UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA
E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

ELIANE SANTANA DE SOUZA OLIVEIRA

ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UM MODELO DIDÁTICO ALTERNATIVO INTEGRADO AO GEOGEBRA

Salvador
2020

ELIANE SANTANA DE SOUZA OLIVEIRA

ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UM MODELO DIDÁTICO ALTERNATIVO INTEGRADO AO GEOGEBRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia – UFBA e Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Professor Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientador: Professor Dr. Laerte Silva da Fonseca.

Salvador
2020

SIBI/UFBA/Faculdade de Educação – Biblioteca Anísio Teixeira

Oliveira, Eliane Santana de Souza.
Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao GeoGebra / Eliane Santana de Souza Oliveira. - 2020.
322 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientador: Prof. Dr. Laerte Silva da Fonseca.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2020.
Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana.

1. Funções trigonométricas - Estudo e ensino (Superior). 2. GeoGebra (Programa de computador). 3. Matemática - Estudo e ensino (Superior). 4. Didática. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Fonseca, Laerte Silva da. III. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. IV. Universidade Estadual de Feira de Santana. V. Título.

CDD 516.24 – 23. ed.

ELIANE SANTANA DE SOUZA OLIVEIRA

ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR MEIO DE UM MODELO DIDÁTICO ALTERNATIVO INTEGRADO AO GEOGEBRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia – UFBA e Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Aprovada em: 28/08/2020

Banca Examinadora

Professor Dr. Luiz Márcio Santos Farias (UFBA)
Orientador

Professor Dr. Laerte Silva da Fonseca (IFS)
Coorientador

Professora Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira (UFBA)
Componente interna

Professor Dr. José Luís de Paula Barros Silva (UFBA)
Componente interno

Professora Dra. Corine Castela (Université de Rouen)
Componente externa

Professor Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti (UFPE)
Componente externo

Professor Dr. José Messildo Viana Nunes (UFPA)
Componente externo

À minha Mãe, Maria Zélia, e ao meu esposo, Glauco, pelo incentivo e amor em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pela saúde e coragem para enfrentar todos os obstáculos que surgiram ao longo da caminhada até chegar aqui.

À minha mãe, pelo amor e incentivo, desde criança, que o estudo é o caminho para o sucesso. O que me fez progredir na carreira acadêmica em busca de uma vida melhor.

Ao meu pai, pelo amor e apoio durante toda a minha vida.

Às minhas irmãs, pelo amor e força em todos os momentos.

Ao meu esposo, Glauco, pelo amor e compreensão durante todos os momentos de ausência e dedicação, necessários para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, o Professor Doutor Luiz Márcio, por ter acreditado em mim, me estendido a mão e oportunizado o enveredar pelos caminhos da pós-graduação, partilhando seus conhecimentos e dedicando tempo e paciência para meu crescimento acadêmico.

Ao Professor Doutor Laerte Fonseca, por ter aceitado me coorientar, auxiliando-me nos momentos de dúvidas e incertezas, com muita paciência e disponibilidade para meu desenvolvimento acadêmico.

Às Professoras Doutoras Andréia Pereira Oliveira e Corine Castela, e aos Professores Doutores José Dilson Beserra Cavalcanti, José Luís de Paula Barros Silva e José Messildo Viana Nunes por aceitarem o convite para participação na banca, contribuindo de forma significativa para o aprimoramento do trabalho.

Aos Professores do Programa PPGEFHC, pela valiosa colaboração em minha pesquisa.

Aos colegas do grupo de pesquisa NIPEDICMT (Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências e Tecnologia) pelas contribuições realizadas.

Aos amigos do grupo #vamosacabarlogocomisso pelas palavras de apoio e estímulo nos momentos de angústias e preocupações.

Aos meus alunos da UEFS que participaram de maneira voluntária da pesquisa, com muita dedicação e presteza.

Muito obrigada a todos, pelo suporte e auxílio em meu crescimento acadêmico!

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar como um modelo didático alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno. Para alcançá-lo, iremos contemplar aspectos epistemológicos sobre as funções seno e cosseno; analisar, baseados em um Modelo Praxeológico de Referência – MPR, como o modelo dominante apresenta o ensino de funções seno e cosseno; integrar o GeoGebra para o ensino das funções seno e cosseno; modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos para o estudo das funções referidas; e analisar efeitos de uma nova configuração didática a partir de ambientes tecnológicos para o ensino e aprendizagem de funções seno e cosseno. A presente pesquisa, se inscreve nos trabalhos atuais desenvolvidos no seio da Teoria Antropológica do Didático – TAD de Yves Chevallard e tendo como metodologia o Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. O contexto da pesquisa engloba alunos do 1º semestre do curso de licenciatura em matemática da disciplina de Pré-cálculo. A análise da evolução do conceito no campo trigonométrico, revelou a perda da razão de ser no ensino e aprendizagem das funções em questão, o que, consequentemente, pode influenciar nas dificuldades dos estudantes com o conteúdo citado. Desse modo, através do modelo dominante evidenciado com as condições e restrições, utilizamos um Modelo Epistemológico/Praxeológico de Referência – MPR, com base no quadro teórico empreendido, a fim de instituir o nosso PEP, por intermédio de um dispositivo para o estudo de funções seno e cosseno, integrado ao GeoGebra, por meio de fenômenos físicos periódicos. Os resultados apontam que a integração do GeoGebra, a partir de um PEP para modelação de fenômenos periódicos, permitiu que os licenciandos em matemática construíssem sistemas didáticos para o estudo das funções seno e cosseno, de maneira a resgatar a razão de ser desse objeto matemático, integrando o modelo circular com o modelo oscilatório. Ressaltamos que o estudo, por meio de investigação, possibilitou a reconstrução das praxeologias matemáticas e didáticas, propiciando que os licenciandos integrassem o ambiente papel e lápis com o GeoGebra, tendo, assim, maior predileção pela dialética de perguntas e respostas para construção das suas possíveis práticas enquanto futuros professores.

Palavras-chave: Funções seno e cosseno. Teoria Antropológica do Didático. Percurso de Estudo e Pesquisa. GeoGebra.

ABSTRACT

The aim in this research is to analyze how an alternative didactic model using GeoGebra favors the study of sine and cosine functions. To achieve this goal, one will: analyze epistemological aspects about sine and cosine functions; one will analyze based on a Praxological Reference Model-PRM, showing as the dominant model presents the teaching of sine and cosine functions; integrate GeoGebra for teaching sine and cosine functions; mathematically model periodic physical phenomena for the study of sine and cosine functions. We will also analyze the effects of a new didactic configuration from technological environments for teaching-learning process of sine and cosine functions. The present research is part of the current works developed within the Anthropological Theory of Didactics - TAD by Yves Chevallard and using the Study and Research Pathway - PEP as methodology. The context of this research encompasses students of the 1st semester of mathematics undergraduate course in Precalculus discipline. The analysis of the evolution of the concept in the trigonometric field revealed the loss of the raison d'être of the teaching and learning sine and cosine functions, which consequently can influence the difficulties of students with the related content. Thus, through the dominant model revealed with the conditions and restrictions, we used an Epistemological/Praxological Model of Reference - PRM based on the theoretical framework used in order to establish our PEP, through a device for the study of sine and cosine, integrated with GeoGebra, through periodic physical phenomena. The results reveal that the integration of GeoGebra from a PEP for modeling periodic phenomena allowed undergraduate mathematics students to build didactic systems for the study of sine and cosine functions, in order to retrieve the raison d'être of this mathematical object, integrating the circular model with the oscillatory model. One emphasizes that the study through investigation allowed the reconstruction of mathematical and didactic praxologies, allowing the students to integrate the paper and pencil environment with GeoGebra, and thus having a greater predilection for the dialectic of questions and answers for the construction of their possible practices as future teachers.

Keywords: Sine and Cosine Functions. Anthropological Theory of Didactics. Study and Research Path. GeoGebra.

RESUMÉ

L'objectif de cette recherche est d'analyser comment un modèle didactique alternatif utilisant GeoGebra favorise l'étude des fonctions sinus et cosinus. Pour y parvenir, nous examinerons les aspects épistémologiques des fonctions sinus et cosinus; analyser, à partir d'un modèle de référence praxéologique - MPR, comment le modèle dominant présente l'enseignement des fonctions sinus et cosinus; intégrer GeoGebra pour l'enseignement des fonctions sinus et cosinus; modéliser mathématiquement des phénomènes physiques périodiques pour étudier les fonctions référencées; et d'analyser les effets d'une nouvelle configuration didactique à partir d'environnements technologiques pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions sinus et cosinus. La présente recherche fait partie des travaux en cours développés dans le cadre de la Théorie anthropologique de la didactique - TAD par Yves Chevallard et utilisant le Chemin d'étude et de recherche - PEP comme méthodologie. Le contexte de recherche englobe les étudiants du 1er semestre du cursus en mathématiques dans la discipline Precalculus. L'analyse de l'évolution du concept dans le domaine trigonométrique, a révélé la perte de la raison d'être dans l'enseignement et l'apprentissage des fonctions en question, ce qui, par conséquent, peut influencer les difficultés des étudiants avec le contenu mentionné. Ainsi, à travers le modèle dominant mis en évidence avec les conditions et les restrictions, nous utilisons un modèle de référence épistémologique / praxéologique - MPR, basé sur le cadre théorique entrepris, afin d'établir notre PEP, à travers un dispositif d'étude des fonctions sinus et cosinus, intégrés à GeoGebra, à travers des phénomènes physiques périodiques. Les résultats montrent que l'intégration de GeoGebra, basée sur un PEP pour la modélisation de phénomènes périodiques, a permis aux étudiants de premier cycle en mathématiques de construire des systèmes didactiques pour l'étude des fonctions sinus et cosinus, afin de récupérer la raison d'être de cet objet mathématique, intégrer le modèle circulaire au modèle oscillatoire. Nous soulignons que l'étude, par l'investigation, a rendu possible la reconstruction de praxéologies mathématiques et didactiques, permettant aux étudiants de premier cycle d'intégrer l'environnement papier et crayon avec GeoGebra, ayant ainsi une plus grande prédilection pour la dialectique des questions et réponses pour la construction de leur possible pratiques en tant que futurs enseignants.

Mots clés: fonctions sinus et cosinus. Théorie anthropologique de la didactique. Cours d'étude et de recherche. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DCCM	Diretrizes Curriculares Para os Cursos de Matemática
EDC	Engenharia Didática
EM	Ensino Médio
ES	Ensino Superior
LD	Livro Didático
LPC	Livro de Pré-cálculo
MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MPD	Modelo Praxeológico Dominante
MPR	Modelo Praxeológico de Referência
NFC	Níveis de Funcionamento do Conhecimento
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OMC	Organização Matemática do Ciclo Trigonométrico Integrado às Funções Seno e Cosseno
OME	Organização Matemática Exploratória
OMI	Organização Matemática Intuitiva
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PPCLM	Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UESC	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UNIAM	Universidade Anhanguera

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, é tida como uma das disciplinas mais difíceis para os estudantes (SILVEIRA; TEIXEIRA JUNIOR, 2015). Essa dificuldade vem perdurando nos processos de ensino e de aprendizagem e tem refletido nos resultados das avaliações de larga escala, como a Prova Brasil e a Provinha Brasil, as quais evidenciam um nível baixo em relação ao desempenho dos alunos na referida matéria. A avaliação do PISA reforça essa situação ao mostrar, em seu relatório de desempenho dos países, na avaliação de 2015, que, dos 70 participantes, o Brasil ocupou entre a 66ª posição em matemática (OECD, 2015).

A complexidade no desempenho em matemática nos faz refletir sobre o processo de ensino e de aprendizagem de matemática no país. A partir da minha experiência pessoal enquanto professora da Educação Básica e Ensino Superior, tenho percebido que alguns conteúdos matemáticos são considerados pelos educandos como mais difíceis; um destes são as funções trigonométricas.

Nesse contexto, comecei a investigar, por meio de um questionário diagnóstico, em todo início de semestre, quais conteúdos da Educação Básica apresentavam aos licenciandos do primeiro semestre mais dificuldades; o mais citado eram as “funções trigonométricas”.

Assim, meu interesse de pesquisa se voltou ao referido tema. Ao ampliar os estudos, observamos que alguns trabalhos, como os de Fonseca (2015; 2010), Pedroso (2012), Coloneze (2012) e Costa (1997), indicam que os alunos apresentam dificuldades em trigonometria e em funções trigonométricas, o que pode estar relacionado à forma com que se trabalha o conteúdo – muitas vezes tratado de uma maneira que não agrega sentido para os estudantes, de modo tradicional, sem diferentes metodologias para o ensino e com ausência de correlação dos assuntos com o cotidiano dos educandos.

Pedroso (2012), aponta que os alunos de cursos da área de exatas entram no nível superior sem compreender as funções seno e cosseno, o que acaba influenciando em seu desempenho nas disciplinas que exigem o conteúdo aludido.

Além disso, Fonseca (2015) e Nasser, Sousa e Torraca (2012), afirmam que lacunas em matemática no Ensino Básico, como em trigonometria e em funções trigonométricas, podem influenciar no desempenho em disciplinas do Ensino Superior, causando evasões e repetências.

Fonseca (2010) apresenta em sua obra questionamentos em busca da compreensão dos problemas vinculados ao ensino e à aprendizagem em trigonometria, tais como os relacionados à forma ensinada, aos recursos utilizados, ao perfil dos estudantes, dentre outros fatores.

Loeng (2019), em seu trabalho no contexto da França e Cambodge, indica que estudantes do ensino secundário (equivalente ao nosso Ensino Médio) e alguns professores possuem dificuldades em entender a trigonometria e as funções trigonométricas.

Considerando as funções trigonométricas, surgem inquietações do tipo: “Como ensinar funções seno e cosseno para o público de alunos atuais (que vivem em uma geração tecnológica)? Será que estudar as funções seno e cosseno, com um olhar investigativo, poderá promover um melhor entendimento?”.

Expandindo as questões a respeito do estudo das funções trigonométricas, em especial das funções seno e cosseno, que são as circulares básicas, temos os seguintes questionamentos: “O que ensinar sobre funções seno e cosseno? Como estudar e ensinar tais funções? Por que estudar funções seno e cosseno?”. Temos aqui, a partir desses questionamentos, o que Farias, Carvalho & Teixeira (2018) chama de indícios do problema didático da exploração de conceitos nas praxeologias institucionais na Educação Básica. Reformulando, temos como problema didático “como desenvolver praxeologias matemáticas para o estudo das funções seno e cosseno de forma efetiva?” Nosso problema didático está relacionado com incompletude da atividade institucional no domínio de um problema didático. E que podemos associar a alguns fenômenos didáticos.

Um desses fenômenos, é o que Farias (2010) e Farias *et al.* (2015) denomina de vazio didático, o qual refere-se à ausência de um alicerce para o professor em seu período de formação para embasar suas práticas, instaurando-se assim o vazio didático. Fundamentados nessas indagações e nesse fenômeno, temos um problema didático vinculado a um saber matemático a ser ensinado e de que forma é abordada a construção desse saber ao ser ensinado. Chamamos de problema didático baseados na concepção de Farras, Bosch e Gáscon (2013), Bosch e Gascón (2010) e Lucas (2010), os quais discutem esses problemas no âmbito educacional caracterizados por um fenômeno pedagógico que denominam de ausência/perda da razão de ser, sendo esse um segundo fenômeno a ser considerado.

Assim, temos como hipótese de pesquisa: “Existem aspectos epistemológicos do saber que provocam restrições e/ou condições no desenvolvimento da prática institucional sobre o estudo de funções seno e cosseno; Restrições institucionais implícitas limitam o surgimento de estratégias distintas para o estudo de funções seno e cosseno”.

Desse modo, a partir do problema didático levantado e das hipóteses de pesquisa apresentadas, consideramos o que temos sobre função seno e cosseno levantadas em nosso modelo dominante e analisamos nessas instituições o que impedem e o que permitem para o desenvolvimento de praxeologias das funções seno e cosseno, ou seja, nossa problemática de base. E em seguida, após análise da problemática de base, podermos propor uma problemática possibilística, ou seja, novas configurações de praxeologias matemáticas para o estudo das funções seno e cosseno, considerando a problemática de base.

As problemáticas citadas fazem parte dos problemas educacionais que integram o que Chevallard (2013a) chama de problemática da didática base, ou problemática de base. Podemos defini-la da seguinte forma: dado um trabalho ou obra *O*, que se pretende estudar em uma instituição *I*, sob certas restrições *R*, quais conjuntos de condições *C* podem levar os sujeitos *X* de *I* para compreender, estudar e conhecer o trabalho/obra *O*?

O problema didático, ou de ensino, situado acima, relaciona-se com três elementos essenciais, conforme aborda Chevallard (2013a): o trabalho/obra *O*; as condições *C*, que podemos estabelecer; e as restrições institucionais *R*, da problemática de base sobre nosso tema de estudo. Podemos relacionar esses elementos às três dimensões do problema didático, como pontuam Gascón (2011), Licera (2017) e Lucas (2010): a epistemológica, a econômica e a ecológica.

Segundo Gascón (2011) e Licera (2017), a dimensão epistemológica refere-se às razões para o trabalho estudado, isto é, a questões vinculadas à natureza; a dimensão econômica inclui questões sobre a modificação e/ou criação das condições *C* existentes em *I* para o estudo de *O*; e a dimensão ecológica, por sua vez, corresponde ao conjunto de restrições *R* que afetam o estabelecimento de certas condições *C* para determinada direção.

Nesse sentido, utilizaremos a Teoria Antropológica do Didático – TAD, a qual serve de lente para delinear o problema didático de investigação, no intuito de ampliarmos nosso olhar para questionarmos nas instituições dominantes o modelo que está posto, ou seja, investigarmos quais condições e restrições temos para o estudo das funções seno e cosseno no modelo dominante.

Ao realizar uma indagação de dimensão epistemológica, apresentamos nosso problema de pesquisa, delimitado da maneira a seguir: "Como licenciandos em matemática integram instrumentos tecnológicos para o estudo de funções seno e cosseno por meio de um percurso investigativo, orientado por um modelo alternativo de referência?".

De acordo com Lucas (2010), procuramos caminhos para minimizar o problema de pesquisa citado respeitando três dimensões do problema didático: a ecológica, a econômica e a epistemológica. Para isso, temos nosso problema didático de averiguação assim distribuído: dimensão Ecológica – "Que papel tem a integração de ferramentas tecnológicas no desenho e na prática de uma organização matemática de estudantes sobre o objeto funções seno e cosseno?"; Econômica – "Como desenvolver as praxeologias matemáticas para o estudo de funções seno e cosseno com instrumentos tecnológicos?"; Epistemológica – "Como podemos descrever a criação de um Percurso de Estudo e Pesquisa sobre funções seno e cosseno integradas ao GeoGebra por meio de um modelo epistemológico de referência que seja compatível com o modelo epistemológico geral da atividade matemática?".

O objetivo geral nesta pesquisa é analisar como um modelo alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno. E, em busca de alcançá-lo, vamos: contemplar aspectos epistemológicos sobre as funções seno e cosseno; analisar como o modelo dominante apresenta o ensino de funções seno e cosseno; instituir um Modelo Praxeológico de Referência para o estudo de funções seno e cosseno; integrar recursos tecnológicos enquanto instrumento para o ensino das funções referidas; modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos para o estudo das funções seno e cosseno; analisar efeitos de uma nova configuração didática a partir de ambientes tecnológicos para o ensino e aprendizagem de funções seno e cosseno.

Neste segmento, almejamos desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP para trabalhar com licenciandos em matemática, objetivando refletir acerca do estudo das funções seno e cosseno. Para tanto, o contexto da pesquisa reuniu estudantes do 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da disciplina de Pré-cálculo de duas turmas.

Optamos pela disciplina citada devido a ser o primeiro local onde nosso objeto matemático, funções seno e cosseno, vive no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, ou seja, no primeiro semestre. O Pré-cálculo visa "revisar" os conteúdos da Educação Básica, com enfoque maior em funções, para oportunizar àqueles que não viram o assunto o aprendizado antes de cursarem Cálculo I, ou até mesmo tirar dúvidas a respeito dos conteúdos.

Utilizaremos a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) como alicerce teórico que fundamenta a base estrutural de todo o nosso trabalho, em consonância à integração de instrumentos tecnológicos para o ensino e aprendizagem das funções em pauta.

Desse modo, faremos uso da organização praxeológica de Chevallard (2001) para realização da apreciação institucional dos documentos oficiais brasileiros que analisaremos em toda a pesquisa, bem como para a análise do Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP a ser desenvolvido.

1.1 UMA REFLEXÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi necessário nos apoiarmos em um referencial teórico que permitisse analisar a relação entre os sujeitos pesquisados, o objeto do saber matemático, as instituições e as ferramentas tecnológicas. Assim, utilizamos a Teoria

Antropológica do Didático - TAD, sistematizada por Chevallard (1999) como base teórica para fundamentar todo nosso trabalho, em consonância com o software livre GeoGebra para o estudo das funções seno e cosseno.

A TAD é uma teoria desenvolvida por Chevallard e considerada como um refinamento da Teoria da Transposição Didática. A TAD estuda o homem e a relação com o saber matemático. (CHEVALLARD, 1999)

A TAD proporciona, por meio de elementos institucionais, às organizações praxeológicas matemáticas e didáticas detectar e elaborar propostas para atender às lacunas diagnosticadas. O termo praxeologia, deriva de dois termos gregos, práxis e logos, que significa, respectivamente, prática e razão. (CHEVALLARD, 2002)

Analisando os estudos de Chevallard (1992), observamos que ele distingue três tipos de objetos específicos: *instituições* (**I**), *pessoas* (**X**) e *objeto* (**O**). As *pessoas* (**X**) ocupam posições nas instituições (**I**). Ocupando essas posições, elas se tornam *sujeitos* das *instituições* (**I**) – sujeitos ativos que contribuem para que um *objeto* (**O**) possa existir em uma instituição (**I**).

Desta forma, entram em cena as noções de *relação* entre esses elementos primitivos (*instituição, objeto do saber* e *pessoa*) da teoria (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007). Consideramos em nossos estudos as funções seno e cosseno como nosso objeto **O,** o 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS nossa Instituição **I.**

Um objeto **O,** como, por exemplo, as **funções seno e cosseno,** existe na medida em que uma pessoa **X – um professor (P) ou um estudante (E) –** ou uma instituição **I – 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS disciplina Pré-Cálculo –** o reconhece como existente. Chevallard (1989) postula que um objeto **O** existe para uma pessoa **X** se existe uma relação pessoal, denotada R (**X, O**), da pessoa **X** ao objeto **O**. Isto é, a relação pessoal **O** determina a maneira em que **X** conhece **O**. De maneira análoga, se define uma relação institucional de **I** a **O** denotada por R (**I, O**), que exprime o reconhecimento do objeto **O** pela instituição **I**. **O** é, assim, um objeto da instituição **I** (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007). Segundo Chevallard (1989, p. 32):

> Todo saber é ligado ao menos a uma instituição, na qual é colocado em jogo, num dado domínio real. O ponto essencial é, portanto, que um saber não existe in vácuo, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado em uma ou em várias instituições.

A *relação pessoal* de uma pessoa com um objeto de saber só pode ser constituída quando a pessoa entra em uma instituição onde existe esse objeto. Uma *relação institucional* está, por sua vez, diretamente relacionada às atividades institucionais que são realizadas pelos professores e solicitadas aos alunos.

Por meio da relação institucional podemos compreender as condições e restrições do sistema educativo e proporcionar que uma pessoa **X**, que está na instituição **I** com o objeto **O**, possa reconhecê-lo. As relações pessoais e institucionais são de grande relevância para entendimento das modificações sofridas pelo saber nas instituições, no processo de transposição desse saber.

Chevallard (2002) defende que em qualquer que seja atividade humana há uma organização. Nesse sentido, essa organização pode ser estruturada por um tipo de tarefa que temos que realizar, a qual deverá ser cumprida por uma técnica, que se justifica por uma tecnologia, voltada ao saber, que, por sua vez, é justificada por uma teoria. Desse modo apresentamos o que Chevallard chama de Organização Matemática (OM) e Organização Didática (OD).

A OM está relacionada a uma estruturação das atividades matemáticas, as quais estão atreladas a uma OD. Na OM temos, segundo Chevallard (1999), as organizações praxeológicas ou praxeologias, composta por tipos de tarefas, técnica, tecnologia e teoria, representadas, respectivamente, por [T, t θ, Θ]. Segundo Chevallard (1999) temos um tipo de tarefa [T] que denota uma ação a ser realizada e em seguida, reconheceremos a maneira como realizar ou fazer essa tarefa, ou seja, por intermédio das técnicas [t], justificando por meio de propriedades, as quais chamamos de tecnologia [θ], que justificam e/ou explicam as técnicas utilizadas. E, por fim, temos a teoria [Θ], que justifica as tecnologias utilizadas.

Chevallard (1999) estrutura as praxeologias ou organização praxeológica em dois blocos: bloco prático-técnico e tecnológico-teórico. O bloco prático-técnico [T, t] está associado à práxis, é o saber fazer; o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] é o logos, está relacionado à razão, ou seja, é o saber. Nesse sentido, a organização praxeológica nos permite investigar nesse trabalho a organização do saber matemático em jogo, bem como a praxeologia que é construída nessa aula.

Em uma apreciação praxeológica, se temos uma praxeologia em torno de um tipo de tarefa a chamamos de praxeologia pontual: P = [T, ƫ, θ, Θ]. Mas se essa praxeologia comportar várias organizações pontuais, por via de uma tecnologia em comum, temos uma praxeologia local do tipo [T_i, $ƫ_i$, θ, Θ]. Se houver a agrupamento de várias praxeologias locais constituídas por uma mesma teoria, temos uma praxeologia regional [T_{ij}, $ƫ_{ij}$, θ_{ij}, Θ]. E ao termos um complexo de praxeologias, obtidas em uma determinada instituição, por meio da união de várias teorias, temos uma praxeologia global [T_{ijk}, $ƫ_{ijk}$, θ_{ijk}, Θ_k]. (CHEVALLARD, 1998)

Já a OD está relacionada a tudo que não é uma particularidade da matemática, mas que foi utilizada para uma determinada atividade. A OD pode ser compreendida como um modelo para explicar a resolução de tarefas, que antes não poderia ser resolvida. Chevallard (2002) destaca na OD os momentos de estudos ou momentos didáticos, os quais são seis. Esses momentos não têm uma linearidade em relação a execução, podem ocorrer de diferentes formas, podendo ser simultâneo ou apenas com alguns momentos.

O primeiro momento didático é o contato com o problema, ou seja, é o primeiro contato com a OM. É o momento de estudar o objeto do saber, e em nosso caso o saber matemático, e pode ocorrer por meio de uma tarefa, ou de diferentes formas. O segundo momento didático é a exploração do tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica mais apropriada para essa tarefa. O terceiro momento é a constituição do bloco tecnológico-teórico em função da técnica. É nesse momento que vemos a integração entre os momentos anteriores. A partir do primeiro contato com um tipo de tarefa, há uma exploração, seguido pela elaboração de uma técnica, justificada por um bloco tecnológico-teórico.

O quarto momento didático é responsável pela prova da técnica. Nesse momento, há a verificação e testagem da técnica empregada, a fim de aperfeiçoar e deixá-la mais eficiente e confiável.

O quinto momento didático é o da institucionalização. Nesse momento a partir das discussões entre os alunos e professores sobre o saber, as OM vão sendo transformadas e aperfeiçoadas, ou até mesmo excluídas. Essa fase é crucial para oficializar a OM elaborada e então defini-la. (ALMOULOUD, 2007)

O sexto momento didático é a avaliação. Segundo Almouloud (2007, p. 125), nesse momento temos que considerar “dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, da técnica construída, buscando verificar sua capacidade intelectual”.

Salientamos, mais uma vez, que os momentos didáticos podem ocorrer mais de um momento de forma simultânea, e não há uma ordem, e ainda podem se repetir durante o estudo, pois não há um modelo pré-definido para realização. Chevallard (1999) destaca que os momentos didáticos permitem refletir sobre a importância que o professor deve direcionar ao construir uma OD que tenha como meta o ensino e a aprendizagem de uma OM.

Chevallard (2002) destaca que para construir uma praxeologia relativa a um saber matemático, é necessário “situar esse saber em uma escala hierárquica na qual cada nível refere-se a uma realidade e serve para determinar a ecologia das organizações matemática e didática relativas a esse saber” (ALMOULOUD, 2007 p. 127). Essa escala é denominada de escala de níveis de codeterminação didática. Olhar o objeto do saber nos diferentes níveis da escala de codeterminação didática, permite compreender as condições para que o saber possa viver e ser aprendido pelos alunos, bem como as restrições em cada nível que possa impossibilitar a sua aprendizagem.

A referida escala vai desde a humanidade até o assunto, mostrando-nos que o processo de ensino e aprendizagem suplanta o sistema didático, em níveis que o antecedem, como: (-3) *civilização ↔ (-2) sociedade ↔(-1) escola ↔ (0) pedagogia ↔ (1) disciplina ↔ (2) domínio ↔ (3) setores ↔ (4) temas ↔ (5) assunto.* Temos os níveis mais genéricos (-3, -2, -1, e 0) e os mais específicos (1, 2, 3, 4, e 5).

Podemos descrever os níveis de codeterminação da seguinte forma: na *civilização* temos questões globais sobre o domínio matemático; na *sociedade* podemos considerar as instituições oficiais que regimentam o sistema educacional; a *escola* consideramos a comunidade escolar, professores, diretores, coordenadores pedagógicos, ou seja, as políticas de gestão. No nível da *pedagogia* temos as indicações de estratégias e metodologias para o ensino e aprendizagem do saber; a *disciplina* é referente a especificidade do estudo, em nosso caso a matemática; o *domínio* está relacionado à organização matemática global, podemos por exemplo citar a álgebra; o *setor* consideramos a organização matemática regional, que pode ser entendida como análise e/ou geometria euclidiana, entre outras; no *tema* temos as funções seno e cosseno e a trigonometria no círculo trigonométrico, ou seja, as organizações matemáticas locais; e por fim o *assunto* que temos a organização matemática pontual, ligada a um tipo de tarefa.

Almouloud (2007, p. 128) afirma que:

> O conjunto de condições e necessidades que possibilita o desenvolvimento matemático (ecologia de uma praxeologia matemática) depende dos objetos ostensivos que compõem as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, sendo essa dimensão ostensiva de uma praxeologia que permite que um saber matemático e os conhecimentos que ele pode construir se materializem.

