



Universidade Federal da Bahia  
Instituto de Matemática e Estatística  
Colegiado de Estatística

**MATHEUS DOS SANTOS BORGES**

**Propriedades da distribuição Alpha Power  
Beta Weibull Modificada**

Salvador

2021

**MATHEUS DOS SANTOS BORGES**

**Propriedades da distribuição Alpha Power Beta  
Weibull Modificada**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística, Colegiado de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial à aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II.

**Orientadora:** Profa. Dra. Edleide de Brito

**Coorientadora:** Profa. Dra. Giovana Oliveira Silva

Salvador

2021

*“A matemática é a rainha das ciências”*  
*Carl Friedrich Gauss*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráficos das formas existentes da função taxa de falha . . . . .	6
Figura 2 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Exponencial Exponencializada . . . . .	10
Figura 3 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Weibull Exponencializada . . . . .	11
Figura 4 – Exemplos das funções taxa de falha da distribuição Beta-Exponencial . . . . .	12
Figura 5 – Função taxa de falha da distribuição Beta-Weibull, fixados $b = 2$ e $\lambda = 0.25$ . . . . .	13
Figura 6 – Exemplos de funções taxa de falha da distribuição Beta-Normal, fixado $\sigma = 5$ . . . . .	15
Figura 7 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Beta Weibull Modificada . . . . .	16
Figura 8 – Exemplos de funções taxa de falha da distribuição Alpha Power Exponencial, fixado $\lambda = 1$ . . . . .	20
Figura 9 – Função taxa de falha da distribuição Alpha Power Weibull, fixado $\lambda = 2$ . . . . .	22
Figura 10 – Exemplos de densidade de probabilidade da APBMW para alguns valores de parâmetros, fixado $\theta = 2$ . . . . .	24
Figura 11 – Exemplos de funções taxa de falha da APBMW para alguns valores de parâmetros . . . . .	24
Figura 12 – Casos especiais da distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada . . . . .	25
Figura 13 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para $\alpha = 2, \beta = 0.5, \delta = 0.5, \theta = 2, a = 0.5$ e $b = 1$ . . . . .	31
Figura 14 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para $\alpha = 1.5, \beta = 2, \delta = 2, \theta = 0.5, a = 1.5$ e $b = 1.5$ . . . . .	32
Figura 15 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para $\alpha = 1.5, \beta = 2, \delta = 2, \theta = 0.5, a = 2$ e $b = 2$ . . . . .	32

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	5
2	JUSTIFICATIVA . . . . .	7
3	REVISÃO DE LITERATURA . . . . .	8
3.1	Família de distribuições G-Exponencializada . . . . .	8
3.1.1	<i>Distribuição Exponencial Exponencializada (EE)</i> . . . . .	9
3.1.2	<i>Família Weibull Exponencializada (EW)</i> . . . . .	10
3.2	Família de distribuições Beta-G . . . . .	11
3.2.1	<i>Distribuição Beta-Exponencial (BE)</i> . . . . .	12
3.2.2	<i>Distribuição Beta Weibull (BW)</i> . . . . .	12
3.2.3	<i>Distribuição Beta-Normal (BN)</i> . . . . .	14
3.2.4	<i>Distribuição Beta Weibull Modificada (BMW)</i> . . . . .	14
3.3	Família de distribuições T-X . . . . .	16
3.3.1	<i>Família Gama-X</i> . . . . .	18
3.3.2	<i>Família Weibull-X</i> . . . . .	18
3.3.3	<i>Família Beta-Exponencial-X</i> . . . . .	19
3.4	Família de distribuições Alpha Power-T . . . . .	19
3.4.1	<i>Distribuição Alpha Power Exponencial (APE)</i> . . . . .	19
3.4.2	<i>Distribuição Alpha Power Weibull (APW)</i> . . . . .	21
4	ALPHA POWER BETA WEIBULL MODIFICADA (APBMW) . . . . .	23
4.1	Expansões para as funções de distribuição e densidade . . . . .	26
4.2	Fórmula geral de momentos . . . . .	27
4.3	Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . .	29
4.4	Função quantílica (qf) . . . . .	30
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	33
	REFERÊNCIAS . . . . .	34

## 1 INTRODUÇÃO

Em Estatística, um espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aos quais estão associados uma probabilidade (ROSS, 2014). Diferentes tipos de eventos são estudados com diferentes técnicas pela Estatística. Em análise de sobrevivência, o tempo até a observação de um evento de interesse é a variável de estudo. Se, durante o estudo, um elemento da amostra apresentar a característica investigada, dizemos que o elemento falhou. Dessa forma,  $T$ , uma variável aleatória não negativa, é denominada tempo de sobrevivência ou tempo de falha.

A função de sobrevivência é definida como a probabilidade de uma observação não falhar até um certo tempo  $t$ . Expressamos tal função como

$$S(t) = P(T \geq t).$$

A função de sobrevivência é relacionada com a função de distribuição acumulada, em que  $S(t) = 1 - F(t)$ . Deste modo, a função de sobrevivência é não-crescente.

A função taxa de falha é definida como a taxa de ocorrência de falha em um instante  $t$ , dado que o objeto sobreviveu até  $t$ . Portanto, expressamos a função taxa de falha como

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t}.$$

O gráfico de uma função taxa de falha representa a taxa de ocorrer falha ao longo do tempo.

A Figura 1 ilustra as possíveis formas da função taxa de falha.

Um fenômeno bastante frequente na análise de sobrevivência é a presença de observações incompletas. Tais observações são chamadas censuradas e o mecanismo de censura acontece de várias formas. Censura tipo I é aquela onde o estudo é encerrado após um determinado período de tempo. Censura tipo II é aquela onde o estudo será encerrado após um determinado número de observações apresentar falha. Outro mecanismo de censura ocorre bastante na área de saúde, o do tipo aleatório, em que a observação é retirada do estudo sem ter ocorrido falha (COLOSIMO; GIOLO, 2006, p. 8).

Os mecanismos de censura são conhecidos também por censura à direita, quando a observação não falhou até o término do tempo de estudo; censura à esquerda, quando a observação falhou antes do estudo começar; ou censura intervalar, quando se sabe somente que a observação falhou em um determinado intervalo de tempo (LAWLESS, 2011 apud CORDEIRO; ORTEGA; SILVA, 2011).

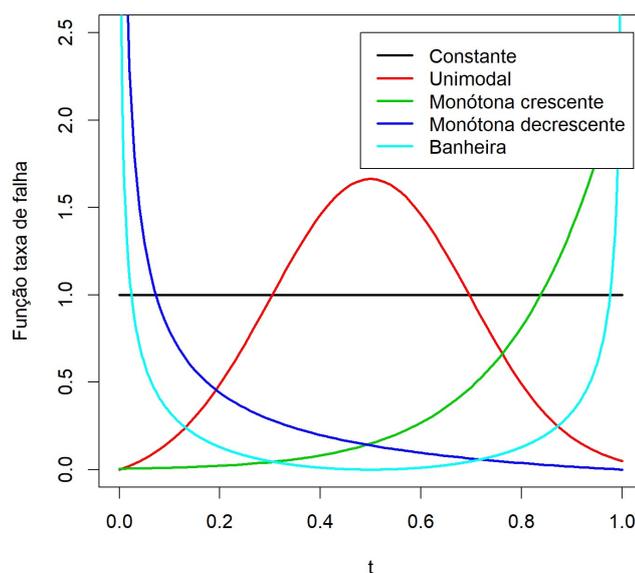


Figura 1 – Gráficos das formas existentes da função taxa de falha

Este trabalho tem como objetivos apresentar a distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada e desenvolver algumas de suas propriedades.

As próximas seções do trabalho estão organizadas como descritas a seguir: na Seção 2 é apresentada a justificativa; na Seção 3 são apresentadas alguns exemplos de famílias de distribuições; na Seção 4 é apresentada distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada e alguns resultados; e, por fim, na Seção 5 são apresentadas as conclusões finais.

## 2 JUSTIFICATIVA

A importância de encontrar um modelo adequado para ajustar a dados de fenômenos práticos é muito grande na Estatística. Nas últimas décadas, muitos autores têm concentrado esforços na generalização de distribuições de probabilidade a fim de obter flexibilidade e ganho na análise de dados das mais variados formas (simétricos, assimétricos, unimodais, bimodais, por exemplo). Neste trabalho será apresentada a distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada. Deseja-se que a nova distribuição sirva de auxílio na análise de dados reais, inclusive assistindo a escolha entre os modelos que são seus casos particulares.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Os avanços tecnológicos proporcionaram que distribuições mais simples e que são largamente utilizadas, tais como a Weibull, gama, Rayleigh e exponencial, dessem lugar a novas famílias de distribuições mais complexas. Estas novas distribuições de probabilidade aprimoraram a análise de dados, pois se adequam melhor aos dados.

Este cenário fez com que muitos pesquisadores em teoria das distribuições se atenassem na prospecção de modelos de probabilidade mais flexíveis e que expliquem melhor os fenômenos práticos.

Toda distribuição tem associada uma função que define unicamente o modelo. Tal função é chamada de função de distribuição acumulada (fda) ou apenas função de distribuição, a qual será denotada como  $F(\cdot)$ .

