UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

ANDERSON SOUZA NEVES

UMA PROPOSTA PARA O LOGOS DAS PRAXEOLOGIAS REFERENTES AO ENSINO DO ASPECTO DECIMAL DA NUMERAÇÃO NO 5º ANO

Salvador
2020

ANDERSON SOUZA NEVES

UMA PROPOSTA PARA O LOGOS DAS PRAXEOLOGIAS REFERENTES AO ENSINO DO ASPECTO DECIMAL DA NUMERAÇÃO NO 5º ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.

Salvador
2020

SIBI/UFBA/Faculdade de Educação – Biblioteca Anísio Teixeira

Neves, Anderson Souza.
Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano / Anderson Souza Neves. - 2020.
340 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2020.
Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.

1. Matemática (Estudo e ensino (Ensino fundamental). 2. Sistema decimal. 3. Numeração. 4. Didática - Aspectos antropológicos. 5. Logos. 6. Atividades de estudo e pesquisa. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDD 372.7 - 23. ed.

ANDERSON SOUZA NEVES

UMA PROPOSTA PARA O LOGOS DAS PRAXEOLOGIAS REFERENTES AO ENSINO DO ASPECTO DECIMAL DA NUMERAÇÃO NO 5º ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Aprovada em: 27/08/2020

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias
Universidade Federal da Bahia
Orientador

Profª. Drª. Lynn Rosalina Gama Alves
Universidade Federal da Bahia
Componente interna

Prof. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Universidade Federal de Pernambuco (Caruarú)
Componente externo

À Alana e Gabriel, pela inspiração e superação.
Aos meus pais, Dário e Lêda e familiares, pelo investimento e sonho conquistado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a minha família, em especial, Alana e Gabriel, esposa e filhos, respectivamente, por compreenderem e me permitirem alcançar mais essa etapa em minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Luiz Márcio Santos Farias pela confiança, apoio, paciência e disponibilidade para me orientar e contribuir para a formação de um mais pesquisador em Didática das Ciências.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, em especial, ao Professores Jonei Cerqueira Barbosa, André Luis Mattedi Dias, Charbel Niño El-Hani, Nei de Freitas Nunes Neto e professora Rejane Maria Lira da Silva pelas contribuições durante essa formação.

Ao professor Valdir Bezerra dos Santos Júnior e professora Lynn Rosalina Gama Alves, membros da banca examinadora, pela disponibilidade, colaboração e gentileza em participarem das observações e melhorias do relatório desta pesquisa.

Aos funcionários da secretaria do PPGEFHC pelo atendimento e colaboração sempre que necessário.

Aos colegas do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas em Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias/UFBA, pelas discussões e colaborações que permitiram a conclusão desse trabalho.

Aos colegas do #vamosacabarlogocomisso que sempre me auxiliaram nos momentos de dúvidas e aflições e colaboraram com discussões teóricas e equilíbrio psicológico.

As gestoras das unidades escolares Lucyana do Nascimento Praxedes Santana e Rosane Maria Barberino Miranda que permitiram que esse trabalho fosse realizado.

As professoras Ana Gilena Ferraz de Novaes Lisboa e Rilza Souza Silva pelas colaborações, aprendizado e por permitirem que a pesquisa fosse realizada nos seus ambientes de trabalhos.

Aos estudantes das escolas que participaram e colaboraram para a conclusão dessa pesquisa.

A Secretaria Municipal de Lauro de Freitas que permitiu o afastamento parcial para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho.

Aos colegas da Escola Municipal Miguel Arraes e do Colégio Estadual Professor José Barreto de Araújo Bastos pelos diálogos, experiências e motivações durante a pesquisa.

Aos colegas de tutoria da Licencitura em Matemática a distância da Universidade Federal da Bahia pelas discussões e diálogo, em especial, ao professor Joseph Nee Anyah Yartey pelos diálogos e materiais cedidos para a realização desta pesquisa e ao colega Jairo Santos Lordelo pelo incentivo durante a pesquisa.

Resumo

NEVES, Anderson Souza. Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano. Orientador: Luiz Márcio Santos Farias. 340 f. il. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia: Salvador, 2020.

A noção de sistema de numeração é essencial para a compreensão de diversos saberes da Matemática. Este saber é de suma importância para o desenvolvimento dos estudantes diante das operações básicas e das relações possíveis com este saber, como os sistemas de unidades, potenciação de base 10 e operações. Em uma observação inicial, por meio das avaliações de larga escala, é apresentado nos resultados analisados pelo Pisa e Prova Brasil que os estudantes têm apresentado problemas para conversão dos números que podem persistir ao longo da vida estudantil, e por sua vez impossibilitar a compreensão dos aspectos decimal e posicional do sistema de numeração. A partir desse contexto, o objetivo dessa pesquisa é investigar como um Modelo Didático de Referência - MDR, baseado na abordagem da atividade de estudo e pesquisa - AEP, pode integrar o aspecto decimal ao posicional no logos das praxeologias dos estudantes no trabalho com sistema de numeração decimal no 5º Ano. Sendo assim, o referencial teórico adotado foi a Teoria Antropológica do Didático - TAD que constitue o Paradigma de Questionamento do Mundo para questionar o porque e a forma como o SND está posto nas instituições. Sendo assim, abordou-se a Praxeologia de Pesquisa, modelo de investigação de natureza qualitativa integrado a observação de classe a fim de modelizar cada etapa da investigação como método de pesquisa alicerçado na TAD. Para tanto foram elaborados a abordagem histórica e epistemológica que estruturou o *logos*, a dialética mídia-meio, como suporte para apontar um meio para a investigação, o Modelo Praxeológico Dominante - MPD para compreender como o saber está posto nas instituições, o Modelo Praxeológico de Referência - MPR a fim de reconstruir praxeologias, por meio do T4TEL, que foram integradas aos materiais manipuláveis, durante a apliacação das AEPs. Os resultados indicaram que essas AEPs potencializou a integração do aspecto decimal ao posicional do Sistema de Numeração Decimal a partir das praxeologias pessoais dos estudantes do 5º ano do EF. Conclui-se que esta pesquisa apresentou praxeologias pessoais que contemplou a resposta esperada. A forma de investigação sobre o modelo da praxeologia de pesquisa gerou um contribuição teórica para as investigações na TAD.

Palavras-chave: Aspecto decimal da numeração. Teoria Antropológica do Didático. Logos. T4TEL. Atividades de Estudo e Pesquisa.

Abstract

NEVES, Anderson Souza. A proposal for the logos of praxeologies referring to the teaching of the decimal aspect of numbering in the 5th year. Advisor: Luiz Márcio Santos Farias. 340 f. il. Dissertation (Master in Teaching, Philosophy and History of Science). Federal University of Bahia: Salvador, 2020.

The notion of the numbering system is essential for understanding different mathematical knowledge. This knowledge is of paramount importance for the development of students in the face of basic operations and possible relationships with this knowledge, such as unit systems, base 10 potentiation and operations. In an initial observation, through the large-scale assessments, it is shown in the results analyzed by Pisa and Prova Brasil that students have presented problems in converting the numbers that may persist throughout the student's life, and in turn make it impossible to understand the students. decimal and positional aspects of the numbering system. From this context, the objective of this research is to investigate how a Didactic Reference Model - DRM, based on the approach of study and research activity - SRA, can integrate the decimal and positional aspects in the logos of students' praxeologies in the work with the decimal numbering in the 5th year. Therefore, the theoretical framework adopted was the Anthropological Theory of Didactic - ATD, which constitutes the Paradigm of Questioning the World to question why and how the DNS is placed in institutions. Therefore, research praxeology was approached, a qualitative research model integrated with class observation in order to model each stage of the investigation as a research method based on ATD. To this end, the historical and epistemological approach that structured the logos, the media-medium dialectic, was elaborated as a support to point a means for investigation, the Dominant Praxeological Model - DPM to understand how knowledge is placed in institutions, the Praxeological Model of Reference - PMR in order to reconstruct praxeologies, through T4TEL, which were integrated with the manipulable materials, during the application of the SRA. The results indicated that these SRAs potentiated the integration of the decimal aspect to the positional of the Decimal Numbering System from the personal praxeologies of the students of the 5th year of EF. It is concluded that this research presented personal praxeologies that contemplated the expected answer. The form of research on the research praxeology model generated a theoretical contribution to the investigations at ATD.

Keywords: Decimal numbering aspect. Anthropological Theory of Didactic. Logos. T4TEL. Study and Research Activities.

Résumé

NEVES, Anderson Souza. Une proposition de logos de praxéologies faisant référence à l'enseignement de l'aspect décimal de la numérotation en 5ème année. Conseiller: Luiz Márcio Santos Farias. 340 f. il. Mémoire (Master en enseignement, philosophie et histoire des sciences). Université fédérale de Bahia: Salvador, 2020.

La notion de système de numérotation est essentielle pour comprendre les différentes connaissances mathématiques. Ces connaissances sont d'une importance capitale pour le développement des étudiants face aux opérations de base et aux relations possibles avec ces connaissances, telles que les systèmes unitaires, la potentialisation de base 10 et les opérations. Dans un premier constat, à travers les évaluations à grande échelle, il est montré dans les résultats analysés par Pisa et Prova Brasil que les étudiants ont présenté des problèmes de conversion des nombres qui peuvent persister tout au long de la vie de l'étudiant, et à son tour rendent impossible la compréhension du étudiants Aspects décimaux et positionnels du système de numérotation. A partir de ce contexte, l'objectif de cette recherche est d'étudier comment un modèle de référence didactique - MDR, basé sur l'approche d'étude et d'activité de recherche - AER, peut intégrer les aspects décimaux et positionnels dans les logos des praxéologies des étudiants dans le travail avec la numérotation décimale en 5e année, le cadre théorique retenu est donc la Théorie anthropologique de la didactique - TAD, qui constitue le Paradigme de l'interrogation du monde pour se demander pourquoi et comment le SND est placé dans les institutions. Par conséquent, la praxéologie de la recherche a été abordée, un modèle de recherche qualitative intégré à l'observation de classe afin de modéliser chaque étape de l'investigation comme une méthode de recherche basée sur TAD. À cette fin, l'approche historique et épistémologique qui a structuré le logos, la dialectique médiatique, a été élaborée comme un support pour pointer un moyen d'investigation, le modèle praxéologique dominant - MPD pour comprendre comment la connaissance est placée dans les institutions, le modèle praxéologique de Référence - MPR afin de reconstruire des praxéologies, à travers T4TEL, qui ont été intégrées aux matériaux manipulables, lors de l'application des AER. Les résultats ont indiqué que ces AER potentialisaient l'intégration de l'aspect décimal au positionnement du système de numérotation décimal basé sur les praxéologies personnelles des étudiants de 5e année d'EF. On en conclut que cette recherche présentait des praxéologies personnelles qui envisageaient la réponse attendue. La forme d'investigation sur le modèle de praxéologie de recherche a généré une contribution théorique aux investigations du TAD.

Mots clés: Aspect de la numérotation décimale. Théorie anthropologique du didactique. Logos. T4TEL. Activités d'étude et de recherche.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figuras

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DD	Dispositivo didático
DmM	Dialética Mídia-Meio
ED	Engenharia Didática
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
EP	Equipamento praxeológico
ES	Ensino Superior
ENS	Escrita numérica simples
ENC	Escrita numérica composta
ENCC	Escrita numérica composta canônica
ENPD	Escrita numérica em potências de dez
ENPA	Escrita numérica em potências de dez aditiva
ENT	Escrita numérica em tabelas
ENF	Escrita numérica em falada
ENM	Escrita numérica com os materiais manipuláveis
LD	Livro Didático
MDPR	Modelo Didático-Praxeológico de Referência
MPD	Modelo Praxeológico Dominante
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
MM	Material(is) Manipulável(is)
NIPEDICMT	Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias.
OCEB	Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática

OP	Organizações Praxeológicas.
PB	Provinha Brasil
PD	Problema Didático
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PP	Praxeologia de Pesquisa
QVL	Quadro Valor Lugar
RCMS	Referencial Curricular Municipal para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental de Salvador
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SND	Sistema de Numeração Decimal
T4TEL	Tarefas no quarteto praxeológico mediados por tecnologia
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UFBA	Universidade Federal da Bahia
ξ	Pesquisador
$\wp$	Praxeologias
T	Tipo de Tarefas
θ	Tecnologia
τ	Técnica
Θ	Teoria
K	Restrições
C	Condições
x	Estudante
X	Estudantes ou classe de estudantes.
Y	Professor
Q	Questões
S	Sistema didático
e	Evento de investigação
Π	Pesquisa ou investigação
Π_{pr}	Problema de pesquisa ou investigação

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Essa etapa da investigação foi iniciada para aproximar o leitor das motivações para a realização da pesquisa, desde aspectos profissionais até as possíveis lacunas na literatura, face a uma nova legislação educacional que propõe um currículo reestruturado, e as considerações inicias do saber no modelo de investigação proposto a partir de elementos teóricos.

1.1 As motivações da Pesquisa

Este trabalho é resultado de inquietações ao longo de anos de trabalho docente, tanto na Educação Superior quanto na Básica. Nesse percurso profissional, percebeu-se que os estudantes tem apresentado problemas para conversão de números que podem persistir ao longo da vida estudantil e, por sua vez, impossibilitar a compreensão dos aspectos decimal e posicional do sistema de numeração.

Nesse sentido, o autor aproximou-se de um grupo de estudos e pesquisa para lhe auxiliar nas mais diversas *condições* e *restrições*[1] dos saberes matemáticos e que pudesse trazer-lhe luz a essas lacunas. Sendo assim, o pesquisador foi integrado ao Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias (NIPEDICMT), da Universidade Federal da Bahia (UFBA), grupo de pesquisa que se insere em um paradigma maior, da Didática das Ciências, e nas teorias disponibilizadas pela Didática, o autor encontrou a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1999), que promove investigações nas perspectivas Antropológica, Didática, Ecológica, Praxeológica[2] e Dialética[3].

Na perspectiva Antropológica, Chevallard (2006) impulsionou o estudo sobre a *ação* e a *conduta* humana, ou seja, o que as pessoas fazem, *como* fazem, do que pensam e *como* pensam, uma vez que para qualquer realização humana existe *explicação* e *justificação* que são analisadas em fatos específicos e expandidas a realidades amplas; no ponto de vista didático, Chevallard (2006) considera a Didática como a ciência da *difusão do conhecimento* por propagar formas e modelos de se transpor saberes transformando-os em conhecimento, a

[1] Esses termos serão discutidos posteriormente.
[2] Esse termo será discutido posteriormente.
[3] Essas ideias advém do trabalho de Teixeira (2019).

difusão *social das praxeologias* e a ciência das *condições* e *restrições* da difusão social das entidades praxeológicas.

A *ecologia do saber*, descrita por Chevallard (1994), foi considerada como o estudo do funcionamento de sistemas que *nascem, vivem, desaparecem* e *têm suas leis*. Nesse sentido, ele considera "*O que existe e por que, o que não existe, e por que, e o que poderia existir, sob quais condições*?" (CHEVALLARD, 1997), que são as *condições* e *restrições* do saber. Para a ecologia existe ainda dois termos essenciais: *habitat* que designia onde um saber vive e *nicho* que são os locais onde esse saber é abordado ou utilizado. Na concepção da Praxeologia, as praxeologias são respostas a uma necessidade metodológica do sistemas de práticas, descritas por relações instituicionais; que são divididas em dois grupos: *práxis*[4] [T, τ] [5] e *logos*[6] [θ, Θ][7]. Na visão da Dialética, estas são os *gestos de estudos* que entendemos como o saber-fazer, a *práxis* das relações institucionais. Nessa investigação, a dialética *mídia-meio*[8] foi selecionada com o intuito de se recorrer as *mídias* para produzir *meios* que apontassem um caminho para dirimir as lacunas relativas ao saber. Já a dialética *ostensivos* e *não-ostentivos* foi abordada para compreender a interação do sujeito com saber e as descrições dessas interações.

Foi por essas perspectivas que escolhemos a TAD como referencial teórico e estrutura metodológica para o desenvolvimento dessa investigação.

Diante disso, o NIPEDICMT auxiliou o autor dessa investigação tanto como professor quanto pesquisador, a partir da lente da TAD, na perspectiva de dirimir as dificuldades na compreensão dos objetos do ensino na matemática por meio de leituras, discussões e projetos de pesquisa desenvolvidos coletivamente entre os membros desse grupo.

Ao lecionar no 6º Ano do ensino fundamental na Escola Miguel Arraes, em Lauro de Freitas, diversas dificuldades dos estudantes sobre o Sistema de Numeração Decimal (SND) foram observadas. A compreensão desse sistema é essencial uma vez que a realização de cálculos para as operações básicas (adição, subtração, produto e divisão), potências de 10, conversões entre unidades do sistema métrico, dentre outros, são realizadas a partir desse entendimento.

---

[4] que se refere a prática.
[5] T e τ representam a mesma letra do alfabeto grego "tau", sendo T (tau maiúsculo) e τ (tau minúsculo).
[6] Refere-se a parte teórica, ou seja, a explicação ou o raciocínio.
[7] Θ e θ representam a mesma letra do alfabeto grego "theta", sendo Θ (theta maiúsculo) e θ (theta minúsculo). (Fonte: Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfabeto_grego. Acesso em: 23 mar. 2019).
[8] Vem do francês *dialectique média milieu*. (*Tradução nossa*)

A partir da observação das dificuldades dos estudantes em compreender o SND, sequências didáticas que abordavam a utilização de materiais manipuláveis, como canudos e ábaco[9], foram desenvolvidas, mas sem enfatizar as perspectivas supracitadas da TAD já que esses elementos teóricos que levam em consideração os aspectos epistemológicos e o processo transpositivo desse saber com esses materiais não era conhecido do pesquisador.

Nesse contexto, a presente proposta de pesquisa foi sendo elaborada no intuito de compreender a construção dos saberes que integram o SND. Sendo assim, o 5º ano do ensino fundamental foi selecionado por entender que os estudantes do ano aludido trazem consigo uma série de conhecimentos sobre o SND, iniciados nos anos anteriores, que são ampliados ao serem incorporados novos saberes.

1.2 Considerações iniciais dos aspectos do Sistema de Numeração Decimal na Praxeologia de Pesquisa

A questão do número tem sido tão discutida e pesquisada em vários campos disciplinares, como a matemática, história e filosofia (epistemologia do saber), psicologia e europsicologia (cognição e aprendizagem), didática (transposição do saber), dentre outros (RODITI, 2010b). Para entender melhor essas questões envolvidas, primeiramente, é essencial esclarecer alguns elementos epistemológicos sobre a noção de número.

Os números formaram, inicialmente, as primeiras noções sobre a contagem e seu progresso levou ao desenvolvimento da notação matemática, sistemas numéricos e das formas de escrita. A partir da necessidade de representar os números e os processos de contagem os homens[10] foram direcionados à criação de diversos sistemas com essa finalidade, chamados sistemas de numeração. O desenvolvimento de um sistema que fosse eficiente levou centenas de anos até o surgimento do SND (RODRIGUES e DINIZ, 2015).

A compreensão desse sistema desempenha um papel vital na matemática tanto por mostrar o conjunto de técnicas de algoritmos, realização de cálculos e a prova real nas operações básicas, multiplicações e divisões por 10, 100, etc., e as relações entre esses cálculos são fundamentais para o avanço da aprendizagem em matemática (CHAACHOUA, 2011;

[9] Foi utilizado o ábaco de Números Naturais.
[10] Alusão a povos.

CHAACHOUA, 2016; CHAACHOUA e BESSOT, 2018) quanto pela relevância social desse saber para a formação da cidadania (BRASIL, 1997, 2017).

Nessa perspectiva, esta investigação aliçerca as concepções dos investigadores nos elementos essenciais do SND que se entende como resultado de uma articulação entre dois aspectos fundamentais: o decimal e o posicional. O aspecto decimal explica as relações entre as diferentes ordens de um número, ou seja, é uma relação de dez[11], de forma que dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da ordem imediatamente superior. Já o aspecto posicional associa cada unidade de número a um nome específico e informa o valor de cada algarismo do numeral de acordo com sua posição, iniciando pela direita, de forma que o primeiro posto é o das unidades, o segundo é o das dezenas e assim por diante. Nesse contexto, na França, as pesquisas de Tempier (2010, 2013) e Chaachoua (2016) afirmam que os estudantes conseguem compreender o SND no aspecto posicional, mas tem dificuldades de compreender o aspecto decimal.

No Brasil, a revisão de literatura, sobre as pesquisas desenvolvidas sobre o SND, apresentada adiante, mostrou que os estudantes apresentam diversas dificuldades, em particular, nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF), no aspecto decimal do SND. Diante disso, o trabalho também abrangeu a procura por elementos epistemológicos que pudesse dirimir essas dificuldades, como as investigações já realizadas na França.

Os trabalhos desenvolvidos por Tempier (2013)[12] e Chaachoua (2016), tiveram como suporte a própria pesquisa de Tempier (2010)[13] e, a partir de então, enunciaram que a compreensão do SND é condicionada ao entendimento do aspecto decimal. Portanto, entender o funcionamento desse sistema tem um papel fundamental para, posteriormente, compreender o desenvolvimento de cálculos, formas distintas de escrever os numerais, realizar conversões entre as unidades de medidas, potências de 10, números decimais e operações, dentre outros.

Mas durante o processo de compreensão do SND pelos estudantes, bem como suas propriedades e relações, perpassa por dificuldades que persistem não apenas no anos iniciais do EF, mas também aos dois níveis subsequentes, no Ensino Médio (EM), alicerçado pelas operações básicas, como defenderam Souza (2015) e Silva (2017), e o Ensino Superior (ES),

[11] Em virtude do sistema que é decimal. Para outro sistema, a relação depende do valor numérico que corresponde a base do sistema.
[12] Tese de Tempier.
[13] Dissertação de Tempier.

apoiado pelas relações imbricadas ao SND, como posicionaram Tempier (2013) e Roditi (2010a).

As dificuldades supracitadas relativas ao SND podem ser evidenciadas ao analisar as avaliações de larga escala como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)[14] e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)[15], por meio da Provinha Brasil (PB), que apresentaram resultados insatisfatórios (OCDE, 2016, p.177; BARBOSA, 2014).

Em geral, os resultados dessas avaliações apontam que houveram avanços, mas ainda são insatisfatórios em comparação com o mesmo saber desenvolvido em outros países. Em relação ao Pisa, há indícios que, normalmente, os estudantes só resolvem problemas com informações evidentes que envolvem operações básicas por meio de técnicas, em geral, do senso comum (OCDE, 2015). Essa investigação buscou suprimir esse contexto ao implementar tarefas alicerçadas em um conjunto de técnicas de resolução diante de um discurso racional, a tecnologia, empregada como justificativa para as escolhas dessas técnicas.

Sendo assim, algumas lacunas foram observadas nesse processo, em especial, referente a decomposição de números, uma vez que a partir dessa visualização o estudante pode compreender o aspecto decimal. Nesse sentido, o número 10 pode ser interpretado como uma dezena (unidade completa) ou dez unidades. Da mesma forma, cem pode ser interpretado como uma centena (unidade completa), dez dezenas (10 unidades de dez completas) ou cem unidades. Neste caso, o decimal está particionado utilizando a totalidade das ordens (unidade, dezena e centena) e da classe das unidades simples. O mesmo já não ocorre para o número 347 que pode ser representado por unidade composta (decomposição) canônica[16] em 3 centenas, 4 dezenas e 7 unidades, em 34 dezenas e 7 unidades ou em 347 unidades simples.

Nesse contexto, Tempier (2013) afirmou que interpretação da unidade composta é mais complexa, visto que a numeração oral não ampara a representação numérica[17], pois não se fala: “trinta e quatro dezenas” ou “trinta quatro e sete”. Nesse sentido, investigamos, por meio das

[14] O PISA é um programa de avaliação internacional padronizada aplicado a alunos de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências. Essa avaliação examina conhecimentos presentes tanto no currículo quanto na vida cotidiana. Fonte: < http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/o-que-e-o-pisa/21206>. Acesso em: 20 nov. 2018.
[15] Saeb é um conjunto de avaliações externas em larga escala que permitem ao Inep realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que possam interferir no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado. A partir de 2019, a Saeb foi integrada pelas seguintes avaliações nacionais: Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA), Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) e Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc), conhecida como Provinha e Prova Brasil.
[16] Pode ser entendida como a representação de qualquer numeral sob a mesma forma.
[17] Chamamos de escrita numérica. Essas representações foram descritas no Modelo Praxeológico de Referência.

representações numéricas e suas respectivas relações com o aspecto decimal, os motivos pelos quais os estudantes, tanto da cidade de Salvador, do estado da Bahia quanto do Brasil, carregam essa falta de relação ao longo da sua vida estudantil, uma vez que os currículos deixam implícitos essas interpretações.

Diante disso, podemos afirmar que é fundamental o professor ter profundo domínio sobre a epistemologia do SND, em especial, relativo ao processo transpositivo do saber, defendido por Chevallard e Johsua (1991), que é o processo no qual os professores apropriam-se do saber matemático e propõe modificações para dialogar com os estudantes. Este processo inicia-se no *saber sábio*, saber desenvolvido pelos matemáticos, que sofre modificações para torná-lo ensinável, o *saber a ensinar*.

Este processo é compreendido pela indicação epistemológica da matemática presente nos documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos (OCEB) e o Referencial Curricular Municipal para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental de Salvador (RCMS).

Os autores (*ibid.*) indicam que o *saber ensinado* são as adaptações que devem ser realizadas nos documentos supramencionados que se aproxima dos ofícios dos professores nas unidades escolares, como as construções dos Plano Político Pedagógico (PPP) das unidades escolares, o plano de curso, de trimestre e de unidade dos professores e o livro didático (LD), que apesar dos professores das unidades não serem submetidos a elaborarem esses livros são sujeitos da escolha desses LDs, a partir do processo de seleção de livros proposto no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD)[18].

Já o *saber aprendido* é assimilado como o saber compreendido pelos estudantes. Geralmente, esse saber pode ser visualizado ao observar o caderno dos estudantes para entender como eles conceberam o ensino sobre SND.

[18] O PNLD "é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público." Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>. Acesso em: 03 abr. 2020.

Diante desse contexto, a *questão de pesquisa*[19] $\left(\Pi_{pr}\right)$ pôde ser formulada, baseado nas propostas de Lucas (2010), Bosch e Gascón (2010) e Farras, Bosch e Gascón (2013), os quais apresentam os problemas de investigação no ensino como os problemas didáticos, ou seja, problemas educacionais qualificados por fenômenos didáticos que emergem da *ausência da razão de ser* em três dimensões: ecológica, a fim de conceber as condições e restrições de existência do SND nas instituições de ensino; epistemológica, no intuito de compreender como o SND foi criado e estruturado matematicamente, ao logo do tempo; e econômica, com o propósito de interpretar as ações didáticas sobre o SND nas instituições investigadas.

Dessa forma, foi possível elaborar o seguinte problema didático (P_D): Os aspectos posicional e decimal não estão sendo articulados durante o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND). Esse P_D possibilitou questionar o saber nas instituições sob três questões nas dimensões aludidas: a primeira na dimensão ecológica, “Como o saber está posto nas instituições? O que e porque ensinar o SND nos anos iniciais do Ensino Fundamental?”; a segunda na dimensão epistemológica, “Como reconstruir praxeologias que diminua as lacunas apresentadas no ensino do SND?”; e a terceira na dimensão econômica, “Quais os impactos das atividades estudo e pesquisa, alicerçadas na OM reconstruídas, no ensino do SND?”.

Essas questões iniciais, nas 3 dimensões, acerca do P_D sobre o objeto orientaram a condução da investigação tanto para fim de elaborar a questão geratriz (de investigação) quanto o objetivo geral da pesquisa.

Diante disso, essa pesquisa foi estruturada no modelo de investigação de *Fundamentos e métodos de Pesquisa em Didática* conhecido como *Praxeologia de pesquisa* (PP) (CHEVALLARD, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d). Esse modelo é alicerçado no *Paradigma de Questionamento do Mundo* (PQM) (CHEVALLARD, 2012), que propõe que o estudante, independente da faixa estaria e classe de estudo, deve questionar o mundo, ou seja, a forma como o saber está sendo organizado e ensinado.

Nesse sentido, Chevallard (*ibid*.) afirma que o PQM vai de encontro ao *Paradigma de Visitação das Obras* (PVO), em que os estudantes são convidados a visitarem as obras[20] (LD, resumos, vídeoaulas, textos disponíveis na web, etc.) sem que compreender tanto a *razão de*

[19] Esses autores tratam as questões de investigação relativas so ensino do saber como problema didático, representado por Π_{pr}. Essa representação foi apresentada na Metodologia da Pesquisa, no capítulo V.

[20] Para o autor, as obras são LD, resumos, vídeoaulas, textos na web, ou seja, qualquer material relevante que auxilir o estudante a compreender o saber.

ser quanto a finalidade do saber visitado, ou seja, o saber é como um monumento em que o estudante apenas observa, sem aprofundamento, caracterizado pelo *monumentalismo do saber*. (*ibid*.) Por exemplo, o estudo sobre o aspecto posicional e decimal sem compreender a *razão de ser* indica que esses aspectos são como momumentos para os estudantes uma vez que eles não adentram e manipulam esses objetos do saber. Mas, ao questionar a organização do ensino e os motivos pelos quais ambos os aspectos não estão sendo integrados, exemplificando-os, é questionar a estrutura de como saber está posto nas instituições, ou melhor, é questionar o mundo. (*Ibid*.)

Esse modelo foi considerado como cabal para essa investigação visto que a PP preenche os requisitos nas investigações que concebem e integram matemática e didática, a visibilidade e aceitação social e cultural da comunidade de pesquisadores Ξ, Ξ^* e Ξ^{**}[21] das ciências.

Nessa investigação, a PP foi abordada para, a partir da interação entre estudantes, professor e pesquisador acerca da questão inicial de investigação, poder aflorar outras questões. Estas devem ser respondidas ao analisar obras já estabelecidas pela comunidade, e assim, reunir elementos afim de estruturar uma resposta aceitável para a questão inicial.

A PP, que foi utilizada como modelo nesta investigação[22], pode ser representada no esquema seguinte:

$$\left[S(X;Y;Q)\rightarrow\left\{R_1^{\Diamond},R_2^{\Diamond},\ldots,R_n^{\Diamond},O_{n+1},O_{n+2},\ldots,O_m,Q_{m+1},Q_{m+2},\ldots,Q_p,D_{p+1},D_{p+2},\ldots,D_q\right\}\right]\rightarrow R^{\heartsuit}$$

Este esquema é denominado de *esquema Herbatiano*[23]. Este nome advém dos estudo de Chevallard sobre as ideias do filósofo e pedagogo alemão Johann Friedrich Herbart, um dos pioneiros na reformulação da pedagogia como ciência tecendo-a de forma organizada, abrangente e sistemática, por meio da comprovação experimental, com fins claros e meios definidos[24]. Para Herbat, o intelecto humano atua com base nas relações de representações

[21] Ξ representa a comunidade de pesquisadores local, Ξ^* a nacional e Ξ^{**} a internacional que cria condições C_ξ e imponham restrições K_ξ para que um pesquisador ξ desenvolva suas atividades de pesquisa na Didática das Ciências.
[22] Este esquema será desenvolvido no Capítulo sobre Metodologia.
[23] O esquema Herbatiano ampliado, apresentado acima, foi apresentado a comunidade por Chevallard em 2016, durante o 6º Congresso Internacional de Teoria Antropológica da Didática (CITAD).
[24] Entendimentos dos seguintes textos:
Didática da Matemática apresentado pelo pesquisador Luiz Carlos Pais, em 2016, no site Recanto das Letras. Disponível em: < https://www.recantodasletras.com.br/redacoes/5570735 >. Acesso em 06 Abr. 2020.
Herbart, o organizador da pedagogia como ciência. Texto da Coleção Grandes Pensadores produzido pela revista Nova Escola, em 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/1775/herbart-o-organizador-da-pedagogia-como-ciencia >. Acesso em 06 Abr. 2020.

(imagens, idéias ou qualquer outro tipo de manifestação psíquica isolada) que combinadas podem produzir resultados manifestos ou entrar em conflito entre si, nem sempre conscientes.

Chevallard (2009b), ao utilizar as proposta de Herbat, elabora o esquema herbartiano que possibilita o trabalho em que cada cidadão ou coletivo de cidadãos seja capaz de investigar qualquer pergunta que deseje, usando um equipamento praxeológico básico com o qual o treinamento escolar deverá ser fornecido. É nesse sentido de transição democrática, em que cada elemento didático do sistema supracitado possa participar ativamente do ensino tornando-o concebível, como uma obrigação ardente de uma democracia realizada.

No *esquema Herbatiano*, cada símbolo tem uma função que é compartilhamento da investigação em etapas, iniciando pelo sistema didático $S(X;Y;Q)$, considerado essencial para desenvolver a questão de pesquisa, uma vez que esse sistema destaca a atribuição que cada elemento representa uma função da investigação.

Nesse contexto, o termo *X* representa a classe de estudantes ou um estudante da classe $X\left(x \in X\right)$, *Y* representa as professoras, que participaram da investigação, no processo de ensino do SND com os estudantes, os investigadores nos momentos de observação da pesquisa ou um conjunto de obras (qualquer material institucionalizado) que auxilia *X* a responder Q_0, a questão inicial, que degenera a pesquisa onde está atrelado o objetivo principal.

Em alguns momentos é possível modificar o sistema didático $S(X;Y;Q)$ para $S(X;\xi;Q)$ quando o pesquisador realiza entrevistas com os estudantes ou analisa o caderno dos estudantes; $S(Y;\xi;Q)$ quando o pesquisador realiza entrevistas com os professores ou analisa o plano de aulas do trimestre proposto pelos professores; e até ampliando o sistema didático para $S(X;Y;\xi;Q)$ quando nas seções de estudos as AEPs são desenvolvidas nas salas de aula com os estudantes que interagem com as professoras durante o processo.

Diante do exposto, entende-se que a questão de pesquisa Q_0 conduz X do sistema S a elaboração de outras questões que advém dos objetivos secundários da pesquisa. Assim, a modelização dessa investigação, por meio da PP, pode ser descrita na seguinte forma:

$$Q_0 \Rightarrow \text{tarefas}\left(\rightarrow \text{técnicas}\right) \rightarrow \text{logos} \rightarrow \text{para cada } Q_n \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

Este modelo indica que as investigações, alicerçadas na PP, são estruturadas acerca das atividades humanas em que a unidade principal é realizar uma tarefa, ou seja, responder a questão Q_0. Essas atividades são organizadas sob as praxeologias, ou seja, as noções associadas de tipo de tarefas (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ).

O tipos de tarefas (T) é a primeira noção nas praxeologias como estrutura mais simples, e são indicados por verbos de ação, por exemplo, “correr”. Este é o ponto de partida para a análise das ações proposta pela TAD. Nesta investigação, o tipo de tarefas é responder a questão Q_0 (questão da investigação). A segunda noção é a técnica (τ)[25] que corresponde a uma ou mais formas de resolver um tipo de tarefas T, ou seja, é a implementação de uma certa maneira de fazer as coisas - uma certa técnica. O par (bloco) formado pelo tipo de tarefa e suas respectivas técnicas, denotado por [T/τ][26], constitui o bloco da *práxis* (ou prático-técnico)[27].

Nesse contexto, há diversas técnicas para responder a questão de investigação Q_0, que pode promover, também, a elaboração de outras questões, derivadas da questão Q_0, como Q_1, Q_2, ..., Q_p. A *práxis* para a construção de questões é contemplada pela diversidade de técnicas, elegendo as mais simples, sob certas condições e restrições. Considerando a PP, com o intuito de responder Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_p, no processo de modelização da investigação, pelos menos uma técnica foi relacionada como método de investigação para responder uma questão Q_n, durante a elaboração da abordagem histórica e epistemológica do SND, da revisão de literatura, do Modelo Praxeológico Dominante e de Referência e da elaboração e análise das atividades de investigação. Mas como justificar essas técnicas?

Para tal, implementa-se a a tecnologia (θ)[28], terceira noção praxeológica, que tem por finalidade explicar, iluminar ou atribuir uma certa inteligibilidade as técnicas selecionadas, ou seja, um “discurso racional” sobre as formas de se realizar algo. Se a técnica responde à

[25] A técnica é denotada pela letra grega τ (theta minúsculo), inicial da palavra grega *tekhnê*.
[26] Essa barra oblíqua é um separador simples.
[27] Na França, esse bloco refere-se ao *know-how*, corresponde ao saber-fazer, e se refere a prática.
[28] A tecnologia, denotado pela letra grega θ (tau), é “discurso fundamentado” sobre o saber-fazer.

pergunta "Como?" (executar um determinado tipo de tarefas), a tecnologia responde à pergunta "Por quê?" (uma determinada técnica funciona).

Já a teoria (Θ)[29], quarta noção da praxeologia, tem por fim justificar e esclarecer um número considerável de afirmações tecnológicas. A tenologia e teoria formam o bloco teórico-tecnológico ou *logos*[30], denotado por [θ/Θ].

A união dos blocos da *práxis* com o *logos* reflete o entendimento da prática científica, ou melhor, as ações práticas de uma pessoa assujeitada a uma ou mais instituições científicas. Nesse contexto, quando um estudante se torna o sujeito de uma instituição (5º ano), deverá realizar tipos de tarefas prescritas por essa instituição. Da mesma forma, um pesquisador se assujeita a instituições científicas, realizando tipos de tarefas estabelecidas pela comunidade científica, materializada em relatórios institucionais, ou seja, o amálgama de todas as formas de ativar o objeto investigado por meio de todas as *praxeologias institucionais*, esperadas nas instituições promotoras de pesquisa. Já as *praxeologias pessoais* emergem da relação pessoal[31] com o objeto, de forma que o amálgama é o conjunto de todas as formas para ativar este objeto por meio o conjunto de *praxeologias pessoais* onde este objeto desponta, isto é, as escolhas de técnicas de investigação justificadas ou alicerçadas por um ou mais quadros teóricos.

Essas *relações pessoais* com objetos emanam de sistemas praxeológicos robustos nas instituições. No entanto, essas *relações pessoais* constituem-se da dinâmica das ecologias praxeológicas subsequentes, como as *condições* e *restrições* institucionais, suportadas por X e Y.

No entanto, essas *condições* e *restrições* podem dificultar as reconstruções praxeológicas, pela simples razão de que são mais ou menos adequadas para os equipamentos praxeológicos institucionais designados. Esse é um desafio para qualquer didata, produzir novas praxeologias que amplie as *condições* e abrevie as *restrições* para o saber ensinado constitua a aprendizagem de x. O coração do problema está nos equipamentos praxeológicos originados das *relações pessoais* e *institucionais*. Portanto, esse contexto mostrou que uma siatuação de pesquisa, na TAD, estabelece que o pesquisador conceba uma análise praxeológica. Atentoa esses fatos, requisito ao qual corresponde, na ordem de atuação, em qualquer instituição, o dever

[29] Designado pela letra grega Θ (theta maiúsculo).
[30] Refere-se a razão, discurso analisado por uma teoria.
[31] Caso a pessoa esteja sujeita a instituição, em uma determinada posição, sua relação pessoal, deve se conformar com a relação institucional correspondente. Tanto a relação pessoal quanto a relação institucional foram exploradas no subtítulo 1.3, amparado no sistema didático $S(X;Y;Q)$.

de todos é mostrar uma preocupação praxeológica constante, ou seja, manter a coerência nos métodos propostos.

Dainte desse contexto, a *práxis* de investigação deve ser alicerçada por um *logos* institucionalizado na comunidade. Por exemplo, para um um tipo de tarefas "elaborar a revisão de literatura sobre o SND". A técnica seria constituir um corpus sobre o SND a partir das obras (*mídias*), usando as plaformas oficias de busca de trabalhos científicos. A tecnologia seria o discurso racional para justificar a pesquisa sobre o corpus, ou seja, a *dialética mídia-meio*, com o intuito de, a partir do estudo sobre as *mídias*, criar um *meio* que indique um caminho para justificar investigação para integrar o aspecto decimal ao posicional do SND. A teoria que justifica a tecnologia da *dialética mídia-meio* é a TAD, afim de compreender a ações dos pesquisadores, diante das *condições* e *restrições* vigentes.

Dessa forma, foi possível elaborar a questão geratriz (e derivadas) de investigação juntamente com os objetivos, geral e espefíficos. A partir desses e dos contextos supracitados, também foi levantada a hipóstese de pesquisa, ambos integrados ao quadro teórico que alicerça a modelização da PP, que seguem na próxima parte do capítulo.

1.3 Questão de Pesquisa, arcabouço teórico e metodológico da Didática das Ciências e desenho da pesquisa

No intuito de auxiliar a questão de pesquisa foi realizado um estudo sobre a abordagem histórica e epistemológica do SND a fim de compreender como as primeiras noções sobre este saber foram concebidas e aperfeiçoadas desde elementos primórdios até a estrutura matemática atual. Essa abordagem foi de suma importância visto que, por meio dessa perspectiva, foi apresentada a justificativa/razão teórica para a investigação sobre o SND. Neste alínea da investigação, há, também, elementos teóricos que circundam os aspectos decimal e posicional do SND, que serviram como lente de análise para compreender como está sendo proposto o ensino desse saber. Posteriormente, foi estruturada a revisão de literatura, descrita anteriormente.

Dando seguimento, o Modelo Praxeológico Dominante (MPD) foi elaborado para verificar como o saber está situado. Nesse processo, evidenciou-se a necessidade do suporte de elementos da Teoria da Transposição Didática (TTD), desenvolvida por Chevallard e Johsua

(1991), integrados a ecologia do saber, para entender como se dá o processo transpositivo, realizado pelo professor, sobre SND.

A princípio, o *saber sábio* foi apresentado na abordagem histórica e epistemológica. No processo em que o saber é transposto, prossegue-se pelo *saber a ensinar* ao analisar os documentos curriculares oficiais (BNCC, OCEB, RMCS, planos de curso por trimestre) relativos a questão do ensino; e alcançando o *saber ensinado*, por meio da análise do LD com o objetivo de interpretar como, possivelmente, as professoras utilizaram esse recurso em suas aulas. Assim, chegou-se ao *saber aprendido* por meio da observação sobre a aquisição dos saberes pelos estudantes, ao analisar seus respectivos caderno.

Nesse percurso transpositivo, foi possível diagnosticar, diante do P_D, o fenômeno da *incompletude da atividade institucional*, concretizado pelo *vazio didático*, ao constatar que faltaram as professoras, participantes da investigação, fundamentos teóricos para alicerçar suas práticas (FARIAS, 2010).

Sendo assim, a lente teórica da TAD foi utilizada para apresentar as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) para o funcionamento do sistema S por meio do saber, da instituição, dos sujeitos e as relações entre eles que são fundamentais para a investigação docente.

No início do estudo de cada capítulo foram levantadas questões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sobre o processo de construção do saber e as possibilidades de compreensão (do saber) pelos estudantes.

No decorrer do estudo, foi elaborado o Modelo Praxeológico de Referência (MPR) como uma possível resposta didática $\left(R^{\Diamond}\right)$ a alguma(s) questão(ões) Q_p. Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), o MPR é utilizado pelo pesquisador para responder aos questionamentos levantados no MPD a partir da modelização sobre o objeto do saber, uma vez que para a TAD *tudo é objeto*[32]. Logo, os objetos matemáticos são entidades que emergem de sistemas de práticas que existem nas instituições.

Durante a investigação foi essencial apontar a distinção acerca dos tipos de objetos (*O*), em questão: instituições[33] (*I*), pessoas (*X*) e as relações nas instituições ocupadas por essas pessoas. Usando as ideias de Chevallard (2011), um objeto (*O*) existe para a instituição (*I*) quando há uma *relação institucional*, indicada por $R_I(O)$, ou seja, a relação das professoras com

[32] O objeto (*O*) é o suporte de uma construção teórica, logo tem posição privilegiada na TAD.
[33] A instituição pode ser entendida como um dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar que são próprias a cada 'tipo' ou 'forma' de instituição (SANTOS e MENEZES, 2015).

oo objeto na instituição escolar, materializada, por exemplo, nos documentos curriculares oficiais. É a partir dessa relação institucional que é possível compreender como o objeto está posto no sistema educativo de forma que o sujeito de (*I*)[34] que ocupa uma posição *p* está se relacionando com o objeto (*O*), indicada por R_I (*p*, *O*).

A partir da relação institucional foi possível compreender as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) do sistema educativo que favorece a imersão da relação de um estudante (ou uma classe de estudantes) (*X*) com o objeto (*O*) na instituição (*I*), ao reconhecê-lo, ou seja, um estudante ao reconhecer elementos do SND, em uma turma do 5º ano, já que há uma relação pessoal dos estudantes com o SND, indicada por R_p (*X*,*O*) . Chaachoua e Bittar (2019) consideram essa relação como um conjunto de interações de (*X*) com (*O*) pela forma como (*X*) conhece (*O*) ao manuseá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele, etc.

Michèle Artaud (2017), em um curso na UFBA, propôs a *classe* como uma instituição (*I*) (cujas duas posições essenciais são os *professor* (*Y*) e *estudantes* (*X*)), bem como o *estabelecimento* de outras posições como coordenador e diretor pedagógico, dentre outras, nesta mesma instituição classe. Assim, como a instituição que abrange as classes e estabelecimentos, e que possibilita posições de todos os tipos que é considerado o *sistema educacional S*.

As *relações pessoal* e *institucional* são essenciais para a compreensão das modificações pelas quais passa o saber nas instituições para que *Y* possa tornar o saber ensinável e como *x* ($x \in X$) pode compreender esse ensino. Caso *x* não tenha uma relação com o saber, passa a existir e, caso já tenha, essa relação pode ser modificada, ou seja, são interações que resultam na aprendizagem.

Chaachoua e Bittar (2019) complementam que para descrever a relação institucional que condiciona a relação pessoal de um sujeito com um objeto do saber, a TAD propõe o *modelo praxeológico* ou *organizações praxeológicas* (OP) ou *praxeologias* que, inicialmente, foram introduzidas como respostas a uma necessidade metodológica do sistema de práticas, a saber, a descrição das relações institucionais. Almouloud (2007) acrescenta, que por meio das praxeologias, as práticas institucionais e as atividades matemáticas podem ser modelizadas, uma vez que "toda prática institucional pode ser analisada sob diversos pontos de vista, em um sistema de tarefas bem delineados" (ALMOULOUD, 2007, p. 114). Por exemplo, uma professora (*Y*) ao propor uma tipo de tarefas T (escrever um numeral em potências de dez) para

[34] Um sujeito de I pode ser entendido como um professor, coordenador, secretário ou ministro da educação, dentre outros.

os estudantes (X) devem promover um conjunto de praxeologias esperadas pela instituição bem como integrar a estas outras praxeologias elaboradas pelos estudantes.

Essas praxeologias podem ser classificadas, a depender da quantidade de elementos praxeológicos relacionados numa investigação. Dessa forma, uma *praxeologia* pode ser denominada *pontual* quando possui um único tipo de tarefas, indicada por [T, τ, θ, Θ]. Por exemplo, uma tarefa (t) de T (escrever um número na forma canônica): escrever o número 1 235 na forma canônica. Há uma única técnica para essa tarefa τ:1U_M 2C 3D 5 U, regido por um *logos* [θ, Θ]: decomposição canônica dos números. Para este tipo, evidenciou-se que a tenologia e a teoria foram constituídos pelos mesmos elementos.

A *praxeologia* é *local* quando possui diversos tipos de tarefas e diversas técnicas para resolvê-las, indicada por $\left[T_i, \tau_i, \theta, \Theta\right]$. Por exemplo, T_1: escrever o número 1 235 em potência de dez. Há dois tipos de técnicas prevalescem para este tipo de tarefas é τ_1: 1000 + 200 + 30 + 5 e τ_2: 1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 que são justificadas (θ) pela definição de: propriedade de associação da multiplicação associados pela ideia de Monóides[35] (Θ): (ℕ,· , +, 1). A *praxeologia local* pode ser entendida como a união de várias *praxeologias pontuais*, que é o seio desta pesquisa.

Na *praxeologia regional* há diversos tipos de tarefas, técnicas e tecnologias para a mesma teoria, tal como: Podemos indicá-la por $\left[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta\right]$, citando caso análogo, t_1: Escrever 1 235 em potências de dez e T_2: Escrever 1 235 em potências de dez aditiva. Ambas as tarefas possuem técnicas ditintas, já que τ_1:1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 e τ_2: 1000 + 200 + 30 + 5 que são justificadas pelas definições de θ_1: produto associado a adição e θ_2: adição, alicerçados por Θ_1: (ℕ, · , +, 1).

E a *praxeologia global* quando possui diversos tipos de tarefas, técnicas e tecnologias a partir de diversas teorias, que é indicada por $\left[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k\right]$[36], tendo como exemplo, T_1: Escrever 1235 em potências de dez e T_2: Escrever 1 235 em potências de dez aditiva. Ambas as tarefas possuem técnicas ditintas, já que τ_1:1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 e τ_2: 1000 + 200 + 30 + 5 e τ_3:$1\times10^3 + 2\times10^2 + 3\times10 + 5$ que são justificadas pelas definições de θ_1: produto

[35] Essas ideias estão descritas na abordagem histórica e epistemológica do SND.
[36] Da mesma forma, a *praxeologia regional* é a união de várias *praxeologias locais*, e a *praxeologia global* é a união de várias *praxeologias regionais*.

associado a adição, θ_2: adição e θ_3: definição de sistema de numeração decimal posicional, alicerçados por Θ_1: $(\mathbb{N},\cdot,1)$ e Θ_2: $(\mathbb{N},+,0)$.

O foco dessa pesquisa foi observar a forma como *logos* pode emergir nos sistemas de práticas, regidos pelas praxologias institucionais e pessoais. Para isso, essas praxeologias devem estar integradas ao saber matemático por meio das Organizações Matemáticas (OM)[37] e Organizações Didáticas (OD)[38]. As OM são práticas matemáticas, alicerçadas nas praxeologias[39], desenvolvidas pelas professoras. Essas OM também podem ser encontradas nas propostas para o desenvolvimento das práticas matemáticas como os documentos curriculares oficiais e o LD, como indicam Oliveira e Bittar (2008). A partir das OM, o pesquisador passa a ter elementos praxeológicos para analisar e questionar os currículos e o livro didático quanto a objetividade das propostaspara o ensino dos saberes.

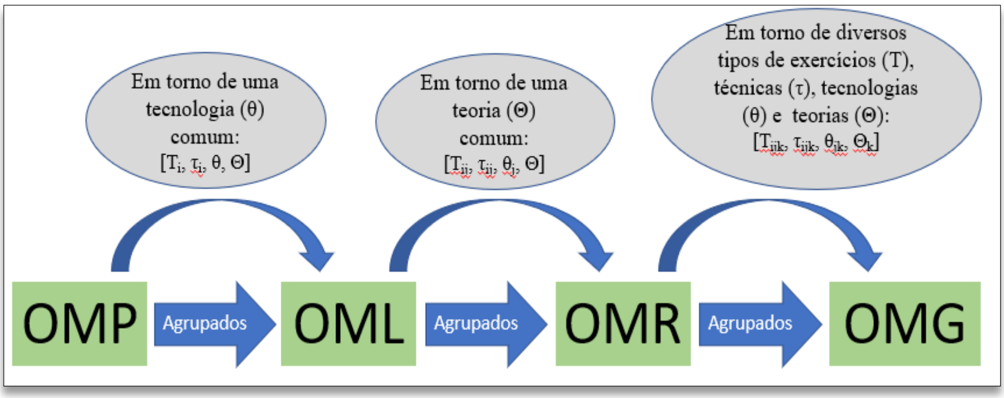
No processo transpositivo, Chevallard (1999) apresentou outro formato para as OM, que relacionado as Praxeologias de Pesquisa (Chevallard, 2014a), foram reorganizadas da seguinte forma: as praxeologias pontuais como *Organizações Matemáticas Pontuais* (OMP) por $\wp_{\mathrm{P}} = [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ em torno de um tipo de tarefas T, as *Organizações Matemáticas Locais* (OML) agregam as OMP em torno de uma θ da forma $\wp_{\mathrm{L}} = [\mathrm{T_i}, \tau_{\mathrm{i}}, \theta, \Theta]$, as *Organizações Matemáticas Regionais* (OMR) agregam as OML da forma $\wp_{\mathrm{R}} = [\mathrm{T_{ij}}, \tau_{\mathrm{ij}}, \theta_j, \Theta]$ e as *praxeologias globais* (OMG) agregam as OMR e ser representado da seguinte forma $\wp_{\mathrm{G}} = [\mathrm{T_{ijk}}, \tau_{\mathrm{ijk}}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, em torno de várias teorias Θ. O avanço das OMs pode ser visualizado na

Figura 1figura 1. Alguns exemplos dessas praxeologias supracitadas estão logo acima.

Nessa investigação, foram desenvolvidas reconstruções praxeológicas, a partir do MPR, considerando que as $\wp_{\mathrm{P}} = [\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$, que ao serem integradas, formaram um conjunto de $\wp_{\mathrm{L}} = [\mathrm{T_i}, \tau_{\mathrm{i}}, \theta, \Theta]$

[37] O currículo completo sobre SND perpassa pelas definições, propriedades, teoremas e aplicações.
[38] São as formas como os professores devem organizar o ensino do saber que devem ser divididos em momentos designados pelo professor. Também são conhecidas como Praxeologias Didáticas (Chevallard, 1999, p. 16, tradução nossa).
[39] As praxeologias pontuais foram consideradas como Organizações Matemáticas pontuais (OMP), *praxeologias locais* como OML, as *praxeologias regionais* como OMR e as *praxeologias globais* como OMG.

Figura 1- Estrutura das Organizações Matemáticas



Fonte: CARVALHO (2012, p. 49) (Adaptado pelos autores)

As ODs podem ser entendidas como modelo que organiza o estudo das praxeologias com o intuito de promover as OM completas[40] para serem desenvolvidas nas atividades de investigação que Chevallard (1999) e Bosch e Gascón (2010) chamaram de *momentos didáticos*. Esses *momentos* são considerados como as dimensões do desenvolvimento da atividade matemática institucionalizada, ou seja, o professor deve impulsionar as praxeologias nos momentos didáticos, mesmo que não estejam descritos nos documentos curriculares oficiais e no LD. Chevallard (1999) descreve a existência de seis *momentos*, que Artaud (2018) caracteriza como os *momentos do estudo*, não necessariamente existentes na ordem cronológica apresentada, pois eles podem emergir em determinadas atividades, em diferentes ordem da apresentada por Chevallard.

O *primeiro momento* do estudo é vista como o primeiro encontro com a OM em que o professor deve aproximar o estudante do saber. É o momento em que o estudante inicia o estudo sobre um tipo de tarefas T, como escrever um número em ostensivos[41] distintos .

O *segundo momento* do estudo é destinada à exploração do tipos de tarefas (T_i) e de elaboração de uma τ , de tal forma que escrever o número 1 235 em forma canônica (1 U_M 2 C 3D 5U) ou em forma de potência de dez (1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 ou 1000 + 200 + 30 + 5), em que cada τ empregada potencializa outros tipo de tarefa como as operações sobre os

[40] A OP completa contempla a *práxis* [T, τ] e o *logos* [θ, Θ] formando o quarteto [T, τ, θ, Θ]. Bosch e Gascón (2010) defendem que as formas de praxeologia completa devem servir como um modelo que analisa e questiona o currículo/atividades desde que a *práxis* e, sobretudo, o *logos* contemplem a resolução de tarefas.

[41] Posteriormente, há um diálogo sobre o entendimento de ostensivos como objetos materiais como a escrita, o gráfico, o verbal, o gestual, etc.

números e notação científica, respectivamente. Eeste momento é considerado como o cerne da atividade matemática (CHEVALLARD, 1999).

O *terceiro momento*[42] apresenta-se pela elaboração do *logos*, bloco tecnológico-teórico $[\theta,\ \Theta]$ em função de τ_i. Ao escrever o número 1 235, seja na forma, canônica τ_1:(1 U_M 2 C 3D 5U) ou em potência de dez (τ_2:1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 ou τ_3:1000 + 200 + 30 + 5) há tecnologias que justificam , em que cada τ empregada. A θ_1: aspecto posicional e decimal do SND, θ_2: produto associado a adição (propriedade associativa) e θ_3: adição de números naturais, ambas alicerçadas pelas teorias $\Theta_{1,2}$:$(\mathbb{N},\cdot,1)$ e Θ_3:$(\mathbb{N},+,0)$. Nesse momento é possível ver a interrelação entre os outros momentos estruturados por pressupostos e reflexões matemáticas.

O *quarto momento* é reservada para o trabalho com a técnica, de forma que essa técnica deve ser colocada em prova (como parte da tecnologia) como forma de aperfeiçoá-la tornando-a mais confiável, eficiente e possibilitando o advento de novas técnicas. Este momento é classificado como o amálgama das técnicas (CHEVALLARD, 2002). Esse é o momento para eleger as técnicas mais eficientes e econômicas, acerca da *razão de ser* do objeto. Caso o trabalho seja sobre as operações básicas, a τ_1 é a eleita. Se o trabalho for sobre notação científica, as τ_2 e τ_3 seriam eleitas.

O *quinto momento* do estudo é o da institucionalização dos saberes que esclarece a elaboração da OM. É nesse momento que surgem diversos questionamentos sobre o que se deve priorizar no processo de ensino. Esse momento é fundamental para oficializar a OM, como afirma Almouloud (2007), que é a discussão em torno do saber entre professor e estudantes, que deve ser parte integrante da cultura escolar, da instituição ou classe, pode descartar ou integrar elementos, traços da modificação da relação institucional que deve manter ou criar uma nova relação institucional com esses elementos. Chevallard (1999, p. 22) complementa as convicções da importância dessa relação ao evidenciar que "o processo de estudo é, assim, a cada vez que "reabrir" a organização matemática existente, modificá-la, enriquecendo-a, simplificando-a, etc.". Por exemplo, ao verificar as *praxeologias pessoais* dos estudantes, o professor seleciona algumas e descarta outras diante de outros saberes que deverão ser desenvolvidos, a razão de ser.

[42] Oliveira e Bittar (2008) afirmam que dependendo do professor/autor do livro, esse pode vir a ser o primeiro momento didático, ao propor atividades para aplicação de um saber estudado.

Já o *sexto momento* do estudo é o da avaliação tanto da *relação pessoal* quanto da *relação institucional*, que foram articuladas no momento da institucionalização, ou seja, é o momento da avaliação das OM pontuais, locais e regionais a fim de contemplar a OM global, ou seja, de avaliar a *razão de ser* das tarefas que necessitam de técnicas que emergem de tecnologias que são justificadas por teorias (LESSA, 2017). Esse é o momento de verificar se as tarefas propostas integraram o apecto posicional ao decimal do SND. Esse processo aproxima-se do entendimento da *razão de ser* do saber (CHAACHOUA e BESSOT, 2016).

Esses momentos, integrados ao SND, podem ser sintetizados conforme o quadro 1.

Quadro 1 - Momentos didáticos o estudo da escrita numérica sobre o SND

Primeiro Momento
Primeiro encontro com o objeto em estudo por meio dos tipos de tarefas, por exemplo, T: escrever um número em ostensivos distintos.
Segundo Momento
Exploração dos tipo de tarefas por meio de elaboração de técnicas prescritas, geralmente nas instituições (nos documentos curriculares oficiais, LD, etc.). Assim, o tipo de tarefas (T): escrever o número 1 235 em ostensivos distintos pressupõe, no mínimo, as seguintes técnicas: τ_1: $1U_M$ 2C 3D 5U – escrita numérica de forma canônica. τ_2: $1\times1000 + 2\times100 + 3\times10 + 5$ – escrita numérica em potência de dez. τ_3: $1000 + 200 + 30 + 5$ – escrita numérica em potência de dez aditiva. em que cada τ empregada potencializa outros tipo de tarefa como as operações sobre os números e notação científica, respectivamente.
Terceiro Momento
Diante das técnicas supracitadas, no segundo momento, apresenta-se a elaboração do logos, um discurso epistemológico que justifique as técnicas (τi) supramencionadas. Dessa forma, apresentamos: θ_1: aspecto posicional e decimal do SND e θ_2: produto associado a adição (propriedade associativa) alicerçadas pela teoria $\Theta_{1,2}$:$(\mathbb{N},\cdot,1)$ e θ_3: adição de números naturais estruturada pela teoria Θ_3:$(\mathbb{N},+,0)$
Quarto Momento
Trabalho sobre as técnicas que devem ser colocadas em prova (como parte da tecnologia) como forma de aperfeiçoá-la tornando-a mais confiável, eficiente e possibilitando o advento de novas técnicas.

Após a seleção das técnicas supracitadas (τ_1, τ_2 e τ_3), é essencial explorá-las, sem perder de vista a *razão de ser* das tarefas propostas. É nesse momento que podem surgir técnicas não esperadas pela instituição. Esse conjunto de técnicas e suas respectivas validações é compreendido como o amálgama das técnicas.
Quinto Momento
Esse é o omento em que o professor relaciona as OM supracitada a outros saberes matemáticos como as operações básicas para números naturais e decimais, notação científica, dentre outros. É o momento da articulação entre saberes matemáticos e saberes de outras disciplinas como a Física, Química e Biologia, por exemplo. É nesse momento que as praxeologias podem ser reconstruídas, ou seja, as *praxeologias pessoais* podem ser integradas as *praxeologias institucionais*.
Sexto Momento
Esse momento é designado pela avaliação do estudo, ou seja, das $\wp_P$ que integraram as $\wp_L$, ou seja, de avaliar se as tarefas propostas pelas atividades de investigação integraram o aspecto decimal ao posicional do SND aproximando a *razão de ser* das tarefas propostas nessas atividades do entendimento da *razão de ser* do SND.

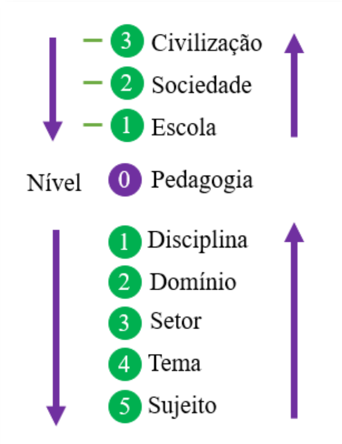
Fonte: Carvalho (2012, p. 52) (Adaptado pelos autores).

Ressaltamos que durante sua prática a professora (*Y*) não se apoia na existência desses *momentos* de estudos, mas que a elaboração desses *momentos* pode ser um facilitador da aprendizagem. Mas isso não quer dizer que o professor (*Y*) deve abandonar qualquer concepção em relação a essas funções, mas que essas são características do processo de investigação, do olhar do ξ sobre seu objeto de estudo e não do professor (*Y*) refletindo sobre sua prática (OLIVEIRA e BITTAR, 2008).

As intenções das ações do professor (*Y*) sobre objeto (*O*) resulta na criação de *condições* (*C*) que, supostamente, aumentam as possibilidades de aprendizagem sobre objeto (*O*). Nesse sentido, Chevallard (2005) aponta a importância de se investigar como é identificado o saber nas várias esferas sociais que ele denominou de níveis de codeterminação didática (NCD). Nesses níveis, é possível investigar as *condições* (*C*) para que o saber viva e permita que os estudantes possam aprendê-lo, bem como as *restrições* (*K*) que impedem que o saber seja compreendido. Diante disso, as relações entre OM e OD possibibilitam situar o saber nesses níveis que se referem a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações bem como seu *nicho*e o *habitat* (Chevallard, 2007). Almouloud (2007) destaca que essas relações entre os objetos com o estudo desses objetos imersos em si próprios são pressupostos da *ecologia do saber*.

A organização desses níveis foi descrita, conforme a figura 2, para que seja possível estudar a modelagem que abrange as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) das relações entre as OM e OD, que muitas vezes não são explícitas e identificáveis, como o conhecimento de professores e alunos, materiais utilizados, a distribuição do tempo, etc. (CHACÓN, 2008).

Figura 2 - Escala de níveis de codeterminação didática[43]



Fonte: (CHACÓN, 2008, p.73, tradução nossa)

Esses níveis de interação foram classificados como mais genéricos (identificados por -3, -2, -1, 0) até os mais específicos (1, 2, 3, 4 e 5)[44], apresentados na

Figura 2. Essa classificação iniciada por Chevallard (2007a), indica a atuação de duas partes (ou dois segmentos): a primeira que deve ser conduzido pela *noosfera* e as demais pelos didatas. A *noosfera* pode ser compreendido por um conjunto de instituições que vigiam como o SND é apresentado social e epistemologicamente e, quando necessário, indicam modificações sobre o saber nos documentos oficiais. Já os didatas, foi entendida como uma comunidade (instituição) que vigia o ensino, ou seja, os processos de transformações sofridas pelo saber na instituição escolar e as formas de aquisição desse saber pelos estudantes.

[43] Echelle des niveaux de codétermination didactique.

[44] Consideramos a representação numérica, iniciada por Chevallard (2007a) e abordada por Chacon (2008), em sua tese, para representar o limiar da liberdade pedágogica do professor que pode e deve ser traduzida para a pedagogia do didata. Assim, os níveis Civilização (-3), Sociedade (-2), escola (-1) e Pedagogia (0) indicam a atuação da noosfera. E os números, que representam esses níveis, com o sinal "-" (menos) nos informam a distância que cada nível possui sobo controle do didata no terreno da classe. Já os níveis disciplina (1), domínio (2), setor (3), tema (4) e sujeito/objeto de estudo (5) estão diretamente envolvidos a atuação do didata.

Nesse sentido, Chevallard enfatiza a necessidade de provocar a tensão entre esses níveis do mais baixo (sujeito/objeto) ao mais alto (a civilização) personoficando as necessidades contínuas de mudanças curriculares, diante do avanço da civilização, até alcançar formação, que também está em constante adaptações, do estudante. De maneira análoga, há também uma necessidade de mudança nessa formação afim de se obter o avanço da civilização[45].

Ao descrever cada nível, a descrição realizada por Lessa (2017) foi abordada, em que no âmbito da *civilização* surgiram as questões globais sobre o domínio da matemática, como o ensino da Aritmética, e o paradigma de pesquisa no qual o objeto está identificado. No nível da *sociedade* estão as políticas públicas e os programas de ensino que (BNCC, OCEB, OCMS) em que apresentam as formas (objetos do conhecimento, habilidades e competências adquiridas ao participar das resoluções dso tipos de tarefas) para desenvolver o SND nas unidades escolares.

Na esfera da *escola*, as políticas de gestão que integram políticas públicas as atividades didáticas. No nível da *pedagogia* está a questões referentes as práticas para o ensino e a aprendizagem, ou seja, as formas de se desenvolver as disciplinas no chão da sala de aula.

A partir da esfera da *disciplina*, o estudo refere-se à especificidade da matemática, onde está o saber a ensinar, como as OM em nível crescente de complexidade. O nível do *objeto*, está relacionado a OMP com o intuído de integrar os aspectos posicional e decimal que pode ser interpretado por tarefas mais especificas, por exemplo: T_1: Decompor o número 1 235.

O *tema* as OML como o Sistema de Numeração Decimal para os números naturais como tarefas que tenham como *razão de ser* as operações básicas no conjunto do números naturais, por exemplo, T_2: Recompor o numeral 5 + 30 + 1000 + 200, T_3: Decompor o número 1 235 em potências de dez, etc.

Esta investigação abordou reconstruções praxeológicas em um conjunto tarefas como OML constituída de OMP sobre a cardinalidade (OMP_1: T_1:Contar uma coleção, T_2:Produzir uma coleção; T_3: “Número de ....”, T_4: Comparar coleções, etc.) e as traduções dos numerais (OMP_2: T_1: Decompor, T_2: Recompor, T_3: Escrever em números, T_4: Ler/nomear).

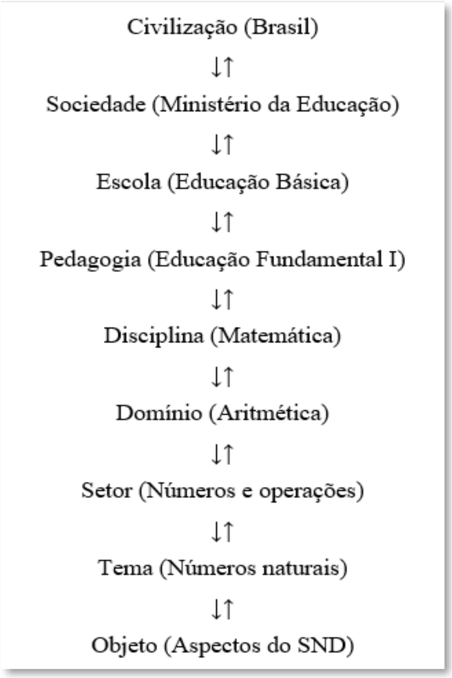
Já o *setor* que pode ser entendido como as OMR que compreende aos Números e Operações, com os números racionais sob a forma de frações e decimais; e o *domínio* está relacionado às OMG, ou seja, o

[45] Isso justifica as setas para cima e baixo, evidenciando as modificação da civilização até o objeto matemático e do objeto matemático até a civilização.

conjunto de conhecimentos que integram a Aritmética. Esses níveis supracitados, transpostos para o SND, podem ser observado na

Figura 3figura 3.

Figura 3 - Níveis de codeterminação didática para o SND



Fonte: Chevallard (2007a). Adaptado pelos autores.

A forma como os níveis específicos (*disciplina*, *domínio*, *setor*, *tema* e *assunto*) de codeterminação, apresentados na Figura 3, são abordados nas atividades matemáticas, tanto nas representações dos números (a função do objeto matemático) quanto nos saberes mobilizados para essas representações (natureza do objeto matemático), emergem das idéias de *objetos ostensivos* e *não-ostensivos*, descritas por Bosch e Chevallard (1999) e Bosch (2001).

Esses autores (*ibidem*) descreveram os *objetos ostensivos* como objetos perceptíveis ao ser humano, ou seja, objetos materiais como a escrita, o gráfico, o verbal, o gestual, etc. Já os objetos *não-ostensivos* são os que podem ser mobilizados pela manipulação dos *objetos ostensivos*, por exemplo, ideias, intuições ou conceitos de um saber. "A coexistência desses objetos *não-ostensivos* emergem da manipulação dos objetos *ostensivos*, mas, ao mesmo tempo, tal manipulação é sempre guiada e controlada por objetos *não-ostensivos*" (BOSCH, 2001, p. 19). Por exemplo, um estudante ao ouvir (*ostensivo*) a solicitação do professor para escrever (*ostensivo*) um numeral evoca o conceito de algarismos e como são estruturados os números e o SND (*não-ostensivos*), mas essa mobilização de conceitos e estruturas numéricas possibilitam outras formas de ostensivos como a representação da organização dos números para a realização de cálculos.

Assim, “toda manipulação de objetos *ostensivos* é controlada pela mobilização de objetos *não-ostensivos* cujas características podem ser modificadas durante toda a atividade” (BOSCH, 2001, p. 20). Nesse sentido, como propõe a TAD, podemos dizer que é impossível fazer uma atividade matemática sem considerar a dialética entre *ostensivo* e *não-ostensivos*.

A dialética aludid integra outra abordagem importante para a essa pesquisa, o T4TEL[46], abordagem teórica da TAD, proposta por Chaachoua e Bessot (2016, 2018), que auxilia organização da resconstrução de praxeologias. Nessa abordagem, os tipos de tarefas (T) de uma OMP são examinadas, dissociadas e, posteriormente, reagrupadas, por meio de um conjunto de praxeologias completas.

Esses autores (*ibid.*) indicam esse procedimento como o escopo de técnicas, indicado por P(τ), que agrega um conjunto de tarefas regidos sob mesma técnica (τ)[47]. No entanto, um tipo de tarefas pode apresentar diversas técnicas, que pode ser classificada como *intrínseca* ou *extrínsecas*. O primeiro tipo de tarefas (*intrínseca)* ocorre quando os tipos de tarefas existem apenas através da implementação das técnicas de certos outros tipos de tarefas, ou seja, a tarefa T: Decompor o número 1 235 em potências de dez aditiva, indica a seguinte técnica τ_1: observar a posição de cada algarismo, τ_2: Separa cada algarismo de acordo com a posição decimal (1U_M 2C 3D 5U), τ_3: realizar a adição entre os numerais correspondentes a posição; unidade de milhar (1000) + centena (200) + dezena (30) + unidade (5) ou 1000 + 200 + 30 + 5 (escrita numérica em potência de dez aditiva). Essas técnicas podem ser utilizadas para a implementação de outra técnica τ_4: 1×1000 + 2×100 + 3×10 + 5 (escrita numérica em potência de dez).

O tipo de tarefas é considerado *extrínsecas* ao ser “prescrito institucionalmente aos alunos” (CHAACHOUA e BESSOT, 2018. p. 122). As técnicas τ_1, τ_2 e τ_3 integram um tipo de tarefas intrínseca, pois afloram técnicas implicitas. Já a técnica τ_4 faz parte de tarefas extrínseca

[46] T4TEL: T4 refere-se ao quarteto praxeológico (Tipo de tarefas(*T*), técnica (τ), Tecnologia(θ), Teoria(Θ)) e TEL para Tecnologia de Aprendizagem Aprimorada. Este modelo (T4TEL) foi criado pela equipe de investigação da Universidade de Grenoble Alpes – Equipe MeTAH-LIG (Modèles et Technologies pour l`Apprentissage Humain - Laboratoire d`Informatique de Grenoble), que desenvolve pesquisas em ambientes de informática, propõe a introdução deste conceito na TAD.
[47] Essa ideia também pode ser representadas por {(Ti),i}, quando um conjunto de tarefas é representada por uma técnica (τ).

uma vez que é explíctas nas instituições. Nesses exemplos é possível observar robustez do quarteto praxeológico para a elaboração de OMP.

Para a construção de tarefas, esses autores (*ibid.*) elaboraram o *gerador* de tipo de tarefas que é definido por um tipo de tarefa e por um *sistema de variáveis*[48]. Este *sistema de variáveis* caracteriza as variáveis de acordo com valores que podem receber. O gerador de tarefas é formado da seguinte forma: GT:[verbo de ação + complemento fixo + sistema de variáveis], em que o verbo de ação determina o gênero de tarefas, complemento que estabelece a tarefa e o sistema de variáveis indica a uma sequência e os valores que as variáveis assumem no GT. Por exemplo, GT:[Enumerar uma coleção de números por escrito; V_1, V_2, V_3]; V_1: tamanho da coleção, V_2: agrupamento (números menor que 9) e V_3: a soma de dois números heterogêneos (números com quantidades de algarismos diferentes).

As variáveis trazem consigo três funções: a primeira de gerar sub-tarefas (T`) de T; a segunda para caracterizar o escopo das técnicas P(τ), e proporcionar três ponto de vista: epistemológico, institucional e didático para acompanhar o professor em sua tomada de decisão didática; a terceira para explicar as *praxeologias pessoais* dos estudantes para diagnosticar e incluir essas praxeologias na instituição do sistema educativo.

As *praxeologias pessoais* podem divergir das praxeologias que são esperadas na instituição, as institucionais. Esse é um dos papéis das AEPs, a de permitir o estudante estabelecer outras técnicas, para resolver um tipo de tarefas T, que não esteja, até o devido momento, institucionalizada[49], de forma que contemple o quarteto praxeológico $\left(T,\tau,\theta,\Theta\right)_{\text{pessoal}}$ para tipo de tarefas, métodos de resoluções e justificativas pessoais para desses métodos.

O T4TEL auxilia o pesquisador a identificar "as *condições* e *restrições* institucionais, as escolhas didáticas do professor para conduzir o estudo e as *praxeologias pessoais* não necessariamente institucionais" (CHAACHOUA e BESSOT, 2018, p. 130). Nesse contexto, essa abordagem foi utilizada para integrar os materiais manipuláveis no processo de reconstrução das praxeologias, de forma bastante organizada, já que foi possível descrever o quarteto praxeológico para cada tipo de tarefas apresentada.

---

[48] A noção de variável apresenta-se como ferramenta metodológica de forma que permita diversas possibilidades de estudo das condições que favoreçam o conhecimento no sistema escolar. A ideia de variáveis, proposta por Chaachoua e Bessot (2018) complementa a proposta por Brousseau (2002) para variáveis didáticas em que escolha de valores diferentes, que podem ser fixadas pelo professor, pode causar mudanças do conhecimento ideal.

[49] Que não há comprovação científica.

Diante da exposição da estrutura teórica relacionada ao objeto de investigação, reiteramos que a intenção dessa pesquisa foi investigar como os estudantes do 5º ano integram os aspectos decimal ao posicional do SND durante a elaboração de suas praxeologias pessoais em tarefas mediadas por AEPs. É nesse momento em que o saber de referência é mobilizado, pelo pesquisador, elencando elementos científicos como respostas tanto ao $\prod_{pr}$ diante da falta de articulação de ambos os aspectos analisados no MPD.

Diante disso, o objetivo geral dessa pesquisafoi : investigar como um Modelo Didático de Referência (MDR), baseado na abordagem da atividade de estudo e pesquisa (AEP), pode integrar o aspecto decimal ao posicional no logos das praxeologias dos estudantes no trabalho com sistema de numeração decimal no 5º Ano.

A partir do objetivo geral foram elencados os seguintes objetivos específicos:

- Abordar aspectos históricos e epistemológicos do saber sobre os aspectos posicional e decimal do Sistema de Numeração para compreender as primeiras noções sobre o saber e o avanço da construção matemática ao longo do tempo. O *logos*, que sustenta essa pesquisa, foi construído a partir dessa abordagem, portanto é essencial tanto para analisar como o saber está posto quanto a reconstrução dos tipos de tarefas e técnicas que foram desenvolvidas nas AEPs;
- Analisar as condições e restrições presentes nos níveis de codeterminação acerca do aspecto decimal da numeração no 5º Ano, para compreender em que *habitat* está o SND e qual *nicho* ele ocupa em cada um dos níveis supracitados. Essa análise, que integra o MPD, caracteriza-se em evidenciar a forma como o saber está sendo desenvolvido nas instituições;
- Elaborar AEPs por meio de praxeologias que integrem o aspecto decimal ao posicional do SND. Essas AEPs impulsionaram o trabalho integrado entre os estudantes, modificando suas relações como saber. O T4TEL foi fundamental nesse processo uma vez que o gerador de tarefas e as variáveis didáticas auxiliaram as modificações do quarteto praxeológico promoverem tarefas sobre o aspecto posicional, decimal e a integração entre esses aspectos;
- Analisar a praxeologias pessoais dos estudantes e os efeitos destas, submetidas as AEPs, nas turmas do 5º Ano, a fim de evidenciar a validação dessas atividades bem como as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) para o densenvolvimento de atividades de investigação.

Durante o processo desenvolvimento de nossa investigação foi elaborada a seguinte questão de pesquisa:

Q_0: De que forma é possível elaborar um Modelo Didático de Referência para favorecer a articulação do aspecto decimal ao posicional do Sistema de Numeração Decimal no 5º ano?

A partir dessa questão Q_0, durante o processo de construção dos objetivos específicos, surgiram outras questões. Estas emergiram durante o processo de análise de cada objetivo específico, ou seja, no processo de elaboração do *logos*, na elaboração de um *meio* diante das *mídias* (obras) já publicadas, nas lacunas observadas no MPD, durante a observação de classe, durante a reconstrução de praxeologias no MPR e no processo de experimentação das AEPs. Essas questões emergiram da interação do $S\left(X, Y, \xi, Q\right)$. Sendo assim, essas questões seguem logo abaixo:

Q_1: De que forma as particularidades sobre a história e epistemologia do SND podem contribuir para a integração do aspecto decimal ao posicional?

Q_2: Como analisar as condições e restrições das tarefas do SND?

Q_3: Como fazer emergir as Organizações Matemáticas e Didáticas nas AEPs?

Q_4: Em que condições os materiais manipuláveis podem ser um instrumento a serviço da aprendizagem do aspecto decimal?

Outras questões também foram levantadas acerca dessa investigação, em especial, para a importância das questões supracitadas $\{Q_0, ..., Q_4\}$ em relação a comunidade de pesquisadores em didática, que foram estruturadas acerca do sistema $S\left(\xi, \Xi, \Xi^*\right)$. Nesse sentido, elaboramos outra questão, a saber:

Q_5: De que modo as pesquisas desenvolvidas entre os anos 2000 e 2018 abordaram os aspectos posicional e decimal do SND?

Esta questão foi elaborada com o intuito de que essa investigação, a partir das pesquisas já estabelecidas, possa levantar um *meio* que articule as aspectos do SND.

Nesse processo, também foram levantadas outras duas questões:

Q_6: Que tipos de limitações e restrições existem em nossos sistemas educacionais atuais que impedem que a modelização matemática seja amplamente incorporada nas atividades diárias da sala de aula?

Q_7: Levando em conta essa ecologia específica da modelização matemática, que tipo de *condições* - em termos de atividades didáticas - poderia ajudar a uma integração em larga escala da modelização matemática na escola?

Essa investigação não deu conta (e nem poderia) de responder as questões Q_6 e Q_7, diante da amplitude dessas questões. Mas ambas podem fazer parte de perspectivas futuras da continuidade desses estudos no intuito de minimizar as lacunas no ensino do SND, através de um coletivo de pesquisadores, entre grupos de pesquisas e até diferentes instituições.

O processo de construção da modelização dessas questões e do cumprimento dos objetivos segue na próxima alínea em que foi destacada o processo de modelização na PP.

1.4 Os elementos da modelização da investigação

O modelo de pesquisa na Praxeologia de Pesquisa (Chevallard, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d) foi desenvolvido tanto para dar conta da questão de pesquisa (Q_0), e das demais questões que emergiram durante a investigação (Q_1, Q_2,..., Q_7), quanto para estruturar os métodos de investigação para cada capítulo, a saber: abordagem histórica-epistemológica do SND (elementos da TTD e elaboração do logos), revisão de literatura (dialética mídia-meio), MPD (ecologia[50] do SND nos níveis de codeterminação didática), MPR (T4TEL) e AEPs (T4TEL). Cada método utilizado na modelização estava alicerçado no PQM para questionar o modo como o SND é posto nas instituições. A TAD, teoria que integra esse paradigma, aborda essas ações humanas, ao questionar os saberes no mundo atual, afim de propor novas formas de explorar os objetos matemáticos.

A modelização foi utilizada numa abordagem do tipo experimental (empírica), visto que as pesquisas em Didática das Ciências, não concebe investigações sem intervenções, numa perspectiva qualitativa devido a descrição e interpretações das praxeologias prescritas nas

[50] Esse "método" integrou todas as técnicas para a investigação, na PP, em cada capítulo, considerando suas respectivas especificidades.

instituições e das *praxeologias pessoais* elaboradas pelos estudantes, que em muitos momentos convergiram diante das *restrições* (*K*) impostas as classes de estudantes (*X*) pelas instituições.

Nesse contexto, a *observação de classe* (COMITI e FARIAS, 2019) foi integrada a PP para auxiliar os pesquisadores a observar, analisar e evidenciar as ecologias nos diferentes níveis de codeterminação didática e assim identificar os fenômenos da *incompletude da atividade institucional*, em especial, o *vazio didático*, ao compreender que faltaram elementos epistemológicos aos professores[51], de modo que o SND não alicerçava outros saberes, por exemplo, o conjunto de conhecimentos que estruturam o *setor* Números e Operações. Isso foi caracterizado como a *ausência da razão de ser*.

Ressaltamos que a *observação de classe*, com raízes na produção de dados externos[52] e internos a classe, foi realizada durante a elaboração do MPD, por meio de análises sobre os documentos curriculares oficiais: BNCC, OCEB, RCMS, do LD, do PPP da escola, do plano trimestral do professor e dos cadernos dos estudantes que indicaram algumas lacunas no ensino que estruturaram a reconstrução das praxeologias, durante a construção do MPR e, por conseguinte, das AEPs.

Durante o percurso metodológico de elaboração do MPR, as noções sobre o *logos*, elaborado na abordagem histórica e epistemológica, ao serem integradas, nos trabalhos de Tempier (2013) e Chaachoua (2016), estruturam lente de análise dessa pesquisa que foi essencial na elaboração e esperimentação das AEPs.

Durante o processo de elaboração das AEPs, a observação de classe alicerçou-se em 4 elementos, que também integram a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), ao realizar sequências de praxeologias que podem ser descritas sobre 4 estapas: *analise a priori* para determinar as escolhas dos pesquisadores diante dos dados produzidos na *observação de classe*, com o intuito de conduzir que as ações dos estudantes sejam espontâneas; a *experimentação* para colocar em prática o MDR construído fazendo as devidas correções quando necessário; análise *a posteriori* para mobilizar o conjunto de dados recolhidos durante a experimentação, observações e as praxeologias pessoais dos estudantes, e analisar a luz do MPR, reescrito na análise *a priori*, das hipóteses e questões de investigação e do problema didático.

---

[51] Todos os professores de matemática que integravam o corpo docente dos anos iniciais do EF, das unidades escolares participantes da investigação, foram entrevistados.

[52] Consideramos dados externo a classe o MPD que contempla o estudo da Ecologia do saber (*C* e *K*) nos documentos curriculares oficiais (BBNCC, OCEB, OCMS), os manuais escolares (PPP, Plano trimestral, LD e caderno dos estudantes) e elaboração de entrevistas. Já os dados internos a classe são gravação de áudio/vídeo, a transcrição desses dados e a crônica da classe – os manuscritas das observações.

As observações e intervenções (AEPs) ocorreram em 02 escolas de Salvador que e foram mediadas por meio de observações naturalistas e entrevistas (CHEVALLARD, 2014a, COMITI e FARIAS, 2019). Essas observações ocorreram no ambiente natural, a sala de aula, pois foi realizada nos espaços de vivência dos participantes desses grupos; participante, pois o pesquisador interagiu com os participantes; semiestruturada, pois o professor levou em consideração as propostas realizadas na análise *a priori* por meio de áudio e imagens, pois dessa forma é possível verificar o processo de construção da epistemologia desses professores.

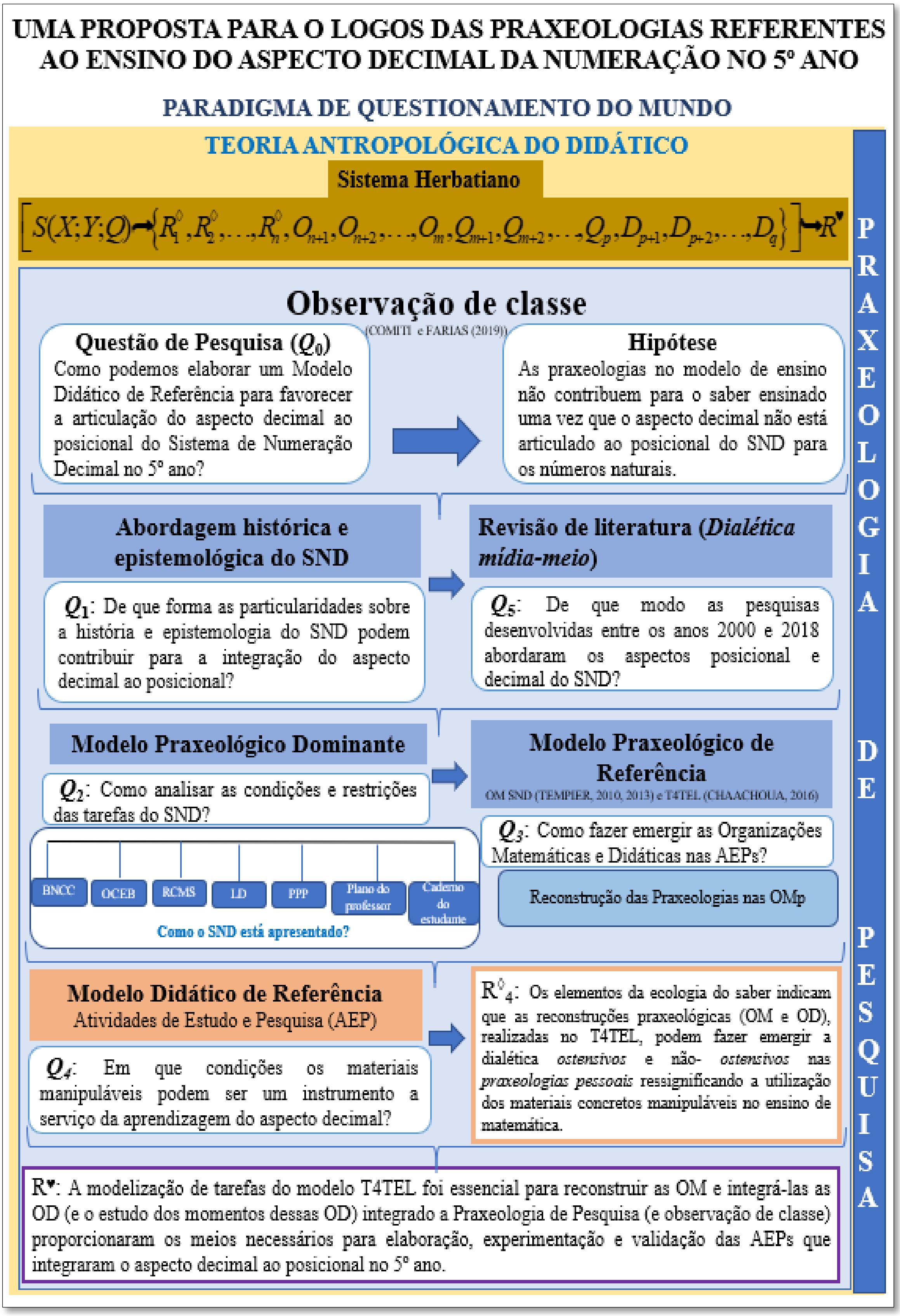
Já as entrevistas com os professores do 1º ao 5º anos, em cada unidade escolar, foram fundamentais para a compreensão de como os professores concebem a epistemologia sobre o SND, realizam e conduzem seus planos para o ensino. Essas entrevistas foram semiestruturada, partindo das perguntas de contexto gerais da matemática para as mais específicas sobre o SND.