Bosch e Chevallard (1999 *apud* ALMOULOUD, 2007) definem objetos ostensivos como aqueles de natureza sensível e de certa materialidade. São objetos que podemos manipular na realização da atividade matemática. Já os não ostensivos são objetos que existem institucionalmente, porém não são vistos, ditos, escutados, ou mostrados por conta própria, ou seja, são objetos que só podem ser invocados ou evocados pela manipulação de objetos ostensivos. Como exemplo, o conceito ou noção de círculo só pode ser evocado com auxílio de ostensivos como palavras, símbolos, gesto, um discurso, uma frase.

Baseado na TAD, segundo Chevallard (2009, *apud*, JUNIOR, CARVALHO & FARIAS, 2019), as dialéticas são saberes-fazer presentes nos Percursos de Estudo e Pesquisa – PEP, que de modo aberto conduz o trabalho investigativo em um novo sistema didático. Várias são as dialéticas que podem aparecer ao desenvolver um PEP. Mas em nossas análises tivemos algumas delas que foram mais evidentes, como as dialéticas de perguntas e respostas; do indivíduo e do coletivo; e a dialética do ostensivo e não ostensivo.

A dialética pergunta e resposta se caracteriza pela busca da resposta esperada à questão geratriz. Sendo que nessa busca geram outras questões dentro do grupo de estudo envolvido, decidindo quando e como serão respondidas. Essa dialética está no coração do PEP. Já a dialética do indivíduo e do coletivo ou da “autonomia e da sinonímia”, “é o processo que consiste no estudo coletivo de uma questão problemática *Q0*, proposta tanto na divisão das responsabilidades como na distribuição das tarefas num processo coletivo para dar resposta à referida questão”. (JUNIOR, CARVALHO & FARIAS, 2019, p. 367)

Chevallard e Bosch (1999) afirmam que a dialética do ostensivo e não ostensivo geralmente é considerada em termos de signos e significados: objetos ostensivos são signos de objetos não ostensivos que constituem seu significado. Nesse sentido, considerando o que afirma Chevallard (1994), que um objeto ostensivo pode ser de uma forma sensível ou material, vamos utilizar as subclassificações de ostensivos feitas por Fonseca (2015, p. 156):

- **ostensivos materiais**: uma caneta, um compasso, etc.;
- **ostensivos gestuais:** os gestos;
- **ostensivos discursivos:** as palavras, e, mais genericamente, o discurso;
- **ostensivos gráficos:** os esquemas, desenhos, grafismos; ostensivos escriturais: as escritas e os formalismos.

Nessa tese, empregamos o modelo praxeológico (OM e OD) para descrever e analisar as relações institucionais do modelo dominante. Além disso, a partir das condições e restrições levantadas no Modelo Epistemológico Dominante - MED, apresentamos no Modelo Epistemológico de Referência - MER as organizações locais que tomamos como referência nesse trabalho. Trabalharemos na tese com duas OM locais integradas, a saber: OM relativa à trigonometria no círculo trigonométrico; e a OM relativa às funções seno e cosseno. Abordamos essas praxeologias pontuais por meio de um PEP, a fim de proporcionar o trabalho integrado com o modelo circular e oscilatório utilizando o GeoGebra.

O presente trabalho tem como metodologia o Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP (BOSCH; GÁSCON, 2010; CHEVALLARD, 2011). Segundo Chevallard (2009), o PEP é um dispositivo didático e metodológico com caráter investigativo. Enquanto parte da metodologia do PEP, é necessário estruturarmos este estudo por meio de modelos que antecedem o próprio PEP. A seguir, exporemos a metodologia desta tese.

1.2 METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia desta pesquisa é a do Percurso de Estudo e Pesquisa. A metodologia citada, de acordo com Chevallard (2009), situa-se na linha da didática, em um contexto de investigação interdisciplinar, e pode ser representada por um esquema didático $S\ (\ X\ ;\ Y\ ;\ Q\ )$, no qual temos uma pergunta Q feita em um sistema didático, formado por X, que é um grupo de estudantes, por exemplo, e Y, que é(são) o diretor(es)/orientador(es) da atividade. O objetivo é estudar Q tentando chegar a uma resposta R que satisfaça às restrições *a priori*.

Essa metodologia não mobiliza praxeologias de apenas uma disciplina; ela permite a agregação e estudo de organizações praxeológicas de mais de uma disciplina. Em virtude deste aspecto, ela pode ser multidisciplinar. Ressaltamos, que há PEP monodisciplinar. Ao realizarmos uma investigação desse nível, estamos em um Percurso de Estudo e Pesquisa. Segundo Chevallard (2009 *apud* ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 38):

> [...] envolver-se numa tal investigação é engajar-se num Percurso de Estudo e Pesquisa (PER2) motivado por essa mesma pesquisa. Ele esclarece, ainda, que para desenvolver a resposta R, de fato, é conveniente coletar e organizar um "milieu" de trabalho M, que reúne recursos novos e antigos que X irá usar. Esses recursos, certamente serão "todas" as respostas à Q, validadas por uma instituição particular, e denotada por R◊. A análise destas respostas deve fornecer materiais para a construção da resposta R, ela será denotada por R♥. Outras obras "O" serão da cultura, qualquer que seja a "dimensão" cultural que fornecem ferramentas para a análise das respostas R◊, e da construção da resposta esperada R♥. As obras "O" serão parcialmente desenhadas em várias disciplinas, embora algumas sejam "disciplinas" não reconhecidas porque são emergentes ou culturalmente vilipendiadas. Chevallard apresenta o que ele chama de "esquema herbatien" que pode ser observado na seguinte forma condensada por $(S(X;Y;Q) \to\ M)\ \to R$♥ e, da forma desenvolvida por: $[S\ (\ X\ ;\ Y\ ;\ Q\ ) \to \{R^{\Diamond}_1, R^{\Diamond}_2, \ldots, R^{\Diamond}_n, O_{n+1, \ldots,} O_m\}] \to R$♥.

O PEP requer a análise do modelo que está posto para que seja viável levantar as condições e restrições do Modelo Epistemológico Dominante – MED. Nesse modelo, estão configuradas as praxeologias vivas e ditas oficiais nas instituições. Por meio da análise aludida, é realçada a problemática de base, isto é, as condições e restrições existentes nas instituições oficiais. No presente trabalho, o MED configura-se a partir de: análise de elementos histórico-epistemológicos; estudos sobre funções seno e cosseno; análise dos documentos oficiais do Ensino Médio, como PCNEM, PCN+, OCEM e BNCC, e de um livro didático do Nível Médio; documentos que norteiam o ensino de funções seno e cosseno no Ensino Superior; e o livro texto da disciplina de Pré-cálculo. A partir dessas análises, propomos o Modelo Praxeológico de Referência – MPR.

No MER exporemos o modelo praxeológico alternativo que permitirá instituir o dispositivo didático PEP. Através da explicitação da razão de ser das funções seno e cosseno, apresentaremos no MER/MPR os modelos alternativos que tomamos como referência para o PEP. O MPR é formado pela discussão da razão de ser de funções seno e cosseno; da praxeologia matemática de referência; do debate acerca dos fenômenos físicos periódicos e do potencial de serem modelados por funções circulares seno e cosseno; em seguida, exibiremos um estudo de conteúdos necessários à compreensão do PEP.

Explicitado o MPR, traremos, na sequência, o PEP com a questão geratriz, as questões derivadas da geratriz e as atividades como tarefas que instigarão as respostas das questões derivadas, a fim de alcançarmos a resposta R ♥. Após a explanação do PEP, realizaremos a análise *a priori* das atividades do PEP, para, em seguida, executar a experimentação. A justificativa da análise *a priori* no PEP ocorre devido ao planejamento e estudo das possíveis praxeologias matemáticas que poderão surgir – considerando a posição que o sujeito assume.

A experimentação do PEP foi planejada em seis sessões de, no mínimo, duas horas cada. Salientamos que a abordagem de pesquisa utilizada foi a qualitativa, visto que, nesse método, a pesquisa é fundamentalmente interpretativa e o eu pessoal torna-se inseparável do eu pesquisador, oportunizando múltiplos métodos de coleta de dados (CRESWELL, 2007). Os procedimentos adotados na coleta de dados foram o estudo documental e a observação com gravação de áudio e filmagem. Utilizamos a análise documental, nos estudos do MED, e a apreciação dos cadernos de aula da aplicação do PEP.

Quanto à observação da experimentação do PEP, esta foi feita por intermédio de gravação de áudio, uma vez que a pesquisadora foi a professora aplicadora. Devido ao extenso material, por ser seis sessões em duas turmas, optamos por anexar ao trabalho, apenas alguns protocolos de transcrição, para utilização nas análises. As demais sessões que não anexamos os protocolos, analisaremos com base nas respostas descrita nos cadernos de registros das sessões dos estudantes.

O contexto da pesquisa é composto de estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, como já mencionado alhures. Explanaremos a organização da aplicação do dispositivo PEP no capítulo intitulado “Percurso de estudo e pesquisa para o ensino de funções seno e cosseno”. A seguir explicitaremos a estrutura da tese.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

O primeiro capítulo refere-se à introdução da tese. Nesse capítulo apresentamos uma reflexão teórica a respeito do nosso referencial adotado, bem como, o caminho metodológico e organização do trabalho.

No segundo capítulo, exploramos o Modelo Epistemológico/Praxeológico Dominante – MPD; nesse modelo, realizaremos a análise institucional, alusiva aos documentos que norteiam o estudo das funções seno e cosseno, que fazem parte do contexto desta pesquisa. A lente teórica utilizada no capítulo em questão foi a TAD, a partir da organização praxeológica, ou seja, averiguaremos a organização matemática e didática das instituições analisadas no MPD. Essas análises ocorreram em duas esferas: a primeira na esfera do Ensino Médio e a segunda na esfera do Ensino Superior.

Analisamos as restrições e condições para o estudo de funções seno e cosseno na esfera do Ensino Médio, uma vez que o nosso saber matemático está instaurado nesse domínio, e os licenciandos em matemática são preparados para atuar na Educação Básica. Nesse aspecto, examinaremos os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM, as Orientações Educacionais Complementares – PCN+, a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio – BNCC, e a coleção de livros do Ensino Médio mais utilizada em Feira de Santana, empregando também a organização praxeológica para efetivação das análises.

No que tange ao Ensino Superior, ponderaremos sobre as restrições e condições referentes ao estudo de funções seno e cosseno nas diretrizes curriculares para o curso de Licenciatura em Matemática, no projeto do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, e no livro texto da disciplina de Pré-cálculo.

Todas essas análises do MPD serviram para revelar, através das restrições e condições encontradas, a problemática de base sobre a abordagem das funções seno e cosseno, possibilitando propormos a nossa problemática possibilística e assim construirmos nosso Modelo Praxeológico de Referência – MPR (alternativo).

O terceiro capítulo diz respeito ao Modelo Epistemológico/Praxeológico de Referência – MER/MPR. Foi por meio do modelo de referência citado que empreendemos a construção do Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. No MPR, propomos, com base nas restrições e condições demonstradas no MPD, a problemática possibilística, para que, a partir desta etapa, construíssemos o PEP. O nosso MPR foi fundamentada nos seguintes aspectos: razão de ser das funções seno e cosseno revelada com o auxílio da análise dos elementos históricos e epistemológicos do saber funções seno e cosseno; modelo geométrico; modelação de fenômenos físicos periódicos; caracterização das funções seno e cosseno e sua razão de ser matemática; utilização do GeoGebra para o ensino e aprendizado das funções em pauta.

Após análise das restrições e condições do MPD, evidenciando-se a problemática de base, e ao propor o MPR alternativo à nossa problemática possibilística, apresentaremos o planejamento, elaboração, aplicação e análise do PEP para o estudo das funções seno e cosseno por intermédio do GeoGebra no quarto capítulo. Neste, explicitaremos os objetivos e a organização do PEP, bem como a questão geratriz e as questões secundárias em busca de uma resposta ideal, que nos leve ao alcance do intento do PEP.

Ademais, exporemos a análise *a priori* do nosso dispositivo investigativo experimental PEP, a fim de revelar as possíveis praxeologias matemáticas esperadas, para que, no quarto capítulo, a saber, o de aplicação do PEP e sua apreciação, possamos confrontar a organização matemática existente com a esperada.

Após a análise *a priori* do PEP, apresentamos a aplicação das sessões de estudo de aplicação do PEP no tocante às funções seno e cosseno, exibindo, com detalhes, o emprego do PEP em sala de aula na disciplina de Pré-cálculo, bem como sua análise.

A análise do PEP, teve o intuito de confrontar as praxeologias levantadas na experimentação com as praxeologias matemáticas levantadas na análise *a priori* e de examinar a dimensão do PEP quanto ao objetivo proposto, a fim de mostrar que é possível promover um estudo das funções seno e cosseno por meio da modelação de fenômenos físicos periódicos, integrado ao GeoGebra, a partir do conhecimento das restrições e condições reveladas nas instituições dominantes através de um dispositivo de ensino experimental e investigativo.

E por fim, apresentamos as nossas considerações finais, levantando os pontos alcançados com nossa tese, bem como as restrições e as possíveis pesquisas a serem desenvolvidas, após esse trabalho.

2 MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE

O Modelo Praxeológico Dominante – MPD/Modelo Epistemológico Dominante – MED é um modelo que configura as praxeologias vivas e ditas oficiais nas instituições dominantes (LUCAS, 2010). É o modelo que está posto; faz parte da metodologia do PEP.

Nesse modelo, objetivou-se analisar as condições e restrições nas instituições dominantes para o estudo de funções seno e cosseno, a fim de compreendermos os possíveis caminhos para a proposição de uma problemática possibilística, que permita a construção de um PEP para o estudo de funções seno e cosseno, integrado ao GeoGebra.

Para tanto, realizou-se uma análise do processo evolutivo das funções seno e cosseno, a fim de abrangermos o desenvolvimento desses conceitos, além de detectar prováveis incompletudes que possam ter influenciado o ensino e a aprendizagem atual das funções seno e cosseno.

No MPD, contemplam-se as análises institucionais, com a finalidade de revelar as problemáticas de base dos documentos norteadores do Ensino Superior e dos documentos norteadores do Ensino Médio, e pesquisas sobre o tema no Brasil e na França nos últimos cinco anos, para entendermos, nas diferentes esferas, as condições e restrições do nosso objeto do saber matemático.

A lente de apreciação está baseada no questionamento ecológico, a partir do qual serão demonstradas as restrições e condições vinculadas ao objeto do saber matemático funções seno e cosseno. Os questionamentos ecológicos dos documentos analisados no MPD serão do tipo: “O que existe? O que não existe? E por que não existe?”.

Nesse sentido, temos um problema docente relacionado ao ensino das funções seno e cosseno, uma vez que pesquisas como a de Pedroso (2012), Coloneze (2012) e Nguyen Thi (2011) apontam dificuldades tanto no nível básico quanto no superior no que se refere ao conteúdo aludido. Então, questões do tipo: “O que eu devo ensinar de funções seno e cosseno? E como devo ensinar as funções seno e cosseno?”, serão reveladas no decorrer da investigação. Desse modo, segundo Chevallard (2013b), tais questões podem ser reflexo da ausência da razão de ser do objeto matemático, derivando perguntas, por parte dos estudantes, do tipo: “Por que devo estudar funções seno e cosseno? Onde vou utilizar essas funções em minha vida? Para que serve esse conteúdo?”. Os questionamentos mencionados revelam um problema de ensino, a saber: “Por que os estudantes não aprendem função seno e cosseno? De que forma tenho que ensinar? Quais são os tipos de exercícios?”.

Essas indagações levam ao fenômeno denominado por Chevallard (2013b) de "horror instrumental", que se caracteriza pela ausência da razão de ser do objeto matemático, conduzindo o conteúdo a se enquadrar no campo da matemática pura, sem considerar as experiências sensíveis e as motivações que resultaram de seu desenvolvimento, priorizando apenas o rigor matemático.

Fundamentados em nosso problema docente, temos os seguintes questionamentos: "Como devo promover o estudo das funções seno e cosseno? E o que devo priorizar no estudo dessas funções?".

Destarte, em busca da resposta a tais indagações, vamos averiguar a resposta institucional para essas perguntas. Isso porque, realizaremos um paralelo e, a partir das respostas encontradas, proporemos a construção de um modelo alternativo de referência, para alcançá-lo como pilar à construção do nosso Percurso de Estudo e Pesquisa.

A resposta institucional se baseou em duas esferas, conforme exposto alhures: a primeira na esfera do Ensino Médio e a segunda na esfera do Ensino Superior. Essas análises se desenvolveram em torno dos documentos oficiais que fundamentam os níveis Médio e Superior no que se refere ao ensino de matemática na licenciatura e na educação básica, em especial dos conteúdos funções seno e cosseno.

A justificativa da análise nos dois âmbitos citados, mesmo o público-alvo desta pesquisa sendo licenciandos em matemática, ocorre em virtude do nosso objeto matemático, funções seno e cosseno, viver tanto no Ensino Médio quanto no Superior; e, por buscarmos trabalhar em um curso de formação de professores, vamos olhar ambos os níveis, a fim de abrangermos como respondem institucionalmente ao nosso problema docente, uma vez que o Ensino Médio é um dos campos de atuação dos futuros educadores.

Nesses termos, no presente capítulo, almejamos desenvolver uma apreciação institucional a respeito das funções seno e cosseno mediante documentos oficiais que fundamentam o Ensino Médio brasileiro e o Ensino Superior no curso de Licenciatura em Matemática. Essa pesquisa documental se alicerça na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Por meio da TAD, procuraremos revelar, caso exista, a organização praxeológica, ou, pelo menos, seus indícios.

Como estamos sob o intento de compreender as restrições e condições relacionadas ao saber função seno e cosseno, para propormos nosso Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, essa análise também se fundamenta na escala de níveis de codeterminação de Chevallard (2007). A referida escala vai desde a humanidade até o assunto, mostrando-nos que o processo de ensino e aprendizagem suplanta o sistema didático, em níveis que o antecedem, como: *humanidade* ↔

civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina ↔ domínio ↔ setores ↔ temas ↔ assunto. Vale ressaltar que esta pesquisa está inserida no paradigma da didática, que se aproxima da metáfora do paradigma de questionamento do mundo.

Assim, para propormos o PEP sobre funções seno e cosseno, partimos do estudo epistemológico da trigonometria até chegar nas funções seno e cosseno; em seguida, realizaremos a análise dos documentos que norteiam o ensino de matemática na Educação Básica e no Nível Superior, uma vez que esses documentos legitimam, junto às leis que regem a educação, o ensino de matemática.

Depois, analisaremos um dos livros didáticos utilizados no Ensino Médio em Feira de Santana e o livro texto do curso de Pré-cálculo da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS. O critério de escolha foi a massiva utilização por parte dos alunos das turmas de Pré-cálculo do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS durante o Ensino Médio. No intuito de, ao final das análises, obtermos as restrições e condições reveladas nas instituições existentes, possamos propor o PEP para o estudo de funções seno e cosseno a partir do sistema didático.

Desse modo, apresentamos o estudo evolutivo da trigonometria e funções trigonométricas e, em seguida, a resposta institucional em duas esferas educacionais, Ensino Médio e Ensino Superior.

2.1 ELEMENTOS DE UM ESTUDO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE A TRIGONOMETRIA E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A presente seção expõe um estudo a respeito do desenvolvimento da trigonometria e das funções trigonométricas no intuito de compreendermos a gênese do conhecimento científico, ou seja, como a análise epistemológica desperta em nós, pesquisadores da área de educação matemática, a diferenciação entre o saber científico e o saber ensinado.

Sendo as funções seno e cosseno o objeto matemático desta pesquisa, ampliamos nossa análise de elementos histórico-epistemológicos à trigonometria e às funções trigonométricas, visto que, para apreendermos a evolução do conceito das funções seno e cosseno, faz-se necessário visitar a trigonometria até chegar às funções trigonométricas.

A análise de elementos epistemológicos nos permite contemplar as instituições dominantes, isto é, nos dá embasamento para realizar análises institucionais. Nesse âmbito, buscamos respostas aos seguintes questionamentos: “Como se desenvolveram as funções trigonométricas? Quais incompletudes surgiram no processo de desenvolvimento de funções trigonométricas? Tais incompletudes permanecem? Quais as razões de ser das funções trigonométricas?".

A presente análise de elementos histórico-epistemológicos apresenta como principais referências: Boyer (1974), Kennedy (1992), Eves (2011) e Fonseca (2010; 2015). Nesta linha, com base nos estudos realizados, utilizamos para a análise as subdivisões da trigonometria consideradas por Fonseca (2015), a saber: trigonometria esférica, trigonometria plana (geométrica – triângulo retângulo; analítica – circular: circunferencial; cônica: parabólica, elíptica e hiperbólica) etc. A escolha de Fonseca (2015) como referência para a subdivisão da análise, ocorreu em virtude de o autor ora referido configurar recortes estratégicos, relacionados à trigonometria, que representam importantes momentos históricos que almejamos destacar, de forma didática.

Salientamos, que a história da matemática não se restringe à matemática, mas engloba outras ciências que abarcam o objeto de estudo em foco, neste caso, a trigonometria. Vale ressaltar, como expõe Boyer (1974), que a trigonometria não é obra de apenas um homem, mas, sim, de diferentes povos. Veremos, neste cenário, contribuições dos babilônios, hindus, gregos-europeus, árabes, egípcios, dentre vários outros.

Nossa análise de elementos epistemológicos se inicia a partir das necessidades práticas e fenômenos naturais até chegar à formalização dos conceitos do campo da trigonometria. A apreciação citada é dividida em quatro marcos históricos, denominados de estágios. Essa divisão por estágios foi realizada por Kennedy (1992). Após explicitação dos marcos históricos, faremos uma reflexão sobre estes, ponderando as possíveis incompletudes no processo evolutivo do campo da trigonometria.

2.1.1 O primeiro marco para os elementos históricos e epistemológicos

As funções trigonométricas, conforme apresenta Nogueira (2007 *apud* FONSECA, 2015), nascem da astronomia. Dessa maneira, para analisar epistemologicamente essas funções, é necessário visitarmos o campo da física, geometria e astronomia.

De acordo com Chevallard (2004), a matemática se desenvolveu por meio de necessidades básicas da população, o que especificamente ele chama de razão de ser social. Chevallard (2004), afirma que, atualmente, vêm se perdendo essas razões de ser da matemática. Nesse sentido, a presente análise parte da investigação das razões de ser do desenvolvimento da trigonometria e das funções trigonométricas, a fim de compreendermos a epistemologia do nosso objeto de saber, funções seno e cosseno, bem como nos embasarmos para a construção de uma proposta de Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP.

O surgimento da trigonometria e suas funções dá-se no intuito de resolver problemas relacionados ao cálculo de distâncias inacessíveis entre a terra e a lua; ao controle de variáveis, na observação da natureza sobre astros, clima, terra e outros; e para o cálculo de uma incógnita (FONSECA, 2015). Segundo Kennedy (1992), a análise da história da trigonometria nos revela o nascimento de três áreas da matemática: álgebra, análise e geometria.

Considerando as evidências históricas sobre o desenvolvimento da trigonometria e das funções trigonométricas, deparamo-nos com as razões de ser sociais que motivaram o desenvolvimento de ambas. Encontramos como razões de ser, nesse contexto, a necessidade agrícola, a compreensão de corpos celestes e o cálculo de distâncias inacessíveis. Assim, a astronomia, junto à geometria, dá lugar para o surgimento das primeiras evidências das funções trigonométricas. Para Fonseca (2012), a junção entre a astronomia e a geometria permitiu a gênese de suas notáveis especializações: o campo da trigonometria, o qual contempla a trigonometria e as funções trigonométricas.

De acordo com os estudos de Kennedy (1992), no período pré-histórico, já há indícios do desenvolvimento do campo da trigonometria por intermédio de sequências numéricas relacionando o comprimento das sombras com as horas do dia. Consequentemente, temos a compreensão do tempo, através de sombras de varetas na vertical ao longo do dia, marcando o começo da história da trigonometria. Esses registros foram encontrados no alto Egito e em outras localidades, como Índia, Grécia e Mesopotâmia.

Com base na análise do período pré-histórico, inferimos o surgimento de uma das razões sociais da trigonometria e funções trigonométricas: os fenômenos climáticos. A agricultura, na época, era a maior atividade de subsistência da população, e, nesse sentido, fez-se necessário compreender as mudanças climáticas de cada estação, fator que influenciava na plantação, desde a movimentação do sol e da lua, até as alterações do clima. Isso produziu a demanda de uma formalização matemática, a qual, segundo Fonseca (2015), surgiu a partir da criação dos primeiros triângulos, enquanto objeto matemático, que propiciava fornecer possíveis respostas sobre o melhor período para a produção agrícola.

Desse modo, Kennedy (1992) destaca que, no momento aludido, aparece a noção de função do desenvolvimento do campo da trigonometria, sendo a hora do dia e as estações do ano variáveis independentes. Kennedy (1992) categorizou esses marcos como estágios; a função[1] sombra é o Estágio 1. Para o autor, a identidade da trigonometria ainda foi posta à parte, e esse estágio foi como uma disciplina escolar, em especial, para agrimensores e navegadores.

2.1.2 O segundo marco para os elementos históricos e epistemológicos

O segundo marco histórico diz respeito à função corda de um arco de círculo arbitrário, sendo essa função a que originou a função seno. Na acepção de Kennedy (1992), foi o teorema de Menelau, que tratava de quadriláteros completos planos ou esféricos, que possibilitou a extensão da trigonometria à esfera.

As informações mencionadas surgiram na região do Mediterrâneo Leste e foram registradas em grego, por volta do século II. Foi na Índia que o centroide das atividades se deslocou, e a função corda tornou-se variações do seno. Do século IX ao XV, na Síria e na Ásia Central, a nova função seno e a antiga função sombra foram tabuladas em sexagésimos. Kennedy (1992, p. 2), afirma que "com esse desenvolvimento surgiu a primeira trigonometria genuína, no sentido de que só então o objeto de estudos tornou-se o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos". À medida que a nova trigonometria foi se expandindo para diversas regiões, foi se desenvolvendo, de modo a observarmos que o crescimento da trigonometria é exponencial em relação ao tempo.

Nesse caráter, o instrumento básico, conforme indica Kennedy (1992, p. 3), é a função corda, "ainda tabulada em manuais de engenharia, precursora do seno". O autor destaca a necessidade de um sistema posicional para representação dos números nos cálculos, e ressalta que, desde o segundo milênio a. C., a função corda já existia no sistema sexagesimal desenvolvido na Mesopotâmia (KENNEDY, 1992).

Ptolomeu, em seu livro I, mostrou como calculava uma tábua da função corda. Daí, observa-se a relação de expressões com cordas e arcos suplementares para aplicação do teorema pitagórico. Na perspectiva de Kennedy (1992), para resolver qualquer figura retilínea através da tábua de cordas, faz-se necessário decompor a figura em triângulos retângulos e, em seguida, resolvê-las. Além disso, o autor aponta, em sua obra, que, dados dois catetos, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar a hipotenusa; depois, para achar os ângulos, basta utilizar a tábua de cordas.

[1] Frisamos que, a partir das tábuas de sombra, parece que a noção de função já era utilizada implicitamente há pelo menos três milênios, uma vez que há registros dessas tabelas em diferentes épocas e lugares.

Observamos, no desenvolvimento da trigonometria, a utilização da geometria e da álgebra geométrica, esta já trabalhada por Euclides nos **Elementos**. Entretanto, Fonseca (2015) pontua que o desenvolvimento da astronomia se baseou na concepção de esfera celeste, antes mesmo de Hiparco e da trigonometria plana de cordas. Uma das razões de ser destacadas nessa fase, é a compreensão do dia e da noite.

De acordo com Kennedy (1992, p. 8), para explorar a ideia da esfera, era preciso o estabelecimento de "uma técnica para calcular uma grandeza incógnita sobre a esfera em termos de grandezas conhecidas". O autor ainda aponta que uma opção de solução seria um cálculo que envolvesse entidades esféricas em si, ângulos, superfícies e arcos. Nesse segmento, uma forma alternativa prática seria a transformação dos objetos esféricos em regiões planas, por meio do cálculo de cordas, conhecida como projeção esferográfica (estereográfica); podemos encarar essa projeção como uma técnica prática.

Assim, Kennedy (1992) ressalta alguns pontos importantes a serem considerados; um deles, é que qualquer configuração a respeito da esfera celeste composta de círculos pode ser transformada em uma figura plana, constituída por círculos e linhas retas, sendo resolvida por tábuas de sombras ou cálculo de cordas. O autor destaca que, por mais que pareça simples, a resolução é complexa e longa. Outro ponto relevante é que, por mais que um polígono esférico não seja uma figura plana, seus lados são.

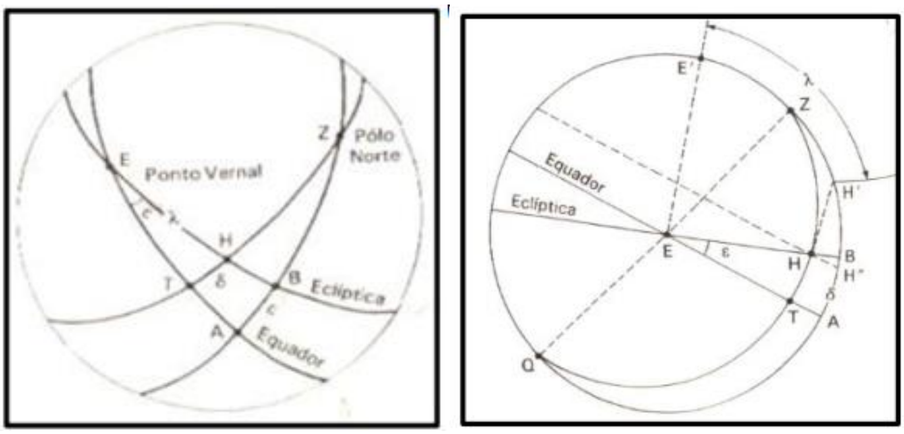
2.1.3 O terceiro marco para os elementos históricos e epistemológicos

O marco histórico seguinte é destacado pelo processo de transformação de uma esfera celeste em uma figura plana, determinando uma projeção esferográfica para ser resolvida por cálculo de cordas. A partir desse terceiro marco temos o surgimento da função esferográfica, que representa aplicações da função corda. Selecionando um dos pontos citados acima, o qual traz que os lados de um polígono esférico são planos, nessa função esferográfica, busca-se "forçar", em um único plano, a acomodação de todos os círculos apresentados em uma situação; essa acomodação pode se por projeção ortográfica ou por rotação.

