



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



MÉTRICA ASSIMÉTRICA DE FUBINI-STUDY NA GRASSMANNIANA TOTAL

Drahcir Alexander Blanco Garcia

SALVADOR, BA

2023

Drahcir Alexander Blanco Garcia

MÉTRICA ASSIMÉTRICA DE FUBINI-STUDY NA GRASSMANNIANA TOTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao colegiado do curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Orientador: André Luís Godinho Mandolesi

SALVADOR, BA

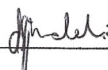
2023

Métrica Assimétrica de Fubini-Study na Grassmanniana Total

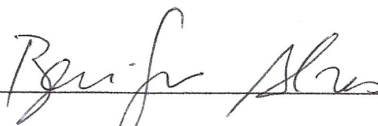
Drahcir Alexander Blanco Garcia

Dissertação apresentada ao Colegiado do
Curso de Pós-graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia, como
requisito parcial para obtenção do Título
de Mestre em Matemática.

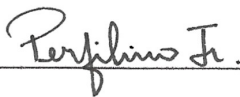
Banca examinadora



Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi (UFBA)



Prof.^a. Dr.^a. Benigno Oliveira Alves (UFBA)



Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Júnior (UFBA)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722c Blanco Garcia, Drahcir Alexander.
MÉTRICA ASSIMÉTRICA DE FUBINI-STUDY NA GRASSMANNIANA TOTAL / Drahcir Alexander
Blanco Garcia. – SALVADOR, BA, 2023
45 f. : il. color

Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, SALVADOR, BA, 2023.
Orientador: Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi.

1. Ângulos entre subespaços. 2. Álgebra de Grassmann. 3. Métrica assimétrica. I. Mandolesi, André Luís Godinho. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. MÉTRICA ASSIMÉTRICA DE FUBINI-STUDY NA GRASSMANNIANA TOTAL.

Agradecimentos

Expresso meu agradecimento às seguintes pessoas e instituições:

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo apoio financeiro;

Ao meu orientador André Luís Godinho Mandolesi, pelo aprendizado, paciência e incentivo. Obrigado por confiar no meu potencial;

Aos meus amigos, agradeço imensamente por não me fazerem conhecer a solidão. Vocês amigos da Venezuela, daqui do Brasil e outros países, me mostraram que para amizade verdadeira não existe distância. Sempre os trarei no meu coração;

A minha namorada Manuela, a luz mais brilhante nas noites mais escuras;

Aos meus pais, Oly e Richard, que tanto amo. Os principais responsáveis pelo meu sucesso;

Ao Brasil, este belo país que me acolheu e trouxe oportunidades para minha vida pessoal e profissional. Espero um dia retribuir.

"Para o lucro do triunfo sempre foi indispensável passar pela senda dos sacrifícios"

Simón Bolívar

★ 1783 — † 1830

Resumo

Existem várias aplicações para as métricas sobre as Grassmannianas, como aprendizado de máquina, comunicação sem fio e visão computacional. No entanto, o cálculo das distâncias entre subespaços de diferentes dimensões apresenta desafios, especialmente devido à assimetria dimensional desses subespaços. Portanto, é necessário utilizar métricas assimétricas para lidar com essa situação. Neste trabalho, estendemos a métrica Fubini-Study como um ângulo assimétrico, que possui propriedades úteis e é de fácil cálculo.

Palavras-chave: Grassmanniana; Métrica assimétrica; Fubini-Study; Ângulos entre subespaços; Álgebra de Grassmann.

Abstract

There are several applications for metrics on Grassmannians, such as machine learning, wireless communication, and computer vision. However, computing the distances between subspaces of different dimensions presents challenges, especially due to the dimensional asymmetry of these subspaces. Therefore, it is necessary to use asymmetric metrics to deal with this situation. In this paper, we extend the Fubini-Study metric as an asymmetric angle, which has useful properties and is easy to compute.

Keywords: Grassmannian; Asymmetric metric; Fubini-Study; Angle between subspaces; Grassmann algebra.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	3
2.1	Álgebra exterior (Álgebra de Grassmann)	3
2.2	Ângulos principais	6
2.3	Grassmannianas	9
2.4	Métricas sobre as Grassmannianas	12
2.5	Distâncias na Grassmanniana total	13
2.6	Métricas assimétricas	14
3	MÉTRICA DE FUBINI-STUDY ASSIMÉTRICA	19
3.1	Ortogonalidade parcial	19
3.2	Ângulo assimétrico	21
3.3	Métrica de Fubini-Study assimétrica	28
3.4	Produtos e ângulos	29
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	35
	APÊNDICE A ÁLGEBRA LINEAR	39
	APÊNDICE B TOPOLOGIA	43
B.1	Topologia quociente	43

Capítulo 1

Introdução

Os subespaços vetoriais são usados para representar dados em diversas áreas, como análise e mineração de dados [1, 2, 3], reconhecimento de padrões e visão computacional [4, 5], processamento de sinais e comunicações, análise espectral e teoria dos grafos [6], etc.

A fim de avaliar a separação entre conjuntos de dados, são empregadas diversas métricas em Grassmannianas. As Grassmannianas consistem em conjuntos de subespaços de uma dimensão específica. Entre as métricas utilizadas estão a métrica Fubini-Study, a distância geodésica, a Projeção de Frobenius, a métrica Binet-Cauchy, entre outras [7, 8, 9].

Além disso, o Grassmanniano total, que contém subespaços de diferentes dimensões, desempenha um papel importante em diversas aplicações, como reconhecimento de imagens, álgebra linear numérica e comunicação sem fio [10, 11, 12].

No entanto, as distâncias disponíveis para medir a separação entre subespaços de dimensões distintas, como distância gap e gap de contenção [12], distância simétrica [13], projeção de Frobenius [11], entre outras [8], apresentam limitações significativas. Algumas dessas distâncias não atendem aos critérios de métrica válida, enquanto outras fornecem informações insuficientes ou não possuem propriedades úteis. Essas limitações surgem devido à assimetria inerente entre subespaços de diferentes dimensões, que não pode ser adequadamente expressa pelas métricas simétricas tradicionais.

A métrica Fubini-Study tem diversas aplicações, incluindo computação quântica e comunicação sem fio [14, 15]. Além disso, possui propriedades interessantes, como ser uma métrica Riemanniana, o que possibilita a utilização de técnicas e ferramentas da geometria diferencial no estudo e análise de subespaços [16].

Essa métrica emerge de forma natural quando se utiliza a Álgebra de Grassmann para representar subespaços vetoriais. Ela é uma medida angular que quantifica a contração do volume resultante das projeções ortogonais entre os subespaços. Sua finalidade é representar a magnitude dessa contração. É possível estender essa métrica para uma versão assimétrica no Grassmanniano total [17], por meio da utilização de um ângulo assimétrico que possui propriedades superiores em

comparação com ângulos simétricos semelhantes.

A álgebra de Grassmann [18, 19], também conhecida como álgebra exterior, foi introduzida por Hermann Grassmann, um matemático alemão, em sua obra principal intitulada "Teoria da Extensão Linear, um novo ramo da matemática", publicada em 1844 [20].

Os elementos da álgebra são multivetores, que são generalizações multidimensionais do conceito de vetor. Os multivetores simples, também conhecidos como blades, são utilizados para representar subespaços. Os produtos internos e externos entre esses elementos permitem estudar as relações entre os subespaços e, principalmente, definir uma distância entre eles.

A métrica Fubini-Study é uma ferramenta baseada nos ângulos entre blades que representam os subespaços. Sua definição leva em conta a estrutura geométrica do espaço projetivo e permite medir a distância entre dois subespaços no Grassmanniano, oferecendo uma avaliação precisa de sua separação.

As métricas assimétricas [21, 22], são um tipo de medidas de distância em problemas que envolvem a comparação de elementos que possuem uma relação assimétrica entre si. Por exemplo, se houver ruas de sentido único, a rota mais curta do ponto **A** para o ponto **B** pode não ser a mesma que a rota mais curta do ponto **B** para o ponto **A**. Outros termos para isso são "quase métrica" ou "quase distância" [23].

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, será dedicada uma seção para discutir a álgebra exterior, explorando seus conceitos fundamentais e sua relação com a teoria dos Grassmannianos. Além disso, será apresentada uma breve descrição do mergulho de Plücker, que desempenha um papel crucial na representação dos subespaços. Ainda neste capítulo, serão discutidas métricas utilizadas nos Grassmannianos, examinando diferentes abordagens de medição de distância entre subespaços. Por fim, uma atenção especial será dada à exploração e análise de métricas assimétricas, que possuem propriedades distintas e oferecem uma perspectiva única na comparação de subespaços.

No Capítulo 3, é realizado um estudo aprofundado sobre o ângulo assimétrico. Nesse capítulo, são exploradas suas propriedades e características, oferecendo uma compreensão mais abrangente sobre o assunto. O capítulo também encerra com algumas observações sobre a relação do ângulo assimétrico com produtos da álgebra de Grassmann.

Além disso, esta tese tem dois apêndices que tratam de aspectos complementares e relevantes do estudo. O Apêndice A apresenta tópicos específicos e básicos de álgebra linear. O Apêndice B trata um pouco da topologia de quociente.

Capítulo 2

Preliminares

Neste trabalho, serão utilizados somente espaços vetoriais reais com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O ângulo entre vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ diferentes de zero é dado por $\theta_{v,w} = \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \right) \in [0, \pi]$. Para um subespaço $W \subset \mathbb{R}^n$, a projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre W é denotada por $P_W : \mathbb{R}^n \rightarrow W$.

2.1 Álgebra exterior (Álgebra de Grassmann)

Nesta seção, apresentamos brevemente algumas definições que serão usadas ao longo do trabalho. Usaremos ideias e conclusões de livros didáticos introdutórios sobre álgebra exterior, como [18] ou [19], que não são apresentados aqui, mas podem ser encontrados nessas referências.

A *álgebra exterior de Grassmann* de \mathbb{R}^n é uma álgebra graduada

$$\bigwedge \mathbb{R}^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge^p \mathbb{R}^n = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge^p \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^n \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n \mathbb{R}^n,$$

onde $\bigwedge^0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, $\bigwedge^1 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ e $\bigwedge^p \mathbb{R}^n = \{0\}$ para $p \notin [0, n]$. Ela tem um *produto exterior*

$$\wedge : \bigwedge^p \mathbb{R}^n \times \bigwedge^q \mathbb{R}^n \rightarrow \bigwedge^{p+q} \mathbb{R}^n,$$

com as seguintes propriedades, para $A, B, C \in \bigwedge \mathbb{R}^n$:

- **Bilinearidade:** $A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$, $A \wedge (\lambda B) = \lambda (A \wedge B)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$;
- **Alternatividade:** $A \wedge B = (-1)^{pq} (B \wedge A)$, se $A \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n$ e $B \in \bigwedge^q \mathbb{R}^n$;
- **Propriedade associativa:** $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

Observação 2.1

Em particular, $v \wedge w = -w \wedge v$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$, logo $v \wedge v = 0$.