Se  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  é dita função de distribuição acumulada, então:

F1:  $F$  é uma função não decrescente em  $\mathbb{R}$ ;

F2:  $F$  é contínua à direita;

F3:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

A seguir serão apresentadas, de forma sucinta, algumas novas famílias de distribuições: G-Exponencializada (GUPTA; KUNDU, 1999), Beta-G (EUGENE; LEE; FAMOYE, 2002), T-X (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013) e Alpha Power-T (MAHDAVI; KUNDU, 2017). Esta última usaremos para apresentar a distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada.

#### 3.1 Família de distribuições G-Exponencializada

Gupta e Kundu (1999) mostraram que se  $X$  for uma variável aleatória com fda contínua  $G(x)$  e vetor de parâmetros  $\xi$ , então  $T$  terá distribuição G-exponencializada( $a, \xi$ ),  $a > 0$ , definida pela fda

$$F(t) = [G(t)]^a. \quad (3.1)$$

A fdp associada a (3.1) é da forma

$$f(t) = a[G(t)]^{a-1}g(t), t > 0, a > 0.$$

Os autores também apresentaram a distribuição Exponencial Exponencializada no mesmo artigo. A seguir serão apresentados alguns casos especiais da família G-exponencializada já discutidos na literatura.

### 3.1.1 Distribuição Exponencial Exponencializada (EE)

Seja  $X$  uma variável aleatória que segue a distribuição *Exponencial* ( $\lambda$ ) com fda

$$G(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0, \quad (3.2)$$

então  $T$  será uma variável aleatória com distribuição Exponencial Exponencializada com função de distribuição acumulada, deduzida ao inserir (3.2) em (3.1), da forma

$$F(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^a, t > 0, \lambda > 0, a > 0 \quad (3.3)$$

e função de densidade de probabilidade associada a (3.3) dada por

$$f(t) = a\lambda e^{-\lambda t} [1 - e^{-\lambda t}]^{a-1}, t > 0, \lambda > 0, a > 0.$$

A função taxa de falha da EE é da forma

$$h(t) = a\lambda \frac{e^{-\lambda t} [1 - e^{-\lambda t}]^{a-1}}{1 - [1 - e^{-\lambda t}]^a}, t > 0, \lambda > 0, a > 0.$$

Gupta e Kundu (2001) mostraram que muitas propriedades da EE são parecidas com as da distribuição gama, porém computacionalmente se aproximam mais da Weibull. Os estimadores de máxima verossimilhança da distribuição Weibull convergem muito lentamente, portanto a distribuição EE é uma alternativa a esta. Também mostraram que a EE pode ser utilizada com eficiência para análise de dados de sobrevivência com censura ou de dados agrupados.

A função taxa de falha da EE é contínua em  $\lambda$  se  $a = 1$  (neste caso temos como caso especial a distribuição exponencial), crescente convergindo para  $\lambda$  se  $a > 1$  e decrescente até  $\lambda$  se  $a < 1$ . A Figura (2) exemplifica este comportamento.

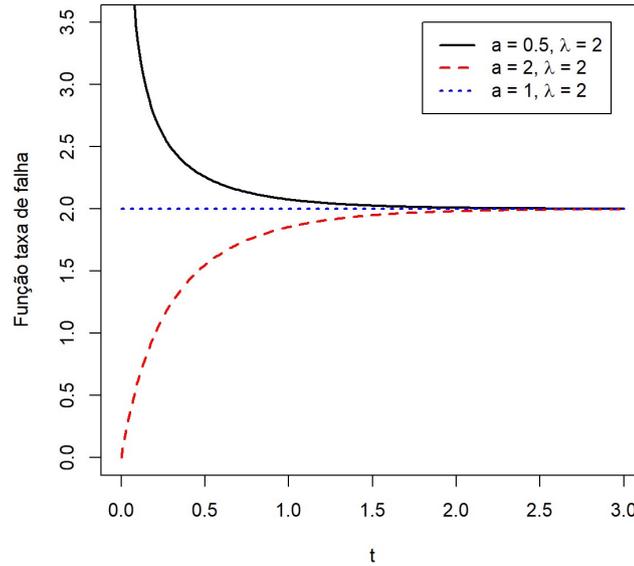


Figura 2 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Exponencial Exponencializada

### 3.1.2 Família Weibull Exponencializada (EW)

Mudholkar, Srivastava e Freimer (1995) mostraram que, se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição  $Weibull(\lambda, \theta)$  com fda dada por

$$G(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\theta}, x > 0, \lambda > 0, \theta > 0 \quad (3.4)$$

então  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Weibull Exponencializada e tem função de distribuição acumulada, deduzida ao inserir (3.4) em (3.1), da forma

$$F(t) = \left[1 - e^{-(\lambda t)^\theta}\right]^a, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0 \quad (3.5)$$

e função de densidade de probabilidade associada a (3.5) dada por

$$f(t) = a\theta\lambda(\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} \left[1 - e^{-(\lambda t)^\theta}\right]^{a-1}, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0.$$

Se  $\theta = 1$ , então a fdp da EW se resume à função densidade da EE. Se  $a = 1$  tem-se a distribuição Weibull. Além disso se  $\theta = a = 1$  o modelo EW coincide com a distribuição exponencial. A função taxa de falha da EW é dada por

$$h(t) = a\theta\lambda(\lambda t)^{\theta-1} \frac{e^{-(\lambda t)^\theta} \left(1 - e^{-(\lambda t)^\theta}\right)^{a-1}}{1 - \left[1 - e^{-(\lambda t)^\theta}\right]^a}, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0$$

Os autores também mostraram que é adequado usar a família EW para modelar dados que indicam funções taxa de falha não-monótonas. Concluíram também que a

função taxa de falha da EW tem formas: de banheira, se  $a < 1$ ,  $\theta > 1$  e  $a\theta < 1$ ; unimodal, se  $a > 1$ ,  $\theta < 1$  e  $a\theta > 1$ ; monótona decrescente, se  $a < 1$  e  $a\theta < 1$ ; monótona crescente, se  $a > 1$  e  $\theta > 1$ . A Figura (3) exemplifica este comportamento.

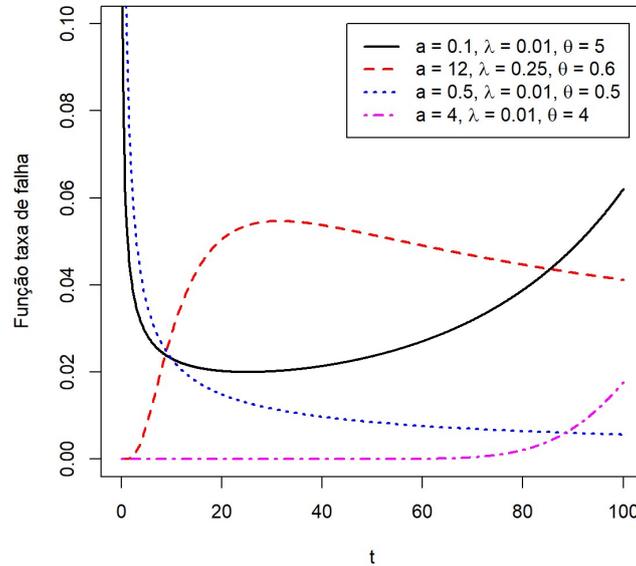


Figura 3 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Weibull Exponencializada

### 3.2 Família de distribuições Beta-G

Eugene, Lee e Famoye (2002) mostraram que para obter novas distribuições na família beta-G é necessário compor uma fda  $G(x)$  com uma fda de uma variável aleatória  $T \sim \beta(a, b)$ . Seja  $X$  uma variável aleatória contínua qualquer com fda  $G(x)$  e vetor de parâmetros  $\xi$ . A função de distribuição acumulada  $F(t)$  de uma distribuição Beta-G( $a, b, \xi$ ) é definida por

$$F(t) = I_{G(t)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(t)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega \quad (3.6)$$

em que  $B(a, b)$  é a função beta definida como a seguir

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}, a > 0, b > 0.$$

A fdp associada a (3.6) é da forma

$$f(t) = \frac{1}{B(a, b)} g(t) [G(t)]^{a-1} [1 - G(t)]^{b-1}, t > 0, a > 0, b > 0. \quad (3.7)$$

Nas próximas subseções serão apresentados alguns casos especiais, já discutidos na literatura, desta família.

### 3.2.1 Distribuição Beta-Exponencial (BE)

Nadarajah e Kotz (2006) mostraram que se  $X$  é uma variável aleatória que segue a distribuição *Exponencial* ( $\lambda$ ), com fda dada por

$$G(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0,$$

então  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Beta-Exponencial se tem função de distribuição acumulada, substituindo a fda dada em (3.2) na equação (3.6), da forma

$$F(t) = I_{1-e^{-\lambda t}}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-e^{-\lambda t}} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega, t > 0, \lambda > 0, a > 0, b > 0 \quad (3.8)$$

e função densidade associada a (3.8) dada por

$$f(t) = \frac{\lambda}{B(a, b)} e^{-b\lambda t} [1 - e^{-\lambda t}]^{a-1}, t > 0, \lambda > 0, a > 0, b > 0 \quad (3.9)$$

A função taxa de falha da BE é dada por

$$h(t) = \lambda \frac{e^{-b\lambda t} [1 - e^{-\lambda t}]^{a-1}}{B(a, b) [1 - I_{1-e^{-\lambda t}}(a, b)]}, t > 0, \lambda > 0, a > 0, b > 0.$$

A Figura (4) evidencia que a função taxa de falha da BE tem os seguintes formatos, fixados  $b = 1$  e  $\lambda = 1$ : crescente até  $\lambda$ , se  $a > 1$ ; constante, se  $a = 1$ ; decrescente, se  $a < 1$ .