Kennedy (1992) discute que, ao efetivar a acomodação, mantém-se a verdadeira grandeza dos arcos, sem apresentar distorções, podendo ser realizados procedimentos de cálculo e de medição; tal método é chamado de analemas – métodos geométricos descritivos. O autor ressalta que os analemas surgiram nos tempos clássicos, tendo sido bastante utilizados e divulgados da Idade Média até hoje (KENNEDY, 1992).

Observamos, abaixo, noções de projeções ortográficas de um problema de astronomia. A figura 1 A mostra dois círculos fundamentais da esfera celeste, o eclíptico e o equador, e o ângulo constante entre eles. Já a figura 1 B aborda o analema.

Figura 1 A – Noção de projeção ortográfica. Figura 1 B – Noção de projeção ortográfica (ANALEMAS).



Fonte: Kennedy (1992, p. 9-10).

Para trabalhar com corpos esféricos em sua própria superfície, Menelau de Alexandria desenvolveu uma técnica, conforme expõe Kennedy (1992), porém, por só haver uma versão em árabe, ele se baseia no Almagesto (I, 13). A técnica conhecida como Teorema de Menelau possui os casos plano e esférico, e sua prova dá-se pelo caso plano.

Boyer (1974, p. 119) discute o teorema de Menelau:

> É provável que o teorema de Menelau para o caso de triângulos planos fosse conhecido por Euclides, talvez tendo aparecido no desaparecido Porismas. O teorema no plano diz que se os lados AB, BC, CA de um triângulo são cortados por uma transversal nos pontos D, E, F respectivamente, então AD.BE.CF = BD.CE.AF. Em outras palavras, qualquer reta corta os lados de um triângulo de modo que o produto de três segmentos não adjacentes é igual ao produto dos outros três, como se prova facilmente por geometria elementar ou por aplicação de relações trigonométricas simples. Esse teorema Menelau considerou bem conhecido por seus contemporâneos, mas ele o estendeu a triângulos esféricos numa forma equivalente a *senAD* . *senBE* . *senGF* = *sen BD* . *senCE* . *senAF*. Se são considerados segmentos com orientação em vez de absolutos os dois produtos são iguais em valor absoluto, mas diferem em sinal.

Boyer (1974) comenta que o teorema de Menelau teve um papel essencial na trigonometria esférica e na astronomia.

Por muito tempo, ou melhor, por alguns séculos, falar do teorema de Menelau equivalia a falar da trigonometria esférica – não significa que o teorema referido não seja importante, pois teve seu valor e poder; porém, tímido para a solução dos problemas da astronomia esférica (KENNEDY, 1992).

Ao observarmos as aplicações citadas acima, referentes à função corda, percebemos, conforme argumenta Kennedy (1992), que é fundamental duplicar o arco antes de utilizá-lo em uma tábua de cordas. O autor ainda afirma que é mais pertinente a existência de uma tábua na qual o arco original é uma variável independente, e que, quando se pensou em calcular utilizando-se a metade da corda de um arco duplo, surgiu a função seno.

De acordo com Farfán e García (2005) na Idade Média houve uma separação entre a trigonometria e a álgebra, considerando disciplinas distintas e com objetivos diferentes, sem conceber importantes contribuições. O destaque da razão de ser nesse marco histórico foi a construção de uma trigonometria genuína, a separando-a da astronomia.

2.1.4 O quarto marco para os elementos históricos e epistemológicos

Ao se pensar em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo, surgiu a função seno, a qual define o quarto marco. Apesar de haver contribuições de diferentes ideias matemáticas, oriundas da Grécia, Babilônia, entre outros locais, acredita-se que foram os indianos que inventaram a função seno; Kennedy (1992) afirma ainda que foi na Índia que a tábua de senos mais antiga foi descoberta.

Os dados encontrados sobre a função seno, inventados pelos indianos, foram baseados num compêndio de astronomia, conforme declara Kennedy (1992). Eves (2011) assevera em sua obra que os indianos pouco demonstravam no contexto em pauta.

Os indianos construíram uma tábua de senos, sem auxílio da geometria, resultando em vinte e quatro senos tabulados em ordem a partir do primeiro seno, o qual consideraram: “a oitava parte dos minutos de uma secção zodiacal é chamada primeiro seno [$S_1 = 30º/8 = 1800’/8 = 225’$]” (KENNEDY, 1992, p. 14). Observamos o raciocínio utilizado para a construção dos senos tabulados; consequentemente, para encontrar os senos subsequentes, o pensamento foi análogo. O segundo seno é igual ao seno anterior mais ele mesmo subtraído pela divisão dele por si mesmo, ou seja, $S_2 = S_1 + (S_1 – S_{1/} S_1)$.

Os indianos estudiosos da matemática consideravam-se astrônomos, e tinham a trigonometria como ferramenta para a astronomia. Os indianos construíam tábuas de senos, e sua trigonometria solucionava triângulos planos e esféricos (EVES, 2011).

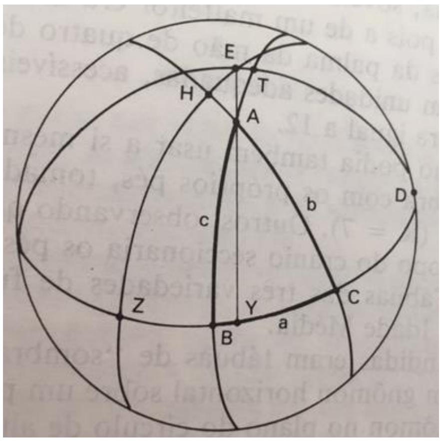
A partir dos avanços nos estudos relacionados à função seno, Kennedy (1992) afirma que os indianos astrônomos, além de introduzirem a função seno, avançaram intuitivamente em assuntos que foram denominados, com o passar dos tempos, de equações de diferenças e teoria da interpolação.

Em sua obra, Kennedy (1992) discute a regra de quatro quantidades, que foi relevante para marcar o estágio de transição de um cálculo que trabalhava com o quadrilátero esférico para a trigonometria esférica, envolvendo os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele enuncia o teorema alegando que: num par de triângulos retângulos esféricos que tem um ângulo agudo (A, A') em comum ou igual, vale a seguinte relação: (sen a)/(sen a') = (sen c)/(sen c'). Esse teorema é transicional, pois os ângulos não intervêm. A partir dos estudos aludidos, descobre-se para os triângulos esféricos gerais a lei dos senos, a saber:

$$\frac{Sen\ a}{Sen\ A} = \frac{Sen\ b}{Sen\ B} = \frac{Sen\ c}{Sen\ C}$$

Nesse teorema, utiliza-se explicitamente a função dos ângulos, fazendo parte da nova trigonometria. Observe a figura 2, que mostra o problema astronômico que anteriormente foi resolvido por meio dos analemas (Figura 1 B), que pode ser resolvido pelo teorema de Meneleu, e que agora é resolvível pela lei dos senos.

Figura 2 – Projeção de um problema astronômico resolvido pela lei dos senos.



Fonte: Kennedy (1992, p. 20).

Identificamos, novamente, que a astronomia está totalmente ligada à trigonometria, e que durante todo o processo histórico ambas caminharam de mãos dadas, separadas somente no século XIII, pois os estudiosos da época consideraram proveitosa a separação.

Os marcos trabalhados até aqui estão atrelados à geometria; sua evolução foi resultante de técnicas de cálculos e numéricas. A partir do século IX, as tábuas de sombras horizontais, ou seja, sombras estendidas, foram utilizadas para mostrar "o comprimento da sombra projetado em um plano horizontal como uma função de altitude do Sol" (KENNEDY, 1992, p. 22).

Essas tábuas eram de cotangente de θ, isto é, cotg $\theta \equiv$ R cotg θ. Em seguida, Kennedy (1992), em seu trabalho, apresenta as tábuas da sombra reversa, conhecida como tg θ, ou tangente de θ. Logo após, o autor aborda a hipotenusa do triângulo representado pela sombra e a hipotenusa do triângulo representado pela sombra estendida que, respectivamente, são secante de θ e cossecante de θ. Por fim, afirma que, ao final do século IX, as funções trigonométricas já estavam sendo trabalhadas e suas identidades também, sendo seis as funções (seno, cosseno, cotangente, tangente, secante e cossecante) (KENNEDY, 1992).

Farfán e Garcia (2005) também ressaltam que no período da Idade Moderna, a estrutura da trigonometria se estrutura como ciência com situações próprias. E a partir dessas constatações, pela primeira vez se obtém a tabela de tangente e cotangente pelo matemático Müller, apresentando a função trigonométrica como um novo tipo de função matemática.

Após o desenvolvimento das funções, durante o período da Antiguidade e da Idade Média, e mesmo depois das atividades terem sido centralizadas na Europa, a linguagem ainda trabalhada era a comum, sem muito simbolismo. Na trigonometria, foi François Viète (1540-1603) quem formalizou simbolicamente a trigonometria da época por meio de notações matemáticas. Segundo Boyer (1974, p. 226):

> A trigonometria de Viète, como sua álgebra, era caracterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão. Assim como Viète foi o verdadeiro fundador de uma álgebra literal, também com alguma justificação pode ser chamado o pai de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria que às vezes é chamada de goniometria. Aqui também, é claro, Viète partiu da obra de seus predecessores, notadamente Regiomontanus e Rheticus. Como o primeiro ele considerava a trigonometria um ramo independente da matemática; como o segundo ele em geral trabalhava sem referência direta a meias cordas num círculo. Viète no Canon Mathematicus (1579) preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximadas até minutos. Vimos que ele tinha recomendado o uso de frações decimais, em vez de sexagemais. Mas para evitar todas as frações tanto quanto possível, Vietè escolheu um "sinus totus" ou hipotenusa de 100000 partes para as tabelas de senos e co-senos (sic) e uma base ou *perperndiculuum* de 100000 partes para as tabelas de tangentes, co-tangentes (sic), secantes, e co-secantes (sic). (não usava, porém, esses nomes, exceto quanto à função seno.)

Boyer (1974) destaca o problema de trissecção do ângulo, que resultava em uma equação cúbica; a partir desse resultado, a trigonometria se tornou essencial para resolver equações de graus mais elevados.

Fonseca (2010) ressalta também, que esses resultados permitiram que a trigonometria estimulasse os matemáticos, durante o final do século XVI e início do século XVII, à publicação dos resultados de Viète em seus livros textos.

Por fim, após a introdução dos símbolos na trigonometria, e com os avanços matemáticos a respeito de análise, com a invenção do cálculo infinitesimal, como aborda Kennedy (1992), a trigonometria se deixa levar por essa corrente matemática. De instrumento de mensuração da geometria, passa a ser um conjunto de relações entre os números complexos. O aludido processo se iniciou através da escrita de funções trigonométricas como séries infinitas realizadas por Isaac Newton ao fim do século XVII.

Percebemos que Newton já começava a ver uma relação epistemológica da trigonometria com as funções exponenciais. Por intermédio dessas evoluções, e com o reconhecimento dos números imaginários, Kennedy (1992, p. 27) mostra as contribuições de Leonhard Euler, em 1740, ao escrever: "$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ e definiu as funções trigonométricas como $sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$. E ainda afirma que todas as identidades conectadas às funções podem derivar dessas definições.".

De acordo com Boyer (1974), Euler contribuiu para análise infinita de Newton e Leibniz de forma significativa, pois "Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado "análise" – o estudo de processos infinitos" (BOYER, 1974, p. 32). A partir desse período na análise, a ideia de função passou a ser fundamental.

Euler já pensava e utilizava as funções transcendentes elementares – trigonométricas, logarítmica, exponencial, e trigonométricas inversas, de forma bem próxima a forma em que utilizamos hoje. Boyer (1974, p. 324) destaca que "as abreviações *sin, cos, tang, cot, sec* e *cosec*, que foram usadas por Euler na *Introductio* em latim, são mais próximas das formas atuais em inglês [...]".

Vale salientar que a obra o *Introductio* aborda a respeito das ideias de Newton, Leibniz e Bernoullis sobre séries infinitas.

Uma das grandes contribuições das funções trigonométricas na análise infinita de Newton, Leibniz e Bernoulli, é a possibilidade das funções seno e cosseno serem utilizadas para representar a soma de funções infinitas e periódicas complexas. Esse feito se dá a Fourier, já na idade contemporânea.

Conforme afirma Boyer (1974, p. 404 - 405) Fourier trouxe “a ideia, vagamente percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma: $y = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ... + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_n \operatorname{sen} nx + ...$, agora conhecida como série de Fourier”.

Na série de Fourier, temos que séries trigonométricas permitem a resolução de problemas distintos, envolvendo a física e a matemática.

Cantoral (1990) apresenta um vasto estudo epistemológico a respeito do que ele chama de “*El Praediciere a Lo Analitico*”, em sua tese *Desequilibrio y equilibración: categorias relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Nesse trabalho Cantoral apresenta um estudo desde a época pré-newtoniana, passando por Galileu, Newton, Euler, Clairaut, D’Alembert, Fourier entre outros. Buscando trazer um estudo epistemológico da época sobre fenômenos físicos e o avanço matemático nessas diferentes épocas.

Mas, não nos aprofundaremos nesse trabalho, pois o mesmo possui restrições que impedem a vivencia na instituição o qual esse trabalho foi desenvolvido, pois o estudo de Cantoral (1990) apresenta elementos trigonométricos avançados que não vivem no 1º semestre do curso de licenciatura em matemática da UEFS e nem no Ensino Médio. E conforme escala de codeterminação sociedade, não podemos ampliar os estudos para essa esfera.

A razão de ser destacada nesse marco histórico, está relacionado a contribuição da trigonometria com a invenção do cálculo infinitesimal.

De acordo com a análise dos elementos histórico-epistemológicos aqui exposta, verificamos quatro estágios de desenvolvimento do campo da trigonometria, que contam do avanço da área referida e das funções trigonométricas. A partir dos estágios em pauta, notamos a presença forte do que Chevallard (2004) chama de razão social, a qual vem sendo perdida no ensino de matemática atualmente.

Segundo as análises tecidas, constatamos que o desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas se deu baseado em razões de ser sociais relacionadas aos sujeitos da época. Por meio das motivações citadas, avançaram os estudos, permitindo, assim, o desenvolvimento da álgebra, análise e geometria. O processo de desenvolvimento ocorreu em diversas partes do mundo, com diferentes povos, contribuindo para a evolução dos conceitos em questão.

Percebemos que a motivação ou razão social contribuiu no processo de desenvolvimento da trigonometria, porém isso não ocorreu em todas as etapas, Pré-história, Idade Antiga, Idade Média e Idade Moderna.

Na linha dos estudos realizados e da pesquisa de Fonseca (2015), temos que a motivação social, ou razão social, esteve presente na Pré-história, com a mudança climática, plantio, compreensão do tempo e movimentos dos astros celestes; na Idade Antiga, com as fases da lua, os pontos cardeais, as estações do ano e o calendário astrológico. Na Idade Média isso se modifica, pois as principais motivações foram previsões astrológicas, alterações de técnicas e separação da trigonometria da astronomia. Observamos nessa fase que a motivação social não foi tão forte como nas demais. Na Idade Moderna, as motivações são o simbolismo algébrico, a invenção do cálculo infinitesimal e a descoberta do domínio dos complexos. Nessa etapa, podemos averiguar que a motivação já está diretamente ligada ao domínio matemático, não mais relacionada a uma razão social.

Inferimos, assim, que no decorrer do processo histórico do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas, as razões de ser sociais foram se perdendo. Isso pode ter influenciado no cenário que temos contemporaneamente no ensino, cuja razão social do conhecimento matemático tem se perdido.

O quadro 1, abaixo, apresenta um desenho de organização matemática, a partir dos vestígios revelados no estudo epistemológico-histórico de uma possível praxeologia matemática.

Quadro 1 – OM do estudo de elementos histórico-epistemológicos baseados em Boyer (1974), Kennedy (1992) e Fonseca (2015).

PERÍODOS HISTÓRICOS				
DADOS	**PRÉ-HISTÓRIA**	**IDADE ANTIGA**	**IDADE MÉDIA**	**IDADE MODERNA**
RAZÃO DE SER	- Compreender o tempo a partir das mudanças climáticas e movimentos celestiais, para o plantio.	- Compreender o dia e a noite.	- Construir uma trigonometria genuína, separando a trigonometria da astronomia.	- Contribuir para a invenção do cálculo infinitesimal.
TAREFA	- Calcular o comprimento da sombra.	- Analisar as fases da lua, pontos cardeais e estações do ano; - Medir distância, comprimento e profundidade.	- Resolver um triângulo plano ou esférico.	- Transformar a linguagem verbal em algébrica; - Construir tábuas trigonométricas;

				- Calcular seno 1’ com 13 casas decimais.
TÉCNICA	- Tabular sequências numéricas que relacionavam comprimento da sombra às horas do dia.	- Resolução de figuras planas; - Resolução de figuras esféricas; - Utilização de analemas.	- Resolução de triângulos planos ou esféricos. Analemas.	- Interações entre análise numérica e geométrica.
TECNOLOGIA	- Medida do tempo; - Ângulos; - Proporcionalidade; - Semelhança; - Triângulos; - Esfera celeste.	- Triângulos retângulos; - Trigonometria primitiva; - Relações trigonométricas; - Ângulos; - Trigonometria esférica.	- Relações métricas nos triângulos esféricos e planos; - Noções de quantidades de variáveis.	- Razões trigonométricas; - Funções trigonométricas; - Séries infinitas.
TEORIA	- Trigonometria.	- Trigonometria.	-Trigonometria e funções trigonométricas.	- Funções trigonométricas.
ESTÁGIO	- Função sombra.	- Função sombra; - Função corda; função esferográfica.	- Função esferográfica; - Função seno.	- Função seno.

Fonte: a autora (2020).

Observa-se conforme quadro 1 e a análise dos elementos históricos-epistemológicos levantados, que o desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas apresentam três modelos epistemológicos: o geométrico, o algébrico e o da análise, e que o modelo geométrico aparece em grande destaque nesse processo evolutivo. Nesse sentido, por meio dos elementos da trigonometria do triângulo e do círculo trigonométrico, temos o modelo geométrico; ao que se refere as funções trigonométricas temos o modelo algébrico e consequentemente o da análise, os quais não se distanciam do modelo geométrico. Em nosso trabalho, utilizamos como modelo epistemológico o modelo geométrico, mas relacionando esse modelo com o domínio algébrico e da análise, uma vez que nosso objeto do saber são as funções seno e cosseno. Explicitaremos no capítulo do Modelo Epistemológico/Praxeológico de Referência o modelo epistemológico que utilizamos como referência.

O estudo realizado a respeito dos marcos evolutivos sobre a trigonometria e funções trigonométricas revelou vestígios de rupturas epistemológicas no processo mencionado. Algumas dessas rupturas, de acordo com a análise acima e os trabalhos de Fonseca (2015), são: as variedades das técnicas para resolução de um mesmo tipo de tarefa, o que proporciona uma morosidade no tocante ao desenvolvimento do assunto; a trigonometria enquanto ciência independente da astronomia; e a passagem do domínio geométrico para o algébrico, que sofreu, durante a linha de tempo investigada, alguns entraves e sobreposições de um modelo a outro.

Observa-se que, inicialmente, as razões sociais, ou seja, as tarefas voltadas à necessidade prática, foram uma mola propulsora para o desenvolvimento da trigonometria e suas funções, porém, no transcurso do tempo, a razão de ser torna-se puramente matemática, a fim de haver formalização e avanço no conhecimento matemático no campo em pauta, afastando, desse modo, a trigonometria e as funções trigonométricas de demandas cotidianas.

Com base nas organizações matemáticas reveladas no estudo dos elementos histórico-epistemológicos, temos ingredientes para, ao analisar o MED, demonstrar possíveis organizações matemáticas dominantes que corroboram, ou não, com as evidenciadas nesta tese.

Nesse aspecto, realizaremos, a princípio, uma pesquisa acerca de trabalhos que averiguam as funções seno e cosseno. Destacamos a relevância de estudar investigações sobre funções seno e cosseno, no intuito de apontar como está posto, hodiernamente, o tema, e, em especial, a necessidade da pesquisa sobre a temática em foco.

Em seguida, prosseguiremos com a análise dos documentos norteadores para o ensino da matemática no nível Médio e Superior, a fim de abrangermos as restrições e condições para o estudo de funções seno e cosseno e responder a problemática docente em torno do nosso objeto do saber.

2.2 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O ESTUDO DE FUNÇÕES SENO E COSSENO

Em busca de compreendermos sobre pesquisas referentes ao estudo das funções trigonométricas, principalmente das funções seno e cosseno, empreendemos um levantamento de pesquisas sobre o tema no Brasil e na França, uma vez que nosso trabalho está fundamentado na Teoria Antropológica do Didático.

Dividimos a busca em dois cenários, o nacional e o internacional. No que tange ao cenário nacional, investigamos teses e dissertações defendidas nos últimos cinco anos sobre o tema na plataforma de catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Começamos a pesquisa no catálogo citado a partir da palavra “Funções trigonométricas”, obtendo um total de 33545 trabalhos. Em seguida, aplicamos o filtro na categoria tipo, para doutorado e mestrado acadêmico, tendo como resultado 30947 trabalhos.

Prosseguindo a pesquisa, realizamos um recorte temporal, na categoria ano, selecionando estudos desenvolvidos nos últimos cinco anos, ou seja, de 2015 a 2019, resultando em 7611 teses e dissertações. Devido ao alto número de trabalhos, aplicamos o filtro de grande área de conhecimento, escolhendo a área de ciências exatas e da terra e multidisciplinar, por contemplar programas de Pós-Graduação em Ensino de Matemática e Educação Matemática, filtrando 1611 trabalhos.

O subsequente filtro aplicado foi o relacionado à área de conhecimento; selecionamos: matemática; ensino de ciências e matemática; e ensino. O resultado do filtro foram 290 trabalhos. O filtro seguinte foi a área de avaliação, tendo sido escolhida a área de ensino, devido ao nosso trabalho, neste momento, ter o interesse de entender o processo de ensino e aprendizagem e estudo das funções trigonométricas; conseguimos filtrar 128 trabalhos nesse ínterim.

O item consecutivo que aplicamos no filtro foi a área de concentração; das 37 opções, selecionamos 14 de nosso interesse, a saber: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA; EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE; ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; ENSINO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA; ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; ENSINO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E FÍSICA; ENSINO E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DA MATEMÁTICA; ENSINO, HISTÓRIA E FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; Educação Matemática; Educação em Ciências e Matemática; Ensino de Ciências e Matemática; Ensino de ciências e matemática. Ao finalizar a seleção das áreas de concentração, obtivemos 84 estudos. Vale salientar, que os nomes de áreas repetidas ocorrem em virtude da forma de cadastro no ambiente; optamos por respeitar a maneira como estão escritas na plataforma CAPES e, por isso, temos textos com diferentes configurações da fonte.

O último filtro aplicado diz respeito ao nome do programa de pós-graduação. A seguir, temos os 15 nomes dos programas de Pós-Graduação filtrados na plataforma CAPES, do modo como estão registrados – frisamos que elegemos os relacionados à educação e ensino de matemática: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA; EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – UFMT – UFPA – UEA; EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS; EDUCAÇÃO MATEMÁTICA; EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA; EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA; ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA; ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA;

ENSINO DE MATEMÁTICA; Educação Matemática; Educação Matemática e Ensino de Física; Educação em Ciências e em Matemática; Ensino de Ciências e Matemática; Ensino e História das Ciências e da Matemática; Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática. Após esse filtro, obtivemos 76 trabalhos.

Dos 76 trabalhos encontrados, realizamos uma leitura inicial do título de cada um deles, identificando que apenas quatro eram vinculados às funções trigonométricas e quatro à trigonometria; os demais referem-se a funções de forma geral, ou a alguma função, diferente da trigonométrica, ou, ainda, à formação do professor de matemática.

Desse modo, como o objeto matemático em foco são as funções seno e cosseno, analisamos os quatro trabalhos relacionados às funções trigonométricas – três de mestrado e um de doutorado.

O primeiro estudo analisado, segundo a ordem apresentada na plataforma Capes, foi o desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, de autoria de Felipe de Almeida Costa, em 2017, intitulado: **O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa**. O objetivo da pesquisa foi analisar os efeitos do uso da estratégia aludida no ensino, no sentido de propiciar uma aprendizagem com significado para os alunos. A estratégia de ensino priorizada foi a modelagem matemática. O autor apresenta a modelagem matemática como potencial tática para promover uma aprendizagem com pensamento crítico, possibilitando a relação entre fenômenos naturais e a matemática.

O trabalho de Costa (2017) expõe uma sequência didática para o ensino das funções trigonométricas pela modelação de movimentos periódicos. A sequência didática desenvolvida privilegiou os diferentes registros de representação das funções trigonométricas. Vale ressaltar que o autor utilizou na sequência didática uma atividade com o GeoGebra, mas que já estava pronta, apenas para que os alunos pudessem manuseá-lo e extrair informações, no intuito de reforçar o conhecimento aprendido. De acordo com o autor, os resultados almejados foram alcançados, uma vez que os estudantes participantes da pesquisa lograram uma aprendizagem significativa do conteúdo (COSTA, 2017).

O segundo trabalho contemplado sobre funções trigonométricas foi o de Helder Lima Silva, da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. A dissertação foi defendida, em 2017, com o título: **O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa**.

O objetivo geral da dissertação de Silva (2017) foi investigar os saberes matemáticos acerca de funções trigonométricas e suas relações com o som que favorecem a contextualização, a representação destas funções em diferentes registros e a análise das práticas institucionais dos educandos em torno destes saberes, empregando os ambientes papel/lápis e computacional GeoGebra, bem como o aplicativo DaTuner. Para isso, o autor utilizou como quadro teórico a Abordagem Instrumental, as teorias Linguística e da Comunicação, a Teoria Antropológica do Didático e os Registros de Representação Semiótica. Como metodologia, a Análise Institucional e a Sequência Didática.

A partir da análise dos elementos institucionais, como, por exemplo, o livro didático e os documentos oficiais, além das tecnologias envolvidas (*software* GeoGebra e aplicativo DaTuner) e a função que tais recursos exercem no ensino e aprendizagem, Silva (2017) desenvolveu uma sequência didática aproveitando o ambiente papel/lápis e o computacional para o estudo das funções trigonométricas, conforme citado.

O pesquisador menciona como resultado o seguinte:

> Os resultados obtidos revelam que a utilização dos ambientes computacionais GeoGebra e DaTuner, na realização de tarefas com base na praxeologia modelada de Funções Trigonométricas, vão além dos conhecimentos desenvolvidos na instituição de referência, conduzindo os alunos a acessarem outras possíveis relações existentes baseadas na contextualização e compreensão dos conceitos concernentes às Funções Trigonométricas. Além disso, identificamos a existência de vantagens e desvantagens na utilização desses ambientes como instrumentos auxiliares na realização dos tipos de tarefas propostas nesta pesquisa (SILVA, 2017, p. 9).

De acordo com os resultados do estudo, podemos observar que a sequência aplicada permitiu, por meio de diferentes representações, o conhecimento sobre as funções trigonométricas. Silva (2017) ressalta a falta de estrutura para utilização do ambiente computacional como uma desvantagem, além da ausência do domínio de conceitos próprios das funções trigonométricas pelos estudantes, o que comprometeu em parte os resultados alcançados. O autor salienta que as desvantagens, porém, não invalidaram a sequência, afirmando que os objetivos foram logrados e que a sequência didática elaborada possui uma bagagem praxeológica de grande valia para o ensino e aprendizagem das funções trigonométricas.

O terceiro trabalho sobre o assunto em pauta pesquisado no catálogo de dissertações e teses da CAPES foi o de Luciano Pontes da Silva. Desenvolvida, em 2019, na Universidade Federal de Sergipe – UFS, a dissertação é intitulada: **Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva**.

Em Silva (2019), o objetivo do trabalho concentrou-se na investigação da etiologia de erros em tipos de tarefas de funções trigonométricas, conforme a hierarquia dos Níveis de Funcionamento do Conhecimento (NFC) de Aline Robert, para correlacionar os erros com os Níveis de Atenção Seletiva (NAS) requeridos em cada etapa dos tipos de tarefas. O estudo está fundamentado na Engenharia Didática Clássica – EDC, Neurociência e Psicologia Cognitiva, e elementos da Teoria Antropológica do Didático. Silva (2019), com base nas lentes teóricas empregadas, construiu uma sequência didática.

O autor realizou as análises histórica e epistemológica, a fim de revelar as rupturas epistemológicas, bem como os obstáculos didáticos e epistemológicos no âmbito pesquisado. Após demonstrar os obstáculos e rupturas epistemológicas e didáticas, Silva (2019) apresentou o quadro teórico, esboçando, em seguida, as suas hipóteses de pesquisa, a saber:

> $H1$ – Os Lapsos e a função cognitiva "Atenção Seletiva" possuem uma correlação quanto à resolução de tipos de Tarefas envolvendo Funções Trigonométricas, dentro de uma organização praxeológica e concatenadas com os Níveis de Funcionamento do Conhecimento, isto é, o NAS exigido está correlacionado com o lapso em determinado NFC.
> $H2$ – Uma sequência didática construída sobre os preceitos teóricos apresentados facilitará o sujeito a minimizar ou sanar os erros percebidos na utilização das técnicas inseridas na praxeologia das Tarefas nessa temática, na comparação de testes a priori e a posteriori, referentes às etapas da EDC (SILVA, 2019, p. 114-115).

Ao desenvolver o estudo, Silva (2019) expõe, de acordo com a organização da EDC, as análises preliminares e *a priori*, e segue com os passos seguintes da engenharia didática, sob o intento de analisar, previamente até a experimentação, a sequência didática estabelecida por ele.

A seguir, demonstramos como o pesquisador organizou a sequência:

> A SD está ancorada em três momentos principais, divididos cada um em dois momentos específicos: aplicação dos Protocolos Diagnósticos de Lapsos (PDL – Apêndices) e discussão das resoluções dos alunos com as resoluções esperadas dentro de tais diagnósticos. Os três momentos condizem com a construção da Matriz de Lapsos apresentada na seção anterior, onde será confrontada a utilização da dialética Δ (O_0, O_{no}) em cada momento da sequência (SILVA, 2019, p. 125).

