



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COLEGIADO DOS CURSOS DE MATEMÁTICA
MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO

A FÓRMULA DE BROMWICH

JOSÉ HENRIQUE DA SILVA NETO

Salvador - Bahia
DEZEMBRO DE 2020

A FÓRMULA DE BROMWICH

JOSÉ HENRIQUE DA SILVA NETO

Monografia de Graduação apresentada ao Colegiado dos Cursos de Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maikel Antonio Samu-ays.

Salvador - Bahia

Dezembro de 2020

Neto, José Henrique da Silva.

A Fórmula de Bromwich / José Henrique da Silva Neto. – Salvador, 2020.

viii + 29 pp. : il

Orientação: Prof. Dr. Maikel Antonio Samuays.

Monografia (graduação) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Colegiado dos Cursos de Matemática, 2020.

1. Transformada. 2. Bromwich. 3. Laplace. 4. Fourier. I. Samuays, Maikel Antonio. II. Título.

JOSÉ HENRIQUE DA SILVA NETO

A Fórmula de Bromwich

Monografia apresentada ao Colegiado dos Cursos de Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Maikel Antonio Samuays - Orientador
UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
UFBA

Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marín
UFBA

Salvador - BA
2020

Aos que algum dia aprenderam algo comigo
e aos que desejam aprender.

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer a todos os familiares e amigos que sempre acreditaram em mim e me motivaram, aprendendo algo comigo ou me incentivando a ir atrás dos meus sonhos.

Em especial, gostaria de agradecer a minha irmã Santana que me ajudou a conquistar todas as mínimas coisas, me guiou e cuidou de mim. Ao meu pai Zé, meu pilar psicológico e financeiro, minha mãe Cris, o piso dos meus sentimentos e meu teto espiritual. Muito obrigado aos três por serem minha casa e dar sentido à minha vida. Gratidão eterna aos meus saudosos avós, José Henrique, que tento honrar o nome todos os dias, minha avó Zezé, mãe de toda a minha família e principalmente os meus primos John, Lelê, Safi, Thiago e Luquinhas.

Sou grato a todos os professores que me educaram na vida ou na Matemática. Especialmente Juan Andrés Gonzales Marín, Vinicius Casteluber Laass e Maikel Antonio Samuays, por toda orientação de vida e trabalho, exemplos como educadores, matemáticos e inspirações como profissionais.

Um agradecimento especial ao meu melhor amigo Jader, meu braço direito desde a infância, Diego, sem ele talvez eu não estivesse aqui, Paulinho, meu verdadeiro irmão mais velho e aos amigos que me ajudaram e alguns foram primordiais para este trabalho: Thovis, Luquinhas, Vitão, Crólion, Yurê, Guigá, Carlito e todo o Barca.

Por fim, agradeço ao maior presente que a UFBA me deu, Luiza, quem tornou possível esse sonho, cuidou de mim, me ensinou toda matemática que sabia, e a que não sabia, estudou para me ensinar, me motivando e fazendo entender a felicidade de ser amado não pelo que sou, e sim, apesar do que sou.

Resumo

Esta dissertação busca desenvolver uma teoria sólida para entender a formalização da Transformada Inversa de Laplace, conhecida como Fórmula de Bromwich. O texto contém, além de noções das Transformadas de Laplace e Fourier, tópicos de Análise Real e Complexa, visando estabelecer as ferramentas necessárias para a abordagem de tal fórmula.

Palavras-chave: Transformada; Bromwich; Laplace; Fourier.

Abstract

This dissertation seeks to develop a solid theory to understand the formalization of the Laplace Inverse Transform, known as the Bromwich Formula. The text contains, in addition to notions of the Laplace and Fourier transforms, topics of Real and Complex Analysis, aiming to establish the necessary tools to approach such a formula.

Keywords: Transform; Bromwich; Laplace; Fourier.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Tópicos de análise real e complexa	3
1.2 Transformada de Laplace	8
1.3 Transformada de Fourier	15
2 Transformadas Inversas	18
2.1 Fórmula de Inversão da Transformada de Fourier	18
2.2 Fórmula de Inversão da Transformada de Laplace	23
Referências Bibliográficas	29

Introdução

No estudo do cálculo é comum os estudantes decorarem tabelas, fórmulas matemáticas e até mesmo usar calculadoras para ajudar na resolução de EDO's e EDP's, entre outras aplicações. Porém, matematicamente há sempre uma fundamentação por trás de qualquer algoritmo, tabela ou até mesmo computadores poderosos que fazem contas. No caso dessa dissertação, investigaremos a Transformada Inversa de Laplace, tão comum em cursos de cálculo diferencial e integral sendo apresentadas através de tabelas.

A Transformada Inversa de Laplace, também chamada Integral de Bromwich ou de Fourier-Mellin pode ser escrita como $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{st} F(s) ds$, onde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Apesar do seu formato, de fato “complexo”, esta integral pode ser relacionada a Transformada Inversa de Fourier e quando submetida as condições adequadas, pode ser resolvida de maneira prática, usando o Teorema dos Resíduos de Cauchy. Nesta monografia, estudamos as condições, propriedades e colocamos o contexto de forma clara e direta para fazer a relação mencionada, evidenciando para o leitor as teorias importantes por trás das tabelas e fórmulas uma vez estudadas, ou até mesmo decoradas.

O pioneiro no estudo das Transformadas Integrais foi o matemático alemão Leonard Euler, que posteriormente foi creditado por Laplace em sua obra *Théorie analytique des probabilités* (1812). Foi Spitzer (1878) que associou o nome de Laplace à expressão $y = \int_a^b e^{sx} \phi(s) ds$ empregada por Euler, onde é substituída na equação diferencial em que y é função de x .

No final do século 19, a transformada de Laplace foi estendida para a forma complexa por Poincaré e Pincherle, redescoberta por Petzval e aplicada à duas variáveis por Picard que a posteriori conduziu mais investigações com Abel entre outros.