Nas pesquisas atuais há uma grande preocupação em relação a ética do pesquisador. Nesse sentido, essa pesquisa respeitou os princípios éticos que foram utilizados no processo de observação e produção de dados ao elaborar 5 termos, dentre os quais: assentimento, autorização de uso de imagem e depoimentos estritamente para a pesquisa para adultos e crianças, confidencialidade e consentimento livre e esclarecido entregues as instituições escolares, os professores[53] do 1º ao 5º ano e aos estudantes participantes, e seus respectivos responsáveis, assegurando sigilo dos mesmos.

A modelização supracitada foi sintetizada no desenho da pesquisa, apresentado na figura 4, que possibilitou estruturar e descrever, por meio de imagens, os elementos que foram utilizados para a construção dessa pesquisa.

[53] Que participaram das entrevistas.

Figura 4 - O desenho da Pesquisa



Fonte: o autor (2020)

Esse formato de descrição, proposto na Figura 4, foi utilizado para implementar além de elementos teóricos, metodologia, MPD, MPR, observação de classe regidos pela PP que possibilitou a produção e análise dos dados durante o desenvolvimento da investigação.

1.5 Organização da pesquisa

A pesquisa foi estruturada em oito capítulos, brevemente apresentados neste subtópico. No primeiro capítulo, intitulado de Introdução, foi apresentada uma noção geral do trabalho, expondo as motivações da pesquisa e os elementos que justificassem a escolha do tema. Alem disso, as questões problemáticas e os objetivos da pesquisa, além de uma breve explanação sobre os fundamentos teóricos e metodológicos; também foi exposto o processo de modelização e, por fim, a estrutura da dissertação.

No segundo capítulo, foi apresentada a metodologia da pesquisa que contemplou a natureza da pesquisa, a investigação e a produção de dados por meio da PP, integrada com a *observação de classe interna e externa*, além dos participantes e as relações desses participantes com o saber por meio de entrevistas. No desfecho deste capítulo, foi elaborada uma síntese que relacionou os objetivos específicos da pesquisa, materiais empíricos e as formas de investigar.

O terceiro capítulo contemplou a abordagem histórica e epistemológica sobre o SND, tornando possível a compreensão do SND, desde as noções mais simples de algarismo a estrutura matemática atual. Essa abordagem foi caracterizada para elaboração do *logos*, fundamental para analisar o MPD e construir o MPR. Neste capítulo, entende-se que houveram elementos das linhas de história e filosofia (epistemologia) do Programa de pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC).

O quarto capítulo, cujo título é a revisão de literatura, foi apresentada a dialética mídia-meio como método de investigação da TAD para visitar as mídias (obras) publicadas, em especial, teses e dissertações e artigos publicados no SIPEM referentes ao MDR alicerçado nas AEPs e/ou aspecto decimal do SND. A partir dessas mídias, construiu-se um meio como caminho para integrar o aspecto decimal ao posicional do SND.

No quinto capítulo, cujo título é o Modelo Praxeológico Dominante (MPD), apresentou-se como o saber está posto mediante ao estudo da ecologia do SND auxiliado por elementos do processo transpositivo desse saber. Esta seção destacou-se por evidenciar como o saber está apresentado e as *condições* (C) e *restrições* (K) para que o aspecto decimal do SND possa existir (viver), seja na legislação, nos documentos curriculares oficiais, no livro didático, no plano de ensino das professoras e no caderno dos estudantes. Essas ações podem ser compreendidas como a visitação as obras (CHEVALLARD, 2012). Foi nesta etapa da investigação que a seguinte hipótese foi elaborada: As praxeologias do Modelo Praxeológico Dominante (MPD) não contribuem para o saber ensinado para que o aspecto decimal esteja articulado ao posicional do SND para os números naturais. Esta hipótese foi alicerçada das obras de Chambris (2008), Mounier (2012), Tempier(2010, 2013) e Chaachoua (2016).

O sexto capítulo é designado pela elaboração do Modelo Praxeológico de Referência que contemplou a integração da *práxis* com *logos*, por meio das reconstruções das OMP a partir do gerador de tarefas e variáveis, por meio do T4TEL, que incorporaram, durante essa reconstrução, os materias manipuláveis. Este modelo foi lente de análise para a elaboração e análise das AEPs.

No sétimo capítulo, as AEPs, alicerçado no MPR, foi elaborado, experimentado e analisado. As AEPs, que constituíram o MDR, modificaram o *topos* dos estudantes uma vez que as praxeologias pessoais descritas pelos estudantes, de algumas forma, em algunas casos, foram distintas das praxeologias prescritas nas instituições.

No oitavo capítulo foi apresentado as considerações finais da investigação, descrevendo uma análise de todos os métodos e modelizações, evidenciando a contribuição teórica dessa investigação bem como as *condições* e *restrições* para se desenvolver atividades de investigação que vão de encontro ao problema didático sob a perspectiva da *incompletude da atividade institucional*, que de alguma forma possibilitou alcançar $R^{\heartsuit}$. Outrossim, foram apresentadas as lacunas, implicações e perpectivas que decorreram dessa investigação.

2. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresenta-se o percurso metodológido dessa pesquisa de forma a revelar sua conformidade com os objetivos. Assim, é fundamental revisitar os objetivos geral e específicos dessa pesquisa.

Objetivo Geral: investigar como um Modelo Didático de Referência (MDR), baseado na abordagem da atividade de estudo e pesquisa (AEP), pode integrar o aspecto decimal ao posicional no logos das praxeologias dos estudantes no trabalho com sistema de numeração decimal no 5º Ano.

A partir do objetivo central elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Abordar aspectos históricos e epistemológicos do saber sobre os aspectos posicional e decimal do Sistema de Numeração;
- Analisar as condições e restrições presentes nos níveis de codeterminação acerca do aspecto decimal da numeração no 5º Ano;
- Elaborar AEPs por meio de praxeologias que integrem o aspecto decimal ao posiciona do SND.;
- Analisar a praxeologias pessoais dos estudantes e os efeitos destas, submetidas às AEPs, nas turmas do 5º Ano.

Doravante, apresentamos a natureza dessa investigação bem como os precedimentos que o circundam.

2.1 A natureza da pesquisa

Ao iniciar esta parte do capítulo, foi necessário revisitar a questão geratriz "Q_0: De que forma é possível elaborar um Modelo Didático de Referência para favorecer a articulação do aspecto decimal ao posicional do Sistema de Numeração Decimal no 5º ano?

Isto posto, esta pesquisa é caracterizada pela natureza qualitativa (GUARNICA, 2001), uma vez que esta modalidade de pesquisa, alicerçadas no PQM por meio do esquema Herbatiano, parte de uma questão geratriz Q_0 (CHEVALLARD, 2014a) adentro do sistema didático $S\left(X, Y, Q_0\right)$ que privilegia os procedimentos descritivos para permitir as formas de conhecer e entender o mundo (*ibid*.).

GUARNICA (2001, p.8-9) acrescenta que os elementos essenciais da pesquisa qualitativa está na

> [...] preponderância dos processos indutivos, a predominância de dados descritivos, a ênfase ao processo em detrimento do produto, a necessidade de questões geradoras e regras bem definidas de ação para a análise dos dados coletados, critérios de avaliação públicos, discutidos e acordados pela comunidade, e a responsabilidade do pesquisador em relação à sua pesquisa [...] definida em um contexto teórico-metodológico qualquer"

As propostas de Guarnica (2001) aproxima-se do método de pesquisa em Didática da Matemática proposto por Chevallard (2014a), a Praxeologia de Pesquisa (PP), visto que a PP é uma metodologia de pesquisa qualitativa do tipo experimental, visto que na DM não se concebe investigações sem intervenções[54], devido a descrição e interpretações tanto das várias perspectivas dos estudantes participantes quanto das variações das análises relatadas pelo pesquisador.

Nesse contexto, essa investigação amplia a proposta da PP já que propõe modelizar o trabalho do pesquisador em cada etapa (capítulo) do trabalho, perpassando pela revisão de literatura em que foi utilizado a dialética mídia-meio, o MPD em que foi utilizado a ecologia do saber integrada aos níveis de codeterminação didática, o MPR alicerçado pelo T4TEL que possibilitou a reconstrução de praxeologias experimentadas nas AEPs.

2.2 A investigação por meio da PP

A utilização das simbologias[55] na PP é essencial para descrever o método de uma *pesquisa intervencionista* de natureza qualitativa (CHEVALLARD, 2014a) requisita compreender a função de cada elemento institucional do sistema Herbatiano seguinte, ampliado por Chevallard (2016):

$$\left[S(X;Y;Q) \rightarrow \left\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\right\}\right] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

[54] Chevallard usao termo problemática intervencionista para indicar que a pesquisa é do tipo experimental ou empírica. (CHEVALLARD, 2014a)

[55] Chevallard incdica que essas simbologias são oriundas da Lógica Matemática. (CHEVALLARD, 2014a, p.4).

Assim, a instância U, que pode ser um estudante ou uma instituição (5º ano, escola, etc.) tem um *equipamento praxeológico* que é submetido a uma instância V (que também pode ser uma pessoa ou uma instituição). Ressalta-se que pode ocorrer $V = U$, caso U seja estudante e V um professor (instâncias pessoais) ou caso U seja um documento curricular oficial e V um livro didático em que o professor se assujeita (instâncias institucionais). Logo, U e V estão submetidos as *condições* (C) e *restrições* (K) para a elaboração e execução do projeto de pesquisa $\prod$.

Nesse sentido, Chevallard (2014a) caracteriza que as questões de investigação $\{Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_p\}$, nas investigações intervencionistas, visa determinar o conjunto de praxeologias $\wp$ que é *útil* ou *indispensável* para os estudantes (U), pelo julgamento do professor (V), no projeto de pesquisa $\prod$ sob as *condições* (C) e *restrições* (K) que satisfazem a relação $\Im(\wp, K, C, \prod, U, V)$. O autor (*ibid.*) descreve que esse problema está no cerne da AEP, uma vez que $\prod$ evoca a ideia do estatuto *do desafio didático*, no qual o pesquisador ξ investiga o problema didático pr no projeto de pesquisa $\prod$, identificado por $\prod_{pr}$, ampliando a relação anterior para a seguinte relação $\Im(\wp, K, C, \prod_{pr}, U, V)$.

Considerando as AEPs como uma sessão de estudos, ou seja, um evento e (OMP), que pertence a um conjunto de eventos E (OML), pode ser representado por $\text{AEP} = E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Como o MDR, dessa pesquisa, foi dividido em duas sessões de estudos, essas seções foram representadas como $\text{AEP} = E = (e_1, e_2)$.

No momento em que o pesquisador ξ elaborou as AEPs (e_1, e_2) esquematizou as K_ξ e C_ξ, que podem ser representadas por $K_\xi \cup C_\xi \vdash\!\!\!\longrightarrow_\xi e$, ou seja, as *condições* (C) e *restrições* (K) elencadas pelos pesquisadores nas AEPs. De maneira análoga, há as $K_y \cup C_y \vdash\!\!\!\longrightarrow_y e$ que se referem as *condições* (C) e *restrições* (K) presentes no *saber a ensinar* e no *saber ensinado*, ou seja, na ecologia do SND quando as professoras incentivaram os estudantes a evocarem seus conhecimentos.

Há também, as C_0 e K_0, como condições e restrições iniciais, respectivamente, presentes no MPD, descritas pela *observação de classe* (COMITI e FARIAS, 2019) e pelos NCD (CHEVALLARD, 2002).

As propostas do ξ para e, segundo Chevallard (2014a), indicam as restrições do evento e, denotado por $\check{K} = K_0 \cup K_\xi$, que se referem as restrições dispostos no MPD referente as lacunas do SND nos NCD integradas as restrições indicadas pelos pesquisadores nas AEPs, como a organização dos grupos de estudantes que imbricam nas interações e suas respectivas *praxeologias pessoais*. De maneira análoga, há as condições $\check{C} = C_0 \cup C_\xi$, que integram as possibilidades iniciais de utilização de materiais maniupuláveis integrado as condições apontadas pelo pesquisador ao reorganizar os matérias manipulares em unidades de milhar, centenas, dezenas e unidades, levando em consideração as conversões que articulasse ambos os aspectos do SND.

2.3 A produção de dados integrados na PP

O processo de produção de dados na metodologia da PP (CHEVALLARD, 2014a), caracterizada como *clínica didática*, permite a análise sob duas perspectivas. A primeira é alusiva ao *levantamento* de dados "naturais", que o autor supõe como uma cultura "experimental" em que o pesquisador ξ analisa o sistemas didático S que promove as a reconstrução das praxeologias nas AEPs $\left(\Im\left(\wp, K, C, \prod_{pr}, U, V\right)\right)$. Essa análise também foi realizada a luz da *observação de classe interna* e *externa* (COMITI e FARIAS, 2019) a fim de interpretar fenômenos como a *incompletude da atividade institucional* (FARIAS, CARVALHO e TEIXEIRA, 2018) que emergiram diante do problema didático.

Para essa perspectiva, Chevallard (2014a) atribui o *paradigma paleolítico de caçadores-coletores* quando "as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) determinam que os dados coletados não são devidos a atividade de ξ, mesmo que a *escolha* desses dados dependa em parte de ξ" (CHEVALLARD, 2014a, p. 9, tradução nossa)[56], apontados no MPD.

Chevallard (2012) denomina-o de *paradigma de visitação as obras* $\{O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m\}$ do sistema Herbatiano. Esse paradigma é uma das etapas do *paradigma de questionamento do mundo*, em que o autor (*ibid*.) questiona a forma como o saber está sendo desenvolvido na sociedade. Diante dos resultados insatisfatórios no ensino de matemática, entende-se que o *saber* está *monumentalizado*, ou seja, está em um determinado lugar apenas para ser apreciado,

[56] "les conditions (C) et les restrictions (K) déterminent que les données collectées ne sont pas dues à ξ l'activité, même si le choix de ces données dépend en partie de ξ"

sem elementos para questionar ou manipular o saber. Comiti e Farias (2019) indicam que visitar as obras é realizar a observação externa a classe como os métodos da escologia do saber sobre o MPD.

Nesse contexto, observar a ordem do levantamento de dados é fundamental uma vez que "produzir dados aqui ou ali altera o conteúdo da próxima "refeição[57] do pesquisador" (CHEVALLARD, 2014a, p. 9, tradução nossa)[58], ou seja, no MPD a análise foi organizada, primeiramente, nos NCD superiores seguindo aos níveis inferiores atentando as *condições* (C) e *restrições* (K) apresentadas no processo transpositivo, nesses níveis, perpassando nos currículos oficiais e prosseguindo ao caderno dos estudantes.

Dessa forma, durante a elaboração do MPD, houveram lacunas levantadas sobre o ensino do SND e a forma como está posto nas instituições. A partir dessas lacunas, houveram as primeiras noções para a reconstrução de praxeologias no MPR. Nesse sentido, a organização do período para a elaboração do MPD e MPR, como indicam Farras, Bosch e Gascón (2013), foi essencial para a análise das praxeologias $\wp$ institucionais e para visitação dos saber nas obras $\left\{O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m\right\}$. A produção desses dados foi realizada por meio da *observação naturalista* (CHEVALLARD, 2014a), uma vez que ocorreu em seu ambiente natural, a sala de aula.

A segunda perspectiva é tocante a *produção* de dados causada pela criação de uma "natureza artificial", em que o pesquisador ξ *produz* os dados que ele mesmo coletará. Essa perspectiva foi estruturada pela *observação de classe*, método que promoveu análise sistemática preliminar dos dados externos[59] e internos[60] a classe. A análise dessas observações permitem identificar a necessidade teórica para o desenvolvimento da investigação, as situações imprevisíveis, ou seja, quando o pesquisador (ξ) não visualizou o que esperava (R_I) ou visualizou o que não esperava ($R_I(x) \rightarrow R_I(O)$). Comiti e Farias (2019) indicam que essa

[57] Chevallard (2014a) considera o termo refeição ao levantamento de dados que tiveram suas condições (C) e restrições (K) analizadas, ou seja, o dado coletado foi remodelado e foi transformado em alimento do pesquisador.

[58] "produire des données ici ou là modifie le contenu du prochain «repas» du chercheur"

[59] Os dados externos a classe pode ser entendido como: objetivos do ensino, condução das seções de estudos (planejamentos de ensino) (*práxis* + *logos*), ecologia do saber (compreender as condições e restrições para o ensino do SND, analisar os documentos curriculares oficiais (BNCC, OCEB, OCMS), os manuais de ensino (PPP, planos trimestral, LD, caderno dos estudantes)) como objetivo de confrontar $OM_{ensinada}$ com a OM_I.

[60] Os dados internos a classe pode ser entendido como: todos os dados produzidos dentro da sala de aula como: gravação de áudio/vídeos dos estudantes e professores, quando possível tomadas por vários ξ, identificar as transcrições, ou seja, quem está falando e as diferentes interações que podem ser, por meio de entrevistas, registros e descartes.

perspectiva reflete a observação de dados internos a classe, ou seja, a *crônica de classe* que representa toda a descrição (manuscritos, gravações de áudio e/ou vídeo).

Essa perspectiva é também a parte da observação de classe para a produção e experimentação das $\text{AEPs} = (e_1, e_2)$. No momento da elaboração das AEPs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, o pesquisador (ξ) descreve as condições (C_ξ) e restrições (K_ξ), observadas que devem existir em cada e_i $\left(K_\xi \cup C_\xi \vdash\!\!\!-\!\!-_{\xi}\ e\right)$. Por exemplo, a forma de organização dos palitos é uma condição (C_ξ) para aflorar o aspecto decimal nas OMP sobre as conversões. Já a ausência de atividades de investigação desenvolvidas nas turmas pesquisadas e a organização das mesas para o trabalho dos estudantes sobre as e_i não privilegiou a interação entre todos os estudantes, ambas, podem ser consideradas restrições (K_ξ).

Chevallard (2014a, p. 9, tradução nossa) confere essa perspectiva metodológica como o "*paradigma do agricultor neolítico*, para complementar com os dados que a observação naturalista não contempla"[61]. Comiti e Farias (2019), complementam essa ideia, ao indicar a crônica de classe, produções escritas durante a observação, elaboradas pelo pesquisador (ξ), durante o MPD, apresenta lacunas no ensino e, por conseguinte, apresenta indícios para a elaboração do MPR e, consequentemente, elementos para a construção do MDR.

O processo de modelização desse MDR perpassa pelos *cenários* da *observação de classe*, que é constituído pelos mesmos elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988): análises preliminares ou prévias, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Os dados produzidos nos *cenários* são utilizados para observar as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) considerando o sistema educacional, escolhas realizadas durante a pesquisa e significado dos saberes tanto para professores quanto para estudantes.

As confluências entre essas perspectivas produzem o corpus de dados $D_l(P,Q)$, relativos aos paradigmas *paleolítico de caçadores-coletores* e *paradigma do agricultor neolítico* investigação[62], que descreve a experimentação das praxeologias reconstruídas, que é o foco do MDR, constituídos pelas AEPs.

[61] "*paradigme de l'agriculteur néolithique*, à compléter avec les données que l'observation naturaliste ne contemple pas".
[62] A observação de classe contempla esses dois paradigmas defendidos por Chevallard (2014a).

2.4 Os participantes da pesquisa

As unidades escolares que foram selecionadas para a pesquisa apresentaram nota no IDEB superior as indicações locais, regionais e nacionais. Logo, foi interessante desenvolver a pesquisa nessas unidades, em especial, nas turmas do 5º ano, já que todos os elementos que integram os aspectos do SND devem estar estabelecidos nesse seriado.

Os participantes da pesquisa, conforme o sistema didático $S(X,Y,Q)$, foram os estudantes $x \in X$, sendo 19 da escola 1 $(X_1 = 19)$ e 28 da escola 2 $(X_2 = 28)$. Todavia essa quantidade de estudantes não reflete a participação em todas as seções de observações, tanto no processo de elaboração do MPD quanto na realização das AEPs.

As seções das AEPs foram realizadas em 3 encontros com duas horas, sendo que a questão inicial da AEP 1 (e_1) X utilizou o 1º encontro de 2 horas e as demais questões de e_1 utilizou as 2 horas do 2º encontro. Já na AEP 2, X utilizou as 2 horas do 3º encontro.

Os encontros foram realizadas durante as aulas de matemática, no horário cedido pelas professoras participantes. Estas conduziram as AEPs, incentivando os estudantes para integração das discussões e descrição das praxeologias selecionadas. Neste momento, o pesquisador realizou suas anotações e gravações de áudio e imagens.

2.5 Entrevista com os professores dos anos iniciais do ensino funadamental e dos estudantes participantes das AEPs

Durante o processo de levantamento de dados, o pesquisador (ξ) entrevistou todas as professoras que lecionavam matemática em todos os anos correspondentes aos anos iniciais do EF nas escolas participantes da investigação, com o intuito de compreender *a razão de ser* do SND para essas professoras, ao longo dos anos desse segmento do ensino da educação básica, despontando assim a $R_p(Y,O)$.

Essas entrevistas foram fundamentais para integrar algumas evidências iniciais e identificar elementos da *incompletude da atividade institucional*, em especial, o *vazio didático* e a *ausência da razão de ser*. Em alguns momentos, faltaram elementos epistemológicos para desenvolver tarefas sobre conversões entre numerais que auxiliam a compreensão do aspecto decimal do SND. Por exemplo, não houve nas praxeologias institucionais a um tipo de tarefas que indicassem a conversão 345U=34D 5U, apenas a conversão canônica, 345U= 3C 4D 5U.

Nesse sentido, as entrevistas foram semi-estruturadas para permitir que o pesquisador (ξ) requisite a elucidação e compreensão da relação do professor (Y) com o saber, $R_I(Y,O)$ $R_I(Y,O)$. Assim, cada entrevista foi realizada invidualmente para preservar a propostas didáticas de cada professora (Y). As propostas indicadas por Chevallard (2014c, p. 38) complementam que as entrevistas semi-estruturadas, por meio de “perguntas abertas permite a riqueza de dados qualitativos e incentiva o pensamento e a liberdade de expressão”, contemplam, mesmo de forma implícita, os objetivos de ensinar e aprender o SND, as relações pessoais dos professores com o saber e espaços de discussão com o intuito de fomentar questões e, quando possível, elementos para afirmações a essas questões (COMITI e FARIAS, 2019).

2.6 Síntese do Percurso metodológico

Após a apresentação dos elementos metodológicos que perpassa durante essa pesquisa, contruímos o quadro 2 que relaciona os objetivos específicos em cada ação, conforme o Quadro apresentado por Santos Júnior (2017, *apud*. SERRANO, 2012) em suas respectivas obras.

Quadro 2 - Relação entre os objetivos específicos e estratégias de investigação

Objetivo específico	Material Empírico	Estratégias de investigação
Abordar aspectos epistemológicos e históricos do saber sobre os aspectos do SND.	- Livros e artigos sobre História da Matemática. - Livros e artigos sobre Aritmética Elementar.	- Compreender a evolução do conceito de número, sistemas de numeração e de materiais manipuláveis que discorrem a numeração para estruturar a epistemologia do SND, que integra o *logos* dessa investigação.
Analisar as condições e restrições presentes nos níveis de codeterminação acerca do aspecto decimal da numeração no 5º Ano;	- Base Nacional Comum Curricular; - Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos da rede estadual da Bahia;	- Descrever as condições (C) e restrições (K), utilizando como método os níveis de codeterminação didática, a fim de compreender de que forma as praxeologias referentes a ambos os aspectos do SND estão

	- Referencial Curricular do município de Salvador. - Livro Didático.	estabelecidas nas instituições. - Análise praxeológica da seção sobre Sistema de Numeração Decimal por meio do Modelo Tridimensional para análise de Livro Didático.
Elaborar AEPs por meio de praxeologias que integrem o aspecto decimal ao posiciona do SND	- Visitar o logos e as OM que são referências para a fala e escrita numérica;	- Reconstruir as praxologias utilizando o gerador de tarefas e as variáveis, do T4TEL, integradas aos materiais manipuláveis.
Analisar a praxeologias pessoais dos estudantes e os efeitos destas, submetidas as AEPs no 5º ano	- Entrevistas; - Gravações de áudio e imagens; - Atividades realizadas pelos estudantes.	- Determinar as praxeologias das AEPs por meio de materiais concretos manipuláveis. - Elementos observação de classe (análise *a priori*, experimentação e análise *a posteiori*). - Verificar as condições (*C*) e restrições (*K*) das AEPs.

Fonte: o autor (2020).

Diante do exposto, o percurso metodológico da PP associada a *observação de classe* indicou caminhos e formas de análises para a reconstrução de praxeologias. No entanto, faz-se necessário visitar as obras para compreender, primeiramente a estrutura epistemológica que está por trás dos aspectos do SND que, posteriormente, justificou todo o discursos racional das tecnologias levantadas no MPD e reconstruídas no MPR.

Nesse sentido, a análise sobre a aboprdagem histórica e epistemológica do SND seguiu no capítulo seguinte.

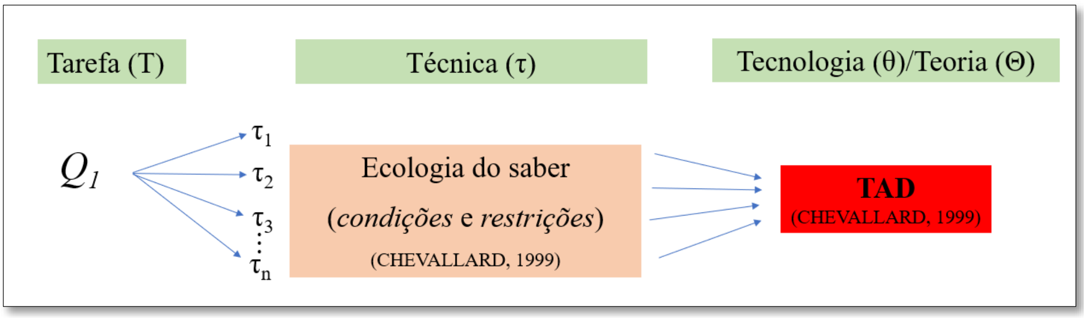
3. ABORDAGEM HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA SOBRE O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Iniciamos este capítulo pela apresentação da questão Q_1 (derivada da Q_0) "De que forma as particularidades sobre a história e epistemologia do SND podem contribuir para a integração do aspecto decimal ao posicional?"

Para a construção da resposta $R_1^{\lozenge}$, o método de investigação adotado, a partir da PP, foi a ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999), conforme a

Figura 5figura 5. A partir desse método foi possível visitar obras que auxiliaram o avanço da estrutura matemática do SND ao logo do tempo.

Figura 5 - Esquema do método de investigação durante o processo de elaboração do *logos*.



Fonte: o autor (2020)

O método de investigação proposto para a elaboração dessa abordagem para de uma tarefa T: Responder a questão Q_1. Nesse sentido, a técnica para a resolução dessa tarefa foi a ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999), uma vez que através desse método foi possível identificar que o *habitat* do SND, que é a Aritmética elementar e que o *nicho* assemelha-se a *razão de ser* do SND, geralmente, utilizado como suporte para a realização de cálculos para as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), potências de 10, conversões entre unidades do sistema métrico, dentre outros.

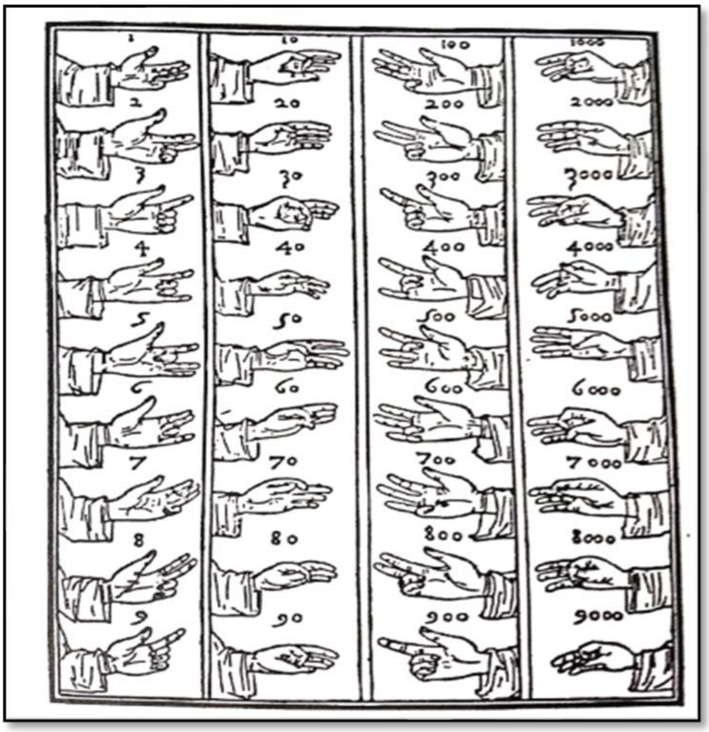
A partir do esquema proposto na

Figura 5, capítulo foi fragmentado em duas partes: a primeira que apresentou uma abordagem histórica dos SND, desde os primeiros indícios sobre a noção de algarismo, número e numerais, e a segunda que diz respeito a epistemologia desse saber, ou seja, a estrutura matemática que corresponde a Aritimética Elementar que integrou o *logos* tanto das práticas institucionais, no MPD, quanto das praxeologias reconstruídas, no MPR. Salienta-se que essa abordagem pode ser compreendida pela visitação as obras no *saber sábio*, ou seja, obras elaboradas pela comunidade de matemáticos.

3.1 Abordagem histórica do SND

Nesse contexto, a abordagem histórica foi iniciada sobre o SND por meio do percurso histórico sobre as convicções iniciais de número, numerais e a construção dos números naturais, uma vez que esses entendimentos fazem parte da estrutura do nosso trabalho. A ideia de número foi construída e estruturada ao longo da história desde técnicas primitivas, como pinturas rupestres as técnicas atuais, como os manuscritos em representação indu-arábico. “Há mais de 50.000 anos o homem já era capaz de ter ideias sobre a contagem” (EVES, 2004. p. 25), segundo algumas evidências arqueológicas, representados por símbolos (palavras, gestos ou gráficos) (RODRIGUES e DINIZ, 2015), mas não a contagem propriamente dita. Caraça (1951, p. 7) apontou que “a necessidade de contar começou com o desenvolvimento das atividades humanas, em particular, quando foi necessário a ideia de correspondência biunívoca”, em que cada número era representado por um animal, ou seja, pela manhã, para cada animal que saia para o rebanho, era inserida uma pedrinha em um saco e, ao final da tarde, para cada animal que retornava era retirada uma pedra do saco, sendo assim, se a quantidade de pedras fosse maior que número de animais, é porque faltavam animais e se fosse menor é porque voltaram mais animais e, neste caso, acrescentaria a pedra no saco referente aquele animal. Isso era sempre realizado de um a um evidenciando que “a ideia de contagem já estava presente nesse período” (*ibid.*, p. 7). Do ponto de vista histórico, “o número e a matemática foram sendo desenvolvidos tanto para atender as atividades práticas do homem e das sociedades, como a pecuária e a agricultura, quanto àquelas intrínsecas à matemática e as ciências” (IFRAH, 1989, p. 10). Mas foi “esse processo de contar objetos que deu origem ao número natural e todas as civilizações que criaram alguma forma de linguagem escrita (gregos, romanos, chineses, indianos, etc.)” (*ibid.*, p. 10). Mesmo assim, nesse período, ainda não havia o conceito, propriamente dito, de número. Esse conceito foi sendo elaborado em diversos aspectos como reforçam Caraça (1951) e Ifrah (1989, 1997), onde primeiro foram as “observações humanas para a contagem de pequenos objetos ao se utilizar como referência os dedos, nesse sentido surge o nome dígito” (EVES, 2004, p. 29). Assim surgiram s números de 1 a 10. Esses números ficaram conhecidos como números digitais. Ao longo do tempo, próximo a Idade Média, os números digitais foram desenvolvidos assumindo novas representações, como mostra a figura 6. Sendo assim, as duas primeiras colunas são representadas pela mão esquerda e as outras duas pela mão direita.

Figura 6 - O uso dos Números digitais.



Fonte: (EVES, 2004, p. 30 *apud* Pacioli, 1491)

Nesse período, foi possível observar que a ideia do aspecto decimal já estava sendo desenvolvida ao representar uma potência de 10, ou seja, cada representação múltipla de 10 por meios de gestos pelos dedos.

O trabalho de Teixeira (2019)[63] reforça essa concepção sobre a importância da contagem como primeira ferramenta matemática cultural aprendida pelas crianças e que a observação dos princípios de contagem é essencial para a aprender a contar como também compreender as regularidades desse sistema de contagem e o uso dos números em diferentes situações seja para quantificar unidades ou conjuntos. Portanto, envolve a ligação de esquemas

[63] Este trabalho teve o suporte nos trabalhos de Vargas e Dorneles (1978) e Gelman e Galistell (1978) sobre a concepção de número.

de raciocínio com a linguagem (*ibid.*, p. 71). Nesse sentido, os argumentos de Teixeira[64] que propõem cinco princípios como estrutura para a contagem[65]:

> 1. **Correspondência termo a termo**, na qual cada objeto contado deve ter correspondência com o nome de um numeral;
>
> 2. **Ordem estável**, na qual os rótulos numéricos obedecem a uma sequência invariável;
>
> 3. **Cardinalidade**, que significa que o último numeral da sequência de uma contagem determina a quantidade de elementos do conjunto contado;
>
> 4. **Irrelevância da ordem**: em que não importa a ordem usada na enumeração dos objetos, desde que nenhum dos demais princípios sejam violados;
>
> 5. **Abstração**: que consiste na ideia de que os objetos de qualquer tipo podem ser reunidos e contados.

Esses princípios podem ser reforçados no documento elaborado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), instituição de referência normativa no domínio das tendências curriculares internacionais, denominado Princípios e Normas para a Matemática Escolar (APM, 2008, p. 34)[66] "a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido do número e a aquisição de destreza no cálculo aritmético constituem o cerne da Educação Matemática para os primeiros anos do ensino básico".

Dessa forma, a partir desses cinco princípios foram criados os sistemas numéricos (RODRIGUES e DINIZ, 2015). A adoção de um sistema numérico teve forte influência cultural já que a mão tem dez dedos, logo essa observação foi fundamental na aquisição de um sistema numérico, o decimal, em especial para números maiores que 10. Segundo as propostas desses autores (*ibid.*), o desenvolvimento de sistemas de numeração não foi tarefa simples e rápida, muito pelo contrário, foram muitas décadas para desenvolvê-los. Segundo Ifrah (1989, p.55-56),

> [...] à necessidade de se firmar uma base já estava consumada, mas a base 10 foi fixada pois tinha uma certa vantagem sobre outras tão grandes [...], pois corresponde a uma ordem de grandeza satisfatória para a memória humana[...]. Do mesmo modo ela é superior a bases pequenas[...], pois permite evitar um esforço considerável de representação.

---

[64] Baseados nos trabalhos de Gelman e Galistell (1978). Esses princípios compõe a estrutura da θ para a contagem de coleções.

[65] Esses princípios serão analisados, posteriormente, na perspectiva da Matemática, após a apresentação dos Axiomas de Peano e no MPR.

[66] Essa citação compreende as normas para o Tema: Números e operações.

Sendo assim, destacou-se a importância da escolha de um sistema de base 10, pois permite "uma representação simples e sem ambiguidade entre números inteiros ou fracionários" (*Ibidem*). Chaachoua, (2016) defendeu que é preciso identificar os princípios da contagem[67] para lidar sobre o aspecto decimal da numeração que, também, pode conduzir-lhes a representação dos números em potências de 10. Ao longo do tempo houveram diversos sistema de numeração, como os de base 5 (*sistema quinário*), base 12, base 20 (*sistema vigesimal*) e base 60 (*sistema sexagesimal*)[68].

Diante desse período, o homem foi desenvolvendo-se e abandonando a dependência de objetos para fazer a contagem uma vez que era necessário realizar cálculos cada vez mais complexos, como a contagem para números grandes, baseados no posicionamento dos numerais em um sistema ordenado. Mas, inicialmente, esses sistemas foram formados por agrupamentos simples e, posteriormente, o multiplicativo até o desenvolvimento do sistema de numeração posicional atual. No sistema de agrupamento simples escolhe-se uma base e qualquer número pode ser representado pela adição desses símbolos repetindo-os cada um deles o número necessário de vezes. A visualização dessas representações, segue na figura 7, sobre a numeração hieroglífica egípcia usada no sistema de base 10.

Figura 7 - Os símbolos da numeração hieroglífica egípcia no sistema de base 10.

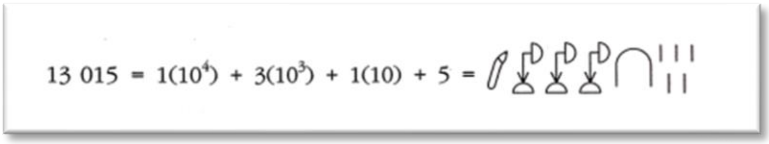
Fonte: (EVES, 2004, p. 31)

67 CHAACHOUA, Y. *Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modele T4TEL*. Mémoire de Master de Didactique des Sciences. Université Grenoble Alpes. Out. 2016. p. 11-15.

68 O sistema de base 5 foi o primeiro a ser utilizado e até hoje algumas tribos da américa do sul contam nas mãos. O sistema de base 12 foi utilizado na pré-história, em especial, em relação a medidas, uma vez que o 12 era o número de polegadas de um pé. Já o *sistema vigesimal* foi utilizado por índios americanos, mas os maias foram mais reconhecidos pelo desenvolvimento desse sistema. Já o *sistema sexagesimal* foi utilizado pelos babilônios e ainda segue sendo utilizado na medida do tempo e de ângulos em minutos e segundos. (EVES, 2004)

Dessa forma, evidenciou-se que a forma de escrita atual segue a forma habitual egípcia escrevendo os números da direita para a esquerda. Por exemplo, é possível representar o número 13 015, no sistema hieroglífico egípcio usando a operação adição, conforme a figura 8.

Figura 8 - O número 10 015 representado por símbolos



Fonte: (EVES, 2004, p. 31)

O aperfeiçoamento dos sistemas de agrupamento simples promoveu o sistema de agrupamento multiplicativo, algo muito parecido com o sistema atual, uma vez que ao adotar a base do sistema *a*, os símbolos seriam de $1, 2, \ldots, a-1$ e um outro conjunto adotado pelos símbolos $a, a^2, a^3 \ldots$. Por exemplo, o número 9875 pode ser $9x8y7z5$, de forma que $x = 10^3$, $y = 10^2$, $z = 10$ e $w = 5$.

Já os sistemas de numeração posicionais (SNP), pode ser representado por uma base *a* que adota os símbolos $0,1,2,3,\ a-1$. Dessa forma qualquer número *N* pode ser representado numa única forma:

$$N = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + b_{n-2} a^{n-2} + \ \ldots \ + \ b_2 a^2 + \ b_1 a^1 + \ b_0, \text{ com } 0 \leq b_i < b;\ i = 0,1,2,\ldots,\ n; n \in \mathbb{N}.$$

(eq. 1) [69]

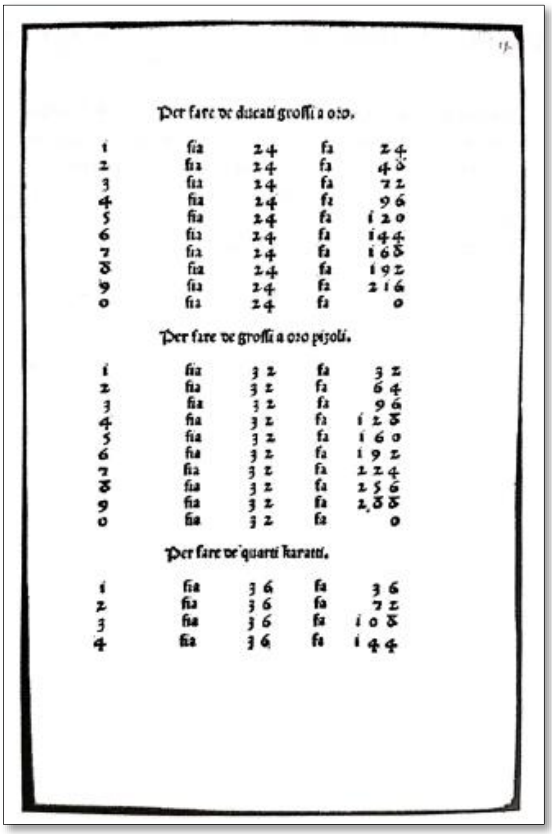
A Equação 1 é chamada de representação canônica do SNP. Essa forma de representação é essencial para compreender as operações básicas pela organização dos números.

Os símbolos numéricos foram sendo aperfeiçoados até a estabilização dos símbolos no sistema de numeração indo-arábico, a iniciar com a *Aritmética de Treviso*, escrita por Piero Borghi no século XV na cidade de Treviso, na Itália. Esta aritmética era tratada de uma forma mais humana aproximando-se dos anseios sociais de uma aritmética comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, o desenvolvimento de cálculos e aplicações que envolviam o comércio e a sociedade (*ibid.*). Esse período foi conhecido como a formalização dos números

[69] Eq. representa equação.

indo-arábicos em processo de finalização, como indica a figura 9[70] que mostra os numerais indo-arábicos numa forma já acabada.

Figura 9 - Uma página da Aritmética em Treviso de 1478.



Per fare de ducati grossi a oro.

1	fia	24	fa	24
2	fia	24	fa	48
3	fia	24	fa	72
4	fia	24	fa	96
5	fia	24	fa	120
6	fia	24	fa	144
7	fia	24	fa	168
8	fia	24	fa	192
9	fia	24	fa	216
0	fia	24	fa	0

Per fare de grossi a oro pizoli.

1	fia	32	fa	32
2	fia	32	fa	64
3	fia	32	fa	96
4	fia	32	fa	128
5	fia	32	fa	160
6	fia	32	fa	192
7	fia	32	fa	224
8	fia	32	fa	256
9	fia	32	fa	288
0	fia	32	fa	0

Per fare de quarti karatti.

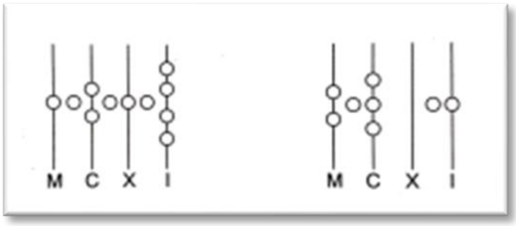
1	fia	36	fa	36
2	fia	36	fa	72
3	fia	36	fa	108
4	fia	36	fa	144

Fonte: (EVES, 2004, p. 300)

Nesse percurso, mesmo antes do "Império Romano (27 a.C. – 476 d.c.), que marcou o período de transição entre o fim da Antiguidade e o início da Idade Moderna, surgiu o ábaco, o mais antigo objeto manipulável usado pelo homem" (*ibid.*, p. 39) como forma de contornar as dificuldades intelectuais e materiais para cálculos simples usando as operações de adição e subtração, como pode ser visualizado na figura 10.

[70] Essa imagem foi publicada com permissão da Biblioteca de Houghton, Universidade de Havard.

Figura 10 - Representação da adição entre MDCCLXIX e MXXXVII.



(Fonte: EVES, 2004, p. 39)

Os números da Figura 10, representados no ábaco, são 1 769 e 2 806. Nesta figura, há os ostensivos para a representação do número 1 769 e o resultado da soma (1 769 + 1 037) = 2 806. O símbolo I representa 1 unidade, X: 10 unidades, C: 100 unidades e M: 1 000 unidades. Ainda não havia nesse sistema a representação dos números 5, 50 e 500. Segundo EVES (2004, p. 39),

> Para representar o número da esquerda, da Figura 10, convencionamos, para reduzir o número de fichas podem aparecer subsequentemente em um segmento, substituir cada cinco fichas de um segmento por uma ficha a ser colocada no espaço exatamente a esquerda desse segmento. Então todo número menor que 10 000 pode ser representado no Quadro de linhas, colocando-se no máximo quatro fichas em cada segmento e no máximo uma ficha no espaço à esquerda de cada segmento.

Nesse período, já era possível visualizar a diferença entre número, numeral e algarismos. O Numeral pode ser entendido como um qualquer símbolo, gráfico ou não, que é utilizado para representar um número, que é a quantidade em si (RODRIGUES e DINIZ, 2015). Já os algarismos, outro elemento fundamental ao SND, foi entendido como "as unidades constituintes do numeral escrito, da mesma forma que as letras são as unidades constituintes da palavra escrita" (*ibid.*). Nesse sentido, há o número, que agrega algarismo e numeral, como um conceito fundamental a matemática.

Foram muitos séculos para a evolução dos números e suas representações até a estabilidade atual perpassando pela "batalha" entre os *algoristas* e os *abacistas*, como mostra a figura 11. Nessa imagem evidenciou-se que, neste período (início do séc. XVI), já haviam discussões acerca das representações do número e do uso do manipulável (ábaco) como uma forma de integrar a compreensão de número.

Figura 11 - O abacista *versus* o algorista.

(Fonte: EVES, 2004, p. 41)

A partir desses sistemas posicionais, foi construído o Sistema de Numeração Decimal Posicional (SNDP), qualquer número pode ser representado independentemente do seu tamanho e/ou quantidade de algarismos. Nesse sentido, Rodrigues (2013) e Miyaschita (2002) propuseram representar qualquer número natural organizando esses números de acordo com as suas posições, o agrupamento de números, que é a base para o sistema de numeração decimal.

Nesse sentido, Rodrigues (2013, p. 44) estabelece uma regra fundamental para o agrupamento de números: "Em um sistema de numeração posicional, todos os algarismos valem menos do que a base". Essa regra significa dizer que 13 unidades, no sistema de base 10 deve ser organizado como 1 dezena e 3 unidades. A importância dos dois aspectos integrados é essencial para transformar 10 unidades em 1 dezena e como 3 (unidades) <10 (base do sistema), ou seja, já é possível perceber a ideia do aspecto decimal ao compreender que 13 U = 10U +3U = 1D + 3U.

O surgimento do 0 (zero) supera uma as limitações do SNDP, ao demarcar as ordens de unidades vazias, eliminando os riscos de se ter representações ambíguas (*ibidem*). Além disso, a utilização do SNDP proporciona a utilização das 4 operações básicas (adição, subtração, produto e divisão) da aritmética que estão presentes na Teoria dos Números, que foram apresentados na abordagem epistemológica do SND.

3.2 Abordagem epistemológica do SND

O estudo epistemológico foi iniciado por alguns questionamentos sobre a estrutura dos números e dos conjuntos motivaram grande parte dos matemáticos e dos filósofos dos fundamentos da matemática durante os séculos XIX e XX, apesar dessas conjecturas serem mais antigas.

Mesmo nesse período de pesquisas, o conhecimento dos números ainda era entendido de forma intuitiva, ou seja, o conjunto dos números naturais é constituído dos elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., e era realizada a adição, e subtração entre esses números, mas sem a elaboração de propriedades para essas operações.

O processo de contagem pressupõe o conhecimento da sequência numérica, ou seja, a percepção de comparação entre objetos. Esse processo torna a noção de quantidade mais precisa. E essa noção aproxima-se da definição de contagem, que partiu de noções do senso comum para uma rigorosa teoria axiomático-dedutiva, que para esta pesquisa foi enfatizadaa partir dos enunciados sobre conjuntos e a construção do conjunto dos números naturais[71].

O conjunto pode ser entendido como uma coleção de objetos de mesma natureza. Já o conjunto dos números naturais permite a organização dos conceitos e propriedades relevantes desses números numa estrutura lógica bem definida, permitindo a uma compreensão de suas propriedades e suas aplicações tanto para a matemática quanto para as demais áreas das ciências. Mas antes de dialogar sobre o Conjunto dos Números Naturais é fundamental apresentar alguns elementos da Álgebra Elementar como Monoides, Simetrias e Grupos, uma vez que esses são elementos que estruturam as propriedades do conjunto dos naturais como as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação), as relações de ordem, cardinalidade de um conjunto e tamanho de um conjunto (conjunto finito e infinito).

Um Monoide é definido por Monteiro (1969, p.49) como uma operação de um produto cartesiano sobre o mesmo conjunto, ou seja, o Monóide de um conjunto A é uma operação sobre A, aplicada por $\mathrm{A\,X\,A\;em\;A}$ [72]. Em outras palavras, o Monóide pode ser entendido como um conjunto com a propriedade associativa e a unidade do elemento neutro, indicado por

[71] Vamos considerar diversos enunciados matemáticos e suas demonstrações como conjuntos e suas propriedades, funções dos conjuntos, relações de ordem e suas propriedades.

[72] $A\,\mathrm{X}\,A\;\mathrm{em}\,A$ é uma simbologia matemática para informar que o produto cartesiano de A com A tem uma correspondência com o próprio conjunto A.

$(A,*,1)$. A partir das propriedades de conjuntos, relações de equivalência e funções construiu-se as propriedades de Adição, multiplicação e composição (*ibid.*). A partir dessa definição de Monóides e das definições e propriedades supracitadas definiu-se as operações de associação, permutação, comutação e elemento neutro, da seguinte forma:

Definição 1: Seja um conjunto A, a operação $*$ é associativa se, e somente se, $\forall\{a,b,c\}\in A$[73] têm-se $(a*b)*c=a*(b*c)$

Definição 2[74]: Seja um conjunto A, a operação $*$ é comutativa se, e somente se, $\forall\{a,b\}\in A$ têm-se $a*b=b*a$

Definição 3[75]: Seja um conjunto A, e uma operação $*$ definida em A, dizemos que um elemento *e*; $e\in A$ é elemento neutro para a operação $*$ se, e somente se, $a*e=e*a=a$.

Estas definições, de 1 a 3, proporcionaram a construção de mais duas definições muito importantes para este trabalho, a noção de Simetria que possibilitou compreender a noção de elemento simétrico e o tamanho de um conjunto, dentre elas:

Definição 4[76]: Seja A um Monóide e $\{a,e\}\in \mathrm{A}$, onde *e* é o elemento neutro de A. Dizemos que a possui simétrico, chamado de $a`$, se, e somente se, $a*a`=a`*a=e$. A partir dessa definição surgiu a ideia de elemento inverso para as operações de Adição e Multiplicação.

Definição 5: Um Monóide é dito finito se ele possui um número finito de elementos. Esta definição é fundamental para entender o tamanho de um conjunto.

Outro elemento fundamental, Grupos, pode ser entendido como um Monóide que têm todos os seus elementos inversíveis. Dessa forma, Grupo foi definido como:

Definição 6: Um conjunto B é chamado de Grupo se, e somente se, a operação * em B valida os seguintes axiomas:

G_1: $(a*b)*c=a*(b*c),\forall\{a,b,c\}\in B$ (propriedade associativa)

---

73 A representação $\forall\{a,b,c\}\in A$ indica que $\forall\{a,b,c\}$ (*a*, *b* e *c* podem assumir qualquer valor) que $\in A$ (pertencem ao conjunto *A*)

74 Essas definições, após essa explanação, podem ser entendidas como a operação comutativa daqui em diante.

75 Da Definição 3, surge o Teorema da unicidade do elemento neutro que foi considerado como válido sem demonstrá-lo.

76 Da Definição 4, surge o Teorema da unicidade do elemento inverso que foi considerado como válido sem demonstrá-lo.

G2 $a * e = e * a = a, \forall a \in B, \exists e \in B$ (propriedade da existência do elemento neutro)

G3: $a * a` = a` * a = e, \forall a \in B, \exists a` \in B$ (propriedade da existência do elemento inverso)

Se um Grupo admitir a propriedade comutativa, o grupo é chamado de Grupo Comutativo ou Abeliano, como na definição 8, a seguir:

Definição 7: Para quaisquer $\{a,b\} \in B$, $(B,*,1)$[77] é um Grupo Abeliano se, e somente se, $a*b = b*a$

Essas definições são fundamentais para a Teoria dos Números, em especial, para a construção dos Números Naturais. Um grande colaborador para a apresentação da Teoria dos Números Naturais foi *Giussepe Peano* (1858-1932), a partir da construção de quatro propriedades conhecidas atualmente como *axiomas de Peano*. Estes axiomas são resultados de premissas lógicas consideradas verdadeiras sobre os números naturais. Sendo assim, o conjunto $\mathbb{N}$, em que n representa um elemento desse conjunto $(n \in \mathbb{N})$ é caracterizado, por Lima (1992, p. 26) e Lima et al. (1999, p. 30) pelas seguintes propriedades:

> "P_1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n.
>
> P_2. A função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.
>
> P_3. Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
>
> P_4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in \mathbb{N}$ e $s(X) \in X$, (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$."

Vale ressaltar que esses *axiomas de Peano* podem ser enunciados, em uma linguagem informal, desprovidos de notação matemática[78]. Silva (2013) admite ainda uma propriedade

[77] Vamos considerar que o conjunto (B, *, 1) é um Monóide com a operação associativa e elemento neutro.
[78] P_1: Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
P_2: Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)
P_3: Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

que incluia o zero como o primeiro elemento do conjunto dos Números Naturais[79]. Este fato foi adotado, sem prejuízo a axiomática de *Peano*, mesmo ao reconher que o surgimento do zero sucede após a construção do conjunto dos números naturais. Essas propriedades possibilitaram o surgimento da definição das operações de Adição e Multiplicação (LIMA, 1992), que parte de adoção de dois números $m, n \in \mathbb{N}$;

A adição é definida por: $m+n=\begin{cases} m+1=s(m) \\ m+s(n)=s(m+n) \end{cases}$ (eq. 2)

Dessa definição, podem ser apresentadas as seguintes propriedades da adição, sendo $m, n, \mathrm{p} \in \mathbb{N}$, temos:

A_1: $m+(n+p)=(m+n)+p$ (*Associatividade*)

A_2: $m+n=n+m$ (*Comutatividade*)

A_3: $m+n=m+p \Rightarrow n=p$ (Lei do corte ou Lei do cancelamento aditivo)

A_4: Para qualquer $m, n \in \mathbb{N}$, há as seguints condições: $\begin{cases} m=n \quad \text{ou} \\ \exists p \in \mathbb{N}; m=n+p \quad \text{ou} \\ \exists q \in \mathbb{N}; \mathrm{n}=m+p \end{cases}$

(*tricotomia*)

A propriedade A_1 (*Associatividade*), indica que a adição entre três números naturais pode ser realizada de forma dois a dois, por exemplo, ao adotar[80] $m=1, n=3$ e $p=4$, a adição poderia ser iniciada por $m+(n+p)$ somando, primeiramente, $n+p=3+4=7$, e o resultado desta ser adicionado com o valor de *m*, $m+7=1+7=8$. Da mesma forma, a adição poderia ser realizada da forma $(m+n)+p$ somando, primeiramente, $m+n=1+3=4$, e o resultado desta ser adicionado com o valor de *p*, $4+\ p=4+4=8$.

A propriedade A_2 (*Comutatividade*), indica que se a adição entre dois números naturais não reflete uma ordem para adicionar esses números, por exemplo, ao adotar $m=1, n=3$, a adição poderia ser realizada da forma $m+n=1+3=4$ ou desta $n+m=3+1=4$.

P_4: Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais. Esta propriedade é conhecida como o Princípio da Indução.

[79] P_0: de forma que zero seja um número natural.

[80] Os valores de *m*, *n* e *p* podem ser adotados por qualquer número natural.

A propriedade A_3 (*Lei do cancelamento aditivo*), indica que a adição entre dois números naturais diferentes for igual a outra adição entre dois números, com um desses números igual ao da adição anterior, então os outros dois números são iguais. Vejamos, ao adotar $m = 1$ e $n,\ p \in \mathbb{N}$, temos que se $m + n = m + p \Leftrightarrow 1 + n = 1 + p \Rightarrow n = p, \forall n, p \in \mathbb{N}$.

Já a propriedade A_4 (*tricotomia*), indica que a adição entre dois números naturais pode admitir uma disjunção entre três condições:

Condição 1: $m = n$. Ao adotar $m = 1$, obrigatoriamente, $n = 1$.

Condição 2: $\exists p \in \mathbb{N}; m = n + p$. Ao adotar $n = 3$ e $p = 4$, $m = 3 + 4 = 7$.

Condição 3: $\exists q \in \mathbb{N}; \mathrm{n} = m + p$. Ao adotar $m = 1$ e $p = 4$, $n = 1 + 4 = 5$.

Essa propriedade (A_4) amplia a ideia da propriedade P_4 usando a adição na perspectiva do sucessor de um número, ou seja, sendo $m = s(n)$ na condição 2 ou $n = s(m)$ na condição 3. As conjecturas da propriedade A_4 são funcionais para números e seus sucessores. No sentido, de criar uma ordenação tanto para números pequenos quanto grandes, a construção da relação de ordem foi essencial para o avanço da operação aditiva. Essa *relação de ordem*[81] pode ser definida da seguinte forma: sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Podemos dizer que $m < n$ (*m* é menor que *n*), se $\exists p \in \mathbb{N}; n = m + p$. Da mesma forma podemos dizer que $n > m$ (*n* é maior que *m*). Também podemos entender quando $m \leq n$ (*m* é menor ou igual a *n*), se $\exists p \in \mathbb{N}; n = m + p$, em que *p* pode ser: $p = 0 \Rightarrow m = n$ ou $p > 0 \Rightarrow m < n$. De maneira análoga isso também é válido para $n \geq m$.

Já a operação multiplicação é definida por: $$m \cdot n = \begin{cases} \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ parcelas iguais}} \\ \text{ou} \\ m + \underbrace{m + \cdots + m}_{n-1 \text{ parcelas iguais}} \end{cases} \qquad \text{(eq. 3)}$$

Essa operação pode ser entendida como uma ampliação da adição, em especial, para números grandes. Para se ter uma multiplicação de *m* por *n*, basta somar *m* com ele próprio *n* vezes ou somar *m* com ele próprio adicionado a *m*, $(n-1)$ vezes.

---

[81] A relação de ordem carrega as seguintes propriedades:
Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p.$

Tricotomia: Sendo $m, n \in \mathbb{N}$, então $m = n$ ou $m < n$ ou $m > n$.

Monotonicidade da Adição: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m < n$ então $m + p < n + p$. (LIMA, 1992, p. 29)

Dessa definição, foram definidas as seguintes propriedades da Multiplicação, sendo $m, n, \mathrm{p} \in \mathbb{N}$, temos:

M_1: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$	(*Associatividade*)
M_2: $m \cdot n = n \cdot m$	(*Comutatividade*)
M_3: $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$	(*Elemento neutro multiplicativo*)
M_4: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$	(Lei do corte ou Lei do cancelamento multiplicativo)
M_5: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$	(*Distributividade*)
M_6: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$	(*Monotonicidade*)

A propriedade M_1 (*Associatividade*), indica que a multiplicação entre três números naturais pode ser realizada de forma 2 a dois, por exemplo, ao adotar $m = 2, n = 3$ e $p = 4$, a multiplicação poderia ser realizada da forma $m \cdot (n \cdot p)$ multiplicando, primeiramente, $n \cdot p = 3 \cdot 4 = 12$, e assim multiplicar o *m* com este resultado, $m \cdot 12 = 2 \cdot 12 = 24$. Da mesma forma, a multiplicação poderia ser iniciada por $(m \cdot n) \cdot p$ multiplicando, primeiramente, $m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$, e assim multiplicar este resultado com o *p*, $6 \cdot p = 6 \cdot 4 = 24$.

A propriedade M_2 (*Comutatividade*), indica que que a multiplicação entre dois números naturais não reflete uma ordem para multiplicar esses números, por exemplo, sendo $m = 2, n = 3$, a multiplicação poderia ser realizada da forma $m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6$ ou desta $n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$.

A propriedade M_3 (*Elemento Neutro Multiplicativo*), indica que que a multiplicação entre um número natural qualquer por um resulta nesse mesmo número. Podemos verificar isso ao adotar $m = 5$, temos que $5 \cdot 1 = 5$ ou $1 \cdot 5 = 5$.

A propriedade M_4 (*Lei do cancelamento multiplicativo*), indica que a multiplicação entre dois números naturais diferentes for igual a outra multiplicação entre dois números, com um, e apenas um, desses números igual ao da multiplicação anterior, então os outros dois números são iguais. Ao adotar $m, n, \ p \in \mathbb{N}$, temos que se $m \cdot p = n \cdot p \underset{p=3}{\Leftrightarrow} m \cdot 3 = n \cdot 3 \Rightarrow m = n$.

A propriedade M_5 (*Distributividade*), indica que a multiplicação de um número com uma adição entre dois números, em parênteses[82], primeiramente realiza a adição, e logo após, realiza o produto do 1º número com o resultado da adição, por exemplo, ao fazer $m = 1, n = 3$ e $p = 4$, faremos $m \cdot (n + p) = m \cdot (3 + 4) = m \cdot 7 = 1.7 = 7$. A outra forma é realizar a multiplicação entre *m* e *n* e entre *m* e *p*, e após, realizar a adição entre esses resultados, por exemplo, $m \cdot n + m \cdot p = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 3 + 4 = 7$.

A propriedade M_6 (*Monotonicidade*), indica que se há uma relação de ordem entre dois números naturais então ao multiplicar cada um desse números por outro número natural, a ordem permanece idêntica, mesmo após a multiplicação. Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ e que $m < n$. Vamos adotar $m = 1$ e $n = 2$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, adotamos $p = 4$. Como $1 < 2$ ao fazer $1 \cdot 4 < 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 < 8$. De maneira análoga, ao fazer $m > n \Rightarrow m \cdot p > n \cdot p$, basta escolhermos $m = 5$ e $n = 3$ e como *p* pode ser qualquer valor natural, escolhemos $p = 6$. Sendo assim, $5 > 3 \Leftrightarrow 5 \cdot p > 3 \cdot p \Leftrightarrow 5 \cdot 6 > 3 \cdot 6 \Leftrightarrow 30 > 18$.

A propriedade de *Monotonicidade* (M_6) pode ser entendida com uma ampliação da propriedade de *Lei do Cancelamento multiplicativo* (M_4) por meio da construção da *Relação de Ordem*.

As propriedades da Adição e Multiplicação foram elaboradas a partir dos 4 *axiomas de Peano*, mas com o advento do zero (Propriedade P_0 dos *axiomas de Peano*), que surgiu durante a construção do conjunto dos Números Inteiros, foi possível criar a Propriedade (A_5), a do elemento neutro da adição e mais uma lei: A *lei do anulamento do produto* (L_{AP}), como mostra a pesquisa de Silva (2017), podem ser destacadas, usando $m, n, p \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

A_5: $m + 0 = 0 + m = m$ (*Elemento neutro aditivo*)

L_{AP}: se $m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $n = 0$ (*Lei do anulamento do produto*)

A propriedade do *elemento neutro aditivo* (A5) pode ser destacada da seguinte forma: ao adicionar qualquer número natural a zero, o resultado será sempre o outro número, independente da ordem da adição. Ao adotarmos $m = 3$ e fazermos $m + 0$ temos $3 + 0 = 3$. Para $0 + m$ temos $0 + 3 = 3$. O resultado continua sendo o mesmo usando a propriedade A_2 para operar com o elemento neutro.

[82] Pela regra da simbologia dos números, os números que estão entre parênteses, colchetes e chaves devem ser resolvidos nessa ordem.

A lei do anulamento do produto (L_{AP}) pode ser interpretada da seguinte forma: se a operação produto entre dois números naturais for nula então o primeiro número é zero ou o segundo número é zero. Ao adotarmos $m=5$ e fazermos $5.n=0$ então $n=0$. De maneira análoga, podemos adotar $n=3$ e fazermos $m.3=0$ então $m=0$.

Após as exposições supracitadas podemos afirmar que o conjunto dos números naturais não é Grupo para as operações de Adição e Multiplicação, uma vez que, pela definição de Grupo, ambas as operações não admitem o elemento inverso. Pode-se exemplificar da seguinte forma; $(\mathbb{N},+,0)$ admite apenas as propriedades de associatividade e do elemento neutro. Por exemplo, para $\{a,b,c\}\in\mathbb{N}$, $(\mathbb{N},+,0)$ admite a associatividade e o elemento neutro. Basta verificar as propriedades A_1 e A_5, respectivamente, da Adição. Mas não há um elemento inverso em $\mathbb{N}$. Ao adotar $a=5$, pela definição 7, G_3, de Grupo, não há um elemento inverso para $a=5$ em $\mathbb{N}$, pois $a+a`=0\Leftrightarrow 5+a`=0\Leftrightarrow a`=-5\notin\mathbb{N}$. Como a propriedade não é válida, logo $(\mathbb{N},+,0)$ não é um grupo. De forma análoga, $(\mathbb{N},\cdot,1)$ também não admite a propriedade do elemento inverso, pois ao adotar $a=5$ em $\mathbb{N}$, temos que $a\cdot a`=1\Leftrightarrow 5\cdot a`=1\Leftrightarrow a`=\frac{1}{5}\notin\mathbb{N}$. Apesar de ambas as operações não formarem grupo em $\mathbb{N}$, todas as propriedades estão válidas, pois $(\mathbb{N},+,0)$ e $(\mathbb{N},\cdot,1)$ são considerados Monóides.

Há mais alguns conceitos importantes para o conjunto dos Números Naturais quanto a questão de conjuntos que estão dentro do conjunto dos Números Naturais[83] e da quantidade de elementos para um conjunto que esteja dentro do conjunto dos Naturais. Dessa forma, é possível definir a cardinalidade de um conjunto e conjunto enumeráveis como:

Definição 8: Um conjunto *A* tem cardinalidade, representada por $card(A)$, quando há uma bijeção entre *A* e *B* regidos pela função $f:A\rightarrow B$; e $card(A)$ é a quantidade de elementos do conjunto *A*.

A definição 8 torna possível entender que há 3 afirmativas equivalentes para um conjunto A que possua cardinalidade: A é finito; A é limitado; A possui um maior elemento. Logo, passa a ser possível enumerar um conjunto. Nesse sentido, a Definição 9 foi descrita da seguinte forma:

[83] Essa ideia refere-se ao conceito de subconjunto dos números naturais.

Definição 9: Um conjunto *A* é enumerável caso ele seja finito ou exista uma bijeção que $f:\mathbb{N}\to A$. Cada bijeção $f:\mathbb{N}\to A$ é chama uma enumeração dos elementos de *A*.

A partir dessa definição, pode-se obter qualquer subconjunto[84] de $\mathbb{N}$, e vamos usar essa ideia para as nossas atividades de pesquisa e investigação. A definição 9, promove o seguinte Teorema:

Teorema[85] 1: Todo subconjunto $A\subset\mathbb{N}$ é enumerável.

E a partir do teorema 1, o Corolário[86] 1 foi proposto da seguinte forma:

Corolário 1: Um subconjunto de um conjunto não enumerável é enumerável.

De fato, se um conjunto possui um número finito de elementos faz-se valer o entendimento que o subconjunto desse conjunto que é enumerável também é enumerável.

3.3 Síntese do estudo histórico e epistemológico sobre o SND

A abordagem histórica e epistemológica supracitada evidenciam elementos da *Aritmética Elementar* que foi lente de análise para justificar técnicas das $\wp$ propostas no MPD e amplamente desenvolvida no MPR, em especial, para o *logos* do aspecto decimal da numeração. Através desse estudo, um dos objetivos específicos foi concluído, descrito por: Abordar aspectos históricos e epistemológicos do saber sobre os aspectos posicional e decimal do Sistema de Numeração.

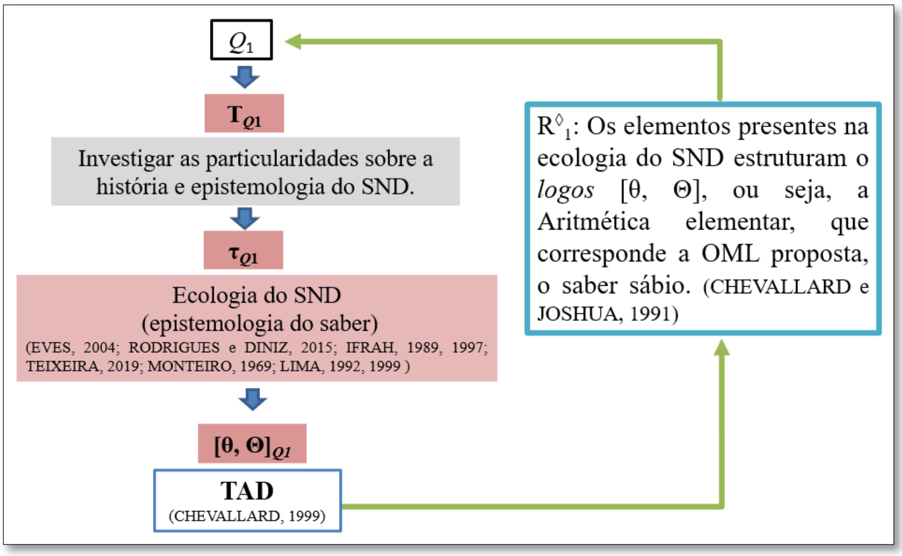
Diante desse contexto, a construção da resposta $R_1^{\lozenge}$ para a questão a Q_1 "De que forma as particularidades sobre a história e epistemologia do SND podem contribuir para a integração do aspecto decimal ao posicional?", foi materializada no esquema apresentado na figura 12.

[84] A representação de um subconjunto de $\mathbb{N}$ é dada por: $A\subset\mathbb{N}$

[85] O teorema pode ser entendido como uma proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico. (Fonte: Dicionário online).

[86] O Corolário pode ser entendido como uma proposição que deriva, em um encadeamento dedutivo, de uma asserção precedente, produzindo um acréscimo de conhecimento por meio da explicitação de aspectos que, no enunciado anterior, se mantinham latentes ou obscuros. (Fonte: Dicionário online). Disponível em: https://www.sinonimos.com.br/corolario/. Acesso em: 15 fev. 2019.

Figura 12 - Esquema que representa o processo de construção da resposta $R_1^\lozenge$.



Fonte: o autor (2020)

Portanto, a resposta $R_1^\lozenge$ construída indica que os elementos presentes na ecologia do SND estruturam o logos [θ, Θ], ou seja, o *saber sábio* (CHEVALLARD e JOSHUA, 1991) ,que corresponde a *Aritmética Elementar*. Esses elementos apresentados foram essenciais para a reconstrução das OM propostas no MPR.

Além disso, os elementos apresentados durante essa abordagem correspodem a unidades que constituem as linhas de história e filosofia (epistemologia) do PPGEFHC.

4. REVISÃO DE LITERATURA

Este segmento da investigação foi iniciado revisitando a questão Q_5 "De que modo as pesquisas desenvolvidas entre os anos 2000 e 2018 abordaram os aspectos posicional e decimal do SND?". O processo de construção de uma resposta $R_5^{\lozenge}$ a questão supracitada considerou como método de investigação para realizar a revisão de literatura, na PP, a *dialética mídia-meio* (DmM)[87], que retratou a temática de ensino e aprendizagem sobre o SND e experimentações por meio de AEPs como MDRs. Para além de identificar os trabalhos relevantes que abordaram as temáticas supracitadas, buscou-se compreender nos resultados dos trabalhos analisados elementos que indicassem a um *meio* para a reconstrução de praxeologias no MPR.

De acordo com as propostas de Chevallard (2016, p.11), a "DmM é uma condição essencial para que uma AEP não se reduza à cópia de elementos de resposta dispersa nas instituições da sociedade", ou seja, Chevallard já apontava preocupações no campo da investigação, em especial, a forma como a DmM era densenvolvida tanto na dimensão ecológica (a existência do saber em uma dada instituição) quanto na dimensão econômica (reconstrução das praxeologias do saber) (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013), por meio das *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) nos níveis de codeterminação didática (NCD), ou seja, nas instituições[88]. E para o método da DmM ser colocado a mesa nas instituições, primeiramente, foi necessário identificar as instituições desejadas o nível do objeto nos NCD, como na

Figura 3. Dessa forma, os níveis do *objeto* e do *tema* foram selecionados para serem os descritores que possibilitaram examinar as *mídias* já publicadas no Brasil.

No esquema Herbatiano da Praxeologia de Pesquisa na TAD , apresentado abaixo,

$$S(X;Y;Q) \rightarrow \left\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\right\} \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

a *mídia* (*m*) refere-se a qualquer produção de mídia científica sobre o SND, constituído de materiais já publicados como artigos, dissertações e teses (CHEVALLARD, 2007b, 2016).

Já o *meio* (*M*) pode amparar possíveis respostas $\left\{R_n^{\lozenge}\right\}$ das mídias (*m*) já publicadas (KIDRON *et al.*, 2014). Outrossim, o meio (*M*) constitui também as obras culturais $\left\{O_m\right\}$

[87] Essa abreviação foi utilizada para representar a dialética mídia-meio, onde m (minúsculo) representará a mídia e M (maiúsculo) o meio. Essa representação não abrevia um a mídia em relação ao meio, apenas para distinguí-los.
[88] Essa análise foi realizada no MPD.

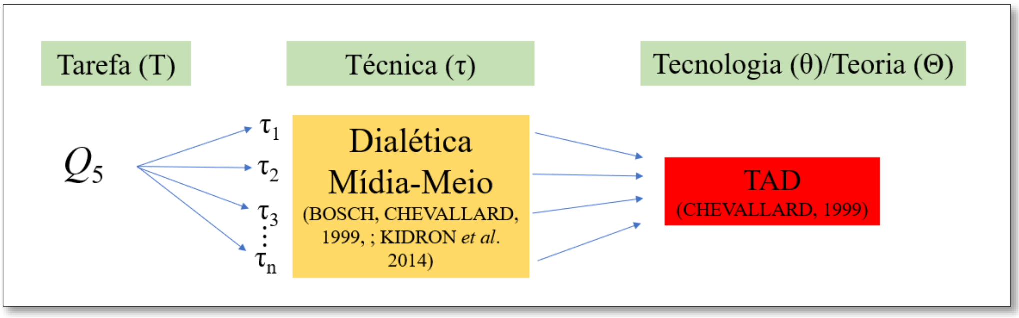
produzidas nas instituições nos NCD (CHEVALLARD, 2007a), e $\{D_q\}$ representa o conjunto de dados produzidos durante a *observação de classe externa* (COMITI e FARIAS, 2019). Dessa forma, o meio pode ser compreendido pela simplificação do sistema Herbatiano, representado por:

$$M = \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \ldots, R_n^\Diamond, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\}$$

Diante do que foi revelado, a seleção de *mídias* foi essencial para apontar um caminho a fim de integrar ambos os apectos do SND e para a reconstrução de praxeologias, que ainda não foram abordadas em $\{O_m\}$ anteriores.

Diante desse contexto, um esquema que representa o método de investigação da revisão de literatura, através da DmM, foi apresentado na figura 13.

Figura 13 - Esquema que representa, na PP, o método de investigação DA DmM.



Fonte: o autor (2020)

Para responder a Tarefa T: Responder a questão Q_5: *De que modo as pesquisas desenvolvidas entre os anos 2000 e 2018 abordaram os aspectos posicional e decimal do SND?* Um procedimento para responder T (questão Q_i), sobre a pesquisa do aspecto decimal, é a utilização de mídias (*m*), uma vez que essas mídias já possui seus resultados deliberados pela comunidade. Nesse sentido, as mídias (m) foram representadas por técnicas $\{\tau_{REV_{mM}AEP}, \tau_{REV_{mM}TD}, \tau_{REV_{mM}Art}\}$[89] elaboradas para examinar as abordagens das AEPs e do aspecto decimal do SND.

[89] A simbologia $\tau_{REV_{mM_i}}$ foi utilizada para indicar cada técnica τ foi identificada como um trabalho visistado, *REV* como um trabalho na revisão de literatura e *Mm* a proposta da didlática Mídia-Meio para discutir o trabalho acerca da proposta dessa investigação. Assim, $\tau_{REV_{mM}AEP}$ foi a revisão de literatura sobre a AEP, $\tau_{REV_{mM}TD}$ seria

Assim, as mídias $\tau_{REV_{mM_i}}$ foram escolhidas como suporte para um *meio* no sentido de *identificar, a partir das mídias, meios para reconstruir praxeologias com o intuito de integrar o aspecto decimal ao posicional do SND mediante as AEPs*.

Nesse contexto, a visitação as obras foi iniciada pelas OD propostas pelas AEPs.

4.1 Pesquisas sobre as Organizações Didáticas das AEPs

Esta parte da pesquisa foi elaborada com a intenção de mostrar a importância dos sistemas didáticos S, proposto por Chevallard (2007a), para a implementação das AEPs, que integram o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)[90], que são OD inseridas para promover mudanças no modo de ensinar a matemática, uma vez que o ensino por meio de S proporciona que os estudantes (x) da classe X modifique o seus *topos*[91] e passem a atuarem como investigadores. Para tanto, é essencial a reconstrução de praxeologias que não são entregam de bandeja as respostas prontas aos estudantes.

Os trabalhos de pesquisa no Brasil sobre essas OD ainda são escassos. No Banco de Tesses e Dissertações da Capes (BTDC), , no período de 2000 a 2018, usando os descritores *atividades de estudo e pesquisa* e *percurso de estudo e pesquisa*, encontramos apenas 13 trabalhos, sendo 8 de doutorado e 6 de mestrado[92].

Das obras pesquisadas, as teses de Silva (2014), Silva (2016), Matos (2017), Pereira (2017) e dissertações de Santos (2014), Carvalho (2015), Lessa (2015), Silva (2015), Souza (2015) e Duarte (2016) produziram ou utilizaram elementos dos PEPs, cada trabalho de acordo as particularidades de investigação (objetivos e questões de investigação), mas as AEPs, como seções de estudo organizadas e integradas, não foram retratados com esse entendimento durante a elaboração (das seções de estudo) desses PEPs[93]. Logo, apenas as obras de Santos Júnior

a revisão de literatura sobre as teses e dissertações sobre o aspectos decimal e posicional do SND e $\tau_{REV_{mM}Art}$ seria a revisão de literatura sobre os artigos publicados sobre o saber supramencionado.

[90] Não foram apresentadas obras com essa metodologia, apesar deste método ser bastante utilizado, na atualidade, em pesquisas na Didática das Ciências.

[91] A mudança no *topos* dos estudantes no ensino retrata uma "nova" independência do estudante, no desempenho do seu papel, em relação ao professor.

[92] Dos trabalhos na BTDC, 2 teses não foram encontradas.

[93] A estrutura e elaboração de um PEP perpassa pelas sessões de estudos por meio de AEPs, que deverão ser organizadas e integradas de acordo com o objetivo do PEP. Mas outras formas de conceber o PEP não são invalidadas uma vez que reconhecemos, também, que ao elaborar um PEP, as AEP podem estar descritas implicitamente, mesmo não sendo apresentandas descritivamente.
Alguns trabalhos utilizaram o PEP como sendo uma Engenharia Didática de 2ª geração, defendido por Almouloud e Silva (2012).

(2017) e Guadagnini (2018) foram analisadas já que utilizaram esse ponto de vista em suas investigações.

A escolha pelo PEP não inviabilizaria também a utilização das AEPs, uma vez que o PEP pode ser estruturado por um conjunto de atividades intra e extra matemática (BOSCH e GASCÓN, 2010). Diante disso, a escolha das AEPs como MDR depende das questões e dos objetivos da pesquisa.

Nesse sentido, foram apresentadas as reflexões difundidas por Santos Júnior (2017), representada por $\tau_{REV_{mM}AEP\_1}$, em sua tese intitulada Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um Percurso de Estudo e Pesquisa.

O objetivo desta pesquisa foi elaborar, propor e analisar atividades baseadas num Percurso de Estudo e Pesquisa, relacionadas às necessidades dos profissionais dos cursos superiores de tecnologia, na área de gestão e negócios, no ensino das noções de juros simples e compostos. Para cumprir esse objetivo, o autor fez uma análise ecológica para revelar a razão de ser do objeto Juros simples e compostos, e assim identificar as praxeologias que estruturam a razão de ser do objeto.

Diante da análise proposta, o autor buscou "identificar as relações institucionais presentes nos documentos oficiais, relacionadas às noções de juros simples e compostos na Educação Básica" (SANTOS JÚNIOR , 2017, p. 153). Assim, o autor iniciou a análise nos documentos oficiais e caminhou, posteriormente, para aos livros didáticos do EF, EM e ES. Durante o processo de identificar as relações institucionais, Santos Júnior (2017) verificou se as OM propostas puderam modificar o topos tanto do professor quanto dos estudantes. O autor produziu, nesse estudo, dados para elaborar e implementar as AEPs, uma vez que um dos atributos desse dispositivo didático é modificar o topos, e para isso compreender os atores e suas funções no sistem didático $S(X;Y;Q)$, que agem e produzem as questões Q_n, são de suma importância do ponto de vista do trabalho de investigação.

Durante a análise das O_m, o autor constatou que o saber Juros Simples e Compostos encontra-se monumentalizado e, nesse sentido, ele utilizou como MDR o PEP, estruturado por 8 seções de estudos (AEPs), apresentadas abaixo, como forma de não apenas dirimir as lacunas apresentadas por X como modificar a relação de X com o saber, a $R_p(X,O)$.

O autor concluiu que as AEPs podem ser um MDR importante para modificar as práticas dos professores, em especial, nos NCD inferiores: *Setor*, *Tema* e *Objeto*, ou seja, na temáticas da *disciplina* Matemática.

Essa foi uma das restrições apontadas pelo autor, pois as AEPs modificam apenas as práticas intra-matemáticas. Assim sendo, o autor necessitou elaboraro PEP com a intenção de modificar modificam práticas para além da matemática, a extra-matemáticas. Essas ações por meio desse modelo devem modificar o ensino e o modelo de aula do professor, e consequentemente, o *topos* dos estudante transformando $R_p(Y,O)$ e $R_p(X,O)$, remodelando a relação as instituições $R_I(X,Y)$, em especial, para cursos como o de gestão e negócios[94] na área de Administração.

Já a obra de Guadagnini (2018), $\tau_{REV_{mM}AEP\_2}$, com o título "Fatoração: Por que estudá-la desde o Ensino Fundamental?" teve como objetivo identificar as praxeologias didáticas e matemáticas existentes para o estudo da fatoração, as relações pessoais de estudantes e professores com este objeto e explorar atividades que possam favorecer aplicações em contextos variados intra e extramatemáticos no Ensino Fundamental – anos finais no Brasil para implementar uma engenharia didática do tipo PEP.

Nessa investigação a autora utilizou as AEPs para integrar diferentes OM pontuais em um OM local, de forma que a passagem pelas diferentes AEPs não foram estimuladas pelas atividades em questão, mas a busca de uma resposta $R^{\heartsuit}$ (Guadagnini, 2018 *apud*. BARQUERO *et al*., 2011). Essas atividades foram elaboradas diante da questão inicial Q_0: "Como desenvolver o estudo da fatoração desde o Ensino Fundamental - Anos Finais?".

Para contemplar esse estudo e responder a questão Q_0, a autora elaborou 14 AEPs com grau de complexidade variada, de acordo com os temas previstos nos documentos curriculares oficiais que contemplam o saber fatoração. Sendo assim, ela produziu duas tarefas sobre mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, que integraram a Organização Matemática Local (OML1) correspondente aos Números naturais. O segundo grupo de atividades, composto por 3 tarefas, foi contemplado as regras de fatoração algébrica e produtos notáveis que intregrou a Organização matemática local (OML2) correspondente a Álgebra. Já o terceiro grupo de tarefas a Organização Matemática Pontual (OMP) – Aplicações, com 9 tarefas,

[94] A pergunta lançada pelo pesquisador foi acerca da melhor oportunidade que uma empresa pode ter para se tomar um empréstimo considendo as diversas variáveis possíveis.

considerou as atividades de aplicações sobre a fatoração. Isso ocorreu nos saberes de área e perímetro (2 tarefas) - OMP1, sequência (1 tarefa) – OMP2 e introdução à álgebra elementar (6 tarefas) – OMP3. Essas análise dessas atividades tanto na EB quanto no ES possibilitaram a autora, juntamente com os elementos essenciais do PEP realizado por ela, contemplar a resposta $R^{♥}$.

4.1.1 Síntese das pesquisas sobre as Organizações Didáticas das AEPs

No Brasil, há lacunas de trabalhos com AEPs, visto que não há pesquisas que desenvolva esse método de experimentação, exceto quando as AEPs são utilizadas como atividades de investigação que estruturam o PEP. Mas não é muito comum a produção dos PEPs que levam em consideração a descrição explícita das AEPs como um conjunto de atividades integradas no processo de construção desses percursos.

Essa discussão pode ser visualizada na quantidade de trabalhos sobre o PEP são estruturados por um conjunto de AEPs. Mesmo diante dessa constatação, os PEPs que não são descritos explicitamente pelas AEPs possuem implicitamente essas AEPs integradas no processo de construção dopercurso.

Nessa perspectiva, inserir essa investigação nessa metodologia de pesquisa é um desafio e uma satisfação em poder contribuir para as discussões e avanço das AEPs.

Após a discussão sobre os AEPs nas obras supracitadas, foi realizado um estudo sobre as obras acerca do objeto de investigação que segue no próximo tópico.

4.2 Teses e dissertações sobre o SND

Para pesquisa em relação ao objeto de pesquisa, representada por $\tau_{REV_{mM}TD\_n}$, foi utilizada também o BTDC acerca das dissertações e teses, no período de 2000 a 2018, empregando os descritores *sistema de numeração decimal, aspecto*[95] *decimal do sistema de numeração decimal* e *aspecto posicional e decimal do sistema de numeração decimal,*

[95] Utilizei também o nome princípio no lugar de aspecto, visto que muitos trabalhos nos Brasil apresentam esse sinônimo com o significado de circunstância. Dicionário de sinônimos:<https://www.sinonimos.com.br/aspecto/>. Acesso em: 15 nov. 2019.

embasados pelo *Objeto* dos NCD (CHEVALLARD, 2007a). Esse corpus foi apresentado no quadro 3.

Quadro 3 - Modalidade e quantidade de obras na BTDC sobre o SND.

Modalidade dos trabalhos	**Quantidade de trabalhos**
Mestrado Acadêmico	41
Mestrado Profissional	20
Doutorado	13
TOTAL	**74**

Fonte: o autor (2020)

Foram explorados 3 trabalhos que discorrem sobre os aspectos do SND e que estavam disponíveis na plataforma[96].

Essa exposição foi iniciada com o trabalho de Barros (2013) ($\tau_{REV_{mM}TD\_1}$) que teve como objetivo investigar a compreensão matemática dos alunos de um curso de Pedagogia, identificando outros estudos acerca da EaD apresentados e publicados em eventos científicos na área da Educação Matemática. A autora elabora esse objetivo para responder a seguinte questão de investigação: “Como alunos de um curso de Pedagogia a distância compreendem a matemática?” (BARROS, 2013, p. 29).

De forma breve, a pesquisa teve como foco investigar como os estudantes do curso de Pedagogia, em formação inicial, compreendiam os saberes matemáticos. Para desenvolver a pesquisa a autora utilizou como procedimentos metodológicos a pesquisa qualitativa na abordagem fenomenológica. Durante a pesquisa, a autora investigou as respostas produzidas pelos estudantes nos fóruns da plataforma Moodle durante 3 disciplinas do curso (Matemática I, II e III). Nestas disciplinas, foram analisados os saberes matemáticos das áreas de Números e Operações, em especial, “a constituição do número, seus usos, a contagem e sistemas de numeração” (*ibid.*, p. 276).

A autora expôs a contribuição dos materiais manipuláveis para o ensino de do SND, em especial, o trabalho com ábacos e material dourado. Nesse sentido, Barros (*ibid.*) aponta que

[96] Das 13 teses apresentadas na BTDC, tivemos acesso a apenas 7, e das 61 dissertações disponíveis, tivemos acesso a apenas 41.

esses materiais impulsionaram discussões sobre os motivos do sistemas de numeração ser de base 10, impulsionados pelos aspectos históricos e do corpo humano.

> Assim podemos ver que talvez o homem tenha aprendido a contar nos dedos e que gradativamente foi adquirindo outros meios [...]. Porém somente no final do século XV, com as grandes navegações que o sistema de numeração indu-arábico foi reconhecido como algo prático e de fácil uso. Sendo usado até hoje esse sistema de numeração, chamado decimal devido ao agrupamento de dez em dez; 10 unidades é uma dezena, 10 dezenas é uma centena, 10 centenas é uma unidade de milhar, e assim por adiante. (*ibid.*, p. 277-278)

Em relação aos resultados da pesquisa a autora concluiu que a utilização dos materiais concretos contribuem para o entendimento dos saberes matemáticos, ampliam o conceito de material concreto para além do caráter manipulativo, explicitando a importância do trabalho com situações do cotidiano da criança, em especial, com o trabalho acerca das operações matemáticas fundamentais por meio da compreensão de seus diferentes significados e do sistema de numeração decimal.

Já o trabalho de Seibert (2014) $\left(\tau_{REV_{Mm}TD\_2}\right)$ apresentou um estudo sobre necessidades educativas especiais, em particular, pessoas com Espinha Bífida e Síndrome de Arnold Chiari. Essa pesquisa teve como objetivo geral investigar a evolução cognitiva do jovem em relação aos conceitos matemáticos já citados, em especial, “ [...] investigar a evolução do jovem em relação à resolução de problemas aditivos [...]” (SEIBERT, 2014, p. 25-26).