O público-alvo foi uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Alicerçado no desenvolvimento do estudo, Silva (2019) destrincha, após aplicação do trabalho, a análise *a* *posteriori* e a validação. Através da comparação da análise *a priori* e *a posteriori*, o autor reformulou suas hipóteses, como podemos identificar abaixo:

> $H1r$ – Os Lapsos dentro da Matriz sugerida tem correlação entre o nível da Tarefa quanto ao NFC e os NAS exigidos em cada um desses, porém os lapsos apresentados precisam ser passíveis de estudo com outras variáveis, como, por exemplo, tempo de resposta, consulta a algum material, estímulos externos (pontuação), etc..
> $H2r$ – A Sequência Didática em questão apenas se mostrou um prognóstico sobre os lapsos percebidos, pois mesmo com a socialização, alguns dos lapsos encontrados anteriormente voltaram a aparecer. Os testes serviram para enquadrar desvios da técnica na Matriz, porém outros tipos de lapsos podem aparecer ou os que estão nesse conchave podem ser reformulados (SILVA, 2019, p. 185).

O pesquisador opta por apresentar uma reformulação de hipóteses, no intuito de revelar que a pesquisa não está concluída/acabada e que essa reformulação permite empreender outros estudos por intermédio das hipóteses reformuladas, desenvolvendo objetivos diversos a partir das inferências levantadas.

O quarto e último trabalho sobre funções trigonométricas resultante de nossa busca no catálogo de dissertações e teses da CAPES é uma tese de doutorado. O autor é Laerte Silva da Fonseca, que defendeu seu estudo, no ano de 2015, na Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAM. O título da pesquisa é: **Um estudo sobre o ensino de funções trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França**. O objetivo principal na tese foi analisar a transição do Ensino das Funções Trigonométricas Ensino Médio-Ensino Superior (EM-ES), sob a ótica da articulação entre os quadros da Didática da Matemática e da Neurociência Cognitiva. Para tanto, o autor se debruçou sobre a hipótese de existência de uma ruptura na transição das funções trigonométricas do Ensino Médio – EM para o Ensino Superior – ES.

Através das análises epistemológicas por meio de documentos oficiais brasileiros e franceses e das análises institucionais, o pesquisador aponta possíveis

> rupturas epistemológicas nas fronteiras do campo trigonométrico que, consequentemente, foi absorvida pelas relações institucionais esperadas para o EM, provocando uma ruptura na transição para o ES, confirmada pelas relações pessoais existentes (FONSECA, 2015, p. 14).

Fundamentado na TAD e na Neurociência Cognitiva, o autor indica que tanto no Brasil quanto na França essa quebra acontece devido à mudança de domínios da geometria e das funções. Fonseca (2015, p. 461) alega que:

> [...] os ganhos obtidos que, embasados nos dois quadros teóricos, permitiu: esboçar o plano inicial dessa pesquisa, construir uma atualização das reflexões sobre as Dificuldades de Aprendizagem Matemática, compreender o cenário do fenômeno da transição escolar no Brasil e na França, desenvolver as análises institucionais, guiar a análise epistemológica e, por fim, auxiliar na preparação do terreno para a análise neurocognitiva, por meio da elaboração do Protocolo Experimental. Outrossim, observou-se que nessa experiência inovadora, de articulação comparada entre diferentes culturas, contextos e quadros teóricos, por exemplo, ampliou horizontes ainda pouco desbravados.

Nesse segmento, o trabalho de Fonseca (2015) oportuniza contribuições no que se refere a possíveis rupturas que ocorrem na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior – resultados importantes a serem considerados em nossa pesquisa, uma vez que o contexto em pauta são licenciandos em matemática do primeiro e segundo semestres, recém-chegados do Ensino Médio.

Quanto ao cenário internacional, pesquisamos teses e dissertações no HAL *archives-ouvertes*, o qual é um arquivo aberto que se destina à divulgação e depósito de teses e artigos científicos de instituições de ensino e pesquisa francesas e estrangeiras em geral. Pesquisamos com as palavras “Fonctions trigonométriques”, com marco temporal de 2011 a 2018, aparecendo 14 documentos. Ao examinarmos os 14 documentos, nove teses e cinco artigos, verificamos que apenas um voltou-se à educação e ao ensino de matemática, e os demais à computação, engenharia e matemática avançada no Ensino Superior.

O único estudo encontrado no HAL acerca de funções trigonométricas voltado à educação foi o de Nga Nguyen Thin (2011), “La périodicité e dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam: un ingéniere didactique d’introduction aux fonctions périodiques par la modélisation”. O trabalho de Nguyen Thin (2011) aborda uma engenharia didática para introduzir o conceito de funções periódicas, por meio de modelação.

O objeto central do estudo de Nguyen Thin (2011) é a modelação matemática de fenômenos periódicos no ensino secundário. O pesquisador restringiu a modelação a uma função periódica cuja variável independente é o tempo. Nguyen Thin (2011) constituiu como dispositivo experimental um questionário e uma engenharia didática para trabalhar os modelos de fenômenos periódicos.

O autor elabora uma comparação das instituições dominantes na França e no Vietnã, e, a partir dos resultados, propõe uma engenharia didática a ser aplicada através de um questionário para experimentação. Nguyen Thin (2011) revela a ausência de articulação entre diferentes modelos para modelação de fenômenos periódicos para o ensino de funções periódicas. E ressalta a importância dessa articulação para que o estudante consiga escolher os modelos a serem utilizados, empregando distintos registros de representação e instrumentos tecnológicos, como o Cabri-géomètre.

Na perspectiva dos trabalhos apresentados, identificamos uma lacuna relacionada ao estudo de funções seno e cosseno no que tange a teses e dissertações acadêmicas sobre o tema, já que o número de pesquisas encontradas, no recorte temporal escolhido, tanto no cenário nacional quanto no internacional, é insuficiente.

Quanto às pesquisas pertinentes à utilização do GeoGebra ou de outro *software* para o estudo de funções seno e cosseno, observa-se, de acordo com relatos dos autores, que a estrutura escolar é deficiente para um trabalho eficaz com tecnologias, configurando uma restrição levada em consideração para o desenvolvimento desta pesquisa, uma vez que a restrição citada está presente em nosso contexto de estudo.

No tocante à tese e às dissertações abordadas, temos como condição o uso de fenômenos naturais para o estudo de funções seno e cosseno, por meio da modelação matemática, com auxílio do ambiente papel/lápis integrado ao GeoGebra, de modo a permitir que o PEP a ser desenvolvido nesta pesquisa possibilite o estudo das funções seno e cosseno pelos licenciandos em matemática.

Nesses termos, uma vez evidenciados os trabalhos sobre o tema levantados no presente estudo, buscamos, a seguir, demonstrar qual é o modelo dominante nas instituições contempladas do Ensino Médio e Superior, além das condições e restrições que temos nessa problemática de base, para poder instituir o MER da nossa problemática possibilística.

2.3 A RESPOSTA INSTITUCIONAL DO ENSINO MÉDIO À PROBLEMÁTICA DOCENTE EM TORNO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Considerando o Ensino Médio como o primeiro momento em que são trabalhadas as funções seno e cosseno na Educação Básica, analisaremos as restrições e condições no tocante ao ensino de funções seno e cosseno nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM, nas Orientações Educacionais Complementares – PCN+, na Base Nacional Comum

Curricular para o Ensino Médio – BNCC e na coleção de livros do Ensino Médio mais utilizada na cidade de Feira de Santana, na Bahia.

Vale salientar, que o contexto da pesquisa são licenciandos em matemática, mas justificamos o estudo da resposta institucional do Ensino Médio em virtude de este ser o futuro ambiente de trabalho dos licenciandos em foco, sendo que nosso objeto matemático vive nessa esfera.

Alicerçadas nos níveis de codeterminação de Chevallard (2007), as análises subsequentes estão no nível escola e sociedade, representando os documentos elaborados pelo Ministério da Educação, os quais fundamentam o ensino atual do Brasil.

2.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM instituem um documento que visa apresentar uma organização e direcionamento para o ensino e aprendizagem no Ensino Médio. O volume analisado é o de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. O PCNEM enfoca um trabalho interdisciplinar, relacionando o conhecimento matemático e das ciências da natureza com competências humanas (BRASIL, 2000).

A presente análise está voltada à matemática, especificamente às condições e possíveis restrições de que o PCNEM dispõe no estudo de funções seno e cosseno. Ademais, o documento aludido está no nível da sociedade, referido na escala de codeterminação de Chevallard (2009).

O documento apresenta uma seção a respeito do conhecimento matemático. Nessa seção, são abordados aspectos concernentes à importância da matemática no contexto social e para o desenvolvimento das capacidades que serão exigidas aos alunos no futuro. O PCNEM enfatiza o uso da matemática para atender as necessidades dos estudantes no âmbito de tomada de decisões em sua vida social e profissional, da argumentação, da exposição de conclusões, entre outras ações.

O documento explana diversos objetivos gerais para serem desenvolvidos no Ensino Médio, no tocante à matemática; todos, porém, de forma geral, sem dar ênfase aos conteúdos matemáticos específicos.

Na sequência, o PCNEM reúne sugestões de abordagem do conteúdo, não apenas alterando as metodologias, mas promovendo uma integração dos saberes matemáticos, por meio de situações e problemas do contexto social, bem como a partir das próprias relações dos conteúdos. Nesse caráter, um dos primeiros exemplos destacados no documento é a trigonometria com as funções trigonométricas. Segundo o PCNEM:

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos (BRASIL, 2000, p. 43).

Observa-se uma preocupação, no que tange ao ensino de funções trigonométricas, vinculada a aspectos da trigonometria, o que, às vezes, ocorre desassociado, sendo trabalhadas características da trigonometria em um ano e as funções trigonométricas em outro, sem apresentar articulações entre os saberes. A articulação dos conteúdos matemáticos é uma condição relevante a ser considerada. Entretanto, não há indícios de quais articulações podem ser feitas entre a trigonometria e as funções trigonométricas no Ensino Médio pelo professor.

Os PCNEM expõem a necessidade de se trabalhar não somente com as relações matemáticas entre os conteúdos, mas que isso possa abranger a aplicação dos conceitos em problemas de outras áreas, que permitam aos alunos resolver situações fora do contexto matemático, utilizando os conhecimentos aprendidos. Nesse sentido, o documento explana mais um exemplo com a trigonometria e as funções trigonométricas:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa (BRASIL, 2000, p. 44).

Pode-se perceber, nesse recorte, a preocupação, no que respeita à abordagem da trigonometria e suas funções trigonométricas, de não focar no cálculo excessivo, mas em problemas de aplicação, como na física com fenômenos periódicos. Tem-se a condição de abordar as funções seno e cosseno por meio de fenômenos periódicos. Todavia, novamente, o documento não explicita tipos de tarefas que possam revelar a praxeologia existente no PCNEM.

Em seguida, o documento não discute mais a trigonometria e as funções trigonométricas, prosseguindo com outros conteúdos para depois apresentar as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática.

As competências são, de modo genérico: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sociocultural. Atreladas a essas competências, os PCNEM explanam habilidades gerais direcionadas a atender tais competências; contudo, não expõe habilidades específicas aos conteúdos matemáticos, como funções seno e cosseno.

Quadro 2 – Condições e Restrições dos PCNEM.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição 1 PCNEM	O incentivo para se trabalhar as funções trigonométricas integradas aos conceitos de trigonometria.
Condição 2 PCNEM	A interdisciplinaridade ao trabalhar com funções seno e cosseno, privilegiando o cálculo de distâncias inacessíveis e a construção de modelos que correspondam a fenômenos periódicos.
Restrição 1 PCNEM	Ausência do estímulo à utilização do ambiente tecnológico-computacional atrelado ao ambiente papel e lápis no ensino de funções trigonométricas; não menção do uso de tecnologias.

Fonte: a autora (2020).

Com base no levantamento acima, analisaremos a seguir o documento complementar ao PCNEM, o PCN+.

2.3.2 PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+

O PCN+ é um documento para o Ensino Médio baseado em leis e diretrizes que visam complementar os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – PCNEM, e têm como objetivo “discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de forma a responder as transformações sociais e culturais da sociedade [...]” (BRASIL, 2006, p. 4). Esse documento complementar é destinado aos profissionais de educação, como professores, gestores e coordenadores, e aos profissionais responsáveis pela formação de docentes; também está no nível sociedade da escala de níveis de codeterminação.

O volume analisado nesta seção é da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pois é onde está inserida, de acordo com a escala de níveis de codeterminação, a matemática, a qual faz parte do nível disciplina e contém o objeto de estudo deste trabalho como assunto, as funções seno e cosseno.

O PCN+ busca a facilitação da organização do trabalho escolar, relacionando as áreas de conhecimento. Isso ocorreu a partir da reformulação do Ensino Médio no Brasil, em 1996, pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos PCN (BRASIL, 2006).

O PCN+ advoga que a organização no Ensino Médio articulando a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias facilita a ordenação do currículo e do aprendizado, através de competências.

Essas competências estão articuladas às competências mais gerais, que são comuns às outras áreas do conhecimento, como a de Linguagens e Códigos e a das Ciências Humanas. São elas: representação e comunicação; investigação e compreensão; e contextualização sociocultural (BRASIL, 2006). As competências representação e comunicação, voltadas à informação, possuem objetivos em comum, articulando as áreas de Linguagens e Códigos com a de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Já as Ciências Humanas, possuem em comum com as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias as competências de contextualização sociocultural.

Assim sendo, o documento salienta que há uma convergência entre a química, física, biologia e matemática, mas que, apesar de estarem em uma mesma área, devem ser trabalhadas destacando-se as particularidades de cada uma, articulando, contudo, as áreas e conteúdos comuns entre elas.

Nesse sentido, o PCN+ faz um recorte, apresentando funções logarítmicas com aplicações em física, química e biologia, para mostrar a dimensão do assunto em diferentes áreas, ressaltando que poderiam ser outros conteúdos da matemática, a exemplo das funções trigonométricas.

A partir do recorte empreendido, o documento enfatiza que, ao abordar um saber de uma área específica que necessita de algum conteúdo de outra área, o professor deve ser capaz de trabalhar com o assunto da área afim sem esperar que o docente da área específica também trabalhe, pois isso mostra a articulação dos conteúdos, bem como a importância do tema em distintas aplicações.

O PCN+ ressalta o ensino de matemática para responder a problemas cotidianos da vida social, ou seja, uma matemática contextualizada, que permite aos alunos a utilização do saber aprendido na escola em seu dia a dia.

Desse modo, o PCN+ sublinha três competências que norteiam o trabalho dos profissionais de educação, que são ampliadas para competências específicas da área e em matemática. As competências gerais são:

Figura 3 – Competências gerais da matemática do PCN+.

As competências em Matemática

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Fonte: Brasil (2006, p. 113).

Por meio das três competências referidas, o documento expande para subdivisões em três quadros, que vão trabalhando nomeadamente competências mais específicas para a matemática; ampliando, dessa maneira, o significado de cada competência para a matemática e explicitando o que se espera dos alunos em cada uma delas.

O primeiro quadro refere-se à competência representação e comunicação; nesse quadro, estende-se matematicamente o que se espera na competência, não mencionando, porém, as funções trigonométricas na competência.

O quadro relacionado à representação e comunicação é dividido em tópicos, a saber: símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia; articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia; análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia; elaboração de comunicações; discussões e argumentação de temas de interesse da ciência e tecnologia. Observa-se que os PCN+ não consideram as funções seno e cosseno como um conteúdo que possa representar ou comunicar na matemática situações ligadas à ciência e tecnologia ou articular símbolos e códigos.

O segundo quadro está vinculado à competência investigação e compreensão. Nesse quadro há quatro tópicos; são eles: estratégias para enfrentamento de situações-problema; medidas, quantificações, grandezas e escalas; modelos explicativos e representativos; e relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas. Verifica-se no domínio em questão a presença de condições para se abordar as funções seno e cosseno, uma vez que há competências específicas para o trabalho com trigonometria e funções.

O documento expõe duas estratégias para enfrentamento de situações-problema que induzem o trabalho com trigonometria, podendo-se inserir as funções seno e cosseno:

> - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica. [...].
>
> - Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria (BRASIL, 2006, p. 115-116).

Observa-se, nas duas estratégias citadas, condições para trabalhar funções seno e cosseno articulando-as com a trigonometria no triângulo e no círculo. No entanto, não é apontada nas estratégias tal articulação; as funções apenas são apresentadas como propriedades e identidades trigonométricas. Podemos inferir um possível tipo de tarefa, através dos trechos em destaque acima, T_1: identificar e elaborar possíveis estratégias para resolver uma situação-problema sobre distância; um possível ingrediente de técnica é f_1: utilizar propriedades trigonométricas para calcular. Outro tipo de tarefa é a T_2: resolver situações-problema reconhecendo a existência de invariantes e identidades. Tem-se como ingrediente de técnica f_2: estabelecer relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou, ainda, a identidade fundamental da trigonometria para resolver uma situação-problema.

Expandindo a análise para a competência geral contextualização sociocultural, na seção ciência, tecnologia na história, tem-se a competência da área, a qual equivale a compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social, como uma condição favorável para trabalhar a evolução do saber matemático função seno e cosseno em sala de aula. Pode-se confirmar isso na competência da área de matemática, pois ela aborda:

> - Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de idéias (sic) gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas (BRASIL, 2006, p. 117-118).

Ao se analisar a competência em questão, nota-se que ela não especifica um tipo de tarefa sobre o trabalho de funções seno e cosseno, mas apresenta indícios da utilização da história da tecnologia associada à matemática, o que pode ser bastante explorado para o ensino das funções referidas.

Nas demais subdivisões das competências do PCN+, não há menção do trabalho com as funções seno e cosseno ou com a trigonometria.

Conforme disposto, o documento expõe os temas estruturadores do ensino de matemática. Esses temas são divididos em três segmentos: álgebra: números e funções; geometria e medidas; e análise de dados. Com um caráter estruturador, os temas apresentados organizam os conteúdos a serem trabalhados nas três séries do Ensino Médio. O objeto matemático da pesquisa corrente, função seno e cosseno, está situado no tema álgebra: números e funções.

No tema álgebra: números e funções, a discussão é iniciada por intermédio da sugestão de se trabalhar com o assunto em duas unidades temáticas, variação de grandezas e trigonometria. Em seguida, explora-se o ensino de funções de modo geral, com ênfase na interpretação gráfica, nas suas aplicações e em seus conceitos e propriedades.

No tocante à trigonometria, o documento realça a relevância das aplicações em trigonometria e em resoluções de problemas envolvendo o conteúdo, afirmando que, geralmente, a trigonometria é abordada desconectada das aplicações, como pode ser observado no trecho abaixo:

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser

> assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo (BRASIL, 2006, p. 121-122, grifos do autor).

Constata-se que o documento, embora ressalte que, comumente, a trigonometria é explorada de modo desconectado com a aplicação, recomenda priorizar aplicações trigonométricas, análise das funções e seus gráficos e resolução de problemas. O PCN+ ainda destaca o quão importante foram a trigonometria e suas funções para o avanço tecnológico de variadas épocas, sobrelevando, assim, a evolução do conceito matemático para sua compreensão e estudo atuais.

Pode-se inferir, a partir do trecho salientado do PCN+, um tipo de tarefa T_3: calcular distâncias inacessíveis; e construir modelos que correspondam a fenômenos periódicos. O indício de técnica exposto no trecho é t_3: utilização das funções seno, cosseno e tangente na primeira volta do círculo trigonométrico. Tendo o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: funções trigonométricas e trigonometria no círculo.

Prosseguindo a apreciação do tema números e funções, o PCN+ divide-o em duas unidades temáticas, variação de grandezas e trigonometria. No que se refere à trigonometria, o documento aborda que, ao trabalhar com o triângulo retângulo, o triângulo qualquer e a trigonometria da primeira volta, devem-se considerar os seguintes objetivos:

> • Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
> • Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais (BRASIL, 2006, p. 123).

Depreende-se, do texto acima, que a trigonometria e as funções trigonométricas são pertinentes para o entendimento da evolução do conceito no processo histórico e social, para aplicabilidade em fenômenos periódicos e em problemas do cotidiano. Essas condições permitem que o PEP, a ser desenvolvido neste trabalho, possa trazer as funções seno e cosseno vinculadas à evolução histórica e tecnológica da trigonometria, além da aplicação desses conteúdos em situações reais.

Em seguida, o PCN+ destaca a trigonometria e suas funções em uma seção que apresenta a organização do trabalho escolar. Nesta seção, há um quadro que estabelece os possíveis conteúdos a serem trabalhados e como estes podem ser distribuídos entre os três anos do Ensino Médio:

Quadro 3 – Organização do trabalho escolar.

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: Brasil (2006, p. 128).

O quadro 3, apresenta a trigonometria do triângulo retângulo no 1º ano do Ensino Médio, e funções seno, cosseno e tangente no 2º ano, junto à trigonometria de um triângulo qualquer e da primeira volta. Esse fato é interessante, pois pode oportunizar um trabalho com as funções seno e cosseno definindo-as de várias maneiras.

Mas, ao mesmo tempo, enfatizamos a ausência de indícios/caminhos de uma praxeologia que permita abordar diferentes formas de compreender o conceito de funções seno e cosseno; o que pode resultar em um trabalho sem articulação e fragmentado, conforme aparece no quadro acima, como se os conteúdos fossem totalmente distintos.

Outro ponto que vale salientar, é que na 2ª série apresenta-se a ordem de funções seno, cosseno e tangente antes da trigonometria da primeira volta e de um triângulo qualquer. Essa inversão de ordem pode dificultar a compreensão do conteúdo, uma vez que as funções podem ser definidas no círculo, permitindo, nesses termos, uma melhor apreensão do assunto.

Ademais, a referida inversão pode induzir o trabalho do professor a ser de forma desconexa, não relacionando os conteúdos de modo integrado.

Quadro 4 – Condição e restrição do PCN+.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
CONDIÇÃO 1 PCN+	Incentiva o trabalho com funções seno e cosseno por meio de aplicações e do contexto histórico e social.
CONDIÇÃO 2 PCN+	Busca incentivar o ensino de funções seno e cosseno a partir da trigonometria no triângulo e círculo.
RESTRIÇÃO 1 PCN+	O documento considera as primeiras noções trigonométricas no domínio da álgebra, afastando-as do domínio geométrico.

Fonte: a autora (2020).

Verifica-se, no documento, as condições de um trabalho com as funções trigonométricas privilegiando o contexto histórico e social, bem como a aplicação dos conteúdos trigonométricos para resolução de problemas.

Mas, no que toca às restrições, foi possível identificar uma ruptura epistemológica, como afirma Fonseca (2015), pois o documento considera as primeiras noções trigonométricas no campo do domínio da álgebra, afastando o tema do domínio geométrico. Por fim, houve no quadro de organização do trabalho escolar, uma troca de ordem dos conteúdos trigonometria do triângulo qualquer e de primeira volta com funções seno, cosseno e tangente. Essa inversão pode levantar dificuldades tanto no ensino quanto na aprendizagem.

2.3.3 Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio constituem um documento que visa complementar os PCNEM, esclarecendo pontos necessários e propondo alternativas para o trabalho didático e pedagógico no Nível Médio. As OCEM foram desenvolvidas de forma coletiva, com diferentes representantes de secretarias, gestores e, em alguns casos, estudantes, a fim de atender os anseios relatados por estes. As orientações têm o intuito de guiar e acrescentar elementos e reflexões em apoio ao trabalho docente, mas ressaltam que cabe ao professor ampliar com profundidade os temas que necessitem de maior atenção (BRASIL, 2006).

O volume analisado das OCEM é correspondente às Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, especificamente, no capítulo três, que equivale ao conhecimento matemático; considerando os níveis de codeterminação de Chevallard (2007), a seção citada refere-se ao nível disciplina. O documento pondera três pontos a serem explorados: a escolha de conteúdos; a maneira de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular (BRASIL, 2006), ressaltando, ainda, que o importante é a qualidade do processo de ensino, e não a quantidade de conteúdos a serem abordados.

A partir desses aspectos, as OCEM discutem orientações para o ensino de matemática por meio de quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade – esses blocos correspondem ao nível domínio da escala de níveis de codeterminação de Chevallard (2007). O documento também indica que os conteúdos abordados em cada bloco devem se articular, e não serem trabalhados de modo separado por estarem em blocos distintos.

As funções seno e cosseno, objeto de interesse nesta pesquisa, estão situadas nas OCEM no domínio funções, designadamente, em uma parte, destinada às funções trigonométricas, que corresponde ao nível setor, ocupante de quatro parágrafos no documento.

A seguir, tem-se a primeira parte que aborda o conteúdo funções trigonométricas. Observemos a figura 4:

Figura 4 – As funções trigonométricas abordadas pelas OCEM.

> No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0^0 e 90^0, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90^0 e 180^0. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30^0, 45^0 e 60^0.
>
> ... é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas.

Fonte: Brasil (2006, p. 73).

Verifica-se, no trecho em questão, que o tema funções seno e cosseno deve ser abordado integrado a assuntos complementares, como a trigonometria no triângulo retângulo e as leis do seno e cosseno; essa recomendação é pertinente, pois permite que o aluno consiga articular os conteúdos aprendidos anteriormente com os novos a serem estudados. Além de considerar a trigonometria do triângulo retângulo e da circunferência para trabalhar funções trigonométricas, em especial, funções seno e cosseno, temos uma condição a ser levada em conta.

Vale salientar, a existência de uma interação entre o domínio das funções e da geometria, ou seja, uma articulação para explanação do conteúdo de elementos da geometria para compreensão de elementos da álgebra.

Os parágrafos seguintes demonstram de forma explícita problemas para o trabalho no campo trigonométrico, chamando atenção às associações da trigonometria no triângulo retângulo com as funções trigonométricas.

Figura 5 – As funções trigonométricas abordadas pelas OCEM.

A apresentação das leis dos senos e dos co-senos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por exemplo: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora?

Alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para sen (a+b) e cos (a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.

É preciso atenção à transição do seno e do co-seno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o co-seno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0º e 180º. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve f (x) = seno (x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e co-seno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.

Fonte: Brasil (2006, p. 73-74).

Percebe-se que o documento enfatiza, de maneira relevante, o ensino das funções seno, cosseno e tangente em conexão com a trigonometria e o uso de problemas de cálculo de distâncias inacessíveis para abordar o conteúdo, conduzindo a problemas do cotidiano. As OCEM ainda destacam a importância de diferenciar: ao se trabalhar seno e cosseno no triângulo retângulo, a medida do ângulo é dada em graus; quando transpostos para as funções, utiliza-se o radiano.

Outro fato digno de atenção, é que o documento expõe que as razões trigonométricas cotangente, secante e cossecante não merecem relevo, assim como as fórmulas de sen (a+b) e cos (a+b), sob a justificativa de serem memorizáveis.

Em seguida, o documento apresenta, de maneira genérica, variadas metodologias para o ensino de matemática; sublinha o uso de tecnologias para o ensino de matemática e a estruturação do currículo da disciplina em pauta para o Ensino Médio, mas não explana um ponto específico sobre funções seno e cosseno ou trigonometria.

Constata-se que as OCEM expõem como condições: o ensino de funções seno e cosseno a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo; e a abordagem de problemas que relatam fenômenos de periodicidade e de cálculo de distâncias inacessíveis, para se desenvolver o ensino das funções seno e cosseno.

Quadro 5 – Condições das OCEM para o estudo de funções seno e cosseno.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição 1 OCEM	O ensino de funções seno e cosseno a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo.
Condição 2 OCEM	A abordagem de problemas que relatam fenômenos de periodicidade e de cálculo de distâncias inacessíveis, para se desenvolver o ensino das funções seno e cosseno.

Fonte: a autora (2020).

Analisaremos a seguir a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio.

2.3.4 Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio – BNCC

A Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio (BNCC) é um documento normativo de caráter obrigatório. Construído por diferentes atores do setor educacional, a BNCC tem como intuito dispor de uma referência nacional para escolas públicas e particulares para elaboração de currículos e propostas pedagógicas, a fim de promover um tronco em comum para o ensino nacional, respeitando as particularidades regionais e locais, na tentativa de elevar a qualidade do ensino (BRASIL, 2018).

A BNCC para o Ensino Médio, na subárea de matemática, é dividida respeitando-se as unidades de conhecimento matemático, a saber: números, álgebra, geometria e grandezas e medidas.

No que se refere à matemática e suas tecnologias, a BNCC para o Ensino Médio busca ampliar a aprendizagem dos conteúdos do Ensino Fundamental, integrando a matemática à realidade do educando (BRASIL, 2018). Assim, os conhecimentos estudados durante o Ensino Fundamental devem ser aprofundados, de modo que permitam o desenvolvimento no aluno de uma maior reflexão, tomada de decisões, melhor abstração e senso crítico, sob a finalidade de favorecer a formação do espírito crítico-ativista, privilegiando o bem comum de forma ética.

Compreendendo a estrutura da BNCC, passamos para a identificação e análise das noções matemáticas abordadas neste trabalho: funções seno e cosseno. Nesse sentido, analisamos a BNCC no intuito de responder os seguintes questionamentos do MED: “O que existe? O que não existe? E por que não existe? Como devo conduzir o estudo das funções seno e cosseno? O que devo privilegiar no estudo sobre as funções seno e cosseno?”, e assim revelar as condições e restrições impostas pelo documento aludido para o ensino de funções seno e cosseno.

Segundo a BNCC do Ensino Médio, nessa etapa são definidos:

> [...] um conjunto de pares de ideias fundamentais que produzem articulações entre os vários campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas – e que são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático. Estes são os pares de ideias fundamentais adotados: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações (BRASIL, 2018, p. 520).

Entre os pares citados acima, é possível inferir que as funções seno e cosseno podem aparecer nas variações e constâncias; movimento e posição, sobretudo no plano cartesiano; e nas relações e inter-relações, que nas movimentações, como rotação, translação de figuras e reflexões em retas, podem ser representadas por funções.

A BNCC do Nível Médio explana competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio. Num total de cinco competências, cada uma delas apresenta habilidades interligadas, as quais se relacionam com objetos do saber matemático. Podemos observar na figura 6, as cinco competências.

Figura 6 – Competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil (2018, p. 523).

Diante do exposto, vamos abordar as competências que indicam, ou pelo menos deixam indícios, habilidades que contemplem o trabalho com o nosso objeto do saber, funções seno e cosseno.