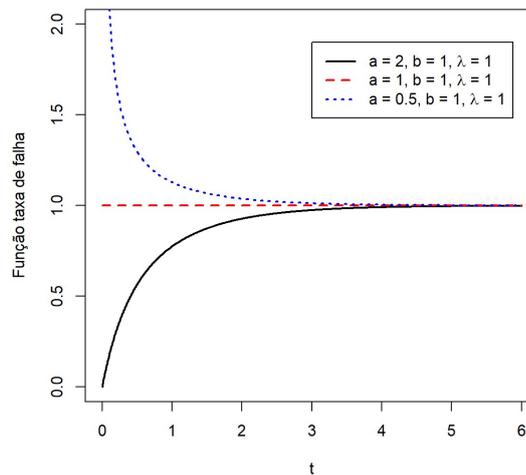


Figura 4 – Exemplos das funções taxa de falha da distribuição Beta-Exponencial

### 3.2.2 Distribuição Beta Weibull (BW)

Lee, Famoye e Olumolade (2007) mostram que se  $X$  tem distribuição *Weibull* ( $\lambda, \theta$ ) com fda dada por

$$G(x) = 1 - e^{-(\lambda t)^\theta}, x > 0, \lambda > 0, \theta > 0,$$

então  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Beta-Weibull se tem função de distribuição acumulada, substituindo (3.4) em (3.6), da forma

$$F(t) = I_{1-e^{-(\lambda t)^\theta}}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-e^{-(\lambda t)^\theta}} \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega \quad (3.10)$$

com  $t > 0, \lambda > 0, \theta > 0, a > 0, b > 0$  e função de densidade associada a (3.10) dada por

$$f(t) = \theta \lambda \frac{1}{B(a, b)} (\lambda t)^{\theta-1} [1 - e^{-(\lambda t)^\theta}]^{a-1} e^{-b(\lambda t)^\theta},$$

com  $t > 0, \lambda > 0, \theta > 0, a > 0, b > 0$ .

Se  $a = b = 1$ , então a fdp da BW se torna a fdp de uma distribuição Weibull com parâmetros  $\lambda$  e  $\theta$ . As famílias EW e EE também são casos particulares da BW, quando  $b = 1$  e  $\lambda = b = 1$ , respectivamente.

A fdp da BW tem uma flexibilidade grande nas suas extremidades e comporta diferentes graus de assimetria e curtose (CORDEIRO; ORTEGA; SILVA, 2011, p. 34).

A função taxa de falha da BW é dada por

$$h(t) = \theta \lambda (\lambda t)^{\theta-1} \frac{e^{-b(\lambda t)^\theta} [1 - e^{-(\lambda t)^\theta}]^{a-1}}{B(a, b) [1 - I_{1-e^{-(\lambda t)^\theta}}(a, b)]}$$

com  $t > 0, \lambda > 0, \theta > 0, a > 0, b > 0$ .

Algumas formas da função taxa de falha da BW são mostradas na Figura (5). São elas: constante em  $b\lambda$ , se  $a = \theta = 1$ ; decrescente, se  $a\theta \leq 1$  e  $\theta \leq 1$ ; crescente, se  $a\theta \geq 1$  e  $\theta \geq 1$ ; forma de banheira, se  $a\theta < 1$  e  $\theta > 1$ ; unimodal, se  $a\theta > 1$  e  $\theta < 1$ .

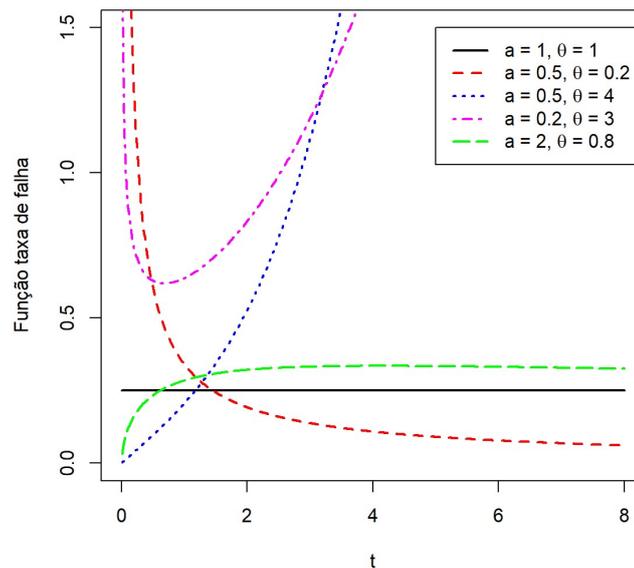


Figura 5 – Função taxa de falha da distribuição Beta-Weibull, fixados  $b = 2$  e  $\lambda = 0.25$

### 3.2.3 Distribuição Beta-Normal (BN)

Se  $X$  é uma variável aleatória que segue a distribuição  $Normal(\mu, \sigma^2)$  com fda dada por

$$G(x) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega, \quad (3.11)$$

então  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Beta-Normal se tem função de distribuição acumulada, ao substituir (3.11) em (3.6), da forma

$$F(t) = I_{\Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, a > 0, b > 0 \quad (3.12)$$

e função densidade associada a (3.12) dada por

$$f(t) = \frac{1}{B(a, b)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^{a-1} \left[1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)\right]^{b-1}$$

com  $t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, a > 0, b > 0$ , em que  $\Phi(t)$  é a função densidade acumulada reduzida ( $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ) no ponto  $t$ .

A função taxa de falha da BN é dada por

$$h(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{B(a, b) \left[1 - I_{\Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}(a, b)\right]}$$

com  $t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, a > 0, b > 0$ .

A Figura (6) nos mostra que a BN pode ter função taxa de falha, fixado  $\sigma = 5$  nas formas: crescente, se  $a > 1$ , unimodal, se  $a < 1$ .

### 3.2.4 Distribuição Beta Weibull Modificada (BMW)

Silva, Ortega e Cordeiro (2010) propuseram uma nova família que considera que se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição Weibull Modificada de parâmetros  $\theta > 0, \delta \geq 0, \beta > 0$ , com fda dada por

$$G(x) = 1 - e^{-\theta x^\beta e^{\delta x}} \quad (3.13)$$

então  $T$  é uma variável aleatória com distribuição Beta Weibull Modificada se tem função de distribuição acumulada, ao substituir (3.13) em (3.6), da forma

$$F(t) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega \quad (3.14)$$

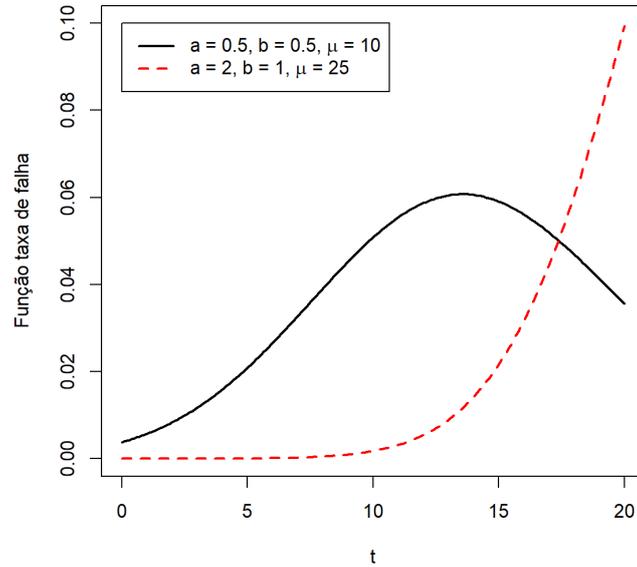


Figura 6 – Exemplos de funções taxa de falha da distribuição Beta-Normal, fixado  $\sigma = 5$

e função de densidade de probabilidade associada a (3.14) da forma

$$f(t) = \frac{1}{B(a, b)} \theta t^{\beta-1} (\beta + \delta t) e^{\delta t} \left[ 1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}} \right]^{a-1} e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t}} \quad (3.15)$$

com  $t > 0, \delta > 0, \beta > 0, \theta > 0, a > 0, b > 0$ .

A função taxa de falha da BMW é dada por

$$h(t) = \frac{1}{B(a, b)} \theta t^{\beta-1} \frac{(\beta + \delta t) e^{\delta t} \left[ 1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}} \right]^{a-1} e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t}}}{1 - I_{1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}}(a, b)}$$

com  $t > 0, \delta > 0, \beta > 0, \theta > 0, a > 0, b > 0$ .

A BMW comporta vários casos particulares: quando  $\delta = 0$  a BMW se torna a distribuição BE. Se  $a = b = 1$  a BMW se torna a Weibull modificada. Para  $b = 1$  e  $\delta = 0$  a BMW reduz-se à EE. Se  $a = b = 1$  e  $\delta = 0$ , então a BMW se torna a Weibull.

Os autores também mostraram que a BMW é mais flexível que a EW e a Weibull modificada e Weibull modificada generalizada (CARRASCO; ORTEGA; CORDEIRO, 2008).