Elementos de $\bigwedge \mathbb{R}^n$ são *multivetores*, os de $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$ são *p-vetores*, e são combinações lineares de blades (ou multivetores simples): uma *blade de grau p*, (ou *p-vetor simples*), é $A = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$,

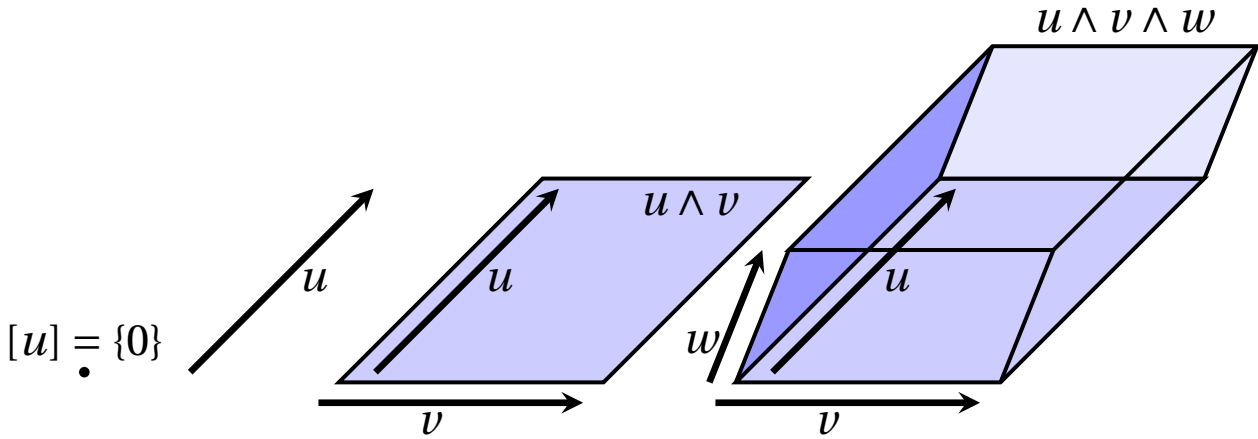


Figura 1 – Em \mathbb{R}^3 um 0-blade é um escalar λ , um 1-blade é um vetor u , um 2-blade é apresentado como um paralelogramo $u \wedge v$, e um 3-blade como um paralelepípedo $u \wedge v \wedge w$. Suas normas são $|\lambda|$, o comprimento de u , a área de $u \wedge v$ e o volume de $u \wedge v \wedge w$

com $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Temos $A \neq 0$ se, e somente se, os vetores $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes, e nesse caso A representa o paralelepípedo orientado gerado por v_1, \dots, v_p (Figura 1), e também representa um subespaço

$$[A] = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\} = \{v \in \mathbb{R}^n : v \wedge A = 0\}.$$

Dadas duas p -uplas de vetores linearmente independentes $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ e $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$, essas p -uplas geram o mesmo subespaço V de \mathbb{R}^n se, e somente se, existe um escalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, tal que $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = \lambda (u_1 \wedge \dots \wedge u_p)$. Se $\lambda \geq 0$ dizemos que essas blades têm a *mesma orientação*, em caso de que $\lambda < 0$ então elas têm *orientação oposta*.

O volume p -dimensional do paralelepípedo gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_p) = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix}}.$$

O determinante $\det(\langle v_i, v_j \rangle)$, conhecido como o *determinante de Gram* (ou *Gramiano*), só será diferente de zero quando os vetores $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ forem linearmente independentes, já que volume p -dimensional de um paralelepípedo degenerado (isto é, contido em um subespaço de dimensão $< p$) deve ser nulo.

Definimos o *produto interno* de $A = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ e $B = w_1 \wedge \dots \wedge w_p$, por

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, w_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, w_p \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Como o determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada de suas linhas e de suas colunas, é possível demonstrar que o produto interno é bem definido. Como o valor $\det(\langle v_i, w_j \rangle)$

não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas, segue-se que (2.1) é uma forma simétrica, isto é, $\det(\langle v_i, w_j \rangle) = \det(\langle w_i, v_j \rangle)$. Pela parte anterior, onde o volume foi definido, temos que $\det(\langle v_i, v_j \rangle) \geq 0$ para todo $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$, e $A = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$ implica que $\det(\langle v_i, v_j \rangle) > 0$. Portanto, (2.1) induz um *produto interno* em $\wedge^p \mathbb{R}^n$. Ele é estendido a $\wedge \mathbb{R}^n$ pondo $\langle A, B \rangle = 0$ se A e B tiverem graus diferentes.

Assim $\wedge^p \mathbb{R}^n$ fica munido de uma estrutura de espaço vetorial euclidiano, relativamente ao qual o comprimento de um p -vetor $A = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ coincide com o volume p -dimensional do paralelepípedo determinado em \mathbb{R}^n pelos vetores v_1, \dots, v_p . Vamos escrever

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}.$$

Algumas propriedades úteis que usaremos mais adiante são:

- Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ temos $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \text{sen}(\theta_{u,v})$, pois:

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \det \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (\langle u, v \rangle)^2 \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \cos^2(\theta_{u,v}) \\ &= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \text{sen}^2(\theta_{u,v}). \end{aligned}$$

- Dados $A = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ e $B = w_1 \wedge \dots \wedge w_q$, se $[A] \perp [B]$, então $\|A \wedge B\| = \|A\| \cdot \|B\|$. De fato, em primeiro lugar $\langle v_i, w_j \rangle = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$, logo

$$\|A \wedge B\|^2 = \det \left(\begin{array}{c|c} (\langle v_i, v_j \rangle) & 0_{p \times q} \\ \hline 0_{q \times p} & (\langle w_i, w_j \rangle) \end{array} \right) = \det(\langle v_i, v_j \rangle) \cdot \det(\langle w_i, w_j \rangle) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \quad (2.2)$$

Se $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ é base do subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$, uma base de $\wedge^k V \subset \wedge^k \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p\}.$$

Ela é formada pelos produtos exteriores de cada combinação (no sentido de combinatória) de k de esses vetores, sendo ortonormal se B for. A dimensão de $\wedge^k V$ é

$$\dim \left(\wedge^k V \right) = \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Assim,

$$\dim(\wedge \mathbb{R}^n) = \sum_{p=0}^n \dim \left(\wedge^p \mathbb{R}^n \right) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

Se $V = [A]$ para um p -blade $A = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$ então

$$\wedge^p [A] = \{cA : c \in \mathbb{R}\} = \text{span} \{v_1 \wedge \dots \wedge v_p\},$$

é uma *linha* (subespaço de dimensão 1) em $\wedge \mathbb{R}^n$.

Toda transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se entende a um *morfismo exterior* $T: \wedge \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge \mathbb{R}^n$, que é uma transformação linear tal que $T(A \wedge B) = T(A) \wedge T(B)$. Em particular, a projeção ortogonal $P_W: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ se estende a $P_W: \wedge \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge W$, com

$$P_W(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p).$$

E pode se mostrar que essa P_W estendida é a projeção ortogonal de $\wedge \mathbb{R}^n$ em $\wedge W$. De fato, é claro que $P_W(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \in \wedge^p W$, por outro lado, pondo $v_i^\perp = v_i - P_W(v_i)$ para $i \in \{1, \dots, p\}$, temos

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_p &= (P_W(v_1) + v_1^\perp) \wedge \cdots \wedge (P_W(v_p) + v_p^\perp) \\ &= (P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p)) + (P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge v_p^\perp) + \cdots + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge P_W(v_p)) + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge v_p^\perp). \end{aligned}$$

Logo,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p - (P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p)) = (P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge v_p^\perp) + \cdots + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge P_W(v_p)) + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge v_p^\perp).$$

Seja $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \in \wedge^p W$ e levando em consideração que $\langle v_i^\perp, w_i \rangle = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, temos

$$\begin{aligned} \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p - P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p), w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle &= \\ &= \langle (P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge v_p^\perp) + \cdots + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge P_W(v_p)) + (v_1^\perp \wedge \cdots \wedge v_p^\perp), w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle \\ &= \langle P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge v_p^\perp, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle + \cdots + \langle v_1^\perp \wedge \cdots \wedge P_W(v_p), w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle + \langle v_1^\perp \wedge \cdots \wedge v_p^\perp, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como vale para todo $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \in \wedge^p W$, segue-se que

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p - P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p) \perp \wedge^p W.$$

2.2 Ângulos principais

A relação de inclinação entre subespaços em dimensões elevadas não pode ser adequadamente representada por um único ângulo. Isso requer uma lista de ângulos principais, também conhecidos como ângulos de Jordan ou canônicos, que são descritos em [9, 24, 25]. Esses ângulos foram inicialmente introduzidos por Jordan em 1875 [26] e são amplamente utilizados em áreas como estatística, análise numérica e outras disciplinas, e no estudo de Grassmannianas. Existem também outros conceitos de ângulos entre subespaços em \mathbb{R}^n , conforme discutido em referências como [27, 28].

Definição 2.2

Bases ortonormais $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ dos subespaços $V, W \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente são *bases principais associadas*, formadas por *vetores principais*, se

$$\langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j; \\ \cos(\theta_i) & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (2.3)$$

para todo $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, onde

$$0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$$

são os ângulos principais de V e W ($m = \min\{p, q\}$).

As bases principais podem ser obtidas através de uma decomposição de valores singulares¹ da projeção ortogonal $P : V \rightarrow W$, se $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$ são seus valores singulares então $\cos(\theta_i) = \sigma_i$. Portanto, os $\cos^2(\theta_i)$'s são os autovalores de P^*P se $p \leq q$, ou PP^* se $p > q$, (onde P^* é a adjunta de P) enquanto os e_i 's e f_i 's são autovetores ortonormais de P^*P e PP^* respectivamente. Os θ_i 's são definidos de forma única, mas os e_i 's e f_i 's não são.

Uma maneira de descrever isso de forma recursiva é que os vetores e_1 e f_1 estão relacionados pelo ângulo mínimo

$$\theta_1 = \min\{\theta_{v,w} : 0 \neq v \in V, 0 \neq w \in W\}.$$

Em seguida, nos complementos ortogonais desses vetores, encontramos da mesma forma os vetores e_2, f_2 e o ângulo θ_2 correspondente. Esse processo continua repetindo-se, gerando vetores e subespaços adicionais com ângulos mínimos. Para $i > m$, outros vetores são selecionados para completar uma base ortonormal.

Exemplo 2.3

Consideremos a base canônica de \mathbb{R}^5 ,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando

$$e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}v_1 + v_4) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}v_2 + v_3) = \frac{1}{2}(0, \sqrt{3}, 1, 0, 0)$$

temos que $B_V = \{e_1, e_2\}$ e $B_W = \{f_1 = v_1, f_2 = v_3, f_3 = v_5\}$ são bases principais de $V = \text{span}\{e_1, e_2\}$ e $W = \text{span}\{f_1, f_2, f_3\}$, pois $\min\{\dim(V), \dim(W)\} = 2$ e temos

- $\langle e_1, f_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta_1 = \frac{\pi}{6}$
- $\langle e_1, f_2 \rangle = \langle e_2, f_1 \rangle = \langle e_1, f_3 \rangle = \langle e_2, f_3 \rangle = 0$
- $\langle e_2, f_2 \rangle = \frac{1}{2} \implies \cos(\theta_2) = \frac{1}{2} \iff \theta_2 = \frac{\pi}{3}$

Logo, os ângulos principais de V e W são $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_2 = 60^\circ$.

¹ Para obter mais detalhes sobre essa decomposição, é recomendável consultar a referência [29]

O resultado a seguir revela que qualquer conceito de distância entre subespaços deve ser determinada pelos ângulos principais e pelas dimensões dos espaços, para que não se altere quando é sujeita a transformações ortogonais.

Proposição 2.4

Dados dois pares (V, W) e (V_1, W_1) de subespaços de \mathbb{R}^n , com $\dim(V) = \dim(V_1)$ e $\dim(W) = \dim(W_1)$, existe uma transformação ortogonal levando V para V_1 e W para W_1 se, e somente se, ambos os pares tiverem os mesmos ângulos principais.

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 2.5

Com a notação da Definição 2.2 acima, seja $A = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$.

1. Se $V \not\perp W$ então $P_W(V) = [f_1 \wedge \cdots \wedge f_k]$ para $k = \max\{i : \theta_i \neq \frac{\pi}{2}\}$, e os ângulos principais entre V e $P_W(V)$ são $\theta_1, \dots, \theta_k$.
2. $P_W(A) = \cos(\theta_1) \cdots \cos(\theta_p) f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ se $p \leq q$, caso contrário $P_W(A) = 0$.
3. $[P_W(A)] = P_W(V) \iff P_W(A) \neq 0$ ou $V \perp W$.

Demonstração. Temos que

$$P_W(e_i) = \begin{cases} \cos(\theta_i) f_i & \text{se } i \leq m; \\ 0 & \text{se } i > m, \end{cases}$$

onde $m = \min\{\dim(V), \dim(W)\}$. Logo,

Prova 1. Como $P_W(e_i) = \cos(\theta_i) f_i \neq 0 \iff i \leq k$,

$$\begin{aligned} P_W(V) &= \text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_p)\} \\ &= \text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_k)\} \\ &= \text{span}\{f_1, \dots, f_k\} \\ &= [f_1 \wedge \cdots \wedge f_k] \end{aligned}$$

Alem disso, $\{e_1, \dots, e_k\}$ e $\{f_1, \dots, f_k\}$ são bases principais de V e $P_W(V)$, com $\theta_1, \dots, \theta_k$ seus ângulos principais.

