



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS DE TRANÇAS VIRTUAIS

MIRELE PEREIRA DA SILVA

Salvador-Bahia

PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS DE TRANÇAS VIRTUAIS

MIRELE PEREIRA DA SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe.

Salvador-Bahia

10 de Julho de 2023

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Silva, Mirele Pereira da.

Propriedades combinatórias de tranças virtuais / Mirele Pereira da Silva. – 2023.

62 f. : il

Orientador: Oscar Ocampo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2020.

1.

CDD - 519.72

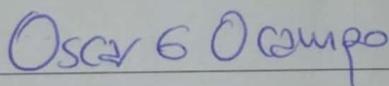
CDU - 519.72

Propriedades combinatórias de tranças virtuais

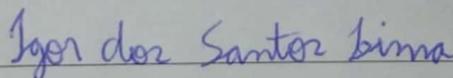
Mirele Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

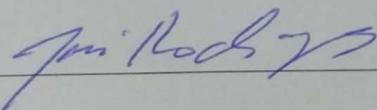
Banca examinadora



Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (UFBA)



Prof. Dr. Igor dos Santos Lima (UNB)



Prof. Dr. Jose Gregorio Rodriguez Nieto (Universidad Nacional de Colombia)

*Dedico a todos que me fizeram
acreditar que EU poderia che-
gar até aqui.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a **Deus** pela sabedoria, força e inspiração que me concedeu ao longo deste processo. Sua graça foi fundamental para superar os desafios e alcançar os resultados obtidos.

Aos meus pais, **Raimunda e Julio**, meu maior alicerce, expresso minha profunda gratidão. O amor incondicional, apoio emocional e incentivo constante foram essenciais para minha jornada acadêmica. Vocês são a minha fonte de inspiração e dedico a vocês cada conquista alcançada.

Às minhas amigas **Gabriele e Izamara**, agradeço por estarem ao meu lado durante todo o percurso do mestrado. Suas palavras de encorajamento, pensamentos produtivos, calls enormes e momentos de descontração foram essenciais para manter minha motivação e equilíbrio emocional. O apoio de vocês foi um verdadeiro presente.

Agradeço também a todos os **amigos** que me apoiaram e me encorajaram ao longo desta jornada. Suas palavras de encorajamento, interesse genuíno pelo meu trabalho e celebração das conquistas foram um impulso valioso.

Meu profundo agradecimento ao meu orientador, **Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe**, cuja experiência, conhecimento e orientação foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação em compartilhar seu conhecimento e suas perspectivas foram inestimáveis e me ajudaram a aprimorar minha pesquisa.

Agradeço também ao meu orientador da graduação, **Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida**, por ter me guiado durante minha formação acadêmica inicial. Seu apoio e incentivo desde o início foram fundamentais para minha escolha e sucesso neste caminho.

Não posso deixar de agradecer a **CAPES** pelo suporte financeiro concedido.

Por fim, agradeço a **mim mesma** por minha dedicação, persistência e por conseguir e ir em frente, mesmo com muitos medos, inseguranças, crises e dores. Cada desafio superado e cada descoberta feita foram frutos de comprometimento e paixão pela pesquisa.

A todos vocês, meu mais sincero e profundo agradecimento. Esta dissertação de mestrado não seria possível sem a presença de cada um de vocês em minha vida.

Obrigada por acreditarem em mim e por fazerem parte desta jornada.

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”

(Isaac Newton)

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas propriedades combinatórias das tranças virtuais, tais como a série central inferior do grupo de tranças virtuais VB_n e também os núcleos de duas projeções diferentes de VB_n no grupo simétrico S_n . Esses núcleos são respectivamente o grupo de tranças puras virtuais VP_n e o fecho normal do grupo das tranças de Artin, que vamos denotar por H_n e é também conhecido como KB_n . Descrevemos as relações entre H_n e VP_n e o grupo de tranças puras estendidas EP_n que é o núcleo da projeção de H_n em S_n . Esse nome é motivado pelo fato que EP_n é justamente igual à interseção de H_n com VP_n . Para finalizar, daremos uma apresentação inédita para EP_n nos casos em que $n = 2$ e $n = 3$.

Palavras-chave: Grupos de Tranças Virtuais; Homomorfismo; Núcleo.

Abstract

In this work, we study some combinatorial properties of virtual braids, such as the lower central series of the virtual braid group VB_n and also the kernels of two different projections of VB_n onto the symmetric group S_n . These kernels are respectively the group of virtual pure braids VP_n and the normal closure of the Artin braid group, denoted by H_n and also known as KB_n . We describe the relationships between H_n and VP_n , as well as the extended pure braid group EP_n , which is the kernel of the projection from H_n to S_n . This name is motivated by the fact that EP_n is precisely the intersection of H_n and VP_n . Finally, we will give an unprecedented presentation to EP_n in cases where $n = 2$ and $n = 3$.

Keywords: Virtual Braid Groups; Homomorphism; Kernel.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Teoria de grupos	3
1.2 Método Reidemeister-Schreier	15
2 Propriedades combinatórias dos grupos de tranças virtuais VB_n	19
2.1 Série central inferior do grupo de tranças virtuais	19
2.2 Subgrupos destacados de VB_n	27
2.2.1 Tranças puras virtuais VP_n	27
2.2.2 Fecho normal de B_n	34
3 Grupo de tranças puras estendido com poucas cordas	47
3.1 Apresentação de EP_2	48
3.2 Apresentação de EP_3	49
Referências Bibliográficas	61

Introdução

Os grupos de tranças de Artin ou grupos de tranças clássicas [13], que foram introduzidos por Emil Artin em 1925 e denotados por B_n , têm sido generalizados em várias direções nos últimos anos, exemplo disso são os grupos de tranças de superfícies, os grupos de Artin-Tits, assim como os grupos de tranças virtuais, os grupos de tranças "welded" ou soldadas entre outros.

Os grupos de tranças virtuais, denotados por VB_n , são extensões dos grupos de tranças clássicas, que surgem justamente quando permitimos que as cordas das tranças possam passar através uma das outras, ou seja, não são mais restritas a um espaço tridimensional fixo. Essas tranças são chamadas de "virtuais" justamente porque não podem ser vistas em um espaço tridimensional sem que as cordas se cruzem. Esses mesmos grupos foram apresentados na década de 1990 pelo matemático americano Louis Kauffman em [9] com os conceitos de nós e links virtuais e têm sido um objeto de estudo ativo desde então. Os grupos de tranças virtuais tem aplicações em uma ampla gama de campos matemáticos, incluindo teoria dos nós, topologia de baixa dimensão, teoria geométrica de grupos, geometria algébrica e física matemática, também está relacionado a outras estruturas algébricas, como o grupo de Artin-Tits [4].

O nosso trabalho é baseado principalmente no artigo [1] de Valeriy Georgievich Bardakov e Paolo Bellingeri, onde os mesmos estudam a estrutura e propriedades das tranças virtuais, assim como alguns homomorfismos que envolve o grupo de tranças virtuais, o grupo simétrico e o fecho normal do grupo de tranças de Artin.

No capítulo inicial, tratamos dos assuntos fundamentais para a compreensão do tema desse trabalho, tais como definições, notações, alguns fatos conhecidos e resultados elementares sobre a teoria de grupos que podem ser encontrados em [5] e [11], além disso, falaremos sobre o método Reidemeister-Schreier [13], que é uma técnica usada na teoria de grupos para construir uma apresentação de um subgrupo de um determinado grupo em termos de geradores e relações. Esse método foi desenvolvido pelo matemático alemão Kurt Reidemeister e pelo matemático austríaco Otto Schreier na década de 1930.

No segundo capítulo, falamos de forma mais detalhada sobre as propriedades

combinatórias do grupo de trança virtuais e subgrupos que são núcleos de homomorfismos. Características importantes do grupos de tranças virtuais podem ser percebidas através da sua série central inferior, série essa formada por uma sequência normal de subgrupos, sendo que o primeiro grupo da série central inferior é o próprio grupo de tranças virtuais, e os demais são grupos derivados. A série central inferior é importante porque permite entender a estrutura do grupo de tranças virtuais em termos dos seus subgrupos mais simples. Falaremos também de dois subgrupos que são bastante relevantes nesse capítulo e por isso traremos na Seção 2.2 suas respectivas apresentações. O primeiro é o grupo das tranças puras virtuais VP_n que é o núcleo do homomorfismo do grupo de tranças virtuais VB_n no grupo simétrico S_n que leva os dois tipos de geradores $\{\sigma_i, \rho_i\}$ do grupo das tranças virtuais no único tipo de geradores $\{\rho_i\}$ do grupo simétrico. O segundo é o fecho normal do grupo de tranças clássicas no grupo de tranças virtuais H_n , que é o núcleo do homomorfismo do grupo de tranças virtuais no grupo simétrico que leva os geradores $\{\sigma_i\}$ no elemento neutro do grupo simétrico e os geradores $\{\rho_i\}$ nos geradores $\{\rho_i\}$ do grupo simétrico.

No terceiro capítulo, estudamos o grupo de tranças puras estendidas EP_n que é o núcleo do homomorfismo que vai de H_n no grupo simétrico S_n . Esse grupo também pode ser visto como a interseção entre o grupo de tranças puras virtuais e o fecho normal das tranças clássicas. Por fim, usando o método Reidemeister-Schreier conseguimos encontrar uma apresentação inédita em termos de geradores e relações para o grupo de tranças puras estendidas com duas cordas e para o grupo de tranças puras estendidas com três cordas, já que esse grupo não tem uma apresentação para o caso com n cordas.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo recordaremos algumas definições da teoria de grupos, também exibiremos uma apresentação do grupo das tranças de Artin, do grupo simétrico e do grupo das tranças virtuais de forma a entender a estrutura algébrica desses grupos de maneira clara. Para esse capítulo nos baseamos em [5],[11] e [13].

1.1 Teoria de grupos

A teoria de grupos estuda as propriedades e estruturas que se apresentam nos grupos. Alguns conceitos importantes dessa teoria incluem os subgrupos, os subgrupos normais, os quocientes, os homomorfismos, os isomorfismos e os grupos de permutações.

Tomando G como um grupo e H um subgrupo de G , podemos dizer que $X \subset H$ é um **conjunto gerador** de H , ou que X **gera** H , se

$$H = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Dizemos também que H é o **subgrupo gerado** por X .

Definição 1.1. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Chamamos **classe lateral** de H em G o conjunto cujos elementos são todos os resultados da operação gh onde g é fixo e pertencente a G e h é um elemento de H , ou seja, o conjunto:*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Um subgrupo normal, também conhecido como subgrupo invariante, é um subgrupo que se comporta de maneira especial, ele é preservado por conjugação em relação aos elementos do grupo original.

Um subgrupo N de G é dito um **subgrupo normal** de G se satisfaz qualquer uma das condições equivalentes:

- $gN = Ng$, para todo $g \in G$;
- $gNg^{-1} = N$, para todo $g \in G$;
- $gNg^{-1} \subset N$, para todo $g \in G$.

Nesse caso, denotaremos por $N \triangleleft G$.

Exemplo 1.2. *Seja e o elemento neutro de um grupo G , então $\{e\}$ e G são subgrupos normais de G .*

Dizemos que um grupo $G \neq \{1\}$ é **simples** se os únicos subgrupos normais dele são $\{e\}$ e G .

Exemplo 1.3. *Todos os subgrupos de um grupo abeliano é normal.*

Observe que os grupos quocientes se formam ao tomar um grupo e fazer o quociente por um subgrupo normal, fazer isso nos permite estudar a estrutura do grupo original de uma maneira simplificada.

Definição 1.4. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G . O grupo de suas classes laterais com a operação de G é o **grupo quociente** de G por N ; é denotado por G/N ou por $\frac{G}{N}$.*

Na matemática, um homomorfismo de grupo é uma função que preserva a estrutura dos grupos.

Definição 1.5. *Dado dois grupos G e H , um **homomorfismo** de grupos é uma função $f: G \rightarrow H$ tal que, para quaisquer elementos a e b em G , vale que:*

- $f(a * b) = f(a) * f(b)$, onde $*$ denota a operação binária em G e H , respectivamente.

Em outras palavras, um homomorfismo de grupo preserva a operação de grupo, o que significa que o resultado de aplicar a operação em G e depois aplicar f é o mesmo que aplicar f a cada elemento individualmente e depois aplicar a operação em H . Além disso, preserva o neutro elemento, ou seja, leva o elemento neutro de um grupo no elemento neutro do outro grupo.

Existem vários tipos de homomorfismos de grupo. Alguns dos mais comuns são os seguintes.

Exemplo 1.6. *Homomorfismos triviais.*

Estes homomorfismos mapeiam todos os elementos de G no elemento neutro de H .

$$f(a) = e_H \text{ para todo } a \in G.$$

Exemplo 1.7. *Homomorfismos Injetivos.*

Esses homomorfismos preservam a estrutura do grupo e também são funções injetivas, o que significa que eles mapeiam elementos distintos em G para elementos distintos em H .

$$\text{se } f(a) = f(b) \text{ então } a = b,$$

para todo a e b em G .

Exemplo 1.8. *Homomorfismos Sobrejetivos.*

Esses homomorfismos mapeiam todo elemento de G a H , cobrindo todo o grupo H . Para cada h em H , existe pelo menos um elemento g em G tal que

$$f(g) = h.$$

Exemplo 1.9. *Isomorfismos.*

Esses homomorfismos são bijetivos, o que significa que são injetivos e sobrejetivos. Em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de G e H . Quando temos um isomorfismo de G em G , chamamos de **automorfismo** de G . O conjunto dos automorfismos de G é denotado por $Aut(G)$. Esse conjunto com a operação de composição de função forma o grupo de automorfismo de G .

Os homomorfismos de grupos permitem que diferentes grupos sejam comparados e relacionados.

Definição 1.10. *Seja um homomorfismo $f: G \rightarrow H$ então*

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$$

*é um subgrupo normal de G chamado de **núcleo** do homomorfismo f .*

Proposição 1.11. *O núcleo do homomorfismo f é um subgrupo normal e mais, f é injetiva se, e somente se $\ker f = \{e\}$*

Demonstração. Sejam $h \in \ker f$ e $g \in G$. Aplicando f em ghg^{-1} temos que

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)ef(g)^{-1} = e$$

Assim, $ghg^{-1} \in \ker f$. Logo, $\ker f$ é normal em G .

Suponha que f é injetora, então é claro que $\ker f = \{e\}$.

Suponha agora que $\ker f = \{e\}$ e $a, b \in G$ com $f(a) = f(b)$. Então

$$e = f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}).$$

Portanto $ab^{-1} \in \ker f$. Então $ab^{-1} = e$, ou seja, $a = b$. Logo f é injetora. □

Em um conjunto finito X chamado **alfabeto**, os elementos de X são chamados de **letras**. Uma **palavra** em X é uma sequência finita de elementos de X .

Exemplo 1.12. Considerando X como sendo o alfabeto da língua portuguesa, palavras nesse conjunto são do tipo:

$$ahfbfksmkfl, kdfkolapnzsp, abc, ghn, olkj, tghio, alkdjcn.$$

Uma **subpalavra** é uma palavra contida em outra palavra. A palavra sem letras é chamada de **palavra vazia**.

Dado um alfabeto X , é possível construirmos o **alfabeto inverso**

$$X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}.$$

Seja W_X o conjunto de palavras em $X \cup X^{-1}$, incluindo a palavra vazia. Uma operação em W_X é dada pela justaposição de palavras, por exemplo:

$$(abc)(b^{-1}a) = abcb^{-1}a.$$

Seja $u = x_1x_2 \cdots x_n$ um elemento de W_X , com $x_i \in X$ para todo i . A **palavra inversa** de u é dada por

$$u^{-1} := x_n^{-1}x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1},$$

considerando $(x^{-1})^{-1} = x$.

Dizemos que duas palavras em W_X são **equivalentes** se uma pode ser obtida a partir da outra após acrescentar ou retirar uma quantidade finita de subpalavras do tipo xx^{-1} ou $x^{-1}x$, com $x \in X$.

Observe que, com essa definição, se u é uma palavra em W_X então uu^{-1} e $u^{-1}u$ são equivalentes à palavra vazia. O conjunto de todas as classes de equivalência de W_X é o que chamaremos de **grupo livre gerado** por X , denotado por F_X .

O **posto** de um grupo livre F_X , é a cardinalidade (número de elementos) de um conjunto mínimo de geradores que podem gerar todo o grupo livre, ou seja, é o menor número de elementos necessários para gerar o grupo livre.

Para enunciarmos a definição formal de apresentação de um grupo, precisamos da definição de fecho normal.

Definição 1.13. Sejam G um grupo e R um subconjunto de G , o **fecho normal** de R em G é o subgrupo de G gerado pelos elementos da forma grg^{-1} , onde $r \in R \cup R^{-1}$ e $g \in G$. O fecho normal de R em G é denotado por $\langle R \rangle^G$. Por convenção, $\langle \emptyset \rangle^G = \{1\}$.

Uma apresentação de um grupo G é dada por dois conjuntos: um conjunto de geradores x e um conjunto de relações R , assim, todo elemento do grupo pode ser

obtido a partir de aplicações sucessivas da operação sobre os geradores, e as relações são equações que são satisfeitas por esses geradores as quais são suficientes para determinar o grupo.

