



Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

**MODELAGEM FUZZY DE COMPONENTES
DETERMINÍSTICOS PARA PREVISÃO DE
SÉRIES TEMPORAIS**

Marcos Vinícius dos Santos Ferreira

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Salvador
10 de março de 2021

MARCOS VINÍCIUS DOS SANTOS FERREIRA

**MODELAGEM FUZZY DE COMPONENTES DETERMINÍSTICOS
PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS**

Esta Dissertação de Mestrado foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Araújo Rios
Co-orientadora: Profa. Dra. Tatiane Nogueira Rios

Salvador
10 de março de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI - UFBA.

F383 Ferreira, Marcos Vinícius dos Santos

Modelagem fuzzy de componentes determinísticos para
previsão de séries temporais / Marcos Vinícius dos Santos
Ferreira – Salvador, 2019. 63p.: il.

182 f.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Araújo Rios.

Co-orientadora: Prof^a Dr^a Tatiane Nogueira Rios.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia,
Instituto de Matemática, 2019.

1. Sistemas Difusos. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Análise de
Sistemas. I. Rios, Ricardo Araújo. II. Rios, Tatiane Nogueira.
III. Universidade Federal da Bahia. IV. Título.

CDU 681.5

TERMO DE APROVAÇÃO

MARCOS VINÍCIUS DOS SANTOS FERREIRA

MODELAGEM FUZZY DE COMPONENTES DETERMINÍSTICOS PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal da Bahia.

Salvador, 27 de Julho de 2020

Prof. Dr. Ricardo Araújo Rios
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Rodrigo Fernandes de Mello
Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Heloisa Arruda Camargo
Universidade Federal de São Carlos

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por conceder a realização deste trabalho. A ele, toda a gratidão. A minha família, em especial aos meus pais, Josué Ferreira e Maria da Paz dos Santos Ferreira por serem a base de tudo, pelo incentivo e trabalho de ambos cheguei até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Rios e minha co orientadora Dra. Tatiane Nogueira Rios, por todos os ensinamentos, incentivo e instruções para concluir esse trabalho com êxito e excelente experiência.

A toda a família de seu Alberto, que se tornou a minha segunda família em Salvador. A Dra. Mônica (mamacita) e Marcelo (pitbull), por todo o apoio e instrução.

Aos membros do grupo de pesquisa AI love coffee, bem como todos os colegas da turma 2018.1 do PGCOMP, em especial, aos meus amigos Ronaldo, Cintia, Railana, Renato, Mirlei, Fernanda e Igo.

Agradeço ainda, ao Programa de Pós Graduação em Ciência da Computação pela oportunidade e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro à realização desse trabalho.

Sua única limitação é aquela que você impõe em sua própria mente.

—NAPOLEON HILL (1883-1970)

RESUMO

A modelagem de dados no domínio temporal tem sido aplicada na modelagem de diferentes sistemas do mundo real como, por exemplo, meteorologia, engenharia, medicina e economia. Neste sentido, a área de Séries Temporais Fuzzy (*Fuzzy Time Series*) tem se destacado devido à sua capacidade de aproximar funções matemáticas por meio da criação de regras fáceis de serem interpretadas por especialistas. Como consequência dessa capacidade, é possível obter modelos mais precisos para compreender o comportamento de sistemas. Desde o surgimento de modelos de séries temporais fuzzy, pesquisadores vêm propondo melhorias a fim de, por exemplo, reduzir erros em tarefas de previsão. Em geral, tais tarefas são compostas de três etapas: (i) fuzzificação; (ii) relacionamento lógico fuzzy; e (iii) defuzzificação. De acordo com a literatura, um dos pontos mais estudados por pesquisadores é a etapa de fuzzificação, com foco no particionamento do universo do discurso para modelagem dos conjuntos fuzzy. No entanto, poucos trabalhos na literatura consideram a separação de influências dos componentes estocásticos e determinísticos das séries temporais com o objetivo de auxiliar no processo de modelagem dos conjuntos fuzzy. Visando superar essa limitação, o presente trabalho apresenta duas abordagens que realizam melhorias na modelagem dos conjuntos fuzzy, especificamente na etapa de fuzzificação, por meio da análise de influências de componentes estocásticos e determinísticos presentes em séries temporais. A primeira abordagem consiste na decomposição da série separando seus componentes em diferentes níveis de influência estocástica e determinística. Em seguida, componentes são removidos, resultando em uma nova série sem influência de ruído cuja combinação com a série original produz um novo conjunto de dados bidimensional, mais adequado para estimação dos conjuntos fuzzy. A segunda abordagem, por sua vez, consiste na modelagem de séries caracterizados pela presença de comportamento determinístico. Nesse sentido, ao invés de modelar a série como um gráfico de dispersão, utilizou-se ferramentas da área de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos para reconstruir a série no espaço fase. Embora utilizem métodos distintos, as duas abordagens fazem a remoção da dependência temporal entre as observações para auxiliar no processo de modelagem dos conjuntos fuzzy, o qual é conduzido considerando o método de agrupamento Fuzzy C-Means e índices de validação de agrupamento, para estimar a quantidade de conjuntos fuzzy. Para avaliação das abordagens, foram realizados experimentos utilizando séries temporais amplamente analisadas na literatura de FTS. Os resultados atingidos foram promissores e superiores em comparação com o estado da arte.

Palavras-chave: Série Temporal *Fuzzy*, Decomposição de Séries Temporais, Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos, Conjuntos *Fuzzy*, Fuzzy C-Means, Previsão.

ABSTRACT

The modeling of datasets by taking into account the temporal information has been widely applied to different systems such as meteorology, engineering, medicine, and economics. In this sense, the Time Series Fuzzy (FTS) area has called the attention of researchers focused on approximating mathematical functions using linguistic variables to create interpretative rules, which are easier to be understood by specialists. As a consequence, more accurate models might be obtained to describe system behavior. Nowadays, several researches have been proposed aiming at, for example, reducing errors in the forecasting tasks. In this sense, one of the most explored area is the modeling of fuzzy sets, focused on partitioning the universe of discourse. However, we have noticed there is a gap not investigated so far: the analysis of stochastic and deterministic influences on time series observations. In this sense, to overcome this limitation, we present two approaches designed to improve the preprocessing and fuzzification stage. The first one takes into account the Empirical Mode Decomposition method to remove stochastic influences, considered in this work as noise. Then, the smoothed time series is used along with the original one to create a new dataset, similar to a scatter plot. This new dataset emphasizes the data distribution, thus making it more appropriated to be later used to estimate fuzzy sets. Although this first approach has presented important results, we have noticed it was not suitable when time series were also characterized by chaotic behavior. This observation has motivated us to build up a second approach, which uses tools usually considered in the Dynamical Systems and Chaos Theory area. In summary, both approaches, firstly, transform the time series into a new dataset to be, in the next step, analyzed by Fuzzy C-Means, which is responsible for estimating the fuzzy sets. The proposed approaches were assessed in forecasting tasks, by using several time series commonly considered in the FTS literature. Our experiments provided outstanding results, thus demonstrating the importance of our approaches to the state of the art.

Keywords: Fuzzy Time Series, Forecasting, Fuzzy Sets, Clustering, Size and Length of Intervals.

SUMÁRIO

Capítulo 1—Introdução	1
1.1 Contextualização e Motivação	1
1.2 Hipótese e Objetivo	2
1.3 Organização	4
Capítulo 2—Fundamentação Teórica	5
2.1 Série Temporal: visão geral	5
2.1.1 Empirical Mode Decomposition	7
2.1.2 Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos	8
2.2 Teoria de Conjuntos Fuzzy	9
2.2.1 Conjuntos <i>Fuzzy</i>	9
2.2.2 Regras Fuzzy	13
2.2.3 Agrupamento Fuzzy C-Means	14
2.2.3.1 Índices de Validação	14
2.3 Série Temporal <i>Fuzzy</i>	15
Capítulo 3—Estado da Arte	23
3.1 Comprimento dos Intervalos <i>Fuzzy</i>	23
3.2 Considerações Finais	27
Capítulo 4—Abordagens Propostas	29
4.1 Visão Geral	29
4.2 Metodologia	29
Capítulo 5—Experimentos e Resultados	33
5.1 Considerações Iniciais	33
5.2 Abordagem 01 – Filtered Fuzzy Time Series (<i>f</i> -FTS)	34
5.2.1 Exemplo Ilustrativo	34
5.2.1.1 Etapa 01 – Remoção de Ruído e da Dependência Temporal.	34
5.2.1.2 Etapa 02 – Modelagem dos conjuntos Fuzzy.	35
5.2.1.3 Etapa 03 – Relacionamento Lógico Fuzzy.	36
5.2.1.4 Etapa 04 – Defuzzificação.	37
5.2.2 Configuração da Simulação Completa	37
5.2.3 Comparação com o Estado da Arte	38

5.2.4	Avaliação de agrupamento	39
5.2.5	Avaliação empírica	40
5.2.6	Discussão	41
5.3	Abordagem 02 – Fuzzy Dynamical Time Series (FDynTS)	43
5.3.1	Configuração dos Experimentos	44
5.3.2	Resultados	45
5.3.3	Discussão	47
Capítulo 6—Conclusão		57

LISTA DE FIGURAS

2.1	Componentes da Série Temporal. A série superior T_t representa a tendência, em seguida S_t representa a sazonalidade, e ε_t representa o componente aleatório ou ruído.	6
2.2	Série Estacionária e Não Estacionária	7
2.3	Ilustração de conjuntos clássicos (a) e conjuntos fuzzy (b) para a variável linguística temperatura.	9
2.4	Funções de Pertinência Triangular (a), Trapezoidal (b) e Gaussiana (c).	10
2.5	Operações padrão em conjuntos <i>fuzzy</i>	11
2.6	Representação da Série Temporal <i>Fuzzy</i>	16
2.7	Configuração do modelo FTS para tarefa de previsão.	19
4.1	Passos adotados para desenvolvimento das abordagens propostas.	31
4.2	Fluxograma da metodologia utilizada para avaliar abordagens desenvolvidas.	31
5.1	Decomposição utilizando o EMD.	34
5.2	(a) Série Temporal de Matrículas da Universidade do Alabama $X(t)$ (Matrícula) e sua versão suavizada $X'(t)$. (b) Resultado do agrupamento do FCM.	35
5.3	(a) Visualização das funções de pertinência do FCM no plano multi-dimensional. (b) Representação das funções em duas dimensões.	36
5.4	Resultado da previsão em (a) e a matrix de custo DTW com a linha diagonal no <i>warping path</i> em (b).	38
5.5	Séries Temporais com comportamento caótico utilizadas para avaliar a abordagem FDynTS.	43
5.6	Reconstrução das séries no Espaço Fase. Cada série forma um atrator que pode evidenciar como as observações evoluem ao longo do tempo, facilitando a obtenção de regras geradoras de sistemas dinâmicos.	44
5.7	Resultado de previsão com 3 conjuntos fuzzy para série de Lorenz para as abordagens propostas <i>f</i> -FTS (IMFS) e FDynTS (DS).	46
5.8	Resultado de previsão com 9 conjuntos fuzzy para série de Lorenz para as abordagens propostas <i>f</i> -FTS (IMFS) e FDynTS (DS).	47
5.9	Resultado de previsão com 3 conjuntos fuzzy para série de Rössler para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	49
5.10	Resultado de previsão com 9 conjuntos fuzzy para série de Rössler para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	50
5.11	Resultado de previsão com 3 grupos para série de Hénon para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	51

5.12	Resultado de previsão com 9 grupos para série de Hénon para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	52
5.13	Resultado de previsão com 3 grupos para série do mapa Logístico para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	54
5.14	Resultado de previsão com 9 grupos para série do mapa Logístico para as abordagens propostas, estocástica e determinística.	55

LISTA DE TABELAS

3.1	Sumarização dos trabalhos relacionados.	28
5.1	Matrículas da Universidade do Alabama.	36
5.2	Relacionamentos Lógicos Fuzzy obtidos a partir da série de matrículas da Universidade do Alabama.	37
5.3	Grupos de Relacionamentos Lógicos Fuzzy obtidos para a série de matrículas na Universidade do Alabama.	37
5.4	Comparação dos resultados obtidos com diferentes abordagens utilizando 7 grupos	39
5.5	Estimativa da quantidade de conjuntos fuzzy	40
5.6	Previsão de temperatura da cidade de Cananeia	41
5.7	Previsão da produção física industrial	41
5.8	Previsão do Ibovespa	41
5.9	Resultados de Previsão para série de Lorenz.	45
5.10	Resultados de Previsão para série gerada pelo sistema de Rössler.	48
5.11	Resultados de Previsão para série gerada pelo mapa de Hénon.	48
5.12	Resultados de Previsão para série produzida pelo mapa Logístico.	53

LISTA DE SIGLAS

AMI	<i>Auto Mutual Information</i>	8
DTW	<i>Dynamic Time Warping</i>	30
EMD	<i>Empirical Mode Decomposition</i>	7
FCM	<i>Fuzzy C-Means</i>	14
FDynTS	<i>Fuzzy Dynamical Time Series</i>	30
f-FTS	<i>Filtered Fuzzy Time Series</i>	34
FLR	<i>Fuzzy Logical Relationship</i>	2
FLRG	<i>Fuzzy Logical Relationship Group</i>	20
FNN	<i>False Nearest Neighbors</i>	8
FTS	<i>Fuzzy Time Series</i>	1
FTSGA	<i>Fuzzy Time Series Genetic Algorithm</i>	25
GG	<i>Gath and Geva</i>	26
IMFs	<i>Intrinsic Mode Functions</i>	7
LHS	<i>left-hand side</i>	20
MEPA	<i>Minimize Entropy Principle Approach</i>	24
MPC	<i>Modified Partition Coefficient</i>	30
MSE	<i>Mean Squared Error</i>	24
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>	25
RHS	<i>right-hand side</i>	20
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>	25
RNA	<i>Redes Neurais Artificiais</i>	26
SF	<i>Silhueta Fuzzy</i>	30
SVM	<i>Support Vector Machine</i>	25
TFA	<i>Trapezoid Fuzzification Approach</i>	24
WLI	<i>Wu-and-Li index</i>	30
XB	<i>Xie And Beni Index</i>	30

INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

Série temporais são amplamente utilizadas para organizar conjuntos de observações coletadas ao longo do tempo, visando, por exemplo, realizar tarefas de previsão, estimação de funções de transferência, análise de efeitos na intervenção de eventos e controle de sistemas (MORETTIN; TOLOI, 2006; BOX; JENKINS, 1990).

No contexto desta pesquisa, optou-se por explorar tarefas de previsão, as quais modelam observações coletadas em instantes passados a fim de estimar o comportamento de sistemas, e suas saídas, em instantes futuros. Em geral, essa modelagem considera diferentes comportamentos estatísticos das séries temporais como a estacionariedade, a estocasticidade e a linearidade.

Previsões que modelam o comportamento estacionário nas séries assumem que suas observações se encontram em um estado particular de equilíbrio estatístico, ou seja, elas se desenvolvem no tempo em torno de uma média constante (MORETTIN; TOLOI, 2006; BOX; JENKINS, 1990). Por outro lado, séries com comportamento estocástico têm suas observações modeladas considerando relações aleatórias que seguem funções de densidade de probabilidade, podendo se modificar ao longo do tempo. O uso de modelos lineares na previsão de séries consideram que suas observações são compostas por uma combinação linear de ocorrências e ruídos passados.

Considerando tais comportamentos, pode-se afirmar que a modelagem de séries temporais é caracterizada por 3 limitações principais: (i) identificação desses comportamentos em suas observações; (ii) estimação das influências de cada aspecto no comportamento geral da série; e (iii) escolha das ferramentas apropriadas para cada modelo.

Visando superar essas limitações, pesquisadores têm optado pelo uso de modelos para Séries Temporais Fuzzy (do inglês, *Fuzzy Time Series (FTS)*), propostos por Song e Chissom (1993b), os quais fornecem ferramentas que combinam as áreas de análise de séries temporais e de teoria de conjuntos fuzzy. A principal vantagem fornecida pelos modelos FTS é a possibilidade de tratar imprecisão e incertezas presentes nos dados e, conseqüentemente, realizar previsões mais robustas e precisas.

Na prática, a utilização de modelos FTS possibilitou a solução de problemas de previsão em diferentes domínios, como pode ser observado em (CHEN, 1996), (HUARNG, 2001b), (HUARNG; YU, 2005), (SONG; CHISSOM, 1993b), (SONG; CHISSOM, 1993a), (SONG; LELAND; CHISSOM, 1995), (HSU; TSE; WU, 2003), (HUARNG, 2001b), (HUARNG; YU, 2005), (WU; HSU, 2002), (YU, 2005a), e (CHEN; HWANG, 2000). De maneira geral, nesses trabalhos, modelos FTS foram utilizados devido à sua capacidade de previsão por meio de regras interpretáveis e acessíveis à análise de especialistas. Mesmo com bons resultados, pesquisadores vêm propondo melhorias no modelo para reduzir erros de previsão.

Em tarefas de previsão, o modelo FTS pode ser resumido em três etapas: fuzzificação, geração de relacionamentos lógicos fuzzy (do inglês, *Fuzzy Logical Relationship* (FLR)) e defuzzificação. Na etapa de fuzzificação, tem-se por objetivo utilizar conjuntos fuzzy para modelar o universo do discurso, i.e., o domínio dos valores das observações da série. Nos relacionamentos lógicos fuzzy, os conjuntos fuzzy são utilizados para formar regras fuzzy que descrevem padrões temporais entre as observações. Por fim, na etapa de defuzzificação, resultados de inferências realizadas sobre conjuntos fuzzy são convertidos em valores numéricos que representam, de fato, as previsões.

Publicações realizadas sobre FTS evidenciam que grande parte dos trabalhos existentes na literatura propuseram suas contribuições na etapa de fuzzificação, com foco na determinação de comprimentos de intervalos para modelar conjuntos fuzzy. Formalmente, os conjuntos fuzzy são compostos por funções de pertinência obtidas a partir de algum universo de discurso. Apesar dos conjuntos fuzzy utilizarem lógica multivalorada, sua teoria assume que o universo de discurso é bem definido e seus elementos são atribuídos a classes conhecidas por meio de uma escala numérica. É exatamente essa característica que tem motivado estudos recentes que visam a utilização de conjuntos fuzzy para dividir o universo de discurso de séries temporais em áreas que permitam definir seus comportamentos (SONG; CHISSOM, 1993b; HUARNG; YU, 2006b; HUARNG, 2001a; KUO et al., 2009a; EGRIOGLU et al., 2011; WANG et al., 2014). Busca-se, assim, extrair regras através de padrões temporais presentes nessas séries, com o intuito de encontrar uma representação com variáveis linguísticas ao invés da típica notação numérica, a qual mantém a incerteza e/ou a imprecisão, tal como evidenciado em (LIU; WEI; YANG, 2009).

Tais incertezas e imprecisões são decorrentes da alta dependência que os modelos de séries temporais apresentam em relação aos valores das observações, o que leva à perda de acurácia de métodos tradicionais (HEGGER; KANTZ; SCHREIBER, 1999). Em contrapartida, quando os valores observados são representados por conjuntos fuzzy, este problema é amenizado, visto que representações linguísticas produzem “vocabulários” suficientes para a modelagem de comportamentos.

1.2 HIPÓTESE E OBJETIVO

A modelagem de FTS requer uma análise rigorosa sobre a forma como são gerados os conjuntos fuzzy e as regras fuzzy devido ao impacto direto no resultado da previsão (HUARNG, 2001a; YU, 2005a; CHEN; KAO, 2013). Nesse sentido, grande partes dos tra-

balhos publicados na literatura de FTS realizaram esforços na determinação dos comprimentos de intervalos para auxiliar na modelagem dos conjuntos fuzzy. Entretanto, um fator que antecede a determinação do comprimento dos intervalos é a estimação da quantidade de conjuntos fuzzy. Tal fator foi pouco explorado na literatura e tem grande impacto no resultado final da modelagem dos conjuntos fuzzy.

A importância dessa estimação é evidenciada por duas razões principais. Primeiro, se a estimação da quantidade de conjuntos fuzzy não for bem estimada, eles podem não refletir adequadamente a distribuição dos dados, afetando a definição dos comprimentos dos intervalos. Segundo, se os comprimentos dos intervalos não forem bem definidos, eles podem levar a uma modelagem errônea dos conjuntos fuzzy, não representando adequadamente o universo do discurso da série temporal. Além de considerar o impacto desses fatores na etapa de fuzzificação, o presente estudo observou que, na literatura, a remoção da dependência temporal entre as observações das séries, considerando diferentes influências estocásticas e determinísticas, não foi explorada para auxiliar no processo de modelagem dos conjuntos fuzzy.

Desta forma, a estimação da quantidade e modelagem de conjuntos fuzzy constituem problemas em aberto e que levou a construção da seguinte hipótese:

A remoção da dependência temporal e a análise das influências estocásticas e determinísticas em séries temporais permitem que conjuntos fuzzy representem, de maneira mais adequada, o universo de discurso destas séries e, conseqüentemente, reduzam erros de previsão.

Para validar esta hipótese, nesse trabalho, foram desenvolvidas duas abordagens de previsão que atingiram resultados promissores. A primeira abordagem é voltada para séries com influências estocásticas. Nessa abordagem, utilizou-se o método *Empirical Mode Decomposition* (EMD) para extrair das séries analisadas um conjunto de componentes com diferentes níveis estocasticidade. Após a análise desses componentes, aqueles com maiores influências estocásticas foram, então, removidos mantendo apenas a influência determinística. Como consequência, essa transformação permitiu utilizar modelos FTS com maior precisão, visto que a influência de ruídos é filtrada da série analisada. A segunda abordagem é voltada para a modelagem de séries com comportamento determinístico e caótico. Nesse sentido, utilizou-se ferramentas da área de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos para reconstruir as séries analisadas em um espaço de maior dimensão. Com essa reconstrução, a abordagem proposta foi capaz de remover a dependência temporal entre as observações, possibilitando estudar comportamentos implícitos (e.g. atratores e repulsores) que determinam, com maior precisão, a evolução das observações ao longo do tempo.

De maneira geral, após aplicar as duas abordagens, o próximo passo é a estimação da quantidade de conjuntos fuzzy através de índices de validação de agrupamento. Em seguida os conjuntos fuzzy são modelados em formato de funções gaussianas por meio da aplicação do agrupamento Fuzzy C-Means (BEZDEK, 1981). Após realizar essa etapa de fuzzificação, o presente trabalho utiliza de métodos bem conhecidos de relacionamentos lógicos fuzzy e defuzzificação para validar a etapa de fuzzificação na tarefa de previsão.

Experimentos foram conduzidos comparando as abordagens propostas com o estado da arte e os resultados demonstraram que as abordagens propostas apresentaram os menores erros em diferentes cenários.

De maneira resumida, as principais contribuições da pesquisa foram: (i) redução da imprecisão e incerteza nos dados utilizando as ferramentas de sistemas dinâmicos e teoria do caos, bem como a decomposição com o *Empirical Mode Decomposition*; (ii) estimação da quantidade de conjuntos fuzzy com índices de validação de agrupamento; (iii) nova forma de modelagem dos conjuntos fuzzy com base no resultado do agrupamento Fuzzy C-Means.

1.3 ORGANIZAÇÃO

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos para compreender o problema de pesquisa (Séries Temporais, Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e *Fuzzy Time Series*). No Capítulo 3 são apresentados trabalhos relacionados com a etapa de fuzzificação, os quais exploram a determinação da quantidade e comprimentos dos intervalos para modelagem dos conjuntos fuzzy. No Capítulo 4 são apresentadas duas abordagens desenvolvidas a partir do estudo inicial da hipótese. No Capítulo 5 são apresentados os experimentos e resultados obtidos com as duas abordagens propostas, e por fim o Capítulo 6 apresentam as conclusões.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SÉRIE TEMPORAL: VISÃO GERAL

Uma série temporal é constituída por um conjunto de observações que podem ser organizadas na forma $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ (MORETTIN; TOLOI, 2006; BOX; JENKINS, 1990; ADHIKARI; AGRAWAL, 2013). Conforme brevemente discutido na introdução, séries temporais são utilizadas na modelagem de sistemas visando realizar 4 objetivos principais (BOX; JENKINS, 1990): previsão, estimação de funções de transferência, análise de efeitos na intervenção de eventos e controle de sistemas.