A autora utilizou a *razão de ser* das conversões entre números naturais. Para tanto, Seibert (2014) utilizou os conceitos de Piaget (1973, 1976, 1978) para estabelecer a relação entre número e sua função social. Nesse sentido, a autora apontou que o sistema de numeração decimal foi fundamental para o seu trabalho visto que

> [...] este sistema é uma linguagem matemática estruturada, organizada e formalizada para expressar quantidades, posições, medidas, espaços, formas, relações, etc. É um sistema posicional, no qual cada algarismo representa um valor, dependendo do lugar que ocupa no número [...] (SEIBERT, 2014, p. 94, *apud*. RAMOS, 2009)

Primeiramente, a autora destaca o aspecto posicional, mas relaciona com o aspecto decimal de forma que a utilização de coleções de multiunidades auxilia as crianças a constatarem que a mesma relação de dez para todas as coleções de base 10.

Nesse sentido a autora destaca os seguintes conceitos: origem do número, número (cardinalidade e ordinalidade), ordem crescente e decrescente, os sinais de maior, menor e igual, sucessor e antecessor de um número e o sistema de numeração decimal (unidade e dezena), utilizando como recursos, a sequência didática eletrônica, material de contagem, jogos, ábaco, material dourado, quadro valor lugar e atividades no papel; que foram desenvolvidos, na experimentação, por meio dos *ostensivos* descritos nas sequência didática eletrônica e sequência didática no papel.

A autora concluiu que as sequência didáticas individualizadas, tanto das atividades da sequência didática eletrônica, quanto das atividades com recursos didáticos concretos e das desenvolvidas no papel ampliou as noções sobre os conceitos trabalhados neste nodo e destacou que os conceitos do SND desenvolveram os conceitos envolvidos nas operações de adição e subtração, na resolução de problemas do cotidiano e na manipulação do sistema monetário, que segundo Seibert (2014, p. 231), foram "essenciais para que os estudantes pudessem adquirir Autonomia Social em Matemática".

A visitação as obre foi finalizada com o trabalho de Zanquetta (2015) $\left(\tau_{REV_{Mm}TD\_3}\right)$, que apresentou a seguinte questão de investigação: Quais as estratégias utilizadas pelos alunos surdos em situações didáticas de cálculo mental? Para dar conta dessa questão, a autora elencou o seguinte objetivo: "Identificar as possibilidades didático-pedagógicas de um trabalho sistematizado com cálculo mental de forma dialógica em Libras com alunos surdos fluentes" (ZANQUETTA, 2015, p. 95).

Para tanto, a autora utilizou como abordagem metodológica a Engenharia Didática, com a aplicação de uma sequência didática composta por dois blocos: o do SND e o Aditivo; com três estudantes surdos que cursavam o final do 6° ano no início da pesquisa. Zanquetta (2015) constatou em sua análise preliminar que: os sujeitos surdos ainda estavam em processo de construção do SND; a noção dos números à consolidação das regras deste sistema; a indiferenciação da numeração falada para a numeração escrita constituiu um desafio a ser vencido no bloco do SND.

Nesse sentido as principais estratégias destacadas pela autora foram: contagem com e sem o auxílio dos dedos; a recorrência a cálculos incorporados no seu repertório numérico; a reprodução mental do algoritmo; a mobilização de regras automatizadas; a aplicação das propriedades dos números e das operações e a realização do cálculo com base na percepção de algumas regularidades dos números anunciados.

A partir dessas estratégias, a autora utilizou em sua experimentação os materiais manipuláveis para auxiliar no registro durante a compreensão da atividade, sendo que as principais estratégias utilizadas mobilizadas pelos estudantes participantes foram:

> [...] a contagem a partir do primeiro número anunciado (não realizando uma sobrecontagem); a sobrecontagem com e sem o auxílio dos dedos; a contagem regressiva com e sem o auxílio dos dedos; recorrer a cálculos incorporados no seu repertório de memória; reproduzir mentalmente o algoritmo; mobilização de regras automatizadas; aplicação das propriedades dos números e das operações (decomposição, composição, comutatividade, associatividade, compensação) e realização de cálculos baseando-se na percepção de algumas regularidades dos números anunciados. (ZANQUETTA, 2015, p. 238-239)

A autora conclui que a investigação das possibilidades de um trabalho pedagógico com cálculo mental pode ser o cerme para muitas outras pesquisas que venham ampliar o acesso ao ensino de matemática para surdos que está longe de ser totalmente explorada.

4.2.1 Síntese das teses e dissertações sobre o SND

Diante dos trabalhos apresentados, observa-se que há uma atenção a construção da ideia de número e do sistema de numeração decimal, em especial, as operações de adição e subtração, parte da *razão de ser* do SND.

Essa investigação buscou criar um meio para reconstruir praxeologias, a partir das mídias de Barros (2013), Seibert (2014) e Zanqueta (2015), em especial, acerca da estrutura espistemológica do SND. Os trabalhos apresentados trouxeram discussões relevantes acerca dos materiais manipuláveis (Barros, 2013), das atividades sobre cardinalidade, a escrita numérica, ordinalidade e operações sobre o SND desenvolvidas tanto no meio papel-lápis quanto no meio tecnológico (Seibert, 2014) e materiais manipuláveis para o uso do cálculo mental (Zanqueta, 2015), ambos utilizando o objeto SND.

Estas pesquisas tiveram foco na *práxis*$\left[\mathrm{T}, \tau\right]$, ou seja, em investigar como os métodos de resolução das atividades propostas na produção de dados proporcionaria compreender a relação dos estudantes com o SND.

Já esta investigação diferencia-se pela integração da *práxis* ao *logos* do SND, a partir da *razão de ser* desse objeto. Nesse sentido, essa investigação utilizou as estruturas matemáticas (epistemologia do SND) por meio das definições e propriedades para revelar as organizações matemáticas sobre a cardinalidade e tradução dos escritos (e seus desdobramentos) integrados aos materiais manipuláveis, por meio do T4TEL. Através deste modelo de investigação, foi possível dar clareza ao *logos* e as possíveis *práxis* dominantes nos sistemas educacionais visistados.

Diante disso, a revisão de literatura para as teses e dissertações foi finalizada, seguindo para a análise dos artigos.

4.3 Artigos sobre o SND no SIPEM.

Após realizar uma varredura nos Anais das edições (I a VII)[97] do SIPEM[98], destacou-se as seguintes obras: Brandt (2000), Brandt e Moretti (2003; 2006), Rosas e Selva (2009), Curi e Santos (2012), Guimarães (2012) e Silveira (2018), sendo que apenas os trabalhos de Curi e Santos (2012), Guimarães (2012) e Silveira (2018) [99], obras destacadas do V e VII SIPEMs, respectivamente, foram discutidas.

O trabalho de Curi e Santos (2012) $\left(\tau_{REV_{Mm}ART\_1}\right)$, com o título "Resultados de uma pesquisa longitudinal: o ensino do sistema de numeração decimal", realizou uma meta-análise de trabalhos acadêmicos decorrentes de uma pesquisa longitudinal no intuito de evidenciar alguns elementos acerca do ensino do SND na Prova Brasil. As autoras apontaram que as avaliações externas, como Saeb e Prova Brasil, "são importantes porque seus resultados apresentam um panorama de como se encontra o nível de aprendizagem dos estudantes e podem ser veiculados para servir como referência para a elaboração de ações que venham efetivamente melhorar o processo de aprendizagem" (CURI e SANTOS, 2012, p. 6).

Nesse sentido, os trabalhos apontados pelas autoras, durante as investigações acerca das avaliações supracitadas, indicaram que os estudantes possuem muitas dificuldades com número zero em qualquer posição, mesmo na ordem das unidades. Diante disso, essas dificuldades

[97] Ressaltamos que do I ao IV SIPEMs tivemos acesso apenas ao caderno de resumos, logo não foi possível ter acesso aos trabalhos, que versavam sobre o SND, nessas edições.

[98] O objeto de investigação desenvolvido nessa pesquisa foi situado no Grupo de trabalho I (GT-01): Educação Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. A partir do VII SIPEM, incluímos em nossa pesquisa o GT -14: Didática da Matemática.

[99] A partir do V SIPEM realizado em Petrópolis (RJ), em 2012, tivemos acesso aos trabalhos completos nos Anais do evento.

apresentadas inibem o trabalho dos estudantes durante o processo de composição e decomposição dos números.

Além disso, Curi e Santos (2012) descrevem que os estudantes, em particular do 5º ano[100], não possuem o hábito da escrita numérica do zero. Para tanto, exemplificou-se as indicações das autoras nesse cenário com uma tarefa de decomposição do número 1 908 em que a maioria dos estudantes não conseguiu representar a decomposição 1000 + 900 + 8. Isso se deve a dificuldade do estudante sobre o *ostensivo* traduzir o numeral da escrita numérica simples para a escrita numérica em potência aditiva (OM_{trad}:ENS→ENPA)[101] e, acentua-se para números grandes, a partir da classe dos milhares.

Outra colocação apresentada pelas autoras foi relativo as dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem das conversões entre números. Nesse sentido, o tipo de problema "Qual a uma quantidade de 5039 envelopes que seriam guardados em caixas com 100 envelopes cada?" (CURI e SANTOS, 2012, p. 14) deve ser realizado usando ao agrupamentos e trocas de 10 em 10, de 100 em 100, ou seja, a compreensão do aspecto decimal é fundamental para resolver esses problemas.

Curi e Santos (2012) afirmaram que as professoras dos anos iniciais do ensino fundamental tinham dificuldades com o aspecto posicional do SND, visto que o trabalho desse aspecto era basicamente estruturado para a prática sem mobilizar elementos que justificasse "separando os números em casinhas" para efetuar as operações fundamentais. De acordo com essas convicções, essas dificuldades presentes na aprendizagem provém da ausência de elementos epistemológicos pelos professores, o que Farias (2010) define como *vazio didático*, elemento que integra a *incompletude da atividade institucional*, que pode ser compreendido na TAD como a $R_p(Y,O)$ não considera os/alguns elementos que deveriam estar presentes no *logos*.

Outro questionamento importante que as autoras levantaram diz respeito a falta de coerência entre os currículos prescritos e os saberes apontados no LD, de forma que:

> [...] o currículo prescrito e o avaliado têm coerência em seus objetivos e habilidades, porém o currículo prescrito não aponta caminhos para a efetiva aprendizagem do que é proposto, nem pistas para os trabalhos a serem realizados em sala de aula com o

[100] No período da obra desenvolvida pelas autoras havia ainda a transição da nomenclatura de série para ano, ou seja, a antiga 4ª série equivale ao atual 5º ano, com devidas ressalvas as (re)organização curriculares.
[101] Discutimos isso no MPR, no Capítulo 3.

> objetivo de fazer uma primeira sistematização desse assunto. (CURI e SANTOS, 2012, p.15)

Essa indicação aponta que o *habitat* e o *nicho*, da Ecologia do Saber (Chevallard, 2002) presentes nos documentos curriculares oficiais não dialogaram com o LD, o recurso mais utilizado pelo professor. Nesse sentido, as OM institucionais não convergiam com as OM pessoais, em outras palavras, o que as instituições esperavam de competências e habilidades dos estudantes não ocorriam.

As autoras questionam ainda a utilização da decomposição de um número na sua forma polinomial não é mencionado nos currículos prescritos, ou seja, a potência de 10 é indicada para o trabalho, mas não se avalia nas avaliações externas esse elemento do SND.

Diante da obra $\left(\tau_{REV_{Mm}ART\_1}\right)$ apresentada que contempla as averiguações explanadas pelas autoras, tanto o ensino quanto a aprendizagem acerca do SND apresentam fragilidades, no 5º ano do EF I, devido a falta da consolidação do SND na classe das unidades simples impossibilitando (o trabalho com grandes números) avanços e retomadas conceituais sobre esse saber, e passamos a próxima mídia.

A mídia $\left(\tau_{REV_{Mm}ART_2}\right)$intitulada “O uso de recursos didáticos na aprendizagem do sistema de numeração decimal: análise das atividades propostas em livros didáticos brasileiros e espanhois” possui autoria de Guimarães (2012). Nessa obra, a autora aponta que o livro didático é o material mais utilizado para o ensino aprendizagem nas aulas de Matemática, em especial, sobre o sistema de numeração decimal, nos três primeiros anos das séries iniciais do Ensino Fundamental. Nesses seriados, o trabalho sobre os números é recorrente em todos os currículos e constitui o conteúdo matemático mais abordado, já que o SND pode ser considerado com “um conjunto de convenções e regras que permitem representar as quantidades de uma forma econômica, mas que vem apresentando muitas dificuldades de aprendizagem, porque é bastante sofisticado” (GUIMARÃES, 2012, p.3).

Nesse ínterim, a autora descreve como objetivo da obra analisar como livros didáticos do Brasil, do 3º ao 5º anos do EF I, propõem o uso de recursos didáticos como suporte a aprendizagem do SND. Para tanto, no Brasil, o gerenciamento dos livros didáticos são realizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) sob a gestão do Ministério da Educação. Esse programa possui como avaliadores desses livros diversos professores-pesquisadores que têm habilidades em conduzir as estratégias de avaliação, em especial, a de verificar se as coleções atendem aos Documentos Curriculares Oficiais, como a BNCC (2017), OCEB (2013) e RCMS (2018). Após essa avaliação, as coleções aprovadas são indicadas para fazer parte do do Guia do Livro Didático[102], que em grande parte, são direcionadas as unidades escolares para a seleção pelos professores de cada disciplina.

Como lente de análise para os recursos supramencionados, Guimarães (2012) utiliza como parâmetro as atividades de contagem, ordenação e de cálculos para evidenciar que a contagem é a origem da numeração. Entretanto, para que haja "apropriação do SND é preciso que os alunos sejam levados a usar a numeração escrita e apoiar-se nela para resolver ou representar operações" (GUIMARÃES, 2012, p.3 *apud*. LERNER e SADOVSKY,1994).

Diante do exposto, a integração da numeração escrita ao aspecto decimal e posicional do SND deve promover a compreensão dos estudantes acerca da composição e decomposição numérica, realização das operações básicas, incluindo a escrita e operações em potências de 10.

Foi por meio dessa perspectiva que o MPR, adaptado da obra de Chaachoua (2016), foi estruturado abordando as propostas curriculares que foram utilizadas para identificar as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) durante a observação de classe (COMITI e FARIAS, 2019), que foram descritos nos próximos dois capítulos.

No processo de identificação da utilização dos recursos didáticos nos LD, a autora sustenta suas ideias no contexto, definido por ela, das variáveis[103]:

> 1) Finalidade - analisa o objetivo do uso do número na atividade considerando a Matemática como ferramenta (atividades de investigação, resolução de problemas e reflexão sobre as funções dos números) ou como conteúdo em si mesmo (regras do SND, realizar cálculos e relacionar tabelas e gráficos).
>
> 2) Função dos números – analisa se o número na atividade tem a função de quantificar, ordenar, identificar ou apenas propõe uma manipulação numérica. Considerou-se ainda se a atividade envolve mais de uma das funções anteriores.
>
> 3) Material – levantamento de que tipo de recurso é utilizado como suporte à compreensão dos conceitos: materiais pedagógicos (Quadro valor de lugar, réguas Cuisenaire, ábacos, dinheiro*1*, material dourado), materiais concretos (dedos, palitos e etc) e tecnológicos (calculadora e etc).
>
> 4) Representação – tipos de representação utilizados para auxiliar a compreensão das atividades (desenhos, fotos, gráficos, tabelas e retas numéricas). Observou-se também e se a representação de fato possibilitava a resposta como um suporte ou se era apenas uma ilustração. (GUIMARÃES, 2012, p.5-6)

[102] Material, disponível pelas editoras, que descreve a estrutra de cada livro das coleções.
[103] Essa ideia de variáveis é diferente da proposta pelo modelo T4TEL.

Essas quatro variáveis, segundo a autora, foram determinantes para a análise dos livros uma vez que, por meio delas, e das observações apontadas nos documento oficiais é essencial para o trabalho efetivo do SND propor atividades que explorem a compreensão das regras do sistema a partir de manipulação numérica ou envolvendo cálculos a partir de situações contextualizadas de uso da matemática, compreendendo-as como uma ferramenta na resolução de problemas ou em investigações.

Nos LD analisados foi apontado que há um declínio de atividades dedicadas a aprendizagem das regras do SND, em especial, relativo atividades de identificar, quantificar (esta em maior quantidade) e ordenar, que compõe a variável função dos números. Por outro lado, ao aumentar a escolaridade, a autora aponta que prevalesce atividades de manipulação numérica, como cálculos algorítmicos acerca das regras do SND (base, quantidade de símbolos, valor posicional, princípios aditivos e multiplicativos, papel do zero)

As atividades de manipulação encontradas tinham pouca relação com a variável materiais como o Quadro Valor Lugar (QVL) (aspecto posicional), ábaco (aspecto posicional e decimal) e material dourado (aspecto decimal), ou seja, há uma dissonância uma vez que não haviam propostas de investigação utilizando os materiais manipuláveis, apesar das atividades serem consideradas de manipulação.

Já para a variável representação, os LDs apresentavam-nas apenas para "ilustrar ou motivar, ou seja, não auxiliam os alunos na resolução da atividade" (GUIMARÃES, 2012, p.12). Isso dificulta o estudante a relacionar as diversas formas de escrita numérica, impossibilitando a compreensão de ambos os apectos do SND. Essas dificuldades poderiam ser suprimidas com o trabalho integrado materiais (variável materiais) supracitados.

Guimarães (2012) conclui nessa obra que os LDs analisados propõe atividades que não valorizam o uso de recursos didáticos e, consequentemente, lançam a existência da utilização desses recursos a cargo do professor. Nesse interim, a compreensão do SND a partir de situações de investigação ou de reflexões sobre as funções dos números são quase inexistentes, visto que os LDs deram destaque a atividades que privilegiam os algoritmos de forma repetitiva e sem apoio didático e representacional. Por conseguinte, o ensino de matemática permanece baseado em cálculos e manipulações numéricas desprovidas de significado dispensando materiais de apoio que proporcionem a compreensão dos conceitos, e assim segui-se para a próxima mídia.

Neste momento, foi apresentada e discutida a obra $\left(\tau_{REV_{Mm}ART_3}\right)$de autoria Silveira (2018) intitulada “Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no brasil” que teve por objetivo “problematizar casos de indicações ao uso de Blocos Base Dez (BBD) para o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração Indo-arábico e operações aritméticas contidas nas cinco coleções de livros didáticos de matemática dos anos iniciais do EF selecionadas[104]” (SILVEIRA, 2018, p. 1), para compor as obras disponíveis nas unidades escolares públicas, em 2017.

O autor apresentou uma breve abordagem histórica sobre o SND que foi estruturado em três princípios: 1º) base decimal, o 2º) uma notação posicional eo 3º) uma forma cifrada ou um símbolo diferente para cada um dos dez primeiros numerais. A articulação entre esses princípios permitiu compreender a organização da escrita numérica, partindo a representação dos numerais da direita para a esquerda segundo ordem de grandeza. Essa forma de “organização parece ter sido utilizada no sentido de facilitar a leitura, já que os valores finais de cada símbolo eram convencionados, não se modificando em hipótese alguma” (SILVEIRA, 2018, p. 2).

Assim como a obra $\left(\tau_{REV_{Mm}ART\_3}\right)$, o autor defende que os materiais manipuláveis, descritos nos LDs, sejam utilizados como recursos didáticos no ensino de matemática, contanto que os saberes matemáticos sejam mobilizados durante o trabalho com esse recurso. Para isso, o autor utilizou o Material Dourado e reclassificou como Blocos Base Dez (BBD).

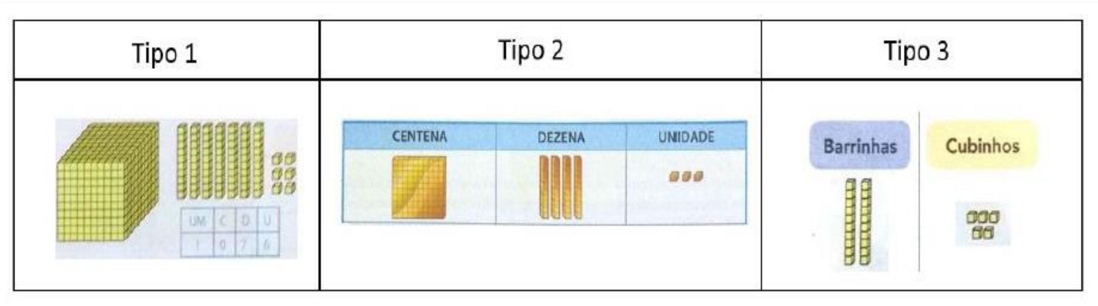
De acordo com as descrições apresentadas nos LDs, as indicações de uso dos BBD para auxiliar no ensino de números e operações[105] foram classificadas, de acordo com o Silveira (2018, p. 8), em três tipos:

> Tipo 1: os BBD são apresentados de forma ―solta e, embora estejam, via de regra, organizados por ordem de grandeza, não estão inseridos no interior de nenhum tipo de tabela ou Quadro.
>
> Tipo 2: os blocos (cubos, placas, barras e cubinhos), aparecem inseridos no interior de um Quadro Valor de Lugar (QVL), que aparece, ora com os nomes das posições escritas (centena, dezena e unidade), ora com as iniciais desses nomes (C, D, U).
>
> Tipo 3: em que esses mesmos blocos aparecem inseridos no interior de um Quadro cujas colunas são nomeadas segundo os nomes dos blocos (placas, barras, cubinhos).

[104] O autor utilizou os livros selecionados no PNLD que, após aprovação nas unidades escolares, foram adquiridas pelo MEC e encaminahas as essas unidades de ensino.
[105] O trabalho com os BBD nos LDs foram “descritos tanto no corpo do livro quanto nos manuais de orientações ao professor” (SILVEIRA, 2018, p. 7).

Diante desses três tipos de apresentação dos BBD, os blocos podem ser organizados de acordo com as ordens de grandezas[106], conforme a figura 14. É possível observar, de acordo com essa Figura retirada de um LD, a representação dos numerais relacionados aos blocos. Assim, na coluna 1, que representa o tipo 1, os blocos de 1 cubo, 7 barras e 6 cubinhos consiste no numeral 1076 que fora indicado em uma tabela com as ordens de grandeza. Já o tipo 2, o BBD são organizados de acordo com o QVL. O tipos 1 e 2 evidenciaram ambos os aspectos do SND. Já o tipo 3, foi " pouco utilizado devido a barra de separação entre os blocos, uma vez que até então as representações não utilizavam esse tipo" (SILVEIRA, 2018).

Figura 14 - Tipos de indicação de utilização de BBD nos livros didáticos pesquisados

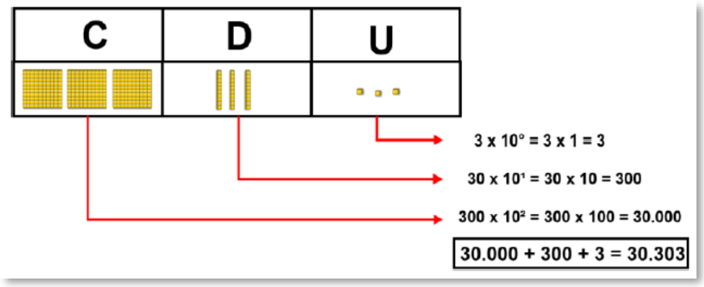


Fonte: Silveira (2018, p. 8)

O tipo 2 privilegia o trabalho sobre o aspecto decimal. A compreensão sobre a representação canônica é fundamental para a visualização desse tipo. A figura 15 descreve muito bem esse entendimento ao indicar 3 placas na ordem das centenas, 3 barras na ordem das dezenas e 3 cubinhos na ordem das unidades simples. Como cada placa equivale a 100 na ordem das centenas, ou seja, 100 centenas, assim 3 placas equivalem a 300 centenas ou 300 x 100 = 30 000 unidades simples. De maneira análoga, 3 placas na ordem das dezenas representa 30 x 10 = 300 unidades simples. E na ordem da unidades simples, há 3 unidades. Logo, a representação resulta no numeral 30 303.

[106] A representação do BBD, pela ordem das grandezas, como: um cubo equivale a 1 unidade de milhar, uma placa consiste em 1 centena, uma barra equivale a 1 dezena e um cubinho cono uma unidade.

Figura 15 - BBD representado em um QVL de 3 ordens



Fonte: Silveira (2018, p. 9)

Essa representação no QVL pode ser também inserida no ábaco para o trabalho sobre o aspecto posicional.

Na conclusão do artigo, o autor indica a preferência pela forma de trabalhar com os BBD do tipo 1, pois favorece o aspecto decimal e, quando inserir o QVL, também o aspecto posicional. Além disso, anuncia que todo material pode ser eficaz, a depender da forma como é utilizado, em especial, durante o processo de seleção, indicação e uso de materiais manipuláveis para o ensino de números e operações fundamentais.

4.3.1 Síntese dos artigos sobre o SND no SIPEM

As mídias apresentadas por Curi e Santos (2012), Guimarães (2012) e Silveira (2018) destacaram ambos os aspectos do SND. Primeiramente, esses autores fizeram um trabalho acerca das *práxis*, uma vez que há ausência sobre o trabalho epistemológico, que estrutura o *logos*, em ambos os aspectos do SND e seus desdobramentos para as tarefas propostas nos LD, nas avalições e na proposta de ensino.

Curi e Santos (2012) empenham-se em identificar as possíveis lacunas no ensino do SND, através das avaliações de larga escala. Essas avaliações foram discutidas acerca das questões propostas e as possíveis estratégias (τ) de resolução, mas não levaram em consideração a estrutura matemática da Aritmética Elementar que alicerça essas estratégias.

Já os trabalhos de Guimarães (2012) e Silveira (2018) conduzem uma discussão acerca dos materiais manipuláveis para o ensino do SND. O primeiro faz um análise do LD das atividades propostas, em especial, para o trabalho com os materiais manipuláveis e cálculos aritméticos. Já o segundo faz um trabalho sobre a *práxis* das possíveis tarefas sobre o SND no material dourado (ou BBD).

Ambos os trabalhos apresentaram a necessidade do professor desenvolver tarefas que relacionem o QVL e os materiais manipuláveis. Guimarães (2012) promove uma discussão acerca do aspecto posicional do QVL com os MM e os possíveis saberes que podem ser desenvolvidos por meios das tarefas propostas nos LDs. Enquanto Silveira (2018) apresenta possíveis técnicas de resolução para a composição e decomposição de números sem ressaltar o *logos* e a *razão de ser* que estão implícitos nesses saberes.

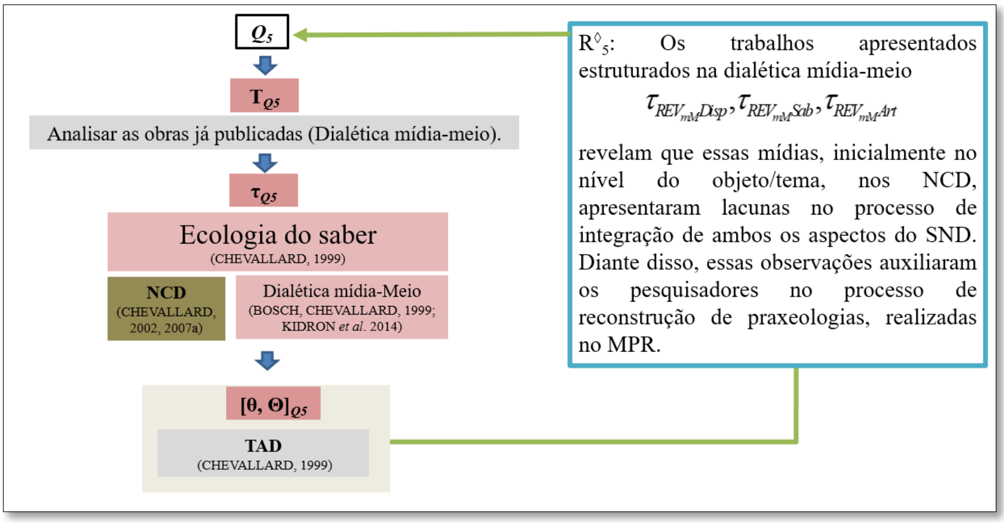
Nesse contexto, essa investigação evidencia ainda mais a importância em apresentar o *logos*, *Aritmética Elementar*, que alicerça o SND e as possíveis relações entre as praxeologias levantadas, as diversas formas de escrita numérica e os MM como forma de dirimir (completar) as lacunas apresentadas nos trabalhos supracitados.

4.4 Síntese sobre a revisão de literatura (*dialética mídia-meio*)

Esta síntese foi iniciada relembrando a questão Q_5: De que modo as pesquisas desenvolvidas entre os anos 2000 e 2018 abordaram os aspectos posicional e decimal do SND?

Como afirmado previamente, esse capítulo da investigação produz uma resposta $R_5^{\Diamond}$. Nesse sentido, a elaboração de uma questão mais restrita numa perspectiva da visitação as obras (PVO) relativas ao SND e a construção de respostas por meio da PP, implementado como método de investigação da revisão de literatura a *dialética mídia-meio* como técnica ($\tau_{REV_{mM}AEP}, \tau_{REV_{mM}TD}, \tau_{REV_{mM}Art}$) para dialogar com as obras justificado pela TAD, como o discurso racional (*logos*). Sendo assim, a Q_5 foi implementada, na PP, na direção do caminho para determinar a $R_5^{\Diamond}$, conforme o esquema representado na figura 16.

Figura 16 - Esquema que representa o processo de construção da resposta $R_5^{\lozenge}$.



Fonte: o autor (2020)

Neste esquema, o tipo de tarefas para responder Q_5 é T_{Q5}:Analisar as obras já estabelecidas na comunidade (Revisão de literatura) por meio da *dialética mídia-meio*. Dessa forma foi possível compreender como as obras O_m apresentaram os aspectos do SND. Para tanto, foi proposto como técnica (τ_{Q5}) para resolver T_{Q5} a análise ecológica do saber (CHEVALLARD, 1999) sob duas perspectivas: A primeira, foram empregados os NCD (CHEVALLARD, 2002, 2007a) para identificar que os aspectos decimal e posicional do SND estão no nível do objeto. Na segunda, utilizamos a DmM (BOSCH, CHEVALLARD, 1999; KIDRON *et al*. 2014) para identificar as *mídias* que abordavam os aspectos do SND e, a partir dessas mídias, elaborar um *meio* compreender a maneira que esse trabalhos consideravam tanto as AEPs, como MDR, quanto os aspectos do SND e as possíveis lacunas, ou seja, o que essa investigação poderia dirimir das lacunas apresentadas nessas mídias, diante dos objetivos dessa investigação. Esses processos teóricos foram alicerçados na TAD (CHEVALLARD, 1999).

Diante disso, o processo de construção da resposta $R_5^{\lozenge}$ observou que as mídias selecionadas na dialética mídia-meio como técnicas de investigação ($\tau_{REV_{mM}AEP}, \tau_{REV_{mM}TD}, \tau_{REV_{mM}Art}$), revelaram que os aspectos posicional e decimal do SND não estão sendo integrados no processo de ensino. Portanto, considerando as lacunas apresentadas nessas *mídias*, essa investigação criou um *meio* a fim de integrar ambos os aspectos. Esse processo foi de suma importância para a reconstrução de praxeologias, usando a técnica do T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2012, 2018) no MPR.

5. O MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE

Este segmento da investigação foi elaborado a partir da questão Q_2: *Como analisar as condições e restrições das tarefas do SND?* No intuito de encontrar uma resposta $R_2^{\lozenge}$, foi utilizado o método de investigação, por meio da PP, alicerçado na *observação de classe*[107] (COMITI & FARIAS, 2019), acerca dos elementos do processo transpositivo do saber da Teoria da Transposição Didática (TTD) (CHEVALLARD & JOHSUA, 1991). Esses elementos do processo transpositivo foram fragmentados durante as análises da ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999) integrado aos níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002, 2007a).

A Durante o período de *observação de classe* (COMITI, FARIAS, 2019) integrado a *praxeologia de pesquisa* (CHEVALLARD, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d), verificou-se o *sistema-classe*, ou seja, a relação entre o professor e os documentos curriculares oficiais, o professor e o LD, professor e estudante e, consequentemente, o estudante e material didático. No sistema Herbatiano,

$$\left[S(X;Y;Q) \rightarrow \left\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m, Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\right\}\right] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

a observação de classe foi considerada como elemento teórico que auxilia a produção de dados, externo e interno a classe a fim de compreender as lacunas apresentadas no processo transpositivo do saber diante do processo de procurar respostas $R_n^{\lozenge}$ as questões Q_n.

A análise estruturada na *observação externa a classe* permite compreender os objetivos e o planejamento do ensino, por meio da condução das seções (aulas). Nesse ínterim, a produção de dados externos contempla conhecer as *condições* (C) e *restrições* (K) do saber, ou seja, a ecologia do saber, visitar as obras (O_m): nos documentos curriculares oficiais como a BNCC (BRASIL, 2018), OCEB (BAHIA, 2013) e RCMS (SALVADOR, 2018b), manuais para o ensino, PPP, plano trimestral, LD e caderno dos estudantes e, quando necessário elaborar entrevistas.

Essas análises (*observação de classe externa*) foram fundamentais para compreender o trabalho realizado nas instituições escolares, como os professores conduzem o saber por meio

---

[107] A observação de classe foi usada como metodologia de análise no MPD, auxiliando a Praxeologia de Pesquisa, uma vez que descreve os caminhos nos quais os pesquisadores devem seguir para realizar análises nas instituições de forma aceitável.

dos documentos oficiais, vigiados pela *noosfera*[108], como os documentos oficiais, por ser as formas de orientação que o professor tem a disposição para conduzir o saber que deve ser ensinado, ou seja, a produção desses dados devem ser utilizados para confrontar as OM do saber ensinado e OM prescritas pelas instituições.

A partir desse método, foi possível possível compreender como vigora o processo transpositivo do saber da Teoria da Transposição Didática (TTD) (CHEVALLARD & JOHSUA, 1991), em especial, as transformações pelo qual o objeto do saber é modificado em objeto do ensino, como mostra os trabalhos de Valente (2003) e Almouloud (2011). O primeiro faz algumas reflexões acerca dessas transformações, em especial, do *saber sábio* para *saber ensinado*[109], e como a *noosfera* atua para reorganizar, quando necessário, os *saberes ensinados* por meio dos *saberes sábio* e *a ensinar*. Já o segundo aponta os avanços da TTD, a partir das propostas de Verret (1975), implementadas pelas ideias de Chevallard (1991). Nesse sentido, Almouloud (2011) elabora uma descrição de como o pesquisador deve executar sua estrutura de pesquisa abordando a TTD.

Assim, esse autor (*ibid*.) aponta que é essencial que o trabalho sobre o processo de transformação do saber parte do *saber sábio*[110] que é o saber dos especialistas da área, por exemplo, pesquisadores e autores da teoria matemática[111]. Nesta etapa do saber, o pesquisador deve promover, sobre o objeto do saber, acerca da análise epistemológica[112] e hipóteses de aprendizagem, levando em consideração o contexto social para que esse objeto possa ser modificado a um objeto do ensino, o *saber a ensinar*.

Este saber pode ser entendido como a construção, em alguns casos até a reconstrução, do saber a fim de ser referência para o sistema educativo, materializado por meio de legislações educacionais, orientações curriculares, programas de ensino, que vão orientar o trabalho do professor em sala de aula e, após algumas modificações, alcançar o *saber ensinado*. Estas são as práticas de ensino numa linguagem, por exemplo, matemática, acessível aos estudantes materializado por livros didáticos, apostilas ou páginas da web interativas.

---

[108] Sociedade, autoridades administrativas da educação como representantes políticos e executivos responsáveis pelo ministério e pelas secretarias estaduais e municipais de educação, cientistas, pais de alunos, etc., que tem em comum a função de monitorar o processo de desenvolvimento do saber nas instituições de ensino.
[109] Perpassando pelo saber a ensinar.
[110] Também pode ser entendido como saber científico (Valente, 2003)
[111] As teorias matemáticas são divididas em campos e/ou domínio por área, como: análise, álgebra, geometria, lógica, dentre outras.
[112] Que já fora realizada no MPR.

As modificações que o professor deve fazer sobre o *saber ensinado*, geralmente na elaboração de suas aulas e materiais para a sala de aula, a fim de chegar à compreensão do estudante é chamado de *saber aprendido*. Essas transformações são tanto do *saber sábio* para o *saber aprendido* quanto do *saber aprendido* para o *saber de sábio*. Isso mostra que as pesquisas que trabalham sobre o objeto do saber obtêm muitas respostas no *saber aprendido* que, a partir dessas pesquisas, podem sugerir modificações com mais presteza nos *saberes ensinado* e *a ensinar*, sendo possível evidenciar essas mudanças nas atualizações e (re)elaboração das propostas curriculares. Diante disso, esse processo de transformação do saber, proposto por Chevallard (2011), pode ser visualizado conforme a figura 17.

Figura 17 - Processo transpositivo proposto por Chevallard.

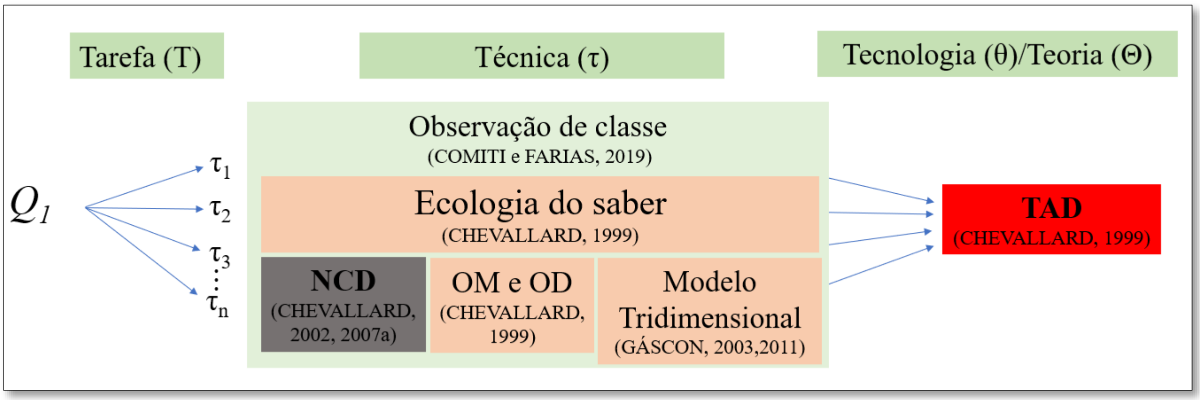
Fonte: CHACÓN (2008, p. 51) (Tradução nossa)

O *saber sábio* já foi apresentado na abordagem histórica e epistemológica. Nesse sentido, vamos discutir como o saber está presente no *saber a ensinar* por meio da *observação de classe* nos materiais curriculares bem como do livro diático.

Diante do exposto, os outros métodos que integraram a observação de classe, foram os elementos da ecologia através das OM, para compreender as praxeologias que eram propostas nas instituições e as praxeologias pessoais que refletiam o entendimento dos estudantes sobre o SND. Já a análise sobre as OD apresentaram a forma como noções praxeológicas [T, τ, θ, Θ], das OM, foram desenvolvidas nas instituições como os planos, anual e trimestral, tarefas propostas elaboradas pelas professoras participantes da investigação. A análise também contemplou o LD, visto que esse recurso foi bastante utilizado durante a investigação.

A articulação dos métodos supramencionados foi materializada no esquema disponível na figura 18.

Figura 18 - Esquema que representa, na PP, o método de investigação do MPD.



Fonte: o autor (2020)

5.1 A *observação de classe* nos anos iniciais do ensino fundamental

A análise compreende ao estudo dos documentos oficiais como a BNCC, a OCEB e a OCMS, como as professoras compreendem e elaboraram os seus planos de curso, bimestre ou de unidade e plano de aulas a partir desses documentos. Esses meios propiciam a condução do *saber a ser ensinado*. Essa análise é essencial para compreender como o saber foi modificado do *saber sábio* para o *saber a ensinar*.

Neste momento é possível identificar os fenômenos que se referem as *condições* (C) e *restrições* (*K*) que afetam a gênese e o desenvolvimento institucional das praxeologias. Sendo assim, foi realizado a análise ecológica do saber pela *observação de classe* em 5 partes: A primeira para compreender como está o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino fundamental; a segunda com a análise de documentos que são norteadores para o SND nas séries iniciais do Ensino Fundamental, a terceira a análise do livro didático, a quarta o plano de unidade de curso, bimestre ou unidade e plano de aulas, e a quinta parte o caderno dos estudantes.

5.1.1 O ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental

O ensino de matemática nas séries iniciais era orientado até o fim do ano de 2017 pelo PCN e passou a ser orientado pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC)[113], que a partir de 2019[114] passou a ser implementada pelas secretarias de educação municipais. Este é um documento de caráter normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Fundamental e propõe que o Ensino Fundamental I seja organizado em 5 anos para favorecer a comunicação entre saberes e conhecimentos gradativamente. No documento, percebe-se que devem ser consideradas tanto as características dos estudantes quanto as especificidades e demandas de cada série no decorrer da escolarização. Na BNCC (2017, p. 267), no Ensino Fundamental, o ensino da Matemática deve ser elaborado através da "articulação de seus diversos campos[115] – Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade – precisa garantir que os estudantes relacionem observações empíricas do mundo.

Nesse sentido, o ensino da matemática deve reunir um conjunto de ideias fundamentais para que o trabalho articulado promovam: equivalência, ordem, representação e aproximação; elementos que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento numérico na matemática.

Nesse sentido, o ensino entre esses campos deve ocorrer de forma integrada, entretanto, nesta pesquisa, vamos priorizar o campo da Aritmética, mais especificamente, o trabalho sobre o SND. O trabalho integrado nesse campo deve ser proposto por meio de situações de aprendizagem que enfatize os registros, usos, significados e operações ampliando o campo numérico, como reafirmaram em pesquisas anteriores Curi, Santos e Rabelo (2013).

Nessa etapa do ensino, espera-se que os estudantes possam participar de situações de aprendizagem que representem os números naturais, utilizem técnicas que possam ser argumentadas e justificadas durante o processo de resolução dessas situações que possibilitem o uso de diversas técnicas usando o cálculo mental e estimativas, que além dos algoritmos sejam utilizados materiais concretos manipuláveis, como promove Souza (2011, p.71), em que "o estudante possa relacionar esses materiais aos objetos matemáticos sobre o sistema de

[113] A BNCC foi homologada em dezembro de 2017, com o prazo de dois anos para ser implementada pelas secretarias de educação.
[114] Documento publicado em dezembro de 2017 e as que as instituições educacionais tinham 2 anos para implementar.
[115] Entendido como unidades temáticas como propõe a BNCC.

numeração decimal e assim possibilitar a elaboração de inferências sobre os saberes matemáticos".

Nesse contexto, o estudante, dessa fase do ensino, integre ambos os aspectos do sistema de numeração decimal uma vez que o trabalho sobre esses aspectos nos números deve proporcionar o desenvolvimento de habilidades acerca dos números naturais sobretudo no que se refere ao reconhecimento da leitura, escrita e conversões dos números no SND.

As pesquisas de Tempier (2010, 2013) e Chaachoua (2016) evidenciam que o avanço no ensino do SND é fundamental, em especial, no aspecto posicional, uma vez que aproximam os estudantes da compreensão do saber. Tempier (2013) e Chaachoua (2016)[116], mostram nos seus trabalhos, na França, que há professores que tem o conhecimento do saber, mas suas práticas podem estar *monumentalizadas* (Chevallard, 2012), muito devido as *restrições* (*K*) nas instituições. Já no Brasil, Milan (2017) retrata que os professores, dessa etapa do ensino, ainda possuem muitas dificuldades na compreensão das regularidades que formam aspecto posicional, e consequentemente, essas dificuldades também estão presentes no aspecto decimal. Nesse sentido, ao propor um modelo didático de referência, como um dos objetivos específicos desta pesquisa, é de suma importância propor atividades de investigação que permitam identificar como o saber é encontrado e desenvolvido nos documentos oficiais, isto é, nas instituições.

5.1.2 Análise de documentos norteadores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o SND

Essa análise é considerada no contexto da TAD[117] fundamental por viabilizar e identificar as lacunas referentes as atividades matemáticas nas instituições de ensino para compreender como o saber está situado. Nesse sentido, o estudo nas instituições de referência foi aprofundado para elaborar uma análise em torno de elementos institucionais que permitiram identificar as *condições* (C) e *restrições* (*K*) em que o SND está organizado e como acontecem os processos de ensino em torno desse saber.

[116] Essas pesquisas abordam ambos os aspectos decimal do SND.
[117] É a forma predominante, interpretada pelos pesquisadores, do saber na instituição escolar (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013).

Nesta pesquisa, a análise foi apresentada como um estudo sobre os documentos curriculares, o livro didático e as práticas do professor e estudantes desenvolvidas na instituição escolar para compreender as relações institucionais e pessoais referentes ao SND. Nesse sentido, utilizou-se os níveis de codeterminação, proposto por Chevallard (2007a) e desenvolvido por Chacón (2008), para cada etapa dessa análise, conforme a Figura 17.

Assim, a análise foi iniciada pelo documento nacional, a BNCC (BRASIL, 2017b), seguindo pelo regional, as pelas OCEB (BAHIA, 2013) e finalizando na análise do documento municipal, o RCMS (SALVADOR, 2018b).

5.1.2.1 A BNCC

Esta etapa foi iniciada com uma síntese das implicações legais previstas sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de Matemática, que a partir de 2019, já está validada para o ano letivo vigente. A BNCC é um "documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017b, p.7). Este documento curricular foi elaborado com base em documentos já disponíveis até então, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2013), e passou a ser obrigatório em todo o país, diferentemente dos documentos anteriores que serviam como sugestão e/ou orientação. Sendo assim, todas redes de ensino e instituições escolares, sejam públicas e particulares, devem adequar[118] seus currículos pela referência nacional.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017b), o Ensino Fundamental é articulado por 4 campos - Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística que são desmembrados em 5 unidades temáticas Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e estatística. Essa pesquisa restringiu-se ao *domínio* da Aritmética, e a unidade temática (*setor*) de Números e Operações. Dentro desse campo, o foco dessa pesquisa foi sobre o SND, no 5º ano do EF por entender que determinados saberes já estejam reunidos com esses estudantes.

[118] Toda a unidade escolar em funcionamento deve ter um currículo vigente, segundo a Lei 9.394/96 (TÍTULO IV).

O SND escolhido foi desenvolvido por diversas *civilizações*[119] ao longo dos tempos, por diversas formas (símbolos e escritas) e características consumando o sistema que conhecido atualmente. O desenvolvimento histórico do SND, pela proposta da BNCC é fundamental, visto que esse documento propõe que:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BNCC, 2017, p.9)

Nesse sentido, o objeto pesquisado demonstra sua importância ao longo da história.

Na esfera da *sociedade*, o SND possibilita a articulação para o desenvolvimento das operações básicas que influenciam o conhecimento Aritmético. Nesse sentido, a compreensão das relações entre conceitos e procedimentos do SND (e consequentemente, da Aritmética) proporciona ao estudante a própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos (BRASIL, 2017b). Por exemplo, qualquer pessoa em suas relações sociais e econômicas necessitam da compreensão das operações básicas como fundamento matemático primordial a sua existência social para compreender e atuar no mundo. E a escola, parte social para a difusão dos saberes[120], deve promover o trabalho integrado, por meio de projetos, desses saberes aproximando o estudante da sua autonomia na sociedade.

No campo da *escola*, evidenciou-se o lugar onde o saber é discutido para torná-lo apreciado, socialmente contemplado pelas relações entre o saber e as necessidades de aprendizagem possibilitando ao estudante a promoção para os anos finais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, o trabalho por meio de projetos que envolvam as dimensões culturais, sociais, políticas e econômica, sobre questões, por exemplo, do trabalho, consumo, dinheiro e suas relações e, na sociedade a partir de um contexto histórico e como essas relações contribuem para a sociedade atual pode ser considerado uma *condição* (*C*). Na abordagem didática, o compromisso sobre a resolução de situações de aprendizagem que promovam ideias e métodos de resolução (*práxis*) usando tanto a abordagem do conceito quanto das propriedades

[119] Já apresentado na abordagem histórico-epistemológica.
[120] Lei 9.394/96. Lei de diretrizes e bases da educação nacional (BRASIL, 1996).

matemáticas (*logos*) em torno do saber deve ser integrados para promover o trabalho transdisciplinar.

Uma *restrição* (*K*) ao trabalho por meio de projetos é o trabalho realizado por disciplinas que, em muitas unidades escolares, ainda é desenvolvido de forma isolada uma vez que não há instruções/sugestões para a elaboração da integração desses trabalhos, deixando sob a responsabilidade do professor que, em muitos casos, falta-lhe elementos teóricos para elaborar sua prática, ou seja, não há uma ecologia[121] em que o professor possa se fundamentar, o que pode ser entendido como uma *incompletude da atividade institucional* (FARIAS, CARVALHO e TEIXEIRA, 2018), no que se refere ao *vazio didático* (FARIAS, 2010), já que falta elementos didáticos aos professores para integrar esses saberes potencializando as situações de aprendizagem para além da resolução de tarefas que trabalham, basicamente, a memorização de técnicas e algoritmos prontos, sem a compreensão da estrutura matemática que evoque as técnicas (τ), tecnologias(θ) e teorias (Θ) para resolver quaisquer tipos de tarefas prescritas[122].

Mas nesse campo há ainda outras *restrições* (*K*) quanto ao trabalho da organização institucional na escola, como a quantidade e diversidade de disciplinas e professores, as formações desses professores, os procedimentos em relação aos saberes, as relações entre professores e estudantes ou estudantes e comunidade escolar.

No terreno da *pedagogia*, o ensino no campo da Aritmética precisa garantir que os estudantes

> relacionem observações empíricas do mundo real a representações numéricas por meio de tabelas, figuras e esquemas e que possam fazer associações por meio dessas representações a uma situação de aprendizagem que mobilize conceitos e propriedades matemáticas, por meio de induções e conjecturas (BRASIL, 2017b, p. 263).

No campo Aritmético há 2 elementos fundamentais que se relacionam e que são essenciais para o desenvolvimento do aluno: o letramento matemático[123] e os processos

[121] Proposta na obra de Artaud (2019).
[122] Tarefas prescritas são aquelas que são propostas nas instituições, diante dos documentos oficiais (documentos institucionais).
[123] É o conjunto de competências e habilidades para raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (*ibid.*, p. 264)

matemáticos[124]. A articulação desses elementos é essencial para o trabalho com as variáveis praxeológicas (CHAACHOUA e BESSOT, 2016) uma vez que o movimento para ampliar o quarteto praxeológico pela análise das *condições* (C) e *restrições* (*K*) podem reduzir a quantidade de técnicas utilizadas em determinada instituição, ou seja, possibilita a produção de técnicas mais econômicas[125].

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017b), é por meio da aquisição dessas relações que permite ao estudante uma interação com o saber, ou melhor, desenvolvam a capacidade própria para construir conhecimentos matemáticos, sendo estimulados a estabelecer e a analisar diferentes processos de resolução de situações de aprendizagem que não fiquem restritas à aprendizagem dos algoritmos das chamadas "quatro operações", mas que para iniciar uma sistematização dessas noções como a realização dos algoritmos das operações, a habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo.

A aquisição desse tipo de relação é o que Almouloud chama de desenvolvimento autônomo que se "efetiva por meio da *devolução* em uma situação de aprendizagem" (ALMOULOUD, 2007, p. 35). Na BNCC (BRASIL, 2017b), esse processo de aquisição pode ser entendido como o desenvolvimento de habilidades[126] e competências pelos estudantes. O documento propõe que a delimitação das habilidades não seja feita de maneira fragmentada, mas que essas habilidades estejam conectadas com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação de aprendizagens já consolidadas, uma vez que o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores.

Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2017b) entende que os anos iniciais do Ensino Fundamental deve ser compreendido como uma ampliação dos saberes da Educação Infantil[127], assim como Bachelard (1996, p. 17-18) entende que o "ato de conhecer mobiliza conhecimentos anteriores com a superação das dificuldades e dos erros para fundamentar novos

[124] São processos de aprendizagem ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional por meio de resolução de problemas, de investigação [...] (*ibid.*, p. 264).
[125]Dimensão Econômica do Saber (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013).
[126] A BNCC (BRASIL, 2017b) refere-se à habilidade como o conjunto de aprendizagens que podem ser adquiridas pelos estudantes.
[127] No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, deve-se retomar as vivências cotidianas das crianças com números, formas e espaço, e também as experiências desenvolvidas na Educação Infantil, para iniciar uma sistematização dessas noções (BNCC, 2017b, p. 276).

conhecimentos, e que a justaposição desses conhecimentos promovem a aquisição do saber". Bachelard denomina esse processo de espiritualização.

No desenvolvimento da temática sobre Números, no nível do *setor*, os estudantes devem desenvolver o pensamento numérico como forma de quantificar as particularidades de objetos (por meio de símbolos, escrita e oral) e de "interpretar e validar os argumentos elaborados baseados em quantidades, dentre outras ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática" (BRASIL, 2017b, p. 268). Além disso, deve ser enfatizado os registros, usos, significados e operações, ou seja, os *ostensivos*.

Nesse sentido, a BNCC (*ibid.*, p. 276) "orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos[128], sem deixar de lado suas aplicações". E é por meio dessas representações, os *ostensivos*, que é possível transformar as relações entre o saber e as demais necessidades da sociedade para sua utilização, como a resolução de tarefas com números naturais e racionais como estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos.

Nessa fase do ensino espera-se que o estudante tenha habilidades *ostensivas* (leitura e escrita) e *não-ostensiva* (conceito e propriedades sobre ordenação) no que se refere aos números naturais e racionais identificando-os e os compreendendo por meio do SND, especialmente, o valor posicional dos algarismos.

Nessa perspectiva, os estudantes podem ser capazes de realizar tarefas como medições de objetos que, em muitos casos, os números naturais são insuficientes para resolvê-las, indicando "a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária" (BRASIL, 2017b, p. 276.). Sendo assim, a elaboração de tarefas com números naturais e racionais em que a representação decimal seja finita e que envolva as operações básicas e procedimentos de elaboração de τ [129], θ e Θ que argumentem, justifiquem e validem os resultados encontrados.

Nesse sentido, a utilização de recursos didáticos devem ser implementados nas práticas professorais para possibilitar dirimir as lacunas do ensino. Assim, a utilização de materiais manipuláveis como o ábaco, material dourado, jogos, softwares sobre numeração, dentre outros, devem oportunizar aos estudantes a mobilização de saberes matemáticos como forma

[128] Refere-se a objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos.
[129] Usando cálculos por estimativa, mental, algorítmico.

de compreender e utilizar as noções matemáticas (BRASIL, 2017b). Entretanto, esses recursos precisam estar integrados a tipos de tarefas (T) que levem à reflexão e à sistematização de técnicas (τ), para que se inicie um processo de formalização por meio do *logos* [θ, Θ].

No documento, observamos que, o nível do *setor*, Números e operações contemplam elementos que apresentam as ideias iniciais sobre o SND, ou melhor, inicia-se a apresentação dos aspectos decimal e posicional. Nesse sentido, encontra-se no quadro 4, logo abaixo, a unidade temática, objetos do conhecimento e habilidades relacionados ao SND no 1º Ano do EFI:

Quadro 4 - Objeto e habilidades disponibilizadas pela BNCC para o 1º ano do EF I.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Números e operações	Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100).	(EF01MA04)[130] Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017b, p.278-279)

De acordo como o Quadro 4 foi possível observar que já há um trabalho para números com 2 algarismos, mesmo sem identificar, explicitamente, os aspectos decimal e posicional. Nesse ano, o trabalho com materiais manipuláveis, como o ábaco e o material dourado são essenciais para iniciar a compreensão desses aspecto. Já no 2º Ano, observou-se que o objeto SND já pode ser visualizado em ambos os aspectos com números de até 3 algarismos/ordens (unidade, dezena e centena), como consta no quadro 5.

A ideia da posição de cada algarismo por ordem, no SND, inclui o zero como elemento fundamental para esse entendimento, visto que cada ordem pode assumir como valor mínimo o zero e valor máximo o 9. Além disso, o desenvolvimento da leitura, escrita, comparação e ordenação desses números proporcionam que outros objetos sejam revelados, a partir desse

[130] O código EF01MA04 representa as seguintes informações: EF01 refere-se ao Ensino Fundamental 1, MA a disciplina Matemática e 04 refere-se ao número da habilidade que o estudante deve desenvolver ao longo do trabalho com o objeto do conhecimento.

trabalho com o SND, como a composição e decomposição de números naturais para 3 algarismos.

Quadro 5 - Objeto e habilidades disponibilizadas pela BNCC para o 2º ano do EF I.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Números e operações	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero).	(EF02MA01) Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela a compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero).

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017b, p.282-283)

No etapa do 3º ano verificou-se a ampliação de 3 para 4 a quantidade de algarismos. Nesse sentido, essa ampliação visa implementar o aspecto decimal para a centena, ou seja, 1 centena equivale a 10 dezenas ou 100 unidades. Isso pode ser visualizado quadro 6.

Quadro 6 - Objeto e habilidades disponibilizadas pela BNCC para o 3º ano do EF I.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Números e operações	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de quatro ordens.	(EF03MA01) Ler, escrever e comparar números naturais de até a ordem de unidade de milhar, estabelecendo relações entre os registros numéricos e em língua materna.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017b, p. 286-287)

No 4º Ano, o *objeto* SND, propriamente dito, emerge como um conjunto de conceitos e propriedades que foram agregados dos objetos que foram desenvolvidos ao longo dos 3 anos anteriores. Isso pode ser visualizado no quadro 7. Nesse sentido, certificou-se que os trabalhos sobre ambos os aspectos já foram iniciados nos seriados anteriores sendo ampliando a quantidade de algarismos dos números a cada série, mas que a formalização do SND inicia-se a partir do 4º Ano.

Quadro 7 - Objeto e habilidades disponibilizadas pela BNCC para o 4º ano do EF I.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Números e operações	Sistema de numeração decimal: leitura, escrita,	(EF04MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até

	comparação e ordenação de números naturais de até cinco ordens.	a ordem de dezenas de milhar.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017b,.290-291)

No 5º Ano, a estrutura do SND deve estar contemplada possibilitando a articulação entre os aspectos decimal e posicional para os números com até 6 algarismos, conforme o quadro 8.

Quadro 8 - Objeto e habilidades disponibilizadas pela BNCC para o 5º ano do EF I.

Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Números e operações	Sistema de numeração decimal: leitura, escrita e ordenação de números naturais (de até seis ordens).	(EF05MA01) Ler, escrever e ordenar números naturais até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017b, p. 290-291)

É nesse seriado que se espera que os estudantes possam conceber a articulação de ambos os aspectos e que essa articulação viabilize a ampliação do trabalho acerca do SND, como os números racionais nas formas de representação na forma decimal e fracionária, para comparar e ordenar e operar tanto do campo aditivo quanto no campo multiplicativo, em ambas as representações.

A BNCC (BRASIL, 2017b) estabelece também que o conhecimento matemático é essencial para todos os estudantes da Educação Básica (nível da *escola*), seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea (nível da *sociedade*), seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos(nível da *civilização*), cientes de suas responsabilidades sociais, o que se entende como uma condição ímpar para compreender a importância da Matemática na sociedade. Nesse sentido, no quadro 9 foram implementadas algumas *condições* (C) e *restrições* (K), por meio dos níveis de codeterminação didática proposta por Chevallard (2002)[131].

[131] Desenvolvido, também por, Chacón (2008).

Quadro 9 - Condições e Restrições estabelecidas na BNCC sobre o SND no 5º ano.

Condições	***Restrições***
▪ O estudo dos números naturais e decimais deve ser desenvolvido no campo da Aritmética; ▪ O estudo deve integrar os aspectos posicionais e decimais; ▪ O trabalho deve ser desenvolvido a partir de situações didáticas que utilizem como recursos materiais manipuláveis, tecnologias da informação, dentre outros.	▪ Breve discussão sobre domínios (conteúdos) que são introduzidos no Ensino Fundamental; ▪ Não apresenta caminhos na literatura para a integração desses princípios na Aritmética; ▪ Não apresenta elementos para estabelecer a integração dos aspectos posicionais e decimais na utilização desses recursos.

Fonte: o autor[132] (2020)

Evidenciou-se durante a análise da BNCC[133] (BRASIL, 2017b) a importância do trabalho do professor em compreender o *processo transpositivo* do saber (CHEVALLARD e JOHSUA, 1991) e como esse saber está sendo referenciado e modificado na articulação de cada nível de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002; CHACÓN, 2008), desde os inferiores aos superiores. Essa compreensão pode dirimir as diversas lacunas apresentadas durante o processo de ensino, na elaboração dos planos de trabalho, aulas e avaliações, e na aprendizagem do estudante no âmbito educacional atualmente, como podem ser observadas nas avaliações de larga escala (OECD, 2015, 2016).

5.1.2.2 Orientações curriculares e subsídios didáticos para a organização do trabalho pedagógico no ensino fundamental de nove anos da rede estadual da Bahia

Apresentamos, nesta fase, uma sinopse das Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos (OCEB) que foi um documento que promoveu o ensino fundamental para 9 anos[134]. Essas orientações curriculares foram desenvolvidas para orientar, redefinir e reestruturar o currículo

[132] A ideia de construção de um quadro mostrando as principais *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) foram apresentadas, inicialmente, na obra de Silva (2017).
[133] Na temática Números do campo da Aritmética.
[134] A Portaria SEC nº 3.921/09 instituiu o período de transição do ensino fundamental de 8 para 9 anos (BAHIA, 2013, p.15).

do ensino fundamental tanto da rede estadual de ensino da Bahia e quanto dos municípios que ainda não constituíram uma legislação para seus sistemas de ensino.

No prelúdio, uma análise foi realizada acerca da TAD (Chevallard, 1999), em particular, nos dos níveis de codeterminação didática (Chevallard, 2002) por meio de uma abordagem análoga a realizada na BNCC estruturando como os níveis superiores podem/devem influenciar os níveis inferiores e como essas *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) que estruturam a ecologia dos saberes (Chevallard, 2002) que possibilita a existência, ou não, do SND nas instituições.

No nível das *civilizações*, o documento não propõe qualquer referência ao conhecimento matemático. Nesse sentido, entende-se como uma grande *restrição* (*K*) em não abordar forma de se trabalhar utilizando os argumentos da História da Matemática para a compreensão do conceito de algarismos, número e numeral, as formas iniciais e o avanço nas representações dos numerais, os motivos pelos quais levaram as civilizações adotarem a base 10 para o sistema de numeração. A falta desses elementos impossibilitou a compreensão dos estudantes quanto ao papel da ciência em evidenciar esses fatos e mostrar como cada civilização possibilitou o avanço dos saberes matemáticos.

No âmbito da *sociedade* destaca-se o avanço nas propostas curriculares que resultaram em mudanças sociais estáveis, em especial, ao implementar a educação fundamental de 9 anos. Constitui-se uma série de mudanças como a nomenclatura “série”, usada até 2008, que passou a ser “ano”, a partir de 2009, para referenciar cada classe ou ano de curso trilhado pelos estudantes.

A partir dessa mudança, a faixa etária dos estudantes que entravam e saíam do EF foi modificada, sendo o 1º ano cursado por estudantes de 6 anos finalizando o EF I com 10 anos no 5º ano, e por conseguinte, do 6º ao 9º ano e finalizando o EF com 14 anos. Para os anos iniciais do EF, o início e o trabalho sistemático foram elaborados como *condição* (*C*) para introduzir e conduzir o trabalho pelas diversas habilidades e competências do ensino fundamental com o objetivo de garantir aos estudantes a promoção dos saberes que serão essenciais para os anos finais do EF e o ensino médio. Diante disso, as OCEB (BAHIA, 2013) propuseram, como *condição* (*C*) uma proposta que pudesse integrar e articular com as orientações da BNCC (2017)[135], resgatando o respeito e as várias manifestações de cada comunidade valorizando as diferenças para considerar à pluralidade e à diversidade cultural.

[135] Tanto para a parte obrigatória quanto a parte diversificada do currículo. (BAHIA, 2013, p.19).

Nesse sentido, a proposta tem como *condição* (*C*) para que o estudante seja participante de um processo de ensino por meio da investigação considerado os saberes já desenvolvidos elevando potencial de criticidade, também por meio da linguagem matemática, para a vida em sociedade contestando, como *restrição* (*K*), um "ensino focado em disciplinas pautado no esforço repetitivo e linear eliminando a dúvida, o questionamento e a argumentação" (BAHIA, 2013, p. 19-20).

Para superar essa *restrição* (*K*), as OCEB (BAHIA, 2013) destaca como *condição* (*C*) a capacitação dos estudantes para iniciar e desenvolver atitudes que promovam ação desde mais usuais a ações mais complexas que abrangem os saberes científicos e tecnológicos. Nesse sentido, Silva (2017) e Lessa (2017)[136] propuseram uma relação entre ensino-aprendizagem e a situação socioeconômica[137] dos estudantes das redes estaduais[138] que pode ser entendida como uma *restrição* (*K*) uma vez que esses estudantes, inscritos no Ensino Fundamental, são oriundos de famílias de baixa renda, sem oportunidades de cursar a pré-escola[139], com qualidade de vida insatisfatória (saneamento básico impróprio e elevada situação de risco) e, em grande parte, com o início dos estudos atrasados observando a idade-série. Diante disso, entendemos como uma restrição as condições financeiras que impossibilitam os estudantes em acompanharem os avanços tecnológicos no âmbito da sociedade contemporânea.

No nível da *escola* é possível caracterizar que o documento curricular propõe que os estudantes devem tornar-se, ao longo do processo, sujeitos autônomos, críticos, participativos na sociedade como *condição* (*C*) para afirmação de um currículo cíclico e flexível permitindo recontextualização dos saberes para aproximá-los das vivências da comunidade. Outra *condição* (*C*) importante foi a implementação já com as propostas iniciais da BNCC (BRASIL, 2017b)[140], pois já era consenso na comunidade uma proposta de uma base comum de todas as disciplinas. Assim as OCEB (BAHIA, 2013) institui uma parte diversificada que em junção com a base curricular comum, forma o currículo para as instituições incorporadas na educação, no âmbito do estado da Bahia. Nesse sentido, essa articulação entre as partes do currículo é uma *condição* (*C*) para atender a formação do estudante que visa compreender as características

[136] Ambas fizeram, em suas dissertações, uma análise sobre esse documento nos níveis de codeterminação didática (Chevallard, 1999, 2002) para as séries finais do Ensino Fundamental.

[137] Esses estudos acrescentados com as propostas de Goldemberg (1993) e Simões e Bremenkamp (2018) apontam que a falta de investimento em educação pública proporcionam o aumento da desigualdade social e, por conseguinte, aprendizagem insuficiente.

[138] O documento caracteriza essa situação com o perfil dos estudantes da educação pública do estado da Bahia.

[139] Conhecida como creche-escola.

[140] Ressalta-se que a fase inicial de discussão para a elaboração da BNCC iniciou-se em 2015.

sociais, econômicas e culturais do estado e municípios, bem como suprimir as dificuldades das áreas de conhecimento com seus respectivos componentes curriculares[141].

No componente curricular para o ensino de Matemática encontra-se os seguintes saberes: "números, operações, medidas, espaço e formas, tratamento de dados e informações" (BAHIA, 2013, p. 71). Estes saberes devem estar integrados e de forma flexível contemplando os diversos estudantes para os diferentes níveis de habilidades e necessidades. Sendo assim, essa integração é uma *condição* (*C*) para a elaboração de situações que oportunize aos estudantes articulação dos conhecimentos matemáticos com outras áreas de conhecimento por meio de projetos interdisciplinares, utilização de jogos e materiais concretos manipuláveis por meio de resolução de problemas, elaboração de situações de aprendizagem que façam parte do contexto dos estudantes e a utilização de tecnologia como computadores, calculadora e aplicativos.

Mas o documento tem *restrições* (*K*) quanto elaboração dessas situações uma vez que solicita um currículo flexível, mas não disponibiliza elementos para tal, visto que não há uma proposta de articulação entre os conhecimentos da própria matemática e de setores da própria matemática. Essa disposição de conteúdos de forma linear, reafirma a *restrição* (*K*), apontadas anteriormente, da falta de proposta de articulação entre os conhecimentos das diversas áreas do saber e de setores da própria matemática limitando a compreensão dos estudantes já que nas OCEB (BAHIA, 2013) os saberes são disponibilizados de forma fragmentada e sem integração.

No âmbito da *Pedagogia*, apesar desse documento ser construído em 2013 já possuía elementos de uma discussão nacional acerca da estrutura curricular da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017a), que além das disciplinas obrigatórias (básicas) propunha uma parte diversificada[142] que deve ser desenvolvida integrada as disciplinas obrigatórias complementado a matriz curricular. Essa matriz curricular foi fracionada em duas partes: a primeira parte refere-se do 1º ao 5º ano; que foi desmembrada em dois blocos, sendo o bloco 1 com 1º ao 3º ano e bloco 2 com o 4º e 5º anos, e a segunda do 6º ao 9º ano.

---

[141] Nas OCEBEF, as áreas de conhecimento foram fragmentadas em componentes curriculares da seguinte forma: I – Área de Linguagens, II – Área de Matemática, III – Área de Ciências da Natureza, IV – Área de Ciências Humanas, V – Área de Ensino Religioso.

[142] Essa parte do currículo foi implementada com o suporte das seguintes leis: Lei n° 9475/97, que define proposições para o ensino religioso; Lei n° 11.769/08 que propõe o ensino de música na educação básica; Leiº 9795/99 que recomenda o ensino de educação ambiental, na Lei n° 8.069/90 – Estatuto da Criança e do Adolescente/Proteção Integral à Criança, e na Lei 11.645/08 – Inserção das Culturas Afro-brasileira, Africana e Indígena. (SILVA, 2017)

De acordo com esse documento, o objeto dessa pesquisa está situado nas séries iniciais do ensino fundamental em que o documento intitula processo de alfabetização e letramento que foi dividido em duas partes: A primeira com as séries iniciais e a segunda com as séries finais. Apenas a primeira parte foi analisada. A matriz curricular foi segmentada em subseções, por área do conhecimento. Assim, têm-se:1 - Área: Linguagens; 2 - Área: Matemática; 3 - Área: Ciências da Natureza; 4 - Área: Ciências Humanas; 5 - Área: Ensino Religioso. O foco dessa investigação aponta para a subseção 2, em particular, as propostas para o ensino do Sistema de Numeração Decimal.

As OCEB (BAHIA, 2013) destacam o trabalho por meio de competências e habilidades que devem ser identificadas como; trabalho inicial/iniciar (I) que devem explorar as ideias iniciais de um determinado saber, o trabalhar sistematicamente (TS) os saberes para que as competências e habilidades seja avaliadas com o acompanhamento do desenvolvimento das referidas competências e o consolidar (C) para afirmar que as competências e habilidades apresentadas propunham a construção do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nesse sentido, destaca-se as competências e habilidades do bloco 1 no quadro 10 abaixo.

Quadro 10 - Eixo 5: Conhecimento matemático no bloco 1 referente ao SND

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES	1º	2º	3º
Formular hipóteses sobre a grandeza numérica, pela identificação da quantidade de algarismos e da posição ocupada por eles na escrita numérica	I/TS	TS	C
Identificar as ordens de um numeral; Comparar um mesmo algarismo colocado em ordens variadas em diferentes numerais.			
Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática.	I/TS	TS	C
Explicar a função do zero.			
Comparar notações numéricas pela compreensão das características do sistema de numeração decimal (base, valor posicional).	I/TS	TS	C
Valorar os algarismos conforme sua posição no numeral; Relacionar dezenas e centenas.			

Fonte: OCEB (BAHIA, 2013, p. 57-58). Adaptado pelo autores.

O Quadro 10 apresenta uma abordagem para a OM Sistema de Numeração Decimal, no campo dos números naturais para os três primeiros anos do EF I que apresenta com o *condição* (*C*) um entendimento sobre o aspecto decimal, e posteriormente, o aspecto posicional com a identificação e variação das ordens dos numerais, a função do zero no SND e a posição dos numerais com até 3 ordens.

No Quadro 10, foi possível observar que não há uma fragmentação descritiva do desenvolvimento do SND ao longo dos seriados, ou seja, há uma *restrição* (*K*) que impossibilite o professor identificar quais habilidades devem ser trabalhadas em cada seriado para que o estudante possa atingir a competência solicitada. Nesse sentido, no documento há apenas uma única referência as dificuldades relativas ao trabalho com o SND ao mencionar que as dificuldades que podem emergir no desenvolvimento de elementos da geometria (orientação e localização espacial). Nota-se uma fragilidade no documento referente a esse saber, que é fundamental para o desenvolvimento dos diversos saberes matemáticos.

No bloco 2, referente ao 4º e 5º anos, não há qualquer destaque para competências e habilidades nesses seriados. O documento relata diversos elementos sobre o Eixo 1 - Os Números e suas relações, mas não propõe uma proposta sobre o SND o que foi considerado como uma *restrição* (*K*) nos anos iniciais do EF os quais se entende, porém, como *restrição* (*K*) para o ensino da matemática nessa etapa do EF, por limitar os saberes citados a ocasiões estanques do processo formativo e que resulta a falta de uma interlocução com outros saberes em outras etapas desse processo.

5.1.2.3 O referencial curricular do município de Salvador

No município de Salvador, o referencial curricular municipal para os anos iniciais do ensino fundamental está integrado aos princípios da educação infantil visto que essa rede de ensino é responsável tanto pela oferta do Ensino Infantil (EI) quanto pelos anos iniciais do Ensino Fundamental. O documento Referencial Curricular Municipal para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (RCMS)[143] foi publicado em 2018 já refletindo sobre as normas e indicações propostas pela BNCC (BRASIL, 2017b).

Assim, como foi realizado na análise da BNCC (BRASIL, 2017b), a análise desse documento seguiu as mesmas perspectivas da escala hierárquica dos níveis de codeterminação

[143] Faz parte da integração do Projeto Pedagógico do município de Salvador intitulado Nossa Rede que é uma ação colaborativa (professores, coordenadores pedagógicos e gestores da rede municipal em colaboração com Avante, Instituto Chapada de Educação e Pesquisa (ICEP) e a Pracatum) que contempla a elaboração materiais pedagógicos produzidos dentro de uma visão de respeito aos valores das identidades culturais de Salvador e suas peculiaridades. (Disponível em: < http://educacao.salvador.ba.gov.br/programa-projeto/nossa-rede/>. Acesso em 30 fev. 2019)

superiores, destacando que é pouco visitada pelos docentes uma vez que esses docentes estão mais envolvidos diretamente na escala de níveis inferiores. (SILVA, 2017). Consideramos que as escalas superiores influenciam nas escalas inferiores (e vice-versa) na perspectiva das *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) que percorrem a ecologia do saber.

No nível de codeterminação da *civilização*, o documento faz referência aos saberes matemáticos que foram construídos ao longo da história da humanidade e das necessidades dos indivíduos. O RCMS (SALVADOR, 2018b), assim como a BNCC (BRASIL, 2017b), considera que as antigas civilizações trouxeram muitas contribuições para a Aritmética, em especial, para representação numérica. O professor pode apresentar em suas aulas, considerando elementos da História da Matemática, como as representações foram sendo simplificadas de modo que se tornou a representação que a conhecemos “com uma pequena quantidade de símbolos, representar infinitos números e realizar complexas operações” (SALVADOR, 2018b, p. 51).

Essa proposta de integração entre história e matemática pode ser entendida como *condição* (*C*) para que o estudante possa compreender que os números foram construídos ao longo de centenas de anos e que as colaborações de cada civilização proporcionaram as representações dos números e o sistema de numeração utilizados atualmente. Entende-se como *restrição* (*K*) a formação dos professores de pedagogia (professores das séries iniciais do ensino fundamental) que, em muitos casos, tem uma discussão tênue em relação ao processo dos saberes matemáticos (CURI, 2005 e COSTA et al., 2016), portanto não privilegia o trabalho com história da matemática.

Na esfera da *sociedade*, o RCMS (SALVADOR, 2018b) propõe um novo olhar, após a alteração realizada na Lei de Diretrizes e Bases LDB, Lei 9394/96 (BRASIL, 1996)[144] para as crianças no processo de mudanças para a saída da educação infantil e entrada nas séries iniciais do ensino fundamental. Dentre essas mudanças está a matrícula para as séries iniciais a partir dos 6 anos, definido pelas Diretrizes Operacionais para a matrícula no Ensino Fundamental e na EI[145], que complementa a atualização da LDB, ao dar prosseguimento ao percurso educacional dessas crianças.

[144] Essa alteração ocorreu em 2009 e teve prazo final de implantação em 2016. Em 2017, todas as redes de ensino do país passaram a matricular as crianças na educação infantil a partir dos 4 anos. (BRASIL, 1996)
[145] BRASIL. Resolução Nº 6, de 20 de outubro de 2010. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=6886-rceb006-10&category_slug=outubro-2010-pdf&Itemid=30192> . Acesso em: 15 mar. 2019.

Essa resolução é uma *restrição* (K) para o fomento de políticas públicas para evitar a defasagem dos estudantes, por exemplo, ao comparar idade e série. Outro avanço está na incorporação no ensino da diversidade étnico-sócio-racial[146]. Nesse sentido, o referencial curricular faz uma discussão histórica de como a oferta do ensino era desigual de acordo com condição social das crianças.

Sendo assim, o documento, assim como Lessa (2017)[147] evidenciou, mostra que a integração de um ensino no entendimento da diversidade étnico-sócio-racial "faz alusão à riqueza cultural instituídas pelas contribuições das diferentes raças, etnias, gêneros e classes sociais, que também estão atreladas à vida social e à história de diversas culturas oriundas de outras sociedades". Essa discussão pode ser entendida como *condição* (C) para consolidar as diversidades por meio da "adoção de políticas e práticas culturais de reconstrução de múltiplas identidades, de respeito às diferenças, construindo, assim, novas relações e espaços reais e simbólicos de poder" (SALVADOR, 2018, p. 16).

O documento menciona que problemas de naturezas diversas como as diferenças socioeconômicas e culturais, uma *restrição* (K), na sociedade soteropolitana[148] refletindo numa minoria com conhecimentos para sua autonomia[149] (SALVADOR, 2018b, p. 20), mas que esses problemas não podem ser barreiras para o acesso à cultura (*ibid.*). Nesse sentido, as instituições escolares devem promover espaços sociais, *condição* (C), que favorecem a igualdade de direitos de cidadania para superar essa realidade.

O documento também destaca os avanços nas ciências, em especial, no fim do século XIX e ao longo do século XX, marcado por transformações socioculturais, políticas, econômicas e tecnológicas que levaram a um questionamento da organização dos currículos escolares no mundo ocidental (*ibid.*, p. 23), quando "a ciência moderna se consolidou como

---

[146] No documento encontra-se que: "[...] as indígenas, as filhas dos africanos aqui escravizados, as já trazidas como escravas e as filhas da elite oligárquica portuguesa" (SALVADOR, 2018, p. 13). "Já as crianças consideradas da oligarquia brasileira [...]. Tinham professores particulares, muitos deles oriundos da Europa, cujos comentários sobre esses alunos revelam a sociedade escravocrata e patriarcal". (SALVADOR, 2018, p. 13).
[147] Lessa (2017, p. 98) fez essa articulação no nível de co-determinação da *sociedade* abordando as Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos (2013), que a autora chamou de Proposta Curricular (PC).
[148] Indivíduo que é natural ou habitante da cidade de Salvador, na Bahia (Dicionário online). Disponível em: < https://www.google.com.br/search?source=hp&ei=19Q3W__mJ4qGwgSM06SoBw&btnG=Pesquisar&q=soteropolitano&oq=artigos+sobre+did%C3%A1tica+e+sistema+de+numera%C3%A7%C3%A3o&gs_l=psy-ab.3..33i22i29i30k1l6.1170.12521.0.14383.46.34.0.0.0.0.1072.7424.3-3j4j5j1j1.14.0....0...1.1.64.psy-ab..32.14.7422.0..0j35i39k1j0i131k1j0i22i30k1j33i160k1.0.VteiOQyXW_k > Acesso em: 15 mai. 2019.
[149] Saber ler, escrever e realizar as operações básicas da matemática.

referência hegemônica de compreensão do mundo, com resultados interessantes no domínio da natureza, na produção de novos materiais, no desenvolvimento tecnológico, etc." (*Ibid*).

Foi possível evidenciar, como *condição* (*C*), a aproximação dos saberes científicos propostos pelo desenvolvimento técnico-científico da educação fundamental promovendo um currículo, mesmo fragmentado por disciplinas, uma *restrição* (*K*), que fosse contemplado com "base na lógica de estruturação da ciência moderna, isto é, fragmentada e especializada" (*ibid.*). Os avanços nas ciências possibilitaram também desenvolvimento nas ciências da educação, em especial, na didática dos professores e no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, ou seja, uma *condição* (*C*).

Nesse sentido, o documento indica que os professores devem propor situações de aprendizagem para "formar estudantes capazes de raciocinar, analisar, deduzir, criar, resolver situações e buscar estratégias inovadoras" (SALVADOR, 2018b, p. 22) e que promovam os estudantes "para enfrentar o mundo em constante transformação" (*ibid*.). Muito embora o documento em voga tenha chamado atenção para o avanço das discussões acerca da didática do professor, esse avanço dificilmente chega nas escolas, uma *restrição* (K) devido a formação matemática dos professores formados em Pedagogia como indicam Curi (2004, 2005) e Costa *et al*. (2016).

Diante desse contexto, é fundamental e urgente uma reformulação dos currículos de pedagogia que privilegie uma discussão sobre a didática dos professores por especialista em Didática das Ciências.

No campo da *escola*, observamos que o RCMS (SALVADOR, 2018b) está inserido nas formas mais atualizadas de organização curricular, ao agregar esse documento as normas da BNCC (BRASIL, 2017b), como instituição de produção e difusão de conhecimento e de formação de cidadãos. O documento dispõe que a rede de ensino trabalho no modelo de escola ciclada[150], ou seja, por ciclos de aprendizagem entendido como; do 1º a 3º anos corresponde ao ciclo de aprendizagem I, e 0 4º e 5º Anos corresponde ao ciclo de aprendizagem II. Ambos os ciclos devem estar integrados durante o EF.

Assim, o documento refere-se como uma condição (*C*), a proposta curricular flexível que promove um conjunto de valores e práticas que visa a produção, a socialização e que contribuem para a construção de identidades socioculturais dos estudantes por meio do

[150] Escola que trabalho por ciclos de aprendizagem e que propõe um trabalho para os diversos estudantes respeitando o tempo de aprendizagem de cada estudante.

pensamento de um construto sócio histórico, contextualizado, e com a organização de conteúdos, integradas pelas diversas áreas do conhecimento, que favoreçam a cidadania.

Para isso, o RCMS (SALVADOR, 2018b) segue as orientações da resolução CNE/CEB nº 7 (BRASIL, 2010) e da BNCC (BRASIL, 2017b) em que indica que o currículo deve ter uma base nacional comum e uma parte diversificada (BRASIL, 2010, p. 26)) sendo que essa base nacional comum e a parte diversificada devem ser estabelecidas por meio de uma articulação, como *condição* (*C*), entre esses dois blocos considerando as características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da comunidade escolar.

O documento também prever o trabalho interdisciplinar, em especial, no campo da Ciência, como forma de superar a visão fragmentada de produção do conhecimento ao articular as várias áreas do conhecimento juntamente com a realidade local e produzir coerência entre os múltiplos fragmentos por meio da problematização e investigação que respeite a especificidade de cada área e "possibilite o trabalho coletivo que rompa as fronteiras dessas diversas áreas e, que ao mesmo tempo, estão postos no acervo de conhecimentos da humanidade" (SALVADOR, 2018b, p. 25).

Para a efetividade desse trabalho integrado, entende-se como uma *incompletude do trabalho institucional* (*restrição*) tanto a falta de elementos dos professores para o trabalho interdisciplinar, o *vazio didático* (FARIAS, 2010) quanto a organização disciplinar, uma vez que ainda há as disciplinas de áreas diferentes que são ministradas por professores diferentes[151], desse modo, o trabalho integrado é acentuado. Além disso, a disposição dos conteúdos de forma linear, corrobora a *condição* (*C*) apontada, uma vez que falta uma proposta de articulação entre os conhecimentos das diversas áreas do saber, e dos saberes da própria matemática, pois apresentam conteúdos fragmentados e sem correspondência.

No RCMS (SALVADOR, 2018) foi contemplado que os anos iniciais do Ensino Fundamental é articulado por 4 unidades temáticas: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Essa proposta foi retificada pela Secretaria Municipal de Educação ao publicar o documento intitulado A Base Nacional Comum Curricular e a política Nossa Rede (SALVADOR, 2018a): concepções articuladas, que reorganizou os saberes em unidades temáticas e eixos da seguinte forma; Unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, e que englobam os

[151] Na rede municipal, há 4 professores diferentes de acordo com as disciplinas: um professor para as disciplinas de Matemática, Português e Ciências; um para as disciplinas de História, Geografia e Religião; um para Inglês e outro para Música.

seguintes eixos: Números e Operações[152], Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Assim como na análise realizada na BNCC, restringiu-se a unidade temática Números, no eixo Números e Operações.

No RCMS, sua estrutura, no eixo Números e Operações, têm forte influência das teorias da Didática das Ciências[153], em especial, a Teoria das Situações e a Teoria dos Campos Conceituais[154], quando se refere a participação efetiva dos professores no desenvolvimento de práticas didáticas (saber a ensinar) ao “construir problemas socialmente relevantes, cuja solução depende da consulta aos conhecimentos disponíveis nas mais diversas fontes e do desenvolvimento de estratégias de resolução variadas” (SALVADOR, 2018b, p. 24) e a organização dos conceitos, em especial, para as operações básicas. Ambas as propostas devem ter como cerne a aprendizagem do estudante (*saber aprendido*) através da construção de soluções diversas para os problemas com os quais se defrontam em torno do objeto do saber.

No terreno da *Pedagogia*, o documento refere-se a ao ensino e aprendizagem da matemática na escola revelando a “importância da Matemática como uma construção humana e social, que é fundamental para a interpretação da realidade pela modelização e constituição de sistema teóricos” (SALVADOR, 2018). O documento retrata a importância dos elementos teóricos da Didática das Ciências[155], em especial a TSD, desde as propostas de Piaget[156], uma *condição* (*C*) para o processo de construção de conhecimento, uma vez que essa teoria ressignifica[157] o papel do professor em sala de aula ao construir/elaborar situações de aprendizagem reprodutíveis conduzindo à modificação de um conjunto comportamentos dos estudantes (ALMOULOUD, 1997) como “enfrentar o mundo em constante transformação para serem capazes de raciocinar, analisar, deduzir, resolver situações e buscar estratégias inovadoras” (SALVADOR, 2018b, p. 48).

[152] O conteúdo de álgebra foi disposto no eixo Números e Operações.
[153] Possivelmente, essas teorias são utilizadas pelas ideias sobre o trabalho do professor e do estudante em relação ao saber, como defende Patrícia Sadovsky, pesquisadora em Didáticas das Ciências, em especial, na Teoria das Situações Didáticas, orientadora e revisora do referencial curricular analisado.
[154] Teoria desenvolvida por Vergnaud para desenvolver os princípios aditivos e multiplicativos por meio dos conceitos envolvidos nesses princípios. Não vamos abrir essa teoria em nosso trabalho, visto que o foco da nossa pesquisa é analisar as praxeologias pessoais e o gerador de tarefas em AEIs.
[155] Em especial a Teoria das Situações Didáticas (TSD). (BROUSSEAU, 1986).
[156] “O sujeito que aprende necessita construir por si mesmo seus conhecimentos mediante um processo adaptativo similar ao que realizaram os produtores originais dos conhecimentos que se quer ensinar” (RCMS, 2018, p. 49 *apud* PIAGET, 1975),
[157] O professor deixa de ser o único detentor do saber matemático para promover saberes já trabalhador e iniciar o estudante na resolução de problemas, semelhante a um pesquisador, entendendo o problema, criando formas de resolvê-los, validando essas formas de saber formulado. (BROUSSEAU, 1986)

Nesse sentido, aprender e fazer[158] matemática envolve o confronto de ideias, gestão da verdade e validade dos argumentos. Diante dessas propostas, destacou-se a área de resolução de problemas , como *condição* (*C*), área que constitui a Educação Matemática, como forma de propor situações didáticas para o ensino. Encontra-se como *restrição* (*K*), o afastamento do documento das demais áreas da EM, como História da Matemática, Modelagem Matemática, Jogos, Tecnologias e Investigação Matemática, portanto, esta é uma *restrição* (*K*) , pois não há projetos que integrem essas áreas afastando os professores e estudantes de temas fundamentais para a sociedade tecnológica atual.

O documento em evidência salienta as aprendizagens esperadas, específicas e geral, que devem ser iniciadas/desenvolvidas[159], para cada seriado, durante o processo de ensino da matemática nos anos iniciais do EF. O documento não descreve os termos habilidades e competências, mas identifou-se as aprendizagens específicas como habilidades e as aprendizagens gerais como competências, como propõem Zabala e Arnau (2010)[160].

As habilidades e competências para o 5º Ano do EF sobre Números e operações são destacadas no quadro 11, mencionado abaixo:

Quadro 11 - Quadro referente as competências e habilidades no 5º Ano do EF.

