b_7 a_7 \rangle.$$

Note que $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})$ tem a mesma apresentação de VSG_2 .

Uma análise das apresentações encontradas dos núcleos de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$, para $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{0, 1\}$, é feita em [19] e nos fornece os resultados a seguir, um deles é que $VSPG_2$ é isomorfo ao grupo de tranças virtuais puras planas FPV_3 que foi definido na seção 5 em [5].

Teorema 4.5. *Seja $\epsilon_k \in \{0, 1\}$, para $k = 1, 2, 3$. Dependendo da tripla de ϵ_k escolhida, temos que o núcleo de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_2 \rightarrow S_2$ respeita as seguintes propriedades:*

- (1, 1, 1): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = VSPG_2$ é a extensão HNN de um grupo livre de posto 2. Além disso, $VSPG_2$ é isomorfo ao grupo de tranças virtuais puras planas FVP_3 e como consequência é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$.
- (1, 1, 0): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{1,1,0})$ é isomorfo ao produto livre $F_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, onde F_2 é um grupo livre de ordem 2.
- (1, 0, 1): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{1,0,1}) = VST_2$ é isomorfo ao grupo de tranças puras singulares virtuais $VSPG_2$.
- (1, 0, 0): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{1,0,0})$ é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.
- (0, 1, 1): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{0,1,1})$ é isomorfo ao grupo de tranças puras singulares virtuais $VSPG_2$.
- (0, 1, 0): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{0,1,0})$ é isomorfo ao núcleo $\text{Ker}(\varphi_{1,0,0})$.
- (0, 0, 1): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{0,0,1}) = VSK_2$ é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.
- (0, 0, 0): O núcleo $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0}) = VSG_2$, que é o grupo de tranças virtuais singulares com duas cordas, logo é isomorfo a $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}_2$.

Demonstração. Considerando as análises sobre os núcleos de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_2 \rightarrow S_2$ feita anteriormente, temos o seguinte:

- (1,1,1): Dada a apresentação a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b, c \mid acb = bca \rangle.$$

podemos reescreve-la de forma que sua relação seja

$$\begin{aligned} acb &= bca \\ b^{-1}acb &= ca \\ b^{-1}acb &= a^{-1}aca \\ ab^{-1}acba^{-1} &= ac \end{aligned}$$

se tomarmos $ba^{-1} = b''$ temos uma nova apresentação com

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b'', c \mid b''^{-1}acb'' = ac \rangle.$$

Tomando uma apresentação de FVP_3 dada na Observação 5.2 de [5] temos

$$FVP_3 = \langle \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \lambda_{2,3} \mid \lambda_{1,2}^{-1}(\lambda_{2,3}\lambda_{1,3})\lambda_{1,2} = \lambda_{2,3}\lambda_{1,3} \rangle$$

e que $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$ é isomorfo a FVP_3 com $a \mapsto \lambda_{2,3}$, $b'' \mapsto \lambda_{1,2}$ e $c \mapsto \lambda_{1,3}$.

Portanto $VSPG_2$ é a extensão HNN do grupo livre de posto 2 gerado por a e c com elemento estável b'' e com subgrupos associados $A = \langle \lambda_{2,3}\lambda_{1,3} \rangle$ ou seja, $B = \langle \lambda_{1,3}\lambda_{2,3} \rangle$, que são isomorfos a um grupo cíclico infinito. Além disso, como FVP_3 é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$, $VSPG_2$ também será.

- (1,1,0): Dada a apresentação a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,0}) = \langle a_1, b_1, c_1, d_1 \mid a_1^2 = d_1^2 = 1 \rangle.$$

Temos que $\langle c_1, b_1 \rangle$ gera uma cópia de F_2 e a_1, d_1 geram cópias de \mathbb{Z}_2 .

- (1,0,1): Dadas as apresentações da seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b, c \mid acb = bca \rangle \text{ e } \text{Ker}(\varphi_{1,0,1}) = \langle a_2, b_2, c_2 \mid b_2a_2c_2 = a_2c_2b_2 \rangle.$$

Ao reescrevermos a apresentação de $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$, de forma que sua relação seja

$$\begin{aligned} acb &= bca \\ b^{-1}acb &= ca \\ b^{-1}acb &= a^{-1}aca \\ ab^{-1}acba^{-1} &= ac \end{aligned}$$

então se tomarmos $ab^{-1} = b'$, vamos ter $b'acb'^{-1} = ac$ e a seguinte apresentação

$$\text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b', c \mid b'ac = acb' \rangle.$$

Note que a reescrita dessa apresentação nos fornece que $\text{Ker}(\varphi_{1,1,1})$ é isomorfo a $\text{Ker}(\varphi_{1,0,1})$, com $a \mapsto a_2$, $b' \mapsto b_2$ e $c \mapsto c_2$.

- (1,0,0): Dada a apresentação a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{1,0,0}) = \langle a_3, b_3, c_3, d_3 \mid b_3^2 = d_3^2 = 1 \text{ e } c_3a_3 = a_3c_3 \rangle.$$

Temos que d_3 gera uma cópia de \mathbb{Z}_2 , assim como b_3 . Já a_3 e c_3 geram a cópia de \mathbb{Z}^2 .