Bateman (1910) faz a primeira aplicação da transformada de Laplace moderna no trabalho de Rutherford, transformando equações sobre decaimento radioativo, dada por

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P$$

fazendo

$$p(x) = \int_0^\infty e^{-xt} P(t) dt$$

obtendo a equação da transformada, que mais tarde foi denominada de Transformada de Laplace, pelo matemático Bernstein (1920) no seu trabalho sobre funções teta. Doetsch, na década de 20 e 30, aplicou a transformada de Laplace às equações diferenciais e integrais, dando um ímpeto ao estudo das mesmas. Heaviside produziu um trabalho com a Transformada de Laplace aplicada à engenharia elétrica que, embora matematicamente impreciso, foi muito útil na resolução de seus problemas. Bromwich, além de pesquisar de forma rigorosa o cálculo de Heaviside, conecta com a Transformada de Laplace e descobre a Transformada Inversa

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} x(s) ds$$

para γ à direita de todas as singularidades da função x .

Os livros [1] e [2] foram as referências principais para as discussões sobre as transformadas inversas de Laplace e Fourier respectivamente. Esta Monografia teve como ali-cerce fazer uma ponte teórica entre esses conceitos, baseando-se numa leitura crítica para uma abordagem destas teorias conforme discussões feitas entre orientador e orientando.

No Capítulo 1, apresentamos as preliminares básicas e introduziremos as transformadas mencionadas anteriormente. Já no Capítulo 2 evidenciaremos a inversa de Laplace através da inversa de Fourier.

Os conceitos que serão abordados são parte de uma vasta teoria, sendo um desafio decidir o que é mínimo para o entendimento completo e máximo para o aprendizado sem fugir do escopo do trabalho. Sendo assim, esperamos que o leitor compreenda o objetivo principal do texto e motive-se ao estudo completo das teorias apresentadas.

Capítulo 1

Preliminares

Para uma construção mais formal e organizada este capítulo irá introduzir conceitos iniciais que são fundamentais para o entendimento completo da Transformada Inversa de Laplace. Aqui, recordaremos algumas técnicas e conceitos do cálculo, análise e do estudo de funções complexas, tais como integrais impróprias e o teorema dos resíduos.

1.1 Tópicos de análise real e complexa

Definição 1.1.1. Uma função f tem um **salto de descontinuidade** no ponto t_0 se ambos os limites

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

existem, são finitos e $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

Com base na definição anterior, introduziremos uma importante classe de funções para este trabalho.

Definição 1.1.2. Uma função f é **seccionalmente contínua (contínua por partes)** no intervalo $[a, b]$ se existe uma partição $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ com $t_{i-1} < t_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

1. f é contínua em cada $t \in (t_{i-1}, t_i)$;
2. f possui um salto de descontinuidade em t_i .

Exemplo 1.1.3. Seja f uma função definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2 & \text{se } -2 \leq t \leq -1 \\ -t^2 & \text{se } |t| < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Tal função, representada pelo gráfico a seguir, é uma função seccionalmente contínua, pois possui saltos de descontinuidade em $t = \pm 1$.

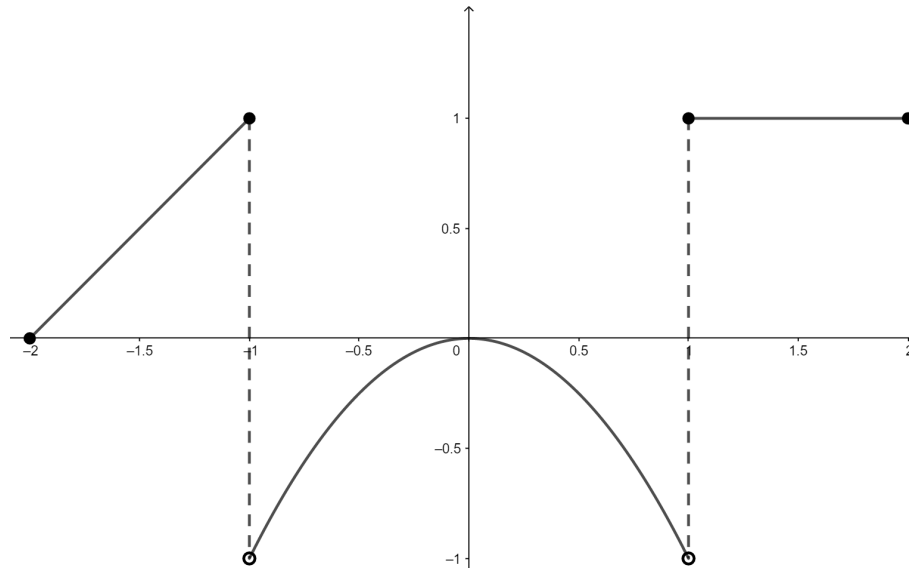


Figura 1.1: Gráfico de f

Observação 1.1.4. Como consequência temos que, em cada subintervalo de uma função seccionalmente contínua, a função é limitada, isto é, existe $M_i \geq 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M_i, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como ao longo do trabalho iremos utilizar algumas propriedades de integrais impróprias vamos relembrar o que são e quais são os tipos de integrais impróprias mais importantes para esta dissertação. Em geral, no estudo de integrais definidas, a integral existe para funções limitadas definidas sobre um intervalo fechado $[a, b]$.

Observação 1.1.5. A integral de uma função seccionalmente contínua de uma variável real é *imprópria* se acontece uma das seguintes condições:

- (i) A função é ilimitada dentro do intervalo de integração;
- (ii) O intervalo de integração não é fechado;
- (iii) O intervalo de integração é ilimitado.

Neste trabalho, iremos utilizar apenas integrais impróprias dos tipos (ii) e (iii), cujas definições precisas são dadas a seguir.

Definição 1.1.6. Quando os limites a seguir existirem, dizemos que as respectivas integrais impróprias são convergentes.

(a) Se f é contínua em $[a, b)$, então definimos

- Para $b < \infty$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) \, dx.$$

- Para $b = \infty$:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) \, dx.$$

(b) Se f é contínua em $(a, b]$, então definimos

- Para $-\infty < a$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx.$$

- Para $a = -\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) \, dx.$$

(c) Se f é contínua em (a, b) , então definimos

- Para $-\infty < a < b < \infty$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\substack{\rho \rightarrow b^- \\ \sigma \rightarrow a^+}} \int_\sigma^\rho f(x) \, dx.$$

- Para $a = -\infty$ e $b = \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = L + M,$$

sendo

$$\int_{-\infty}^0 f(x) \, dx = L \quad e \quad \int_0^{\infty} f(x) \, dx = M.$$

Observação 1.1.7. Note que não definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \tag{1.1}$$

como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) \, dx. \tag{1.2}$$

É possível mostrar que se (1.1) existe então (1.2) existe e $(1.1) = (1.2)$ neste caso. Con-

tudo, a existência de (1.2) não implica a existência de (1.1). De fato, se $f(x) = \sin(x)$, então (1.2) é zero, o que não ocorre em (1.1), pois esta diverge.