Em tarefas de previsão, foco desta pesquisa de mestrado, ferramentas disponíveis na literatura visam modelar n observações coletadas em instantes passados ($\{x_{t-n-1}, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t\}$) para estimar o comportamento de sistemas, e suas saídas, em l instantes futuros ($\{x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+l}\}$), também conhecidos como “*lead time*”. O principal objetivo dessas ferramentas é reduzir, ao máximo, a diferença entre os valores observados $\{x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+l}\}$ e os preditos $\{\hat{x}_{t+1}, \hat{x}_{t+2}, \dots, \hat{x}_{t+l}\}$. Para encontrar funções com maior precisão, é necessário definir riscos associados à cada decisão de previsão, os quais são expressos por limites, inferior e superior, de probabilidade. Quanto maior o número de observações preditas, maior a distância entre os limites inferior e superior, reduzindo, assim, a acurácia da função de previsão. Em geral, a escolha do limite e do total de observações a serem preditas, l , depende do sistema em estudo (BOX et al., 2015).

De maneira geral, as ferramentas de previsão analisam individualmente a influência dos componentes responsáveis por definir o comportamento de séries temporais. Nesse sentido, pode-se denotar uma determinada série temporal X_t pela soma de três componentes não-observáveis $X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$, no qual T_t representa a tendência, S_t a sazonalidade e ε_t um componente aleatório (MORETTIN; TOLOI, 2006). Cabe ressaltar que o componente T_t , ou tendência, representa variações no comportamento da série. O componente S_t , ou sazonalidade, indica se um determinado comportamento presente na série temporal tende a se repetir em intervalos de tempo Δt . Esses componentes, $\{T_t, S_t, \varepsilon_t\}$, são chamados de não-observáveis, pois não são coletados diretamente de um

sistema, mas sim inferidos por meio de relações temporais entre observações. A Figura 2.1 exemplifica estes componentes, os quais são comumente observados em séries temporais reais.

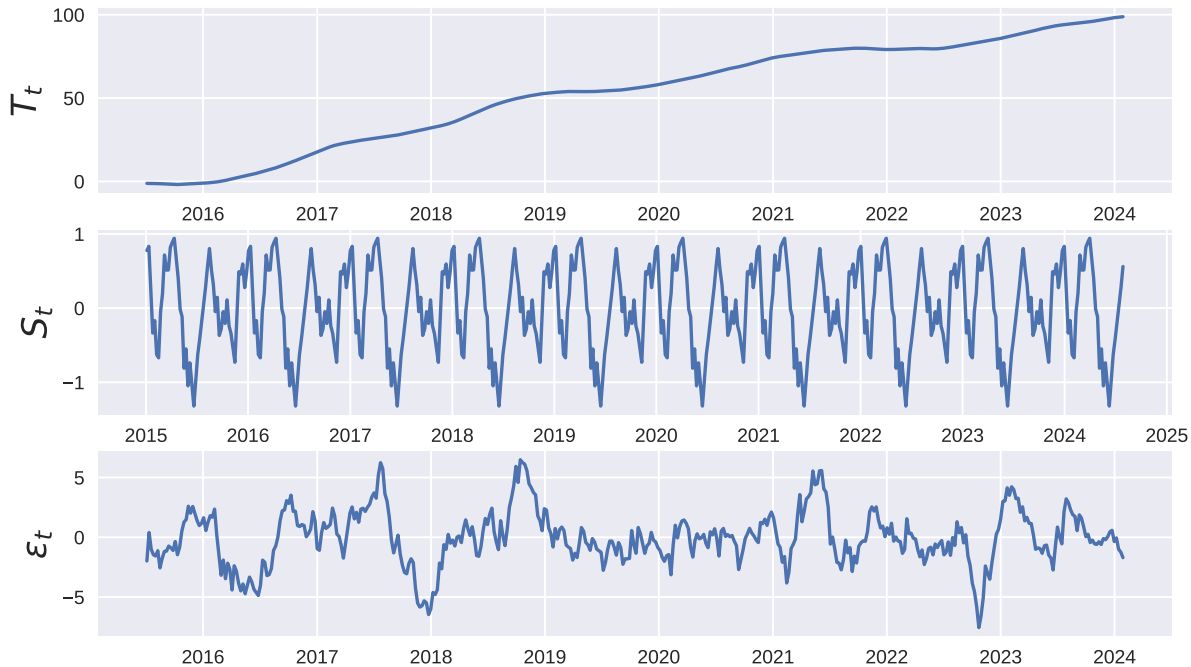


Figura 2.1 Componentes da Série Temporal. A série superior T_t representa a tendência, em seguida S_t representa a sazonalidade, e ε_t representa o componente aleatório ou ruído.

Ao compreender esses componentes, pode-se avaliar aspectos globais de séries temporais como, por exemplo, a estocasticidade, a estacionariedade e a linearidade. A compreensão correta desses aspectos é importante para determinar modelos mais precisos para séries temporais.

Séries estocásticas são constituídas por observações e relações aleatórias que seguem funções de densidade de probabilidade e podem se modificar ao longo do tempo, dificultando a modelagem de seus eventos. Em contrapartida, séries determinísticas, predominantemente, apresentam observações com estrita dependência em relação aos valores passados.

Séries temporais podem, ainda, ser subdivididas em estacionárias e não-estacionárias. Séries estacionárias encontram-se em um estado particular de equilíbrio estatístico (BOX; JENKINS, 1990), ou seja, elas se desenvolvem, aleatoriamente no tempo, em torno de uma média constante (MORETTIN; TOLOI, 2006). Séries estritamente estacionárias são aquelas cujas propriedades não são afetadas de acordo com mudanças na origem do tempo, ou seja, a função de distribuição de probabilidade conjunta, associada com t observações ($\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$), não se altera sob o deslocamento d de suas observações no tempo ($\{x_{1+d}, x_{2+d}, \dots, x_{t+d}\}$) (BOX; JENKINS, 1990). Por outro lado, uma série estocástica X_t é denominada fracamente estacionária, ou estacionária de segunda ordem, quando sua média e variância são constantes, $E(X_t) = \mu$ e $var(X_t) = \sigma^2$, e a sua

covariância é definida por $cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ (BOX; JENKINS, 1990). Geralmente, na análise e modelagem de séries temporais, tanto séries estritamente estacionárias quanto fracamente estacionárias são tratadas como estacionárias.

Séries temporais cujas observações são modeladas por processos estocásticos, que não satisfazem condições de estacionariedade, são denominadas estocásticas não-estacionárias. Geralmente, tais séries apresentam comportamento evolucionário, devido à presença de tendência, e são comumente modeladas por meio de processos explosivos (MORETTIN; TOLOI, 2006). A Figura 2.2 apresenta duas séries visando exemplificar os comportamentos estacionários e não-estacionários.

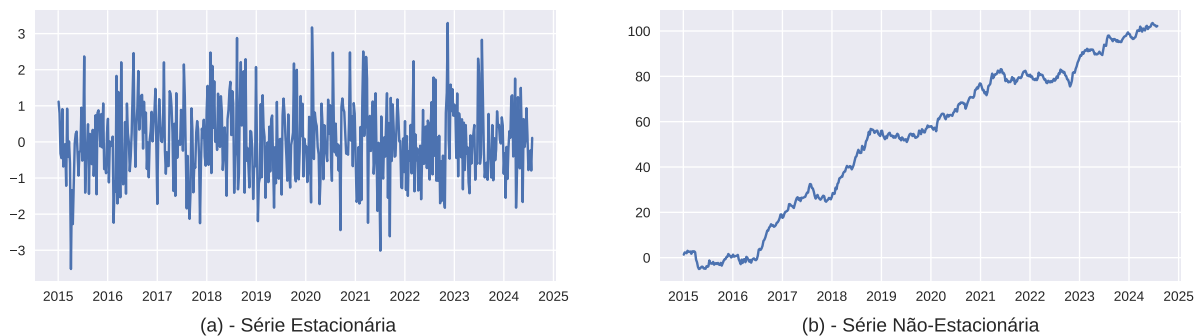


Figura 2.2 Série Estacionária e Não Estacionária

Séries temporais podem, ainda, ser classificadas, segundo a regra que define suas observações, em lineares e não-lineares. Séries temporais lineares são aquelas cujas observações são compostas por uma combinação linear de ocorrências e ruídos passados. Portanto, a linearidade de uma série está presente no modelo, mapa, ou processo que a originou. Por sua vez, séries não-lineares são formadas por processos de combinação não-linear de observações e ruídos passados.

Contudo, para obter os componentes não observáveis e inferir tais características da série temporal, pode se utilizar algumas técnicas, a depender do tipo de série, estocástica ou determinística. Considerando a proposta do presente trabalho, de contribuir com melhorias na etapa de fuzzificação do modelo Fuzzy Time Series em séries estocásticas e determinísticas, a Subseção 2.1.1 apresenta a técnica de decomposição utilizada para auxiliar nesse processo, e a Subseção 2.1.2 as ferramentas utilizadas das áreas de sistemas dinâmicos e teoria do caos para análise e modelagem de séries determinísticas.

2.1.1 Empirical Mode Decomposition

Empirical Mode Decomposition (EMD) é um método desenvolvido para decomposição de sinais em diferentes níveis de frequência chamados *Intrinsic Mode Functions* (IMFs) (HUANG et al., 1998). As IMFs podem revelar importantes características implícitas na série temporal, desde componentes estocásticos com maior frequência e menos informação mútua, a componentes determinísticos com menor frequência e maiores valores de informação mútua (RIOS; MELLO, 2016).

Para geração das IMFs, o EMD se baseia no processo chamado de *sifting*, que analisa inicialmente os valores máximos e mínimos locais de uma série temporal $X(t)$. Em seguida, o método de interpolação cúbica é aplicado nos valores máximos para produzir os envelopes superior $u(t)$ e inferior $l(t)$, usados para compor o envelope médio $m(t)$.

O passo seguinte extrai a primeira IMF $h_1(t)$ subtraindo $m(t)$ da série temporal $X(t)$. Em seguida o processo de *sifting* é repetido agora usando a IMF extraída no lugar da série $X(t)$ até atingir alguma condição de parada, que pode ser: (i) a média $m(t) = 0 \quad \forall t$; ou (ii) o número de extremos e o número de cruzamentos zero devem igual ou diferente a, no máximo, um. Quando a condição de parada é atingida, a última IMF é geralmente uma função monotônica, chamado de resíduo $r(t)$. A Equação 2.1 resume a composição de série $X(t)$ pela soma de suas IMFs.

$$X(t) = \sum_{j=1} h_j(t) + r(t) \quad (2.1)$$

EMD possui a vantagem de ser aplicado na decomposição de séries temporais com diferentes comportamentos como linearidade, estacionariedade e estocasticidade. Além disso, é um método considerado intuitivo, adaptável, e totalmente orientado a dados (HUANG et al., 1998).

2.1.2 Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos

Esta seção apresenta os principais conceitos e ferramentas da área de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos para modelar séries temporais determinísticas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Em geral, tais ferramentas visam estudar séries temporais no espaço fase, o qual buscam reconstruir suas observações em espaços de maior dimensionalidade, auxiliando na obtenção de regras geradoras de sistemas dinâmicos (COSTA; RIOS; MELLO, 2016; MELLO, 2009). O espaço fase foi estudado inicialmente por Whitney (1936) que aplicou variáveis diferenciais para reconstruir uma dada série em um espaço de maiores dimensões. Takens (1981) provou uma nova maneira de reconstruir o espaço fase considerando deslocamentos no tempo.

Para reconstruir a série $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ no espaço fase segundo o teorema de Takens (1981), deve-se estimar a dimensão embutida m e a dimensão de separação τ criando uma nova série determinística $x_n(m, \tau) = \{x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}\}$, comumente as chamadas de atrator (MELLO, 2009). A dimensão embutida m faz referência a quantidade necessária de eixos para criar a série no espaço fase, enquanto que a dimensão de separação τ faz referência a quantidade de *lags* (defasagens de tempo).

Para estimar a dimensão embutida, pode-se utilizar o método de *False Nearest Neighbors* (FNN) proposto por Kennel, Brown e Abarbanel (1992). Neste método, são calculados os vizinhos para cada ponto no espaço de coordenadas de atraso, iniciando em 1 e tendo condição de parada quando há acréscimo na distância entre vizinhos, evidenciando a necessidade de mais uma dimensão (MELLO, 2009; RIOS; MELLO, 2013; KENNEL; BROWN; ABARBANEL, 1992).

Para estimar a dimensão de separação, a técnica de Autoinformação Mútua (*Auto Mutual Information* (AMI)) tem sido amplamente utilizada. Em resumo, essa técnica é

aplicada sobre a série variando diferentes valores de deslocamentos temporal, sendo que o primeiro mínimo é utilizado para reconstruir a série no espaço fase (MELLO, 2009; RIOS; MELLO, 2013).

2.2 TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY

2.2.1 Conjuntos Fuzzy

Um conjunto é definido matematicamente como uma coleção de elementos que apresentam propriedades em comum. Conjuntos provenientes da teoria clássica de conjuntos, ou *booleana*, são formados por elementos cujas propriedades são intrínsecas a um conjunto específico. Quando um determinado problema assume uma natureza incerta, apresentando um cenário onde os elementos podem pertencer a mais de um conjunto, a teoria de conjuntos clássica torna-se insuficiente. Para solucionar problemas deste tipo é conveniente o uso da teoria de conjuntos fuzzy (ZADEH, 1965), pela qual elementos podem pertencer a mais de um conjunto simultaneamente, com diferentes graus de pertinência (KLIR; YUAN, 1995).

Para ilustrar como elementos são organizados em conjuntos fuzzy e conjuntos clássicos, a Figura 2.3(a) apresenta a modelagem de um problema utilizando conjuntos clássicos, e a Figura 2.3(b) apresenta a modelagem de um problema utilizando conjuntos fuzzy.

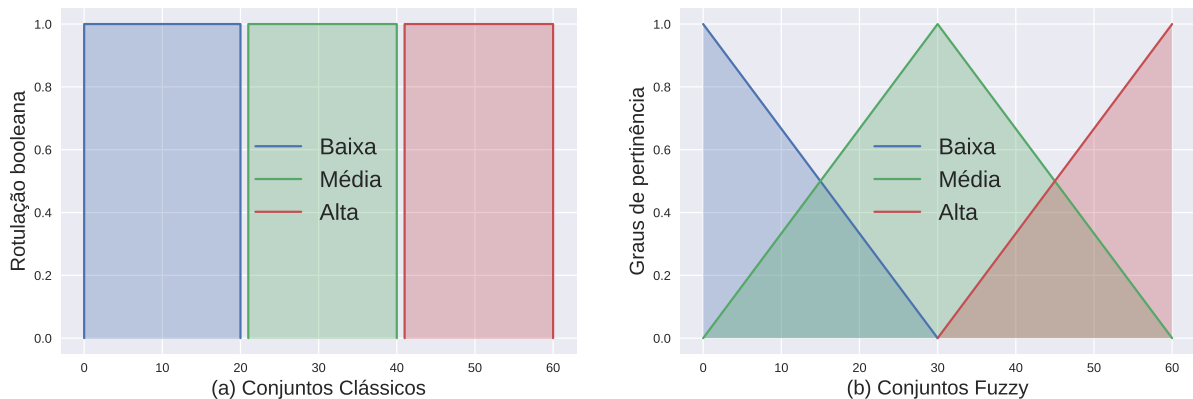


Figura 2.3 Ilustração de conjuntos clássicos (a) e conjuntos fuzzy (b) para a variável linguística temperatura.

Neste sentido, a definição de um conjunto fuzzy é obtida ampliando-se o contradomínio da função característica $\{0, 1\}$, proveniente da lógica clássica, para o intervalo $[0, 1]$, de forma a atribuir o grau com que um elemento pertence a um conjunto fuzzy. A generalização da função característica é chamada de função de pertinência, a qual definirá o conjunto fuzzy, associando elementos de um dado universo de discurso X a números reais no intervalo $[0, 1]$. Portanto, um conjunto fuzzy A no conjunto universo X é caracterizado pela função $A : X \rightarrow [0, 1]$ e $A(x)$ define o grau com que o elemento x pertence ao conjunto fuzzy A (KLIR; YUAN, 1995).

A forma de um conjunto fuzzy depende da função de pertinência que as define, uma vez que as mesmas devem refletir o problema a ser modelado e solucionado usando a

teoria de conjuntos fuzzy.

Alguns formatos de funções de pertinência tornaram-se mais conhecidos e são utilizados frequentemente, pela sua simplicidade e facilidade de implementação. Os formatos de funções de pertinência mais comuns são: (i) Função de Pertinência Triangular; (ii) Função de Pertinência Trapezoidal; e (iii) Função de Pertinência Gaussiana. A Figura 2.4 ilustra essas funções de pertinências sobre o universo de discurso $X = [0, 20]$.

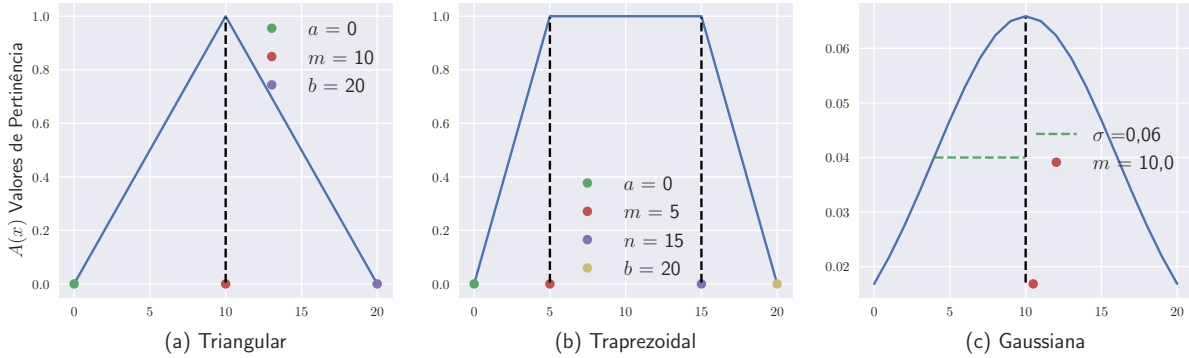


Figura 2.4 Funções de Pertinência Triangular (a), Trapezoidal (b) e Gaussiana (c).

Uma Função de Pertinência Triangular é definida pela Equação 2.2, considerando os parâmetros a , m e b ilustrados na Figura 2.4(a).

$$A(x, a, m, b) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } x \in [a, m) \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{if } x \in [m, b) \\ 0, & \text{if } x \geq b \end{cases} \quad (2.2)$$

Uma Função de Pertinência Trapezoidal é definida pela Equação 2.3, considerando os parâmetros a , m , n e b ilustrados na Figura 2.4(b).

$$A(x, a, m, n, b) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } x \in [a, m) \\ 1, & \text{if } x \in [m, n) \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{if } x \in [n, b) \\ 0, & \text{if } x \geq b \end{cases} \quad (2.3)$$

Uma Função de Pertinência Gaussiana é definida pela Equação 2.4, considerando os parâmetros m e σ ilustrados na Figura 2.4(c).

$$A(x, m, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma}\right) \quad (2.4)$$

Para manipular dados modelados utilizando a teoria de conjuntos fuzzy, as operações de complemento, interseção e união existentes na teoria clássica de conjuntos são implementadas por meio de uma classe de operadores. As operações-padrão são definidas

a seguir e a Figura 2.5 ilustra um exemplo prático de cada operação. Considere X o conjunto universo, x um elemento de X , e os conjuntos fuzzy A e B .

Definição 2.2.1. Interseção padrão

$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) \quad (2.5)$$

Definição 2.2.2. União padrão

$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) \quad (2.6)$$

Definição 2.2.3. Complemento padrão

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x) \quad (2.7)$$

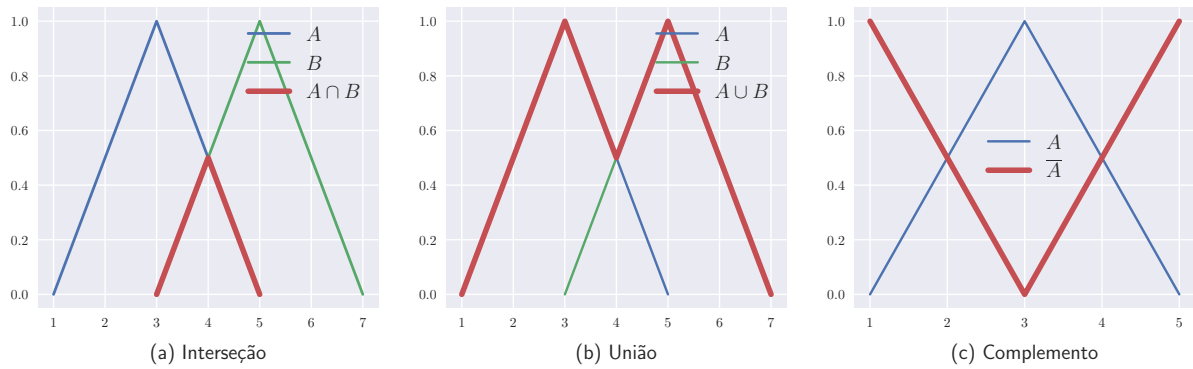


Figura 2.5 Operações padrão em conjuntos *fuzzy*.

Para cada uma dessas operações, existe uma classe de operadores utilizados para sua generalização. Os operadores que podem ser utilizados na generalização das operações de interseção e união são referidos na literatura como t-normas e s-normas, definidas respectivamente a seguir, na qual t denota uma t-norma e s denota uma s-norma.

Definição 2.2.4. Interseção generalizada

$$(A \cap B)(x) = A(x)tB(x) \quad (2.8)$$

Definição 2.2.5. União generalizada

$$(A \cup B)(x) = A(x)sB(x) \quad (2.9)$$

Uma t-norma t é uma operação binária da forma $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que deve satisfazer as propriedades de Condição limite, Monotonicidade, Comutatividade e Associatividade. Mais detalhes em (KLIR; YUAN, 1995).

Algumas t-normas frequentemente utilizadas, para todo $a, b, c \in [0, 1]$ são:

- União padrão: $t(a, b) = \min(a, b)$

- Produto algébrico: $t(a, b) = ab$
- Diferença limitada: $t(a, b) = \max(0, a + b - 1)$
- Interseção drástica: $t_{min}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{quando } b = 1 \\ b, & \text{quando } a = 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$

Uma s-norma s , também chamada de t-conorma, é uma operação binária da forma $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que deve satisfazer as propriedades de Condição limite, Monotonicidade, Comutatividade e Associatividade. Mais detalhes em (KLIR; YUAN, 1995).

Algumas s-normas frequentemente utilizadas, para todo $a, b, c \in [0, 1]$ são:

- Interseção padrão: $s(a, b) = \max(a, b)$
- Soma algébrica: $s(a, b) = a + b - ab$
- Soma limitada: $s(a, b) = \min(1, a + b)$
- União drástica: $s_{max}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{quando } b = 0 \\ b, & \text{quando } a = 0 \\ 1, & \text{caso contrario} \end{cases}$

Denota-se cA o complemento generalizado fuzzy de A do tipo c , no qual c é definida pela função $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Para tanto, a função c deve satisfazer as propriedades de Condição limite, Monotonicidade, Continuidade e Involução. Mais detalhes em (KLIR; YUAN, 1995).

As operações de união, interseção e complemento apresentadas anteriormente para os conjuntos fuzzy são também definidas para as relações fuzzy, as quais generalizam o conceito de relações da teoria de conjuntos convencionais e representam o grau de associação entre elementos de dois ou mais conjuntos fuzzy (NICOLETTI; CAMARGO, 2004).

