

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA GERAL



GUIA DE LABORATÓRIO

FÍSICA GERAL E EXPERIMENTAL II

FIS122 E FIS126

2001

## ÍNDICE

Assunto	Página
Apresentação.....	1
Informes sobre a parte experimental.....	2
Método dos mínimos quadrados.....	4
Pêndulo físico e pêndulos simples acoplados.....	10
Pêndulo de torção.....	14
Oscilador forçado.....	17
Corda vibrante.....	20
Velocidade das ondas sonoras no ar.....	23
Princípio de Arquimedes.....	27
Escoamento de Fluidos.....	31
Equivalente do calor e da energia.....	35
Calor de transformação.....	39
Bibliografia.....	42
Papel mono-log	
Papel log-log	

## APRESENTAÇÃO

Este Guia de Laboratório contém um conjunto de roteiros de experimentos utilizados nas disciplinas FIS122 e FIS126 do IFUFBA. São abordados aspectos de oscilações, ondas mecânicas e sonoras, fluidos e calor. Além disso o primeiro roteiro traz uma introdução ao método dos mínimos quadrados e (mais uma) apresentação ao uso de papéis mono-log e log-log.

Os roteiros contêm uma breve introdução ao tema do experimento onde as idéias e conceitos básicos são apresentados e discutidos. Em alguns casos escrevemos as relações matemáticas entre as grandezas envolvidas. Em seguida vêm a lista do material utilizado e a descrição do procedimento experimental que deverá ser adotado pelos alunos. Possíveis modificações serão anunciadas pelo professor. Para finalizar é discutido o tratamento dos dados experimentais que deverá constar do relatório.

Na bibliografia são listadas as fontes usadas na elaboração dos roteiros bem como aquelas que poderão ser consultadas pelos alunos para um aprofundamento de seus conhecimentos.

São incluídas uma folha de papel em escala mono-log e outra em escala log-log. Como este material não é facilmente encontrado no comércio local, sugerimos que os gráficos não devam ser traçados diretamente sobre estas folhas. Elas devem servir de matriz para cópias onde então os gráficos solicitados em cada experimento possam ser traçados.

Estes novos roteiros se baseiam, em mais da metade dos casos, em versões anteriores que foram utilizadas durante muitos anos no nosso laboratório <sup>(1)</sup>. Eles foram adaptados ao novo formato aqui adotado. Os roteiros 'Método dos mínimos quadrados' e 'Princípio de Arquimedes' foram reescritos, respectivamente, pelos professores Ademir Santana e Nice Costa Pinto e Nelson Pinheiro Andion. Os demais foram reescritos ou elaborados por nós, com sugestões dos professores Antônio Sérgio Esperidião, Edmar Nascimento, Francisco Motta, Iuri Pepe, Klaus Weltner, Osvaldo Pessoa Jr., Paulo Miranda e Suani Pinho. Parte do material usado nos experimentos foi construída ou adaptada pelos professores Iuri Pepe, Klaus Weltner e Paulo Miranda.

Roberto Fernandes Silva Andrade

(1) – Ver Referência 8 na Bibliografia

## INFORMES SOBRE A PARTE EXPERIMENTAL

### AULAS DE LABORATÓRIO

As aulas de laboratório ocorrem uma vez por semana a depender do horário de cada turma. A presença do aluno é obrigatória e em cada aula haverá uma lista de presença que deverá ser assinada pelos alunos. A sequência de experimentos pode variar de turma para turma e será divulgada no início de cada semestre letivo. Há uma tentativa de se adequar os assuntos vistos pelas partes experimental e teórica do curso, embora isso não seja conseguido em todos os casos.

Os experimentos são realizados por grupos de, no máximo, 4 alunos. Cada grupo receberá uma folha de dados que será assinada pelos alunos e onde os dados do experimento deverão ser anotados a tinta. O professor rubricará a folha no final do experimento, devendo a mesma ser anexada ao relatório. Em cada aula será distribuída também uma folha com uma série de questões sobre os procedimentos adotados e resultados obtidos.

### RELATÓRIO

O relatório deve ser entregue na semana seguinte à realização do experimento. Ele pode ser feito de maneira bastante simplificada, constando apenas do tratamento dos dados experimentais obtidos, gráficos indicados no roteiro, e respostas às perguntas formuladas na folha de questões. O relatório também pode ser elaborado de forma discursiva, comportando apenas alguns itens, como por exemplo: introdução, procedimento experimental, tratamento dos dados e gráficos, e conclusões. Esta possibilidade não elimina as respostas às questões, mas neste caso as questões podem fazer parte do corpo do relatório.

Em qualquer das formas adotadas, deve-se observar os seguintes itens relevantes na apresentação do relatório.

- 1) Deverá ser feito pela equipe, **necessariamente manuscrito**.
- 2) Deverá conter um cabeçalho conforme o modelo abaixo:

---

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Física

Departamento de Física Geral

FIS122 - Física Geral e Experimental II-E / Laboratório

Turma Teórica/Prática

Data (da realização da experiência)

Nomes dos Alunos.....

.....

Título da Experiência

.....

**OBS.:** A folha de dados, preenchida à tinta, e assinada pelo professor deverá ser anexada ao relatório.

---

- 3) No caso da opção pelo formato simplificado, apresentar em primeiro lugar o Tratamento dos Dados solicitado no roteiro, e posteriormente as respostas às perguntas na Folha de Questões.
- 4) No caso da opção pelo formato completo, as diferentes sessões (Introdução, Embasamento Teórico, Procedimento, etc.) devem ser claramente indicadas, assim como as respostas às questões, mesmo se incluídas dentro do texto.
- 5) Preste atenção às unidades usadas para registrar os dados. No Tratamento dos Dados pode ser necessário fazer conversões de unidades para o mesmo sistema (CGS ou SI). Resultados sem a indicação das unidades estão errados.

- 6) Os gráficos deverão ser feitos em papel milimetrado, mono-log ou di-log, conforme solicitado. Não esqueça de colocar as unidades nos eixos nem as legendas indicando que medidas são apresentadas.
- 7) Quando solicitado, os resultados quantitativos deverão ser tratados pelo método dos mínimos quadrados.

## **AValiação**

A avaliação constará de dois instrumentos: **relatórios** e **provas**. A cada experimento, será cobrado um relatório por equipe. Serão feitas duas provas no semestre: uma na metade e outra no final do semestre. Cada conjunto de prova e relatórios corresponderá a uma nota para o curso (as três primeiras notas são das provas teóricas). Em cada nota de laboratório a média dos relatórios terá peso de 30% e a nota da prova peso 70%.

**Atenção:** Na prova final do curso haverá também questões sobre a parte experimental.

## **LEMBRETES IMPORTANTES**

1. **Seja pontual às aulas** - Por se tratar de um trabalho em grupo, o seu atraso comprometerá o resultado geral a ser obtido.
2. **Estude com antecedência o assunto de que trata o experimento, bem como o equipamento utilizado** - Este procedimento permitirá uma assimilação mais rápida dos conceitos envolvidos deixando o tempo mais livre para que o grupo discuta com detalhes o fenômeno observado.
3. **Confira o material disponível, tanto antes como após a realização do experimento** - Durante a aula, o grupo é responsável por qualquer dano ou extravio do material a ele confiado.
4. **Requisite o auxílio do professor sempre que detectar algum fator responsável pela inviabilização do andamento do experimento** - O professor atuará sempre de maneira a conduzi-lo à solução do problema. Nunca espere que ele o solucione por você.
5. **Registre os resultados dos experimentos com fidedignidade** - Qualquer manipulação ou ajuste dos dados pode mascarar algum problema que o equipamento esteja apresentando, além de ser um comportamento não aceitável. Sua honestidade pessoal se reflete no registro dos dados.
6. **Fique atento aos Algarismos Significativos** - Ao determinar os valores das grandezas (diretas ou indiretas) tenha cuidado para que seja considerada a limitação na precisão das medidas, imposta pelas escalas dos instrumentos utilizados.

# MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

## I - INTRODUÇÃO

O processo de medida constitui uma parte essencial na metodologia científica e também é fundamental para o desenvolvimento e aplicação da própria ciência. No decorrer do seu curso de Física Básica, a parte experimental ressalta o processo de medida.

Até este ponto você tem empregado diversos conceitos como valor mais provável de uma grandeza, desvio, etc., fazendo apelos a noções intuitivas a cada novo conceito. Ou seja, sem a preocupação de apresentar uma axiomática partindo de princípios gerais.

Um primeiro passo nesta direção está no que se chama de Princípio dos Mínimos Quadrados. Este processo de sistematização da teoria da medida permite, como veremos, obter bons resultados no ajuste de curvas. Embora possa ser utilizado no ajuste de outras curvas, vamos apresentar este método e seu uso para o ajuste de retas, por ser no momento nosso principal objetivo.

## II - PRINCÍPIO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Enunciado do **Princípio dos Mínimos Quadrados**: *Suponha que seja realizado um conjunto de medidas de uma mesma quantidade física. Se essas medidas estão sujeitas apenas a erros aleatórios, então o valor mais provável da quantidade medida é aquele que torna a soma dos quadrados dos erros um mínimo.*

Este princípio pode ser aplicado em várias situações. Como exemplo, vamos utilizá-lo para obter a melhor estimativa (valor mais provável) para uma grandeza medida várias vezes.

Suponha que efetuamos o seguinte conjunto

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

de medidas de uma quantidade física cujo valor verdadeiro é  $x$ . Então os erros nas medidas são:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= x_1 - x \quad , \\ \varepsilon_2 &= x_2 - x \quad , \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= x_n - x \quad ,\end{aligned}$$

e a soma de seus quadrados é:

$$\begin{aligned}E(x) &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \\ E(x) &= \sum_k \varepsilon_k^2 \\ E(x) &= \sum_k (x_k - x)^2\end{aligned}\tag{A}$$

O valor verdadeiro,  $x$ , é uma quantidade desconhecida que o experimento visa determinar. Dentre todos os possíveis valores que  $x$  possa assumir, o Princípio dos Mínimos Quadrados estabelece que a melhor escolha é a daquele valor que torna  $E = E(x)$  um mínimo. Ou seja, devemos resolver a seguinte equação para  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x) = 0 \quad .\tag{B}$$

A solução desta equação, a ser denotada por  $x = \tilde{x}$ , será a melhor escolha para  $x$ . Substituindo (A) em (B) temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_i (x_i - x)^2 \right] = 0 .$$

Então teremos,

$$\frac{\partial}{\partial x} (x_1 - x)^2 + \frac{\partial}{\partial x} (x_2 - x)^2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x} (x_n - x)^2 = 0 ,$$

$$-2(x_1 - x) - 2(x_2 - x) - \dots - 2(x_n - x) = 0 ,$$

ou

$$\left[ \sum_i x_i \right] - nx = 0 .$$

A solução desta equação do 1º. grau é

$$x = \tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \equiv \bar{x} ,$$

que é a média aritmética ( $\bar{x}$ ) das medidas. Esta é a quantidade que você usou (intuitivamente) como o valor mais provável de uma grandeza. Aqui, este conceito foi deduzido do Princípio dos Mínimos Quadrados.

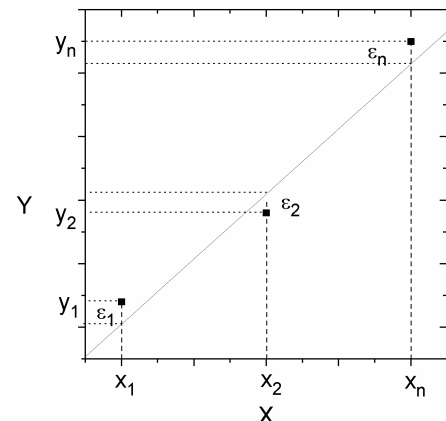
### III - A MELHOR RETA

Em diversas situações num laboratório nos deparamos com quantidades que se relacionam entre si. Por exemplo, a pressão de uma determinada massa de gás depende da sua temperatura e do seu volume; a distensão de uma mola depende da força aplicada. Deseja-se, freqüentemente, expressar essa relação sob forma matemática, por meio de uma equação que ligue as variáveis. Para auxiliar a determinação de uma equação que relacione as variáveis, um primeiro passo consiste em colecionar dados que indiquem os valores correspondentes das variáveis consideradas. Por exemplo, seja  $x$  o deslocamento de uma mola causado por uma força aplicada  $y$  para os quais temos o conjunto de  $n$  medidas

$$M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\} . \quad (1)$$

Em seguida locam-se estes pontos num plano cartesiano. O conjunto de pontos resultante é denominado **diagrama de dispersão** (vide Figura). Neste diagrama é possível, freqüentemente, visualizar uma curva regular que se aproxime dos pontos dados. Esta curva é denominada de **ajustamento**. A questão central para se determinar a equação da curva é encontrar a melhor curva regular de ajuste dos dados. Pode-se usar um critério individual para traçar uma curva de ajustamento que se adapte a um conjunto de dados (este critério você provavelmente já utilizou). Se é conhecido o tipo de equação dessa curva é possível obter suas constantes, mediante a escolha de tantos pontos da curva quantas sejam as constantes da equação. Assim, por exemplo, se a equação é uma reta,

$$y = ax + b , \quad (2)$$



são necessários dois pontos,  $(x_\alpha, y_\alpha)$  e  $(x_\beta, y_\beta)$ , escolhidos da curva (reta) de ajuste para se determinar  $a$  e  $b$ . Se a equação é de uma parábola,  $y = ax^2 + bx + c$ , serão necessários três pontos. A desvantagem deste método é que observadores diferentes podem obter curvas e equações diferentes, já que a escolha dos pontos é arbitrária.

Para evitar o critério individual de curvas de ajustamento que se adaptem a um conjunto de dados, podemos utilizar o **Método dos Mínimos Quadrados** que, por se tratar de um método analítico, indicará uma, e somente uma, curva que melhor representa um determinado conjunto de pontos. Nos deteremos ao ajuste somente de retas, embora o método possa ser também aplicado a outros tipos de curvas.

Suponhamos que as grandezas  $x, y$ , cujas medidas são dadas por (1), se relacionem linearmente. Assim, a eq. (2) será a melhor reta que se ajusta aos pontos (1) a qual deseja-se determinar. Devido a erros de medida, os valores  $(x_i, y_i)$  não satisfazem exatamente à eq. (2), isto é,

$$y_i \cong ax_i + b.$$

Para que esta expressão se transforme numa igualdade, deveremos levar em conta os erros  $\varepsilon$  cometidos na medida. Assim,

$$y_i = (ax_i + b) + \varepsilon_i. \quad (3)$$

Portanto,

$$\varepsilon_i(a, b) = y_i - (ax_i + b), \quad (4)$$

onde  $\varepsilon_i$  é a **discrepância** ou erro cometido na medida de  $y$ . A soma dos quadrados das discrepâncias é dada por

$$\begin{aligned} E(a, b) &= [y_1 - ax_1 - b]^2 + [y_2 - ax_2 - b]^2 + \dots + [y_n - ax_n - b]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i - ax_i - b]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Aplicando-se o Método dos Mínimos Quadrados, tem-se que os melhores valores para  $a$  e  $b$  (e portanto a melhor reta) são aqueles que minimizam  $E(a, b)$ . Como  $E$  é uma função de duas quantidades ( $a$  e  $b$ ), escrevemos esta condição de mínimo como

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial b} E(a, b) = 0, \quad (6)$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \quad (8)$$

Dessas equações (7) e (8) obtemos as chamadas equações normais,

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i (bx_i + ax_i^2) \quad (9)$$

$$\sum_i y_i = \sum_i (ax_i + b) \quad (10)$$



Resolvendo (9) e (10) simultaneamente para  $a$  e  $b$  encontramos

$$a = \frac{\left[ \sum_i x_i \right] \left[ \sum_i y_i \right] - n \left[ \sum_i x_i y_i \right]}{\left[ \sum_i x_i \right]^2 - n \left[ \sum_i x_i^2 \right]} \quad (11)$$

$$b = \frac{\left[ \sum_i x_i y_i \right] \left[ \sum_i x_i \right] - \left[ \sum_i (x_i^2) \right] \left[ \sum_i y_i \right]}{\left[ \sum_i x_i \right]^2 - n \left[ \sum_i x_i^2 \right]} \quad (12)$$

Como uma aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, apresentamos a seguir o ajuste de uma reta. Seja o conjunto de pontos que desejamos ajustar.