Definição 1.14. *Seja G um grupo tal que*

$$G \simeq \frac{F_X}{\langle R \rangle_{F_X}},$$

onde F_X é o grupo livre gerado por X e $R \subset F_X$. Então dizemos que uma **apresentação** do grupo G é dada por

$$G = \langle X \mid R \rangle.$$

A apresentação de um grupo não é única, pois, depende da escolha dos conjuntos x e R . Exemplo disso é grupo cíclico finito, ele tem uma apresentação usual dada por,

$$\mathbb{Z}_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle,$$

mas também pode ter a seguinte apresentação, $\mathbb{Z}_n = \langle a, b \mid a = b, ab^{-1} = a_0^n, a_0^n = 1 \rangle$. Outro exemplo é o grupo cíclico infinito que tem a apresentação usual dada por

$$\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset \rangle,$$

mas também pode ter a seguinte apresentação, $\mathbb{Z} = \langle a, b, c, d \mid a = b, b = c, c = d \rangle$.

Definição 1.15. *Sejam os grupos $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle Y \mid S \rangle$ tais que X e Y são disjuntos. O produto livre entre G e H denotado por $G * H$ é dado por:*

$$G * H = \langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle.$$

Definição 1.16. *Sejam H, K dois grupos tais que existe um homomorfismo $\varrho : K \rightarrow \text{Aut}(H)$. O produto semidireto $H \rtimes_{\varrho} K$ é o conjunto $H \times K$ munido da operação*

$$\begin{aligned} \varrho : (H \times K) \times (H \times K) &\rightarrow H \times K \\ ((h_1, k_1), (h_2, k_2)) &\mapsto (h_1 \varrho(k_1)(h_2), k_1 k_2). \end{aligned}$$

Definição 1.17. *Dizemos que uma dada seqüência de grupos e homomorfismos*

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1}$$

é uma **seqüência exata** quando a imagem de um homomorfismo é igual ao núcleo do seguinte, ou seja,

$$\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$$

para todo $0 \leq i \leq n$.

Definição 1.18. *Uma sequência do tipo*

$$1 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} 1$$

onde f_1 é injetiva e f_2 é sobrejetiva, a chamamos de **sequência exata curta**.

Dizemos que uma sequência exata curta

$$1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \rightarrow 1$$

cinde se existir um homomorfismo $\kappa : G_3 \rightarrow G_2$ de modo que $\kappa \circ f_2 = Id_{G_3}$. Esse homomorfismo κ é chamado de **seção**.

Definição 1.19. *Seja o subgrupo $UT_n(K)$ de $GL_n(K)$ com grau n sobre um dado corpo K formados de todas as matrizes $X_{n \times n}$, onde $X = (x_{i,j})$ com coeficientes em K que satisfazem $x = 0$ para todo $i, j, 1 \leq j < i \leq n$ e $x = 1$ para todo $i, 1 \leq i \leq n$. Esse subgrupo é chamado de **grupo unitriangular**.*

Alguns grupos como o grupo de tranças de Artin, o grupo simétrico e o grupo de tranças virtuais, que usaremos bastante nos próximos capítulos têm apresentações que são bem conhecidas na literatura.

Teorema 1.20. [Capítulo-3[13]] *Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin B_n é dada da seguinte maneira:*

Geradores: σ_i para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Relações:

(1) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;

(2) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, para $|i - j| \geq 2$.

Geometricamente os geradores de B_n podem ser vistos na Figura 1.1.

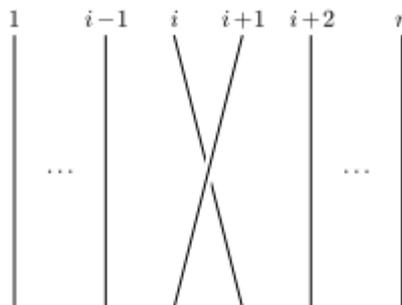


Figura 1.1: Gerador σ_i para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Note o gerador σ_i é a trança com um único cruzamento entre a i -ésima e a $(i+1)$ -ésima corda. Observe que seus inversos podem ser obtidos com o cruzamento inverso das cordas.

Exemplo 1.21. O grupo de tranças de Artin com 1 corda B_1 é o grupo trivial, ou seja,

$$B_1 = \{e\}.$$

Exemplo 1.22. Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin com 2 cordas B_2 é dado por

$$B_2 = \langle \sigma_1 \mid - \rangle.$$

O grupo de tranças de Artin com 2 cordas B_2 tem apenas um gerador e não tem relações, ou seja, é um grupo livre com um gerador isomorfo a \mathbb{Z} .

Exemplo 1.23. Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin com 3 cordas B_3 é dado por

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle.$$

O conjunto de geradores de B_3 é $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ e esse grupo tem apenas uma relação, seu conjunto de relações é $\{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\}$.

Exemplo 1.24. Uma apresentação para o grupo de tranças de Artin com 4 cordas B_4 é dado por

$$\begin{aligned} B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid & \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2; \\ & \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3; \\ & \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle. \end{aligned}$$

O conjunto de geradores de B_4 é $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e o conjunto de relações é $\{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2; \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3; \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1\}$.

Teorema 1.25. [Capítulo-3[13]] Uma apresentação para o grupo simétrico S_n é dada da seguinte maneira:

Geradores: ρ_i para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Relações:

(1) $\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;

(2) $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i$, para $|i - j| \geq 2$;

(3) $\rho_i^2 = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Um elemento de ordem par em S_n pode ser representado por uma quantidade par de transposições, uma transposição é uma permutação que troca a posição de dois elementos.

Definição 1.26. O grupo alternado A_n é o subgrupo do grupo simétrico S_n de todas as permutações pares .

O grupo alternado A_n é um subgrupo normal do grupo simétrico S_n para $n \geq 3$. Para $n \geq 5$, o grupo alternado A_n é um grupo simples. A prova desse fato pode ser encontrada no Teorema 3.11 de [15].

Teorema 1.27. [Teorema 1 [1]] O grupo VB_n admite a seguinte apresentação:

Geradores: σ_i, ρ_i com $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Relações:

- (1) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (2) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, para $|i - j| \geq 2$;
- (3) $\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (4) $\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i$, para $|i - j| \geq 2$;
- (5) $\rho_i^2 = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- (6) $\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (7) $\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i$, para $|i - j| \geq 2$.

Note que a relação (6) é equivalente à seguinte relação:

$$\rho_{i+1} \rho_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i.$$

Por outro lado, as relações $\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}$ e $\rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i$ não são válidas em VB_n . Geometricamente os geradores de VB_n podem ser vistos na Figura 1.2.

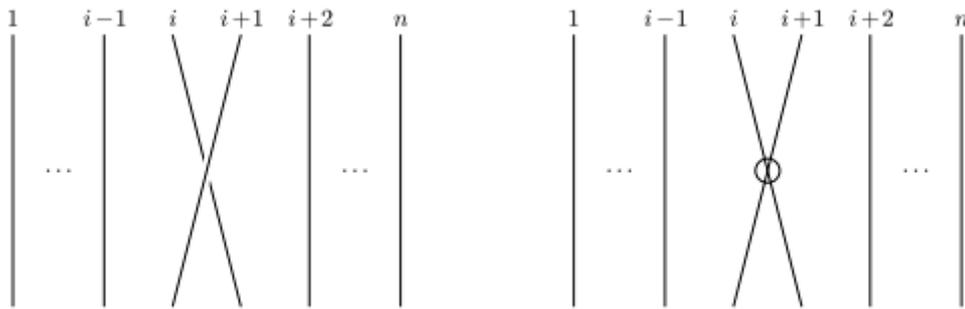


Figura 1.2: Geradores σ_i e ρ_i para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Note o gerador σ_i é a trança com um único cruzamento entre a i -ésima e a $(i + 1)$ -ésima corda e o gerador ρ_i é a trança com um único encontro entre a i -ésima e a $(i + 1)$ -ésima corda, onde não tem distinção de qual corda está passando por cima ou por baixo.

Exemplo 1.28. O grupo de tranças virtuais com 1 corda VB_1 é o grupo trivial, ou seja,

$$VB_1 = \{e\}.$$

Exemplo 1.29. Uma apresentação para o grupo de tranças virtuais com 2 cordas é dado por

$$BV_2 = \langle \sigma_1, \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 \rangle.$$

O conjunto de geradores de BV_2 é $\{\sigma_1, \rho_1\}$ e o conjunto de relações é $\{\rho_1^2 = 1\}$.

Exemplo 1.30. Uma apresentação para o grupo de tranças virtuais com 3 cordas é dado por

$$\begin{aligned} BV_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2 \mid & \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2; \\ & \rho_1\rho_2\rho_1 = \rho_2\rho_1; \\ & \rho_1\rho_2\sigma_1 = \sigma_2\rho_1\rho_2; \\ & \rho_1^2 = 1; \\ & \rho_2^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

O conjunto de geradores de BV_3 é $\{\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2\}$ e o conjunto de relações é $\{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2; \rho_1\rho_2\rho_1 = \rho_2\rho_1\rho_2; \rho_1\rho_2\sigma_1 = \sigma_2\rho_1\rho_2; \rho_1^2 = 1; \rho_2^2 = 1\}$.

Exemplo 1.31. Uma apresentação para o grupo de tranças virtuais com 4 cordas é dado por

$$\begin{aligned} BV_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \mid & \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2; \\ & \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3; \\ & \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1; \\ & \rho_1\rho_2\rho_1 = \rho_2\rho_1\rho_2; \\ & \rho_2\rho_3\rho_2 = \rho_3\rho_2\rho_3; \\ & \rho_1\rho_3 = \rho_3\rho_1; \\ & \rho_1\rho_2\sigma_1 = \sigma_2\rho_1\rho_2; \\ & \rho_2\rho_3\sigma_2 = \sigma_3\rho_2\rho_3; \\ & \rho_1^2 = 1; \\ & \rho_2^2 = 1; \\ & \rho_3^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Outras definições que são bastante relevantes nos próximos capítulos são de comutador, conjugado e subgrupo derivado.

Definição 1.32. Seja G um grupo. Dados a e b em G , o **comutador** de a e b é o elemento de G definido por

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Definição 1.33. Sejam x e y elementos de G . O **conjugado** de x por y é o elemento $x^y = y^{-1}xy$. Assim, podemos escrever $[x, y] = x^{-1}x^y$.

Definição 1.34. O subgrupo comutador é dado por

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

Este subgrupo também é chamado de **subgrupo derivado** de G .

O grupo quociente $G/[G, G]$ é chamado de **abelianizado** de G , e esse grupo quociente é abeliano.

Sempre que um grupo tem o subgrupo derivado igual a ele mesmo, o chamamos de **grupo perfeito**, ou seja,

$$G = G'.$$

Exemplo 1.35. O grupo alternado A_n é um grupo perfeito quando $n \geq 5$.

As próximas identidades são muito relevantes, pois, ajudam a entender como funcionam as operações envolvendo conjugados em um grupo.

Proposição 1.36. Sejam G um grupo e x, y e z elementos de G . As seguintes identidades de comutadores valem:

- (i) $x^y = x[x, y]$;
- (ii) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
- (iii) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$;
- (iv) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
- (v) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ (Identidade de Hall-Witt)
- (vi) $[x, z]^y = [x, z][x, z, y]$;
- (vii) $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, para qualquer homomorfismo φ de G .

As demonstrações dessas identidades podem ser encontradas em [11].

Definição 1.37. O **Centro** de um grupo G é dado por

$$Z(G) = \{z \in G \mid [z, g] = 1, \forall g \in G\}.$$

Agora traremos definições de algumas cadeias de subgrupos em que cada um é normal no próximo, e o quociente entre eles é abeliano.

Definição 1.38. Dado um grupo G , definimos a filtração

$$\Gamma_1(G) = G \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \dots$$

onde

$$\Gamma_1(G) = G$$

$$\Gamma_2(G) = [\Gamma_1(G), G] = [G, G]$$

\vdots

$$\Gamma_i(G) = [\Gamma_{i-1}(G), G]$$

como a *série central inferior* de G .

Definição 1.39. Um grupo G é dito *nilpotente* se ele contém uma série de subgrupos

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G e cada quociente G_{i+1}/G_i está contido no centro de G/G_i , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, ou seja,

$$G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i).$$

Agora elencaremos alguns resultados sobre grupos nilpotentes.

Proposição 1.40. Todo grupo abeliano é nilpotente.

Demonstração. De fato, supondo G um grupo abeliano, então facilmente podemos observar que a série $\{e\} = N_0 \leq N_1 = G$ é uma série central de subgrupos de G . \square

Um grupo é chamado de p -grupo se a ordem de cada um de seus elementos é uma potência de p , ou seja, se para cada elemento g em G , existe um número inteiro não negativo n tal que a ordem de g é igual a p^n .

Proposição 1.41. Seja G um p -grupo finito, então G é nilpotente.

Demonstração pode ser encontrada em [16].

Proposição 1.42. Seja G um grupo não trivial. Se $Z(G) = \{e\}$, então G não pode ser nilpotente.

Demonstração. De fato, Suponha por contradição a existência de uma série central

$$\{e\} = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \dots \leq N_n = G$$

de subgrupos de G . Como $N_1 \subseteq Z(G) = \{e\}$, devemos ter $N_1 = \{e\}$. Dessa maneira, G/N_1 é isomorfo a G e portanto seu centro também deve ser trivial. Note agora que $N_2/N_1 \subseteq Z(G/N_1) = \{\bar{e}\}$, donde temos que $N_2/N_1 = \{\bar{e}\}$, ou seja $N_2 = N_1 = \{e\}$. Usando esse mesmo argumento indutivamente obtemos que $N_k = \{e\}$, para todo $k = 1, \dots, n$, e então $\{e\} = N_n = G$, uma contradição. Assim, G não pode ser nilpotente. \square

Agora, vamos definir de forma geral o que é um grupo residualmente P , onde P é uma propriedade de grupos. Logo em seguida definiremos o que são os grupos residualmente nilpotentes.

Definição 1.43. Um grupo G é dito ser *residualmente P* se para qualquer elemento (não trivial) $x \in G$, existe um grupo H com a propriedade P e um homomorfismo sobrejetor $\Phi : G \rightarrow H$ tal que $\Phi(x) \neq 1$.

Proposição 1.44. Um grupo G é *residualmente nilpotente* se e somente se a interseção dos grupos que compõem sua série central inferior for o subgrupo trivial, ou seja,

$$\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}.$$

Demonstração. Suponha que G é residualmente nilpotente. Isso significa que para cada elemento não trivial $g \in G$, existe um número natural i tal que $g \notin \Gamma_i(G)$. Vamos supor o contrário, ou seja, suponha que exista um elemento g em G que está em todos os subgrupos $\Gamma_i(G)$. Nesse caso, g estaria em todos os subgrupos normais de G e, portanto, g estaria no centro de G .

Agora, vamos considerar o grupo $G/Z(G)$, onde $Z(G)$ é o centro de G . Como g está no centro de G , ele é identificado com o elemento neutro em $G/Z(G)$. No entanto, se G é residualmente nilpotente, então $G/Z(G)$ também é residualmente nilpotente, pois $Z(G)$ é um subgrupo normal de G e uma sucessão descendente de subgrupos normais de $G/Z(G)$ corresponde à sucessão descendente de subgrupos normais de G . Isso implica que em $G/Z(G)$, o elemento identificado com g não pode estar em todos os subgrupos normais de $G/Z(G)$.

Portanto, se G é residualmente nilpotente, não pode existir um elemento não trivial que está em $\Gamma_i(G)$, o que implica que

$$\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}.$$

Agora vamos mostrar recíproca. Suponha que $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$. Vamos mostrar que G é residualmente nilpotente construindo uma sucessão descendente de subgrupos normais de G .

Considere a seguinte sequência de subgrupos:

$$\Gamma_1(G) \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \Gamma_3(G) \supseteq \dots$$

Por hipótese, a interseção de todos esses subgrupos é igual ao grupo trivial, o que significa que existe um índice n tal que $\Gamma_n(G) = \{1\}$.

Agora, vamos considerar o grupo $G/\Gamma_n(G)$. Esse grupo é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma_n(G))$, o grupo de automorfismos de $\Gamma_n(G)$. Como $\Gamma_n(G)$ é nilpotente (pois

é trivial), $\text{Aut}(\Gamma_n(G))$ também é nilpotente. Além disso, como $G/\Gamma_n(G)$ é um subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma_n(G))$, ele também é nilpotente.

Agora, podemos repetir o processo no grupo $G/\Gamma_n(G)$, construindo a sucessão descendente de subgrupos normais e mostrando que esse grupo é nilpotente. Podemos continuar esse processo indefinidamente, construindo uma sucessão descendente de subgrupos normais de G , onde cada subgrupo é nilpotente. Isso mostra que G é residualmente nilpotente.

Portanto, se $\bigcap_{i \geq 1} \Gamma_i(G) = \{1\}$, então G é residualmente nilpotente. \square

Exemplo 1.45. O grupo \mathbb{Z}^k com $k \in \mathbb{N}$, é residualmente nilpotente.

Exemplo 1.46. Grupos livres finitamente gerados são residualmente nilpotente.

Esse fato pode ser encontrado na Seção 6.1.10 em [14]

Proposição 1.47. Seja G um grupo residualmente nilpotente. Então todo subgrupo de G é residualmente nilpotente.

Demonstração. Suponha que G tenha um subgrupo H que não seja residualmente nilpotente. Então a interseção dos grupos que compõem a serie central inferior de H é diferente de $\{e\}$. Note que a interseção dos grupos que compõem a serie central inferior de H estão contidos na interseção dos grupos que compõem a serie central inferior de G já que H é subgrupo de G . Sendo assim a interseção dos grupos que compõem a serie central inferior de G também é diferente de $\{e\}$. Contradição, pois, G é residualmente nilpotente. \square

Exemplo 1.48. O grupo de tranças de Artin B_n não é residualmente nilpotente.