Prova 2. Vamos inicialmente assumir que $p \leq q$, e sendo $A = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$, obtemos que

$$\begin{aligned} P_W(A) &= P_W(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) \\ &= P_W(e_1) \wedge \cdots \wedge P_W(e_p) \\ &= \cos(\theta_1) f_1 \wedge \cdots \wedge \cos(\theta_p) f_p \\ &= \cos(\theta_1) \cdots \cos(\theta_p) f_1 \wedge \cdots \wedge f_p. \end{aligned}$$

Se $p > q$. Então o conjunto de vetores $\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_p)\}$, são linearmente dependentes logo

$$P_W(A) = P_W(e_1) \wedge \dots \wedge P_W(e_p) = 0.$$

Prova 3. Se $V \perp W$ então $P_W(A) = 0$ e $P_W(V) = \{0\}$. Se $V \not\perp W$ então

$$P_W(A) \neq 0 \iff \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) (f_1 \wedge \dots \wedge f_p) \neq 0$$

$$\iff \theta_p \neq \frac{\pi}{2} \quad (k = p \text{ em 1})$$

$$\iff P_W(V) = [f_1 \wedge \dots \wedge f_p] = [P_W(A)] \quad (\text{por 2}). \quad \square$$

2.3 Grassmannianas

Nesta seção, estudaremos os conceitos básicos de *Grassmannianas* e o *espaço projetivo*. É feita também uma descrição do *mergulho de Plücker*, que estabelece uma conexão essencial entre as Grassmannianas e o espaço projetivo da álgebra exterior [25, 31].

Definição 2.6 (Primeira definição de Espaço Projetivo)

Em $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, definimos uma relação de equivalência \sim pondo

$$x \sim y \iff y = tx \text{ para algum } t \neq 0.$$

O espaço quociente $\mathbb{R}P^n = X / \sim$ chama-se o *espaço projetivo real n -dimensional*. Também usamos a notação $\mathbb{P}(X)$.

Observação 2.7

Geometricamente, cada classe $[x] = \{y : x \sim y\} \in \mathbb{R}P^n$ pode ser identificada com a reta em \mathbb{R}^{n+1} que passa pela origem, cuja direção é dada pelo vetor x . Ou seja, $\mathbb{R}P^n = \{\text{Linhas em } \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Consideremos a aplicação quociente $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}P^n$ que leva cada ponto $x \in X$ para sua classe de equivalência, e fixemos um subconjunto aberto $A \subset X$, temos:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in X : x \sim a \text{ para algum } a \in A\} \\ &= \{x \in X : x = ta \text{ para algum } t \neq 0 \text{ e } a \in A\} \\ &= \bigcup_{t \neq 0} \{ta : a \in A\}. \end{aligned}$$

Cada conjunto $tA = \{ta : a \in A\}$ é aberto, logo $\pi^{-1}(\pi(A))$ é aberto, pois é a união arbitrária de conjuntos abertos. Por outro lado, da definição de topologia quociente, temos que $\pi(A)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}P^n$, portanto π é uma aplicação aberta.

Vamos agora provar que a topologia

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R}P^n : \pi^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$$

em $\mathbb{R}P^n$ é de Hausdorff. Consideremos a função $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

para todo $x, y \in X$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 0 &\iff x_i y_j - x_j y_i = 0, i \neq j; \\ &\iff y_i = t x_i \text{ para algum } t \neq 0; \\ &\iff x \sim y. \end{aligned}$$

ou seja

$$R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\} = \varphi^{-1}(0).$$

R é um conjunto fechado em $X \times X$ uma vez que φ é uma função claramente contínua, o que implica que o espaço topológico $(\mathbb{R}P^n, \tau)$ é de Hausdorff pela Proposição B.4, localizada no anexo.

Outra maneira de pensar o espaço projetivo real é como um espaço quociente de uma n -esfera com antípodas identificadas.

Definição 2.8 (Segunda definição de Espaço Projetivo)

Em $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos uma relação de equivalência \sim pondo

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x = -y \quad (x, y \in \mathbb{S}^n)$$

denotamos o espaço quociente \mathbb{S}^n / \sim como \mathbb{P}^n .

Observação 2.9

A aplicação do quociente $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, definida por $\tilde{\pi}(x) = [x] = \{x, -x\}$, é semelhante à parte anterior. Podemos dizer que U é um conjunto aberto em \mathbb{P}^n se $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ é um conjunto aberto em \mathbb{S}^n , onde \mathbb{S}^n é dotado da topologia induzida de \mathbb{R}^{n+1} .

Observação 2.10

A aplicação $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ é contínua e sobrejetiva, temos que $\tilde{\pi}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{P}^n$ é compacto e conexo.

Proposição 2.11

O espaço $\mathbb{R}P^n$ é homeomorfo a \mathbb{P}^n .

Demonstração. Seja $\pi|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a projeção. Dois pontos $x, y \in \mathbb{S}^n$ têm a mesma imagem conforme $\pi|_{\mathbb{S}^n}$, precisamente quando $x = \pm y$, ou seja, $x \sim y \iff \pi|_{\mathbb{S}^n}(x) = \pi|_{\mathbb{S}^n}(y)$. Considerando o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & & \\ \tilde{\pi} \downarrow & \searrow \pi|_{\mathbb{S}^n} & \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

segue do Teorema B.3 de passagem ao quociente, que φ é uma bijeção contínua. Como \mathbb{P}^n é compacto e $\mathbb{R}P^n$ é Hausdorff, obtemos que φ é um homeomorfismo. \square

No espaço projetivo real, a distância entre linhas é seu ângulo. Chamamos o ângulo entre linhas de *distância Fubini-Study*² d_{FS} , dada por,

$$d_{FS}(K, L) = d_{FS}(\text{span}\{u\}, \text{span}\{w\}) = \cos^{-1} \left(\frac{|\langle u, w \rangle|}{\|u\| \cdot \|w\|} \right) = \theta_{K,L},$$

onde $K = \text{span}\{u\}$ e $L = \text{span}\{w\}$. \mathbb{P}^n é um espaço métrico com essa métrica.

Definição 2.12

Para qualquer inteiro $0 \leq p \leq n$, denotamos por:

$$\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n) = \{V \subset \mathbb{R}^n : \dim(V) = p\}$$

o conjunto de todos os subespaços de dimensão p de \mathbb{R}^n , chamado de *Grassmanniana*.

Observação 2.13

Para cada número inteiro $0 \leq p \leq n$, o conjunto $\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ pode ser naturalmente dotado de uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $p(n-p)$. Essa estrutura é conhecida como *variedade de Grassmann*. A construção de uma estrutura diferenciável em $\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ é um processo complexo; para obter mais detalhes, recomenda-se consultar as seguintes referências bibliográficas: [25, 31, 32].

Observação 2.14

Note que $\text{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1})$ é exatamente o espaço projetivo n -dimensional \mathbb{RP}^n .

Definição 2.15

Chamaremos *Grassmanniana total* o conjunto que representa todos os subespaços de \mathbb{R}^n , ou seja:

$$\text{Gr}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{p=0}^n \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n).$$

O espaço é chamado “total” porque inclui todos os subespaços de \mathbb{R}^n , incluindo o subespaço de dimensão zero (ou seja, o espaço reduzido a apenas o vetor nulo) e o próprio \mathbb{R}^n . Assim, é uma união disjunta de variedades de dimensões diferentes.

Observação 2.16

O Grassmanniano total tem, em geral, uma topologia natural de união disjunta em que cada $\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ é uma componente conexa.

O Grassmanniano $\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$ pode ser mergulhado no espaço projetivo $\mathbb{P}(\wedge \mathbb{R}^n)$. Essa construção é conhecida como o *mergulho de Plücker*, nomeado em homenagem a Julius Plücker³. O mergulho de Plücker é descrito detalhadamente em [33] e é uma ferramenta fundamental na geometria algébrica e na teoria de variedades.

² Ela foi estudada pela primeira vez por dois importantes geômetras de um século atrás: Fubini (1903) e Study (1905). Para mais detalhes, consulte [16].

³ Julius Plücker (1801 – 1868) foi um matemático e físico alemão conhecido por suas contribuições na geometria projetiva.

O mergulho de Plücker associa a cada elemento $V \in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ o produto exterior

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_p \in \bigwedge^p \mathbb{R}^n,$$

onde $\{e_1, \dots, e_p\}$ é uma base de V . É importante notar que diferentes bases para o mesmo subespaço gerarão múltiplos do mesmo produto exterior. Isso descreve uma aplicação bem-definida

$$\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^p \mathbb{R}^n\right),$$

que leva V na linha $\bigwedge^p V$. Esse mergulho permite levar a distância Fubini-Study do espaço projetivo para a Grassmanniana. Sejam $\{e_1, \dots, e_p\}$ e $\{f_1, \dots, f_p\}$ bases principais de V e W , respectivamente. Então, $e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ e $f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ são p -vetores unitários. A distância Fubini-Study entre V e W é dada por:

$$\begin{aligned} d_{\text{FS}} \left(\underbrace{(V, W)}_{\in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)} \right) &\stackrel{\text{Plücker}}{=} d_{\text{FS}} \left(\underbrace{\left(\bigwedge^p V, \bigwedge^p W \right)}_{\in \mathbb{P}(\bigwedge^p \mathbb{R}^n)} \right) = d_{\text{FS}} \left(\text{span}\{e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\}, \text{span}\{f_1 \wedge \cdots \wedge f_p\} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{|\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_p, f_1 \wedge \cdots \wedge f_p \rangle|}{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\| \|f_1 \wedge \cdots \wedge f_p\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\prod_{i=1}^p \langle e_i, f_i \rangle \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \right). \end{aligned}$$

2.4 Métricas sobre as Grassmannianas

As Grassmannianas admitem muitas métricas, que levam a abordagens de diferentes problemas. Esta seção descreve algumas dessas métricas.

Sejam $V, W \in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ e consideremos $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_p\}$ bases principais dos subespaços vetoriais V e W respectivamente com ângulos principais $\theta_1 \leq \cdots \leq \theta_p$

- A distância Fubini-Study [34, 35]

$$d_{\text{FS}}(V, W) = \cos^{-1} \left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \right) \quad (2.4)$$

É uma distância geodésica através do espaço ambiente $\mathbb{P}(\bigwedge^p \mathbb{R}^n)$ no mergulho de Plücker, e um ângulo que mede a contração de volume. Esta métrica leva valores entre zero e $\frac{\pi}{2}$.

- A distância geodésica [31, 34]

$$d_g(V, W) = \sqrt{\theta_1^2 + \cdots + \theta_p^2}$$

Esta métrica leva valores entre zero e $\frac{\pi\sqrt{p}}{2}$. Do ponto de vista da geometria Riemanniana, a distância geodésica é muito natural: é o comprimento da geodésica minimal (em relação a d_{FS}) ligando V a W .

- *Projeção de Frobenius* [1, 11]

$$d_{pF} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \|e_i - P_W(e_i)\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \text{sen}^2(\theta_i)}. \quad (2.5)$$

- *Binet-Cauchy* [1]

$$d_{BC} = \sqrt{1 - \prod_{i=1}^p \cos^2(\theta_i)}$$

- *Asimov* [36]

$$d_A = \theta_p.$$

- *Gap* [1, 7, 37].

$$\hat{\delta} = \|e_p - P_W(e_p)\| = \text{sen}(\theta_p)$$

2.5 Distâncias na Grassmanniana total

Sejam $V \in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \text{Gr}_q(\mathbb{R}^n)$ com ângulos principais $\theta_1, \dots, \theta_{\min\{p,q\}}$ associados com bases principais $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$. Na Grassmanniana total $\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$, temos as seguintes distâncias:

- A *distância Fubini-Study total* é obtida através do mergulho de Plücker total, ela estende d_{FS} trivialmente, pois blades de graus diferentes são ortogonais, logo $\hat{d}_{FS}(V, W) = \frac{\pi}{2}$ quando $p \neq q$.
- *Projeção de Frobenius* [10, 11]

$$d_{pF} = \left(\sum_{i=1}^{\min\{p,q\}} \text{sen}^2(\theta_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Não satisfaz uma desigualdade triangular em $\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$ (por exemplo, considere 2 linhas e o plano formado por elas).

- *Distância direcional* [38] Generaliza d_{pF} via

$$\vec{d}(V, W) = \sqrt{\sum_{i=1}^p \|e_i - P_W(e_i)\|^2} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^p \text{sen}^2(\theta_i)} & \text{se } p \leq q; \\ \sqrt{p - q + \sum_{i=1}^q \text{sen}^2(\theta_i)} & \text{se } p > q, \end{cases}$$

Não se sabe se ela satisfaz uma desigualdade triangular. Para p e q fixos, seu mínimo é $\sqrt{\max\{0, p - q\}}$, se $V \subset W$ ou $W \subset V$.