A Figura (7) ilustra algumas das possíveis formas da função taxa de falha da BMW para determinados valores dos parâmetros.

Os autores confirmaram a melhor flexibilidade da BMW sobre os seus casos especiais ao fazer uma aplicação nos dados usados por Aarset (1987). Este conjunto de dados

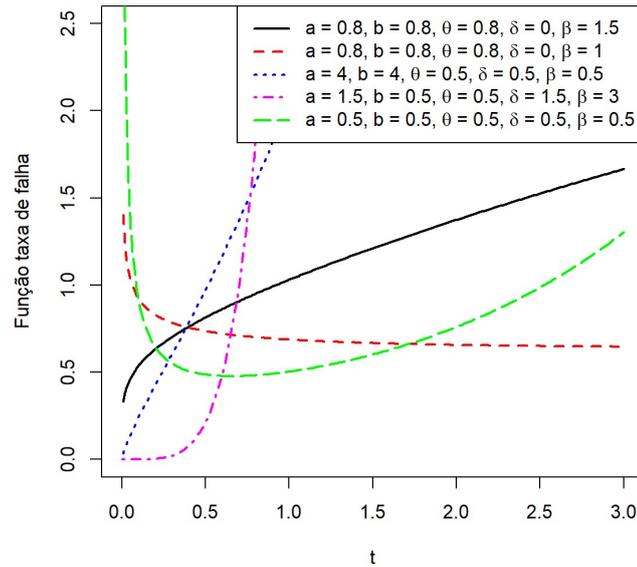


Figura 7 – Exemplos da função taxa de falha da distribuição Beta Weibull Modificada

contém os tempos de falha de 50 dispositivos cuja função taxa de falha tem forma de banheira.

### 3.3 Família de distribuições T-X

Alzaatreh, Lee e Famoye (2013) desenvolveram uma generalização para a geração de famílias de distribuições.

Sejam  $T$  uma variável aleatória qualquer com fdp  $r(t)$  e fda  $R(t)$  tal que  $t \in [a, b]$ , em que  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  e vetor de parâmetros  $\xi$  e  $X$  uma variável aleatória qualquer com fda  $F(x)$ , fdp  $f(x)$  e vetor de parâmetros  $\phi$ .

Seja também

$$W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) \mapsto \mathbb{R}$$

uma função da fda  $F(x)$  tal que  $W(F(x))$  satisfaz as seguintes condições:

- i)  $W(F(x)) \in [a, b]$ ;
- ii)  $W(F(x))$  é diferenciável e monotonicamente não-decrescente;
- iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(F(x)) = a$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} W(F(x)) = b$ .

A fda de uma nova família de distribuições T-X com vetor de parâmetros  $(\phi, \xi)$  é da forma

$$G(x) = \int_a^{W(F(x))} r(t)dt = R[W(F(x))] \tag{3.16}$$

em que  $W(F(x))$  satisfaz as condições citadas. A fdp associada à  $G(x)$  é da forma

$$g(x) = \left[ \frac{\partial W(F(x))}{\partial x} \right] r[W(F(x))].$$

Diferentes  $W(F(x))$  gerarão diferentes famílias de distribuições e a escolha da  $W(F(x))$  depende do domínio de  $T$ ,  $dom(T)$ . Por exemplo:

- Quando  $T$  é limitada,  $W(F(x))$  pode ser tanto  $F(x)$  quanto  $[F(x)]^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , que é a família beta-G de distribuições.
- Quando o  $dom(T)$  é  $[a, \infty)$ ,  $a \geq 0$ ,  $W(F(x))$  pode ser:
  - i)  $-\log(1 - F(x))$
  - ii)  $\frac{F(x)}{1-F(x)}$
  - iii)  $-\log(1 - [F(x)]^\alpha)$
  - iv)  $\frac{[F(x)]^\alpha}{1-[F(x)]^\alpha}$
- Quando  $dom(T) = \mathbb{R}$ ,  $W(F(x))$  pode ser:
  - i)  $\log[-\log(1 - F(x))]$
  - ii)  $\log \left[ \frac{F(x)}{1-F(x)} \right]$
  - iii)  $\log[-\log(1 - [F(x)]^\alpha)]$
  - iv)  $\log \left[ \frac{[F(x)]^\alpha}{1-[F(x)]^\alpha} \right]$

com  $\alpha > 0$ .

Usando a função  $W(F(x)) = -\log(1 - F(x))$  em (3.16) obteremos a fda da nova família de distribuições que é dada por

$$G(x) = \int_0^{-\log(1-F(x))} r(t) dt = R[-\log(1 - F(x))], \quad (3.17)$$

em que  $R(t)$  é a fda de  $T$ . A fdp de  $X$ ,  $g(x)$ , associada a (3.17) é da forma

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} r(-\log(1 - F(x))) = h(x)r(-\log(1 - F(x))). \quad (3.18)$$

As famílias a seguir foram apresentadas e discutidas em [Alzaatreh, Lee e Famoye \(2013\)](#).

### 3.3.1 Família Gama-X

Seja  $T$  uma variável aleatória com distribuição  $\Gamma(\alpha, \beta)$  com fdp e fda dadas, respectivamente, por

$$r(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}, t > 0. \quad (3.19)$$

$$R(t) = \frac{\gamma(\alpha, t)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Substituindo essas expressões em (3.17), temos

$$G(x) = \frac{\gamma(\alpha, -\log(1 - F(x)))}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.20)$$

A fdp associada a (3.20) ao utilizar (3.19) em (3.18) é da forma

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} f(x) [-\log(1 - F(x))]^{\alpha-1} [1 - F(x)]^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

Por exemplo, se  $X \sim Weibull(\lambda, \theta)$  com fdp da forma

$$f(x) = \theta \lambda (\lambda x)^{\theta-1} e^{-(\lambda x)^\theta}, x > 0, \lambda > 0, \theta > 0$$

então a fdp da nova distribuição Gama-Weibull é da forma

$$\frac{\lambda \theta^\alpha x^{\alpha\lambda-1} e^{-\frac{1}{\beta}(\theta x)^\lambda}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha},$$

com  $x > 0; \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0, \lambda > 0$ .

Reparametrizando esta distribuição,  $T - X$ , temos que ela segue a distribuição Gama generalizada com parâmetros  $\frac{\beta^\lambda - 1}{\theta}$ ,  $\alpha\lambda$  e  $\lambda$  (STACY, 1962).

### 3.3.2 Família Weibull-X

Seja  $T$  uma variável aleatória que segue a distribuição  $Weibull(\lambda, \theta)$  com fda dada por

$$R(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\theta}, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0.$$

Aplicando a fda da distribuição Weibull em (3.17) temos que

$$G(x) = 1 - e^{-[-\theta \log(1 - F(x))]^\lambda}, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0$$

e

$$g(x) = \lambda \theta \frac{f(x)}{1 - F(x)} [-\theta \log(1 - F(x))]^{\lambda-1} e^{-[-\theta \log(1 - F(x))]^\lambda}, t > 0, \lambda > 0, \theta > 0$$

são as fda e fdp, respectivamente, da família Weibull-X.

### 3.3.3 Família Beta-Exponencial-X

Se  $T$  segue a distribuição Beta-Exponencial como em (3.9), então a fda da distribuição Beta-Exponencial-X é definida como

$$G(x) = I_{1-[1-F(x)]^\lambda}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-[1-F(x)]^\lambda} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega, t > 0, \lambda > 0, a > 0, b > 0 \quad (3.21)$$

e a fdp associada a (3.21) é da forma

$$g(x) = \frac{\lambda}{B(a, b)} f(t) (1 - F(t))^{b\lambda-1} [1 - (1 - F(t))^\lambda]^{a-1}. \quad (3.22)$$

### 3.4 Família de distribuições Alpha Power-T

Mahdavi e Kundu (2017) desenvolveram um novo método de geração de famílias de distribuições, chamado Alpha Power-T.

Seja  $X$  uma variável aleatória qualquer com vetor de parâmetros  $\theta$  e fda  $F(\cdot)$  e fdp  $f(\cdot)$ . Dizemos que  $T$  tem distribuição Alpha Power  $X(\alpha, \theta)$ ,  $\alpha > 0$  se sua fda  $G(t)$  for da forma

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(t)} - 1}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha \neq 1; \\ F(t), & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

e fdp  $g(t)$  associada a (3.23) da forma

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha)}{\alpha - 1} f(t) \alpha^{F(t)}, & \text{se } \alpha \neq 1; \\ f(t), & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

A função taxa de falha da família Alpha Power-T é da forma

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha) f(t) \alpha^{F(t)-1}}{1 - \alpha^{F(t)-1}}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ h_X(t), & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

A seguir serão apresentados alguns casos especiais desta família já discutidos na literatura.

#### 3.4.1 Distribuição Alpha Power Exponencial (APE)

Mahdavi e Kundu (2017) mostraram também que se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição *Exponencial*( $\lambda$ ),  $\lambda > 0$ , então  $T$  segue a distribuição Alpha Power Exponencial se, ao inserir a fda de  $X$  em (3.23), tem fda da forma

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{[1-e^{-\lambda t}]-1}}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

e fdp associada a (3.25) da forma

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha)}{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda t} \alpha^{1-e^{-\lambda t}}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

A função taxa de falha da APE é da forma

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t} \alpha^{-e^{-\lambda t}} \log(\alpha)}{1 - \alpha^{-e^{-\lambda t}}}, & \text{se } \alpha \neq 1; \\ \lambda, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

A Figura (8) ilustra as formas da função taxa de falha da APE, fixado  $\lambda = 1$ , que são: constante, se  $\alpha = 1$ ; não-decrescente, se  $\alpha > 1$ ; não-crescente, se  $\alpha < 1$ .