5º Ano
Competência Argumentar matematicamente sobre a validade de um procedimento ou o resultado de um cálculo usando relações entre números naturais e racionais e propriedades das operações.
Números e Operações
Habilidades Específicas 1. Explicitar as relações subjacentes a um número natural e racional (formas aditivas e multiplicativas) e utilizá-las para desenvolver **métodos de cálculo** como arredondamento, aproximação e enquadramento.

[158] Esse fazer matemática na instituição escolar é “colocar em jogo ideias, escutar as dos outros, ensaiar e discutir soluções, resolver problemas, aprender a propô-los, buscar dados necessários para a solução, formular e comunicar procedimentos e resultados, argumentar sobre a validade de uma solução, provar o que afirma, propor exemplos e contraexemplos, traduzir de uma linguagem para outra, descobrir demonstrações e interpretar demonstrações feitas por outros” (RCMS, 2018, p. 48).
[159] Não há descrito quando se inicia ou deve ser desenvolver um saber matemático.
[160] Os autores indicam a competência é um conjunto de aprendizagens aplicados à resolução de situações ou problemas reais de componentes atitudinais, procedimentais e conceituais que se mobilizam simultaneamente e inter-relacionados (Zabala e Arnau, 2010, p. 189). Já habilidade seriam componentes das competências, como um conjunto de aprendizagens que servem para obter: procedimentos, estratégias, técnicas, métodos, etc. (ZABALA e ARNAU, 2010, p. 192).

2. Analisar problemas propostos (adição, subtração, multiplicação e divisão), com números naturais e racionais, eleger os dados necessários e usar os recursos pertinentes para a resolução. 3. Realizar diferentes tipos de cálculos (exato, aproximado e mental) apoiando-se em resultados conhecidos e em propriedades do sistema de numeração ou das operações e observando sua adequação à situação proposta. 4. Comparar números racionais, representados na forma decimal ou fracionária entre si e com o inteiro por meio de diferentes procedimentos (relações numéricas, expressões equivalentes, representações gráficas) ampliando o repertório para estabelecer novas relações.

Fonte: RCMS (SALVADOR, 2018, p. 66-67). Adaptado pelo autor.

No quadro 11, há uma abordagem para as Organizações Matemáticas (OM) sobre o posicionamento dos números, operações aritméticas e suas relações no campo dos números naturais e racionais no 5º ano do EF. Apontou-se como *condição* (*C*) para a compreensão dos aspectos posicional e decimal do SND, o trabalho sobre os números e sistemas de numeração, desde a noção de número, a função do número (contar, ordenar e comparar) quanto as representações (oral ou escrita) dos números e sistemas. Assim, o RCMS (SALVADOR, 2018b) indica o trabalho sobre produção de situações que o estudante possa refletir sobre as hipóteses do sistema, o valor posicional dos algarismos e as variações possíveis dessas posições, "colocando em jogo as hipóteses e reformulando-as, esperando que se chegue à compreensão do aspecto posicional do sistema por sucessivas aproximações" (SALVADOR, 2018b, p. 52).

Evidenciou-se também que o documento propõe como ponto de partida do trabalho com o sistema de numeração o uso da numeração oral e escrita em situações que envolvem diferentes funções dos números, sem restrição de tamanho. Aliado a isso, o trabalho sobre as operações básicas com problemas aditivos (adição e subtração), usando as seguintes relações[161]: composição de duas medidas em uma terceira; transformação de uma medida inicial em uma medida final, relação de comparação entre duas medidas, composição de duas transformações, transformação de uma relação, composição de duas relações; e multiplicativos (multiplicação e divisão) por meio de: proporcionalidade, produto de medidas e análise combinatória; com ênfase para a construção do sentido das operações e os procedimentos de cálculo (mental ou

[161] Essas relações apresentadas no documento foram propostas por Verngaud (2009).

escrito) que envolvam números de diversas grandezas, sejam naturais ou racionais e em diversos contextos.

Há diversas *restrições* (*K*) quanto aos significados e *ostensivos* dos números[162], a falta de descrição sobre as representações na reta numérica e não há qualquer relação de integração entre os outros eixos e suas respectivas unidades temáticas: Números e Operações (Álgebra), Espaço e Forma (Geometria), Grandezas e Medidas[163], Tratamento da Informação (Probabilidade e Estatística), o que contradiz as propostas desse documento no nível de co-determinação da *escola*, de uma educação que integre todas as áreas das disciplinas.

Outra proposta elaborada no documento é sobre a forma de avaliação que o professor deve conduzir para o modelo de escola ciclada, visto que o tempo de aprendizagem para cada estudante é flexível, "não é sequencial e nem pode ser linear na medida em que é sempre necessário retomar concepções precedentes para poder transformá-las e cada sujeito tem o seu próprio ritmo para conseguir fazer isso" (PAIS, 2011, p.25). Nesse sentido, observa-se uma *restrição* (*K*) no RCMS (SALVADOR, 2018), já que este propõe que os saberes devem estar vinculados a realidade social do estudante e devem ser desenvolvidos por meio de resolução problemas e com experimentação de manipuláveis em grupos de estudantes. O documento ainda descreve que a aprendizagem deve ser estimada por avaliações (diagnóstica, formativa e final)[164] contínuas e associadas para a promoção da aprendizagem para que o estudante tenha ao final de cada ciclo a continuidade e complexidade crescente dos conteúdos proporcionando a autonomia do estudante. Essa proposta de avaliação é indicada por indicadores (habilidades) que os estudantes devem adquirir para atender a aprendizagem avaliada (competências) visualizada no quadro 12 abaixo.

Quadro 12 - Proposta de avaliação da rede de ensino para os estudantes

<table>
<tr><th colspan="3">5º ANO</th></tr>
<tr><th colspan="2">APRENDIZAGEM AVALIADA</th><th>INDICADORES</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Argumentar matematicamente sobre a validade de um procedimento ou o resultado de um cálculo, usando relações entre números naturais e propriedades das operações.</td><td>- Expõe as próprias estratégias de cálculo na socialização coletiva?
- Troca ideias, debate e posiciona-se frente aos temas discutidos durante as aulas?
- Argumenta e busca exemplos pertinentes para explicar as próprias estratégias ou comentar as estratégias usadas pelos</td></tr>
</table>

[162] Ao escrever apenas números vale ressaltar que estaremos falando sobre números naturais e racionais.
[163] O eixo Grandezas e Medidas possui o mesmo nome para unidades temáticas.
[164] O RCMS (SALVADOR, 2018b) considera a avaliação diagnóstica para compreender os conhecimentos já adquiridos pelos estudantes. A avaliação formativa para obter, sintetizar e interpretar as situações, por meio de tomada de decisões, para modificar e aperfeiçoar a aprendizagem.

		colegas? - Explica como resolveu as operações, a estratégia escolhida e o porquê da escolha? - Comunica e explica os procedimentos de resolução utilizados e os resultados? - Argumenta matematicamente sobre a validade de um procedimento ou o resultado de um cálculo fazendo uso de vocabulário matemático (parcela, fator, produto etc.)? - Analisa a adequação da resposta obtida em relação à situação apresentada? - Busca formas de comprovar a solução dos problemas? - Identifica a ausência ou a pertinência de dados para a resolução de problemas? - Registra, de forma clara e organizada, os cálculos utilizados para a resolução de problemas, explicitando a forma como pensou?
NÚMEROS E OPERAÇÕES		
2	Explicitar as relações subjacentes a um número natural (formas aditivas e multiplicativas) e utilizá-las para desenvolver métodos de cálculo como arredondamento, aproximação e enquadramento.	- Utiliza a informação contida na escrita decimal para desenvolver métodos de cálculo, arredondamento, aproximação e enquadramento para resolver problemas? - Resolve problemas que implicam usar, ler, escrever e comparar números de diversas grandezas? - Resolve problemas que exigem compor e decompor números em forma aditiva e multiplicativa analisando o valor posicional e as relações com a multiplicação e a divisão pela unidade seguida de zeros? - Utiliza a calculadora como ferramenta para compreender as regularidades e regras de numeração decimal? - Interpreta, registra, comunica e compara escritas equivalentes para um mesmo número e argumenta sobre essa equivalência? - Reconhece que um mesmo número pode ser escrito de formas diferentes? - Escreve um número de diferentes formas fazendo uso de escritas aditivas e multiplicativas? - Interpreta escritas equivalentes de um mesmo número?
3	Analisar problemas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números naturais, eleger os dados importantes e usar os recursos pertinentes para sua resolução.	- Lê, interpreta e resolve problemas considerando os dados necessários e recursos pertinentes para sua resolução? - Lê com autonomia o enunciado do problema e identifica os dados necessários para sua resolução? - Identifica a ausência ou a pertinência de dados para a resolução de problemas? - Elabora estratégias pessoais para resolver os problemas? - Resolve problemas do campo aditivo nas situações que envolvem a ideia de composição, de transformação e de estados relativos, identificando os cálculos que podem resolvê-los? - Resolve problemas que envolvem várias operações de adição ou subtração? - Resolve problemas que envolvem multiplicações e divisões (séries proporcionais, organizações retangulares, repartir e partir)? - Resolve problemas de divisão que envolve a análise do resto? - Resolve problemas de vários passos, com as quatro operações e diferentes modos de apresentar a informação? - Reconhece que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações e que uma mesma operação serve para resolver diferentes problemas?
4	Realizar diferentes tipos de cálculos (exato, aproximado e mental) apoiando-se em	- Analisa a pertinência, economia e razoabilidade dos diferentes tipos de cálculo na resolução de problemas propostos?

	resultados conhecidos, em propriedades do sistema de numeração ou das operações, observando sua adequação à situação proposta.	- Elabora estratégias pessoais utilizando cálculo mental com propriedade, agrupamento, decomposição e operações inversas? - Usa as estratégias mais econômicas para resolver os problemas? - Utiliza técnicas operatórias convencionais e calculadora para resolver problemas dos campos aditivo e multiplicativo (com diferentes significados)? - Resolve problemas que implicam analisar as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. - Resolve problemas de divisão em que tem sentido repartir o resto e que se põe em jogo relações entre frações e divisão?
5	Comparar números racionais representa dos na forma decimal ou fracionária entre si e com o inteiro por meio de diferentes procedimentos (relações numéricas, expressões equivalentes e representações gráficas), ampliando o repertório para estabelecer novas relações.	- Estabelece relações entre uma fração e o inteiro? - Estabelece relações entre frações de um mesmo inteiro? - Compara e ordena números racionais positivos (representação fracionária e decimal) relacionando-os a pontos na reta numérica? - Reconhece que, numa unidade dividida em 10 partes iguais, cada parte corresponde a um décimo? - Reconhece que, numa unidade dividida em 100 partes iguais, cada parte corresponde a um centésimo? - Compara números fracionários e porcentagens no contexto diário? - Lê informações apresentadas por meio de porcentagens, divulgadas na mídia e presentes em folhetos comerciais? - Associa as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, respectiva mente, à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro? - Elabora recursos que permitem comparar frações e determinar equivalências? - Resolve problemas que exigem comparar e ordenar expressões decimais? - Usa a organização decimal do sistema métrico para estabelecer relações entre frações decimais em situações de medição que exigem troca de unidades? - Usa a notação com vírgula para representar a posição de décimos e centésimos, com base em frações decimais? - Resolve problemas que envolvem o valor posicional na notação decimal? - Estabelece equivalências entre números fracionários e decimais?

Fonte: RCMS (SALVADOR, 2018, p. 165-167). Adaptado pelo autor.

O quadro 12, assim com o quadro 11

Quadro 11, apresenta que o documento está *restrito* apenas ao saber sobre a temática de Números e operações, visto que esses saberes não estão articulados a outras áreas, apresentando, assim, uma proposta linear e cartesiana. Observou-se também no

Quadro 12 que a quantidade de OMP representa uma *restrição* (*K*) para o trabalho do professor já que conforme as entrevistas ads professoras desses segmentos do ensino elencaram que possuem dificuldades em integrar os saberes matemáticos no SND como propor tarefas de conversões, agrupamento, decomposição e truncamento de números, tradução dos escritos, dentre outros.

Nesse sentido, elaborou-se o quadro 13 com a finalidade de sintetizar e facilitar a visualização das *condições* (*C*) e *restrições* (*K*), por meio dos níveis de codeterminação didática proposta por Chevallard (2002) e Chacón (2008), para o processo de ensino e aprendizagem dos princípios posicionais e decimais do SND no RCMS (SALVADOR, 2018b).

Quadro 13 - Condições e Restrições estabelecidas no OCMS para o SND no 5º ano.

Condições	***Restrições***
▪ A construção histórica dos números possibilita a compreensão das representações e significados dos números; ▪ Políticas públicas consolidam as diversidades propondo a igualdade de direitos e cidadania. ▪ Aproximação dos saberes científicos aos saberes escolares, vinculando os saberes a realidade social do estudante. ▪ Propostas de desenvolvimento cognitivo pela resolução de problemas com situações didáticas de aprendizagem. ▪ proposta curricular flexível.	▪ A formação matemática dos professores formados em Pedagogia não proporciona o trabalho com as áreas da Educação Matemática; ▪ Currículo fragmentado por disciplinas dificultando o trabalho interdisciplinar e integrado; ▪ Privilegia apenas a Resolução de Problemas em detrimento das demais áreas da Educação Matemática. ▪ O documento revelou-se ser uma proposta cartesiana e linear para a temática de Números e operações.

Fonte: o autor[165] (2019).

No quadro 13, a *restrição* (*K*) "A formação matemática dos professores formados em pedagogia não proporciona o trabalho com as áreas da Educação Matemática" foi comprovada durante as entrevistas com as professoras dos segmentos do EF I, que indicaram que a formação

[165] A ideia de construção de um quadro mostrando as principais *condições* e *restrições* foram apresentadas inicialmente por Silva (2017).

matemática em que foram apresentadas não fomentaram uma epistemologia matemática para o ensino do saber matemático nesses seriados.

Em suma, o documento possui algumas lacunas no *saber a ensinar*, que segundo a TTD (CHEVALLARD, JOSHUA, 1991), podem provocar adversidades no processo de ensino e aprendizagem no *saber ensinado*, além de ocasionar outras dificuldades nos ciclos de aprendizagem posteriores nas séries finais do EF.

A seguir, a análise foi continuada, agora, sobre o *saber a ensinar* no livro didático (LD) de matemática para o 5º ano do EF para compreender como o objeto investigado está posto.

5.1.2.4 O Livro Didático

Esta parte do trabalho foi elaborada para revelar como as OMs, que estruturam a razão de ser do SND, estão apresentadas nas ODs dos livros didáticos (LD). Para tanto, adotou-se o modelo tridimensional proposto por Gascón (2003) para analisar os LDs das instituições que participaram dessa pesquisa. Este modelo foi selecionado para essa pesquisa por ser uma ferramenta teórica da TAD, paradigma no qual esta pesquisa se inscreve.

A análise do livro didático é indispensável já que este é uma OD em que o professor sustenta-se para elaboração de sua prática didática. Além disso, o LD é considerado como o recurso mais antigo que professores e estudantes recorrem pra pesquisar e/ou estudar um determinado saber (SILVA, 2017). No ensino público, a instituição que está responsável por avaliar as obras que deverão estar disponíveis nessas instituições escolares é o Plano Nacional do Livro e Material Didático – PNLD (BRASIL, 2017a)[166], programa voltado para atender os estudantes e professores da educação básica pública no Brasil. Por meio do PNLD cada instituição escolar escolhe seus livros[167] de modo que atendam as demandas da comunidade escolar,

Na observação acerca da BNCC (2017) notou-se que os saberes disponíveis nos LDs já estão de acordo com as propostas curriculares nacionais, e isso aproxima o ensino em cada unidade federativa (municipal ou estadual) dirimindo as desigualdades que haviam em um

[166] O PNLD foi ampliado por meio do decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, que unificou as ações de aquisição e distribuição de livros didáticos e literários, ampliando o escopo do plano com aquisição de obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar, entre outros. (BRASIL, decreto nº 9.099, 2017a).

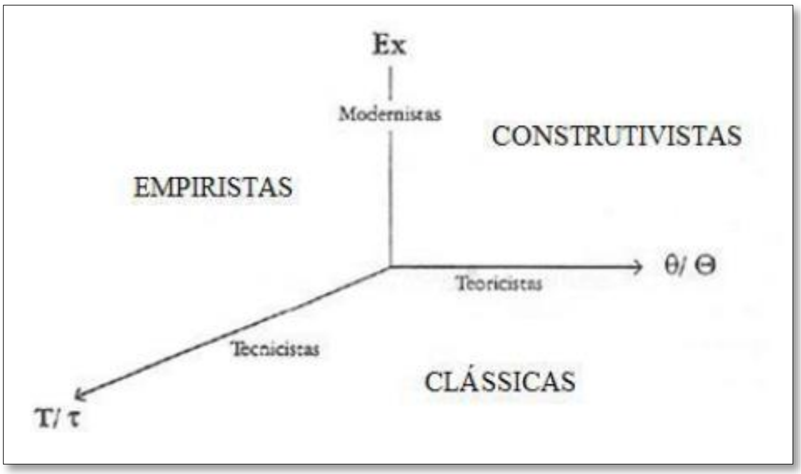
[167] Cada instituição escolar possui autonomia para a escolha de seus livros didáticos. (*ibid.*).

passado não muito distante. Como o LD é recurso mais presente na prática de ensino, esse recurso apresenta *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) para que os aspectos do SND vivam que esse recurso, por meio de uma análise sobre a forma em que os aspectos do SND são apresentados nos LDs de matemática no 5º ano. Diante dessas circunstâncias, essa análise foi iniciada pelo modelo tridimensional (GASCÓN, 2003), e posteriormente, dar seguimento a essa análise confrontando o modelo de análise com as propostas dos LDs em duas fases, visto que as instituições escolares participantes dessa pesquisa lograram obras distintas.

5.1.2.4.1 O modelo tridimensional como lente de análise para os livros didáticos

A escolha desse modelo, além de estar no paradigma da TAD e, por conseguinte, na Didática das Ciências estabelece uma relação entre a epistemologia e a Didática da Matemática (CAMILO, 2007). Nesse contexto, Gascón (2003, 2011) propôs que essa relação entre Didática e epistemologia se caracteriza por meio de três modelos, conforme a figura 19.

Figura 19 - O modelo tridimensional de Gascón



Fonte: (Gascón, 2003, p. 21)

Os principais elementos e suas respectivas relações, desse modelo, foram descritos de forma unidimensional. Nesse sentido, o Modelo Euclidiano ou Clássico é caracterizado pela trivialização do processo de ensino, ou seja, quando se realiza a interpretação do conhecimento matemático. Isso se materializa em dois modelos docentes: o teoricista e tecnicista. O primeiro conduz o ensino por axiomas. Já o segundo, é baseado na utilização das técnicas, ou seja utiliza elementos teóricos para a realização de problemas. Há pontos de convergência que indicam a estagnação do conhecimento, ou seja, é dado como acabado.

Já o Modelo Empirista ou Quase empiristas é caracterizado pela explicação axiomática (conjuntural) da Matemática, de forma que o ensino não está acabado. Isso se materializa em dois modelos docentes: o modernismo e procedimentalismo. O primeiro conduz a atividade matemática pela exploração de problemas não triviais, ou seja, destaca a exploração da atividade. Já o segundo, o é baseado em conjecturas, contrastes, refutações, busca por contra-exemplos, etc. Esse modelo pode ser entendido pela resolução de tarefas apenas pela *práxis* $\left[T,\tau\right]$. E o último modelo é o Construtivista que se materializa nos seguintes modelos docentes: Construtivista Psicológico e o Construtivista Matemático. O primeiro, prescreve a resolução de problemas para construir novos cconhecimenrtos de forma que associar as atividades matemáticas com as dimensões do momento exploratório (θ) e teórico (Θ), ou seja, o *logos* [θ,Θ].

Diante dessas descrições, e das relações desse modelo proposto por Gascón (2003), segue a análise do livro didático.

5.1.2.4.2 O LD da Escola 1

A análise do LD segue para o seguinte livro: A conquista da matemática: de autoria de José Ruy Giovanni Júnior[168]. O LD supracitado também pertence ao PNLD de 2019, ou seja, foi adotado pela escola 2 e será utilizado até 2021. O LD mencionado acima possui 272 páginas e está dividido da seguinte forma: apresentação, "conheça seu livro", sumário, nove capítulos, sugestões de leitura para o aluno e referências bibliograficas. Quanto aos capítulos, estão distribuídos da seguinte forma: 1 – Sistema de Numeração Decimal; 2 – Adição e subtração com números naturais; 3 – Geometria; 4 – Multiplicação e divisão com números naturais; 5 – Números e medidas; 6 – Números expressos na forma de fração; 7 – Números expressos na forma decimal; 8 – Mais sobre Geometria; 9 – Operações com números na forma decimal;

A análise foi realizada no capítulo 1, onde está situado o objeto de investigação desse trabalho, Sistema de Numeração Decimal. Neste capítulo, há 21 páginas destinadas ao estudo do SND.

O LD inicia a apresentação do SND mostrando a importância da posição dos algarismos para formar um número a partir de um contexto (três crianças brincando com um ábaco de 4

[168] Toledo, M. C. BuritiMais Matemática. 5º ano. Ed. 1. São Paulo: Moderna, 2017. p.10-39.

ordens e uma delas questionando como a outra criança acertou os números apenas olhando o material concreto manipulável). Observa-se que há uma tarefa T: escrever[169] um número a partir de uma representação numérica no ábaco. A escrita numérica em qualquer material manipulável será identificada por (ENM). Implicitamente, a decomposição dos números por ordem (disposto no ábaco) promove a ideia de *posição* que cada algarismo foi adotado, conforme a figura 20.

Figura 20 - Tarefa de introdução sobre o SND no livro A conquista da matemática

Fonte: Giovanni Júnior (2017, p. 10-11)

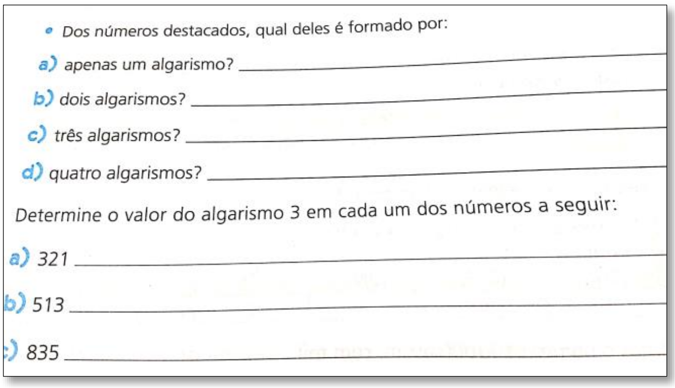
A apresentação do conteúdo é designada por Chevallard (1998a, 1998b) como o *primeiro momento* didático, ou seja, o primeiro encontro com objeto em estudo ou organização matemática. Neste momento, também é apresentado aos estudantes ao menos um tipo de tarefa que integra a praxeologia que seria posicionar um número de acordo com a ordem ou casa decimal em que esse número está localizado.

Em seguinda, o autor propõe um estudo histórico do SND comparando os algarismos entre os anos de 1101 e atualmente. É possível observar que o autor propõe o entendimento da economia de símbolos, ou seja, de que o sistema indu-arábico tornou-se bastante eficiente, pois é um sistema econômico uma vez que utiliza apenas 10 algarismos para representar quaisquer

169 Tipo de tarefas (T) escrever um número ... entende-se pelo ostensivo número.

que sejam os números. Em seguida, o autor propõe mais duas tarefas que considera o princípio posicional, conforme a figura 21.

Figura 21 - Tarefa com o princípio posicional



- Dos números destacados, qual deles é formado por:

a) apenas um algarismo? ________

b) dois algarismos? ________

c) três algarismos? ________

d) quatro algarismos? ________

Determine o valor do algarismo 3 em cada um dos números a seguir:

a) 321 ________

b) 513 ________

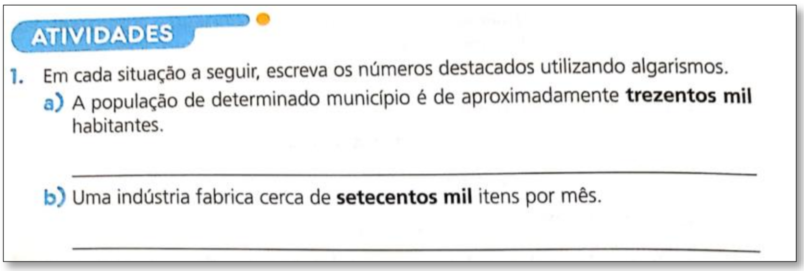
c) 835 ________

Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 8-9)

Com a introdução dessas tarefas inicia-se o momento de elaboração das técnicas para resolver essas tarefas. Esse momento configura-se o *segundo momento* didático (CHEVALLARD, 1998a, 1998b). Na Figura 21, foi possível verificar que as técnicas para resolver o seguinte tipo de tarefas T: identificar a ordem do algarismo corresponde a τ_1: associar cada unidade de número a um nome específico e τ_2: informa o valor de cada algarismo no numeral de acordo com sua posição, iniciando pela direita, de forma que o primeiro posto é o das unidades, o segundo é o das dezenas, etc. Ao utilizar as técnicas (τ_1 e τ_2) foi possível determinar qualquer algarismo em um número ou formar números a partir de qualquer algarismo em diversas posições.

A partir dos tipos de tarefas (T) supracitados, o professor deve implementar a ordem da centena de milhar, ou seja, a sexta ordem. Em seguida, ele deve apresentar número escritos por extenso para que os algarismos desses números sejam transportados para o (QVL), integrado as tarefas de tradução, como pode ser visualizado na figura 22.

Figura 22 - Tarefa sobre as representações dos números.



ATIVIDADES

1. Em cada situação a seguir, escreva os números destacados utilizando algarismos.

a) A população de determinado município é de aproximadamente **trezentos mil** habitantes.

____

b) Uma indústria fabrica cerca de **setecentos mil** itens por mês.

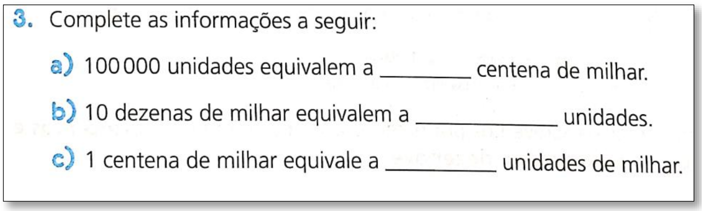
____

Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 17)

É possível verificar, na Figura 22, que há uma quantidade expressiva de *ostensivos* uma vez que é a partir das diveras formas, numérica e escrita, é que as ideias e as noções, os *não-ostensivos*, de número vão emergir nos estudantes.

Já na Figura 23, há um Tipo de tarefas (T): converter os números de ... para ... .Esse tipo de tarefas aborda o aspecto decimal. Uma técnica que pode ser elencadas para responder esse tipo de tarefas consiste em: (τ_1): unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da ordem imediatamente superior. Observe que as ideias das relações entre números e ordem é sólida para o aspecto decimal, assim como solicitado na tarefa da figura 23.

Figura 23 - Tarefa sobre o princípio decimal.



3. Complete as informações a seguir:

a) 100 000 unidades equivalem a ________ centena de milhar.

b) 10 dezenas de milhar equivalem a ____________ unidades.

c) 1 centena de milhar equivale a __________ unidades de milhar.

Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 17)

Apesar de implementar a ordem da centena de milhar com as tarefas das figura 22 e figura 23, a institucionalição da relação entre esses números dar-se-á, após essas tarefas, quando o professor promover o trabalho com Classes e Ordens. A partir disso, os estudantes devem compreender os números com 6 ordens e suas relações. Isso é possível vefificar nas tarefas das figura 24 e figura 25.

Figura 24 - Tarefa sobre o princípio posicional.

Leia a informação a seguir e responda às questões a respeito do número destacado. Uma volta completa em torno da linha do Equador mede, aproximadamente, **40075** quilômetros.

Fonte de pesquisa: Paulo Araújo Duarte. **Dados sobre o planeta Terra**. Planetário UFSC, Florianópolis, 1999. Disponível em: <http://planetario.ufsc.br/dados-sobre-o-planeta/>. Acesso em: 21 nov. 2017.

a) Quantas ordens tem esse número? ____________

b) Quantas classes? ____________

c) Qual é o algarismo que ocupa a ordem das dezenas de milhar? ____________

d) Como escrevemos por extenso esse número?

____

e) Qual é a ordem ocupada pelo algarismo 7?

____

Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 17)

Figura 25 - Tarefa sobre o princípio posicional e decimal.

Decomponha os números e complete as lacunas.

a) 81 398 = 80 000 + ______ + ______ + ______ + 8

81 398 é igual a ___ dezenas de milhar, ___ unidade de milhar, ___ centenas, ___ dezenas e ___ unidades.

b) 217 934 = ______ + ______ + ______ + ______ + ______ + ______

217 934 é igual a ___ centenas de milhar, ___ dezena de milhar, ___ unidades de milhar, ___ centenas, ___ dezenas e ___ unidades.

- Agora, represente esses números no quadro de ordens abaixo:

	Centenas de milhar (CM)	Dezenas de milhar (DM)	Unidades de milhar (UM)	Centenas (C)	Dezenas (D)	Unidades (U)
a)						
b)						

Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 20)

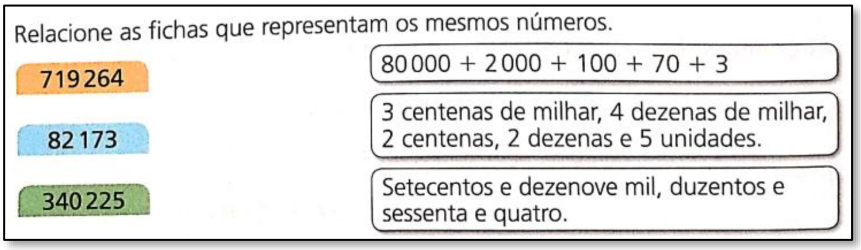
Diante do tipo de tarefas (T) que estão nas

Figura 24 e Figura 25, observou-se que o trabalho do *quarto momento* didático é constituído do trabalho sobre as técnicas a fim de eleger as informações necessárias e econômicas. Por exemplo, para responder o tipo de tarefas T: decompor um número em ..., propiciou o trabalho sobre as seguintes técnicas: (τ_1): Traduzir os números da ENS para a ENPA. (τ_2): Escrever por extenso, ou seja, escrita numérica em língua materna (ENF). Em seguida, (τ_2): Traduzir da escrita numérica em língua materna (ENF) para a escrita numética em tabelas (ENT). Essas técnicas estão alicerçadas em tarefas de tradução (T_{trad}).

Já o *quinto momento didático*, constituído da institucionalização (CHEVALLARD, 1998a, 1998b) deverá prevalecer após a tarefa de composição, com mostra a figura 26.

.

Figura 26 - Tarefa sobre composição dos números usando ambos os princípios do SND



Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 20)

A partir desse momento, o professor deve avaliar a técnicas utilizadas usando nas tarefas de arredondamento e comparação entre números, tarefas instrísecas a matemática. Além disso, deve utilizar tarefas que abordem situações do cotidiano como orientam os documentos curriculares analisados como, por exemplo,a utilização de tecnologias como a calculadora, tratamento da informação, educação financeira e cidadania. Diante disso, elaboramos o quadro 14 para evidenciar esses elementos:

Quadro 14 - Relação de tarefas e técnicas para o SND do LD 2.

BLOCO DA PRÁXIS – Tarefa/Técnicas [T, τ]		**Total**
T_1: Representar um número natural a partir de uma representação numérica no ábaco.	τ_1: Observar a posição de cada número no ábaco e identificar a ordem correspondente.	1
T_2: Determinar o valor de um algarismo em um número naturais.	τ_2: Observar a posição de cada número no ábaco e identificar a ordem correspondente.	2
T_3: Escrever números naturais por extenso a partir da representação numérica	τ_3: Iniciar a escrita dos números obedecendo a ordem da esquerda para a direita.	2
T_4: Completar a sequencia de números	τ_4: Usar como referência uma centena de milhar.	2

naturais usando as centenas de milhar.		
T_5: Decompor os números naturais.	τ_5: Usar a representação de algarismos para cada ordem, ou seja, separar por algarismos; algarismos da centena de milhar, algarismos da dezena de milhar,..., algarismos da unidade.	4
T_6: Compor os números naturais.	τ_6: Usar a representação de algarismos para cada ordem, ou seja, agregar por algarismos; algarismos da centena de milhar, algarismos da dezena de milhar,..., algarismos da unidade.	1
T_7: Arredondar os seguintes números naturais	τ_7: Verificar o sucessor (de acordo como a ordem do número) e o antecessor (de acordo como a ordem do número), e escolher o valor que estiver mais próximo do número desejado.	3
T_8: Comparar os seguintes números naturais	τ_7: Verificar os algarismo de cada ordem, sendo maior o número que tiver o algarismo maior na mesma ordem; para algarismos iguais em diversas ordens, o maior número é o que tiver maior algarismo diferente; para ordens diferentes, o maior número tem maior algarismo na maior ordem.	3
Total de tarefas para o SND		**18**

Fonte: o autor (2020).

O LD apresenta momentos didáticos incompletos, uma vez que o trabalho sobre o logos [θ, Θ], o *terceiro momento* didático, também não aparece trabalho das organizações didáticas para essa ferramenta. No entanto, há uma proposta de trabalho constante sobre a técnica no sentido de eleger a técnica mais econômica e de fácil aprendizagem pelos estudantes. Durante a institucionalização para números com 6 ordens, há momentos de trabalhos para a cidadania do estudante promovendo propostas efetivas sobre o tratamento da informação, educação financeira e utilização da calculadora como ferramenta para axuliar os estudantes na compreensão de ambos os princípios do SND.

5.1.2.4.3 O LD da Escola 2

A análise do LD iniciou-se pelo seguinte livro: Buriti, Mais Matemática: de autoria de Carolina Maria Toledo[170]. O LD supracitado pertence ao PNLD de 2019, ou seja, foi adotado pela escola 1 e será utilizado até 2021. O LD mencionado acima possui 264 páginas e está dividido da seguinte forma: apresentação, "conheça seu livro", sumário, oito capítulos, sugestões de leitura para o aluno e referências bibliograficas. Quanto aos capítulos, estão distribuídos da seguinte forma: 1 – Números Naturais; 2 – As quatro operações; 3 – Geometria; 4 – Mais Operações; 5 – Frações; 6 – Grandezas e medidas; 7 – Números na forma decimal; 8 – Localização.

A análise foi concentrada no Capítulo 1, onde está situado o objeto de investigação desse trabalho, Sistema de Numeração Decimal. Neste capítulo, há 31 páginas destinadas ao estudo do SND.

O LD inicia a apresentação do SND mostrando a importância da posição dos algarismos para formar um número a partir de um contexto (um grupo de crianças brincando em um estádio de futebol observando os valores de arrecadação desse jogo. Há 6 ordens nesse número). Observou-se que há um tipo de tarefas T: posicionar um número, a partir dos *ostensivos* na tela do estádio. Implicitamente, o agrupamento dos números por ordem (disposto no ábaco) promove a ideia do aspecto posicional pelo *ostensivo* adotado, conforme a figura 27.

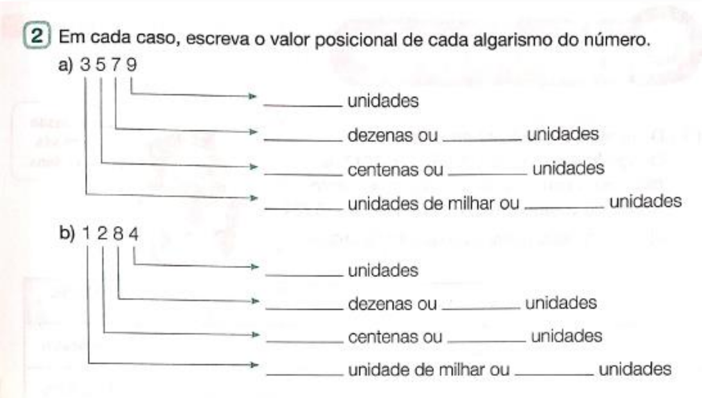
Figura 27 - Tarefa de introdução sobre o SND no livro Buriti, Mais Matemática.

[170] Giovanni Júnior, J. R. A conquista da matemática. 5º ano. Ed. 1. São Paulo: FTD, 2018. p.8-29.

Fonte: Toledo (2018, p. 10-11)

A apresentação do conteúdo é designada por Chevallard (1998a, 1998b) como o 1° *momento de estudo* ou *momento didático,* ou seja, o primeiro encontro com objeto em estudo ou organização matemática. Neste momento, também é apresentado aos estudantes ao menos um tipo de tarefa que integra a praxeologia que seria posicionar um número de acordo com a ordem em que esse número está localizado. Em seguida, a autora propõe um estudo de sequências numéricas comparando os algarismos, usando a ideia de antecessor e sucessor. Por conseguinte, a autora propõe o trabalho sobre a representação dos números naturais articulando com objetos manipuláveis como potes de doces e bolinhas coloridas. Em seguida, há tarefas sobre o valor posicional, conforme a figura 28.

Figura 28 - Tarefa com o princípio posicional


2 Em cada caso, escreva o valor posicional de cada algarismo do número.

a) 3 5 7 9

_____ unidades

_____ dezenas ou _____ unidades

_____ centenas ou _____ unidades

_____ unidades de milhar ou _____ unidades

b) 1 2 8 4

_____ unidades

_____ dezenas ou _____ unidades

_____ centenas ou _____ unidades

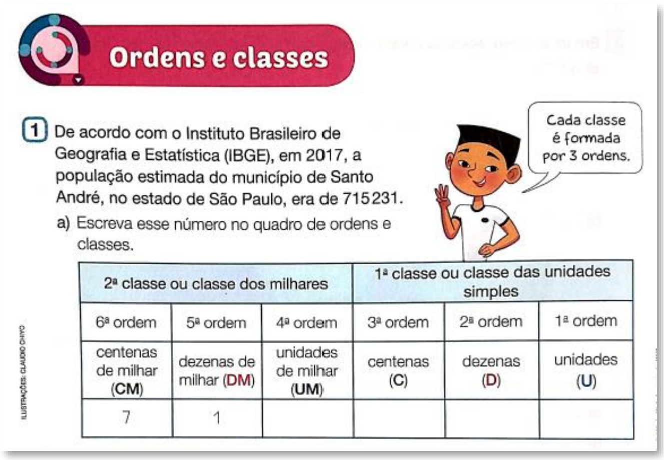
_____ unidade de milhar ou _____ unidades

Fonte: Toledo (2017, p.17)

Com a introdução dessas tarefas inicia-se o momento de elaboração das técnicas para resolver essas tarefas. Esse momento configura-se *segundo momento* didático (CHEVALLARD, 1998a, 1998b). Na Figura 28, o tipo de tarefas T: escrever o valor posicional por meio da escrita numérica composta canônica (ENCC) indica técnicas (τ) de tradução(τ_{Trad}), ou seja, a tradução indica os diversos *ostensivos* para representar a escrita numérica. Por exemplo, o numeral 3 579 pode ser representado, de acordo com a tarefa proposta no livro, de duas formas: a primeira, ENCC: $3U_M$ 5C 7D 9U, já que os numerais nas ordens superiores a unidade deve ser menor que 10. Já a segunda, escrita numérica composta (ENC): 35C 7D 9U ou 357D 9U ou 3579U, já que nessa escrita possibilita as conversões entre os números posicionados, ou seja, o aspecto decimal.

Ao utilizar essa técnica é possível determinar qualquer algarismo em um número ou formar números a partir de qualquer algarismo em diversas posições. A partir dessas tarefas, o professor deve implementar a ordem de centena de milhar, ou seja, a sexta casa decimal. Em seguida, ele deve apresentar número escritos por extenso para que os algarismos desses números sejam transportados para o Quadro Valor Lugar (QVL), passa a ser entendido como escrita numérica em tabelas (ENT), ou seja, transpor os numerais para o QVL, considerando o ambos os aspectos do SND, como pode ser visualizado figura 29.

Figura 29 - Tarefa sobre as representações dos números.



Ordens e classes

1 De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2017, a população estimada do município de Santo André, no estado de São Paulo, era de 715 231.

a) Escreva esse número no quadro de ordens e classes.

Cada classe é formada por 3 ordens.

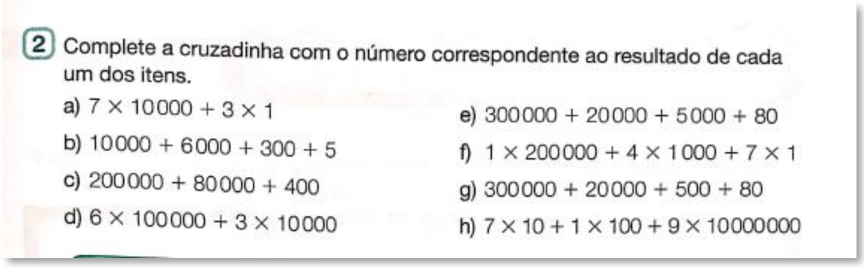
2ª classe ou classe dos milhares			1ª classe ou classe das unidades simples		
6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
centenas de milhar (CM)	dezenas de milhar (DM)	unidades de milhar (UM)	centenas (C)	dezenas (D)	unidades (U)
7	1				

Fonte: Toledo (2017, p.18)

É possível verificar, na figura 29, que há uma quantidade expressiva de *ostensivos* por meio das dessas representações numérica e escrita que emergem de ideias e as noções, os *não-ostensivos*, de números pelos estudantes.

Já na figura 30, há um tipo de tarefas sobre o princípio decimal. Observe que o tipo de tarefas T: escrever os números em potências de dez a tarefa proposto noo LD pode ser utilizado como duas sub-tarefas de T, t_1: escrever os números em potências de dez (ENPD) e t_2: escrever os números em potências de dez aditivas (ENPDA) que são tarefas importantes para a implementação do aspecto decimal.

Figura 30 - Tarefa sobre o princípio decimal.


2 Complete a cruzadinha com o número correspondente ao resultado de cada um dos itens.

a) $7 \times 10000 + 3 \times 1$

b) $10000 + 6000 + 300 + 5$

c) $200000 + 80000 + 400$

d) $6 \times 100000 + 3 \times 10000$

e) $300000 + 20000 + 5000 + 80$

f) $1 \times 200000 + 4 \times 1000 + 7 \times 1$

g) $300000 + 20000 + 500 + 80$

h) $7 \times 10 + 1 \times 100 + 9 \times 10000000$

Fonte: Toledo (2017, p.21)

A escrita em ENPD consiste em posicionar os números por casa decimal, ou seja, potências de dez. Por exemplo, para responder a tarefa *t*: escrever o numeral 4 536 em potência de dez usa-se a seguinte técnica (τ): (4×1000) +(5×100) +(3×10) + 6. Há também outros tipo de tarefas para a escrita em potências de 10, como T: escrever um numeral em potência de dez aditiva canônica e não canônica. Usando o mesmo exemplo anterior, para a primeira escrita têm-se 4 000 + 500 + 30 + 6, já para a segunda, 4 500 + 30 + 6.

Essa passagem pode ser compreendida como o *terceiro momento* didático, em que as ENPD e ENPDA (canônica e não-canônica) promovem o aspecto decimal da numeração. A partir dessas T_{Trad} é possível perceber as tarefas, relativas a conversões entre os número, como as tarefas de truncamento (T_{trunc}) e justaposição (T_{jus}).

Um possível técnica (τ_{trunc}) para responder tipo de tarefas (T_{trunc}) são: primeiro é utilizado para as *conversões quando o número de unidades contidas em várias unidades simples,* ou melhor, a escrita numérica indica o número total de unidades simples, bem como o número de unidades de cada ordem, mas também o número total de unidades de ordens maiores ou iguais a 2, por truncamento. Por exemplo, no número 4 536 há 45 mil (referente a classe dos milhares), uma vez que os milhares são centenas de dezenas ou dezenas de centenas.

Já uma das técnicas (τ_{jus}) para responder tipo de tarefas (T_{jus}) que é realizar as conversões entre unidades por justaposição de zeros, ou seja, a "regra dos zeros" que são utilizadas quando o número das unidades simples podem estar em qualquer número de unidades (TEMPIER, 2013). Por exemplo, 45 000 é igual a 4500 dezenas ou 450 centenas, uma vez que os milhares são centenasde dezenas ou dezenas de centenas.

É nesse contexto que há justificativas para a escolhas das técnicas para a resolução de tipo de tarefas sobre o aspecto decimal.

Apesar de implementar a ordem da centena de milhar com as tarefas das figuras 29 e 30, a institucionalição da relação entre esses números dar-se-á, após essas tarefas, quando o professor promover o trabalho com Classes e Ordens. A partir disso, os estudantes devem compreender os números com 9 ordens e suas relações. Isso é possível verificar nas tarefas das figuras 31 e 32.

Figura 31 - Tarefa sobre o princípio posicional.

1 De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2017 a população brasileira era de 207 660 929 habitantes. Observe o número 207 660 929 no quadro de ordens e classes e faça o que se pede.

3ª classe ou classe dos milhões			2ª classe ou classe dos milhares			1ª classe ou classe das unidades simples		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
centenas de milhão	dezenas de milhão	unidades de milhão	centenas de milhar	dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
2	0	7	6	6	0	9	2	9

a) Complete a decomposição.

207 660 929 = 200 000 000 + 7 000 000 + __________ + __________ +
+ __________ + __________ + __________

b) Qual é a ordem de grandeza de 207 660 929? __________

c) Como lemos esse número? __________

____

Fonte: Toledo (2017, p.30)

Figura 32 - Tarefa sobre o princípio decimal.

3 Componha os números a seguir.

a) 60 000 000 + 3 000 000 + 600 = __________

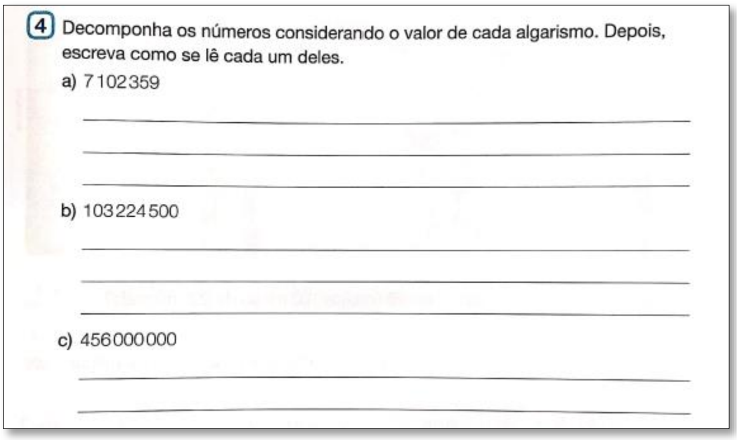
b) 2 000 000 + 175 000 + 45 = __________

c) 500 000 000 + 30 000 000 + 5 000 000 + 247 000 = __________

Fonte: Toledo (2017, p.31)

Diante das tarefas que estão nas figuras 31 e 32, observa-se o trabalho do *quarto momento* didático, constituído do trabalho da técnica para eleger as informações necessárias, e econômicas, ou seja, o que é necessário e o que será dispensado. Já do *quinto momento* didático, constituído da institucionalização (CHEVALLARD, 1998a, 1998b) deverá prevalecer após o tipo de tarefas sobre decomposição, como mostra a figura 33. Para esse tipo de tarefas (T), uma técnica (τ) seria a tradução da escrita numérica simples (ENS) que corresponde ao *ostensivo* do numeral para a ENPDA.

Figura 33 - Tarefa sobre decomposição dos números usando ambos os princípios do SND


4 Decomponha os números considerando o valor de cada algarismo. Depois, escreva como se lê cada um deles.

a) 7 102 359

b) 103 224 500

c) 456 000 000

Fonte: Toledo (2017, p.31)

A partir desse momento o professor deve avaliar a técnicas (τ) utilizadas usando nas tarefas de arredondamento e comparação entre números, tarefas instrísecas a matemática. Além disso, deve-se utilizar tarefas que abordem situações do cotidiano como orientam os documentos curriculares analisados, como uso de tecnologias como a calculadora, tratamento da informação, educação financeira e cidadania. Diante disso, o quadro 15 foi elaborado ao para evidenciar esses elementos:

Quadro 15 - Relação de tarefas e técnicas para o SND do LD 1.

BLOCO DA PRÁXIS – Tarefa/Técnicas [T, τ]		**Total**
T_1: Representar um número natural a partir de uma representação numérica na tela.	τ_1: Observar a posição de cada número no ábaco e identificar a ordem correspondente.	1
T_2: Determinar o valor de um algarismo em um número naturais.	τ_2: Observar a posição de cada número no ábaco e identificar a ordem correspondente.	5
T_3: Escrever números naturais por extenso a partir da representação numérica	τ_3: Iniciar a escrita dos números obedecendo a ordem da esquerda para a direita.	4
T_4: Completar a sequência de números	τ_4: Usar como referência uma centena de milhar.	2

naturais usando as centenas de milhar.		
T_5: Decompor os números naturais.	τ_5: Usar a representação de algarismos para cada ordem, ou seja, separar por algarismos; algarismos da centena de milhar, algarismos da dezena de milhar,..., algarismos da unidade.	3
T_6: Compor os números naturais.	τ_6: Usar a representação de algarismos para cada ordem, ou seja, agregar por algarismos; algarismos da centena de milhar, algarismos da dezena de milhar,..., algarismos da unidade.	1
T_7: Arredondar os seguintes números naturais	τ_7: Verificar o sucessor (de acordo como a ordem do número) e o antecessor (de acordo como a ordem do número), e escolher o valor que estiver mais próximo do número desejado.	4
T_8: Comparar os seguintes números naturais	τ_8: Verificar algarismo de cada ordem, sendo maior o número que tiver o algarismo maior na mesma ordem; para algarismos iguais em diversas ordens, o maior número é o que tiver maior algarismo diferente; para ordens diferentes, o maior número tem maior algarismo na maior ordem.	3
Total de tarefas para o SND		**20**

Fonte: o autor (2020).

Constatou-se que o LD apresenta momentos didáticos incompletos, uma vez que o trabalho sobre o *logos* [θ, Θ], a *terceiro momento* didático, não aparece trabalho das OD para essa ferramenta. Ou seja, o modelo de ensino que prescreve esse livro é o Modelo Euclidiano uma vez que não fornece elementos para a discussão da teoria matemática, muito menos para elaborar atividades que promovam a discussão acerca da razão do saber para resolver determinados tipos de tarefas.

No entanto, há uma proposta de trabalho constante sobre as técnicas (τ) no sentido de eleger um técnica mais econômica e de fácil aprendizagem pelos estudantes. Durante a institucionalização para números com 9 ordens, há momentos de trabalhos para a cidadania do estudante promovendo propostas efetivas sobre o tratamento da informação, educação financeira e utilização da calculadora como ferramenta para auxiliar os estudantes na compreensão de ambos os princípios do SND.

5.1.2.4.4 Síntese da análise dos LDs.

Nesta seção foi apresentada uma discussão acerca das praxeologias apresentadas em ambos os LDs considerando os quadros 14 e 15. As *práxis* [T,τ] descritas nesses quadros, foram estruturadas sob as seguintes Tecnologias(θ):

θ_D (Decimal): As unidades da primeira ordem são escritas na primeira fila, as unidades da segunda ordem são escritas na segunda fila, etc., ou seja, 4 500 representa 45 C ou 450 D .

θ_P (Posicional): Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior, isto é, quinze centenas são iguais a uma unidade de milhar e cinco centenas, ou seja $1 \times 1000 + 5 \times 100 = 1\ 500$.

θ_{CUNC}: contar em unidades numéricas composta (o número da dezena ou da centena), ou seja, 3500 = 35C ou 350D.

θ_{Card}: o último número da palavra representa o número de itens na coleção

$\theta_{NF/ENPA}$: articulação entre a numeração falada e a escrita numérica em potência de dez aditiva.

θ_{Adic}: Definição e propriedade de adição.

θ_{Sub}: Definição e propriedade de subtração (propriedade inversa da adição).

A partir dessas Tecnologias (θ) e das práxis dispostas nos quadros 14 e 15, elaborou-se o quadro 16, que teve com o objetivo comparar as praxeologias apresentadas nos LDs nos quadros supracitados.

Quadro 16 - Comparação das praxeologias observadas nos LDs.

$\wp$ observadas no LD 1		$\wp$ observadas no LD 2	
T_1: Representar um número natural a partir de uma representação numérica no ábaco.	$\tau_{1.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENM → ENS (ENSE)	T_1: Representar um número natural a partir de uma representação numérica no ábaco.	$\tau_{1.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENM → ENS (ENSE)
	$\theta_{1.LD2}$: θ_D, θ_{CUNC} e θ_{Card}.		$\theta_{1.LD2}$: θ_D, θ_{CUNC} e θ_{Card}.
T_2: Determinar o valor de um algarismo nos números naturais.	$\tau_{2.LD2}$: Observar e identificar a ordem correspondente a posição de cada número no ábaco.	T_2: Determinar o valor de um algarismo nos números naturais.	$\tau_{2.LD2}$: Observar e identificar a ordem correspondente a posição de cada número no ábaco.
	$\theta_{2.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.		$\theta_{2.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.
T_3: Escrever números naturais por extenso a partir da representação escrita numérica.	$\tau_{3.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENS→ ENSE.	T_3: Escrever números naturais por extenso a partir da representação escrita numérica.	$\tau_{3.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENS→ ENSE.
	$\theta_{3.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.		$\theta_{3.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.
T_4: Completar a sequencia de números naturais usando as centenas de milhar.	$\tau_{4.LD2}$: Usar como referência uma centena de milhar. $\tau_{4.1.LD2}$: identificar a posição dos algarismos para a ordem da centena de milhar.	T_4: Completar a sequencia de números naturais usando as centenas de milhar.	$\tau_{4.LD2}$: Usar como referência uma centena de milhar. $\tau_{4.1.LD2}$: identificar a posição dos algarismos para a ordem da centena de milhar.
	$\theta_{4.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.		$\theta_{4.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.
T_5: Decompor os números naturais.	$\tau_{5.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENS → ENPA.	T_5: Decompor os números naturais.	$\tau_{5.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENS → ENPA.
	$\theta_{5.LD2}$: $\theta_{NF/ENPA}$ e θ_P.		$\theta_{5.LD2}$: $\theta_{NF/ENPA}$ e θ_P.
T_6: Compor os números naturais.	$\tau_{6.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENPA → ENS.	T_6: Compor os números naturais.	$\tau_{6.LD2}$: Traduzir o ostensivo ENPA → ENS.
	$\theta_{6.LD1}$: $\theta_{NF/ENPA}$ e θ_P.		$\theta_{6.LD1}$: $\theta_{NF/ENPA}$ e θ_P.

T_7: Arredondar os seguintes números naturais.	$\tau_{7.LD2}$: Traduzir o ostensivo da NF→ ENS. $\tau_{7.1.LD2}$: Adicionar uma unidade ao número. $\tau_{7.2.LD2}$: Subtrair uma unidade ao número.	T_7: Arredondar os seguintes números naturais.	$\tau_{7.LD2}$: Traduzir o ostensivo da NF→ ENS. $\tau_{7.1.LD2}$: Adicionar uma unidade ao número. $\tau_{7.2.LD2}$: Subtrair uma unidade ao número.
	$\theta_{7.LD2}$: θ_P, θ_{CUNC}, θ_{Adic} e θ_{Sub}.		$\theta_{7.LD2}$: θ_P, θ_{CUNC}, θ_{Adic} e θ_{Sub}.
T_8: Comparar os seguintes números naturais.	$\tau_{8.LD2}$: Traduzir o ostensivo da ENS→ ENCC. $\tau_{8.1.LD2}$: Verificar a posição de cada algarismo em cada ordem de forma que: - O número que possuir mais ordens á o maior. - Caso os números possuam a mesma ordem, o maior número é o que possui o algarismo maior.	T_8: Comparar os seguintes números naturais.	$\tau_{8.LD2}$: Traduzir o ostensivo da ENS→ ENCC. $\tau_{8.1.LD2}$: Verificar a posição de cada algarismo em cada ordem de forma que: - O número que possuir mais ordens á o maior. - Caso os números possuam a mesma ordem, o maior número é o que possui o algarismo maior.
	$\theta_{8.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.		$\theta_{8.LD2}$: θ_P e θ_{CUNC}.

Fonte: O autor (2020).

A teoria (Θ) que alicerça as praxeologia apresentadas no quadro 16 corresponde a *Aritmética Elementar*. No quadro supracitado, observa-se que a comparação entre as $\wp$ dos LDs, os T são semelhantes com algumas modificações nas tarefas *t* oriundas de T. Nesse sentido, as τ apresentadas no processo de resolução desses T são semelhantes, exceto na T_1, que no LD 1 refere-se a representação numérica indu-arábica a partir das representações numéricas egípcias e romanas. Já no LD 2, a representação numérica indu-arábica emerge a partir das representações no ábaco.

Essas perspectivas evidenciam o uso de diferentes *ostensivos*, para a representação numérica indu-arábica, relativo a questão histórica. Implicitamente, o LD 2 caracteriza-se mais pela utilização do *ostensivo* ENT e ENM, respectivamente, no QVL e ábaco, em especial, para conversões e algumas traduções entre *ostensivos* como, escritas numéricas simples, composta em potências de 10, em tabelas, no material manipulável, por extenso, etc.

Nesse sentido, ambas as obras (LDs) assemelham-se ao *Modelo Euclidiano* ou *Clássico* (GASCÓN, 2003, 2011) uma vez que apresentam a elementos teóricos (parte axiomática) do SND para o 5º ano e, em seguida, é caracterizado pela proposição de tipos de tarefas (e tarefas) que são baseadas em técnicas já acabadas.

Esse recurso, seguido por muitos professores, não apresenta uma proposta de estudo que façam os estudantes refletirem sobre o *saber aprendido* e sua função na sociedade. Portanto, ambos os LDs indicam que o conhecimento está estagnado, ou seja, é dado como acabado e os estudantes apenas visitam o saber, ou seja, o saber está *monumentalizado* (CHEVALLARD, 2012).

5.1.2.5 O plano político pedagógico das unidades escolares

Nesta fase foi apresentada uma análise acerca do Plano Político Pedagógico (PPP) das escolas que participaram dessa pesquisa, Escola Municipal Cônego Emílio Lobo e Escola Municipal Antônio Euzébio. A análise do documento foi realizada apenas da escola 1, pois o PPP da escola 2 estava em processo de reconstrução visto que o documento anterior, escrito manualmente, foi perdido.

5.1.2.5.1 Escola 1

Essa análise contemplou elementos da TAD (Chevallard, 1999), em especial, nos dos níveis de codeterminação didática (Chevallard, 2002) superiores para compreender as *condições* e *restrições* que permitem a existência, ou não, do SND nas instituições, ou seja, elemento da ecologia dos saberes (Chevallard, 2002). Sendo assim, no PPP da 1 não foi possível encontrar elementos[171] que caracterize o nível de codeterminação da *civilização*, uma vez que o documento abrange traços locais, pois atende à demanda do bairro no qual está localizada, e

[171] Implícitos no documento.

comunidades adjacentes[172]. No nível da *sociedade*, a unidade escolar (UE) elaborou este documento para promover mudanças sociais, políticas, econômicas e tecnológicas. Tais mudanças, que foram realizadas, surtiram efeitos ao comparar os resultados obtidos ao longo dos anos nessa unidade. Foi elaborado um comparativo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)[173] entre os resultados da UEs, da rede municipal no município de Salvador, da rede estadual da Bahia e do Brasil, como é possível observar na figura 34.

Figura 34 - IDEB da Escola 1

Fonte: Qedu.org.br. Dados do IDEB/NEP (2017)[174].

É possível observar que a escola deu um grande salto no índice do IDEB em 2013 e 2017, conseguindo inclusive ultrapassar a meta traçada para o ano de 2017. Neste ano, o indicador de fluxo também evoluiu visto que de cada cem alunos apenas um foi reprovado. Em relação a rede municipal de Salvador que teve IDEB de 5,3, menor que a meta prevista de 6,0. Já a rede estadual que oferece as séries iniciais do EF teve IDEB 4,9. E olhando a nível de Brasil, o IDEB foi de 5,5. A escola 1 teve nota superior à média nacional, estadual e

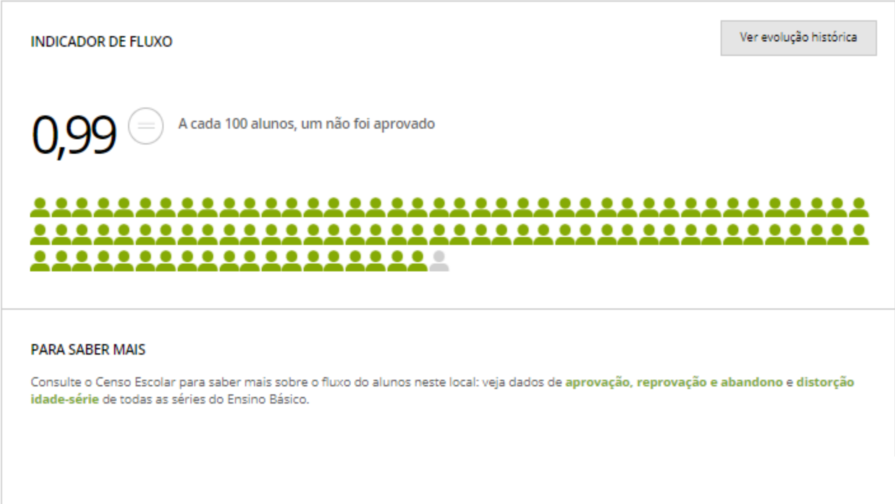
[172] Comunidades que circundam a unidade escolar: Alto do Peru, Alto do Pará, Brejal, Santa Luzia, Baixa do Fiscal, Baixa do Fiscal e San Martim.

[173] O IDEB, criado em 2007, reúne, em um só indicador, os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações. O cálculo do IDEB leva em consideração os seguintes dados: aprovação escolar (via Censo Escolar), médias de desempenho na avaliações da Prova Brasil (para os municípios) do Inep. O IDEB por ser uma ferramenta de avaliação das unidades escolares em toda a unidade nacional é um condutor de política pública visto que o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) para a educação básica é modernizado levando em consideração os resultados apresentados no IDEB. O PDE estabeleceu como meta até 2022 que o IDEB do brasil seja 6,0.

[174] Disponível em: https://www.qedu.org.br/escola/112846-em-conego-emilio-lobo/ideb. Acesso em: 15 jul. 2019

municipal[175], o que foi possível perceber que a escola deve promover um ensino de qualidade. Além disso, verificou-se que o índice de aprovação é muito elevado, com 99%, como mostra o Indicador de fluxo na figura 35.

Figura 35 - Indicador de fluxo, ou seja, nível de aprovação dos estudantes da Escola 1.



Fonte: Dados do IDEB/NEP (2017)[176].

Esse resultado também reflete superioridade a média municipal (83%), estadual (87%) e nacional (93%). Isso evidencia que proposta pedagógica, ofertada pela própria UE que visa combater a evasão, repetência e a infrequência (com o suporte da agente de educação, reuniões com as famílias e visitas ao domicilio do estudante), corrigir distorções idade/série (por meio do programa ACELERA[177]), melhorar a prática pedagógica (uso do Nossa Rede[178] e Aprova Brasil[179]), ampliar os níveis de aproveitamento dos alunos por meio de intervenções didáticas propostas por situações de aprendizagem que promova aos estudantes momentos de reflexões e questionamentos acerca da realidade.

[175] Fizemos esse comparativo em relação as medias das unidades escolares públicas que oferecem as séries iniciais do Ensino Fundamental nas redes de ensino municipal, estadual e a nível nacional.
[176] Qedu.org.br (Disponível em: https://www.qedu.org.br/escola/112846-em-conego-emilio-lobo/ideb. Acesso em: 15 jul. 2019)
[177] É a 2ª etapa do Programa Regularização de Fluxo, que tem por objetivo corrigir distorções idade/série para estudantes já alfabetizados.
[178] O Nossa Rede é uma ação pioneira na educação pública brasileira que visa melhorar a qualidade da educação pública municipal e tem por objetivos a elaboração das novas diretrizes curriculares do Ensino Fundamental I, com foco na participação e criação colaborativa, a elaboração do novo material pedagógico dentro de uma visão de respeito aos valores das identidades culturais de Salvador e suas peculiaridades. (Disponível em: http://educacao.salvador.ba.gov.br/programa-projeto/nossa-rede/. Acesso em 15 jul. 2019).
[179] Projeto criado em 2005 e que contempla uma base formativa para que os professores trabalhem em sala de aula os conteúdos que serão aplicados nas avaliações do SAEB.

O indicador de aprendizagem referente ao ano letivo de 2017 mostra que os estudantes apresentaram média de 216,58 pontos em matemática (corresponde ao nível 4), como pode ser indicado pela figura 36.

Figura 36 - Indicador de proficiência em Matemática dos estudantes da Escola 1.

Fonte: Dados do IDEB/NEP (2017)[180].

A nota correspondente a matemática apresentou um nível de proficiência abaixo do esperado, segundo a proposta nacional. Ainda assim, os resultados são animadores visto que a média na rede municipal foi de 212,72 pontos em matemática (nível 4), na rede estadual foi 202,19 (nível 4), e a média nacional foi de 218,59 (nível 4). A proficiência em matemática da UE é inferior a apenas a média nacional superando a média da rede municipal de Salvador e da rede estadual. Nesse sentido, a nível local e regional, a escola 1 apresenta certo destaque em relação ao ensino e a aprendizagem pelos estudantes. Esses resultados representam *condição* (*C*) para o avanço no ensino da matemática na perspectiva da promoção social dos estudantes. Uma *restrição* (*K*) para esse avanço são as condições físicas e materiais disponibilizadas pela UE com salas pequenas (para a quantidade de estudantes cursistas), falta de materiais concretos manipuláveis e tecnológicos (jogos, calculadoras, computadores, tablets, etc.) para promover o estudante a sociedade contemporânea. No âmbito da *pedagogia*, não há qualquer elemento que faça o objeto SND sobreviver, pois no documento não há qualquer forma de apresentação e

[180] Qedu.org.br. (Disponível em: https://www.qedu.org.br/escola/112846-em-conego-emilio-lobo/ideb. Acesso em: 15 jul. 2019)

desenvolvimento de qualquer conteúdo de todas as disciplinas. Entendemos que essa é uma imensa restrição a sobrevivência desse saber nessa UE.

5.1.2.5.2 Escola 2

Não tivemos acesso ao Plano Político Pedagógico da Unidade escolar. Portanto, não foi possível efetivar essa análise. Isso foi bastante preocupante visto que o modelo de formação pretendida pela sociedade, por meio dos documentos oficiais supracitados, não foram contemplados pela unidade escolar uma vez que não há uma direção para o trabalho dos gestores, coordenadores, professores e as relações entre eles com os estudantes.

5.1.2.6 O plano do trimestre do professor

O plano elaborado pelo professor visa contemplar os saberes que devem ser trabalhados ao longo do trimestre. Nesse plano devem estar descritos a forma e o desenvolvimento das abordagens dos saberes que serão trabalhados pelo professores, de acordo com os documentos curriculares como a BNCC (BRASIL, 2017), a OCEB (2013) e a OCMS (SALVADOR, 2018). Nesse plano deve conter além dos saberes, metodologia, recursos, habilidades e competências e avaliação.

5.1.2.6.1 Escola 1

A análise foi iniciada pelo do plano trimestral da professora da escola 1 a partir dos saberes contemplados na figura 37.

.

Figura 37 - Plano do primeiro trimestre do 5º ano da Escola 1

HABILIDADES	CONTEÚDOS	METODOLOGIA	RECURSOS	AVALIAÇÃO
NÚMEROS E OPERAÇÕES • Compor e decompor números naturais e racionais na forma decimal. • Reconhecer ordens e classes numa escrita numérica. • Ordenar números naturais e racionais na forma decimal conforme a escala sugerida. • Escrever números naturais e racionais na forma decimal, compreendidos entre uma faixa dada. • Citar o antecessor e sucessor de um número natural e racional na forma decimal. • Efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões utilizando as técnicas operatórias com números naturais. • Resolver situações-problema que envolva as ideias de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais • Formular problema a partir de uma operação dada. • Identificar os divisores e múltiplos de um número natural. • Efetuar divisão com dois algarismos no divisor. • Calcular a fração de uma quantidade. • Representar com fração uma quantidade igual, maior ou menor que o inteiro. **ESPAÇO E FORMA** • Compor e decompor figura geométricas planas. • Construir maquetes. • Inserir pessoas ou objetos num resgistro do espaço atendendo às ordens de "à direita", "à esquerda", "em direção contrária". • Inferir sobre a diferença existente entre poliedros (sólidos formados por superfícies planas) e corpos redondos (superfícies arredondadas). **GRANDEZAS E MEDIDAS** • Empregar as diferentes unidades padronizadas de medida de massa. • Identificar a unidade de massa mais adequada para o que se quer medir. • Relacionar unidades de medida de massa, de uma mesma grandeza. • Proceder conversões no sistema de medida de massa. • Resolver situação-problema que envolva o conceito de medida de massa.	• Sistema de numeração decimal e fracionário. • Resolução de problemas com ideia das quatros operações com números naturais. • Elaborar situação-problema. • Figuras geométricas planas (polígonos, triângulos, quadriláteros). • Ponto, reta e segmento de reta. • Ampliações de polígonos. • Classificação de polígonos. • Maquetes. • Lateralidade. • Medida de Massa. • Medida de comprimento. • Resolução de situação-problema envolvendo medidas. • Tabelas e gráficos. • Divisores e múltiplos de um número. • Divisão com dois algarismos no divisor. • Representação de fração. • Resolução de situação problema envolvendo frações. • Poliedro / corpo redondo. • Resolução de situação-problema envolvendo medidas	Trabalhar com a capacidade de observação e representação despertando o interesse e promovendo estratégias com atividades interdisciplinares variadas.	• Livro didático; • Quadro branco, apagador e piloto; • Atividades xerocadas, cartazes; • Relógio • DVDs, fichas, jogos, brincadeiras; Dinâmicas; • Material dourado.	Os alunos serão avaliados através das observações realizadas no decorrer das aulas.

Fonte: o autor (2020)

Observou-se no primeiro trimestre que a professora enfatizou o trabalho do SND com observações e representações. Ambas são *condição* (*C*) para permitir os estudantes a reconheçam as ordens e classes nos ostensivos, escritas numéricas. Vale ressaltar que não está descrito no documento, mas o trabalho nesse seriado permitem até 5 ordens, ou seja, números até a centena de milhar. O outro saber (conteúdo) que foi descrito é sistema de numeração racional, identificado pela professora como fracionário. Os números desse sistema podem ser representados na forma decimal quanto na forma de fração. Como não há uma descrição de como esses saberes devem materializa-se em conhecimento para os estudantes, esse plano é uma *restrição* (*K*) para o desenvolvimento do SND, em especial, no aspecto decimal.

5.1.2.6.2 Escola 2

A análise do plano trimestral da professora da escola 2 a partir dos saberes que contemplados na figura 38.

Figura 38 - Plano do primeiro trimestre do 5º ano da Escola 2

Objetivos Específicos/Habilidades	Conteúdo	Situação Didática	Recursos	Avaliação
HABILIDADES ESPERADAS DOS MARCOS DE APRENDIZAGEM:	• Números Naturais Números e algarismos Sequência numérica Ordem crescente e decrescente Números pares e ímpares Conjunto dos números naturais Números romanos Números ordinais • Sistema de numeração decimal Ordem e classes, Quadro Valor de Lugar (QVL) Leitura e escrita de numerais Valor absoluto e relativo (posicional) Arredondamento de numerais • Operações com números naturais Adição: termos e propriedades Subtração: termos e propriedades Expressões numéricas (adição e subtração) Expressões numéricas: uso de parênteses Operações inversas e termo oculto Situações-problema	Propor atividades que permitam a formulação e resolução de problemas envolvendo o sistema de numeração decimal, utilizando procedimentos de cálculo escrito e mental, com base na compreensão das técnicas operatórias adequadas. Identificar, utilizando estratégias diversas (QVL, decomposição, contagem) o valor absoluto e posicional dos numerais, objetivando sua grafia correta, quantificação dos valores e ordenação. Promover a resolução de expressões numéricas, ratificando suas regras. Expor a história dos números e identificar o uso atual dos sistemas antigos, como os romanos; e de objetivo diferenciado, como os ordinais. Propiciar meios que possibilitem ao aluno o entendimento sobre os sistemas de medidas existentes e utilizados cotidianamente, diferenciando-os. Propor atividades (cálculos e situações-problemas) envolvendo operações inversas. Promover a identificação, a construção e a análise de gráficos e tabelas. Propor a resolução de exercícios no livro didático, atividades xerocopiadas e no caderno. Utilizar estratégias de ensino abaixo: • Aula expositiva • Dinâmicas e jogos	Cartazes, livro didático, material dourado, ábaco, internet, calculadora, pesquisas, trabalhos individuais e em grupo, instrumentos de medição, quadro de valor, atividades xerocopiadas	Será continua levando em consideração a pontualidade, frequência, participação em sala de aula, realização de atividades, trabalhos e avaliação individual e em grupo por período.

Fonte: o autor (2020)

Observou-se no primeiro trimestre que a professora iniciou o trabalho acerca da história dos números e sua importância para a atualidade, indicando os sistemas de numeração existentes e os motivos pelos quais a escolha do sistema de base 10. Há também a indicação de materiais manipuláveis *condição* (*C*) como recurso para desenvolver os saberes matemáticos. O plano também apresenta os seguintes saberes: Identificar, utilizando estratégias diversas (QVL, decomposição, contagem) o valor absoluto e posicional dos numerais, objetivando sua grafia correta, quantificação dos valores e ordenação.

No plano foi possível supor, articulado com o LD (escola 2), que os tipos de exercícios acerca das Traduções, por exemplo, $T_{Trad.ENS}$, $T_{Trad.ENC}$, para a escrita numérica, a $T_{Trad.ENT}$ para a escrita numérica por meio de tabelas (QVL),e a cerca das Conversões como $T_{Conv. /ENPD}$ ou $T_{Conv./ENPAC}$., que indicam conversões numéricas para as escritas numéricas: em potências de dez e potências de dez aditiva canônica. Esses tipos de exercícios possibilitaram o acesso as tarefas acerca da contagem, como T_C: Contar uma coleção de números.

Esses elementos supracitados podem ser compreendidos como *condição* (*C*) para o trabalho do aspecto posicional. Não foi possível afirmar que mesmo com os possíveis tipos de tarefas descrito que os estudantes possam compreender o θ_P. Mas não foram encontramos elementos para o trabalho do aspecto decimal *restrição* (K). Nesse sentido, o ensino de matemática que utiliza como referencial esse plano, possivelmente, não fará a integração entre o aspecto decimal com o posicional.

5.1.2.7 O caderno dos estudantes

A partir deste tópico, inicia-se a *observação de classe interna* (COMITI e FARIAS, 2019), denominada *crônica de classe*, utilizada nesta etapa da investigação. Essas crônicas são formadas pelos manuscritos realizados durante a observação e pela da gravação de áudios e imagens. Esses dados foram produzidos considerando as escolhas metodológicas diante da questão Q_2: Como analisar as condições e restrições das tarefas do SND?

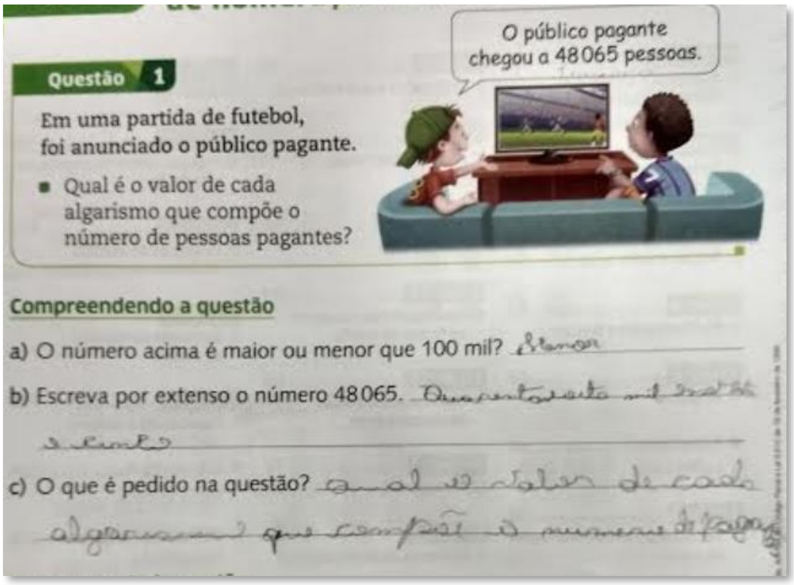
Outro elemento que constituiu a *observação de classe interna* foram as entrevistas realizadas com as professoras dos 5 segmentos dos anos iniciais do EF nas escolas participantes. Essas entrevistas foram implementadas diante da necessidade de compreender a relação dessas professoras com o objeto, $R_P(Y,O)$, a epistemologia do SND e as concepções de aprendizagem sobre o objeto. Diante disso, as entrevistas foram semi-estruturadas, pois dessa forma, foi possível considerar afirmações e questões sobre esse saber.

Ao analisar os documentos, o LD e o plano do professor, evidenciou-se que os planos trimestrais, elaborado pelas professoras, estavam parcialmente integrado aos documentos mencionados, uma vez que há uma série de elementos descritivos que são recomendados para o trabalho em sala de aula que não estavam presentes no plano e, consequentemente, não vão ser apontados em sala de aula. Portanto, a relação entre professor, documentos curriculares oficiais e LD foram verificadas nas análise anteriores.

Já na relação entre professor-estudante e estudante-material didático, observou-se que o plano do trimestre elaborado pelo professor, segundo os documentos oficiais, não forneceu os conhecimentos aos estudantes que são esperados pelos próprios documentos oficiais. Diante disso, algumas dificuldades que os estudantes apresentaram nas tarefas que foram trabalhadas com base nos princípios decimal e posicional do SND foram selecionadas. Para tanto, o estudante número 8 da Escola 1, que na PP é representado por x_{1_8}, por estar presente em todas as aulas, durante a *observação de classe interna* e *externa*, e apresentou todas as tarefas resolvidas. A obra utilizada foi o módulo elaborado pela eecretaria de educação do município de Salvador, intitulada “Salvador Aprova”, que foi utilizada em ambas as unidades escolares.

A primeira atividade selecionada, na figura 39, foi sobre o valor de cada algarismo e a posição de cada algarismo por ordem dos números.

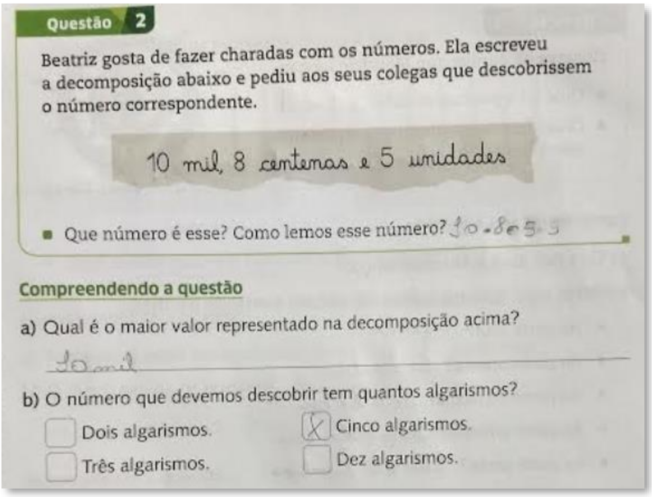
Figura 39 - A interpretação entre os ostensivos numéricos e escrito (por extenso) (x_{1_8}).



Fonte: o autor (2019).

Observou-se a dificuldade apresentada por esse estudante ao transpor as representações. A compreensão desses *ostensivos* emergiram os conceitos e propriedades matemáticas sobre o aspecto posicional dos números. Além disso, foi constatada a dificuldade com a variação de *ostensivos*. Consequentemente, o estudante tem dificuldade na mobilização de *não-ostensivos* já que não consegue evocar os saberes desenvolvidos para a escrita numérica simples por extenso (ENSE). Essa descrição pode ser visualizada na figura 40. Nesta imagem, observou-se que o estudante têm dificuldades em relação aos ostensivos, pois não consegue relacionar os *ostensivos* para tarefas de tradução entre a escrita numérica da ENS para ENSE ($T_{trad.ENS/ENSE}$), ou seja, as diferentes formas de representações numéricas.

Figura 40 - Tarefa para composição de números a partir da ENCC pelo estudante (x_{1_8})



Questão 2

Beatriz gosta de fazer charadas com os números. Ela escreveu a decomposição abaixo e pediu aos seus colegas que descobrissem o número correspondente.

10 mil, 8 centenas e 5 unidades

■ Que número é esse? Como lemos esse número? 10.805

Compreendendo a questão

a) Qual é o maior valor representado na decomposição acima?

10 mil

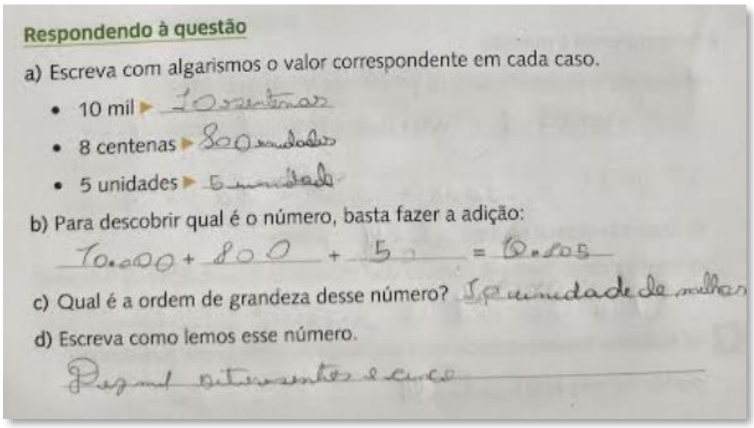
b) O número que devemos descobrir tem quantos algarismos?

- [ ] Dois algarismos.
- [ ] Três algarismos.
- [x] Cinco algarismos.
- [ ] Dez algarismos.

Fonte: O autor (2020).

Ainda assim, constatou-se que o *ostensivo* para tarefas de tradução entre a escrita numérica da ENF para ENS ($T_{trad.ENF/ENS}$), não foi desenvolvido, já que o estudante não compreende que 10 mil é representado por 10 000, conforme a figura 41. Além disso, o estudante também não compreendeu o significado da ordem do número, ou seja, a posição em que cada algarismo deve estar localizado.

Figura 41 - Tarefa com ostensivo associado, da T_{trunc} para composição e ordem de (x_{1_8})



Respondendo à questão

a) Escreva com algarismos o valor correspondente em cada caso.

- 10 mil ▸ 10 centenas
- 8 centenas ▸ 800 unidades
- 5 unidades ▸ 5 unidade

b) Para descobrir qual é o número, basta fazer a adição:

10.000 + 800 + 5 = 10.805

c) Qual é a ordem de grandeza desse número? 1ª unidade de milhar

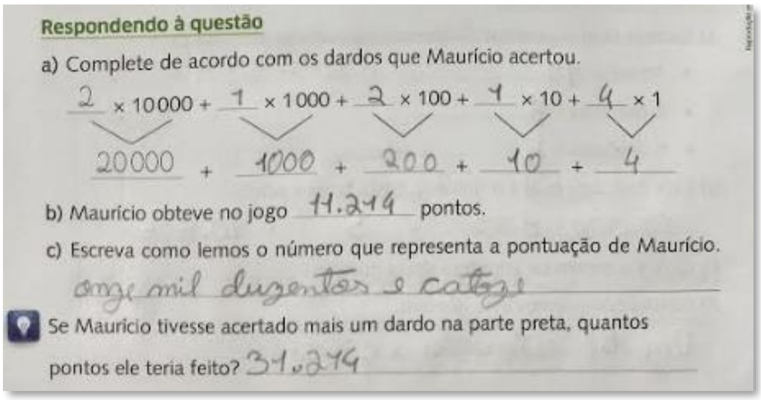
d) Escreva como lemos esse número.

Dez mil oitocentos e cinco

Fonte:o autor (2020).

Na tarefa seguinte, na figura 42, percebeu-se que tarefas de composição de números usando a operação aditiva, para números com quantidade de algarismo crescentes de um a cinco algarismo.

Figura 42 - Tarefa com composição de algarismos. (x_{1_8})



Respondendo à questão

a) Complete de acordo com os dardos que Maurício acertou.

2 × 10000 + 1 × 1000 + 2 × 100 + 1 × 10 + 4 × 1

20000 + 1000 + 200 + 10 + 4

b) Maurício obteve no jogo 11.214 pontos.

c) Escreva como lemos o número que representa a pontuação de Maurício.

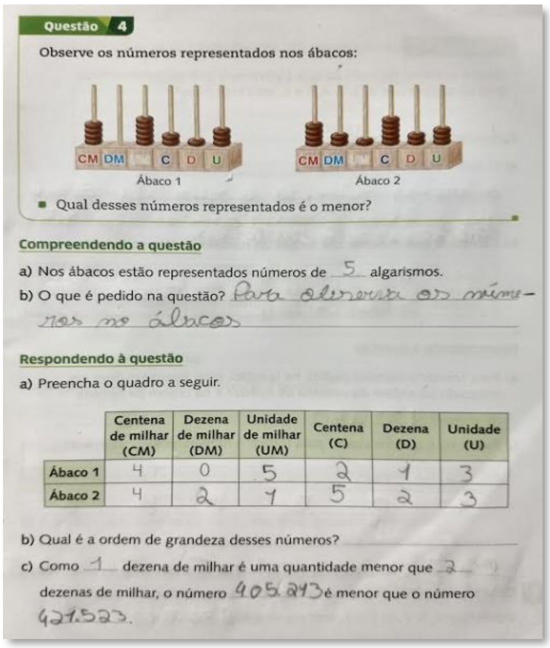
onze mil duzentos e catoze

Se Maurício tivesse acertado mais um dardo na parte preta, quantos pontos ele teria feito? 31.214

Fonte: o autor (2020).

Já na figura 43, há dois ábacos com 6 ordens, ou seja, até a centena de milhar. Na tarefa que solicitou a quantidade de algarismos nos ábacos, verificou-se que o estudante tem dificuldades em compreender a função do zero no SND, uma vez que, no ábaco 1 a ordem da dezena de milhar não está representada por algarismos. Além disso, o estudante tem dificuldade na compreensão da ordem dos números representados no ábaco. Possivelmente, esse estudante têm dificuldades em cálculo mental e operações com quantidade de algarismos diferentes.

Figura 43 - *Ostensivos* dos números no ábaco. (x_{1_8})



Questão 4

Observe os números representados nos ábacos:

CM DM UM C D U — Ábaco 1

CM DM UM C D U — Ábaco 2

Qual desses números representados é o menor?

Compreendendo a questão

a) Nos ábacos estão representados números de 5 algarismos.

b) O que é pedido na questão? Para observa os núme-ros no ábacos

Respondendo à questão

a) Preencha o quadro a seguir.

	Centena de milhar (CM)	Dezena de milhar (DM)	Unidade de milhar (UM)	Centena (C)	Dezena (D)	Unidade (U)
Ábaco 1	4	0	5	2	1	3
Ábaco 2	4	2	1	5	2	3

b) Qual é a ordem de grandeza desses números?

c) Como 1 dezena de milhar é uma quantidade menor que 2 dezenas de milhar, o número 405.213 é menor que o número 421.523.

Fonte: O autor (2020).

Esta análise concebeu que os estudantes têm dificuldades na variação de *ostensivos*, tanto na forma numérica quanto na escrita, em especial, por extenso. Essa dificuldade foi transposta para a ordem de um número e a posição que cada algarismo têm em um número. Também foi possível perceber as dificuldades em relação ao princípio decimal, em que o estudante não compreende as relações decimais entre as ordens do SND.

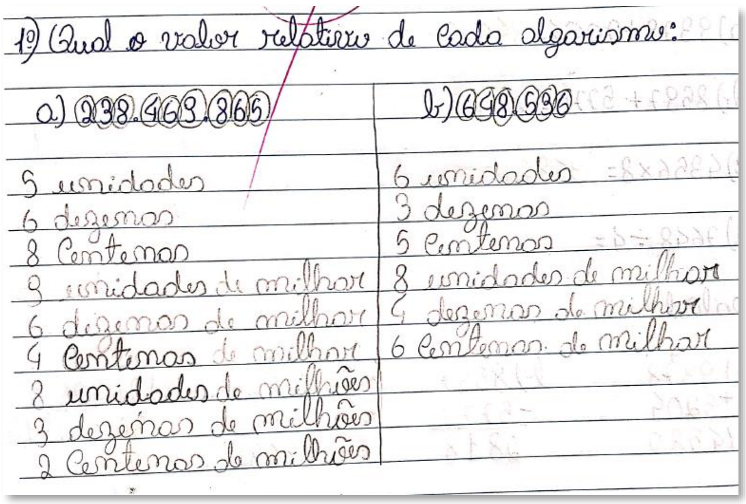
Nesse contexto, a análise seguiu para os cadernos dos estudantes das unidades escolares participantes dessa investigação, iniciada pela escola 1.

5.1.2.7.1 Escola 1

Durante o período de *observação de classe* na escola 1, os estudantes selecionados foram x_{1_8} e x_{1_9}, visto que esses estudantes estiveram presentes e realizaram todas as atividades propostas por Y_1[181] durante o processo de observação.