A seguir, enunciaremos algumas propriedades de integrais impróprias que serão utilizadas nesta dissertação. Como elas são conhecidas da Análise Real, omitiremos a maioria das demonstrações. Os teoremas 1.1.10, 1.1.11 são discutidos detalhadamente em [1], enquanto 1.1.12, 1.1.13 podem ser encontrados em [2], nossas referências principais.

Propriedade 1.1.8. Dada $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, considere a integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow a^+}} \int_\sigma^N f(x) \, dx.$$

Então, para todos b e c tais que $a < b < c < \infty$, podemos escrever

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx + \int_c^\infty f(x) \, dx.$$

Demonstração. Ao tomar os limites desta integral imprópria, não perdemos a generalidade considerando $a < \sigma < b$ e $c < N < \infty$. Também, a seguinte igualdade é sempre válida

$$\int_\sigma^N f(x) \, dx = \int_\sigma^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx + \int_c^N f(x) \, dx,$$

pois todas as integrais dessa igualdade são próprias. Então,

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) \, dx &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow a^+}} \int_\sigma^N f(x) \, dx = \\ \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow a^+}} \left[\int_\sigma^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx + \int_c^N f(x) \, dx \right] &= \\ \lim_{\sigma \rightarrow a^+} \int_\sigma^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_c^N f(x) \, dx &= \\ \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx + \int_c^\infty f(x) \, dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.1.9. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Se f é seccionalmente contínua e

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$$

converge uniformemente para todo $s \in E \subset \mathbb{C}$, então $F(s)$ é contínua em E .

Teorema 1.1.10. *Seja $f(x, t)$ seccionalmente contínua para $x \in [a, b]$ e $t \in [0, T]$. Se $\int_0^\infty f(x, t) dt$ converge uniformemente para todo $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b \int_0^\infty f(x, t) dt dx = \int_0^\infty \int_a^b f(x, t) dx dt.$$

Teorema 1.1.11. *Sejam $f(x, t)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ funções seccionalmente contínuas para $x \in [a, b]$ e $t \in [0, T]$. Se*

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, t) dt \quad (1.3)$$

é convergente e

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (1.4)$$

converge uniformemente, então

$$\frac{dF}{dx}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad (1.5)$$

para $x \in (a, b)$.

Teorema 1.1.12. *Considere a integral imprópria com o parâmetro y*

$$J(y) = \int_a^\infty g(x)h(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d. \quad (1.6)$$

Se $g(x)$ é absolutamente integrável em (a, ∞) , $h(x, y)$ e sua derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$ são contínuas e limitadas por $a \leq x < \infty$ e $c \leq y \leq d$, então a expressão (1.6) é uma função diferenciável de parâmetro y para $c \leq y \leq d$. Além disso temos que

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^\infty g(x) \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d.$$

Teorema 1.1.13. *Se a integral dupla*

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dx dy$$

é absolutamente convergente, isto é

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |f(x, y)| dx dy < \infty$$

então a integral $\int_{-\infty}^\infty f(x, y) dy$ existe para quase todo x e é uma função integrável em x .

Além disso, a integral é igual suas integrais iteradas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \right] dx$$

A seguir recordaremos aspectos da análise complexa tais como **funções analíticas** e **teorema dos resíduos**, fundamentais para esta dissertação.

Definição 1.1.14. *Sejam $f(z)$ uma função de variável complexa, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Se f é diferenciável em alguma vizinhança de z_0 , então f é analítica no ponto z_0 . Se f é diferenciável em todo ponto de S , então f é **analítica** em S .*

Observação 1.1.15. *É importante notar que diferenciabilidade é uma propriedade pontual, enquanto analiticidade é uma propriedade local.*

Definição 1.1.16. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, as equações*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

*são as **equações de Cauchy-Riemann** no ponto $z = x + iy$.*

Os teoremas a seguir exibem as condições necessárias e suficientes para uma função f ser analítica. Mais detalhes sobre estes teoremas podem ser encontradas em [8].

Teorema 1.1.17. *Se $f(z)$ é diferenciável num ponto z_0 , então satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em z_0 . Ou seja, se f é analítica em um conjunto aberto S , então f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em todo $z_0 \in S$.*

Teorema 1.1.18. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definidas num aberto S tal que $z_0 \in S$. Se as derivadas parciais de u e v existem, são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann numa vizinhança de z_0 , então f é analítica em z_0 .*

Teorema 1.1.19 (Teorema dos Resíduos de Cauchy). *Seja γ uma curva simples, fechada e orientada positivamente. Se f é analítica no interior de $\gamma - \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, então*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(z_j),$$

sendo $\text{Res}(z_j)$ o resíduo de $f(z)$ em $z = z_j, j = 1, \dots, k$.

1.2 Transformada de Laplace

Entre as ferramentas mais úteis para a resolução de equações diferenciais, sejam elas ordinárias (EDO) ou parciais (EDP), estão as transformadas integrais, ou seja, uma

relação da forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt,$$

sendo $K(s, t)$ uma função dada, chamada de **núcleo** da transformada e os limites de integração α e β também são dados, podendo ser do tipo $\pm\infty$. Esta expressão integral transforma a função f em uma outra função F , sua transformada. A partir de um problema envolvendo uma função f , a ideia é transformá-la na função F , em geral, mais simples. Assim resolvemos o problema para F e por meio de uma inversão, recuperamos a função desejada f .

Nesta dissertação, vamos trabalhar com os núcleos $K_1(s, t) = e^{-st}$ e $K_2(s, t) = e^{-ist}$, que são respectivamente os núcleos das transformadas de Laplace e de Fourier definidas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \\ &\text{e} \\ \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \hat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

Definição 1.2.1. *Sejam $f(t)$ uma função real ou complexa, definida no intervalo $[0, \infty[$ e s um parâmetro real ou complexo. Definimos a **transformada de Laplace** de f como*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt,$$

sempre que o limite existir. Neste caso, dizemos que a integral converge. Se o limite não existir, dizemos que a integral diverge e então a transformada de Laplace de f não existe.