$x_i$	1	3	4	6	8	9	11	14
$y_i$	1	2	4	4	5	7	8	9

De acordo com as equações (11) e (12),  $n = 8$ ; devemos agora calcular as somas de  $x$ ,  $y$ ,  $x \cdot y$  e  $x^2$

$x_i$	1	3	4	6	8	9	11	14	$\sum_i x_i = 56$
$y_i$	1	2	4	4	5	7	8	9	$\sum_i y_i = 40$
$x_i \cdot y_i$	1	6	16	24	40	63	88	126	$\sum_i x_i y_i = 364$
$x_i^2$	1	9	16	36	64	81	121	196	$\sum_i x_i^2 = 524$

Logo, pelas eqs. (11) e (12), teremos:

$$a = 0,64, \quad b = 0,55$$

$$y = 0,64x + 0,55$$

Esta equação define uma reta que passa pelos seguintes pontos corrigidos:

$x_i$	1	3	4	6	8	9	11	14
$y_i$	1,2	2,5	3,1	4,4	5,6	6,3	7,5	9,4

#### IV - EXERCÍCIOS

**Exercício 1** - Demonstre as equações (11) e (12).

**Exercício 2** - Ajuste uma reta ao seguinte conjunto de pontos:

$x_i$	5	10	15	20	25	30	35
$y_i$	1	3	4	7	8	9	11

**Exercício 3** - Mostre que o ajuste de  $n$  pontos  $(x_i, y_i)$  a uma reta passando pela origem,  $y = \gamma x$  implica em

$$\gamma = \frac{\sum_i (x_i y_i)}{\sum_i (x_i^2)}$$

**Exercício 4** - Utilize 05 círculos de cartolina de diâmetros diferentes, papel milimetrado e papel log-log, e determine a relação entre suas áreas ( $A$ ) e seus raios ( $R$ ), respondendo às seguintes questões:

1. Sem usar régua, determine a área ( $A$ ) e o raio ( $R$ ) de cada círculo.
2. Com os valores determinados, construa em papel milimetrado o gráfico  $A \times R$ .
3. Represente os mesmos dados no papel log-log. Que relação parece existir entre  $A$  e  $R$ ?
4. Ajuste os seus dados pelo método dos mínimos quadrados aplicado aos logaritmos das grandezas  $A$  e  $R$ .
5. Por que não é indicado aplicar o Método dos Mínimos Quadrados diretamente às grandezas  $A$  e  $R$ ?
6. A expressão encontrada no item anterior é a que você esperava? Se os valores das constantes não foram exatamente aqueles esperados, como você justifica?

**Exercício 5** - A observação e as medidas de um fenômeno de decaimento radioativo levaram aos seguintes resultados para a taxa de contagem radioativa (ou atividade) no tempo:

Tempo (h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Taxa eventos /min	..	9535	8190	7040	6050	4465	3295	2430	1800	1330	980	720	530	395	290

De posse destes dados, determine a dependência funcional da atividade radioativa  $A(t)$  da substância com o tempo  $t$ . Para tanto, trace o gráfico de  $A(t) \times t$  e observe o comportamento da curva obtida. Você verifica que a dependência da atividade com o tempo não é linear; ou seja, a curva obtida não é uma reta.

Trace então um gráfico num papel log-log e, em seguida, um outro no papel semi-log.

Recordando o que foi introduzido na disciplina Física Geral e Experimental I, o papel de gráfico log-log é aquele que tem marcado em ambos os eixos uma escala logarítmica e o papel semi-log (ou lin-log ou mono-log) é aquele que tem marcado no eixo da abcissa uma escala linear e no eixo da ordenada uma escala logarítmica.

Assim, use o eixo da abcissa para representar a variável independente do fenômeno e o eixo da ordenada para representar a atividade.

Como você descreve os resultados dos gráficos log-log e semi-log?

Determine, pelo Método dos Mínimos Quadrados, a melhor reta que representa o fenômeno no papel semi-log. Compare esses resultados com os resultados obtidos diretamente do gráfico.

Obtenha a lei que relaciona a atividade com o tempo, considerando a relação entre o logaritmo neperiano ( $\ln$ ) e o logaritmo na base 10.

**Exercício 6** - Num aparelho simulador do modelo atômico de Bohr — um elétron com velocidade tangencial  $v$  girando numa órbita circular de raio  $r$  em torno do núcleo — foram obtidos os seguintes valores para a velocidade do elétron e para o raio das órbitas simuladas para o átomo de Hidrogênio:

$r(m)$	$v(m/s)$
$5,2664 \times 10^{-11}$	$2,19 \times 10^6$
$2,1066 \times 10^{-10}$	$1,09 \times 10^6$
$4,7397 \times 10^{-10}$	$7,29 \times 10^5$
$8,4262 \times 10^{-10}$	$5,47 \times 10^5$
$1,3166 \times 10^{-9}$	$4,37 \times 10^5$
$1,8959 \times 10^{-9}$	$3,65 \times 10^5$
$2,5805 \times 10^{-9}$	$3,12 \times 10^5$
$3,3705 \times 10^{-9}$	$2,73 \times 10^5$
$4,7924 \times 10^{-9}$	$2,29 \times 10^5$

Determine a dependência funcional da velocidade do elétron com o raio da órbita.

Inicialmente, trace um gráfico de  $v \times r$ .

Observe o comportamento da curva encontrada. Compare a sua forma com a forma obtida para a curva do exercício anterior. As duas têm comportamento similar?

Trace agora o gráfico de  $v \times r$  no papel semi-log e, em seguida no papel log-log. Ou seja, os gráficos de  $\log v \times r$  e de  $\log v \times \log r$ , respectivamente

Descreva as diferenças que se observam no comportamento da curva em cada caso.

Para o gráfico que apresenta um comportamento linear, determine pelo Método dos Mínimos Quadrados, a melhor reta.

Obtenha a relação entre a velocidade do elétron e o raio de sua órbita.

Os exercícios mostram o uso de diferentes tipos de papel-gráfico (diferentes escalas) e como são obtidas as leis que regem os fenômenos observados. Das análises dos dados experimentais, procura-se a dependência funcional entre as variáveis observadas, que permite extrair uma lei física.

O uso da informática tem possibilitado o tratamento de dados de maneira mais rápida e eficiente. Em um microcomputador dotado de um aplicativo com capacidade de tratar dados e gerar gráficos - EXCEL, LOTUS 123, ORIGIN, etc. - é possível repetir os procedimentos dos exercícios deste experimento. Tente trabalhar com eles e obter as relações e gráficos aqui mostrados.

## PÊNULO FÍSICO E PÊNULOS SIMPLES ACOPLADOS

### I - INTRODUÇÃO

As oscilações desempenham um papel fundamental na física, seja na mecânica, na acústica, na eletricidade e na ótica. Um sistema massa-mola é a realização mais simples do que se chama de oscilador harmônico: um corpo (massa), acoplado a outro corpo material (mola), é mantido em sua posição de equilíbrio, onde a mola se encontra sem deformações, portanto livre de tensões internas. Se deslocado de sua posição de equilíbrio, a massa sofre a ação de uma força restauradora linear que a força a retornar ao ponto de equilíbrio. Esta força é devida à tendência da mola de retomar ao seu estado original, sem deformações nem tensões internas.

O pêndulo simples é um sistema que executa oscilações harmônicas se afastado por pequenos deslocamentos de sua posição de equilíbrio. Aqui a força restauradora é devida à gravidade que força a massa a retornar para o ponto mais baixo. O pêndulo simples consiste de uma massa  $m$  suspensa por um fio de comprimento  $L$  e massa  $m_L \ll m$ . No tratamento teórico supõe-se que toda a massa  $m$  está concentrada em um ponto e também que  $\varphi \approx \text{sen}(\varphi)$ .

O pêndulo físico, ou pêndulo composto, é qualquer sistema suspenso por um ponto  $O$ , que pode girar em torno de um eixo horizontal que passa por este ponto. Ele compreende uma vasta gama de situações reais, e não se sujeita às condições quase ideais definidas para o pêndulo simples. É claro que o pêndulo simples restrito a oscilações em um plano é um caso especial do pêndulo físico.

### MOMENTO DE INÉRCIA

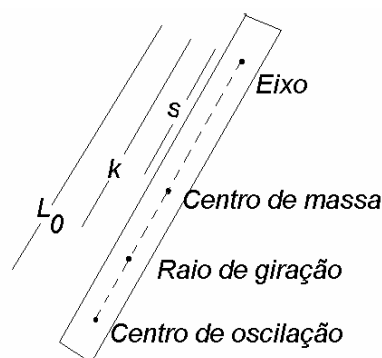
O conceito de momento de inércia  $I$  é fundamental na análise de movimentos de rotação de um corpo em torno de um eixo, e será usado nas análises dos pêndulos físico e de torção. Esta grandeza aparece naturalmente ao escrevermos a energia cinética de um corpo que realiza um movimento circular uniforme de raio  $r$ , velocidade angular  $\omega$ , e velocidade tangencial  $v = \omega r$ :

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1)$$

A definição  $I = mr^2$  para uma massa puntiforme  $m$  girando em torno de um ponto a uma distância  $r$  pode ser generalizada para qualquer distribuição discreta (ou contínua) de massa. O momento de inércia total será a soma (ou integral) do produto das massas  $m_i$  por  $r_i^2$ , atentando-se que  $r_i$  é a distância da massa  $m_i$  ao eixo de rotação escolhido. No roteiro seguinte fazemos uma discussão mais detalhada sobre o significado deste conceito.

### PÊNULO FÍSICO

A posição de equilíbrio do pêndulo físico (ver Figura) é aquela em que o centro de gravidade do corpo está no plano vertical que passa pelo eixo de sustentação. Nos casos onde a gravidade é constante, o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio, o torque restaurador vai ser proporcional ao produto da força ( $mg$ ) pela distância  $s$  do ponto onde ela é aplicada (centro de massa) até o eixo, i.e.:



$$\tau = -m g s \sin \varphi , \quad (2)$$

onde  $\varphi$  indica o ângulo formado entre a reta que passa pelo eixo e o centro de massa e a direção vertical. A aplicação da segunda lei de Newton a movimentos de rotação leva a:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \tau = -m g s \sin \varphi , \quad (3)$$

de onde é possível se obter a frequência de oscilação do pêndulo  $\omega^2 = mgs/I$ .

Definimos também duas grandezas de comprimento:  $L_o$  é a distância do eixo ao centro de oscilações, ponto tal que, se toda a massa do corpo estivesse aí concentrada o pêndulo simples assim formado teria a mesma frequência de oscilação do pêndulo físico;  $k$  é o chamado raio de giração, i.e., a distância do eixo a um ponto tal que, se toda a massa do corpo estivesse aí concentrada, o seu momento de inércia com relação ao eixo seria igual ao do corpo que constitui o pêndulo físico:

$$L_o = \frac{I}{ms}; \quad k = \sqrt{I/m} . \quad (4)$$

Obtém-se  $L_o$  igualando-se a frequência do pêndulo físico indicada acima com a frequência do pêndulo simples equivalente  $\omega_o^2 = g/L_o$ . A quantidade  $k$  foi obtida a partir de sua definição.

O pêndulo físico que usaremos consiste de uma régua retangular de plástico, furada em diversos pontos ao longo do lado mais comprido da régua, equidistantes das bordas. Assim podemos fazer um estudo da dependência da frequência com relação à distância do eixo de rotação ao centro de massa. O momento de inércia de uma distribuição de massa delgada e uniforme ao longo de uma direção e de comprimento total  $L$  com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é dada por

$$I_{CM} = mL^2/12 . \quad (5)$$

Podemos obter o momento de inércia com relação ao eixo onde a régua vai oscilar com o auxílio do teorema dos eixos paralelos. Ele estabelece que o momento de inércia de um corpo em torno de um eixo qualquer pode ser expresso pela soma do momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao original, passando pelo centro de massa, e de um termo que é o produto da massa total do corpo pelo quadrado da distância entre os dois eixos, ou seja:

$$I = I_{CM} + ms^2 = mL^2/12 + ms^2 . \quad (6)$$

Esta relação pode ser inserida na expressão para a frequência de oscilações escrita acima, resultando em

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L^2/12 + s^2}{gs} . \quad (7)$$

Esta expressão mostra que o período de oscilações cresce em ambos os limites  $s \rightarrow 0$  e  $s \rightarrow \infty$ , passando por um mínimo em um valor finito de  $s$ .

## PÊNDULOS ACOPLADOS

O acoplamento entre dois ou mais sistemas físicos faz com que eles se influenciem mutuamente. Isto pode ser exemplarmente observado quando acoplamos dois pêndulos simples, que é um dos sistemas mecânicos mais simples. Esta influência é observada na alteração das trajetórias de cada um deles com relação à situação sem acoplamento, bem como pela troca de energia entre eles.

No caso dos pêndulos físicos vamos acoplá-los usando uma pequena massa  $\Delta m$  presa longe das extremidades de um barbante que será atado aos fios dos dois pêndulos. Vamos examinar

essencialmente sistemas nos quais os pêndulos podem ter a mesma massa ou massas diferentes; o mesmo comprimento ou comprimentos diferentes; os barbantes que acoplam os dois pêndulos podem ser presos à mesma altura ou a alturas diferentes. Cada arranjo vai gerar um sistema físico com características próprias que poderão ser observadas visual e qualitativamente.

Os objetivos deste experimento são: i) executar medidas de frequências de um pêndulo físico de modo a relacioná-la com a geometria e distribuição de massa que o caracteriza; ii) observar movimentos complexos que aparecem quando consideramos um sistema de pêndulos acoplados. A primeira parte do experimento será realizada pelos alunos, e a segunda terá mais um caráter de aula de demonstração.

## **II – MATERIAL NECESSÁRIO**

1. Haste de acrílico com furos
2. Raio de roda de bicicleta
3. Cronômetro ou relógio
4. Bases, garras e barras cilíndricas
5. Sistema de pêndulos acoplados

## **III - PROCEDIMENTO**

### **1 - PÊNDULO FÍSICO**

Você vai usar a haste de acrílico como pêndulo físico. Registre na tabela sua massa  $m$  e seu comprimento  $L$ . Use o raio da roda da bicicleta preso a uma garra como eixo de oscilação. Meça o valor do período usando todos os furos distintos ao longo da haste. No sentido de diminuir os erros de medida, é aconselhável que o período seja determinado a partir da medida do tempo de 10 oscilações. Para cada medida registre também a distância  $s$  do furo que contém o eixo até o centro da haste.