Sendo assim, as atividades propostas para os estudantes do 5º ano dessa escola iniciou-se com a atividade 1, conforme a figura 44.

Figura 44 - Atividade 1, proposta pela professora Y_1, respondida pelo estudante x_{1_8}.

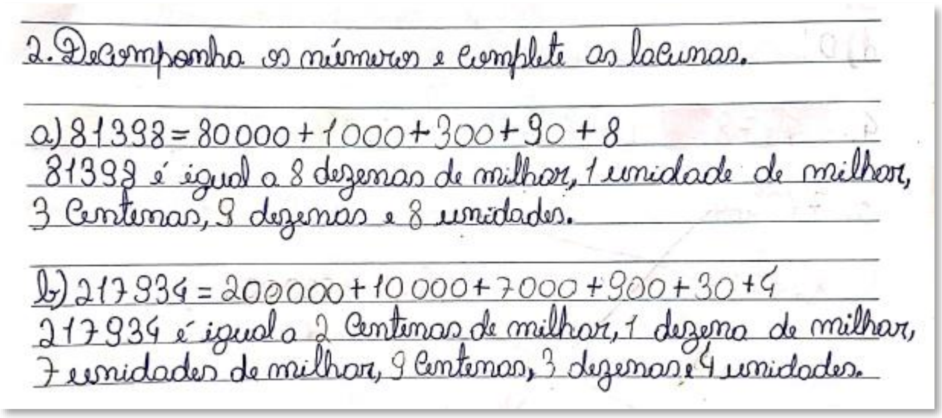


Fonte: Dados do caderno do estudante x_{1_8} da escola 1 (2020)

[181] A partir desse momento, os símbolos do sistema herbatiano e das praxeologias serão adotadas para a análise das atividades.

A tarefa proposta por Y_1 foi realizada para promover a compreensão da classe X acerca da posição dos algarismos e suas respectivas ordens. Uma t que contemplou essa atividade foi: Identificar a ordem de cada algarismo no seguinte número. A técnica ($\tau_{ENS/NF}$) empregada refere-se a relação entre a escrita numérica simples e a numeração falada. Já a tecnologia (θ_P) corresponde ao aspecto posicional já que cada ordem é ocupada por um algarismo menor que 9. Já a tarefa 2, foi proposta pela decomposição dos números, conforme a figura 45.

Figura 45 - Tarefa de decomposição dos números.


2. Decomponha os números e complete as lacunas.

a) 81398 = 80000 + 1000 + 300 + 90 + 8
81398 é igual a 8 dezenas de milhar, 1 unidade de milhar, 3 Centenas, 9 dezenas e 8 unidades.

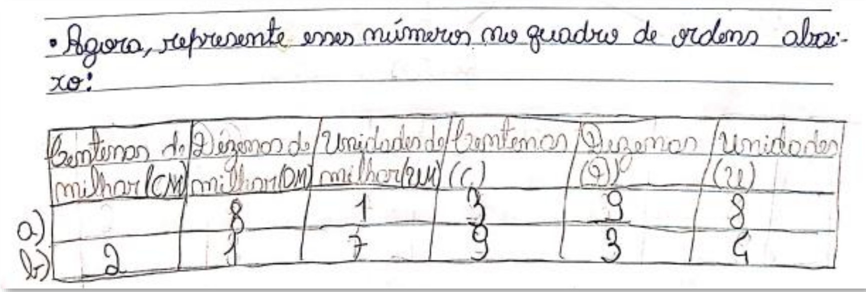
b) 217934 = 200000 + 10 000 + 7000 + 900 + 30 + 4
217934 é igual a 2 Centenas de milhar, 1 dezena de milhar, 7 unidades de milhar, 9 Centenas, 3 dezenas e 4 unidades.

Fonte: Dados do caderno do estudante x_{1_8} da escola 1 (2020)

Ambas as tarefas respondidas pelos estudantes x_{1_8} e x_{1_9} usam a técnica (τ): tradução da ENS para a ENCC ($\tau_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$). Esta técnica ($\tau_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$) foi justificada por pela tecnologia (θ_P). Já a $\tau_{\text{Trad.ENS/ENPAC}}$ é assegurada pela θ_P e $\theta_{\text{Trad.ENS/ENPA}}$.

Já a tarefa t_3, foi descrita da seguinte forma: traduzir da escrita numérica simples para a escrita numérica em tabelas ($T_{\text{Trad.ENS/ENT}}$), conforme a figura 46. Após as *práxis* levantadas para responder a tarefa t_2, integrou as seguintes praxeologias pessoais dos estudantes x_{1_8} e x_{1_9}: $\tau_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$ que é justificada por θ_P e $\theta_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$; $\tau_{\text{Trad.ENCC/ENT}}$ que é assegurada por θ_P e $\theta_{\text{Trad.ENCC/ENT}}$.

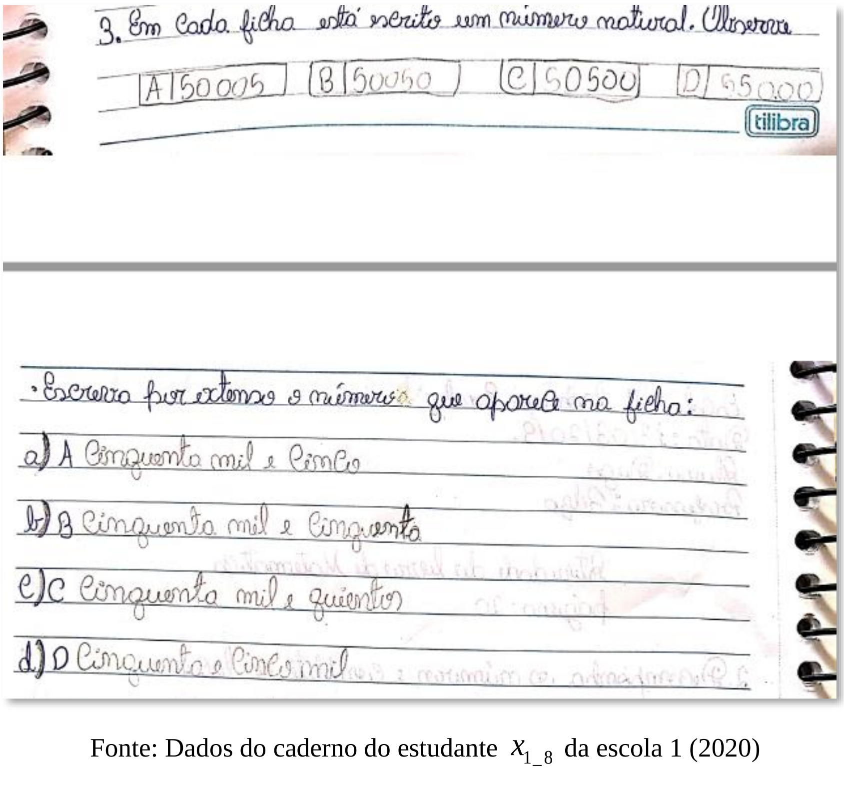
Figura 46 - Tarefa $\mathrm{T}_{\text{Trad.ENS/ENT}}$ proposta por Y_1.



Fonte: Dados do caderno do estudante x_{1_8} da escola 1 (2020)

Já para a tarefa t_4, na figura 47, os estudantes supracitados, da escola 1, usaram a seguinte técnica: $\tau_{\text{Trad.ENS/ENC}}$ que foi ancorada pelas seguintes tecnologias: $\theta_{\text{Trad.ENS/ENC}}$ e $\theta_{\text{ENS/NF}}$

Figura 47 - Tarefa $t_{\text{Trad.ENS/ENF}}$ proposta por Y_1.

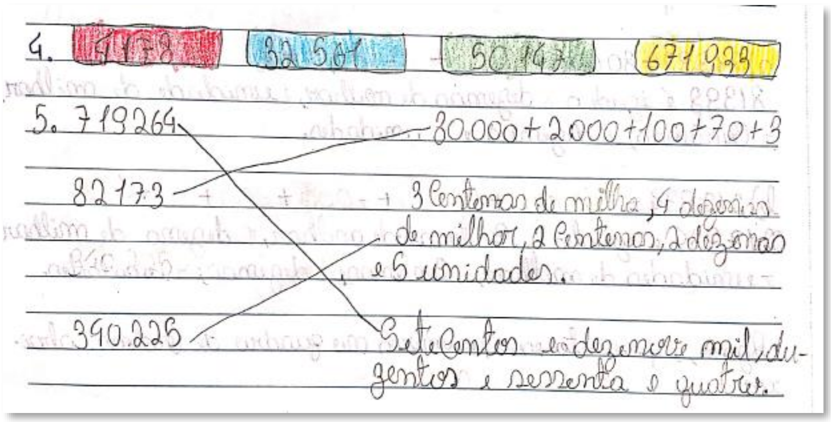


Fonte: Dados do caderno do estudante x_{1_8} da escola 1 (2020)

Essa análise foi finalizada pelas tarefas propostas pela professora Y_1, conforme a figura 48, com o T: Associar os números por meio da tradução de: $t_5 : t_{\text{Trad.ENS/ENCC}}, t_6 : t_{\text{Trad.ENS/ENF}}$ e

$t_7 : t_{\text{Trad.ENS/ENPAC}}$. As técnicas para resolver essas tarefas são: : $\tau_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$, $\tau_{\text{Trad.ENS/ENF}}$ e $\tau_{\text{Trad.ENS/ENPAC}}$. As respectivas tecnologias referente a essas técnicas foram: $\theta_5 : \theta_{\text{Trad.ENS/ENCC}}$, $\theta_6 : \theta_{\text{Trad.ENS/ENF}}$ e $\theta_7 : \begin{cases} \theta_P \\ \theta_{\text{Trad.ENS/ENPAC}} \end{cases}$

Figura 48 - T: Associar os números por meio da tradução, proposta por Y_1.



Fonte: Dados do caderno do estudante x_{1_8} da escola 1 (2020)

A partir das tarefas propostas pela professora Y_1 da escola 1, verificou-se que os tipos de tarefas que promovem a articulação entre os aspectos decimal e posicional não foram contempladas nas atividades propostas em sala, pois tipos de tarefas como T_{trunc} e T_{jus} não foram sequer apresentadas no processo de ensino.

Uma *restrição* (*K*) observada foi que o LD foi utilizado não apenas como recurso, mas como referência. E como o LD pouco desenvolve tarefas desses tipos, logo essas tarefas também não fizeram parte do repertótio do *saber ensinado*.

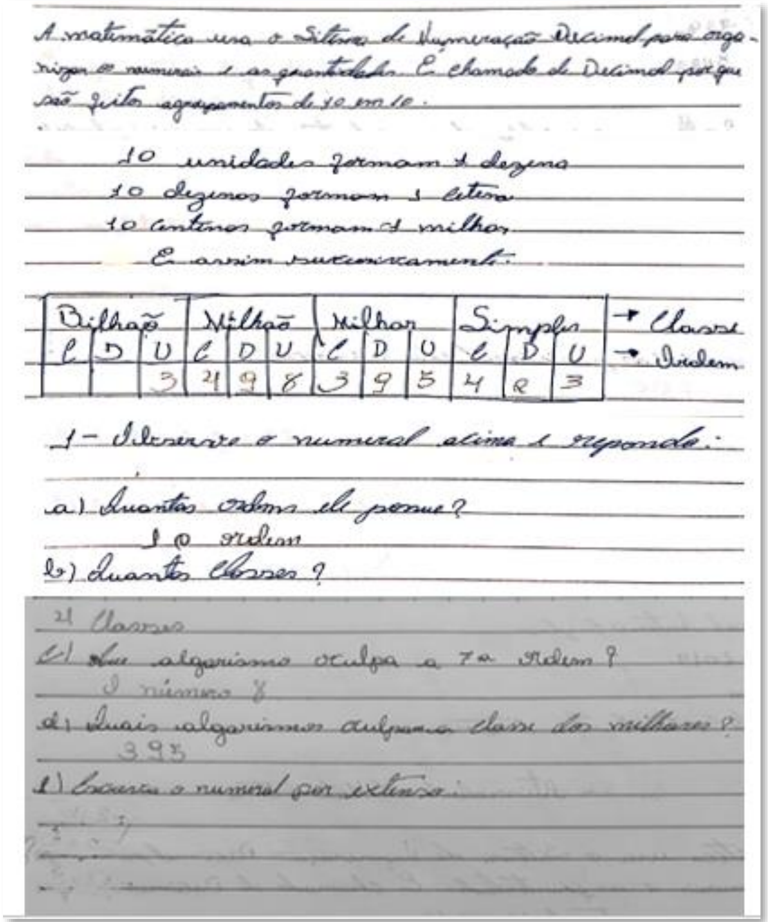
Por outro lado, diante da quantidade de atribuições dada as professoras, às vezes, não é possível desenvolver todos as funções e saberes que, respectivamente, a *noosfera* e o currículo normatizam.

5.1.2.7.2 Escola 2

Durante o período de *observação de classe* na escola 2 foram utilizados os mesmos procedimentos para a seleção de estudantes: presença em sala e realização de todas ou a maioria da tarefas propostas durante todo o processo de observação, proposta por Y_2. Dessa forma, os estudantes selecionados foram x_{2_8}, x_{2_10} e x_{2_22}.

Assim, a análise das atividades propostas foi iniciada pela atividade proposta, pela professora Y_2, sobre o aspecto decimal, conforme a figura 49.

Figura 49 - Iniciação, proposta pela professora Y_2, da noção do aspecto decimal do SND.



A matemática usa o Sistema de Numeração Decimal para orga-
nizar os numerais e as quantidades. É chamado de Decimal porque
são feitos agrupamentos de 10 em 10.

10 unidades formam 1 dezena
10 dezenas formam 1 centena
10 centenas formam 1 milhar
E assim sucessivamente.

Bilhão			Milhão			Milhar			Simples			→ Classe
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	→ Ordem
		3	4	9	8	3	9	5	4	2	3	

1- Observe o numeral acima e responda:

a) Quantas ordens ele possue?
10 ordem

b) Quantas classes?
4 classes

c) Que algarismo ocupa a 7ª ordem?
O número 8

d) Quais algarismos ocupa a classe dos milhares?
395

e) Escreva o numeral por extenso:

Fonte: Dados do caderno do estudante x_{2_10} da escola 2 (2020)

Y_2 inicou a aula com o seguinte texto: “A matemática usa o Sistema de numeração decimal para organizar os numerais e as quantidades. É chamado de decimal por que são feitos agrupamentos de 10 em 10.” Constatou-se que a professora teve por objetivo, nesta atividade, organizar os numerais corresponde ao aspecto posicional, agrupando esses numerais de 10 em 10, ou seja, abordando ao aspecto decimal.

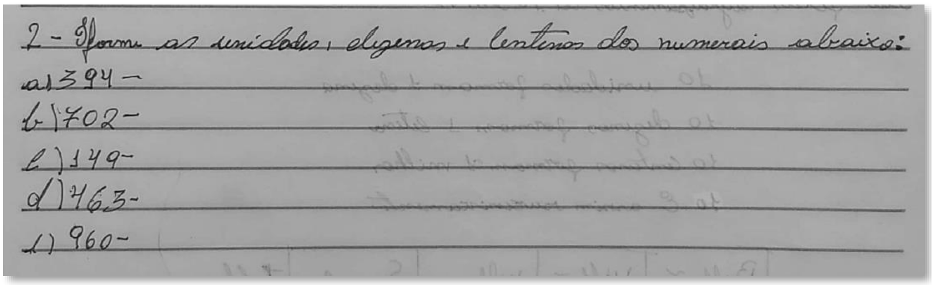
Observou-se que, Y_2 abordou elementos de θ_P e θ_D, inclusive quando destaca que "10 unidades formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas formam uma unidade de milhar e assim sucessivamente". A argumentação para esse representação escrita advém da θ_D.

Logo após, Y_2 apresentou ideias sobre ordem e classe usando um QVL para estruturar o aspecto posicional. Os itens solicitados na atividade1 são: t_1: identificar a quantidade de ordem; t_2: identificar a quantidade de classes; t_3: identificar qual algarismo ocupa uma determinada ordem; ; t_4: identificar quais algarismos estão localizados na classe do milhar. Ambas as tarefas estão regidas pela seguinte técnica: $\tau_{\text{Trad.ENT/ENCC}}$, que são justificadas por $\theta_{\text{Trad.ENT/ENCC}}$ e θ_P.

Já t_5: escrever o número por extenso é sustentada pela $\tau_{\text{Trad.ENT/NF}}$ que é justificada $\theta_{\text{Trad.ENT/NF}}$.A partir de então é possível observar a relação entre o SND, pelos aspectos decimal e posicional.

Dando seguimento, o próximo tipo de tarefas propostas por Y_2 é: $T_{\text{Trad.ENS/ENC}}$: informar as unidades, dezenas e centenas dos números abaixo, conforme na figura 50. A $\tau_{\text{Trad.ENS/ENC}}$ consiste em escrever por justaposição o número de unidades isoladas, dezenas isoladas, etc. Já a θ que sustenta essa técnica é a θ_P.

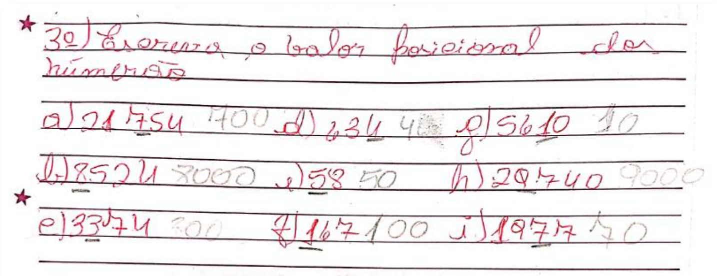
Figura 50 - $T_{\text{Trad.ENS/ENC}}$: informar as unidades, dezenas e centenas dos numerais abaixo.



Fonte: Dados do caderno do estudante x_{2_10} da escola 2 (2020)

Em outro tipo de tarefas $T_{Det.Pos}$: determinar o valor posicional dos números, cada número indicado por Y_2, na figura 51, possui um algarismo que está marcado com um traço. A posição desse algarismo é que interessa. Para tanto, há duas técnicas: τ_1: identificar a ordem do algarismo indicado e τ_{jus}: escrever por justaposição o número, identificado em isolado. Já a tecnologia que justifica essas escolhas é θ_P.

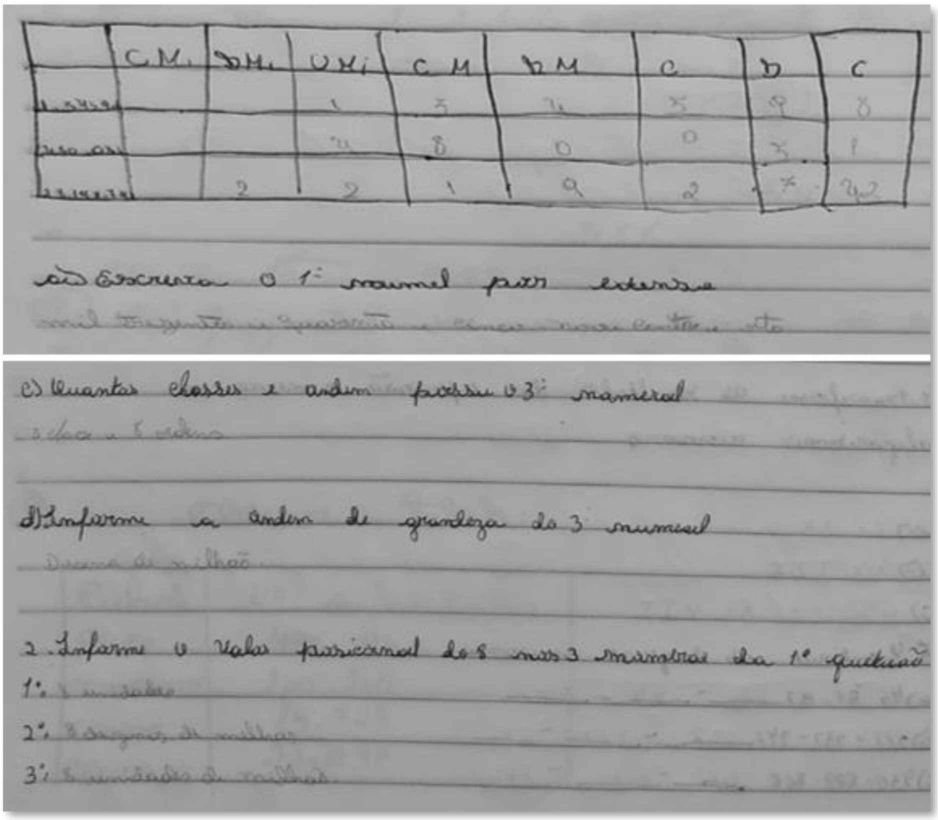
Figura 51 - $T_{Det.Pos}$: determinar o valor posicional dos números



Fonte: Dados do caderno do estudante x_{2_22} da escola 2 (2020)

O último tipo de tarefas proposta por Y_2 consistiu em: $T_{Trad.ENT/ENF}$: Traduzir da escrita numérica na tabela (QVL) para a escrita em língua materna. A $\tau_{Trad.ENT/ENF}$ referente a eese tipo de tarefas corresponde a: identificar a ordem do numeral. Para isso, a $\theta_{Trad.ENT/ENF}$ que justifica essa técnica é: θ_P. Essa descrição pode ser observada na figura 52, já que todas as tarefas propostas advém da posição dos algarismos.

Figura 52 - Tipo de tarefas $\mathrm{T}_{\mathrm{Trad.ENT/ENF}}$ que abarca apenas o aspecto posicional.



Fonte: Dados do caderno do estudante x_{2_8} da escola 2 (2020)

As tarefas propostas por Y_2 indicaram que o aspecto decimal foi iniciado, mas houveram poucos avanços, uma vez que as tarefas que mobilizaram o aspecto posicional predominou amplamente. Da mesma forma que na escola 1, tarefas como $\mathrm{T}_{\mathrm{trunc}}$ não foram mencionadas. Mas já houveram avanços, em relação ao escola 1, pela presença de tipos de tarefas que mobilizou a técnica de τ_{jus}, porém, foi utilizado apenas uma ordem do numeral. A atividade proposta deveria ter utilizado mais de uma ordem promovendo as conversões entre os números, e consequentemente, o aspecto decimal do SND.

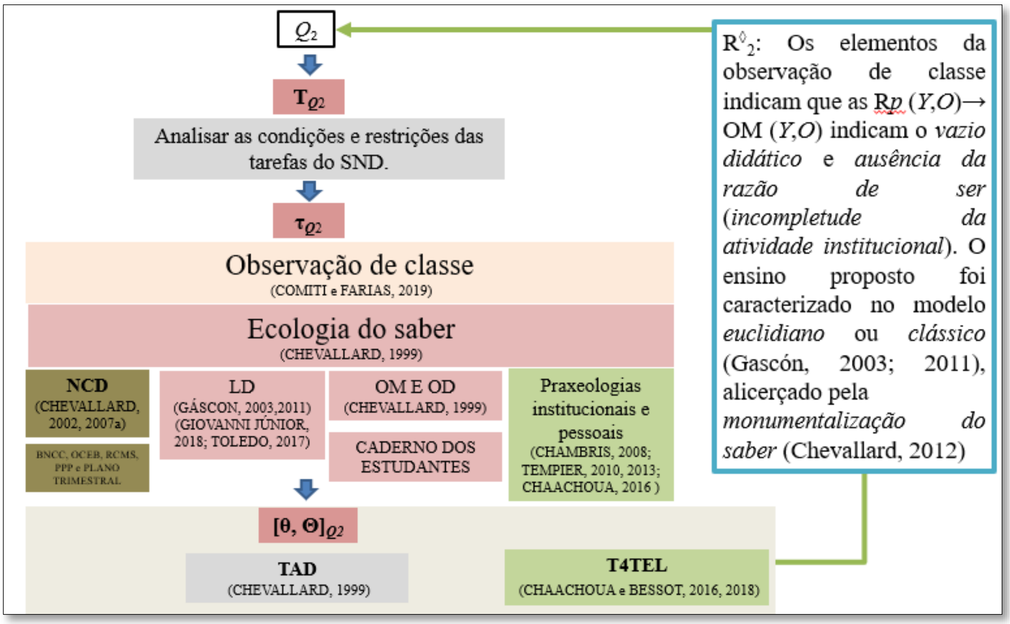
Da mesma forma que na escola 1, o LD foi utilizado como referência, deixando de ser apenas como recurso. Nesse sentido, o modelo de ensino proposto aos estudantes assemelha-se ao modelo identificado nos LDs analisados anteriormente. Sendo assim, verificou-se que o modelo de ensino proposto no *saber ensinado* é caracterizado como *Modelo Euclidiano* ou *Clássico* (GASCÓN, 2003; 2011), uma vez que as professoras assujeitaram-se integralmente ao LD.

Portanto, a partir dessas percepções, notou-se dificuldades em implementar atividades além das atividades tradicionais, como atividades de investigação, uma vez que os estudantes não são instigados a serem questionadores do saber no qual estão sendo apresentados. Chevallard (2012) denomina essa situação de *monumentalização do saber*, já que o saber que foi apresentado apenas para apreciar, sem possibilidades de se manipular, elaborar questões e possíveis conjecturas.

5.2. Síntese do Modelo Praxeológico Dominante

A síntese foi iniciada relembrando a questão Q_2 "Como analisar as condições e restrições do SND no 5º ano?". O processo de construção da resposta $R_2^{\lozenge}$, por meio da modelização na PP pode ser interpretado no esquema abaixo, conforme a figura 53.

Figura 53 - Esquema que representa o processo de construção da resposta $R_2^{\lozenge}$.



Fonte: O autor (2020)

Nesse segmento, também foi essencial revisitar o problema didático dessa investigação, sendo P_D: Os aspectos posicional e decimal não estão sendo articulados durante o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND), que indicou a seguinte questão, na dimensão ecológica: Como o saber está posto nas instituições?

No esquema que representa o processo de construção da resposta $R_2^{\lozenge}$, a *observação de classe* (COMITI e FARIAS, 2019) foi o método utilizado para a construção do MPD. Essa observação foi constituída de elementos *externos* e *internos* a classe.

Durante a observação externa a classe, o método de investigação foi estruturado, teoricamente, na ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999) que foram integrada: aos níveis de codetermінção didática (CHEVALLARD, 2002, 2007a) para compreender as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) para que o saber viva nas instituições como a BNCC (BRASIL, 2017b), OCEB (BAHIA, 2013), RCMS (SALVADOR, 2018b), PPP das escolas e os planos de ensino trimestrais das professoras; as organização matemáticas (OM) e as organizações didáticas presentes tanto nos livros didáticos (LDs), usando o modelo tridimensional (GASCÓN, 2003, 2011) quanto nas propostas didáticas de Y, quando existiam, estavam incompletas. Nesse sentido, os LDs foram caracterizados como *euclidiano* ou *clássico*, uma vez as tarefas propostas estavam imersas apenas no bloco da *práxis*.

No processo de construção da observação externa, constatou-se que as OM propostas nos LDs, ou seja, as *praxeologias institucionais* (CHAACHOUA e BESSOT, 2016, 2018), que estão alicerçadas no documentos oficais, não contemplaram a articulação entre os aspectos posicional e decimal do SND, uma vez que as tarefas que propõe conversão entre os números não foram consideradas.

Já o processo de construção da observação interna a classe permitiram identificar que as praxeologias institucionais foram privilegiadas, pois não houve em momento algum, em ambas as unidades escolares, possibilidades para implementação de *praxeologias pessoais* (CHAACHOUA & BESSOT, 2016, 2018). Nesse contexto, as entrevistas foram implementadas com o intuito de compreender a epistemologia sobre o SND que as professoras de todos os segmentos dos anos iniciais do Ensino fundamental carregam consigo.

Diante disso, constatou-se o fenômeno da *incompletude da atividade institucional* (FARIAS, CARVALHO e TEIXEIRA, 2018), em especial, o *vazio didático* (FARIAS, 2010), uma vez que observou-se a falta de elementos epistemológicos para a realização do processo transpositivo do SND para integrar ambos os aspectos, e a *ausência da razão de ser* (LUCAS, 2010; FARRAS, BOSCH & GASCÓN, 2013) por não reconhecer a necessidade de implementação, mesmo ausente nos LDs, de tarefas para conversão entre os números, evidenciando o aspecto decimal.

A dificuldade de variação de *ostensivos* sobre a escrita dos números foi outra observação evidenciada. Esse fato, dificultou a relação pessoal dos estudantes com o saber, ou seja, os *não-ostensivos*, impossibilitando o surgimento de novas *praxeologias pessoais*, ou seja, o modelo do ensino proposto foi caracterizado pelo *monumentalismo* do saber (CHEVALLARD, 2012), pois os estudantes não o adentraram e o manipularam, apenas observaram como um monumento.

6. O MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA

O Modelo Praxeológico de Referência, que compõe este capitulo, foi elaborado a partir da questão Q_3: Como fazer emergir as Organizações Matemáticas e Didáticas nas AEPs? Para direcionar um caminho a fim de encontrar uma resposta $R_3^{\lozenge}$, foi abordado, por meio da praxeologia de pesquisa (PP) (CHEVALLARD, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d), o método de investigação alicerçado na ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999). Este método possibilitou a reconstrução de praxeologias, iniciadas como OMPs (tradução e conversão de números), que integradas, formaram uma OML.

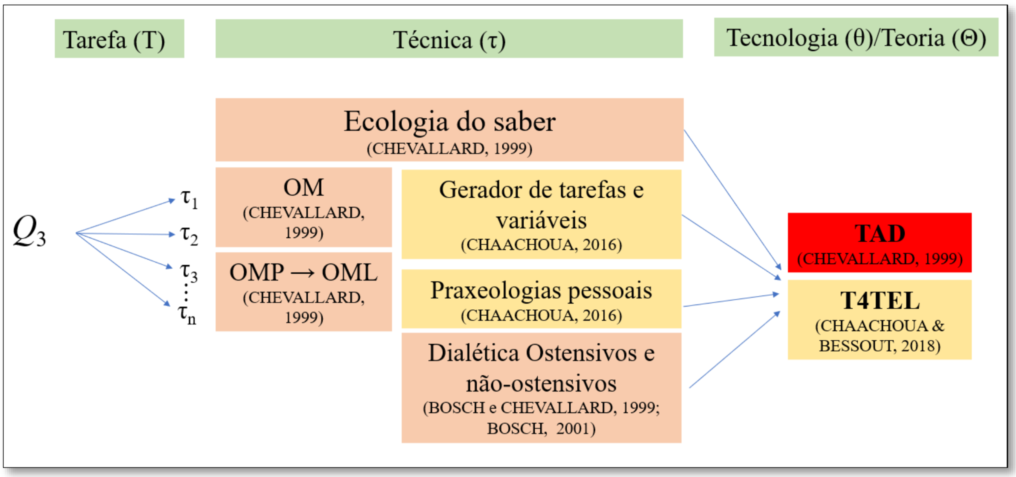
Durante o processo de reconstrução de praxeologias, as OMs foram modelizadas através do T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2018), a abordagem da TAD (CHEVALLARD, 1999) utilizada para descrever organizadamente tanto a reconstrução quanto organização das OMs, diante de um conjunto de variáveis e suas funções epistemológicas, didáticas e intitucionais. Essas variáveis foram estruturadas acerca dos materiais manipuláveis, como recurso didático para o ensino do SND, organizados em diferentes formas com a proposta de integrar o aspecto decimal ao posicional.

A reconstrução praxeológica foi realizada para proporcionar o surgimento de *praxeologias pessoais* (CHAACHOUA e BESSOT, 2018), não esperadas pela instituição (*praxeologias institucionais*), diante das lacunas diagnosticadas no MPD. Para tanto, a abordagem da dialética dos *ostensivos* (escrita, gestual, etc.) e *não-ostensivos* (ideias, intuições, conceitos, etc.) (BOSCH e CHEVALLARD, 1999; BOSCH, 2001) foi integrada ao método de investigação proposto durante a construção do MPR, já que toda atividade matemática é constituída a partir desta dialética.

Partindo desse contexto, este capítulo foi dividido em 03 subcapítulos, sendo o primeiro intitulado “o Modelo Praxeológico de Referência na pesquisa em didática” para apresentar como esse modelo é elaborado/utilizado nas pesquisa em didática a fim de evidenciar os caminhos do processo transpositivo do saber proposto por Chevallard e Johsua (1991) diante das lacunas no ensino do SND apresentadas no MPD; seguido pelo subcapítulo elaborado pela “modelização das organizações matemáticas sobre o SND no T4TEL” que contemplou: a importância do trabalho sobre o *logos*, ou seja, a modelização para reconstruir praxeologias completas (*práxis* + *logos*); a estrutura da numeração escrita e oral como alicerce para a elaboração das OMP; que, por conseguinte, apontaram os elementos para as OML para a modelização de tarefas como as traduções e conversões da escrita numérica que sustentam a *razão de ser* dessas OML. Este capítulo foi finalizado com a "síntese sobre o Modelo Praxeológico de Referência" que levantou uma discussão sobre o processo de modelização da reconstrução das OMs.

A elaboração das técnicas de investigação para o processo de construção do MPR foi materializada nafigura 54.

Figura 54 - Esquema que representa, na PP, o método de investigação do MPR.



Fonte: o autor (2020)

6.1 O Modelo Praxeológico de Referência na pesquisa em didática

O MPR pode ser um instrumento didático de investigação em que é possível desconstruir e reconstruir praxeologias que vivem nas instituições. No sistema Herbatiano $S(X,Y,Q)$, o MPR é construído para auxiliar a questão de investigação inicial (Q_0) por meio de questionamentos em relação a manipulação do saber matemático nas instituições escolares. Esses questionamentos podem ser ampliados ou solucionados, concebendo nova questões, as questões derivadas de $Q_0,(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)$, que podem ser do próprio saber matemático, intramatemático ou extra-matemático, ou até mesmo como o *questionamento do mundo* (CHEVALLARD, 2012).

Nesse modelo de investigação, não há um único caminho para resolver as questões de investigação, logo o MPR não é absoluto, mas relativo em que o problema de investigação é apropriado as hipóteses de investigação. Por conseguinte, o MPR deve passar por revisões e avaliações constantes. Bosch e Gascón (2007, *apud.* FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013) destacam a importância desse modelo para evocar "os saberes da Aritmética mais apropriado para levantar questões sobre os aspectos posicional e decimal da numeração". Isso pode ser verificado por meio da abordagem histórica e epistemológica permitindo que os *fenômenos didáticos* possam tornar-se *visíveis*, ao confrontar com o MPD. Durante o processo de desenvolvimento do MPR na investigação, podem surgir *outros tipos de problemas* para a própria pesquisa ou para pesquisas futuras além de verificar se as *soluções* para as questões de investigação são *coerentes*.

Nesse sentido, no encalço de repostas parciais $R_n^{\lozenge}$, as questões $\left(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\right)$, para a construção de um Modelo Didático de Referência (MDR) com o objetivo de dirimir as lacunas que foram ressaltadas no MPD.

Sendo assim, o MPR foi iniciado utilizando os elementos apresentados durante a abordagem histórica e epistemológica sobre o SND a fim de compreender como esse saber foi construído ao longo dos anos até como o conhecemos na atualidade. Essa abordagem foi essencial para entender como surgiu e foram aperfeiçoados os números, numerais e suas representações, as regularidades encontradas e a construção dos mais diversos sistemas numéricos que foram adotados por forte influência cultural. O aperfeiçoamento desses sistemas possibilitou, após um longo período de pesquisas e contribuições dos povos e de vários filósofos, físicos, matemáticos, dentre outros (EVES, 2004), a levarem a construção dos conjuntos dos Números Naturais[182].

Esses princípios teóricos foram fundamentais para compreender o avanço sobre o SND, que se iniciou a partir de uma relação biunívoca para a ideia de número até as representações atuais, que refletem a dimensão econômica do saber (FARRAS, BOSCH, GASCÓN, 2013) ao referirmos as possibilidades de reestruturar e simplificar as representações e as operações numéricas nas instituições escolares.

Parar compreender como o SND é modificado nas instituições, foi utilizada a Teoria da Transposição Didática (TTD), proposta por Chevallard e Johsua (1991), a fim de compreender o processo transpositivo do SND, em especial, as transformações pelo qual o SND passou com a finalidade de se tornar objeto do ensino, como mostra os trabalhos de Valente (2003) e Almouloud (2011). O primeiro faz algumas reflexões acerca dessas transformações, em

[182] Diversas passagens foram descritas na abordagem histórico-epistemológica.

especial, do *saber sábio*, no MPR, relativo a epistemologia do SND, para o *saber ensinado*, no MPD, e como a *noosfera* atua para reorganizar, quando necessário, os *saberes ensinados* por meio dos *saberes a ensinar* e *saber sábio*. Já o segundo aponta os avanços da TTD, a partir das propostas de Verret (1975), implementadas pelas ideias de Chevallard (1991)[183].

Nesse sentido, Almouloud (2011) elabora uma descrição de como um pesquisador deve executar sua estrutura de pesquisa abordando a TTD. Assim, ele aponta que é essencial que o trabalho sobre o processo de transformação do saber seja iniciado no *saber sábio*, que é o saber dos especialistas da área, por exemplo, pesquisadores e produtores da teoria matemática[184]. Neste saber, o pesquisador deve promover sobre o objeto do saber uma abordagem histórica e epistemológica; a primeira, a fim de mostrar os pressupostos iniciais e as formas de avanço do saber, já a segunda a fim de evidenciar a estrutura matemática que permite compreender, descrever e representar, ou seja, as praxeologiassobre o SND de forma organizada; hipótese de pesquisa ponderada como "As praxeologias no Modelo Praxeológico Dominante (MPD) não contribuem para o *saber ensinado* para que o aspecto decimal esteja articulado ao posicional do SND para os números naturais (CHAMBRIS, 2008; MOUNIER, 2012; TEMPIER, 2010, 2013; CHAACHOUA, 2016)" e levar em consideração o contexto social para que esse objeto possa ser modificado a um objeto do ensino, o *saber a ensinar*.

Esta etapa pode ser entendida pela desconstrução e reconstrução do *saber sábio* para o sistema educativo, materializado nas legislações educacionais, orientações curriculares, programas de ensino que vão orientar o trabalho do professor em sala de aula e, após algumas modificações, chegar ao *saber ensinado*, que são as práticas de ensino numa linguagem, por exemplo, matemática, acessível aos estudantes materializado por livros didáticos, apostilas ou páginas da web interativas.

Essas transformações ocorrem tanto do *saber sábio* para o *saber aprendido*, durante a elaboração dos processos de ensino quanto do *saber aprendido* para o *saber sábio*, após resultados científicos que promovem mudanças no saber sábio. Essas relações mostram que as pesquisas que trabalham sobre o objeto do saber obtêm muitos dados no *saber aprendido* que, a partir dessas pesquisas, podem sugerir modificações nas OM que poderão ser propostas no *saber ensinado* e *saber a ensinar*, sendo possível evidenciar essas mudanças nas elaboração e

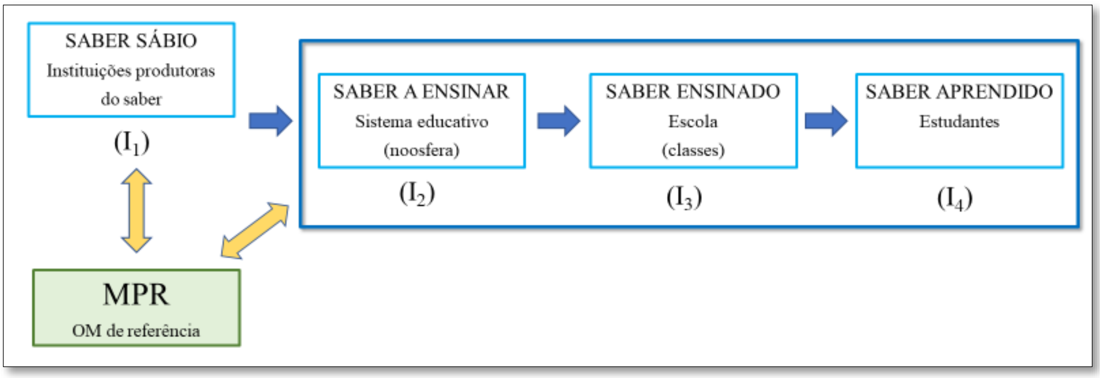
---

[183] Não apresentamos as discussões acerca da construção e avanço dos elementos da TTD, proposto, inicialmente por Michel Verret e desenvolvido por Yves Chavallard.

[184] As teorias matemáticas são divididas em campos e/ou domínio por área, como: análise, álgebra, geometria, lógica, dentre outras.

atualizações dos currículos, propostas curriculares e LD. Diante disso, ao analisar o esquema proposto sobre o processo transpositivo das OM, na figura 55, foi possível verificar como o MPR atua no processo de transformação do saber, proposto por Chevallard e Johsua (1991) e remodelado por Bosch e Gascon (2004).

Figura 55 - Esquema das OM no processo transpositivo



Fonte: CHAACHOUA e BITTAR (2019, p. 37 *apud*. Bosch e Gascón, 2004, p. 117.) Adaptado pelos autores. (Tradução nossa)

6.2 A modelização das organizações matemáticas sobre o SND no T4TEL

O Modelo Praxeológico de Referência (MPR) é um instrumento construído para ser capaz de responder a uma questão de pesquisa elaborada em uma instituição, que pode ser provisória, e deve passar por um processo de experimentação e, nesse sentido, passível de mudanças[185]. Nessa direção, entendemos que no sistema Herbatiano reduzido,

$$S(X;Y;Q)\rightarrow\left\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_m\right\}\hookrightarrow R^\heartsuit$$

o MPR significa como uma ação do $S(X;\ Y;\ Q)$ em busca de respostas parciais, $R_n^\lozenge$, que vão ao encontro das lacunas apresentadas sobre o SND nos documentos oficiais e na Observação de Classe, no MPD. Diante disso, o trabalho de Chaachoua (2016) foi selecionado uma vez que ela construiu um modelo de referência intitulado "*Praxeologia de referência do aspecto decimal da numeração pela manipulação segundo o modelo T4TEL*"[186] (CHAACHOUA, 2016, n. p., tradução nossa) para o estudo do aspecto decimal da numeração por meio da manipulação

[185] Entende-se que o MPR pode contemplar respostas as lacunas presentes no MPD.
[186] *Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modele T4TEL* (CHAACHOUA, 2016, n. p.)

de materiais concretos que passaram por reconstruções praxeológicas utilizando o modelo do T4TEL.

Esse modelo de referência foi adaptado e, posteriormente, adotado para analisar como o saber do aspecto decimal da numeração está sendo apresentado nos documentos oficiais, livro didático, planejamento, aulas dos professores participantes e nas tarefas resolvidas pelos estudantes. Outrossim, este modelo também foi utilizado para elaborar e analisar o Modelo Didático de Referência (BOSCH e GASCÓN, 2010), que funcionou como uma extensão do MPR sendo um instrumento que serviu para questionar, analisar e avaliar ambos os modelos, MPD e MPR, nas instituições. O MDR foi alicerçado nas Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), a fim de auxiliar o processo do ensino no que se refere ao objeto de estudo em questão.

Chaachoua (2016) utilizou elementos dos trabalhos de Christine Chambris (2008), Eric Mounier (2012) e Frédérick Tempier (2013) para elaborar o MPR, de forma que a pesquisa de Chambris (2008) e Mounier (2012) evidenciaram o trabalho sobre a numeração escrita e falada (oral), e o trabalho de Tempier (2013) revelou uma OMR formada por três OML relativas, contagem de números naturais[187], que está associado a OMG Números e operações[188]. Utilizamos ambas as abordagens em nossa pesquisa[189].

Os trabalhos de Chambris (2008), Mounier (2012), Tempier (2013) e Chaachoua (2016) não deixaram explícito a importância da integração entre a *práxis* e o *logos*[190]. No MPD foi identificado que a *práxis* já está situada no ensino, durante a observação de classe, mas constatou-se o *logos* ainda não é contemplado pelos professores em suas aulas e, consequentemente, não faz parte do repertório dos estudantes. Nesse sentido, houve a necessidade de discutir brevemente a função do *logos* no MPR, e por conseguinte, nas AEPs.

Para esse processo de construção, o *logos* foi apresentado no sentido de compreender a sua função nessa pesquisa.

[187] A OMR *Contagem de números naturais* (BNCC, 2017) no Brasil corresponde a *Contagem de números inteiros* na França (Tempier, 2013).
[188] A OMG *Números e operações* (BNCC, 2017) no Brasil correponde a *Quantidades, medidas e números e cálculo* na França (Tempier, 2013).
[189] Não é objetivo da nossa pesquisa, ao utilizar o MPR proposto por Chaachoua (2016), abrir ambos os trabalhos de Chambris e Mounier, mas utilizá-los como ferramenta em nossa investigação.
[190] Não se está afirmando a ausência da articulação entre os blocos praxeológicos nesses trabalhos. Apenas, não há uma discussão acerca disto.

6.2.1 O *logos* no MPR

O *logos* é “um termo na derivado da filosofia ocidental que significa, “fundamento”, “pensamento”, “razão”e “discurso”[191]. Esse termo passou a ser utilizado pela filosofia ocidental para o princípio de ordem e conhecimento.

Para Artaud (2019, p. 84) o “*logos* é a lógica por trás de um argumento” no intuito de usar argumentos lógicos e evidências de apoio as práticas durante a realização de um inquérito, já que a praxeologia associa a *práxis* ao *logos*. Complementando a ideia de Artaud, para a TAD a praxeologia completa (*práxis*$\left[\mathrm{T},\ \tau\right]$ + *logos*$\left[\theta,\ \Theta\right]$) favorece o mapeamento das condições e viabiliza minimizar as restrições que foram analisadas no MPD.

Nesse sentido, é fundamental entender que há praxeologias que vivem, e outras não, em determinadas instituições. E o que garante isso, primeiramente, é $R_I\left(Y,O\right)$ e, posteriormente, a $R_p\left(Y,O\right)$. E diante do processo transpositivo do saber, $R_I\left(X,O\right) \to R_p\left(X,O\right)$. Dessa forma, entendemos que as $\wp$ adotadas pelos estudantes, geralmente, são as praxeologias propostas pelos professores. Portanto, é essencial que os professores conheçam e dominem as $\wp$ [192] para propor novas ou reconstrui-lás[193]. Nesse sentido, Artaud (2019, p. 6) descreve que:

> A existência “sem obstáculos” de prática supõe um *logos* adaptado. Certos elementos dos *logos* dificultam ou até impedem a existência de uma prática. A modificação de uma prática supõe a modificação do *logos* relacionados a essa prática. A modificação de uma praxeologia depende de condições e restrições, algumas das quais - que não são as menos influentes - "vão além" da estrutura da instituição em que essa praxeologia existe.

Não há *logos* sem a *práxis*, da mesma forma que para mofificar uma *práxis* é também modificar o *logos*. E esse processo é construído compreendendo as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) que vivem nas instituições.

Nesse sentido, as AEPs propostas foram estruturadas para tentar minimizar as *restrições* (*K*) advindas das relações $R_p(Y,O)$, e assim dirimir as dificuldades que os professores têm para

[191] Essa descrição sobre o logos foi visualizada no Wikipedia . Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Logos>. Acesso em 15 fev. 2020.

[192] Reconhece-se $\wp$, nas relações pessoais e institucionais, como as praxeologias matemáticas e praxeologias didáticas. Esta já foi discutida como Organização Didática (OD)

[193] Essas propostas iniciaram a partir de 2001, no **Atelier animé à la XIe école d’été de didactique des mathématiques** propostos por Michèle Artaud e Yves Chevallard.

apresentar esse discurso racional, já que "o *logos* está ausente na profissão de professor" (*ibid.*). Essa ausência, em geral, é considerada pela formação[194] do professor e pela insttuição de prática a qual esse professor está assujeitado. Como consequência, o *logos* também está afastado dos estudantes.

Diante desse contexto, as AEPs foram elaboradas para aproximar os professores e estudantes das atividades que foram organizadas e estruturadas para argumentar sobre as escolhas matemáticas para a realização da tarefas.

A discussão sobre o *logos* para justificar as *práticas* propostas que integraram o MPR, diante das constatações no MPD, para conduzir a experimentação das AEPs é ampliada, a partir desse momento, durante todo o relatório. Sendo assim, segue-se a próxima seção.

6.2.2 A numeração escrita e falada (oral)

Para a numeração escrita e falada abordou-se o trabalho de Mounier (2012)[195] que resultou das teses de Chambris (2008) e do próprio Mounier (2010). Este autor destaca que para associar a numeração escrita a oral é essencial acompanhar a seguinte ordem: primeiro organizar o número para, em seguida, caracterizar (dar forma) para designar[196] (nomear).

> Essa estratégia decorre de dois momentos distintos: o primeiro é organizar e caracterizar sem tentar nomear como o número de elementos são organizados; o segundo, para caracterizar essa organização por um código usado para designar o cardinal da coleção global constituindo assim a designação numérica de elementos [...] (Mounier, 2012, p.29, tradução nossa).

Assim, essa estratégia pode levar à produção de diferentes códigos da organização que podem constituir designações diferentes do número. Por exemplo, os algarismos "76" corresponde a uma designação escrita "sete dezenas e seis unidades" ou falada (contando dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta; um, dois, três, quatro, cinco, seis; setenta e seis).

Esse procedimento é apresentado por Mounier (2012) para modelar a numeração falada a partir da interpretação da escrita numérica formada por algarismos, conforme a figura 56.

[194] Inicial e, muitas vezes, continuada.
[195] Este trabalho já representou um avanço em relação a sua tese, apresentada em 2010.
[196] Na Aritmética Elementar, designar significa representar por símbolos, por exemplo, a classe das unidades simples é representada por U – refere-se a Unidade, D – refere-se a dezena e C – refere-se a centena.

Figura 56 - Procedimento para modelar com base na interpretação da escrita numérica

A organização da coleção
α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção
α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; α_1 ; o resto da coleção

Fonte: Mounier (2012, p. 24, tradução nossa)

Esse procedimento, proposto por Mounier (2012), é finalizado com a codificação do número de elementos não agrupados restantes (por um primeiro algarismo) e do número em potências de dez (por um segundo algarismo). Assim, os dois ou mais números podem ficar alinhados.

Tempier (2013) ampliou esse procedimento. Primeiramente, este autor identificou a importância e os limites dos *ostensivos* entre a numeração falada e escrita, já que não se fala "dez centenas" antes de convertê-lo para "uma unidade de milhar". Diante disso, Tempier (2013) mencionou que o uso exclusivo da numeração falada pode dificultar o acesso a certas tecnologias da contagem escrita categorizando em "*limite instrumental de numeração falada para conversões"*(*ibid.*, p. 16). Assim, o autor sublinhou que é essencial "[...] contar com uma designação intermediária entre a numeração falada e a escrita, que pode ser fornecida escrevendo em unidades numéricas, de acordo com as potências de dez ou em escrita numérica"[197] (*idem*, tradução nossa)[198].

Outrossim, o autor estabelece "uma teoria de contagem por construção iterativa" (*ibid.*, p. 22), que define a construção do conhecimento sobre numeração pelo aspecto posicional, melhor dizendo, compartimentalizado pela ordem dos números: de 0 a 9 (referente a ordem da

[197] Essas designações intermediárias serão descritas no MPR elaborado por Chaachoua (, 2016).
[198] "[...] compter sur une désignation intermédiaire entre la numérotation orale et écrite, qui peut être fournie par écriture en unités numériques, selon les puissances de dix ou en écriture numérique"

unidade simples); de 10 a 99 (referente a ordem da dezena), de 100 a 999 (referente a ordem da centena), de 1 000 a 1 999 (referente a ordem da unidade de milhar)[199].

Primeiramente, apresentou-se as formulações entre as formas de escrever esses números por algarimos, pelas conversões (por truncamento e justaposição) e pela leitura em língua materna. Logos após, apresentou-se as aplicações propostas por Tempier que utilizou as quatro compartimentalizações supracitadas aplicadas as formulações integrando a escrita por algarismos, língua materna e conversões.

Por meio dessa ordem que Tempier (2013) descreve, usando a formalização matemática, os saberes da numeração e os caminhos de comunicação entre a contagem falada e escrita e, quando possível, as conversões. O autor descreveu essa formulação construída pela recorrência, da ordem à ordem, de forma que a *escrita canônica* com as unidades de numeração é a escrita para a qual temos um número de unidades de cada ordem menor ou igual a dez[200]. Essa formulação foi intitulada por "Formulação geral do conhecimento de numeração" e integrada por: unidades de numeração, numeração escrita por algarismos, conversões entre unidades por truncamento de escrita em números que corresponde ao número de unidades contidas em várias unidades individuais e conversões entre unidades por justaposição de zeros (ou "regra de zeros") que corresponde ao número de unidades individuais contidas em qualquer número de unidades e numeração falada.

Para as unidades de numeração, seja um número natural $(n \in \mathbb{N})$, entendemos[201] que as unidades numéricas podem ser descritas da seguinte forma: (9 unidades de ordem $n-1$) (9 unidades de ordem $n-2$)...(9 unidades de ordem 1) + 1 unidade de ordem 1 formam uma unidade de ordem n (uma dezena de unidades de ordens $n-1$). Assim, entendemos que o aspecto decimal é observado de tal forma que dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da ordem imediatamente superior. Ademais, há a conversão em que cada unidade admite uma relação com todas as unidades de ordem inferior, mais precisamente, seja $n, p \in \mathbb{N}(n > p)$ a unidade de ordem n igual a $10\ldots0(n-p \text{ zeros})$ unidades de ordem p. E, inversamente, cada unidade também admite relações com as unidades de ordem superior.

[199] Os números dessa ordem são os mais relevantes para essa pesquisa.
[200] O autor aponta que "em caso de ausência de unidades de uma certa ordem, não se escreve nada a esta ordem (não se escreve 0 na escrita canônica)" (Tempier, 2013, p. 28) (*tradução nossa*). Essa escrita será entendida como a escrita numérica composta canônica (ENCC) que foi desenvolvida no trabalho de Chaachoua (2016).
[201] Pelas propostas de Tempier (2013).

Já a *escrita numérica* em algarismos, compreende-se que as unidades de ordem para a escrita numérica parte da direita (aspecto posicional), o que Tempier (2013, p. 29) propôs como "(...) um número de ordem $n(n \in \mathbb{N}; n > 0)$ indica o número de unidades isoladas de ordem *n*". A observação apontada é para a ausência de uma unidade de uma certa ordem, na escrita numérica composta canônica em unidades, ou seja, o número 0 passa a ser escrito na classificação correspondente.

Este princípio é uma consequência do princípio da posição: é necessário notar a ausência destas unidades para marcar a posição de unidades de ordens superiores. Sendo assim, ao adotarmos a unidade de ordem $n(n \in \mathbb{N}; n > 0)$ escrevemos 10 ... 0 com $n-1$ zeros e o zero (0) é escrito apenas em categorias para as quais existem unidades em um nível mais alto.

Já para as conversões entre números escritos, o autor descreveu dois modelos: por truncamento e por justaposição. O primeiro é utilizado para as *conversões quando o número de unidades contidas em várias unidades simples*, ou melhor, a escrita numérica indica o número total de unidades simples, bem como o número de unidades de cada ordem, mas também o número total de unidades de ordens maiores ou iguais a 2, por truncamento. A formalização proposta pelo autor aponta que há uma generalização para conversões de qualquer unidade para outra ordem[202] qualquer. Assim, $n, p, q \in \mathbb{N},\ \ n \neq 0,\ \ n > q > p,\ \ a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ para $0 < i < n$ e $a_n \neq 0$. Ao escrever o número $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ em unidade de ordem p, existe $\overline{a_n \ldots a_{q-p}}$ unidades de ordem q, melhor dizendo, há um número de unidades de ordem q truncando a ordem $q - p$. Por exemplo, no número escrito pelos algarismos 3 568 inferimos que há 35 milhares (referente a classe dos milhares), uma vez que os milhares são centenas de dezenas ou dezenas de centenas.

A partir dessa formulação, foram elencados dois casos decorrentes:

(i) o número de unidades de ordem n é o número formado pela exclusão de todos os números das unidades de ordem estritamente inferior a n.

(ii) esta propriedade é uma consequência do aspecto decimal: se a unidade de referência é uma unidade de ordem $n(n \in \mathbb{N}; n > 0)$, então a unidade da segunda ordem torna-se a dezena

[202] Para mesma ordem ou superior.

de unidade de ordem n, ou seja, a unidade de ordem $n+1$, está escrito na segunda linha, a partir da classificação n, e assim por diante.

Já o segundo modelo, as *conversões entre unidades por justaposição de zeros*, que Tempier (2013) classificou como "regra dos zeros" que são utilizadas quando o número das unidades simples podem estar em qualquer número de unidades. Sendo assim, o autor propôs a seguinte formulação: essa regra pode ser generalizada para conversões que não envolvem unidades simples, ou seja, $n, p, q \in \mathbb{N},\ p > q,\ a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ para $o < i < n$ e $a_n \neq 0$. Ao escrever o número $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ em unidade de ordem p, existe $\overline{a_n \ldots a_0 0 \ldots 0}$ unidades de ordem q com $p-q$ terminados em zero (não incluindo o 0 (zero) de $a_0, a_1, \ldots$), melhor dizendo, há um número de unidades de ordem q para uma justaposição de $p-q$ zeros à direita. Por exemplo, 15 mil é igual a 1500 dezenas ou 150 centenas, uma vez que os milhares são centenas de dezenas ou dezenas de centenas.

A partir desta formulação, elencou-se dois casos decorrentes:

(i) para converter em unidades simples um número de unidades de ordem $n(n \in \mathbb{N}, n > 0)$, justapomos $n-1$ zeros a direita do número de unidades de ordem n.

(ii) esta propriedade é, novamente, uma consequência do aspecto decimal: Dado número (escrito em algarismos) de unidades de ordem $n(n \in \mathbb{N}, n > 0)$, o número de unidades simples do número de partidas torna-se o número de unidades de ordens isoladas n, o número de dezenas se torna o número de unidades isoladas $n+1$, etc. Para marcar a nova classificação desses algarismos, é necessário fazer uma mudança e escrever $n-1$ em vez do número 0 para os lugares vazios assim criados (regra dos zeros).

E finalmente, para a *numeração falada* o autor (*ibid.*) enfatizou a abordagem do aspecto decimal, em especial, para os números grandes[203]. No entanto, nesta pesquisa, foi indicada como os princípios da leitura até o milhão se estendem a grandes números que portam os nomes das diferentes classes obtidas agrupando três ordens unitárias consecutivas: unidades simples, milhares e milhões.

[203] Nessa pesquisa levou-se em consideração os números com no máximo 6 algarismos, um vez que essa é a proposta dos currículos ocifiais para o 5º ano do EF I.

Para facilitar a escrita em letras (e leitura), Tempier convencionou separar duas classes consecutivas por um espaço na escrita em algarismos, ou seja, contando a partir da direita, é possível escrever nos espaços entre as unidades de ordem $3n$ e $3(n+1)$, onde $n \in \mathbb{N}$, até o posto mais alto. Desse modo, há uma dupla leitura para nomear ou escrevê-los (em língua materna) um número: por classes globais e dentro de cada classe por classificação (números menores que 999). A partir da classe do milhão, as unidades numéricas e os números escritos (em língua materna), para a numeração falada, são as mesmas, logo, "não há distinção entre o *milhar* e o *mil*" (*ibid.*, p. 30).

Nesse sentido, para nomear um número grande escrito em algarismos é fundamental dividir em classes de três algarismos (marcadas por espaços) iniciando pelas unidades simples: é suficiente, a partir de unidades simples em direção a maior ordem da classe. Para cada classe, lemos o número de três dígitos correspondente seguido pelo número da palavra associado a essa classe. Por exemplo, escrever so números 567 893 em lígua materna corresponde a quinhentos e sessenta e sete mil oitocentos e noventa e três.

A partir das formulações apresentadas, as finalidades desenvolvidas nos algarismos numéricos podem ser descritas a partir dos números de 0 a 9, que Tempier (2013) descreveu como duas possibildades de expressá-los: 5 unidades ou 5 (numeração escrita); cinco unidades ou cinco (numeração falada) (*ibid.*).Três unidades ou três. Nós escrevemos U por unidade. Já para os números de 10 a 99, há uma grande influência da base 10 do sistema de numeração[204], uma vez que se instaura o aspecto posicional do SND. Sendo assim, 9 unidades +1 unidade forma uma nova unidade chamada dez (ou segunda unidade de ordem). Nós escrevemos D por dezena. Já no nosso *sistema escrito*[205], a escrita é feita em linha e cada unidade é escrita em um determinado nível, ou melhor, a classificação das unidades (simples) é a primeira classificação (da direita) e a unidade de classificação maior é escrita na localização imediatamente à esquerda das unidades simples. Assim, uma dezena é escrita na segunda linha.

Tempier (2013) admite que há duas entradas para escrever um número com 2 algarismos: Escrita Numérica Composta (ENC) e a Escrita Numérica Composta Canônica (ENCC) que privilegiam a conversão entre as unidades da dezena e da unidade simples. Assim, 40 U (ENC) = 4D (ENCC). Já no *sistema falado*, o *ostensivo língua*, é necessário ter uma escrita

[204] Isso já foi apresentado na abordagem histórica-epistemológica do SND.
[205] Escrita em língua materna por meio de algarismos hindu-arábicos.

única (*ostensivo escrito*) em algarismos, para escrever apenas números com 1 apenas algarismo por ordem. O autor mostra que a escrita canônica permite associar diretamente um número escrito com as unidades de numeração e o número correspondente em algarismos pelo princípio de posição[206]: as unidades (simples) são escritos na primeira linha (da direita) e as dezenas na segunda linha.

Para os números de 100 a 999, *as unidades de numeração*: 9D 9U + 1U (ENC) = 99U + 1U (ENCC) forma uma unidade da *centena* (C) (terceira unidade da ordem), de forma que uma centena = uma dezena de dezena = dez dezenas = cem unidades. “Desta ordem há, portanto, as relações entre unidades não são apenas entre unidades de ordens consecutivas”. (*ibid.*, p. 25). No *sistema escrito*, as centenas são escritas na terceira linha, a partir da direita (princípio da posição). Assim 1 centena é escrito 100, 2 centenas são escritas 200, ..., assim como 9 centenas são escritas 900.

Para Tempier (*idem*), “a escrita canônica em unidades assim permite ir diretamente ao escrito em números escrevendo as unidades no primeiro grau, as dezenas no segundo e as centenas no terceiro”. Por exemplo, 9C 3D 4U (ENCC) é escrito 934 (ENC). Há o caso particular da ausência de algarismos na ordem da dezena e/ou da unidade, sendo assim, o algarismo 0 deve ser escrito. Por exemplo, 9C 4U (ENCC) é escrito 904 (ENC) ou 5C 2D (ENCC) é escrito 520 (ENC). Na ausência do algarismo da ordem da centena, o algarismo 0 não é escrito. Por exemplo, 6D 8U (ENCC) é escrito 068 = 68 (ENC).

Já para o *ostensivo língua*, o nome do número (menor ou igual a nove) é seguido por pela palavra centena (s). Assim, uma centena é falada cem, duas centena é duzentos, ..., nove centenas é novecentos. Para falar números em (ENCC) como 759 (ENC) dizemos setecentos e cinquenta e nove. Esta leitura leva em consideração a ordem das unidades.

As conversões possíveis possibilitam mudanças na forma de falar. Por exemplo, 759 U (setecentos e cinquenta e nove)= 7C 5D 9U (sete centenas, cinco dezenas e nove unidades) =75 D 9U (setenta e cinco dezenas e nove unidades).

Para a os números de 1 000 a 999 999, *as unidades de numeração*, 9C 9D 9U + 1U (ENC) = 999U + 1U (ENCC) = $1U_M$ forma uma nova ordem, o *milhar* (M) (quarta unidade da

[206] Nos sistemas em unidades e falados, o zero é inútil, o que não é o caso do sistema em números. (Tempier, 2013, p.25) (*tradução nossa*).

ordem), de forma que uma unidade de milhar = dez centenas = cem dezenas = mil unidades unitárias = cem dezenas = dez dezenas de dezenas. No *ostensivo escrito*, a ordem dos milhares são escritos na quarta linha, a partir da direita (princípio da posição). Em caso de ausência de unidade, de dezena ou centena na escrita canônica, escreve-se um zero para a classificação correspondente (não se escreve o zero para a classificação mais alta)[207].

À medida que o número de algarismos aumenta a escrita aumenta e os números tornam-se difíceis de nomear. Em virtude disso, torna-se necessário fornecer marcas intermediárias que correspondam à contagem em milhares: *as classes*. Estas são agrupamentos de três ordens de unidades consecutivas que correspondem, da direita à esquerda, às unidades, dezenas, centenas (mesma unidade). Para números inferiores a um milhão, encontramos a *classe de unidades simples*, que inclui a ordem de unidades simples, dezenas e centenas, e a *classe dos milhares* que refere-se a ordem de unidade de milhar, dezenas de milhares e centenas de milhares.

Já no *ostensivo língua*, para escrever em letras (ou para dizer) um número entre 1 000 e 999 999, escreve-se o nome do número de milhar (es) (portanto entre um e novecentos e noventa e nove) seguido da palavra "mil" para o nome do número inferior a mil restantes. Por exemplo, 9 centenas de milhar, 3 dezenas de milhar, 4 unidades de milhar, 7 centenas, 2 dezenas e 1 unidade (ENCC) = $9C_M$ $3D_M$ $4U_M$ 7C 2D 1U (ENCC) = 934 712 (ENC) = 934 mil 721 unidades = novecentos e trinta e quatro mil setecentos e vinte e um. Tempier (2013, p. 27) enfatiza que "(...) essa leitura é baseada em uma propriedade de escrever em números: truncamento, que um meio para decompor o número em classes (...)", ou seja, 934 721 = 734 mil 921 unidades.

Quanto as *técnicas de conversão entre unidades* escrita em algarismos por justaposição de zeros à direita e por truncamento, Tempier estendeu essas proposta aos números com 5 e 6 algarismosde forma que:

> - Pela técnica de justaposição de zeros, o número de unidades de milhar, dezenas de milhar ou centenas de milhar é obtido escrevendo-se o primeiro algarismo deste número (da direita) para o nível de unidades de milhar, dezenas de milhar ou centenas de milhar. Isso equivale a justapor três, quatro ou cinco zeros à direita desse número. Por exemplo, 23 mil = 23 000, 15 dezenas de milhares = 150 000;
>
> - Pela técnica de truncamento, lê-se diretamente o número de unidades de cada ordem, "truncando" a escrita para a classificação considerada, excluindo os números de classificações estritamente inferiores. Por exemplo, em 23 456 existem 23 mil. (Tempier, 2013, p. 28)

[207] Esse procedimento é similar para os algarismos da dezena de milhar e centena de milhar.

Essas contribuições supracitadas da pesquisa de Tempier (2013) sobre o desenvolvimento da escrita numérica, o sistema escrito e falado[208] e as possíveis conversões, foram o alicerce para o trabalho de Chaachoua (2016).

As descrições propostas por Tempier foram alicerces epistemológicos que, integrado a abordagem histórica e epistemológica, possibilitaram a reconstrução das OM, usando os diversos ostensivos nas tarefas de tradução (T_{Trad}) e conversão (T_{Conv}) que manifesta o aspecto decimal articulado ao posicional do SND. .

6.2.3 Elementos das OML para a modelização de tarefas no T4TEL

Chaachoua (2016) utiliza essa ampliação, proposta por Tempier (2013), para selecionar o tipo de tarefas "Contar uma coleção: T_C", uma vez que este tipo de tarefas sustenta:

> [...] o aspecto decimal da numeração fundamentado pela noção de unidades e nas relações entre unidades através das regras de agrupamento e trocas; as relações entre as unidades privilegiando o tipo de tarefas em que a técnica mobiliza as relações entre as unidades; o trabalho com números grandes fortalecendo a compreensão do aspecto decimal do SND; a manipulação de materiais concretos para trabalhar as regras de agrupamento e trocas [...] ressignificando o aspecto decimal do SND. (CHAACHOUA, 2016, p. 50)

As escolhas para a essa investigação aproximaram-se das escolhas de Chaachoua (2016) no seu trabalhos de pesquisa e, por esse motivo, utiliza-se o modelo produzido pela autora como modelo de referência, que passou por adaptações[209], para a essa pesquisa, em especial, para as OML de referência que contempla a dialética ostensivos e não-ostensivos, as variáveis e o gerador de tarefas, elementos do T4TEL.

As OML de referência, derivadas da OMR, não foram escolhidas aleatoriamente por Chaachoua (2016), visto que a autora utilizou as três OML propostas por Tempier (2013), dentre as quais:

- OM_{Card}: agrupa os tipos de tarefas que envolvem o número em seu aspecto cardinal.

- OM_{Ord}: agrupa os tipos de tarefas que envolvem o número em seu aspecto ordinal.

---

[208] A numeração falada foi pesquisada por Chambris (2008). Tempier deu prosseguimento a esse estudo estrtuturando as OM para a numeração escrita e falada.

[209] O modelo foi adequado ao que se espera nas instituições brasileiras, ou seja, as propostas que estão nos documentos oficiais no Brasil.

- OM_{Trad}: agrupa os tipos de tarefas de traduções de escritos.

Os principais tipos de tarefas relacionadas a essas OMLs são apresentados no quadro 17, por tipo de OML, a seguir.

Quadro 17 - Tipos de Tarefas na OMR integrada pelas OML.

OMR sobre a contagem de números inteiros		
OM_{Card}[210]	OM_{Trad}[211]	OM_{Ord}[212]
- Contar uma coleção - Produzir uma coleção - "Número de ...." - Comparar coleções	- Decompor - Recompor - Escrever em números - Ler/nomear	- Comparar - Aumentar - Intercalar - Enquadrar - Colocar/ler em uma linha graduada - Avançar/recuar

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 21) (tradução nossa).

Para Tempier (2013), a OM_{Trad}[213] é uma das razões de ser para OM_{card} e OM_{ord}, uma vez que para comparar ou contar uma coleção é fundamental saber escrever ou ler os números quando não decompor ou recompor esses números. Nesse sentido, a razão de ser da OM_{Trad} foi apresentada visto que é esta OML que sustenta o modelo produzido por Chaachoua (2016).

Mas essa investigação considerou a OML, designada pelas OMPs (OM_{Card} e OM_{Trad}) visto que através dessas OMPs foi possível utilizar uma variabilidade de ostensivos nos tipos de tarefas elaborados para números grandes. Diante desse contexto, as tarefas de conversão foram reforçadas possibilitando a integração entre os aspectos do SND.

6.2.3.1 A razão de ser das OMP_{Trad} do SND

[210] Refere-se a OM sobre a cardinalidade dos números (números cardinais). (Tempier, 2013, p. 43) (*tradução nossa*).

[211] Refere-se a OM sobre a tradução das escrituras dos números (os diversos tipos de escritas numéricas). (*idem*) (*tradução nossa*).

[212] Refere-se a OM sobre a ordinalidade dos números (ordem dos números). (*idem*) (*tradução nossa*).

[213] Quando se refere a OM_{Card}, OM_{Ord} e OM_{Trad}, entendemos que são OML_{Card}, OML_{Ord} e OML_{Trad}.

A partir deste tópico, as reconstruções praxeológicas foram alicerçadas no T4TEL, em especial, sob o *gerador de tarefas*, para descrever como essas OM, elaboradas por Tempier (2013) foram estruturadas na seguinte ordem: OM_{Trad}, OM_{Card} e OM_{Ord}.

6.2.3.1.1 A OM das traduções e conversões dos ostensivos escritos

A OM_{Trad} refere-se a traduções[214] dos escritos sejam em traduções canônicas ou conversões, ou seja, traduzir a o ostensivo escrita numérica simples (ENS) em escrita numérica falada canônica (ENFC)[215], em língua portuguesa.

As OM_{Trad} em traduções canônicas

Para as OM_{Trad} em traduções canônicas há os seguintes tipos de tarefas: $T_{Trad.ENS/NFC}$, $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENA}$, $T_{Trad.ENS/ENP}$.

Iniciou-se a descrição pelo tipo de tarefas $T_{Trad.ENS/ENFC}$ (e $T_{Ttrad.ENFC/ENS}$) que é estruturada para associar a escrita numérica ao nome do número ("escrever/nomear") e vice-versa. Para resolver esses tipo de tarefas emergem as seguintes técnicas τ_{jus} e $\tau_{Trad.ENS/ENFC}$ (ou $\tau_{ENFC/ENS}$)[216].

A τ_{jus} consiste em associar cada unidade numérica, de acordo com sua posição, da ENS por justaposição dos números de unidades de cada ordem. Por exemplo, 1 500 U pode ser representada por 150 dezenas ou 15 centenas. Esta técnica pode ser justificada por duas tecnologias:

- θ_P: (Posicional) As unidades da primeira ordem são escritas na primeira fila, as unidades da segunda ordem são escritas na segunda fila, etc., ou seja, 1 500 representa 15 C ou 150 D .

- θ_D: (Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. Por exemplo: dez centenas são iguais a uma unidade de milhar, ou seja $10 \times 100 = 1\ 000$.

---

[214] A Tradução, proposta por Tempier (2013), com a modificação dos ostensivos sem a perda da natureza dos números, ou seja, escrever numericamente o número em unidades simples (1245) e escrever o número em unidades composta canônica (1U_M 2C 4 D 5U), mas prevalesce a representação os números.

[215] Em língua materna, a língua portuguesa do Brasil.

[216] A partir deste momento, vamos descrever o entendimento para cada T, τ, θ e Θ .

Já a técnica $\tau_{Trad.ENS/\ ENFC}$ (ou $\tau_{Trad.\ ENFC/ENS}$) reside em associar as diferentes unidades numéricas correspondente a classificação na escrita numérica. Esta técnica pode ser justificada pel seguinte tecnologia:

- $\theta_{ENS/NF}$: ligação entre a escrita numérica simples e a numeração falada. Por exemplo, os números escritos 1,2,..., 9 são falados um, dois, ..., nove; as dezenas são faladas por dez, vinte, ..., noventa; a centena por cem, duzentos,... ou uma "centena", duas "centenas", porém não se pronuncia "um cem", "dois cem", ...

As praxeologias supramencionadas referente aos tipos de tarefas $T_{Trad.ENS/ENFC}$ e $T_{Trad.ENFC/ENS}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 18 abaixo.

Quadro 18 - Praxeologia referente a $T_{Trad.ENS/ENFC}$ (e $T_{Trad.ENFC/ENS}$)

$T_{Trad.ENS/ENFC}$ (e $T_{Trad.ENFC/ENS}$)	Associar a escrita numérica ao nome do número ("escrever/nomear") e vice-versa.
τ_{jus}	Associar cada unidade unidade numérica a a sua posição na ENS por justaposição dos números de unidades de cada ordem.
θ_{jus}	θ_P: (Posicional) As unidades da primeira ordem são escritas na primeira fila, as unidades da segunda ordem são escritas na segunda fila, etc. θ_D: (Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\tau_{Trad.ENS/ENFC}$ (ou $\tau_{Trad.ENFC/ENS}$)	Associar as diferentes unidades numéricas simples correspondente a classificação na escrita numérica.
$\theta_{Trad.ENS/NF}$	Ligação entre a escrita numérica simples e a numeração falada.
$\Theta_{Trad.ENS/ENFC}$	Aritmética elementar[217]

Fonte: O autor (2020).

Para os tipo de tarefas $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENPA}$, $T_{Trad.ENS/ENP}$ (e $T_{Trad.ENCC/ENS}$, $T_{Trad.ENPA/ENS}$, $T_{Trad.ENP/ENS}$)[218] que consistem em traduzir a escrita numérica simples na escrita

[217] Considera-se a Aritmética elementar a todos os elementos descrinos na Abordagem epistemológica do SND.
[218] $T_{Trad.ENS/ENCC}$ e $\tau_{Trad.ENCC/ENS}$ são tarefas inversas, logo as técnicas são invertidas. Esse tentendimento segue para os demais tipos de tarefas. (Tempier, 2013).

numérica canônica que pode ser entendida como as decomposições e (re)composições canônicas.

No processo de resolução desses tipo de tarefas emergem as seguintes técnicas $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$, $\tau_{Trad.ENS/ENPA}$, $\tau_{Trad.ENS/ENP}$ (e $\tau_{Trad.ENCC/ENS}$, $\tau_{Trad.ENPA/ENS}$, $\tau_{Trad.ENP/ENS}$). Essas técnicas consistem em traduzir em números determinados números escritos ENCC, ENPA e ENP. Cada τ elencada foi descrita logo abaixo:

A $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$: consiste em escrever por justaposição o número de unidades isoladas, dezenas isoladas e assim por diante, ou seja, 2 unidades de milhar 5 centenas 9 dezenas e 1 unidade corresponde a 2 591. Essa técnica é justificada por:

- θ_P[219]:

A $\tau_{Trad.ENP/ENS:}$ consiste em expressar $2 \times 1000 + 5 \times 100 + 9 \times 10 +1 = 2\ 591$ por justaposição dos coeficientes em potências de 10. Essa técnica é justificada por:

- θ_P: o número 2 é o coeficiente de 1000, o número 5 é o coeficiente de 100, o número 9 é o coeficiente de 10 e o número 1 é o coefiente da unidade (10^0).

- $\theta_{Trad.ENP/ENCC}$: Traduzir da ENPD para ENCC, por exemplo, $2 \times 1000 + 5 \times 100 + 9 \times 10 +1$ = 2 unidades de milhar 5 centenas 9 dezenas e 1 unidade e reduzir a $\tau_{Trad.ENCC/ENS}$.

Já a $\tau_{Trad.ENS/ENPA}$: consiste em adicionar os números pela justaposição dos algarismos diferentes de zero de cada termoda adição, ou seja, 2 unidades de milhar 5 centenas 9 dezenas e 1 unidade = 2000 + 500 + 90 + 1 = 2 591 e reduzir a $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$. A ausência de unidade em uma certa ordem revela a função do numeral 0 (zero)[220]. Por exemplo, 2 unidades de milhar 9 dezenas e 1 unidade = 2000 + 0 + 90 + 1. A θ para essa τ é:

- θ_P;

- $\theta_{trad.ENS/ENPA}$: Traduzir da ENS para ENPA; multiplicar por 1000 equivale a escrever três zeros à direita, ou seja, $2 \times 1000 = 2000$ e assim por diante. Em seguida, faz-se para a ENA e se traduz este escrito em ENS.

[219] Essa θ já foi apresentada no
Quadro 18 - Praxeologia referente a $T_{Trad.ENS/ENFC}$ (e $T_{Trad.ENFC/}$ENS).
[220] O zero representa a ausência de unidade numérica, seja na ordem da unidade, dezena, centena, etc.

- $\theta_{trad.EN/NF}$: Pode aparecer como uma θ intermediária em todas as técnicas de posição mencionadas acima. Por exemplo, 2 unidades de milhar 5 centenas 9 dezenas e 1 unidade ou 2 × 1000 + 5 × 100 + 9 × 10 +1 ou 2000 + 500 + 90 + 1 são falados como dois mil quinhentos e noventa e um.

As praxeologias supramencionadas referente ao tipo de tarefas $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENPA}$, $T_{Trad.ENS/ENP}$ (e $T_{Trad.ENCC/ENS}$, $T_{Trad.ENPA/ENS}$, $T_{Trad.ENP/ENS}$), modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 19 abaixo.

Quadro 19 - Praxeologia referente a $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENPA}$, $T_{Trad.ENS/ENP}$

$T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENPA}$ e $T_{Trad.ENS/ENP}$	Traduzir a escrita numérica simples na escrita numérica canônica.
$\tau_{Trad.ENS/ENCC}$	Escrever por justaposição o número de unidades isoladas, dezenas isoladas, etc.
$\theta_{Trad.ENS/ENCC}$	θ_P: (Posicional) As unidades da primeira ordem são escritas na primeira fila, as unidades da segunda ordem são escritas na segunda fila, etc.
$\tau_{Trad.ENP/ENS}$	Expressar 2 × 1000 + 5 × 100 + 9 × 10 +1 = 2 591 por justaposição dos coeficientes em potências de 10.
$\theta_{Trad.ENP/ENS}$	- θ_P: o número 2 é o coeficiente de 1000, o número 5 é o coeficiente de 100, etc. - $\theta_{Trad.ENP/ENCC}$: Traduzir da ENPD para ENCC, por exemplo, 2 × 1000 + 5 × 100 + 9 × 10 +1 = 2 unidades de milhar 5 centenas 9 dezenas e 1 unidade e reduzir a $\tau_{Trad.ENCC/ENS}$.
$\tau_{Trad.ENS/ENPA}$	Adicionar os números pela justaposição dos algarismos diferentes de zero de cada termo da adição e reduzir a $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$.
$\theta_{Trad.ENS/ENPA}$	- θ_P; - $\theta_{Trad.ENS/ENPA}$:Traduzir da ENPDM para ENPDA e, em seguida, traduzir para ENS. - $\theta_{EN/NF}$: Ligação entre a escrita numérica e a numeração falada.
$\Theta_{Trad.ENS/ENFC}$	Aritmética elementar

Fonte: O autor (2020)

As OM_{Trad} em conversões

As OM_{Conv} são tipos de tarefas que envolvem o aspecto decimal. Durante essa pesquisa foram apresentados tipos de tarefas propostas para expressar um determinado número e sua escrita em diversas unidades. Nesse sentido, os *ostensivos* selecionados foram ENCC, ENPA e ENP, para o mesmo tipo de de registro, e a escrita numérica. Na escola que oferta o EF I foi possível encontrar os mais variados tipos de tarefas de conversão como "encontrar o número de (unidades, dezenas, centenas, ...), decompor ou recompor números, dentre outos. Assim, alguns tipos de tarefas de conversão selecionados foram adaptadas das obras de Tempier (2013) e Chaachoua (2016), desenvolvidas logo abaixo.

As OM_{Conv} para o mesmo tipo de ostensivo escrito: $T_{Conv.ENCC}$, $T_{Conv.ENA}$ e $T_{Conv.ENP}$.

Esses tipo de tarefas circunda a conversão[221] de um número de uma unidade para outra unidade. Essas unidades podem ser expressas em unidades numéricas ou escritas usando potências de 10.

As técnicas para resolver os $T_{Conv.ENCC}$, $T_{Conv.ENPA}$ e $T_{Conv.ENP}$ são: $\tau_{Conv.ENCC}$, $\tau_{Conv.ENPA}$ e $\tau_{Conv.ENP}$. A tecnologia (θ) que predomina para esses tipos de tarefas é:

- θ_D: Dez unidades de uma certa ordem são iguais a 1 unidade da próxima ordem superior. Por exemplo, dez unidades é igual a uma dezena ou $10 \times 1 = 10$.

A $\tau_{Conv.ENCC}$ consiste em converter um número de uma certa ordem para a próxima ordem superior. Por exemplo, 30 dezenas = 3 centenas. A θ que justifica essa técnica é:

- $\theta_{Conv.ENCC/\,ENP}$: Traduzir da ENCC para a ENP, ou seja, 30 dezenas = (3×10) dezenas, e seguir para θ_D. Como 10 dezenas são 1 centena, então (3×1) centena = 3 centenas. (relação entre unidades).

Há uma outra τ que provem de $\tau_{Conv.ENCC}$: $\tau_{Conv.ENCC.1}$ que consiste em converter de ENCC para ENC e relizar o truncamento. Assim, escrever em números e usar o truncamento[222].

---

[221] Vamos seguir a proposta de Tempier e trataremos apenas do caso de conversão de unidades em unidades de maior hierarquia ou seja, unidades consecutivas, mas informamos que existem outras conversões que não será exploradas nessa pesquisa.
[222] Consiste em tirar um número de uma ordem e colocar na próxima ordem superior. (Dicionário de sinônimos). Disponível em: < https://www.sinonimos.com.br/busca.php?q=truncamento >. Acesso em 25 out. 2019

Por exemplo, 30 dezenas escrevemos o numeral 0 (zero) para o valor de dezenas, o 3 então vem para classificar entre as centenas, ou seja, 3 centenas.

A $\tau_{Conv.ENP}$ consiste em utilizar a potência de 10[223] para fazer as conversões. A tecnologia que justifica essa técnica é:

$\theta_{Conv.ENP}$: Escrever o número em ENP, relacionar a unidades e seguir para θ_D. Por exemplo, $30 \times 10 = (3 \times 10) \times 10 = 3 \times (10 \times 10)$. E como $10 \times 10 = 100$, então $30 \times 10 = 3 \times 100$.

Já a $\tau_{Conv.ENA}$ consiste em utilizar escrita aditivas para permitir conversões apenas no caso de adições iteradas de potências de 10 ou ao utilizar as palavras "pacotes" (ou "grupos"). As justificativas[224] para este técnica são:

- $\theta_{Conv.ENA.1}$: Adicionar números de mesma unidade e seguir para θ_D. Por xemplo, 100 + 100 + ... + 100 = 1 000.

- $\theta_{Conv.ENA.2.}$: Converter adições iteradas de potências de 10 ao utilizar a palavra "pacotes". Por exemplo, 10 pacotes de 100 = 1 000.

As praxeologias supramencionadas referente ao tipo de tarefas $T_{Conv.ENCC}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 20 abaixo.

Quadro 20 - Praxeologia referente a $T_{Conv.ENCC}$, $T_{Conv.ENA}$ e $T_{Conv.ENP}$

$T_{Conv.ENCC}$	Converter um número de uma unidade para outra unidade.
$\tau_{Conv.ENCC}$	Converter um número de uma certa ordem para a próxima ordem superior.
$\theta_{Conv.ENCC}$	- θ_P - $\theta_{Conv.ENCC/\ ENP}$: Converter da ENCC para a ENP. - θ_D.
$\tau_{Conv.ENCC.1}$	Converter em de ENCC para ENC e realizar o truncamento.
$\theta_{Conv.ENCC.1}$	- $\theta_{Conv.ENCC/\ ENP}$: Converter da ENCC para ENC e realizar o truncamento.

223 Este caso reque atenção visto que o princípio decimal nos escritos em potências de 10 poderia ser compreendido pela tecnologia multiplicativa de cálculo (escrevendo um zero para a direita) que pode tornar as relações entre as unidades transparentes. (Tempier, 2013 *apud*. Chambris, 2008).

224 Tempier (2013, *apud*. Chambris, 2008) aponta que não é possível associar um número maior ou igual a dez com as unidades de número de palavras, por exemplo, não se fala "20 dezenas". Mas essa possibilidade é possível ao realizar as traduções e conversões de ENP usando ENM, e "20 dezenas" pode ser falado como 20 "pacotes de 10".

	- θ_D.
$\tau_{Conv.ENP}$	Consiste em utilizar a potência de 10 para fazer as conversões.
$\theta_{Conv.ENP}$	- θ_{ENP}: Escrever o número em ENP e relacionar a unidades. - θ_D.
$\tau_{Conv.ENA}$	Utilizar escrita aditivas para permitir conversões apenas no caso de adições iteradas de potências de 10 ou ao utilizar as palavras "pacotes" (ou "grupos")
$\theta_{Conv.ENA}$	- $\theta_{Conv.ENA.1}$: Adicionar números de mesma unidade. - θ_D. - $\theta_{Conv.ENA.2}$: Converter adições iteradas de potências de 10 ao utilizar a palavra "pacotes".
$\Theta_{Trad.ENS/ENFC}$	Aritmética elementar

Fonte: O Autor (2020)

A integração entre as OM_{Trad} e OM_{Conv}

Para integrar as OM_{Trad} e OM_{Conv} foram utilizadas os seguintes tipos de tarefas $T_{Trad.ENC/ENS}$ (e $T_{Trad.ENS/ENC}$), integradas a técnica de justaposição τ_{jus}.

O tipo de tarefas $T_{Trad.ENC/ENS}$ (e $T_{Trad.ENS/ENC}$) consiste em traduzir de ENC para ENS e vice-versa. Ele se encaixa bem em traduções envolvendo conversões. Por exemplo, 5 centenas 16 dezenas e 3 unidades. A ENC possui uma ordem com mais de 10 unidades. Foi descrito apenas o caso em que esta tradução diz respeito a ENS[225]. Para responder a $T_{Trad.ENC/ENS}$ (e $T_{Trad.ENS/ENC}$) selecionou-se a técnica τ_{jus}, que consiste em associar os números de unidades de cada ordem em sua posição na escrita numérica por justaposição. Esta justaposição só pode ser realizada nas três condições seguintes (com base nas tecnologias θ_P e θ_D conforme o quadro 18):

- condição $\theta_{CondResp}$: **respeitar o grau de cada unidade** na escrita em algarismos (as unidades simples são escritas na primeira linha a partir da direita, as dezenas para a segunda,

[225] Não foi possível mostrar, mas é possível encontrar o mesmo tipo de tarefas para as escritas de acordo com as potências de dez. (TEMPIER, 2013).

etc.), que pode ser necessário alterar a ordem em que as unidades são dadas antes de justapor a escrita numérica por algarismos. Por exemplo, 8C 1D 9U $4U_M$ é escrito como 4 819.

- condição $\theta_{CondUnida}$: **presença de cada unidade** (até a unidade de maior ordem) na escrita em algarismos, o que pode exigir a utilização do número 0 para marcar a ausência de unidades individuais. Por exemplo, $4U_M$ 1D 9U é escrito como 4 019.