Observação 1.2.2. *O símbolo $\mathcal{L}$ denota a Transformada de Laplace que age sobre a função $f = f(t)$ e gera a nova função $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.*

Definição 1.2.3. *Seja $f(t)$ conforme definição 1.2.1. Se*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} |e^{-st} f(t)| dt$$

*existe, então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é dita **absolutamente convergente**.*

Observação 1.2.4. *Se $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é absolutamente convergente, então quando $\tau \rightarrow \infty$*

$$\left| \int_{\tau}^{\tau'} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_{\tau}^{\tau'} |e^{-st} f(t)| dt \rightarrow 0$$

para todo $\tau' > \tau$.

Exemplo 1.2.5. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f(t) = \text{sen}(kt)$, $k \in \mathbb{R}$.

Solução. Supondo $\text{Re}(s) > 0$, temos por integração por partes que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\text{sen}(kt)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt \\
 &= \left. \frac{-e^{-st} \text{sen}(kt)}{s} \right|_{t=0}^\infty + \frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt \\
 &= \frac{k}{s} \left[\left. \frac{-e^{-st} \cos(kt)}{s} \right|_{t=0}^\infty - \frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt \right] \\
 &= \frac{k}{s} \left[\frac{1}{s} - \frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt \right] \\
 &= \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt.
 \end{aligned}$$

Comparando a primeira igualdade com a última do cálculo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{k^2}{s^2}\right) \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt &= \frac{k}{s^2} \\
 \int_0^\infty e^{-st} \text{sen}(kt) dt &= \frac{k}{k^2 + s^2}, \quad \text{Re}(s) > 0.
 \end{aligned}$$

■

A seguir, faremos considerações baseadas na “taxa de crescimento” de funções, uma vez que tem uma relação direta com a admissão de transformada de Laplace. Na definição da transformada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

quando tomamos $s > 0$ (ou $\text{Re}(s) > 0$) a integral convergirá desde que f não cresça rapidamente. Esse crescimento pode ser explicitado pela definição seguinte.

Definição 1.2.6. Uma função f tem **ordem exponencial** α quando existem constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que para algum $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.$$

Exemplo 1.2.7. A função $f(t) = e^{at} \text{sen}(t)$ tem ordem exponencial $a \in \mathbb{R}$.

Solução. De fato,

$$|e^{at} \text{sen}(t)| \leq |e^{at}| \leq M e^{at}, \quad t \geq 0 \text{ e } M = 1.$$

Exemplo 1.2.8. A função $f(t) = e^{t^2}$ não possui ordem exponencial α , para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Solução. Basta notar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{t^2}|}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(t-\alpha)} = \infty.$$
 ■

A seguir veremos condições suficientes para a existência da transformada de Laplace.

Teorema 1.2.9. Se f é contínua por partes em $[0, \infty)$ e tem ordem exponencial α , então a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}$ existe para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ e converge absolutamente.

Demonstração. Como f tem ordem exponencial α , então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ e $M_1 > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \quad t \geq t_0,$$

para algum $t_0 \geq 0$. Sendo f contínua por partes em $[0, t_0]$ temos que f é limitada. Logo, existe $M_2 > 0$ tal que,

$$|f(t)| \leq M_2, \quad 0 < t < t_0.$$

Como $e^{\alpha t}$ tem um mínimo positivo em $[0, t_0]$ podemos escolher uma constante M suficientemente grande tal que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t > 0.$$

Portanto, escrevendo $\operatorname{Re}(s) = x > \alpha$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |e^{-st} f(t)| dt &\leq M \int_0^\tau e^{-(x-\alpha)t} dt \\ &= \frac{M e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \Big|_0^\tau \\ &= \frac{M}{x-\alpha} - \frac{M e^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}. \end{aligned}$$

Tomando $\tau \rightarrow \infty$ temos

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \frac{M}{x-\alpha}. \quad (1.7)$$

Então, a transformada de Laplace converge absolutamente, desde que $\operatorname{Re}(s) > \alpha$. □

Exemplo 1.2.10. A função $f(t) = \cos(kt)$ é contínua em $[0, \infty)$ e tem ordem exponencial $\alpha = 0$. Logo, pelo teorema 1.2.9 existe a transformada de Laplace. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(kt)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Solução. Supondo $Re(s) > 0$, temos por integração por partes que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(kt)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt \\
&= \frac{e^{-st} \sin(kt)}{k} \Big|_{t=0}^\infty + \frac{s}{k} \int_0^\infty e^{-st} \sin(kt) dt \\
&= \frac{s}{k} \left[\frac{e^{-st} \cos(kt)}{-k} \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{se^{-st} \cos(kt)}{k} dt \right] \\
&= \frac{s}{k} \left[\frac{1}{k} - \frac{s}{k} \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt \right] \\
&= \frac{s}{k^2} - \frac{s^2}{k^2} \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt.
\end{aligned}$$

Comparando a primeira igualdade com a última do cálculo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{s^2}{k^2}\right) \int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt &= \frac{s}{k^2} \\
\int_0^\infty e^{-st} \cos(kt) dt &= \frac{s}{s^2 + k^2}, \quad Re(s) > 0.
\end{aligned}$$

■

Propriedade 1.2.11. *O operador de Laplace $\mathcal{L}$ é linear, isto é, se f_1 e f_2 admitem transformada de Laplace para $Re(s) > \alpha$ e $Re(s) > \beta$ respectivamente, então $c_1 f_1 + c_2 f_2$ admitem transformada de Laplace para $Re(s) > \max[\alpha, \beta]$ e*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}$$

para quaisquer constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. De fato, como a integração é um processo linear, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt = c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f_2(t) dt.$$

□

Observação 1.2.12. *Note que pelo mesmo motivo qualquer transformada integral é um operador linear.*

O exemplo a seguir, além de ser uma aplicação da transformada de Laplace, será utilizado no próximo capítulo.