Gorin e Lin obtiveram uma apresentação do subgrupo do comutador de B_n para $n \geq 3$ em [5]. Para $n \geq 5$, eles mostraram que $\Gamma_2(B_n) = [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$, ou seja, $\Gamma_2(B_n)$ é perfeito. Assim, segue que $\Gamma_2(B_n) = \Gamma_3(B_n)$, portanto, o B_n não é residualmente nilpotente já que a interseção dos $\Gamma_i(B_n)$ será sempre diferente de $\{1\}$.

No próximo capítulo mostraremos que o grupo de tranças virtuais pode ser escrito como produto semidireto de subgrupos que são mais simples. Com esse intuito, vamos elencar alguns conhecimentos básicos sobre sequências exatas curtas que nos ajudarão a compreender melhor alguns resultados.

1.2 Método Reidemeister-Schreier

Um método bastante relevante na determinação da apresentação de subgrupos a partir da apresentação de um grupo é chamado de método de Reidemeister-Schreier.

Esse método é usado para construir uma apresentação de um subgrupo H de um grupo G em termos de um conjunto de geradores S para G e um conjunto de relações R que descrevem como os elementos de H que interagem entre si e com os geradores de S .

O processo de construção começa escolhendo um conjunto de representantes de classes para G/H , ou seja, um conjunto de elementos de G que representam cada classe de H em G . Em geral, o método Reidemeister-Schreier é um procedimento algorítmico e este método é muito útil para estudar subgrupos de grupos finitamente apresentados.

Suponhamos que temos a seguinte apresentação do grupo G

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle \quad (1.1)$$

e tomemos H subgrupo de G .

Na tentativa de achar uma apresentação de subgrupo H de G , em termos de geradores e relações de G , dadas na apresentação, precisamos ter um conjunto de representantes das classes laterais à direita de H em G , em outras palavras, podemos ver M como um sistema completo de representantes das classes laterais à direita, tal que,

$$M = M_1, M_2, \dots \quad (1.2)$$

onde cada M_i deve ser escrito como uma palavra com x_1, \dots, x_n e seus inversos e a cardinalidade de M pode ser infinita.

Além disso, dado um elemento $g \in G$ e um conjunto de representantes à direita, conseguimos um método que permite encontrar explicitamente o representante correto de M_i , que representa Hg .

Vejamus um exemplo para facilitar o entendimento do método de Reidemeister-Schreier.

Exemplo 1.49. *Sejam G o grupo dado por*

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_1^3 = 1, \dots, x_n^3 = 1 \rangle \quad (1.3)$$

e G' o subgrupo comutador de G , podemos encontrar uma apresentação para G' em termos dos x_i e x_i^{-1} usando esse método.

Sabemos que $G' \triangleleft G$, assim, cada classe lateral à direita corresponde a um elemento do quociente de G/G' , sabemos também que G/G' é abeliano, sendo assim, todo elemento desse quociente pode ser escrito por:

$$G' x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (1.4)$$

onde $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n < 3$.

Consequentemente, o conjunto de 3^n elementos

$$M = \{x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \mid 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n < 3\} \quad (1.5)$$

é um conjunto completo de classes laterais à direita.

Pelo que fizemos em (1.2), todo elemento $g \in G$ pode ser escrito como

$$g = hM_i, \quad (1.6)$$

para algum $h \in H$ e $M_i \in M$. Assim, podemos escrever

$$M_i = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}, \quad (1.7)$$

onde $0 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ e $\epsilon_l = \pm 1$ e assumindo que $M_1 = 1$ é o representante da classe lateral de H .

Definição 1.50. O conjunto M é chamado de **sistema de Schreier**, ou **diagonal de Schreier**, se para cada M_i em (1.7) as seguintes $k - 1$ consecutivas partes iniciais de M_i ,

$$x_{i_1}^{\epsilon_1}, x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2}, x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} x_{i_3}^{\epsilon_3}, \dots, x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$$

estão em M .

Proposição 1.51. Suponhamos que G é um grupo com uma apresentação, se $H < G$, então existe um Sistema de Schreier de representantes de classes laterais à direita de H em G .

Sua prova pode ser encontrada na Proposição 6.1, Anexo I em [13].

Exemplo 1.52. (Continuação do Exemplo 1.49) Quando $n = 2$, M possui ordem 9 e temos que

$$M = 1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1^2x_2^2$$

é um Sistema de Schreier. Já

$$M' = 1, x_1^{-1}, x_2, x_1, x_2^2, x_1x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1^2x_2^2$$

não é um Sistema de Schreier, visto que, por exemplo, para o elemento $x_1^2x_2 \in M'$, seria necessário ter $x_1^2 \in M'$. Contudo, notemos que $G'x_1^{-1} = G'x_1^2$, se trocarmos $x_1^2x_2$ por $x_1^{-1}x_2$ e $x_1^2x_2^2$ por $x_1^{-1}x_2^2$, obtemos um Sistema de Schreier.

Agora, para um elemento $g \in G$, vamos denotar por \bar{g} a classe de representantes laterais à direita em M da classe Hg . Assim, se $g \in H$, então $\bar{g} = \{1\}$.

Proposição 1.53. Sejam G um grupo e M_i um sistema de Schreier temos que :

a) Para algum $g \in G$ e M_i , com $i = 1, 2, \dots, |M|$,

$$\varrho(M_i, g) = M_i g (\overline{M_i g})^{-1}$$

é elemento de H .

b) Para $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, [G : H]$, tomemos

$$y_{j,k} = \varrho(M_k, x_j).$$

Então, H é gerado por $y_{j,k}$ e seus inversos.

A demonstração desse fato pode ser encontrada na Proposição 6.2, Anexo I em [13].

A partir da proposição anterior obtemos os geradores de H , faltando apenas determinar suas relações, que veremos na próxima proposição. Antes precisamos definir a fórmula de reescrita.

Definição 1.54. Seja x uma palavra, tal que, $x = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p}$ com $\epsilon_k = \pm 1$, para $1 \leq k \leq p$ e $x_{i_j}^{\epsilon_j} x_{i_{j+1}}^{\epsilon_{j+1}} \neq 1$, para $1 \leq j \leq p - 1$ podemos escrever x como $x = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p}$ com $\epsilon_k = \pm 1$ e $l = 1, \dots, p$. O processo de reescrita, ou **fórmula de reescrita**, simbolizado por τ , é definido da seguinte forma:

$$\tau(x) = \tau(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_p}^{\epsilon_p}) = \varrho(1, x_{i_1}^{\epsilon_1}) \varrho(x_{i_1}^{\epsilon_1}, x_{i_2}^{\epsilon_2}) \varrho(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2}, x_{i_3}^{\epsilon_3}) \dots \varrho(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_{p-1}}^{\epsilon_{p-1}}, x_{i_p}^{\epsilon_p}).$$

Este processo tem o intuito de escrever determinados elementos de uma maneira adequada à vista da próxima proposição.

Proposição 1.55. Sejam G o grupo com a apresentação vista em (1.3) e $H < G$. Se $M = M_1 = 1, M_2, \dots$ é um sistema de Schreier, então H possui a seguinte apresentação:

$$H = \langle y_{j,k} \mid R_{l,k} \rangle,$$

para $j = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, m$ e $k = 1, 2, \dots, [G : H]$, onde

$$R_{l,k} = \tau(M_k R_l M_k^{-1}).$$

A demonstração pode ser encontrada no Teorema 6.3, Anexo I [13].

Dessa forma, conseguimos escrever uma apresentação para G' que é subgrupo de G no Exemplo (1.49) da seguinte maneira:

$$G' = \{a, b, c, d \mid -\}.$$

Mais detalhes sobre esse exemplo com esta apresentação pode ser visto no Apêndice I, Seção 6 de [13].

Capítulo 2

Propriedades combinatórias dos grupos de tranças virtuais VB_n

Nesse capítulo vamos observar de forma mais aprofundada a série central inferior do grupo de tranças virtuais e como alguns quocientes se comportam. Além disso, vamos estudar, o grupo de tranças puras virtuais VP_n e o fecho normal do grupo de tranças de Artin B_n no grupo de tranças virtuais VB_n , denotado por H_n . A principal referência para esse capítulo é [1].

2.1 Série central inferior do grupo de tranças virtuais

A série central inferior de um grupo é importante por algumas razões e, em particular, nos permite entender a estrutura interna do grupo de uma maneira sistemática. Ao decompor o grupo em subgrupos menores e mais simples, podemos analisar suas propriedades de forma mais clara.

Considerando VB_n o grupo de tranças virtuais com n cordas, a série central inferior é descrita como:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(VB_n) &= VB_n; \\ \Gamma_2(VB_n) &= [\Gamma_1(VB_n), VB_n] = [VB_n, VB_n]; \\ &\vdots \\ \Gamma_i(VB_n) &= [\Gamma_{i-1}(VB_n), VB_n],\end{aligned}$$

assim temos que,

$$VB_n \supseteq \Gamma_2(VB_n) \supseteq \dots$$

Proposição 2.1. *Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ os geradores usuais do grupo de tranças de Artin B_n e do grupo simétrico S_n , respectivamente. O homomorfismo $\iota: B_n \rightarrow VB_n$ definido por $\iota(\sigma_i) = \sigma_i$ e o homomorfismo $\vartheta: S_n \rightarrow VB_n$ definido por $\vartheta(\rho_i) = s_i$ estão bem definidos e são injetivos.*

Demonstração. Para mostrar que os homomorfismos $\iota: B_n \rightarrow VB_n$ e $\vartheta: S_n \rightarrow VB_n$ estão bem definidos e são injetivos, precisamos verificar algumas propriedades.

Levando em consideração as relações da apresentação de B_n dadas no Teorema 1.20 e o homomorfismo $\iota: B_n \rightarrow VB_n$ definido por $\iota(\sigma_i) = \sigma_i$, podemos aplicar ι as relações de B_n , tal que,

$$\begin{aligned} \iota(\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) &= \iota(\sigma_i) \iota(\sigma_j) \iota(\sigma_i^{-1}) \iota(\sigma_j^{-1}) \\ &= \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

para o primeiro tipo de relações, assim como,

$$\begin{aligned} \iota(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}) &= \iota(\sigma_i) \iota(\sigma_{i+1}) \iota(\sigma_i) \iota(\sigma_{i+1})^{-1} \iota(\sigma_i)^{-1} \iota(\sigma_{i+1})^{-1} \\ &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

para o segundo tipo de relações, portanto ι está bem definido. Uma prova para a injetividade de ι pode ser visto em [8].

Tomando o homomorfismo $\vartheta: S_n \rightarrow VB_n$ dado por $\vartheta(\rho_i) = s_i$ temos que está bem definido, pois, de forma análoga ao homomorfismo ι , se tomarmos as relações da apresentação de S_n dada no Teorema 1.25 e aplicar μ nessas relações temos que,

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho_i \rho_j \rho_i^{-1} \rho_j^{-1}) &= \vartheta(\rho_i) \vartheta(\rho_j) \vartheta(\rho_i^{-1}) \vartheta(\rho_j^{-1}) \\ &= s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

para o primeiro tipo de relações, assim como

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho_i \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1}^{-1}) &= \vartheta(\rho_i) \vartheta(\rho_{i+1}) \vartheta(\rho_i) \vartheta(\rho_{i+1})^{-1} \vartheta(\rho_i)^{-1} \vartheta(\rho_{i+1})^{-1} \\ &= s_i s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

para o segundo tipo de relações, assim como

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho_i^2) &= \vartheta(\rho_i) \vartheta(\rho_i) \\ &= s_i s_i \\ &= s_i^2 \\ &= e \end{aligned}$$

Agora, considere o homomorfismo

$$\mu : VB_n \rightarrow S_n$$

definido por, $\mu(\sigma_i) = 1$ e $\mu(\rho_i) = s_i$ onde $i = 1, 2, \dots, n-1$, este homomorfismo será estudado na Seção 2.2.2.

Considere,

$$1 \rightarrow B_n \xrightarrow{\iota} VB_n \xrightarrow{\mu} S_n \rightarrow 1$$

note que o homomorfismo $\vartheta : S_n \rightarrow VB_n$ é uma seção para μ , pois, $\mu \circ \vartheta = e$, portanto ϑ é injetivo e o subgrupo gerado por $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ é isomorfo a S_n . \square

Proposição 2.2. *Seja VB_n o grupo de tranças virtuais com n cordas, temos que as seguintes afirmações são válidas :*

- (i) O grupo VB_2 é isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ e é residualmente nilpotente.
- (ii) O grupo $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 2$.
- (iii) O grupo $\Gamma_2(VB_3)/\Gamma_3(VB_3)$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .
- (iv) O grupo $\Gamma_2(VB_n)$ é igual a $\Gamma_3(VB_n)$ quando $n \geq 4$, então $\Gamma_2(VB_n) = \Gamma_3(VB_n)$.
- (v) O grupo VB_n não é residualmente nilpotente quando $n \geq 3$.

Demonstração.

(i) Sejam as apresentações de $VB_2 = \langle \sigma_1, \rho_1 \mid \rho_1^2 = 1 \rangle$ e de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 = 1 \rangle$. Note que podemos construir uma aplicação

$$\phi : VB_2 \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$$

tal que, $\phi(\sigma_1) = a$ e $\phi(\rho_1) = b$. Para provar o isomorfismo basta verificar que ϕ é um homomorfismo bijetor.

Quando aplicamos ϕ na relação $\rho_1^2 = 1$ de VB_2 temos que,

$$\phi(\rho_1^2) = \phi(\rho_1 \rho_1) = \phi(\rho_1)\phi(\rho_1) = bb = b^2 = 1,$$

portanto temos um homomorfismo, assim como existe uma aplicação

$$\phi' : \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \rightarrow VB_2$$

tal que, $\phi'(a) = \sigma_1$ e $\phi'(b) = \rho_1$. Quando aplicamos ϕ' na relação $b^2 = 1$ de VB_2 temos que,

$$\phi'(b^2) = \phi'(bb) = \phi'(b)\phi'(b) = \rho_1 \rho_1 = \rho_1^2 = 1,$$

portanto temos outro homomorfismo. Note que se fizermos a composição de ϕ com ϕ' temos $\phi \circ \phi' = e = \phi \circ \phi$, assim temos um isomorfismo entre VB_2 e $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$.

Agora, note que o grupo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ pode ser percebido como um subgrupo de $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ que é residualmente nilpotente, então VB_2 é residualmente nilpotente.

(ii) Note que $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n) = VB_n/[VB_n, VB_n]$ é um grupo abeliano gerado por σ_i e ρ_j , onde ρ_j tem ordem 2. Observe também que σ_i gera o grupo cíclico \mathbb{Z} e ρ_j gera o grupo cíclico \mathbb{Z}_2 , portanto, pelo teorema da decomposição dos grupos abelianos finitamente gerados (Teorema 9.1.1, capítulo 9 [5]), temos que $\Gamma_1(VB_n)/\Gamma_2(VB_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

(iii) Vamos considerar o grupo $VB_3/\Gamma_3(VB_3)$ que é gerado por

$$\overline{\sigma}_1 = \sigma_1 \Gamma_3(VB_3),$$

$$\overline{\sigma}_2 = \sigma_2 \Gamma_3(VB_3),$$

$$\overline{\rho}_1 = \rho_1 \Gamma_3(VB_3),$$

$$\overline{\rho}_2 = \rho_2 \Gamma_3(VB_3).$$

Note que podemos escrever

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = [\sigma_1 \sigma_2] \sigma_1$$

e também

$$\rho_2 = \rho_1^{-1} \rho_2^{-1} \rho_2 \rho_1 \rho_2 = \rho_1^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2 \rho_1 = [\rho_1 \rho_2] \rho_1,$$

consequentemente, $\overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_1$ e $\overline{\rho}_2 = \overline{\rho}_1$ em $VB_3/\Gamma_3(VB_3)$, já que $[\sigma_1 \sigma_2]$ e $[\rho_1 \rho_2] \in \Gamma_3(VB_3)$. Observe que em VB_3 , temos que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_1 \\ [\sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1 \sigma_2^{-1} \end{aligned}$$

então,

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \in \Gamma_3(VB_3).$$

Assim, temos que

$$VB_3/\Gamma_3(VB_3) = \langle \overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1 \rangle$$

e esse grupo é nilpotente de grau 2, portanto o subgrupo comutador $\Gamma_2(VB_3/\Gamma_3(VB_3))$ é cíclico.

No grupo $\Gamma_2(VB_3/\Gamma_3(VB_3))$, usando as propriedades de comutadores da Proposição 1.36, temos que,

$$\begin{aligned} [\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1^2] &= [\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_1] \\ &= [\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1][\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1] \\ &= [\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1]^2, \end{aligned}$$

observe também que,

$$\begin{aligned} [\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1^2] &= \overline{\sigma}_1^{-1} \overline{\rho}_1^{-2} \overline{\sigma}_1 \overline{\rho}_1^2 \\ &= \overline{\sigma}_1^{-1} \overline{\sigma}_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Com isso podemos concluir que o subgrupo $\Gamma_2(VB_3/\Gamma_3(VB_3))$ é gerado por $[\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1]$ e tem ordem 2.

Agora vamos mostrar que $[\overline{\sigma}_1, \overline{\rho}_1] \neq 1$.

Para isso vamos considerar o grupo unitriangular $UT_3(\mathbb{Z})$ gerado por duas transvecções do tipo $t_{ij}(1) = e + e_{ij}$, onde e representa a matriz identidade 3×3 e e_{ij} é uma matriz 3×3 com todos os elementos iguais a zero, exceto pelo elemento na posição (i, j) que é igual a 1. Essas transvecções são transformações lineares que adicionam a matriz identidade a matriz que foi decrita acima.

Explicitamente essas transvecções são:

$$t_{12}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$t_{23}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este é um grupo nilpotente de classe 2.