### **2 - PÊNDULOS SIMPLES ACOPLADOS**

Tome duas massas iguais (pese-as) e prenda-as aos fios. Ajuste as alturas de sorte a obter pêndulos idênticos (de mesma frequência). Acople os pêndulos com  $\Delta m$  presa a alturas iguais nos fios dos pêndulos de modo a formar um V. Cole no chão (piso) uma fita crepe na projeção da linha que une os pêndulos simples acoplados. Cole fitas no piso abaixo da posição de equilíbrio de cada pêndulo, perpendicularmente à primeira. Este será o seu sistema de referência.

Mantenha um pêndulo em repouso e acione o outro ao longo da linha que os une, afastando-o da posição de equilíbrio e abandonando-o. Observe o comportamento deles. Repita este procedimento na direção perpendicular à linha que os une. Faça também em uma direção arbitrária. Tente acionar um pêndulo ao longo de uma circunferência com o outro preso, soltando-o quando obtiver a circunferência desejada. Observe o movimento do sistema, inclusive as fases das oscilações.

Varie a altura em que foi atado um dos braços do barbante de acoplamento (p. ex. dobrando o valor deste braço). Repita todos os passos do item anterior. Note que, com a quebra de simetria no acoplamento dos pêndulos, uma propriedade do caso simétrico foi perdida: a energia não é mais totalmente transferida de um pêndulo ao outro. Tente explicar esta e outras diferenças observadas entre as duas maneiras de acoplar os pêndulos.

Continue o experimento modificando agora o comprimento de um dos pêndulos. Com isso a simetria do sistema é quebrada. Repita todos os procedimentos para os pêndulos idênticos.

Observe que agora o acoplamento simétrico não garante a total transferência de energia de um pêndulo ao outro. Observe o efeito de quebra de simetria no acoplamento, e tente encontrar uma configuração, também assimétrica, que possibilite a troca total de energia.

Finalmente trabalhe com pêndulos de comprimentos iguais e massas diferentes. Repita todos os procedimentos já descritos acima.

#### IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Trace, em papel milimetrado o período de oscilação  $T$  em função da distância  $s$ . Note que ele tem um valor mínimo, e cresce quando  $s \rightarrow 0$  e  $s \rightarrow L/2$ .

Trace também em papel log-log os dados para os 4 menores valores de  $s$  (que corresponde aproximadamente ao limite em que  $s \rightarrow 0$ ). De acordo com a expressão para o período obtida na Introdução, espera-se uma dependência em uma lei de potência com expoente negativo. Determine, a partir do gráfico, a dependência funcional entre  $T$  e  $s$  neste limite.

Trace em papel milimetrado o valor de  $T^2 s / (4\pi^2)$  em função de  $s^2$ . De acordo com a expressão já mencionada, espera-se uma dependência linear entre estas duas grandezas. Usando o método dos mínimos quadrados faça o ajuste da melhor reta entre elas. A partir dos valores obtidos para o coeficiente angular e termo constante determine a dependência do momento de inércia do pêndulo físico em função da distância  $s$ . Verifique se ela satisfaz o teorema dos eixos paralelos. Finalmente obtenha o raio de giração  $k$  em função de  $s$ .

## PÊNULO DE TORÇÃO

### I - INTRODUÇÃO

O pêndulo de torção é um outro sistema físico que realiza oscilações harmônicas se deslocado ligeiramente de sua posição de equilíbrio. Ele é construído com elementos similares aos usados no pêndulo simples: um fio preso a uma plataforma por sua extremidade superior, e um corpo preso em sua extremidade inferior. Algumas diferenças no entanto existem: o fio pode ter uma maior densidade linear que no caso do pêndulo simples; e o corpo pode ter uma distribuição de massa arbitrária que não precisa ser puntiforme.

No que diz respeito às oscilações, em vez do corpo ser deslocado de sua posição de equilíbrio, ele é girado em torno de seu eixo vertical. Isto causa uma deformação do fio que o sustenta, que tende a retornar ao seu estado original sob a influência do torque restaurador exercido pelo fio. Dentro deste ponto de vista, o sistema é mais parecido com a situação massa-mola, onde a força restauradora não é devida a gravidade, mas à eliminação de deformações em um sistema material.

A frequência de oscilações de um pêndulo de torção depende do fio e do corpo suspenso. Neste último caso, a dependência se expressa pelo momento de inércia do corpo em torno de um eixo que se situa no prolongamento do fio. No que diz respeito ao primeiro fator, a dependência se dá tanto nos aspectos geométricos do fio (diâmetro e comprimento) bem como no material de que ele é feito.

Neste experimento executaremos medidas de frequências de um pêndulo de torção, relacionando-a com a geometria da distribuição de massa e do fio que o caracteriza.

### MOMENTO DE INÉRCIA

Como já mencionado no roteiro anterior, o conceito de momento de inércia  $I$  está ligado ao movimento de rotação de um corpo em torno de um eixo. Esta grandeza mede a inércia (resistência a sair do estado de repouso) de um sistema parado quando nele é aplicado um torque que vai colocá-lo em rotação. Esta resistência também é sentida quando se quer alterar a sua rotação, o que é decorrente do princípio de inércia de Galileu. Para distribuições contínuas e discretas de massas ele é expresso por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{ou} \quad I = \int_V \rho(r) r^2 dv. \quad (1)$$

Em ambas as expressões acima,  $r$  indica a distância da massa  $m_i$  ou do elemento de volume  $dv$  até o eixo considerado.

### PÊNULO DE TORÇÃO

No pêndulo de torção, o corpo suspenso é retirado de sua posição de equilíbrio ao ser girado em torno do eixo definido pelo fio. Esta ação deforma o material do fio, que tende a voltar à sua posição original, do mesmo modo que a mola distendida no sistema massa-mola. Assim ele exerce no corpo um torque restaurador  $\tau$ , que é proporcional ao ângulo de rotação  $\varphi$  e ao módulo de torção  $\kappa$  (depende das características do fio). Este é o único torque atuando sobre o corpo. Pela segunda lei de Newton, aplicada ao caso de um corpo rígido que sofre a ação de um torque, temos:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \tau = -\kappa \varphi. \quad (2)$$



Esta equação é análoga a do sistema massa-mola, indicando que o corpo descreve oscilações harmônicas em torno do fio suspenso, cuja frequência é  $\omega^2 = \kappa/I$ .

No experimento teremos duas configurações para o corpo suspenso pelo fio: i) Barras delgadas uniformes, de massa  $m$  e comprimento  $L$ , para as quais se tem

$$I = \frac{1}{12} mL^2. \quad (3)$$

ii) Uma régua de massa  $m$  e comprimento  $L$ , sustentando duas massas de metal de massa  $M$  a uma distância  $d$ , do centro da régua. Neste caso

$$I = \frac{1}{12} mL^2 + 2Md^2 \quad (4)$$

Deste modo obtemos as expressões para os períodos de oscilação para os dois casos:

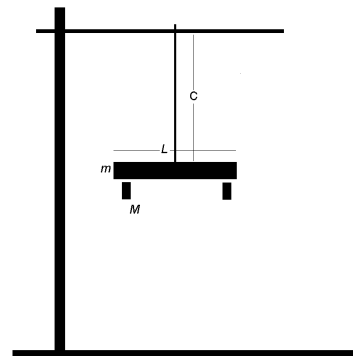
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{mL^2}{12\kappa}, \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{mL^2}{12\kappa} + \frac{2Md^2}{\kappa}. \quad (5)$$

## II – MATERIAL NECESSÁRIO

1. Régua de plástico com furos
2. Massas
3. Fio de metal
4. Cronômetro ou relógio
5. Régua
6. Bases, garras e barras cilíndricas

## III - PROCEDIMENTO

Monte o pêndulo de torção com o auxílio de 1 base, 2 hastes e 2 garras, conforme ilustrado na Figura. Meça o comprimento  $C$  do fio e registre na tabela. Inicialmente trabalhe com as barras cilíndricas de metal. Pese a massa  $m$  de uma delas, meça o seu comprimento  $L$  e prenda-a no fio pelo centro da mesma, de forma que ela assuma uma posição horizontal. Em seguida faça a haste oscilar, torsionando levemente o fio que a sustenta. Meça o período de oscilações, fazendo a medida do tempo de 10 oscilações. Registre todos os dados na tabela. Repita o procedimento com mais 5 barras metálicas.



Em seguida trabalhe com a haste de acrílico e as massas  $M$  que podem ser penduradas nela. Meça a massa  $m$  da haste e o seu comprimento  $L$ . Determine o valor de  $M$  e pendure-as nos pontos mais próximos do centro da haste. Certifique-se que as massas estão à mesma distância  $d$  do centro. Em seguida meça o período de oscilações pelo método descrito acima, registrando os dados na tabela. Mantenha o fio com o mesmo comprimento  $C$  usado na primeira série de medidas. Repita o procedimento para mais 4 posições das massas na haste, inclusive usando os furos mais afastados do centro. Registre todos os dados na tabela.

Agora fixe uma configuração das massas na haste e faça variar o comprimento do fio. Além da medida do período para o comprimento original  $C$ , faça medidas do período para mais 5 comprimentos.

#### IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Trace, em papel milimetrado, o quadrado do período de oscilação das diferentes barras metálicas em função da grandeza  $mL^2$ . Utilize o método dos mínimos quadrados para fazer um ajuste da reta que melhor descreve os pontos. A partir da forma da equação do movimento para o pêndulo de torção determine o valor de  $\kappa$ .

Em seguida trace, em papel milimetrado, o quadrado do período de oscilações medido para a haste de acrílico com massas penduradas em função do quadrado da distância  $d$ . Utilize o método dos mínimos quadrados para fazer um ajuste da reta que melhor descreve os pontos. Relacione o coeficiente angular da reta com a massa pendurada  $M$  e o valor constante com o momento de inércia da haste. Compare o valor de  $M$  com o obtido na balança, e o valor de  $I$  com o dado pela expressão acima.

A partir dos dados da tabela componha a grandeza  $T^2 / I (4\pi^2)$ . Trace em papel log-log este valor em função do comprimento  $C$  do fio. Faça um ajuste da reta pelo método dos mínimos quadrados. Que dependência que se obtém entre  $\kappa$  e  $C$ ? Que expressão é obtida para o período de oscilação em função de  $C$  e de  $d$ ?

## OSCILADOR FORÇADO

### I - INTRODUÇÃO

Nas oscilações livres o sistema executa seu movimento regido apenas por suas características e, no caso do pêndulo, da força gravitacional constante que tenta restaurar o equilíbrio. A frequência de oscilação depende apenas destes parâmetros, sendo chamada de frequência natural do sistema  $\omega_0$ . No entanto, na maioria das vezes, os sistemas oscilam acoplados a uma força externa periódica ou a outros sistemas oscilantes. Nestas situações os sistemas executam movimentos mais complexos: no caso forçado, o padrão das oscilações livres é totalmente suprimido; no caso de sistemas acoplados, o movimento resultante incorpora combinações das frequências livres de cada um dos sub-sistemas que gera o sistema composto.

Um sistema oscilante real está sempre sujeito a algum tipo de atrito de forma que, se deslocado de sua posição de equilíbrio, ele inevitavelmente evolui para o estado de equilíbrio em repouso. Quando existe uma força externa periódica atuando sobre o sistema durante todo o tempo de oscilação, ela restitui ao oscilador a energia perdida pelo atrito, mas exigirá que o sistema passe a oscilar com a sua frequência  $\omega$ : será uma "oscilação forçada". As amplitudes das oscilações forçadas dependem da frequência natural do sistema  $\omega_0$ , da intensidade  $F_0$  e da frequência  $\omega$  da força externa. A curva que relaciona a amplitude da oscilação forçada com a frequência da força externa se chama "curva de ressonância". Se o atrito presente no sistema é pequeno, a curva tem um máximo em torno da frequência natural do sistema. Como a energia de um sistema oscilante é proporcional ao quadrado da sua amplitude, este resultado indica que a absorção de energia é máxima quando o sistema é excitado com frequência próxima à sua frequência natural.

Um oscilador harmônico real é caracterizado por duas grandezas: a sua frequência natural  $\omega_0$  e a taxa de amortecimento  $\gamma$ . No caso do sistema massa-mola  $\omega_0^2 = k/m$  e  $\gamma = b/m$ , onde  $b$  é o coeficiente da força de atrito, proporcional à velocidade instantânea da massa. Para outros osciladores que não o simples sistema massa-mola é bem mais fácil se determinar o valor de  $\omega_0$  do que o de  $\gamma$ . Neste caso, a análise de curvas de ressonância pode ser usada para se determinar o seu valor. A solução da equação diferencial para o oscilador harmônico amortecido forçado é expressa da seguinte maneira:

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (1)$$

onde  $\omega$  indica a frequência da força externa e tanto  $A$  como  $\varphi$  dependem de  $\omega$ . A expressão para  $A(\omega)$  é:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \cdot \quad (2)$$

Se  $\gamma$  é pequeno, a expressão acima pode ser aproximada, perto de  $\omega = \omega_0$ , por:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \frac{1}{\left[ (\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 / 4 \right]^{1/2}} \cdot \quad (3)$$

Essa expressão mostra que o máximo da curva de ressonância ocorre em  $\omega = \omega_0$  e é dado por:

$$A_{\max} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} \cdot \quad (4)$$

A mesma expressão mostra que:

$$A(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

Ou seja, a distância entre os pontos onde a reta corta a curva de ressonância determina o valor de  $\gamma$ . Esta distância é também chamada de semi-largura de pico. O fator de qualidade  $Q$  é definido por:

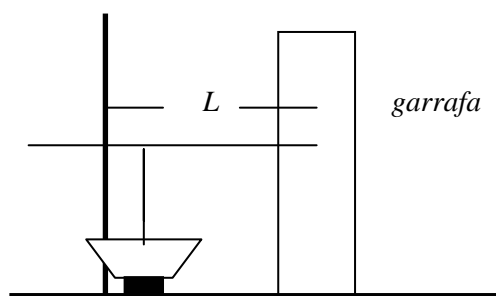
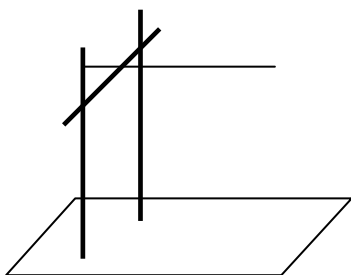
$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Ele é uma medida da qualidade, ou seja, da presença de pouco ou muito atrito entre os constituintes do sistema .

O objetivo deste experimento é determinar a curva de ressonância de um oscilador forçado e determinar o fator de amortecimento

## II – MATERIAL NECESSÁRIO

1. Alto-falante
2. Gerador de áudio frequência
3. Frequencímetro
4. Raio de roda de bicicleta
5. Régua
6. Hastes, bases e garras



## III - PROCEDIMENTO

Monte o oscilador conforme ilustrado nas Figuras acima. O fio de nylon do preso ao alto-falante deve ficar entre 2 e 3 cm afastado da garra, para que a transmissão de energia seja apreciável. Inicialmente coloque toda a extensão do raio de bicicleta livre para oscilar. Meça o comprimento  $L$ , que vai desde a garra até a extremidade livre do raio, registrando seu valor na tabela. Em seguida ligue o gerador de áudio e aumente a frequência até cerca de 10 Hz. A partir deste ponto, em intervalos de 1 em 1 Hz, e até uma frequência  $f$  de cerca de 30 Hz, meça a amplitude  $A$  de vibração da extremidade livre do raio de bicicleta, registrando os valores de  $f$  e  $A$  na tabela.