Considerando-se duas relações fuzzy R e S definidas em um mesmo espaço $X \times Y$, sendo X o universo de discurso de R , e sendo Y o universo de discurso de S , as funções de pertinência resultantes da união e interseção de relações fuzzy binárias, são definidas, respectivamente, pelas Equações 2.10 e 2.11:

$$R \cup S(x, y) = \max\{R(x, y), S(x, y)\}, (x, y) \in X \times Y \quad (2.10)$$

$$R \cap S(x, y) = \min\{R(x, y), S(x, y)\}, (x, y) \in X \times Y \quad (2.11)$$

Relações fuzzy podem ser ainda combinadas por meio da operação de Composição. Mais detalhes em (NICOLETTI; CAMARGO, 2004).

Esses conceitos mencionados anteriormente desempenham um papel relevante na definição das regras fuzzy, as quais serão investigadas e utilizadas no contexto deste trabalho.

2.2.2 Regras Fuzzy

De maneira geral, regras fuzzy são utilizadas para representar formalmente o conhecimento impreciso de um determinado domínio, pois as mesmas possuem um formato linguístico de fácil compreensão. Tal formato deve-se ao fato das regras fuzzy serem compostas por variáveis linguísticas, cujos valores são palavras ou sentenças em linguagem natural em vez de números. Dessa forma, por meio das variáveis linguísticas, é possível que problemas naturalmente imprecisos e complexos sejam manipuláveis por computadores. As variáveis linguísticas são denidas sobre um determinado domínio, o qual é granularizado em termos linguísticos denidos por conjuntos fuzzy chamados de partição fuzzy. Sendo assim, uma proposição fuzzy é a parcela de informação básica que pode aparecer em uma regra e seu formato mais simples é: $X \text{ é } A$, na qual X é uma variável linguística e A é um termo linguístico que representa um conjunto fuzzy, o qual é caracterizado por uma função de pertinência. Por exemplo, se X for a variável distância e A o termo baixa, a proposição $X \text{ é } A$ representa formalmente a parcela de informação, por exemplo, “a distância é baixa”. As proposições fuzzy também podem ser compostas, isto é, construídas a partir de proposições simples pelos operadores de conjunção ou disjunção, resultando em proposições com os formatos:

$X_1 \text{ é } A \text{ E } X_2 \text{ é } B$;

$X_1 \text{ é } C \text{ OU } X_2 \text{ é } D$.

A partir das proposições fuzzy, são criados antecedentes e consequentes, e estes formam a regra fuzzy. O *antecedente* expressa uma condição, e o *consequente* expressa uma ação com base na condição do antecedente, seguindo basicamente o seguinte formato de regras:

$$\textit{antecedente} \rightarrow \textit{consequente} \quad (2.12)$$

Com base nesse formato, dada a regra em linguagem natural: Se **temperatura** é alta, então a **humidade** é baixa, em que “Se **temperatura** é alta” é o *antecedente*, e “então a **humidade** é baixa” é o *consequente*, a regra fuzzy pode ser definida como:

- Se \mathbf{X} é A , então \mathbf{Y} é B ,

- Logo, $A \rightarrow B$.

Assim, dada a regra fuzzy formada $A \rightarrow B$, A é um conjunto fuzzy representando o valor da variável linguística temperatura \mathbf{X} , e B da variável linguística humidade \mathbf{Y} , e operador \rightarrow indica uma implicação representando o então.

Em um dado problema, as regras fuzzy geradas formam uma base de conhecimento. Para obter uma conclusão de uma determinada entrada de um problema a partir das regras criadas, realiza-se o processo de inferência fuzzy. Para realização desse processo, existem os modelos de inferência, cuja escolha deve levar em consideração o problema em questão. Um modelo de inferência comumente utilizado é o modelo proposto por Mamdani (MAMDANI, 1976).

2.2.3 Agrupamento Fuzzy C-Means

O agrupamento é uma técnica de aprendizado não supervisionado que visa encontrar grupos entre os dados de entrada com base em alguma similitude. O agrupamento pode ser do tipo exclusivo, em que um objeto pertence a apenas um único grupo, ou não-exclusivo, em que um dado objeto pode pertencer a mais de um grupo com diferentes níveis de associação. Proposto por Bezdek (1981), o Fuzzy C-Means (FCM) é um método de agrupamento não-exclusivo que permite um elemento pertencer a mais de um grupo com diferentes graus de pertinência. O agrupamento é realizado com a otimização da função objetivo que representa a forte associação entre elementos de um mesmo grupo, e fraca associação entre elementos de grupos distintos.

A Equação 2.13 exhibe o cálculo da função objetivo J_m , que mede a soma ponderada das distâncias entre os centros de grupos e elementos nos grupos correspondentes, onde n é a quantidade de observações do conjunto de dados $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; c é a quantidade de grupos; u_{ij} ($0 < u_{ij} < 1$) é o grau com que uma observação $x_i, i = 1 \dots n$, pertence ao grupo $C_j, j = 1 \dots c$; v_j é o centro do grupo C_j e m é o fator de fuzzificação.

$$J_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c u_{ij}^m \|x_i - v_j\|^2 \quad (2.13)$$

O FCM começa inicializando a matriz de pertinência $U^{(k)} = [u_{ij}]$, $k = 0$. Em seguida ele calcula o centro dos grupos na iteração k , como exibido na Equação 2.14.

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m x_i}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^m}, \quad (2.14)$$

No passo seguinte, é atualizada a matriz de pertinência $U^{(k+1)}$, como exibida na Equação 2.15.

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{l=1}^c \left(\frac{x_i - v_j}{x_i - v_l} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (2.15)$$

Se $U^{(k+1)} - U^{(k)}$ for menor que um critério de erro ε , o algoritmo para, caso contrário, é realizada outra iteração desde a atualização do centro dos grupos, podendo executar esse ciclo até o limite máximo de iterações.

2.2.3.1 Índices de Validação Em análise de agrupamento, índices de validação fornecem informações relacionadas à qualidade do agrupamento, podendo ser utilizado também para estimar a quantidade apropriada de grupos. Para essa estimativa, são aplicados critérios relativos sobre os índices de validação comparando diversos agrupamentos, observando o valor c de grupos e o score do índice para cada execução do algoritmo.

No entanto, a escolha de índices de validação que possam estimar uma quantidade apropriada de grupos merece atenção, uma vez que alguns índices podem ser sensíveis

aos parâmetros do algoritmo e apresentar tendência monotônica, podendo comprometer a estimação da quantidade de grupos (EUSTÁQUIO; NOGUEIRA, 2018). Nesse sentido, em busca de determinar uma quantidade de grupos apropriada, foram selecionados sete índices de validação que são pouco sensíveis a tendência monotônica, dentre eles: o Silhueta, Silhueta Fuzzy (SF)(CAMPELLO; HRUSCHKA, 2006a), Xie And Beni Index (XB)(Xie; Beni, 1991), Modified Partition Coefficient (MPC)(DAVE, 1996), Wu-and-Li index (WLI)(Wu et al., 2015), PBMF-index(Rubio; Castillo; Melin, 2011), and K index(Kwon, 1998).

O Silhueta avalia o agrupamento no intervalo entre $[-1, 1]$, sendo que 1 indica que o objeto está bem associado em seu respectivo grupo, e -1 que o objeto deveria ser associado a outro grupo. Este índice calcula a distância entre objetos de um mesmo grupo com objetos dos demais grupos, com o objetivo de encontrar um grupo que apresente maior similaridade entre os objetos (ROUSSEEUW, 1987). O Silhueta é melhor voltado para agrupamento exclusivo, ou seja, um dado objeto pertence somente a um grupo. Para agrupamentos não-exclusivo, em que um objeto pode pertencer a mais de um grupo com diferentes níveis de associação, o Silhueta Fuzzy é mais indicado. O Silhueta Fuzzy é uma generalização do Silhueta projetado para melhorar a detecção de regiões com maior densidade de dados quando o conjunto de dados envolve sobreposição de grupos (CAMPELLO; HRUSCHKA, 2006a). O SF tem seu valor no intervalo entre $[0, 1]$, sendo 1 o melhor valor do índice para indicar que os objetos estão bem agrupados.

O XB valida o agrupamento se baseando em propriedades como compactação da partição fuzzy e separação entre os grupos (Xie; Beni, 1991). Seu melhor valor é o mínimo, indicando que os grupos estão bem compactos e separados. No entanto, esse índice pode apresentar tendência monotônica em alguns casos. Visando diminuir a tendência monotônica do XB, (Kwon, 1998) propôs o índice K para eliminar a tendência decrescente quando o número de grupos c se tornar muito grande e próximo ao número de objetos n . O MPC foi projetado para correção de tendência monotônica do Partition Coefficient (PC) (BEZDEK, 1974), sendo um índice que obtém seu melhor valor máximo no intervalo entre $[0, 1]$ (DAVE, 1996).

O PBMF (Rubio; Castillo; Melin, 2011) é uma generalização do PBM (PAKHIRA; BANDYOPADHYAY; MAULIK, 2004) projetado para agrupamento fuzzy, que detecta a compacidade dentro dos grupos e a separação entre eles. Um valor maior do índice indica uma boa qualidade de agrupamento em que cada grupo está bem separado. O WLI (Wu et al., 2015) procura eliminar a instabilidade enfrentada por outros índices quando os centroides estão localizados próximos, introduzindo um fator mediano. O WLI considera a taxa geral de compactação e separação dos grupos de forma individual, bem como de todos, tendo seu melhor valor mínimo na escala de $[0, 1]$.

2.3 SÉRIE TEMPORAL FUZZY

O problema de previsão de dados de séries temporais é importante e interessante em uma grande variedade de aplicações, tais como monitoramento da temperatura, sinais sísmicos para monitorar terremotos, prever os preços das ações no mercado de ações, estimar a pressão arterial em um hospital, e assim por diante (KUO et al., 2009b; CHEN;

WANG; PAN, 2009). Este problema tem sido amplamente estudado em algumas áreas, como estatística, processamento de sinais e redes neurais. Dentre eles, a área estatística é bem difundida por possuir uma gama de ferramentas para série temporais que obtém bons resultados. No entanto, alguns modelos utilizados, como ARMA, ARIMA, SARIMA, precisam estimar parâmetros e o conjunto de dados estabelecer alguns suposições estatísticas, como linearidade, normalidade, estacionariedade, e possuir uma certa quantidade mínima de observações (TSENG et al., 2001; BROOKS, 2014). Em um cenário prático com dados reais de série temporal, a maioria dos dados tendem a ser de natureza estocástica, possuindo ruído e em alguns casos, dados faltantes, as quais dificultam o trabalho desses modelos estatísticos.

Série Temporal Fuzzy, do inglês *Fuzzy Time Series* (FTS), introduzido por Song e Chissom (1993b), agrega os conceitos da teoria de conjuntos fuzzy a séries temporais. FTS se diferem de uma série temporal comum pelo uso de conjuntos fuzzy para representação dos dados observados ao longo do tempo. Neste contexto, algumas definições são apresentadas a seguir.

Definição 2.3.1. *Fuzzy Time Series (FTS)* : Considere os dados de uma série temporal na forma de uma sequência de observações x_t , registradas no tempo t . Um conjunto fuzzy sobre o universo de discurso U desta série temporal é representado, em uma notação de lista, por: $A = fA(x_1)/x_1 + fA(x_2)/x_2 + \dots + fA(x_n)/x_n$, onde fA é a função de pertinência do conjunto fuzzy A e $fA(x_t)$ é o grau de pertinência da observação x_t no conjunto fuzzy A , $1 < t \leq n$. Uma série temporal fuzzy pode ser entendida como uma variável linguística, cujos conjuntos fuzzy apresentam uma descrição para os dados do universo de discurso U .

A Figura 2.6 ilustra a representação de uma série temporal fuzzy. Para essa ilustração foi utilizada uma série temporal real de vendas físicas¹ da região metropolitana de São Paulo, com observações mensais de 01/1984 a 10/1996. A Figura 2.6(a) ilustra a FTS em um plano 2D, e percebe-se que os conjuntos fuzzy triangulares modelam as observações ao longo do tempo. Para melhor representação, a Figura 2.6(b) ilustra a representação da FTS em 3D para demonstrar onde o tempo, domínio e pertinência se situam.

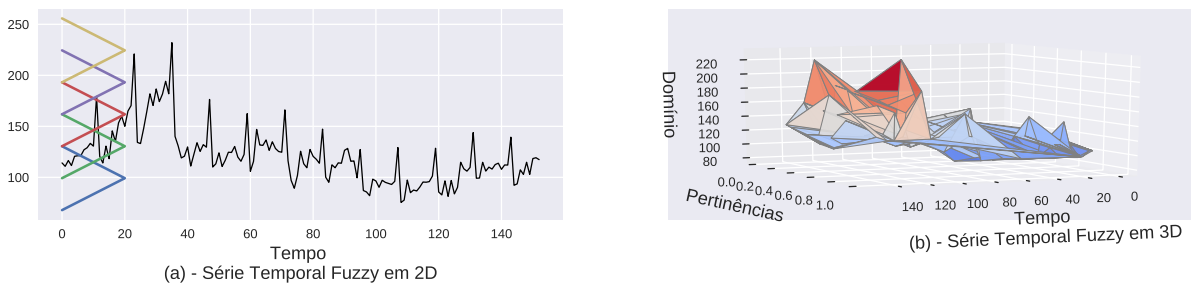


Figura 2.6 Representação da Série Temporal *Fuzzy*.

¹<https://www.ime.usp.br/~pam/ST.html>

Definição 2.3.2. Ordem: A ordem em um modelo FTS está relacionada ao número de observações passadas para representar observações futuras. De acordo com (SONG; CHISSOM, 1993b), modelos FTS com regras fuzzy (Fuzzy Logical Relationship – FLR) são chamadas de primeira ordem quando as regras fuzzy possuem apenas um antecedente. Por sua vez, são chamados de modelos de alta ordem quando as regras fuzzy são compostas por dois ou mais antecedentes. A representação do modelo é descrita como $A_i \Rightarrow A_j$, $\{i, j\} \subset \{1, \dots, c\}$ tendo A_i como um conjunto fuzzy para o qual x_{t-1} apresenta maior grau de pertinência e A_j é o conjunto fuzzy previsto para o qual x_t (a observação seguinte) tem o maior grau de pertinência. Modelos de alta ordem, usam p antecedentes, de modo que $p \geq 2$ para prever x_t . Para exemplificar, dado $\{x_{t-p}, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}\}$ ser um subconjunto de observações usadas para modelar x_t . O modelo FTS é descrito por $A_i, A_j, \dots, A_k \Rightarrow A_l$, $\{i, j, k, \dots, l\} \subset \{1, \dots, c\}$, de tal modo que $\{A_i, A_j, \dots, A_k\}$ são os conjuntos fuzzy com maiores graus de pertinência para as observações $\{x_{t-p}, x_{t-2}, \dots, x_{t-1}\}$, respectivamente, e A_l é o conjunto fuzzy previsto.

Definição 2.3.3. Variância no Tempo: A dependência temporal do FTS é associada a etapa de relacionamento lógico fuzzy, que são baseadas em definições invariantes e variantes no tempo: (i) modelos invariantes no tempo empregam alguma equação em forma de $x(t) = \phi x(t-1)$ para representar alguma observação x_t usando dados passados. Esse modelo é mantido útil mesmo quando os índices de tempo são alterados, como quando $x(t+\delta) = \phi x(t+\delta-1)$ para $\delta \in \mathbb{Z}$; e (ii) modelos variantes no tempo atualizam seu conjunto subjacente de equações à medida que novos dados são recebidos; portanto, novas observações afetam diretamente as saídas e propriedades do modelo. Por essa razão, ajustando um modelo invariante no tempo nas saídas do sistema, ele ainda permanece válido à medida que novas observações são coletadas, a menos que todo o comportamento do sistema mude como normalmente observado nos cenários de mudança de conceito (GAMA et al., 2014). Por sua vez, os modelos variantes no tempo atualizam constantemente os relacionamentos lógicos fuzzy usando as novas observações coletadas.

De maneira geral, o modelo FTS pode ser dividido em 3 etapas: (i) fuzzificação, na qual obtém-se a modelagem dos conjuntos fuzzy; (ii) Relacionamentos Lógicos Fuzzy (FLR), cujos conjuntos fuzzy obtidos na etapa anterior são utilizados para obtenção de regras fuzzy que representam padrões temporais da série; e (iii) defuzzificação, na qual o resultado de uma inferência expressa em conjuntos fuzzy é convertido para um valor numérico. A Definição 2.3.4 apresenta o passo a passo para composição do modelo FTS.

Definição 2.3.4. Etapas do modelo FTS para um dada série $X(t)$:

i - Fuzzificação:

- Definição do universo de discurso U ;
- Particionamento do universo U em N intervalos, obtendo $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$;
- Definição dos conjuntos fuzzy $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ para cada intervalo;
- Fuzzificação das observações: atrelar para cada observação $x(t)$ da série $X(t)$ um conjunto fuzzy $A_i, i = 1 \dots N$.

ii - Relacionamentos Lógicos Fuzzy:

- Definição da ordem do modelo (primeira ou alta ordem);
- Definição da variância do tempo (invariante ou variante no tempo);
- Criação de regras fuzzy.

iii - Defuzzificação:

- Conversão de um conjunto fuzzy A_i em valor numérico $x(t)$ para série.

Após a definição das FTS por Song e Chissom (1993b), vários trabalhos propuseram alterações em sua modelagem para obter melhor acurácia quando realizada a previsão de observações futuras nestas séries temporais. A seguir são apresentados alguns destes trabalhos que, embora apresentem abordagens pioneiras, foram utilizados por abordagens mais atuais, como em (CHENG; CHANG; YEH, 2006; WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013; WANG et al., 2014). Uma maior revisão bibliográfica com artigos relacionados ao presente estudo são apresentados no Capítulo 3.

Song e Chissom (1994) deram continuidade ao trabalho proposto em (SONG; CHISSOM, 1993a), apresentando uma FTS de primeira ordem variante no tempo, cuja previsão é obtida a partir de uma estratégia de defuzzificação que utiliza uma rede neural de três camadas. No modelo variante no tempo, existe a possibilidade de uma FTS não ter os mesmos valores possíveis em momentos diferentes. Portanto, ao utilizar uma rede neural para defuzzificação, se o método não possuir boas amostras de treinamento, a rede neural pode não generalizar bem as saídas e pode produzir resultados insatisfatórios de previsão.

Após observar que o modelo de (SONG; CHISSOM, 1993a) apresentava um grande custo computacional pela multiplicação de matrizes nas relações fuzzy, Chen (1996) propôs um novo método FTS que utilizam um modelo de primeira ordem invariante no tempo que apresenta menor custo computacional. A otimização do método ocorre na construção dos relacionamentos fuzzy e na defuzzificação. Para tal, o método proposto usou operações aritméticas simplificadas em vez da complicada operação de composição *max-min* apresentadas em (SONG; CHISSOM, 1993a).

Após observar que a previsão na FTS desenvolvida por Song e Chissom (1993a) poderia ser melhorada aumentando-se a ordem do modelo, Chen (2002) propôs a utilização de modelos de FTS de alta ordem. Neste trabalho, foram explorados modelos com ordem entre 2 e 5. Como resultado, modelos de ordem três obtiveram os menores erros de previsão provando ser melhor que os trabalhos no estado da arte da época.

Por outro lado, Lee, Efendi e Ismail (2009a) propuseram melhorias na previsão de FTS considerando a ordem cronológica das recorrências para ponderar as regras *fuzzy*, diferente da maioria dos trabalhos anteriores que desconsideram a recorrência. Comparando com o trabalho de (YU, 2005b) que também utilizou a recorrência para ponderar as regras fuzzy, a proposta apresentada em Lee, Efendi e Ismail (2009a) obteve menor erro de previsão.

Considerando os trabalhos citados anteriormente, foi possível elaborar um fluxograma, apresentado na Figura 2.7, com todas etapas da Definição 2.3.4. Baseado em (EGRIOGLU; ALADAG; YOLCU, 2013), o fluxograma apresenta como o modelo FTS pode ser configurado. Na etapa de **fuzzificação** dois fatores são determinantes: (i) a quantidade

de conjuntos fuzzy, que pode ser determinada de maneira manual ou estimada; e (ii) o comprimento dos intervalos, que podem ser definidos comprimentos de tamanhos iguais ou diferentes para cada intervalo. Na etapa seguinte, **relacionamentos lógicos fuzzy**, pode ser configurado em relação a ordem e variância de tempo. Cada etapa pode ser definida de maneira independente. Porém, cada etapa influencia no resultado da etapa seguinte, que por fim, interfere no resultado da previsão.

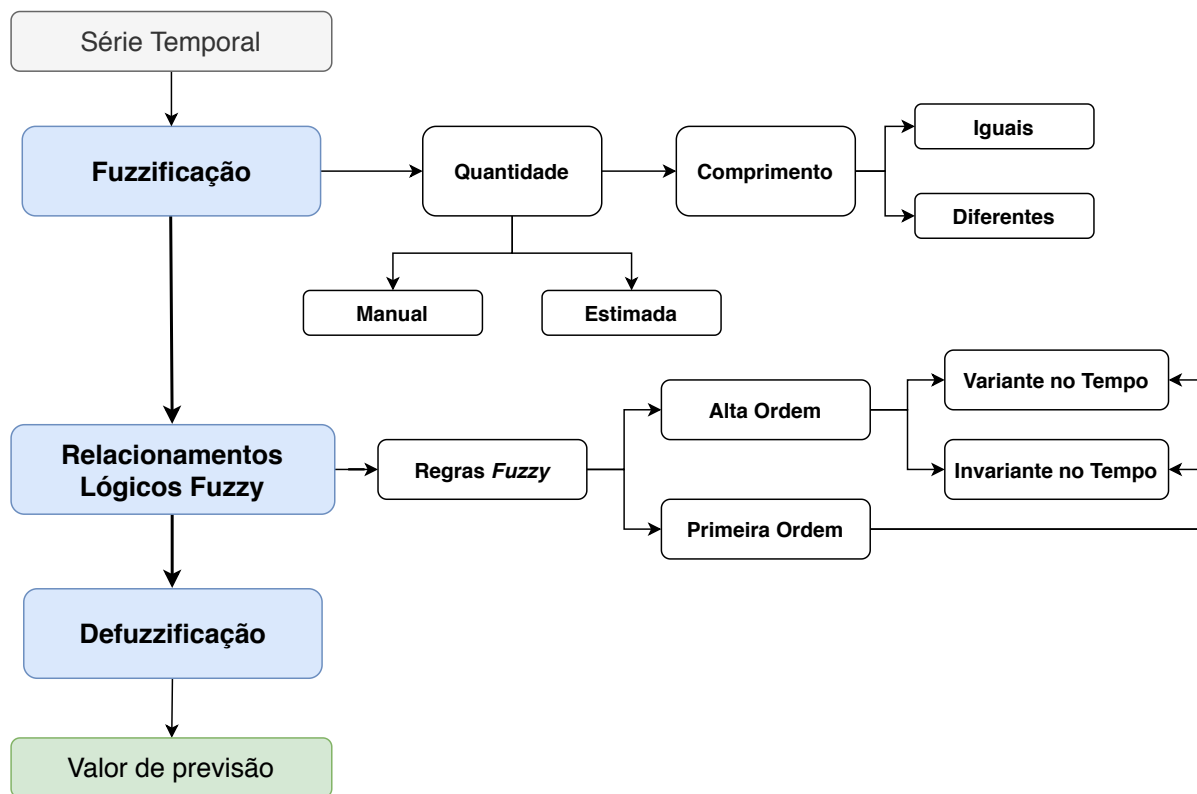


Figura 2.7 Configuração do modelo FTS para tarefa de previsão.

Para validar a etapa de fuzzificação proposta, modelos de primeira ordem invariante no tempo foram utilizados. Os métodos de geração de FLR propostos neste trabalho são baseados em (CHEN, 1996) e (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a), assim como a etapa de defuzzificação. As Definições 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.8 apresentam os detalhes de cada etapa.