Exemplo 1.2.13.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(At)}{t} dt = \frac{1}{2}, \quad A > 0.$$

Solução. Defina

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\text{sen}(yt)}{t} dt, \quad -B \leq y \leq B. \quad (1.8)$$

A ideia é “eliminar” o denominador para utilizarmos a teoria conhecida. Como $e^{-\alpha t}$ é absolutamente integrável em $(0, \infty)$ e $\frac{\text{sen}(yt)}{t}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\text{sen}(yt)}{t} \right) = \cos(yt)$ são contínuas e limitadas para $t \in (0, \infty)$ e $y \in [-B, B]$, pelo teorema 1.1.12 podemos diferenciar $J(y)$, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(y)}{dy} &= \frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\text{sen}(yt)}{t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\text{sen}(yt)}{t} \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(yt) dt. \end{aligned}$$

Logo, pelo exemplo 1.2.10

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \mathcal{L}\{\cos(yt)\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}, \quad \alpha > 0.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$J(y) = \int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx + J(0) = \text{arctg} \left(\frac{y}{\alpha} \right), \quad \alpha > 0.$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J(y) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(yt)}{t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{arctg} \left(\frac{y}{\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$$

Aí, no caso particular que $y = A > 0$, teremos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(At)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J(A) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

■

Finalizaremos essa seção provando que a transformada de Laplace é uma função analítica.

Teorema 1.2.14. *Se f é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e tem ordem exponencial α , então $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é uma função analítica para $\text{Re}(s) > \alpha$.*

Demonstração. Seja $s = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} (\cos(yt) - i \sin(yt)) f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} \cos(yt) f(t) dt + i \int_0^\infty -e^{-xt} \sin(yt) f(t) dt \\ &= u(x, y) + iv(x, y). \end{aligned}$$

Como $g(t) = t$ tem ordem exponencial existe $\delta > 0$, que pode ser tomado suficientemente pequeno de modo que $x - \alpha > \delta > 0$ tal que

$$|t| \leq e^{\delta t}.$$

Por hipótese f tem ordem exponencial α , logo existe M e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

Portanto, temos que

$$|t f(t)| \leq M e^{(\alpha+\delta)t}.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^\infty \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xt} \cos(yt) f(t)) dt \right| &= \left| \int_{t_0}^\infty (-t e^{-xt} \cos(yt)) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{t_0}^\infty t e^{-xt} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_{t_0}^\infty e^{-(x-\alpha-\delta)t} dt \\ &= \frac{M}{x - \alpha - \delta} e^{-(x-\alpha-\delta)t_0}. \end{aligned}$$

E então para $x > \alpha + \delta$, o lado direito pode ficar arbitrariamente pequeno tomando t_0 suficientemente grande, o que implica que a integral $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xt} \cos(yt) f(t)) dt$ converge uniformemente quando $\operatorname{Re}(s) > \alpha$. Analogamente, podemos mostrar que a integral $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} (-e^{-xt} \sin(yt) f(t)) dt$ converge uniformemente em $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.

Por causa da convergência uniforme e convergência absoluta de $\mathcal{L}\{f(t)\}$, pelo

Teorema 1.1.11, podemos diferenciar dentro da integral, isto é

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt} \cos(yt) f(t)) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-xt} \cos(yt) f(t) dt, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}(-e^{-xt} \sin(yt) f(t)) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-xt} \cos(yt) f(t) dt,\end{aligned}$$

e então $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$.

Por um caminho similar é possível mostrar que $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$. A continuidade dessas derivadas parciais segue do teorema 1.1.10 aplicado as funções $g(t) = -tf(t)$ e tomando a parte real e imaginária.

Então as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e $F(s) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica para $\text{Re}(s) > \alpha$. $\square$

1.3 Transformada de Fourier

A seguir, definiremos a transformada de Fourier. Como, neste trabalho, tais transformadas serão utilizadas apenas como ferramenta para a inversão da transformada de Laplace, destacaremos somente as propriedades fundamentais para o bom entendimento desta dissertação.

Definição 1.3.1. A *transformada exponencial de Fourier* de uma função $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é definida por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \hat{f}(\lambda),$$

desde que tais limites existam.

A definição acima, se comparada à transformada de Laplace, revela que a classe de funções Fourier-transformáveis é mais restrita que as funções Laplace-transformáveis. Isso acontece não somente pela diferença dos limites de integração, mas também porque o núcleo da Transformada de Laplace e^{-st} é muito mais útil para a convergência da integral imprópria do que o da de Fourier $e^{-i\lambda t}$. Por exemplo, se $f(t) = 1$, f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$ e tem ordem exponencial 0, logo, pelo teorema 1.2.9 a transformada de Laplace existe e é dada por

$$\int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0.$$

Por outro lado, a transformada de Fourier de $f(t) = 1$ não existe, logo, não converge para uma função usual. Pode-se mostrar que a transformada de Fourier de $f(t) = 1$ converge para um caso especial de função generalizada o qual não entraremos em detalhes por fugir do escopo desta dissertação.

Teorema 1.3.2. *Se $f(t)$ é absolutamente integrável, então a transformada de Fourier $\hat{f}(\lambda)$ existe.*

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\lambda)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda t}| |f(t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $f(t)$ é absolutamente integrável. □

Exemplo 1.3.3. *Vamos determinar a transformada de Fourier de*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq a \\ 0 & \text{se } |t| > a. \end{cases}$$

Solução. Aplicando diretamente a definição

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\lambda t} dt \\ &= \int_{-a}^a \cos(-\lambda t) dt + i \int_{-a}^a \sin(-\lambda t) dt \\ &= 2 \int_0^a \cos(\lambda t) dt. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, então $\hat{f}(0) = 2a$.

Caso $\lambda \neq 0$, então

$$\hat{f}(\lambda) = 2 \int_0^a \cos(\lambda t) dt = \frac{2}{\lambda} \sin(\lambda t) \Big|_{t=0}^{t=a} = \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda}.$$

Resumindo, a transformada de Fourier de f é a função definida por

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} \frac{2 \sin(a\lambda)}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 2a & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

■

No próximo capítulo veremos que, ao contrário da transformada de Laplace, a transformada de Fourier possui uma fórmula simples e “simétrica” para a sua transformada inversa. Para o leitor interessado em mais informações sobre a teoria da transformada de Fourier, indicamos o livro [5], o qual desenvolve uma teoria mais completa à respeito de tais transformadas. Em tal livro, assim como em outras referências, o autor define a transformada de Fourier um pouco diferente da utilizada neste trabalho. Tal escolha não interfere no desenvolvimento da teoria, desde que se utilize o par escolhido levando em consideração que as constantes que multiplicam as integrais resultem em $\frac{1}{2\pi}$. Por exemplo, é comum encontrarmos o seguinte par para transformada de Fourier e sua inversa:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda.$$

Capítulo 2

Transformadas Inversas

Neste capítulo, estudaremos as transformadas inversas de Laplace e Fourier. Começaremos pela inversão de Fourier, pois a mesma será utilizada para formalizar a inversão da transformada de Laplace.