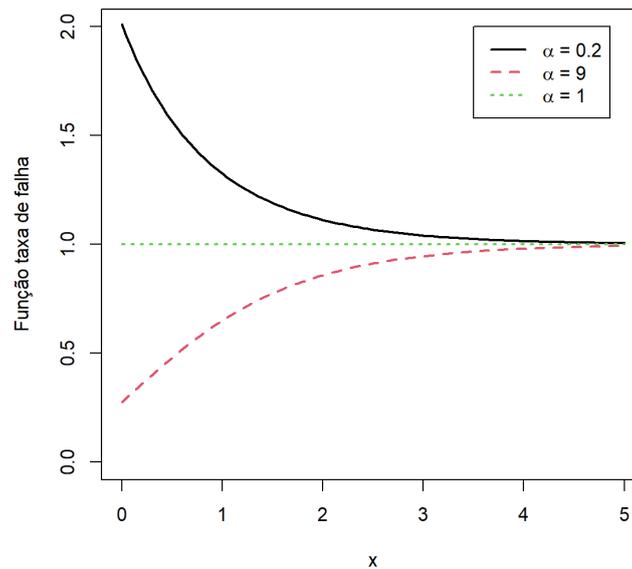


Figura 8 – Exemplos de funções taxa de falha da distribuição Alpha Power Exponencial, fixado  $\lambda = 1$

Os autores analisaram a performance da APE, comparando com as distribuições Gama, Weibull, Exponencial Exponencializada (GUPTA; KUNDU, 1999) e Exponencial Ponderada (GUPTA; KUNDU, 2009). Eles utilizaram um conjunto de dados dos intervalos em dias entre 109 desastres sucessivos numa mina de carvão, publicado em Maguire, Pearson e Wynn (1952). Os autores verificaram que a APE se ajustou melhor a estes dados.

### 3.4.2 Distribuição Alpha Power Weibull (APW)

Nassar et al. (2017) mostraram que se uma variável aleatória  $X$  tem distribuição Weibull( $\lambda, \theta$ ),  $\lambda > 0, \theta > 0$ , com fda da forma

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\theta}, \lambda > 0, \theta > 0,$$

então  $T$  tem distribuição Alpha Power Weibull( $\alpha, \lambda, \theta$ ),  $\alpha > 0$  com fda  $G(t)$  da forma

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-e^{-(\lambda t)^\theta}} - 1}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 1 - e^{-(\lambda t)^\theta}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

e fdp  $g(t)$  associada a (3.26) da forma

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha)\lambda\theta}{\alpha - 1} (\lambda t)^{\theta-1} e^{[-(\lambda t)^\theta]} \alpha^{1-e^{-(\lambda t)^\theta}}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \lambda\theta(\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

A função taxa de falha da APW é da forma

$$h(t) = \begin{cases} \lambda\theta \log(\alpha) \frac{(\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} \alpha^{-e^{-(\lambda t)^\theta}}}{1 - \alpha^{-e^{-(\lambda t)^\theta}}}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \lambda\theta(\lambda t)^{\theta-1}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

Algumas das possíveis formas da função taxa de falha da APW são mostradas na Figura (9), fixado  $\lambda = 2$ . Se  $\alpha > 1$  e  $\theta < 1$ , então  $h(t)$  é decrescente; se  $\alpha > 1$  e  $\theta > 1$ , então  $h(t)$  é monótona crescente; se  $\alpha > 1$  e  $\theta = 1$ , então  $h(t)$  é não-decrescente; se  $\alpha < 1$  e  $\theta = 1$ , então é não-crescente; se  $\alpha = \theta = 1$ , então  $h(t)$  é constante.

Os autores compararam a performance da APW com algumas distribuições. São elas: Alpha power exponencial (MAHDAVI; KUNDU, 2017), Weibull, McDonald Weibull (CORDEIRO; HASHIMOTO; ORTEGA, 2014), Beta Weibull (LEE; FAMOYE; OLU-MOLADE, 2007), Weibull modificada, Weibull exponencializada (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; FREIMER, 1995), Weibull transmutada (ARYAL; TSOKOS, 2011), gama-Lomax (CORDEIRO; ORTEGA; POPOVIĆ, 2015) e Zografos-Balakrishnan log-logística (ZOGRAFOS; BALAKRISHNAN, 2009). Para tal, ajustaram os modelos em dois bancos de dados, um corresponde aos intervalos de dias entre 109 desastres em uma mina de carvão, e o outro a força de 63 fibras de vidro de 1.5cm. Eles observaram que a APW se ajustou melhor aos dois dados levando em conta as estatísticas do teste de Kolmogorov-Smirnov, os p-valores deste teste e  $-2\ell(\hat{\theta})$ , onde  $\ell(\hat{\theta})$  denota a log-verossimilhança avaliada nos estimadores de máxima verossimilhança.

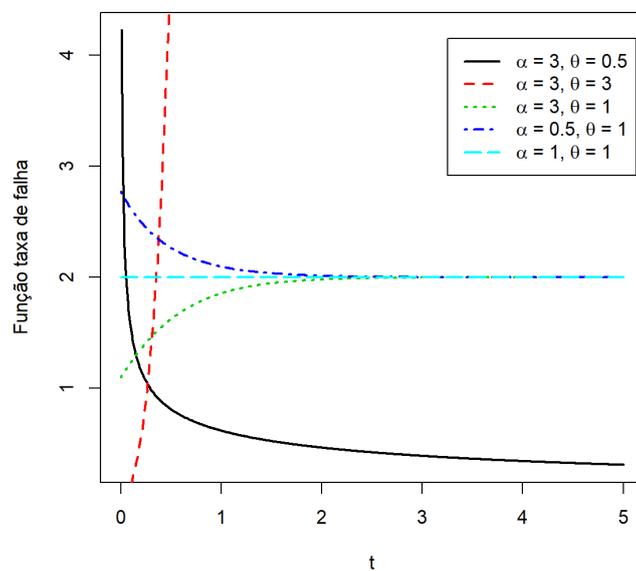


Figura 9 – Função taxa de falha da distribuição Alpha Power Weibull, fixado  $\lambda = 2$

#### 4 ALPHA POWER BETA WEIBULL MODIFICADA (APBMW)

Utilizando a família Alpha Power-T, nós propomos a distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada que é definida como segue.

Se  $X$  segue a distribuição Beta Weibull Modificada como em (3.15), então  $T$  segue a distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada cuja fda, ao inserir (3.14) em (3.23), é da forma

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{I_{H(t,\xi)}(a,b)} - 1}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ I_{H(t,\xi)}(a,b), & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

e fdp, associada a (4.1), da forma

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\log(\alpha)}{\alpha - 1} \frac{\theta}{B(a,b)} t^{\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1} \alpha^{I_{H(t,\xi)}(a,b)}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{\theta}{B(a,b)} t^{\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

A função taxa de falha da APBMW é dada por

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\theta \log(\alpha)}{B(a,b)} t^{\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1} \frac{\alpha^{I_{H(t,\xi)}(a,b)} - 1}{1 - \alpha^{I_{H(t,\xi)}(a,b)}}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{\theta}{B(a,b)} t^{\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1} \frac{1}{1 - I_{H(t,\xi)}(a,b)}, & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

em que  $I_{H(t,\xi)}(a,b)$  é a função beta regularizada e é dada por

$$I_{H(t,\xi)}(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{H(t,\xi)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega, \quad H(t,\xi) = 1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}} \text{ e } \xi = (a, b, \theta, \beta, \delta).$$

Formas da função densidade de probabilidade e da função taxa de falha da APBMW para valores específicos de  $\xi = (a, b, \delta, \beta, \theta, \alpha)$  são apresentadas, respectivamente, nas Figura (10) e Figura (11).