- (0,1,1): Dadas as apresentações encontradas a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{0,1,1}) = \langle a_4, b_4, d_4 \mid a_4 b_4 d_4 = b_4 d_4 a_4 \rangle \text{ e } \text{Ker}(\varphi_{1,1,1}) = \langle a, b', c \mid b' a c = a c b' \rangle$$

pelo mesmo argumento utilizado para a tripla (1,0,1), temos que $\text{Ker}(\varphi_{1,0,0})$ é isomorfo a $VSPG_2$, de forma que $a_4 \mapsto b'$, $b_4 \mapsto a$ e $d_4 \mapsto c$.

- (0,1,0): Dadas as apresentações a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{1,0,0}) = \langle a_3, b_3, c_3, d_3 \mid b_3^2 = d_3^2 = 1 \text{ e } c_3 a_3 = a_3 c_3 \rangle \text{ e}$$

$$\text{Ker}(\varphi_{0,1,0}) = \langle a_5, b_5, c_5, d_5 \mid b_5^2 = c_5^2 = 1 \text{ e } a_5 d_5 = d_5 a_5 \rangle.$$

temos que são isomorfos com $a_3 \mapsto d_5$, $b_3 \mapsto b_5$, $c_3 \mapsto a_5$ e $d_3 \mapsto c_5$.

- (0,0,1): Dada a apresentação a seguir

$$\text{Ker}(\varphi_{0,0,1}) = \langle a_6, b_6, c_6, d_6 \mid a_6 b_6 = b_6 a_6 \text{ e } c_6 d_6 = d_6 c_6 \rangle.$$

temos que a_6 e b_6 geram uma cópia de \mathbb{Z}^2 . Além disso, c_6 e d_6 geram outra cópia de \mathbb{Z}^2 .

- (0,0,0): Para este caso, temos que a apresentação de $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})$ encontrada anteriormente, coincide com a apresentação de VSG_2 dada na demonstração da Proposição 3.2. Segue então que $\text{Ker}(\varphi_{0,0,0})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}_2$.

□

Uma consequência direta das apresentações dos núcleos de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$ é a proposição a seguir.

Corolário 4.6. *Seja $\epsilon_k \in \{0, 1\}$, para $k = 1, 2, 3$. Para qualquer tripla $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ o núcleo de $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3} : VSG_2 \rightarrow S_2$ tem centro trivial. Em particular, vale para VSG_2 .*

Demonstração. Seja $\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}$ com $\epsilon_k \in \{0, 1\}$, para $k = 1, 2, 3$. Pelo Teorema 4.5, para qualquer que seja a tripla escolhida, temos que o $\text{Ker}(\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3})$ é isomorfo a algum produto livre. Daí segue pelo Lema 1.11, que $\text{Ker}(\varphi_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3})$ tem centro trivial. □

Referências

- [1] Artin, E. *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47-72.
- [2] Artin, E. *Braids and permutations*. Ann. Math., **48** (1947), 643–649.
- [3] Baez, J. *Link invariants of finite type and perturbation theory*, Lett. Math. Phys. **26** (1992), 43–51.
- [4] Bardakov, V.G. e Bellingeri, P. *Combinatorial properties of virtual braids*, Topology and its Applications **156**, 6 (2009), 1071-1082.
- [5] Bardakov, V. G., Bellingeri, P. e Damiani, C. *Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **24**, 12 (2015), 1550063.
- [6] Bardakov, V.G. *The virtual and universal braids*. Fundam. Math., **184** (2004), 1-18.
- [7] Bardakov, V. G. e Kozlovskaya, T. A. *On 3-strand singular pure braid group*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. **29**, No. 10 (2020), 2042001.
- [8] Bellingeri, P. e Paris, L. *Virtual braids and permutations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **70** (3) (2020), 1341–1362.
- [9] Birman, J. *New points of view in knot theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **28** (1993), 253–287.
- [10] Brandão, M. W. *Produto semidireto e sequências exatas curtas de grupos*. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, (2021).
- [11] Caprau, C., Pena A. e McGahan, S. *Virtual singular braids and links*, Manuscripta Math. **151**(1) (2016) 147–175.
- [12] Caprau, C. e Yeung, A. *Algebraic structures among virtual singular braids*, (2022) arXiv:2201.09187v1.
- [13] Caprau, C. e Zepeda, S. *On the virtual singular braid monoid*, J. Knot Theory Ramifications **30**, 14 (2021), 2141002.

- [14] Cisneros de la Cruz, B. A. e Gandolfi, G. *Algebraic, combinatorial and topological properties of singular virtual braid monoids*, J. Knot Theory Ramifications **28**, 10 (2019), 1950069.
- [15] Dey, S. e Gongopadhyay, K. *Commutator subgroups of singular braid groups*, J. Knot Theory Ramifications **31**, 05 (2022), 2250033.
- [16] Kauffman, L. H. *Virtual knot theory*, Eur. J. Comb. **20**, 7 (1999), 663–690
- [17] Lin, V. Y. *Braids and permutations*, (2004) arXiv:0404.528v1
- [18] Murasugi, K. e Kurpita, B. *A study of braids*, vol. 484 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999).
- [19] Ocampo, O. *On virtual singular braid groups*, (2022) arXiv:2207.13885v1.
- [20] Rotman, J. J. *An introduction to the Theory of Groups*, Springer, (1995).
- [21] Vershinin, V. V. *On homology of virtual braids and Burau representation*, J. Knot Theory Ramifications **10**, 5 (2001), 795–812.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>