2.1 Fórmula de Inversão da Transformada de Fourier

Para os propósitos deste trabalho, restringiremos ainda mais a classe de funções que admitem transformada de Fourier, conforme ficará claro no próximo teorema. Antes, porém, faremos alguns resultados preparatórios para a fórmula de inversão.

Lema 2.1.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas num intervalo fechado $[a, b]$ então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Demonstração. Dividindo $[a, b]$ em n subintervalos temos que

$$[a, b] = [x_0 = a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n = b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}].$$

Por hipótese $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas em cada $[x_i, x_{i+1}]$. Além disso, $f(x_i^+)$, $f'(x_i^+)$, $f(x_{i+1}^-)$ e $f'(x_{i+1}^-)$ existem e são finitos para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Então, podemos reescrever

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin(\lambda x) \, dx.$$

Basta mostrar que para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0.$$

Uma vez que f e f' são contínuas em $[x_i, x_{i+1}]$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$, podemos fazer a integração por partes em cada subintervalo de $[a, b]$. Portanto, dado $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, então

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = -\frac{f(x) \cos(\lambda x)}{\lambda} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\lambda} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) \cos(\lambda x) dx.$$

Como $f(x)$ e $f'(x)$ são limitadas em $[a, b]$, isto é, existem M_1 e M_2 tais que $|f(x)| \leq M_1$, $|f'(x)| \leq M_2$, então para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \leq \frac{2M_1}{\lambda} + \frac{M_2(x_{i+1} - x_i)}{\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Portanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0.$$

□

Lema 2.1.2. *Se f é absolutamente integrável então a seguinte identidade é válida para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi d\lambda = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x-\xi) d\xi d\lambda. \quad (2.1)$$

Demonstração. Utilizando a identidade de Euler:

$$e^{i\lambda(x-\xi)} = \cos(\lambda(x-\xi)) + i \operatorname{sen}(\lambda(x-\xi))$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x-\xi)) d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\lambda(x-\xi)) d\xi.$$

Substituindo este resultado no primeiro membro de (2.1) temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\lambda(x - \xi)) d\xi \right] d\lambda.$$

Pelo teorema 1.1.13, podemos trocar a ordem de integração, obtendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\lambda + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\lambda(x - \xi)) d\lambda \right] d\xi.$$

Considerando $\cos(\lambda(x - \xi))$ e $\operatorname{sen}(\lambda(x - \xi))$ funções de λ , podemos utilizar as propriedades de integração imprópria para função par e ímpar como segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\lambda &= 2 \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\lambda \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\lambda(x - \xi)) d\lambda &= 0. \end{aligned}$$

E mudando novamente a ordem de integração concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\lambda + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen}(\lambda(x - \xi)) d\lambda \right] d\xi \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda(x - \xi)) d\xi d\lambda. \end{aligned}$$

□

O teorema a seguir fornece a fórmula para a inversão de transformada de Fourier.

Teorema 2.1.3. *Suponha que f e f' sejam seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}$. Se f é absolutamente integrável em $\mathbb{R}$, então, nos pontos x onde $f(x)$ é contínua:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda, \quad (2.2)$$

onde

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \xi} f(\xi) d\xi$$

é a transformada de Fourier de f . Nos pontos x onde $f(x)$ é descontínua :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi d\lambda = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Demonstração. Pelo lema 2.1.2, temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi d\lambda = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi d\lambda.$$

Utilizando o teorema 1.1.10 podemos calcular

$$\begin{aligned} \int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_0^A \cos \lambda(x - \xi) d\lambda d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\text{sen}(A(\xi - x))}{\xi - x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + x) \frac{\text{sen}(At)}{t} dt. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + x) \frac{\text{sen}(At)}{t} dt = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

provando:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t + x) \frac{\text{sen}(At)}{\pi t} dt = \frac{1}{2}f(x^+) \quad (2.3)$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(t + x) \frac{\text{sen}(At)}{\pi t} dt = \frac{1}{2}f(x^-). \quad (2.4)$$

Demonstremos apenas (2.3), pois (2.4) é análogo. Utilizando o exemplo 1.2.13 podemos escrever

$$\frac{f(x^+)}{2} = f(x^+) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(At)}{\pi t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x^+) \frac{\text{sen}(At)}{t} dt. \quad (2.5)$$

Agora, calculemos a diferença da integral em (2.3) com (2.5)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t + x) \frac{\text{sen}(At)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x^+) \frac{\text{sen}(At)}{t} dt \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t + x) - f(x^+)}{t} \text{sen}(At) dt. \quad (2.7)$$

Desta forma, para mostrar (2.3) é suficiente mostrar que, quando $A \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t + x) - f(x^+)}{t} \text{sen}(At) dt \rightarrow 0.$$

Vamos adotar a notação

$$I_{a,b} \doteq \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t + x) - f(x^+)}{t} \text{sen}(At) dt$$

e dividir esta integral na seguinte soma

$$I_{0,\infty} = I_{0,\delta} + I_{\delta,T} + I_{T,\infty}$$

para obter

$$|I_{0,\infty}| \leq |I_{0,\delta}| + |I_{\delta,T}| + |I_{T,\infty}|.$$

Seja $\epsilon > 0$, mostremos que:

1. Para todo A , existe um $\delta > 0$, tal que $|I_{0,\delta}| < \frac{\epsilon}{3}$;
2. Para todo $A \geq 1$ existe T , tal que $|I_{T,\infty}| < \frac{\epsilon}{3}$;
3. Para todo $A \geq 1$ temos $|I_{\delta,T}| < \frac{\epsilon}{3}$

para concluir que $|I_{0,\infty}| < \epsilon$.