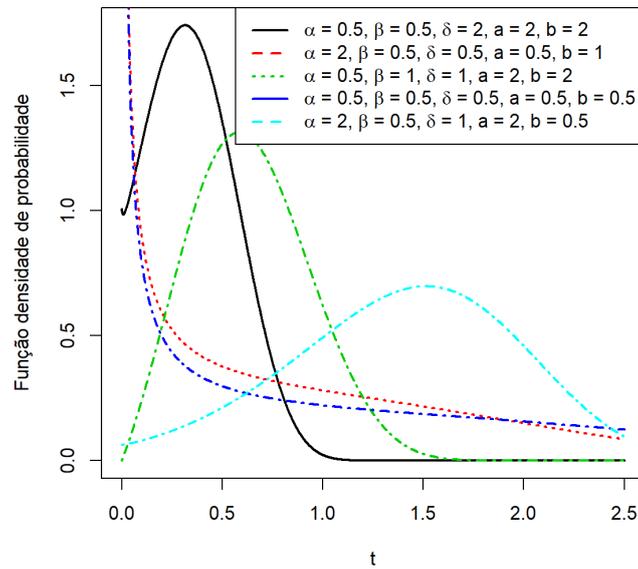


Figura 10 – Exemplos de densidade de probabilidade da APBMW para alguns valores de parâmetros, fixado  $\theta = 2$

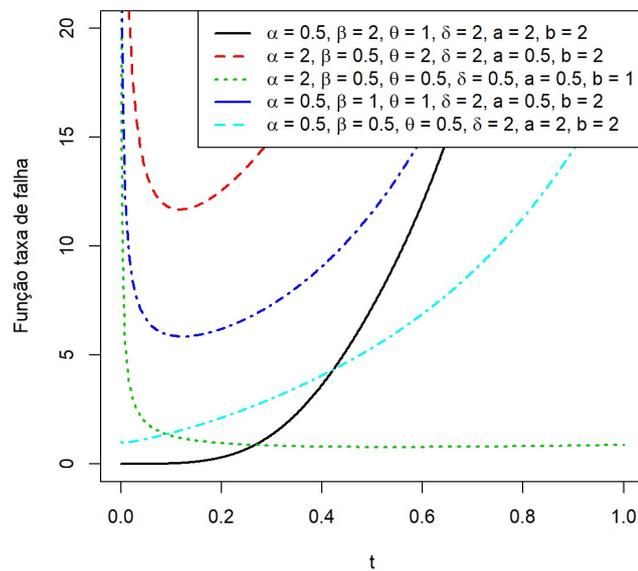


Figura 11 – Exemplos de funções taxa de falha da APBMW para alguns valores de parâmetros

Os casos especiais da APBMW estão apresentados na Figura (12). Distribuições em retângulos verdes ainda não foram definidas formalmente.

Vale ressaltar que os resultados das seções 4.1 a 4.4 são para  $\alpha \neq 1$ , visto que quando  $\alpha = 1$  os resultados já foram obtidos em [Silva, Ortega e Cordeiro \(2010\)](#).

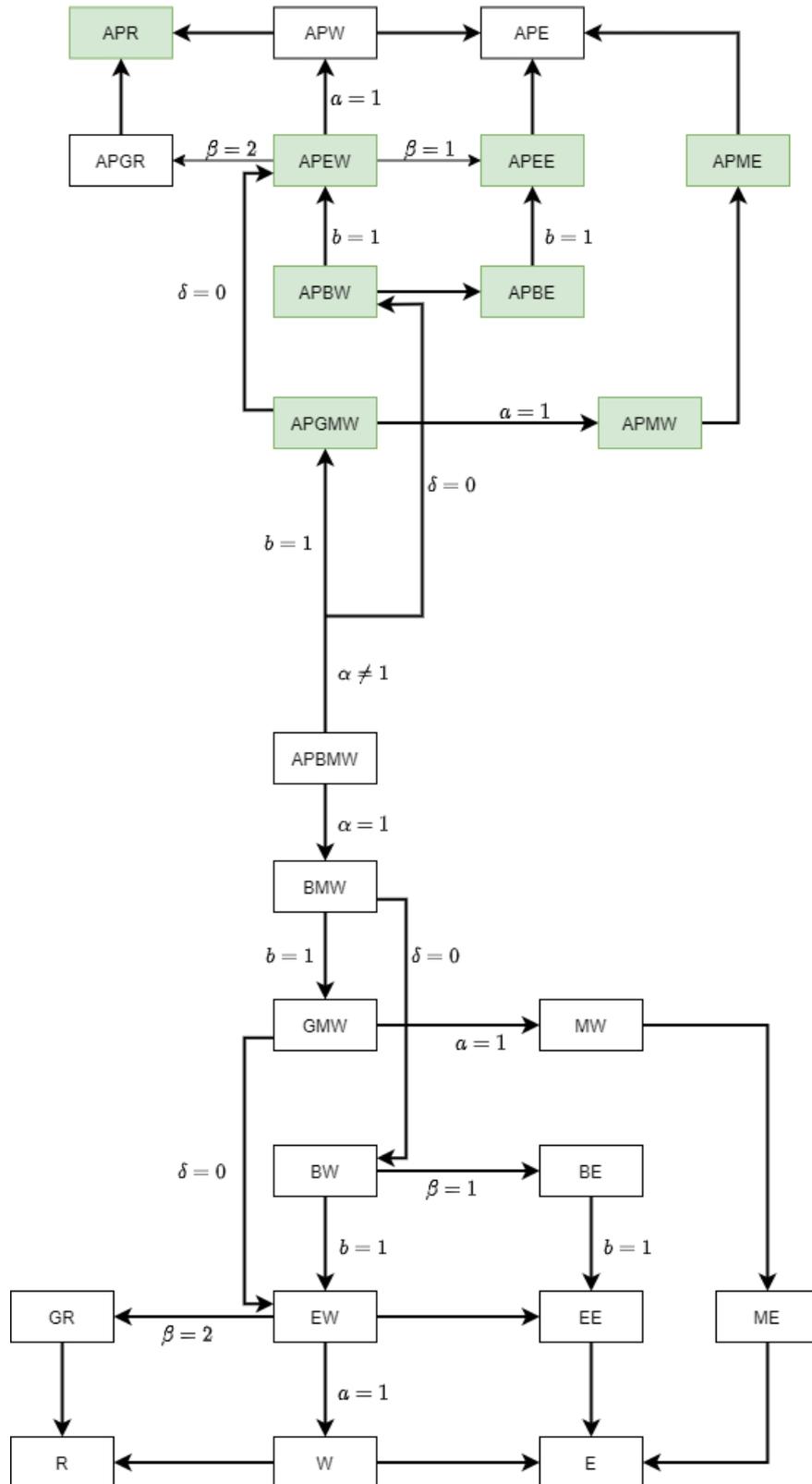


Figura 12 – Casos especiais da distribuição Alpha Power Beta Weibull Modificada

#### 4.1 Expansões para as funções de distribuição e densidade

Nós desenvolvemos algumas expansões para as funções de distribuição e de densidade da APBMW. Essas expansões são importantes para se obter algumas propriedades matemáticas desta distribuição diretamente da MW.

Utilizamos o fato de que

$$\left[ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right]^r = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^{\infty} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_r}$$

algumas vezes no desenvolvimento da demonstração.

Algumas expansões para (4.1) e (4.2) podem ser obtidas usando o fato de que  $\alpha^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^i}{i!} x^i$  para mostrar que

$$Z(x) = \frac{\alpha^{F(x)} - 1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^i}{i!} F(x)^i - 1 \right] \quad (4.3)$$

em que

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j G_{(\theta(b+j), \beta, \delta)}(x)$$

é a expansão da fda da BMW obtida por [Silva, Ortega e Cordeiro \(2010\)](#), com

$$w_j = \frac{(-1)^j \Gamma(a)}{B(a, b) \Gamma(a - j) (b + j) j!}$$

e  $G_{(\theta(b+j), \beta, \delta)}(x)$  é a expansão da fda da distribuição proposta por [Carrasco, Ortega e Cordeiro \(2008\)](#).

Simplificando temos que

$$Z(x) = \frac{1}{\alpha - 1} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{\infty} a_i \mathcal{W}_{j_1, \dots, j_i} \mathcal{G}_{(\theta(b+j_1), \beta, \delta), \dots, (\theta(b+j_i), \beta, \delta)}(x) - 1 \right].$$

em que

$$a_i = \frac{(\log(\alpha))^i}{i!} \quad \mathcal{W}_{j_1, \dots, j_i} = w_{j_1} \cdot \dots \cdot w_{j_i},$$

$$\mathcal{G}_{(\theta(b+j_1), \beta, \delta), \dots, (\theta(b+j_i), \beta, \delta)}(x) = G_{(\theta(b+j_1), \beta, \delta)}(x) \cdot \dots \cdot G_{(\theta(b+j_i), \beta, \delta)}(x),$$

Para a fdp derivamos (4.3). Então obtemos

$$z(x) = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\log(\alpha))^i}{(i-1)!} \left( \sum_{j=0}^{\infty} w_j G_{(\theta(b+j))}(x) \right)^{i-1} \sum_{h=0}^{\infty} w_h g_{(\theta(b+h))}.$$

$g_{(\theta(b+h))}$  é a expansão da fdp da distribuição Weibull Modificada proposta por [Carrasco, Ortega e Cordeiro \(2008\)](#). Disto podemos simplificar para

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_{i-1}=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} b_i w_h g_{(\theta(b+h))} \mathcal{W}_{j_1, \dots, j_{i-1}} \mathcal{G}_{(\theta(b+j_1), \dots, \theta(b+j_{i-1}))}$$

em que

$$b_i = \frac{(\log(\alpha))^i}{(i-1)!} \quad \mathcal{W}_{j_1, \dots, j_{i-1}} = w_{j_1} \cdot \dots \cdot w_{j_{i-1}}$$

$$\mathcal{G}_{(\theta(b+j_1), \beta, \delta), \dots, (\theta(b+j_{i-1}), \beta, \delta)}(x) = G_{(\theta(b+j_1), \beta, \delta)}(x) \cdot \dots \cdot G_{(\theta(b+j_{i-1}), \beta, \delta)}(x).$$

## 4.2 Fórmula geral de momentos

Os momentos de uma distribuição de probabilidade têm muita utilidade em análises estatísticas. Algumas características das distribuições podem ser estudadas usando a fórmula de momentos (média, variância, assimetria, curtose etc.) . Para a APBMW é possível encontrar a fórmula geral dos momentos ordinários a partir de (4.2).

$$E[t^r] = \frac{\theta \log(\alpha)}{(\alpha - 1)B(a, b)} \int_0^\infty t^{r+\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1} \alpha^{I_{H(t, \theta)}(a, b)} dt$$

Para b natural temos que:

$$I_{H(t, \xi)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j}{j+a} (H_{t, \xi})^{j+a}$$

$$\alpha^{I_{H(t, \xi)}(a, b)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{b-1} a_i C_{j_1, \dots, j_i} (H(t, \xi))^{s_j + ia}$$

e

$$E[t^r] = \frac{\theta \log(\alpha)}{(\alpha - 1)B(a, b)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{b-1} a_i C_{j_1, \dots, j_i} \int_0^\infty t^{r+\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-b\theta t^\beta e^{\delta t} + \delta t} [1 - e^{-\theta t^\beta e^{\delta t}}]^{a-1} dx$$

em que

$$a_i = \left( \frac{\log(\alpha)}{B(a, b)} \right)^i \frac{1}{i!} \quad C_{j_1, \dots, j_i} = c_{j_1} \cdot \dots \cdot c_{j_i} \quad c_j = \binom{b-1}{j} (-1)^j$$

$$s_j = j_1 + j_2 + \dots + j_i,$$

$$\lambda = s_j + (i+1)a$$

Conseguimos resolver analiticamente usando o mesmo algebrismo que Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) utilizaram.