Na competência específica (1), que está vinculada à interpretação de situações em contextos diversos, por meio de conceitos e procedimentos matemáticos, das cinco habilidades que contemplam a competência em questão, apenas duas fornecem indicativos de que podem trabalhar com funções seno e cosseno, mas não de maneira explícita.

A habilidade EM13MAT101, a qual é a primeira referente à competência (1), trata de “Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 525). Nessa habilidade, observa-se a utilização de um gráfico de funções para interpretar situações cotidianas, com ou sem o auxílio de tecnologias. Como não especifica a função, enseja uma interpretação para funções seno e cosseno. Outro ponto importante destacado nessa habilidade é a menção do uso de tecnologias digitais, o que aponta que a BNCC, mais uma vez, reforça a ideia, do emprego de tecnologias, abordada no PCN para o ensino de matemática.

A outra habilidade que dá sinais para se trabalhar as funções seno e cosseno é a EM13MAT105, que expressa: “Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras” (BRASIL, 2018, p. 525). Como essas transformações também ocorrem no gráfico da função seno e cosseno, podemos inferir, outra vez, um trabalho com o nosso objeto matemático. As demais habilidades abordadas na competência (1) não contemplam as funções seno e cosseno.

A competência (2) aborda a articulação de conhecimentos matemáticos para investigar e propor ações relacionadas aos desafios atuais, com questões ligadas a problemas sociais, tomadas de decisão, sustentabilidade, saúde, dentre outros. Nessa competência, há três habilidades, mas nenhuma diz respeito ao conteúdo função seno e cosseno. Dentre as habilidades, há destaque para o uso de aplicativos e jogos digitais.

A competência seguinte é a (3), que discute o emprego da matemática, nos campos álgebra, grandezas e medidas, aritmética, geometria, probabilidade e estatística, para solucionar diversos problemas em diferentes contextos, trabalhando a argumentação e a tomada de decisões. Nessa competência, concentram-se 16 habilidades.

Na competência em foco aparece, pela primeira vez de forma explícita, uma habilidade específica sobre funções seno e cosseno. Essa habilidade é a EM13MAT306, que advoga o seguinte:

> (**EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BRASIL, 2018, p. 528, grifos do autor).

Verifica-se na habilidade citada a indicação de tipos de tarefas. Sendo o tipo de tarefa T: “Resolver e elaborar problemas que envolvam fenômenos periódicos reais [...] e comparar as suas representações com as funções seno e cosseno” (BRASIL, 2018, p. 528). Não temos uma praxeologia completa, mas indícios de tipos de tarefas que valorizam problemas e diferentes contextos, bem como o uso ou não de aplicativos de álgebra e geometria. A partir dessa habilidade, pode-se afirmar condições dadas pela BNCC do ensino de funções seno e cosseno por meio de problemas com contextos diversos e com o emprego de aplicativos digitais – condições essas que serão consideradas em nosso MPR e na construção do Percurso de Estudo e Pesquisa. As demais habilidades dispostas na competência (3) não abordam funções seno e cosseno, mas outros objetos do saber matemático.

A competência específica (4) visa compreender distintos registros de representação na solução de problemas matemáticos, a fim de desenvolver o raciocínio matemático, apresentando oito habilidades. Dentre elas, há duas que se destacam porque abordam funções seno e cosseno e funções de modo geral.

A primeira habilidade a ser realçada é a EM13MAT404; esta aborda as funções seno e cosseno de maneira explícita no que concerne ao que se espera ao se trabalhar com esses conceitos, com a finalidade de atender a competência (4). De acordo com a BNCC, a habilidade mencionada visa "identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 531).

No excerto acima, verificam-se indicativos de um tipo de tarefa T: "identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno [...] por meio da comparação das representações [...]" (BRASIL, 2018, p. 531). Novamente, notam-se condições, para o ensino de funções seno e cosseno, inferidas pela BNCC. A partir dessa habilidade, percebem-se duas condições enfatizadas: a primeira é referente ao ensino de funções seno e cosseno e suas características, abordadas tanto no ciclo trigonométrico quanto no plano cartesiano; e a segunda está associada ao uso do apoio de tecnologias digitais.

A outra habilidade, presente na competência específica (4), que pode abordar funções seno e cosseno, é a EM13MAT405, relacionada ao uso geral de funções.

> (**EM13MAT405**) Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento (BRASIL, 2018, p. 531, grifos do autor).

A habilidade referida pode ser abordada com funções seno e cosseno, a depender da sentença explorada, podendo gerar uma função seno ou cosseno. Essa habilidade apresenta um prenúncio de que pode trabalhar função seno e cosseno, dependendo das sentenças escolhidas, conforme exposto.

Por fim, citamos a competência específica (5), a qual pretende

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias [...], identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 532).

Essa competência apresenta 12 habilidades, as quais não mencionam as funções seno e cosseno, ou funções de modo geral, que propiciem indicativos para um trabalho com funções seno e cosseno.

Após a abordagem das competências, a BNCC apresenta uma seção relacionada à organização curricular, que sugere o uso das habilidades, ou da organização curricular por unidades temáticas. Em seguida, expõe um modelo ligado a funções polinomiais de grau 1 e 2 composto pelas habilidades referentes a esses dois conteúdos; não abrangendo, assim, outros conteúdos matemáticos, apenas deixando-os como sugestão, além de ressaltar a importância de manter as cinco competências na organização curricular e de aplicar a matemática à realidade.

Nessa conjuntura, constata-se que a BNCC dispõe condições relacionadas ao trabalho com funções seno e cosseno. Nesse sentido, apresentamos aqui as condições e restrições levantadas na análise do documento.

Quadro 6 – Condições e restrições da BNCC para o ensino de funções seno e cosseno.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição 01	Ênfase no uso de funções (de modo genérico) para interpretar situações em diferentes contextos.
Condição 02	Incentivo à utilização de aplicativos de álgebra e geometria e tecnologias digitais em geral para o ensino de funções seno e cosseno.
Condição 03	Destaque ao emprego de fenômenos periódicos reais para trabalhar a representação de funções seno e cosseno no plano cartesiano.
Condição 04	Utilização de diferentes representações para compreensão das características das funções seno e cosseno.

Fonte: Souza (2020).

Observa-se acima condições identificadas na BNCC, que serão consideradas para o MPR e o PEP.

Analisaremos no próximo tópico um livro da Educação Básica, utilizado em algumas escolas públicas de Nível Médio em Feira de Santana e regiões circunvizinhas e pelos estudantes das turmas de Pré-cálculo durante o Ensino Médio. Ressaltamos a pertinência de olhar a instituição livro didático, pois muitas vezes é o recurso mais usado pelo professor, se não o único, tornando-se, nesses termos, uma instituição dominante. Desse modo, analisaremos a instituição livro didático a fim de revelar as praxeologias dominantes.

2.3.5 Análise do livro didático do Ensino Médio: um olhar para as praxeologias dominantes

O livro didático analisado faz parte da coleção do Ensino Médio **Conexões com a Matemática**, uma obra coletiva, organizada pela editora Moderna, publicada em 2016, cujo responsável é Fábio Martins de Leonardo.

A escolha do livro em pauta ocorreu em virtude de este ser um dos utilizados em algumas escolas públicas de Nível Médio em Feira de Santana e região e por parte dos estudantes, também durante o Ensino Médio, que participaram da corrente pesquisa. Salientamos que, comumente, ao se formarem, os licenciandos em Matemática atuarão nos locais citados.

A metodologia de análise do livro didático, é a utilizada por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012) a qual apresenta três estruturas organizacionais do livro didático: a global que visa por meio de uma tabela apresentar uma visão global do livro com os números de tópicos, ou assuntos por capítulos, salientando o número de páginas ocupadas em cada seção, por meio de uma leitura vertical, ou seja mais superficial, de cima para baixo; a regional, também organizada por meio de uma tabela, porém é relacionada a um capítulo ou tópico da organização global, a qual apresenta o número de definições, teoremas, exercícios, exemplos resolvidos, e das páginas paginas ocupadas em cada seção, por meio de uma leitura vertical, e uma leve leitura horizontal ([...] "observação minuciosa e linear, da esquerda para direita de cada objeto, ideia ou conceito apresentado no livro" (HENRIQUES, 2019, p. 104)); e por fim, a local, a qual apresenta uma tabela similar a da regional, porém acompanha uma análise de cada subseção a partir de uma leitura horizontal, apresentando a organização praxeológica de referência da obra.

A seguir, apresentamos a análises organizacionais do livro analisado, no intuito de descrever o modelo praxeológico dominante do livro analisando, bem como as organizações praxeológicas de referência do mesmo.

Quadro 7 – Estrutura organizacional global do livro **Conexões com a Matemática**.

CAPÍTULOS	ASSUNTO	SEÇÕES	PÁGINAS
01	Ciclo Trigonométrico	6	16
02	Funções trigonométricas	10	22
03	Complementos da trigonometria	6	13
04	Superfícies poligonais, círculo e áreas	6	19
05	Introdução à geometria espacial	6	19
06	Poliedros	8	33
07	Corpos redondos	7	23
08	Matrizes e determinantes	8	17
09	Sistemas Lineares	7	19
10	Análise Combinatória	8	19

Fonte: a autora (2020).

Observa-se no quadro acima, a partir de uma leitura vertical,[2] que o livro analisado é composto por 10 capítulos e, dentre as 232 páginas, são distribuídas as seções dos capítulos. Cada capítulo é organizado por seções destinadas aos conteúdos com exemplos, exercícios resolvidos, exercícios propostos, exercícios complementares, autoavaliação e alguns capítulos de pesquisa e ação.

Em todos os capítulos há, nas margens, notas para reflexão e observações sobre o assunto. A cada início de capítulo há objetivos a serem alcançados no decorrer do estudo. Ademais, a cada capítulo, na primeira página, há uma figura relacionando o conteúdo a ser estudado com um tema do cotidiano. Em alguns capítulos há a exploração da imagem para alcançá-la ao conteúdo; em outros, há somente uma imagem da realidade que pode ser associada ao conteúdo a ser trabalhado.

O livro apresenta um padrão nas seções: os títulos principais possuem uma cor, e as demais seções, secundárias, outras cores. Durante a abordagem dos conteúdos existem, sempre, em cada seção, exercícios resolvidos; em alguns casos, há exemplos, antes das seções, de atividades resolvidas. Ao final de cada seção, a obra apresenta o tópico de exercícios propostos e, ao final do capítulo, têm-se os exercícios complementares e a seção de autoavaliação. Todas as atividades são enumeradas de forma contínua.

[2] "Leitura Vertical de uma obra é uma observação superficial, de cima para baixo, de cada página que lhe compõe, visando compreender a sua estrutura organizacional global, sem se preocupar, inicialmente, com o entendimento dos conceitos ou ideias propostas na obra" (HENRIQUES, 2019, p. 104).

Percebe-se que alguns exercícios resolvidos e propostos estão no mesmo tipo de tarefas, no intuito de exercitar a resolução daquele tipo de tarefa. Nos problemas complementares, há a presença de alguns exercícios que requerem um maior nível de reflexão, exigindo também a interpretação de dados para resolver alguma atividade.

Nota-se que o livro dispõe de uma organização didática clássica: o capítulo começa com um tema, ou uma situação para abordar a noção intuitiva do conceito a ser trabalhado, como o primeiro contato. Em seguida, além da explanação do conteúdo, o livro traz exemplos e exercícios resolvidos a partir de técnicas evidenciadas nas seções. Depois, prossegue com a apresentação dos assuntos do capítulo com exercícios.

Observa-se uma variação entre os momentos 2 e 3 da organização didática exposta por Chevallard (2002), em que o momento 2 é o da exploração dos tipos de tarefa e da elaboração de uma técnica mais apropriada para essa tarefa, e o momento 3 o da constituição do bloco tecnológico-teórico.

Em alguns capítulos há prova das técnicas utilizadas, o momento 4. Ao final do capítulo há uma seção para retomar os conteúdos, através dos exercícios complementares, e institucionalizar o saber, sendo que, ao final do tópico, há uma tabela que relaciona cada questão ao tipo de tarefa e técnica correspondentes, o momento 5. Isso permite que o estudante reveja o assunto sobre o qual teve maior dificuldade para resolver a atividade. A seção de retomada, junto à de autoavaliação, também poderá ser considerada como o momento 6. Saliento que, assim como discute Chevallard (2002), o livro não apresenta uma linearidade nos momentos; estes se intercalam, ao longo de todo o capítulo, simultaneamente e não completamente.

Refinando a análise para o estudo das funções seno e cosseno, realiza-se a apreciação da organização regional do livro didático a partir de uma leitura vertical e de uma leve leitura horizontal,[3] conforme Henriques (2019) ressalta. Essa organização regional permite compreender os objetos de estudo abordados em um capítulo específico. Nesta tese, explicitaremos os capítulos 1, Ciclo trigonométrico – 1ª volta, e 2, Funções trigonométricas. A seguir, explanaremos, no quadro 8, a estrutura organizacional regional dos capítulos 1 e 2.

[3] “A leitura horizontal de uma obra é uma observação minuciosa e linear, da esquerda para a direita, de cada objeto, ideia ou conceito apresentado no livro” (HENRIQUES, 2019, p. 104).

Quadro 8 – Estrutura organizacional regional dos capítulos 1 e 2.

Seção	Título da seção	Subseção	Def.	Ex.	ExRe.	ExP.	P.
1	Arcos de uma circunferência	3	5	1	2	5	3
2	Ciclo trigonométrico	1	2	1	1	4	2
3	Seno, cosseno e tangente	3	4	2	7	17	7
4	Equações trigonométricas	0	1	1	4	4	2
	Exercícios Complementares	-	-	-	1	17	1
	Autoavaliação	-	-	-	-	9	1
	TOTAL	7	12	5	15	56	16

Fonte: a autora (2020).

Verifica-se, nos capítulos mencionados, que há sete subseções, 12 definições, cinco exemplos, 15 exercícios resolvidos e 56 exercícios propostos distribuídos em 16 páginas. O interesse de estudo nesse capítulo é a seção 3, a qual define as relações seno e cosseno no ciclo, acerca das quais realizamos a análise local, a fim de compreender as praxeologias utilizadas, bem como as condições e restrições para o ensino dessas relações. A lente de análise foi a TAD, sob a finalidade de empreendermos um olhar mais apurado nesse contexto.

Além das relações destacadas no capítulo 1, consideramos a estrutura organizacional do capítulo 2, no qual o objeto do saber desta pesquisa vive.

Quadro 9 – Estrutura organizacional regional do capítulo 2: funções trigonométricas.

Seção	Título da seção	Subseção	Def.	Ex.	ExRe.	ExP.	P.
1	Funções Periódicas	0	1	0	1	2	3
2	Ciclo trigonométrico	2	2	1	2	2	3
3	A função seno	1	1	0	2	8	3
4	A função cosseno	1	1	0	1	5	3
5	A função tangente	1	1	0	0	2	2
6	Construção de gráficos	3	3	1	2	6	6
	Exercícios Complementares	-	-	-	0	10	1
	Autoavaliação	-	-	-	-	9	1
	Pesquisa e ação	-	-	-	-	-	1
	Compreensão de texto	-	1	-	-	4	2
	TOTAL	8	10	2	8	48	25

Fonte: a autora (2020).

No capítulo 2, constam oito seções, 10 definições, dois exemplos, oito exercícios resolvidos e 48 exercícios propostos em 25 páginas. Analisamos localmente o capítulo completo, a fim de revelar as condições e restrições para o ensino de funções seno e cosseno, bem como as praxeologias existentes no livro didático selecionado.

Com base na análise organizacional global e regional do livro didático, empreendemos a apreciação local do livro didático, no intuito de demonstrar as praxeologias dominantes sobre o objeto de estudo desta pesquisa. Vale salientar que analisamos a seção 3 do capítulo 1 e o capítulo 2 completo, uma vez que, para compreendermos as escolhas didáticas dos autores do livro contemplado, no campo das funções seno e cosseno, é preciso olhar o que é abordado a respeito do ciclo trigonométrico no primeiro capítulo.

A referida análise foi embasada pela TAD, na tentativa de evidenciar as praxeologias dominantes no livro didático no que concerne às funções seno e cosseno, conforme indicado.

Desse modo, analisamos os tipos de tarefas apresentadas, as técnicas envolvidas para a resolução das tarefas e o bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas expostas, no intuito de caracterizar a organização matemática. No que tange à organização didática, examinamos os momentos didáticos, visto que nos permitem descrever a organização do nosso objeto matemático, função seno e cosseno, na apresentação no livro, evidenciando, assim, as escolhas didáticas dos autores, bem como o que a obra privilegia.

Para dar prosseguimento à apreciação local da seção 3 do capítulo 1 e do capítulo 2 completo, expõe-se na sequência a organização da análise. Primeiro, analisamos localmente a organização matemática, depois a organização didática da seção 3 do capítulo 1, especificamente, a seção 3.1. De forma análoga, analisamos o capítulo 2.

No quadro 10, a seguir, exibir-se-á um recorte da estrutura organizacional regional do livro didático, para um estudo local sobre seno, cosseno e tangente.

Quadro 10 – Estrutura organizacional local sobre seno, cosseno e tangente.

Seção	Título da seção	Subseção	Def.	Ex.	ExRe.	ExP.	P.
3	Seno, cosseno e tangente	3	4	2	7	17	7
	TOTAL	3	4	2	7	17	7

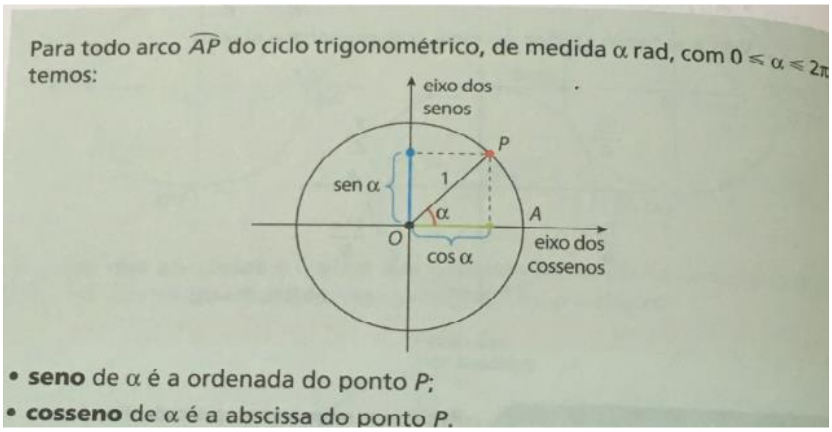
Fonte: a autora (2020).

O capítulo 1 começa a partir da imagem de uma roda gigante; junto à imagem, consta um texto que ressalta que, em anos anteriores, foram trabalhadas as razões trigonométricas em triângulos retângulos. Em seguida, os autores enfatizam que será abordada a definição de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, ampliando-a para aplicação em triângulos quaisquer, servindo de embasamento para o capítulo de funções trigonométricas.

Nesse caráter, é iniciada a seção 1 de arcos de circunferência, salientando-se o comprimento de um arco, a medida angular de um arco e a relação entre grau e radiano. Na seção 2 é explorado o ciclo trigonométrico e sua simetria. Depois, na seção 3, explana-se a abordagem dos conteúdos seno, cosseno e tangente, à qual dedicaremos um exame mais depurado.

Na seção 3, tem-se a subseção 3.1 do capítulo 1, que contempla, inicialmente, o estudo dos conceitos seno e cosseno para arcos da circunferência trigonométrica. Nossa análise abordará a referida seção, já que seno e cosseno são nossos objetos de interesse. Os autores apresentam a relação seno e cosseno de um ângulo α, a partir de um arco no 1º quadrante do ciclo trigonométrico; por meio da abordagem no 1º quadrante, amplia para outros arcos nos demais quadrantes do ciclo trigonométrico.

Figura 7 – Explicação do seno e cosseno de um arco.



Fonte: Leonardo (2019, p. 14).

Observa-se que os autores principiam a discussão definindo seno e cosseno no ciclo; depois, concluem que o eixo das abscissas é o dos cossenos e o eixo das ordenadas é o dos senos. Constata-se que a obra já trabalha o bloco tecnológico-teórico.

Em seguida, o livro apresenta o primeiro exemplo sobre o assunto, o tipo de tarefa T_1: analisar o sinal do seno e cosseno de um arco em um determinado quadrante de medidas α. Essa atividade requer apenas observação dos eixos do seno e do cosseno para ser resolvida. A técnica é τ_1: analisando os eixos do seno e cosseno no quadrante determinado, identifica-se o sinal destes, concluindo-se que o eixo do seno é negativo e o do cosseno, positivo. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

Posteriormente, o livro explana três exercícios resolvidos relacionados ao conteúdo. O primeiro solicita que se escreva em forma crescente o seno de alguns arcos. O tipo de tarefa é T_2: escrever os senos de arcos distintos em ordem crescente. Sendo os arcos da tarefa π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}\ \frac{10\pi}{9}$. A técnica utilizada foi τ_2: converter as medidas dos arcos de radiano para grau, substituindo π = 180º, e, na sequência, representar as medidas no ciclo trigonométrico, para depois analisar e colocar em ordem crescente. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_2$: medida angular de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

O segundo e o terceiro exercícios resolvidos estão relacionados à determinação do seno e do cosseno de alguns arcos. T_3: obter o seno e cosseno de alguns valores em grau e radianos. Os valores dos arcos foram: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\pi, \frac{3\pi}{2}$, 2π e 150º. Houve duas técnicas para resolução desse tipo de tarefa. A técnica 3, associada aos arcos com medidas em radiano; e a 4, ao arco com medida em graus. τ_3: representando as medidas dos arcos em radianos no ciclo trigonométrico, observa-se que o raio vale um, e a partir dessa informação define os senos e cossenos procurados, de maneira imediata. τ_4: determinando o valor por simetria no ciclo trigonométrico, marca-se a medida 150º e procura-se seu correspondente no 1º quadrante, observando, em seguida, o sinal do seno e cosseno de 150º; com o valor do seno e cosseno de 30º chega-se ao resultado. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

Após os exercícios resolvidos, o livro apresenta 12 atividades propostas sobre seno e cosseno. O primeiro exercício solicita a indicação do sinal das expressões envolvendo seno e cosseno. O tipo de tarefa é T_4: indique os sinais das expressões envolvendo seno e cosseno. As expressões das tarefas foram: a) sen 215º. sen 280º e b) (cos50º + cos 325º) . (cos 215º + cos 145º). A técnica recomendada é τ_5: estudando o sinal de cada seno e cosseno, no ciclo trigonométrico, e realizando o jogo de sinais das expressões, encontra-se a resposta. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

O segundo exercício proposto é similar ao primeiro exercício resolvido da seção: solicita colocar em ordem crescente os cossenos dos arcos sem calcular seus valores. Novamente, a técnica esperada pelos autores do livro foi τ_2: converter as medidas dos arcos de radiano para grau, substituindo π = 180º e, em seguida, representar as medidas no ciclo trigonométrico, para depois analisar e colocar em ordem crescente. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_2$: medida angular de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

O terceiro e quarto exercícios propostos solicitavam calcular o valor do seno e cosseno aproximado. Os exercícios são do tipo de tarefa T_5: calcular o valor aproximado de alguns senos, a partir de um valor dado de um seno simétrico. A tarefa foi: dado sen 55º≅0,8, calcule o valor aproximado de sen 125º, sen 235º e sen 305º. A técnica para resolução é τ_6: identificar 55º no círculo, e, por simetria, no ciclo trigonométrico encontrar os outros senos no círculo para depois encontrar os valores aproximados. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

O quinto e o sexto exercícios são similares aos anteriores: pedem que sejam encontrados os valores aproximados de senos e cossenos, respectivamente, através de pontos simétricos no círculo. A técnica, neste caso, já se diferencia um pouco. A técnica, τ_7: identificar os pontos de simetria no círculo e em seguida encontrar os valores aproximados, por meio dos valores aproximados dados dos pontos simétricos. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria. O sétimo exercício também solicita que se encontre o seno de arcos simétricos.

O oitavo e o nono exercícios dizem respeito ao cálculo de expressões contendo senos e cossenos de arcos. Segue o tipo de tarefa T_6: calcule o valor das expressões envolvendo a soma de alguns senos. Temos sen 2π + cos 2π + sen π + cos π como exemplo de uma das expressões. A técnica esperada pelos autores do livro para resolução desse tipo de tarefa é τ_8: encontrar o valor de cada seno e cosseno do arco, e substituir os valores na expressão, calculando o resultado. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

O décimo exercício pede para calcular o valor de um seno e cosseno aproximados com o auxílio de uma calculadora científica do celular, dando o resultado com três casas decimais. Tipo de tarefa T_7: calcular o seno de alguns arcos, através de uma calculadora científica, considerando três casas decimais, verificando se a unidade de medida da calculadora está em radiano. A técnica esperada é τ_9: digitar os comandos na calculadora, utilizando como unidade de mediada o radiano e obter o resultado. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; trigonometria.

O décimo primeiro exercício refere-se ao tipo de tarefa T_8: determinar em quais quadrantes os arcos senos e cossenos possuem o mesmo sinal; quais valores cos α = sen α? A técnica indicada é τ_5: estudando o sinal de cada seno e cosseno, no ciclo trigonométrico, encontra-se a resposta – analisando-se, também, os valores dos senos e cossenos no quadrante encontrado. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

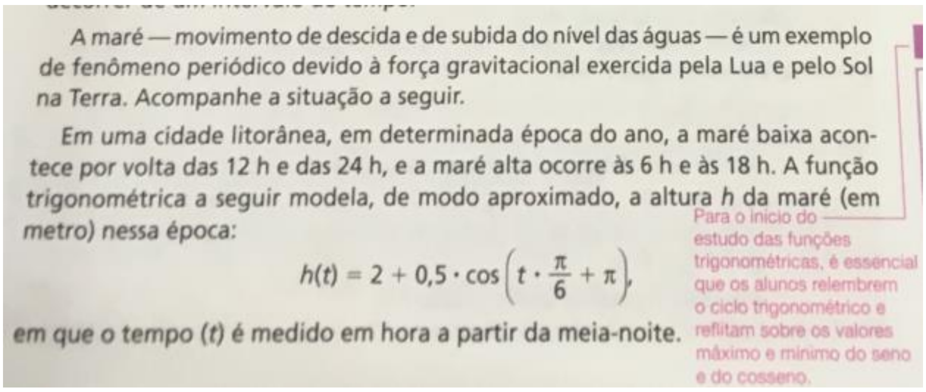
O décimo segundo exercício proposto é do tipo T_9: encontrar o valor de x em grau, com $0º \leq x \leq 360º$, para alguns valores de seno e cosseno. Os valores dados na tarefa foram sen x = $\frac{1}{2}$ e cos x $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$. A técnica esperada pelos autores é f_{10}: analisa no círculo os possíveis valores de seno e cosseno que dão, respectivamente, $\frac{1}{2}$ $e - \frac{\sqrt{2}}{2}$. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_1$: seno e cosseno de um arco; ciclo trigonométrico; trigonometria.

Verifica-se que, na seção em pauta do capítulo 1, os autores definem o eixo das abscissas como eixo dos cossenos, e o das ordenadas como o dos senos; frisam, ainda, a simetria de pontos no ciclo para encontrar os valores dos arcos, incentivando o estudo do sinal dos senos e cossenos em cada quadrante.

Avançando com a análise, temos o capítulo 2, no qual o saber em questão vive. O capítulo referido é destinado às funções trigonométricas, e, devido a isso, sua apreciação é pautada por uma leitura horizontal (HENRIQUES, 2019), o que nos proporciona um maior aprofundamento sobre o objeto do saber funções seno e cosseno na instituição livro didático.

O capítulo é introduzido com a imagem de uma falésia no litoral da Inglaterra; em seguida, apresenta a seção 1, que aborda as funções periódicas. Os autores do livro destacam que muitos fenômenos físicos, sociais e naturais possuem um comportamento periódico ou cíclico; e que as funções trigonométricas podem modelar esses fenômenos, isto é, de modo aproximado, representar as oscilações dos fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo. Depois, o livro expõe um exemplo sobre maré, para iniciar o trabalho com funções periódicas.

Figura 8 – Situação para trabalhar fenômenos periódicos.



A maré — movimento de descida e de subida do nível das águas — é um exemplo de fenômeno periódico devido à força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em uma cidade litorânea, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre às 6 h e às 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:

$$h(t) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6} + \pi\right),$$

em que o tempo (t) é medido em hora a partir da meia-noite.

Para o início do estudo das funções trigonométricas, é essencial que os alunos relembrem o ciclo trigonométrico e reflitam sobre os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno.

Fonte: Leonardo (2016, p. 25).

A situação acima é uma tarefa do tipo T_{10}: determinar a altura da maré em função do tempo medido em horas, a partir de uma modelação da função trigonométrica. A técnica de resolução é f_{11}: atribuir diferentes tempos t na função h(t)= 2+ 0,5 . cos (t . $\frac{\pi}{6} + \pi$), a partir da meia-noite, para encontrar as variações da altura da maré; além da análise do gráfico da função, que já é dado. O bloco tecnológico-teórico [θ, Θ]$_2$: funções periódicas; funções trigonométricas.

Observa-se, no começo, uma das razões de ser considerada pela instituição livro didático para as funções trigonométricas: relacionar/modelizar fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas. Temos como condição, o uso de fenômenos naturais para compreensão das funções trigonométricas. Vale salientar que essas informações comungam com o que difundem os documentos oficiais analisados, a exemplo dos PCNEM, PCN+, OCEM e BNCC, quanto ao ensino de funções trigonométricas para resolver situações ligadas a fenômenos periódicos e cálculo de distâncias inacessíveis.

Após explanação da ocorrência e discussão dos resultados, a obra analisada expõe a definição de funções periódicas, conforme a Figura 9.

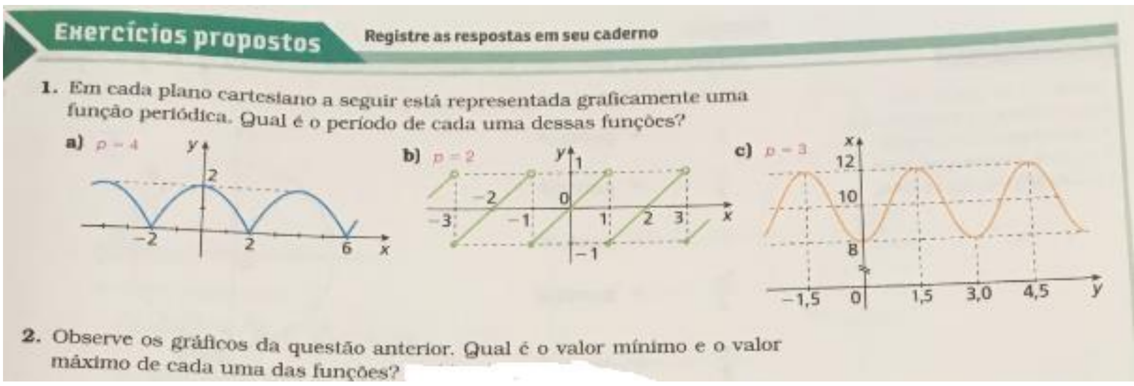
Figura 9 – Definição de função periódica.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

Fonte: Leonardo (2016, p. 26).