- *Distância simétrica* [13, 38]

$$d_s(V, W) = \max\{\vec{d}(V, W), \vec{d}(W, V)\} = \sqrt{|p - q| + \sum_{i=1}^{\min\{p,q\}} \text{sen}^2(\theta_i)}$$

É uma métrica. Para p e q fixos, seu mínimo é $\sqrt{|p - q|}$, se $V \subset W$ ou $W \subset V$.

- *Gap de contenção* [37] É uma métrica assimétrica que generaliza $\hat{\delta}$ via

$$\delta(V, W) = \|e_p - P_W(e_p)\| = \begin{cases} \text{sen}(\theta_p) & \text{se } p \leq q; \\ 1 & \text{se } p > q, \end{cases}$$

Como $\delta(V, W) = 0 \Leftrightarrow V \subset W$, ele mostra o quão longe V está de estar contido em W .

- *Gap* [37]

$$\hat{\delta}(V, W) = \max\{\delta(V, W), \delta(W, V)\} = \begin{cases} \text{sen}(\theta_p) & \text{se } p = q; \\ 1 & \text{se } p \neq q, \end{cases}$$

É uma métrica que estende $\hat{\delta}$ trivialmente.

Se $\dim(V) \neq \dim(W)$, as distâncias $\hat{d}_{FS}(V, W) = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{\delta}(V, W) = 1$, ou seja, elas têm valores fixos e não proporcionam novas informações. Como δ e $\hat{\delta}$ não consideram todos os ângulos principais, são distâncias fornecem poucas informações. A falta da desigualdade triangular limita a utilidade de d_{pF} e (possivelmente) \vec{d} . O fato de $d_s(V, W) \neq 0$ mesmo quando $V \not\subset W$ é inconveniente em algumas aplicações.

2.6 Métricas assimétricas

Existem métricas assimétricas, como mencionado em referências como [21, 22], que não requerem a propriedade $d(x, y) = d(y, x)$. Essas métricas são encontradas em contextos como grafos direcionados ou variedades de Finsler. Outros termos utilizados para descrever essas métricas são “quase métrica” ou “quase distância” [23].

Definição 2.17

Uma *métrica assimétrica* em um conjunto não-vazio M é uma função $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ tal que, para $x, y, z \in M$,

1. *Condição de separação*: $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. *Desigualdade triangular orientada*: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Observação 2.18

Ao invés do item 1, alguns autores adotam uma condição mais forte, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Observação 2.19

A ordem de x, y, z é importante no item 2.

Definição 2.20

Um *espaço métrico assimétrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica assimétrica em M .

Uma métrica assimétrica d em M induz outra métrica assimétrica d^- , definida por

$$d^-(x, y) = d(y, x), \text{ para todo } x, y \in M,$$

conhecida como a *conjugada de d* .

Proposição 2.21

Seja (M, d) um espaço métrico assimétrico. Se define $\hat{d} : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ pela equação

$$\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d^-(x, y)\}.$$

Então \hat{d} é uma métrica em M .

Demonstração. Vamos provar que \hat{d} satisfaz as propriedades de uma métrica.

- *Não negatividade.* Para todo $x, y \in M$ é claro que $\hat{d}(x, y) \geq 0$, e o único ponto a uma distância zero de x é o mesmo x , pois

$$\begin{aligned} \hat{d}(x, y) = 0 &\iff \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} = 0 \\ &\iff d(x, y) = d^-(x, y) = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

- *Simetria.* Para todo $x, y \in M$, temos:

$$\hat{d}(x, y) = \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} = \max\{d^-(y, x), d(y, x)\} = \hat{d}(y, x)$$

- *Desigualdade triangular.* Temos que $d(x, y) \leq \max\{d(x, y), d^-(x, y)\}$ e $d(y, z) \leq \max\{d(y, z), d^-(y, z)\}$ então

$$d(x, y) + d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} + \max\{d(y, z), d^-(y, z)\}; \quad (2.6)$$

da mesma forma

$$d^-(x, y) + d^-(y, z) \leq \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} + \max\{d(y, z), d^-(y, z)\} \quad (2.7)$$

Logo, é satisfeito para qualquer $x, y, z \in M$, que:

$$\begin{aligned} \hat{d}(x, z) &= \max\{d(x, z), d^-(x, z)\} \\ &\leq \max\{d(x, y) + d(y, z), d^-(x, y) + d^-(y, z)\} \\ &\leq \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} + \max\{d(y, z), d^-(y, z)\} \quad (\text{por 2.6 e 2.7}) \\ &= \hat{d}(x, y) + \hat{d}(y, z). \end{aligned}$$

□

Observação 2.22

A função $\check{d} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\check{d}(x, y) = \min\{d(x, y), d^-(x, y)\}$$

não é uma métrica em M . De fato, é fácil ver que as condições de não negatividade e simetria são trivialmente satisfeitas, mas a desigualdade triangular não acontece.

Definição 2.23

Definem-se as bolas básicas do espaço métrico assimétrico como:

- $B^+(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$ (bola aberta dianteira).
- $B^-(x, \epsilon) = \{y \in M : d(y, x) < \epsilon\}$ (bola aberta traseira).
- $B^+[x, \epsilon] = \{y \in M : d(x, y) \leq \epsilon\}$ (bola fechada dianteira).
- $B^-[x, \epsilon] = \{y \in M : d(y, x) \leq \epsilon\}$ (bola fechada traseira).

A seguinte Proposição 2.24 mostra a relação que existe entre as bolas abertas definidas no espaço métrico assimétrico (M, d) e o espaço métrico (M, \hat{d}) .

Proposição 2.24

Seja $\hat{B}(x, \epsilon)$ uma bola aberta no espaço métrico (M, \hat{d}) definida como $\hat{B}(x, \epsilon) = \{y \in M : \hat{d}(y, x) < \epsilon\}$. Então $\hat{B}(x, \epsilon) = B^+(x, \epsilon) \cap B^-(x, \epsilon)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 y \in \hat{B}(x, \epsilon) &\iff \hat{d}(y, x) < \epsilon \\
 &\iff \max\{d(x, y), d^-(x, y)\} < \epsilon \\
 &\iff d(x, y) < \epsilon \quad \text{e} \quad d^-(x, y) < \epsilon \\
 &\iff y \in B^+(x, \epsilon) \quad \text{e} \quad y \in B^-(x, \epsilon) \\
 &\iff y \in B^+(x, \epsilon) \cap B^-(x, \epsilon). \quad \square
 \end{aligned}$$

Definição 2.25

Seja (M, d) um espaço métrico assimétrico. Diremos que um subconjunto A de M é um *aberto assimétrico dianteiro* em (M, d) se para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B^+(x, \epsilon) \subset A$.

Proposição 2.26

Seja (M, d) um espaço métrico assimétrico. Então toda bola aberta dianteira $B^+(x, \epsilon)$ é um aberto assimétrico dianteiro em (M, d) .

Demonstração. Seja $a \in B^+(x, \epsilon)$ então $d(x, a) < \epsilon$ e portanto $\rho = \epsilon - d(x, a) > 0$. Afirmamos que $B^+(a, \rho) \subset B^+(x, \epsilon)$. De fato, se $y \in B^+(a, \rho)$ então $d(a, y) < \rho$, logo

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < d(x, a) + \rho = \epsilon.$$

Assim se tem que $y \in B^+(x, \epsilon)$. Portanto $B^+(x, \epsilon)$ é um aberto assimétrico dianteiro em (M, d) . \square

Proposição 2.27

O conjunto τ^+ formado pelos abertos assimétricos dianteiros em (M, d) é uma topologia sobre M , isto é, valem as seguintes propriedades:

1. $M \in \tau^+$ e $\emptyset \in \tau^+$.
2. Se $A_1, \dots, A_n \in \tau^+$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau^+$.
3. Se $A_\lambda \in \tau^+$ para todo $\lambda \in L$ então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau^+$.

Demonstração. Vamos provar que a coleção de conjuntos τ^+ satisfaz as condições para ser uma topologia, temos:

Prova 1. É claro que M e \emptyset são abertos assimétricos dianteiros.

Prova 2. Seja $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Como estes conjuntos são abertos assimétricos dianteiros, logo existem $\rho_1 > 0, \dots, \rho_n > 0$ tais que $B^+(a, \rho_1) \subset A_1, \dots, B^+(a, \rho_n) \subset A_n$. Seja $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, então

$$B^+(a, \rho) \subset B^+(a, \rho_i) \subset A_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim $B^+(a, \rho) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, para todo $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Portanto $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é um aberto assimétrico dianteiro em (M, d) .

Prova 3. Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ então existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como este conjunto é aberto assimétrico dianteiro, há uma bola $B^+(a, \rho) \subset A_\lambda$. Isto mostra que $B^+(a, \rho) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Portanto $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um aberto assimétrico dianteiro em (M, d) .

□

Definição 2.28

A topologia τ^+ , acima mencionada, é dita a *topologia dianteira* no espaço métrico assimétrico (M, d) .

Observação 2.29

Analogamente, considerando agora as bolas $B^-(x, \epsilon)$ em lugar das bolas $B^+(x, \epsilon)$ na Definição 2.25, obtém-se uma topologia sobre M , dita a *topologia traseira* τ^- no espaço métrico assimétrico (M, d) .

Capítulo 3

Métrica de Fubini-Study assimétrica

Primeiro descrevemos um ângulo entre subespaços de dimensões arbitrárias, e mais adiante mostramos que a d_{FS} se estende como uma métrica assimétrica em $\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Ortogonalidade parcial

Dois subespaços V e W de \mathbb{R}^n são ditos ortogonais se todo vetor em V é ortogonal a todo vetor em W , isso significa que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in V$ e todo $w \in W$. Nós iremos também precisar de um conceito mais fraco de ortogonalidade [17].

Definição 3.1

Para subespaços $V, W \subset \mathbb{R}^n$, quando existe $0 \neq v \in V$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$, dizemos que V é *parcialmente ortogonal* a W , o que é denotado como $V \perp W$.

Observação 3.2

$V \perp W$ é equivalente ao fato de que $W^\perp \cap V \neq \{0\}$.

Observação 3.3

Note que \perp não é uma relação simétrica quando $\dim(V) \neq \dim(W)$, pois qualquer plano é parcialmente ortogonal a uma linha, mas o inverso não é verdadeiro.

Proposição 3.4

Para quaisquer subespaços $V, W \subset \mathbb{R}^n$:

1. $V \perp W \iff \dim(V) > \dim(W)$ ou algum ângulo principal é $\frac{\pi}{2}$.
2. $V \perp W \iff \dim(V) > \dim(P_W(V))$.
3. $V \perp W \iff P_W(A) = 0$, onde A é um p -vetor simples que representa V .

Demonstração. Consideremos $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ bases principais dos subespaços vetoriais V e W , respectivamente, com ângulos principais $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$, onde $m = \min\{p, q\}$.

Prova 1. Se $\dim(V) > \dim(W)$ ou $\theta_p = \frac{\pi}{2}$, então $\langle e_p, f_i \rangle = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$. Assim $e_p \perp W$ e portanto $V \perp W$. Reciprocamente, suponhamos que $V \perp W$, e consideremos dois casos:

Caso 1 Se $p > q$, a primeira parte é cumprida, ou seja $\dim(V) > \dim(W)$.

Caso 2 Se $p \leq q$, da hipótese existe $v \in V$ não nulo, tal que $\langle v, w \rangle = 0$, para todo $w \in W$. Em particular, também é verdadeiro para $w = f_i$ com $i \in \{1, \dots, q\}$. Suponhamos, por absurdo, que para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ tem-se $\theta_i \neq \frac{\pi}{2}$. Escrevendo o vetor $v \in V$ como uma combinação linear de vetores da base B_V , temos, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle v, f_i \rangle &= \langle \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p, f_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle e_1, f_i \rangle + \dots + \alpha_p \langle e_p, f_i \rangle \\ &= \alpha_i \langle e_i, f_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Pela suposição feita, $\langle e_i, f_i \rangle \neq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, isso exige que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, ou seja $v \in V$ é o vetor nulo. (contradição!). Portanto, a suposição é falsa e deve haver um ângulo principal igual a $\frac{\pi}{2}$.