Definição 2.3.5. Relacionamento Lógico Fuzzy de acordo com Chen (1996).

O método proposto por Chen (1996) considera a dependência temporal linear entre as observações para criar os relacionamentos lógicos fuzzy, de acordo com os seguintes passos:

- Considere um FLR definido como $A_i \Rightarrow A_j$. O conjunto fuzzy A_i é definido como o antecedente usado para representar x_{t-1} , e A_j é o conseqüente da regra que descreve a próxima observação x_t , dado $x_{t-1}, x_t \in X(t)$. Nessa relação, A_i pode ser

descrito como *left-hand side* (LHS), e A_j como *right-hand side* (RHS), usado na notação FTS para representar uma regra fuzzy $LHS \Rightarrow RHS$ de maneira geral. Se um novo FLR é criado após a análise de observações adicionais implicar em uma regra conhecida anteriormente, ele será simplesmente desconsiderado devido à sua ambiguidade. Exemplos de FLR: $A_1 \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$.

- A seguir, grupos de FLR são criados (do inglês, *Fuzzy Logical Relationship Group* (FLRG)), os quais agrupam todos os consequentes de cada antecedente como, por exemplo:

- $A_1 \Rightarrow A_1, A_2$;
- $A_2 \Rightarrow A_3$.

Definição 2.3.6. Relacionamento Lógico Fuzzy de acordo com Lee, Efendi e Ismail (2009a).

O método proposto em (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a) modifica o método proposto por Chen (1996) ponderando as regras de acordo com a recorrência temporal presente nas observações da série temporal. Esse novo método baseia-se no pressuposto de que uma regra que é mais considerada para prever observações tem maior probabilidade de ser selecionada no futuro. As etapas a seguir detalham o método proposto em (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a):

- Os relacionamentos lógicos *fuzzy* são gerados como proposto em (CHEN, 1996), mas as regras com os mesmos antecedentes e consequentes são mantidas no modelo, conforme exemplo:

- $A_1 \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_1 \Rightarrow A_2, A_1 \Rightarrow A_2, A_1 \Rightarrow A_2, A_1 \Rightarrow A_1, A_2 \Rightarrow A_3$;

- No próximo passo, os FLRG agrupam os consequentes de acordo com os antecedentes, como exemplificado a seguir:

- $A_1 \Rightarrow A_1, A_2, A_2, A_2, A_2, A_1$;
- $A_2 \Rightarrow A_3$.

- Por fim, um vetor de pesos $W(t)$ é obtido a partir da frequência de seleção de cada regra na forma:

$$W(t) = [w_1 \ w_2 \ \dots]^T,$$

de tal modo que w_r é o peso associado a alguma regra r .

Definição 2.3.7. Defuzzificação de acordo com Chen (1996).

Dada uma observação x_t com o maior grau de pertinência no conjunto fuzzy A_j , o estágio de defuzzificação considera uma das médias $M(t)$:

1. Quando existe uma única regra $A_i \Rightarrow A_j$ cujo antecedente é A_i , o valor de previsão é calculado como ponto médio m_j do seu consequente;
2. Quando existem várias regras com o mesmo antecedente A_i , o valor de previsão é calculado baseado nos pontos médios $(g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jq})$ dos seus respectivos consequentes $(A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jq})$, de modo que $M(t) = \frac{\sum_{i=1}^q g_i}{q}$, para q igual ao número de regras;
3. Quando não existe regra cujo antecedente é A_i , o valor da previsão é calculado como o ponto médio g_i do próprio conjunto.

Definição 2.3.8. Defuzzificação de acordo com Lee, Efendi e Ismail (2009a)

Considerando que uma observação x_t tem seu maior grau de pertinência no conjunto fuzzy A_i , $i = 1, \dots, c$, a etapa de defuzzificação é baseada na média ponderada $F(t)w$ dos pontos médios $(g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jq})$ dos consequentes $(A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jq})$ de algum FLR. Inicialmente, a matriz com pontos médios $M(t)$ é multiplicada pela matriz de pesos $W(t)$, definida na Equação 2.16. O valor da previsão é calculado a partir da média ponderada de $F(t)w$ em torno de um intervalo definido pela diferença absoluta $\text{diff}|A_i, g_i| = |x_i - g_i|$ (observação atual menos o ponto médio) do conjunto A_i , como expresso na Equação 2.17.

$$F(t)w = M(t) \times W(t)^T = [g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jq}] \times [w_1, w_2, \dots, w_q]^T \quad (2.16)$$

$$F(t) = F(t)w \pm \text{diff}|A_i, g_i| \quad (2.17)$$

No capítulo seguinte, são apresentados trabalhos relacionados à investigação proposta neste trabalho.

ESTADO DA ARTE

Este capítulo apresenta trabalhos relacionados a propostas de melhorias na modelagem de conjuntos fuzzy na etapa de fuzzificação em Séries Temporais Fuzzy, aplicados ao problema de previsão. Após a criação das séries temporais fuzzy (FTS) por Song e Chissom (1993b), vários trabalhos foram propostos visando melhorar o desempenho e a precisão em tarefas de previsão. Com base nesses trabalhos, nota-se que dois fatores impactam significativamente a previsão do modelo FTS: (i) o comprimento dos intervalos para realizar a modelagem dos conjuntos fuzzy; e (ii) a formulação dos relacionamentos lógicos fuzzy. A principal relação entre a abordagem proposta e os demais trabalhos listados na próxima seção é a forma de modelagem dos conjuntos fuzzy. Outra relação abordada neste projeto, mas pouco explorada na literatura, é a determinação da quantidade de conjuntos fuzzy.

3.1 COMPRIMENTO DOS INTERVALOS FUZZY

Segundo Huarng (2001a) o comprimento dos intervalos esta diretamente ligado a modelagem dos conjuntos fuzzy, que resulta em menores erros na tarefa de previsão. Para comprovar essa hipótese, os autores propuseram duas heurísticas para determinar o comprimento dos conjuntos: uma baseada na média e outra na distribuição estatística dos dados. Os modelos obtidos a partir dessas heurísticas foram testados em duas bases de dados: (i) matrículas da Universidade do Alabama; e (ii) índice do mercado de ações TAIEX¹. Os resultados indicaram que variações de comprimentos dos conjuntos resultam em diferentes erros de previsão. A principal desvantagem do trabalho apresentado está na falta de informação sobre o método ‘*base-mapping table*’ que é utilizado para estimar as médias e as distribuições estatísticas das heurísticas.

Yu (2005a) propôs um processo de extração de características para séries temporais fuzzy a fim de determinar o comprimento dos conjuntos e as regras fuzzy. Primeiramente, o autor estima o universo de discurso e seus intervalos. Em seguida, os comprimentos dos

¹<http://www.twse.com.tw/en/products/indices/tsec/taidx.php>

intervalos são refinados com a adição de um determinado valor. Para refinar as regras, são calculadas as diferenças entre os antecedentes e os consequentes das regras. Em seguida os refinamentos são adicionados às regras para melhor definir a etapa de relacionamentos fuzzy. Assim como no trabalho anterior, a avaliação da proposta foi realizada sobre as bases de dados de matrículas da Universidade do Alabama e ações TAIEX. Além disso, o autor validou sua proposta por meio das métricas *Average Errors* e RSME, que forneceram resultados superiores ao trabalho apresentado em (CHEN, 1996).

Cheng, Chang e Yeh (2006) notaram em suas pesquisas que a determinação do universo de discurso em séries temporais fuzzy é altamente subjetiva, assim como o comprimento dos intervalos. Para resolver esses problemas, os autores apresentaram duas novas abordagens que utilizam *Minimize Entropy Principle Approach* (MEPA) e *Trapezoid Fuzzification Approach* (TFA) para particionar o universo de discurso e construir funções de pertinência. Neste trabalho, os autores utilizam o *Mean Squared Error* (MSE) para comparar suas abordagens com o trabalho de Chen (1996). De acordo com os resultados apresentados no trabalho, as abordagens propostas apresentaram melhores resultados sobre duas bases de dados: (i) matrículas na Universidade do Alabama; e (ii) gastos mensais de uma empresa de Tecnologia da Informação (TI) de Taiwan.

Huang e Yu (2006a) observaram que intervalos definidos com comprimentos iguais podem não modelar adequadamente as variações de comportamento das séries temporais. Para contornar esse problema, os autores propuseram uma abordagem que utiliza as diferenças absolutas entre janelas de observações como base para o cálculo do comprimento dos intervalos. Assim como nos trabalhos apresentados anteriormente, experimentos foram realizados sobre bases de dados de matrículas da Universidade do Alabama e TAIEX. Como conclusão, os autores sugerem que distâncias baseadas na proporção de intervalos podem melhorar a previsão de séries temporais.

Li e Cheng (2007) propuseram um novo método FTS, explorando a etapa de fuzzificação e relacionamentos fuzzy. Na etapa de fuzzificação, os autores determinaram o comprimento dos intervalos utilizando uma subsequência de comprimento máximo determinístico. Na etapa de relacionamentos fuzzy, analisou-se a ordem do modelo que fornecera os melhores resultados de previsão. A avaliação do trabalho também foi realizada usando dados de matrículas da Universidade do Alabama e os resultados demonstraram que o modelo de previsão proposto superou os métodos existentes em termos de precisão, robustez, e confiabilidade. Os resultados também indicaram que o modelo de alta ordem fornecem melhores resultados. Além disso, a abordagem proposta está de acordo com o princípio de consistência de que um menor intervalo de tempo leva a mais resultados precisos.

Uma grande parte dos trabalhos na área de FTS determinou de maneira constante o comprimento dos intervalos. Entretanto, trabalhos desenvolvidos por (LIU et al., 2002) e Li, Cheng e Lin (2008) observaram que o particionamento de intervalos de comprimento constante pode afetar os resultados de previsão em situações em que a distribuição de valores contínuos não é uniforme. Para tratar esse problema de particionamento do universo de discurso, Li, Cheng e Lin (2008) aplicaram o FCM (*Fuzzy C-Means*). A quantidade de grupos para o FCM é determinada de maneira empírica, variando os valores de grupos e usando técnicas de validação. O melhor resultado de agrupamento é, então, utilizado

para determinar a quantidade de conjuntos fuzzy. Outra melhoria proposta do método foi prover uma nova maneira de construção das regras com um modelo multivariado. A avaliação do modelo proposto foi realizada sobre a base de dados de temperatura média diária em Taipei, Taiwan. Os valores dos parâmetros foram estimados usando simulação de Monte Carlo e *box plots* para verificar a confiabilidade do modelo proposto.

Kuo et al. (2009b) propuseram um modelo de previsão híbrida que combina a abordagem de otimização de enxame de partículas *Particle Swarm Optimization* (PSO) com séries temporais fuzzy. Além de desenvolver uma nova maneira para determinar o tamanho dos intervalos, os autores exploram como determinar o conteúdo das regras fuzzy. A validação do modelo proposto foi realizada usando MSE a partir de resultados obtidos sobre a série temporal da Universidade do Alabama.

Chen, Wang e Pan (2009) apresentaram um novo método para previsão utilizando uma técnica de agrupamento e, em seguida, desenvolvem os relacionamentos fuzzy para descrever o comportamento temporal da série. Os experimentos são realizados utilizando a base de dados de matrícula da Universidade do Alabama. O método se destacou entre os trabalhos relacionados, obtendo o menor erro de previsão de acordo com o MSE.

Visando melhorar os resultados obtidos com a previsão usando FTS, Chen e Tanuwijaya (2011) apresentaram duas modificações no modelo: (i) a primeira modificação está na determinação do comprimento dos intervalos, obtido automaticamente por meio de um algoritmo de agrupamento; (ii) a segunda modificação foi realizada na construção das regras, usando um novo modelo de alta ordem. O novo modelo foi avaliado usando a base de dados TAIEX.

Cai et al. (2013) também desenvolveram um modelo híbrido, chamado *Fuzzy Time Series Genetic Algorithm* (FTSGA), combinando FTS com algoritmo genérico para encontrar a melhor partição do universo do discurso. A metodologia foi comparada com trabalhos relacionados obtendo *Root Mean Square Error* (RMSE) inferior a três das quatro técnicas avaliadas. Entretanto, ao utilizar o algoritmo genético, a abordagem apresenta a limitação de necessitar de bases de dados volumosas.

Chen e Kao (2013) propuseram um novo método de previsão combinando séries temporais fuzzy, otimização de enxame de partículas e *Support Vector Machine* (SVM). As técnicas de otimização de enxame de partículas foi utilizada para obter intervalos ideais no universo do discurso. Por outro lado, SVM foi utilizada para auxiliar no processo de construção das regras. O método proposto foi avaliado sobre a série temporal TAIEX e a previsão realizada foi analisada usando o RMSE.

Wang, Liu e Pedrycz (2013) propuseram particionar o universo do discurso em comprimentos desiguais baseando-se no conceito de grânulos de informação e agrupamento fuzzy. O papel dos grânulos de informação e do agrupamento fuzzy foi determinar o comprimento dos intervalos temporais de comprimento desigual, de modo que o modelo obtenha maior precisão e maior interpretabilidade. Nos experimentos, o método utilizou a série temporal do índice de ações DAX da Alemanha e a série temporal de matrículas da Universidade do Alabama. Os trabalhos apresentados em (CHEN, 1996) e (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009b) foram selecionados para comparação, sendo que seus modelos de regras foram implementados no método proposto para garantir uma comparação mais justa. Resultados obtidos com o MSE demonstraram que o particionamento não-uniforme

forneceram maior precisão.

Egrioglu, Aladag e Yolcu (2013) descreveram que os trabalhos disponíveis na literatura procuraram contribuir em, ao menos, uma das três etapas do modelo FTS: fuzzificação, relacionamentos fuzzy e defuzzificação. Com base neste estudo, os autores propuseram uma melhoria no erro de previsão utilizando *Fuzzy C-Means* na tarefa de fuzzificação para definir o comprimento dos intervalos. Para melhor definir os relacionamentos fuzzy, os autores empregaram Redes Neurais Artificiais (RNA). Na defuzzificação, foi considerado o ponto médio dos intervalos. Utilizando a série de matrícula da Universidade do Alabama, os autores obtiveram MSE inferior aos trabalhos relacionados.

Diferente dos demais trabalhos que consideraram o tempo para encontrar o comprimento ideal dos intervalos, (WANG et al., 2014) utilizaram as técnicas de agrupamento *Gath and Geva* (GG) (Gath; Geva, 1989) e o conceito de grânulos de informação para determinar o comprimento dos intervalos, considerando o tempo. O papel do agrupamento GG e dos grânulos de informação foi determinar intervalos temporais de comprimento desigual para que o modelo melhore a precisão e apresente melhor interpretabilidade. Nos experimentos, foram utilizadas as regras de (CHEN, 1996) e (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009b) para testar o método proposto nas bases de dados de matrícula da Universidade do Alabama e a série TAIEX. Os resultados apontam MSE menor que os trabalhos relacionados. Por fim, os autores concluem que o FCM pode obter resultados de agrupamento ideais quando confrontado com distribuição ou distribuição esférica similar, enquanto agrupamento GG pode ser aplicado a uma distribuição de dados mais geral. Agrupamento GG pode adaptar-se a dados com vários formatos, tamanhos e densidades devido a sua definição especial de distância.

Lu et al. (2015) apresentaram uma abordagem centrada nos dados, baseada em grânulos de informação para particionar universo do discurso de séries temporais em intervalos de tamanhos desiguais, considerando a granulação de informações inerentemente das FTS. Para trabalhar com grânulos da informação, foi construído um espaço no qual as séries temporais são apresentadas no plano cartesiano, sendo que cada observação da série temporal $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é apresentada no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas foram posicionados os resultados da diferença de primeira ordem da série $\Delta X = \{x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$, ou seja, a série temporal original é graficamente apresentada com relação à sua versão estacionária, uma vez que essa diferença de primeira ordem remove tendências existentes na série.

Dincer e Akkuş (2018) apontaram que os métodos existentes utilizam agrupamento no passo de fuzzificação, tornando-os sensíveis a *outliers*. Diante desse cenário, os autores desenvolveram um método robusto à presença de *outliers* utilizando *Fuzzy K-Medoids* no passo de fuzzificação. Os relacionamentos fuzzy são construídos com as regras de primeira ordem e o centro do conjunto resultante é utilizado na etapa de defuzzificação. O modelo proposto produziu bons resultados, especialmente em séries temporais que incluem grande presença de *outliers*.

Wu, Long e Jiang (2019) desenvolveram um novo modelo FTS que aponta melhorias no passo de fuzzificação e defuzzificação. No passo de fuzzificação, foi determinado a quantidade de intervalos por meio da Silhueta *Fuzzy* (CAMPELLO; HRUSCHKA, 2006b) e em seguida foi determinado o comprimento dos intervalos por meio do agrupamento *Fuzzy*

C-Means. As regras construídas são de primeira ordem e invariantes no tempo. Outra contribuição desse trabalho é no passo de defuzzificação, no qual os erros são calculados usando Aprendizado de Máquina, comparando o MSE entre os valores defuzzificados e as observações correspondentes. O modelo proposto otimizou a FTS tradicional e a aprendizagem de erro. Os resultados analisados sobre a série TAIEX indicam que o modelo proposto supera os demais reduzindo o RMSE obtido. Embora o método apresente resultados promissores, diversos aspectos podem ser melhorados como, por exemplo, o erro de aprendizagem e os problemas de multi-fator.

3.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos estudos apresentados nesta seção, notou-se que grande parte dos trabalhos contribuíram com melhorias na etapa de fuzzificação. Nessa etapa, o aspecto mais considerado foi a determinação do comprimento dos intervalos. No entanto, uma etapa anterior, que é a determinação da quantidade de conjuntos fuzzy, não tem sido devidamente explorada. Em geral, essa etapa é definida de maneira manual. Outra característica comum nos trabalhos publicados é a utilização de modelos de primeira ordem invariantes no tempo, devido sua simplicidade e bom desempenho computacional. No entanto, alguns autores afirmam que regras de alta ordem podem prover melhores resultados de previsão, devido à descrição mais precisa dos padrões temporais.

A determinação de bons parâmetros em etapas iniciais no modelo FTS é importante devido à influência nas demais etapas posteriores, ou seja, a determinação da quantidade e comprimento dos conjuntos influenciam no relacionamento fuzzy, o qual, por fim, influencia na etapa de defuzzificação e, conseqüentemente, no resultado da previsão. Portanto, um grande desafio na modelagem FTS é a escolha de técnicas que podem ser utilizadas em cada uma de suas etapas.

Uma possibilidade para estimar a quantidade e o comprimento dos intervalos, quando essas informações são desconhecidas, é por meio do agrupamento. Além disso, notou-se que os trabalhos existentes na literatura utilizam séries com comportamento não-estacionário, de grande e pequeno tamanho, como as séries de matrícula da Universidade do Alabama e os índices de ações da TAIEX. Por fim, observa-se, ainda, que as métricas mais utilizadas para avaliar os trabalhos propostos são MSE e RMSE. A Tabela 3.1 resume os trabalhos apresentados neste capítulo.

Tabela 3.1 Sumarização dos trabalhos relacionados.

Trabalho	Ordem	Variância no Tempo	Dataset	Quantidade de Conjuntos Fuzzy	Comprimento dos Intervalos	Métricas
(HUARNG, 2001a)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TAIEX	Manual	Baseado na média e distribuição	MSE
(YU, 2005a)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TAIEX	Manual	Processo de Refinamento	Average Errors e RMSE
(CHENG; CHANG; YEH, 2006)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TI de Taiwan	Manual	MEPA e TFA	MSE
(HUARNG; YU, 2006a)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TAIEX	Manual	Proporção e Percentil	RMSE
(LI; CHENG, 2007)	Alta Ordem	Invariante	Matrícula de Alabama	Manual	Subseqüência de Comprimento Máximo Determinística	MSE
(LI; CHENG; LIN, 2008)	Alta Ordem	Variante	Temperatura	Atribuição Exaustiva	Agrupamento FCM	AFER, MSE
(KOO et al., 2009b)	Híbrido	Invariante	Matrícula de Alabama	PSO	PSO	MSE
(CHEN; WANG; PAN, 2009)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama	Manual	Agrupamento	MSE
(CHEN; TANUWIJAYA, 2011)	Alta Ordem	Invariante	TAIEX	Agrupamento	Agrupamento	RMSE
(CAI et al., 2013)	Primeira	Invariante	TAIEX	Algoritmo Genérico	Algoritmo Genérico	RMSE
(CHEN; KAO, 2013)	Primeira	Invariante	TAIEX	PSO	PSO	RMSE
(WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013)	Primeira	Variante	DAX, Matrícula do Alabama	Manual	Grânulos de Informação e Agrupamento Fuzzy	MSE
(EGRIOGLU; ALADAG; YOLCU, 2013)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama	Atribuição Exaustiva	Fuzzy C-Means	MSE
(WANG et al., 2014)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TAIEX	Manual	Agrupamento GG	MSE
(LU et al., 2015)	Primeira	Invariante	Matrícula de Alabama, TAIEX, <i>The civilian unemployment rates</i>	Manual	Grânulos de Informação	RSME, NE, NNE
(DINCER; AKKUŞ, 2018)	Primeira	Invariante	Temperatura	Manual	Agrupamento Fuzzy <i>K-Medoids</i>	RSME, PB
(WU; LONG; JIANG, 2019)	Primeira Ordem	Invariante	TAIEX	Silhueta Fuzzy	Agrupamento Fuzzy <i>C-Means</i>	RSME

ABORDAGENS PROPOSTAS

4.1 VISÃO GERAL

Este capítulo apresenta duas abordagens desenvolvidas para melhorar a etapa de fuzzificação realizada na modelagem de Series Temporais Fuzzy. Ambas as abordagens foram desenvolvidas considerando a hipótese apresentada no capítulo de introdução e nos conceitos discutidos fundamentação teórica.

4.2 METODOLOGIA

Conforme discutido no Capítulo 2, modelos FTS podem ser divididos em três etapas: fuzzificação, geração de relacionamentos lógicos fuzzy e defuzzificação. Grande parte dos trabalhos presentes na literatura exploraram a etapa de fuzzificação visando fornecer melhorias no modelo FTS por meio da redução de erros em tarefas de previsão. Nessa etapa, o fator mais explorado foi a definição do comprimento dos intervalos para realizar a modelagem dos conjuntos fuzzy. Entretanto, existe um fator que antecede a definição dos comprimentos dos intervalos, o qual interfere diretamente no melhor comprimento dos intervalos, e conseqüentemente, na modelagem dos conjuntos fuzzy. Esse fator é a quantidade de conjuntos fuzzy, que foi pouco explorado na literatura e, quando não definido corretamente, leva a problemas como descrição errada da distribuição dos dados, afetando a estimação do comprimentos dos intervalos. Além disso, é importante destacar que, ao considerar intervalos de diferentes comprimentos, pode-se melhor representar o universo do discurso.

Visando então superar essa limitação, foram desenvolvidas duas abordagens a fim de comprovar a seguinte hipótese: *A remoção da dependência temporal e a análise das influências estocásticas e determinísticas em séries temporais permitem que conjuntos fuzzy representem, de maneira mais adequada, o universo de discurso destas séries e, conseqüentemente, reduzam erros de previsão.*

A primeira abordagem, voltada a séries com influências estocásticas, faz uso do método *Empirical Mode Decomposition* para extrair componentes (IMFs – Intrinsic Mode Functions) que representam diferentes influências estocásticas e determinísticas. Em seguida,

IMFs com comportamento estocásticos (representando ruídos) são descartadas, enquanto as demais (IMFs determinísticas e o resíduo) são somadas para compor uma representação suavizada ($X'(t)$) da série original ($X(t)$). Posteriormente, as séries $X(t)$ e $X'(t)$ são organizadas em um gráfico de dispersão, o qual produz um novo conjunto de dados bidimensional adequado para aplicação de métodos de agrupamento (e.g. FCM). As estruturas formadas pelos métodos de agrupamento são úteis, então, para modelar os conjuntos fuzzy que representarão o universo de discurso das séries analisadas. Essa abordagem foi nomeada como *Filtered Fuzzy Time Series (f-FTS)*.