O livro também apresenta um exercício resolvido em que se determina o período de uma função periódica. Esse tipo de atividade se repete nos exercícios propostos, os quais exibem gráficos, para que sejam determinados seus períodos e os pontos máximos e mínimos.

Figura 10 – Exercícios propostos sobre funções periódicas.



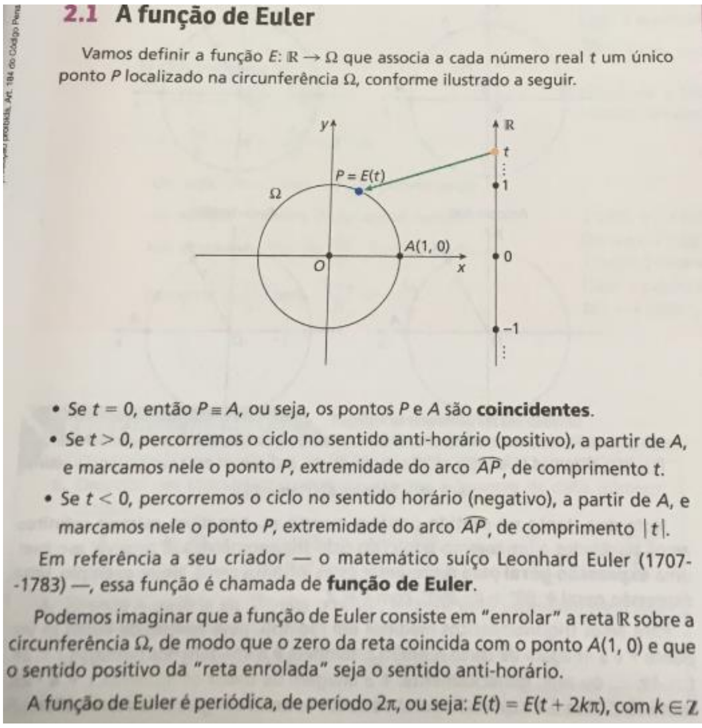
Fonte: Leonardo (2016, p. 27).

Verificamos que a atividade citada não apresenta a lei de formação, apenas o gráfico para que o período das funções seja observado a partir da representação gráfica.

A próxima seção diz respeito ao ciclo trigonométrico. Nesta, há uma referência ao capítulo um, o do ciclo trigonométrico. Os autores esclarecem que haverá uma ampliação do estudo, estendendo o ciclo trigonométrico a infinitas voltas, e não apenas à primeira volta. Atrelado a isso, no livro destaca-se uma associação entre os números reais e os pontos no ciclo trigonométrico.

A obra aborda como subseção do ciclo em pauta a função de Euler. Os autores definem a função e analisam os pontos t = 0, t > 0 e t < 0, concluindo que o período da função é 2π. Vejamos a Figura 11:

Figura 11 – Função de Euler.



2.1 A função de Euler

Vamos definir a função $E: \mathbb{R} \to \Omega$ que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω, conforme ilustrado a seguir.

- Se $t = 0$, então $P \equiv A$, ou seja, os pontos P e A são **coincidentes**.
- Se $t > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento t.
- Se $t < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$, de comprimento $|t|$.

Em referência a seu criador — o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) —, essa função é chamada de **função de Euler**.

Podemos imaginar que a função de Euler consiste em "enrolar" a reta $\mathbb{R}$ sobre a circunferência Ω, de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$ e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

A função de Euler é periódica, de período 2π, ou seja: $E(t) = E(t + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Fonte: Leonardo (2016, p. 27).

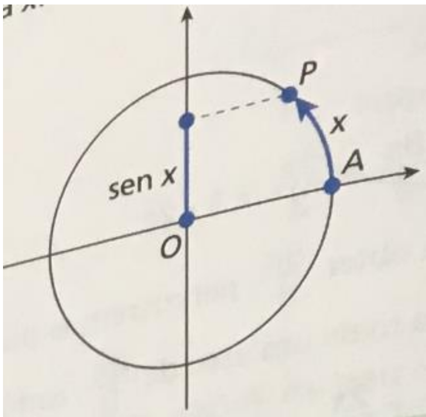
Pode-se perceber, no exemplo acima, um caso das funções periódicas atreladas à ideia de arcos congruentes, fator que auxilia na compreensão das funções trigonométricas.

A subseção seguinte é a de arcos côngruos. Neste tópico, mostra-se que existem infinitos arcos associados a um mesmo ponto. Logo após a explanação, os autores apresentam dois exercícios resolvidos e dois propostos: um resolvido e um proposto sobre marcar a imagem dos números no ciclo trigonométrico, e os outros dois sobre escrever uma expressão geral dos arcos côngruos.

Em seguida, a obra introduz o estudo da função seno a partir de um arco no ciclo trigonométrico: "Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o seno do arco de medida x." (LEONARDO, 2016, p.

30). Por meio da explanação ora citada, o livro apresenta o ciclo trigonométrico, para representar a explicação acima, e define formalmente a função seno.

Figura 12 – Ciclo trigonométrico para explicar a definição da função seno.



Fonte: Leonardo (2016, p. 30).

Observamos no ciclo que, através da projeção do ponto no eixo vertical, define-se seno do arco de medida x. Após essa exploração, o livro delineia função seno da seguinte maneira: “A função **seno** é a função $f{:}R \rightarrow R$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, *f*(x) = sen x.” (LEONARDO, 2016, p. 30, grifos do autor). Nessas duas figuras 11 e 12, temos algumas questões que devem ser trabalhadas de formas mais aprofundada. Discutiremos sobre as mesmas a seguir.

Analisando os exemplos do livro didático destacados na figura 11 e figura 12, o plano é fornecido com uma unidade u para medir comprimentos, por exemplo, o segmento AO, uma vez que o círculo possui um raio de medida 1. A obra analisada, define o seno do arco de medição x, pela definição da função de Euler, o comprimento do arco mede x, na unidade de medida u, caso x>0 (sentido positivo, e anti-horário). Se u for 1 cm, o comprimento do arco é x cm.

Leonardo (2016) aborda o arco de medida x sem esclarecer que é uma medida de comprimento da grandeza. O que pode gerar dificuldades para os alunos confundindo o objeto geométrico e o tamanho. Na definição da função seno apresentada pelo livro, existe apenas uma grandeza que intervém, o comprimento, que corresponde a medida linear do arco, e que ilustra a função recíproca da função de Euler. A medição angular, nesse momento, não é necessária.

Mas, surge uma questão, por que devemos utilizar uma segunda medida de comprimento, o radiano? Temos que a função seno é uma função de variável real, sendo definido o seno do número real x. Porém, se faz necessário estabelecer uma relação entre a trigonometria dos ângulos pela necessidade de coerência do conhecimento matemático.

Podemos observar em alguns exemplos dado no livro, como na figura 7, apresentam a explicação de seno e cosseno de um arco, verificamos que para o x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, sen x = sen $\widehat{AOP}$ o qual o seno do ângulo no triângulo retângulo pode ser considerado como lado oposto ao ângulo reto dividido pela hipotenusa que vale 1, ou seja lado oposto = R =1.

O ângulo é medido em graus, mas se o arco $\widehat{AOP}$ mede *aº (*a graus*)*, como utilizar a função seno para encontrar o seno do ângulo? Temos que calcular a medida x do comprimento do arco interceptado por esse ângulo.

Vamos utilizar um cálculo de proporcionalidade, temos x = $2\pi \times \frac{a}{360}$. Não é fácil, mas a introdução da medida em radiano dos ângulos é igual à medida na unidade u do comprimento do arco do círculo trigonométrica interceptado pelo ângulo.

Assim, 1 rad é a medida do ângulo que intercepta um arco de comprimento medindo 1.u no círculo de trigonométrico.

Um ângulo de medição em radianos x rad intercepta um arco de comprimento x.u no círculo de trigonométrico. Se conhecermos a medida x do ângulo em radianos, seu seno vale sen x. Por similaridade, esse ângulo intercepta um arco de comprimento x.R.u em um círculo de raio R.u.

Com esta visão, existem duas espécies de grandezas diferentes que são medidas com unidades diferentes: os ângulos em radianos ou grau e os comprimentos dos arcos de um círculo na unidade escolhida no plano para definir as referências.

Vale salientar que um ângulo é uma grandeza, a ser diferenciada do setor angular que faz parte do plano.

Já ao que se refere a medição angular de arcos, sabemos que um arco é um conjunto de pontos no plano. Associamos a ele uma primeira grandeza cujo comprimento é medido em uma unidade u. Falamos sobre medição angular, mas não faz sentido se não especificarmos a grandeza que é medida. Este é o ponto crucial, sempre há um trio: objeto; grandeza, que é uma classe de equivalência entre objetos do mesmo tipo; e a medida da grandeza em uma determinada unidade.

Não podemos afirmar que a medida angular de um arco é uma medida do comprimento desse arco, e nem que o radiano é uma unidade de medida para o comprimento de arcos de círculos. Isso, porque todos os círculos teriam a mesma medida de comprimento em radianos, ou seja, 2π. Isso não é consistente acerca da relação de equivalência que define o comprimento da grandeza.

Os círculos podem ter 2π como medida de circunferência, desde que alterem a unidade em cada círculo e tomem, não o radiano, mas o raio R.u. Não é de todo relevante se quisermos comparar comprimentos.

A grandeza que representa a medida angular de um arco é o ângulo no centro que intercepta o arco, independentemente da medida do raio do círculo. Para esta relação de equivalência[4], dois arcos da mesma medida angular, não têm o mesmo comprimento, mas comprimentos proporcionais ao raio do círculo.

Observe que é exatamente isso que é ilustrado na figura 7: a está associado ao ângulo no centro. Mas a afirmação é muito ambígua, pois fala da medição como um raio, sem especificar que se trata de medição angular. E o autor não mostra que o arco tem comprimento a na unidade OA como uma medida. Dessa ambiguidade, pode surgir a seguinte confusão: o arco tem a.rad e a.OA. e assim, tendo 1 rad = OA, o que não teria sentido ter dois nomes para uma mesma unidade de comprimento para medição OA.

Vale salientar, que para definir a grandeza medida pela medida angular, é necessário definir uma relação de equivalência entre o conjunto de todos arcos nos círculos do centro O e não apenas no círculo trigonométrico. Nesta relação, todas as circunferências são equivalentes, em todos os quadrantes de mesma orientação.

O arco AB e o arco A'B '(arcos orientados, isto é, quanto aos vetores existe uma origem e um fim não intercambiáveis) são equivalentes se os pares de semi-retas ([OA), [OB)] e ([OA'), [OB')) e são sobrepostos por rotação sem reversão (se aceitarmos as reversões, chegaremos aos ângulos geométricos).

Essa é uma definição que não usa o conceito de comprimento, mas permite uma explicação da ideia de ângulos centrais idênticos. Porém, em nossa instituição 1º semestre do curso de licenciatura em matemática e no Ensino Médio, a mesma não está inscrita no nível sociedade, uma vez que o objeto matemático vetor, nas instituições citadas não vive. Mas, achamos relevantes destacá-la.

Desse modo, podemos compreender que dois arcos correspondentes aos mesmos ângulos, portanto, terão a mesma medida angular e não têm necessariamente o mesmo comprimento (de fato, a razão das medidas dos comprimentos é igual à razão dos raios), a menos que consideremos que arcos do círculo trigonométrico.

Os físicos distinguem velocidade linear e velocidade angular para um movimento circular, mas, no caso deles, a trajetória não é um círculo de raio 1: dado que, na física, a unidade

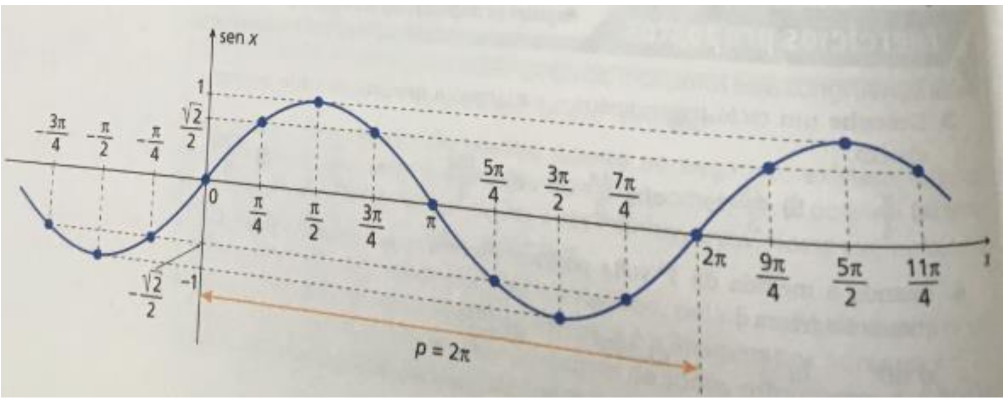
---

[4] Uma relação de equivalência é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva.

de comprimento não é arbitrária, é por metro, a trajetória raramente tem um raio de um metro. Podemos ratificar essa informação, por exemplo, se pegarmos um problema contendo uma roda gigante, dificilmente seu raio será 1 metro. Em matemática, poderíamos dizer que um círculo de raio 1u não é um caso especial, pois basta escolher o raio do círculo como a unidade de comprimento. Isso não é possível na física porque existe um sistema internacional de unidades interligadas, que não podem ser alteradas o tempo todo. Esse fato é importante destacar, uma vez que estamos trabalhando com a modelação de fenômenos físicos periódicos para nosso PEP.

A obra aborda, na sequência, a construção do gráfico da função *f*(x) = sen x, a partir de uma tabela de alguns valores da primeira volta, que os autores subentendem já serem conhecidos; por exemplo: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\ , \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\ , \frac{7\pi}{4}\ e\ 2\pi.$ Antes da construção do gráfico, apresentam certos valores menores que 0 e maiores que 2π, para mostrar que o sen x assume os valores da primeira volta, evidenciando que a função seno é periódica, pois, para todo x $\in R$, temos: sen x = sen (x + 2π) = sen (x + 4π) =, ...,= sen (x + $2k\pi$). Com base nas informações aludidas, o livro salienta que a curva obtida no intervalo [0, 2π] se repete para x > 2π e x < 0.

Figura 13 – Gráfico da função seno x.



Fonte: Leonardo (2016, p. 30).

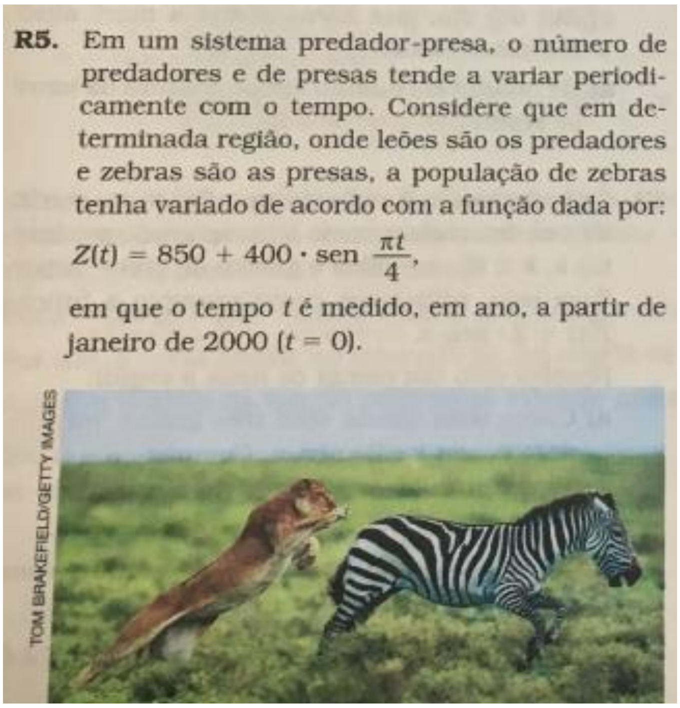
Verifica-se que, no momento exposto acima, os autores do livro não mencionam qualquer forma diferenciada para exploração do gráfico e das características da função – o que pode ser considerado como uma restrição da obra –, demonstrando apenas um tipo de tarefa T_{11}: esboçar o gráfico da função sen x. Tendo como técnica f_{12}: a partir da construção da tabela de valores do seno da primeira volta, e de alguns valores maiores que 2π e menores que 0, esboça-se o gráfico atentando para algumas características como a periodicidade. E o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

Posteriormente, o livro expõe as características das funções seno, a saber: o domínio e contradomínio por definição são iguais ao conjunto dos números reais; o gráfico é chamado de senoide; é uma função periódica, com período de 2π; é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo [-1,1]; e tem amplitude igual a 1. Vale salientar, que o significado de amplitude aparece entre parênteses, no momento em que é citada a amplitude igual a 1, sendo acentuado como a metade da diferença entre ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico. Como observação, os autores pontuam um pequeno esboço de uma senoide, sob o intuito de apontar como identificar no gráfico uma ordenada máxima e uma mínima e a amplitude.

Alicerçado nas explicitações sobre a função seno e suas características, o livro exibe dois exercícios resolvidos. O primeiro exercício resolvido é uma tarefa do tipo T_{12}: determinar os valores reais de m para os quais existe a igualdade sen x = 3m – 2. A técnica utilizada no livro para resolução é a f_{13}: partindo da premissa de que os valores da função seno variam no intervalo [-1,1], tem-se: $-1 \leq sen\ x\ \leq 1$. Substituindo-se sen x por 3m – 2 obtém-se: $-1 \leq 3m - 2\ \leq 1$; adicionando 2 em todos os membros: $1 \leq 3m\ \leq 3.$ Dividindo todos os membros por 3, temos os valores em R que m assume: $\frac{1}{3} \leq m\ \leq 1$. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

O exercício resolvido seguinte é uma situação que envolve a modelização de um fenômeno periódico.

Figura 14 – Exercício de modelação matemática.


R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi t}{4},$$

em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 ($t = 0$).

Fonte: Leonardo (2016, p. 31).

A partir da situação exposta, os autores fazem os seguintes questionamentos: quantas zebras havia em janeiro de 2016? Qual foi a população mínima de zebras atingidas nessa região? De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima? De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete? (LEONARDO, 2016).

Temos tipos de tarefas T_{13}: modelar o fenômeno periódico através da função seno. A técnica de resolução, privilegiada pelo livro, foi f_{14}: substituir o tempo e encontrar os valores solicitados; igualar o valor mínimo da função para descobrir a população mínima; encontrar por substituição o período em anos em que a função dada se repete. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

Após os exercícios resolvidos, o livro expõe oito exercícios propostos para trabalhar a função seno. O primeiro deles está vinculado à tarefa do tipo T_{14}: calcular alguns valores de seno que estão em grau e radianos com sinais opostos. A técnica esperada era f_{15}: relacionar os senos comparando-os com os valores de primeira volta e, em seguida, obter os resultados. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

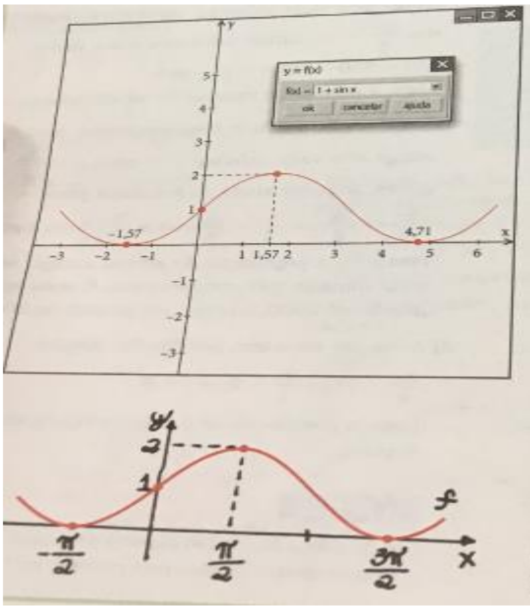
O exercício proposto seguinte está ligado ao primeiro, pois solicita qual relação pode ser estabelecida entre sen α e $\text{sen}(-\,\alpha)$. A técnica esperada para esse tipo de tarefa é f_{16}: a partir da observação realizada de senos com sinais opostos, perceber a relação $\text{sen}(-\,\alpha) = -\text{sen}(\,\alpha)$ ou $\text{sen}(\,\alpha) = -\text{sen}(-\,\alpha)$, ou seja, observar que a função seno é ímpar. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

O terceiro exercício proposto era uma tarefa do mesmo tipo do exercício resolvido 1: determinar um valor de k para que a função sen x = 2k -3. Desse modo, a técnica foi a f_{13}: pressupondo que os valores da função seno variam no intervalo [-1,1] resolve e encontra o resultado. E o bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

O quarto exercício é uma tarefa do tipo T_{11}: esboçar o gráfico para f(x) = sen x para x ∈ a um determinado intervalo. O intervalo dado na tarefa foi $[2\pi, 4\pi]$, o que diferencia a atividade em questão é o intervalo. A técnica empregada é também a f_{12}: por intermédio da construção da tabela de valores do seno da primeira volta, e de alguns valores maiores que 2π e menores que 0, esboça-se o gráfico e observam-se algumas características, como a periodicidade. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

O quinto exercício proposto envolve a comparação de um gráfico feito por um *software* e outro manual, sendo o gráfico da função f(x)= 1 + sen x.

Figura 15 – Gráfico da função seno x.



Fonte: Leonardo (2016, p. 32).

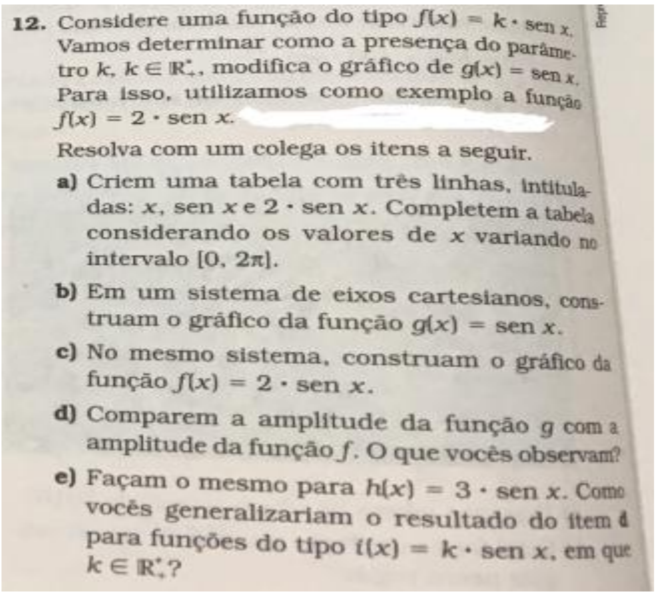
Verifica-se, a partir da imagem, que no gráfico feito pelo *software* os valores estão em radiano; porém, o valor de π no eixo das abscissas está representado por números decimais. Já no gráfico feito manualmente, os valores estão também em radiano, mas os números do eixo das abscissas estão no formato fracionário, tendo no numerador o número π sem sofrer conversão para decimais.

As tarefas solicitadas foram: T_{15}: explicar o porquê um aluno achou o período de 6,28 e o outro, que fez o gráfico manual, encontrou 2π. A técnica esperada é f_{16}: compreender que um valor em radiano pode ser representado tanto por números decimais, quanto pelo número π. E, a partir dessa compreensão, explicar que um encontra-se no formato fracionário e o outro no formato decimal, por isso que 6,28 é o valor aproximado de 2 π. T_{16}: qual a amplitude, domínio e imagem do gráfico? A técnica para resolução foi f_{17}: observar no gráfico as informações pedidas e responder o valor da amplitude, quais são o domínio e a imagem. A T_{17}: comparar f(x)= sen x com f(x)= 1 + sen x e explicar o que se pode depreender. A técnica é f_{18}: a partir da comparação das funções, perceber as transformações do gráfico, ao comparar a função dada com a função base. O bloco tecnológico-teórico é o mesmo, $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

Os exercícios propostos seis e sete estão vinculados a situações para modelização do fenômeno, através da função seno. O primeiro refere-se à procura de emprego em uma empresa; já o sete retoma a atividade, da abertura do capítulo, sobre as marés. A organização matemática é igual à do exercício resolvido predador-presa (Figura 14). T_{13}: modelar o fenômeno periódico por meio da função seno. A técnica de resolução, privilegiada pelo livro, foi f_{14}: substituir o tempo e encontrar os valores solicitados; igualar o valor mínimo da função para descobrir a população mínima; encontrar por substituição o período em anos em que a função dada se repete. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

Por fim, o último exercício proposto sobre função seno é do tipo T_{17}: determinar como um parâmetro K da função com f(x)= k . sen x modifica o gráfico de uma função g(x)= sen x, partindo de um caso específico.

Figura 16 – Exercício proposto sobre função seno.



12. Considere uma função do tipo $f(x) = k \cdot \text{sen } x$. Vamos determinar como a presença do parâmetro k, $k \in \mathbb{R}^*_+$, modifica o gráfico de $g(x) = \text{sen } x$. Para isso, utilizamos como exemplo a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

Resolva com um colega os itens a seguir.

a) Criem uma tabela com três linhas, intituladas: x, sen x e $2 \cdot \text{sen } x$. Completem a tabela considerando os valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Em um sistema de eixos cartesianos, construam o gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

c) No mesmo sistema, construam o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

d) Comparem a amplitude da função g com a amplitude da função f. O que vocês observam?

e) Façam o mesmo para $h(x) = 3 \cdot \text{sen } x$. Como vocês generalizariam o resultado do item d para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$, em que $k \in \mathbb{R}^*_+$?

Fonte: Leonardo (2016, p. 32).

A técnica de resolução para esse tipo de tarefa foi f_{18}: construindo uma tabela para as funções f(x)= 2 . sen x e g(x)= sen x, variando de [0,2π], monte os dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, compare as características de ambos e depois generalize o resultado encontrado. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

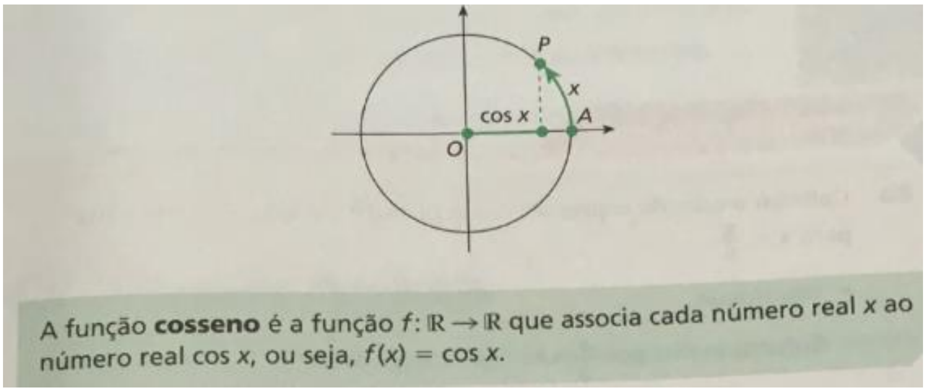
Constata-se que as atividades possuem o intuito de exercitar o cálculo da função, bem como a sua aplicação em fenômenos periódicos. Porém, não houve a utilização de um *software* para compreensão das características da função seno.

A seção subsequente refere-se à função cosseno:

> Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o cosseno do arco de medida x (LEONARDO, 2016, p. 33).

Após essa explicação, os autores apresentam o ciclo trigonométrico e, em seguida, a definição da função cosseno, conforme Figura 17.

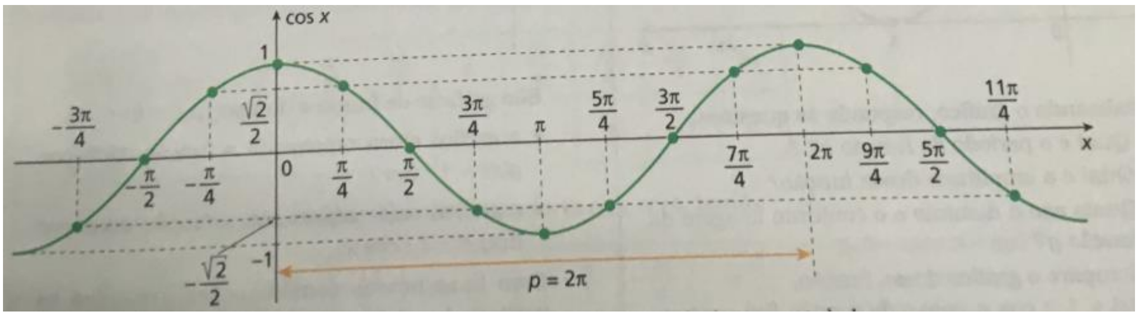
Figura 17 – Definição da função cosseno.



Fonte: Leonardo (2016, p. 33).

De forma análoga à função seno, o livro aborda a construção do gráfico da função *f*(x)= cos x através da tabela de alguns valores da primeira volta, que os autores subentendem já serem conhecidos; por exemplo: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, $\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$ $e\ 2\pi$. Antes da construção do gráfico, expõem certos valores menores que 0 e maiores que 2π, para mostrar que o cos x assume os valores da primeira volta, indicando que a função cosseno é periódica, pois, para todo x $\in R$, temos: cos x = cos (x + 2π) = cos (x + 4π) =, ...,= cos (x + $2k\pi$). Fundamentado nessas informações, o livro salienta que a curva obtida no intervalo [0, 2π] se repete para x > 2π e x < 0.

Figura 18 – Gráfico da função cosseno.



Fonte: Leonardo (2016, p. 33).