Em seguida desloque o ponto de fixação do raio na garra, de tal modo que o novo comprimento  $L$  da parte livre para oscilação seja reduzida de cerca de 4 cm. Repita o procedimento anterior, mas observe que como o pico de ressonância será deslocado para frequências mais altas, você pode começar a anotar os dados da amplitude a partir de uma frequência mais alta que 10 Hz, consequentemente indo até uma frequência maior que 30 Hz. Note que, nesta situação, a parte que fica atrás da garra não desempenha qualquer papel. É como se estivéssemos trabalhando com um raio mais curto. Repita o procedimento para mais quatro posições do raio. O menor valor de  $L$  para o qual ainda se pode obter dados com boa precisão para a curva de ressonância é  $L \sim 14$  cm.

#### IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Trace, em papel milimetrado,  $A$  em função de  $\omega$  para as séries de medidas realizadas para diferentes valores de  $L$ . Note que você anotou medidas para  $f = \omega/2\pi$ . Anote as frequências de ressonâncias e determine as semi-larguras de pico para cada um dos casos. Calcule o fator de qualidade do sistema para cada um dos valores de  $L$ .

Trace os valores obtidos para a frequência de ressonância em função de  $L$  em papel log-log. Usando o método dos mínimos quadrados estime a dependência entre frequência de vibração natural de uma haste delgada e o seu comprimento.

## CORDA VIBRANTE

### I – INTRODUÇÃO

Uma onda pode ser entendida como uma perturbação que se propaga em um meio. Existe uma grande variedade de ondas na natureza, e o estudo de suas propriedades e seu comportamento constitui importante campo da física. Dentre as mais fundamentais propriedades associadas a uma onda está o transporte de energia sem envolver o arrasto do meio material onde ela se propaga.

Neste experimento, estudaremos as características de ondas transversais que se propagam numa corda vibrante, particularmente daquelas que chamamos de ondas harmônicas estacionárias. Este tipo de onda é caracterizado por uma grande amplitude de vibração, e é uma manifestação de ressonância da corda com relação à excitação por uma força externa. Vamos notar que este sistema possui inúmeras frequências de ressonância, ao passo que o oscilador forçado só possui uma.

O objetivo do experimento é a obtenção experimental da relação entre a frequência de vibração das ondas estacionárias ( $f$ ), o número de ventres ( $n$ ) (correspondendo a  $n-1$  nodos), e os parâmetros que caracterizam a corda: o seu comprimento ( $L$ ), a tensão a que está submetida ( $\tau$ ), a sua densidade linear ( $\mu$ ). Para tanto faremos quatro séries de medidas, analisando a dependência entre a frequência e cada um dos parâmetros acima citados.

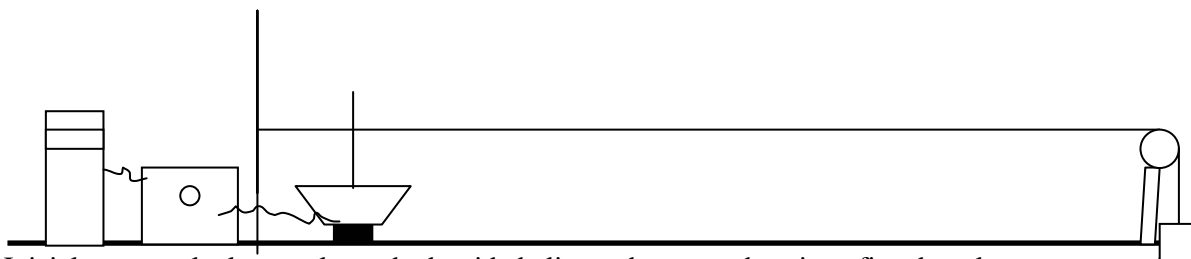
### II - MATERIAL NECESSÁRIO:

1. Gerador de áudio-frequência (0-10<sup>3</sup> Hz)
2. Alto falante usado como vibrador
3. Porta-pesos
4. Massas aferidas de 10, 50 e 100 g,
5. 05 fios de nylon com diâmetros diferentes,

### III – PROCEDIMENTO

Antes dos alunos começarem o procedimento experimental, o professor poderá realizar uma breve discussão sobre os principais fenômenos relacionados com a propagação de onda: transmissão de pulsos isolados, superposição, reflexão, refração, ondas harmônicas e ondas estacionárias, dependência entre a velocidade de propagação e a tensão. Esta discussão pode ser ilustrada com o auxílio de molas tipo slinky e PSSC.

O dispositivo experimental com o qual realizaremos nossas observações e medidas tem montagem semelhante ao esquema abaixo. O gerador de áudio-frequência produz uma corrente elétrica alternada (senoidal) de frequência variável,  $f$ . A corrente passa pela bobina do eletroímã de um alto falante que provoca atrações e repulsões no diafragma do mesmo, com a mesma frequência do eletroímã. Este movimento do diafragma é transmitido à corda vibrante (fio de nylon) por meio da haste de madeira presa no mesmo. A tensão  $\tau$  no fio é determinada pelos pesos colocados no porta pesos, preso na extremidade do fio, após passar por uma polia.



Inicialmente, calcule os valores da densidade linear de massa dos cinco fios de nylon com os quais você irá trabalhar. Procure os dados necessários com o professor.

Como já comentamos, vamos estudar separadamente a dependência de  $f$  com relação a cada um de seus parâmetros:  $n$ ,  $L$ ,  $\tau$ ,  $\mu$ . Em cada série de medidas mantenha fixos e anote os valores de todos os outros parâmetros envolvidos, a menos daqueles cuja relação está sendo estudada. Observe que:

- i. O comprimento  $L$  corresponde à distância entre a haste presa no alto-falante e o eixo da polia.
- ii. A tensão  $\tau$  deve levar em conta as massas aferidas e o porta peso.
- iii. Fixar o valor de  $\mu$  significa usar apenas um dos fios. A utilização dos 5 fios será apenas necessário quando do estudo da dependência entre  $f$  e  $\mu$ .

### 1 – RELAÇÃO ENTRE $f$ E $n$ : HARMÔNICOS

Escolha um dos fios, prenda-o ao vibrador e submeta-o a uma determinada tensão. Anote na tabela os valores de  $L$ ,  $\tau$ , e  $\mu$ . Se informe com o professor sobre o valor máximo permitido de  $\tau$  para não danificar o alto falante. Varie lentamente a frequência do gerador de áudio observando as vibrações provocadas no fio. Anote o valor da frequência fundamental  $f_1$  que corresponde à primeira onda estacionária (primeiro harmônico) com apenas um ventre no centro da corda. Continue aumentando a frequência do gerador, anotando os valores  $f_n$  ( $n = 2,3,\dots$ ) quando da formação dos harmônicos sucessivos. Registre os dados para  $f_n$  e  $n$  na tabela e construa o gráfico em papel milimetrado de  $f_n \times n$ .

### 2 - RELAÇÃO ENTRE $f$ E $L$ : COMPRIMENTO DO FIO.

Mantenha inicialmente a mesma disposição anterior do equipamento. Escolha o harmônico com o qual irá trabalhar (o segundo harmônico permite geralmente observações mais precisas). Anote os valores de  $n$ ,  $\tau$  e  $\mu$  na tabela. Varie gradativamente  $f$  até a obtenção do harmônico que você escolher. Anote o valor de  $f$  e  $L$  na tabela. Você pode variar o valor de  $L$  deslocando a base com a polia. Obtenha valores de  $f$  e  $L$  para mais 4 valores de  $L$  e anote-os na tabela. Com estes valores, construa o gráfico  $f \times L$  em papéis milimetrado e log-log. Observe a dependência de  $f$  com relação a  $L$ .

### 3 - RELAÇÃO ENTRE $f$ E $\tau$ : TENSÃO APLICADA AO FIO.

Retorne o equipamento à configuração original. Anote os valores de  $n$ ,  $L$  e  $\mu$  na tabela. Varie gradativamente  $f$  até a obtenção do harmônico que você escolher. Anote o valor de  $f$  e  $\tau$  na tabela. Você pode variar o valor de  $\tau$  acrescentando ou retirando massa do porta peso. Obtenha valores de  $f$  e  $\tau$  para mais 4 valores de  $\tau$  e anote-os na tabela. Com estes valores, construa o gráfico  $f \times \tau$  em papéis milimetrado e log-log. Observe a dependência de  $f$  com relação a  $\tau$ .

### 4 - RELAÇÃO ENTRE $f$ E $\mu$ : DENSIDADE LINEAR DO FIO.

Retorne o equipamento à configuração original. Anote os valores de  $n$ ,  $L$  e  $\tau$  na tabela. Varie gradativamente  $f$  até a obtenção do harmônico que você escolher. Anote o valor de  $f$  e  $\mu$  na tabela. Utilize os outros 4 fios para variar o valor de  $\mu$ . Obtenha assim mais 4 valores de  $f$  e  $\mu$  e anote-os na tabela. Com estes valores, construa o gráfico  $f \times \mu$  em papéis milimetrado e log-log. Observe a dependência de  $f$  com relação a  $\mu$ .

## IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Observe os gráficos obtidos de  $f \times n$ ,  $f \times L$ ,  $f \times \tau$  e  $f \times \mu$ . O primeiro sugere uma dependência linear do tipo

$$f = a n + b . \quad (1)$$

Determine os valores de  $a$  e  $b$  pelo método gráfico e dos mínimos quadrados. É esperado que  $b$  seja bastante pequeno com relação a  $a$ . Note que  $a$  depende dos valores de  $L$ ,  $\tau$ , e  $\mu$ , i.e.,  $a=a(L,\tau,\mu)$ . Os outros gráficos, principalmente os traçados em papel log-log, sugerem dependências do seguinte tipo:

$$f = c L^d, \quad f = g \tau^h, \quad f = j \mu^k. \quad (2)$$

Determine os valores de  $c$  e  $d$ ,  $g$  e  $h$ ,  $j$  e  $k$  usando o método gráfico no papel log-log e o método dos mínimos quadrados aplicado aos logaritmos das grandezas. Do mesmo que no caso acima para  $a$ , note que  $c=c(n,\tau,\mu)$ ,  $g=g(n,L,\mu)$ ,  $j=j(n,L,\tau)$ . Assim, com o auxílio dos valores obtidos para  $d$ ,  $h$  e  $k$  é possível escrever uma única relação entre  $f$  e os 4 parâmetros, i.e.,  $f = m n L^d \tau^h \mu^k$ , onde  $m$  é uma constante. Use os valores de  $a$ ,  $c$ ,  $g$  e  $j$  para determinar o valor de  $m$ .

A relação obtida da teoria para a dependência de  $f$  com  $n$ ,  $L$ ,  $\tau$ , e  $\mu$  é conhecida como expressão de Lagrange. Sua forma é:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (3)$$

Compare os valores experimentais obtidos para  $m$ ,  $d$ ,  $h$  e  $k$  com os fornecidos pela expressão acima.



## VELOCIDADE DAS ONDAS SONORAS NO AR

### I – INTRODUÇÃO

Qualquer corpo material que vibra gera ondas mecânicas no meio no qual está imerso, podendo tanto o corpo como o meio ser sólido, líquido ou gasoso. O som percebido por nosso aparelho auditivo corresponde a ondas nestes meios materiais. Ao atingir os nossos ouvidos elas provocam vibrações dos tímpanos que são convertidas em impulsos elétricos e conduzidas até o cérebro que processa a informação recebida.

O aparelho auditivo do ser humano só processa e distingue ondas com frequências no intervalo [20Hz ,20.000Hz], que define o que chamamos de sons ou ondas sonoras. Abaixo de 20 e acima de 20.000Hz, as ondas são denominadas, respectivamente, de infra-som e ultra-som. Alguns animais são capazes de perceber ondas com frequências mais altas, como cães amestrados que atendem a apitos cuja frequência de emissão atinge a 50.000Hz, e os morcegos que conseguem captar frequências de até 120.000Hz, utilizando esta capacidade para evitar colisões com obstáculos. Por outro lado, elefantes e baleias podem captar ondas com frequências abaixo de 20 Hz, na região dos infra sons.

O som (e também os infra- e ultra-som) são ondas longitudinais. Como todas os fenômenos ondulatórios elas são caracterizadas pela velocidade de propagação que depende do meio onde o fenômeno é observado. A título de ilustração apresentamos valores típicos medidos em diversos meios: borracha: 54m/s; ar: (a 20°C): 340 m/s; água: 1.450 m/s; granito: 6.000 m/s. Todas as propriedades estudadas para as ondas em geral (reflexão, refração, difração, interferência) são também válidas para as ondas sonoras.

A velocidade de propagação das ondas em um meio gasoso pode ser obtida teoricamente a partir do modelo do gás ideal. A expressão resultante é:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad (1)$$

onde  $P$  indica a pressão no gás,  $\rho$  é a sua densidade volumétrica e  $\gamma$  é a razão entre o calor específico a pressão constante e o calor específico a volume constante,  $\gamma = c_p / c_v$ . No caso em que o meio é o ar,  $P$  a pressão atmosférica ( $1,03 \times 10^5$  Pascal), e a temperatura é 20°C, obtém-se  $v_s = 344$ m/s, que concorda com os valores medidos com precisão.

Neste experimento iremos medir a velocidade de propagação do som no ar através da geração de ondas estacionárias em um tubo. Discutiremos a seguir algumas características do som.

### INTENSIDADE DO SOM

A intensidade do som é uma quantidade relacionada com a energia transportada pela onda e depende da potência de vibração da fonte emissora. Quanto maior for a quantidade de energia transportada por unidade de tempo, maior é a intensidade do som que perceberemos. A quantidade de energia transportada está relacionada com a amplitude de vibração da onda, sendo a intensidade do som tanto maior quanto maior for a amplitude da onda sonora. O efeito sonoro da variação da intensidade é percebida ao se variar o volume (i.e., a potência gasta na emissão da onda sonora) de um amplificador de som.

### ALTURA DO SOM

A altura do som é relacionada com a frequência da onda sonora. Ela permite classificar o som em grave e agudo. Exemplificando, dizemos em geral que os homens têm voz grave (baixas frequências), enquanto as mulheres possuem voz aguda (alta frequência). Em linguagem musical, um som agudo é alto enquanto um som grave é baixo. Convém ressaltar que na linguagem comum, costuma-se usar os termos "alto" e "baixo" com referência a intensidade do som, o que é incorreto e deve ser evitado.

As notas musicais são caracterizadas pelas suas frequências de emissão. Também os cantores de música clássica são classificados segundo a capacidade de emissão de notas musicais. As frequências das notas musicais que os baixos tenores e sopranos são capazes de emitir, variam desde 100Hz até 1.200Hz, aproximadamente.

### TIMBRE DO SOM

O que caracteriza o timbre do som é a forma da onda sonora emitida. Note que raramente uma onda sonora emitida por um instrumento é caracterizada por uma única frequência. Normalmente ela é formada pela superposição (soma) de diversas ondas harmônicas. A frequência mais baixa, chamada de frequência fundamental  $f_0$ , é a que caracteriza a altura do som. A ela são superpostos os seus harmônicos, i.e., ondas harmônicas com frequência  $f_n = n f_0$ . O timbre depende dos diferentes pesos relativos com que os harmônicos da frequência fundamental aparecem na onda, sendo que estes pesos são determinados pela forma da cavidade ressonante. Como podemos representar graficamente esta onda, dizemos que a sua forma é que caracteriza o timbre.