- condição $\theta_{CondAlgar}$: **presença de números de um algarismo em cada posto** da escrita numérica, o que pode exigir conversões de unidade para unidade. Por exemplo, $4U_M$ 25C 12D 4U = $6U_M$ 5C 12D 4U = $6U_M$ 6C 2D 4U = 6 6244.

As praxeologias supracitadas referente ao tipo de tarefas $T_{Trad.ENC/ENS}$ (e $T_{Trad.ENS/ENC}$), modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 21 abaixo.

Quadro 21 - Praxeologia referente a $T_{Trad.ENC/ENS}$ pela técnica $\tau_{Trad.ENC/ENS.jus}$.

$T_{Trad.ENC/ENS}$ (e $T_{Trad.ENS/ENC}$)	Traduzir de ENC para ENS e vice-versa.
$\tau_{Trad.ENC/ENS.jus}$	Associar os números de unidades de cada ordem em sua posição na escrita numérica por justaposição.
$\theta_{Trad.ENC/ENS.jus}$	- θ_P. - θ_D. - $\theta_{CondResp}$: respeitar ao grau de cada unidade na escrita em algarismos (as unidades simples são escritas na primeira linha a partir da direita, as dezenas para a segunda, etc.), que pode ser necessário alterar a ordem em que as unidades são dadas antes de justapor a escrita numérica por algarismos. - $\theta_{CondUnida}$: presença de cada unidade (até a unidade de maior ordem) na escrita em algarismos, o que pode exigir a utilização do número 0 para marcar a ausência de unidades individuais. - $\theta_{CondAlgar}$: presença de números de um algarismo em cada posto da escrita numérica, o que pode exigir conversões de unidade para unidade.
$\Theta_{Trad.ENC/ENS.jus}$	Aritmética elementar

Fonte: o autor (2020).

Uma OM para o tipo de Tarefas específica: T_{Cnd}

Esse tipo de tarefas T_{Cnd} é uma $T_{Trad.ENS/ENC}$ específica que consiste em determinar o "número de" unidades de uma determinada ordem. É um caso especial de conversão (de unidades simples para outra unidade). Mas também pode ser considerado como um tipo de tarefas no cálculo: divisão por potências de 10.

A técnica para responder T_{Cnd} é a de truncamento para uma determinada ordem de unidade. Essa $\tau_{Cnd.trunc}$: consiste considerar o número formado por todos os algarismos localizados a partir da classificação da ordem da unidade considerada (da direita para a esquerda). Isso equivale a remover todos os números das fileiras de ordens inferiores. Por exemplo, no número 5 986 há 98 dezenas. A τ_{trunc} é constituída pelas seguintes tecnologias (θ):

- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior.

- $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais alagarismos por ordem.

Essa tecnologia proporciona o aparecimento de uma outra técnica: $\tau_{multi\text{PD}}$, técnica de justaposição de zeros (ou "regra dos zeros") que consiste em escrever tantos zeros à direita do número inicial na ENS quanto o número de zeros na potência de dez. Por exemplo, 45 × 1000 = 45 000.

Essa técnica é justificada pela seguinte θ:

- $\theta_{multi\text{PD}}$: Revisar $\theta_{Cnd.trunc.1}$ e $\theta_{Cnd.trunc.2}$. Por exemplo, multiplicar 45 por 100 é equivalente a determinar a ENS de 45 centenas, que equivale a 4 dezenas 5 unidades e 4 dezenas de centenas = 4 mil, então 45 centenas = 4 unidades de milhar 5 centenas = 4500. Todas as conversões que já foram realizada tornam-se possíveis.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas T_{Cnd}, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 22 seguinte.

Quadro 22 - Praxeologia referente a T_{Cnd}

T_{Cnd}	Determinar o "número de" unidades de uma determinada ordem.
$\tau_{Cnd.trunc}$	Consiste em considerar o número formado por todos os algarismos localizados a partir da classificação da ordem da unidade considerada (da direita para a esquerda).

$\theta_{Cnd.trunc}$	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior. - $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais algarismos por ordem.
τ_{multi}PD	(técnica de justaposição de zeros ou “regra dos zeros”): consiste em escrever tantos zeros à direita do número inicial na ENS quanto o número de zeros na potência de dez.
θ_{multi}PD	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$; - $\theta_{Cnd.trunc.2}$.
Θ_{Cnd}	Aritmética elementar

Fonte: O autor (2020)

As OM_{Trad} e OM_{Conv} apresentadas evidenciaram algumas OM que também estavam presentes no MPD, sendo que neste modelo, prevalesceu as $OM_{incompletas}$ sem uma justificativa para as técnicas apresentadas, especialmente, nas praxeologias institucionais abordadas na *observação de classe interna*. Portanto, a organização das OM_{Trad} e OM_{Conv} apontaram um caminho para o desenvolvimento de organizações didáticas (OD) nos mais diversos recursos além da aplicação de atividades.

Na sequência foram apresentada as possíveis *razão de ser* para o aspecto decimal articulado ao posicional evidenciando a importância (epistemológica) do estudo sobre o SND.

Possíveis razões de ser para as conversões entre unidades de contagem

As conversões são essenciais para o trabalho sobre o aspecto decimal da numeração. Nesse sentido, a seguir, as possíveis razões de ser para as conversões entre as unidades a fim de mostrar as diferentes utilizações possíveis dessas conversões na matemática no EF I. Para isso, a proposta da Tempier (2013)foi seguida a fim de evidenciar essas razões de ser para as conversões entre unidades para “números grandes” e as possibilidades de trabalho sobre sistemas de medidas e números decimais[226]. Para as técnicas apresentadas, daremos apenas os elementos tecnológicos da numeração.

O cálculo nas quatro operações

Adição: Para a tarefa de adicionar dois números naturais, a τ_{Adi} consiste em alinhar os números por ordem da direita para a esquerda. A θ_{Adi} é composta por θ_P e θ_D. Por exemplo, 1 695 + 152 = 1 847, que pode ser visualizado na figura 57.

Figura 57 - Operação de adição entre os números 1695 e 152.

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{5} \\ + & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{array}$$

Fonte: o autor (2020)

As praxeologias supracitadas referente ao tipo de tarefas T_{Adi}, modelizada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 23 abaixo.

Quadro 23 - Praxeologia referente a $T_{Adicionar}$.

T_{Adi}	Adicionar dois ou mais números naturais
τ_{Adi}	consiste em alinhar os números por ordem da direita para a esquerda.
θ_{Adi}	- θ_P; - θ_D.
Θ_{Adi}	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Subtração: Para a tarefa subtrair dois números, a tecnologia é semelhante a da adição, ou seja, θ_{sub} é composta por θ_P e θ_D:

τ_{sub}: consiste em alinhar os números por ordem da direita para a esquerda e subtrair o minuendo do subtraendo. Quando o valor posicional do minuendo for menor que o subtraendo usamos a conversão de 10. A θ_{sub} é composta por θ_P e θ_D e $\theta_{Conv.OrdInf}$. Por exemplo, 826 - 152 = 674, , que pode ser visualizado na figura 58.

[226] Apenas as razões de ser que foram utilizadas nessa pesquisa, ou seja, algumas operações básicas no conjunto dos números naturais. As demais razões de ser podem fazer parte de futuras pesquisas.

Figura 58 - Operação de subtração entre os números 826 e 152

$$
\begin{array}{cccc}
 & 7 & & \\
 & \cancel{8} & 1\cancel{2} & 6 \\
- & 1 & 5 & 2 \\
\hline
 & 6 & 7 & 4
\end{array}
$$

Fonte: o autor (2020)

Durante a subtração, como não é possível subtrair 5 de 2, converteu-se ("tomou emprestado, utilizou a reserva ou quanto falta") 1 unidade da centena em 10 unidades da dezena e adicionamos as 2 unidades já existentes.

As praxeologias supramencionadas referente ao tipo de tarefas T_{Sub}, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 24 abaixo.

Quadro 24 - Praxeologia referente a T_{Sub}.

T_{Sub}	Subtrair dois ou mais números naturais.
τ_{Sub}	consiste em alinhar os números por ordem da direita para a esquerda.
θ_{Sub}	- θ_P; - θ_D. - $\theta_{Conv.OrdInf}$: Converter o número do minuendo de uma ordem para a próxima ordem inferior adicionando o número existente nessa ordem.
Θ_{Sub}	Aritmética Elementar.

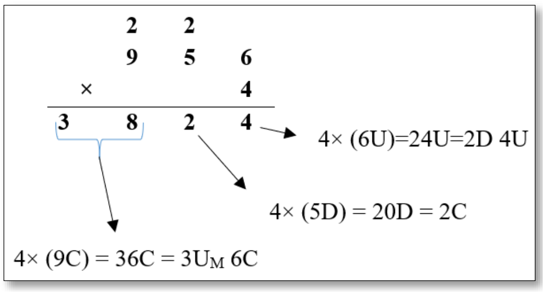
Fonte: O autor (2020).

Multiplicação: Para a tarefa multiplicar dois números, há duas técnicas: $\tau_{Multi.1}$ e $\tau_{Multi.2}$.

A $\tau_{Multi.1}$ consiste em multiplicar cada número do multiplicador por cada um dos números de unidades isoladas, da direita para a esquerda do multiplicando, e logo após, executar a conversão, quando possível. Por exemplo, ao multiplicar 956 × 4, fazemos 9 centenas 5 dezenas e 6 unidades multiplicado por 4 e obtemos (6 × 4= 24 unidades), (5 × 4= 20 dezenas) e (9 × 4= 36 centenas). Fazendo a conversão temos que: 24 U = 2D e 4U; 20 D = 2C e 36 C= $3U_M$ e 6C. Logo teremos $3U_M$ (6+2)C 2D e 4U = $3U_M$ 8C 2D e 4U.

Isto envolve então as relações entre as unidades no nível das deduções[227], como visto nos detalhes dos cálculos propostos. Durante as etapas de cálculo, algumas conversões foram apresentadas entre unidades do tipo 25 D = 2 C + 5 D. Ao contrário das adição e subtração, é possível ter conversões com mais de 10 unidades de uma determinada ordem em jogo. Essa técnica pode ser visualizada na figura 59.

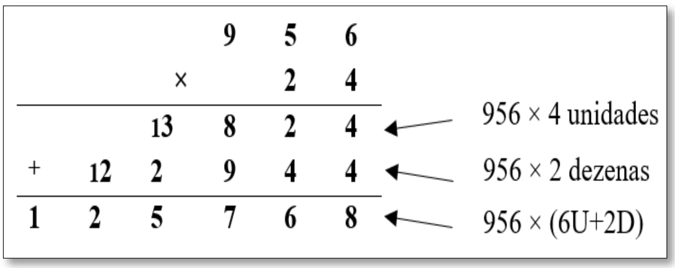
Figura 59 - Operação de multiplicação entre os números 956 e 4.



Fonte:o autor (2020).

Já a $\tau_{Multi.2}$ consiste decompor o (multiplicador) e realizar a multiplicação do multiplicando com o multiplicador. Por exemplo, ao multiplicar 956 × 24 = 956 × (2 dezenas + 4 unidades) = (956 × 2 dezenas) + (956 × 4 unidades). Assim, obtem-se duas multiplicações por números de um algarismo: 543 × 6 e 543 × 2 (nesta ordem). A multiplicação é realizada tanto para as dezenas quanto para as unidades, isto é, usando $\tau_{Multi.2}$. Logo após, desloca-se para segunda multiplicação, de forma que com o número de dezenas, mudamos a escrita de uma linha para a esquerda, o que leva a escrever um 0 à direita desse número. Essa técnia pode ser visualizada na figura 60 abaixo.

Figura 60 - Operação de multiplicação entre os números 956 e 24.



Fonte: O autor (2020).

[227] Essa dedudção não foi apresentadas, pois não contempla o objetivo dessa pesquisa.

A θ_{Multi} é estruturada numa conversão mais geral que permite justificar a compensação ou a possível escrita de zeros, ou seja, $\theta_{Multi.1}$ e $\theta_{Multi.2}$. Para $\theta_{Multi.1}$: θ_P, $\theta_{Multi.calc}$ e $\theta_{Conv.OrdSup}$. Já para $\theta_{Multi.2}$: θ_P, $\theta_{Trad.ENS/ENCC}$, $\theta_{Multi.calc}$ e $\theta_{Conv.OrdSup}$.

As praxeologias suprarreferidas referente ao tipo de tarefas T_{Multi}, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 25 abaixo.

Quadro 25- Praxeologia referente a $T_{Multiplicar}$.

T_{Multi}	Multiplicar dois números naturais.
$\tau_{Multi.1}$	Multiplicar cada número do multiplicador por cada um dos números de unidades isoladas, da direita para a esquerda do multiplicando.
$\theta_{Multi.1}$	- θ_P - $\theta_{Multi.calc}$: Cálculo de multiplicar números naturais. - $\theta_{Conv.OrdSup}$: Converter o produto de uma ordem para a próxima ordem superior adicionando o número existente nessa ordem.
$\tau_{Multi.2}$	
$\theta_{Multi.2}$	- θ_P - $\theta_{Trad.ENS/ENCC}$: Traduzir da ENS para a ENCC. - $\theta_{Multi.calc}$: Cálculo de multiplicar números naturais. - $\theta_{Conv.OrdSup}$: Converter o produto de uma ordem para a próxima ordem superior adicionando o número existente nessa ordem.
$\Theta_{Multi.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Divisão: Para a tarefa dividir dois números há a seguinte técnica: τ_{Div} que consiste em realizar a divisão nos seguintes casos:

- Dividendo (D) < dividor (d): Evocar a T_{Cnd} e realizar o truncamento. As justificativas são:

- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior.

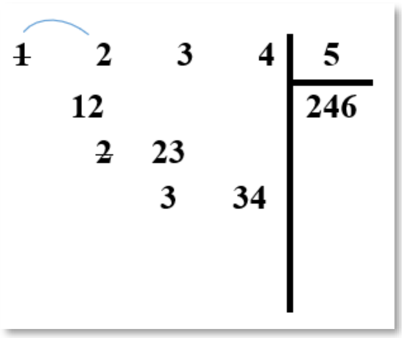
- $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais algarismos por ordem.

Assim, $D \geq d$, e é possível continuar o algoritmo considerando que o número de unidades do divisor seja imediatamente inferior ao dividendo. Vamos utilizar o mesmo exemplo concedido por Tempier (2013) e dividir 1 234 por 5.

T_{Div}: Dividir 1234 por 5.

$\tau_{Div.1}$: Dividir o primeiro número da esquerda, o 1. Mas 1 < 5, logo faremos a conversão $1U_M$ = 10 C ($T_{Conv.ENC}$), e 10 C +2 C =12 C. E como 12 C ÷ 5 = 2C e sobra resto 2 C. Da mesma forma, 2 < 5 então faremos a conversão 2C = 20 D, e 20 D + 3 D = 23 D. Como 23D ÷ 5 = 4 D e sobra resto 3D. Esse processo é repetido e 3D = 30 U, e 30 U + 4 U = 34U. Como 34 ÷ 5 = 6 e sobra resto 4. A τ_{Div} pode ser visualizada na figura 61.

Figura 61 - Operação de divisão entre os números 1234 e 5



Fonte: O autor (2020)

Tempier (2013) também apresentou outra técnica:

$\tau_{Div.1.2}$: Fazer a decomposição do dividendo em função do divisor, sempre do número de maior ordem. Veja esse procedimento na figura 62.

Figura 62 - Dividir um número usando a $\tau_{Div.2}$

12 centenas = 5 × $\boxed{2}$ centenas + 2 centenas

2 centenas + 3 dezenas = 23 dezenas (porque 1 centena = 10 dezenas)

23 dezenas = 5 × $\boxed{4}$ dezenas + 3 dezenas

3 dezenas + 4 unidades = 34 unidades (porque 1 dezena = 10 unidades)

34 unidades = 5 × $\boxed{6}$ unidades + 4 unidades

Em seguida, obtemos 1 234 unidades = 5 × (2 centenas + 4 dezenas + 6 unidades) + 4 unidades = 5 × 246 unidades + 4 unidades

Fonte: (TEMPIER, 2013, p. 57) (*tradução nossa*).

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas T_{Div}, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 26 abaixo.

Quadro 26 - Praxeologia referente a T_{Div}.

T_{Div}	Dividir dois números naturais.
τ_{Div}	Realizar a divisão nos seguintes casos: - Algarismo do Dividendo (D) > Algarismo do dividor (d) - Algarismo do Dividendo (D) = Algarismo do dividor (d) - Algarismo do Dividendo (D) < Algarismo do dividor (d). $\tau_{Div.1.2}$:Fazer a decomposição do dividendo em função do divisor, sempre do número de maior ordem, quando D < d. Nos demais casos, fazer a divisão direta.
θ_{Div}	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior. - $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais algarismos por ordem.
Θ_{Div}	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

O cálculo das potências de 10 (1, 10, 100, ...)

Este tipo de cálculo pode ser feito por ENPD (32 ×10 = 320) ou mentalmente em apoio ao oral (trinta e duas vezes dez é igual a trezentos e vinte). Ao contrário do cálculo, as técnicas usualmente utilizadas nem sempre usam conversões entre unidades, uma vez que poderiam ser interpretadas como tecnologias de computação, especialmente por causa do uso das escritas em potências de dez. O foco foi na possibilidade de usar conversões em técnicas de cálculo sobre as potências de 10, como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir.

Adicionar/subtrair potências de 10 ou múltiplos[228] de potências de 10

Como exemplo, veremos uma possível técnica para a adição de 1 000 a 2 310 e para a de 1 300 a 1 451:

- $\tau_{Adic.P.1}$: adicionar 1 000 a 2 310 é somar 1 unidade de milhar a 2 310 (unidades individuais). Em seguida, adicionou-se 1 a 2, o que dá 3 unidades de milhar ou 3 310;

- $\tau_{Adic.P.2}$: Adicionar 1 300 a 1 451 significa adicionar 13 a 1 451 (unidades individuais). Em seguida, adicionou-se 13 a 14, o que dá 27 centenas ou 2 751.

O que foi apresentado tem a vantagem de ser formulado da mesma forma para os casos com ou sem passagem para a unidade superior a uma ordem: adicionar 1 300 a 1 451 também é feito adicionando-se 1 unidade de milhar a 14 centenas e não adicionando 1 unidade de milhar a 4 centenas, o que levaria a distinguir os dois casos (adicionando 1 unidade de milhar a 1 451 e adicionando 3 centenas a 1 451). A técnica mostrada leva a um truncamento (determinando assim *o número de*: T_{Cnd}) para a ordem de unidades a serem adicionadas (ou subtraídas), depois para somar (ou subtrair) o número de unidades e terminar por recomposição ($T_{Trad.ENC/ENS}$) o número obtido levando em consideração o número de unidades simples restantes.

Há outras τ disponíveis que não foram desenvolvidas uma vez que as τ apresentadas contemplam essa pesquisa.

A θ na qual essa τ baseia-se para usar os T de numeração é o vínculo entre as potências de 10 e as unidades de numeração, por exemplo: adicionar 100 equivale a somar 1 centena ou adicionar 700, da mesma forma, somar a 7 centenas.

As praxeologias supraindicadas referente ao tipo de tarefas $T_{Adic.P}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 27 abaixo.

[228] Consideramos os múltiplos das potências de 10 da forma $n, n0, n00, \ \ldots \ \left(n \in \mathbb{N}; n \in \{1, 2, \ldots, 9\}\right).$.

Quadro 27 - Praxeologia referente a $T_{Adic.P}$ ou $T_{Sub.P}$.

$T_{Adic.P}$	Adicionar dois números em potencias de 10.
$\tau_{Adic.P.1}$ e $\tau_{Adic.P.2}$	- $T_{Adic.}$: Adicionar dois números naturais; - T_{Cnd}. - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da ENC para a ENS.
$\theta_{Adic.P}$	- θ_{D}.
$\Theta_{Adic.P}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Multiplicação por potências de 10

A τ usual de multiplicação em potências de 10 é escrever um ou mais 0 (zeros) à direita da escrita do número[229]. Por exemplo, considere a multiplicação de 123 por 10: 123×10 é escrita como 1 230 ao aplicar essa técnica.

Na multiplicação por 10, as unidades se tornam dezenas, dezenas de centenas, etc. Na multiplicação por 100, as unidades se tornam centenas, etc. Essas ideias são baseadas no princípio decimal de numeração.

As praxeologias supratranscritas referente ao tipo de tarefas $T_{Multi.P}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 28 abaixo.

Quadro 28 - Praxeologia referente a $T_{Multi.P}$.

$T_{Multi.P}$	Multiplicar dois números em potências de 10.
$\tau_{Multi.P}$	- $T_{Multi.P}$:
$\theta_{Multi.P}$	- $\theta_{D.}$ - $\theta_{CondUnida}$: presença de cada unidade (até a unidade de maior ordem) na escrita em algarismos, o que pode exigir a utilização do número 0 para marcar a ausência de unidades individuais.
$\Theta_{Multi.P}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

[229] Esse passagem é conhecida como “regra dos zeros".

Divisão por potências de 10

Uma τ é executar um truncamento na ordem da potência de 10 para determinar o quociente e depois considerar o número de unidades individuais restantes para o resto. Isso equivale ao tipo de tarefas de decomposição de um número em uma contagem numérica não-canônica ($T_{Trad.\ ENS/ENC}$) que usa o tipo de número de tarefas (T_{Cnd}).

Por exemplo, dividir 1 234 por 10 pode ser feito truncando 1 234 ao nível das dezenas, dando 123 para o quociente e 4 para o resto.

Na divisão por 10, dezenas tornam-se unidades, centenas de dezenas, etc. Na multiplicação por 100, centenas se tornam unidades e assim por diante. De maneira análogoa, essas ideias também são baseadas no princípio decimal de numeração.

As praxeologias sobreditas referente ao tipo de tarefas $T_{Div.P}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 29 abaixo.

Quadro 29 - Praxeologia referente a $T_{Div.P}$.

$T_{Div.P}$	Dividir dois números em potências de 10.
$\tau_{Div.P}$	- $T_{Div.P\_trunc}$: Determinar o quociente e depois considerar o número de unidades individuais restantes para o resto - $T_{Trad.\ ENS/ENC}$: Traduzir da ENS para a ENC. T_{Cnd}: Contar o *número de* realizando as conversões, quando necessário.
$\theta_{Div.P}$	- θ_D.
$\Theta_{Div.P}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Nesta seção, as razões de ser para o SND apontaram que a articulação entre o aspecto posicional e decimal é essencial para compreender o SND e, por conseguinte, pode ser considerado elemento essencial para estruturar as operações básicas, potências de 10, etc. Em síntese, as $OM_{Trad.}$ e OM_{Conv}, assim como as possíveis razões de ser das OM_{Conv} descritas por tarefas modeladas pelo gerador de tarefas, elemento do modelo T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2018). Após a introdução dessa modelação, a investigação seguiu para utilizar as $OM_{completas}$ supracitadas integrando o gerador de tarefas as variáveis, implementando, no processo de modelação, os materiais concretos manipuláveis como recurso.

6.2.4 A modelização de materiais manipuláveis integrados as OM no T4TEL

A introdução da modelização de OM no T4TEL (CHAACHOUA, 2016), como o suporte da dialética entre os *ostensivos* (gestos, discursos, manuscritos) e os *não-ostensivos* (idéias, intuições ou conceitos) levantados pela autora[230], que também foram empregados nessa investigação. Sendo assim, alguns ostensivos foram reapresentados, também discutidos, abreviados e exemplificados no MPD. Assim:

ENS - Escrita numérica simples. Refere-se a designação de um número com nosso sistema de numeração decimal posicional usual. Por exemplo, o número 4 536.

ENC - Escrita numérica composta. Esta pode ser consiredada de duas formas:

- **ENCC** - Escrita numérica composta canônica. O número nas ordens superiores a unidade deve ser menor que 10. Por exemplo, o número 4 536 é representado por 4 unidades de milhar, 5 centenas, 3 dezenas e 6 unidades (4 U_M 5C 3D 6U).

- **ENC** (não canônica). Nesse modelo é possível descrever as variáveis. Por exemplo, o número 4 536 é pode ser escrito por 45 centenas 3 dezenas e 6 unidades (45C 3D 6U) ou 453 dezenas e 6 unidades (453D 6U).

ENPD - Escrita numérica em potências de dez. Por exemplo, $(4\times1000)+(5\times100)+(3\times10)+6$. Há outras formas de se escrever em potências de 10, sendo:

- **ENPDAC** - Escrita numérica em potências de dez aditiva canônica. Por exemplo, $4\ 000+500+30+6$.

- **ENPDA** (não canônica). Por exemplo, $4\ 500+30+6$.

ENT - Escrita numérica em tabelas. São as escritas no Quadro Valor lugar (QVL). Por exemplo, no quadro 30, a escrita numérica de 4 536 pode ser representada sob as formas ENC e ENCC:

Quadro 30 - Representação do Quadro Valor Lugar

Classe dos Milhares			Classe das Unidades Simples		
Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
		4	5	3	6
			45	3	6

[230] A partir da tese de Tempier (2013).

				453	3
					4536

Fonte: O autor (2020)

ENF - Escrita numérica em língua materna. Esse ostensivo contempla apenas a **ENCC** em língua materna. Por exemplo, quatro mil quinhentos e trinta e seis ($4U_M$ 5C 3D 6U).

ENM - Escrita numérica nos materiais concretos manipuláveis[231]. Esse ostensivo emerge do ostensivo **ENCC** em que cada ordem pode asumir no máximo o número 9, isto é, o aspecto decimal da numeração. O material concreto manipulável ábaco representa perfeitamente esse ostensivo.

A partir das descrições desses ostensivos destacamos dois tipos de tarefas que afloram o aspecto decimal da numeração: T_{Trad} e T_{Conv}. Para o tipo de tarefas T_{Conv}, uma tarefa $t \in T_{Conv}$ pode ser t: Converter 305 dezenas em 3 unidades de milhar e 5 unidades, permanecendo no mesmo extensivo **ENC**. Já uma tarefa $t \in T_{Trad}$, em que t: traduzir 305 dezenas em 3 000 + 50. Há uma mudança de ostensivo, do **ENC** para a **ENPA**.

6.2.4.1 As variáveis no T4TEL

Para as mudanças entre os ostensivos, ou seja, as variações, Chaachoua (2016) implementou 8 variáveis que, amparadas pelo T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2018), auxiliou o modelização das Oms. As variáveis foram dispostas no quadro 31 abaixo.

Quadro 31 - As variáveis elaboradas para a construção das praxeologias

V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
tamanho da coleção	Multiplo de 10	Designação (nomear) do número	Tipo de material	Organização do material	Disponibili-dade do material	Presença do material	Configuração das ordens das unidades

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 25, tradução nossa).

Ao utilizar os resultadas da pesquisa de Chaachoua (2016), as variáveis que integraram ambos os aspectos do SND foram V2, V6, V7 e V8[232], de forma que V2 auxiliou o aspecto

[231] Chamado de Materiais manipuláveis.
[232] Indicamos a cor cinza, na coluna do
Quadro 31, para indicar as variáveis que foram utilizadas para emergir o aspecto decimal do SND

decimal pelas tarefas de tradução (T_{Trad}) e conversão (T_{Conv}) e as variáveis V6, V7 e V8 auxiliaram esse aspecto por meio da manipulação dos materiais concretos.

Aa compreensão e a forma de organização de cada variável disponibilizada e a viabilidade dessas variáveis no sentido de promover o aspecto decimal nas AEPS foram descritos da seguinte forma:

V1: **Tamanho da coleção**. Para isso utilizou-se intervalos como: [1...10]; [10...100]; [100...1 000] [1 000 ... 9 999] [10 000 ... 99 999].

V2: **Multiplos de 10**. A cardinalidade do número é múltiplo de 10, sem unidades individuais após o agrupamento.

V3: **Designação do número**. Diante dos ostensivos manuscritos apresentados, destacamos aqueles presentes no quadro 32 abaixo.

Quadro 32 - Os valores da variável "Designação do número"

Ostensivos Escrita	ENS	ENC	ENP e ENPAC	ENT	ENF	ENM
Exemplo	486	4C 8D 6U	(4x100) + (8x10) + 6 e 400 + 80 + 6	tabela	Quatrocentos e oitenta e seis	Materiais manipulativos

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 25, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

V4: **Tipo de material**. Refere-se ao tipo de material que foi utilizado na experimentação.

Os materiais que foram utilizados nessa investigação podem ser abordados nos seguintes tipos: <u>Proporcional agrupados</u>: Este material foi organizado com palitos e elástico para formar uma dezena ao agrupar dez palitos, uma centena ao agrupar cem palitos, e uma unidade de milhar ao agrupar mil palitos; o proporcional ao passar de uma unidade a outra pelo mesmo coeficiente, e <u>não proporcional pré-agrupado</u> ao mudar de coeficiente como o ábaco e o material dourado. Isso pode ser visualizado no quadro 33 seguinte.

Quadro 33 - Material do tipo proporcional agrupável utilizado em nossa pesquisa[233].

Unidade	Dezena	Centena	Milhar
			

Fonte: Os autores (2020).

V5: **Organização do material**. Essa variável só faz sentido se o material for proporcional, já que é levada em conta apenas para coleções onde a contagem perceptiva é possível. Ela leva os valores:

-V_{ale}: apenas unidades individuais aleatoriamente são fornecidas sem nenhum agrupamento. V_{ale} possui dois sub-valores: "V_{ale} Sobreposta" quando as unidades são organizadas de modo que algumas sejam sobrepostas e "V_{ale} não-sobreposta": no outro caso.

- **Parcialmente agrupado**: quando há pelo menos um agrupamento e pelo menos uma unidade de numeração cujo número é maior que 9, ou seja, 15 dezenas + 7 unidades simples. Isso foi representado pelo ostensino ENCe pelas tarefas de conversão (T_{Conv}).

- **Agrupado**: quando o número de cada unidade de numeração não for maior que 9, sendo: Grupo ordenado, quando organizado pela unidade de contagem decrescente da esquerda para a direita em que não há uma sobreposição dos elementos de cada unidade de contagem. Este valor dá acesso direto ao ostensivo ENCC. Já Grupo não ordenado atende aos demais casos.

V6: **Disponibilidade do Material**: a forma com o material está disponível aos estudantes. O material pode ser *limitado* quando o número de agrupamento de uma ordem de unidade é fixado, de modo que o estudante é obrigado a usar outras ordens de unidade por meio das conversões e traduções entre as unidades, por exemplo, um estudante tem que produzir uma coleção de 13 dezenas e ele tem uma coleção limitada a 10 dezenas e 10 centenas (simples), há uma necessidade pela mobilização de relações entre as unidades, seja para converter 10 dezenas

[233] Esse material, nessa investigação, foi apoiado no material desenvolvido por Tempier (2013).

em cem ou traduzir 13 D (ENC) para 130 U (ENS) (CHAACHOUA, 2016), ou *ilimitado*: quando há agrupamentos suficientes das diferentes ordens de unidades.

V7: **Presença do material**. Essa variável leva 3 valores, mas para esta pesquisa foi utilizada apenas o valor *Manipulável*, que representa o material físico que pode ser manipulado diretamente, a fim de considerar a interação entre os estudantes entre si e os estudantes com os materiais, modificando a forma de apresentação destes pela manipulação.

V8: **Configuração das ordens das unidades**. Esta variável aceita dois valores: *Homogêneo* quando o material apresenta um único tipo de ordem correspondente à mesma unidade de numeração. Por exemplo, o material consiste em pacotes de cem. Já material *Heterogêneo* consiste em pelo menos dois ou mais tipos de agrupamento correspondentes a diferentes unidades numéricas, ou seja, material com pacotes de 100 e unidades individuais. A mudança nessa variável, especialmente, em tarefas de conversão (T_{Conv}) privilegia técnicas em que prevalesce o aspecto decimal.

O modelo proposto por Chaachoua (2016) utilizou 10 tipos de tarefas T_{C_ENS}: “Contar uma coleção em escrita numérica simples” para gerar outras tarefas que pode ser entendida como subtipos de tarefas de T_{C_ENS}. Mas foram adaptados, para esta investigação, os 5 tipos de tarefas que promoveram o ensino do aspecto decimal da numeração, integrando-o ao aspecto posicional, dentre eles; $T_{C\_ENS.Vale\_10k}$ (Contar uma coleção aleatória cujo o número de itens é múltiplo de 10 e menor que 1000), $T_{C\_ENS.Gr.Hom}$ (Contar uma coleção de grupo homogênio), $T_{C\_ENS.PGr}$ (Contar uma coleção parcialmente agrupada), $T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$ (coleção homogênia parcialmente agrupada) e $T_{C\_ENS.PGr\_Het}$ (coleção heterogênia parcialmente agrupada).

Esses tipos de tarefas foram desenvolvidos com as variáveis V1, V2, V5, V8, uma vez a variável V4 foi fixada para o valor “Proporcional-Agrupável”, já que tarefas de agrupamentos por decomposição e composição auxiliaram o aspecto decimal do SND para números naturais e a mudança desta variável poderia ser utilizada para tarefas acerca do objeto operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) dos números naturais, e a variável V7 foi limitada ao caso “manipulável” já que os materiais concretos manipuláveis podem promover uma relação pessoal do estudantes com o SND diferente das tarefas propostas destacadas no modelo de ensino *euclidiano* ou *clássico* (GASCÓN, 2003; 2011), alicerçado pela *monumentalização do saber* (CHEVALLARD, 2012), conforme analisado no MPD. Essas variáveis foram organizadas conforme o quadro 34.

Quadro 34 - Variáveis selecionadas para o tipo de tarefa T_{C_ENS}

<table>
<tr><th>V</th><th>Nome</th><th colspan="5">Valores</th></tr>
<tr><td>V1</td><td>Tamanho da coleção</td><td colspan="5">Intervalos na forma [10^n ...10^m] ou [10^n ...]</td></tr>
<tr><td>V2</td><td>Multiplo de 10</td><td colspan="3">Sim</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td>V4</td><td>Tipo de material</td><td colspan="5">Proporcional-Agrupável</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V5</td><td rowspan="2">Organização do material</td><td colspan="2">Aleatório</td><td rowspan="2">Parcialmente agrupável</td><td colspan="2">Grupos</td></tr>
<tr><td>Organizado</td><td>Desorganizado</td><td>Ordenados</td><td>Não-ordenados</td></tr>
<tr><td>V7</td><td>Presença do material</td><td colspan="5">Manipulável</td></tr>
<tr><td>V8</td><td>Configuração das ordens das unidades</td><td colspan="3">Homogênio</td><td colspan="2">Heterogênio</td></tr>
</table>

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 31, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

6.2.4.2 As modelização das OMP no T4TEL

Este segmento da investigação foi composto pela descrição das OM descritas com o intuito de revelar o aspecto decimal a partir dos tipos de tarefas[234] já apresentados na OM_{Trad} e OM_{Conv}, bem com ao razão de ser dessas OMs.

6.2.4.2.1 As OM associadas ao tipo de tarefas T_{C_ENS}.

Ao iniciar a elaboração das praxeologias associadas ao Tipo de tarefas T_{C_ENS} considerou-se que há duas técnicas para contagem de números naturais: a contagem em *numeração simples* que consiste em contar em unidade (um em um), dezena (dez em dez), centena (cem em cem), etc.,, de forma que a última palavra corresponde ao cardinal da coleção. A outra técnica é a contagem em *numeração composta* consiste em contar um a um todos os objetos pertencentes à mesma unidade numérica, sendo: uma unidade, duas unidades, três unidades, etc. ou uma dezena, duas dezenas, três dezenas, etc., sendo que é essencial um passo para converter a última palavra falada em *unidades simples* para determinar o cardinal. Essa técnica mobilizou, necessariamente, o aspecto decimal.

As técnicas de conversão e de agrupamento, seguidas por trocas e conversões, também foram técnicas que permitiram identificar quais praxeologias mobilizam o aspecto decimal.

[234] As OM propostas foram adaptações das OM apresentadas nos resultados das pesquisas de Chaachoua (2016).

As OM apresentadas abaixo, alicerçadas na pesquisa de Chaachoua (2016), foram estruturadas levando em consideração a variável V5 (Organização do material) desenvolvidos por “Aleatórios (V_{ale})”, “Agrupados” e “Parcialmente agrupados” já que as tarefas descritas abaixo apontavam para o aspecto decimal como tecnologias (θ), que associado a epistemologia da Aritmética elementar (a teoria (Θ)) constitui o *logos*. Portanto, as mudanças na variável 5 possibilitarama reconstrução das $OM_{completas}$, que corresponde a dimensão epistemológica do problema didático (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013).

6.2.4.2.1.1 As OM associadas ao material de forma “Aleatória” (V_{ale}*)*

Para a descrição das OM foi essencial visitar como é estruturada uma coleção em *numeração simples* sem qualquer tipo de agrupamento, ou seja, organizado de forma aleatória.

Uma coleção aleatória em grandes quantidades “V_{Ale}”

Para o tipo de tarefas “Contar uma coleção aleatória ”, que modelado na estrutura[235] do T4TEL, resulta na seguinte OMs:

$T_{C\_ENS.Vale}$ = (Contar uma coleção por escrita numérica simples; V5 = aleatória)

Observando a variável V5 “coleção aleatória”, há 4 praxeologias possíveis, que foram descritas, a partir das seguintes técnicas:

Primeira técnica $\tau_{C\_ENS.Vale}$ consiste em realizar a contagem de 1 em 1, logo é válida para todos os valores das outras variáveis (V1,V2 e V8), e se apoia em dois tipos de tarefas:

- $T_{CUS.1}$: Contar em unidade simples (de 1 a 1).

-$T_{Trad.ENM/ENS:}$ Traduzir o número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

A técnica do tipo de tarefa $T_{CUS.1}$ é baseada na contagem de objetos de uma coleção usando a numeração oral seguindo duas tarefas: “escolher um item de uma coleção e saber escolher o último elemento” (CHAACHOUA, BESSOT, 2016, p. 32, *apud*. BRIAND,1999, p.53). Além disso, essa técnica baseia-se nos seguintes quatro princípios[236]:

> **1) Princípio de correspondência termo a termo:** a relação de um objeto da coleção para contar para um número de palavra.

[235] Esse formalismo é entendido como a integração do gerador de tarefas com as variáveis.
[236] A obra de Teixeira (2019) supracita também retratou esses princípios.

> **2) Princípio da sequência estável** (ordem estável): a numeração oral.
>
> **3) Princípio da abstração:** a natureza dos objetos enumerados[237] não afeta o cardinal, utilizado também para contar um conjunto de objetos heterogêneos.
>
> **4) Princípio da indiferença de ordem:** a ordem de contagem dos objetos não afeta o cardinal. (CHAACHOUA, 2016, p. 36 *apud*. GELMAN, 1983)

Esses quatro princípios constituem a tecnologia do tipo de técnica de tarefa $T_{CUS.1}$, representado por θ_{CUS} tal que:

θ_{CUS}: é composta por 4 princípios, “correspondência de termo a termo”, “sequência estável”, “Abstração”, “indiferença da ordem”.

θ_{card}: o último número da palavra representa o número de itens na coleção[238].

$\theta_{ENS/NF}$: ligação entre a escrita numérica simples e oral.

As praxeologias supracitadas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale}$, modelizada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 35 abaixo.

Quadro 35 - praxeologia do tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale}$

$T_{C\_ENS.Vale}$	(Enumerar uma coleção por escrito, V5 = aleatória)
$\tau_{C\_ENS.Vale.1}$	- $T_{CUS.1}$: contar de 1 em 1. - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.Vale.1}$	- θ_{CUS}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre a escrita numérica simples e numeração falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale.1}$	Aritmética Elementar

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 33, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

A segunda técnica é $\tau_{C\_EC.Vale.2}$ que consiste em fazer agrupamentos sem considerar as unidades de numeração (que não é uma potência de 10), organizada no quadro 36.

[237] Enumerar é apresentado no sentido de contar todos os objetos de uma coleção, de modo a levar em consideração cada objeto uma única vez sem esquecer qualquer objeto. (CHAACHOUA, 2016, p. 33) (*tradução nossa*)
[238] Esse representa o princípio da Cardinalidade, descrito na Abordagem histórica e epistemológica.

Quadro 36 - Praxeologias do tipo de tarefa $T_{C\_ENS.Vale}$ para a técnica $\tau_{C\_EC.Vale.2}$

$T_{C\_ENS.Vale}$	(Contar uma coleção por escrita numérica simples; V5 =aleatório)
$\tau_{C\_ENS.Vale.2}$	- $T_{Gr.X}$: Fazer grupos que não são unidades de contagem - $T_{C.X}$: Contar de X a X, onde X não é uma potência de 10. - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.Vale.2}$	- θ_{CUS} : "Correspondência a termo", "sequência estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - $\theta_{M.X}$: Os múltiplos de X. - θ_{card} : O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre a escrita numérica simples e a numeração falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 34, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

Há duas outras técnicas em que foi possível fazer os agrupamentos respeitando as unidades de números (potências de 10) obtendo uma coleção agrupada, reduzida ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Gr}$ ou parcialmente agrupada, organizada no quadro 37 seguinte.

Quadro 37 - Praxeologias do tipo de tarefa $T_{C\_ENS.Vale}$ para a técnica $\tau_{C\_ENS.Vale.3}$

$T_{C\_ENS.Vale}$	(Contar uma coleção por escrito; V5 =aleatório)
$\tau_{C\_ENS.Vale.3}$	- T_{Gr} : Produzir uma coleção agrupada. - $T_{C\_ENS.Gr}$
$\theta_{C\_ENS.Vale.3}$	- $\theta_{T_{Gr}}$ - $\theta_{T_{C\_ENS.Gr}}$
$\Theta_{C\_ENS.Vale.3}$	Aritmética Elementar

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 34, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

A outra técnica, em que foi possível fazer os agrupamentos considerando as unidades de números (potências de 10) obtendo uma coleção parcialmente agrupada, reduzida por $T_{C\_ENS.PGr}$, organizada no quadro 38 seguinte.

Quadro 38 - Praxeologias do tipo de tarefa $T_{C\_ENS.Vale}$ para a técnica $\tau_{C\_ENS.Vale.4}$

$T_{C\_ENS.Vale}$	(Contar uma coleção por escrito; V5 =aleatório)
$\tau_{C\_ENS.Vale.4}$	- T_{PAgr} : Produzir uma coleção parcialmente agrupada. - $T_{C\_ENS.PAgr}$ (apresentada posteriormente)
$\theta_{C\_ENS.Vale.4}$	- $\theta_{T_{PAgr}}$ - $\theta_{T_{C\_ENS.PAgr}}$
$\Theta_{C\_ENS.Vale.4}$	Aritmética Elementar

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 34, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

As técnicas sobreditas não tiveram resultados satisfatórios para os estudantes mobilizarem o aspecto decimal da numeração. Mas elas foram descritas para estruturar outro tipo de tarefas, $T_{DC\_EC.Vrac\_10k}$, que também apontou o aspecto decimal,

Ao utilizar o tipo de tarefas "Contar pela escrita numérica uma coleção aleatória em que o número de elementos é um múltiplo de 10 a menor que 100" , que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.Vale\_10k}$ = (Contar pela escrita numérica uma coleção; V1= [10, ..., 100]; V2 = Sim; V5= aleatória)

Há duas técnicas disponíveis: contar em unidades simples ou em unidades em potências de 10:

$\tau_{DC\_\_EC.Vale\_10k.1}$: Essa técnica é fundamentada na contagem em unidades simples e consiste em fazer pacotes de dez e contar de 10 em 10. Ela consiste nos seguintes tipos de tarefas:

- $T_{Gr.dez}$: Produzir grupos de dez.

- $T_{CUS.dez}$: Contar de 10 em 10.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

As praxeologias supramencionadas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale\_10k}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 39 abaixo.

Quadro 39 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.Vale\_10k.1}$

$T_{C\_ENS.Vale\_10k}$	(Enumerar uma coleção por escrito; V1= [10, ..., 100]; V2= Sim; V5= desorganizada).
$\tau_{C\_ENS.Vale\ \_10k.1}$	- $T_{Agr.dez}$: Produzir grupos de dez. - $T_{CUNS.dez}$: Contar de 10 em 10. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.Vale\ \_10k.1}$	- θ_{CUNS}: “Correspondência a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença da ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre numeração escrita simples e numeração falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale\ \_10k.1}$	Aritmética Elementar

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 36, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

Já a técnica "$\tau_{DC\_\_EC.Vale\ \_10k.2}$" é estabelecida na contagem de unidades, ou seja, fazer grupos de dez e contar em potências de dez. Isso requer fases de conversão. A técnica é composta dos seguintes tipos de tarefas:

- $T_{Agr.dez}$: fazer grupos de dez.

- $T_{Conv.OrderSup}$: Converter para a unidade superior uma unidade cujo número é maior que 9. Esse tipo de tarefas mobiliza o aspecto posicional da numeração.

- T_{CUS}[239]: Contar em unidades numéricas (o número de dezenas).

- $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

As praxeologias supracitadas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale\_10k}$ para a $\tau_{C\_ENS.Vale\ \_10k.2}$, modelada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 40 abaixo.

[239] A tecnologia “θ_{CUS}” aplica-se igualmente bem se contamos em unidade simples como em unidade numéricas. Na verdade, apenas o princípio “termo de correspondência para termo” deve ser adaptado de acordo com a natureza do objeto, em um caso é um elemento simples e, no outro é um agrupamento. (CHAACHOUOA, 2016, p. 37) (*tradução nossa*). Adaptado pelos autores.

Quadro 40 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$

$T_{C\_ENS.Vale\_10k}$	(Enumerar uma coleção por escrito; V1= [10, ..., 100]; V2= Sim; V5= aleatória).
$T_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	- $T_{Agr.dez}$: Fazer grupos de dez. - $T_{Conv.OrdreSup}$: Converter para uma unidade superior uma unidade cujo número é maior que 9. - T_{CUS}: Contar por unidade de numeração (o número de dezenas). - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	- θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - θ_{CUS}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre escrita numérica simples e numeração falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 37, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

6.2.4.2.1.2 As OM associadas ao material "Agrupado"

Para as OM associadas a organização "Agrupada" do material, a coleção foi constituída de forma que os número de cada unidade numérica não seja maior que 9 (aspecto posicional) e, para isso, o tamanho da coleção é necessariamente maior que 10 a fim de proporcionar várias *unidades em potências de 10* (aspecto decimal).

A coleção "agrupada" pode ser "homogênea" ou "heterogênea". Para integrar o MPR dessa investigação foi utilizada apenas a coleção "agrupada homogênea" visto que a "heterogênea" apresentou técnicas que não mobilizam o aspecto decimal[240].

No entanto, há uma técnica que deve ser empregada quando o material é agrupado, uma vez que esta consiste em desfazer todos os agrupamentos em *escrita numérica simples* (ENS)

[240] Refere-se a uma das conclusões da pesquisa de Chaachoua (2016).

e reduzir ao caso em que o material é aleatório (V_{ale}). Diante disso, o tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Gr}$, modelado no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completa}$ representada no quadro 41 seguinte.

Quadro 41 - Praxeologia do tipo de exercícios $T_{C\_ENS.Agr}$

$T_{C\_ENS.Gr}$	(Contar uma coleção por escrito; V1 = [10, ...] ; V5 = agrupados)
$\tau_{C\_ENS.PGr.1}$	- $T_{Desfazer}$: Desfazer todos os agrupamentos (restabelecer para unidades simples). - $T_{C\_ENS.Vale}$: Contar uma coleção desorganizada por escrito.
$\theta_{C\_ENS.PGr.1}$	- $\theta_{Conserv.}$: O cardeal da coleção não muda se desfizermos ou reagruparmos os elementos. - $\theta_{T_{C\_ENS.Vale}}$
$\Theta_{C\_ENS.PGr.1}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 37, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

Para as OM associadas ao material organizado por “Agrupamento homogêneo”, o seguinte tipo de tarefas considerado foi “Contar por escrita numérica uma coleção agrupada homogeneamente”, que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.Agr\_Hom}$ = (Contar uma coleção por escrito; V1= [10, ...]; V5=Agrupamento; V8 = Homogênio)

O tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Agr\_Hom}$ pode ser exemplificado como uma coleção com 7 pacotes de 10 (dezena). Há duas técnicas para resolver esse tipo de tarefas: a “$\tau_{C\_ENS.Agr\_Hom.1}$” e “$\tau_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$”, sendo que a primeira é estruturada para a contagem em unidades simples, o que impossibilitou a manifestação do aspecto decimal. Portanto, foi descartada para a essa pesquisa. Já a segunda é baseada na contagem em potências de 10 materializando o aspecto decimal.

Sendo assim, a técnica “$\tau_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$” é constituída dos seguintes tipos de tarefas:

- T_{CUS}: Contar em unidade numérica simples;

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).

As praxeologias sobreditas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.\ Agr.Hom}$, modelizada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 42 abaixo.

Quadro 42 - Praxéologie do tipo de exercícios $T_{C\_ENS.Agr}$

$T_{C\_ENS.\ Agr.Hom}$	(Contar um coleção por escrita criptografada; V1 = [10,...] ; V5 = Agrupado; V8 = Homogênio)
$\tau_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$	- T_{CUS}: Contar em unidade de numeração; - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (EC). - $T_{Conv.ENC/EC}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (EC).
$\theta_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$	- θ_{CUS}: "Correspondência a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre escrita numérica simples e numeração falada. - θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\Theta_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 37, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

6.2.4.2.1.3 As OM associadas ao material "Parcialmente Agrupado"

Para essas OM, a coleção consiste em uma ou mais unidades numéricas, mas há pelo menos um grupo de unidades numéricas cujo número é maior que 9. O tamanho da coleção é necessariamente maior que 10 a fim de se ter várias unidades numéricas.

Para as OM associadas ao material organizado por "Parcialmente agrupado", o seguinte tipo de tarefas considerado foi "Contar uma coleção parcialmente agrupada por escrito", que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.PAgr}$ = (Contar uma coleção por escrita numérica; V1= [10, ...]; V5= Parcialmente agrupado)

O tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr}$ pode ser exemplificado como uma coleção com 8 pacotes de 100 (centena) e 15 pacotes de 10 (dezena). Diante disso há cinco técnicas disponíveis para esse tipo de tarefas: "$\tau_{C\_ENS.PAgr.1}$", "$\tau_{C\_ENS.PAgr.2}$", "$\tau_{C\_ENS.\ PAgr\_Hom}$", "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$" e "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$" (CHAACHOUA, 2016). A primeira técnica não mobilizou o aspecto decimal, logo não será desenvolvida em nossa pesquisa. As demais técnicas mobilizam o aspecto decimal, sendo que as técnicas "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$", "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$" e "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$" consideram a variável V8, tanto para homogênea quanto heterogênea. Dessa forma, os matérias puderam ser organizados de formas distintas.

A técnica "$\tau_{C\_ENS.PAgr.2}$": é estruturada na transformação da coleção parcialmente agrupada em uma coleção agrupada, e requer conversões de unidades seguidas pelo tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Agr.}$ supracitada. É uma questão de converter uma unidade para a unidade superior cujo número é maior que 9, ou seja, equivale a fazer agrupamentos de 10. Essa técnica consiste nos seguintes tipos de tarefas:

- T_{CUC}: contar em unidades numéricas composta (o número da dezena ou da centena)

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.OrderSup}$: Converter uma unidade para a unidade superior cujo número é maior que 9.

- $T_{C\_ENS.Agr}$: Contar por escrito uma coleção agrupada por escrita escrita numérica simples (ENS).

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 43 abaixo.

Quadro 43 - Praxeologia do tipo de exercícios $T_{C\_ENS.PAgr}$

$T_{C\_ENS.PAgr}$	(Contar uma coleção na forma escrita numérica simples; V1=[10...];V5= Parcialmente agrupado)

$\tau_{C\_ENS.PAgr.2}$	- T_{CUC}: Contar em unidades numéricas composta (o número da dezena) - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter uma unidade para uma unidade superior cujo número seja maior que 9. - $T_{C\_ENS.Agr}$: Contar por escrito uma coleção agrupada por escrita escrita numérica simples.
$\theta_{C\_ENS.PAgr.2}$	- θ_{CUS}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - $\theta_{T_{C\_ENS.Agr}}$
$\Theta_{C\_ENS.PAgr.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 44, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

Há mais três técnicas para dois subtipos de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr}$ para os casos em que a coleção é "homogênea" ou "heterogênea".

6.2.4.2.1.3.1 As OM associadas ao material "Parcialmente Agrupado Homogêneo"

Para as OM associadas ao material organizado por "parcialmente agrupada homogênea", o seguinte tipo de tarefas considerado foi "Contar em escrita numérica simples uma coleção parcialmente agrupada homogênea", que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$ = (Contar uma coleção por escrita numérica simples, V1= [10, ...]; V5 = Parcialmente agrupado; V8 = Homogêneo)

Esse tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$ pode ser exemplificado por uma coleção de 13 pacotes de 10 (1 dezena). Observe que esta coleção consiste em apenas um tipo de agrupamento.

A técnica "$\tau_{C\_ENS.PGr\_Hom}$" foi estruturada na conversão direta em unidades simples. Ela requer o conhecimento das relações entre as unidades para que o aspecto decimal seja mobilizado. A técnica é composta dos seguintes tipos de tarefas:

- T_{CUS}: Contar em unidades numéricas simples.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir o número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.ENCC/ENS}$: Converter a escrita em unidade composta para a escrita em unidade simples em que o número tenha mais que 1 dígito (adicione 0 à direita).

As praxeologias supratranscritas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$, modelizada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 44 abaixo.

Quadro 44 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{DC\_EC.PGr\_Hom}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$	(Contar uma coleção na forma escrita numérica simples; V1=[10...];V5= Parcialmente agrupado; V8 = Homogênio)
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$	- T_{CNC}: Contar em numeração composta. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir o número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.NC/NS}$: Converter a unidade composta para a unidade simples em que o número na frente seja maior que 1 dígito (adicionar 0 à direita).
$\theta_{C\_ENS.PGr\_Hom}$	- θ_{CNC}: "Correspondência a termo", "sequencia estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de elementos na coleção - θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Hom}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 44, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

6.2.4.2.1.3.2 As OM associadas ao material "Parcialmente Agrupado Heterogêneo"

Para as OM associadas ao material organizado por "parcialmente agrupada heterogênea", o seguinte tipo de tarefas considerado foi "Contar em escrita numérica uma coleção Parcialmente agrupada heterogênea", que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.por\_Het}$ = (Contar uma coleção na escrita numérica; V1 = [10, ...]; V5 = Parcialmente agrupado; V8 = Heterogêneo)

Esse tipo de tarefas $T_{C\_ENS.por\_Het}$ pode ser exemplificado como uma coleção 8 pacotes de 100 que equivale a 18 pacotes de 10. Neste tipo de tarefas, a coleção consiste em pelo menos dois tipos de agrupamento dos quais pelo menos um contém mais de 9 elementos. Assim, há duas técnicas para este tipo de tarefas: "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$" e "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$". A primeira técnica é estruturada pela transformação da coleção em uma coleção parcialmente agrupada homogênea. Já a segunda técnica "$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$" é baseada na adição.

A técnica "$\tau_{C\_ENS.PGr\_Het.1}$" baseada em transformação é constituída dos seguintes tipos de tarefas:

- T_{CNC}: Contar separadamente em numeração composta cada ordem.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.OrdemInf}$: Converter todas as unidades para a unidade de menor ordem.

- $T_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$: Contar em escrita numérica simples uma coleção parcialmente agrupada homogênea.

As praxeologias referenciadas acerca do tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$, modelizada no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 45 abaixo.

Quadro 45 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PGr\_Het.1}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$	(Contar uma coleção de forma escrita; V1 = [10 ...] ; V5 = P.agrupados ; V8 = Heterogênio)

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em numeração composta cada ordem. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.OrdemInf}$: Converter todas as unidades para a unidade de menor ordem - $T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$: Contar em escrita numérica simples uma coleção parcialmente agrupada homogênea.
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$	θ_{CNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". θ_{Card}: O último número falado representa o número de elementos da coleção. θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Hom}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 45, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

Já a técnica "$\tau_{C\_EC.PAgr\_Het.2}$" baseada em adição é constituída dos seguintes tipos de tarefas:

- T_{CUN}: Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS)

- $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).

- T_{Add}: Adicionar números.

Essa técnica foi materializa no quadro 46 abaixo.

Quadro 46 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$	(Contar uma coleção de forma escrita; V1=[10...];V5= Parcialmente agrupados; V8 = Heterogênio)

$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS) - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter de escrita numérica composta (ENC) para escrita numérica simples (ENS). - T_{Adic}: Adicionar números.
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	- θ_{CNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - $\theta_{Adic.}$
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Het.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 45, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

6.3 Síntese do Modelo Praxeológico de Referência

A síntese foi iniciada relembrando a questão Q_3 "Como fazer emergir as Organizações Matemáticas e Didáticas nas AEPs?". Este segmento da investigação também foi essencial para revisitar o problema didático dessa investigação, sendo P_D: Os aspectos posicional e decimal não estão sendo articulados durante o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND), que indicou as seguintes questões: na dimensão ecológica: O que e porque ensinar o SND nos anos iniciais do Ensino Fundamental? E na dimensão epistemológica: Como reconstruir praxeologias que diminua as lacunas apresentadas no ensino do SND?

O caminho para construir uma resposta $R_3^\lozenge$, por meio da modelização na praxeologia de pesquisa (PP), foi estruturado pela *ecologia do saber* (CHEVALLARD, 1999). Esse método foi alicerçado, primeiramente, na $R_2^\lozenge$ da *abordagem histórica e epistemológica* (EVES, 2004; RODRIGUES e DINIZ, 2015; IFRAH, 1989, 1997; TEIXEIRA, 2019; MONTEIRO, 1969; LIMA, 1992, 1999) que permitiu a construção da teoria (Θ) que justificou todas as praxeologias desenvolvidas nessa investigação, facilitando a organização do *logos* (CHEVALLARD, 1999).

Logos após, para a construção da $R_5^{\Diamond}$, foi utilizada a *dialética mídia-meio* (BOSCH, CHEVALLARD, 1999; KIDRON et al. 2014) para visitar as *mídias* (obras), observar as lacunas sobre a articulação dos aspectos do SND nessas *mídias* e criar um *meio* qua apontasse um caminho para essa investigação.

Nesse processo, o MPD apontou algumas as lacunas do ensino proposto sobre o SND, em especial, pela presença de $OM_{incompletas}$, visto que essas OM não apresentaram praxeologias que despontasse o aspecto decimal, como as tarefas de conversões (T_{Conv}).

Diante desse contexto, o método de investigação designado pela ecologia do saber apontou que o trabalho deveria ser realizado de maneira mais específica e, posteriormente, ampliaria as OM. Dessa forma, as análises partiram de OMP, mais especificamente, OM_{Trad} e OM_{Conv} para números grandes de até 6 casas decimais no 5º ano (BRASIL, 2017b), que integradas estruturaram a OML, constituída por OM_{Card} e OM_{Trad}, perpassando pelas praxeologias que modificaram os *ostensivos* das escritas numéricas, oral e escrita, e da *razão de ser* do SND. Esse método teve como fim propor a reconstrução de praxeologias a fim de propor uma nova relação dos professores com o objeto.

Essa reconstrução praxeológica foi alicerçada pela abordagem do T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2016, 2018) acerca de dois elementos: gerador de tarefas e as variáveis. O gerador de tarefas possibilitou a reconstrução de tarefas organizadamente. Isto facilitou o desenvolvimento de técnicas e elaboração do *logos*. Já as variáveis foram utilizadas acerca dos materiais manipuláveis. A escolha desses materiais possibilitaram realizar diversas mudanças nessas variáveis formando $OM_{completas}$ que apontaram tarefas que integrassem o aspecto decimal ao posicional do SND.

Nesse contexto, a construção de um Modelo Didatico de Referência (MDR) foi essencial, primeiramente, como extensão e para experimentação do MPR e, posteriormente, como um caminho para a mudança da relação entre professores e estudantes com o saber ($R_p(Y,O)$ e $R_p(X,O)$). Para a mudança nessas relações foi essencial selecionar as Atividades de Estudo e Pesquisa (AEPs), já que essas atividades de investigação são atividades estruturadas para integrar os *momentos* de estudo, destacando os momentos da tecnologia-teoria (*logos*) apresentando técnicas mais econômicas em relação as que já foram introduzidas. Isso foi considerado como o amálgama das técnicas, a fim de que os próprios estudantes consigam autoconduzir-se ao momento da institucionalização ocasionando novos significados para o saber.

As AEPs propõe a mudança do *topos* dos professores, ao agir como pesquisador, estudando, analisando e selecionando atividades que também modifique a *topos* dos estudantes diante do saber, deixando de ser expectador para agente do seu próprio conhecimento. Essas atividades também preconizam, diante do Paradigma de Questionamento do Mundo, questionar a monumentalização do SND nas instituições (Chevallard, 2012), como indicado no MPD.

Nesse interim, durante o processo de elaboração das AEPs foi essencial selecionar as $OM_{completas}$, apresentadas no MPD, que pudessem integrar ambos os aspectos do SND. Assim, foram escolhidas as:

> OM associadas ao material de forma "Aleatória" (Vale), constituída do seguinte tipos de tarefas:"Contar pela escrita numérica uma coleção aleatória em que o número de elementos é um múltiplo de 10 a menor que 100", designado pelo tipo de tarefa: $T_{C\_ENS.Vale\_10k}$;
>
> OM associadas ao material "Parcialmente Agrupado Heterogêneo", constituída do seguinte tipos de tarefas: "Contar em escrita numérica simples uma coleção grande aleatória desorganizada com o número de elementos múltipo de 10 e inferior a 10000", constituído pelo tipo de tarefa: $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$.

Essas OM selecionadas puderam desenvolver um trabalho com números pequenos e grandes, logo foi selecionado palitos (de picolé), pois é considerado um material manipulável de fácil manuseio tanto para números pequenos quanto grandes.

Assim, considera-se que as mudanças de variáveis atenderam as três funções: gerou sub-tarefas, considerando que o tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale\_10k}$ gerou os seguintes sub-tipos de tarefas: $T_{C.ENS\_ENM}$, $T_{C.ENM\_ENCC}$, $T_{C.ENM\_ENCC}$, $T_{C.ENT}$, $T_{C.ENS/ENSE}$, $T_{C.ENCC/ENCCE}$. Já o tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$ gerou os seguintes subtipos de tarefas: $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$, $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$, $T_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$, $T_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$, e $T_{Trad.ENPA/ENP.PAgr\_Het.2}$.

Já a segunda função também foi efetivada diante do escopo de técnicas organizado pelo *gerador de tarefas* no processo de modelização da reconstrução das OM. Além disso, as variáveis apresentaram alguns pontos de vista que foram modificados:

Epistemológico: apontou um conjunto de tecnologias (θ) para o escopo de técnicas (τ) levantas integradas as teorias (Θ);

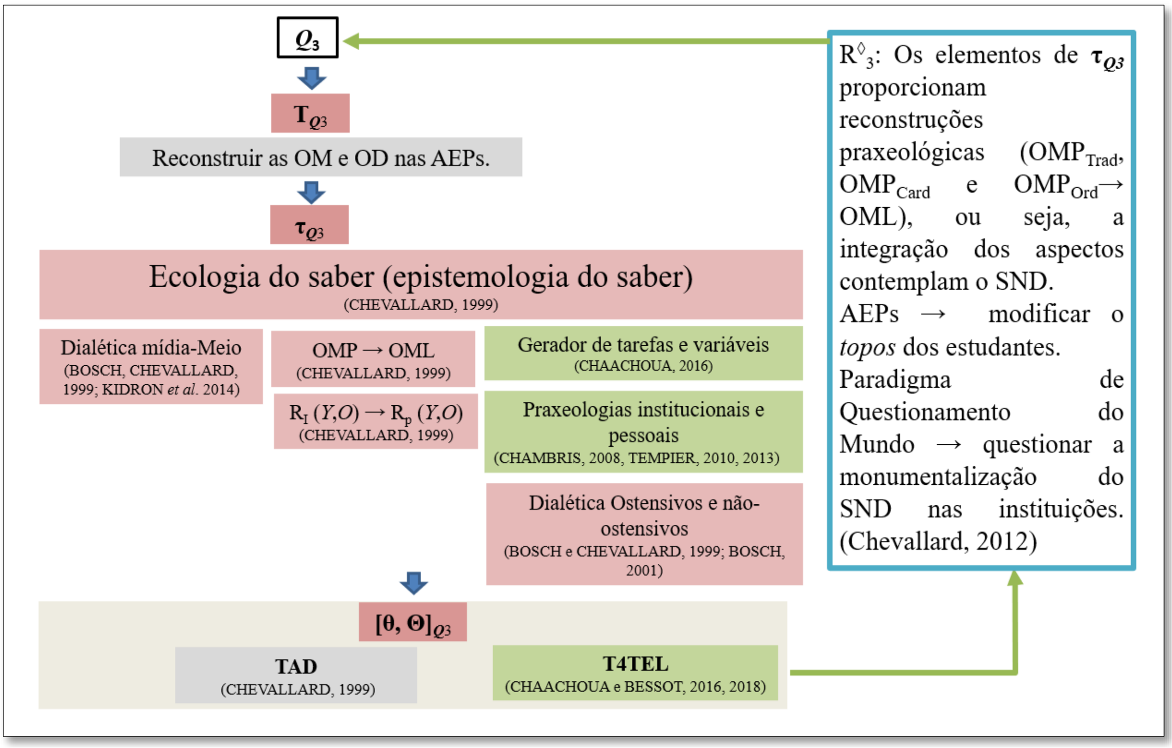
Institucional: Modificou o *topos* dos docentes possibilitando descrever novas formas e formatos para elaboração de planejamentos e OD;

Didático: Articulou ambos os aspectos do SND ao integrar os materiais manipuláveis as atividades docentes que, por consequência, modificou o *topos* o estudante.

Já a terceira função das variáveis foi analisada no próximo capítulo, durante e após as AEPs serem desenvolvidas nas unidades escolares, em que foi possível explicitar as *praxeologias pessoais* dos estudantes a fim de diagnosticar e incluir essas praxeologias na instituição do sistema educativo.

Essa trajetória do método de investigação da Ecologia do saber supramencionado, na PP, foi materizado na figura 63 abaixo.

Figura 63 - Esquema que representa o processo de construção da resposta $R_3^{\lozenge}$.



Fonte: o autor (2020)

Diante do contexto apresentado e das obras que foram referência para a elaboração do MPR dessa investigação (CHAMBRIS, 2008; MOUNIER, 2012; TEMPIER, 2010, 2013; CHAACHOUA, 2016), foi possível confirmar a hipótese dessa investigação descrita como: As praxeologias institucionais do MPD não contribuem no *saber ensinado* a fim de articular o aspecto decimal ao posicional do SND para números naturais.

7. AS ATIVIDADES DE ESTUDO E PESQUISA

Este componente da investigação foi estruturado a partir da questão Q_4: *Em que condições os materiais manipuláveis podem ser um instrumento a serviço da aprendizagem do aspecto decimal*? No intuito de encontrar uma resposta $R_4^\lozenge$, foi utilizado o método de investigação, por meio da PP, a *observação de classe* (COMITI & FARIAS, 2019), integrada a ecologia do saber (CHEVALLARD, 1999).

A produção de dados foi realizada através da *observação de classe interna* constituída, nesta etapa, dos *cenários* e da *crônica de classe* (COMITI & FARIAS, 2019). Os *cenários* correspondem a elaboração, organização e análise do MDR sobre os aspectos do SND considerando as análise preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *posteriori* e validação. Como esses elementos dos cenários equivalem aos elementos que constituem a Engenharia Didática (ED) (ARTIGUE, 1988), o MDR estruturado pelas AEPs também foi conduzido a partir dos elementos supracitados.

As *análises preliminares* ou *prévias* consistiu no estudo das OM e OD que integrou os aspectos histórico-epistemológicos sobre SND afim de compreender as práticas desenvolvidas nas mais variadas instituições, além de estudos preliminares que visam identificar como o ensino sobre SND está posto, ou seja, o MPD. Nesta etapa foi realizada a análise das obras (currículos, PPP, planos de curso anual e trimestral dos professores, livros didáticos e caderno dos estudantes) a fim de levantar hipóteses sobre o processo de ensino e da aprendizagem acerca do SND.

A análise *a priori* apresentou escolhas acerca da elaboração dessas OD com a finalidade integrar os *momentos* de estudos, em especial, o momento do escopo de técnicas, estimulando a elaboração de novas técnicas que sejam mais econômicas (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013) do ponto de vista didático que justifica o momento do trabalho sobre o *logos*. Almouloud e Silva (2012) corroboram que é sobre o trabalho *apriori* que o professor (*Y*)/pesquisador (ξ) devem promover a função do estudantes para além de receptor do ensino, característico da *monumentalização do saber*, para agir como pesquisador, investigando, propondo e refutando estratégias bem como formalizando-as. Em síntese, os estudantes (*X*) passam a participar da gestão da sua aprendizagem.

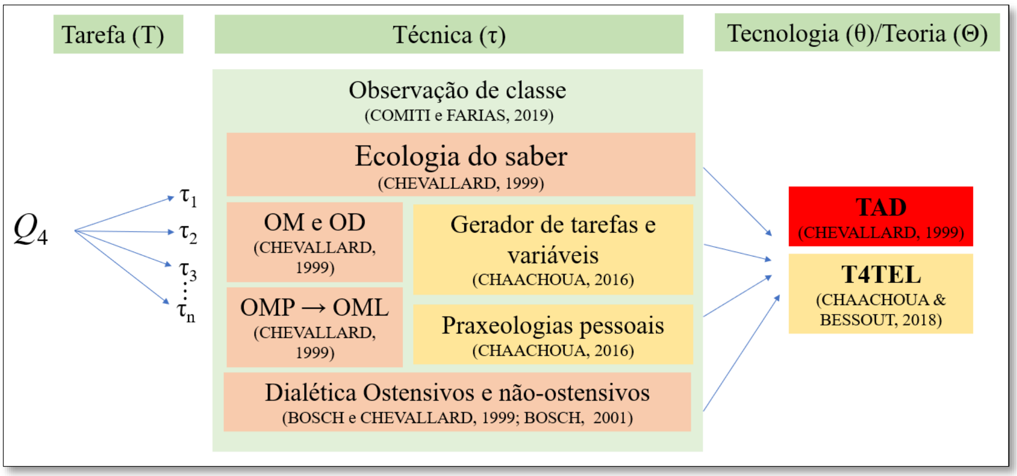
A *experimentação* que consiste na produção de dados realizada por meio da aplicação de E estabelecendo o "novo"[241] contrato didático com a organização da sala em grupos para a experimentação, a ação dos estudantes diante de E e pela permissão da interação de X com Y durante a *experimentação*.

Durante as análise preliminares, a priori e na experimentação também foi possível constatar a crônica de classe, proprionado pela interação entre a questão Q_4 as escolhas metodológicas e das organizações didáticas (AEPs).

E, o último elemento, a análise *a posteriori* que utilizou os dados da experimentação para confrontar com os dados da análise *a priori*. É, neste momento que as praxeologias pessoais dos estudantes podem ser compreendidas, revisitando os MPR e MPD, visualizando os motivos pelos quais os estudantes escolheram determinadas estratégias em detrimento de outras. É a partir da análise *a posteriori* que se pode validar ou não as AEPs, e consequentemente, a questão de pesquisa.

Os processos do método da ecologia para essa etapa da investigação É SEMELHANTE ao que foi proposto no MPR. Dessa forma, o método realizado foi descrito no esquema da figura 64.

Figura 64 - Esquema que representa, na PP, o método de investigação das AEPs



Fonte: o autor (2020)

[241] O processo de experimentação, na execução das AEPs, caracterizou-se como um novo contrato didático visto que a organização da sala foi modificada (trabalhos em grupos), a interação entre eles para determinar as estratégias, refuetá-las e, quando possível, questionar a instituição acerca do saber apresentado anteriormente. (ALMOULOUD, 2007)

A partir de pressupostos da TAD foi contemplado que todas as atividades humanas, ademais, as práticas didáticas, são constituídas pelas *tarefas* e *técnicas* que somente vivem com regularidade nas instituições caso estejam complementadas pelo discurso tecnológico-teórico (*logos*) que seja capaz de *descrever, justificar, interpretar* e *desenvolver* a *práxis* (BOSCH e GASCÓN, 2010).

Assim sendo, os pesquisadores (ξ) da Didática das Ciências estão empenhados em criar e/ou aperfeiçoar *modelos didáticos* (MDR), que são instrumentos que proporcionam autonomia a $x\ (\text{ou } X)$, aos professores (Y)e /ou até o próprio pesquisador (ξ) , a partir do objeto de estudo, com o intuito de favorecer a integração entre a *práxis* $[\mathrm{T}, \tau]$ e o *logos* $[\theta, \Theta]$ nas mais diversas instituições, na matemática (*disciplina*), salas de aula(*pedagogia*), *escola* e *sociedade* (BOSCH e GASCÓN, 2010), ressignificando o papel dos sujeitos nessas instituições.

Logo, a trajetória descrita pelos NCD (CHEVALLARD, 2002, 2007a) quando revelamos, no MPD, o caminho percorrido e as modificações pelas quais o saber passa e as C e K para o funcionamento dos aspectos do SND nas instituições.

No intuito de abreviar algumas restrições as foram selecionadas AEPs(E) para conduzir elementos para a reconstrução do conhecimento matemático e tentar minimizar as *incompletudes da atividade institucional* (FARIAS, CARVALHO e TEIXEIRA, 2018), em especial, a *ausência da razão de ser* (LUCAS, 2010; BOSCH e GASCÓN, 2010; FARRAS, BOSCH & GASCÓN, 2013) e o vazio didático (FARIAS, 2010), com o trabalho para além do momento da técnica (τ).

Ademais, esse MDR foi estruturado para integrar os momentos de estudo, destacando os momentos da tecnologia-teoria (*logos*) apresentando técnicas (τ) mais econômicas, de forma que as técnicas (τ) que já foram introduzidas que podem ser consideradas, a saber, o amalgamar das técnicas, a fim de que os próprios estudantes sejam conduzidos por E ao momento da institucionalização, este designado pelas professoras (Y), ocasionando novos significados para o saber.

Para conduzir esse E, o modelo do T4TEL foi escolhido como alicerce para elaborar o E, posto que o gerador de tarefas tem atributo de estimular a produção de tarefas que conduzam o estudante ao momento do *logos*$[\theta, \Theta]$, a produzir novas técnicas que devem ser confrontadas com as já instituídas a fim de se determinar a técnica mais econômica (ARTAUD, 2018).

Sendo assim, a próxima fase de E foi constituída pela elaboração, experimentação e análise do E revisitando o MPR no processo de análise *a priori*, e posteriormente, confrontando com os dados produzidos durante a análise *a posteriori*.

7.1 O planejamento das AEPs

O planejamento do E foi iniciado revisitando as obras de Tempier (2013) e Chaachoua (2016) que estruturaram o MPR. Apesar da diferença de seriados dessa pesquisa, que se concentra no 5º ano, com as desses pesquisadores, que se concentraram no 2º ano, esses E possuiu proposta semelhante uma vez que o currículo na França aponta que estudantes desse seriado devem "estudar diferentes maneiras de designar números, incluindo a escrita em números, numeração falada, decomposição e composição com base nas propriedades numéricas (dobro, metade de, etc.), bem como decomposições em unidades numéricas (unidades, dezenas, etc.)" (MEN, 2008, tradução nossa)[242] para números grandes (TEMPIER, 2013).

Sendo assim, os materiais manipuláveis selecionados para a elaboração do E foram os palitos[243] e o ábaco. A escolha do palito foi considerada diante das diversas formas de representar a organização das coleções por meio desse material. Essa particularidade impulsionou o trabalho sobre o aspecto decimal uma vez que a organização das coleções nas ordens das unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar promoveu também o trabalho sobre o momento do *logos* nas OML (CHEVALLARD, 1999), por meio de tarefas de traduções (T_{Trad}) e conversões (T_{Conv}) entre os *ostensivos*.

No processo de intervenção, o *cenário* (COMITI e FARIAS, 2019) para organização da sala foi em grupos[244], geralmente formado por três estudantes, para que esses estudantes pudessem interagir e compartilhar suas produções acerca do entendimento das atividades e do momento de encontrar uma técnica (τ) satisfatória. Não obstante, também, interagiram com as professoras (Y) durante as intervenções, não a fim de obterem as respostas, mas para

---

[242] "Étudiez différentes manières d'attribuer des nombres, y compris l'écriture en nombres, la numérotation parlée, la décomposition et la composition basées sur des propriétés numériques (double, moitié de, etc.), ainsi que les décompositions en unités numériques (unités, dizaines, etc.)"

[243] Os palitos de picolé selecionados foram redondos, por questão de segurança, e pela maleabilidade devido ao tamanho e resistência desse material.

[244] Como não foi possível dividir os grupos com a mesma quantidade de estudantes, houveram, grupos com 2 e 3 estudantes. Na escola 1 predominou o grupo com 2 estudantes, visto que a estrutura da sala (tamanho da sala, espaço para os matérias manipuláveis, etc.) e na escola 2 prevaleceu o grupo com 3 estudantes uma vez que o espaço da sala era maior.

mobilizarem os saberes em questão. Em cada e, os grupos receberam um kit que tinham os materiais manipuláveis e materiais para o registro (papel, lápis[245] e borracha).

No e_1, cada grupo ganhou um kit com 1500 palitos que foram organizados aleatoriamente e um ábaco com 5 ordens, conforme as figuras 65 e 66.

Figura 65 - Palitos distribuidos aleatoriamente.

Fonte: o autor (2020)

Figura 66 - Ábaco de números naturais com 5 ordens entregue a cada grupo de estudantes.

Fonte: o autor (2020)

No e_2, foi disponibilizado para cada grupo quatro kits sendo um com 1500 palitos distribuídos aleatoriamente, outro com 150 palitos agrupados em 10 unidades (1 dezena), outro de 15 palitos agrupados em 100 unidades (1 centena) e o último kit de 1000 palitos agrupados em 1 unidade (1 mil e 500 palitos) agrupados, além dos materiais para o registro supracitados.

[245] Alguns estudantes utilizaram caneta para o registro, não atendendo as solicitações.

Todos os kits com os materiais foram apresentados e organizados conforme as figuras 67, 68 e 69[246].

Figura 67 - Palitos par. agrup. homog. em pacotes de 10 unidades.

Fonte: o autor (2020)

Figura 68 - Palitos par. agrup. homog. em pacotes de 100 unidades.

Fonte: o autor (2020)

[246] Os palitos distribuídos aleatoriamente podem ser visualizados na Figura 65.

Figura 69 - Palitos par. agrup. heterog. com 1 pacote de 1000 e outos de 500 unidades.

Fonte: o autor (2020)

A realização desses e_i com os manipuláveis teve como objetivo conduzir os estudantes ao momento do trabalho sobre o *logos*, ampliando a variedade de técnicas e as possíveis validações, selecionando a técnica mais econômica e promovendo a institucionalização dos aspectos do SND. Essas OD podem reafirmar a importância desse saber não apenas para as *razões de ser* do SND como as operações básicas e potências de 10, mas também para saberes que têm funcionalidades sociais importantes como os números decimais e sistemas de medidas.

Deste modo, a próxima fase fo iniciada pela análise *apriori* a fim de evidenciar as *praxeologias pessoais* dos estudantes. Os estudantes podem também apresentar outras OM além das retratadas na análise a seguir.

7.2 Análise *a priori* das AEPs

Nesta seção, a análise do E foi apresentada usando com a lente o MPR. Sendo assim, a análise foi iniciada ao resgatar as OM propostas no

Quadro 34 considerando a variável V5 para colocar em evidência a forma em que os materiais manipuláveis foram disponibilizados aos estudantes. Essa variável, foi adotada para *E* visto que o trabalho com os manipuláveis podem ser organizados nos diversos *ostensivos*, e isso auxilia nas modificações do material incentivando os estudantes a criar, formular e validar suas estratégias. Essas formas de organizar os materiais manipuláveis também possibilitou aos estudantes compreenderem o aspecto decimal da numeração. Ao assumir que o valor de V5 foi *aleatório* houve um grupo de tarefas (T) e técnicas (τ) distintas em relação ao valor *parcialmente agrupados* de V5.

A variável V7 também foi fixada de forma que o tipo do material foi *manipulável* para todo o conjunto E, visto que esses tipos de materiais beneficiam atividades de investigação. Diante disso, ao iniciar cada e_i, o gerador de tarefas auxiliou na organização dos quadros referentes aos valores adotados para as variáveis.

7.2.1 Análise *a priori* da AEP 1 (e_1)

O e_1 consistiu em uma atividade que teve como objetivo aproximar os estudantes, primeiramente, do aspecto decimal durante o processo de contagem e, logo após, do aspecto posicional realizando as traduções possíveis diante das variáveis selecionadas. O evento e_1 foi iniciado pela apresentação do quadro 47 referente as variáveis e os valores selecionados para o desenvolvimento dessa atividade.

Quadro 47 - Quadro com as variáveis e seus respectivos valores relativo a e_1.

V	Nome	Valores
V1	Tamanho da coleção	Intervalos na forma [10^n ...10^m]
V2	Multiplo de 10	Sim
V4	Tipo do material	Proporcional agrupável
V5	Organização do material	Aleatório Desorganizado
V8	Configuração das ordens das unidades	Homogênio

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 31, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

No evento e_1, o tipo de tarefas que corresponde a pergunta (a): “Contar em escrita numérica simples uma coleção grande aleatória desorganizada com o número de elementos múltipo de 10 e inferior a 10 000”. Esse tipo de tarefas representado no T4TEL tem a seguinte configuração:

$T_{C\_ENS.Vale.10k}$= Contar uma coleção grande em escrita numérica simples; V1=[1, ..., 10 000]; V2=Sim; V5=aleatória desorganizada.

Há diversas técnicas para resolver essa tarefa, sendo a primeira:

$\tau_{C\_ENS.Vale}$: Realizar a contagem de 1 em 1. Esta técnica não é vantajosa para coleções grandes já que a contagem por unidade tem maior possibilidade do estudante ser confundido restrição (*K*). Além disso, essa técnica não privilegia o aspecto decimal, pois o estudante pode contar e registrar suas ideias que não interajem com o sistema de base 10 (CHAACHOUA, 2016).

Então os estudantes devem eleborar outra técnica indicada por $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k}$: que consistem em realizar a contagem de 10 em 10. Esta técnica é interessante visto que é possível agrupar os números tanto na ENC[247], quando se escreve 150 D, quanto na ENCC, ao escrever $1U_M$ 5 C. Nada obstante, a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k}$ fornece outras duas técnicas $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.1}$ e $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$. A primeira não será discutida já que essa técnica não emerge o aspecto decimal (CHAACHOUA, 2016). Dessa forma, segui-se a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$.

$\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$: Contar em unidades numéricas formando pacotes de 10 e contar em números de dezenas.

$$\begin{aligned}
&1+1+...+1=10 \text{ (1 pacote de 10)} \rightarrow 1 \text{ dezena}\\
&1+1+...+1=10 \text{ (1 pacote de 10)} \rightarrow 2 \text{ dezenas}\\
&\qquad\vdots\\
&1+1+...+1=10 \text{ (1 pacote de 10)} \rightarrow 150 \text{ dezenas}
\end{aligned}$$

Logo após realizar a adição entre as unidades formando 1 pacote de 10 que é convertido por 1 dezena. Esse procedimento se repete até determinar as 150 dezenas.

O emprego dessa $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ despontam os seguintes tipos de tarefas[248]:

- $T_{Gr.dez}$: Formar grupos de dez.

- $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter para a unidade superior uma unidade em que a unidade numérica seja maior que 9.

- T_{CUNC}: Contar em unidades de numeração composta pelo número das dezenas.

[247] Também pode ser escrito por 15C, 150 D, 5C 100D, dentre outras representações.
[248] Ressaltamos que os tipos de tarefas de tradução, por exemplo, $T_{Trad.ENM/ENS}$ e $T_{Trad.ENS/ENM}$ representa as mesmas ações no sentido adverso.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita numérica nos manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).

As θ que justificam as escolhas dessas técnicas são:

- θ_D: (aspecto Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.

- θ_{CUNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem".

- θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção (cardinalidade).

- $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.

Uma outra técnica que emerge da $T_{C\_ENS.Vale.10k}$ é $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$: Realizar a contagem de 100 em 100. Esta é uma τ que tem algumas *restriçõe*s (*K*) interessantes: a contagem pode ser realizada pela $\tau_{C\_ENS.Vale}$ ou $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.1}$, mas estas não manifestam o aspecto decimal. Dessa forma, o estudante pode responder o e_1 sem efetivar qualquer relação com o *logos*. Já $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ é válida, mas não é uma τ econômica visto que o estudante realizará diversas tarefas para agrupar 10 em 10 para formar uma centena. Assim, o estudante pode revelar o trabalho sobre a técnica promovendo uma nova técnica:

$\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$: Contar em unidades numéricas formando pacotes de 100 e contar em números de centenas.

$$
\begin{aligned}
&10+10+...+10=100 \text{ (1 pacote de 100)} \rightarrow 1 \text{ centena}\\
&10+10+...+10=100 \text{ (1 pacote de 100)} \rightarrow 2 \text{ centenas}\\
&\quad\vdots\\
&10+10+...+10=100 \text{ (1 pacote de 100)} \rightarrow 15 \text{ centenas}
\end{aligned}
$$

Logo após realizar a adição entre as unidades formando 10 pacotes de 10 que é convertido para 1 centena, conforme a representação da Figura 68. Esse procedimento se repete até determinar as 15 centenas. Esta τ caracterizamos como a mais econômica visto que ao realizar o processo de conversão da $T_{Conv.OrdemSup}$, as 150 D = 15 C = 1 U_M e 5 C usando as conversões.

Essa $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$ consiste nos seguintes tipos de tarefas:

- $T_{Gr.cem}$: Formar grupos de cem.

- $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter para a unidade superior uma unidade em que a unidade numérica seja maior que 9.

- T_{CUNC}: Contar em unidades de numeração composta pelo número das centenas.

- $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita numérica nos manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).

- $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).

As θ que justificam as escolhas dessas τ são:

- θ_D: (aspecto Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.

- θ_{CUNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem".

- θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção (cardinalidade).

- $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.

Quando o estudante apresenta esse conjunto de τ, refutando uma(s) e elegendo outra(s), foi possível compreender que ele está no processo do *amálgama das* τ, e nesse sentido, espera-se que ele aponte a técnica mais econômica, que deve ser $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale.10k}$, modeladas no T4TEL, gerou as seguintes $OM_{completas}$, dispostas no quadro 48 abaixo.

Quadro 48 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale.10k}$.

$T_{C\_ENS.Vale.10k}$	(Contar uma coleção grande em escrita numérica simples; V1=[1, ..., 10000]; V2=Sim; V5=aleatória desorganizada).
$\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$[249]	- $T_{Gr.dez}$: Formar grupos de dez. - $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter para a unidade superior uma unidade em que a unidade numérica seja maior que 9. - T_{CUNC}: Contar em unidades de numeração composta pelo número das dezenas. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita numérica nos manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	- θ_D: (aspecto Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - θ_{CUNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção (cardinalidade). - $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	Aritmética Elementar.
$\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$	- $T_{Gr.cem}$: Formar grupos de cem. - $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter para a unidade superior uma unidade em que a unidade numérica seja maior que 9. - T_{CUNC}: Contar em unidades de numeração composta pelo número das centenas. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita numérica nos manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).

[249]As τ promovem diversos T, mas estes T podem sobrevir numa ordem diferente da apresentada no

Quadro 48 e isso não modifica a compreensão dos estudantes no momentos de estudos sobre o tipos de tarefas proposto inicialmente.

$\theta_{C\_ENS.Vale\_100k}$	- θ_D: (aspecto Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - θ_{CUNC}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção (cardinalidade). - $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.
$\Theta_{C\_ENS.Vale\_100k}$	Aritmética Elementar.

Fonte: o autor (2020).

As questões (b) “Qual é a representação desse número utilizando o ábaco?”, (c) “Quantas ordens tem esse número?” e (d) “Quantas classes tem esse número?” foram implementadas acerca do aspecto posicional. Esta análise contemplou, individualmente, cada questão. Sendo assim, o tipo de tarefas que corresponde a questão (b), o é $T_{C.ENS\_ENM}$: Contar, em escrita numérica, no material manipulável. A técnica (τ) para responder essa tarefa é $\tau_{C.ENS\_ENM}$, que consistem em:

- $T_{Trad.ENS\_ENM}$: Traduzir da ENS para a ENM.

A θ que justifica essa técnica são:

- θ_P (aspecto Posicional):

- θ_{CUNC}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”.

- $\theta_{E/F}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C.ENS\_ENM}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 49 abaixo.

Quadro 49 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{Trad.ENS\_ENM}$

$T_{C.ENS\_ENM}$	Contar, em escrita numérica, no material manipulável.
$\tau_{C.ENS\_ENM}$	- $T_{Trad.ENS\_ENM}$: Traduzir da ENS para a ENM.
$\theta_{C.ENS\_ENM}$	- θ_P (aspecto Posicional): - θ_{CUNC}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”.

	- $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada.
$\Theta_{C.ENS\_ENM}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Já as questões (c) e (d) seguem do mesmo tipo de tarefas, com a devida atenção aos conceitos de ordem e classe de números. Enquanto a ordem é justificada pelos *logos* de $[\theta, \Theta]_P$, ou seja, caracterizado pelo momento da tecnologia-teoria que corresponde ao aspecto posicional, a classe é caracterizada pelo $[\theta, \Theta]_{Card}$, a cardinalidade do número. Dessa forma, números entre 1 e 999 foram identificados na classe das unidades simples enquanto números entre 1 000 e 999 999 são identificados na classe dos milhares.