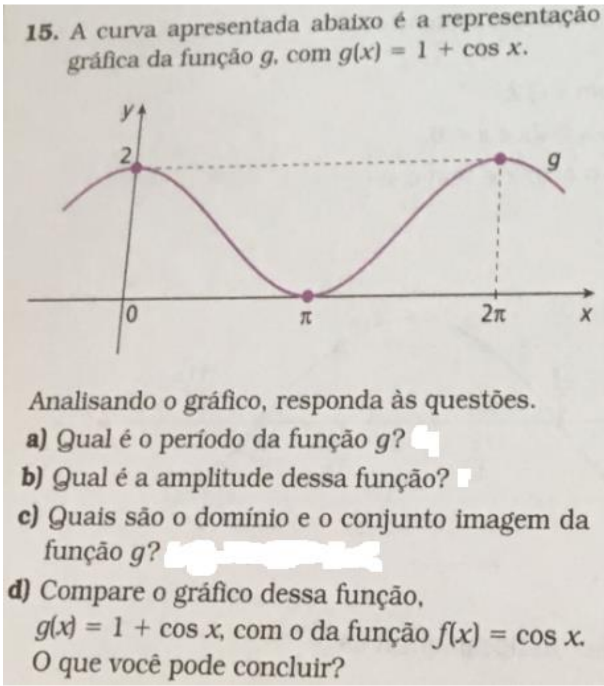
Ao exibir o gráfico da função cosseno, o livro ressalta que esse gráfico é uma translação da senoide de $\frac{\pi}{2}\ rad$ para a esquerda, expondo, em seguida, as características da função cosseno, a saber: domínio e contradomínio são iguais a R; por meio da representação gráfica da função cosseno temos que é periódica, com período 2π; é limitada; seu conjunto imagem é [-1,1]; sua amplitude é igual a 1.

Nessa seção o livro apresenta um exercício resolvido e cinco exercícios propostos. O exercício resolvido é do tipo T_{18}: calcular o valor da expressão uma soma de funções cossenos para um valor de x específico. A expressão da tarefa foi: cos x + cos 2x + cos 3x + ... + cos 10x para x= $\frac{\pi}{3}$. A técnica trabalhada no livro é f_{19}: substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtém-se os valores de cada cosseno, e, na sequência, realiza-se a operação de adição. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_4$: função cosseno; funções trigonométricas. O primeiro exercício proposto é uma tarefa do mesmo tipo que T_{18} e requer igual técnica para a resolução f_{19}.

A segunda atividade proposta solicita o esboço do gráfico da função cosseno. É um tipo de tarefa similar à T_{11}, da função seno. Desse modo, classificamos como um subtipo de tarefa T_{11}, denominando-a de $T_{11.1}$. Tarefa do tipo $T_{11.1}$: esboçar o gráfico para f(x) = cos x para $x \in [2\pi, 4\pi]$, o que as diferencia é o intervalo. A técnica empregada é também a $f_{12.1}$: a partir da construção da tabela de valores do cosseno da primeira volta, e de alguns valores maiores que 2π e menores que 0, esboça-se o gráfico e observam-se algumas características, como a periodicidade. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_4$: função cosseno; funções trigonométricas.

O terceiro exercício solicita a análise do gráfico de uma função cosseno; através da análise, realiza alguns questionamentos a serem respondidos.

Figura 19 – Exercício proposto 3 sobre função cosseno.



15. A curva apresentada abaixo é a representação gráfica da função g, com $g(x) = 1 + \cos x$.

Analisando o gráfico, responda às questões.

a) Qual é o período da função g?

b) Qual é a amplitude dessa função?

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função g?

d) Compare o gráfico dessa função, $g(x) = 1 + \cos x$, com o da função $f(x) = \cos x$. O que você pode concluir?

Fonte: Leonardo (2016, p. 34).

Essa atividade é similar ao quinto exercício proposto da função seno. Nesse sentido, temos o mesmo tipo de tarefa, porém, desta vez, com a função cosseno. As tarefas solicitadas foram do seguinte tipos: T_{16}: qual a amplitude, domínio e imagem do gráfico? A técnica para a resolução esperada foi f_{17}: observar no gráfico as informações pedidas e responder o valor da amplitude, quais são o domínio e a imagem solicitadas. A T_{17}: comparar f(x)= cos x com g(x)= 1 + cos x e explicar o que se pode denotar. A técnica esperada é f_{18}: por meio da comparação das funções, observar as modificações do gráfico ao se comparar a função dada com a função base. O bloco tecnológico-teórico é o mesmo, $[\theta, \Theta]_4$: função cosseno; funções trigonométricas.

Vale frisar que os autores trazem, na obra, como nota para reflexão, o significado de função par e ímpar, solicitando que o leitor reflita sobre a paridade da função cosseno.

Continuando com as análises dos exercícios propostos, a atividade seguinte exibe o esboço do gráfico *f(x)= 1 . cos x* e do gráfico de *h(x)= -1 . cos x*, em um mesmo plano cartesiano e no intervalo $[0, 2\pi]$. Em seguida, pede o esboço do gráfico da função *m(x)= sen x* e *n(x)= -sen x* em um mesmo plano cartesiano e no intervalo $[0, 2\pi]$. O tipo de tarefa é T_{11}: esboçar o gráfico para f(x) = sen x para $x \in [0, 2\pi]$. A técnica empregada é também a f_{12}: a partir da construção da tabela de valores do seno esboça-se o gráfico. E o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_3$: função seno; funções trigonométricas.

O último exercício proposto da seção cosseno é uma situação sobre a dengue, que utiliza a função cosseno para modelização (Figura 20).

Figura 20 – Exercício proposto 5 sobre função cosseno.

Diversas doenças são sazonais, ou seja, em determinado período do ano têm maior ocorrência. Esse é o caso da dengue, que tem maior ocorrência no período quente e chuvoso do ano, época que propicia condições mais favoráveis para a proliferação do mosquito transmissor da doença.

O número de casos de dengue, em determinada região, variou aproximadamente de acordo com a função $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$, em que t é o mês do ano, sendo $t = 1$ para janeiro, $t = 2$ para fevereiro, ..., $t = 12$ para dezembro.

Quantos casos ocorreram no pico da doença? Em qual mês ocorreu esse pico?

Fonte: Leonardo (2016, p. 34).

A organização matemática é a mesma dos exercícios para a função seno, com modelização de fenômenos periódicos; o que a diferencia é a função, que agora é cosseno. Logo, temos uma subtarefa da tarefa T_{13}, que denominaremos $T_{13.1}$. Esse tipo de tarefa é $T_{13.1}$: modelar o fenômeno periódico através da função cosseno. A técnica de resolução, privilegiada pelo livro, foi $f_{14.1}$: substituir o tempo e encontrar os valores solicitados. O bloco tecnológico-teórico é $[\theta, \Theta]_4$: função cosseno; funções trigonométricas.

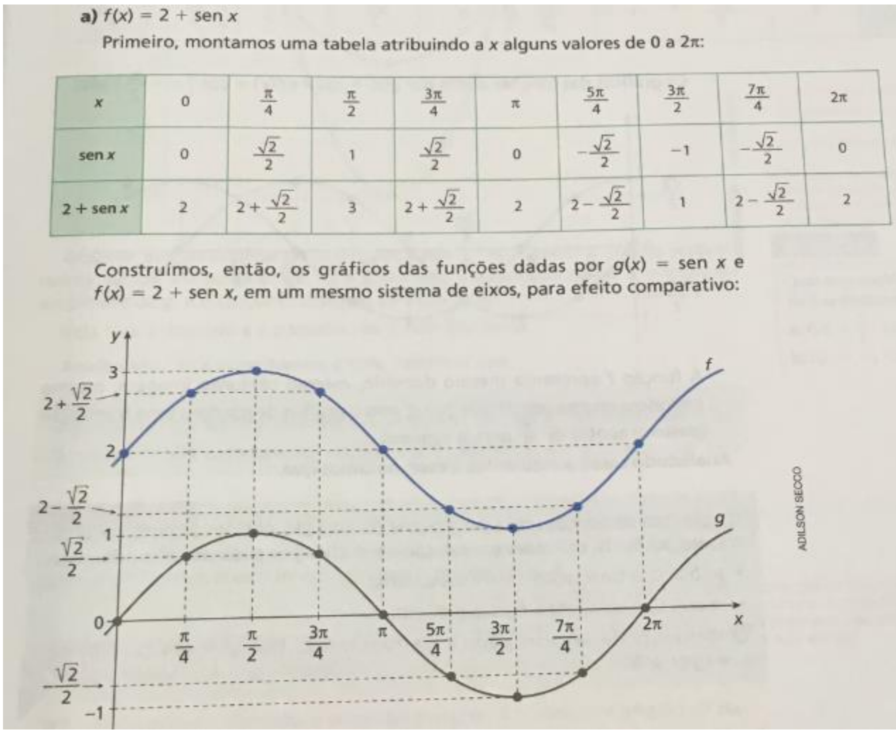
A seção posterior, no capítulo 2, é a função tangente. Não exploraremos de maneira ampla a referida seção, uma vez que não faz parte do objeto de estudo neste trabalho. Pontuo, contudo, que o livro apresenta a função a partir do ciclo trigonométrico; na sequência, aborda a definição formal. Depois, expõe uma tabela de valores, mostrando quando a função tangente não é definida, o seu gráfico e suas características. A seção exibe somente dois exercícios propostos sobre a função tangente e nenhum resolvido.

A seção seguinte é a de construção de gráficos. De acordo com os autores, o tópico mencionado tem o objetivo de oportunizar a elaboração de gráficos mais complexos, sem o auxílio da tabela, apenas para compreensão do papel que cada parâmetro desempenha nas funções trigonométricas.

O primeiro tópico da seção abordado na obra é a translação do gráfico. Os autores definem transladar como deslocar, e destacam que, em seguida, os leitores verão outros gráficos que podem ser obtidos por meio da translação vertical e horizontal de gráficos de funções fundamentais – conforme Figura 21.

O livro enfatiza que o gráfico f é o gráfico g, transladado duas unidades para cima. O seu domínio, amplitude e período não se alteram, somente a imagem; agora, o gráfico f oscila de 1 a 3, isto é, o conjunto imagem é [1,3]. Através do exemplo citado, é definido que os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação a $y = \text{sen } x$, sendo que, para $c > 0$, a translação é para cima, e para, $c < 0$, a translação é para baixo. Ainda é salientado que o mesmo é válido para as funções $y = c + \cos x$ e $y = c + \text{tg } x$.

Figura 21 – Exemplo da translação do gráfico da função seno.



a) $f(x) = 2 + \text{sen } x$

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

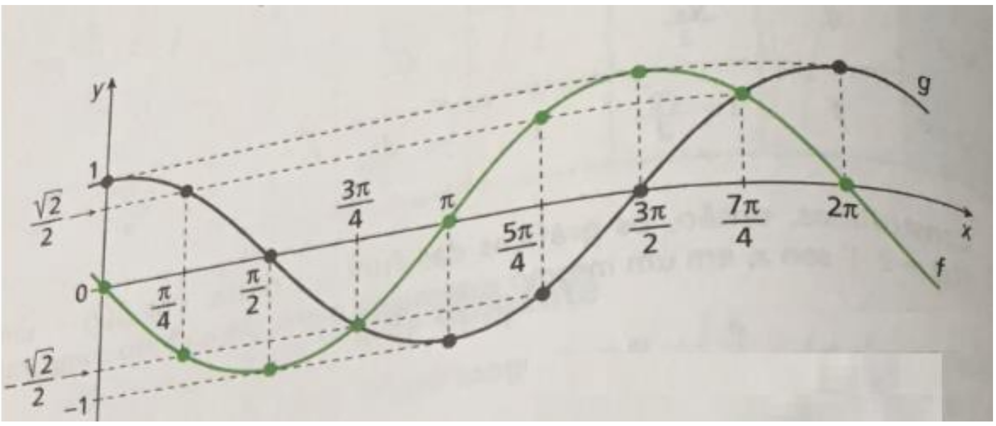
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 + sen x	2	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = 2 + \text{sen } x$, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo:

Fonte: Leonardo (2016, p. 37).

De maneira análoga, o livro exibe o segundo exemplo para trabalhar translação, f (x) = $\cos x + \frac{\pi}{2}$. Em seguida, expõe uma tabela com quatro linhas e nove colunas que representam: a primeira linha o valor de x; a segunda cos x; a terceira $x \ \frac{\pi}{2}$; e a quarta = $\cos x + \frac{\pi}{2}$. Logo depois, os autores apresentam o esboço dos gráficos das funções f (x) = $\cos x + \frac{\pi}{2}$ e g(x)= cos x.

Figura 22 – Exemplo da translação do gráfico da função cosseno.

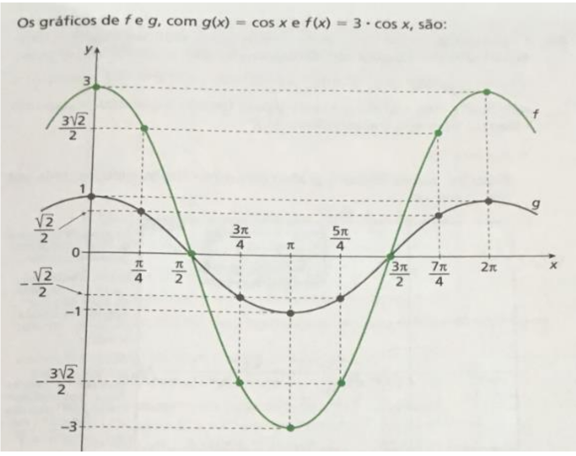


Fonte: Leonardo (2016, p. 37).

Após análise do gráfico, os autores revelam que as características domínio, imagem, periodicidade e amplitude não sofreram alterações, apenas houve uma translação para a esquerda de $\frac{\pi}{2}$ unidades; e, a partir de casos semelhantes, concluem que os gráficos das funções do tipo y = $\cos(x + \ b)$ são obtidos por intermédio de uma translação de |b| unidades em relação ao gráfico y = cos x, o qual, para b > 0, a translação é para a esquerda e, para b < 0, a translação é para a direita. Os autores ainda declaram que a translação horizontal também é verificada para as funções y = sen (x + b) e y = tg (x + b).

No que se refere à amplitude, o livro apresenta um tópico sobre alteração de amplitude, a qual explicita que haverá um "esticamento" ou "achatamento" de alguns gráficos das funções fundamentais para apreensão desse comportamento. Assim, dada a função f(x) = 3. Cos x, expõe uma tabela com valores para x, variando de 0 a 2π, e, na sequência, o gráfico da função, junto ao gráfico da função fundamental y = cos x, como pode ser verificado na Figura 23.

Figura 23 – Exemplo do gráfico da função com a amplitude alterada.



Fonte: Leonardo (2016, p. 37).

Os autores ressaltam que o gráfico sofreu um "esticamento" vertical, ou seja, ao multiplicar g(x) = cos x por 3, alterou-se a imagem do gráfico; ele começa então a oscilar entre -3 e 3. A amplitude muda para 3, a imagem [-3,3], porém o domínio e o período não foram modificados. Através de casos semelhantes, os autores generalizam a amplitude, representada pela letra "d", sendo que as funções trigonométricas do tipo y = d . cos x têm amplitude |d|; pontuam, ainda, que o mesmo ocorre para funções do tipo y = d . sen x.

O livro apresenta dois exercícios resolvidos sob o intento de nortear os passos para resolução das atividades propostas, frisando que nos exercícios da referida seção é pertinente não incentivar a construção do gráfico por meio da tabela, mas a partir das análises dos parâmetros.

O primeiro exercício resolvido é do tipo T_{19}: determinar o conjunto imagem, período e amplitude de uma determinada função. Sendo a função dada f(x): 2 . cos $(\pi - \frac{\pi}{4})$. A técnica esperada para resolução é a f_{20}: por intermédio da comparação da função f(x): 2 . cos $(\pi - \frac{\pi}{4})$ com g(x) = cos x, analisa cada parâmetro e obtém as respostas esperadas.

O segundo exercício resolvido solicita a construção de um gráfico por meio de um *software* de construção de gráficos, passo a passo, partindo do gráfico de uma função trigonométrica fundamental até chegar em f(x) = 2 + 2 . cos $(\pi - \frac{\pi}{4})$; após a construção, a atividade pede para determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f. O tipo de tarefa é T_{20}: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica passo a passo através de um *software* para construção de gráficos. A técnica exposta pelo livro é f_{21}: a partir do esboço da função trigonométrica fundamental g(x) = cos x, construir no *software* um gráfico para cada parâmetro que altera a função basilar; em seguida, fazer um gráfico completo com todas as modificações, e, logo após, analisar os gráficos feitos a fim de compreender as características da função. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

Na sequência, o livro exibe quatro exercícios propostos. O primeiro deles, solicita que o leitor, por meio da análise de dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, descubra a função correspondente, sendo que as funções são dadas. A tarefa do tipo T_{21}: analise o gráfico e descubra a função equivalente. A técnica de resolução é f_{21}: com base no gráfico, analisar as características da função, bem como seus parâmetros, e identificar a função. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

O segundo exercício proposto é uma subtarefa do tipo T_{20}, a diferença entre elas é a não utilização do *software*; denominamos de $T_{20.1}$: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica para construção de gráficos. A técnica empregada pelo livro é f_{22}: a partir do esboço da função trigonométrica fundamental g(x) = sen x, construir o gráfico considerando os parâmetros que alteram a função fundamental e analisá-los para abranger as características da função. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

O terceiro exercício é do tipo T_{21}: determinar, através do gráfico de uma função trigonométrica, os valores dos parâmetros a e b. A técnica esperada é f_{23}: analisando o gráfico dado na questão, obtenha os valores dos parâmetros. E o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

O quarto exercício proposto é do tipo T_{20}: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica passo a passo por meio de um *software* para construção de gráficos. A técnica utilizada pelo livro é f_{21}: através do esboço da função trigonométrica fundamental g(x) = cos x, construir no *software* um gráfico para cada parâmetro que modifica a função fundamental; em seguida, elaborar um gráfico completo com todas as mudanças e analisá-lo para apreender as características da função. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

O tópico seguinte abordado pelo livro é alteração do período. Nesse tópico, os autores trabalham a alteração de período de gráficos das funções trigonométricas. Utilizando o exemplo f(x)= sen 2x, comparando-o com g(x)= sen x, tanto na tabela de valores quanto no esboço do gráfico, mostram que apenas o período se modificou; as demais características se mantiveram. Desse modo, concluem definindo que as funções trigonométricas do tipo y = sen (ax) ou y = cos (ax) têm período $\frac{2\pi}{|a|}$. Nas funções do tipo y = tg (ax) o período é $\frac{\pi}{|a|}$.

As atividades referentes ao tópico supracitado foram as propostas, com duas questões. O tipo de tarefa é T_{22}: determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude das funções destacadas. A técnica de resolução é f_{24}: analisando a lei de formação das funções trigonométricas, obtenha as características solicitadas. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

O exercício seguinte solicita a construção do gráfico de quatro funções diferentes. Essa tarefa é do tipo $T_{20.1}$: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica para construção de gráficos. A técnica exposta pelo livro é f_{22}: por intermédio do esboço da função trigonométrica fundamental g(x) = sen x, construir o gráfico considerando os parâmetros que alteram a função fundamental e alcançá-los para compreender as características da função. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]_5$: construção de gráficos; funções trigonométricas.

No que tange aos exercícios complementares, o livro é composto de 12 questões divididas da seguinte forma: uma atividade do tipo T_{23}: determinar a expressão geral de alguns arcos côngruos; uma atividade do tipo T_{24}: desenhar um ciclo trigonométrico e representar a imagem de alguns números reais; quatro atividades sobre modelização de fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas do tipo de tarefa T_{13} e $T_{13.1}$: modelar o fenômeno periódico através da função seno ou cosseno; uma atividade do tipo $T_{20.1}$: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica para construção de gráficos; duas atividades do tipo T_{21}: analise o gráfico e descubra a função correspondente e/ou suas características; e T_{25}: determinar o maior e o menor valor de uma determinada expressão (nessa tarefa a expressão foi 4 – sen 10x).

Observa-se que as atividades complementares apresentam uma organização didática clássica, a qual as organiza em um grau de dificuldade do menor para o maior.

Na seção de autoavaliação, constam atividades de múltipla escolha, as quais têm como objetivo retomar os conceitos trabalhados. A finalidade da seção é relacionar as questões expostas com os objetivos do capítulo, para, assim, perceber, de acordo com as questões que o aluno não acertou, o conteúdo do capítulo que gerou maior dificuldade.

O primeiro objetivo foi relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos – na seção de autoavaliação três questões contemplam esse desígnio; o segundo objetivo foi estender o conceito de ciclo trigonométrico em R – oito questões das nove contemplam esse intento. Por fim, o último objetivo foi construir e analisar gráficos de funções trigonométricas – quatro questões contemplam essa finalidade.

Nesse segmento, foram duas atividades do tipo T_{24}: desenhar um ciclo trigonométrico e representar a imagem de alguns números reais; três atividades sobre modelização de fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas do tipo de tarefa T_{13}; e quatro do tipo $T_{20.1}$: esboçar o gráfico com transformações de uma função trigonométrica para construção de gráficos.

2.3.5.1 Quanto à organização didática do livro didático analisado

Tomando Chevallard (2001) como suporte teórico, através da organização didática do livro analisado, vamos revelar as escolhas didáticas dos autores, bem como as condições e restrições consideradas na obra.

Iniciamos a análise com o capítulo 1, no qual o cerne da apreciação da organização matemática foi a seção “seno, cosseno e tangente”. O capítulo é introduzido com a imagem de uma roda gigante, exibindo em seguida o que será trabalhado. Não há uma tarefa inicial que problematize os conteúdos a serem abordados. Na sequência, tem-se o trabalho com arcos de uma circunferência, definindo-se alguns conceitos. Percebe-se que não houve o primeiro momento/primeiro encontro, conforme os momentos de estudo de Chevallard (2001), já que é priorizada a exploração do bloco tecnológico-teórico, configurando o momento de estudo 3.

Após a abordagem do momento 3, o livro expõe os exercícios resolvidos e os propostos, os quais mostram a prova da técnica e sua institucionalização. Esse formato de escolha didática também ocorre nas demais seções, a saber: a do ciclo trigonométrico, a de seno, cosseno, tangente, e, por fim, das equações trigonométricas.

Inferimos que o momento de avaliação está na seção de autoavaliação, na qual o livro apresenta exercícios a serem realizados, de acordo com cada objetivo do capítulo, expondo, ao final, uma tabela que explicita a relação de cada questão com o conteúdo estudado, aconselhando os alunos a retomar o estudo dos assuntos das questões em que não obtiveram êxito.

Quanto ao capítulo 2, funções trigonométricas, dispusemos em um quadro a estrutura da organização didática do livro, para, em seguida, aprofundar a análise. Vejamos o Quadro 11:

Quadro 11 – Estrutura da organização didática do livro.

Funções periódicas	**Ciclo trigonométrico**	**A função seno**	**Função cosseno**	**Função tangente**	**Construção de gráficos**
Modelar fenômenos periódicos	Definir a função de Euler	Definir a função seno	Definir a função cosseno	Definir a função tangente	Compreender as translações de um gráfico pelo parâmetro.
Definir função periódica	Representar um ponto no ciclo trigonométrico	Analisar as características da função seno pelo gráfico	Analisar as características da função cosseno pelo gráfico	Analisar as características da função tangente pelo gráfico	Compreender a alteração da amplitude de um gráfico pelo parâmetro.
Identificar o período de uma função	Compreender arcos côngruos	Modelar fenômenos periódicos com a função seno	Modelar fenômenos periódicos com a função cosseno	Modelar fenômenos periódicos com a função tangente	Compreender a alteração do período de uma função pelo parâmetro.
		Esboçar o gráfico de uma função seno	Esboçar o gráfico de uma função cosseno	Esboçar o gráfico de uma função tangente	Construir um gráfico de uma função por meio dos parâmetros da lei de formação.

Fonte: a autora (2020).

Na perspectiva da disposição aludida, conduzimos a análise da organização didática do capítulo 2. Convém-nos explicitar que analisamos o livro em pauta com o intuito de demonstrar as escolhas didáticas presentes no volume, além das restrições e condições para o ensino de funções seno e cosseno privilegiadas na obra. O objetivo, nessa esfera, é evidenciar a problemática de base, para que, em nossa problemática possibilística, possamos (re)construir praxeologias para o ensino de funções seno e cosseno.

O capítulo 2 começa com a apresentação de uma tarefa de modelação de fenômeno periódico, especificamente sobre a maré. A partir dessa situação, são expostas a modelização do fenômeno algebricamente e a representação gráfica da função para apontar os momentos de altas e baixas da maré em função do tempo. Em seguida, é indicada algebricamente a verificação dos momentos de alta e baixa da maré no decorrer do dia. Podemos constatar o momento de contato com o problema, junto ao momento de elaboração de uma técnica mais apropriada para a tarefa.

Depois, o livro aborda a definição de função periódica, o que configura o momento 3 de constituição do bloco tecnológico-teórico. Após a conceituação, os autores expõem os exercícios resolvidos e, em seguida, os propostos – o que conforma os momentos de estudo 4 e 5, respectivamente.

De maneira análoga, o livro inicia o trabalho com o ciclo trigonométrico; porém, não há o momento inicial de contato com o problema, já que o estudo é aberto com o momento de constituição do bloco tecnológico-teórico, no qual consta a definição da função de Euler. Os momentos seguintes são semelhantes ao da função periódica, não dispondo, ao final da seção, de um momento de avaliação.

No que se refere às funções seno, cosseno e tangente, o livro introduz o momento inicial a partir do ciclo trigonométrico, explorando-o e, em seguida, define cada função. Não temos uma tarefa específica a ser resolvida, pois a problematização explicitada apresenta a resolução; tem-se, contudo, o contato com a técnica da interpretação da função no círculo. Depois, os autores conceituam as funções. Na sequência, exploram exercícios resolvidos, para, ao final, abordarem os exercícios propostos. O mesmo ocorre na seção de construção de gráficos.

Verifica-se que o livro opta por apresentar uma explanação mais clássica, na qual, na abertura do capítulo, aborda uma situação sobre o tema e, nos tópicos seguintes, parte para a exploração do conteúdo por meio de uma representação, expondo, na sequência, a definição formalmente. Ao final do capítulo, tem-se a seção de exercícios complementares e autoavaliação, no intuito de que os alunos se autoavaliem e retomem o estudo dos conteúdos que produziram maior dificuldade.

As organizações didáticas indicadas na obra não privilegiam uma conexão explícita entre as funções. Há apenas apresentações de forma isolada, sem relacionar os conteúdos. Um exemplo nesse aspecto é o de que, ao trabalhar a função tangente, não é feita qualquer relação com as funções seno e cosseno.

Outro fato em destaque é quando os autores expõem na tabela de valores de x das funções alguns valores menores que 0 e maiores que 2π; não há uma articulação com a seção anterior, de arcos côngruos, assumindo apenas, através da tabela, que os valores se repetem depois da primeira volta e por isso são funções periódicas, no caso das funções seno e cosseno.

De modo análogo, não há uma associação entre as funções definidas no ciclo trigonométrico e o gráfico no plano cartesiano; temos os dois numa mesma seção, mas não há articulação entre ambos.

No tocante ao uso de tecnologias, o livro apresenta duas questões utilizando um *software* para construção de gráficos, porém não há o incentivo da exploração do *software* para aprendizagem das funções seno e cosseno de maneira efetiva. A primeira atividade exibe um gráfico feito manualmente e outro por um *software*; o manual está em radiano, e o gráfico esboçado no software está em números decimais. A única pergunta referente ao gráfico tecido no *software* é a respeito do valor do período, que no software deu 6,28 e no manual 2π. Não há uma exploração das potencialidades do *software* para entendimento das características das funções, bem como da variação dos parâmetros da função.

A segunda questão solicita a construção do gráfico, mas não cita, para tanto, qual *software* pode ser empregado, pedindo que seja feito, passo a passo, deixando o da função trigonométrica fundamental; a questão requere ainda que, a cada transformação do gráfico, seja feito um novo gráfico e, ao final, esboçado o gráfico completo com todas as transformações e características. Essa questão é relevante; entretanto, não explora a variação dos parâmetros, nem as possibilidades de investigação destes.

O livro também destaca a utilização da calculadora científica do celular para cálculo do valor de seno e cosseno. Desse modo, podemos elencar algumas restrições e condições impostas no livro didático em foco.

Quadro 12 – Condições e restrições do LD para o ensino de funções seno e cosseno.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição LD[5] 01	Uso das funções seno e cosseno para interpretar/modelar fenômenos periódicos e situações em diferentes contextos.
Condição LD 02	Incentivo à utilização de *softwares* e calculadora para o estudo de funções seno e cosseno.
Condição LD 03	Emprego de fenômenos periódicos reais para trabalhar a representação de funções seno e cosseno no plano cartesiano.
Condição LD 04	Utilização de diferentes representações para compreensão das características das funções seno e cosseno.

[5] Livro Didático-LD.

Restrição LD 01	Não trabalha as funções seno e cosseno definindo-as por triângulos.

Fonte: a autora (2020).

Com base na organização matemática e didática do livro didático, e por meio da TAD, temos o saber fazer e o *logos* vivendo simultaneamente, pois não há prática sem o saber/*logos*, nem o saber/*logos* sem a prática/práxis. Assim sendo, a partir da organização didática e matemática do livro didático, e das condições e restrições levantadas após a análise da obra, observamos que as conexões entre as praxeologias matemáticas do livro são escassas, não permitindo uma integração entre as seções contempladas nos capítulos estudados.

É válido salientar que as condições e restrições comungam com as restrições e condições destacadas na análise dos documentos oficiais, e serão consideradas para propor nossa problemática possibilística em nosso Modelo Praxeológico de Referência – MER. No entanto, convém-nos olhar a resposta para nossa problemática docente no Ensino Superior.

2.4 A RESPOSTA INSTITUCIONAL DO ENSINO SUPERIOR À PROBLEMÁTICA DOCENTE EM TORNO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Baseados nas inquietações pessoais levantadas neste trabalho (dificuldades dos licenciandos em Matemática com funções trigonométricas; ausência, ou insuficiência, de um estudo sobre as funções seno e cosseno no Ensino Médio; a não utilização de tecnologias, como o GeoGebra, para facilitar a compreensão dos conceitos acerca das funções seno e cosseno); junto a resultados de pesquisas como Pedroso 2012, Fonseca (2015) e Nasser, Sousa e Torraca (2012), que apontam que lacunas em matemática no Ensino Básico, como em trigonometria e em funções trigonométricas, podem influenciar no desempenho em disciplinas do Ensino Superior; e Loeng (2019) que reflete que além dos estudantes, alguns professores também possui dificuldades em relação as funções trigonométricas; ampliamos a análise aqui empreendida ao Nível Superior, especificamente no curso de Licenciatura em Matemática, a fim de responder o problema didático ora estabelecido.