Assim, uma nota emitida por um piano resulta não apenas da vibração da corda acionada, mas das vibrações dos componentes da caixa (madeira, colunas de ar, outras cordas, etc.), que também vibram com ela e conjuntamente originam uma onda sonora própria do piano. O mesmo ocorre com outros instrumentos musicais e com vozes humanas, o que permite identificar uma pessoa pela voz. O nosso ouvido é capaz de distinguir dois sons, da mesma frequência e mesma intensidade, desde que a forma das ondas sonoras correspondentes sejam diferentes. Dizemos que neste caso, os dois sons possuem timbres diferentes.

### ONDAS ESTACIONÁRIAS

Neste experimento iremos medir a velocidade de propagação do som no ar através da geração de ondas estacionárias em um tubo aberto em uma ponta. Já estudamos a geração de ondas estacionárias em uma corda vibrante, presa nas duas pontas. Uma diferença entre os dois casos é que, no caso da corda, as ondas são *transversais*, pois o movimento oscilante da corda ocorre numa direção transversal à direção de propagação da onda. No caso do som, as ondas são *longitudinais*, pois as moléculas que compõem o ar vibram na mesma direção em que o som se propaga.

Podemos representar esta onda unidimensional por meio de uma senóide, conforme a Fig. 1. No caso (a), o que estamos representando na ordenada é o *deslocamento*  $s(x)$  das moléculas que compõem o ar, em torno de sua posição de equilíbrio médio, em função de sua posição  $x$  ao longo do tubo, em um dado instante. Conforme podemos ver em (b), as moléculas localizadas em  $x_1$  e  $x_3$  estão em suas posições de equilíbrio neste instante ( $s=0$ ), ao passo que a molécula em  $x_2$  está deslocada para a direita em relação ao equilíbrio ( $s>0$ ).

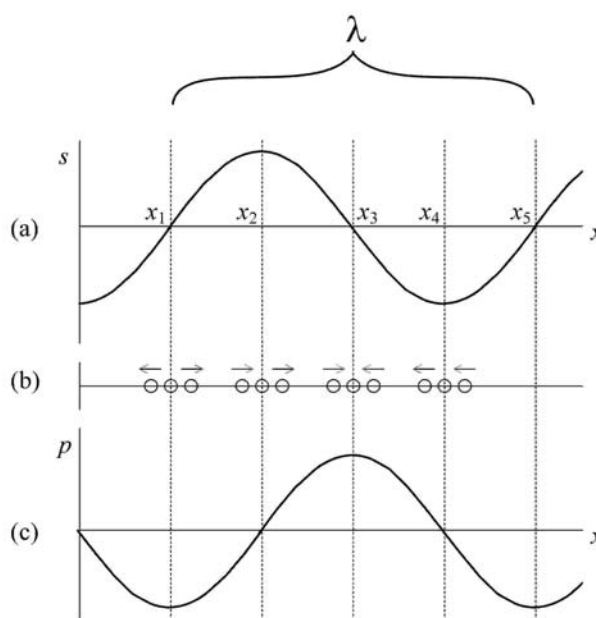


Figura 1

Há no entanto uma diferença entre as posições em  $x_1$  e  $x_3$ . As moléculas em torno de  $x_3$  estão “apertando” o ponto

de equilíbrio, o que corresponde a um aumento de pressão, enquanto que as moléculas em torno de  $x_1$  estão todas se afastando do equilíbrio, correspondendo a uma pressão mais baixa. Podemos então representar em (c) a curva da pressão  $p(x)$  da onda sonora, no mesmo instante da curva (a).

Vemos pelas figuras que um máximo de deslocamento corresponde a um zero de pressão, e um zero de pressão a um máximo ou mínimo de deslocamento. Por convenção, é costume desenhar ondas sonoras por meio de uma curva senoidal de *deslocamento*. O comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre dois máximos da onda de deslocamento (na Fig. 1, a distância entre  $x_1$  e  $x_5$ ).

Estudaremos a propagação do som em um tubo vertical cheio de ar, aberto em uma ponta e fechado com água em outra. Simplificadamente, podemos supor que o som se propaga apenas em uma dimensão, paralela ao eixo do tubo. O som é gerado na boca do tubo, se propaga em seu interior, reflete na superfície de água e retorna para a boca do tubo, onde parte sai para fora e parte retorna mais uma vez para dentro.

Em nosso experimento, encontraremos situações em que se formam ondas sonoras *estacionárias* dentro do tubo. Na parede interna do tubo (onde há água), as moléculas de ar são restringidas a ficar paradas, formando assim um *nó de deslocamento* nulo. Já na superfície aberta do tubo, a condição de contorno apropriada é que a pressão do ar se mantenha aproximadamente constante, resultando em um nó de *pressão* (igual à pressão atmosférica). Pelo que vimos acima, pressão nula corresponde a um extremo de deslocamento, equivalendo a um *ventre de deslocamento* na boca do tubo.

De forma análoga ao que ocorre com a corda vibrante, essas duas condições de contorno selecionam uma série de harmônicos em que ocorre uma ressonância entre a vibração sonora da fonte e o modos naturais de vibração do tubo. Tais ressonâncias serão ouvidas em classe como um aumento na intensidade do som.

Antes de começar a análise do experimento, lembremos que a velocidade  $V$  de uma onda é o produto da frequência  $f$  e de seu comprimento de onda  $\lambda$ :  $V = f \cdot \lambda$ . Conhecendo  $f$  e determinando  $\lambda$ , saberemos a velocidade.

Na Fig. 2, representamos três diferentes harmônicos que podem ocorrer quando fixamos a frequência do som. Para inferirmos as condições de ressonância, é mais fácil trabalhar com o comprimento de onda  $\lambda$  do som, ao variarmos o comprimento  $L$  do tubo. Examinando as diferentes relações entre  $\lambda$  e  $L$  (ver figura), inferimos por indução que:

$$\lambda = \frac{4}{2n-1} L_n \quad (2)$$

Para a ressonância em  $n=1$ , poderíamos inferir o comprimento de onda através da relação  $\lambda=4L_1$ . No entanto, na prática esta relação não se verifica, porque o ventre de deslocamento da onda estacionária não ocorre exatamente

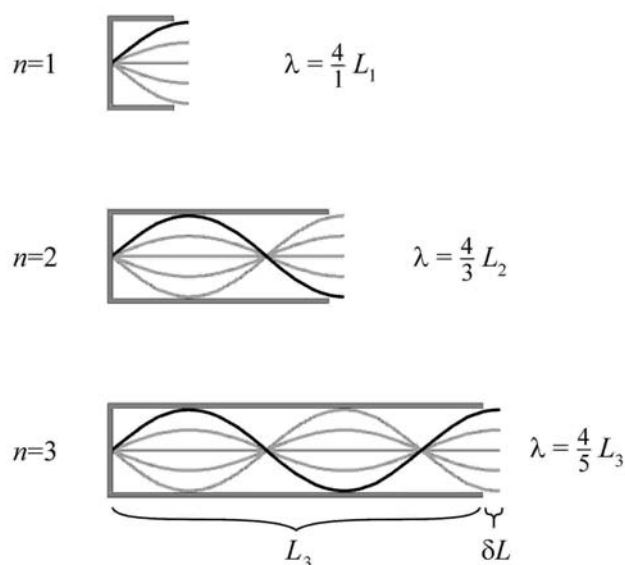


Figura 2

na boca do tubo, mas a uma distância  $\delta L$  para fora. Esta correção terminal  $\delta L$  é aproximadamente a mesma para todos os valores de  $n$ , e é da ordem de grandeza do raio do tubo. Assim, a condição encontrada acima deve ser substituída por

$$\lambda = (4/(2n-1)) (L_n + \delta L). \quad (3)$$

Como  $\delta L$  independe do tamanho do tubo, é possível eliminá-lo tomando a diferença entre duas medições de  $L$ . Desta forma, para qualquer  $n$ :

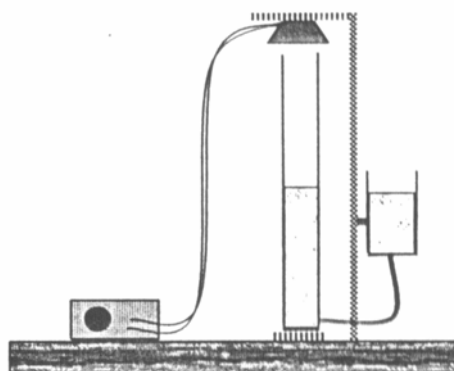
$$L_{n+1} - L_n = \lambda/2. \quad (4)$$

## II - MATERIAL NECESSÁRIO

1. Tubo de vidro contendo coluna de água
2. Dispositivo para fazer variar a coluna d'água.
3. Gerador de áudio
4. Alto falante utilizado como fonte de áudio

## III – PROCEDIMENTO

Disponha o reservatório de água numa altura tal que o nível da água se mantenha o mais alto possível no tubo de vidro. Selecione no gerador uma frequência  $f$  de aproximadamente 700Hz e a mantenha fixa. Registre seu valor na tabela. Varie lentamente a altura do reservatório d'água fazendo diminuir a altura da coluna de água e aumentando o comprimento  $L$  do tubo. Observe atentamente o que acontece com a intensidade do som, à medida que a coluna de água vai baixando. Continue com este procedimento até atingir a menor altura possível da coluna de água. Volte agora a aumentar a altura da coluna de água, registrando na tabela os valores da escala onde o som atinge intensidade máxima. Complete a tabela, calculando o valor do comprimento de onda com o auxílio da equação (4). Repita o mesmo procedimento para mais cinco valores de frequência no gerador.



## IV - TRATAMENTO DOS DADOS

Em um papel milimetrado faça um gráfico da frequência  $f$  em função do inverso do comprimento de onda  $1/\lambda$ . Calcule a velocidade do som  $v_s$  através de três procedimentos: pela média dos valores de  $v_s$  obtidos usando-se  $f$  e  $\lambda$ ; pela inclinação da reta obtida no gráfico  $f \times 1/\lambda$ ; pelo método dos mínimos quadrados aplicado às grandezas  $f$  e  $1/\lambda$ .

## PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES

### I - INTRODUÇÃO

Quando imerso num fluido um corpo sofre, em virtude do princípio de Pascal, pressões diferenciadas sobre a sua superfície, maiores na sua parte inferior que na sua parte superior, levando a uma força resultante vertical para cima. Este fenômeno é regido pelo chamado princípio de Arquimedes, em homenagem ao célebre pensador grego que o observou já no século III a.c., no contexto de um pitoresco episódio envolvendo ele próprio, um banho público e a consulta de um rei da época, que desconfiava estar sendo lesado por um ourives. De acordo com o princípio de Arquimedes, o empuxo hidrostático, isto é, a força que o fluido exerce sobre o corpo é igual ao peso do volume de fluido deslocado no processo de imersão. Isto pode ser facilmente constatado por um outro princípio, dito "princípio de solidificação" e devido a Stevin, que o enunciou no século XVI da nossa era e consiste no seguinte. Imagine-se uma porção de um líquido em repouso, de volume  $V$ , limitada por uma superfície  $S$ . Sobre essa porção do líquido atuam pressões diferenciadas, à maneira que atuariam num corpo sólido colocado no seu lugar. Além das forças devidas à pressão hidrostática, sobre a porção  $V$  do líquido atua apenas o seu próprio peso. Ora, como, por hipótese, o líquido não se movimenta conclui-se que a força total que atua sobre essa genérica porção dele é nula e, conseqüentemente, que a resultante das forças de pressão tem o mesmo valor que o peso do volume  $V$  de líquido e aponta, ao contrário deste, para cima. Se o lugar desse volume de líquido for ocupado por um corpo sólido, não haverá mudança no valor da resultante das forças de pressão e, portanto, o empuxo hidrostático que é o seu resultado final será ainda igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo corpo no processo de imersão, como preceitua o princípio de Arquimedes. Nesta experiência verificaremos o princípio de Arquimedes para o caso de dois líquidos - álcool e água - e corpos de formas e densidades diferentes.

Para se medir o valor da densidade do álcool será usado um picnômetro, que é um frasco destinado a medida de densidade de um líquido relativamente à um outro, que será tomada como padrão. Ele possui uma tampa com um canal estreito de sorte que pode ser enchido até a parte superior desse canal, minimizando-se o efeito do menisco. Isto garante que o volume  $V$  de líquido em seu interior será sempre o constante, mesmo que seu valor preciso não seja conhecido. Como a densidade da água é aproximadamente igual a  $1,0 \text{ g/cm}^3$ , o valor numérico da densidade relativa do álcool será também aproximadamente igual a sua densidade absoluta.

Será também necessário o uso de uma mola para medir forças. Antes, no entanto, deverá ser ela devidamente calibrada usando-se porta-pesos, massas aferidas e uma escala suspensa.

### II - MATERIAL NECESSÁRIO

- |                                   |                     |                        |
|-----------------------------------|---------------------|------------------------|
| 1. mola                           | 4. proveta graduada | 8. álcool              |
| 2. porta pesos                    | 5. béquer           | 9. água                |
| 3. conjunto de massas<br>aferidas | 6. balança          | 10. diferentes objetos |
|                                   | 7. picnômetro       |                        |

### III - PROCEDIMENTOS

#### 1. DETERMINAÇÃO DA DENSIDADE DO ÁLCOOL

Pese o picnômetro vazio. Em seguida encha-o de álcool até próximo da boca, cuidando de deixar o líquido extravasar pelo canal da tampa e de enxugar o vaso antes de pesá-lo outra vez, agora cheio de álcool. Repita esse procedimento para a água, antes lavando o picnômetro para retirar qualquer resíduo de álcool que possa comprometer o resultado da nova medida. Registre na **Tabela 1** os resultados das medidas.

## 2. CALIBRAÇÃO DA MOLA

Pendure a placa com um ponteiro na parte inferior da mola. Coloque o porta-pesos na extremidade inferior da placa e faça a leitura, na escala suspensa, da posição do ponteiro (a leitura da posição inicial, isto é, do "zero" da escala, é desnecessária, pelo que se verá a seguir). Coloque diferentes pesos no porta-pesos e faça a leitura das diferentes elongações sofridas pela mola (não deixe de levar em conta a massa do porta-pesos, nele registrada). Registre na **Tabela 2**, os valores obtidos para as massas e as correspondentes elongações.

## 3. MEDIDAS DO EMPUXO HIDROSTÁTICO

A montagem a ser usada consiste de uma proveta graduada a ser preenchida com líquido no qual deverá se mergulhar, pendidos da mola calibrada, diferentes objetos (agora sem porta-pesos, mas com todo resto da montagem). Antes de colocar o líquido na proveta, suspenda com ajuda de alças de nylon, da mola, cada um dos 3 objetos disponibilizados e anote os correspondentes valores  $x$  da sua elongação. Estes dados irão servir para aferir os pesos dos objetos (v. no item IV, Tratamento dos Dados, os procedimentos para a determinação da curva de calibração da mola pelo Método dos Mínimos Quadrados). Preencha a **Tabela 3** da **Folha de Dados**, conforme a legenda que a segue, à medida em que for obtendo os resultados.