Vamos utilizar a identidade a seguir

$$(1+z)^{m-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m) z^h}{\Gamma(m-h) h!}$$

para obtermos esta expressão:

$$E[t^r] = \frac{\theta \log(\alpha)}{(\alpha - 1)B(a, b)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{b-1} \sum_{h=0}^{\infty} a_i C_{j_1, \dots, j_i} \frac{\Gamma(\lambda)(-1)^h}{\Gamma(\lambda - h)h!} \int_0^{\infty} t^{r+\beta-1} (\beta + \delta t) e^{-(b+h)\theta t^\beta} e^{\delta t + \delta t} dx.$$

Fazendo a mudança de variável

$$t = t^\beta e^{\delta t}$$

temos que

$$t = \frac{\beta}{\delta} F \left( \frac{\delta t^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} \right)$$

em que F é a função W de Lambert. A história da função remonta a J. H. Lambert (1728-1777). Usaremos a seguinte expansão para esta função:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^{k-2} z^k}{(k-1)!}.$$

Disto temos que

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^{k-2}}{(k-1)!} \left( \frac{\delta}{\beta} \right)^{k-1} t^{\frac{k}{\beta}}$$

e

$$t^r = \left( \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{\frac{k}{\beta}} \right)^r = \sum_{k_1, \dots, k_r}^{\infty} D_{k_1, \dots, k_r} t^{\frac{s_k}{\beta}}$$

com

$$d_k = \frac{(-1)^{k+1} k^{k-2}}{(k-1)!} \left( \frac{\delta}{\beta} \right)^{k-1},$$

$$D_{k_1, \dots, k_r} = d_1 \cdot \dots \cdot d_r$$

e

$$s_k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$$

$$E[t^r] = \frac{\theta \log(\alpha)}{(\alpha - 1)B(a, b)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{b-1} \frac{(1-\lambda)_h}{h!} a_i C_{j_1, \dots, j_i} D_{k_1, \dots, k_r} \int_0^{\infty} t^{\frac{s_k}{\beta}} e^{-(b+h)\theta t} dt \quad (4.4)$$

em que  $(1-\lambda)_h$  é o símbolo de Pochhammer (SPANIER; OLDHAM, 1987). A última parte de (4.4) é similar à função gama. A expansão para o momento de ordem r da APBMW é dada por

$$E[t^r] = \frac{\theta \log(\alpha)}{(\alpha - 1)B(a, b)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_i=0}^{b-1} \frac{(1-\lambda)_h \Gamma(\frac{s_k}{\beta} + 1)}{h!} a_i C_{j_1, \dots, j_i} D_{k_1, \dots, k_r} \left( \frac{1}{(b+h)\theta} \right)^{\frac{s_k}{\beta} + 1}.$$

### 4.3 Estimação por Máxima Verossimilhança

Seja  $t_1, t_2, \dots, t_n$  uma amostra de tamanho  $n$  retirada de uma distribuição APBMW( $\alpha, \beta, \delta, \theta, a, b$ ). A função de log-verossimilhança para o vetor de parâmetros  $\xi = (\alpha, \beta, \delta, \theta, a, b)$  é definida como:

$$\begin{aligned} \ell(\xi) = & (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \log(\beta + \delta t_i) + (a - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\theta z_i}) - b\theta \sum_{i=1}^n (z_i + \delta t_i) + \\ & + n(\log(\theta) - \log(B(a, b)) - \log(\alpha - 1) + \log(\log(\alpha))) + \log(\alpha) \sum_{i=1}^n I_{H(t_i, \xi)}(a, b) \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que  $z_i = x_i^\beta e^{\delta t_i}$ .

Para maximizarmos esta função, devemos utilizar métodos numéricos, tais como Newton-Raphson, BFGS, entre outros, pois ela não tem solução algébrica. Ainda é possível encontrar o máximo de (4.5) resolvendo o sistema de equações obtido ao derivar (4.5) em relação ao vetor  $\xi$  de parâmetros. As componentes do vetor gradiente  $U(\xi)$  são:

$$U_\alpha = \frac{n}{\alpha \log(\alpha)} - \frac{n}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n I_{H(t_i, \xi)}(a, b)$$

$$\begin{aligned} U_\beta = & \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\beta + \delta t_i} \right] + \theta(a - 1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{z_i e^{-\theta z_i} \log(t_i)}{1 - e^{-\theta z_i}} \right] - b\theta \sum_{i=1}^n (z_i \log(t_i)) + \\ & + \frac{\theta \log(\alpha)}{B(a, b)} \sum_{i=1}^n \left[ (1 - e^{-z_i})^{a-1} z_i \log(t_i) e^{-b z_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\delta = & \sum_{i=1}^n \left[ \frac{t_i}{\beta + \delta t_i} \right] + \sum_{i=1}^n t_i + (a - 1)\theta \sum_{i=1}^n \left[ \frac{t_i z_i e^{-\theta z_i}}{1 - e^{-\theta z_i}} \right] - b\theta \sum_{i=1}^n t_i (z_i + 1) + \\ & + \frac{\theta \log(\alpha)}{B(a, b)} \sum_{i=1}^n \left[ (1 - e^{-\theta z_i})^{a-1} t_i z_i e^{-b\theta z_i} \right] \end{aligned}$$

$$U_\theta = \frac{n}{\theta} + (a - 1) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{z_i e^{-\theta z_i}}{1 - e^{-\theta z_i}} \right] - b \sum_{i=1}^n (z_i + \delta t_i) + \frac{\log(\alpha)}{B(a, b)} \sum_{i=1}^n \left[ (1 - e^{-\theta z_i})^{a-1} z_i e^{-b\theta z_i} \right]$$

$$\begin{aligned} U_a = & n(\psi(a+b) - \psi(a)) + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\theta z_i}) + \frac{\log(\alpha)}{B(a, b)} \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{H_{t_i}(a, b)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} \log(\omega) d\omega - \right. \\ & \left. - (\psi(a) - \psi(a+b)) \int_0^{H_{t_i}(a, b)} \omega^{a-1} (1 - \omega)^{b-1} d\omega \right] \end{aligned}$$

$$U_b = n(\psi(a+b) - \psi(b)) - \theta \sum_{i=1}^n (z_i + \delta x_i) + \frac{\log(\alpha)}{B(a, b)} \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{H_{t_i}(a, b)} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} \log(1-\omega) d\omega - (\psi(b) - \psi(a+b)) \int_0^{H_{t_i}(a, b)} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega \right]$$

em que  $\phi(\cdot)$  é a função digamma.

#### 4.4 Função quantílica (qf)

As funções quantílicas (qf) são usadas largamente na Estatística para encontrar os valores dos percentis da distribuição desejada. A qf da distribuição APBMW,  $Q_p(u) = G^{-1}(t)$ , pode ser representada em função da qf da distribuição beta.

Escreveremos (3.14) como:

$$F(t) = I_{R(t)}(a, b),$$

em que

$$R(t) = 1 - \exp \left\{ -\theta t^\beta \exp[\delta t] \right\}. \tag{4.6}$$

Sharma e Chakrabarty (2017) mostraram que

$$Q_p(u) = Q_1(I_p^{-1}(a, b)),$$

em que  $Q_1(\cdot)$  é a inversa de  $F(\cdot)$  e  $I_p^{-1}(a, b)$  é a qf da distribuição beta.

A inversa da fda  $G(t)$  da APT é

$$t_{APT} = F^{-1} \left[ \frac{\log[U(\alpha - 1) + 1]}{\log(\alpha)} \right].$$

A inversa de  $R(t)$  é

$$t = \frac{\beta}{\delta} W \left\{ \frac{\delta}{\beta} \left[ -\frac{\log(1-p)}{\theta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\} = Q_1(p),$$

em que  $W(\cdot)$  é a função  $W$  de Lambert.