Nesse sentido, há dois tipos de tarefas que corresponde as questões (c) e (d): o primeiro é $T_{C.ENM\_ENCC}$: Contar, a partir do material manipulável, em escrita numérica canônica.

A técnica $\tau_{C.ENM\_ENCC}$ para responder essa tarefa é: $T_{Trad.ENM\_ENCC}$: Traduzir da ENM para a ENCC.

Já a θ que auxilia a τ é $\theta_{C.ENM\_ENCC}$: $\theta_{NF/ENCC}$ e θ_P. Já o segundo é: $T_{C.ENS\_ENCC}$: Contar, a partir da escrita numérica simples, em escrita numérica canônica. Esse tipo de tarefas não leva em consideração a questão (b). O estudante pode respondê-la diretamente pelo resultado da questão (a). A técnica $\tau_{C.ENS\_ENCC}$ que corresponde a essa tarefa é: $T_{Trad.ENS\_ENCC}$: Traduzir da ENS para a ENCC. Já a tecnologia é $\theta_{C.ENS\_ENCC}$: $\theta_{NF/ENCC}$ e θ_P.

As praxeologias aludidas referente aos tipo de tarefas $T_{C.ENM\_ENCC}$ e $T_{C.ENM\_ENCC}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, dispostas nos quadros 50 e 51, respectivamente, logo abaixo.

Quadro 50 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C.ENM\_ENCC}$

$T_{C.ENM\_ENCC}$	Contar, a partir do material manipulável, em escrita numérica canônica.
$\tau_{C.ENM\_ENCC}$	- $T_{Trad.ENM\_ENCC}$: Traduzir da ENM para a ENCC.
$\theta_{C.ENM\_ENCC}$	- $\theta_{NF/ENCC}$. - θ_P.
$\Theta_{C.ENM\_ENCC}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Quadro 51 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C.ENM\_ENCC}$

$T_{C.ENM\_ENCC}$	Contar, a partir da escrita numérica simples, em escrita numérica canônica.
$\tau_{C.ENM\_ENCC}$	$T_{Trad.ENS\_ENCC}$: Traduzir da ENS para a ENCC.
$\theta_{C.ENM\_ENCC}$	- $\theta_{NF/ENCC}$; - θ_{P}.
$\Theta_{C.ENM\_ENCC}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Para a questão (e) “Qual a representação (ordens) da posição de cada algarismo desse número (quantidade da coleção)”, no Quadro Valor Lugar?”, há o seguinte tipo de tarefas: $T_{C.ENT}$: Contar em escrita numérica na tabela. Esse tipo de tarefas foi descrito no MPR, mas para esse e_1 é possível reescrever esse tipo de tarefas da seguinte forma: ($T_{C.ENT}$) Contar em escrita numérica no Quadro Valor Lugar (QVL), Quadro referente a posição dos algarismos nos SND. A técnica $\tau_{C.ENT}$ para responder essa tarefa consiste em diversos tipos de tarefas[250], sendo a primeira $T_{Trad.ENS\_ENT}$: Traduzir da ENS para a ENT, caso o estudante adote como referência a questão (a).

A segunda é $T_{Trad.ENM\_ENT}$: Traduzir da ENM para a ENT, quando o estudante adota como referência a questão (b). E a terceira é $T_{Trad.ENCC\_ENT}$: Traduzir da ENM para a ENT, caso o estudante adote as questões (c) e (d) como referência. Já a θ é para justificar essa técnica é: $\theta_{C.ENT}$: $\theta_{NF/ENT}$ e θ_{P} para todos os tipos de tarefas.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C.ENT}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 52 abaixo.

[250] A variedades de tarefas para a mesma técnica decorre dos caminhos pelos quais os estudantes podem seguir.

Quadro 52 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C.ENT}$

$T_{C.ENT}$	Contar em escrita numérica na tabela (Q.V.L.)
$\tau_{C.ENT}$	- $T_{Trad.ENS\_ENT}$: Traduzir da ENS para a ENT; - $T_{Trad.ENM\_ENT}$: Traduzir da ENM para a ENT; - $T_{Trad.ENCC\_ENT}$: Traduzir da ENCC para a ENT.
$\theta_{C.ENT}$	- $\theta_{NF/ENT}$; - θ_P.
$\Theta_{C.ENT}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Para a questão (f) "Qual é a representação desse número, escrito por extenso?", foi proposto o seguinte tipo de tarefas: $T_{C.ENS/ENSE}$: Contar em escrita numérica simples por extenso. Este tipo de tarefas foi caracterizado pela escrita em grafia e leitura[251]. A técnica $\tau_{C.ENS/ENSE}$ para responder essa tarefa na questão (a), visto que esta técnica é a mais econômica do ponto de vista das tarefas que são mobilizadas durante a sua execução. Sendo assim, essa τ abordou o seguinte tipo de tarefas em sua execussão:

- $T_{Trad.ENS\_ENSE}$: Traduzir da ENST para a ENSE.

Já a tecnologia é $\theta_{C.ENS/ENSE}$: $\theta_{NF/ENSE}$.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas TC.ENS/ENSE, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte OMcompletas, disposta no quadro 53 abaixo.

Quadro 53 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C.ENS/ENSE}$

$T_{C.ENS/ENSE}$	Contar em escrita numérica simples por extensso
$\tau_{C.ENS/ENSE}$	-$T_{Trad.ENS\_ENSE}$: Traduzir da ENST para a ENSE
$\theta_{C.ENS/ENSE}$	- $\theta_{NF/ENSE}$
$\Theta_{C.ENS/ENSE}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Para o item (g) "Como cada unidade de número é representado nessa escrita numérica?", há o seguinte tipo de tarefas: $T_{C.ENCC/ENCCE}$: Contar em escrita numérica composta canônica por

[251] Vamos adotar a simbologia E para a escrita por extenso dos numeriais, por exemplo, a ENSE é a escrita numérica simples por extenso.

extenso. A técnica $\tau_{C.ENCC/ENCCE}$ adotada para responder esse tipo de tarefas consiste em dois tipos de tarefas, sendo que o primeiro utiliza como referencial a questão (b): $T_{Trad.ENM/ENCCE}$: Traduzir da escrita ENM para a ENCCE. Já o segundo utiliza como referencial o QVL, logo o tipo de tarefas é representado por: $T_{Trad.ENT/ENCCE}$: Traduzir da escrita ENT para a ENCCE. Já a tecnologia é $\theta_{C.ENCC/ENCCE}$: θ_P e $\theta_{NF/ENCCE}$.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C.ENCC/ENCCE}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 54 abaixo.

Quadro 54 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{C.ENCC}$.

$T_{C.ENCC/ENCCE}$	Contar em escrita numérica composta canônica por extenso.
$\tau_{C.ENCC/ENCCE}$	- $T_{Trad.ENM/ENCCE}$: Traduzir da escrita ENM para a ENCCE. - $T_{Trad.ENT/ENCCE}$: Traduzir da escrita ENT para a ENCCE
$\theta_{C.ENCC/ENCCE}$	- θ_P. - $\theta_{NF/ENCCE}$
$\Theta_{C.ENCC/ENCCE}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

A partir do quadro 58 supramencionado, ao correlacionar com o

Quadro 1 quadro 1 referente as OD e seus momentos didáticos para expor a OD do e_1.

O *primeiro momento* do estudo é caracterizado como o *momento* do primeiro encontro com o tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale.10k}$ visto que os estudantes iniciam o processo de estudo sobre essa tarefa. O *segundo momento* do estudo é *momento* de explorar $T_{C\_ENS.Vale.10k}$ no encalço de construir pelo menos uma das $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ e $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$. É nesta fase que se inicia investigação pelas técnicas de agrupamento, de modo que emerge o aspecto decimal. O *terceiro momento* do estudo é *momento* do trabalho sobre o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] em função de das $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ e $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$. Nesse momento, os estudantes devem justificar suas escolhas como fazer agrupamentos de 10 ou 100. As evidências sobre o aspecto decimal começam a ficar mais perceptíveis. A partir desse momento há procura pela técnica mais econômica. O *quarto momento* do estudo sobre a $\wp$, partindo do tipo de tarefas $T_{C\_ENS.Vale.10k}$, escolhendo a técnica mais econômica $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$, justificada pelo logos como (θ_D,θ_P e $\theta_{NF/...}$) o princípio decimal, posicional e a numeração falada para quaisquer outros tipos de numeração. O *quinto momento* da OD é o *momento* da institucionalização dos saberes que circundam a $\wp$. Neste instante, inicia-se a discussão em torno do aspecto decimal do SND entre a professor e os estudantes para descartar ou integrar as τ e θ ou criar nova(s) $R_I(x,O)$. Já o *sexto momento* é para a avaliação da $\wp$ tanto pelos estudantes quanto pelas professoras. Neste estágio, eles avaliam as OMP para a contagem, por exemplo da questão (a) e a OML aproximando-se do entendimento da *razão de ser* do SND (CHAACHOUA e BESSOT, 2018).

A síntese da OD do e_1 foi descrita no quadro 55.

Quadro 55 - OD do e_1

Primeira Função do Estudo
Primeiro encontro com a $T_{C\_ENS.Vale.10k}$ e o material manipulável. Geralmente os estudantes iniciam esse momento de forma procedimental indiscriminada.
Segunda Função do Estudo
Explorar a $T_{C\_ENS.Vale.10k}$ a procura de pelo menos uma técnica, $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ e $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$, para resolver $T_{C\_ENS.Vale.10k}$.
Terceira Função do Estudo
Trabalhar sobre o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] para justificar a escolha de alguma das $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ e $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$, como fazer agrupamentos de 10 ou 100.
Quarta Função do Estudo
Trabalhar com $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ experimentando outras formas de se aproximar da $\tau_{C\_ENS.Vale\_100k}$. É o momento de *amalgamar* as técnicas no encalço de uma(s) τ amis eficaz.
Quinta Função do Estudo
Discutir os saberes em torno do aspecto decimal da numeração para descartar e eleger as τ e θ mais eficazes.
Sexta Função do Estudo
Avaliar a $\wp$ como OMP e OML aproximando-se do entendimento da razão de ser do saber sobre SND.

Fonte: Carvalho (2012, p. 52) (Adaptado pelo autor)

Dessa forma, a análise *a priori* da AEP $2(e_2)$ segue abaixo.

7.2.2 Análise *a priori* da AEP 2 (e_2)

O quadro 56 referente as variáveis e os valores selecionados foi apresentado logo abaixo a fim de se determinar a construção de e_2 a partir da modelização das vaiáveis.

Quadro 56 - Variáveis selecionadas para o tipo de tarefa $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$

V	Nome	Valores
V1	Tamanho da coleção	Intervalos na forma $[10^n ...10^m]$
V2	Multiplo de 10	Sim
V4	Tipo de Material	Proporcional agrupável
V5	Organização do material	Parcialmente agrupado
V8	Configuração das ordens das unidades	Heterogênio

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 31, tradução nossa). Adaptado pelo autor.

O evento e_2 foi iniciado por meio do seguinte tipo de tarefa T: “Contar em escrita numérica simples uma coleção grande aleatória desorganizada com o número de elementos múltipo de 10 e inferior a 10000”. Para essa OM foi destacado o tipo de tarefas “Contar em escrita numérica uma coleção parcialmente agrupada heterogênea”, que modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, a partir da seguinte representação:

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$ = (Contar uma coleção na escrita numérica; V1 = [10, ...]; V5 = Parcialmente agrupado; V8 = Heterogêneo)

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no qudro 57 abaixo.

Quadro 57 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$	(Contar uma coleção de forma escrita; V1=[10...];V5= Parcialmente agrupados; V8 = Heterogênio)
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	T_{CNC} : Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS) $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter de escrita numérica composta (ENC) para escrita numérica simples (ENS). T_{Adic}: Adicionar números.

$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	- θ_{CNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem" - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior - θ_{Adic}
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Het.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: (CHAACHOUA, 2016, p. 45, tradução nossa). Adaptado pelos autores.

Para responder a questão (a) "Quantos palitos há na coleção?", foi fundamental voltar a e_1 (questão (a)) e a fim de utilizar o mesmo procedimento, visto que a quantidade de palitos desorganizado foi a mesma. Assim, utilizamos a mesma OM que está descrita no quedro 58.

Para responder a questões (b) "Qual a quantidade de palitos agrupados por dezenas há nessa coleção?", (c) "Qual a quantidade de palitos agrupados por centenas há nessa coleção?" e (d) "Qual a quantidade de palitos agrupados pela classe dos milhares há nessa coleção?", foram utilizada conversões. Dessa forma, para as questões (b) e (c) a técnica selecionada foi $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$ uma vez que a outra técnica disponível poderia conduzir os estudantes a outro tipo de exercício $T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$[252] que não foi desenvolvido para esses *E*. Para a técnica $\tau_{C\_EC.PAgr\_Het.2}$ houveram os seguintes tipos de tarefas:

- T_{CUN}: Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem. Ao contar as unidades simples, a quantidade de pacotes da dezena, a quantidade de pacotes da centena e a quantidade de pacotes do milhar com unidades (todos fizeram parte do kit), falta apenas realizar as conversões. Para isso, há o seguinte tipo de tarefas:

- $T_{Conv.ENS/ENC}$: Converter da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica composta (ENC). Assim, obtêm-se que 1500 U = 150 × 10 = 150 D. Nesse sentido, a θ que justifica isso é: θ_{CNC} e θ_{Card} durante o processo de contagem, e θ_{D} para realizar as conversões. Assim, segue-se a questão (b).

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no

Quadro 58 abaixo.

[252] Quando a variável V4 assume o tipo de material Parcialmente agrupável homogênceo.

Quadro 58 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$	Contar uma coleção de palitos agrupados por pacotes de dez.
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem. - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter de escrita numérica composta (ENC) para escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$	- θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Het.2\_10k}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

De maneira análoga, usamos a $T_{Conv.ENS/ENC}$: Converter da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica composta (ENC). Assim, 1500 U = 15 × 100 = 15 C. As θ que justificam a técnica $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$ é θ_D. Assim, seguiu-se a questão (c).

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 59 abaixo.

Quadro 59 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$	Contar uma coleção de palitos agrupados por pacotes de cem.
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem. - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter de escrita numérica composta (ENC) para escrita numérica simples (ENS).
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$	θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior
$\Theta_{C\_ENS.PGr\_Het.2\_100k}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Há várias forma de se resolver (d): ao partir da questão (a), usou-se a $T_{Trad.ENS/ENPA}$: Traduzir da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica em potência aditiva (ENPA). Assim, 1500 U = 1000 + 500, e logo após, $T_{Trad.ENPA/ENC}$.Assim, 1500 = 1000 + 500 = 1UM e 5C. As θ que justificam a técnica $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$ é θ_{Adic} e θ_D.

Caso utilize como referencial a questão (b): Vamos fazer a conversão:

- $T_{Conv.ENC/ENC}$: Converter de ENC para a ENC. Assim, 150 D =1UM 500 U.

Caso utilize como referencial a questão (c): Vamos fazer a conversão:

- $T_{Conv.ENC/ENC}$: Converter de ENC para a ENC. Assim, 15 C =1UM 500 U.

Assim, respondemos a questão (d).

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 60 abaixo.

Quadro 60 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$

$T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$	Contar uma coleção de palitos agrupados por pacotes de mil e de unidades.
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$	- $T_{Trad.ENS/ENPA}$: Traduzir da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica em potência aditiva (ENPA) - $T_{Trad.ENPA/ENC}$.: Traduzir da de escrita numérica em potência aditiva para a escrita numérica composta (ENC).
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$	- θ_{Adic}. - θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior
$\Theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Já as questões (e) “Quais conversões possíveis para representar essa coleção?” e (f) “Essas conversões representam a mesma quantidade de palitos dessa coleção?”: Converter as representações possíveis dessa coleção. A $\tau_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$. O tipo de tarefas que emerge dessa técnica é $T_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$. Sendo assim, 1500 U = 150 D = 15 C = $1U_M$ 5C = $1U_M$ 15D = $1U_M$ 500 U. Já a tecnologia é θ_D.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 61 abaixo.

Quadro 61 - Praxeologia do tipo de exercício $T_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$

$T_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$	Converter as representações possíveis de uma coleção parcialmente agrupados Heterogênia.
$\tau_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$	- $T_{Conv.ENS/ENC}$: Traduzir da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica composta (ENC).
$\theta_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$	- θ_D: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\Theta_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020).

Para responder a questão (g) "Qual é a decomposição desse número que representa a quantidade de palitos dessa coleção?", iniciou-se na questão (a), na coleção há 1500 palitos. Sendo assim, a $\tau_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$ que aponta o $T_{Trad.ENS/ENPA}$: Traduzir da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica em potência aditiva (ENPA). As tecnologias que justificaram essa técnica são: $\theta_{NE/NF}$ e θ_{Adic}.

As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 62 abaixo.

Quadro 62 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$.

$T_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	Escrever o número de palitos de uma coleção parcialmente agrupados heterogênia em potência aditiva.
$\tau_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	- $T_{Trad.ENS/ENPA}$: Traduzir da escrita numérica simples (ENS) para a escrita numérica em potência aditiva (ENPA). - T_{Adic}: Adicionar números.
$\theta_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	- $\theta_{NE/NF:}$ Ligação entre a numeração escrita e falada. - θ_{Adic}
$\Theta_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

Para responder a questão (h) "Como essa coleção pode ser representada em potências de 10?", partimos da questão (g). Assim sendo, a $\tau_{Trad.ENPA/ENP.PAgr\_Het.2}$ apontou o tipo de tarefas $T_{Trad.ENPA/ENP}$: Traduzir da escrita numérica em potência aditiva (ENPA) para a escrita numérica em potência de 10 (ENP). As tecnologias que justificaram essa técnica foram: $\theta_{NE/NF}$, θ_{Adic} e θ_{D}. As praxeologias aludidas referente ao tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr}$, modeladas no T4TEL, gerou a seguinte $OM_{completas}$, disposta no quadro 63 abaixo.

Quadro 63 - Praxeologia do tipo de tarefas $T_{Trad.ENPA/ENP.PAgr\_Het.2}$

$T_{Trad.ENPA/ENP.PAgr\_Het.2}$	Escrever o número de palitos de uma coleção parcialmente agrupados heterogênia em potência de 10.
$\tau_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	- $T_{Trad.ENPA/ENP}$: Traduzir da escrita numérica em potência aditiva (ENPA) para a escrita numérica em potência de 10 (ENP). - T_{Adic}: Adicionar números.
$\theta_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	- $\theta_{NE/NF}$: Ligação entre a numeração escrita e falada. - θ_{Adic} - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior
$\Theta_{Trad.ENS/ENPA.PAgr\_Het.2}$	Aritmética Elementar.

Fonte: O autor (2020)

A partir do quadro 57 supracitado foi possível correlaciona-lo ao quadro 1 referente as OD e seus momentos didáticos para descrever a OD do e_2.

O primeiro *momento* do estudo é caracterizado como o momento do primeiro encontro com o tipo de tarefas $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$. Não vamos nos alongar nessa discussão uma vez que esses tipos de tarefas já foram discutidos no e_1. O segundo *momento* do estudo é o momento de explorar o $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$. É nesse momento que se inicia a investigação pelas técnicas de conversão de forma que prevalesce a razão sobre o aspecto decimal. O terceiro *momento* do estudo é o momento do trabalho sobre o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] em função de das $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$ e $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$. Nesse momento, os estudantes justificar suas escolhas como converter na unidade das dezenas, centenas e unidade de milhar (com unidades simples). O aspecto decimal é a justificativa para todas essas conversões incluindo a técnica mais econômica, que entendemos ser a 1 U_M 5C, pois este *ostensivo* permite a escrita de outros ostensivos sem a necessidade de utilizar as conversões, como a $T_{Trad\_ENCC/ENPA}$ ou $T_{Trad\_ENCC/ENPA}$. O quarto *momento* do estudo é reservado ao trabalho com a $\tau_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$, já que essa técnica pode fazer emergir outras técnicas de conversão. O quinto *momento* é o da institucionalização dos saberes que circundam a $\wp$. Neste instante, inicia-se a discussão em torno do aspecto decimal do SND entre as professoras e os estudantes para descartar ou integrar τ ou θ ou criar uma nova $R_I(x,O)$. Já o sexto *momento* é para a avaliação da $\wp$ tanto pelos estudantes quento pelas professoras. É nessa fase que ocorre a avaliação OMP e OML aproximando-se do entendimento da *razão de ser* do SND sobre as operações básicas e potências de 10 (CHAACHOUA e BESSOT, 2012; CHAACHOUA, 2016). A OD do e_1 foi organizada no quadro 64.

Quadro 64 - OD do e_2

Primeira momento
Primeiro encontro com a $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$ e o kit com os materiais manipuláveis. Geralmente os estudantes iniciaram esse momento de forma procedimental indiscriminada.
Segundo momento
Explorar a $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$ a procura de pelo menos uma técnica, $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$ e $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$, para resolver $T_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$.
Terceiro momento
Elaborar o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] para justificar a escolha de alguma das $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$ e $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$, como determinar a conversão mais eficiente para fazer emergir outras técnicas.
Quarto momento
Trabalhar com $\tau_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$ experimentando outras formas de se aproximar das das $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_10k}$, $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_100k}$ e $\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2\_1000k\_U}$. É o momento de amalgamar as técnicas na direção de uma(s) τ amis eficaz.
Quinto momento
Discutir os saberes em torno do aspecto decimal da numeração para descartar e eleger as τ e θ mais eficazes.
Sexto momento
Avaliar a $\wp$ como OMP e OML aproximando-se do entendimento da razão de ser do saber sobre SND.

Fonte: Carvalho (2012, p. 52) Adaptado pelos autores.

Após a apresentação da análise *a priori*, a análise seguiu para a experimentação.

7.3 A experimentação das AEPs

Durante a experimentação, alguns fatores que ocorreram durante a execução dessas atividades foram considerados, por exemplo, o tempo de duração de cada AEP foi de 100 minutos, uma vez que foram utilizadas aulas geminadas[253]. Outro fator que foi levantado foi a frequência dos estudantes, apresentada na tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Frequência dos estudantes de cada escola por AEPs

	Escola 1	**Escola 2**	**Frequência dos estudantes (por AEP)**
AEP 1	16	21	37
AEP 2	10	25	35

Fonte: O autor (2020)

Além destes fatores, a organização da sala dividindo os estudante em grupos, em que cada grupo possuiu 3 estudantes. Dessa forma, os estudantes puderam interagir, discutir em seus respectivos grupos e realizar os registros. Já a interação entre as professoras e estudantes, durante a intervenção, constituíram os incentivos e indicaram alguns *insights* para que os estudantes pudessem caminhar sozinhos para as respostas das AEPs.

7.4 A análise *a posteriori* das praxeologias pessoais nas AEPs

Este tópico apresenta a análise das *praxeologias pessoais* realizadas pelos estudantes em cada e. Para tanto, é essencial revisitar o objetivo geral dessa pesquisa: investigar como um Modelo Didático de Referência (MDR), baseado na abordagem da atividade de estudo e pesquisa (AEP), pode integrar o aspecto decimal ao posicional no logos das praxeologias dos estudantes no trabalho com sistema de numeração decimal no 5º Ano.

Nessa análise, foram consideradas as praxeologias pessoais dos estudantes que se aproximaram desse objetivo da pesquisa supracitado. Nesse ínterim, a lente de análise utilizada foi a dialética *ostensivos* e *não-ostensivos* (BOSCH, CHEVALLARD, 1999; BOSCH, 2001) a fim de compreender os *ostensivos* escritos nas praxeologias pessoais dos estudantes e os possíveis conhecimentos matemáticos mobilizados. Já o T4TEL (CHAACHOUA, BESSOT, 2018) foi utilizado para interpretar a organização dos *ostensivos mediante aos geradores de*

[253] Aulas em sequências.

tarefas apresentados e as funções ODs (ARTAUD, 2018) para elucidar as mudanças de técnicas rumo ao *logos* $[\theta, \Theta]$. Sendo assim, as análises seguem abaixo.

7.4.1 Análise *a posteriori* das das praxeologias pessoais na AEP 1

Este evento e_1 constituiu o primeiro encontro dos estudantes com E, ou seja, o primeiro encontro deles com uma atividade de investigação durante o 5º Ano[254]. Nessa atividade, os estudantes fizeram a contagem de palitos de diversas formas, mas, como informado previamente, foram consideradas apenas respostas que se aproximaram do objetivo geral dessa pesquisa.

7.4.1.1 AEP 1 na Escola 1

Na escola 1, os grupos foram formados por 2 estudantes que interagiram entre si para contar a coleção com 1500 palitos distribuídos aleatoriamente desorganizados conforme a

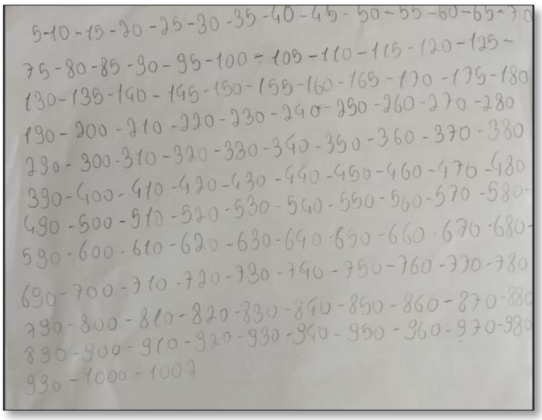
Figura 65. Essa foi uma *restrição* (K) encontrada durante a experimentação, visto que o cenário dessas atividade foram organizados para interação entre 3 estudantes. Mas mesmo diante dessa *restrição* (K), ocorreu interações entre eles. Outro elemento dos *cenários* foi a forma de organização das mesas dos estudantes na classe, pois eram pequenas e dificultaram a organização dos palitos no processo de contagem. Esta foi outra *restrição* (K).

Consideramos as respostas dos estudantes designados por x_{1_n}[255], sendo que o grupo 4 foi formado pelos estudantes x_{1_8} e x_{1_11}. Eles apresentaram o *ostensivo* escrito conforme a figugra 70.

[254] Não foi possível afirmar que esta foi a primeira atividade de investigação dos estudantes durante o EF I, visto que alguns estudantes foram oriundos de outra unidades escolares. O ensino proporcionado a esses estudantes encontra-se no Modelo Euclidiano visto que as aulas são propostas baseadas na apresentação da teoria e, em seguida, na resolução de exercícios.

[255] A simbologia x_{1_n} signica informar que é o estudante número n da escola 1, conforme a caderneta de frequência e notas da instituição.

Figura 70 - Representação dos ostensivo escritos do grupo 4 (x_{1_8} e x_{1_11})



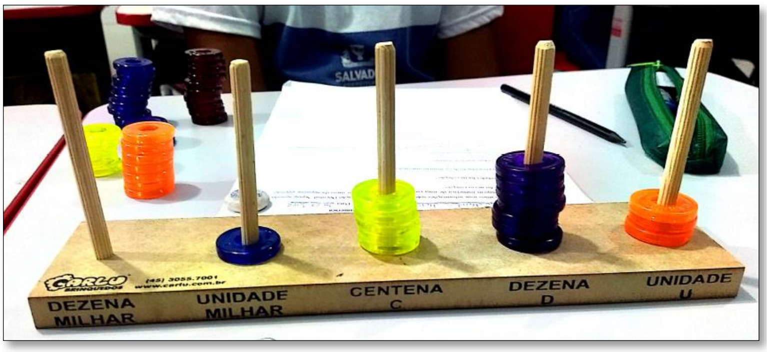
Fonte: Dados da experimentação do e_1 na Escola 1 (2020)

A praxeologia que foi adotada pelo grupo 4 também foi selecionada pelos grupos 3 (x_{1_7} e x_{1_14}), 7 (x_{1_5} e x_{1_12}) e 8 (x_{1_3} e x_{1_19}). Todos esses grupos adotaram a contagem de 10 em 10, ou seja, utilizaram a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$. Esta não foi a primeira técnica levantada pelos estudantes do grupo 4 que iniciou a contagem de 5 em 5. Já os estudantes do grupo 7 apontaram que, após a contagem de 10 em 10, foram para a contagem de 20 em 20. Enquanto que os estudantes do grupo 4 inicaram com a técnica $\tau_{C\_ENS.Vale\_5}$ e, no decorrer da tarefa (a), modificaram suas praxeologias para a τ esperada, a manifestação do *não-ostensivo* para o *ostensivos* ENP ou ENPA usando a operação de adição para números naturais. Já os estudantes do grupo 7 utilizaram esse *ostensivo* que impossibilitou a mudança para outras técnicas, uma vez que não houve preocupação com o aspecto decimal.

Não houveram grupos que desenvolveram a técnica $\tau_{C\_ENS.Vale\_100}$. Portanto, para a contagem de uma coleção aleatória organizada aleatoriamente/desorganizada acerca do aspecto decimal, a técnica mais econômica foi preterida.

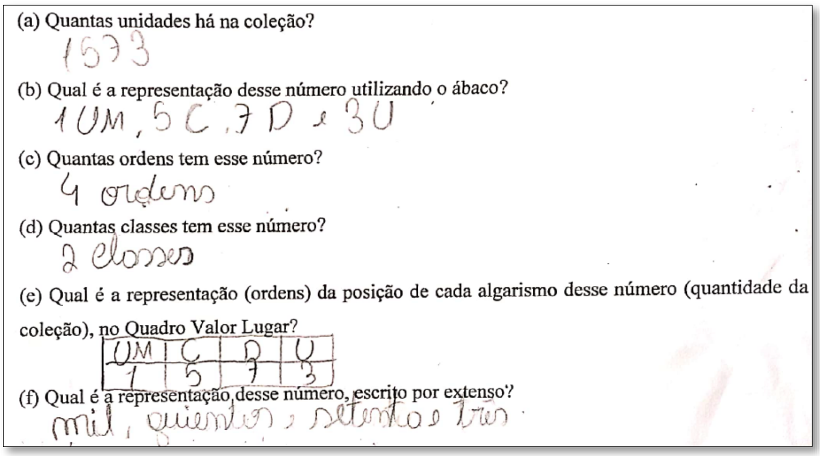
Para as demais tarefas, em especial, sobre o aspecto posicional, os estudantes não apresentaram impedimentos, mesmo não encontrando cardinalidade (quantidade) de palitos corretamente visto que o objetivo das tarefas de (b) a (e) foram utilizar a tecnologia (θ_P) para justificar as escolhas de suas técnicas. O número determinado pela contagem em (a), do grupo 4, foi 1573. Apesar de determinar a cardinalidade incorreta de palitos na coleção, o *não-ostensivo* θ_P foi desenvolvido corretamente, conforme as figuras 71 e 72.

Figura 71 - Representação do numeral 1573 em ENM



Fonte: Dados da experimentação do e_1 (2020)

Figura 72 - Trabalho do grupo 4 sobre o *não-ostensivo* θ_P.



(a) Quantas unidades há na coleção?

1573

(b) Qual é a representação desse número utilizando o ábaco?

1 UM, 5 C, 7 D e 3 U

(c) Quantas ordens tem esse número?

4 ordens

(d) Quantas classes tem esse número?

2 classes

(e) Qual é a representação (ordens) da posição de cada algarismo desse número (quantidade da coleção), no Quadro Valor Lugar?

UM	C	D	U
1	5	7	3

(f) Qual é a representação desse número, escrito por extenso?

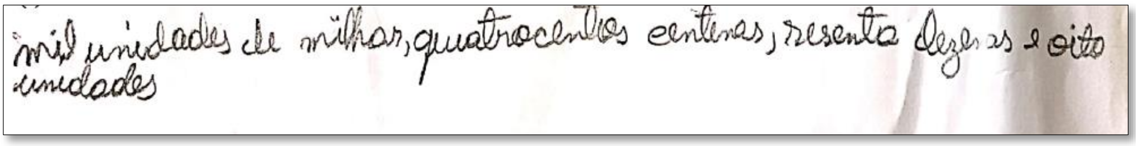
mil, quientos, setenta e três

Fonte: Dados da experimentação do e_1 na Escola 1 (2020)

Apesar de, na tarefa (f), os estudantes não representarem o *ostensivo* ENSE corretamente, eles mobilizaram o *não-ostensivo* $\theta_{NF/ENSE}$ para a relação entre a numeração falada (NF) e escrita numérica simples por extenso (ENSE), ou seja, a relação entre grafia e leitura em língua materna foi efetiva.

Já na tarefa (g) "Como cada unidade de número é representada na escrita numérica?", apenas os estudantes do grupo 8 conseguiram resolver. Ao determinar que a coleção tinha 1 468 palitos, esse grupo escreveu em unidade numérica por extenso (ENSE) conforme o *ostensivo* representado na figura 73.

Figura 73 - Trabalho do grupo 8 sobre o *não-ostensivo* $\theta_{NF/ENSE}$.



Fonte: Dados da experimentação da tarefa (g) do e_1 na Escola 1 (2020)

Durante a experimentação de e_1, os estudantes apresentaram algumas dificuldades para realizar a escrita numérica por extenso[256], mas não quanto ao *não-ostensivo* θ_{NF}. Essas dificuldades ocorreram devida a compreensão de ouvir a escrita numérica, pela numeração falada, e interpretar a numeração falada (NF) para as escritas numéricas, ou seja, $T_{NF/EN}$ não foi efetivada.

Sendo assim, a análise do e_1 na escola 2 segue logo abaixo.

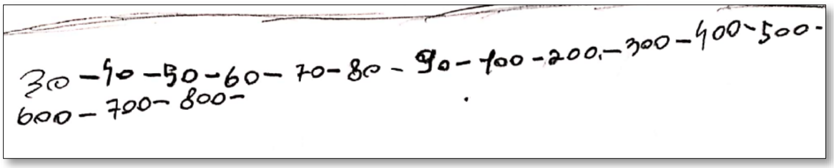
7.4.1.2 AEP 1 na Escola 2

Já na escola 2, a divisão dos estudantes em grupos de 3 estudantes formaram exatamente 7 grupos, conforme a proposta inical organizada nos *cenários*. A *restrição* (K) organização das mesas dos estudantes na classe também foi idêntica a escola 1 dificultando o manuseio dos MM.

As praxeologias dos estudantes consideradas foram designadas pelo grupo 2 (E_{2_9}, E_{2_11} e E_{2_25}), 3 (x_{2_3}, x_{2_4} e x_{2_13}), grupo 4 (x_{2_6}, x_{2_17} e x_{2_28}) e grupo 6 (x_{2_1}, x_{2_15} e x_{2_22}). Os estudantes desses grupos adotaram a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$, com destaque ao grupo 4 que além de utilizar a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ modificou sua técnica (τ) para $\tau_{C\_ENS.Vale\_100}$. Desse modo, os estudantes do grupo 4 usaram o *não-ostensivo* θ_D para realizar a contagem. Os *ostensivos escritos* desse grupo estão na figura 74.

[256] Não vamos aprofundar essa discussão visto que não é o objetivo dessa pesquisa.

Figura 74 - Representação dos *ostensivos* escritos do grupo 4 (E_{2_6}, E_{2_17} e E_{2_28}).



Fonte: Dados da experimentação da tarefa (a) da e_2 na Escola 2 (2020)

Os estudantes dos demais grupos utilizaram a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$, mas não conseguiram produzir outras técnicas. As respostas da tarefa (a) produzidas pelos grupos de estudantes da escola 2 foram categorizadas no quadro 65.

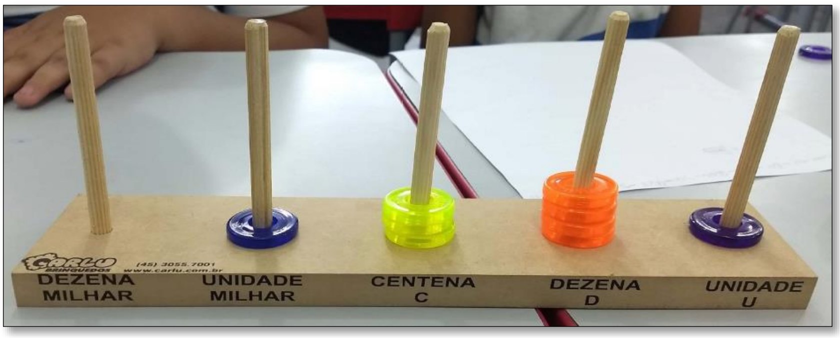
Quadro 65 - Técnicas descritas pelos grupos G1, G5 e G7.

Grupos	Tipos de técnicas
G1 (x_{2_7}, x_{2_10} e x_{2_21})	$\tau_{C\_ENS.Vale.1}$: Contar de uma em uma unidade.
G5 (x_{2_8}, x_{2_18} e x_{2_27})	$\tau_{C\_ENS.Vale}$: Contagem aleatória.
G7 (x_{2_15}, x_{2_22} e x_{2_28})	$\tau_{C\_ENS.Vale}$: Contagem aleatória.

Fonte: O autor (2020)

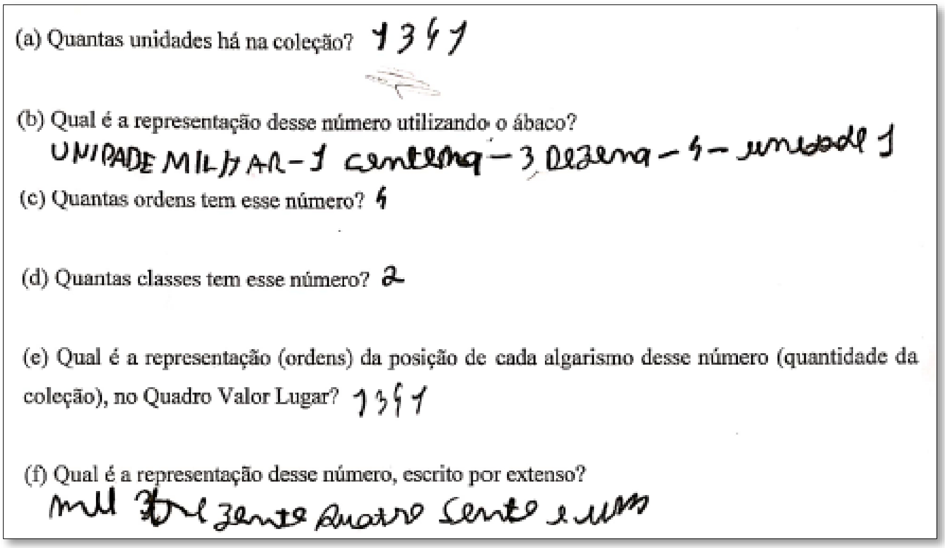
Já para as tarefas de (b) a (e), todos os grupos conseguiram representar o *ostensivo* escrito por meio da abordagem do *não-ostensivo* θ_P. Mas, para a tarefa (e), os estudantes não conseguiram desenhar o QVL, ou seja, não conseguiram realizar a $T_{Trad.ENS/ENT}$. Esses *ostensivos* do G4 podem ser visualizados nas figuras 75 e 76.

Figura 75 - *Ostensivos* do numeral 1 341 em ENM.



Fonte: Dados da experimentação da tarefa (b) do e_1 na Escola 2 (2020)

Figura 76 - *Ostensivos* do G4 do e_1 na escola 2.


(a) Quantas unidades há na coleção? 1341

(b) Qual é a representação desse número utilizando o ábaco?
UNIDADE MILHAR-1 centena-3 dezena-4- unidade 1

(c) Quantas ordens tem esse número? 4

(d) Quantas classes tem esse número? 2

(e) Qual é a representação (ordens) da posição de cada algarismo desse número (quantidade da coleção), no Quadro Valor Lugar? 1341

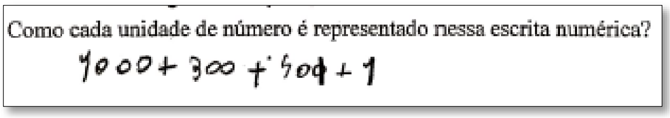
(f) Qual é a representação desse número, escrito por extenso?
mil trezente quatro cente e um

Fonte: Dados da experimentação do e_1 na Escola 2 (2020)

Na tarefa (f), os estudantes não representaram a ENSE corretamente, ou seja, esses estudantes mobilizaram parcialmente o *não ostensivo* $\theta_{NF/ENSE}$ para a relação grafia e leitura em língua materna. Isso indica que os estudantes tiveram dificuldades para interpretar as relações entre a numeração falada e a escrita numérica.

Já na tarefa (g) “Como cada unidade de número é representada na escrita numérica?”, o G4 utilizou a $T_{Trad.ENS/ENPA}$, mas não completou a tarefa $T_{Trad.ENPA/ENCC}$. Os estudantes não conseguiram acompanhar a dinamicidade entre os *ostensivos* para a escrita numérica. Isso já era esperado, pois a mudança de ostensivos para a escrita numérica não existia nas OD propostas pelo LD e professoras, analisadas no MPD. Os demais grupos não conseguiram resolver essas tarefas, conforme a figura 77.

Figura 77 - *Ostensivos* da tarefa (g) do G4 do e_1 na escola 2.


Como cada unidade de número é representado nessa escrita numérica?
1000+300+400+1

Fonte: Dados da experimentação do e_1 na Escola 2 (2020)

Sendo assim, a análise do e_1 foi finalizada. Sendo assim, a análise do e_2 foi iniciada no tópico seguinte.

7.4.2 Análise *a posteriori* das respostas dadas a AEP 2

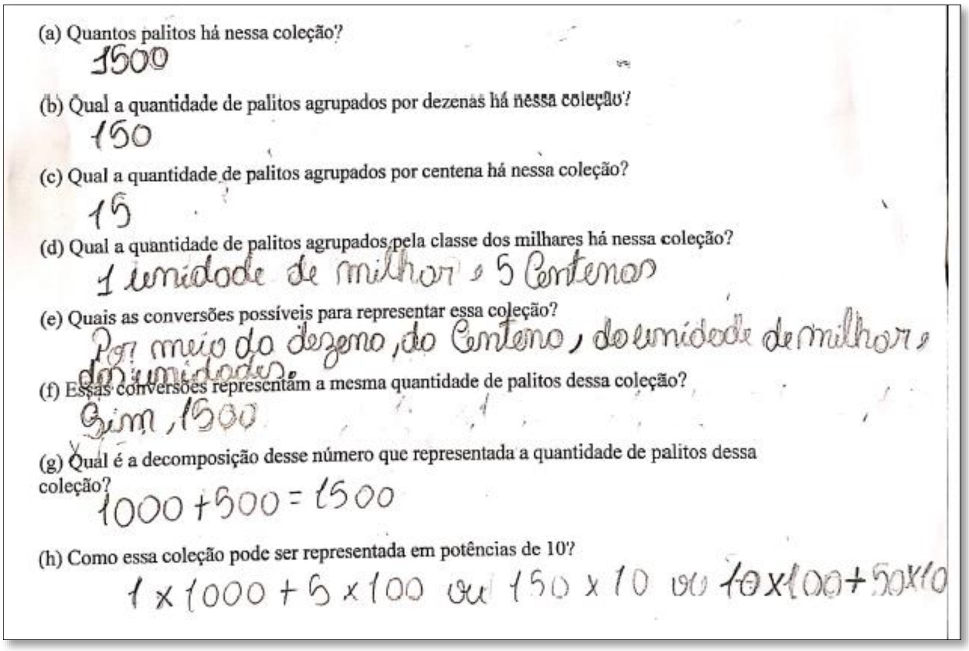
O evento e_2 constituiu o segundo encontro dos estudantes com E. Nesse evento e_2, os estudantes fizeram novamente a contagem da quantidade de palitos e registraram (*ostensivos* escritos) suas praxeologias no ambiente papel e lápis. Os grupos permaneceram fixos, ou seja, os estudantes ficaram nos mesmos grupos nos eventos e_1 e e_2.

As análises do evento e_2 foi iniciada na escola 1, logo abaixo.

7.4.2.1 AEP 2 na Escola 1

Os estudantes do grupo G4 continuaram a contagem dos palitos organizados aleatoriamente usando a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$ e agrupando os palitos em três pacotes, sendo: dois pacotes com 600 palitos e um pacote com 300 palitos. Não foi possível afirmar que os estudantes desse grupo mudaram a técnica (τ) para $\tau_{C\_ENS.Vale\_100}$ visto que o grupo poderia realizar a contagem de 300 em 300 palitos, e consequentemente, a $\tau_{C\_ENS.Vale\_300}$ não revelaria o aspecto decimal. Os *ostensivos* do grupo G4 segue na figura 78.

Figura 78 - Ostensivo escrito apresentado pelo G4 (x_{1_8} e x_{1_11})

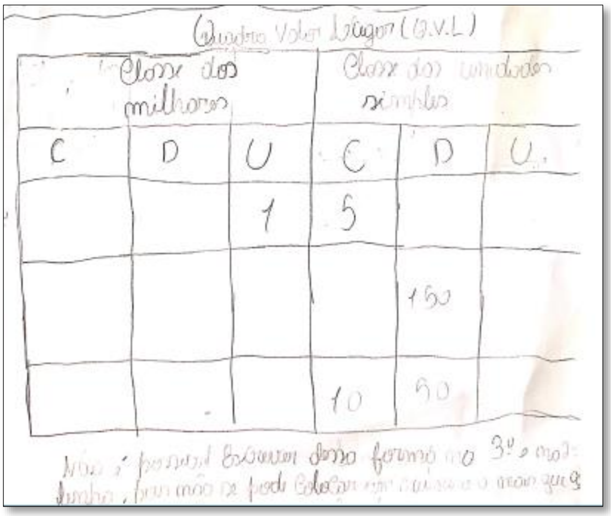


(a) Quantos palitos há nessa coleção?
1500
(b) Qual a quantidade de palitos agrupados por dezenas há nessa coleção?
150
(c) Qual a quantidade de palitos agrupados por centena há nessa coleção?
15
(d) Qual a quantidade de palitos agrupados pela classe dos milhares há nessa coleção?
1 unidade de milhar e 5 Centenas
(e) Quais as conversões possíveis para representar essa coleção?
Por meio da dezena, da Centena, da unidade de milhar e da unidades.
(f) Essas conversões representam a mesma quantidade de palitos dessa coleção?
Sim, 1500
(g) Qual é a decomposição desse número que representada a quantidade de palitos dessa coleção?
1000 + 500 = 1500
(h) Como essa coleção pode ser representada em potências de 10?
1 x 1000 + 5 x 100 ou 150 x 10 ou 10 x 100 + 50 x 10

Fonte: Dados da experimentação do e_2, pelo G4, na Escola 1 (2020)

Os estudantes do G4 conseguiram efetivar os tipos de tarefas para conversões, como $T_{C.ENS/ENC}$ e $T_{C.ENC/ENC}$, e os tipos de tarefas para traduções, sendo $T_{Trad.ENS/ENPA}$ e $T_{Trad.ENS/ENP}$; e executaram as tarefas de conversões aludidas por meio do QVL, ou seja, usaram aas técnicas $\tau_{Trad.ENS/ENT}$, $\tau_{Trad.ENC/ENT}$, $\tau_{Trad.ENP/ENT}$ e $\tau_{Trad.ENPA/ENT}$, conforme a figura 79.

Figura 79 - *Ostensivo* escritos das convesões realizadas pelo G4 usando o QVL



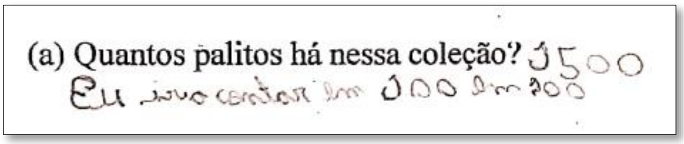
Fonte: Dados da experimentação do e_2 na Escola 1 (2020)

Nesta figura, os estudantes descreveram "Não é possível escrever dessa forma na 3ª e 2ª linhas, pois não se pode colocar um número maior que 9". Nesse *ostensivo* foi observada a articulação entre a *práxis* e o *logos*, representada pelas seguintes tecnologias θ_D e θ_P e teoria Θ.

Os estudantes dos grupos G6 (x_{1_10} e x_{1_16}) e G8 (E_{1_3} e x_{1_18}) apresentaram a mesma técnica e os tipos de tarefas de G4.

Já os estudantes do grupo G1(x_{1_1} e x_{1_18}) e G7 (x_{1_12} e x_{1_16}) apresentaram uma técnica considerada a mais econômica, a $\tau_{C\_ENS.Vale\_100}$, para a contagem de palitos organizados aleatoriamente, ou seja, contar de 100 em 100 para a cardinalidade de 1500, conforme a figura 80.

Figura 80 - *Ostensivos* que representa a $\tau_{C\_ENS.Vale\_100}$.do G7



Fonte: Dados da experimentação do e_2 na Escola 1 (2020)

Já os estudantes dos outros grupos elaboraram estratégias aleatórias que não emerge o trabalho sobre o *logos* $[\theta, \Theta]$, ou seja, não articulavam o aspecto decimal ao posicional do SND. As demais técnicas levantadas pelos estudantes dos outros grupos estão disponíveis abaixo, no quadro 66.

Quadro 66 – Técnica descrita pelos grupos G2, G3 e G5.

Grupos	**Tipos de técnicas**
G3 (x_{1_7} e x_{1_14}), G5 (x_{1_9} e x_{1_13}) e G5 (x_{1_9} e x_{1_13})	$\tau_{C\_ENS.Vale.1}$: Contar de uma em uma unidade.

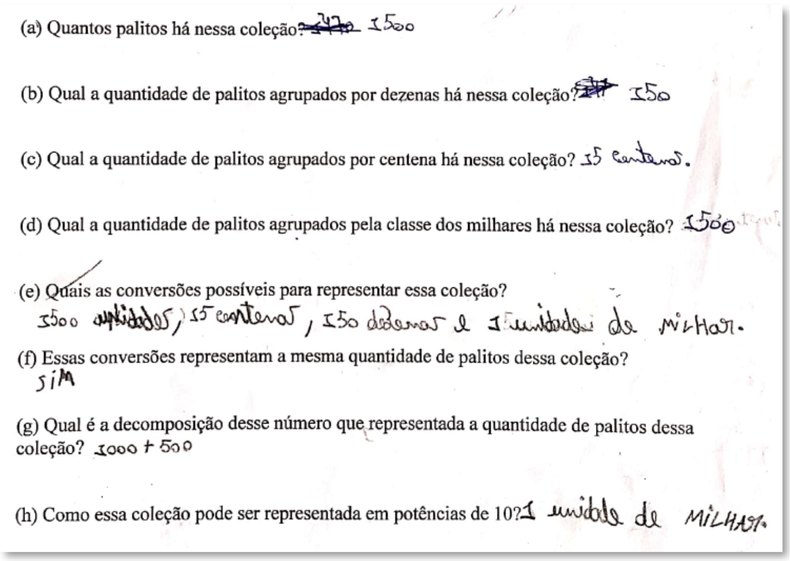
Fonte: O autor (2020)

A análise do e_2 realizada na escola 2 segue abaixo.

7.4.2.2 AEP 2 na Escola 2

Os estudantes do grupo G5 (x_{2_8}, x_{2_18} e x_{2_27}) apresentaram praxeologias alicerçadas na técnica (τ) de contagem em 10 em 10, ou seja, utilizaram a $\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$. Os demais grupos contaram aleatoriamente. Os *ostensivos* escritos referente ao G5 estão na figura 81.

Figura 81 - *Ostensivos* escrito apresentado pelo G5 (x_{2_8}, x_{2_18} e x_{2_27}).



(a) Quantos palitos há nessa coleção? ~~1470~~ 1500

(b) Qual a quantidade de palitos agrupados por dezenas há nessa coleção? ~~147~~ 150

(c) Qual a quantidade de palitos agrupados por centena há nessa coleção? 15 centenas.

(d) Qual a quantidade de palitos agrupados pela classe dos milhares há nessa coleção? 1500

(e) Quais as conversões possíveis para representar essa coleção?
1500 unidades, 15 centenas, 150 dezenas e 1 unidade de milhar.

(f) Essas conversões representam a mesma quantidade de palitos dessa coleção?
sim

(g) Qual é a decomposição desse número que representada a quantidade de palitos dessa coleção? 1000 + 500

(h) Como essa coleção pode ser representada em potências de 10? 1 unidade de milhar.

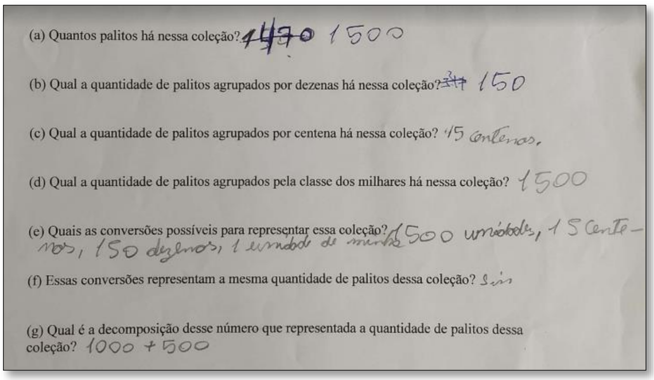
Fonte: Dados da experimentação do e_2, pelo G5, na Escola 2 (2020)

Os estudantes do G5 representaram, inicialmente, o ostensivo 1 470 para a contagem. Após utilizarem o primeiro kit com 150 pacotes agrupados pela dezena (pacotes de 10) e o segundo kit com 15 pacotes agrupados pela centena (pacotes de 100) perceberam que ambos os kits possuem a mesma cardinalidade de palitos (1500), ou seja, emergiu a tecnologia θ_D. Este grupo também apresentou *ostensivos* para o tipo de tarefas de conversão (T_{Conv}) a fim desses estudantes compreenderem as relações entre as unidades, dezenas, centenas e unidade de milhar usando a $\tau_{Conv.ENS/ENC.PAgr\_Het.2}$.

Já os grupos G2 (x_{2_9}, x_{2_11} e x_{2_25}) e G7 (x_{2_15}, x_{2_22} e x_{2_28}) não conseguiram, inicialmente, realizar a $T_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$. Após compreenderem que os tipos de tarefas para conversão (T_{Conv}) representavam a mesma cardinalidade (quantidade) de palitos, esses estudantes conseguiram finalizar e_2.

O desenvolvimento da tecnologia θ_{Conv} foi fundamental para a construção de suas respectivas praxeologias que, também, proporcionou a compreensão de outros *ostensivos* diante das tarefas de tradução entre as escritas numéricas $T_{Trad.ENS/ENC}$, $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENC/ENCC}$, $T_{Trad.ENCCS/ENPA}$, $T_{Trad.ENC/ENP}$. Estes tipos de tarefas apontaram para o trabalho sobre as técnicas $\tau_{Trad.ENS/ENC}$, $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$, $\tau_{Trad.ENC/ENCC}$, $\tau_{Trad.ENCCS/ENPA}$, conforme a figura 82.

Figura 82 - *Ostensivos* escrito apresentado pelo G6 (x_{2_1}, x_{2_20} e x_{2_24}).


(a) Quantos palitos há nessa coleção? ~~1470~~ 1500

(b) Qual a quantidade de palitos agrupados por dezenas há nessa coleção? 150

(c) Qual a quantidade de palitos agrupados por centena há nessa coleção? 15 centenas.

(d) Qual a quantidade de palitos agrupados pela classe dos milhares há nessa coleção? 1500

(e) Quais as conversões possíveis para representar essa coleção? 1500 unidades, 15 centenos, 150 dezenos, 1 unidade de milhar

(f) Essas conversões representam a mesma quantidade de palitos dessa coleção? Sim

(g) Qual é a decomposição desse número que representada a quantidade de palitos dessa coleção? 1000 + 500

Fonte: Dados da experimentação do e_2, pelo G5, na Escola 2 (2020)

Os estudantes não apresentaram a técnica $\tau_{\text{Trad.ENS/ENP}}$. Isso já era esperado, visto que a análise do MPD indicou que as OD, tanto do LD quanto as propostas pelas professoras, quando não desfavoreciam, pouco apresentavam tarefas sobre a escrita numérica em potência de dez (ENP). Consequentemente, os estudantes não conseguiram mobilizar as seguintes tecnologias $\theta_{\text{NE/NF}}$, θ_{Adic} e θ_{D}.

Os demais grupos apresentaram respostas que não se aproximam do objetivo geral, logo não foram levantadas para a discussão.

7.5 Considerações acerca da análise das AEPs

As iniciar as considerações sobre as AEPs, relembramos a questão Q_4: Em que condições os materiais manipuláveis podem ser um instrumento a serviço da aprendizagem do aspecto decimal?

Nesse segmento, também foi essencial revisitar o problema didático dessa investigação, sendo P_D: Os aspectos posicional e decimal não estão sendo articulados durante o ensino do Sistema de Numeração Decimal (SND), que indicou a seguinte questão, na dimensão econômica: Quais os impactos das atividades estudo e pesquisa, alicerçadas na OM reconstruídas, no ensino do SND?

No intuito de elaborar a resposta $R_4^\lozenge$, e consequentemente, responder o P_D no âmbito da dimensão econômica, as AEPs $\left(\Im\left(\wp, K, C, \prod_{pr}, U, V\right)\right)$ foram estruturadas por meio de $\wp$ e suas K e C para resolver $\prod_{pr}$ em torno de U e V com o finalidade de favorecer a integração do aspecto decimal ao posicional no ensino do SND. Estes U (estudantes) e V (professoras) mostraram seus equipamentos praxeológicos durante o processo da pesquisa (observação e experimentação).

Nesse sentido, o E elaborado pelo pesquisador ξ, e conduzida no processo de experimentação, possibilitou o surgimento de algumas $K_\xi \cup C_\xi \vdash\!\!\!-\!\!-_{\xi}\ e$, por exemplo K_ξ: a quantidade de palitos não favoreceu o processo de contagem. A manipulação de grandes quantidades não proporcionou, em e_1, que U pudesse evidenciar, inicialmente, a relação entre as tecnologias θ_D e θ_P. Devido a isso nenhum estudante conseguiu determinar que haviam 1500 palitos.

Uma C_ξ importante foi relativa aos *ostentivos* $T_{Trad.ENS/ENM}$, $T_{Trad.ENS/ENCC}$, $T_{Trad.ENS/ENT}$ e $T_{Trad.ENS/ENSE}$ que fizeram emergir o *não ostensivo* θ_P. Isso já era esperado uma vez que a revisão de literatura (DmM) apontou que, utilizando as mídias (m), deveríamos encontar um meio (M) para integrar o aspecto decimal ao posicional. Essa integração foi observada no processo de resolução entre os dois eventos e_i, já que U superou a K_{ξ_1} e utilizaram *os ostensivos* $T_{Conv.ENS/ENC}$, $T_{Conv.ENCC/ENC}$, $T_{Conv.ENM/ENC}$ e $T_{Conv.ENT/ENC}$ mobilizando as seguintes tecnologias θ_D e θ_P. Assim, e_2 proporcionou essa integração.

Outra C_ξ levantada por ξ refere-se a modificação do contrato didático entre V e U já que as propostas de E, as AEPs, modificou o modelo de ensino saindo do modelo *Euclidiano* para o *Construtivista* (GASCÓN, 2003, 2011). Durante as observações foi possível concluir que o ensino proposto nas instituições observadas, o saber foi prescrito da seguinte forma: V apresentava elementos Θ sobre os aspectos do SND e iniciava o trabalho sobre a τ acompanhando U a fim de que este determinasse as τ condicionada pela Θ apresentada. Não houve discussão[257] no sentido de questionar os saberes apresentados nos currículos oficiais e no LD. O saber foi considerado acabado, ou seja monumentalizado (CHEVALLARD, 2012).

O trabalho sobre E foi estruturado para que U pudesse compreender que o saber pode e deve ser questionado, mesmo V e ξ entendendo que U não modificaria o *status* do saber, mas construíriam novos conhecimentos relativos ao sistema intra-matemático. Nesse sentido,

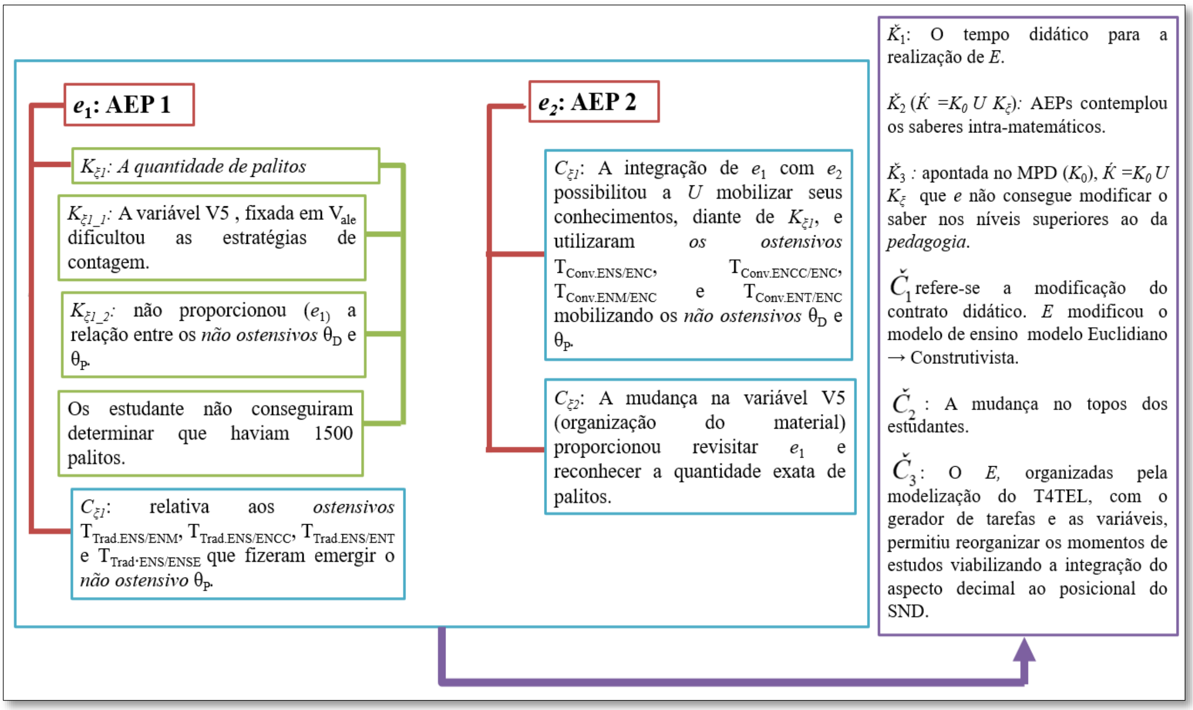
[257] Ao admitir isso, não apontamos uma "culpa" para as professoras ou a unidade escolar. Mas é um problema institucional que a *noosfera* deve se movimentar a fim de modificar o modelo de ensino.

E foi considerada pertinente, visto que os e_i foram elaborados para questionar os saberes da OML.

Nesse sentido, $\breve{K} = K_0 \cup K_\xi$ foi compreendida como uma restrição apontada no MPD $\left(K_0\right)$, já que e_i não consegue modificar o saber nos níveis de codeterminação superiores ao da *pedagogia*. Essa foi uma das limitações que apontamos para e. Apesar disso, os e_i foram considerados organizados após a modelização do T4TEL, com o gerador de tarefas e as variáveis, que permitiu reorganizar os *momentos* de estudos viabilizando a integração do aspecto decimal ao posicional do SND.

Diante dessas elucidações supracitadas, o MDR alicerçado nas AEPs foi essencial para essa pesquisa uma vez que possibilitou ξ agir como um agricultor neolítico (CHEVALLARD, 2014a) que organizou a plantação para colher os dados não contemplados na observação e experimentação do *E*. Nesse sentido, esse paradigma proposto por Chevallard (2014a), auxilia na condução do *E* para as análises diante das *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) apontadas durante a experimentação. Essas considerações podem ser observadas na figura 83.

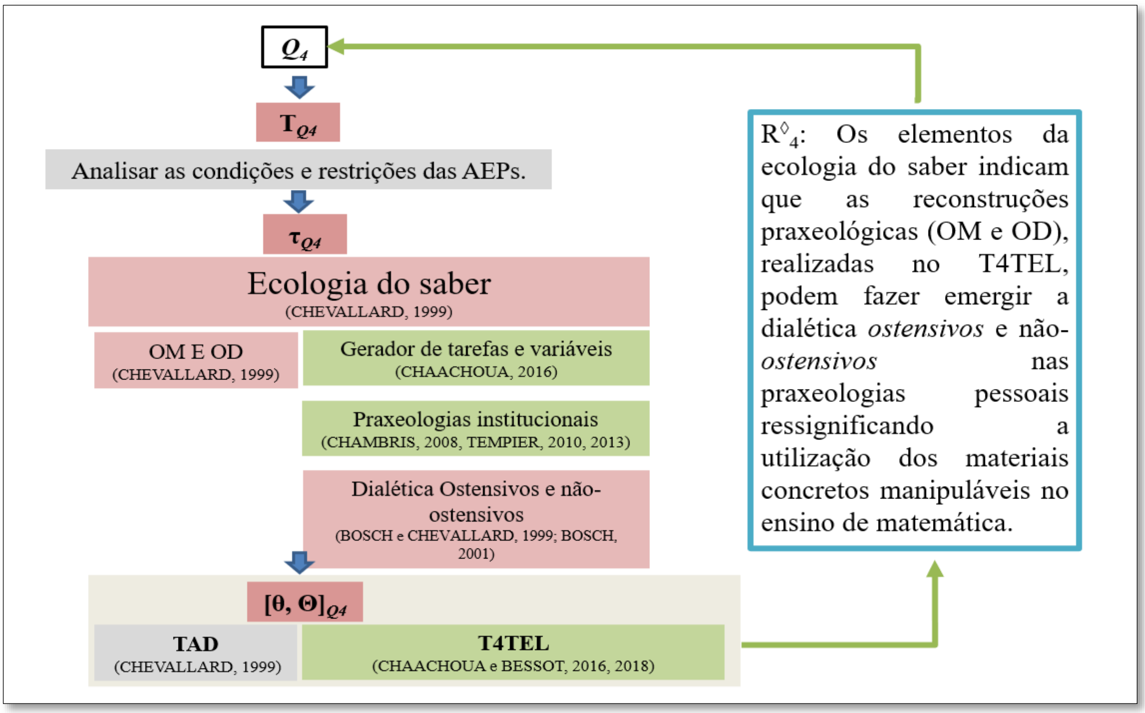
Figura 83 - As condições ($\breve{C}$) e restrições ($\breve{K}$) do desenvolvimento das AEPs



Fonte: o autor (2020)

Em síntese, após as explanações referenciadas sobre o E, e o processo de construção da resposta $R_4^{\lozenge}$, em relação a questão Q4, foi efetivado usando os ei por meio da modelização do T4TEL, como fora supramencionado. Esse processo foi materializado no esquema abaixo, conforme a figura 84.

Figura 84 - Esquema que representa o processo de construção da resposta $R_4^{\lozenge}$.



Fonte: o autor (2020)

Por conseguinte, as $R_3^{\lozenge}$ e $R_4^{\lozenge}$ foram essenciais para a modelização do processo de construção da resposta $R^{\heartsuit}$.

O processo de construção da resposta $R_4^{\lozenge}$ também apresentou indícios para responder outras duas questões que essa investigação tentou responder as questões Q_6 e Q_7, A SABER:

Q_6: Que tipos de limitações e restrições existem em nossos sistemas educacionais atuais que impedem que a modelização matemática seja amplamente incorporada nas atividades diárias da sala de aula?

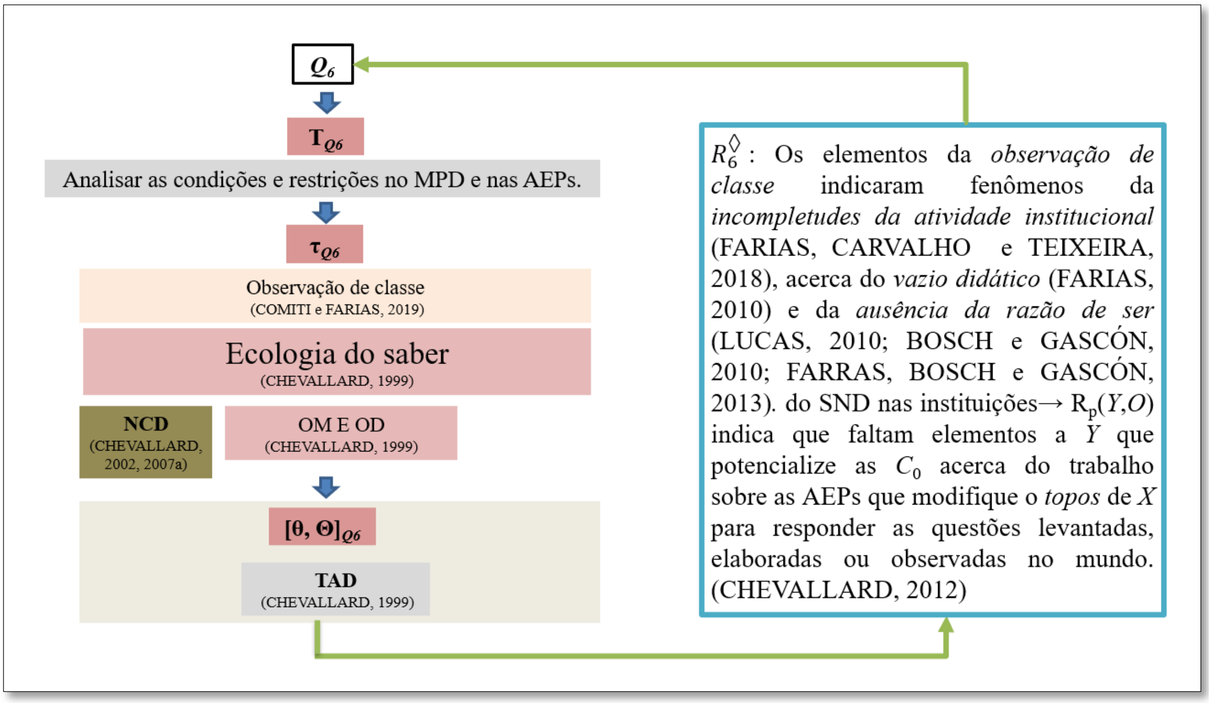
Q_7: Levando em conta essa ecologia específica da modelização matemática, que tipo de condições - em termos de atividades didáticas - poderia ajudar a uma integração em larga escala da modelização matemática na escola?

Foi muita pretensão desse investigador e, também, do orientador em tentar dirimir lacunas nos sistemas educacionais, que muitas vezes, são constituídas de problemas didáticos (FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013). Mas são essa inquietações que fizeram e fazem o avanço do conhecimento científico.

Estes problemas evidenciaram a dificuldade de compreensão dos professores (*Y*) acerca da ecologia dos saberes (CHEVALLARD, 1999), no âmbito da epistemológica do saber, que observado no processo transpositivo (CHEVALLARD e JOHSUA, 1991) deveria efetivar os saberes no *saber aprendido*, por meio da integração das *praxeologias pessoais* dos estudantes (*X*) as lacunas das *praxeologias institucionais* (CHAACHOUA e BESSOT, 2016, 2018).

Nesse contexto, o métodos de investigação da *observação de classe* (COMITI e FARIAS, 2019) integrada a ecologia do saber, desenvolvida na Praxeologia de Pesquisa (CHEVALLARD, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d), permite realizar análises do funcionamento dos sistemas educacionais, tanto *interno* quanto *externo* as classes, apontando caminhos para identificar fenômenos didáticos, como a *incompletude da atividade institucional* (FARIAS, CARVALHO e TEIXEIRA, 2018), em especial , o *vazio didático* (FARIAS, 2010) e a *ausência da razão de ser* (LUCAS, 2010; BOSCH e GASCÓN, 2010; FARRAS, BOSCH e GASCÓN, 2013), nas quais é possível indicar as *condições* (*C*) e *restrições* (*K*) na instituições, estruturas pelos níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002, 2007a). Esse método foi materializado na figura 85.

Figura 85 - Esquema que representa uma proposta para a construção da resposta $R_6^{\lozenge}$.



Fonte: o autor (2020)

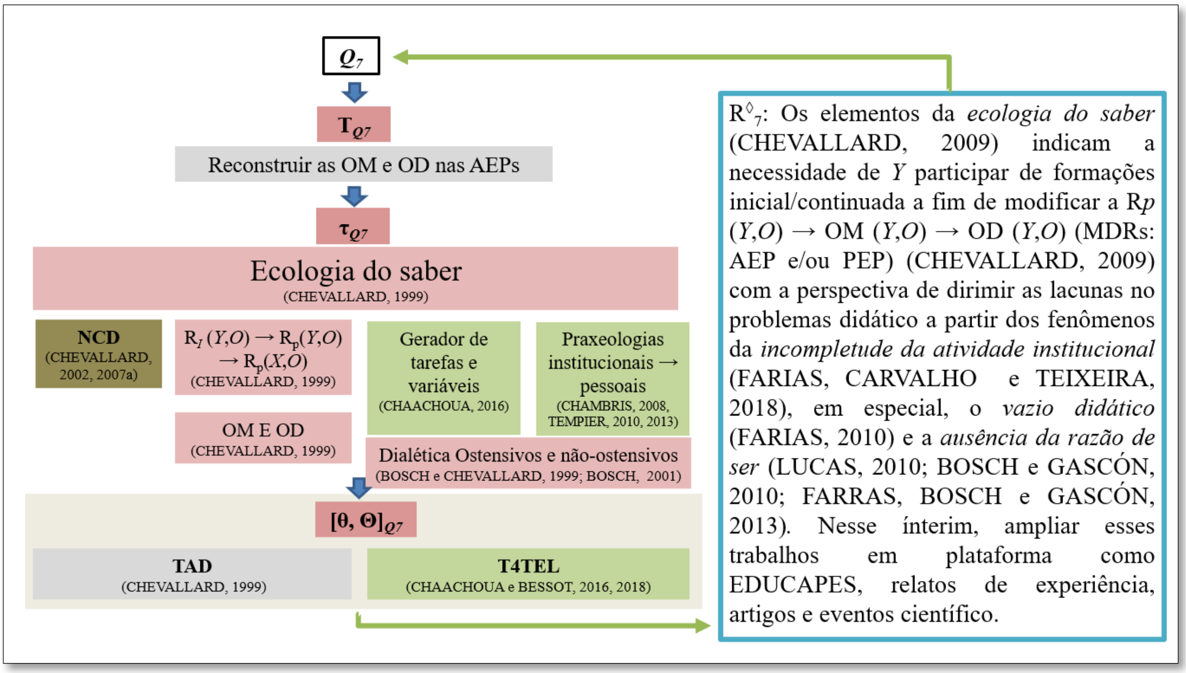
Nesse contexto, as atividade de investigação, como propõe Chevallard (2009a, 2009b), modificam a relação dos professores (Y) com o objeto, $R_p(Y,O)$, dirimindo lacunas que ainda persistem nos sistema educacionais, como o currículo fragmentado por disciplinas que acompanha a formação inicial de professores, também voltada para uma única disciplina.

As ações propostas no processo de elaboração da resposta $R_6^{\lozenge}$ também conduziu essa pesquisa apontar alguns indícios para uma proposta com o intuito de responder a questão Q_7. Mas para que as atividades didáticas modelizadas, diante da reconstrução de praxeologias, sejam incorporadas é fundamental promover mudanças em diversos âmbitos do sistema educacional, iniciando pela formação dos professores que ensinam nas licenciaturas aproximando-os do trabalho sobre os fenômenos didáticos, no currículo da formação inicial de professores efetivando a epistemologia do saber no processo transpositivo e na formação continuada de professores da educação básica, auxiliando-os a modelizarem suas praxeologias evidenciando a importância da elaboração e desenvolvimento das praxeologias completas.

Nesse contexto, esses professores, após essas formações indicadas, poderiam explicitar suas práticas modelizadas em plataformas oficiais, como a eduCAPES[258], proporcionando acesso dessas OD a outros professores que utilizaram em suas práticas.

Essa proposta de contrução de uma resposta $R_7^{\lozenge}$ para responder a questão Q_7 foi materializada na figura 86.

Figura 86 - Esquema que representa uma proposta para a construção da resposta $R_7^{\lozenge}$.



Fonte: o autor (2020)

[258] O eduCAPES é um portal de objetos educacionais abertos para uso de alunos e professores da educação básica, superior e pós graduação que busquem aprimorar seus conhecimentos. Esse portal engloba em seu acervo milhares de objetos de aprendizagem, incluindo textos, livros didáticos, artigos de pesquisa, teses, dissertações, videoaulas, áudios, imagens e quaisquer outros materiais de pesquisa e ensino que estejam licenciados de maneira aberta, publicados com autorização expressa do autor ou ainda que estejam sob domínio público. Informação disponível em: https://educapes.capes.gov.br/redirect?action=about .Acesso em 15 fev. 2020.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação realizada nesta obra teve por objetivo investigar como um Modelo Didático de Referência (MDR), baseado na abordagem da atividade de estudo e pesquisa (AEP), pode integrar o aspecto decimal ao posicional no logos das praxeologias dos estudantes no trabalho com sistema de numeração decimal no 5º Ano. O contexto da investigação envolveu os estudantes de duas escolas da rede municipal de ensino de Salvador.

No intuito de alcançar esse objetivo, essa investigação foi realizada acerca do PQM, proposto por Chevallard (2012), que contempla teoricamente a TAD (CHEVALLARD, 1999) e suas abordagens, como a *ecologia do saber* (CHEVALLARD, 1999), os níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002, 2007a), as dialéticas *ostensivo* e *não-ostensivos* (BOSCH e CHEVALLARD, 1999; BOSCH, 2001) e *mídia-meio* (CHEVALLARD, 1999; KIDRON *et al*. 2014) e o T4TEL (CHAACHOUA e BESSOT, 2016, 2018), e elementos da TTD (CHEVALLARD e JOHSUA, 1991) para questionar as formas como o SND está sendo conduzido nas instituições.

Dessa forma, foi possível elaborar a seguinte questão de investigação "De que forma é possível elaborar um Modelo Didático de Referência para favorecer a articulação do aspecto decimal ao posicional do Sistema de Numeração Decimal no 5º ano?".

Essa questão de investigação possibilitou levantar a hipótese "As praxeologias do Modelo Praxeológico Dominante (MPD) não contribuem para o *saber ensinado* para que o aspecto decimal esteja articulado ao posicional do SND para os números naturais", a partir do estudo das obras de Chambris (2008), Mounier (2012), Tempier (2010, 2013) e Chaachoua (2016).

Diante desse contexto, a metodologia de investigação foi estruturada na Praxeologia de Pesquisa associada a observação de classe a fim de modelizar as etapas da investigação diante do PQM, analisando cada elemento que integra o sistema hebatiano. Dessa forma, cada segmento da investigação foi alicerçado sobre métodos de investigação específicos, estruturados na TAD. Esse referencial teórico foi essencial tanto para justificar os métodos de investigação de cada etapa quanto para modelizar as análises acerca do objeto. Esse processo foi uma contribuição singular tanto para as pesquisas desenvolvidas sobre a lente das teorias da Didática das Ciências quanto para o avanço da modelização de investigações desenvolvidas sob a praxeologia de pesquisa.

Os resultados dessa investigação foram organizados de acordo com os objetivos específicos.

Para tanto, a abordagem histórica e epistemológica do SND foi elaborada a partir da análise da *ecologia do saber*, que permitiu compreender a economia de algarismos para a representação dos números e evolução dos sistemas numéricos, diante da influência cultural na criação do sistema numérico de base 10.

Nesse contexto, a abordagem proposta apresentou elementos teóricos do *domínio* da Aritmética, perpassando desde os postulados mais primitivos como os *axiomas de Peano* quanto a estrutura matemática, descrita por Grupos e Monóide, que constituíram o *saber sábio* (teoria (Θ)) para a enumeração (contagem) de objetos de uma mesma coleção integrando o *logos* das OMP. Esta estrutura apontou indícios que o *saber sábio* deve passar por modificações de natureza epistemológica, considerando a articulação entre os aspectos do SND, até chegar a instituição 5º ano. Essa etapa reuniu elementos sobre as linhas de história e filosofia, diante da epistemologia, que integram o programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC). Essa análise cumpriu o primeiro objetivo específico: abordar aspectos históricos e epistemológicos do saber sobre os aspectos do SND para compreender as primeiras noções sobre o saber e o avanço da construção matemática ao longo do tempo.

Diante do *logos* estruturado a revisão de literatura foi construída, a partir do método da *dialética mídia-meio*, e teve um papel essencial para identificar que as *mídias* (Obras (O_m)) analisadas, já estabelecidas na comunidade, permitiram criar um *meio* para direcionar a reconstrução das praxeologias que fosse capaz de integrar os aspectos posicional e decimal do SND.

Diante do *logos* e do *meio* que apontou algumas lacunas na articulação de ambos os aspectos do SND, foi realizada a visitação das Obras (O_m) nas instituições para compreender como o SND está posto nas instituições. Para tanto, a elaboração e análise do MPD foram alicerçadas, primeiramente, pelo método da *observação classe externa*. Essa observação considerou, para a produção de dados, os currículos oficiais, partindo do global para o local, iniciando na BNCC, passando pelas as OCDE e finalizando no RCMS. A análise desses documentos levou em consideração a integração da *observação de classe* aos níveis de codeterminação didática evidenciando as *condições* (C) e *restrições* (K) para que o SND seja efetivado no 5º do ensino fundamental.

Posteriomente, a análise foi direcionada aos documentos que envolviam diretamente as unidades escolares participantes, iniciando no PPP. Este documento da escola 1 não apresentou sequer indícios de como os saberes pode ser desenvolvidos, uma restrição institucional (C_0) deixando a cargo do professor mais uma responsabilidade. Já na escola 2, não houve PPP disponível. Isso foi considerado *restrição* (K) importante visto que os planejamento anual, trimestral e de aulas dos professores não dialogaram com a formação para a cidadania como prever os currículos oficiais.

Nesss sequência, a análise dos livros didáticos das escolas, realizada a luz do modelo tridimensional, e do caderno dos estudantes, passando a *observação de classe interna*, evidenciou que o ensino proposto na instituição 5º ano dessas escolas seguiu o modelo *Euclidiano* ou *Clássico* caracterizado por (OM e OD)$_{\text{incompletas}}$, visto que as tarefas propostas nessas instituições não conduziam os estudantes (X) ao trabalho para o escopo de técnicas já que não passavam do *segundo momento* das OD propostas, ou seja, prevalesceu as OM$_{\text{incompletas}}$. Outra *restrição* (K) analisada foi o assujeitamento das professoras participantes, de ambas as escolas, aos LDs. Essa restrição indica que há necessidade de mudanças emergenciais tanto currículo da formação inicial e continuada de professores quanto na formação desses professores das licenciaturas. Isso dificultou, durante essa estapa da observação, o desenvolvimento de *praxeologias pessoais* distintas das *praxeologias institucionais*, esperadas pela instituição. Sendo assim, o ensino do SND na instituição do 5º ano foi considerado como *monumentalizado*. Foi nessa etapa que as *incompletudes da atividade institucional*, diante do *vazio didático* e da *ausência da razão de ser* para as operações básicas e potencias de dez tornaram-se visíveis.

Diante desse contexto, a hipótese de investigação foi comprovada, visto que as praxeologias institucionais não contribuíram para articular o aspecto decimal ao posicional do SND, finalizando o segundo objetivo específico: analisar as condições e restrições presentes nos níveis de codeterminação acerca do aspecto decimal da numeração no 5º Ano.

As lacunas apresentadas do MPD, foram essenciais para a elaboração e análise do MPR. O método adotado para a construção desse modelo foi a *ecologia do saber* no tocante a epistemologia que, diante do sistema herbatiano, apresentou a modelização da reconstrução das OM, integradas ao *logos*. Esta modelização foi alicerçada no *gerador de tarefas* e *variáveis*, elementos teórico do T4TEL. Essa abordagem teórica da TAD permitiu reconstruir praxeologias, transformando-as em $OM_{completas}$, integrando as duas OMP (OM_{Card} e OM_{Trad}) que possibilitaram integrar ambos os aspectos do SND.

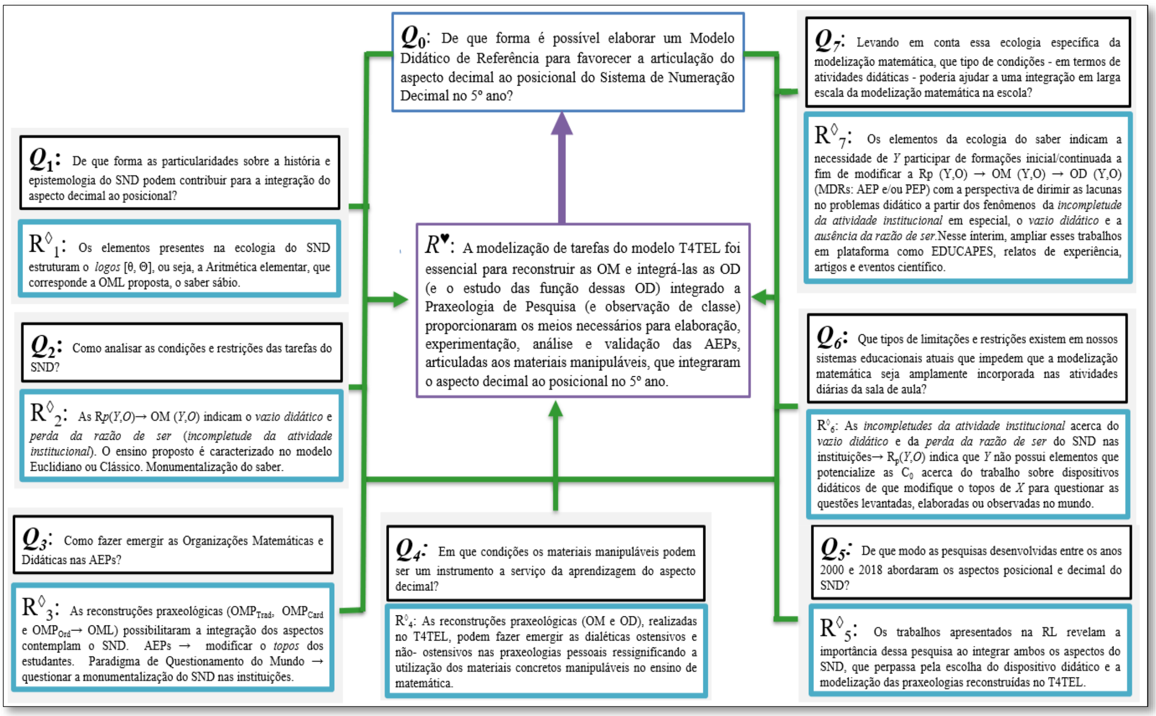
Essas OMP foram reconstruídas utilizando os materiais manipuláveis, visto que esses tipos de materiais são indicados nos currículos supracitados como *condição* (*C*) para implementar AEPs a fim de efetivar a articulação do aspecto posicional ao decimal da numeração. Diante do PQM, paradigma em que esta investigação foi alicerçada, as AEPs tiveram como objetivo modificar o *topos* dos estudantes (*X*).

O método utilizado para a elaboração e execução das AEPs foi a *observação de classe*, por meio dos *cenários* e das *crônicas*, integrada a *ecologia do saber*. Através desse método, foi possível observar que o cenário preparado para o desenvolvimento das AEPs foi construído a partir de análise preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação, elementos que também estruturam a Engenharia Didática. As AEPs organizadas a partir do MPR, selecionou materiais de fácil manuseabilidade que integradas as praxeologias reconstruídas relativas aos tipos de tarefas para conversões (T_{Conv}) e traduções (T_{Trad}), a partir dessas conversões, possibilitou a efetivação da integração de ambos os aspectos do SND. Nesse contexto, o terceiro objetivo específico foi contemplado: Elaborar AEPs por meio de praxeologias que integrem o aspecto decimal ao posiciona do SND.

As análises das AEPs consideraram as *praxeologias pessoais* dos estudantes, a luz da dialética *ostensivos* e *não-ostensivos*, integradas a *ecologia do saber* e as *variáveis* do T4TEL. A manipulação de grandes quantidades de material concreto em e_1 foi uma *restrição* (*K*) uma vez que possibilitou $OM_{incompletas}$ nas *praxeologias pessoais*. Essa *restrição* (*K*) foi minimizada em e_2 diante da reorganização desses materias manipuláveis indicando o tipo de tarefas sobre conversões para integrar ambos os aspectos do SND. Apesar dessa *restrição* (*K*), as *praxeologias pessoais* dos estudantes evidenciaram a mudança no *topos* desses estudantes (*X*) diante da interação no processo de construção e seleção das praxeologias para representar seus respectivos grupos. Nesse contexto, a mudança no *topos* dos estudantes indicou que o ensino conduzido por AEPs foi modificado do modelo *Euclidiano* para o *Construtivista*. Portanto, o quarto objetivo específico foi contemplado: analisar as praxeologias pessoais dos estudantes e os efeitos destas, submetidas as AEPs, nas turmas do 5º Ano.

Diante das elucidações supramencionadas e do objetivo geral contemplado, o sistema didático inicial $S\left(X,Y,Q_0\right)$ foi modificado para $S\left(X,Y,\heartsuit\right)$, conforme a figura 87, ou seja, a investigação conseguiu contemplar a resposta $R^{\heartsuit}$.

Figura 87 - Esquema do processo de construção de $R^{\heartsuit}$.



Fonte: o autor (2020)

Portanto, essa pesquisa reuniu elementos que contemplaram a linha de ensino do PPGEFHC, complementando assim a tríade ensino, filosofia e história das ciências para as quais o PPPGEFHC foi criado.