Prova 2. Suponhamos que $V \perp W$. Então, temos dois casos:

Caso 1 $\dim(V) > \dim(W)$, note que $P_W(V)$ é um subespaço de W ; então, $\dim(W) \geq \dim(P_W(V))$, logo:

$$\dim(V) > \dim(W) \geq \dim(P_W(V)).$$

Caso 2 $\dim(V) \leq \dim(W)$. Pelo resultado anterior, existe um ângulo principal igual a $\frac{\pi}{2}$. Como eles estão ordenados, temos que $\theta_p = \frac{\pi}{2}$, logo $P_W(e_p) = \cos(\theta_p) f_p = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} P_W(V) &= \text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_p)\} \\ &= \text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_{p-1}), 0\}. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dim(P_W(V)) \leq p - 1 < \dim(V).$$

Reciprocamente, suponhamos que $\dim(V) > \dim(P_W(V))$. Como $P_W(e_i) \perp P_W(e_j)$ se $i \neq j$, temos

$$\dim(P_W(V)) = \dim(\text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_p)\}) < p \implies P_W(e_p) = 0,$$

ou seja $e_p \perp W$. Isto implica que $V \perp W$.

Prova 3. Seja $A = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$, a prova também será válida para qualquer outro p -vetor que represente o mesmo subespaço V , já que ele será um múltiplo de A . Se $p > q$, então pela parte 2 do Lema 2.5 obtemos o que é exigido, caso contrário, se $p \leq q$ temos:

$$\begin{aligned} P_W(A) = 0 &\iff \cos(\theta_1) f_1 \wedge \dots \wedge \cos(\theta_p) f_p = 0 \\ &\iff \theta_p = \frac{\pi}{2} \\ &\iff V \perp W. \end{aligned}$$

□

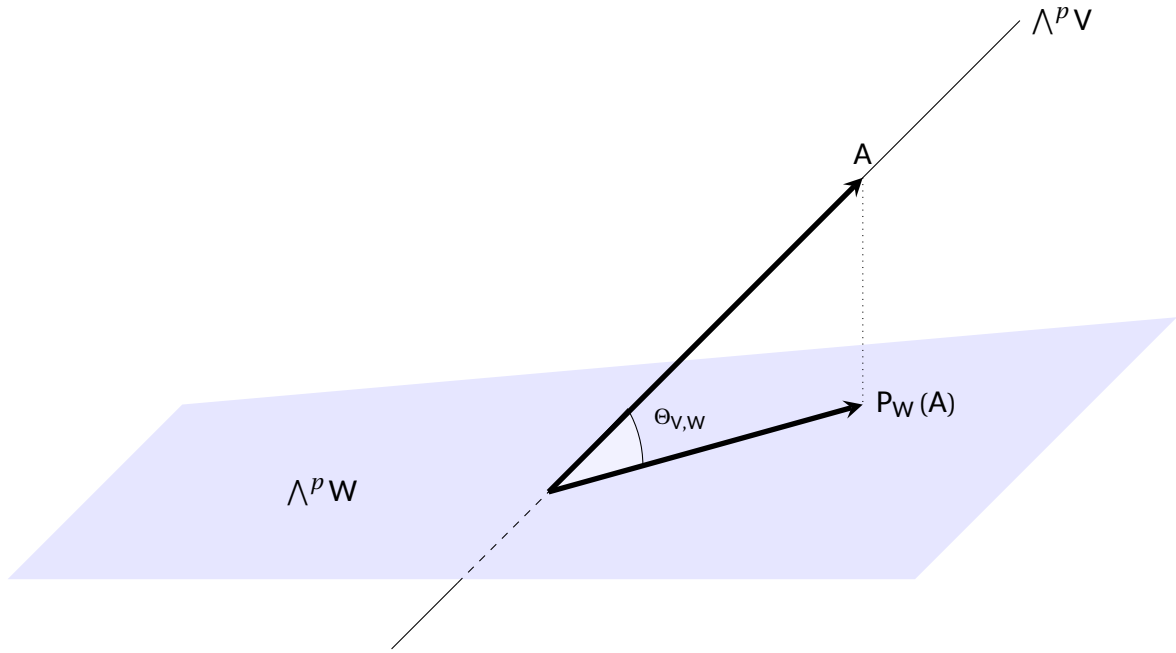


Figura 2 – $\Theta_{V,W}$ é o ângulo no espaço $\Lambda^p \mathbb{R}^n$ entre a linha $\Lambda^p V$ e o subespaço $\Lambda^p W$

3.2 Ângulo assimétrico

Definição 3.5

Sejam $V, W \subset \mathbb{R}^n$, e A um p -vetor simples que representa V . O *ângulo assimétrico* (Figura 2) de V para W é

$$\Theta_{V,W} = \cos^{-1} \left(\frac{\|P_W(A)\|}{\|A\|} \right) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.1)$$

Observação 3.6

Como a norma de uma p -blade é o volume do seu paralelepípedo, em (3.1) o cosseno do ângulo $\Theta_{V,W}$ mede a contração do volume p -dimensional (com $\dim(V) = p$) quando o subespaço V é projetado em W .

Proposição 3.7

Para subespaços vetoriais não nulos $V \in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \text{Gr}_q(\mathbb{R}^n)$, com ângulos principais $\theta_1, \dots, \theta_m$ onde $m = \min\{p, q\}$,

$$\Theta_{V,W} = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \right) & \text{se } p \leq q, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } p > q. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ bases principais de $V \in \text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \text{Gr}_q(\mathbb{R}^n)$. Sendo $A = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ e pela parte 2 do Lema 2.5, temos que

$$P_W(A) = \begin{cases} \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) (f_1 \wedge \dots \wedge f_p) & \text{se } p \leq q, \\ 0 & \text{se } p > q. \end{cases}$$

Se $p > q$, então $\Theta_{V,W} = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, se $p \leq q$, então

$$\frac{\|P_W(A)\|}{\|A\|} = \frac{\|\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)\|}{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\|} = \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \frac{\|f_1 \wedge \cdots \wedge f_p\|}{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\|} = \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i),$$

pois $\|f_1 \wedge \cdots \wedge f_p\| = \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\| = 1$, e assim

$$\Theta_{V,W} = \cos^{-1}\left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i)\right). \quad \square$$

Observação 3.8

Se as dimensões dos subespaços forem diferentes, em geral, obteremos $\Theta_{V,W} \neq \Theta_{W,V}$. A assimetria angular é crucial para que muitos dos resultados, como a desigualdade triangular, sejam válidos.

Exemplo 3.9

No Exemplo 2.3, todas as linhas em V formam um ângulo entre 30° e 60° em relação a W , mas

$$\Theta_{V,W} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 64,34^\circ.$$

O que ocorre é que, ao projetar V sobre W , os comprimentos nas direções principais (de e_1 e e_2) contraem em $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ enquanto as áreas contraem em $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Sendo $\dim(W) > \dim(V)$, os volumes se anulam quando projetamos de W a V , e $\Theta_{W,V} = 90^\circ$.

Proposição 3.10

Sejam $V, W \subset \mathbb{R}^n$.

1. $\Theta_{V,W} = 0 \iff V \subset W$.
2. $\Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2} \iff V \perp W$.
3. $\Theta_{V,W} = \Theta_{V,P_W(V)}$.
4. Se $\dim(V) = \dim(W)$ então $\Theta_{V,W} = \Theta_{W,V} = d_{FS}(V, W)$.

Demonstração. Suponha que $p = \dim(V)$, $q = \dim(W)$. Consideremos $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ as bases principais dos subespaços vetoriais V e W , respectivamente, com ângulos principais $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_m$, onde $m = \min\{p, q\}$.

Prova 1. Neste caso temos $p \leq q$, logo:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{V,W} = 0 &\iff \cos^{-1}\left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i)\right) = 0 \\
 &\iff \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) = 1 \\
 &\iff \cos(\theta_i) = 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, p\} \\
 &\iff \theta_i = 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, p\} \\
 &\iff e_i = f_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, p\} \\
 &\iff V \subset W.
 \end{aligned}$$

Prova 2. Suponhamos que $p > q$. Pela parte 1 da Proposição 3.4, isto seria equivalente a dizer que $V \perp W$. Suponha agora o caso oposto, ou seja, $p \leq q$. Temos isto:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{V,W} = \frac{\pi}{2} &\iff \cos^{-1}\left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i)\right) = \frac{\pi}{2} \\
 &\iff \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) = 0 \\
 &\iff \text{há pelo menos um } i \in \{1, \dots, p\} \text{ tal que } \cos(\theta_i) = 0 \\
 &\iff \text{algum ângulo principal é } \frac{\pi}{2} \\
 &\iff V \perp W. \text{ (Proposição 3.4-1)}
 \end{aligned}$$

Prova 3. Se $p > q$ então $\dim(V) > \dim(W) \geq \dim(P_W(V))$. Portanto $\Theta_{V,W} = \Theta_{V,P_W(V)} = \frac{\pi}{2}$. Considere o caso de $p \leq q$. Em primeiro lugar, se $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ então

$$P_W(V) = \text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_{p-1})\},$$

logo

$$\dim(P_W(V)) = \dim(\text{span}\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_{p-1})\}) < p = \dim(V).$$

Assim, $\Theta_{V,W} = \Theta_{V,P_W(V)} = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, se $\theta_1, \dots, \theta_p \neq \frac{\pi}{2}$ então pelo Lema 2.5 parte 1 os ângulos principais de V e $P_W(V)$ são os mesmos θ_i 's e assim $\Theta_{V,W} = \Theta_{V,P_W(V)}$.

Prova 4. Como $\langle e_i, f_i \rangle = \cos(\theta_i) = \langle f_i, e_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, pela Proposição 3.7 anterior temos

$$\Theta_{V,W} = \underbrace{\cos^{-1}\left(\prod_{i=1}^m \cos(\theta_i)\right)}_{d_{FS}(V,W) \text{ por (2.4)}} = \Theta_{W,V}.$$

□

O item 1 da Proposição 3.10 mostra que $\Theta_{V,W}$ mede quanto falta para V estar contido em W , o item 2 nos diz que o fato de o ângulo ser $\frac{\pi}{2}$ não significa que os espaços sejam perpendiculares,

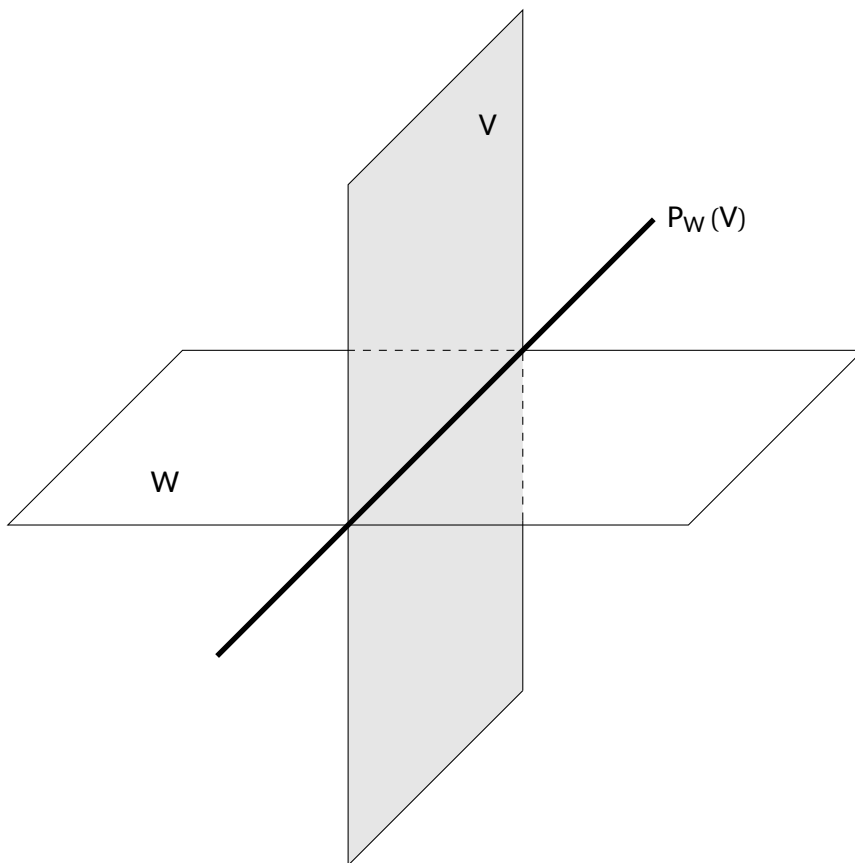


Figura 3 - $\frac{\pi}{2} = \theta_{V,W} \neq \theta_{V,P_W(V)} = 0$, onde θ denota o ângulo usual.

mas sim que pelo menos uma direção de V é perpendicular a W . Isso ajuda a compreender a não simetria do ângulo. Segundo a descrição em [30],

“Uma reta V pode estar mais ou menos próxima de estar contida em um plano W . Portanto, o ângulo $\Theta_{V,W}$ entre eles satisfaz $0 \leq \Theta_{V,W} \leq \frac{\pi}{2}$. No entanto, o plano W nunca estará perto de estar contido em V . Sempre haverá uma direção de W ortogonal a V , logo o ângulo $\Theta_{W,V}$ é igual a $\frac{\pi}{2}$.”