Podemos construir um homomorfismo φ de $VB_3/\Gamma_3(VB_3)$ no grupo unitriangular $UT_3(\mathbb{Z}_2)$, considerando $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$,

$$\varphi(\overline{\sigma}_1) = t_{12}(\overline{1}) = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} & 0 \\ 0 & \overline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{1} \end{bmatrix} \text{ e } \varphi(\overline{\rho}_1) = t_{23}(\overline{1}) = \begin{bmatrix} \overline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{1} & \overline{1} \\ 0 & 0 & \overline{1} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\varphi([\sigma_1, \rho_1]) &= [t_{12}(\bar{1}), t_{23}(\bar{1})] \\
&= \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{1} & \overline{-1} & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & \overline{-1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{1} & \overline{-1} & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & \overline{-1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix} \\
&= t_{13}(\bar{1}) \neq e.
\end{aligned}$$

Portanto, $[\sigma_1, \rho_1] \neq 1$ em $VB_3/\Gamma_3(VB_3)$, então $\Gamma_2(VB_3)/\Gamma_3(VB_3) = \Gamma_2(VB_3/\Gamma_3(VB_3))$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

(iv) Agora, para provar que quando $n \geq 4$, $\Gamma_2(VB_n) = \Gamma_3(VB_n)$, vamos denotar $\Gamma_i = \Gamma_i(VB_n)$ e assim considerar a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \Gamma_2/\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_1/\Gamma_3 \xrightarrow{p} \Gamma_1/\Gamma_2 \rightarrow 1.$$

Olhando a relação (1) da apresentação de VB_n no Teorema 1.27, em Γ_1/Γ_3 temos que uma vez que qualquer gerador σ_i em Γ_1/Γ_3 é projetado no mesmo elemento de Γ_1/Γ_2 para cada $1 \leq i \leq n-1$, e existe um $t_i \in \Gamma_2/\Gamma_3$ (com $t_1 = 1$) de modo que $\sigma_i = t_i \sigma_1$.

Projetando a relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ de VB_n em Γ_1/Γ_3 , temos que:

$$t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 = t_{i+1} \sigma_1 t_i \sigma_1 t_{i+1} \sigma_1.$$

Agora, note que os t_i são centrais em Γ_1/Γ_3 , então $t_i = t_{i+1}$, e como $t_1 = 1$, obtemos que $\sigma_1 = \dots = \sigma_{n-1}$ em Γ_1/Γ_3 .

De maneira análoga, olhando a relação (3) da apresentação de VB_n no Teorema 1.27, em Γ_1/Γ_3 temos que uma vez que qualquer gerador ρ_i em Γ_1/Γ_3 é projetado no mesmo elemento de Γ_1/Γ_2 para cada $1 \leq i \leq n-1$, e existe um $t_i \in \Gamma_2/\Gamma_3$ (com $t_1 = 1$) de modo que $\rho_i = t_i \rho_1$.

Projetando a relação $\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}$ de VB_n em Γ_1/Γ_3 , temos que:

$$t_i \rho_1 t_{i+1} \rho_1 t_i \rho_1 = t_{i+1} \rho_1 t_i \rho_1 t_{i+1} \rho_1.$$

Agora, note que os t_i são centrais em Γ_1/Γ_3 , então $t_i = t_{i+1}$, e como $t_1 = 1$, obtemos que $\rho_i = \cdots = \rho_{n-1}$ em Γ_1/Γ_3 .

Observe também que da relação $\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}$ de VB_n , é deduzida como $\rho_1 \sigma_1 = \sigma_1 \rho_1$ em Γ_1/Γ_3 , ou seja, eles comutam. Portanto, o homomorfismo sobrejetivo p é de fato um isomorfismo.

(V) Conseguimos perceber que o grupo VB_n contém B_n , que é um grupo que não é residualmente nilpotente, e como pela Proposição 1.47 todo subgrupo de um grupo residualmente nilpotente é residualmente nilpotente, então o grupo VB_n é não residualmente nilpotente. \square

Lema 2.3. *Seja $\Gamma_2(S_n)$, o grupo comutador de S_n , quando $n \geq 5$, temos que $\Gamma_2(S_n) = A_n$.*

Demonstração. É conhecido que S_n tem apenas três subgrupos normais, que são $\{e\}$, A_n e S_n assim temos apenas essas possibilidades para o $\Gamma_2(S_n)$. Se $\Gamma_2(S_n)$ fosse trivial, ao tomarmos o abelianizado de S_n teríamos $S_n/\Gamma_2(S_n) = S_n$, mas S_n não é abeliano. Caso $\Gamma_2(S_n) = S_n$ teríamos que o abelianizado de S_n seria trivial, mas isso não faz sentido já que existem elementos que não comutam em S_n . Então nos resta que $\Gamma_2(S_n) = A_n$. \square

Observação 2.4. *Note que, como A_n é perfeito, temos que $\Gamma_2(S_n)$ também é perfeito para $n \geq 5$.*

O grupo $\Gamma_2(B_n)$ é perfeito, ou seja, $\Gamma_2(B_n) = [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$ para $n \geq 5$. A prova desse fato pode ser encontrada na Página 7 de [10]. A seguir temos um resultado análogo que vale para o grupo $\Gamma_2(VB_n)$.

Proposição 2.5. *O grupo $\Gamma_2(VB_n)$ é perfeito para $n \geq 5$.*

Demonstração. Vamos considerar o comutador $[u, v] \in \Gamma_2(VB_n)$, para provar nossa afirmação precisamos mostrar que $[u, v] \in \Gamma_3(VB_n)$. Como VB_n é gerado por cópias de B_n e S_n , podemos utilizar as identidades de comutadores:

$$[ab, c] = [a, c]^b [b, c];$$

$$[a, bc] = [a, c][a, b]^c;$$

$$[a, b] = [b, a]^{-1};$$

$$[a^{-1}, b] = [b, a]^{a^{-1}},$$

e representar o comutador $[u, v]$ como um produto de comutadores do tipo

$$[\sigma_i, \sigma_j]^\alpha;$$

$$[\rho_i, \rho_j]^\beta;$$

$$[\sigma_i, \rho_j]^\lambda;$$

com $1 \leq i, j \leq n - 1$, e $\alpha, \beta, \lambda \in VB_n$.

Observe que como os grupos $\Gamma_2(B_n)$ e $\Gamma_2(S_n)$ são perfeitos para $n \geq 5$ então $[\sigma_i, \sigma_j] \in [\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$ assim como $[\rho_i, \rho_j] \in [\Gamma_2(S_n), \Gamma_2(S_n)]$, com isso $[\sigma_i, \sigma_j]^\alpha$ e $[\rho_i, \rho_j]^\beta$ pertencem a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Portanto só é necessário provar que os comutadores do tipo $[\sigma_i, \rho_j]$ pertencem a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Se considerarmos $[\sigma_i, \rho_j]$ quando $|i - j| > 1$, então $[\sigma_i, \rho_j] = 1$. Porém, quando $|i - j| \leq 1$, existe um par de índices k, l com $1 \leq k, l \leq n - 1$ e $|k - l| > 1$ e dois elementos $c_{i,k}$ e $d_{j,l}$ onde $c_{i,k} \in \Gamma_2(B_n)$ e $d_{j,l} \in \Gamma_2(S_n)$ de tal forma que podemos escrever

$$\sigma_i = c_{i,k}\sigma_k$$

e

$$\rho_j = d_{j,l}\rho_l.$$

Assim,

$$[\sigma_i, \rho_j] = [c_{i,k}\sigma_k, d_{j,l}\rho_l].$$

Usando as identidades dos comutadores podemos escrever que

$$\begin{aligned} [c_{i,k}\sigma_k, d_{j,l}\rho_l] &= [c_{i,k}\sigma_k, \rho_l][c_{i,k}\sigma_k, d_{j,l}]^{\rho_l} \\ &= [c_{i,k}, \rho_l]^{\sigma_k}[\sigma_k, \rho_l]([c_{i,k}, d_{j,l}]^{\sigma_k}[\sigma_k, d_{j,l}])^{\rho_l} \\ &= [c_{i,k}, \rho_l]^{\sigma_k}[c_{i,k}, d_{j,l}]^{\sigma_k\rho_l}[\sigma_k, d_{j,l}]^{\rho_l}. \end{aligned}$$

Analisando o resultado, é claro que $[c_{i,k}, d_{j,l}] \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$, e portanto, $[c_{i,k}, d_{j,l}]^{\sigma_k\rho_l}$ também pertence a $[\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Consideremos agora o comutador $[c_{i,k}, \rho_l]^{\sigma_k}$ que pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} [c_{i,k}, \rho_l]^{\sigma_k} &= \sigma_k^{-1}c_{i,k}^{-1}\rho_l^{-1}c_{i,k}\rho_l\sigma_k \\ &= \sigma_k^{-1}c_{i,k}^{-1}\rho_l c_{i,k}\rho_l\sigma_k \\ &= (c_{i,k}^{-1}c_{i,k}^{\rho_l})^{\sigma_k}, \end{aligned}$$

como $c_{i,k}$ está em $\Gamma_2(B_n)$ que é perfeito, então $c_{i,k}$ está em $[\Gamma_2(B_n), \Gamma_2(B_n)]$, e portanto, $[c_{i,k}, \rho_l]^{\sigma_k} \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Agora vamos observar o comutador $[\sigma_k, d_{j,l}]^{\rho_l}$ que pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} [\sigma_k, d_{j,l}]^{\rho_l} &= \rho_l^{-1}\sigma_k^{-1}d_{j,l}^{-1}\sigma_k d_{j,l}\rho_l \\ &= ((d_{j,l}^{-1})^{\sigma_k}d_{j,l})^{\rho_l}, \end{aligned}$$

analogamente como $d_{j,l}$ está em $\Gamma_2(S_n)$ que é perfeito, então $d_{j,l}$ também está em $[\Gamma_2(S_n), \Gamma_2(S_n)]$ e, portanto, $[\sigma_k, d_{j,l}]^{\rho_l} \in [\Gamma_2(VB_n), \Gamma_2(VB_n)]$.

Logo, $\Gamma_2(VB_n)$ é perfeito para $n \geq 5$. □

2.2 Subgrupos destacados de VB_n

Nessa seção falaremos de forma mais detalhada de dois subgrupos do grupo de tranças virtuais, o grupo de tranças puras virtuais VP_n e o grupo H_n . Mostraremos suas respectivas apresentações e a cara dos seus geradores de forma algébrica e geométrica, também falaremos um pouco da serie central de H_n .

2.2.1 Tranças puras virtuais VP_n

Vamos agora definir o grupo de **tranças puras virtuais** que é o núcleo de um homomorfismo entre o grupo das tranças virtuais e o grupo simétrico.

Seja o homomorfismo

$$v: VB_n \rightarrow S_n$$

tal que,

$$v(\sigma_i) = v(\rho_i) = \rho_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$, onde S_n é gerado por ρ_i .

Definição 2.6. O $\ker v$ é chamado de grupo de tranças puras virtuais com n cordas e é denotado por VP_n .

Os elementos de VP_n são da seguinte maneira:

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\lambda_{i,j} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1}, \text{ com } 1 \leq i < j-1 \leq n-1;$$

$$\lambda_{j,i} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i+1,i} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1} \text{ com } 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

Esses elementos podem ser percebidos geometricamente na Figura 2.1.

O próximo lema nos mostra como funciona conjugar os elementos do grupo de tranças puras virtuais com todos os geradores do tipo ρ_i dos grupo de tranças virtuais.

Lema 2.7. Sejam $\rho \in Vb_n$ e $\lambda_{i,j} \in VP_n$ com $1 \leq i < j \leq n$, as seguintes conjugações são válidas no grupo VP_n :

(i) Quando $k < i-1, i < k < j-1$ e $k > j$, temos que,

$$\lambda_{i,j}^{\rho_k} = \lambda_{i,j} \text{ e } \lambda_{j,i}^{\rho_k} = \lambda_{j,i}.$$

(ii) Temos que,

$$\lambda_{i,j}^{\rho_{i-1}} = \lambda_{i-1,j} \text{ e } \lambda_{j,i}^{\rho_{i-1}} = \lambda_{j,i-1}.$$

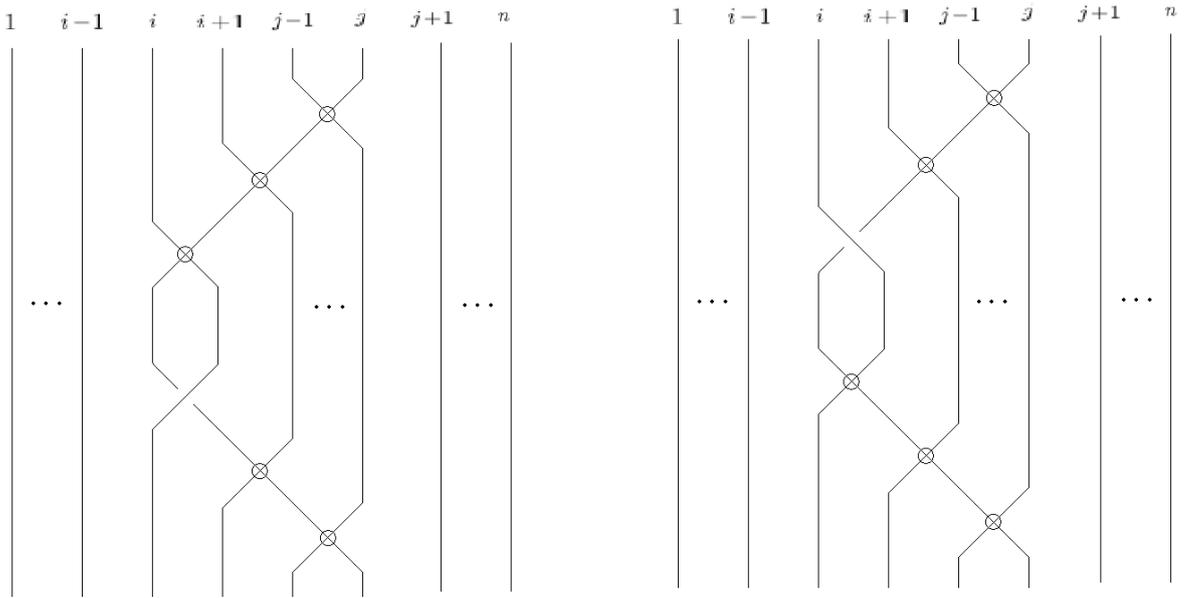


Figura 2.1: Elementos $\lambda_{i,j}$ e $\lambda_{j,i}$ respectivamente com $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$.

(iii) Quando $i < j - 1$, temos que,

$$\lambda_{i,i+1}^{\rho_i} = \lambda_{i+1,i}$$

$$\lambda_{i+1,i}^{\rho_i} = \lambda_{i,i+1}$$

$$\lambda_{i,j}^{\rho_i} = \lambda_{i+1,j}$$

$$\lambda_{j,i}^{\rho_i} = \lambda_{j,i+1}.$$

(iv) Quando $j > i + 1$, temos que, $\lambda_{i,j}^{\rho_{j-1}} = \lambda_{i,j-1} \lambda_{j,i}^{\rho_{j-1}} = \lambda_{j-1,i}$.

(v) Temos $\lambda_{i,j}^{\rho_j} = \lambda_{i,j+1}$ e $\lambda_{j,i}^{\rho_j} = \lambda_{j+1,i}$.

Demonstração. Vamos considerar nesse primeiro momento apenas as regras que envolvem $\lambda_{i,j}$ para $i < j$. Observe que

$$\lambda_{i,j} = \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1}.$$

Quando $k < i - 1$ ou $k > j$, levando em consideração as relações dadas na apresentação de VB_n no Teorema 1.27, notamos que ρ_k permuta com $\rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1}$ e com σ_i , assim temos que ρ_k permuta com $\lambda_{i,j}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j}^{\rho_k} &= \rho_k \lambda_{i,j} \rho_k \\ &= \rho_k \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1} \rho_k \\ &= \rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1} \rho_k \rho_k \\ &= \lambda_{i,j}. \end{aligned}$$

Quando $i < k < j - 1$ temos que,

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,j}^{\rho_k} &= \rho_k \lambda_{i,j} \rho_k \\
&= \rho_k (\rho_{j-1} \dots \rho_{k-2} \rho_{k-1} \rho_k \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_k \rho_{k+1} \lambda_{k+2} \dots \rho_{j-1}) \rho_k \\
&= \rho_{j-1} \dots \rho_{k+2} (\rho_k \rho_{k+1} \rho_k) \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots (\rho_k \rho_{k+1} \rho_k) \rho_{k+2} \dots \rho_{j-1} \\
&= \rho_{j-1} \dots \rho_{k+2} (\rho_{k+1} \rho_k \rho_{k+1}) \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots (\rho_{k+1} \rho_k \rho_{k+1}) \rho_{k+2} \dots \rho_{j-1} \\
&= \rho_{j-1} \dots \rho_{k+1} \rho_k (\rho_{k+1} \rho_{k-1} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{k-1} \rho_{k+1}) \rho_k \rho_{k+1} \dots \rho_{j-1} \\
&= \rho_{j-1} \dots \rho_k (\rho_{k+1} \lambda_{i,k} \rho_{i+1}) \rho_k \dots \rho_{j-1}
\end{aligned}$$

em vista do caso anterior, temos que

$$\rho_{k+1} \lambda_{i,k} \rho_{k+1} = \lambda_{i,k},$$

e assim,

$$\rho_{j-1} \dots \rho_k (\rho_{k+1} \lambda_{i,k} \rho_{k+1}) \rho_k \dots \rho_{j-1} = \lambda_{i,j}.$$

Portanto, vale o item (i).