Apresentamos também algumas implicações dessa pesquisa que, na perspectiva científica, conseguiu apontar caminhos a fim de dirimir as lacunas apresentadas no problema didático ao responder as questões de dimensão ecológica indicando o *habitat* e o *nicho* do SND bem como as *razões de ser* do SND, na dimensão epistemológica ao reconstruir as praxeologias institucionais e na dimensão econômica ao evidenciar que os materiais manipuláveis integrados as $OM_{completas}$ foram ferramentas importantes tanto no processo de reconstrução das OM quanto na aprendizagem dos estudantes.

As etapas de construção de $R^{\heartsuit}$ também evidenciaram que a modelização de OM por meio do T4TEL indicou caminhos para reconstrução de praxeologias que explorem outros tipos de recursos que auxiliem o professor no processo de ensino a tornar o estudante construtor do seu próprio conhecimento.

A pesquisa também apresentou impactos sob três pontos: primeiro, nas escolas participantes uma vez que essa foi a primeira atividade de investigação dos estudantes e das professoras participantes, dessa forma foi essencial o acompanhamento dos processo de construção e experimentação dessas AEPs pelas professoras; segundo, a seleção de recursos, como os materiais manipuláveis, para conduzir OD, pode promover a construção de estratégias para articular ambos os aspectos do SND e modificar as ações (o *topos*) dos estudante diante AEPs na prática; terceiro, da profissão docente uma vez que essa investigação descreveu novas possibilidades para elaboração de planejamentos e OD, possibilitando mudanças também o *topos* dos docentes, diante do *vazio didático* identificado na pesquisa.

No tocante as limitações dessa pesquisa, a falta de variabilidade de materiais concretos como o material dourado, ou seja, uma e_3, poderia desenvolver e ampliar outras praxeologias diante de outras modelizações e, consequentemente, outras variáveis; não adentrar aos outros dois fenômenos que integram a *incompletude da atividade institucional*: *integridade institucional* e *ausência de um conceito* poderia trazer luz sobre noções; a formação inicial e continuada na área da Pedagogia, responsável pelo o ensino de matemática nos anos iniciais do EF, dificulta a participação desses professores no processo de modelização de atividades matemáticas diante do *vazio didático* acerda da epistemologia ; a infraestrutura das unidades que dificultaram o desenvolvimento de atividades de investigação já que os *cenários* da classe são estrurados, física e culturalmente, para odesenvolvimento do ensino no modelo *Euclidiano*.

Há também limitações sobre as análises alicerçadas no quadro teórico. As análises da dialética mídia-meio precisa ser aperfeiçoada a fim de evidenciar uma construção mais efetiva para o meio. Além disso, no MPR, não foram realizadas as mudanças de variáveis e as consequências dessas mudanças nos $S(Y;X;Q)$ durante a experimentação das AEPs. Esses duas limitações serão revistas no produção de artigos.

No tocante as perspectivas futuras, a continuação da pesquisa pode promover a ampliação da integração entre o aspecto decimal ao posicional do SND para os números decimais. No contexto macro, a investigação apontou indícios para promover mudanças em diversos âmbitos do sistema educacional, a saber: os currículos fragmentados por disciplinas; formação dos professores que ensinam nas licenciaturas aproximando-os do trabalho sobre os fenômenos didáticose do paradigma do questionamento do mundo, no currículo da formação inicial de professores efetivando a epistemologia do saber no processo transpositivo e na formação continuada de professores da educação básica, auxiliando-os a modelizarem suas praxeologias reconstruídas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. Ed. UFPR. 2007.

ALMOULOUD, S. A. **As transformações do saber sábio ao saber ensinado**: o caso do logaritmo. Educar em Revista. n. Especial 1/2011. Editora UFPR. Curitiba. p. 191-210. 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/13.pdf>. Acesso em 25 jul. 2018.

APM. **Principles and Standards for School Mathematics**. The National Council of the Teacher of Matehematics. Tradução Magda Melo. Ed. 1. 2008. 467 p.

ARTAUD, M; CHEVALLARD, Y. Le processus de regulation dans la constitution de routines professorales. **Atelier animé à la XIe école d'été de didactique des mathématiques** (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants. La Pensée Sauvage. Grenoble. p. 241-247. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Regulation_et_routines_professorales.pdf >. Acesso em 22 mai 2019.

ARTAUD, M. Théorie anthropologique du didactique: Observer, analyser, évaluer, développer une organisation mathématique et une organisation de l'étude. **Praxéologies pour l'enseignant, praxéologies pour le chercheur et leur écologie**. ADEF, Aix-Marseille Univ., Marseille, France. Cours à l'université de Salvador de Bahia, Brésil du 10 au 20 octobre 2017.

ARTAUD, M. Construir uma Organização Matemática e uma organização de estudo – Praxeologias para o professor, praxeologias para o pesquisador e sua ecologia. In: **A teoria Antropológica do didático**: princípios e fundamentos. ALMOULOUD, S. G., FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, A. (Org.). Ed. 1. Curitiba. CRV. 2018. p.135-179.

ARTAUD, M. Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie - La justification des pratiques comme condition et comme contrainte. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. v.21. n. 5. 2019. p. 80-98. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45598/pdf>. Acesso em. 15 fev. 2020.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3. 1988. p.281-308.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuições para a psicanálise do conhecimento. Tradução: Estela dos Santos Abreu. Rio de janeiro. Contraponto. 1996. 316 p.

BAHIA. Secretaria da Educação. Superintendência de Desenvolvimento da Educação Básica. Diretoria de Educação Básica. **Orientações curriculares e subsídios didáticos para a organização do trabalho pedagógico no ensino fundamental de nove anos** - Superintendência de Desenvolvimento da Educação Básica. Diretoria de Educação Básica. Salvador: Secretaria da Educação, 2013. 177 p. Disponível em: < http://escolas.educacao.ba.gov.br/sites/default/files/private/midiateca/documentos/2016/orientacoes-curriculares-ensino-fundamental-de-9-anos.pdf >. Acesso em 8 jul. 2019.

BARBOSA, J. K. Um Estudo sobre o SND na Matriz de Avaliação da Prova Brasil de Matemática. **Boletim online de Educação Matemática**. Joinville. V.2. N.2, p. 02-17, jan./jul. 2014. Disponível em: < http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/download/3965/3230>. Acesso em: 24 fev. 2019.

BARROS, N. M. da C. A compreensão de matemática em um ambiente online de formação de professores. 135f. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Linha de Fundamentos e modelos psicopedagógicos no Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de São Paulo. Bauru. 2013. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90966/barros_nmc_dr_bauru.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 20 set. 2019.

BOSCH, M. Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática. **IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Huelva, 2001. p. 15-28. Disponível em:< http://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/47884 >. Acesso em 15 jan. 2019

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs objet d’etude et problematique. **Recherches en didactique des mathématiques**. v. 19, n. 1, 1999. p. 77-124. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em 21 jun. 2018.

BOSCH, M., GASCÓN, J. La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos, en C. de Castro y M. Gómez (Eds.), **Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas**.. Barcelona: Edebé. 2004 (pp. 136-160) Disponível em: < https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=734890>. Acesso em: 16 ju. 2019

BOSCH, M., GASCÓN, J. 25 años de Transposición Didáctica. En L. RuizHigueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén. 2007. p.385-406. Disponível em: < http://www.atd-tad.org/documentos/25-anos-de-transposicion-didactica/>. . Acesso em: 20 ju. 2019

BOSCH, M., GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIII**. 2009. p. 89-113). Santander: SEIEM. 2009.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”, IN: BRONNER, Alain et al. **Apports de la théorie anthropologique du didactique**: Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d‘action. IUFM de l‘académie de Montpellier 2010, p.55-90. Disponível em: < http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/mariannaJosep-CITAD-II-2010.pdf>. Acesso em 20 mai. 2019.

BRANDT, C. F. O valor posicional e suas implicações para o ensino da matemática nas série iniciais do ensino básico. In: **I SIPEM**. I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2000. Serra Negra. São Paulo. Brasil. 2000. p. 34-37. Disponível em:< http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/files/sipemI.pdf>. Acesso em 31 jul. 2019

BRANDT, C. F., MORETTI, M. T. Representações semióticas e aprendizagem do sistema de numeração decimal.In: **II SIPEM**. II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2003. Santos. São Paulo. Brasil. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemII.pdf >. Acesso em 31 jul. 2019.

BRANDT, C. F., MORETTI, M. T. Relações entre a conceituação da estrutura do sistema de numeração decimal e as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão com registros de representação semióticos do número: a palavra e a escrita arábica.In: **III SIPEM**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2006. Curitiba. Paraná. Brasil. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIII.pdf>. Acesso em 31 jul. 2019.

BRASIL. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017. **Presidência da República Secretaria-Geral. Subchefia para Assuntos Jurídicos.** 2017a. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/decreto/D9099.htm>. Acesso em: 30 set. 2019.

BRASIL. **Resolução Nº 7**, de 20 de outubro de 2010. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. 2010. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=5367-pceb007-10&category_slug=maio-2010-pdf&Itemid=30192> . Acesso em: 15 mar. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC: Brasília, 2017b. Disponível em: < 568 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 02 jul. 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996. BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm >. Acesso em: 02 jul. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997. 142 p. Disponível em: < https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-03-matematica.pdf>. Acesso em 16 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**/Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília. MEC, SEB, DICEI, 2013. 562 p. Disponível em: <

http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em 16 mar. 2019.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. V.7, N.2, p.33-116. Grenoble, 1986.

____________. Theory of Didactical Situation in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990. Springer Editions.V.19 2002. 306p. Disponível em: <https://www.springer.com/gp/book/9780792345268#aboutBook>. Acesso em: 15 abr. 2019.

CAMILO, C. M. Geometria nos currículos dos anos finais do Ensino fundamental: uma análise à luz dos modelos teóricos de Josep Gascón. 187f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2007. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11256/1/Christiane%20Molina%20Camilo.pdf>. Acesso em 15 dez. 2019.

CARAÇA, B. DE J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Editora Lisboa. 1951. p. 3-12.

CARVALHO, D. G. de. Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático.122f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2012. 120 p. Disponível em: < https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/12606/1/PDF%20DIERSON%20DISSERTA%C3%87%C3%83O%20FINAL.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2018.

CARVALHO, E. F. A integração de uma proposta de criação e resolução de problemas matemáticos na prática de professores do 6º ano. 216f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de pós-graduação em ensino, filosofia e história das ciências. Universidade Federal da Bahia/
Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador. 2015.

CHAACHOUA, H. La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. In Abboud-Blanchard M., Flückiger A. (eds). **Séminaire national de didactique des mathématiques**. Paris 2011. p.81-102. Disponível em:< https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01282325/document>. Acesso em 30 jan. 2019.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. Introduction de la notion de variable dans le modele praxéologique. **5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique**. Castro-Urdiales, Espagne. Jan 2016.

CHAACHOUA, H., BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. In: **A teoria Antropológica do didático**: princípios e fundamentos. ALMOULOUD, S. G., FARIAS, L. M. S., HENRIQUES, A. (Org.). Ed. 1. Curitiba. CRV. 2018. p.119-133.

CHAACHOUA, H., BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**. V. 9 N. 1. 2019.

p.29-44. Disponível em:< https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/297/200>. Acesso em 30 jan. 2019.

CHAACHOUA, Y. Praxéologie de référence de l’aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modele T4TEL. **Mémoire de Master de Didactique des Science**s. Université Grenoble Alpes. Out. 2016. 62 p. Disponível em: < http://chamilo1.grenet.fr/ujf/main/document/document.php?cidReq=M2PIFDIDACTIQUEDESSCIENCESETDUNU&id_session=0&gidReq=0&origin=&action=download&id=72>. Acesso em 28 jul. 2018.

CHACÓN, A. M. A. La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. 2008. 361 f. **THÈSE Du Doctorat** (De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III) – Paul Sabatier en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHAMBRIS, C.. Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l’école primaire. Évolution de l’enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.Mathématiques [math]. 567.f **Thèse** Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. Disponível em:< https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665>. Acesso em: 25 jun 2019

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

____________, Y. Les processus de transposition didactique et leur théorisation. Contribution à l’ouvrage dirigé par G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, Andrée Tiberghien (éds), La transposition didactique à l’épreuve. **La Pensée sauvage**. Grenoble. 1994. p. 135-180. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2019.

____________, Y. Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. **Communication au colloque international Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants** (Marseille, 28-30 avril 1997). Paru dans Skholê, no 7, p. 45-64. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_savoirs_enseignes_et_leur_transmission.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2019.

____________, Y. **Organisations didactiques**: 1. les cadres généraux. Notice du "Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998" pour la formation des élèves professeurs de mathématiques. 1998a. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_1_1998_.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

____________, Y. **Organisations didactiques**: 2. gestes, dispositifs, programmes. Notice du "Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998" pour la formation des élèves professeurs de mathématiques.1998b. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_2_1998_.pdf

>. Acesso em 30 jan. 2019.

____________, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 19, nº 2, 1999.

____________, Y. Organiser l'étude 3. **Ecologie & Regulation**. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em: 20 de fevereiro de 2018.

____________, Y. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. **Conférence donnée à la 3e Université d'été Animath** (Saint-Flour, 22-27 août 2004). Paru dans La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire. APMEP. Paris. 2005. p. 239-263. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2018.

____________, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. Conférence plénière d'ouverture du 4e congrès de la European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 février 2005. **Paru dans les Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Universitat Ramon Llull, Barcelone, 2006, 21-30. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Steps_towards_a_New_Epistemology.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2019

____________, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Texte de la conférence plénière donnée à Baeza (Espagne) en octobre 2005 dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. A paru dans les actes de ce congrès: L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), **Sociedad, Escuela y Mathemáticas**. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico. Universidad de Jaén. 2007a. p. 705-746. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf>. Acesso em: 20 de nov. de 2019.

____________, Y. Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds). **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques**, année 2007b, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=147>. Acesso em: 20 de setembro de 2019.

____________, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009a.

____________, Y Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. **Conférence prononcée le 19 mai 2009 aux Journées Ampère tenues à l'INRP**. Lyon. 2009b. Disponível em: <

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf>. Acesso em: 04 abr. 2020.

____________, Y. Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counterparadigm. In: **12TH International congress on mathematical education**. COEX. Seoul. Korea. 2012. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-12688-3_13.pdf>. Acesso em: 22 out. 2019.

____________, Y. Méthodologie de la recherche en SHS. In: Journal de quatre séances de travail sur les praxéologies de recherche en didactique réalisées dans le cadre du parcours "Didactique" de la spécialité "Enseignement et formation en mathématiques" du master "Mathématiques et applications" de l'Université d'Aix-Marseille. Sur les praxéologies de recherche en didactique. **Séance 1**. 2014a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_1.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019.

____________, Y. Le travail du didacticien. In: Journal de quatre séances de travail sur les praxéologies de recherche en didactique réalisées dans le cadre du parcours "Didactique" de la spécialité "Enseignement et formation en mathématiques" du master "Mathématiques et applications" de l'Université d'Aix-Marseille. Sur les praxéologies de recherche en didactique. **Séance 2**. 2014b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_2.pdf >. Acesso em: 10 jul. 2019.

____________, Y. La production de données: une affaire complexe. Journal de quatre séances de travail sur les praxéologies de recherche en didactique réalisées dans le cadre du parcours "Didactique" de la spécialité "Enseignement et formation en mathématiques" du master "Mathématiques et applications" de l'Université d'Aix-Marseille. Sur les praxéologies de recherche en didactique. **Séance 3**. 2014c. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_3.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019.

____________, Y. Retour à Galton. In: Journal de quatre séances de travail sur les praxéologies de recherche en didactique réalisées dans le cadre du parcours "Didactique" de la spécialité "Enseignement et formation en mathématiques" du master "Mathématiques et applications" de l'Université d'Aix-Marseille. Sur les praxéologies de recherche en didactique. **Séance 4**. 2014d. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_4.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019.

____________, Y. **Praxeological Issues in the Development, Reception and Use of ATD**, 2016. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/wp-ontent/uploads/2016/03/Chevallard_TAD-5_TexteCoference_EN.pdf>. Acesso em: 27 de ago. 2020.

COMITI, C.; FARIAS, L. M. S. Importance et méthodologie de l'observation de classe pour les recherches en didactique et rôle de la problématique de recherche pour la modélisation nécessaire lors de l'analyse des observations. In: **Caminhos da Educação Matemática em Revista**/Online, v. 9, n. 1, 2019. p. 83-104. Disponível em: <

https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/299 >. Acesso em: 18 mar. 2019.

COSTA, J. de M.; PINHEIRO, N. A. M.; COSTA, E. A formação para matemática do professor de anos iniciais. In: **Ciência & Educação**. Bauru, v. 22, n. 2. p. 505-522. 2016. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0505.pdf>. Acesso em 30 mai. 2019.

CURI, E. A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, n. 37/5, p. 1-9, 2005. Disponível em: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1117Curi.pdf>. Acesso em: 30 mai. 2019.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B. dos Resultados de uma pesquisa longitudinal: o Ensino do sistema de numeração decimal. In: **V SIPEM**. V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2012. Petrópolis. Rio de janeiro. Brasil. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT01/CC02875535820A.pdf>. Acesso em: 25 out. 2019.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B. dos; RABELO, M. H. M. Procedimentos de resolução de alunos de 5º ano revelados em itens do Saeb com relação ao Sistema de Numeração Decimal. **Revista brasileira de estudo pedagógico**. Brasília, v. 94 n. 236. p. 211-231. jan./abr. 2013. Disponível em:< http://portal.inep.gov.br/documents/186968/489316/Revista+Brasileira+de+Estudos+Pedag%C3%B3gicos+%28RBEP%29+-+Num+236/7c0d44d0-b840-46fc-a5f3-cff766bdc0a9?version=1.2>. Acesso em 19 mai. 2019.

DUARTE, W. E. Concepções de professores de matemática em formação continuada: o uso dos materiais didáticos. 100f. **Dissertação (**Mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará. Belém. 2016. Disponível em:< https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4896614#>. Acesso em: 30 jan.2019

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Unicamp. Ed.1. 2004. 849p.

FARIAS, L. M. S. Estudo das Inter-relações entre os domínios numérico, algébrico e geométrico no ensino de matemática no secundário: uma análise das práticas de ensino em classes de troisième e seconde. 2010. 378 f. **Tese** (Doutorado em Didática da Matemática) Laboratório Interdisciplinar de Pesquisa em Didática, Educação e Formação, Universidade de Montpellier 2, Montpellier, França, 2010. Disponível em: < https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00588484/document>. Acesso em 25 abr. 2018.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. V.20. N.3, p. 97-119. 2018. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40112/pdf>. Acesso em 25 mar. 2019.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. V.15. N.1. 2013. p.1-28. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/12757/pdf>. Acesso em 25 set. 2019

GASCÓN, J. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. v. 5 n. 2, p. 11-37, 2003.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. In: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. **RELIME.** 14 (2). 2011. 203-231.Disponível em: < https://www.redalyc.org/pdf/335/33519238004.pdf>. Acesso em 09 ago. 219

GELMAN, R; GALLISTEL, C.R. **The child's understanding of number**. Cambridge: Harvard Univ., 1987.

GUADAGNINI, M. do R. Fatoração: Por que estudá-la desde o Ensino Fundamental? 427f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2018. Disponível em:< https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6361125#>. Acesso em 30 jan. 2019.

GUARNICA, A. V. M. Pesquisa em história da Educação Matemática no Brasil: sob o signo da pluralidade. Coleção História da Matemática para professores. Livraria da Física. Ed.1. São Paulo. 2006. 213 p.

GUIMARÃES, G. O uso de recursos didáticos na aprendizagem do sistema de numeração decimal: análise das atividades propostas em livros didáticos brasileiros e espanhóis. In: **V SIPEM**. V Seminário internacional de pesquisa em educação matemática. 2012. Petrópolis. Rio de janeiro. Brasil. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT01/CC07494595813_A.pdf >. Acesso em: 25 out. 2019.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática**. 5º ano. Ed. 1. São Paulo: FTD, 2018. p.8-29.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria José de Freitas Senra. Rio de Janeiro: Globo. 1989. 367p.

____________. **História universal dos algarismos**: as inteligências dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Bestriz Katinsky. Rio de Janeiro. Ed. Nova Fornteira. V. 1. 1997. 745p.

KIDRON, Y. *et al*. Contexto, Milieu e Dialética Mídia-Meio: Um Estudo de Caso sobre Redes de AiC, TSD e TAD. In: **Networking of Theories as a Research Praclice in Mathematics Education. Bikner-Ahsbahs**, A.; Prediger, S. (Org.). Advances in Mathematics Education. Cap. 10. Springer International Publishing. Switzerland. 2014. p.153-177.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Parra, C. Saiz, I.; et. al. (Org.). Tradução Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed. 1996. p.73-155.

LESSA, L. de F. C. F. Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área. 218f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia/ Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador. 2017. Disponível em:< https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22974/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20LESSA%2c%20L.%20F.C.%20F.%202017.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. V.1. Ed. 7. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq. 1992. p. 1-43.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. V.1. Ed. 4. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1999. p. 1-49.

LUCAS, C. Organizaciones matemáticas locales relativamente completas (**Memoria de investigación**, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo, 2010. Disponível em: < http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/DEA-Catarina-Lucas_versi%C3%B3n-preliminar.pdf>. Acesso em jul. 2018.

MATOS, F. C. de. Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear. 324f. **Tese** (doutorado) Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará. Belém. Disponível em:< https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6038426#>. Acesso em 30 jan. 2019.

MATOS, F. C. de *et al*. A metodologia do Percurso de estudo e pesquisa adaptada a formação inicial e continuada de professores de matemática. In: Educação matemática pesquisa. São Paulo. V.20. N.1. p. 448-470. 2018. Disponível em:< https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32779/pdf> Acesso em: 30 mar. 2019.

MEN. **Programmes de l'école primaire**: BO Hors série n°3 du 19 juin 2008. 2008. Disponível em: < https://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm>. Acesso em 20 out. 2019

MILAN, I. dos S. O ensino do sistema de numeração decimal nas séries iniciais do ensino fundamental: as relações com a aprendizagem do sistema posicional. 149f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2017. Disponível em:< https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/20788/2/Ivonildes%20dos%20Santos%20Milan.pdf >. Acesso em 30 jan. 2019.

MIYASCHITA, W. Y. Sistemas de numeração: como funcionam e como são estruturados os números. 42f. **Graduação**. Licenciatura Plena em Matemática Faculdade de Ciências da Universidades Estadual Paulista. Buaru. 2002. Disponível em:< http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/SistNum.pdf >. Acesso em 25 abr. 2019.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada: Coleção elementos de Matemática. Ao Livro técnico. Rio de Janeiro. 1969. p. 1-101.

MOUNIER, E. La prise en compte de deux systèmes de numération en classe de CP Une autre façon d'analyser les procédures de dénombrement. Chambris,C.; Mounier, E., Nebout, P., Perrin-Glorian, M-J. In: **Eclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire**. Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz. N. 4. Novembre. p. 6-36. 2012. Disponível em: < https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110818/document >. Acesso em 28 out. 2019.

MOUNIER, E. **Une analyse de l'enseignement de la numération** :Vers de nouvelles pistes. niversité Paris-Diderot - Paris VII, French. 2010. Consulté à l'adresse. Disponível em :< https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00550721v1>. Acesso em 20 set. 2018.

OECD (2015), PISA 2012 Results: **creative problem solving** – Students' skills in tackling real-life problems. (Volume V), PISA, OECD Publishing.

OECD (2016), PISA 2015 Results: **excellence and equity in education**. (Volume I), PISA, OECD Publishing.

OLIVEIRA, A. B.; BITTAR, M. Um Estudo das Organizações Didática e Matemática de Professores em Início de Docência durante as Aulas de Função. **XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática** (EBRAPEM): Educação Matemática: Possibilidades de interlocução. Unesp. Rio Claro. Setembro de 2008. Disponível em:< http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/207-1-A-gt1_oliveira_ta.pdf>. Acesso em 31 jan. 2019.

PAIS, L. C. Didática da Matemática; uma análise da influência francesa. **Coleção Tendências em Educação Matemática**. 3ª edição. Belo Horizonte. Autêntica. 2011. 136p.

PEREIRA, J. C. de S. Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar. 257f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará. Belém. 2017. Disponível em < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6039067#>. Acesso em 30 jan. 2019

RODITI, E. Les nombres entiers, les rationnels et les décimaux. **Documents pour la préparation de l'épreuve de mathématiques du crpe concours de recrutement des professeurs des écoles**. 2010a. Disponível em: <http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S3%20nombres.pdf>. Acesso em 06 jun. 2019.

RODITI, E. Des synthèses pour approfondir les dossiers. In: **Documents pour la préparation de l'épreuve de mathématiques du CRPE Concours de Recrutement des Professeurs des Écoles**. 2010b. Disponível em: < http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/S3%20nombres.pdf >. Acesso em 21 jun. 2018.

RODRIGUES, A. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2013. Disponível em:< http://www2.ufopa.edu.br/ufopa/academico/pos-graduacao/banco-de-teses/profmat/profmat-turma-2011/rodrigues-aroldo-eduardo-athias/at_download/file>. Acesso em: 16 ago. 2018.

RODRIGUES, A. E. A.; DINIZ, H. A. Sistemas de Numeração: Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino. **Ciência e Natura**, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 578–591. Disponível em: < http://www.redalyc.org/pdf/4675/467547643049.pdf>. Acesso em 08 nov. 2018.

ROSAS, M. L. L., SELVA, A. C. V. Uso do livro didático de matemática: analisando a prática docente no ensino do sistema de numeração decimal. In: **IV SIPEM**. IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Taguatinga. Distrito Federal. Brasil. 2012. p.28-30. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf>. Acesso em 31 jul. 2019.

SALVADOR. **A base nacional comum curricular e a política nossa rede**: concepções articuladas. Secretaria municipal de educação de Salvador. Nossa rede – Projeto Pedagógico de Salvador. Ensino Fundamental: séries iniciais. 2018a. 10p.Disponível em: < http://educacao.salvador.ba.gov.br/adm/wp-content/uploads/2018/03/A-Base-Nacional-Comum-Curricular-e-a-pol%C3%ADtica-Nossa-Rede-concep%C3%A7%C3%B5es-articulares.pdf >. Acesso em: Acesso em 25 fev. 2019.

SALVADOR. **Referencial curricular municipal para os anos iniciais do ensino fundamental**. Secretaria municipal de educação de Salvador. Nossa rede – Projeto Pedagógico de Salvador. Ensino Fundamental: séries iniciais. 2018b. 212p. Disponível em: <http://educacao.salvador.ba.gov.br/adm/wp-content/uploads/2018/03/Referencial-Curricular-Municipal-para-os-anos-iniciais-do-EF_versao-onli...-1.pdf>. Acesso em 23 fev. 2019.

SANTOS, A. F. dos. Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais. 80f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto. 2014. Disponível em:< https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122212/000809246.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em 30 jan. 2019.

SANTOS, M. C. dos; MENEZES, M. B. de A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**. V.8 N. temático. 2015. p. 648-670. Disponível em: < http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/download/1456/979>. Acesso em 25 jan. 2019.

SANTOS JUNIOR, V. B. Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa. 495f. **Tese** (doutorado). Programa de pós-graduação em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2017. Disponíveel em:< https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/12178/1/VALDIR%20BEZERRA%20DOS%20SANTOS%20J%C3%9ANIOR%281%29.pdf>. Acesso em 20 ago. 2019.

SEIBERT, T. E. Aprendizagem matemática de um jovem com espinha bífida e síndrome de arnold chiari. 398 f. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas. 2014. Disponível: < http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/180/173>. Acesso em 30 set. 2019.

SILVA, A. M. da. Interdisciplinaridade na perspectiva da pedagogia da investigação: o caso da licenciatura integrada em educação em ciências e matemática. 93f. **Dissertação** (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará. Belém. 2015. Disponível em: < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3511516#>. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, I. M da. A Relação do Professor com o Saber Matemático e os Conhecimentos Mobilizados em sua Prática. 215f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará. Belém. 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2307217#>. Acesso em 20 jan. 2019.

SILVA, J. V. G. da. Grandezas e medidas: um percurso de estudo e Pesquisa para a prática profissional. 426f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2016. Disponível em:< https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4249014#>. Acesso em 20 jan. 2019.

SILVA, R. C. da. Sistema de numeração decimal: saberes docentes e conhecimentos discentes do 3º ano do ensino fundamental. 140f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2013. Disponível em:< http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/15896/1/2013_dis_rcsilva.pdf>. Acesso em 30 jan. 2019.

SILVA, R. C. M. A integração de construtos didáticos à prática docente: a malamática para operar com a aritmética básica. 240f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/23386/1/Dissertacao-Rita%20Cineia-Vers%C3%A3o%20Final.pdf >. Acesso em 08 nov. 2018.

SILVEIRA, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de Blocos Base Dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In: **VII SIPEM**. Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2018. Foz do Iguaçu-PR. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/480/557>. Acesso em 19 mai. 2019.

SOUZA, E. S. de. Análise dos impactos de uma proposta de utilização efetiva da calculadora padrão no ensino de potência à luz da teoria da instrumentação. 202f. **Dissertação** (Mestrado). Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Universidade Federal da Bahia. 2015. Disponível em: <

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2944874#>. Acesso em 30 jan. 2019.

SOUZA, J. V. B. de Os materiais manipuláveis e a participação dos alunos na aula de matemática. 74f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS. Universidade Federal da Bahia. Salvador. 2011. Disponível em: < https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/jamile_villas_boas_-_dissertacao_-_os_materiais_manipulaveis_e_a_participacao_dos_alunos_na_aula_de_matematica.pdf>. Acesso em 05 abr. 2019.

TEIXEIRA, B. F. Surdos e ouvintes juntos no espaço escolar: o processo de construção do número. 136 f. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Salvador; Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2019. Disponível em: < https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/29465/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20COMPLETA%20-%20VERS%C3%83O%20FINAL.pdf >. Acesso em 04 abr. 2019.

TEMPIER, F. **Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2**. Grand N, (86), p. 59-90. 2010.

TEMPIER, F. **La numération décimale à l'école primaire**: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Paris-Diderot - Paris VII, French. 2013. Consulté à l'adresse. Disponível em :<https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00921691/document>. Acesso em 20 set. 2018.

TOLEDO, C. M. **A**: matemática. Ed. 1. São Paulo: Moderna. 2017. p. 8-39

VARGAS, R. DORNELES, B. Cad. Cedes, Campinas, v.33, n. 91, p.411-427, setdez. 2013 apud **The child's understanding of number**. Harvard, Mass: Havard University, 1978.

VALENTE, W. R. Saber sábio, saber escolar e suas relações: elementos para reflexão sobre a didática. **Revista Diálogo Educacional**. Curitiba. V.4. N.10. p.57-67, set./dez. 2003. Disponível em: < https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/6425/6329>. Acesso em 05 dez. 2016.

VERRET, M. **Le temps des etudes**. Paris: Librairie Honore Champion, 1975.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências**. Artmed: Porto Alegre, 2010.

ZANQUETA, M. E. M. T. Uma investigação com alunos surdos do ensino Fundamental: o cálculo mental em questão. 260 f. **Tese** (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade Estadual de Maringá. Maringá. 2015. Disponível em:< https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/193729/ZANQUETTA%20Maria%20Em%c3%adlia%20Melo%20Tamanini%202015%20%28tese%29%20UEM.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 03 out. 2019.

APÊNDICES

LISTA DE APÊNDICES

Apêdice A – Entrevista com os professores das Séries do Ensino Fundamental I

Cada entrevista foi seguida a partir da elaboração de um roteiro. Apresentamos, roteiro e entrevista, organizado da seguinte forma: primeiro, todas as transcrições das séries da Escola 1; em sequência, todas as transcrições das séries da Escola 2.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 01
Escola 01 – Professora 1º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática.

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia com pós-graduação em Educação especial inclusiva com ênfase em Libras. Não realizei formação inicial ou continuada na área da Matemática. Minha formação inicial foi há 15 anos.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?
R: Há 15 anos. Atuo há 2 anos no 1ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim, já lecionei no 4º e 5º Anos.

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R: No meu caso particular, 1º ano da Escola 1, considero insatisfatório. No contexto geral, do município, precisa melhorar bastante.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: Este ano, em especial, recebemos muitos estudantes que não fizeram o Ensino Infantil. Eles não foram alfabetizados, ou seja, não sabem matemática escolar então o ensino foi dificultado nesse sentido, pois gastamos muito tempo naquilo que os estudantes deveriam apresentar do Ensino Infantil. Os conteúdos disponibilizados no livro didático estão riquíssimos, por exemplo, os conteúdos apresentam a relações entre os números a quantidades de elementos.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para noções do ensino do Sistema de numeração decimal (1º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

(a) de sequências dos números (até 2 algarismos)?

R: Para representar até o número 9 (a algarismo) não há dificuldades. A partir dos números com 2 algarismos as dificuldades se iniciam, pois há a junção dos algarismos. O número dez é 10 +1=11(dez mais 1 resulta em onze). Os estudantes entendem que o 10 + 1 = 101(dez mais 1 resulta em cento e um). Os estudantes ainda tem muita dificuldade na correspondência do objeto numeral.

(b) de leitura, escrita e comparação entre os números?

R: Os estudantes que estão no período pré-silábico têm muita dificuldade. Ainda há dificuldade em compreender a numeração oral para a numeração escrita, em especial, quando os números são maiores do que 30.

Os estudantes que estão no período alfabético e silábico, compreendem bem a língua materna e isso facilita o ensino da leitura, escrita e comparação. A relação entre as disciplinas de Português e Matemática é essencial.

(c) de composição e decomposição de números naturais?

R: Há dificuldades para números maiores do que 20. Eles (metade os estudantes) conseguem decompor, mas não conseguem recompor.

(d) de representar números na reta numérica?

R: Há dificuldades para números maiores do que 10.

(e) das operações de adição e subtração?

R: Há dificuldades para números maiores do que 10. Eles ainda não conseguem compreender a ideia da posição e da dezena nessas operações.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem dessas noções?

R: As operações (adição e subtração) e ordenação dos números.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: A falta de materiais que auxiliem o livro didático. No livro temos, por exemplo, o material dourado, mas não há esse material disponível na escola. Essa carência dificulta bastante.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de materiais que auxiliem a relação número e quantidades usando tampinhas de garrafas pet, palitos de picolé, utilizando a relação: 2 palitos representa o numeral 2, etc. O ábaco e o material dourado que são fundamentais nesse processo. Apenas o livro, sem o material concreto, não possibilita ele viver a relação entre a quantidade e os numerais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 02
Escola 01 – Professora 2º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia há 12 anos. Realizei a formação continuada na área de Alfabetização e letramento (Especialização) e Educação (Mestrado).

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?
R: Há 12 anos. Atuo há 6 anos no 2ª Ano.

3. A senhora já atuou/atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim, no 1º Ano (3 anos) e 3º Ano (3 anos).

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R: Vejo com muita preocupação, pois muitos professores tem defasagem no conhecimento matemático, inclusive eu. A formação em Pedagogia também não privilegia o licenciado para o ensino da matemática. Em síntese, nas séries iniciais do EF I, vejo com muita preocupação devido à falta de apropriação da linguagem matemática pelos professores. Os resultados mostram que precisamos melhorar muito como profissionais para ensinar a matemática.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: Vejo com muitas dificuldades, em primeiro lugar, porque é difícil estar no “mundo dos estudantes” e vice-versa. A falta do estudo contínuo do pedagogo para ensinar matemática também não auxilia, pois a forma de se ensinar matemática apenas no modelo tradicional impossibilita a reciclagem do profissional e interfere arduamente na aprendizagem do estudante, pois a matemática do cotidiano não é manifestada.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para noções do ensino do Sistema de numeração decimal (2º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

(a) da leitura e escrita dos números naturais (até 3 algarismos)?

R: Sim. Apesar de trabalhar com leituras de textos para as matemáticas ainda há uma grande dificuldade. Eles ainda não se apropriaram da numeração falada (oral) dos números e isso se reflete na escrita numérica.

(b) da ordenação e comparação dos números naturais?

R: Sim. Apenas para números grandes, acima de 100.

(c) da composição e decomposição de números naturais?

R: Sim. Como a maioria dos estudantes têm dificuldade tanto da numeração falada (oral) para a escrita quanto da escrita para a falada, os processos de composição e decomposição são atrapalhados. Por exemplo, ao trabalhar com o um texto havia uma adição entre cem, vinte e cinco. Não foi compreensível que era 100 + 20 + 5 = 125. Muitos estudantes pensaram que seriam um número enorme!

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Eles têm pouca dificuldade. Trabalhamos muito com o ditado da questão oralmente para eles representarem tantos os numerais quanto a organização das operações. Além disso, há dificuldades em compreender a posição de cada algarismo para se realizar as operações. Por exemplo, ao perguntar "no numeral 365, qual algarismos representa a posição da dezena? Qual a unidade do número 505?"

(e) de representar números na reta numérica?

R: Não trabalho com a representação numérica na reta.

(f) das operações de adição, subtração e multiplicação?

R: Os estudantes sabem organizar as operações e registrar os cálculos, mas não sabem explicar o local das unidades, dezenas e centenas. Esse processo é visível para números grandes de 3 algarismos. Por exemplo, 5 + 7 = 12. Fica 2 embaixo (dos números anteriores) e sobe 1. Mas eles não entendem que este 1 representa uma dezena.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses conceitos?

R: A compreensão da numeração oral e escrita. A posição de cada algarismo.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Devido, em muitos casos, a falta do Ensino Infantil. Há muitos estudantes que iniciam seus estudos apenas no 1º Ano e os professores não conseguem dar conta tamanha a demanda.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de materiais concretos manipulativos (ábaco e material dourado) e livros didáticos mais interativos em que pudéssemos interagir e possibilitar que os estudantes construam jogos, computadores para utilizar aplicativos matemáticos, dentre outros.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 03
Escola 01 – Professora 3º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia há 25 anos. Realizei a formação continuada na área de Matemática (Aperfeiçoamento).

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?
R: Há 25 anos. Atuo há 8 anos no 3ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim, em todas as outras 2º, 3º, 4º e 5º Anos. Também já lecionei no Ensino Infantil (6 anos nos Grupos 4 e 5).

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R: Precário. Por essa razão a formação continuada em todas as áreas nas quais o pedagogo leciona é fundamental para suprir a formação inicial que é insatisfatória. Como percebo que os estudantes apresentam dificuldade em aprender matemática, possivelmente, os professores também devem apresentar tais dificuldades.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: Vejo com muitas dificuldades, em primeiro lugar, porque é difícil estar no "mundo dos estudantes" e vice-versa. A falta do estudo contínuo, do pedagogo para ensinar matemática também não auxilia, pois a forma de se ensinar matemática apenas no modelo tradicional impossibilita a reciclagem do profissional e interfere arduamente na aprendizagem do estudante, pois a matemática do cotidiano não é manifestada.

PARTE II - Iniciaremos a entrevista com questões específicas para noções sobre o ensino do Sistema de numeração decimal (3º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

(a) de leitura e escrita de números naturais (até 4 algarismos)?

R: Sim, mas há poucos estudantes com a dificuldade em compreender a numeração falada (oral) para a numeração escrita. Mas não há dificuldades em ter a numeração escrita para a numeração falada.

(b) de comparação e ordenação de números naturais (até 4 algarismos)?

R: Sim. Há dificuldades para números grandes, a partir de 3 algarismos. Por exemplo, ao comparar 1 045 com 145. Para os estudantes, o zero não representa nada, ou seja, não precisaria estar presente no número 1 045. Nesse sentido, muitos consideram que 1 045 = 145.

(c) da composição e decomposição de números?

R: Sim, mas são poucos estudantes, em especial, para números grandes. Ainda há uma certa confusão no estudante ao decompor 1 045 como 1 000 + 40 + 5. O algarismo zero também dificulta bastante a compreensão do aspecto posicional do numeral. Não fazermos a recomposição dos números.

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Eles têm pouca dificuldade. Trabalhamos muito com o ditado da questão oralmente para eles representarem tantos os numerais quanto a organização das operações. Além disso, há dificuldades em compreender a posição de cada algarismo para se realizar as operações. Por exemplo, ao perguntar "no numeral 365, qual algarismos representa a posição da dezena? Qual a unidade do número 505?"

(e) da representação na reta?

R: Não trabalho com a representação numérica na reta.

(f) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão?

R: As operações de adição e subtração não representam dificuldades. Mas as operações de multiplicação e divisão são complexas, pois estas operações utilizam, também, aspectos da adição e subtração. Eles apresentam obstáculos na operação de divisão, pois utiliza argumentos da adição, subtração e multiplicação. A utilização da reserva no numeral, o aspecto decimal da numeração, representa uma grande dificuldade em todas as operações, em especial para números grandes.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses conceitos?

R: Em compreender a posição dos algarismos, juntamente com a leitura e representação. Esses elementos são fundamentais para dirimir as dificuldades om o SND.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: O livro didático não permite discutir as questões relevantes a cultura local. É um livro que apresenta uma realidade diferente do cotidiano do estudante.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: O trabalho com o lúdico que represente o cotidiano do estudante pode ser uma estratégia para dirimir o início dessas dificuldades. O trabalho com blocos lógicos, materiais concretos manipulativos, dentre outros, para que os estudantes possam manipular os objetos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 04
Escola 01 – Professora 4º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?

R: Sou licenciada em Pedagogia há 22 anos e em Matemática há 5 anos. Realizei a formação continuada na área de Matemática (Aperfeiçoamento e Especialização).

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?

R: Há 22 anos. Atuo há 3 anos no 4ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?

R: Sim, no 1º (2 anos), 2º (2 anos), 3º (2 anos) e 5º (2 anos) Ano. Também já lecionei no Ensino Infantil por 11 anos.

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?

R: A qualidade do ensino vem caindo substancialmente, em muito, devido a falta de conhecimento dos professores em visitar a matemática.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?

R: Os resultados ruins que temos na aprendizagem é porque o ensino é ruim. Primeiro porque os professores não tem conhecimento de como os estudantes aprendem matemática, desde a pré-escola. Quando se inicia a juntar os brinquedos para guardar a ideia de coleção já começa a fazer presença e continua sobre a quantidade de brinquedos, por exemplo, ao dizer 2 brinquedos, há primeiramente, 1 brinquedo para depois obter 2, ou seja, uma sequência. Mas vejo que a maioria dos professores não têm esse conhecimento e, consequentemente, os estudantes chegam ao EF I sem aprender determinados conceitos.

PARTE II – Continuamos a entrevista com questões específicas para os aspectos posicional e decimal sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal (4º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:
(a) de leitura e escrita de números naturais (até 5 algarismos)?

R: Sim. Há um pequeno grupo de estudantes que têm dificuldades na relação da numeração falada (oral) para a escrita. Por exemplo, ao ditar o numeral "mil duzentos e um", o estudante escreve 121. Não há uma compreensão da posição do zero, pois o numeral 0 não foi falado.

(b) de ordenação e comparação de números naturais (até 5 algarismos)?

R: Sim. Há dificuldades para comparar e ordenar números grandes que são próximos.

(c) da composição e decomposição de números (potências de 10)?

R: Sim, a decomposição não traz dificuldades, mas há muitas dificuldades na recomposição, ou seja, os estudantes entendem que 10 235 = 1 000 + 200 + 30 + 5, mas ao ver 1 000 + 200 + 30 + 5 o estudante não consegue recompor (determinar o resultado 10 235). Isto devido à falta de compreensão da operação de adição, pois eles não entendem que a soma desses números deve ser dada unidade por unidade, dezena por dezena, ... Os estudantes não compreendem a posição (ordem) de cada algarismo para a recomposição.

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Sim. Mas não acho que seja do cálculo mental, propriamente dito, e sim, da falta de compreensão da língua materna oral. Diante disso, os estudantes não transcrevem o que a audição deles não compreende.

(e) da representação na reta?

R: Não trabalho com a representação na reta.

(f) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão?

R: Sim. Nas operações de adição, subtração e multiplicação a dificuldades está no "pegar emprestado" e "vai um" (reserva), ou seja, o aspecto decimal do SND. Já na divisão somente para números de dois algarismos. Os estudantes não compreendem que a divisão é a separação a de quantidades iguais em grupos e subtrair dos grupos com quantidades diferentes.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses aspectos do Sistema de Numeração Decimal?

R: Em compreender e interpretar a língua materna e transcrever para a linguagem matemática. Os estudantes não compreendem muitos conceitos matemáticos devido a falta de compreensão da língua materna.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: A ideia da aprendizagem empírica, ou seja, pela quantidade de exercícios. Esta proposta não surtiu efeito e nem vai trazer benefícios.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: O trabalho com materiais concretos manipulativos, em particular, o ábaco. Utilizar a quantidade de ábacos para a quantidade de números escritos nas operações.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 05
Escola 01 – Professora 5º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?

R: Sou licenciada em Pedagogia com pós-graduação em Educação especial inclusiva ênfase em Libras. Não realizei formação inicial ou continuada na área da Matemática. Minha formação inicial foi há 15 anos.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora leciona nessa série?

R: Há 15 anos. Esse é o meu primeiro ano que leciono no 5ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?

R: Já trabalhei no 4º Ano do EF I, mas em uma outra unidade escolar.

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?

R: No meu caso particular, 5º ano da Escola 1, considero satisfatório. No contexto geral, do município, regular. A avaliação geral municipal evidencia isso.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?

R: Vejo que os professores têm muita dificuldade em saber desenvolver os conteúdos. Deveria existir um aperfeiçoamento dos professores antes assumirem suas funções. Isso resulta também na dificuldade que os estudantes possuem em aprender matemática. A dificuldade maior é a questão do interesse e da concentração dos estudantes. Por conta disso, esbarramos na dificuldade de aprendizagem dos estudantes. Ao organizarmos as salas, em grupos, observamos que há estudantes que se empenham e compreendem a necessidade de se aprender os conteúdos atuais e do cotidiano que eles deverão levar para o resto de suas vidas. Há também a falta de responsabilidade do estudante pela sua aprendizagem.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para os aspectos posicional e decimal sobre o ensino do Sistema de numeração decimal (5º Ano).

1. **Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:**

(a) de leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais (até 6 algarismos)?

R: Poucos estudantes têm dificuldades nesses aspectos.

(b) na comparação e ordenação de números naturais?

R: Eles não têm dificuldades em relação aos números. Apenas quando usa os símbolos de comparação $\left(=,<,> \text{ ou } \neq\right)$.

(c) da composição e decomposição de números naturais (potências de 10)?

R: Os estudantes conseguem fazer a decomposição, mas a recomposição é mais difícil para eles, em especial, para números grandes.

(d) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais e decimais finitos?

R: Eles têm dificuldades no conceito das operações. Por exemplo, a Adição é uma operação semelhante a multiplicação. A divisão é a operação inversa da multiplicação. Foi muito complicado para os estudantes compreenderem que a dividir um número é compreender quantas vezes está dividido esse valor. Por exemplo, eles conseguem fazer o cálculo mental para as operações de adição e subtração, mas a multiplicação e divisão apenas com números pequenos (até 2 casas algarismos).

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses aspectos do Sistema de Numeração Decimal?

R: Os estudantes apresentam dificuldades na organização dos números, ou seja, no aspecto posicional. A dificuldade em entender que o zero (0) é fundamental principalmente nas operações. Ao adicionar dois números que o resultado seja maior que 10 eles apresentam uma certa dificuldade em organizar o número.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Na interpretação dos problemas. A interpretação tanto do conceito dos conteúdos quanto da resolução dos problemas.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de materiais que auxiliem a aprendizagem. Por exemplo, o ábaco e o material dourado. Esses materiais são indicados para as séries anteriores (2º, 3º e 4º anos), mas poderia auxiliar também os estudantes do 5º ano que ainda têm dificuldades em compreender esses conceitos. Ou trabalhar com grupos de estudantes, assim os estudantes que tem mais conhecimento poderia auxiliar os que possuem mais dificuldade. Se tivesse condições estruturais gostaria de trabalhar as aulas com os estudantes organizados individualmente e separados por grupos.

Apêndice B

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 01
Escola 02 – Professora 1º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática.

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia há 14 anos. Não realizei formação inicial ou continuada na área da Matemática.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?
R: Há 14 anos. Atuo há 8 anos no 1ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim, no 2º (1 ano) e 4º Anos (1 ano). Também já lecionei no Ensino Infantil (4 anos no Grupo 5).

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R:Vejo que os resultados do ensino da matemática são positivos.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: A dinâmica do processo do ensino e da aprendizagem na disciplina de matemática são bastante positivos. Quando o ensino da matemática está relacionado com a realidade social do estudante, a utilização de materiais concretos possibilita que o ensino e a aprendizagem sejam mais simplificados.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para noções do ensino do Sistema de numeração decimal (1º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:
(a) de reunião de coleções de objetos (até 2 algarismos)?
R: Não há qualquer dificuldade.

(b) de leitura e escrita dos números (até 2 algarismos)?

R: A numeração oral não é um problema, mas há dificuldades em escrever um numeral a partir da fala. Essa é uma relação bem complicada.

(c) de sequências e comparação entre os números?

R: Não há qualquer problema até o número 20. Após é bem complicado. Possivelmente, a dificuldade na língua materna propicia também essas dificuldades

(d) de composição e decomposição de números naturais?

R: Há dificuldade em decompor e recompor numerais a partir do número 20. Por exemplo, eles não conseguem fazer 70 + 2=72 (composição dos numerais). Já a decomposição poucos estudantes conseguem realizar.

(e) de representar números na reta numérica?

R: Não trabalho com a representação de numerais na reta.

(e) das operações de adição e subtração?

R: Há dificuldades para números maiores do que 10. Utilizo o material dourado, palitos e o próprio dedo para amparar a adição para numerais a partir de 11. Já a subtração é mais complicada, pois eles não têm o domínio quando a soma utiliza numerais de dois algarismos.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem dessas noções?

R: As operações (adição e subtração) e ordenação dos números.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Muitos estudantes não cursaram o Ensino Infantil, logo muitos conceitos que deveriam ser iniciados nesse seriado iniciam-se apenas no 1º Ano. Esse é o grande entrave para as dificuldades dos estudantes.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de jogos (muitos faço na própria sala com os estudantes), o uso de aplicativos no computador, a utilização de materiais concretos: ábaco, material dourado, palitos, tampas, etc., matérias que os estudantes possam manuseá-los.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 02
Escola 02 – Professora 2º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?

R: Sou licenciada em Pedagogia há 20 anos. Realizei a formação continuada na área de Psicopedagogia.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?

R: Há 18 anos. Atuo há 3 anos no 2ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?

R: Sim, no 3º (6 anos). Também já lecionei no Ensino Infantil (8 anos nos Grupo 2, 3 e 4).

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?

R:Vejo o ensino vem avançando. Podemos usar materiais concretos, o lúdico, jogos. Observo que os resultados são satisfatórios.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?

R: Vejo com muitas dificuldades. O livro didático que é o nosso apoio principal, não auxilia nesse processo uma vez que não tem uma sequência de conteúdos e ficamos no vai-e-vem dos capítulos. Isso geram muita confusão nos estudantes. Vejo com muita preocupação as dificuldades que os estudantes apresentam nos conteúdos que se iniciam no Ensino infantil, como reconhecer os numerais e relacioná-los as quantidades.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para noções do ensino do Sistema de numeração decimal (2º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

(a) da leitura e escrita dos números naturais (até 3 algarismos)?

R: Sim. A maioria dos estudantes têm essa dificuldade tanto da numeração falada (oral) para a escrita quanto da escrita para a falada para os números maiores que 30. Para números com 3 algarismos torna-se quase impossível.

(b) da ordenação e comparação dos números naturais?

R: Sim. A dificuldade em reconhecer os números impossibilita entender qual o número é maior, escrever tanto na forma crescente ou decrescente. Como consequência, a comparação entre os números é dificultada.

(c) da composição e decomposição de números naturais?

R: Sim. A maioria dos estudantes têm essa dificuldade tanto da numeração falada (oral) para a escrita quanto da escrita para a falada.

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Há muita dificuldade em ambos os cálculos. Poucos estudantes dominam o cálculo mental o que impossibilita também o domínio sobre o registro dos cálculos. Utilizo o material dourado para suprir essas necessidades, mas o resultado é satisfatório com o trabalha em grupos, de dois ou três estudantes.

(e) de representar números na reta numérica?

R: Não trabalho com a representação de numerais na reta.

(f) das operações de adição, subtração e multiplicação?

R: Os estudantes compreendem as operações de adição e subtração com números simples. Mas ao utilizar números que se usa a reserva (ordem dos algarismos) as dificuldades passam a emergir. Nesse momento, tenho que reexplicar a função do zero nessas operações.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses conceitos?

R: A compreensão da numeração oral para a escrita. Isso impossibilita tanto o reconhecimento dos numerais e quanto da relação desses numerais com as quantidades.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Muitos estudantes não cursaram o Ensino Infantil, logo muitos conceitos que deveriam ser iniciados nesse seriado iniciam-se apenas no 1º Ano. Esse é o grande entrave para o reconhecimento das letras, numerais e números e relacioná-los.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de materiais concretos manipulativos (ábaco, material dourado e palitos) e jogos (amarelinha e outros jogos regionais).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 03
Escola 02 – Professora 3º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia há 28 anos. Realizei a formação continuada na área de Matemática (Aperfeiçoamento) há muito tempo ofertada pela secretaria de educação.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?
R: Há 21 anos. Atuo há 11 anos no 3ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim, no 2º (4 anos) e 4º (6 anos) Anos. Já trabalhei com o Ensino de Jovens e adultos (EJA).

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R: O ensino tem sido aperfeiçoado, mas falta políticas públicas para a manutenção da estrutura e dos materiais para continuar avançado no ensino.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: O ensino passa por um momento crítico, pois os professores tem muitas dificuldades em se apropriar dos conteúdos matemáticos. Consequentemente, os estudantes herdam também essa dificuldade em desenvolver as habilidades que são essenciais para a aprendizagem.

PARTE II - Iniciaremos a entrevista com questões específicas para noções sobre o ensino do Sistema de numeração decimal (3º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:
(a) de leitura e escrita de números naturais (até 4 algarismos)?
R: Sim. Há um pequeno grupo de estudantes que têm dificuldades na relação da numeração falada (oral) para a escrita e, também, da numeração escrita para a numeração falada.

(b) de comparação e ordenação de números naturais (até 4 algarismos)?

R: Sim. Há dificuldades para comparar números grandes que são próximos. Em contrapartida, a comparação de números, mesmo grandes, que são distantes não gera dificuldades

(c) da composição e decomposição de números?

R: Sim, mas são poucos estudantes, em especial, para números grandes. Ainda há uma certa confusão no estudante ao decompor 1345 como 1000 + 300 + 40 + 5. Tanto a decomposição quanto a recomposição são conteúdos que geram dificuldades nos estudantes.

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Eles têm muita dificuldade em ambos, em especial para números grandes. Nesse sentido, prefiro o trabalho com números bem distantes. Isso facilita a escrita e o cálculo mental.

(e) da representação na reta?

R: Não trabalho com a representação numérica na reta.

(f) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão?

R: As operações de adição, subtração e multiplicação com números simples (de 0 a 9) não representam dificuldades, mas ao realizar essas operações com números compostos (com reserva) as dificuldades iniciam-se devido a não compreensão do aspecto decimal do SND. A divisão é a operação que gera mais dificuldades para os estudantes, pois além de utilizar as demais operações em sua resolução, a forma de se resolver da esquerda para a direita usando o aspecto decimal no resto de cada ordem do SND.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses conceitos?

R: Na numeração falada e escrita e nas operações básicas com números grandes.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Não consigo visualizar onde surgem tais dificuldades na aprendizagem.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: O trabalho com materiais concretos manipulativos, jogos lúdicos e matérias tecnológicos com aplicativos de matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 04
Escola 02 – Professora 4º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?

R: Sou licenciada em Pedagogia há 28 anos e em Letras há 10 anos. Realizei a formação continuada na área de Linguística (Especialização).

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora nessa série?

R: Há 28 anos. Atuo há 3 anos no 4ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?

R: Sim, no 1º (4 anos), 2º (2 anos), 3º (4 anos) e 5º (2 anos) Ano. Também já lecionei no Ensino Infantil por 15 anos.

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?

R: Vejo que os estudantes têm muitas dificuldades. Por esse motivo, o ensino de matemática tem resultados horríveis.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?

R: Não vejo problema no ensino apenas na aprendizagem. Isso se deve a resistência do estudante a aprender a disciplina além da relação que o estudante carrega consigo (ao longo dos anos de estudos com a disciplina) da matemática. Por esse motivo, o ensino de matemática deve ser pautado nos exercícios, no treinamento até que os estudantes compreendam. Mas reconheço que a apropriação do conhecimento pelos estudantes é muito complexa, pois eles não assumem a responsabilidade pelo aprendizado.

PARTE II – Continuamos a entrevista com questões específicas para os aspectos posicional e decimal sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal (4º Ano).

1. Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:

Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:
(a) de leitura e escrita de números naturais (até 5 algarismos)?

R: Sim para números grandes a partir de 4 algarismos, em especial, na relação da numeração falada (oral) para a escrita. Eles não conseguem posicionar os algarismos corretamente. Também há a questão das ordens dos números (aspecto decimal do SND) que eles não compreendem que 10 dezenas é iguala a 1 centena. O estudante não utiliza os números grandes em seu cotidiano, como o número de idade, calçado até o próprio número do telefone é fragmentado, o oral é dito número por número. Não há no social situações que promovam o trabalho cotidiano para números grandes.

(b) de ordenação e comparação de números naturais (até 5 algarismos)?

R: Sim. Há muitas dificuldades para comparar e ordenar números grandes, em especial, pela por não compreender o aspecto posicional do SND. Dessa forma, eles não conseguem ordenar o número e comparam os números de ordens diferentes, ou seja, o número na ordem da unidade de milhar com o número na ordem da centena de milhar.

(c) da composição e decomposição de números (potências de 10)?

R: Sim, Tanto a decomposição quanto a recomposição são dilemas devido as dificuldades com a posição dos algarismos e compreensão da multiplicação por 10, 100, etc., além da utilização do zero. Por exemplo, decompor o número 25004, muitos pensão que é $25004 = 20000 + 5000 + 400$ ou $2500 + 4$.

(d) do cálculo mental e escrito?

R: Sim. Acho que o problema é devido a posição dos algarismos. Portanto, eles também erram na organização mental do número, consequentemente, erram também na escrita do número.

(e) da representação na reta?

R: Não trabalho com a representação na reta.

(f) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão?

R: Os estudantes têm muitas dificuldades nas operações de adição e subtração. Como eles não conseguem posicionar o algarismo corretamente nas ordens, o cálculo é realizado incorretamente. Quando a soma dos algarismos é maior que 10 eles não conseguem utilizar a reserva (aspecto decimal do SND). Na subtração também, a ideia de tomar emprestado a unidade da ordem maior para a menor constitui uma dificuldade enorme. Devido a isso as operações de multiplicação e divisão pouco é discutida.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses aspectos do Sistema de Numeração Decimal?

R: A posição dos algarismos e compreensão de que em cada ordem o valor mínimo é 0 e o valor máximo é 9, ou seja, o aspecto decimal do SND.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: Das restrições dos recursos midiáticos que não possibilita o ensino para números a partir de 3 algarismos (3ª ordem), uma vez que os estudantes não tem dificuldades para números até de 2ª ordem.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: A utilização de materiais concretos manipulativos como o ábaco, material dourado, dominó numérico com operações, quebra cabeças com números. Faltam também oficinas com profissionais da Matemática para nos ensinar, o pedagogo, a trabalhar os conceitos matemáticos. A construção de um laboratório de Ensino de Matemática seria ideal para que os estudantes pudessem experimentar diversas atividades da matemática tanto teóricas quanto práticas, do cotidiano.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

ENTREVISTA 05
Escola 02 – Professora 5º Ano

PARTE I - Iniciamos a entrevista com questões mais gerais sobre o ensino de Matemática

1. Qual sua área de formação da senhora? Há quanto tempo?
R: Sou licenciada em Pedagogia há 13 anos. Não tenho formação continuada em qualquer área.

2. Há quanto tempo a senhora atua como docente? Há quanto tempo a senhora leciona nessa série?
R: Há 13 anos. Sempre lecionei no 5ª Ano.

3. A senhora atua em outros seriados do Ensino Fundamental I?
R: Sim. No 4º Ano em uma escola de outra rede de ensino.

4. Como a senhora vê o ensino de matemática na atualidade?
R: Se por um lado considero a matemática (e Português) essenciais em nossas vidas. Vide as políticas públicas direcionadas ao ensino são especificamente a essas disciplinas, por outro lado os conteúdos matemáticos não são absorvidos pelos estudantes, mesmo os conteúdos do cotidiano, como a contagem.

5. Como a senhora vê o processo de ensino e de aprendizagem de matemática?
R: No processo de ensino não vejo grandes problemas. Na minha sala certifico que 80% dos estudantes conseguem aprender a matemática mesmo com alguns bloqueios iniciais que eles apresentam dos anos anteriores do EF I.

PARTE II - Continuamos a entrevista com questões específicas para os aspectos posicional e decimal sobre o ensino do Sistema de numeração decimal (5º Ano).

1. **Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem:**
(a) de leitura e escrita de números naturais (até 6 algarismos)?
R: Apenas para números grandes, por exemplo 800, números com mil (classe dos milhares) e milhão (classe dos milhões). Mas isso é contornado quando se trabalha com cédulas (dinheiro), por exemplo. Na tradução da numeração falada para a escrita de numérica, há

uma certa dificuldade, por exemplo, 1 unidade de milhar 5 centenas 4 dezenas e cinco unidades é falado em sala como mil quinhentos e quarenta e cinco. Não há utilização da expressão unidade de milhar na numeração falada do cotidiano. Fala-se mil quinhentos e quarenta e cinco.

(b) na comparação e ordenação de números naturais?

R: Eles não têm dificuldades em relação aos numerais. Apenas quando usa os símbolos de comparação $(=, <, > \text{ ou } \neq)$ Reconhecer que um numeral é $<$ (menor que) ou $>$ (maior que) representa que esses números também podem ser $\neq$ (diferentes). Eles ainda têm muita dificuldade nesse entendimento

(c) da decomposição e recomposição de números naturais (potências de 10)?

R: Os estudantes conseguem fazer a decomposição, mas a recomposição é bem complicada, em particular, para números grandes.

(d) das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais e decimais finitos?

R: Nas operações de adição, subtração e multiplicação não há dificuldades, mesmo para números grandes. Mas há muitas dificuldades na divisão, tanto na representação quanto no cálculo. Eles já apresentam essas dificuldades dos outros seriados. Na divisão, a gente sempre fala que um número tem que ficar em cima do outro para poder realizar a operação, mas a armação da conta de divisão já é horizontal e inicia-se pela esquerda, ou seja, pelos numerais maiores seguindo para os menores. Além disso, ao realizar essa operação mobilizamos a outras operações: adição, subtração e multiplicação.

2. No caso de ocorrerem as dificuldades, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem desses aspectos do Sistema de Numeração Decimal?

R: Os estudantes não mobilizam a organização do numeral no Quadro Valor Lugar (QVL). Essa é a maior dificuldades. Caso os estudantes se apropriassem do QVL o desenvolvimento das operações seriam mais simples, inclusive para a divisão.

3. No caso de ocorrerem as dificuldades, a senhora considera que surgiram como?

R: A falta do trabalho do QVL em seriados anteriores. Isso dificulta demais o trabalho no 5º Ano, pois investimos muito tempo nesse assunto.

4. O que a senhora considera que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

R: O trabalho sobre os numerais e algarismos no QVL, incluindo, inicialmente, a realização das operações no próprio QVL para os estudantes perceberem a importância da posição, do zero e das transformações para os números maiores que 10.

Apêndice C: Lista de todos os ostensivos utilizados no MPR e/ou AEPs para o tipo de tarefas "TC: contar uma coleção".

Vamos iniciar a apresentação dos ostensivos pelos T:

$T_{Trad.ENS/ENFC}$	Associar a escrita numérica simples a escrita numérica falada ao nome do número ("escrever/nomear").
$T_{Trad.ENS/ENCC}$	Traduzir a escrita numérica simples para a escrita numérica composta canônica.
$T_{Trad.ENS/ENPA}$	Traduzir a escrita numérica simples para a escrita numérica em potências de dez.
$T_{Trad.ENS/ENP}$	Traduzir a escrita numérica simples para a escrita numérica em potências de dez multiplicativo.
$T_{Conv.ENCC}$	Converter um número de uma unidade para outra unidade.
$T_{Trad.ENC/ENS}$	Traduzir de ENC para ENS e vice-versa.
T_{Cnd}	Determinar o "número de" unidades de uma determinada ordem.
T_{Adi}	Adicionar dois ou mais números naturais
T_{Sub}	Subtrair dois ou mais números naturais.
T_{Multi}	Multiplicar dois números naturais.
T_{Div}	Dividir dois números naturais.
$T_{Adic.P}$	Adicionar dois números em potencias de 10.
$T_{Multi.P}$	Multiplicar dois números em potências de 10.
$T_{Div.P}$	Dividir dois números em potências de 10
$T_{C\_ENS.Vale}$	Contar uma coleção por escrito com o material distribuídos aleatoriamente.
$T_{C\_ENS.Vale\_10k}$	Contar uma coleção por escrito com o material múltiplo de 10 distribuídos aleatoriamente.
$T_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	Contar uma coleção por escrito com o material múltiplo de 10 menor que 100 distribuídos aleatoriamente.
$T_{C\_ENS.Gr}$	Contar uma coleção por escrito com o material em potência de 10 agrupado.
$T_{C\_ENS.\ Agr.Hom}$	Contar uma coleção por escrita numérica simples com o material múltiplo de 10 agrupada homogeneamente
$T_{C\_ENS.PAgr}$	Contar uma coleção por escrita numérica simples com o material múltiplo de 10 agrupada parciammente homogeneo
$T_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$	Contar uma coleção por escrita numérica simples com o material múltiplo de 10 parcialmente agrupado homogêneo
$T_{C\_ENS.PAgr\_Het}$	Contar uma coleção por escrita numérica simples com o material múltiplo de 10 parcialmente agrupado heterogêneo.
$T_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$	

As τ apresentadas no modelo do T4TEL foram as seguintes:

τ_{jus}	Associar cada unidade numérica simples a sua posição na ENS por justaposição dos números de unidades de cada ordem.
$\tau_{Trad.Ens/ENFC}$	Associar as diferentes unidades numéricas simples correspondente a classificação na escrita numérica.
$\tau_{Trad.ENS/ENCC}$	Escrever por justaposição o número de unidades simples isoladas, dezenas isoladas, etc.

$\tau_{Trad.ENS/ENPA}$	Adicionar os número pela justaposição dos algarismosdiferentes de zero de cada termo da adição e reduzir a $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$.
$\tau_{Trad.ENS/ENP}$	Expressar o número por justaposição dos coeficiente em potências de dez.
$\tau_{Conv.ENCC}$	Converter um número de uma certa unidade para próxima unidade de ordem superior.
$\tau_{Conv.ENCC.1}$	Converter em de ENCC para ENC e realizar o truncamento.
$\tau_{Conv.EN}$	Consiste em utilizar a potência de 10 para fazer as conversões.
$\tau_{Conv.ENA}$	Utilizar escrita aditivas para permitir conversões apenas no caso de adições iteradas de potências de 10 ou ao utilizar as palavras “pacotes” (ou “grupos”).
$\tau_{Trad.ENC/ENS.jus}$	Associar os números de unidades de cada ordem em sua posição na escrita numérica por justaposição.
$\tau_{Cnd.trunc}$	Consiste em considerar o número formado por todos os algarismos localizados a partir da classificação da ordem da unidade considerada (da direita para a esquerda)
$\tau_{\mathit{multi}\mathrm{PD}}$	(técnica de justaposição de zeros ou “regra dos zeros”): consiste em escrever tantos zeros à direita do número inicial na ENS quanto o número de zeros na potência de dez.
τ_{Adi}	consiste em alinhar os números por ordem da direita para a esquerda.
τ_{Sub}	consiste em alinha os números por ordem da direita para a esquerda.
$\tau_{Multi.1}$	Multiplicar cada número do multiplicador por cada um dos números de unidades isoladas, da direita para a esquerda do multiplicando.
$\tau_{Multi.2}$	
τ_{Div}	Realizar a divisão nos seguintes casos: - Algarismo do Dividendo (D) > Algarismo do dividor (d) - Algarismo do Dividendo (D) = Algarismo do dividor (d) - Algarismo do Dividendo (D) < Algarismo do dividor (d). $\tau_{Div.1.2}$:Fazer a decomposição do dividendo em função do divisor, sempre do número de maior ordem, quando D < d. Nos demais casos, fazer a divisão direta.
$\tau_{Adic.P.1}$	- $T_{Adic.}$: Adicionar dois números naturais; - T_{Cnd}. - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da ENC para a ENS.
$\tau_{Adic.P.2}$	
$\tau_{Multi.P}$	- $T_{Multi.P}$:
$\tau_{Div.P}$	- $T_{Div.P\_trunc}$: Determinar o quociente e depois considerar o número de unidades individuais restantes para o resto - $T_{Trad.\ ENS/ENC}$: Traduzir da ENS para a ENC. T_{Cnd}: Contar o *número de* realizando as conversões, quando necessário.
$\tau_{ENS.Vale.1}$	- $T_{CUS.1}$: contar de 1 em 1. - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\tau_{C\_ENS.Vale.2}$	- TGr.X : Fazer grupos que não são unidades de contagem - $T_{C.X}$: Contar de X a X, onde X não é uma potência de 10. - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\tau_{C\_ENS.Vale.3}$	- TGr : Produzir uma coleção agrupada. - $T_{C\_ENS.Gr}$
$\tau_{C\_ENS.Vale.4}$	- T_{PAgr} : Produzir uma coleção parcialmente agrupada. - $T_{C\_ENS.PAgr}$ (apresentada posteriormente)

$\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.1}$	- $T_{Agr.dez}$: Produzir grupos de dez. - $T_{CUNS.dez}$: Contar de 10 em 10. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS).
$\tau_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	- $T_{Agr.dez}$: Fazer grupos de dez. - $T_{Conv.OrdreSup}$: Converter para uma unidade superior uma unidade cujo número é maior que 9. - T_{CUS}: Contar por unidade de numeração (o número de dezenas). - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (ENS).
$\tau_{C\_ENS.PGr.1}$	- $T_{Desfazer}$: Desfazer todos os agrupamentos (restabelecer para unidades simples). - $T_{C\_ENS.Vale}$: Contar uma coleção desorganizada por escrito.
$\tau_{C\_ENS.PGr.1}$	- $T_{Desfazer}$: Desfazer todos os agrupamentos (restabelecer para unidades simples). - $T_{C\_ENS.Vale}$: Contar uma coleção desorganizada por escrito.
$\tau_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$	- T_{CUS}: Contar em unidade de numeração; - $T_{Trad.ENM/EC}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (EC). - $T_{Conv.ENC/EC}$: Converter da escrita numérica composta (ENC) para a escrita numérica simples (EC).
$\tau_{C\_ENS.PAgr.2}$	- T_{CUC}: Contar em unidades numéricas composta (o número da dezena) - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir do número da escrita numérica no materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.OrdemSup}$: Converter uma unidade para uma unidade superior cujo número seja maior que 9. - $T_{C\_ENS.Agr}$: Contar por escrito uma coleção agrupada por escrita escrita numérica simples.
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Hom}$	- T_{CNC}: Contar em numeração composta. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir o número da escrita numérica nos materiais manipuláveis (ENM) para a escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.NC/NS}$: Converter a unidade composta para a unidade simples em que o número na frente seja maior que 1 dígito (adicione 0 à direita).
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em numeração composta cada ordem. - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para escrita numérica simples (ENS). - $T_{Conv.OrdemInf}$: Converter todas as unidades para a unidade de menor ordem - $T_{C\_ENS.PGr\_Hom}$: Contar em escrita numérica simples uma coleção parcialmente agrupada homogênea.
$\tau_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	- T_{CNC} : Contar separadamente em unidades numéricas cada ordem - $T_{Trad.ENM/ENS}$: Traduzir a escrita do material manipulável (ENM) para a escrita numérica simples (ENS) - $T_{Conv.ENC/ENS}$: Converter de escrita numérica composta (ENC) para escrita numérica simples (ENS). - T_{Adic}: Adicionar números.

As θ apresentadas no modelo do T4TEL foram:

θ_P	As unidades da primeira ordem são escritas na primeira fila, as unidades da segunda ordem são escritas na segunda fila, etc.
θ_D	Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
θ_{jus}	Link entre o princípio posicional e o decimal.
$\theta_{Trad.Ens/ENFC}$	Link entre a escrita numérica simples e a numeração falada.
$\theta_{Trad.ENS/ENCC}$	θ_P
$\theta_{Trad.ENS/ENPA}$	$\theta_{P;}$ $\theta_{Trad.ENS/ENPA}$:Traduzir da ENPD para a ENPDA e, em seguida, traduzir para ENS. $\theta_{ENS/NF}$:Link entre a a escrita numérica simples e a numeração falada.
$\theta_{Trad.ENS/ENP}$	$\theta_{P;}$ $\theta_{Trad.ENP/ENCC}$: Traduzir da ENPD para ENCC e reduzir a $\tau_{Trad.ENS/ENCC}$.
$\theta_{Conv.ENCC}$	$\theta_{P;}$ $\theta_{Conv.\ ENCC/ENP}$: Converter da escrita numérica composta canônicapara a escrita numérica em potência de dez multiplicativa. θ_D
$\theta_{Conv.ENCC.1}$	- $\theta_{Conv.ENCC/\ ENP}$: Converter da ENCC para ENC e realizar o truncamento. - θ_D.
$\theta_{Conv.ENP}$	- θ_{ENP}: Escrever o número em ENP e relacionar a unidades. - θD.
$\theta_{Conv.ENA}$	- $\theta_{Conv.ENA.1}$: Adicionar números de mesma unidade. - θ_D. - $\theta_{Conv.ENA.2}$: Converter adições iteradas de potências de 10 ao utilizar a palavra “pacotes”.
$\theta_{ENC/ENS.jus}$	- θ_P. - θ_D. - $\theta_{CondResp}$: respeitar ao grau de cada unidade na escrita em algarismos (as unidades simples são escritas na primeira linha a partir da direita, as dezenas para a segunda, etc.), que pode ser necessário alterar a ordem em que as unidades são dadas antes de justapor a escrita numérica por algarismos. - $\theta_{CondUnida}$: presença de cada unidade (até a unidade de maior ordem) na escrita em algarismos, o que pode exigir a utilização do número 0 para marcar a ausência de unidades individuais. - $\theta_{CondAlgar}$: presença de números de um algarismo em cada posto da escrita numérica, o que pode exigir conversões de unidade para unidade.
$\theta_{Cnd.trunc}$	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior. - $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais algarismos por ordem.
$\theta_{multiPD}$	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$; - $\theta_{Cnd.trunc.2}$.
θ_{Adi}	- θ_P; - θ_D.
θ_{Sub}	- θP; - θD. - $\theta_{Conv.OrdInf}$: Converter o número do minuendo de uma ordem para a próxima ordem inferior adicionando o número existente nessa ordem.
$\theta_{Multi.1}$	- θP

	- $\theta_{Multi.calc}$: Cálculo de multiplicar números naturais. - $\theta_{Conv.OrdSup}$: Converter o produto de uma ordem para a próxima ordem superior adicionando o número existente nessa ordem.
$\theta_{Multi.2}$	- θP - $\theta_{Trad.ENS/ENCC}$: Traduzir da ENS para a ENCC. - $\theta_{Multi.calc}$: Cálculo de multiplicar números naturais. - $\theta_{Conv.OrdSup}$: Converter o produto de uma ordem para a próxima ordem superior adicionando o número existente nessa ordem.
θ_{Div}	- $\theta_{Cnd.trunc.1}$: Converter um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior. - $\theta_{Cnd.trunc.2}$: Justapor um algarismo da ordem superior por outro na ordem inferior resultando em um número de dois ou mais algarismos por ordem.
$\theta_{Adic.P}$	- θ_{D}.
$\theta_{Multi.P}$	- θ_{D}. - $\theta_{CondUnida}$: presença de cada unidade (até a unidade de maior ordem) na escrita em algarismos, o que pode exigir a utilização do número 0 para marcar a ausência de unidades individuais.
$\theta_{Div.P}$	- θD.
$\theta_{C\_ENS.Vale.1}$	- θ_{CUS}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre a escrita numérica simples e numeração falada.
$\theta_{C\_ENS.Vale.2}$	- θ_{CUS} : “Correspondência a termo”, “sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença da ordem”. - $\theta_{M.X}$: Os múltiplos de X. - θ_{card} : O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre a escrita numérica simples e a numeração falada.
$\theta_{C\_ENS.Vale.3}$	- $Gr_{T\theta}$ - C_ENS.Gr T
$\theta_{C\_ENS.Vale.4}$	-θ_{TPAgr} - $\theta_{T\_ENS/ PAgr}$
$\theta_{C\_ENS.Vale\ \_10k.1}$	- θ_{CUNS}: “Correspondência a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença da ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre numeração escrita simples e numeração falada.
$\theta_{C\_ENS.Vale\_10k.2}$	- θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - θ_{CUS}: “Correspondência de termo a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença de ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre escrita numérica simples e numeração falada.
$\theta_{C\_ENS.PGr.1}$	- $\theta_{Conserv.}$: O cardeal da coleção não muda se desfizermos ou reagruparmos os elementos. - $\theta_{TC\_ENS.Vale}$
$\theta_{C\_ENS.Agr\_Hom.2}$	- θ_{CUS}: “Correspondência a termo”, “Sequência estável”, “Abstração”, “Indiferença da ordem”. - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - $\theta_{ENS/NF}$: Ligação entre escrita numérica simples e numeração falada. - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.

$\theta_{C\_ENS.PAgr.2}$	- θ_{CUS}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - $\theta_{TC\_ENS.Ag}$
$\theta_{C\_ENS.PGr\_Hom}$	- θ_{CNC}: "Correspondência a termo", "sequencia estável", "Abstração", "Indiferença da ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de elementos na coleção - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.1}$	θ_{CNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". θ_{Card}: O último número falado representa o número de elementos da coleção. θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior.
$\theta_{C\_ENS.PAgr\_Het.2}$	- θ_{CNC}: "Correspondência de termo a termo", "Sequência estável", "Abstração", "Indiferença de ordem". - θ_{Card}: O último número da palavra representa o número de itens na coleção. - θ_{D}: (Princípio Decimal) Dez unidades de uma certa ordem são iguais a uma unidade da próxima ordem superior. - θAdic.

Apêndice D
AEP 1 – Contar e posicionar os algarismos de uma coleção por escrita numérica

Estudante:____ Data:___/___/_____

Nesta atividade, vamos usar informações sobre os aspectos decimal e posicional do Sistema de Numeração Decimal. Nesse sentido, propomos a contagem numérica de uma coleção usando palitos por meio da seguinte questão: *Quantos palitos há nessa coleção?*

(a) Quantas unidades há na coleção?

(b) Qual é a representação desse número utilizando o ábaco?

(c) Quantas ordens tem esse número?

(d) Quantas classes tem esse número?

(e) Qual é a representação (ordens) da posição de cada algarismo desse número (quantidade da coleção), no Quadro Valor Lugar?

(f) Qual é a representação desse número, escrito por extenso?

(g) Como cada unidade de número é representado nessa escrita numérica?

Apêndice E
AEP 2 – Contar uma coleção em escrita numérica

Estudante:____ Data:___/___/_____

COMPREENDENDO A CONVERSÃO E A DECOMPOSIÇÃO NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Nesta atividade, vamos usar informações sobre o princípio decimal do Sistema de Numeração Decimal. Nesse sentido, propomos a contagem numérica de uma coleção, privilegiando a conversão e a decomposição entre os números decimais usando palitos por meio da seguinte da AEP 1: *Quantos palitos há nessa coleção?*

(a) Quantos palitos há nessa coleção?

(b) Qual a quantidade de palitos agrupados por dezenas há nessa coleção?

(c) Qual a quantidade de palitos agrupados por centena há nessa coleção?

(d) Qual a quantidade de palitos agrupados pela classe dos milhares há nessa coleção?

(e) Quais as conversões possíveis para representar essa coleção?

(f) Essas conversões representam a mesma quantidade de palitos dessa coleção?

(g) Qual é a decomposição desse número que representada a quantidade de palitos dessa coleção?

(h) Como essa coleção pode ser representada em potências de 10?

ANEXOS

LISTA DE ANEXOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Os pesquisadores do projeto intitulado "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano**" se comprometem a garantir a privacidade dos sujeitos da pesquisa cujos dados serão coletados mediante observação das aulas de matemática e concordam com a utilização dos dados única e exclusivamente para a execução do presente projeto.

Informam que a divulgação das informações só será realizada de forma anônima ou mediante expressa autorização prévia dos interessados. Os dados coletados, bem como todos os documentos elaborados sobre a pesquisa (termos de consentimento livre e esclarecido, confidencialidade e demais declarações) serão mantidos sob a posse do pesquisador **Anderson Souza Neves**, estudante do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPGEFHC), da Universidade Federal da Bahia, por um período de 5 (cinco) anos, sob a responsabilidade do Professor Pesquisador-orientador **Luiz Márcio Santos Farias**. Após este período, os dados passarão a ser guardados no banco de dados do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia (NIPEDICMT), pelo tempo que for acordado entre o pesquisador e o sujeito da pesquisa no ato da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Salvador, ____de ________________de 2019.

____

Anderson Souza Neves
Pesquisador

____

Luiz Márcio Santos Farias
Orientador da Pesquisa

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

TERMO DE ASSENTIMENTO

CRIANÇA E ADOLESCENTE (MAIORES DE 6 ANOS E MENORES DE 18 ANOS)
Resolução 466/2012 CNS/CONEP

Você está sendo convidado para participar da pesquisa "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano**". Seus pais permitiram que você participe.

Queremos saber como os estudantes aprendem matemática, em particular, o Sistema de Numeração Decimal. As crianças que participarão desta pesquisa têm de 10 a 13 anos de idade.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir.

A pesquisa será feita na sua escola, na sala de aula. Eu apenas observarei as aulas da sua professora de matemática. Ela concordou em participar. Para isso, apenas participarei das aulas, e ficarei sentada no fundo da sala, para não atrapalhar ninguém. Farei tudo da melhor forma possível, mas caso aconteça alguma coisa errada, você pode me procurar pelo telefone (71) 99912-8380.

Mas há coisas boas que podem acontecer como, por exemplo, tornar as aulas de matemáticas mais legais e divertidas, sobretudo pela utilização de materiais em que você poderá manipular.

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar as crianças que participaram.

Quando terminarmos a pesquisa voltarei à sua escola para contar tudo que escrevi e compartilhar os resultados. Se você tiver alguma dúvida, você pode me perguntar. Eu escrevi os telefones na parte de baixo deste texto.

Para qualquer esclarecimento no decorrer da sua participação, estarei disponível através dos telefones:(71) 99912-8380, ou ainda na Universidade Federal da Bahia – UFBA, Instituto de Matemática e Estatística, na Rua Barão de Jeremoabo, s/n - Ondina, Salvador - BA, CEP: 40.170-115.

Desde já agradeço!

CONSENTIMENTO PÓS INFORMADO

Eu, ____

aceito participar da pesquisa "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano"**.

Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer.

Entendi que posso dizer "sim" e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir e que ninguém vai ficar furioso.

Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus responsáveis. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e li e concordo em participar da pesquisa.

Salvador, _____de ______________de _____.

____

Assinatura

____

Anderson Souza Neves
Pesquisador

____

Luiz Márcio Santos Farias
Orientador da Pesquisa

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS ESTRITAMENTEPARA A PESQUISA (CRIANÇA)

Eu, ____(nacionalidade), menor de idade, neste ato representado por____ (responsável legal) portador (a) do CPF ______________________ e do RG ______________________, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), e no Termo de Assentimento, **AUTORIZO**, através do presente termo, os pesquisadores, prof. **Dr. Luiz Márcio Santos Farias** e professor Anderson Souza Neves, a fazerem uso da minha imagem em todo e qualquer material, entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado na Universidade Federal da Bahia, desenvolvida pelos pesquisadores e "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano**".

Ao mesmo tempo, libero a utilização das filmagens e/ou gravações de áudio para fins exclusivamente científicos e de estudos em favor dos pesquisadores acima especificados, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990) e das pessoas com deficiência (Decreto Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004). Por ser esta a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou qualquer outro, e assino a presente autorização.

Salvador, ___ de _______________ de 2019 .

____

Assinatura

Telefone para contato:

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS ESTRITAMENTE PARA A PESQUISA (ADULTO)

Eu, ____ portador (a) do CPF ________________________ e do RG ________________________, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), **AUTORIZO**, através do presente termo, os pesquisadores, prof. **Dr. Luiz Márcio Santos Farias** e professor Anderson Souza Neves, a fazerem uso da minha imagem em todo e qualquer material, entre fotos e documentos, para ser utilizada em Dissertação de Mestrado na Universidade Federal da Bahia, desenvolvida pelos pesquisadores e intitulada "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano**".

Ao mesmo tempo, libero a utilização das filmagens e/ou gravações de áudio para fins exclusivamente científicos e de estudos em favor dos pesquisadores acima especificados, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990) e das pessoas com deficiência (Decreto Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004). Por ser esta a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou qualquer outro, e assino a presente autorização.

Salvador, ___ de ________________ de 2019.

____

Assinatura

Telefone para contato:

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
Faculdade de Educação - FACED
Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, 40110-100, Salvador - Bahia Brasil.
Fone: (71) 3283-7262/7264 | E-mail: ppgefhc@ufba.br

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa: "**Uma proposta para o logos das praxeologias referentes ao ensino do aspecto decimal da numeração no 5º ano**".

OS MOTIVOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O motivo que nos leva a estudar o assunto é investigar como se dá o ensino de do Sistema de Numeração Decimal, a fim de auxiliar o estudante na aprendizagem de seus conceitos iniciais, considerando as dificuldades já diagnosticadas, com a aprendizagem da matemática.

O objetivo final é que esta pesquisa seja útil na formação de professores de ciências (Matemática, Física, Química, Biologia), Pedagogia e dentre outros, sobretudo para aqueles profissionais que utilizam o Sistema de Numeração Decimal em suas aulas.

Trata-se, em verdade, de uma pesquisa de observação. Você está sendo convidado a participar pelo fato de conviver e trabalhar com estes alunos especiais, fazendo um bom trabalho nesta área.

Os procedimentos serão os seguintes: observarei as aulas de matemática no fundo da sala, de maneira que não perturbe o andar dos trabalhos. Faremos entrevistas, questionários apenas se necessário.

Mesmo sabendo que a minha presença já interferirá no ambiente escolar, o risco da observação será mínimo, de forma que estarei sempre atento aos riscos que podem ser acarretados e, caso algo aconteça, tomarei todas as medidas de precaução e proteção. Todavia, apesar dos riscos mínimos, os benefícios esperados da investigação são maiores.

Construir um Observatório de Práticas onde seja possível analisar, discutir, experimentar, reanalisar e ressignificar as práticas dos professores, em direção a um ensino bilíngue da Matemática. Seu trabalho será divulgado e valorizado.

GARANTIA DE ESCLARECIMENTO, LIBERDADE DE RECUSA E GARANTIA DE SIGILO

Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar e sempre que desejar. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade.

Trataremos a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Os resultados serão enviados para você e permanecerão confidenciais. Seu nome ou o material que indique a sua participação não será liberado sem a sua permissão. Você não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo.

Uma cópia deste consentimento informado será arquivada no Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e outra será fornecida a você.

CUSTOS DA PARTICIPAÇÃO, RESSARCIMENTO E INDENIZAÇÃO POR EVENTUAIS DANOS

A participação no estudo não acarretará custos para você e não será disponível nenhuma compensação financeira adicional. Em caso de haver algum gasto decorrente desta pesquisa, uma compensação será providenciada.

Se depois de consentir em sua participação você desistir de continuar participando, tem o direito e a liberdade de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, seja antes ou depois da coleta dos dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo a sua pessoa.

DECLARAÇÃO DA PARTICIPANTE OU DO RESPONSÁVEL PELA PARTICIPANTE CONSENTIMENTO PÓS INFORMAÇÃO

Eu,____fui informada (o) dos objetivos da pesquisa acima de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que em qualquer momento poderei solicitar novas informações e motivar minha decisão se assim o desejar. Concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser. O pesquisador **Anderson Souza Neves** certificou-me de que todos os dados desta pesquisa serão confidenciais. Também sei que caso existam gastos adicionais, estes serão absorvidos pelo orçamento da pesquisa. Em caso de dúvidas, poderei chamar o pesquisador **Anderson Souza Neves** ou o professor-orientador **Luiz Márcio Santos Farias** no telefone (71) 99912-8380, Faculdade de Educação – FACED, na Avenida Reitor Miguel Calmon, s/n, *Campus* Canela, CEP: 40110-100, Salvador – Bahia, Brasil, no telefone (71) 3283-6608 ou no Instituto de Matemática e Estatística, na Rua Barão de Jeremoabo, s/n - Ondina, Salvador - BA, CEP: 40.170-115.

Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pela pesquisadora, ficando uma via com cada um de nós.

Salvador, ____de __________de 2019.

____

Assinatura do participante

____

Anderson Souza Neves
Pesquisador

____

Luiz Márcio Santos Farias
Orientador da Pesquisa