Prova de 1: Pela definição de derivada lateral existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $t \in (0, \delta_1)$

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} - f'(x^+) \right| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \right| < 1 + |f'(x^+)|.$$

Tomando $\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\pi\epsilon}{3(1 + |f'(x^+)|)} \right\}$ e utilizando que $|\sin(At)| \leq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} |I_{0,\delta}| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\delta \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \sin(At) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left| \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \right| |\sin(At)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left| \frac{f(t+x) - f(x^+)}{t} \right| dt < \frac{\delta}{\pi} (1 + |f'(x^+)|). \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$|I_{0,\delta}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Prova de 2: Considere $T > 1$. Fazendo a mudança de variável $\xi = At$, usando a desigualdade $\frac{|\sin(At)|}{|t|} < \frac{1}{T}$, para $t \in [T, \infty)$ e chamando $M = \int_T^\infty |f(x+t)| dt$ (pois f é absolutamente integrável), temos

$$\begin{aligned} |I_{T,\infty}| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_T^\infty f(x+t) \frac{\sin(At)}{t} dt - \frac{1}{\pi} f(x^+) \int_T^\infty \frac{\sin(At)}{t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_T^\infty f(x+t) \frac{\sin(At)}{t} dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| f(x^+) \int_T^\infty \frac{\sin(At)}{t} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_T^\infty |f(x+t)| \left| \frac{\sin(At)}{t} \right| dt + \frac{1}{\pi} |f(x^+)| \left| \int_{AT}^\infty \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \right| \\ &\leq \frac{M}{\pi T} + \frac{1}{\pi} |f(x^+)| \left| \int_{AT}^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right|. \end{aligned}$$

Como a segunda integral da última expressão é convergente, pois pelo exemplo 1.2.13 $\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} = 0$, basta considerar $T > \frac{6M}{\pi\epsilon}$ tal que $\left| \int_{AT}^\infty \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \right| < \frac{\pi\epsilon}{6|f(x^+)|}$, concluindo assim que

$$|I_{T,\infty}| < \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Prova de 3: Pelas hipóteses do teorema, podemos concluir que $\frac{f(t+x) - f(x^+)}{t}$ é seccionalmente contínua para todo $x \in [\delta, T]$, onde, de acordo com o lemma de Riemann-Lebesgue 2.1.1 a integral $I_{\delta,T}$ tende a zero quando $A \rightarrow \infty$. Logo

$$|I_{\delta,T}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

□

2.2 Fórmula de Inversão da Transformada de Laplace

Nessa seção exibiremos e provaremos a fórmula de inversão para a transformada de Laplace. É com base nela que os diversos livros de cálculo diferencial e integral constroem as famosas tabelas de transformadas inversas, tão úteis na resolução de equações diferenciais.

Como utilizaremos a fórmula de inversão da transformada de Fourier para tal fim, consideraremos uma extensão das funções Laplace-transformáveis, ou seja, para uma função contínua f em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial α , colocaremos $f(t) = 0$ para $t < 0$. Assim para $s = x + iy$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-iyt} (e^{-xt} f(t)) dt = F(x, y).$$

Nesta forma, $F(x, y)$ representa a transformada de Fourier da função $g(t) = e^{-xt} f(t)$. Finalmente, estamos aptos a enunciar o teorema de inversão da transformada de Laplace, conhecida também como **Fórmula de Bromwich (Mellin-Fourier)**.

Teorema 2.2.1. *Suponha que f seja uma função contínua em $[0, \infty)$, com $f(t) = 0$, $t < 0$, e de ordem exponencial α . Se f' é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s) ds \doteq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{ts} F(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Demonstração. Como f é contínua em $[0, \infty)$, $f(t) = 0$ para $t < 0$, e f tem ordem

exponencial α , então pelo Teorema 1.2.9, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ converge absolutamente, isto é,

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)| dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-xt}|f(t)| dt < \infty, \quad \operatorname{Re}(s) = x > \alpha.$$

Isto garante que $g(t) = e^{-xt}f(t)$ é absolutamente integrável em $\mathbb{R}$. Sendo assim, podemos utilizar o teorema 2.1.3, aplicado à função contínua $g(t)$, obtendo

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} F(x, y) dy.$$

Desta forma, temos a seguinte representação para f ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{iyt} F(x, y) dy.$$

Transformando a fórmula anterior para a variável $s = x + iy$, temos que $dy = (1/i) ds$ e então, f é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s) ds = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{ts} F(s) ds.$$

□

Observação 2.2.2. Na fórmula de Bromwich, a integração é dada sobre a linha vertical $x = \operatorname{Re}(s) > \alpha$, chamada na literatura de **linha de Bromwich**.

Podemos calcular a integral acima utilizando os métodos de integração de contornos vistos em qualquer curso de funções analíticas. Assim, seja C_R a semicircunferência de raio R centrado na origem de extremidades A e E . Com base nele, considere o **contorno de Bromwich** $\Gamma_R = ABCDEA$ conforme a figura abaixo:

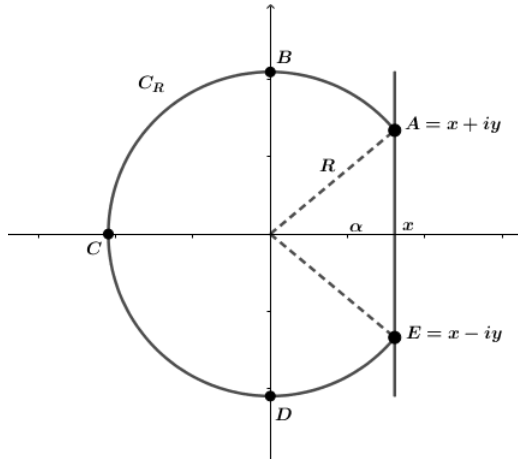


Figura 2.1: Contorno de Bromwich

Então para $s \in \Gamma_R$ temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{ts} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{EA} e^{ts} F(s) ds. \quad (2.8)$$

Como $F(s)$ é analítica para $Re(s) = x > \alpha$, todas as singularidades de $F(s)$ devem estar a esquerda da linha de Bromwich. Assim, tomando $R > 0$ suficientemente grande, de forma a englobar todas as singularidades de $F(s)$, podemos utilizar o teorema dos resíduos no lado esquerdo da igualdade (2.8), obtendo

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{ts} F(s) ds, \quad (2.9)$$

onde $\text{Res}(z_k)$ são os resíduos da função $e^{ts} F(s)$ em $s = z_k$.