Na Proposição 3.10-3, nos é dito que é a mesma coisa medir de V para W que de V para sua projeção $P_W(V)$. Um exemplo da utilidade da assimetria angular é considerar dois planos perpendiculares em \mathbb{R}^3 . Então $P_W(V)$ é subespaço interseção desses planos. Usando o ângulo usual, encontraríamos que o ângulo entre os subespaços é de 90° , indicando que eles são ortogonais. No entanto, o ângulo entre V e $P_W(V)$ seria de 0° já que $P_W(V) \subset V$ (Ver Figura 3). Com o ângulo assimétrico $\Theta_{V,P_W(V)} = 90^\circ$ por causa das dimensões dos subespaços. Quando os espaços têm a mesma dimensão, o ângulo coincide com a métrica Fubini-Study no item 4, e a assimetria não existe.

Observação 3.11

Pela Proposição 3.10, se $V \perp W$ o valor do ângulo $\Theta_{V,W}$ será $\frac{\pi}{2}$, e se $V \not\perp W$ então $\dim(V) \leq \dim(W)$ e todos os ângulos principais são diferentes de $\frac{\pi}{2}$, ou seja, o conjunto de vetores $\{P_W(e_1), \dots, P_W(e_p)\}$ (onde os e_i formam uma base para V como na Definição 2.2) é uma base para $P_W(V)$. Em poucas

palavras,

$$\Theta_{V,W} \neq \frac{\pi}{2} \implies \dim(P_W(V)) = \dim(V) \leq \dim(W).$$

Este argumento nos ajudará a simplificar alguns resultados das provas.

Proposição 3.12

$\cos^2(\Theta_{V,W}) = \det(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})$, onde \mathbf{P} é a matriz da projeção ortogonal $P: V \rightarrow W$ em bases ortonormais de V e W . Se $\dim(V) = \dim(W)$ então $\cos(\Theta_{V,W}) = |\det(\mathbf{P})|$.

Demonstração. Primeiro realizaremos a prova para as bases principais associadas e depois generalizaremos para as bases ortonormais. Seja \mathbf{P} a representação matricial da projeção ortogonal $P: V \rightarrow W$ em bases principais $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ de V e W respectivamente. Cada coluna da matriz \mathbf{P} são as coordenadas do vetor $P(e_i)$ com respeito à B_W , assim temos que para todo $i \in \{1, \dots, \min\{m, n\}\}$;

$$P(e_i) = \cos(\theta_i) f_i = 0 \cdot f_1 + \dots + \cos(\theta_i) f_i + \dots + 0 \cdot f_q.$$

Analisemos cada um dos casos, a seguir:

Caso 1 Suponhamos que $\dim(V) < \dim(W)$. Então a representação matricial de P é dada por,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso,

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos^2(\theta_p) \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\det(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}) = \prod_{i=1}^p \cos^2(\theta_i) = \left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \right)^2 = \cos^2(\Theta_{V,W})$$

Caso 2 Se $\dim(V) = \dim(W)$, a representação de P é uma matriz quadrada:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta_p) \end{pmatrix}$$

Como $\det(\mathbf{P}^T) = \det(\mathbf{P})$,

$$\det(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}) = \det(\mathbf{P})^2 = \left(\prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) \right)^2 = \cos^2(\Theta_{V,W}) \implies \cos(\Theta_{V,W}) = |\det(\mathbf{P})|.$$

Caso 3 Agora, se tivéssemos que $\dim(V) > \dim(W)$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos(\theta_q) & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso,

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta_2) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos^2(\theta_q) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\det(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}) = \cos^2(\Theta_{V,W}) = 0.$$

Generalização da prova para bases ortonormais. Denotemos B_V e B_W como as bases ortonormais de V e W respectivamente, \mathbf{T}_V a matriz de passagem da base B_V para a base B_{V_1} , \mathbf{T}_W a matriz de passagem da base B_W para B_{W_1} e finalmente \mathbf{P}_1 a representação matricial da projeção ortogonal $P: V \rightarrow W$ nas bases B_{V_1} e B_{W_1} . A matriz da projeção ortogonal quando as bases são mudadas é

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_W^T \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_V.$$

Dado que \mathbf{T}_V e \mathbf{T}_W são matrizes ortogonais, então $\det(\mathbf{T}_V) = \det(\mathbf{T}_V^T) = \pm 1$ e $\mathbf{T}_W \cdot \mathbf{T}_W^T = \mathbf{I}_q$, além disso, temos:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}) &= \det((\mathbf{T}_W^T \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_V)^T \cdot (\mathbf{T}_W^T \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_V)) \\ &= \det((\mathbf{T}_V^T \cdot \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{T}_W) \cdot (\mathbf{T}_W^T \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{T}_V)) \\ &= \det(\mathbf{T}_V^T) \cdot \det(\mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{T}_W \cdot \mathbf{T}_W^T \cdot \mathbf{P}_1) \cdot \det(\mathbf{T}_V) \\ &= \cancel{\det(\mathbf{T}_V^T)} \cdot \det(\mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{P}_1) \cdot \cancel{\det(\mathbf{T}_V)} \\ &= \det(\mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{P}_1). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.13

Sejam $V, W, W_1 \in \text{Gr}(\mathbb{R}^n)$ com $W_1 \subset W$. Então

$$\cos(\Theta_{V, W_1}) = \cos(\Theta_{V, P_W(V)}) \cdot \cos(\Theta_{P_W(V), W_1}).$$

Demonstração. Primeiro, vamos supor que $V \perp W$. Como $W_1, P_W(V) \subset W$ então $V \perp W_1$ e $V \perp P_W(V)$. Portanto $\cos(\Theta_{V,W_1}) = \cos(\Theta_{V,P_W(V)}) = 0$. A igualdade é comprovada.

Suponhamos que agora $V \not\perp W$, então $\dim(V) = \dim(P_W(V))$. Sejam \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 e \mathbf{P}_3 as representações matriciais das projeções ortogonais $V \rightarrow W_1$, $V \rightarrow P_W(V)$ e $P_W(V) \rightarrow W_1$ respectivamente, em bases ortonormais dos subespaços. Observe que \mathbf{P}_2 é uma matriz quadrada e $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2$. Logo

$$\begin{aligned} \cos^2(\Theta_{V,W_1}) &= \det(\mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{P}_1) \\ &= \det(\mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{P}_3^T \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2) \\ &= \det(\mathbf{P}_2^T) \cdot \det(\mathbf{P}_3^T \cdot \mathbf{P}_3) \cdot \det(\mathbf{P}_2) \\ &= \det(\mathbf{P}_2)^2 \cdot \det(\mathbf{P}_3^T \cdot \mathbf{P}_3) \\ &= \cos^2(\Theta_{V,P_W(V)}) \cdot \cos^2(\Theta_{P_W(V),W_1}). \end{aligned} \quad \square$$

Proposição 3.14

Para partições ortogonais $V = V_1 \oplus V_2$ e $W = W_1 \oplus W_2$ com $W_1 = P_W(V_1)$,

$$\cos(\Theta_{V,W}) = \cos(\Theta_{V_1,W_1}) \cdot \cos(\Theta_{V_2,W_2}).$$

Demonstração. Dados blades unitários $A_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge v_l$ e $A_2 = v_{l+1} \wedge \cdots \wedge v_p$ com $[A_1] = V_1$ e $[A_2] = V_2$, como $V_1 \perp V_2$ temos que $A_1 \wedge A_2$ é um blade unitário com $[A_1 \wedge A_2] = V$.

Se $V_1 \perp W$ então claramente $V \perp W$ e $V \perp W_1$. Portanto $\Theta_{V,W} = \Theta_{V_1,W_1} = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, o que se requer foi cumprido.

Por outro lado, se $V_1 \not\perp W$ então, pela Proposição 3.4-3 e o Lema 2.5-3, $W_1 = [P_W(A_1)]$ e $W_2 = W_1^\perp \cap W = [P_W(A_1)]^\perp \cap W$. Como $P_{W_1}(v_i) = P_W(v_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$, temos

$$\begin{aligned} P_W(A_1) &= P_W(v_1) \wedge \cdots \wedge P_W(v_l) \\ &= P_{W_1}(v_1) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_l) \\ &= P_{W_1}(A_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P_W(A_2) &= P_W(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_W(v_p) \\ &= (P_{W_1}(v_{l+1}) + P_{W_2}(v_{l+1})) \wedge \cdots \wedge (P_{W_1}(v_p) + P_{W_2}(v_p)) \\ &= (P_{W_1}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_p)) + (P_{W_1}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_2}(v_p)) + \cdots + \\ &\quad + (P_{W_2}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_p)) + (P_{W_2}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_2}(v_p)) \\ &= P_{W_1}(v_{l+1} \wedge \cdots \wedge v_p) + (P_{W_1}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_2}(v_p)) + \cdots + \\ &\quad + (P_{W_2}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_p)) + P_{W_2}(v_{l+1} \wedge \cdots \wedge v_p) \\ &= P_{W_1}(A_2) + (P_{W_1}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_2}(v_p)) + \cdots + (P_{W_2}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_p)) + P_{W_2}(A_2). \end{aligned}$$

Pelo fato de que $[P_W(A_1)] = W_1$, tem-se $P_W(A_1) \wedge w = 0$ para todo $w \in W_1$. Logo, fazendo o produto exterior de $P_W(A_1)$ com as parcelas que compõem $P_W(A_2)$, segue que:

$$\begin{aligned} P_W(A_1) \wedge P_{W_1}(A_2) &= 0, \\ P_W(A_1) \wedge [P_{W_1}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_2}(v_p)] &= 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\ P_W(A_1) \wedge [P_{W_2}(v_{l+1}) \wedge \cdots \wedge P_{W_1}(v_p)] &= 0. \end{aligned}$$

Assim temos:

$$P_W(A_1 \wedge A_2) = P_W(A_1) \wedge P_W(A_2) = P_{W_1}(A_1) \wedge P_{W_2}(A_2).$$

Como $W_1 \perp W_2$, (2.2) nos dá

$$\|P_{W_1}(A_1) \wedge P_{W_2}(A_2)\| = \|P_{W_1}(A_1)\| \cdot \|P_{W_2}(A_2)\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cos(\Theta_{V,W}) &= \|P_W(A_1 \wedge A_2)\| \\ &= \|P_{W_1}(A_1)\| \cdot \|P_{W_2}(A_2)\| \\ &= \cos(\Theta_{V_1,W_1}) \cdot \cos(\Theta_{V_2,W_2}). \end{aligned} \quad \square$$

3.3 Métrica de Fubini-Study assimétrica

Como visto, $\Theta_{V,W}$ dá a métrica Fubini-Study em cada $Gr_p(\mathbb{R}^n)$. Nós agora iremos provar que em $Gr(\mathbb{R}^n)$ esta é uma métrica assimétrica.

Proposição 3.15

Sejam $V, W, W_1, V_1 \in Gr(\mathbb{R}^n)$.

1. $\Theta_{V,W_1} \geq \Theta_{V,W}$, se $W_1 \subset W$.
2. $\Theta_{V_1,W} \leq \Theta_{V,W}$, se $V_1 \subset V$.

Demonstração.