Durante a análise experimental, notou-se que esse processo de remoção da dependência temporal usando o gráfico de dispersão não é adequado quando séries determinísticas são analisadas. Nesse contexto, a relação temporal entre as observações está presente em diferentes atrasos no tempo. A partir dessa observação, foi desenvolvida uma segunda abordagem que utiliza conceitos e ferramentas da área de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos. Tais ferramentas auxiliam o estudo da série no espaço fase, o qual permite analisar suas observações em um número maior de dimensões. Após a reconstrução, todas as demais etapas executadas por *f-FTS* são consideradas nessa nova abordagem, a qual foi nomeada como *Fuzzy Dynamical Time Series (FDynTS)*.

A Figura 4.1 resume todas as etapas utilizadas em ambas as abordagens desenvolvidas, sendo que as alterações desenvolvidas nessa dissertação estão destacadas em azul. A primeira etapa consiste em estimar a quantidade de conjuntos fuzzy e, para tal tarefa, utilizou-se índices de validação (IV) de agrupamento: Silhueta, Silhueta Fuzzy (SF), *Xie And Beni Index* (XB), *Modified Partition Coefficient* (MPC), *Wu-and-Li index* (WLI), *PBMF-index*, e *K index*. A segunda etapa consiste em modelar os conjuntos fuzzy, utilizando o algoritmo Fuzzy C-Means, o qual foi escolhido pela sua capacidade em tratar a incerteza e imprecisão inerente aos dados. Na etapa seguinte, utilizou-se de regras de primeira ordem invariantes no tempo por simplicidade, embora as etapas anteriores sejam aplicáveis em modelos de alta ordem variantes no tempo.

A avaliação da etapa de fuzzificação foi realizada com base nos modelos conhecidos na literatura propostos por Chen (1996) e Lee, Efendi e Ismail (2009b). As etapas de geração de relacionamentos lógico fuzzy (FLR) e defuzzificação de (CHEN, 1996) e (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009b) foram apresentadas nas Definições 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.8. A Figura 4.2 resume toda a metodologia utilizada para avaliar as abordagens desenvolvidas.

A validação do trabalho foi realizada de duas maneiras. Primeiro, bases de dados sintéticas foram criadas para verificar se o comportamento teórico, de fato, acontece de maneira esperada como nos testes empíricos. Além disso, bases de dados reais também foram consideradas visando garantir uma análise de acordo com os trabalhos existentes na literatura. Nesse sentido, foram utilizadas diversas bases, variando características desde estocasticidade, determinismo, estacionariedade e linearidade. Para avaliação dos resultados obtidos durante os experimentos deste projeto, foram adotadas as métricas MSE, MAE, MAPE e RMSE, comumente utilizadas na literatura, bem como *Dynamic Time Warping* (DTW) (DING et al., 2008), o qual permite avaliar não apenas valores individuais, mas também o comportamento geral das previsões.

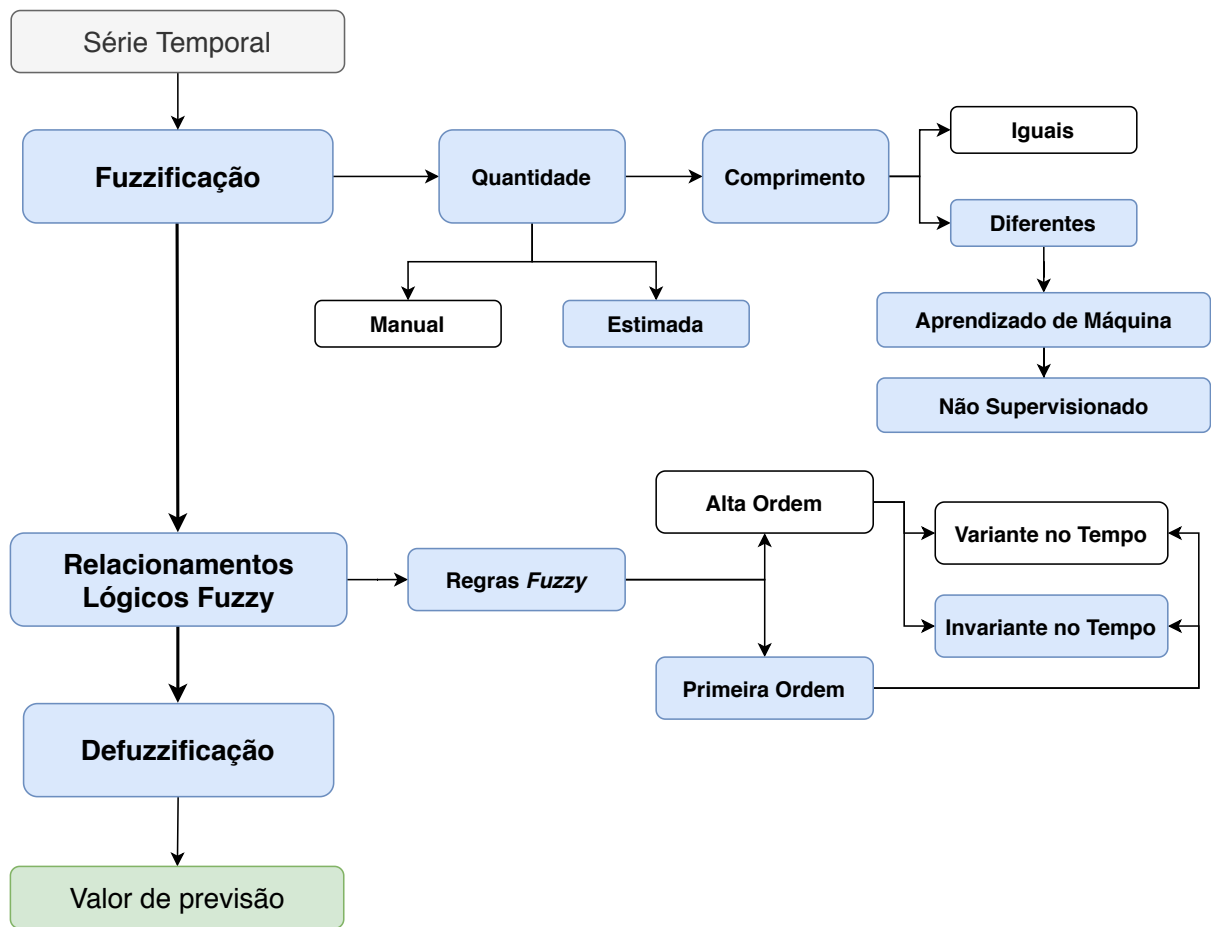


Figura 4.1 Passos adotados para desenvolvimento das abordagens propostas.

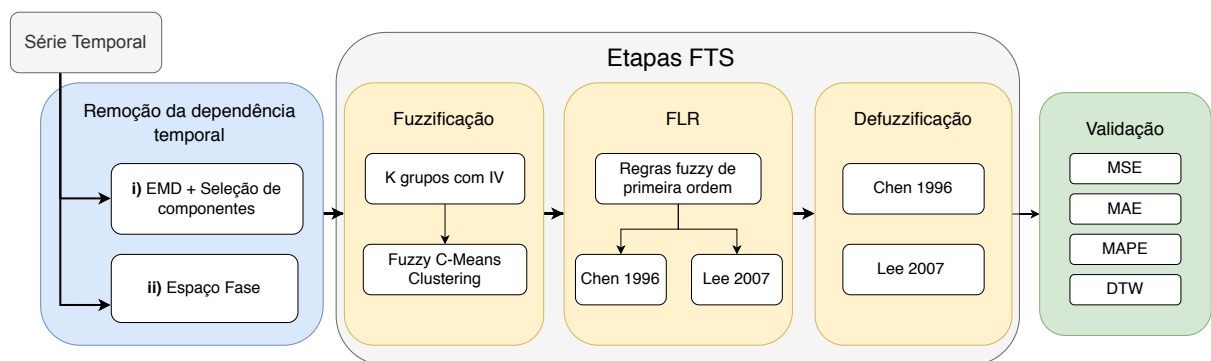


Figura 4.2 Fluxograma da metodologia utilizada para avaliar abordagens desenvolvidas.

EXPERIMENTOS E RESULTADOS

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo apresenta experimentos e resultados obtidos a partir das duas abordagens desenvolvidas para a etapa de fuzzificação em séries com influências determinísticas. Nesse sentido, os experimentos foram organizados em duas seções. O primeiro experimento, apresentado na Seção 5.2, foi realizado com a abordagem que aplica decomposição para remoção da influência estocástica. Nessa abordagem, são utilizadas séries reais para estimação da quantidade e modelagem dos conjuntos fuzzy. Para tanto, foram realizados os seguintes experimentos: (i) comparação dos resultados com o estado da arte; (ii) avaliação quantitativa para verificar o desempenho dos índices de validação de agrupamento para estimação da quantidade de conjuntos; e (iii) avaliação da previsão com observações não utilizadas na modelagem – embora pareça uma realização usual em Aprendizado de Máquina, observamos que muitos trabalhos publicam resultados da etapa de treinamento e validação, sem considerar um conjunto de teste (exemplos não vistos para avaliar o modelo final). Na Seção 5.3 é apresentado o segundo experimento voltado para a abordagem que trata séries temporais com comportamento caótico. Para essa abordagem, séries temporais sintéticas foram utilizadas, e os resultados foram comparados com a primeira abordagem proposta.

5.2 ABORDAGEM 01 – FILTERED FUZZY TIME SERIES (f -FTS)

O processo de modelagem de séries temporais com influência estocástica é especialmente complexo devido à presença de ruído em suas observações. A primeira abordagem desenvolvida, chamada *Filtered Fuzzy Time Series* (f -FTS), é caracterizada por uma etapa de decomposição antes de proceder com a modelagem FTS, conforme discutido no Capítulo 4.

Visando explicar em detalhe cada etapa da abordagem f -FTS, essa seção foi subdividida em duas partes. Inicialmente, na Subseção 5.2.1, apresenta-se um exemplo prático e ilustrativo de cada etapa da abordagem. Nas subseções subsequentes, são apresentados os resultados experimentais obtidos com diferentes séries temporais, comumente utilizadas na literatura FTS.

5.2.1 Exemplo Ilustrativo

Esta seção ilustra o funcionamento das 4 etapas da abordagem f -FTS na modelagem de uma série temporal, cujas observações foram produzidas a partir do registro de matrículas na Universidade do Alabama (Figura 5.1(a)). Optou-se por utilizar essa série por três razões principais: (i) é amplamente utilizada na literatura FTS; (ii) possui poucas observações, o que permite realizar uma análise visual; e (iii) possui claramente os três componentes não-observáveis (tendência, sazonalidade e ruído).

5.2.1.1 Etapa 01 – Remoção de Ruído e da Dependência Temporal. A primeira etapa da abordagem f -FTS consiste em, inicialmente, extrair componentes implícitos na série temporal analisada. Essa extração é realizada pelo método EMD (*Empirical Mode Decomposition*), resultando em uma sequência de IMFs (Figuras 5.1(b) - c)) e um resíduo (Figura 5.1(d)).

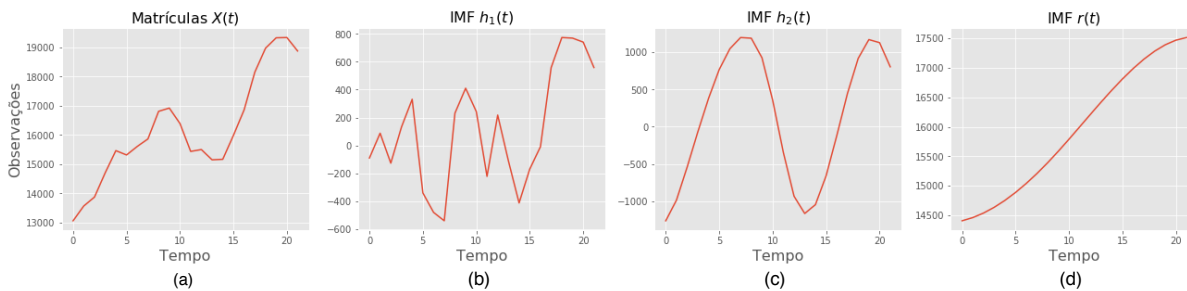


Figura 5.1 Decomposição utilizando o EMD.

Ao observar os componentes extraídos, pode-se notar que a primeira IMF (Figura 5.1(b)) representa um comportamento estocástico, enquanto que a segunda IMF (Figura 5.1(c)) representa um comportamento sazonal determinístico. Por fim, Figura 5.1(d) representa o resíduo produzido pela EMD, que representa uma tendência positiva.

Em seguida, a abordagem f -FTS descarta a primeira IMF e adiciona a segunda IMF com o resíduo, produzindo assim uma série temporal suavizada $X'(t) = h_2(t) + r(t)$, i.e.,

sem influência de ruído. A série temporal original e sua versão suavizada são apresentadas nas colunas “Matrícula” e “ $X'(t)$ ” da Tabela 5.1.

Por fim, ainda nesta primeira etapa, a remoção da dependência temporal é realizada por meio de uma representação bidimensional obtida com a combinação das séries “Matrícula” e “ $X'(t)$ ” (Figura 5.2(a)). Essa representação é comumente utilizada em análise gráfica de dispersão (Figura 5.2(b)). Esse novo conjunto de dados bidimensional é, então, agrupado pelo algoritmo FCM, cuja estrutura resultante é destacada pelas diferentes cores exibidas nas Figura 5.2(b).

5.2.1.2 Etapa 02 – Modelagem dos conjuntos Fuzzy. É sabido que o algoritmo FCM produz grupos com formato gaussiano devido o cálculo das pertinências, discutido na Equação 2.15, cujo intervalo é limitado em $[0, 1]$ para cada observação x_t . Ao contrário da função de pertinência triangular ou trapezoidal, onde é necessário definir limites inferior e superior para calcular as pertinências, a função gaussiana não necessita de tais parâmetros, podendo atribuir associação de todos os conjuntos fuzzy a uma determinada observação x_t .

Neste experimento, FCM foi aplicado com a seguinte configuração: $c = 7$ grupos, o fator de fuzzificação $m = 2$, o número máximo de iterações igual a 1000, e 1×10^{-5} como menor valor de melhoria da função objetivo entre duas iterações. As funções gaussianas obtidas a partir do agrupamento foram consideradas como conjuntos fuzzy: A_1, A_2, \dots, A_7 . A Figura 5.2(b) apresenta o resultado do agrupamento selecionando o maior grau de associação de uma observação x_t para indicar seu pertencimento a um determinado grupo $A_j, j = 1, \dots, c$.

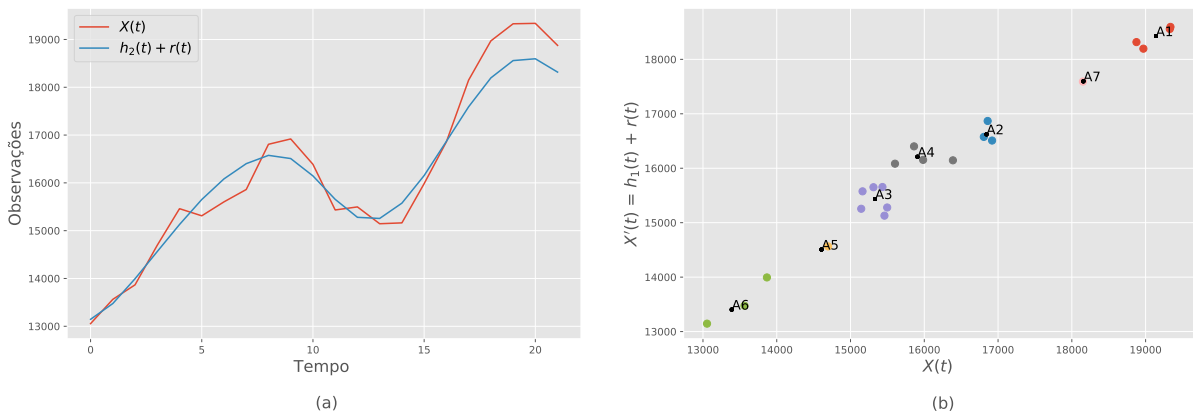


Figura 5.2 (a) Série Temporal de Matrículas da Universidade do Alabama $X(t)$ (Matrícula) e sua versão suavizada $X'(t)$. (b) Resultado do agrupamento do FCM.

A Figura 5.3(a) apresenta a visualização do resultado do agrupamento obtido com o FCM, apresentando $X(t)$ no eixo x do plano cartesiano, $X'(t)$ no eixo y e os graus de pertinência u_{ij} no eixo Z . Para realizar alguma inferência apenas no domínio de $X(t)$, as funções de pertinência mantêm o mesmo padrão do resultado do agrupamento se calculadas com os centroides do FCM na coordenada x . Isso é importante quando é

preciso realizar a previsão de novas observações quando há apenas o valor da observação atual x_t . A Figura 5.3(b) apresenta o formato das funções de pertinência dos conjuntos fuzzy para o domínio da série $X(t)$.

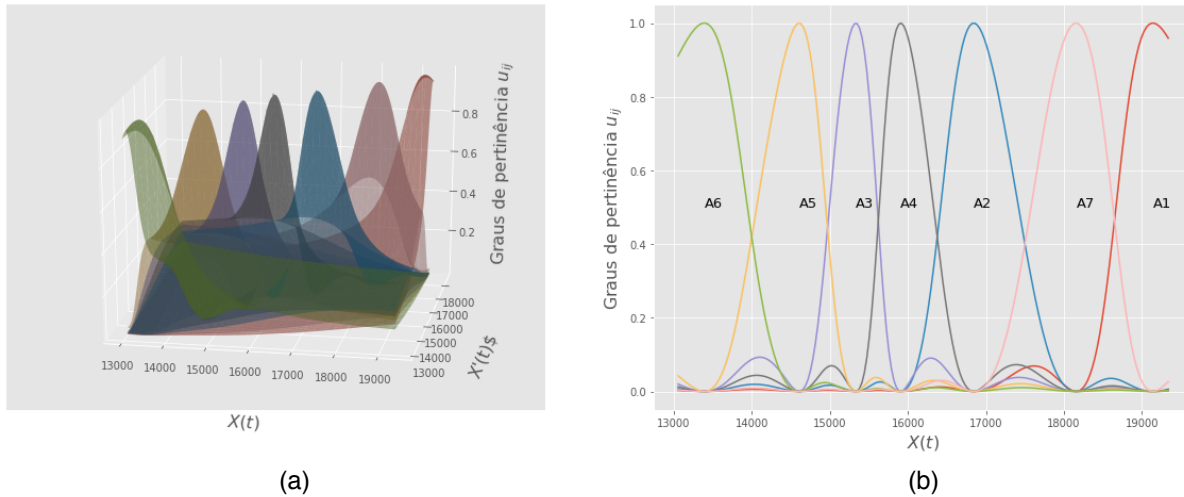


Figura 5.3 (a) Visualização das funções de pertinência do FCM no plano multi-dimensional. (b) Representação das funções em duas dimensões.

5.2.1.3 Etapa 03 – Relacionamento Lógico Fuzzy. Após modelar os conjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_7 com o agrupamento obtido pelo algoritmo FCM, a próxima etapa consiste em atribuir a cada observação x_t um conjunto fuzzy A_j . A Tabela 5.1 apresenta o resultado dessa atribuição para toda a série de $X(t)$ (Matrícula) e sua versão suavizada $X'(t)$ na coluna “Conjunto fuzzy”, bem como o resultado da previsão.

Tabela 5.1 Matrículas da Universidade do Alabama.

Ano	Matrícula	$X'(t)$	Conjunto fuzzy	Previsão	Ano	Matrícula	$X'(t)$	Conjunto fuzzy	Previsão
1971	13055	13146	A6	-	1982	15433	15655	A3	16028.04
1972	13563	13476	A6	13998.54	1983	15497	15280	A3	15620.20
1973	13867	13994	A6	13998.54	1984	15497	15256	A3	15620.20
1974	14696	14563	A5	13998.54	1985	15163	15574	A3	15620.20
1975	15460	15128	A3	15332.84	1986	15984	16152	A4	15620.20
1976	15311	15652	A3	15620.20	1987	16859	16869	A2	16028.04
1977	15603	16083	A4	15620.20	1988	18150	17594	A7	16969.24
1978	15861	16403	A4	16028.04	1989	18970	18197	A1	19139.96
1979	16807	16576	A2	16028.04	1990	19328	18559	A1	19139.96
1980	16919	16508	A2	16969.24	1991	19337	18597	A1	19139.96
1981	16388	16143	A4	16969.24	1992	18876	18317	A1	19139.96

Para obter os relacionamentos lógicos fuzzy, foram utilizadas regras de primeira ordem e invariantes no tempo propostas por (CHEN, 1996). A Tabela 5.2 apresenta os relacionamentos criados para a série de matrículas da Universidade do Alabama. Em

seguida, são obtidos grupos de Relacionamentos Lógicos Fuzzy que possuem o mesmo antecedente, conforme apresentado na Tabela 5.3.

Tabela 5.2 Relacionamentos Lógicos Fuzzy obtidos a partir da série de matrículas da Universidade do Alabama.

$A_1 \rightarrow A_1$	$A_2 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_4$	$A_2 \rightarrow A_7$	$A_3 \rightarrow A_3$
$A_3 \rightarrow A_4$	$A_4 \rightarrow A_2$	$A_4 \rightarrow A_3$	$A_4 \rightarrow A_4$	$A_5 \rightarrow A_3$
$A_6 \rightarrow A_5$	$A_6 \rightarrow A_6$	$A_7 \rightarrow A_1$		

Tabela 5.3 Grupos de Relacionamentos Lógicos Fuzzy obtidos para a série de matrículas na Universidade do Alabama.

Group 1: $A_1 \rightarrow A_1$
Group 2: $A_2 \rightarrow A_2$ $A_2 \rightarrow A_4$ $A_2 \rightarrow A_7$
Group 3: $A_3 \rightarrow A_3$ $A_3 \rightarrow A_4$
Group 4: $A_4 \rightarrow A_2$ $A_4 \rightarrow A_3$ $A_4 \rightarrow A_4$
Group 5: $A_5 \rightarrow A_3$
Group 6: $A_6 \rightarrow A_6$
Group 7: $A_7 \rightarrow A_1$

5.2.1.4 Etapa 04 – Defuzzificação. Na etapa de defuzzificação, os conjuntos fuzzy preditos são convertidos em um número real. Neste exemplo ilustrativo, essa etapa é realizada levando em consideração a abordagem proposta por Chen (1996). Para exemplificar, suponha que o Grupo 3 da Tabela 5.3 foi selecionado durante o processo de inferência. No processo de defuzzificação, os pontos médios m_3 e m_4 dos conjuntos A_3 e A_4 preditos são convertidos em um valor real $M(t) = \frac{m_3+m_4}{2} = \frac{15332.84+15907.56}{2} = 15620.2$.

A Figura 5.4(a) ilustra a série original (em vermelho) e o resultado da previsão (em azul). Para medir a qualidade da previsão, utilizou-se duas medidas comumente utilizada na área de Análise de Séries Temporais: DTW e MSE. A Figura 5.4(b) representa o *warping path* entre essa duas séries (original e predita). Numericamente, essas duas medidas forneceram os seguintes valores: DTW=132 e MSE=236878.