Para provar o item (ii), vamos considerar

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,j}^{\rho_{i-1}} &= \rho_{i-1} \lambda_{i,j} \rho_{i-1} \\
&= \rho_{i-1} (\rho_{j-1} \rho_{j-2} \dots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \dots \rho_{j-2} \rho_{j-1}) \rho_{i-1} \\
&= \rho_{j-2} \dots \rho_{i+2} \rho_{i+1} (\rho_{i-1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i-1}) \rho_{i+1} \rho_{i+2} \dots \rho_{j-2} \\
&= \lambda_{i-1,j},
\end{aligned}$$

pois, podemos reescrever

$$\rho_{i-1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i-1} = \rho_{i-1} \rho_i \sigma_i^{-1} \rho_{i-1} = \rho_{i-1} \rho_i \sigma_i^{-1} \rho_{i-1} \rho_i \rho_i,$$

e assim usar a relação $\sigma_i^{-1} \rho_{i-1} \rho_i = \rho_{i-1} \rho_i \sigma_{i-1}^{-1}$ que é consequência das relações de VB_n e teremos,

$$\begin{aligned}
\rho_{i-1} \rho_i (\sigma_i^{-1} \rho_{i-1} \rho_i) \rho_i &= \rho_{i-1} \rho_i (\rho_{i-1} \rho_i \sigma_{i-1}^{-1}) \rho_i \\
&= (\rho_i \rho_{i-1} \rho_i) \rho_i \sigma_{i-1}^{-1} \rho_i \\
&= \rho_i \lambda_{i-1,i} \rho_i
\end{aligned}$$

e desta maneira, provamos o item (ii).

Para mostrar o item (iii), observe que as primeiras fórmulas decorrem diretamente das definições de $\lambda_{i,i+1}$ e $\lambda_{i+1,i}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,i+1}^{\rho_i} &= \rho_i \rho_i \sigma_i^{-1} \rho_i \\
&= \sigma_i^{-1} \rho_i \\
&= \lambda_{i+1,i}
\end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1,i}^{\rho_i} &= \rho_i \rho_i \sigma_i^{-1} \rho_i \rho_i \\ &= \rho_i \sigma_i^{-1} \\ &= \lambda_{i,i+1}.\end{aligned}$$

Agora considere,

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}^{\rho_i} &= \rho_i \lambda_{i,j} \rho_i \\ &= \rho_i (\rho_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \rho_{j-1}) \rho_i \\ &= \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+2} (\rho_i \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \rho_i) \rho_{i+2} \cdots \rho_{j-1}\end{aligned}$$

reescrevendo a expressão entre parênteses temos,

$$\begin{aligned}\rho_i \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i \\ &= \rho_i \rho_{i+1} \rho_i (\sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i) \\ &= \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \rho_i \sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i \rho_{i+1} (\rho_i \rho_{i+1} \rho_i) \sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_i \rho_{i+1} \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1} \\ &= \rho_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1},\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}^{\rho_i} &= \rho_i \lambda_{i,j} \rho_i \\ &= \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+2} (\rho_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1}) \rho_{i+2} \cdots \rho_{j-1} \\ &= \lambda_{i+1,j}\end{aligned}$$

desta maneira a relação desejada é provada.

Para provar o item (iv) basta observar que

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}^{\rho_{j-1}} &= \rho_{j-1} \lambda_{i,j} \rho_{j-1} \\ &= \rho_{j-1} (\rho_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \rho_{j-1}) \rho_{j-1} \\ &= \lambda_{i,j-1}\end{aligned}$$

e assim o resultado segue.

O item (v) é provado como uma consequência imediata da definição de $\lambda_{i,j}$.

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j}^{\rho_j} &= \rho_j \rho_i \lambda_{i,j} \rho_j \\ &= \rho_j (\rho_{j-1} \rho_{j-2} \cdots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-2} \rho_{j-1}) \rho_j \\ &= \lambda_{i,j-1}.\end{aligned}$$

□

Lembremos que, uma ação de grupos α é transitiva quando qualquer elemento de um conjunto X pode ser levado a qualquer outro elemento do conjunto, isto é, quando, para quaisquer $x, y \in X$, existe g pertencente ao grupo tal que $\alpha(g, x) = y$.

Corolário 2.8. O grupo S_n atua por conjugação no conjunto $\{\lambda_{k,l} \mid 1 \leq k+1 \leq n\}$. Esta ação é transitiva.

Teorema 2.9. O grupo VP_n admite uma apresentação com os geradores do tipo $\{\lambda_{k,l}\}$ onde $1 \leq k \neq l \leq n$ e as seguintes relações:

$$\lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j}; \quad (2.1)$$

$$\lambda_{k,i}\lambda_{k,j}\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}\lambda_{k,j}\lambda_{k,i}, \quad (2.2)$$

onde as letras distintas representam índices distintos.

Demonstração. Usaremos o método Reidemeister-Schreier para essa demonstração. O primeiro passo é encontrar um conjunto de representantes das classes de VP_n em VB_n .

Seja,

$$\Lambda_n = \{(\rho_{i_1}, \rho_{i_1-1}, \dots, \rho_{i_1-r_1})(\rho_{i_2}, \rho_{i_2-1}, \dots, \rho_{i_2-r_2}) \dots (\rho_{i_p}, \rho_{i_p-1}, \dots, \rho_{i_p-r_p})\}$$

onde, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n-1, \leq r_j < i_j$, esse conjunto de representantes de classes Λ_n é o que chamamos de conjunto de Schreier.

Assim podemos definir a função

$$\circ : VB_n \rightarrow \Lambda_n$$

que leva cada elemento $w \in VB_n$ no seu representante \bar{w} em Λ_n . Deste modo, o elemento $w\bar{w}^{-1}$ pertence a VP_n .

O grupo VP_n é gerado por elementos da forma,

$$s_{\lambda,a} = \lambda a (\bar{\lambda a})^{-1},$$

onde λ está no conjunto Λ_n e a está no conjunto de geradores de VB_n .

É fácil estabelecer que $s_{\lambda,\rho_i} = e$ para qualquer representante $\lambda \in \Lambda_n$ e qualquer gerador ρ_i .

Agora considere os geradores

$$s_{\lambda,\sigma_i} = \lambda \sigma_i (\bar{\lambda \sigma_i})^{-1}.$$

Quando $\lambda = e$, percebemos que

$$s_{e,\sigma_i} = \sigma_i \rho_i = \lambda_{i,i+1}^{-1}.$$

Note que $\lambda\rho_i$ é igual a $\overline{\lambda\rho_i}$ em S_n , portanto

$$s_{\lambda,\sigma_i} = \lambda(\sigma_i\rho_i)\lambda^{-1}.$$

Pelo Lema 2.7 temos que cada gerador s_{λ,σ_i} é igual a algum λ_{kl} , onde $1 \leq k \neq l \leq n$ e a recíproca também é verdade, ou seja, temos λ_{kl} é igual a algum gerador s_{λ,σ_i} .

Para encontrar as relações de VP_n definimos um processo de reescrita τ . Isso nos permite reescrever uma palavra que está escrita no geradores de VB_n e apresentar um elemento em VP_n como uma palavra escrita em função dos geradores de VP_n .

Vamos associar à palavra reduzida

$$u = a_1^{\epsilon_1}, a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_v^{\epsilon_v},$$

a palavra

$$\tau(u) = s_{k_1, a_1}^{\epsilon_1}, s_{k_2, a_2}^{\epsilon_2}, \dots, s_{k_v, a_v}^{\epsilon_v}$$

nos geradores de VP_n , de tal forma que $\epsilon = \pm 1$ e $a_i \in \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, onde k_j é um representante do $(j-1)$ -ésimo segmento inicial da palavra u se $\epsilon_j = 1$ e k_j é um representante do j -ésimo segmento inicial da palavra u se $\epsilon_j = -1$.

O grupo VP_n é obtido por relações do tipo,

$$r_{\mu, \lambda} = \tau(\lambda r_{\mu} \lambda^{-1})$$

com $\lambda \in \Lambda_n$ e r_{μ} é relação de VB_n .

Vamos denotar por $r_1 = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$ como a primeira relação de VB_n . Então,

$$\begin{aligned} r_{1, \epsilon} = \tau(r_1) &= \tau(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}) \\ &= s_{e, \sigma_i} s_{\overline{\sigma_i}, \sigma_{i+1}} s_{\overline{\sigma_i \sigma_{i+1}}, \sigma_{i+1}} s_{\overline{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1}}, \sigma_{i+1}}^{-1} s_{\overline{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}}, \sigma_i}^{-1} s_{\overline{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}}, \sigma_{i+1}}^{-1} \\ &= \lambda_{i, i+1}^{-1} (\rho_i \lambda_{i+1, i+2}^{-1} \rho_i) (\rho_i \rho_{i+1} \lambda_{i, i+1}^{-1} \rho_{i+1} \rho_i) (\rho_{i+1} \rho_i \lambda_{i+1, i+2} \rho_i \rho_{i+1}) (\rho_{i+1} \lambda_{i, i+1} \rho_{i+1}) \lambda_{i+1, i+2}. \end{aligned}$$

Usando as regras de conjugações do Lema 2.7 obtemos

$$r_{1, \epsilon} = \lambda_{i, i+1}^{-1} \lambda_{i, i+2}^{-1} \lambda_{i+1, i+2}^{-1} \lambda_{i, i+1} \lambda_{i, i+2} \lambda_{i+1, i+2}.$$

Portanto, a relação

$$\lambda_{i, i+1} (\lambda_{i, i+2} \lambda_{i+1, i+2}) = (\lambda_{i, i+1} \lambda_{i, i+2}) \lambda_{i+1, i+2}$$

é cumprida em VP_n . As relações restantes $r_{1, \lambda}$ com $\lambda \in \Lambda_n$ podem ser obtidas a partir desta relação usando a conjugação por λ^{-1} e obtemos as relações do tipo (2.2).

Considerando a próxima relação de VB_n ,

$$r_2 = \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}, |i - j| \leq 2$$

podemos novamente aplicar o processo de reescrita definido acima, e obtemos que a seguinte igualdade é válida em VP_n ,

$$\begin{aligned} r_{2,e} = \tau(r_2) &= \tau(\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) \\ &= s_{e, \sigma_i} s_{\sigma_i, \sigma_j} s_{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1}, \sigma_i}^{-1} s_{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}, \sigma_i^{-1}, \sigma_j}^{-1} \\ &= \lambda_{i,i+1}^{-1} \lambda_{j,j+1}^{-1} \lambda_{i,i+1} \lambda_{j,j+1}. \end{aligned}$$

Note que conjugando esta relação por todos os representantes de Λ_n e aplicando o Lema 2.7, obtemos as relações do tipo (2.1).

Apenas relações triviais seguem de todas as outras relações de VB_n , isso é evidente para as relações que definem o grupo S_n , já que $s_{\lambda, \rho_i} = e$ para todo $\lambda \in \Lambda_n$ e ρ_i .

Por fim, podemos considerar a relação mista entre os geradores σ_i e ρ_i ,

$$r_3 = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i$$

Usando processo de reescrita, obtemos :

$$\begin{aligned} r_{3,e} = \tau(r_3) &= \tau(\sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i) \\ &= s_{e, \sigma_{i+1}} s_{\sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1}, \sigma_i}^{-1} \\ &= \lambda_{i+1, i+2}^{-1} \lambda_{i+1, i+2} \\ &= e. \end{aligned}$$

Assim, terminamos a prova para a apresentação de VP_n . □

Observação 2.10. *Dentro das tranças puras virtuais também podemos construir o homomorfismo de esquecimento assim como feita para as tranças clássicas [13]. Seja V_i um subgrupo de VP_n tal que,*

$$V_i = \langle \lambda_{1, i+1}, \lambda_{2, i+1}, \dots, \lambda_{i, i+1}; \lambda_{i+1, 1}, \lambda_{i+1, 2}, \dots, \lambda_{i+1, i} \rangle$$

onde $i = 1, \dots, n-1$. Agora seja V_i^* o fecho normal de V_i em VP_n , temos um **homomorfismo de esquecimento**

$$\varphi: VP_n \rightarrow VP_{n-1}$$

que leva os geradores $\lambda_{i,n}, i = 1, 2, \dots, n-1$ e $\lambda_{n,i}, i = 1, 2, \dots, n-1$ para o elemento neutro e fixa os outros geradores. O núcleo de φ é o grupo V_{n-1}^* que é um grupo livre infinitamente gerado.

Como a seção natural $\vartheta: S_n \rightarrow VB_n$ está bem definida, temos que $VB_n = VP_n \rtimes S_n$. Além disso, podemos caracterizar a ação de conjugação de S_n em VP_n . Seja $VP_n \rtimes S_n$ o produto semidireto definido pela ação de S_n no conjunto $\{\lambda_{k,l} \mid 1 \leq k \neq l \leq n\}$ por permutação de índices.

Proposição 2.11. A aplicação $\omega: VB_n \rightarrow VP_n \rtimes S_n$ enviando qualquer elemento v de VB_n para $(v((\vartheta \circ v)(v))^{-1}, v(v))$ pertence a $VP_n \rtimes S_n$ é um isomorfismo.

A prova pode ser encontrada em [2].

2.2.2 Fecho normal de B_n

Agora, provaremos outra decomposição possível de VB_n como um produto semidireto levando em consideração o núcleo de um novo homomorfismo.

Seja

$$\mu: VB_n \rightarrow S_n$$

um homomorfismo, tal que,

$$\mu(\sigma_i) = 1 \text{ e } \mu(\rho_i) = \rho_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n-1$, onde S_n é gerado por ρ_i com $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Definição 2.12. O núcleo do homomorfismo μ , denotado por $\ker \mu$ é o fecho normal de B_n em VB_n . Chamaremos esse grupo de H_n .

Os elementos desse grupo são definidos da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} x_{i,i+1} &= \sigma_i \\ x_{i+1,i} &= \rho_i \sigma_i \rho_i \\ x_{i,j} &= \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1} \\ x_{j,i} &= \rho_{j-1} \dots \rho_{i+1} \rho_i \sigma_i \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1} \end{aligned}$$

para $1 \leq i < j-1 \leq n-1$.

Esses elementos podem ser percebidos geometricamente da figura 2.2.

Como o subgrupo de VB_n gerado por $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ é isomorfo ao grupo simétrico S_n , podemos definir uma ação de $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ no conjunto $\{x_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ por permutação de índices, ou seja,

$$x_{i,j}^\rho = x_{\rho(i),\rho(j)}$$

onde, $\rho \in S_n$.

Lema 2.13. Seja $\rho \in S_n$. O elemento $\rho x_{i,j} \rho^{-1}$ é igual a $x_{\rho(i),\rho(j)}$ para $1 \leq i \neq j \leq n-1$.

Demonstração. É suficiente provar para os geradores ρ_k , onde $1 \leq k \leq n-1$.

Note que, se $\rho_k \neq \rho_i, \rho_{i+1}, \rho_{i-1}$, usando a relação (6) da apresentação de VB_n no Teorema 1.27 temos,

$$\rho_k \sigma_i \rho_k = \sigma_i = x_{i,i+1} = x_{\rho(i),\rho(i)}.$$

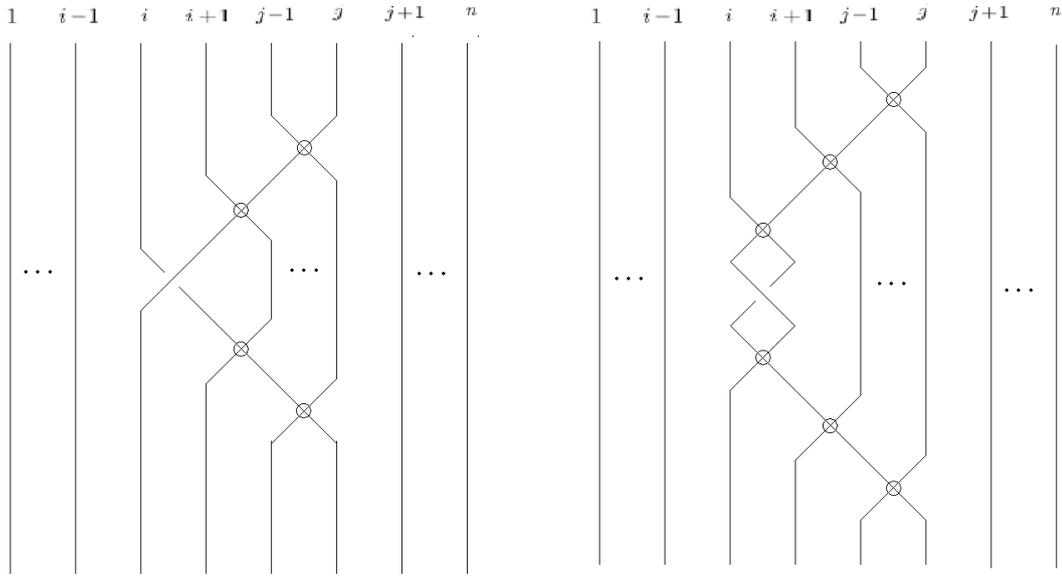


Figura 2.2: Elementos $x_{i,j}$ e $x_{j,i}$ respectivamente com $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$.

Caso contrário, temos,

$$\rho_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1} = x_{i,i+2}$$

e

$$\rho_i\sigma_i\rho_i = x_{i+1,i}$$

ou ainda pela relação (7) da apresentação de VB_n do Teorema 1.27 temos que ,

$$\rho_{i-1}\sigma_i\rho_{i-1} = \rho_i\sigma_{i-1}\rho_i = x_{i-1,i}.$$

Agora seja

$$x_{i,j} = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1}\sigma_i\rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1}$$

para $1 \leq i < j - 1 \leq n - 1$.