Coloque álcool na proveta, até um nível (avaliado sem mergulhar os corpos) que atenda a dois requisitos: (i) seja suficientemente alto para que se possa mergulhar completamente os corpos, (ii) mas não tanto que nessa situação o nível do líquido supere a escala graduada. Anote o volume  $V_0$  do álcool na proveta, após leitura cuidadosa (instrua-se com o professor sobre a técnica de leitura). Coloque agora o objeto no líquido, até total imersão, tendo o cuidado de não permitir que o objeto já mergulhado no fluido fique em contato com a parede ou fundo da proveta, pois nesse contato ele sofreria forças espúrias que mascarariam o resultado. Nesta situação, você vai registrar dois valores: a nova posição,  $x'$ , do ponteiro na escala e o nível,  $V$ , atingido pelo álcool na proveta. Em seguida, vamos observar o que acontece se o objeto se mantém semi-imerso no líquido. Para isto, repita o mesmo procedimento anterior, permitindo que o objeto mergulhe apenas parcialmente no líquido. Registre as medidas. Repita os procedimentos anteriores (imersão total e parcial) para os demais objetos. Registre cuidadosamente todas as medidas efetuadas. Na imersão parcial procure obter valores diferenciados de  $x'$  entre os diferentes objetos, pois na fase do tratamento dos dados será feito o gráfico de empuxo versus massa do líquido deslocado na imersão, isto é,  $E \times \Delta m$  usando as duas últimas colunas da **Tabela 3**, o que será tão melhor quanto mais diferenciados os pontos. A seguir substitua o álcool por água, para verificar a influência da densidade do líquido nos efeitos da imersão. Repita nesta nova situação todas as medidas realizadas anteriormente, ou seja: imersão total e parcial de todos os objetos, anotando os resultados na **Tabela 4**. Neste caso também, será feito o gráfico  $E \times \Delta m$  usando as duas últimas colunas desta tabela. Como se verá a seguir, fazendo o ajuste de cada uma das retas obtidas nos dois gráficos pelo Método dos Mínimos Quadrados e comparando os resultados você estará em condição de enunciar a lei que rege o fenômeno observado, o Princípio de Arquimedes.

## IV - TRATAMENTO DOS DADOS

### 1. DETERMINAÇÃO DA DENSIDADE DO ÁLCOOL

Determine a densidade relativa do álcool que será utilizado nesta experiência como sua densidade absoluta, já que se supõe que a densidade da água é  $1\text{gr/cm}^3$ . Como a balança mede o peso em grama-força (gf), os valores numéricos das medidas feitas correspondem, em grama, aos das massas  $m_0$ ,  $m_1$  e  $m_2$ , do picnômetro vazio, cheio de álcool e cheio de água, respectivamente. Daí calcula-se o valor da densidade relativa do álcool segundo a expressão:

$$d_{rel} = \frac{\text{dens. do álcool}}{\text{dens. da água}} = \frac{\text{massa do álcool} / V}{\text{massa da água} / V} = \frac{(m_1 - m_0) / V}{(m_2 - m_0) / V} = \frac{m_1 - m_0}{m_2 - m_0}.$$

Considerando-se o valor da densidade da água como de  $1\text{g/cm}^3$ , o valor da densidade do álcool, em  $\text{g/cm}^3$ , coincide numericamente com o da densidade relativa, isto é,

$$d_1 = d_{rel} d_2 = d_{rel} \text{g/cm}^3,$$

sendo  $d_{rel}$  um simples número. Verifique se o valor obtido é compatível com o que você esperaria para ele.

## 2. CALIBRAÇÃO DA MOLA

Construa o gráfico do peso em função da elongação da mola. Lembre-se (v. o curso de FIS 121) que ela tem uma certa rigidez, o que faz com que, para pequenos valores da força aplicada, a relação entre a força e a elongação não seja linear. Por outro lado, para grandes valores da força a mola sofre uma quebra de linearidade por superação do seu limite de elasticidade. Portanto, não se pode trabalhar nessas duas regiões da curva, sobretudo não se deve suspender da extremidade da mola uma massa excessiva, sob pena de inutilizá-la (consulte o professor sobre o limite superior da massa a ser suspensa). Com os valores obtidos você deve, durante o tratamento dos dados, traçar a curva de calibração e aplicar o Método dos Mínimos Quadrados aos pontos em que a curva apresenta comportamento linear (procure também obter, para comprovar a não-linearidade, alguns pontos referentes a pequenos valores da elongação). A partir daí, use adequadamente a expressão resultante para obter os valores das forças aplicadas. Em particular, desenvolva um procedimento de medida de forças menores que o limite inferior supra-citado e faça a medida efetiva de uma tal força.

## 3. MEDIDAS DO EMPUXO HIDROSTÁTICO

Ao imergir, total ou parcialmente, um objeto num líquido aquele sofre, pelo Princípio de Arquimedes, um empuxo  $E$  verticalmente para cima. O valor medido pela mola será, portanto, o do "peso aparente":

$$P' = P - E \quad (1)$$

Como ele corresponde à posição  $x'$ , tem-se, pela calibração da mola:

$$P' = Kx' + b \quad (2)$$

Por outro lado tem-se, analogamente, sendo  $x$  a posição correspondente ao peso real do objeto:

$$P = Kx + b \quad (3)$$

Substituindo as expressões de  $P'$  e  $P$  dadas pelas Eqs. (2) e (3), na Eq. (1), vem

$$Kx' + b = Kx + b - E, \quad (4)$$

que após simplificação e reordenação leva a

$$E = K(x - x') \quad (5)$$

ou

$$E = K\Delta x \quad (6)$$

com

$$\Delta x = x - x'. \quad (7)$$

Por outro lado, se  $V_0$  é o volume inicial de líquido na proveta e  $V$  o volume que ela acusa após imersão (total ou parcial) do objeto, então

$$\Delta V = V - V_0 \quad (8)$$

representa o volume de líquido deslocado (de densidade  $d$ ) e, portanto,

$$\Delta m = d \Delta V \quad (9)$$

representa a sua massa. Traçando-se o gráfico  $E \times \Delta m$  deve-se obter uma reta de inclinação  $g$ , uma vez que o Princípio de Arquimedes nos diz que o empuxo é igual ao peso do volume de líquido deslocado, isto é:

$$E = g\Delta m \quad (10)$$

A Eq. (10) é válida para qualquer objeto imerso em qualquer fluido, de sorte que o procedimento feito para o álcool, sendo repetido para a água (preencher a **Tabela 4**) deverá levar ao mesmo resultado (dentro da precisão experimental). Trace as duas curvas  $E \times \Delta m$  e verifique o seu caráter linear. Ajuste ambas as retas pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) e determine o valor de  $g$  em cada caso. Dada a universalidade da Eq. (10) pode-se ainda traçar um só gráfico com os valores obtidos para o álcool e a água, conjuntamente. Trace esse gráfico e repita para ele o ajuste pelo MMQ. Compare os valores obtidos para  $g$ .



## ESCOAMENTO DE FLUIDOS

### I - INTRODUÇÃO

O movimento dos fluidos é um dos problemas de maior complexidade dentro da física, tanto na observação experimental como na descrição teórica. Esta complexidade está ligada ao fato de se estar lidando com um sistema com um número muito grande de constituintes, e se reflete no número de variáveis necessárias para a sua descrição matemática. O escoamento dos fluidos pode ocorrer dentro dos regimes laminar e turbulento. No primeiro caso ainda é possível, em situações de grande simetria, obter-se uma descrição através de expressões matemáticas simples. Porém, no último caso, só é possível uma descrição estatística do escoamento, aí entendido os valores médios da velocidade e as flutuações em torno deste valor.

Ainda dentro do regime laminar, tem-se que fazer a distinção se a energia dissipada durante o escoamento pode ser desprezada ou não. Em caso afirmativo, a lei de conservação de energia (Equação de Bernoulli) pode ser utilizada para calcular a velocidade e pressão em diversos pontos de um escoamento. Se a dissipação é relevante, então é necessário se usar a equação de Navier-Stokes, que é obtida ao se aplicar a segunda lei de Newton para um elemento de fluido. Nesta equação, os efeitos de dissipação de energia são descritos através do coeficiente de viscosidade  $\eta$ , que mede a intensidade da força de atrito entre duas camadas adjacentes de fluido.

Neste experimento iremos observar e medir o escoamento de fluidos sob a ação da força de gravidade. Serão realizadas medidas do tempo de escoamento da água armazenada em um reservatório cilíndrico em função da diferença entre os níveis inicial e final. Outras variáveis são o raio do orifício e o comprimento da mangueira por onde a água escoar. As medidas de tempo de escoamento são bem mais simples de serem feitas do que a medida da velocidade instantânea do jato. No entanto, com as relações teóricas acontece o inverso. Por isso vamos fazer uma breve explanação sobre a obtenção de relações entre o tempo de escoamento e a variação de altura.

A situação mais simples corresponde a um reservatório de seção reta uniforme, com um furo na sua parede inferior. Se  $h$  é a altura da superfície livre do reservatório, a velocidade  $v$  com que o jato de fluido sai do reservatório é expressa por

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (1)$$

Esta relação foi derivada inicialmente por Torricelli (1636). Com o auxílio da equação de Bernoulli ela pode ser facilmente obtida. Convém notar que esta expressão leva em conta que a seção reta do reservatório ( $\pi R^2$ , no caso de um reservatório cilíndrico) é muito maior que a do furo ( $\pi r^2$ , no caso de um furo circular). Com isso se pode desprezar o fato que a altura do fluido no reservatório está variando. No entanto, ao se observar a situação em que o nível no reservatório varia de maneira apreciável, podemos perceber facilmente que a velocidade do jato diminui à medida que o nível da água vai abaixando. Neste caso, a expressão (1) vale apenas em pequenos intervalos de tempo. O tratamento correto consiste em escrever, na equação de Bernoulli, a velocidade com que o nível da água decresce como  $dh/dt$ . Com isso obtém-se a expressão

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2ghr^4}{R^4 - r^4}} \approx \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh} = \frac{r^2}{R^2} v . \quad (2)$$

Note que, para os nossos dados experimentais,  $r/R < 0.1$ , o que justifica a aproximação efetuada.

A integração da equação acima leva à seguinte relação entre a variação da altura no reservatório e o intervalo de tempo em que o flui escoou:

$$h_1^{1/2} - h_2^{1/2} = \sqrt{\frac{gr^4}{2(R^4 - r^4)}} (t_2 - t_1) \approx \frac{r^2}{R^2} \sqrt{g/2} (t_2 - t_1). \quad (3)$$

ou

$$h_1^{1/2} = h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2} \sqrt{g/2} (t_2 - t_1) \quad (4)$$

A equação de Bernoulli pode ser usada na obtenção da relação de Torricelli porque o efeito da viscosidade dentro do reservatório é pequeno. No entanto, se após sair do orifício, a água transita ainda por um duto estreito, este efeito se torna relevante. Ele faz com que a velocidade da água seja menor que a expressa pela relação (1). Este fato pode ser facilmente constatado pela medida do tempo necessário para o escoamento da água para fora do reservatório, que vai crescer à medida que o comprimento do duto também aumenta. Esta é uma maneira bastante simples de se notar um dos efeitos introduzidos pela viscosidade.

O tratamento teórico para esta nova situação é um pouco mais complexo. Para continuar a usar a equação de Bernoulli temos que levar em conta que uma certa quantidade de energia foi dissipada. Indicaremos este efeito pela variação na densidade de energia  $\Delta\varepsilon$ . Isto implica que, se tomamos dois pontos dentro de um duto, com a mesma altura vertical, a pressão no ponto a montante é maior do que aquela a jusante. Matematicamente, a variação de pressão é igual à densidade volumétrica de energia dissipada, i.e.,

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \Delta\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \Delta P = \Delta\varepsilon. \quad (5)$$

Por outro lado, a relação para o perfil parabólico do fluxo de Poiseuille,

$$v(x) = \frac{\Delta P}{4L\eta} (r^2 - x^2), \quad (6)$$

mostra que a velocidade não é uniforme em uma seção reta do tubo, mas varia do valor máximo no centro ( $x=0$ ) até se anular na parede ( $x=r$ ).  $L$  indica a distância entre dois pontos, entre os quais a diferença de pressão é  $\Delta P$ . Podemos calcular o valor da velocidade média  $v_m = \Delta P r^2 / 8L\eta$  em uma seção reta do tubo, e identificá-la com a velocidade (uniforme) indicada pela equação de Bernoulli. Assim o valor de  $\Delta\varepsilon$  em (5) pode ser expresso em termos da velocidade dentro do tubo. Com estas modificações, a expressão para a velocidade de escoamento da água, que percorre um tubo horizontal de comprimento  $L$  após sair do reservatório, fica:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{64L^2\eta^2}{\rho^2 r^4} - \frac{8L\eta}{\rho r^2}}. \quad (7)$$

Já a nova relação entre o tempo de escoamento e a diferença de altura, resultante da integração de uma equação para  $dh/dt$  análoga a (2), é

$$(h_1 + b^2)^{1/2} - (h_2 + b^2)^{1/2} + b \ln \frac{(h_1 + b^2)^{1/2} - b}{(h_2 + b^2)^{1/2} - b} = \sqrt{\frac{gr^4}{2(R^4 - r^4)}} (t_2 - t_1), \quad (8)$$

$$\text{onde } b = \frac{8L\eta R^2}{\rho r^2 \sqrt{2g(R^4 - r^4)}}.$$

Note que, se o valor de  $b/h_i \ll 1$ , a relação (7) pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$h_1^{1/2} + 2b \ln h_1^{1/2} = h_2^{1/2} + 2b \ln h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} (t_2 - t_1). \quad (9)$$

## II - MATERIAL NECESSÁRIO

1. Garrafa plástica
2. Tampas perfuradas
3. Mangueiras
4. Régua
5. Cronometro
6. Água

## III - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste experimento cada grupo deverá trabalhar em uma das 6 pias junto às janelas, nas duas salas 211 e 213.

Na primeira série de medidas vamos considerar orifícios de escoamento com raios diferentes. Coloque a garrafa com o gargalo para baixo no suporte de madeira, que fica apoiado nas extremidades da pia. Conecte a torneira da pia com o orifício na parede da garrafa. Escolha a tampa perfurada com o menor raio e enrosque no bocal. Tape o orifício da tampa com um dedo e encha a garrafa até o nível mais alto ( $h_1=30$  cm). Em seguida remova o dedo da tampa, de modo a permitir que a água escoe da garrafa. Dispare o cronômetro quando o nível da água passar pela altura  $h_1=29$  cm. Continue a registrar os instante de tempo em que o nível da água passa pelas seguintes alturas: 25, 21, 17, e 13 cm. Na altura  $h_2=10$  cm trave o cronômetro. Com estes dados voce vai calcular o intervalo de tempo para a água escoar de cada uma das 5 alturas  $h_1$  até o nível de referência,  $h_2=10$ cm. Faça uma segunda série de medidas do tempo de escoamento nas mesmas condições. Registre também o raio do orifício na folha de dados. Em seguida use mais três tampas com orifícios distintos e repita o procedimento, realizando duas medidas para o tempo de escoamento de cada uma das 5 diferentes alturas  $h_1$ . Registre todos as medidas na folha de dados. Registre também o raio da garrafa plástica.

Na segunda série de experimentos vamos usar as tampas com as mangueiras. Elas têm diferentes comprimentos  $L$ , mas o mesmo raio  $r$ . Trabalhe com três mangueiras, registrando os valores de  $L$  na folha de dados. Para cada uma delas repita o procedimento descrito na primeira parte (5 diferentes valores da altura  $h_1$ , realizando duas medidas para o tempo de escoamento). Preste atenção para que a extremidade livre da mangueira esteja à mesma altura da base da tampa da garrafa. Registre todos as medidas na Folha de Dados.