A seguir veremos um lema que permitirá reescrever a equação (2.9) de maneira mais simples.

Lema 2.2.3. *Seja s pertencente a C_R . Se existe $p > 0$ tal que $F(s)$ satisfaz*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^p},$$

para todo $R > 0$, então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0.$$

Demonstração. Dado $s \in C_R$, temos que $s = Re^{i\theta}$ e $|e^{ts}| = e^{tR \cos(\theta)}$. Por hipótese, existe $p > 0$ tal que $|F(s)| \leq \frac{M}{R^p}$ para todo R . Portanto, na semicircunferência BCD ,

$$\left| \int_{BCD} e^{st} F(s) ds \right| \leq \int_{BCD} |e^{st}| |F(s)| |ds| \leq \frac{M}{R^{p-1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta.$$

Fazendo $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ resulta em

$$\left| \int_{BCD} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{M}{R^{p-1}} \int_0^\pi e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi = \frac{2M}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin(\varphi)} d\varphi,$$

sendo a última igualdade consequência de $\sin(\varphi)$ ser simétrica em $\frac{\pi}{2}$ para $0 \leq \varphi \leq \pi$. Para encontrar um limite superior para esta última integral, note que para $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin(\varphi) < \frac{2}{\pi}\varphi$, isto é, para $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ temos que o gráfico da função $g(\varphi) = \sin(\varphi)$ está acima da função $h(\varphi) = \frac{2}{\pi}\varphi$, então, como a exponencial é uma função crescente, temos

que

$$\begin{aligned} \left| \int_{BCD} e^{ts} F(s) ds \right| &\leq \frac{2M}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} d\varphi \\ &= -\frac{2M}{R^{p-1}} \frac{\pi}{2Rt} \left[e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{M\pi}{R^p t} (1 - e^{-Rt}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Sobre o arco AB , temos que, para todo $t > 0$ $|e^{ts}| \leq e^{tx} = c$ e o comprimento do arco AB , $\ell(AB)$ fica limitado entre o eixo vertical e a linha de Bromwich quando $R \rightarrow \infty$, assim

$$\left| \int_{AB} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \frac{cM\ell(AB)}{R^p} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Analogamente,

$$\left| \int_{DE} e^{ts} F(s) ds \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Por fim, chegamos a conclusão:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0.$$

□

Com o auxílio do lema 2.2.3 podemos provar um teorema que simplifica a fórmula de Bromwich para uma versão com resíduos. Doravante, iremos assumir que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ admite uma quantidade finita de singularidades no conjunto $(-\infty, \alpha] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 2.2.4. *Suponha que f seja contínua em $[0, \infty)$ com $f(t) = 0$, $t < 0$, e de ordem exponencial α . Se f' é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, para $\operatorname{Re}(s) = x > \alpha$, satisfaz a condição de crescimento*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^p}, \quad p > 0,$$

para todo $|s|$ suficientemente grande e algum p , então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s) ds \doteq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{ts} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k),$$

onde $\operatorname{Res}(z_k)$ é o resíduo da função $e^{ts} F(s)$ no ponto $s = z_k$.

Demonstração. Basta utilizar o lema 2.2.3 junto com a fórmula 2.9 para chegar no resultado acima. □

Exemplo 2.2.5. *Vamos calcular a transformada inversa de $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}$.*

Solução.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{a}{(s + ai)(s - ai)} \\ e^{ts} F(s) &= e^{ts} \frac{a}{(s + ai)(s - ai)}. \end{aligned}$$

Assim, $e^{ts} F(s)$ tem pólo simples em $z_1 = ai$ e $z_2 = -ai$, então

$$\begin{aligned} \text{Res}(z_1) &= \text{Res}(ai) = \lim_{s \rightarrow ai} (s - ai) e^{ts} \frac{a}{(s + ai)(s - ai)} = \frac{e^{ait}}{2i} \\ \text{Res}(z_2) &= \text{Res}(-ai) = \lim_{s \rightarrow -ai} (s + ai) e^{ts} \frac{a}{(s + ai)(s - ai)} = -\frac{e^{-ait}}{2i} \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.2.4

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}(z_k),$$

portanto,

$$f(t) = \text{Res}(z_1) + \text{Res}(z_2) = \frac{e^{ait}}{2i} - \frac{e^{-ait}}{2i} = \frac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i} = \text{sen}(at).$$

■

Podemos então constatar que, de fato, a transformada inversa de $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ é $f(t) = \text{sen}(at)$, como esperado, conforme 1.2.5, enfatizando a utilidade da fórmula de Bromwich, uma vez que pode ser calculada utilizando a teoria dos resíduos, muito útil no estudo das funções analíticas. Assim como o exemplo anterior, estes exemplos relativamente simples vão preenchendo as famosas tabelas de transformadas de Laplace, muito utilizadas nos cursos de cálculo e construídas com base nos conceitos trabalhados na presente dissertação.

Exemplo 2.2.6. Calculemos $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-a)} \right\}$.

Solução. Primeiramente, note que $|F(s)| \leq 2/|s|^2$ quando $|s| \geq 2|a|$. Como $e^{ts} F(s)$ tem pólo simples em $s = 0$ e $s = a$, então calculando os resíduos

$$\text{Res}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s e^{ts} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{ts}}{s-a} = -\frac{1}{a},$$

$$\text{Res}(a) = \lim_{s \rightarrow a} (s-a) e^{ts} F(s) = \lim_{s \rightarrow a} \frac{e^{ts}}{s} = \frac{e^{at}}{a}.$$

temos então

$$f(t) = \frac{1}{a}(e^{at} - 1).$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] SCHIFF, Joel L. *The Laplace transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [2] JERRI, Abdul. *Integral and discrete transforms with applications and error analysis*. CRC Press, 1992.
- [3] CHURCHILL, Ruel Vance. *Operational mathematics*. 1972.
- [4] AGARWAL, Ravi P.; O'REGAN, Donal. *Ordinary and partial differential equations: with special functions, Fourier series, and boundary value problems*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [5] JUNIOR, Rafael Iorio; IORIO, Valéria de Magalhães. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [6] DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise I*. Editora Universidade de Brasília, 1975.
- [7] BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis complexas e aplicações*. McGraw Hill Brasil, 2015.
- [8] AGARWAL, Ravi P.; PERERA, Kanishka; PINELAS, Sandra. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.