5.2.2 Configuração da Simulação Completa

Esta seção apresenta a configuração experimental conduzida para comparar *f*-FTS com abordagens relacionadas existentes na literatura (WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013; CHEN; KAO, 2013; LU et al., 2015; Santos; Camargo, 2013). Nesse sentido, os experimentos foram conduzidos sobre três séries temporais comumente utilizadas no estado da arte: (i) matrículas da Universidade do Alabama, a qual possui 22 observações anuais entre 1971 a 1992; (ii) o Índice de ações TAIEX, o qual possui 281 observações diárias no ano de 1992; e (iii) Germany's DAX stock index, a qual possui 182 observações mensais entre janeiro de 1990 e dezembro de 2006. Adicionalmente, optou-se por utilizar 3 outras

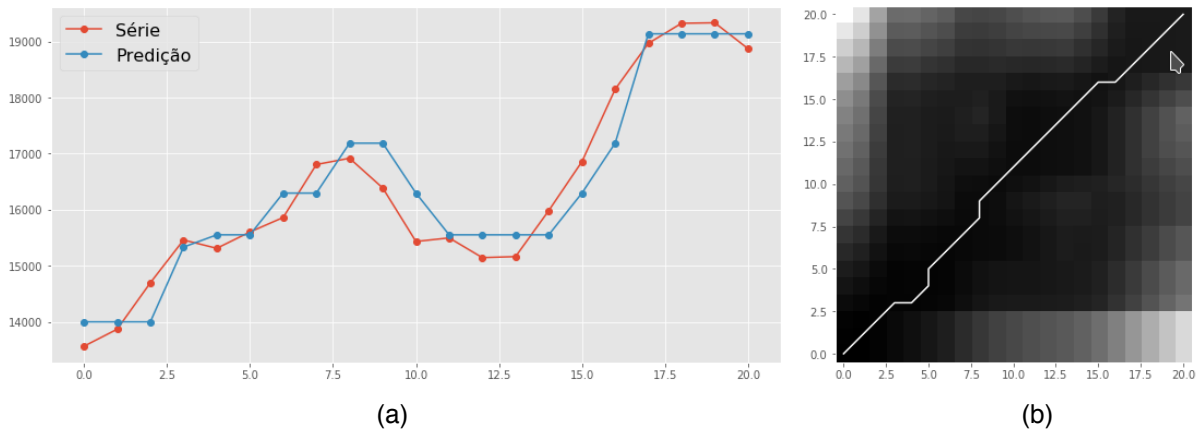


Figura 5.4 Resultado da previsão em (a) e a matrix de custo DTW com a linha diagonal no *warping path* em (b).

séries temporais: (i) temperatura da cidade de Cananeia¹, estado de São Paulo, com 120 observações mensais entre os anos de 1976 a 1985; (ii) Produção Física Industrial¹ com 114 observações mensais entre os anos de 1991 a 2000; e (iii) índice de ações da Ibovespa² com 228 observações mensais entre os anos de 2000 a 2018. O universo de discurso de cada série temporal foi definido da seguinte forma: Alabama = [13000, 20000], TAIEX 1992 = [3000, 5500], DAX = [1000, 8000], Temperatura = [15, 30], PFI = [70, 150] e Ibovespa = [8600, 89600].

5.2.3 Comparação com o Estado da Arte

A avaliação da abordagem f -FTS foi realizada comparando dos resultados de previsão obtidos com as seguintes abordagens: (i) Chen, 1996 (CHEN, 1996); (ii) Lee, Efendi and Ismail, 2009 (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a); e (iii) Wang, Liu and Pedrycz, 2013 (WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013).

Os trabalhos de Chen (1996) e Lee, Efendi e Ismail (2009a) foram selecionados porque a abordagem proposta faz uso das etapas de relacionamento lógico fuzzy e defuzzificação considerados nestes trabalhos. O trabalho de (WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013) tem escopo similar ao trabalho proposto, com melhorias na etapa de fuzzificação utilizando FCM e os métodos de (CHEN, 1996; LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a) na etapa de relacionamento lógico fuzzy e defuzzificação.

Na primeira análise, foram selecionadas apenas as séries temporais Alabama, TAIEX e DAX, uma vez que elas também foram analisadas nos demais trabalhos. Para todas as séries utilizadas neste experimento, foram utilizados 7 conjuntos fuzzy, por ser um número já utilizado na literatura, em especial nas séries do alabama e TAIEX. A Tabela 5.4 apresenta os primeiros resultados de previsão, no qual a coluna “Dataset” lista as séries temporais utilizadas e as demais colunas apresentam os resultados obtidos usando diferentes abordagens. Os resultados foram comparados usando MSE como usualmente

¹<https://www.ime.usp.br/~pam/ST.html>

²<https://www.infomoney.com.br/cotacoes/ibovespa/>

considerado na literatura.

Pela comparação individual das abordagens (i) e (ii), colunas “Chen” e “Lee”, respectivamente, é possível observar que o último apresentou erros mais baixos devido à função de ponderação utilizada nos estágios de produção dos relacionamentos fuzzy e defuzzificação. Como consequência, todas as combinações utilizando a abordagem de Lee obtiveram melhores resultados. Na comparação geral, a abordagem apresentada neste trabalho melhorou a modelagem das séries temporais em todos os cenários, o que levou a baixos erros de previsão.

Tabela 5.4 Comparação dos resultados obtidos com diferentes abordagens utilizando 7 grupos

Dataset	Abordagens					
	Chen	Lee	Wang + Chen	Wang + Lee	<i>f</i> -FTS + Chen	<i>f</i> -FTS + Lee
Alabama	407521	407304	334450	259670	236878	219032
TAIEX 1992	15253	10168	31678	100697	13610	8379
DAX	191204	166947	219219	198019	177745	107032

5.2.4 Avaliação de agrupamento

Os resultados apresentados anteriormente foram obtidos após considerar as mesmas etapas definidas em trabalhos relacionados (CHEN, 1996; LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a; WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013), incluindo a quantidade de conjuntos fuzzy definidos originalmente pelos autores. Tais parâmetros são tipicamente definidos por especialistas. No entanto, nesta seção são apresentadas análises sobre as mesmas séries utilizadas anteriormente usando quantidades diferentes de conjuntos fuzzy que foram obtidos pelo processo de agrupamento.

Assim, este segundo experimento foi realizado considerando diferentes índices de validação de agrupamento, como apresentado na Tabela 5.5, e variando a quantidade de grupos no intervalo $c = [2, n - 1]$, tal que n é a quantidade total de observações na série. Após selecionar a quantidade ótima de grupos, estes grupos foram utilizados como conjuntos fuzzy da abordagem proposta em combinação com a abordagem de Lee, a qual obteve melhor resultado anteriormente. Além disso foi conduzido um *grid search*, pelo qual várias simulações foram efetuadas para diferentes quantidades de conjuntos fuzzy variando de $[2, n - 1]$.

De acordo com a Tabela 5.5 é possível observar que os menores erros (em negrito) foram obtidos maximizando a quantidade de grupos. Tais resultados podem indicar que os modelos sofreram overfitting, aumentando a complexidade computacional, uma vez que muitos grupos são compostos de apenas uma única observação.

Após uma análise cuidadosa nos experimentos, foi identificado que o problema estava nos dados analisados, os quais apresentaram comportamento diagonal no plano após a etapa de fuzzificação. Uma vez que essas séries temporais são fortemente afetadas por ruídos, o processo de decomposição retorna observações muito similares às observações originais, por preservar o mesmo comportamento de tendência da série de origem $X(t)$

Tabela 5.5 Estimativa da quantidade de conjuntos fuzzy

Índices de Validação de Agrupamento	Dataset					
	Alabama		TAEIX		DAX	
	Quantidade de conjuntos	MSE	Quantidade de conjuntos	MSE	Quantidade de conjuntos	MSE
Fuzzy Silhouette	2	747,929	2	58,126	3	359,922
XB	19	10,780	2	58,126	3	359,922
MPC	20	11,346	275	40,831	173	150,224
WLI	19	10,780	279	40,767	180	150,014
PBMF	19	10,780	279	40,767	180	150,014
K	2	747,929	2	58,126	3	359,922
Grid Search	21	9,925	255	223	138	1,626

(Figura 5.2(b)). É importante enfatizar que, embora a seleção empírica da quantidade de grupos tenha obtido melhores resultados, opiniões de especialistas são mais precisas para determinar a quantidade de conjuntos fuzzy. O procedimento apresentado nesta seção é mais adequado quando às séries temporais são fortemente influenciadas por ruídos e não há nenhuma informação disponível sobre os conjuntos fuzzy, como exemplificado nos próximos experimentos.

5.2.5 Avaliação empírica

Nesta última análise experimental, três séries temporais com forte influência de ruídos e nenhuma informação prévia sobre a quantidade de conjuntos fuzzy foram utilizadas. Os mesmos procedimentos dos experimentos anteriores foram considerados, exceto o processo de previsão. Após analisar os trabalhos relacionados na Seção 3, observou-se que, nestes trabalhos, um subconjunto de observações das séries temporais utilizadas no treinamento é selecionado para previsão (CHEN, 1996; HUARNG, 2001a; HUARNG; YU, 2006b; LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a; WANG; LIU; PEDRYCZ, 2013). Diferentemente destes trabalhos, optou-se por utilizar a estratégia *hold-out*, na qual 80% das observações foi selecionado para treinamento e 20% para teste. Desta maneira, é assegurado que nenhum dado de treinamento é utilizado para teste e análise das predições.

A quantidade de conjuntos fuzzy escolhida neste último experimento foi realizada considerando um *grid search*, similar ao que foi apresentado na Seção 5.2.4, que foi realizado visando reduzir a quantidade de grupos quando comparado aos índices de validação de agrupamento, os quais forneciam erros mais baixos (Tabela 5.5). Portanto, todas as abordagens de modelagem fuzzy de séries temporais utilizadas neste experimento, não apenas *f*-FTS, utilizaram a quantidade ótima de conjuntos fuzzy indicada pelo *grid search*³. Finalmente, é importante destacar que os valores preditos foram analisados quantificando o erro (MSE) e verificando se o comportamento geral da série temporal (tendência e sazonalidade) foi adequadamente modelado (DTW). Os resultados obtidos com todas as três séries temporais são apresentados nas Tabelas 5.6, 5.7 e 5.8.

³É importante lembrar que o *grid search* foi realizado executando todas as abordagens com configurações diferentes e apenas o melhor resultado para cada abordagem é apresentado nas tabelas.

Tabela 5.6 Previsão de temperatura da cidade de Cananea

Abordagem	#Conjuntos fuzzy	MSE (treinamento)	MSE (teste)	DTW (treinamento)	DTW (teste)
Chen	113	1.3	14.83	0.307	1.28
Lee	114	1.4	19.31	0.338	1.39
Wang + Chen	5	3.9	10.1	0.580	1.31
Wang + Lee	4	3.5	20.18	0.497	1.84
f -FTS + Chen	118	0.02	23.3	0.007	1.41
f -FTS + Lee	72	1.9	8.18	0.251	0.99

Tabela 5.7 Previsão da produção física industrial

Abordagem	#Conjuntos fuzzy	MSE (treinamento)	MSE (teste)	DTW (treinamento)	DTW (teste)
Chen	110	26.88	192.77	1.54	4.00
Lee	110	28.92	122.72	1.60	3.84
Wang + Chen	15	57.1	274.94	1.49	6.84
Wang + Lee	19	56.58	260.66	0.497	6.66
f -FTS + Chen	112	0.51	214.76	0.06	5.96
f -FTS + Lee	90	7.4	78.32	0.64	2.42

Tabela 5.8 Previsão do Ibovespa

Abordagem	#Conjuntos fuzzy	MSE (treinamento)	MSE (teste)	DTW (treinamento)	DTW (teste)
Chen	221	3665262	306482731	466.05	7033
Lee	221	4039193	473355113	471.06	8636
Wang + Chen	110	5795241	370365897	535.60	7657
Wang + Lee	110	5719996	370365897	529.67	7657
f -FTS + Chen	226	20650	329238329	7.66	7127
f -FTS + Lee	98	2501916	329957517	469.11	7131

5.2.6 Discussão

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 5.6, 5.7 e 5.8, foi possível obter duas conclusões: primeiro, os resultados confirmam que a abordagem f -FTS fornece melhores resultados em todos os experimentos, enfatizando a importância da decomposição de séries temporais para reduzir influências estocásticas e o uso de regras fuzzy para modelar a imprecisão e incerteza presente nas observações; segundo, foi observada a necessidade de separar as observações das séries temporais modeladas em subconjuntos de treinamento e teste. O erro medido quando foram analisadas as observações não vistas, conjunto de teste, apresenta um cenário mais realista especialmente quando são adotados modelos invariantes no tempo, ou seja, quando os modelos não são atualizados com novas observações coletadas.

Por fim, a aplicação do *Grid Search* nos modelos e bases não utilizadas na literatura demonstrou que o melhor conjunto de conjuntos fuzzy fica mais próximo ao tamanho da série n . Apesar de melhorar os resultados de previsão, a utilização de muitos conjuntos aumenta a granularidade dos relacionamentos lógicos fuzzy, podendo acarretar em um elevado custo computacional, e sobretudo, dificultar a interpretação de regras fuzzy por especialistas. Entretanto, a maior limitação da abordagem f -FTS está no processo de

remoção da dependência temporal. A utilização da série com sua versão suavizada pode não ser eficiente quando essa dependência acontece com diferentes deslocamentos (lags). Visando superar essa limitação, a próxima seção apresenta uma nova abordagem.

5.3 ABORDAGEM 02 – FUZZY DYNAMICAL TIME SERIES (FDynTS)

Esta seção apresenta a abordagem Fuzzy Dynamical Time Series (FDynTS) desenvolvida para modelar a etapa de fuzzificação em Séries Temporais Fuzzy, quando diferentes atrasos (lags) determinam a relação temporal entre as observações. O estudo desses atrasos foi conduzido por meio das ferramentas disponibilizadas pela área de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos. De maneira resumida, essas ferramentas permitem reconstruir séries temporais em um espaço maior de dimensão (geralmente chamado de espaço fase), o qual permite descrever melhor as relações entre suas observações.

Assim, a principal alteração em relação à abordagem anterior foi realizada na primeira etapa. Após reconstruir a série analisada no espaço fase, todo o processo restante é similar à abordagem f -FTS, ou seja, os conjuntos fuzzy são modelados através do agrupamento FCM aplicado sobre o espaço fase e, então, são formados os relacionamentos lógicos fuzzy e defuzzificação.

A avaliação da abordagem FDynTS foi conduzida comparando com a abordagem f -FTS. Para tanto, utilizou-se neste experimento séries temporais determinísticas bem conhecidas na literatura produzidas pelos seguintes sistemas e mapas: Lorenz, Rössler, Logístico e Hénon (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996; SWIERCZ, 2006). A Figura 5.5 ilustra estas séries no domínio temporal.

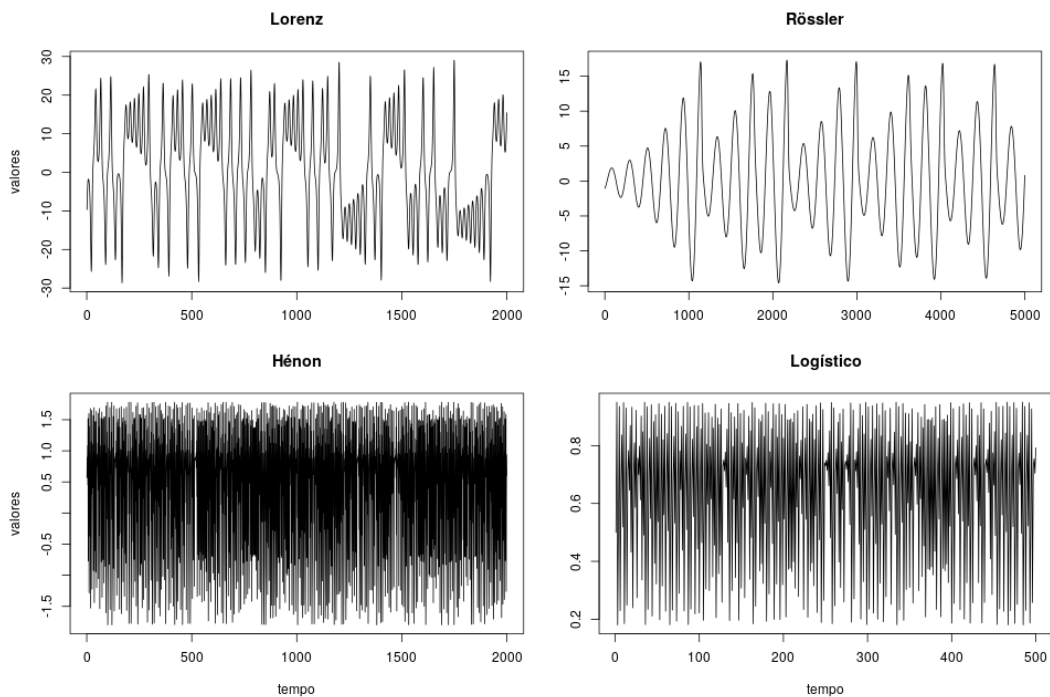


Figura 5.5 Séries Temporais com comportamento caótico utilizadas para avaliar a abordagem FDynTS.

5.3.1 Configuração dos Experimentos

Para reconstrução da série no espaço fase, usou-se valores conhecidos da dimensão embutida m e de separação τ estimados pelas técnicas de *False Nearest Neighbors* e *Auto Mutual Information*. Para a série criada com sistema de Lorenz usou-se $m = 3$ e $\tau = 2$, Rössler com $m = 3$ e $\tau = 1$, Mapa Logístico com $m = 1$ e $\tau = 1$ e Mapa de Hénon com $m = 2$ e $\tau = 1$. A Figura 5.6 apresenta as séries reconstruídas no espaço fase. Em seguida o agrupamento com o FCM foi aplicado para modelagem dos conjuntos com diferentes quantidades de grupos. As quantidades de grupos utilizadas foram $c = \{3, 5, 7, 9\}$, para testar a variação da abordagem.

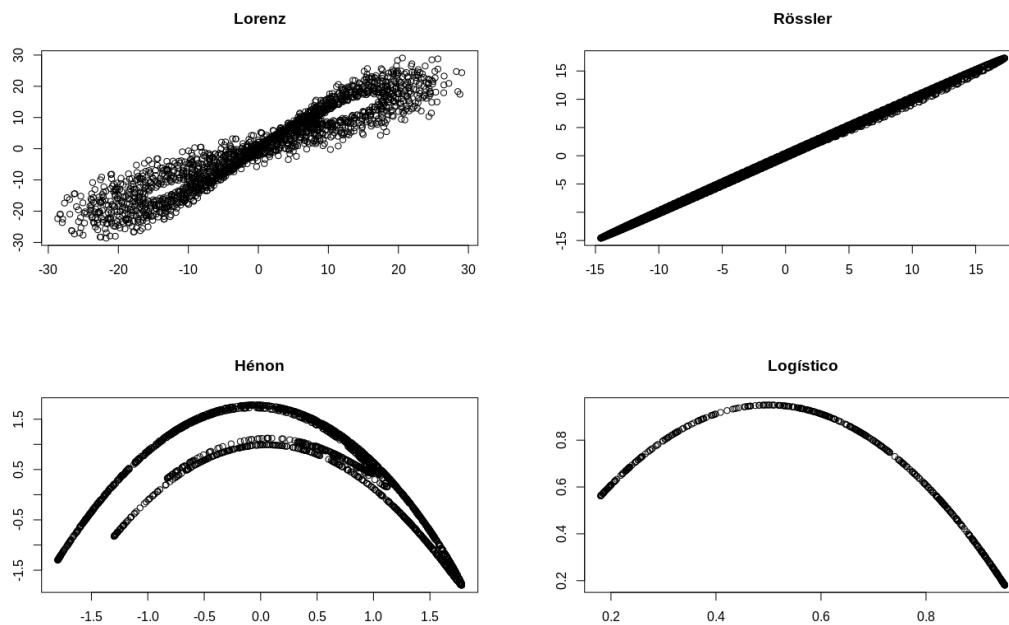


Figura 5.6 Reconstrução das séries no Espaço Fase. Cada série forma um atrator que pode evidenciar como as observações evoluem ao longo do tempo, facilitando a obtenção de regras geradoras de sistemas dinâmicos.

Após a reconstrução da série no espaço fase, aplicou-se os passos de fuzzificação, geração de relacionamentos lógicos fuzzy (FLR) e defuzzificação, utilizando os modelos de FLR e defuzzificação de (CHEN, 1996) e (LEE; EFENDI; ISMAIL, 2009a). Ao aplicar a modelagem FTS no espaço fase, cada previsão é realizada neste mesmo espaço, i.e., obtém-se como a saída de previsão um conjunto de valores para cada eixo multidimensional. Visando comparar a série original $X(t)$ com a série de valores preditos Y do espaço fase, a série Y foi reconstruída para sua representação temporal utilizando um processo inverso ao da reconstrução no espaço fase.

5.3.2 Resultados

De maneira resumida, a abordagem FDynTS apresentou em geral menores erros de previsão em relação a abordagem f -FTS. A Tabela 5.9 apresenta os resultados obtidos com série de Lorenz. Para essa série, em termos de MSE e MAE, os menores erros de previsão se destacaram na abordagem FDynTS com as FLR e defuzzificação propostas por Lee. Em termos de MAPE e DTW, houve alternância de menores erros de previsão entre as abordagens considerando todos os grupos, mas a medida que a quantidade de grupos aumenta, de 3 a 9, os menores erros de previsão tendem a ser produzidos pela abordagem FDynTS.

Tabela 5.9 Resultados de Previsão para série de Lorenz.

Abordagem	Grupos	MSE	MAE	MAPE	DTW
f -FTS + Chen	3	66.24	6.32	8.1	12024
f -FTS + Lee	3	37.52	5.07	5.9	10219
FDynTS + Chen	3	59.78	6.02	17.08	12399
FDynTS + Lee	3	25.89	4.22	18.34	10325
f -FTS + Chen	5	51.86	5.69	33.54	10923
f -FTS + Lee	5	20.34	3.58	11.59	7380
FDynTS + Chen	5	22.47	3.58	1.45	7695
FDynTS + Lee	5	13.32	2.86	0.92	6542
f -FTS + Chen	7	38.49	5.15	0.55	10258
f -FTS + Lee	7	16.74	3.28	0.60	6981
FDynTS + Chen	7	27.83	3.78	2.33	6197
FDynTS + Lee	7	11.85	2.66	1.02	6430
f -FTS + Chen	9	24.32	4.07	0.52	8315
f -FTS + Lee	9	13.20	2.95	1.07	6281
FDynTS + Chen	9	22.77	3.36	15.99	5518
FDynTS + Lee	9	8.87	2.29	0.96	5650

Para melhor compreender o comportamento das abordagens f -FTS e FDynTS, a Figura 5.7 apresenta os resultados das previsões com 3 conjuntos fuzzy. A primeira grande diferença é sobre a capacidade de generalização, evidenciando que o método de Chen, Figuras 5.7(a) e 5.7(b), realiza previsões com maiores erros do que o modelo de Lee, Figuras 5.7(c) e 5.7(d), em ambas as abordagens. A segunda diferença está entre as previsões realizadas pelas abordagens f -FTS e FDynTS, como se pode notar nas Figuras 5.7(a – d), i.e., independente dos modelos de série temporal fuzzy (Chen ou Lee), FDynTS fornece os melhores resultados de previsão.