(i) Quando $k > j$ ou $k < i - 1$, observe que ρ_k comuta com $x_{i,j}$, ou seja $\rho_k x_{i,j} = x_{i,j} \rho_k$, então

$$\rho_k x_{i,j} \rho_k = x_{i,j} = x_{\rho(i),\rho(j)}$$

e a afirmação é válida.

(ii) Quando $k = j$, por definição temos, $\rho_j x_{i,j} \rho_j = x_{i,j+1}$, como $\rho_{j(i)} = i$ e $\rho_{j(j)} = j + i$, segue que,

$$\rho_j x_{i,j} \rho_j = x_{i,j+1} = x_{\rho_j(i),\rho_j(j+1)},$$

e a afirmação é válida.

(iii) Quando $k = j - 1$, temos que,

$$\rho_{j-1} x_{i,j} \rho_{j-1} = x_{i,j-1} = x_{\rho_{j-1}(i),\rho_{j-1}(j-1)}.$$

(iv) Quando $i < k < j - 1$, basta observar que

$$\rho_k \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_{k+1}$$

e

$$\rho_{k+1} \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} = \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_k,$$

então,

$$\rho_i x_{i,j} \rho_k = x_{i,j} = x_{\rho_k(i), \rho_k(j)}.$$

(v) Quando $k = i$, note que temos

$$\rho_i \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \rho_i = \rho_{j-1} \cdots \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i \cdots \rho_{j-1}$$

e pelas relações (4) e (7) da apresentação de VB_n no Teorema 1.27 temos que,

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_{i+1}$$

então,

$$\rho_i x_{i,j} \rho_i = x_{i+1,j} = x_{\rho(i), \rho(i+1)}.$$

(vi) Quando $k = i - 1$, note que aplicando as relações (4) e (7) da apresentação de VB_n no Teorema 1.27 temos que

$$\rho_{i-1} \sigma_i \rho_{i-1} = \rho_i \rho_i \rho_{i-1} \sigma_i \rho_i = \rho_i \sigma_{i-1} \rho_i \rho_{i-1} \rho_{i-1} = \rho_i \sigma_{i-1} \rho_i,$$

então,

$$\begin{aligned} \rho_{i-1} x_{i,j} \rho_{i-1} &= \rho_{i-1} \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1} \rho_{i-1} \\ &= \rho_{j-1} \cdots \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i-1} \sigma_i \rho_{i-1} \rho_i \rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1}. \end{aligned}$$

□

Podemos construir um exemplo de maneira que a ideia de como funciona este lema fique mais clara .

Exemplo 2.14. Sejam $S_4 = \langle \rho_1 \rho_2, \rho_3 \rangle$ e o elemento $x_{1,4} = \rho_3 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_3$, a conjugação desse elemento por ρ_1 é dada por:

$$\begin{aligned} x_{1,4}^{\rho_1} &= \rho_1 (\rho_3 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_3) \rho_1 \\ &= \rho_1 \rho_3 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_3 \rho_1 \\ &= \underline{\rho_1 \rho_3 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_3 \rho_1} \\ &= \rho_3 \rho_1 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_1 \rho_3 \\ &= \rho_3 \underline{\rho_1 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \rho_1} \rho_3 \\ &= \rho_3 \sigma_2 \underline{\rho_1 \rho_2 \rho_2 \rho_1} \rho_3 \\ &= \rho_3 \sigma_2 \rho_3 \\ &= x_{2,4} \\ &= x_{\rho(1), \rho(4)}. \end{aligned}$$

Podemos observar que $x_{1,4}^{\rho_1} = x_{\rho(1),\rho(4)}$ na forma geométrica através Figura 2.3.

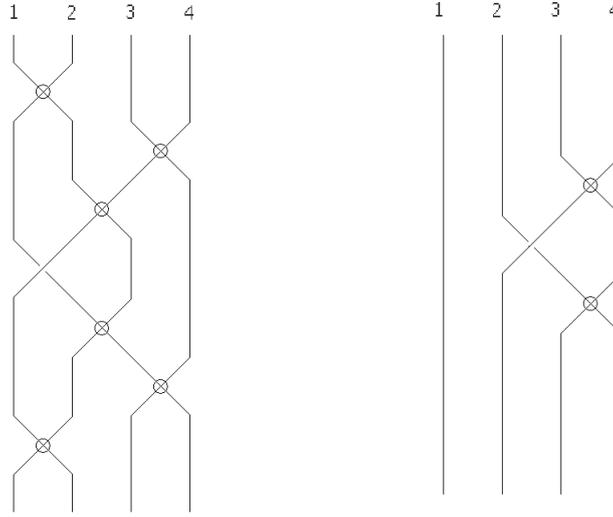


Figura 2.3: Tranças $x_{1,4}^{\rho_1}$ e $x_{2,4}$ respectivamente.

Teorema 2.15. O grupo H_n admite uma apresentação com os geradores $\{x_{k,l}\}$ onde $1 \leq k \neq l \leq n$ com as seguintes relações:

$$x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j}; \quad (2.3)$$

$$x_{i,k}x_{k,j}x_{i,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}, \quad (2.4)$$

onde letras distintas representam índices distintos.

Demonstração. Usaremos o método Reidemeister-Schreier. O primeiro passo é encontrar um conjunto de representantes das classes de H_n em VB_n .

Seja

$$\Lambda_n = \{(\rho_{i_1}, \rho_{i_1-1}, \dots, \rho_{i_1-r_1})(\rho_{i_2}, \rho_{i_2-1}, \dots, \rho_{i_2-r_2}) \dots (\rho_{i_p}, \rho_{i_p-1}, \dots, \rho_{i_p-r_p})\},$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n-1$ e $0 \leq r_j < i_j$. O conjunto de representantes de classes Λ_n é o que chamamos de conjunto de Schreier.

Agora podemos definir a aplicação

$$\bullet : VB_n \rightarrow \Lambda_n$$

que leva cada elemento $w \in VB_n$ no seu representante em $\bar{w} \in \Lambda_n$. Deste modo, o elemento $w\bar{w}^{-1}$ pertence a H_n .

O grupo H_n é gerado por

$$s_{\rho,a} = \overline{\rho a(\rho a)^{-1}},$$

onde ρ está no conjunto Λ_n e a está no conjunto de geradores de VB_n .

É fácil estabelecer que

$$s_{\rho, \rho_i} = e$$

para qualquer $\rho \in \Lambda_n$ e qualquer gerador ρ_i de VB_n .

Por outro lado,

$$s_{\rho, \sigma_i} = \rho \sigma_i \overline{(\rho)}^{-1} = \rho \sigma_i \rho^{-1} = x_{\rho(i), \rho(i+1)}.$$

E assim percebemos que cada gerador s_{ρ, σ_i} é igual a algum $x_{i,j}$ com $1 \leq i = j \leq n$. A afirmação inversa também é verdadeira, ou seja, cada elemento $x_{i,j}$ é igual a algum gerador s_{ρ, σ_i} .

Para encontrar relações de H_n , definimos um processo de reescrita τ , isso nos permite reescrever uma palavra que está escrita no geradores de VB_n e apresentar um elemento em H_n como uma palavra escrita em função dos geradores de H_n .

Vamos associar à palavra reduzida

$$u = a_1^{\epsilon_1}, a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_v^{\epsilon_v},$$

a palavra

$$\tau(u) = s_{k_1, a_1}^{\epsilon_1}, s_{k_2, a_2}^{\epsilon_2}, \dots, s_{k_v, a_v}^{\epsilon_v}$$

nos geradores de H_n , onde $\epsilon = \pm 1$, $a_l \in \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, e k_j é um representante do $(j-1)$ -ésimo segmento inicial da palavra u se $\epsilon_j = 1$ e k_j é um representante do j -ésimo segmento inicial da palavra u se $\epsilon_j = -1$.

O grupo H_n é obtido por relações do tipo

$$r_{\mu, \rho} = \tau(\rho r_{\mu} \rho^{-1})$$

com $\rho \in \Lambda_n$ e r_{μ} é a relação definidora de VB_n .

Vamos denotar por $r_1 = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$ a primeira relação de VB_n . Então,

$$\begin{aligned} r_{1, \epsilon} = \tau(r_1) &= s_{e, \sigma_i} s_{\overline{\sigma_i}, \sigma_{i+1}} s_{\overline{\overline{\sigma_i}}, \sigma_{i+1}} s_{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}, \sigma_{i+1}}^{-1} s_{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}, \sigma_i}^{-1} s_{\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, \sigma_{i+1}}^{-1} \\ &= s_{e, \sigma_i} s_{e, \sigma_{i+1}} s_{e, \sigma_i} s_{e, \sigma_{i+1}}^{-1} s_{e, \sigma_i}^{-1} s_{e, \sigma_{i+1}}^{-1} \\ &= x_{i, i+1} x_{i+1, i+2} x_{i, i+1} x_{i+1, i+2}^{-1} x_{i, i+1}^{-1} x_{i+1, i+2}^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a relação

$$x_{i, i+1} x_{i+1, i+2} x_{i, i+1} = x_{i+1, i+2} x_{i, i+1} x_{i+1, i+2}$$

é cumprida em H_n . As relações restantes $r_{1, \rho}$, com $\rho \in \Lambda_n$, podem ser obtidas a partir desta relação usando a conjugação por ρ ,

$$\begin{aligned} r_{1, \rho} &= \rho x_{i, i+1} x_{i+1, i+2} x_{i, i+1}^{-1} x_{i+1, i+2}^{-1} x_{i, i+1}^{-1} \rho \\ &= x_{\rho(i), \rho(i+1)} x_{\rho(i+1), \rho(i+2)} x_{\rho(i), \rho(i+1)}^{-1} x_{\rho(i+1), \rho(i+2)}^{-1} x_{\rho(i), \rho(i+1)}^{-1} \end{aligned}$$

e obtemos as relações do tipo (2.2).

Considerando a próxima relação de VB_n

$$r_2 = \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}, \quad |i - j| \leq 2,$$

podemos novamente aplicar o processo de reescrita definido acima e obtemos que a seguinte igualdade é válida em H_n ,

$$\begin{aligned} r_{2,e} = \tau(r_2) &= s_{e,\sigma_i} s_{\sigma_i^{-1},\sigma_j} s_{\sigma_i^{-1},\sigma_j}^{-1} s_{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1},\sigma_i}^{-1} s_{\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1},\sigma_i^{-1}}^{-1} \\ &= x_{i,i+1}^{-1} x_{j,j+1}^{-1} x_{i,i+1} x_{j,j+1}. \end{aligned}$$

Note que conjugando esta relação por todos os representantes de Λ_n e aplicando o Lema 2.13, obtemos as relações do tipo (2.3). É evidente para as relações que definem o grupo S_n porque $s_{\rho,\rho_i} = e$ para todo $\rho \in \Lambda_n$ e ρ_i .

Por fim, podemos considerar a relação mista entre os geradores σ e ρ :

$$r_3 = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i$$

Usando processo de reescrita, obtemos,

$$\begin{aligned} r_{3,e} = \tau(r_3) &= s_{e,\sigma_{i+1}} s_{\sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i^{-1},\sigma_i}^{-1} \\ &= x_{i+1,i+2} (\rho_i \rho_{i+1} x_{i,i+1}^{-1} \rho_{i+1} \rho_i) \\ &= e. \end{aligned}$$

Assim, terminamos a prova para a apresentação de H_n . □

O corolário a seguir é uma consequência direta do Lema 2.13 e do fato de que a seção natural $\vartheta: S_n \rightarrow VB_n$ está bem definida.

Corolário 2.16. *O grupo VB_n é isomorfo a $H_n \rtimes S_n$ onde S_n age por permutação de índices.*

Através da apresentação de H_n percebemos que este grupo é o fecho normal de B_n em VB_n . A próxima proposição nos trás algumas considerações sobre H_n através de sua série central inferior.

Proposição 2.17. *Seja H_n o fecho normal de B_n em VB_n , as seguintes propriedades são válidas :*

- (i) *O grupo H_2 é isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ que é residualmente nilpotente.*
- (ii) *O quociente $\Gamma_1(H_3)/\Gamma_2(H_3)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e se $n \geq 4$, então $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$ é isomorfo a \mathbb{Z} .*

(iii) O grupo H_n não é residualmente nilpotente e $\Gamma_2(H_n) = \Gamma_3(H_n)$ quando $n \geq 3$.

(iv) O grupo $\Gamma_2(H_n)$ é perfeito quando $n \geq 5$.

Demonstração.

(i) Uma apresentação para H_2 é dada por $H_2 = \langle x_{1,2}, x_{2,1} \mid - \rangle$, note que H_2 é um grupo livre com dois geradores, ou seja, $\{x_{12}\}$ gera uma copia de \mathbb{Z} e $\{x_{21}\}$ gera outra copia de \mathbb{Z} , assim temos que $H_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, como grupos livres são residualmente nilpotentes, H_2 é residualmente nilpotentes.

(ii) No quociente $\Gamma_1(H_3)/\Gamma_2(H_3)$, observando suas relações que são do tipo $x_{i,k} = x_{k,j}$ com índices distintos e $x_{i,j}x_{k,l} = x_{k,l}x_{i,j}$ para todo índice, percebemos que

$$x_{1,2} = x_{2,3} = x_{3,1},$$

$$x_{1,3} = x_{3,2} = x_{2,1},$$

com isso temos que $\Gamma_1(H_3)/\Gamma_2(H_3)$ passa a ser isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

No quociente $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$, quando $n \geq 4$, dados dois elementos $x_{i,j}$ e $x_{k,l}$ temos os seguintes casos:

(1) Se $j = k$ e $i \neq l$, a segunda relação $x_{i,j}x_{j,l}x_{i,j} = x_{j,l}x_{i,j}x_{j,l}$, se torna

$$x_{i,j} = x_{j,l}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$, pois, $x_{j,l}^{-1}x_{i,j}^{-1}x_{j,l}x_{i,j} \in \Gamma_2(H_n)$.

(2) Se $j \neq k$ e $i = l$, analogamente temos que a relação $x_{i,k}x_{k,j}x_{l,k} = x_{k,j}x_{i,k}x_{k,j}$ se torna

$$x_{k,i} = x_{i,j}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$.

(3) Se $j \neq l$ e $i = k$, existe $1 \leq m \leq n$ distinto de j, l, k de tal forma que

$$x_{k,j} = x_{j,m} = x_{m,k} = x_{k,l}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$.

(4) Se $j = l$ e $i \neq k$, analogamente vai existir $1 \leq m' \leq n$ distinto de j, l, k tal que

$$x_{k,j} = x_{j,m'} = x_{m',k} = x_{k,l}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$.

(5) Se i, j, k, l , são todos distintos, usando o elemento $x_{j,k}$ e temos que

$$x_{i,j} = x_{k,l}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$.

(6) Por fim, se $i = l$ e $j = k$, escolhemos $1 \leq m, p \leq n$ distinto de i e j , obtemos a seguinte seqüência de identidades

$$x_{i,j} = x_{j,m} = x_{m,p} = x_{p,j} = x_{j,i}$$

em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$, com isso todos os $x_{i,j}$ são identificados em $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$, portanto, $\Gamma_1(H_n)/\Gamma_2(H_n)$ é isomorfo a \mathbb{Z} .

(iii) Como H_n é o fecho normal de B_n em VB_n e B_n não é residualmente nilpotente para $n \geq 3$, então H_n não pode ser residualmente nilpotente.

Agora, observe que a partir das relações do grupo de tranças de Artin no Teorema 1.20, conseguimos perceber que $\Gamma_2(B_n)$ é o fecho normal em B_n pelo elemento $\sigma_1\sigma_2^{-1}$, desta maneira temos que $\Gamma_2(H_n)$ também coincide com o fecho normal em VB_n pelo elemento $\sigma_1\sigma_2^{-1}$. Agora note que,

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2^{-1} &= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1 \\ &= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1}[\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2, \sigma_1]\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1}[[\sigma_1, \sigma_2], \sigma_1]\sigma_1 \\ &= [[\sigma_1, \sigma_2], \sigma_1]^{\sigma_1}. \end{aligned}$$

Isso é, $\sigma_1\sigma_2^{-1} = [[\sigma_1, \sigma_2], \sigma_1]^{\sigma_1}$ em B_n , como VB_n contém B_n , então, $\sigma_1\sigma_2^{-1} = [[\sigma_1, \sigma_2], \sigma_1]^{\sigma_1}$ em VB_n , portanto, $\Gamma_2(H_n) = \Gamma_3(H_n)$.