## IV - TRATAMENTO DOS DADOS

Calcule os intervalos  $\Delta t(h_1) = t(h_2) - t(h_1)$ . Registre na folha de dados o valor médio

$$\overline{\Delta t(h_1)} = \frac{\Delta t'(h_1) + \Delta t''(h_1)}{2}$$

Com os dados obtidos na primeira série de medidas trace, em papel milimetrado, o valor de  $h_1^{1/2}$  em função do tempo médio de escoamento  $\overline{\Delta t}(h_1)$ , para cada valor do raio do orifício. No mesmo papel trace também o valor teórico para esta grandeza ( $h_1^{1/2}$ ), dado pelo lado esquerdo da equação (4). Calcule o valor médio das diferenças entre as medidas e as previsões teóricas para cada raio. Trace, em outro papel, este valor médio em função do raio do orifício. Você pode detectar a presença de um erro sistemático? Como ele depende do raio?

Ainda com os dados da primeira série de medidas trace, em papel log-log, o valor obtido do raio do orifício  $r \times \Delta t$ , mantendo fixo o valor de  $h_1=29$  cm. Faça o ajuste pelos mínimos quadrados e obtenha a dependência funcional entre  $r$  e  $\Delta t$ ,  $r = a\Delta t^c$ . O valor encontrado para  $c$  está de acordo com o indicado pela equação (4)?

Com os dados da segunda série de medidas trace, em papel milimetrado, o valor da expressão

$$h_1^{1/2} + 2b \ln(h_1^{1/2}),$$

em função do tempo de escoamento, para cada valor do comprimento  $L$  da mangueira. No mesmo papel trace também o valor teórico para esta grandeza, dado pelo lado direito da equação (9)

$$h_2^{1/2} + 2b \ln h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2}} (t_2 - t_1).$$

Note que o coeficiente de viscosidade para a água, a 20°C, vale  $1 \times 10^{-2}$  dina s /cm<sup>2</sup>. Calcule o valor médio das diferenças entre as medidas e as previsões teóricas para cada comprimento  $L$ . Trace, em outro papel, este valor médio em função do comprimento da mangueira. Você pode detectar a presença de um erro sistemático? Como ele depende do comprimento?

## EQUIVALENTE DO CALOR E DA ENERGIA

### I – INTRODUÇÃO

#### UNIDADES DE MEDIDA DA ENERGIA

A energia é uma grandeza que foi definida de maneira independente na mecânica e na calorimetria, onde são respectivamente denominadas energia mecânica e calor. Com a descoberta que estas duas definições independentes se referem a um mesmo ente físico, surge uma nova teoria, a termodinâmica, que trata das relações de troca de energia sob forma de calor e energia mecânica (ou química) entre os sistemas físico-químicos. A termodinâmica requer, portanto, uma relação quantitativa entre as duas unidades de medida independentes para calor e energia mecânica. A primeira unidade é a caloria, definida como a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 gr de água de 14,5 para 15,5 °C. A unidade de energia mecânica é expressa em termos das unidades fundamentais de comprimento [L], massa [M] e tempo [T] baseada na análise dimensional: [Energia] = [ML<sup>2</sup>T<sup>-2</sup>]. No sistema SI a unidade de energia é o Joule (J), e no sistema CGS é o erg. A energia elétrica pode ser medida na mesma unidade de energia mecânica, pois ela pode ser definida em termos da força elétrica de Coulomb entre cargas. Normalmente, em uma conta de consumo de energia elétrica, ela é medida em unidades de kilowatt-hora (kWh). Note que 1 Watt = 1J/seg e portanto 1kWh = 3,6x10<sup>6</sup> J.

O objetivo deste experimento é a determinação do equivalente entre a caloria e o Joule, i.e., a determinação do valor da constante A, definida por:

$$1cal = A \text{ Joule} \Rightarrow \text{valor}[cal] = \frac{1}{A} \text{valor}[Joule] \quad (1)$$

#### CALOR ESPECÍFICO

Quando fornecemos calor a um corpo material a sua temperatura aumenta. Este aumento depende da quantidade de calor fornecida, da massa do corpo e de uma propriedade chamada de calor específico, indicada pela letra *c*. Ele mede a “inércia térmica” do material, i.e., a sua resistência em alterar a temperatura quando troca calor. Ele é expresso em unidades de calor (ou energia) dividido por massa e por grau, e é quantitativamente medido a partir da relação básica da calorimetria:

$$Q = c.m.(T_{final} - T_{inicial}). \quad (2)$$

O valor do *c* pode variar com a temperatura ( $c=c(T)$ ), mas a variação é pequena para maioria dos materiais. Seu valor depende das unidade de energia, massa e temperatura utilizadas. Usualmente *c* é medido em unidades de cal/gr°C. No caso da água, que é o material utilizado para a definição da caloria, temos que

$$c_{\text{água}} = 1 \frac{cal}{g \text{ } ^\circ C}. \quad (3)$$

Neste experimento iremos também medir o calor específico do alumínio.

#### DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE A

Vamos aquecer uma determinada massa de água com um aquecedor elétrico, medindo a energia elétrica fornecida pelo aquecedor (em J) e o aumento da temperatura. Temos:

$$W_{fornecida} = P.t, \quad (4)$$

onde  $P$  é a potência do aquecedor (quantidade de energia fornecida por unidade de tempo, medida em Watt) e  $t$  o tempo (em segundos) em que o mesmo forneceu energia para a água. Por outro lado, o calor absorvido pela água pode ser expresso (e medido em calorias) por:

$$W_{\text{absorvida}} = m c_{\text{água}} \Delta T, \quad (5)$$

onde  $m$  = massa da água;  $c_{\text{água}} = 1 \text{ cal/g } ^\circ\text{C}$ ;  $\Delta T_{\text{água}} = T_{f,\text{água}} - T_{i,\text{água}}$ . Igualando a energia fornecida à absorvida, e usando a expressão (1), podemos determinar o valor de  $A$  pela relação:

$$Pt[\text{Joule}] = mc_{\text{água}} \Delta T[\text{Joule}] = Amc_{\text{água}} \Delta T[\text{caloria}]. \quad (6)$$

## O PROCESSO DE MEDIDA DE TEMPERATURA

Os processos de medidas adotados nos experimentos anteriores são feitos pela leitura em um aparelho (seja ele uma régua ou um multímetro digital) do valor registrado. Nestes processos basta que os aparelhos sejam posicionados corretamente para que a leitura possa ser feita imediatamente. No caso de experimentos que dependem de registros temporais, a exigência é que o instante em que um dado evento ocorreu, ou a sua duração, seja marcado com precisão em um relógio ou cronômetro.

No entanto, em medidas de temperatura, é imprescindível que o aparelho de medida (o termômetro) entre em equilíbrio térmico com o objeto que está sendo medido. Se isto não ocorre, a leitura do termômetro não registra a verdadeira temperatura do objeto. O tempo necessário para que o equilíbrio térmico ocorra depende do aparelho, do objeto, e das temperaturas em que estes se encontram antes do processo de medida ser iniciado. Por isso o processo de medida exige que a leitura do termômetro seja feita continuamente (ou a intervalos pequenos em relação ao tempo necessário para o equilíbrio ser atingido). Assim pode-se perceber quando o termômetro entra em equilíbrio térmico com o objeto. É claro que após o termômetro e o objeto entrarem em equilíbrio este estado não vai ser alterado, e a leitura do termômetro após este instante será sempre a mesma. No entanto, o termômetro e o objeto podem trocar calor também com outros objetos. No nosso experimento o calorímetro não é totalmente isolado e há sempre perdas para o meio externo. É claro que elas são pequenas mas, se o intervalo de tempo em que a água quente ficar dentro do calorímetro aumentar muito, estas perdas podem ser significativas. Por isso é importante que o processo de leitura do termômetro seja a intervalos curtos, para que possamos detectar rapidamente o processo de equilíbrio entre o termômetro e a água e separá-lo da diminuição de temperatura devido às perdas de calor para o meio externo.

## II - MATERIAL NECESSÁRIO

1. Aquecedor
2. Termômetro
3. Calorímetro - Caixa de alumínio dentro de uma de isopor
4. Relógio
5. Béquer
6. Vaso calibrado ou balança

## III – PROCEDIMENTO

Pese a caixa de alumínio e coloque-a no isopor. Pese também uma massa de cerca de 4 kg (4 litros) de água. É importante que a massa de água seja pesada, pois a medida de volume dada pelos vasilhames graduados não é precisa. Coloque a água dentro do calorímetro, tampe-o e meça a temperatura da água. Leia o valor da potência do aquecedor. Registre todos os dados na tabela.

A caixa de isopor é isolante e impede a perda de calor para o meio (até certo ponto, é claro). A caixa de alumínio evita o esvaziamento da água. Anote o tempo inicial e ligue o aquecedor. Controle o aumento de temperatura, registrando na tabela o valor da temperatura e o tempo em intervalos de 1 minuto, até a temperatura atingir cerca de 80°C. Desligue o aquecedor e registre na tabela o instante em que o aquecedor foi desligado. Mantenha ainda o calorímetro tampado, registrando na tabela a temperatura da água por mais 5 minutos em intervalos de 1 minuto ou até perceber que a temperatura da água se estabilizou.

Para determinar o calor específico do alumínio vamos usar o calorímetro e a água quente em seu interior. Pese uma barra de alumínio e meça a sua temperatura, registrando os dados na tabela. Abra rapidamente o calorímetro, coloque em seu interior a barra de alumínio e volte a tampá-lo. Continue a medir a temperatura da água no interior do calorímetro em intervalos de 1 minuto por mais 5 minutos, até perceber que ela se estabilizou. Registre os dados na tabela. Desta vez a temperatura da água cai um pouco e a curva da temperatura está abaixo da curva do primeiro experimento, pois neste caso a água quente perdeu calor para aquecer o alumínio.

#### IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Faça o gráfico da temperatura em função do tempo desde o início do aquecimento até o momento em que a temperatura da água com a barra de alumínio estabilizou. Identifique no gráfico e determine o valor numérico das seguintes grandezas: o tempo total  $t$  usado para aquecer a água; a variação de temperatura  $\Delta T_{\text{água}} = T_{f,\text{água}} - T_{i,\text{água}}$ ; a variação de temperatura sofrida pela barra de alumínio após a sua imersão na água  $\Delta T_{Al} = T_{f,Al} - T_{i,Al}$ ; a variação de temperatura sofrida pela água no calorímetro após a imersão da barra de alumínio  $\Delta T_{\text{água}+Al} = T_{f,Al} - T_{f,\text{água}}$ .

Usando as expressões desenvolvidas na Introdução determine o valor de  $A$  e compare o seu resultado com o melhor valor experimental tabelado:

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ Joule}, \text{ ou } 1 \text{ Joule} = 0,239 \text{ cal}. \quad (7)$$

O valor encontrado pode ser diferente do tabelado porque foi calculado usando outras grandezas sujeitas a erros experimentais: a massa  $m$ , a temperatura inicial e final, o tempo da ligação do aquecedor, a potência do aquecedor. Além disso o calorímetro não é perfeitamente isolado, e há uma constante perda de calor para o ambiente que não é levada em conta. Finalmente há um erro sistemático que pode ser corrigido: a não inclusão da capacidade calorífica da cuba de alumínio que é ignorada na expressão acima.

Determine agora o valor do calor específico do alumínio. Para isso basta igualar, em módulo, o calor recebido pela barra com o calor cedido pela água. Temos:

$$Q_{\text{abs}} = m_{Al} \cdot c_{Al} \cdot (T_{f,Al+\text{água}} - T_{i,Al}) \quad \text{e} \quad Q_{\text{perdido}} = m_{\text{água}} \cdot c_{\text{água}} \cdot (T_{f,Al+\text{água}} - T_{f,\text{água}}). \quad (8)$$

Compare o valor obtido com o melhor valor experimental tabelado:

$$c_{Al} = 0,90 \frac{J}{g^{\circ}C} = 0,90 \frac{kiloJ}{kg^{\circ}C}. \quad (9)$$

#### CORREÇÃO DOS ERROS SISTEMÁTICOS

As fontes de erros experimentais que influenciam o valor obtido para  $c_{Al}$  são basicamente as mesmas que influenciam o cálculo de  $A$ . Devemos acrescentar ainda a perda de calor ao se abrir o calorímetro para a imersão da barra de alumínio. Também aqui há um erro sistemático devido a não inclusão da cuba de alumínio.

Se passamos a considerar a influência da caixa de alumínio nas trocas térmicas dentro do calorímetro as expressões para o valor de  $A$  e para o calor específico do alumínio têm que ser modificadas. No primeiro caso temos:

$$W_{absorvida} = m_{\text{água}} \cdot c_{\text{água}} (T_{f,\text{água}} - T_{i,\text{água}}) + m_{\text{caixa}} \cdot c_{Al} (T_{f,\text{água}} - T_{i,\text{água}}). \quad (10)$$

No caso do calor específico do alumínio  $A$  devemos considerar que o calor cedido à barra é:

$$Q_{perdido} = m_{\text{água}} \cdot c_{\text{água}} \cdot (T_{f,Al+\text{água}} - T_{f,\text{água}}) + m_{\text{caixa}} \cdot c_{Al} \cdot (T_{f,Al+\text{água}} - T_{f,\text{água}}). \quad (11)$$

Refaça os cálculos para  $A$  e  $c_{Al}$  e compare-os com os da tabela e com os obtidos com o erro sistemático.

Se quisermos corrigir a perda de calor para o ambiente ao abrir o calorímetro para colocar a barra de alumínio podemos adotar o seguinte procedimento. Retire a barra de alumínio do calorímetro e reaqueça a água até os 80 °C. Espere 3 minutos até a temperatura estabilizar. Em seguida abra o calorímetro durante o mesmo intervalo de tempo que foi preciso para inserir a barra de alumínio. Registre durante mais 3 minutos a temperatura. Agora sabemos que esta variação foi devida apenas à perda de calor para o meio. Calcule a quantidade de calor perdido neste processo e inclua este termo no balanço de calor na determinação do calor específico do alumínio.



## CALOR DE TRANSFORMAÇÃO

### I - INTRODUÇÃO

As substâncias podem se apresentar em diversos estados ou fases de agregação, que dependem da maneira como os átomos ou moléculas se arranjam com relação a seus vizinhos. Os estados de agregação mais comuns são o sólido, o líquido e o gasoso. Quando a substância tem o seu estado de agregação alterado dizemos que ela sofreu uma transição de fase. As temperaturas de transição de fase dependem de cada substância. A situação mais conhecida se refere aos três estados da água: gelo, água normal e vapor de água. Mas todas as substâncias têm estes três estados. O chumbo, por exemplo, pode se liquefazer a uma temperatura de 328°C, que é chamada temperatura de fusão. Na temperatura de vaporização de 1744°C, a pressão atmosférica, o chumbo passa para o estado gasoso. Note que a temperatura de ebulição depende da pressão, diminuindo de valor com a pressão.

Quando um corpo troca calor ele normalmente tem sua temperatura variada. No entanto, quando ele atinge uma temperatura de transição de fase ele troca calor sem ter sua temperatura alterada. Isto porque a mudança de estado requer a absorção ou liberação de calor. Esta quantidade de calor necessária para que a transição se efetive depende da substância e é denominada de calor latente ou calor de transformação. Normalmente chamamos calor da fusão e calor de vaporização. No processo inverso a mesma quantidade de calor é liberada. O calor latente  $L$  mede a quantidade de calor por unidade de massa  $L$  necessário para haver a transição de fase:

$$Q = L\Delta m . \quad (1)$$

onde  $Q$  é o calor trocado e  $\Delta m$  a massa transformada.