Prova 1.

$$\begin{aligned} \cos(\Theta_{V,W_1}) &= \cos(\Theta_{V,P_W(V)}) \cdot \cos(\Theta_{P_W(V),W_1}) \quad (\text{Proposição 3.13.}) \\ &= \cos(\Theta_{V,W}) \cdot \cos(\Theta_{P_W(V),W_1}) \quad (\text{Proposição 3.10-3.}) \\ &\leq \cos(\Theta_{V,W}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\cos(\Theta_{V,W_1}) \leq \cos(\Theta_{V,W})$. Pelo fato de o cosseno ser decrescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, então $\Theta_{V,W_1} \geq \Theta_{V,W}$.

Prova 2. Seja $V_1 \subset V$. Então, $V = V_1 \oplus V_2$, com $V_2 = V_1^\perp \cap V$. Tomando $W_1 = P_W(V_1)$ e $W_2 = W_1^\perp \cap W$, temos

$$\begin{aligned} \cos(\Theta_{V,W}) &= \cos(\Theta_{V_1, P_W(V_1)}) \cdot \cos(\Theta_{V_2, W_2}) \quad (\text{Proposição 3.14.}) \\ &= \cos(\Theta_{V_1, W}) \cdot \cos(\Theta_{V_2, W_2}) \quad (\text{Proposição 3.10-3.}) \\ &\leq \cos(\Theta_{V_1, W}). \end{aligned}$$

Logo $\cos(\Theta_{V_1, W}) \geq \cos(\Theta_{V, W})$, e raciocinando como na parte anterior, temos $\Theta_{V_1, W} \leq \Theta_{V, W}$. \square

Teorema 3.16

$\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico assimétrico, em que a distância é dada por $d(V, W) = \Theta_{V, W}$ para quaisquer $V, W \in \text{Gr}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vamos verificar as duas condições da Definição 2.17 para provar que $d(V, W) = \Theta_{V, W}$ é uma métrica assimétrica em $\text{Gr}(\mathbb{R}^n)$.

- *Condição de separação:* Sejam $V, W \in \text{Gr}(\mathbb{R}^n)$, e em virtude da parte 1 da Proposição 3.10, temos que:

$$V = W \iff \begin{cases} V \subset W \iff \Theta_{V, W} = 0. \\ e \\ W \subset V \iff \Theta_{W, V} = 0. \end{cases}$$

- *Desigualdade triangular orientada:* Para quaisquer $U, V, W \in \text{Gr}(\mathbb{R}^n)$, devemos provar que $\Theta_{U, W} \leq \Theta_{U, V} + \Theta_{V, W}$. Se $\Theta_{U, V} = \frac{\pi}{2}$ ou $\Theta_{V, W} = \frac{\pi}{2}$ a desigualdade é trivial, logo, podemos supor que $U \not\subset V$ e $V \not\subset W$, e assim $P_V(U) \not\subset W$. Pela Proposição 3.4 parte 2, temos

$$\dim(U) = \dim(P_V(U)) = \dim(P_W(P_V(U))).$$

Ou seja, $U, P_V(U)$, e $P_W(P_V(U))$ pertencem ao mesmo $\text{Gr}_p(\mathbb{R}^n)$, logo:

$$\begin{aligned} \Theta_{U, W} &\leq \Theta_{U, P_W(P_V(U))} \quad (\text{Proposição 3.15-1.}) \\ &\leq \Theta_{U, P_V(U)} + \Theta_{P_V(U), P_W(P_V(U))} \quad (\text{Proposição 3.10-4.}) \\ &= \Theta_{U, V} + \Theta_{P_V(U), W} \quad (\text{Proposição 3.10-3.}) \\ &\leq \Theta_{U, V} + \Theta_{V, W} \quad (\text{Proposição 3.15-2.}) \end{aligned} \quad \square$$

3.4 Produtos e ângulos

Relacionaremos diferentes produtos da álgebra de Grassmann a ângulos assimétricos [28].

Definição 3.17

A *contração* $A \lrcorner B$ de $A \in \wedge^p \mathbb{R}^n$ em $B \in \wedge^q \mathbb{R}^n$ é o único elemento de $\wedge^{q-p} \mathbb{R}^n$ tal que para todo $C \in \wedge^{q-p} \mathbb{R}^n$,

$$\langle C, A \lrcorner B \rangle = \langle A \wedge C, B \rangle.$$

Observação 3.18

Se $p > q$ então $\wedge^{q-p} \mathbb{R}^n = \{0\}$, logo $A \lrcorner B = 0$.

Proposição 3.19

Sejam blades $A \in \wedge^p \mathbb{R}^n$ e $B \in \wedge^q \mathbb{R}^n$, com $p \leq q$, e decomponha $B = B_p \wedge B_\perp$, onde B_p é uma p -blade com $P_{[B]}([A]) \subset [B_p] \subset [B]$ e $[B_\perp]$ é $(q-p)$ -blade com $[B_\perp] = [B_p]^\perp \cap [B]$. Então $A \lrcorner B = \langle A, B_p \rangle B_\perp$.

Demonstração. Se $A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$, $B_p = b_1 \wedge \cdots \wedge b_p$ e $B_\perp = b'_1 \wedge \cdots \wedge b'_{q-p}$, para qualquer blade $C = c_1 \wedge \cdots \wedge c_{q-p} \in \wedge^{q-p} \mathbb{R}^n$ temos, como $[B_\perp] \perp [A]$,

$$\begin{aligned} \langle C, A \lrcorner B \rangle &= \langle A \wedge C, B_p \wedge B_\perp \rangle = \det \left(\begin{array}{c|c} (\langle a_i, b_j \rangle) & 0_{p \times q} \\ \hline (\langle c_i, b_j \rangle) & (\langle c_i, b'_j \rangle) \end{array} \right) \\ &= \det(\langle a_i, b_j \rangle) \cdot \det(\langle c_i, b'_j \rangle) \\ &= \langle A, B_p \rangle \langle C, B_\perp \rangle \\ &= \langle C, \langle A, B_p \rangle B_\perp \rangle. \end{aligned}$$

Em virtude da linearidade do produto interno, a igualdade é válida para todo $C \in \wedge^{q-p} \mathbb{R}^n$, logo temos $\langle A, B_p \rangle B_\perp = A \lrcorner B$. \square

Teorema 3.20

Dadas blades $A \in \wedge^p \mathbb{R}^n$ e $B \in \wedge^q \mathbb{R}^n$, sejam $V = [A]$ e $W = [B]$.

1. $|\langle A, B \rangle| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\Theta_{V,W})$ se $p = q$.
2. $\|A \lrcorner B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\Theta_{V,W})$.
3. $\|A \wedge B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\Theta_{V,W^\perp})$.

Demonstração. Consideremos $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ bases principais dos subespaços vetoriais V e W , respectivamente, com ângulos principais $\theta_1 \leq \cdots \leq \theta_m$, onde $m = \min\{p, q\}$. Temos que:

Prova 1. Podemos assumir que $A = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ e $B = f_1 \wedge \cdots \wedge f_q$, e pela Proposição 3.7, no caso $p = q$, temos

$$\cos(\Theta_{V,W}) = \prod_{i=1}^p \cos(\theta_i) = \det(\langle e_i, f_j \rangle) = \langle A, B \rangle.$$

Prova 2. Se $p > q$ ambos os lados da igualdade se anulam. Se $p \leq q$, com B_p e B_\perp assim como na Proposição 3.19 temos $\langle A, B_p \rangle B_\perp = A \lrcorner B$, assim:

$$\begin{aligned} \|A \lrcorner B\| &= \|\langle A, B_p \rangle B_\perp\| \\ &= |\langle A, B_p \rangle| \|B_\perp\| \\ &= \|A\| \|B_p\| \cos(\Theta_{[A],[B_p]}) \|B_\perp\| \quad (\text{pela parte 1.}) \\ &= \|A\| \|B_p\| \|B_\perp\| \cos(\Theta_{[A],[B]}) \quad (\text{Proposição 3.10-3.}) \\ &= \|A\| \|B\| \cos(\Theta_{V,W}). \end{aligned}$$

Prova 3. $A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_p = (a'_1 + a''_1) \wedge \cdots \wedge (a'_p + a''_p)$, com $a'_i = P_{[B]}(a_i)$ e $a''_i = P_{[B]^\perp}(a_i)$. Como $a'_i \wedge B = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, temos

$$A \wedge B = (a''_1 \wedge \cdots \wedge a''_p) \wedge B = (P_{[B]^\perp}(a_1) \wedge \cdots \wedge P_{[B]^\perp}(a_p)) \wedge B = P_{[B]^\perp}(A) \wedge B.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|A \wedge B\| &= \|P_{[B]^\perp}(A) \wedge B\| \\ &= \|P_{[B]^\perp}(A)\| \|B\| \quad (\text{pois } [B] \perp [P_{[B]^\perp}(A)]) \\ &= \|A\| \|B\| \cos(\Theta_{[A], [B]^\perp}) \\ &= \|A\| \|B\| \cos(\Theta_{V, W^\perp}). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.21

Sejam $V, W \in \text{Gr}(\mathbb{R}^n)$, $p = \dim(V)$, $q = \dim(W)$, $m = \min\{p, q\}$ e $\theta_1, \dots, \theta_m$ os ângulos principais.

Temos

$$\cos(\Theta_{V, W^\perp}) = \prod_{i=1}^m \text{sen}(\theta_i).$$

Demonstração. Dadas os blades unitários $A = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ e $B = f_1 \wedge \cdots \wedge f_q$, onde $\{e_1, \dots, e_p\}$ e $\{f_1, \dots, f_q\}$ são bases principais de V e W respectivamente, supondo que $p \leq q$, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\Theta_{V, W^\perp}) &= \|A \wedge B\| \quad (\text{Teorema 3.20-3.}) \\ &= \|(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) \wedge (f_1 \wedge \cdots \wedge f_q)\| \\ &= \|(e_1 \wedge f_1) \wedge \cdots \wedge (e_p \wedge f_p) \wedge f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_q\| \\ &= \|e_1 \wedge f_1\| \cdots \|e_p \wedge f_p\| \|f_{p+1}\| \cdots \|f_q\| \\ &= \|e_1\| \|f_1\| \text{sen}(\theta_1) \cdots \|e_p\| \|f_p\| \text{sen}(\theta_p) \\ &= \prod_{i=1}^m \text{sen}(\theta_i). \end{aligned}$$

A prova é semelhante se $p > q$.

□

Observação 3.22

Combinando com o Teorema 3.20, temos que $\|A \wedge B\| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \prod_i \text{sen}(\theta_i)$. Como o produto exterior é um tipo de generalização do produto vetorial, vemos que isso generaliza

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \text{sen}(\theta_{u,v}).$$

Observação 3.23

A Proposição 3.21 mostra que, se $p = 1 \leq q$, temos

$$\cos^2(\Theta_{V, W^\perp}) = \text{sen}^2(\theta_1) = 1 - \cos^2(\theta_1) = 1 - \cos^2(\Theta_{V, W}) = \text{sen}^2(\Theta_{V, W}),$$

de modo que $\Theta_{V, W^\perp} = \frac{\pi}{2} - \Theta_{V, W}$. Mas se $p \neq 1$ a relação entre Θ_{V, W^\perp} e $\Theta_{V, W}$ deixa de ser tão simples [17].

Considerações Finais

A métrica de Fubini-Study foi generalizada como um ângulo assimétrico e estudamos diversas propriedades que facilitam sua utilização e cálculo.

Uma característica notável da distância Fubini-Study é sua tendência em se aproximar rapidamente de seu valor máximo $\frac{\pi}{2}$, quando vários ângulos principais são grandes ou quando há um grande número de ângulos pequenos, porém diferentes de zero.

Portanto, essa medida de distância pode ser mais adequada para problemas que envolvam um número moderado de pequenas perturbações. Outros resultados relacionados a ângulos assimétricos podem ser encontrados nas referências [17, 28].