(iv) Vamos considerar o elemento $\sigma_3\sigma_1^{-1}$ em H_n com $n \geq 5$, podemos escrever esse

elemento como

$$\begin{aligned}
\sigma_3\sigma_1^{-1} &= \underline{\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}} \\
&= \sigma_2^{-1}\underline{\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\underline{\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\underline{\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\underline{\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}} \\
&= \sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\underline{\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2} \\
&= \sigma_2^{-1}\underline{\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1} \\
&= (\sigma_1\sigma_2)^{-1}(\sigma_3\sigma_1^{-1})^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2) \\
&= (\sigma_1\sigma_2)^{-1}[\sigma_3\sigma_1^{-1}, \sigma_1\sigma_2^{-1}](\sigma_1\sigma_2)
\end{aligned}$$

onde, $[\sigma_3\sigma_1^{-1}, \sigma_1\sigma_2^{-1}] = (\sigma_3\sigma_1^{-1})^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}(\sigma_3\sigma_1^{-1})(\sigma_1\sigma_2^{-1})$ pertencem a $\Gamma_2(H_n)$ e como $\sigma_3\sigma_1^{-1} = (\sigma_1\sigma_2)^{-1}[\sigma_3\sigma_1^{-1}, \sigma_1\sigma_2^{-1}](\sigma_1\sigma_2)$ temos que $\sigma_3\sigma_1^{-1}$ pertence a $[\Gamma_2(H_n), \Gamma_2(H_n)]$. Agora tomemos um subgrupo normal N de H_n que é gerado por $\sigma_3\sigma_1^{-1}$, considerando as relações da apresentação de H_n no Teorema 2.15, podemos notar que a apresentação de H_n/N envolve os geradores $\lambda_{i,j}$, as relações (2.3), (2.4) da apresentação de H_n no Teorema 2.15 e a relação adicional de que $\sigma_3\sigma_1^{-1} = 1$, assim podemos escrever $\sigma_3\sigma_4\sigma_3 = \sigma_4\sigma_3\sigma_4$ como

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_4\sigma_3 &= \sigma_4\sigma_1\sigma_4 \\
\sigma_4\sigma_3\sigma_1 &= \sigma_4\sigma_4\sigma_1 \\
\sigma_4\sigma_3 &= \sigma_4\sigma_4 \\
\sigma_3 &= \sigma_4.
\end{aligned}$$

De maneira análoga e recursiva podemos reescrever as relações de tal forma que obtemos $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{n-1}$ e como consequência, todos os $\lambda_{i,j}$ também vão ser iguais para todo i e j . Desta maneira, temos que $H_n/N \cong \mathbb{Z}$ e $N \supseteq \Gamma_2(H_n)$. Como o comutador de um grupo é o menor subgrupo normal tal que o quociente é abeliano, temos que $\Gamma_2(H_n) \subseteq N \subseteq [\Gamma_2(H_n), \Gamma_2(H_n)]$.

A inclusão $[\Gamma_2(H_n), \Gamma_2(H_n)] \subseteq \Gamma_2(H_n)$ segue imediatamente da Definição 1.38 de série central inferior. Logo, $\Gamma_2(H_n) = [\Gamma_2(H_n), \Gamma_2(H_n)]$, ou seja, $\Gamma_2(H_n)$ é perfeito. □

Teorema 2.18. *Os grupos H_n e VP_n não são isomorfos para $n \geq 3$.*

Demonstração. Para mostrar que os grupos H_n e VP_n não são isomorfos basta observar a abelianização de H_n que foi dada no item (ii) da proposição anterior e comparar com a abelianização de VP_n . Note que, pelo item (ii) da Proposição 2.17 temos que,

$$\frac{\Gamma_1(H_n)}{\Gamma_2(H_n)} = \frac{H_n}{[H_n, H_n]} = \langle x_{1,2} \mid - \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Agora vamos analisar o abelianizado de VP_n . Quando $n = 3$ temos que

$$\frac{\Gamma_1(VP_n)}{\Gamma_2(VP_n)} = \frac{VP_3}{[VP_3, VP_3]} = \langle \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \lambda_{2,3}, \lambda_{2,1}, \lambda_{3,1}, \lambda_{3,2} \mid \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ para todo índice} \rangle$$

note que, cada gerador $\lambda_{i,j}$ gera uma cópia de \mathbb{Z} , então

$$\frac{VP_3}{[VP_3, VP_3]} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^6$$

de maneira análoga, podemos analisar o abelianizado quando $n = 4$,

$$\frac{VP_4}{[VP_4, VP_4]} = \langle \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \lambda_{1,4}, \lambda_{2,3}, \lambda_{2,4}, \lambda_{3,4}, \lambda_{2,1}, \lambda_{3,1}, \lambda_{4,1}, \lambda_{3,2}, \lambda_{4,2}, \lambda_{4,3} \mid \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ para todo índice} \rangle$$

para todo índice, assim

$$\frac{VP_4}{[VP_4, VP_4]} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{12}.$$

Desta maneira, conseguimos notar que

$$\frac{VP_n}{[VP_n, VP_n]} = \langle \lambda_{k,l} \mid \lambda_{i,j}\lambda_{k,l} = \lambda_{k,l}\lambda_{i,j} \text{ para todo índice} \rangle,$$

onde, $1 \leq k \neq l \leq n$. Com isso, notamos que,

$$\frac{VP_n}{[VP_n, VP_n]} \simeq \mathbb{Z}^{n(n-1)}$$

Assim, como os abelianizados de H_n e VP_n são diferentes para $n \geq 3$, então os grupos H_n e VP_n não são isomorfos. \square

Como os grupos H_n e VP_n não são isomorfos, uma pergunta natural é se esses grupos tem interseção não trivial, e sim, a interseção desses grupos não é trivial. Com isso podemos definir tal grupo a fim de compreender um pouco da sua estrutura.

Vamos considerar ϕ uma aplicação $S_n \rightarrow \text{Hom}(S_n)$ definida pela ação do grupo simétrico sobre si mesmo por conjugação.

Teorema 2.19 (Proposição 22 [1]). *O produto semidireto $S_n \rtimes_{\phi} S_n$ admite a seguinte apresentação:*

Geradores: s_i, t_i com $i = 1, 2, \dots, n-1$

Relações:

- (1) $t_i^2 = s_i^2 = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- (2) $s_i s_j = s_j s_i$, para $|i - j| \geq 2$;
- (3) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (4) $t_i t_j = t_j t_i$, para $|i - j| \geq 2$;
- (5) $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (6) $t_i s_j t_i = s_j$, para $|i - j| \geq 2$;
- (7) $t_i s_i t_i = s_i$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$;
- (8) $t_{i+1} s_i t_{i+1} = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
- (9) $t_{i-1} s_i t_{i-1} = s_{i-1} s_i s_{i-1}$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Vamos denotar o produto semidireto $S_n \rtimes_{\phi} S_n$ como M_n . Agora seja

$$\psi: VB_n \rightarrow M_n$$

um homomorfismo definido por $\psi(\sigma_i) = s_i$ e $\psi(\rho_i) = t_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Chamamos de **grupo de tranças puras estendidas** em n cordas o núcleo de ψ e o denotamos por EP_n .

Sejam duas aplicações η_1 e η_2 de M_n em S_n , definimos η_1 tal que

$$\eta_1(s_i) = 1 \text{ e } \eta_1(t_i) = \rho_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 1;$$

e η_2 tal que

$$\eta_2(s_i) = \rho_i \text{ e } \eta_2(t_i) = \rho_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

onde ρ_i com $i = 1, 2, \dots, n - 1$, são os geradores usuais de S_n .

Proposição 2.20. *Sejam VP_n e H_n com apresentações dadas respectivamente no Teorema 2.9 e no Teorema 2.15, temos que*

- (i) O grupo H_n coincide com o núcleo de $(\eta_1 \circ \psi)$.
- (ii) O grupo VP_n coincide com o núcleo de $(\eta_2 \circ \psi)$.
- (iii) O grupo $H_n \cap VP_n$ coincide com o núcleo de ψ .

Demonstração.

- (i) Vamos lembrar da aplicação μ da Seção 2.2.2 tal que $\mu(\sigma_i) = 1, \mu(\rho_i) = \rho_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Assim, quando fazemos a composição de η_1 com ϕ temos $(\eta_1 \circ \psi) = \mu$. Portanto, os núcleos são iguais.
- (ii) De maneira análoga, podemos lembrar da aplicação ϑ da Seção 2.2.1, tal que $\vartheta(\sigma_i) = \vartheta(\rho_i) = \rho_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Desta forma quando fazemos a composição de η_2 com ψ temos $(\eta_2 \circ \psi) = \vartheta$. Portanto, os núcleos são iguais.

(iii) Agora, seja x um elemento não trivial de H_n , uma vez que H_n é o fecho normal de B_n , o elemento $\psi(x)$ pertence ao subgrupo gerado por s_1, \dots, s_{n-1} que é isomorfo a S_n . Note que $\eta_2(s_i) = \rho_i$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, desta forma segue que $\eta_2(\psi(x)) = 1$ se, e somente se $\psi(x) = 1$ e então η_2 é injetivo em $\psi(H_n)$. Portanto, se x pertence a $H_n \cap VP_n$, então x pertence ao núcleo ψ , ou seja, $H_n \cap VP_n$ coincide com o núcleo ψ . \square

Isso nos motivou a encontrar uma apresentação para essa interseção, que é o grupo de tranças puras estendidas EP_n . No próximo capítulo, usando o método Reidemeister-Schreier damos uma apresentação inédita para o grupo de tranças puras estendidas EP_n no caso de duas e três cordas.

Capítulo 3

Grupo de tranças puras estendido com poucas cordas

Nesse capítulo, nos empenhamos em mostrar o processo para encontrar uma apresentação do grupo de tranças puras estendidas nos casos de $n = 2$ e $n = 3$ com o método Reidemeister-Schreier. Essas Apresentação não eram conhecidas na literatura.

Seja

$$\epsilon : H_n \rightarrow S_n$$

o homomorfismo definido por

$$\epsilon(x_{i,j}) = \epsilon(x_{j,i}) = \rho_i^{\rho_{i+1} \cdots \rho_{j-1}}$$

para $1 \leq i < j \leq n$.

Proposição 3.1. *O homomorfismo ϵ está bem definido, o grupo EP_n é isomorfo ao núcleo de ϵ e o fecho normal de P_n em VB_n está contido em EP_n .*

Demonstração. O homomorfismo ϵ coincide com a restrição de H_n do homomorfismo v dado na Seção 2.2.1 e portanto EP_n é isomorfo ao núcleo de ϵ .

Denotemos por $\langle\langle P_n \rangle\rangle_{VB_n}$ o fecho normal de P_n em VB_n . Observe que

$$\epsilon(x_{1,2}^2) = \epsilon(x_{1,2}x_{1,2}) = \epsilon(x_{1,2})\epsilon(x_{1,2}) = \rho_1\rho_1 = 1,$$

assim percebemos que $\langle\langle P_n \rangle\rangle_{VB_n}$ é na verdade o fecho normal de $\sigma_2^2 = x_{1,2}^2$, e deduzimos que $\langle\langle P_n \rangle\rangle_{VB_n} \subset EP_n$.

Por outro lado, vamos considerar a seguinte sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \langle\langle P_n \rangle\rangle_{VB_n} \rightarrow VB_n \rightarrow HB_n \rightarrow 1,$$

onde HB_n é o grupo de trança virtual planas ou planares, que é obtido adicionando relações $\sigma_i^2 = 1$ na apresentação do grupo VB_n .

O grupo HB_n contém elementos de ordem infinita, como por exemplo, o elemento $(\sigma_i \rho_i)^2$. Portanto, deduzimos que $\langle\langle P_n \rangle\rangle_{VB_n}$ não coincide com EP_n . \square

Na literatura não encontramos uma apresentação para os grupos de tranças puras estendidas EP_n , mas usando o método Reidemeister-Schreier, encontramos uma apresentação para

$$EP_2 = \ker \varepsilon : H_2 \rightarrow S_2$$

assim com para,

$$EP_3 = \ker \varepsilon : H_3 \rightarrow S_3.$$

As próximas seções são dedicadas ao processo detalhado para exibir um apresentação para o grupo de tranças puras estendidas com 2 cordas e para o grupos de tranças puras estendidas com 3 cordas.

3.1 Apresentação de EP_2

Para usar o método Reidemeister-Schreier vamos definir ε nos geradores de H_2 e observar o que acontece com esse geradores.

Seja $\{x_{12}, x_{21}\}$ o conjunto de geradores de H_2 , aplicando a função ε nesses geradores, temos que :

$$\varepsilon(x_{12}) = \varepsilon(x_{21}) = \rho_1.$$

Note que, uma transversal de Schreier possível é dada por

$$\Lambda_2 = \{e, x_{12}\}.$$

Os geradores do $\ker \varepsilon = EP_2$ são dados por

$$S_{\lambda,a} = \lambda a (\overline{\lambda a})^{-1},$$

onde $\lambda \in \Lambda_2$ e $a \in \{x_{12}, x_{21}\}$.

Agora vamos tomar e , o primeiro elemento da transversal de Schreier e considerar os dois geradores de H_2 para construir os novos geradores, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{e,x_{12}} &= ex_{12}(\overline{ex_{12}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{12}^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned} S_{e,x_{21}} &= ex_{21}(\overline{ex_{21}})^{-1} \\ &= x_{21}x_{21}^{-1} \end{aligned}$$

Para o elemento x_{12} da transversal de Schreier e os geradores x_{12}, x_{21} de H_2 temos que:

$$\begin{aligned} S_{x_{12}, x_{12}} &= x_{12}x_{12}(\overline{x_{12}x_{12}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{12}(e)^{-1} \\ &= x_{12}^2 \end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned} S_{x_{12}, x_{21}} &= x_{12}x_{21}(\overline{x_{12}x_{21}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{21}(e)^{-1} \\ &= x_{12}x_{21}. \end{aligned}$$

Assim os geradores não triviais encontrados para EP_2 são $\{x_{21}x_{12}^{-1}, x_{12}^2, x_{12}x_{21}\}$.

Agora vamos encontrar as relações de EP_2 . Para isso, deveríamos conjugar as relações de H_2 com os elementos da transversal de Schreier Λ_2 , mas H_2 é um grupo livre, isto é, não temos relações no grupo. Assim $\ker \varepsilon = EP_2$ também não terá relações.

Desta maneira, conseguimos uma apresentação para o grupo de tranças puras estendidas com duas cordas EP_2 .

$$EP_2 = \langle S_{e, x_{21}}, S_{x_{12}, x_{12}}, S_{x_{12}, x_{21}} \mid - \rangle = \langle x_{21}x_{12}^{-1}, x_{12}^2, x_{12}x_{21} \mid - \rangle.$$

Note que EP_2 é isomorfo a um grupo livre de posto 3.

3.2 Apresentação de EP_3

Para o caso em que $n = 3$ podemos repetir os mesmos cálculos feitos através do método Reidemeister-Schreier como no caso $n = 2$ acima. Vamos definir ε no conjunto de geradores de H_3 .

Seja,

$$\{x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{31}, x_{23}, x_{32}\},$$

o conjunto de geradores de H_3 , temos que :

$$\varepsilon(x_{12}) = \varepsilon(x_{21}) = \rho_1^{\rho_2 \rho_1} = \rho_2,$$

$$\varepsilon(x_{13}) = \varepsilon(x_{31}) = \rho_1^{\rho_2} = \rho_2^{\rho_1},$$

$$\varepsilon(x_{23}) = \varepsilon(x_{32}) = \rho_2^{\rho_2} = \rho_2.$$

Uma transversal de Schreier possível é dada por,

$$\Lambda_3 = \{e, x_{12}, x_{13}, x_{12}x_{13}, x_{13}x_{12}, x_{12}x_{13}x_{12}\}.$$

Os geradores de $\ker \varepsilon = EP_3$ são dados por

$$S_{\lambda,a} = \lambda a(\overline{\lambda a})^{-1}$$

onde $\lambda \in \Lambda_2$ e $a \in \{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$.

Vamos tomar e , o primeiro elemento da transversal de Schreier e considerar os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 para construir os novos gerados através do processo de reescrita, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{e,x_{12}} &= ex_{12}(\overline{ex_{12}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{12}^{-1} = e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e,x_{13}} &= ex_{13}(\overline{ex_{13}})^{-1} \\ &= x_{13}x_{13}^{-1} = e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e,x_{21}} &= ex_{21}(\overline{ex_{21}})^{-1} \\ &= x_{21}x_{12}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e,x_{23}} &= ex_{23}(\overline{ex_{23}})^{-1} \\ &= x_{23}x_{12}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e,x_{31}} &= ex_{31}(\overline{ex_{31}})^{-1} \\ &= x_{31}x_{13}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{e,x_{32}} &= ex_{32}(\overline{ex_{32}})^{-1} \\ &= x_{32}x_{12}^{-1}. \end{aligned}$$

Para o elemento x_{12} da transversal de Schreier e os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 temos que:

$$\begin{aligned} S_{x_{12},x_{12}} &= x_{12}x_{12}(\overline{x_{12}x_{12}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{12}(e)^{-1} \\ &= x_{12}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{x_{12},x_{13}} &= x_{12}x_{13}(\overline{x_{12}x_{13}})^{-1} \\ &= x_{12}x_{13}(x_{12}x_{13})^{-1} = e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12},x_{21}} &= x_{12}x_{21}(\overline{x_{12}x_{21}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{21}(e)^{-1} \\
&= x_{12}x_{21},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12},x_{23}} &= x_{12}x_{23}(\overline{x_{12}x_{23}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{23}(e)^{-1} \\
&= x_{12}x_{23},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12},x_{31}} &= x_{12}x_{31}(\overline{x_{12}x_{31}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{31}(x_{12}x_{31})^{-1} \\
&= x_{12}x_{31}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12},x_{32}} &= x_{12}x_{32}(\overline{x_{12}x_{32}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{32}(e)^{-1} \\
&= x_{12}x_{32}.
\end{aligned}$$

Para o elemento x_{13} da transversal de Schreier e os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 temos que:

$$\begin{aligned}
S_{x_{13},x_{12}} &= x_{13}x_{12}(\overline{x_{13}x_{12}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}(x_{13}x_{12})^{-1} = e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13},x_{13}} &= x_{13}x_{13}(\overline{x_{13}x_{13}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{13}(e)^{-1} \\
&= x_{13}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13},x_{21}} &= x_{13}x_{21}(\overline{x_{13}x_{21}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{21}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13},x_{23}} &= x_{13}x_{23}(\overline{x_{13}x_{23}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{23}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{13}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13},x_{31}} &= x_{13}x_{31}(\overline{x_{13}x_{31}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{31}(e)^{-1} \\
&= x_{13}x_{31},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}, x_{32}} &= x_{13}x_{32}(\overline{x_{13}x_{32}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{32}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $x_{12}x_{13}$ da transversal de Schreier e os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 temos que:

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{12}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} = e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{13}} &= x_{12}x_{13}x_{13}(\overline{x_{12}x_{13}x_{13}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{13}(x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}^2x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{21}} &= x_{12}x_{13}x_{21}(\overline{x_{12}x_{13}x_{21}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{21}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{23}} &= x_{12}x_{13}x_{23}(\overline{x_{12}x_{13}x_{23}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{23}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{31}} &= x_{12}x_{13}x_{31}(\overline{x_{12}x_{13}x_{31}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{31}(x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{31}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}, x_{32}} &= x_{12}x_{13}x_{32}(\overline{x_{12}x_{13}x_{32}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{32}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $x_{13}x_{12}$ da transversal de Schreier e os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 temos que:

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12}, x_{12}} &= x_{13}x_{12}x_{12}(\overline{x_{13}x_{12}x_{12}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{12}(x_{13})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}^2x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12},x_{13}} &= x_{13}x_{12}x_{13}(\overline{x_{13}x_{12}x_{13}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{13}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12},x_{21}} &= x_{13}x_{12}x_{21}(\overline{x_{13}x_{12}x_{21}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{21}(x_{13})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{21}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12},x_{23}} &= x_{13}x_{12}x_{23}(\overline{x_{13}x_{12}x_{23}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{23}(x_{13})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{23}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12},x_{31}} &= x_{13}x_{12}x_{31}(\overline{x_{13}x_{12}x_{31}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{31}(x_{12}x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{31}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{13}x_{12},x_{32}} &= x_{13}x_{12}x_{32}(\overline{x_{13}x_{12}x_{32}})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{32}(x_{13})^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $x_{12}x_{13}x_{12}$ da transversal de Schreier e os geradores $\{x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\}$ de H_3 temos que:

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{12}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{12}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{12}(x_{12}x_{13})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}^2x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}(x_{12}x_{13})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{31}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{31}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{31}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{31}(x_{13}x_{12})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{31}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}(\overline{x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}(x_{12}x_{13})^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.
\end{aligned}$$

Feito todo esse processo de reescrita, encontramos 36 geradores, os quais vamos renomear da seguinte maneira para facilitar a interpretação nos próximos passos.

$$a_1 = S_{e,x_{12}} = e,$$

$$a_2 = S_{e,x_{13}} = e,$$

$$a_3 = S_{e,x_{21}} = x_{21}x_{12}^{-1},$$

$$a_4 = S_{e,x_{23}} = x_{23}x_{12}^{-1},$$

$$a_5 = S_{e,x_{31}} = x_{31}x_{13}^{-1},$$

$$a_6 = S_{e,x_{32}} = x_{32}x_{12}^{-1},$$

$$c_1 = S_{x_{12},x_{12}} = x_{12}^2,$$

$$c_2 = S_{x_{12},x_{13}} = e,$$

$$c_3 = S_{x_{12},x_{21}} = x_{12}x_{21},$$

$$c_4 = S_{x_{12},x_{23}} = x_{12}x_{23},$$

$$c_5 = S_{x_{12},x_{31}} = x_{12}x_{31}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$c_6 = S_{x_{12},x_{32}} = x_{12}x_{32},$$

$$e_1 = S_{x_{13}x_{12},x_{12}} = x_{13}x_{12}^2x_{13}^{-1},$$

$$e_2 = S_{x_{13}x_{12},x_{13}} = x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$e_3 = S_{x_{13}x_{12},x_{21}} = x_{13}x_{12}x_{21}x_{13}^{-1},$$

$$e_4 = S_{x_{13}x_{12},x_{23}} = x_{13}x_{12}x_{23}x_{13}^{-1},$$

$$e_5 = S_{x_{13}x_{12},x_{31}} = x_{13}x_{12}x_{31}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$e_6 = S_{x_{13}x_{12},x_{32}} = x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1},$$

$$b_1 = S_{x_{13},x_{12}} = e,$$

$$b_2 = S_{x_{13},x_{13}} = x_{13}^2,$$

$$b_3 = S_{x_{13},x_{21}} = x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$b_4 = S_{x_{13},x_{23}} = x_{12}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$b_5 = S_{x_{13},x_{31}} = x_{13}x_{31},$$

$$b_6 = S_{x_{13},x_{32}} = x_{12}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$d_1 = S_{x_{12}x_{13},x_{12}} = e,$$

$$d_2 = S_{x_{12}x_{13},x_{13}} = x_{12}x_{13}^2x_{12}^{-1},$$

$$d_3 = S_{x_{12}x_{13},x_{21}} = x_{12}x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$d_4 = S_{x_{12}x_{13},x_{23}} = x_{12}x_{13}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$d_5 = S_{x_{12}x_{13},x_{31}} = x_{12}x_{13}x_{31}x_{12}^{-1},$$

$$d_6 = S_{x_{12}x_{13},x_{32}} = x_{12}x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$f_1 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} = x_{12}x_{13}x_{12}^2x_{13}^{-1}x_{12}^{-1},$$

$$f_2 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}} = x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$f_3 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}} = x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$f_4 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}} = x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$f_5 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{31}} = x_{12}x_{13}x_{12}x_{31}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1},$$

$$f_6 = S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} = x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.$$

Agora podemos encontrar as relações de EP_3 conjugando as relações de H_3 com os elementos da transversal de Schreier Λ_3 , essas relações que são dadas por:

$$r_{\mu,\lambda} = \lambda r_{\mu} \lambda^{-1}$$

onde $\lambda \in \Lambda_3$ e r_μ é uma as relações de H_3 .

Uma apresentação para H_3 é dada por:

$$H_3 = \langle x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}, x_{32} | r_1, r_2, r_3 \rangle,$$

onde

$$r_1 = x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1},$$

$$r_2 = x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1},$$

$$r_3 = x_{23}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}.$$

Desta forma, teremos três relações para serem conjugadas com os elementos da transversal de Schreier Λ_3 .

Para a primeira relação $r_1 = x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}$ e $\{e, x_{12}, x_{13}, x_{12}x_{13}, x_{13}x_{12}, x_{12}x_{13}x_{12}\}$ temos as seguintes conjugações:

$$\begin{aligned} r_{1,e} &= x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1} \\ &= x_{12}x_{23} \cdot x_{12}x_{23}^{-1} \cdot x_{12}^{-1} \cdot x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{23}^{-1} \\ &= S_{x_{12},x_{23}} \cdot S_{e,x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{e,x_{23}}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,x_{12}} &= x_{12}x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1} \\ &= x_{12}x_{12} \cdot x_{23}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{12} \cdot x_{23}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot \\ &\quad x_{23}^{-1}x_{12}^{-1} \\ &= S_{x_{12},x_{12}} \cdot S_{e,x_{23}} \cdot S_{x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{12},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{23}}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,x_{13}} &= x_{13}x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}x_{13}^{-1} \\ &= x_{13}x_{12}x_{13}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{23}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13} \\ &\quad x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{23}^{-1}x_{13}^{-1} \\ &= S_{x_{13},x_{12},x_{23}} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1,x_{12}x_{13}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\ &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{23}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12} \cdot x_{13}x_{12}x_{23}^{-1} \\ &\quad x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12} \\ &\quad x_{23}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\ &= S_{x_{12}x_{13},x_{12},x_{23}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1,x_{13}x_{12}} &= x_{13}x_{12}x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{12}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{12}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= S_{x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{13},x_{23}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1,x_{12}x_{13}x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{12}x_{23}x_{12}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{12}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{23}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{12}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{23}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}}^{-1}
\end{aligned}$$

Para a segunda relação $r_2 = x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}$ e $\{e, x_{12}, x_{13}, x_{12}x_{13}, x_{13}x_{12}, x_{12}x_{13}x_{12}\}$ temos as seguintes conjugações:

$$\begin{aligned}
r_{2,e} &= x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1} \\
&= x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}x_{32}^{-1} \\
&= S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,x_{13}} &= x_{13}x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= x_{13}x_{13}.x_{32}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{12}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= S_{x_{13},x_{13}} \cdot S_{e,x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{31}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,x_{12}x_{13}} &= x_{12}x_{13}x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{13}.x_{32}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}.x_{13}x_{12}x_{13}^{-1} \\
&\quad x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1}.x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13},x_{13}} \cdot S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,x_{13}x_{12}} &= x_{13}x_{12}x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13} \\
&\quad x_{13}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{32}^{-1} \cdot x_{13}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= S_{x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{13}} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,x_{12}x_{13}x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}x_{32}x_{13}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{13}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{13}x_{32}^{-1} \\
&\quad x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{13}} \cdot S_{x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1}.
\end{aligned}$$

Para a terceira relação $r_3 = x_{23}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}$ e $\{e, x_{12}, x_{13}, x_{12}x_{13}, x_{13}x_{12}, x_{12}x_{13}x_{12}\}$ temos as seguintes conjugações:

$$\begin{aligned}
r_{3,e} &= x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1} \\
&= x_{32}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{21} \cdot x_{32}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{21}^{-1} \cdot x_{32}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{21}^{-1} \\
&= S_{e,x_{32}} \cdot S_{x_{12},x_{21}} \cdot S_{e,x_{32}} \cdot S_{e,x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{e,x_{21}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{3,x_{12}} &= x_{12}x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{32} \cdot x_{21}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{32} \cdot x_{21}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{32}^{-1} \cdot x_{21}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{e,x_{21}} \cdot S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{21}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{3,x_{13}} &= x_{13}x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{21}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{21}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{32}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{21}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}} \cdot S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{21}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{3,x_{12}x_{13}} &= x_{12}x_{13}x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{32}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{32} \\
&\quad x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{32}^{-1} \\
&\quad x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}x_{21}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{3,x_{13}x_{12}} &= x_{13}x_{12}x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{21}^{-1} \\
&\quad x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{12}x_{32}^{-1}x_{13}^{-1} \cdot x_{13}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1} \\
&= S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{21}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{3,x_{12}x_{13}x_{12}} &= x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}x_{21}x_{32}x_{21}^{-1}x_{32}^{-1}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{21}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12} \\
&\quad x_{32}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{12}x_{32}^{-1} \\
&\quad x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \cdot x_{12}x_{13}x_{21}^{-1}x_{12}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}^{-1} \\
&= S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, encontramos 18 relações:

$$\begin{aligned}
S_{x_{12},x_{23}} \cdot S_{e,x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{e,x_{23}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13}x_{12},x_{23}} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13}x_{12},x_{23}} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{23}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{13},x_{23}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{23}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{12}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{23}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13},x_{13}} \cdot S_{e,x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{31}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13},x_{13}} \cdot S_{e,x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{31}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13},x_{13}} \cdot S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{13}} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{13}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{13}} \cdot S_{x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{13}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} &= 1, \\
S_{e,x_{32}} \cdot S_{x_{12},x_{21}} \cdot S_{e,x_{32}} \cdot S_{e,x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{e,x_{21}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{e,x_{21}} \cdot S_{x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{e,x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12},x_{21}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}} \cdot S_{x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{12}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{21}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13},x_{21}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} &= 1, \\
S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{21}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{32}} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13},x_{32}}^{-1} \cdot S_{x_{12}x_{13}x_{12},x_{21}}^{-1} &= 1.
\end{aligned}$$

Usando a notação adotada para os geradores encontrados no processo de reescrita, podemos escrever as relações que encontramos no processo de conjugação com os elementos da transversal de Schreier da seguinte maneira:

Para a relação r_1 temos:

$$\begin{aligned}
b_5 &= a_5 b_1 a_5, \\
b_5^2 &= b_1 a_5 b_1, \\
e_5 &= c_5 e_1 c_5, \\
f_5 &= d_5 f_1 d_5, \\
e_5^2 &= e_1 c_5 e_1,
\end{aligned}$$

$$f_5^2 = f_1 d_5 f_1.$$

Para a relação r_2 temos:

$$\begin{aligned} c_6 e_6 &= a_6 c_6, \\ d_6 f_2 &= c_6 b_6, \\ c_2 a_6 &= c_6 e_6 f_6, \\ d_2 b_6 &= d_6 f_2 e_6, \\ e_2 f_6 d_2 &= e_6 c_6 a_6, \\ f_2 e_6 b_2 &= f_6 d_2 b_6. \end{aligned}$$

Para a relação r_3 temos:

$$\begin{aligned} a_6 b_3 a_6 &= a_3 b_6 a_3, \\ b_6 a_3 b_6 &= b_3 a_6 b_3, \\ c_6 e_3 c_6 &= c_3 e_6 c_3, \\ d_6 f_3 d_6 &= d_3 f_6 d_3, \\ f_6 d_3 f_6 &= f_3 d_6 f_3, \\ e_6 c_3 e_6 &= e_3 c_6 e_3. \end{aligned}$$

Podemos observar que os geradores a_1, a_2, b_2, c_1, d_1 são triviais e b_5, e_5, f_5 são supérfluos, já que podem ser escritos como combinação de outros.

Note também que a_4, b_4, c_4, d_4 e f_4 não aparecem em nenhuma das relações acima, desta maneira, estes geradores podem ser vistos como geradores de um grupo livre de posto 5 que chamaremos de F_5 .

$$F_5 = \langle a_4, b_4, c_4, d_4, f_4 \mid - \rangle.$$

Seguindo com a análise do grupo EP_3 , notemos que os geradores a_5, b_1, c_5, d_5, e_1 e f_1 se relacionam nas primeiras seis relações, oriundas da conjugação dos elementos da transversal de Schreier com a relação r_1 , mas não aparecem em nenhuma outra conjugação, isso é, esses geram um grupo abstrato que chamaremos de G_1 .

$$G_1 = \langle a_5, b_1, c_5, d_5, e_1, f_1 \mid R_1, R_2, R_3 \rangle,$$

onde as relações R_i são ,

$$R_1 : (a_5 b_1 a_5)^2 = b_1 a_5 b_1;$$

$$R_2 : (c_5 e_1 c_5)^2 = e_1 c_5 e_1;$$

$$R_3 : (d_5 f_1 d_5)^2 = f_1 d_5 f_1;$$

Os geradores

$$\{a_3, a_6, b_3, b_6, c_2, c_3, c_6, d_2, d_3, d_6, e_2, e_3, e_4, e_6, f_2, f_3\}$$

estão interligados através da conjugação dos elementos da transversal de Schreier com as relações r_2 e r_3 , assim formam um outro grupo abstrato que denotaremos por G_2 .

$$G_2 = \langle a_3, a_6, b_3, b_6, c_2, c_3, c_6, d_2, d_3, d_6, e_2, e_3, e_4, e_6, f_2, f_3 \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 \rangle,$$

onde as relações R_i são

$$R_1 : d_6 f_2 = c_6 b_6$$

$$R_2 : c_2 a_6 = c_6 e_4 f_6$$

$$R_3 : d_2 b_6 = d_6 f_2 e_6$$

$$R_4 : f_2 e_6 c_2 = f_6 d_2 b_6$$

$$R_5 : a_6 d_6 f_6 d_2 = c_6 e_6 c_2 a_6$$

$$R_6 : b_6 a_6 b_3 a_6 b_6 = b_3 a_6 b_3 b_6^{-1} b_3 a_6 b_3$$

$$R_7 : c_6 e_6 c_3 e_6 c_6 = c_3 e_6 c_3 c_6^{-1} c_3 e_6 c_3$$

$$R_8 : f_6 d_6 f_3 d_6 f_6 = f_3 d_6 f_3 f_6^{-1} f_3 d_6 f_3$$

Como esses grupos não tem interseção, EP_3 pode ser escrito como um produto livre entre os mesmos, ou seja,

$$EP_3 = F_5 * G_1 * G_2.$$

Essa é uma apresentação para EP_3 .

Referências Bibliográficas

- [1] BARDAKOV, V. G. ; BELLINGERI, P. *Combinatorial properties of virtual braids*. Topology and its Applications 156 (2009), 1071–1082.
- [2] BARDAKOV, V. G. *The virtual and universal braids*. Fundam. Math., 184 (2004), 1-18.
- [3] BELLINGERI, P.; PARIS, L. *Virtual braids and permutations*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 70 (3) (2020), 1341–1362.
- [4] BELLINGERI, P.; GUASCHI, J; GERVAIS, S. *Lower central series for Artin–Tits and surface braid groups*. J. Algebra 319 (2008) 1409–1427.
- [5] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. 4.ed. Rio de Janeiro : IMPAR, 2006.
- [6] GORIN, E. A. ; LIN, V. Y. *Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids*, Math. USSR Sb. 7 (1969) 569–596.
- [7] HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston. Inc. New York, 1974.
- [8] KAMADA S. *Invariants of virtual braids and a remark on left stabilisations and virtual exchange moves*, Kobe J. Math. 21 (2004) 33–49.
- [9] KAUFFMAN L. H. *Virtual knot theory*. Eur. J. Comb. 20, 7 (1999), 663–690.
- [10] LIN, V. Y. *Braids and permutations*. <http://arXiv.org>, math. 2004.
- [11] MAGNUS W.; KARRASS A.; SOLITAR D. *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations*. Reimpressão da Interscience Publishers, Nova York, 1966.
- [12] MARSHALL, H. J. *The theory of group*. New york:The Macmillian Campony, 1963.
- [13] MURASUGI, K. ; KURPITA, B. *A study of braids vol. 484 of Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

- [14] ROBINSON D. J. S. *A course in the theory of finite groups*. Second Edition, Nova York, 1991.
- [15] ROTMAN J. J. *An introduction to the Theory of Groups*, Springer, (1995).
- [16] SILVA T. F. *Nilpotência e p -Nilpotência de Grupos Finitos*. 2015. 59f. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal de Campina Grande Centro de Ciências e Tecnologia, Paraíba, 2015.
- [17] VERSHININ V. V. *On homology of virtual braids and Burau representation*. J. Knot Theory Ramifications 10, 5 (2001), 795–812.

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Programa de pós-graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>