Portanto

$$Q_F(p) = \frac{\beta}{\delta} W \left\{ \frac{\delta}{\beta} \left[ -\frac{\log(1 - I_p^{-1}(a, b))}{\theta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\}.$$

Disto temos que

$$t_{APBMW} = \frac{\beta}{\delta} W \left\{ \frac{\delta}{\beta} \left[ -\frac{\log(1 - I_p^{-1}(a, b))}{\theta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\},$$

em que

$$p = \frac{\log[U(\alpha - 1) + 1]}{\log(\alpha)} \text{ e } U \sim \mathcal{U}(0, 1).$$

A expressão  $t_{APBMW}$  permite que sejam geradas observações da distribuição APBMW, sendo útil em estudos de simulação.

As Figuras (13), (14) e (15) comparam as densidades teórica e amostral da APBMW para alguns valores de parâmetros.

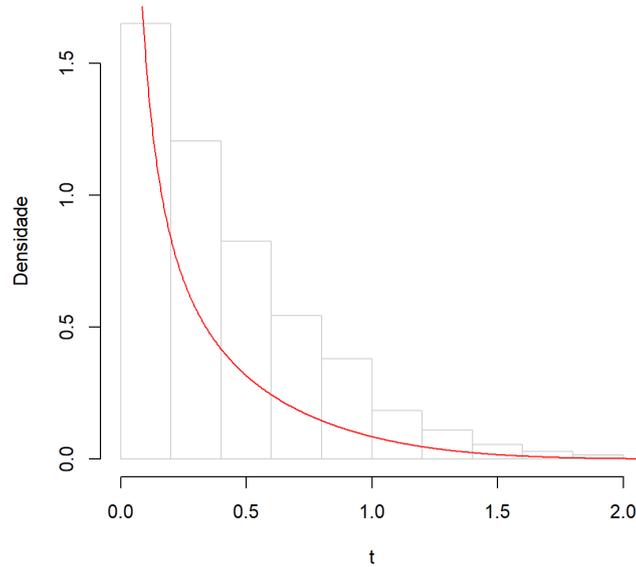


Figura 13 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para  $\alpha = 2, \beta = 0.5, \delta = 0.5, \theta = 2, a = 0.5$  e  $b = 1$

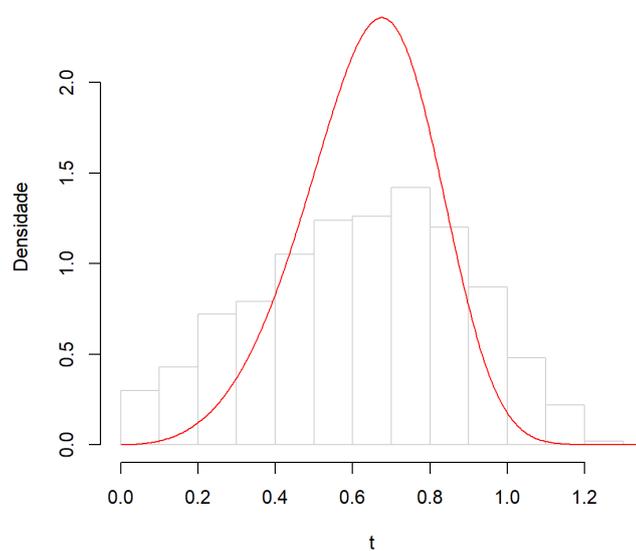


Figura 14 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para  $\alpha = 1.5, \beta = 2, \delta = 2, \theta = 0.5, a = 1.5$  e  $b = 1.5$

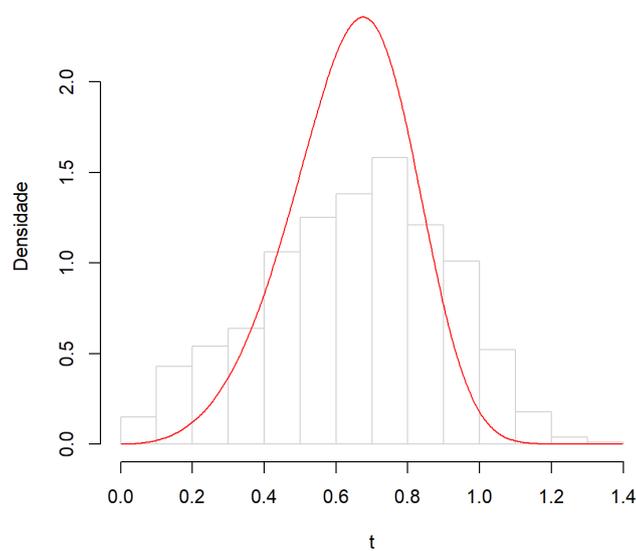


Figura 15 – Comparação da densidade teórica da APBMW com a densidade amostral para  $\alpha = 1.5, \beta = 2, \delta = 2, \theta = 0.5, a = 2$  e  $b = 2$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma nova distribuição com seis parâmetros derivada da Beta Weibull Modificada (BMW) (SILVA; ORTEGA; CORDEIRO, 2010). O novo modelo proposto amplia a quantidade de distribuições teóricas possíveis a serem utilizadas na literatura, além de manter as características da função taxa de falha da BMW. A APBMW também possui vários casos especiais e comporta múltiplas formas da função taxa de falha (constante, crescente, decrescente, forma de banheira, etc.). Foram demonstradas expansões para as funções de distribuição acumulada, de densidade e geradora de momentos, esta última restrita à condição de  $b \in \mathbb{N}$ . As simulações e aplicações da APBMW tiveram um grau de dificuldade elevado e não foi possível apresentar estes resultados. Por ele ser um modelo com muitos parâmetros, é possível que haja problemas de identificabilidade nos parâmetros. Além disso, acredita-se que o maior problema é a condição de  $\alpha = 1$  ou  $\alpha \neq 1$ . Para o seguimento deste trabalho, espera-se que seja possível realizar cenários de simulação em que possam ser avaliados possíveis problemas de identificabilidade e se a restrição do valor de  $\alpha$  é um problema em potencial. Além disso, espera-se usar a nova distribuição para modelar dados reais.

## REFERÊNCIAS

- AARSET, M. V. How to identify a bathtub hazard rate. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 36, n. 1, p. 106–108, 1987.
- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **Metron**, Springer, v. 71, n. 1, p. 63–79, 2013.
- ARYAL, G. R.; TSOKOS, C. P. Transmuted weibull distribution: A generalization of the weibull probability distribution. **European Journal of pure and applied mathematics**, v. 4, n. 2, p. 89–102, 2011.
- CARRASCO, J. M.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M. A generalized modified weibull distribution for lifetime modeling. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 450–462, 2008.
- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de sobrevivência aplicada**. [S.l.]: Editora Blucher, 2006.
- CORDEIRO, G. M.; HASHIMOTO, E. M.; ORTEGA, E. M. The mcdonald weibull model. **Statistics**, Taylor & Francis, v. 48, n. 2, p. 256–278, 2014.
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M.; POPOVIĆ, B. V. The gamma-lomax distribution. **Journal of Statistical computation and Simulation**, Taylor & Francis, v. 85, n. 2, p. 305–319, 2015.
- CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; SILVA, G. O. Modelos de regressão de sobrevivência estendidos. In: **Escola de Modelos de Regressão**. [S.l.]: UFC/DEMA/ABE, 2011.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics-Theory and methods**, Taylor & Francis, v. 31, n. 4, p. 497–512, 2002.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Theory & methods: Generalized exponential distributions. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and weibull distributions. **Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences**, Wiley Online Library, v. 43, n. 1, p. 117–130, 2001.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. A new class of weighted exponential distributions. **Statistics**, Taylor & Francis, v. 43, n. 6, p. 621–634, 2009.
- LAWLESS, J. F. **Statistical models and methods for lifetime data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 362.
- LEE, C.; FAMOYE, F.; OLUMOLADE, O. Beta-weibull distribution: some properties and applications to censored data. **Journal of modern applied statistical methods**, v. 6, n. 1, p. 17, 2007.

- MAGUIRE, B. A.; PEARSON, E.; WYNN, A. The time intervals between industrial accidents. **Biometrika**, JSTOR, v. 39, n. 1/2, p. 168–180, 1952.
- MAHDAVI, A.; KUNDU, D. A new method for generating distributions with an application to exponential distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 46, n. 13, p. 6543–6557, 2017.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FREIMER, M. The exponentiated weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 37, n. 4, p. 436–445, 1995.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta exponential distribution. **Reliability engineering & system safety**, Elsevier, v. 91, n. 6, p. 689–697, 2006.
- NASSAR, M. et al. Alpha power weibull distribution: Properties and applications. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 46, n. 20, p. 10236–10252, 2017.
- ROSS, S. M. **A first course in probability**. [S.l.]: Pearson, 2014.
- SHARMA, D.; CHAKRABARTY, T. K. Some general results on quantile functions for the generalized beta family. **Statistics, Optimization & Information Computing**, v. 5, n. 4, p. 360–377, 2017.
- SILVA, G. O.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M. The beta modified weibull distribution. **Lifetime data analysis**, Springer, v. 16, n. 3, p. 409–430, 2010.
- SPANIER, J.; OLDHAM, K. B. **An atlas of functions**. [S.l.]: Taylor & Francis/Hemisphere, 1987.
- STACY, E. W. A generalization of the gamma distribution. **The Annals of mathematical statistics**, JSTOR, p. 1187–1192, 1962.
- ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. **Statistical methodology**, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 344–362, 2009.