Apesar de três conjuntos fuzzy serem uma quantidade pequena para formar regras que não generalizem muito bem os padrões temporais, os experimentos com 5, 7, e 9 grupos tiveram resultados similares considerando as métricas MSE e MAE. A Figura 5.8 apresenta os resultados de previsão para ambas as abordagens propostas quando se aplicou 9 conjuntos fuzzy na etapa de fuzzificação. Visualmente, pôde-se observar que

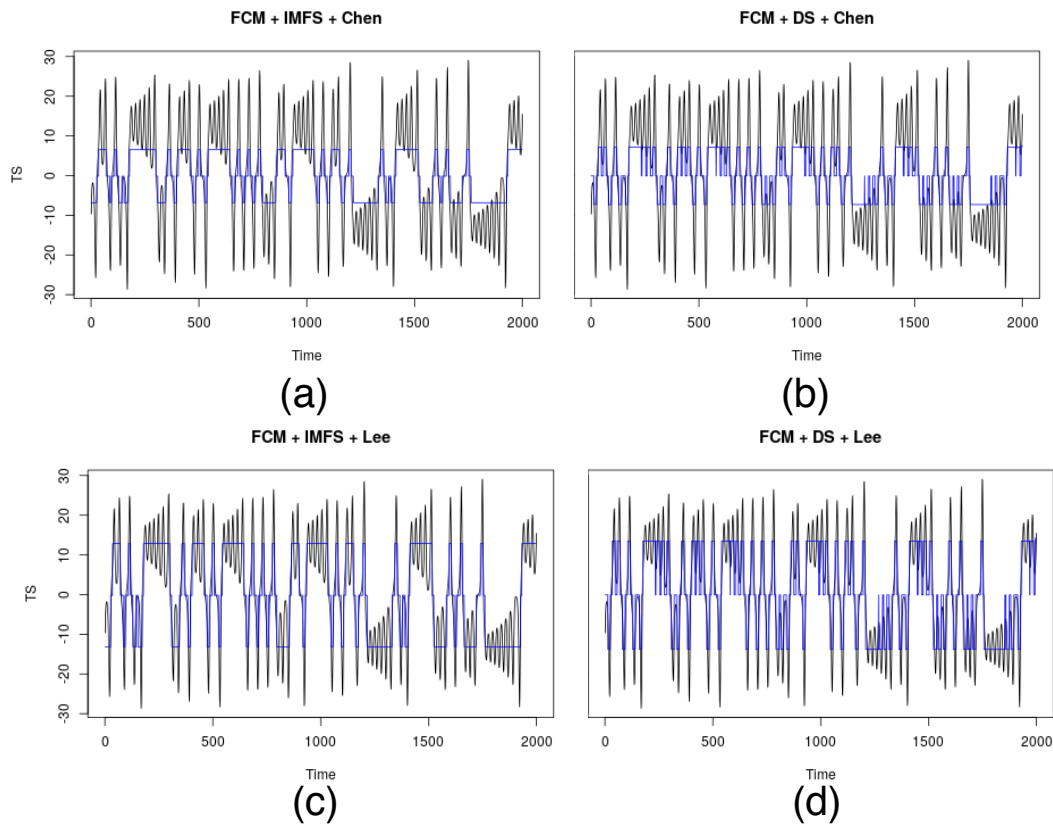


Figura 5.7 Resultado de previsão com 3 conjuntos fuzzy para série de Lorenz para as abordagens propostas f -FTS (IMFS) e FDynTS (DS).

a abordagem FDynTS apresentou melhores previsões quando comparado à abordagem f -FTS.

Para a série de Rössler, a Tabela 5.10 apresenta os resultados de erros de previsão. Para essa série, o aumento do número de conjuntos fuzzy na abordagem FDynTS é mais apropriada, apresentando, assim, menores erros de previsão. Isso pode ser observado a partir de 5 conjuntos fuzzy, na qual, exceto para a métrica MAPE, as medidas de cálculo de erro de previsão apontam melhores resultados para a abordagem FDynTS. Ao executar com 7 e 9 conjuntos fuzzy, todas as medidas de erro apontam melhorias para a abordagem FDynTS. As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam resultados de previsão para 3 e 9 conjuntos fuzzy. Com a visualização, pode-se observar que os erros de previsão com 3 conjuntos fuzzy foram similares em ambas as abordagens, justificando o fato de alguns erros mensurados com menor erro de previsão em DTW indicar melhor performance na abordagem f -FTS, enquanto que as medidas MSE, MAE e MAPE indicam menores erros de previsão na abordagem FDynTS.

Ao analisar os resultados de previsão para as séries dos mapas de Hénon e Logístico, apresentados nas Tabelas 5.11 e 5.12, respectivamente, foi possível notar que os menores erros de previsão foram obtidos com a abordagem FDynTS, considerando todas as métricas a partir de 5 grupos. As Figuras 5.11 e 5.12 ilustram os resultados de previsão

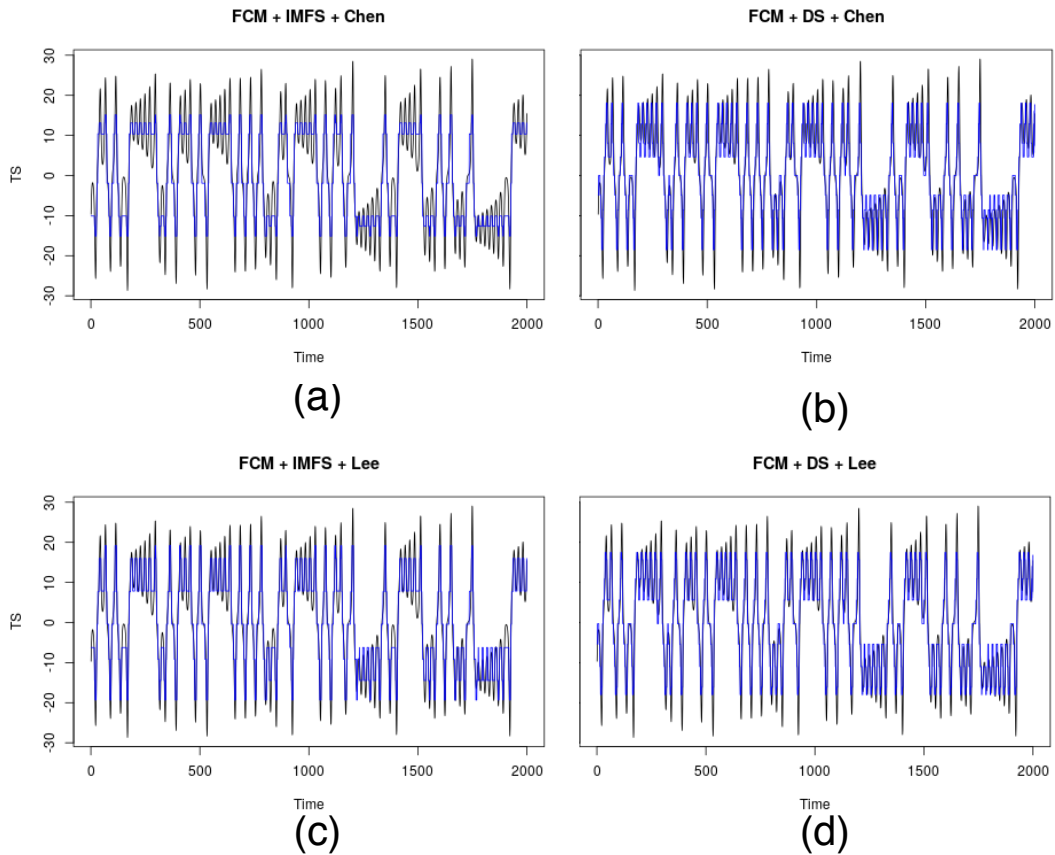


Figura 5.8 Resultado de previsão com 9 conjuntos fuzzy para série de Lorenz para as abordagens propostas f -FTS (IMFS) e FDynTS (DS).

usando as abordagens f -FTS (representado pelo rótulo IMF) e FDynTS (representado pelo rótulo DS) para 3 e 9 conjuntos fuzzy para o mapa de Hénon. Partindo dessa mesma configuração, as Figuras 5.13 e 5.14 apresentam os resultados de previsão para a série Logística.

5.3.3 Discussão

De maneira geral, a abordagem FDynTS apresentou melhores resultados quando comparada à abordagem f -FTS. O primeiro ponto a ser discutido é a relação da quantidade de conjuntos com os erros de previsão. Nesse sentido, pode-se notar que a partir de 5 conjuntos, além de diminuir os erros de previsão, os melhores resultados foram atingidos pela abordagem FDynTS.

Além disso, ao observar as figuras contendo os resultados das previsões, percebe-se que a abordagem FDynTS foi capaz de capturar o comportamento geral da série, o que foi enfatizado pela métrica DTW. As métricas MAE e MSE apresentaram menores erros de previsão para abordagem FDynTS em todos os experimentos.

Nesses experimentos, assim como na Seção 5.2, o método de Lee utilizado na etapa

Tabela 5.10 Resultados de Previsão para série gerada pelo sistema de Rössler.

Abordagem	Grupos	MSE	MAE	MAPE	DTW
<i>f</i> -FTS + Chen	3	19.549	3.45	2.89	15836
<i>f</i> -FTS + Lee	3	8.620	2.48	5.29	14373
FDynTS + Chen	3	19.122	3.40	2.35	15463
FDynTS + Lee	3	8.552	2.48	3.98	14633
<i>f</i> -FTS + Chen	5	12.54	2.80	0.709	12400
<i>f</i> -FTS + Lee	5	4.55	1.77	0.862	9410
FDynTS + Chen	5	5.65	1.83	0.722	9605
FDynTS + Lee	5	3.02	1.47	0.752	8661
<i>f</i> -FTS + Chen	7	4.91	1.80	0.52	8355
<i>f</i> -FTS + Lee	7	2.86	1.41	0.56	7764
FDynTS + Chen	7	2.58	1.27	0.51	7229
FDynTS + Lee	7	1.66	1.11	0.50	6766
<i>f</i> -FTS + Chen	9	3.44	1.48	0.52	7003
<i>f</i> -FTS + Lee	9	1.91	1.11	0.40	6134
FDynTS + Chen	9	1.40	0.95	0.27	5556
FDynTS + Lee	9	0.97	0.84	0.26	5165

Tabela 5.11 Resultados de Previsão para série gerada pelo mapa de Hénon.

Abordagem	Grupos	MSE	MAE	MAPE	DTW
<i>f</i> -FTS + Chen	3	0.54	0.655	1.811	1732
<i>f</i> -FTS + Lee	3	0.50	0.579	1.162	1633
FDynTS + Chen	3	0.37	0.494	1.164	1575
FDynTS + Lee	3	0.37	0.498	1.750	1637
<i>f</i> -FTS + Chen	5	0.26	0.415	0.88	1412
<i>f</i> -FTS + Lee	5	0.20	0.375	0.50	1275
FDynTS + Chen	5	0.18	0.370	0.51	1363
FDynTS + Lee	5	0.15	0.338	0.44	1259
<i>f</i> -FTS + Chen	7	0,20	0,37	0,52	1346
<i>f</i> -FTS + Lee	7	0,14	0,32	0,44	1110
FDynTS + Chen	7	0,10	0,26	0,42	948
FDynTS + Lee	7	0,08	0,24	0,30	894
<i>f</i> -FTS + Chen	9	0,19	0,37	0,59	1364
<i>f</i> -FTS + Lee	9	0,14	0,31	0,53	1110
FDynTS + Chen	9	0,07	0,21	0,60	842
FDynTS + Lee	9	0,05	0,19	0,26	749

de relacionamentos lógicos fuzzy e defuzzificação atingiu melhores resultados na tarefa de previsão em relação ao método de Chen. Assim, pode-se concluir que o método de Lee conseguiu descrever melhor os padrões do processo gerador das séries temporais com

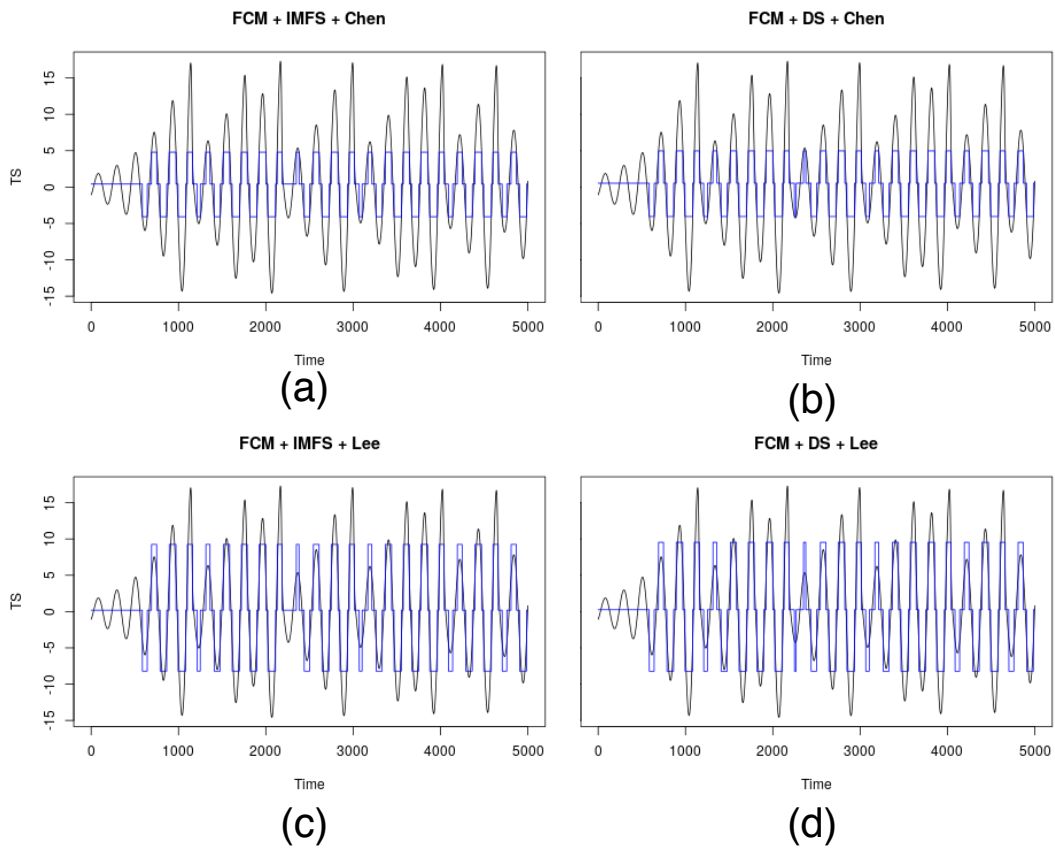


Figura 5.9 Resultado de previsão com 3 conjuntos fuzzy para série de Rössler para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

comportamento caótico.

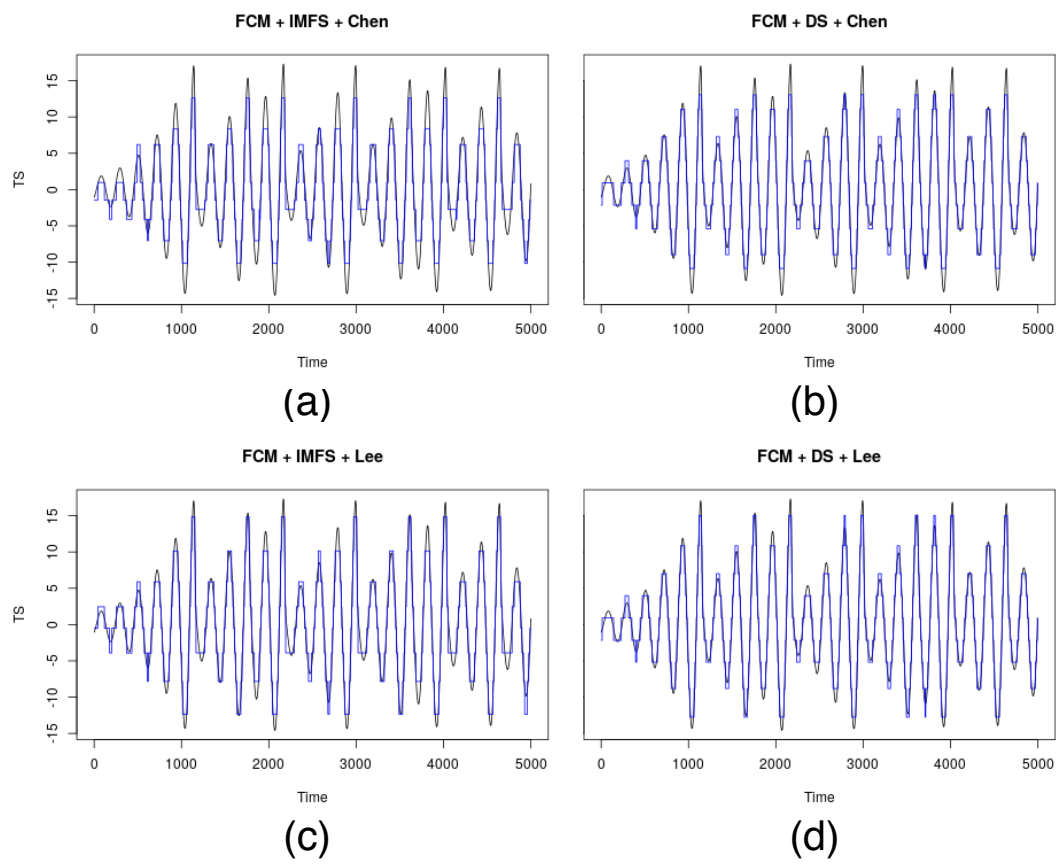


Figura 5.10 Resultado de previsão com 9 conjuntos fuzzy para série de Rössler para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

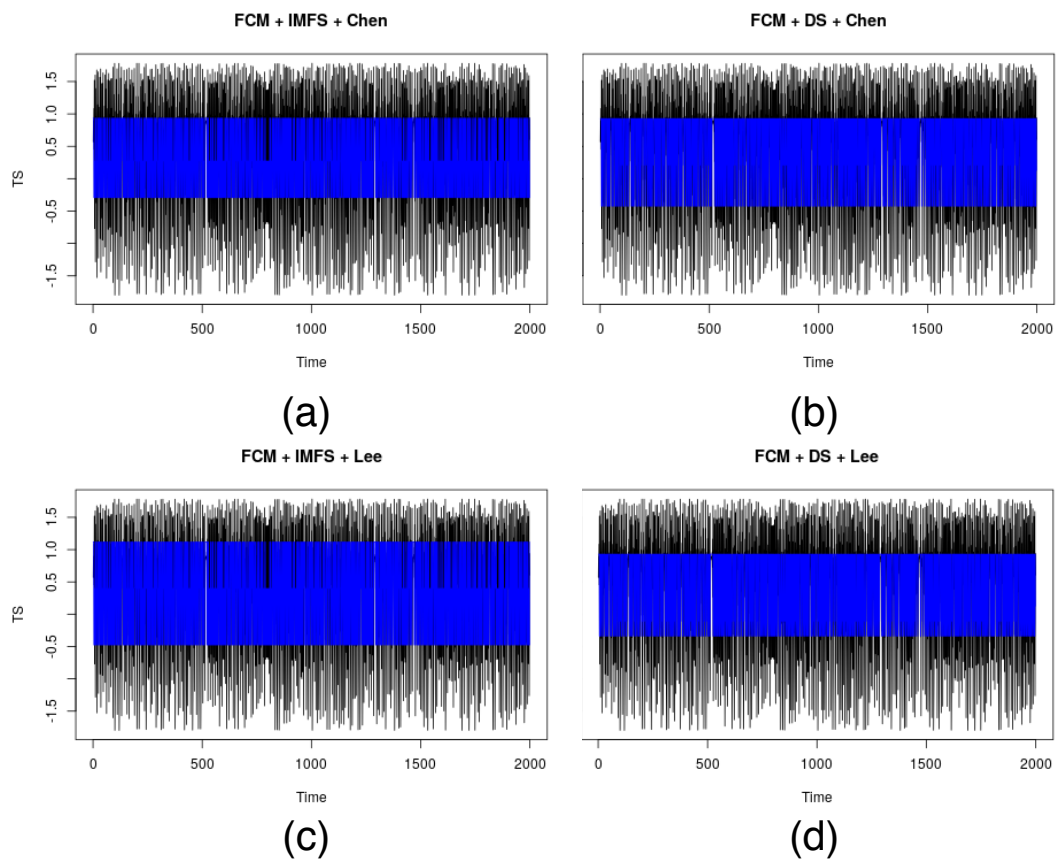


Figura 5.11 Resultado de previsão com 3 grupos para série de Hénon para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

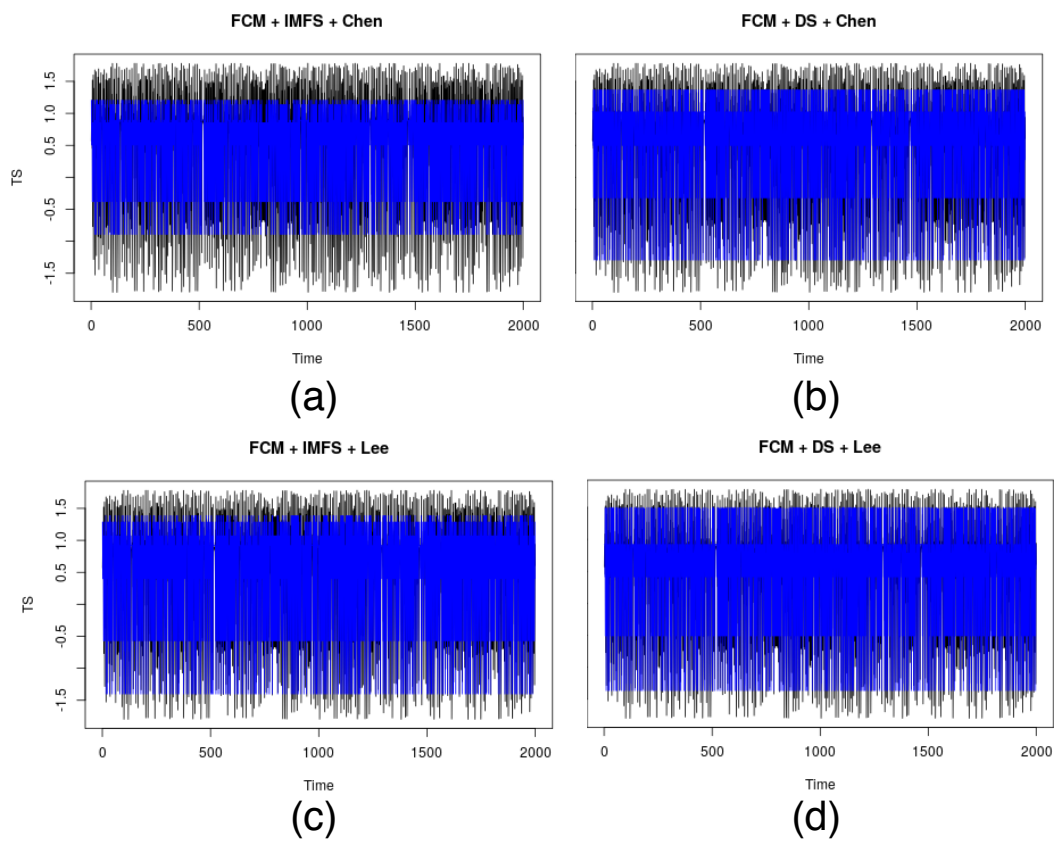


Figura 5.12 Resultado de previsão com 9 grupos para série de Hénon para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

Tabela 5.12 Resultados de Previsão para série produzida pelo mapa Logístico.