A tabela abaixo registra a temperatura de transição de fase e correspondente calor latente para algumas substâncias .

Substância	Ponto de Fusão (K)	Calor de Fusão (J/g)	Ponto de Ebulição (K)	Calor de Vaporização (J/g)
Hidrogênio	14,0	58,0	20,3	455
Oxigênio	58,0	13,9	90,2	413
Mercúrio	234	11,4	630	296
Água	273	333	373	2256
Chumbo	601	23,2	2017	858
Prata	1235	105	2323	2336
Cobre	1356	207	2868	4730

Neste experimento você vai medir o calor latente de fusão e o de vaporização para a água.

### CALOR DE VAPORIZAÇÃO

Mede-se o calor de vaporização fervendo água por um determinado tempo  $t_e$  com um aquecedor. A massa da água é medida antes e depois. Assim se determina a massa transformada  $\Delta m$  e o calor absorvido  $Q$ .

$$Q = P t_e = L \Delta m ; \quad L = \frac{Q}{\Delta m} . \quad (2)$$

Na expressão acima  $P$  indica a potência do ebulidor usado para aquecer a água. Uma outra maneira para se medir o valor de  $L$  é medir o tempo total  $t_i$  em que o aquecedor ficou ligado. Neste caso deve-se levar em conta que parte do calor absorvido pela água foi consumido para aumentar a sua temperatura e parte foi usada na evaporação da parcela  $\Delta m$

$$Q = P t_f = L \Delta m + [(m_{\text{água}} c_{\text{água}} + m_{\text{caixa}} c_{Al})(100^\circ\text{C} - T_{\text{inicial}})]. \quad (3)$$

## CALOR DE FUSÃO

Mede-se o calor de fusão promovendo-se a troca de calor em um calorímetro entre uma massa de água a temperatura inicial conhecida e um pedaço de gelo a uma temperatura inicial também conhecida. As massas de gelo e água têm que ser tais que o gelo deve derreter totalmente no processo. Assim o calor absorvido pelo gelo pode ser expresso como:

$$Q_{\text{abs}} = m_{\text{gelo}} [c_{\text{gelo}} (0^\circ\text{C} - T_{i,\text{gelo}}) + L + c_{\text{água}} (T_f - 0^\circ\text{C})]. \quad (4)$$

O calor cedido pela água é:

$$Q_{\text{ced}} = m_{\text{água}} c_{\text{água}} (T_f - T_{i,\text{água}}). \quad (5)$$

Assumindo que não há perda de calor para o meio externo impomos que  $Q_{\text{abs}} + Q_{\text{ced}} = 0$ , obtendo-se a expressão:

$$L = -\frac{m_{\text{água}}}{m_{\text{gelo}}} c_{\text{água}} (T_f - T_{i,\text{água}}) - c_{\text{gelo}} (0^\circ\text{C} - T_{i,\text{gelo}}) - c_{\text{água}} (T_f - 0^\circ\text{C}). \quad (6)$$

## II - MATERIAL NECESSÁRIO

1. Calorímetro para calor de vaporização.
2. Calorímetro para calor de fusão
3. Termômetro
4. Aquecedor
5. Becker calibrado ou balança
6. Relógio

## III – PROCEDIMENTO

### 1 - CALOR DE VAPORIZAÇÃO

Pese uma massa inicial  $m$  de cerca de 1,5 Kg (1,5 litros) de água e coloque dentro do calorímetro. Coloque o aquecedor no calorímetro e pese o conjunto água+aquecedor+calorímetro. Meça a temperatura inicial da água e ligue o aquecedor, registrando todos os dados iniciais na tabela. Anote na tabela a temperatura da água em intervalo de 1 minuto. Quando a temperatura atingir 100 °C deixe a água ferver por mais 10 minutos. Observe se a temperatura realmente estabilizou ou se ela apresenta variações. Após este intervalo desligue o aquecedor, retire o termômetro do calorímetro e torne a pesar o conjunto água+aquecedor+calorímetro.

### 2 - CALOR DE FUSÃO

Pese uma massa inicial  $m_o$  de água cerca de 80 gr, e coloque no calorímetro pequeno. Meça também o peso do conjunto água+calorímetro. Meça a temperatura da água no interior do calorímetro e registre os dados na tabela. Registre a temperatura no interior do recipiente com gelo, retire uma pedra de lá e coloque dentro do calorímetro. Anote o valor da temperatura no interior do calorímetro de minuto em minuto até ela estabilizar. Depois retire o termômetro do interior do calorímetro e pese de novo o conjunto água+calorímetro.

## **IV – TRATAMENTO DOS DADOS**

### **1 - CALOR DE VAPORIZAÇÃO**

Trace em um papel milimetrado a temperatura no interior do calorímetro em função do tempo. Determine o tempo total de aquecimento e o tempo em que a água ficou em estado de ebulição. Com base nestes dados, utilize as expressões derivadas na Introdução e obtenha o valor do calor latente de vaporização pelos dois métodos: usando apenas o tempo em que a água ficou em ebulição e o tempo total de aquecimento. Compare os resultados com o valor experimental tabelado.

### **2 - CALOR DE FUSÃO**

Determine a massa da pedra de gelo. Usando a expressão derivada na Introdução obtenha o valor do calor latente de fusão e compare com o valor tabelado. Utilize os valores abaixo para o calor específico da água e do gelo:

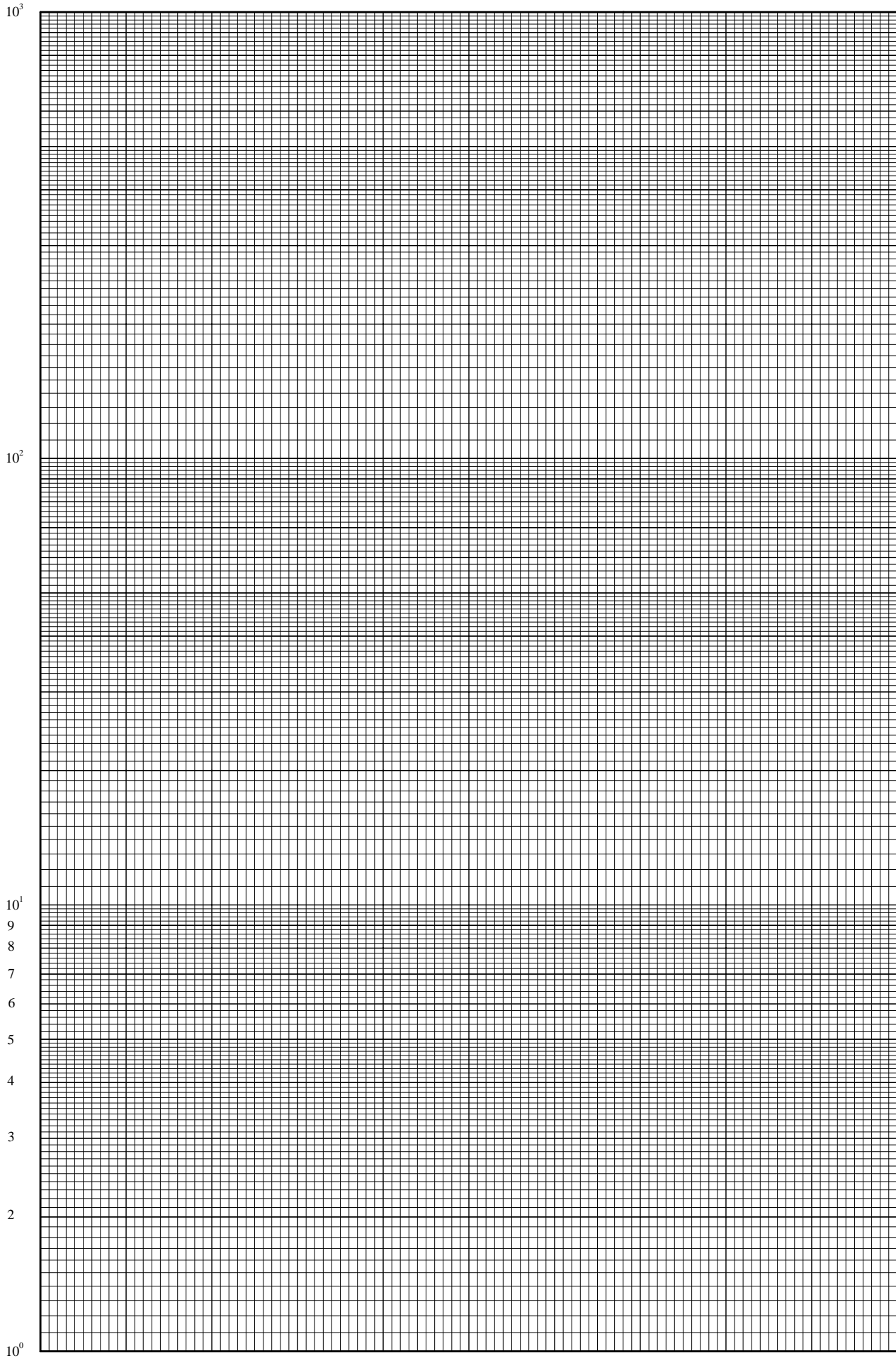
$$C_{\text{água}} = 1 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$$

$$C_{\text{gelo}} = 0,5 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$$

## BIBLIOGRAFIA

1. N.C. Barford - *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth* , Addison - Wesley, London (1967).
2. CENCO - Central Scientific Company, Division of Cenco Corp. - *Selective Experiments in Physics*, USA (1972).
3. R.M. Eisberg, L.S. Lerner - *Física - Fundamentos e Aplicações -Vol. 2* , Mc Graw-Hill, Rio de Janeiro (1981).
4. J. Goldenberg, *Física Geral e Experimental - Vol. 1*, Ed. Nacional, São Paulo (1968).
5. D. Halliday, R. Resnick e K.S. Krane - *Física – Vol. 2* , Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1995).
6. D. Halliday, R. Resnick e J. Walker – *Fundamentos de Física – Vol. 2* , Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1996).
7. J.P. McKelvey e H. Grotch – *Física – Vol. 2*, Harper & Row do Brasil, São Paulo (1979).
8. J. A. Miranda – *Roteiros de Laboratório para Física Geral e Experimental II* - Instituto de Física – UFBA, (1991).
9. J. Nazário, M.J.P.M. Almeida, N.G. Leite, V.L. Ribeiro- *Laboratório de Física* , EDART, São Paulo (1977).
10. M. Nussenzveig - *Curso de Física Básica - Vol. 2* - Ed. Edgard Blucher, São Paulo (1981).
11. F. Pompignac, S. Loureiro; E.M. do Nascimento - *Física Geral e Experimental III - Textos de Laboratório*, Instituto de Física – UFBA, (1985).
12. W.P. da Silva, C.M.D.P.S. e Silva, M.S. Nascimento - *Tratamento de Dados Experimentais*, Ed. UFPB, João Pessoa (1995).
13. M.R. Spiegel - *Estatística* , Ed. McGraw-Hill, Rio de Janeiro (1971).
14. Timorer, F.S. Majorana, G.B. Leiderman - *Práticas de Física - Vol. 1*, Ed. Edgar Blucher, São Paulo (1976).
15. P. A. Tipler - *Física – Vol. 2* , Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1995).

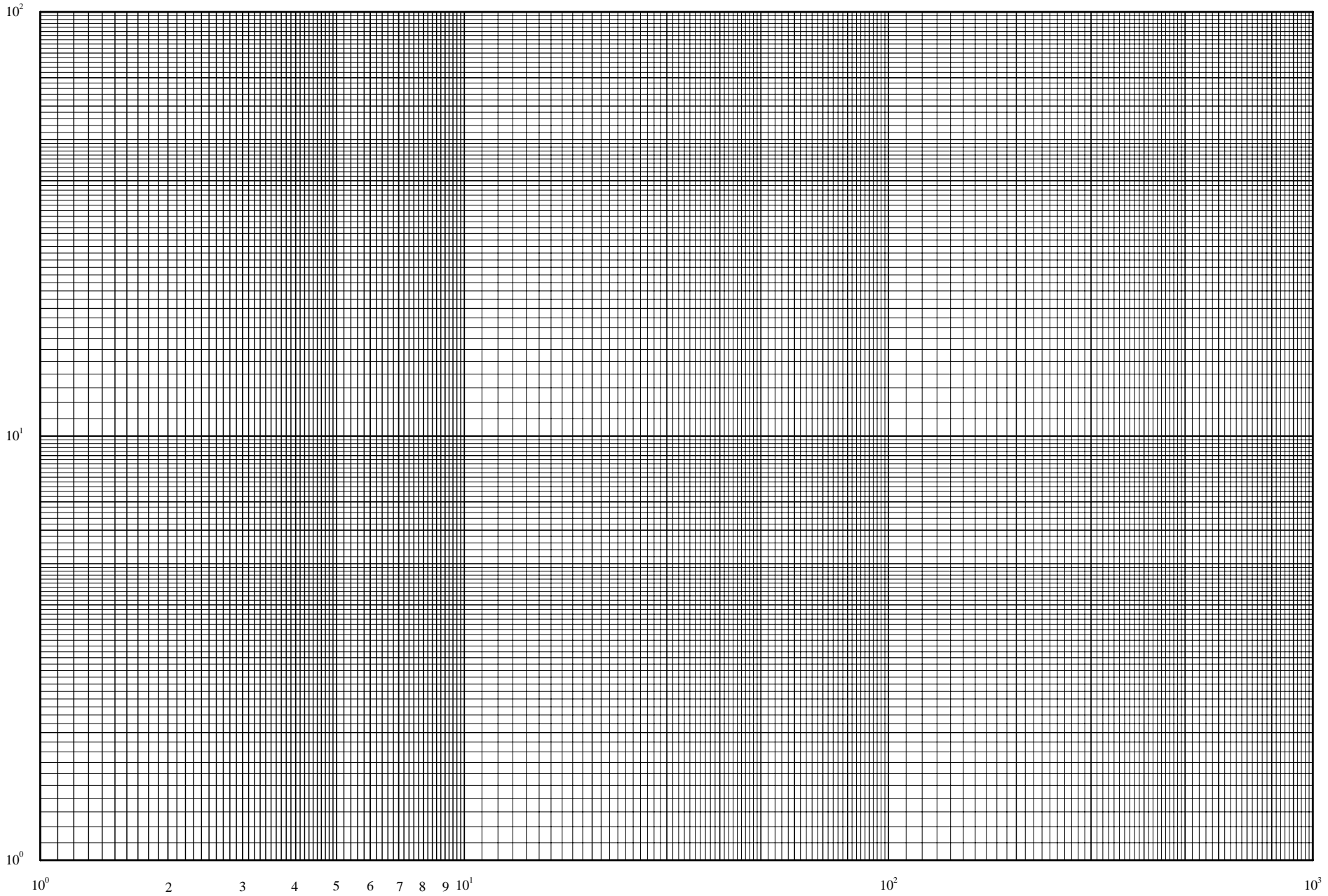
Não use esta folha. Faça cópias



Papel para gráfico em escala mono-log

0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Não use esta folha. Faça cópias



Papel para gráfico em escala log-log