Referências

- 1 HAMM, J.; LEE, D. D. Grassmann discriminant analysis: A unifying view on subspace-based learning. In: *Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning*. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2008. (ICML '08), p. 376–383. ISBN 9781605582054. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/1390156.1390204>>. 1, 13
- 2 HUANG, Z.; WU, J.; GOOL, L. V. Building deep networks on grassmann manifolds. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, v. 32, 11 2016. 1
- 3 LERMAN, G.; ZHANG, T. Robust recovery of multiple subspaces by geometric lp minimization. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 39, n. 5, oct 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214%2F11-aos914>>. 1
- 4 LUI, Y. M. Advances in matrix manifolds for computer vision. *Image and Vision Computing*, Elsevier, v. 30, n. 6-7, p. 380–388, 2012. 1
- 5 TURAGA, P. et al. Statistical analysis on manifolds and its applications to video analysis. In: _____. *Video Search and Mining*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 115–144. ISBN 978-3-642-12900-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12900-1_5>. 1
- 6 BARG, A.; NOGIN, D. Y. Bounds on packings of spheres in the Grassmann manifold. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 48, n. 9, p. 2450–2454, 2002. 1
- 7 EDELMAN, A.; ARIAS, T. A.; SMITH, S. T. The geometry of algorithms with orthogonality constraints. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, SIAM, v. 20, n. 2, p. 303–353, 1998. 1, 13
- 8 YE, K.; LIM, L.-H. Schubert varieties and distances between subspaces of different dimensions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, SIAM, v. 37, n. 3, p. 1176–1197, 2016. 1
- 9 QIU, L.; ZHANG, Y.; LI, C.-K. Unitarily invariant metrics on the Grassmann space. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, SIAM, v. 27, n. 2, p. 507–531, 2005. 1, 6
- 10 BASRI, R.; HASSNER, T.; ZELNIK-MANOR, L. Approximate nearest subspace search. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, v. 33, n. 2, p. 266–278, 2010. 1, 13
- 11 DRAPER, B. et al. A flag representation for finite collections of subspaces of mixed dimensions. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 451, p. 15–32, 2014. 1, 13
- 12 SORENSEN, D. C. Numerical methods for large eigenvalue problems. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 11, p. 519–584, 2002. 1
- 13 SUN, X.; WANG, L.; FENG, J. Further results on the subspace distance. *Pattern recognition*, Citeseer, v. 40, n. 1, p. 328–329, 2007. 1, 13

- 14 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. *Phys. Today*, v. 54, n. 2, p. 60, 2001. [1](#)
- 15 ORTEGA, R.; SANTANDER, M. Trigonometry of the quantum state space, geometric phases and relative phases. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 36, n. 2, p. 459, 2002. [1](#)
- 16 BENGTSSON, I.; ŻYCZKOWSKI, K. *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. [S.l.]: Cambridge university press, 2017. [1](#), [11](#)
- 17 MANDOLESI, A. L. G. Grassmann angles between real or complex subspaces. *arXiv preprint arXiv:1910.00147*, 2019. [1](#), [19](#), [31](#), [33](#)
- 18 WINITZKI, S. *Linear Algebra via Exterior Products*. lulu.com, 2010. ISBN 978-1-4092-9496-2. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/winitzki/linalg?authuser=0>>. [2](#), [3](#)
- 19 LIMA, E. *Cálculo tensorial*. IMPA, 2012. (Publicações matemáticas). ISBN 9788524403132. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=QWwNngEACAAJ>>. [2](#), [3](#)
- 20 GRASSMANN, H. *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*. [S.l.]: O. Wigand, 1844. v. 1. [2](#)
- 21 MENNUCCI, A. C. On asymmetric distances. *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, De Gruyter Open Access, v. 1, n. 2013, p. 200–231, 2013. [2](#), [14](#)
- 22 COLLINS, J.; ZIMMER, J. An asymmetric arzelà–ascoli theorem. *Topology and its Applications*, Elsevier, v. 154, n. 11, p. 2312–2322, 2007. [2](#), [14](#)
- 23 WILSON, W. A. On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 53, n. 3, p. 675–684, 1931. [2](#), [14](#)
- 24 BJÖRCK, ; GOLUB, G. H. Numerical methods for computing angles between linear subspaces. *Mathematics of computation*, v. 27, n. 123, p. 579–594, 1973. [6](#)
- 25 KOZLOV, S. Geometry of real Grassmann manifolds. parts i, ii. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, v. 100, n. 3, p. 2239–2253, 2000. [6](#), [9](#), [11](#)
- 26 JORDAN, C. Essai sur la géométrie à n dimensions. *Bulletin de la Société mathématique de France*, v. 3, p. 103–174, 1875. [6](#)
- 27 MANDOLESI, A. L. G. Grassmann angle formulas and identities. *arXiv preprint arXiv:2005.12700*, 2020. [6](#)
- 28 MANDOLESI, A. L. G. Blade products and angles between subspaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, Springer, v. 31, n. 5, p. 69, 2021. [6](#), [29](#), [33](#)
- 29 LIMA, E. L. *Algebra linear*, 2a. edição. IMPA, Rio de Janeiro, p. 22, 1996. [7](#), [41](#)
- 30 MANDOLESI, A. L. G. Asymmetric metrics on the full Grassmannian of subspaces of different dimensions. *arXiv preprint arXiv:2208.05026*, 2022. [8](#), [24](#)
- 31 KOZLOV, S. E. Geometry of real Grassmann manifolds. part iii. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, v. 100, p. 2254–2268, 2000. [9](#), [11](#), [12](#)
- 32 LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2000. [11](#)

- 33 GRIFFITHS, P. A.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry*. New York, NY: Wiley, 1994. (Wiley classics library). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/433962>>. 11
- 34 TROPP, J. et al. Constructing packings in Grassmannian manifolds via alternating projections. *Experimental Mathematics*, v. 17, n. 1, p. 9–35, 2008. 12
- 35 LOVE, D. J.; HEATH, R. W. Limited feedback unitary precoding for orthogonal space-time block codes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 53, n. 1, p. 64–73, 2004. 12
- 36 ASIMOV, D. The grand tour: a tool for viewing multidimensional data. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, SIAM, v. 6, n. 1, p. 128–143, 1985. 13
- 37 KATO, T. Stability theorems. *Perturbation theory for linear operators*, Springer, p. 189–250, 1995. 13, 14
- 38 WANG, L.; WANG, X.; FENG, J. Subspace distance analysis with application to adaptive Bayesian algorithm for face recognition. *Pattern recognition*, Elsevier, v. 39, n. 3, p. 456–464, 2006. 13
- 39 LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. 1. ed. Springer, 2000. v. 202. Hardcover. (Graduate Texts in Mathematics, v. 202). ISBN 0387987592. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/0387987592>>. 43
- 40 TU, L. *An Introduction to Manifolds*. Springer New York, 2010. (Universitext). ISBN 9781441973993. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=br1KngEACAAJ>>. 44

ANEXO A

Álgebra Linear

Neste capítulo tem caráter preparatório. Estabeleceremos a notação utilizada em todo texto e delinearremos, resultados importantes que serão necessários no desenvolvimento do nosso trabalho.

Teorema A.1 (Teorema de Cauchy-Schwarz)

Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Demonstração. Suponha $u, v \neq 0$.

$$\|\alpha \cdot u - v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 - 2\alpha \langle u, v \rangle + \|v\|^2, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(\alpha) = \alpha^2 \|u\|^2 - 2\alpha \langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Temos que $f(\alpha) = 0 \iff \alpha \cdot u = v$, logo não pode ter duas soluções distintas. Ou seja seu discriminante é menor ou igual a zero, logo:

$$\begin{aligned} 4(\langle u, v \rangle)^2 - 4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0 &\iff (\langle u, v \rangle)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \\ &\iff |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

□

A desigualdade Cauchy-Schwarz nos permite definir um ângulo entre dois vetores.

$$\left| \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

Sabemos que $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ é bijetora, ou seja, a cada número

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [-1, 1] \quad \text{existe um único valor } \theta \in [0, \pi]$$

tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Definição A.2

O *ângulo* entre dois vetores não nulos, $u, v \in \mathbb{R}^n$ é o número real $\theta_{u,v} \in [0, \pi]$, dado por:

$$\cos^{-1} \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right) = \theta_{u,v}.$$

A noção de projeção vetorial é um pouco mais geral do que a apresentada abaixo; entretanto, esta versão simplificada ajuda a reforçar os conceitos e propriedades do produto interno.

A *projeção ortogonal* é um conceito importante na geometria e na álgebra linear. Ela envolve a projeção de um vetor sobre um espaço vetorial $W \subset \mathbb{R}^n$, resultando em que o vetor $v - P_W(v)$ é perpendicular a esse espaço. Formalmente, a projeção ortogonal de um vetor v sobre um espaço vetorial é obtida ao encontrar o vetor mais próximo de v que pertence a esse espaço.

A fórmula geral para calcular a projeção ortogonal de um vetor v sobre um espaço vetorial W é dada por:

$$P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow W$$

$$x \longmapsto P_W(x) = \sum_{i=1}^q \langle x, f_i \rangle f_i,$$

onde $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ é uma base ortonormal de W .

A projeção ortogonal possui algumas propriedades notáveis que são úteis para entender e aplicar esse conceito. Aqui estão algumas das principais propriedades da projeção ortogonal:

- *Linearidade*: A projeção ortogonal é uma transformação linear. Isso significa que ela preserva as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar.
- *Idempotência*: A projeção ortogonal é idempotente, o que significa que a projeção de um vetor sobre um espaço vetorial e, em seguida, projetar o resultado novamente no mesmo espaço não altera o vetor. Ou seja, $P_W(P_W(v)) = P_W(v)$.
- *Ortogonalidade*: A diferença entre o vetor original v e sua projeção ortogonal $P_W(v)$ é perpendicular a qualquer vetor que pertença ao espaço vetorial W .
- *Distância mínima*: A projeção ortogonal de um vetor v em relação a um espaço vetorial é o vetor que minimiza a distância entre v e qualquer vetor desse espaço. Em outras palavras, a projeção ortogonal é o vetor mais próximo de v pertencente ao espaço vetorial.

Definição A.3

O *complemento ortogonal* de um subespaço W de \mathbb{R}^n é o conjunto

$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp w \text{ para todo } w \in W\}$$

A seguir, algumas propriedades importantes do complemento ortogonal:

- W^\perp é um subespaço de \mathbb{R}^n ;
- $W^{\perp\perp} = W$;
- $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

Considere um subespaço W de \mathbb{R}^n , devido à última propriedade acima, todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ se escreve de forma única como $x = v + w$, em que $w \in W$ e $v \in W^\perp$. É imediato ver que:

$$x \in W^\perp \iff P_W(x) = 0.$$

Assumindo que V e W são espaços vectoriais finitos dimensionais com um produto interno, definimos a adjunta de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$.

Definição A.4

A *adjunta* de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear $T^* : W \rightarrow V$ tal que, para todo $v \in V$ e $w \in W$ tem se

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle.$$

Teorema A.5

Sejam $B_V = \{e_1, \dots, e_p\}$ e $B_W = \{f_1, \dots, f_q\}$ bases ortonormais de $V, W \in \mathbb{R}^n$ respectivamente. Se a matriz \mathbf{P} de ordem $q \times p$ é a representação matricial da transformação linear $P : V \rightarrow W$ nas bases V, W então a representação matricial da adjunta $P^* : W \rightarrow V$ nas bases W, V é a transposta \mathbf{P}^T de \mathbf{P} .

Demonstração. Ver [29] (Teorema 11.2, página 135). □

ANEXO B

Topologia

B.1 Topologia quociente

Definição B.1

Dados um espaço topológico X e uma relação de equivalência \sim em X , denotemos por X/\sim o *espaço quociente*. Assim, os elementos de X/\sim são as classes de equivalência.

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

A *topologia quociente* em X/\sim é a topologia τ que torna a *aplicação quociente* $\pi : X \rightarrow X/\sim$ contínua. Mais precisamente, um subconjunto $U \subset X/\sim$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em X .

Definição B.2

Uma relação de equivalência \sim em X é dita ser *aberta* se, $\pi : X \rightarrow X/\sim$ é aberta. Em outras palavras, a relação de equivalência \sim em X é aberta se e somente se para cada conjunto aberto A em X , o conjunto

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{x \in A} [x]$$

de todos os pontos equivalentes a algum ponto de A é aberto.

Teorema B.3 (Passagem ao Quociente)

Suponha que $\pi : X \rightarrow Y$ é um aplicação quociente, B é um espaço topológico, e $f : X \rightarrow B$ é uma função contínua que satisfaça a seguinte condição $a \sim b \implies f(a) = f(b)$. Então existe uma única função contínua $\bar{f} : Y \rightarrow B$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & B \end{array}$$

Demonstração. Ver [39] (Corolário 3.30, página 56).

□

Proposição B.4

Seja \sim uma relação de equivalência aberta em X . Então, o conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times X$ se, e somente se, X/\sim é Hausdorff.

Demonstração. Ver [40] (Teorema 7.7, página 75).

□

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Milton Santos s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br