Abordagem	Grupos	MSE	MAE	MAPE	DTW
<i>f</i> -FTS + Chen	3	0,023	0,138	0,24	126
<i>f</i> -FTS + Lee	3	0,016	0,107	0,21	94,7
FDynTS + Chen	3	0,020	0,126	0,22	120
FDynTS + Lee	3	0,014	0,104	0,19	94,9
<i>f</i> -FTS + Chen	5	0,01260	0,095	0,16	87
<i>f</i> -FTS + Lee	5	0,00823	0,073	0,14	66
FDynTS + Chen	5	0,00828	0,074	0,13	71
FDynTS + Lee	5	0,00044	0,053	0,10	51
<i>f</i> -FTS + Chen	7	0,008	0,07	0,14	74
<i>f</i> -FTS + Lee	7	0,004	0,05	0,11	51
FDynTS + Chen	7	0,003	0,04	0,09	48
FDynTS + Lee	7	0,002	0,03	0,07	37
<i>f</i> -FTS + Chen	9	0,0054	0,05	0,11	55
<i>f</i> -FTS + Lee	9	0,0034	0,04	0,09	40
FDynTS + Chen	9	0,0019	0,03	0,07	33
FDynTS + Lee	9	0,0013	0,02	0,05	28

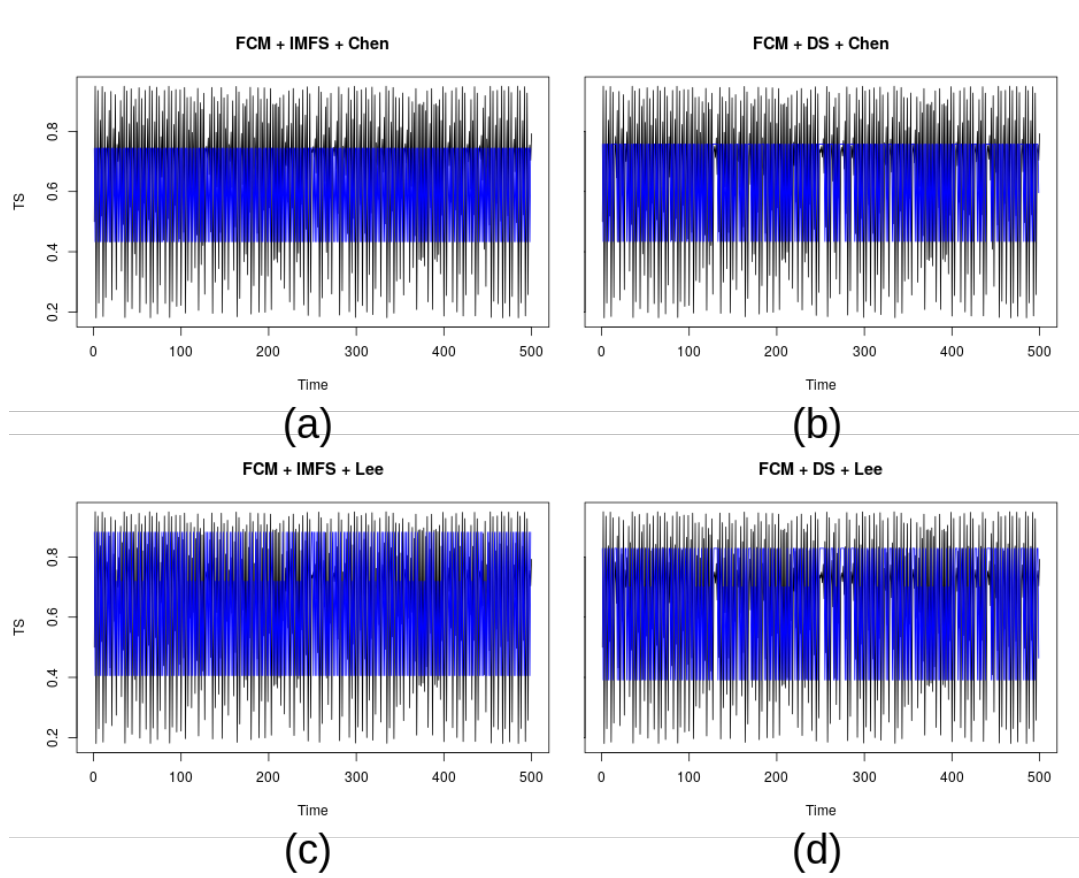


Figura 5.13 Resultado de previsão com 3 grupos para série do mapa Logístico para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

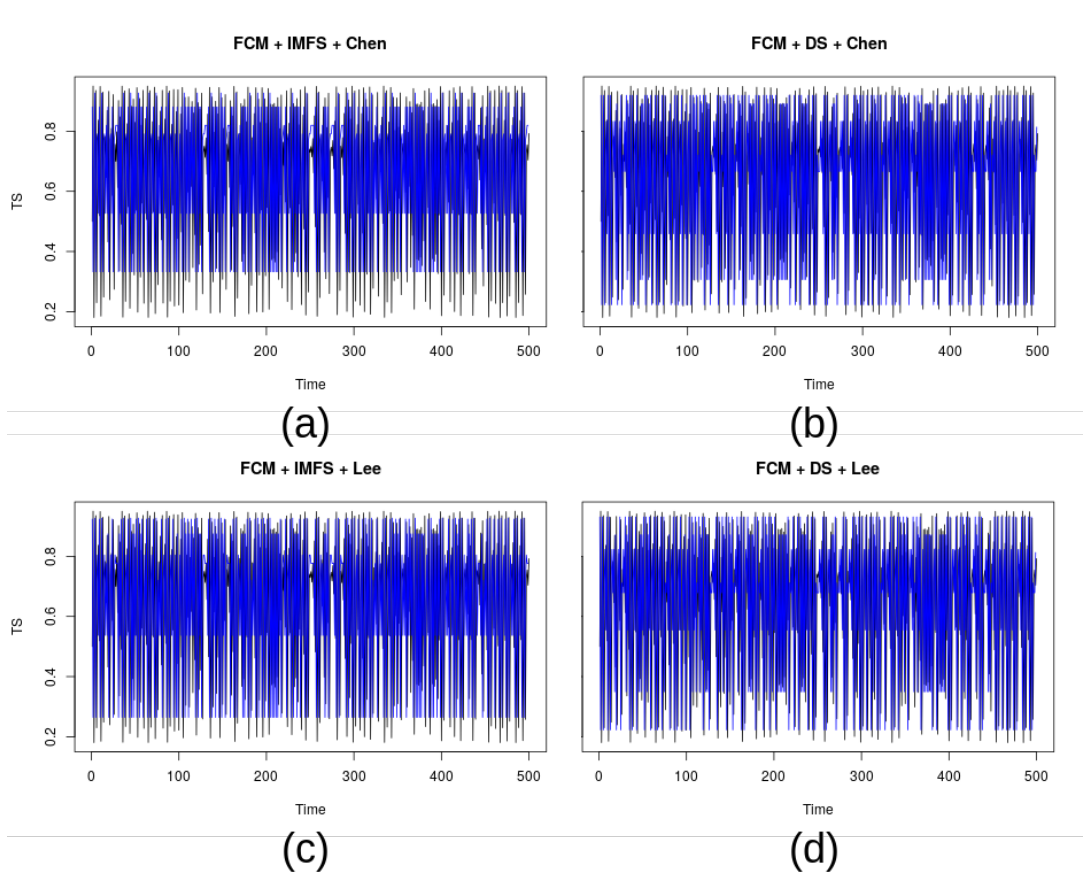


Figura 5.14 Resultado de previsão com 9 grupos para série do mapa Logístico para as abordagens propostas, estocástica e determinística.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram desenvolvidas duas abordagens de modelagem de Séries Temporais Fuzzy, partindo da hipótese que a remoção de ruídos e da dependência temporal entre suas observações auxiliam na modelagem de conjuntos fuzzy na etapa de fuzzificação. Em resumo, as contribuições obtidas com as abordagens foram: (i) redução da imprecisão e a incerteza nos dados utilizando as ferramentas de sistemas dinâmicos e teoria do caos e a decomposição com *Empirical Mode Decomposition*; (ii) determinação da quantidade de conjuntos fuzzy com índices de validação de agrupamento; (iii) modelagem de conjuntos fuzzy com base no resultado do agrupamento com o Fuzzy C-Means.

A primeira abordagem proposta, chamada *f*-FTS, aplica um filtro na série analisada removendo ruídos por meio do método *Empirical Mode Decomposition*. Com isso, a série suavizada é combinada com a série original, produzindo um novo conjunto de dados bidimensional sem dependência temporal. A segunda abordagem utilizou ferramentas de Sistemas Dinâmicos e Teoria do Caos para reconstruir a série no espaço fase. Essa abordagem é mais adequada quando o relacionamento entre as observações está em diferentes atrasos no tempo. Na sequência, ambas as abordagens estimam a quantidade de conjuntos fuzzy usando índices de validação de agrupamento sobre os resultados obtidos pelo algoritmo Fuzzy C-Means. Para validar a etapa de fuzzificação na tarefa de previsão, foram utilizados métodos de geração de relacionamentos lógicos fuzzy e defuzzificação de Chen e Lee.

Os resultados obtidos demonstraram que as duas abordagens atingiram resultados promissores, apresentando menores erros na tarefa de previsão. Com esses resultados foi possível concluir que:

- O processo de modelagem dos conjuntos fuzzy é melhorado quando se reduz a influência do componente estocástico (ruído) e o agrupamento é realizado sobre dados sem dependência temporal;
- A decomposição de séries com ruídos (presença de componentes estocásticos) usando *Empirical Mode Decomposition* permitiram reduzir a influência de incerteza e imprecisão nas séries temporais;

- A estimação da quantidade de conjuntos com índices de validação de agrupamento leva a menores erros na tarefa de previsão, mas em alguns casos esse número pode ser bem próximo do número total de observações da série, produzindo, assim, um modelo super-estimado;
- Regras de primeira ordem não possuem boa capacidade de generalização para realizar previsões de novos dados.

Como trabalho futuro, considerando as duas abordagens desenvolvidas, espera-se implementar regras de alta ordem para diminuir ainda mais os erros de previsão. Além disso, pode-se explorar mais a etapa de geração de relacionamentos lógicos fuzzy, implementando modelos multivariados. Por fim, é importante investigar o desenvolvimento de modelos variantes no tempo, atualizando regras com novos dados, tornando o modelo capaz de realizar previsões de novos padrões mesmo em cenários de fluxo contínuo de dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADHIKARI, R.; AGRAWAL, R. K. An introductory study on time series modeling and forecasting. *CoRR*, abs/1302.6613, 2013. Disponível em: [⟨http://arxiv.org/abs/1302.6613⟩](http://arxiv.org/abs/1302.6613).
- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York, NY: Springer, 1996. 105–147 p. ISBN 978-0-387-22492-3. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1007/0-387-22492-0_3⟩](https://doi.org/10.1007/0-387-22492-0_3).
- BEZDEK, J. C. Numerical taxonomy with fuzzy sets. *Journal of Mathematical Biology*, v. 1, n. 1, p. 57–71, May 1974. ISSN 1432-1416. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1007/BF02339490⟩](https://doi.org/10.1007/BF02339490).
- BEZDEK, J. C. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1981.
- BOX, G. E.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C.; LJUNG, G. M. *Time series analysis: forecasting and control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco, CA, USA: Holden-Day, Inc., 1990. ISBN 0816211043.
- BROOKS, C. *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press, 2014. Disponível em: [⟨https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:cbooks:9781107661455⟩](https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:cbooks:9781107661455).
- CAI, Q.; ZHANG, D.; WU, B.; LEUNG, S. C. A novel stock forecasting model based on fuzzy time series and genetic algorithm. *Procedia Computer Science*, v. 18, p. 1155 – 1162, 2013. ISSN 1877-0509. 2013 International Conference on Computational Science. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050913004249⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050913004249).
- CAMPELLO, R.; HRUSCHKA, E. A fuzzy extension of the silhouette width criterion for cluster analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 157, n. 21, p. 2858 – 2875, 2006. ISSN 0165-0114. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011406002892⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011406002892).
- CAMPELLO, R. J.; HRUSCHKA, E. R. A fuzzy extension of the silhouette width criterion for cluster analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 157, n. 21, p. 2858–2875, 2006.
- CHEN, S.-M. Forecasting enrollments based on fuzzy time series. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 81, n. 3, p. 311 – 319, 1996. ISSN 0165-0114. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011495002200⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011495002200).

CHEN, S.-M. Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series. *Cybernetics and Systems*, Taylor & Francis, v. 33, n. 1, p. 1–16, 2002. Disponível em: [⟨https://doi.org/10.1080/019697202753306479⟩](https://doi.org/10.1080/019697202753306479).

CHEN, S.-M.; HWANG, J.-R. Temperature prediction using fuzzy time series. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 30, n. 2, p. 263–275, April 2000. ISSN 1083-4419.

CHEN, S.-M.; KAO, P.-Y. Taiex forecasting based on fuzzy time series, particle swarm optimization techniques and support vector machines. *Information Sciences*, v. 247, p. 62 – 71, 2013. ISSN 0020-0255. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025513004283⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025513004283).

CHEN, S.-M.; TANUWIJAYA, K. Multivariate fuzzy forecasting based on fuzzy time series and automatic clustering techniques. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 8, p. 10594 – 10605, 2011. ISSN 0957-4174. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411003046⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417411003046).

CHEN, S.-M.; WANG, N.-Y.; PAN, J.-S. Forecasting enrollments using automatic clustering techniques and fuzzy logical relationships. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 8, p. 11070 – 11076, 2009. ISSN 0957-4174. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417409002309⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417409002309).

CHENG, C.-H.; CHANG, J.-R.; YEH, C.-A. Entropy-based and trapezoid fuzzification-based fuzzy time series approaches for forecasting it project cost. *Technological Forecasting and Social Change*, v. 73, n. 5, p. 524 – 542, 2006. ISSN 0040-1625. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040162505001125⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040162505001125).

COSTA, F. da; RIOS, R.; MELLO, R. de. Using dynamical systems tools to detect concept drift in data streams. *Expert Systems with Applications*, v. 60, p. 39 – 50, 2016. ISSN 0957-4174. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417416301920⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417416301920).

DAVE, R. N. Validating fuzzy partitions obtained through c-shells clustering. *Pattern Recognition Letters*, v. 17, n. 6, p. 613 – 623, 1996. ISSN 0167-8655. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167865596000268⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167865596000268).

DINCER, N. G.; AKKUŞ Özge. A new fuzzy time series model based on robust clustering for forecasting of air pollution. *Ecological Informatics*, v. 43, p. 157 – 164, 2018. ISSN 1574-9541. Disponível em: [⟨http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1574954117302030⟩](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1574954117302030).

DING, H.; TRAJCEVSKI, G.; SCHEUERMANN, P.; WANG, X.; KEOGH, E. Querying and mining of time series data: Experimental comparison of representations and distance measures. *Proc. VLDB Endow.*, VLDB Endowment, v. 1, n. 2, p. 1542–1552, ago. 2008. ISSN 2150-8097.

EGRIOGLU, E.; ALADAG, C. H.; BASARAN, M. A.; YOLCU, U.; USLU, V. R. A new approach based on the optimization of the length of intervals in fuzzy time series. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, IOS Press, v. 22, n. 1, p. 15–19, 2011.

EGRIOGLU, E.; ALADAG, C. H.; YOLCU, U. Fuzzy time series forecasting with a novel hybrid approach combining fuzzy c-means and neural networks. *Expert Systems with Applications*, v. 40, n. 3, p. 854 – 857, 2013. ISSN 0957-4174. FUZZYSS11: 2nd International Fuzzy Systems Symposium 17-18 November 2011, Ankara, Turkey. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417412007567>.

EUSTÁQUIO, F.; NOGUEIRA, T. M. On monotonic tendency of some fuzzy cluster validity indices for high-dimensional data. *2018 7th Brazilian Conference on Intelligent Systems (BRACIS)*, p. 558–563, 2018.

GAMA, J. a.; ZLIOBAITUNDEFINED, I.; BIFET, A.; PECHENIZKIY, M.; BOUCHACHIA, A. A survey on concept drift adaptation. *ACM Comput. Surv.*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 46, n. 4, mar. 2014. ISSN 0360-0300.

Gath, I.; Geva, A. B. Unsupervised optimal fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 773–780, July 1989. ISSN 0162-8828.

HEGGER, R.; KANTZ, H.; SCHREIBER, T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos*, v. 9, p. 413, 1999.

HSU, Y.-Y.; TSE, S.-M.; WU, B. A new approach of bivariate fuzzy time series analysis to the forecasting of a stock index. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, v. 11, n. 06, p. 671–690, 2003.

HUANG, N. E.; SHEN, Z.; LONG, S. R.; WU, M. li C.; SHIH, H. H.; ZHENG, Q.; YEN, N. chyuan; TUNG, C. C.; LIU, H. H. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 454, p. 903 – 995, 1998.

HUARNG, K. Effective lengths of intervals to improve forecasting in fuzzy time series. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 123, n. 3, p. 387 – 394, 2001. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011400000579>.

HUARNG, K. Heuristic models of fuzzy time series for forecasting. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 123, n. 3, p. 369 – 386, 2001. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011400000932>.

HUARNG, K.; YU, H.-K. A type 2 fuzzy time series model for stock index forecasting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 353, p. 445 – 462, 2005. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437105000725>.

HUARNG, K.; YU, H.-K. Ratio-based lengths of intervals to improve fuzzy time series forecasting. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. Part B, Cybernetics :a publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society*, v. 362, p. 328–40, 2006.

HUARNG, K.; YU, T. H.-K. Ratio-based lengths of intervals to improve fuzzy time series forecasting. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 36, n. 2, p. 328–340, 2006.

KENNEL, M. B.; BROWN, R.; ABARBANEL, H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, p. 3403–3411, Mar 1992. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.3403>.

KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. [S.l.]: Prentice Hall PTR New Jersey, 1995.

KUO, I.-H.; HORNG, S.-J.; KAO, T.-W.; LIN, T.-L.; LEE, C.-L.; PAN, Y. An improved method for forecasting enrollments based on fuzzy time series and particle swarm optimization. *Expert Systems with applications*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 6108–6117, 2009.

KUO, I.-H.; HORNG, S.-J.; KAO, T.-W.; LIN, T.-L.; LEE, C.-L.; PAN, Y. An improved method for forecasting enrollments based on fuzzy time series and particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 3, Part 2, p. 6108 – 6117, 2009. ISSN 0957-4174. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417408004818>.

Kwon, S. H. Cluster validity index for fuzzy clustering. *Electronics Letters*, v. 34, n. 22, p. 2176–2177, Oct 1998.

LEE, M. H.; EFENDI, R.; ISMAIL, Z. Modified weighted for enrollment forecasting based on fuzzy time series. *Matematika*, v. 25, p. 67–78, 2009.

LEE, M. H.; EFENDI, R.; ISMAIL, Z. Modified weighted for enrollment forecasting based on fuzzy time series. In: . [s.n.], 2009. Disponível em: <https://matematika.utm.my/index.php/matematika/article/view/260>.

LI, S.-T.; CHENG, Y.-C. Deterministic fuzzy time series model for forecasting enrollments. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 53, n. 12, p. 1904 – 1920, 2007. ISSN 0898-1221. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122107001630>.

LI, S.-T.; CHENG, Y.-C.; LIN, S.-Y. A fcm-based deterministic forecasting model for fuzzy time series. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 56, n. 12, p. 3052 – 3063, 2008. ISSN 0898-1221. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122108004409>.

LIU, H.; HUSSAIN, F.; TAN, C. L.; DASH, M. Discretization: An enabling technique. *Data Mining and Knowledge Discovery*, v. 6, n. 4, p. 393–423, Oct 2002. ISSN 1573-756X. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1016304305535>.

LIU, H.-T.; WEI, N.-C.; YANG, C.-G. Improved time-variant fuzzy time series forecast. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, v. 8, n. 1, p. 45–65, Mar 2009.

LU, W.; CHEN, X.; PEDRYCZ, W.; LIU, X.; YANG, J. Using interval information granules to improve forecasting in fuzzy time series. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 57, p. 1 – 18, 2015. ISSN 0888-613X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888613X14001716>.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. In: IEEE COMPUTER SOCIETY PRESS. *Proceedings of the sixth international symposium on Multiple-valued logic*. [S.l.], 1976. p. 196–202.

MELLO, R. F. *Sistemas Dinâmicos e Técnicas Inteligentes para a Predição de Comportamento de Processos: Uma Abordagem para Otimização de Escalonamento em Grades Computacionais*. 2009. Tese de livre docência disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/livredocencia/55/tde-17082011-173637/pt-br.php>. Acessado em: 04 de Setembro de 2013.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. Análise de séries temporais. In: *Análise de séries temporais*. [s.n.], 2006. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pam/st/>.

NICOLETTI, M. do C.; CAMARGO, H. de A. *Fundamentos da Teoria de Conjuntos Fuzzy*. [S.l.]: EdUFSCar, Série Apontamentos, 2004.

PAKHIRA, M. K.; BANDYOPADHYAY, S.; MAULIK, U. Validity index for crisp and fuzzy clusters. *Pattern Recognition*, v. 37, n. 3, p. 487 – 501, 2004. ISSN 0031-3203. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320303002838>.

RIOS, R. A.; MELLO, R. F. de. Improving time series modeling by decomposing and analyzing stochastic and deterministic influences. *Signal Processing*, v. 93, n. 11, p. 3001 – 3013, 2013.

RIOS, R. A.; MELLO, R. F. de. Applying empirical mode decomposition and mutual information to separate stochastic and deterministic influences embedded in signals. *Signal Processing*, v. 118, p. 159 – 176, 2016. ISSN 0165-1684. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168415002297>.

ROUSSEEUW, P. J. Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 20, p. 53 – 65, 1987. ISSN 0377-0427. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042787901257>.

Rubio, E.; Castillo, O.; Melin, P. A new validation index for fuzzy clustering and its comparisons with other methods. In: *2011 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 301–306.

Santos, F. J. J. D.; Camargo, H. D. A. Preprocessing in fuzzy time series to improve the forecasting accuracy. In: *2013 12th International Conference on Machine Learning and Applications*. [S.l.: s.n.], 2013. v. 2, p. 170–173.

SONG, Q.; CHISSOM, B. S. Forecasting enrollments with fuzzy time series — part i. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 54, n. 1, p. 1 – 9, 1993. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016501149390355L>.

SONG, Q.; CHISSOM, B. S. Fuzzy time series and its models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 54, n. 3, p. 269 – 277, 1993. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016501149390372O>.

SONG, Q.; CHISSOM, B. S. Forecasting enrollments with fuzzy time series — part ii. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 62, n. 1, p. 1 – 8, 1994. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011494900671>.

SONG, Q.; LELAND, R. P.; CHISSOM, B. S. A new fuzzy time-series model of fuzzy number observations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 73, n. 3, p. 341 – 348, 1995. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016501149400315X>.

SWIERCZ, E. A new method of detection of coded signals in additive chaos on the example of barker code. *Signal processing*, Elsevier, v. 86, n. 1, p. 153–170, 2006.

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: RAND, D.; YOUNG, L.-S. (Ed.). *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 366–381. ISBN 978-3-540-38945-3.

TSENG, F.-M.; TZENG, G.-H.; YU, H.-C.; YUAN, B. J. Fuzzy arima model for forecasting the foreign exchange market. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 118, n. 1, p. 9 – 19, 2001. ISSN 0165-0114. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011498002863>.

WANG, L.; LIU, X.; PEDRYCZ, W. Effective intervals determined by information granules to improve forecasting in fuzzy time series. *Expert Systems with Applications*, v. 40, n. 14, p. 5673 – 5679, 2013. ISSN 0957-4174. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417413002637>.

WANG, L.; LIU, X.; PEDRYCZ, W.; SHAO, Y. Determination of temporal information granules to improve forecasting in fuzzy time series. *Expert Systems with Applications*, v. 41, n. 6, p. 3134 – 3142, 2014. ISSN 0957-4174.

WHITNEY, H. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 645–680, 1936.

WU, B.; HSU, Y.-Y. On multivariate fuzzy time series analysis and forecasting. In: GRZEGORZEWSKI, P.; HRYNIEWICZ, O.; GIL, M. Á. (Ed.). *Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis*. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2002. p. 363–372.

Wu, C.; Ouyang, C.; Chen, L.; Lu, L. A new fuzzy clustering validity index with a median factor for centroid-based clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 23, n. 3, p. 701–718, June 2015.

WU, H.; LONG, H.; JIANG, J. Handling forecasting problems based on fuzzy time series model and model error learning. *Applied Soft Computing*, v. 78, p. 109 – 118, 2019. ISSN 1568-4946. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S156849461930081X>.

Xie, X. L.; Beni, G. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 13, n. 8, p. 841–847, Aug 1991.

YU, H.-K. A refined fuzzy time-series model for forecasting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 346, n. 3, p. 657 – 681, 2005. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104009951>.

YU, H.-K. Weighted fuzzy time series models for taieX forecasting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 349, n. 3, p. 609 – 624, 2005. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104014128>.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338 – 353, 1965. ISSN 0019-9958. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X>.