Nessa conjuntura, levantaremos, na presente seção, as restrições e condições no que diz respeito ao ensino de funções seno e cosseno nas diretrizes curriculares para o curso de Licenciatura em Matemática, no projeto do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, e no livro texto da disciplina de Pré-cálculo. Utilizamos como referência os níveis de codeterminação de Chevallard (2007). As análises a seguir estão no nível sociedade, representando os documentos elaborados pelo Ministério da Educação, os quais fundamentam o ensino atual no Brasil.

2.4.1 Diretrizes curriculares para os cursos de matemática

A análise das diretrizes curriculares para os cursos de matemática tem o objetivo de compreender como o documento em questão norteia os cursos de Licenciatura em Matemática, no que se refere ao ensino de funções trigonométricas, especificamente, funções seno e cosseno.

Essas diretrizes contemplam tanto o curso de Bacharelado em Matemática, quanto o de Licenciatura. A presente análise será restrita ao curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que é o nosso interesse no corrente estudo.

O documento é dividido em cinco tópicos, a saber: perfil dos formandos; competências e habilidades; estrutura do curso; conteúdos curriculares; e estágio e atividades complementares. A seguir, explicitaremos cada um dos itens aludidos.

No que diz respeito ao perfil dos licenciandos, as diretrizes revelam que é esperado que o estudante: tenha seu papel social de educador e possa se inserir em diferentes realidades; compreenda a aprendizagem matemática para o exercício da cidadania; e veja o conhecimento matemático como acessível a todos. Observa-se o quão importante é a função do licenciando, já que entender a matemática para responder os anseios sociais é de grande valia.

Quanto às competências e habilidades, o documento ressalta algumas específicas para o educador matemático. Vejamos abaixo:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;
> b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
> c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;
> d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
> e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
> f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (BRASIL, 2002, p. 4).

De acordo com as informações acima, podemos constatar que as habilidades e competências estão voltadas à formação do profissional docente, com ênfase nas suas atribuições enquanto licenciado em matemática.

O terceiro tópico é direcionado à estrutura do curso, o qual destina-se a orientar como os conteúdos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática devem estar estruturados. Para isso, baseia-se em duas orientações: a primeira dedica-se à valorização da representação que os alunos conformam sobre o conhecimento matemático; e a segunda à construção, de forma global, de uma visão acerca dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o alunado (BRASIL, 2002).

O tópico subsequente versa a respeito do conteúdo curricular. As diretrizes sublinham que os currículos devem proporcionar, em diferentes âmbitos, o desenvolvimento do conhecimento profissional de um matemático. A seguir, elencamos, conforme as diretrizes, os conteúdos comuns aos cursos de Licenciatura em Matemática: cálculo diferencial e integral; álgebra linear; fundamentos de análise; fundamentos de álgebra; fundamentos de geometria; e geometria analítica (BRASIL, 2002). Ademais, o documento destaca que o currículo deve incluir conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica, nas áreas de álgebra, geometria e análise; conteúdos de áreas afins à matemática; e conteúdos da ciência da educação, história e filosofia das ciências e da matemática (BRASIL, 2002).

Observamos que o objeto de estudo função seno e cosseno deve ser trabalhado nos cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que a referida matéria faz parte dos conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica, nas áreas de álgebra, geometria e análise. E, por ser um dos assuntos do Ensino Médio considerados como difícil, deve ser abordado de modo efetivo em cursos de formação de professores.

Ainda no tópico acima mencionado, o documento ressalta que o licenciando deve integrar o uso do computador ao ensino de matemática, uma vez que é um instrumento de trabalho para solução e formulação de problemas. Vale salientar que a utilização de *softwares* para o ensino de matemática permite uma maior investigação para construção do conhecimento matemático.

O último tópico é o de estágio e atividades complementares. Nesse item, as diretrizes frisam a relevância de ambos à formação dos licenciandos, tanto para a formação complementar, pessoal e acadêmica do estudante quanto no estágio, sob o intento de desenvolver a criatividade na ação pedagógica, na tomada de decisões e na prática docente, reconhecendo a realidade na qual está inserido.

Nesse segmento, pontuamos no quadro abaixo as condições e restrições das diretrizes.

Quadro 13 – Condições e restrições da DCCM.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição 1 DCCM	Trabalhar a função seno e cosseno no Ensino Superior.
Condição 2 DCCM	Trabalhar com computador ou tecnologias para o ensino de matemática.
Restrição 1 DCCM	A ausência dos conteúdos da Educação Básica que devem ser abordados no Ensino Superior. Essa abertura deixa a liberdade para que o plano de curso das Licenciaturas em Matemática inclua, ou não, por exemplo, as funções trigonométricas como conteúdo a ser estudado nas licenciaturas.

Fonte: a autora (2020).

Analisaremos, na sequência, o plano de curso da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, pois esta instituição integra o contexto da presente pesquisa.

2.4.2 Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS

O documento em foco neste item é o Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – PPCLM da UEFS, publicado no site do colegiado de matemática. Salientamos que o projeto do curso está em reforma, mas seu resultado ainda não foi divulgado.

O projeto atual, que está vigente no curso, é dividido em algumas seções, a saber: apresentação; justificativa; perfil profissiográfico; competências e habilidades; bases legais; concepção curricular; organização curricular; ementário; adaptação; avaliação; referência; e anexos.

A presente análise se desdobrará nos tópicos que podem revelar alguma condição ou restrição sobre o nosso objeto do saber na referida instituição. Nesse sentido, contemplamos nesta apreciação os seguintes itens: perfil profissiográfico; competências e habilidades; concepção curricular; organização curricular; e ementário.

De acordo com o PPCLM da UEFS, o curso pretende formar o licenciando em matemática com um perfil profissional crítico, pesquisador e que possua uma formação humanística e apresente competência técnica, científica e pedagógica, para que possa aplicar o conhecimento matemático com reflexão, postura política, metodológica, social e filosófica.

Quanto às competências e habilidades, o PPCLM da UEFS enfatiza que o futuro professor necessita ter o domínio do conhecimento matemático, suas metodologias e técnicas, mas também precisa refletir sobre o significado do saber mencionado, relacionando a ciência com a sociedade e o homem, de modo a promover a inclusão destes pontos em seu exercício profissional, tendo, assim, consciência de seu papel social de educador que atuará no ensino fundamental, do 6º ao 9º ano, e no nível médio.

Abaixo, as competências:

> - Elaborar e analisar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica;
> - Conhecer e dominar os conteúdos básicos de Matemática que serão objeto da atividade docente, adequando-os às atividades escolares próprias das diferentes etapas e modalidades da educação básica;
> - Ser capaz de contextualizar os conteúdos básicos de Matemática, inserindo-os e relacionando-os com a atualidade, considerando, ainda, as dimensões pessoal, social e profissional dos alunos;
> - Desenvolver a interdisciplinaridade, articulando sua prática enquanto professor de Matemática com as diversas áreas de conhecimento;
> - Criar, planejar, realizar, gerir e avaliar situações didáticas no ensino da Matemática eficazes para a aprendizagem e desenvolvimento dos alunos, fazendo uso não apenas do conhecimento específico matemático, como também de temas sociais transversais ao currículo escolar, contextos sociais relevantes para a aprendizagem escolar e especificidades didáticas envolvidas;
> - Analisar, selecionar e produzir materiais didáticos que venham facilitar a aprendizagem da Matemática;
> - Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento Matemático dos educandos, dando mais ênfase aos conceitos do que às técnicas, fórmulas e algoritmos;
> - Perceber a prática docente de Matemática como um espaço de constante (re)criação;
> - Contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica;
> - Analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a Educação Básica (UEFS, 2005, p. 9-10).

Observa-se que as competências e habilidades são gerais, voltadas à formação do licenciando em matemática, de maneira que este possa exercer seu papel de futuro docente com responsabilidade e eficiência. Atreladas às competências citadas, o documento acrescenta as competências elencadas nas diretrizes curriculares para o curso de Licenciatura em Matemática, que são:

> a) Capacidade de expressar-se com clareza, precisão e objetividade; b) Capacidade de compreensão e utilização dos conhecimentos matemáticos; c) Capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares e de exercer liderança; d) Visão histórica e crítica da Matemática; e) Capacidade de avaliar livros didáticos, estruturação de cursos e tópicos de ensino de

> Matemática; f) Capacidade de estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; g) Capacidade de aprendizagem continuada e de aquisição e utilização de novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento; h) Capacidade de interpretar dados e textos matemáticos; i) Capacidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; j) Capacidade de realizar estudos de pós-graduação; k) Capacidade de trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber (UEFS, 2005, p. 10).

De forma análoga às anteriores, as competências elencadas nas diretrizes direcionam aos requisitos esperados para um licenciado em matemática atuar em seu campo de trabalho, bem como relacionar a disciplina em pauta com diferentes áreas de conhecimento, aplicá-la e utilizá-la para responder os anseios e necessidades da comunidade. Para isso, faz-se necessário empregar estratégias distintas, ideias tecnológicas e metodologias, a fim de que o saber se torne acessível e, ao mesmo tempo, respeite o rigor científico.

No que se refere à concepção curricular, o PPCLM da UEFS destaca o aprender a aprender, situando o currículo sobre as bases da aquisição de competências, alicerçadas na ação, "sendo capaz de mobilizar saberes em situações concretas, contextualizadas, não significando apenas agir, mas compreender o foco dessa ação, perceber o que é necessário para intervir e avaliar os resultados da ação." (UEFS, 2005, p. 13).

A partir da reformulação curricular, o PPCLM da UEFS teve como arcabouço da organização curricular do curso eixos estruturantes, que são compostos por núcleos que se articulam durante todo o processo de aquisição e troca de experiências e conhecimentos.

Figura 24 – Organização curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.

- Eixo do Conhecimento Científico e Cultural:
  - Núcleo do Conhecimento Matemático;
  - Núcleo do Conhecimento Pedagógico;
  - Núcleo da Autonomia Intelectual e Profissional;
- Eixo da Formação Prática:
  - Núcleo do Estágio Supervisionado;
  - Núcleo da Prática como Componente Curricular;
- Eixo da Formação Eletiva:
  - Núcleo das Disciplinas Optativas
  - Núcleo das Atividades Complementares

Fonte: UEFS (2005, p. 14).

Nesse segmento, explicitaremos na sequência os três eixos de formação citados. O eixo do conhecimento científico e cultural permite a formação mínima de natureza científica e cultural para o licenciado em matemática. Nesse eixo deve haver a articulação entre a teoria e a prática, proporcionando ao diplomado a compreensão da disciplinaridade, interdisciplinaridade, interação, comunicação e autonomia não somente do conhecimento específico a ser ensinado, mas de aspectos filosóficos, pedagógicos e educacionais abrangentes.

Já o eixo da formação prática, objetiva que o estudante seja capaz de realizar a articulação da teoria com a prática, isto é, em uma postura reflexiva, proporciona a integração do saber com o fazer, de modo a buscar significados na parte de administração, gestão e resolução de situações do ambiente escolar.

O eixo de formação eletiva, por seu turno, visa desenvolver a flexibilização curricular, bem como a possibilidade de escolhas de cursos e disciplinas pelo discente, durante sua formação.

O nosso objeto de saber matemático encontra *habitat* no eixo do conhecimento científico e cultural, no núcleo de conhecimento matemático, nomeadamente na disciplina de Pré-cálculo. O cerne do saber matemático pretende apresentar a dimensão prática do conhecimento, trazendo a matemática para diversos contextos e aproveitando o uso de recursos tecnológicos.

Outro eixo no qual o objeto do saber desta pesquisa encontra *habitat* é o da formação prática, no núcleo da prática como componente curricular, especificamente, na disciplina de Instrumentalização para o Ensino de Matemática – INEM II/funções. O núcleo de prática como componente curricular propõe que os estudantes abarquem a relação da matemática, enquanto ciência, com o mundo para o desenvolvimento de outras ciências.

Além disso, os conteúdos trabalhados no curso devem seguir uma perspectiva didático-pedagógica, pois, dessa maneira, a "componente prática estará sendo contemplada ao longo de todo o curso em atividades propostas em cada semestre, denominadas INEM – Instrumentalização para o Ensino da Matemática" (UEFS, 2005, p. 25). As disciplinas desse eixo permitem desenvolver analogias entre a matemática e temas sociais, como os temas transversais. Atrelado a isso, nas disciplinas mencionadas serão abordados conteúdos matemáticos do curso na perspectiva do Ensino Fundamental e Médio (linguagem natural e linguagem matemática; funções; aritmética; álgebra; geometria; temas transversais; tratamento da informação; modelagem matemática), trabalhando, assim, a transposição didática destes elementos.

Verificamos, na citação abaixo, o que o PPCLM da UEFS aborda sobre um dos INEM's;

> **INEM II – Funções:** este é o conteúdo matemático dos mais trabalhados no ensino médio, mas podemos constatar que lá sua ênfase é puramente formal, não revelando a ideia de movimento, de variável, de dependência. Suas definições são estáticas e não levam o aluno a pensar no objeto matemático como uma variável. Enquanto relação que é, uma Função ou Aplicação precisa ser tratada numa perspectiva dinâmica de transformação, ação – conjuntos sendo transformados em outros conjuntos. Também não deixar de relacionar o estudo de Funções com a Geometria, a Aritmética, a Álgebra, etc. (UEFS, 2005, p. 26, grifos do autor).

Figura 25 – Distribuição da Carga Horária do 1º e 2º semestres letivos da UEFS.

Distribuição da Carga-Horária por Semestre Letivo			
		1º SEMESTRE	
DIMENSÃO	**CÓDIGO**	**NOME**	**C. H.**
CCC (M)	EXA 175	PRÉ-CÁLCULO	60
CCC (M)	EXA 176	LÓGICA MATEMÁTICA E TEORIA DOS CONJUNTOS	60
CCC (P)	EDU 116	ORGANIZAÇÃO E POLÍTICAS EDUCACIONAIS NO BRASIL	60
CCC (P)	LET 602	SISTEMA GEOMÉTRICO DE REPRESENTAÇÃO	75
CCC (A)	LET 318	LABORATÓRIO DE PESQUISA E PRODUÇÃO DE TEXTOS	30
PCC	EXA 177	INEM I	45
			330
		2º SEMESTRE	
DIMENSÃO	**CÓDIGO**	**NOME**	**C. H.**
CCC (M)	EXA 198	CÁLCULO DIFERENCIAL	60
CCC (M)	EXA 820	TEORIA DOS NÚMEROS	60
CCC (M)	EXA 180	GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR I	90
CCC (P)	EDU 631	PSICOLOGIA E EDUCAÇÃO I M	60
CCC (A)	CHF 810	TÉCNICAS DE PESQUISA E PRODUÇÃO CIENTÍFICA	60
PCC	EXA 199	INEM II	60
			390

Fonte: UEFS (2005, p. 31).

No que se refere à organização curricular, a oferta semestralizada do curso de Licenciatura em Matemática é organizada em oito semestres, sendo que as duas disciplinas nas quais o objeto de saber deste estudo vive encontram-se no 1º e 2º semestres.

Vale salientar que, de acordo com o PPCLM da instituição, a disciplina de Pré-cálculo é pré-requisito para que o licenciando curse INEM II. Nesse âmbito, fizemos um recorte, no tópico seguinte, das ementas, abrangendo as disciplinas de Pré-cálculo e INEM II, uma vez que são as matérias nas quais as funções seno e cosseno vivem no curso de Licenciatura em Matemática da UEFS.

A disciplina de Pré-cálculo – EXA 175 tem como carga horária 60 horas e dispõe como ementa os conteúdos que seguem: Conjuntos Numéricos e Estudo das Funções Elementares – Gráficos. As funções seno e cosseno fazem parte das funções trigonométricas, que estão entre as funções elementares a serem trabalhadas em Pré-cálculo.

Já a INEM II – EXA 199, embora também tenha carga horária de 60 horas, expõe como ementa as funções, ou seja, na disciplina referida serão trabalhadas todas as funções abordadas na Educação Básica, de forma didático-pedagógica, utilizando-se diferentes estratégias metodológicas, discutindo-se documentos norteadores para o ensino de funções e analisando-se livros didáticos sobre o assunto, de maneira a proporcionar ao licenciando a instrumentalização para o ensino de funções.

Quadro 14 – Condições e restrições do PPCLM da UEFS.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição 1 do PPCLM da UEFS	Trabalhar o ensino de funções seno e cosseno no primeiro semestre do curso com o auxílio de tecnologias.
Condição 2 do PPCLM da UEFS	Trabalhar, no segundo semestre do curso, com funções seno e cosseno utilizando diferentes contextos e recursos tecnológicos para o ensino, refletindo, ainda, acerca da aprendizagem.
Restrição 1 do PPCLM da UEFS	A ausência de uma disciplina específica sobre trigonometria e funções trigonométricas.

Fonte: a autora (2020).

Uma vez reveladas as condições e restrições para o ensino de funções seno e cosseno no Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, iremos analisar o livro texto da disciplina de Pré-cálculo aplicada na instituição aludida.

2.4.3 Análise do livro de Pré-cálculo

No currículo do curso de Licenciatura em Matemática as funções seno e cosseno estão presentes ainda no primeiro semestre, na disciplina de Pré-cálculo, a qual se baseia em uma “revisão” dos conteúdos da Educação Básica, em especial, as funções, para o semestre seguinte, quando se iniciam os cálculos, a geometria analítica e a álgebra linear.

O livro escolhido nessa esfera foi **Pré-cálculo**, da Coleção Schaum, de Safier (2011). A escolha do livro se deu em virtude de este ser o mais utilizado pelo curso, sendo a referência básica deste.

O objetivo da análise é compreender as possíveis restrições e condições da obra para o ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno. Friso a relevância desse exame, visto que, para muitos estudantes, é na disciplina em questão, e com o livro aludido, que eles possuem o primeiro contato com as funções trigonométricas.

A análise do livro citado foi realizada com a lente da TAD, a fim de evidenciar as organizações matemáticas e didáticas apresentadas pelo autor. Nesses termos, analisamos os tipos de tarefas abordadas, as técnicas envolvidas para a resolução das tarefas e o bloco tecnológico-teórico, que justifica as técnicas exibidas, no intuito de caracterizar a organização matemática.

No que tange à organização didática, consideramos os momentos didáticos, já que nos permitem descrever a organização do objeto matemático função seno e cosseno no livro, revelando, assim, as escolhas didáticas do autor, bem como o que a obra privilegia.

A metodologia de análise do livro de Pré-Cálculo, assim como o livro didático da Educação Básica, é baseada na análise utilizada por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012) a qual apresenta três estruturas organizacionais do livro didático: a global, regional e local. Vale salientar, que o objetivo dessa metodologia de análise é revelar as organizações praxeológicas de referencia do livro analisado, bem como o modelo dominante da obra.

O livro é composto por 45 capítulos. Destes, o capítulo 20 refere-se às funções trigonométricas, e o 21 ao gráfico da função trigonométrica – distribuídos em 20 páginas, da 176 à página 196. Principiamos a análise com o capítulo 20, denominado funções trigonométricas.

Tabela 1 – Estrutura Organizacional Regional do livro **Pré-cálculo**, capítulo 20.

Título da seção	Definições	Exemplo	Exercício resolvido	Exercícios complementares	Página das definições
Círculo unitário	1	1	1	0	176
Pontos sobre um círculo	3	0	2	0	176
Definição funções trigonométricas	6	1	14	17	177
Simetria dos pontos sobre o círculo unitário	3	0	1	0	178
Funções periódicas	1	0	0	0	178
Periodicidade das funções trigonométricas	6	0	2	0	178
Notação	1	0	0	0	178
Identidades	1	0	0	0	178
Identidades trigonométricas	4	6	5	1	178-179
TOTAL	26	8	25	18	4

Fonte: a autora (2020).

Com base nos dados expostos na tabela acima, pontuamos que o livro apresenta 26 definições, com oito exemplos, 25 exercícios resolvidos e 18 complementares. Diferentemente do livro didático da Educação Básica, o de **Pré-cálculo** elenca os exercícios ao final dos conteúdos, e não de modo dividido em cada capítulo. São onze páginas destinadas ao capítulo 20 – contando com as páginas de atividades. Refinaremos esta análise, partindo do regional ao local e depois para o pontual.

O livro analisado dispõe de um capítulo destinado ao gráfico das funções trigonométricas, não trazendo de forma conjunta as funções trigonométricas. Dessa maneira, analisaremos também o capítulo citado, pois este possui o gráfico das funções seno e cosseno. A seguir, a tabela que aborda a organização regional do capítulo 21.

Tabela 2 – Estrutura Organizacional Regional do livro **Pré-cálculo**, capítulo 21.

Título da seção	Definições	Exemplos	Exercício resolvido	Exercícios complementares	Página das definições
Gráfico de funções básicas seno e cosseno	1	0	0	0	187
Propriedades dos gráficos básicos	5	0	2	4	187
Gráfico de outras funções seno e cosseno	5	2	8	4	188
Gráfico de outras funções periódicas	4	0	3	1	189-190
TOTAL	15	2	13	9	4

Fonte: a autora (2020).

No capítulo 21 o autor cita 15 explicações do gráfico, que consideramos junto às definições, dois exemplos, 13 exercícios resolvidos e nove complementares; de forma análoga ao capítulo anterior, as atividades aparecem ao final. O conteúdo e os exercícios são distribuídos em 10 páginas.

Iniciamos, agora, a análise da organização matemática do livro em questão a partir dos conteúdos explicitados e das tarefas apresentadas referentes às funções seno e cosseno.

Em uma apreciação praxeológica, se temos uma praxeologia em torno de um tipo de tarefa a chamamos de praxeologia pontual: $P = [T, \tau, \theta, \Theta]$. Mas se essa praxeologia comportar várias organizações pontuais, por via de uma tecnologia em comum, temos uma praxeologia local do tipo $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. Se houver a agrupamento de várias praxeologias locais constituídas por uma mesma teoria, temos uma praxeologia regional [T_{ij}, τ_{ij}, θ_{ij}, Θ]. E ao termos um complexo de praxeologias, obtidas em uma determinada instituição, por meio da união de várias teorias, temos uma praxeologia global [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{ijk}, Θ_k].

Em nosso caso, analisamos as várias organizações pontuais do livro didático, tendo em comum a tecnologia e a teoria, no tocante às funções seno e cosseno, que fazem parte das funções trigonométricas. A tabela a seguir explicita os tipos de tarefas identificadas no livro e a quantidade de vezes que cada uma se repete.

Tabela 3 – Quantitativo de tarefas quanto ao tipo.

TIPOS DE TAREFAS	QUANTIDADE
$T_{1:}$ Desenhar um círculo e identificar seus interceptos.	1
$T_{2:}$ Determinar o domínio e imagem das funções trigonométricas.	3
$T_{3:}$ Calcular os valores de t, a coordenada y de p(t) é igual a 0 e a coordenada x de p(t) é igual a 0.	2
$T_{4:}$ Determinar as funções seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante, dado um valor.	12
$T_{5:}$ Provar propriedades de simetria.	1
$T_{6:}$ Provar propriedades de periodicidade.	2
$T_{7:}$ Provar as identidades trigonométricas.	6
$T_{8:}$ Encontrar cinco funções trigonométricas a partir de uma delas e um quadrante específico.	12
T_9: Mostrar a paridade das funções trigonométricas.	2
$T_{10:}$ Esboçar o gráfico da função seno e/ou cosseno.	10
$T_{11:}$ Explique como esboçar o gráfico da função seno e/ou cosseno.	2
$T_{12:}$ Explique as propriedades e esboce o gráfico da função tangente e/ou secante.	1
$T_{13:}$ Explique as propriedades e esboce o gráfico da secante.	1
$T_{14:}$ Explique as propriedades do gráfico de seno e/ou cosseno.	2
$T_{15:}$ Determine a amplitude e/ou período das funções trigonométricas.	2
$T_{16:}$ Esboçar o gráfico da função tangente e/ou secante.	2
T_{17}: Encontre as funções trigonométricas no círculo.	1
T_{18}: Estudar o sinal das funções trigonométricas.	1

Fonte: a autora (2020).

De acordo com os dados esboçados na tabela acima, podemos verificar que alguns tipos de tarefas prevalecem no que diz respeito à frequência. Podemos inferir que isso indica uma escolha do autor para compreensão das funções trigonométricas – explanaremos melhor essa estratégia na análise da organização didática do livro.

O livro estudado introduz o capítulo de funções trigonométricas com o assunto círculo unitário. O autor define o círculo, expõe sua equação e seu comprimento, que é de 2π; em seguida, apresenta o exemplo abaixo:

Figura 26 – Exemplo do círculo unitário.

Exemplo 20.1 Desenhe um círculo unitário e indique seus interceptos (ver Fig. 20-1).

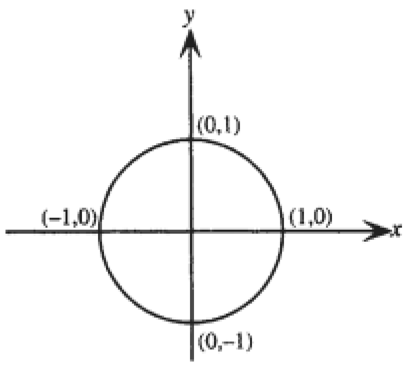


Figura 20-1

Fonte: Safier (2011, p. 176).

Categorizamos o exemplo acima como uma tarefa do tipo T_1: desenhar um círculo e identificar seus interceptos. A finalidade da tarefa é saber desenhar um círculo trigonométrico e reconhecer os pontos de interseção com os eixos das abscissas e ordenadas. O tipo de técnica padrão para essa atividade é f_1:

f_1: esboçar o círculo trigonométrico em um plano cartesiano; identificar as interseções do círculo no plano cartesiano; reconhecer os interceptos.

A tecnologia que justifica a técnica empregada é a trigonometria no círculo; e a teoria as funções trigonométricas. Podemos observar que o autor optou por iniciar o assunto com um conteúdo prévio para o ensino das funções trigonométricas, visto que julgou necessário para compreensão das funções.

Em seguida, o livro expõe a seção pontos sobre um círculo unitário. Nessa parte, o autor afirma que um único ponto P sobre um círculo unitário U pode ser associado a qualquer número real t da seguinte maneira: com t = 0 está o ponto (1,0); com qualquer número real t positivo está o ponto P(x,y) obtido por um deslocamento t na direção anti-horária do ponto (1,0); e relacionado com qualquer número real t negativo está o ponto P(x,y) obtido por um deslocamento t na direção horária do ponto (1,0) (SAFIER, 2011). Essa definição auxilia no entendimento dos sinais das funções trigonométricas, em especial, as funções seno e cosseno, delineadas no círculo, o que será explorado adiante.

Após explanação dos pontos no círculo unitário, Safier (2011) conceitua as funções trigonométricas, conforme ilustra a imagem abaixo:

Figura 27 – Definições das funções trigonométricas.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Se t é um número real e $P(x,y)$ é o ponto, referido como $P(t)$, no círculo unitário U que corresponde a P, então, as seis *funções trigonométricas* de t, seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, abreviadas como sen, cos, tg, csc, sec e cotg, respectivamente, são definidas como:

$$\text{sen}\, t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}\ (\text{se } y \neq 0)$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}\ (\text{se } x \neq 0)$$

$$\text{tg}\, t = \frac{y}{x}\ (\text{se } x \neq 0) \qquad \text{cotg}\, t = \frac{x}{y}\ (\text{se } y \neq 0)$$

Fonte: Safier (2011, p. 177).

Ao definir as funções trigonométricas de forma direta, o autor expõe um exemplo, determinando os valores de x e y, e, na sequência, solicita que sejam encontradas as seis funções trigonométricas. O tipo de tarefa do exemplo abaixo é T_{17}: encontre as funções trigonométricas a partir do círculo. A técnica mobilizada para essa atividade é τ_2. T_2: identificar os pontos x e y; substituir os pontos na definição das funções trigonométricas explicitadas.

Figura 28 – Exemplo 20.2.

Exemplo 20.2 Se t é um número real tal que $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ é o ponto no círculo unitário que corresponde a t, encontre as seis funções trigonométricas de t.

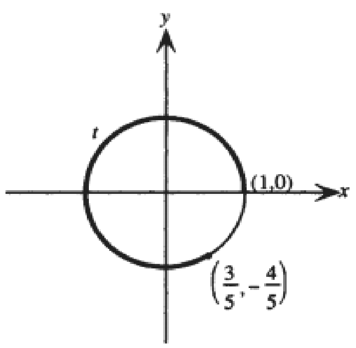


Figura 20-4

Como a coordenada x de P é $\frac{3}{5}$ e a coordenada y é $-\frac{4}{5}$, as seis funções trigonométricas de t são:

$$\text{sen}\, t = y = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = x = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\, t = \frac{y}{x} = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3} \qquad \text{cotg}\, t = \frac{x}{y} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

Fonte: Safier (2011, p. 177).

Quanto ao bloco tecnológico-teórico da atividade demonstrada na Figura 28, temos como tecnologia θ, que justifica as técnicas empregadas pelos discentes para esse tipo de tarefa, aplicação da definição das funções trigonométricas; como teoria Θ, o que justifica essa tecnologia são as funções trigonométricas.

O autor conceitua, utilizando apenas a linguagem matemática de forma direta, os conteúdos: simetria dos pontos sobre um círculo unitário; funções periódicas; periodicidade das funções trigonométricas; notação; identidades; e identidades trigonométricas (pitagóricas, recíprocas, quocientes e para negativos). O livro não abordou exemplos para a seção em foco.

A próxima seção a ser apresentada é a dos exercícios resolvidos, seguida dos exercícios complementares. Analisamos cada tipo de tarefa encontrada no livro. Nesse contexto, apontamos que, quanto às tarefas que se repetem, faremos a análise da organização matemática de uma, e as demais registraremos a quantidade de vezes que aparecem, pontuando conjuntamente os exercícios complementares e resolvidos.

O primeiro exercício resolvido do livro (em relação ao assunto citado) é do tipo $T_{2:}$ determinar o domínio e imagem das funções trigonométricas. A atividade solicita que sejam encontrados o domínio e imagem das funções seno e cosseno. As técnicas utilizadas pelo autor na resolução foram a f_3 e a f_4:

f_3: utilizar a definição de círculo unitário para compreensão dos pontos e imagem;

f_4: utilizar a definição das funções seno e cosseno para encontrar seu domínio.

A tecnologia que justifica essa técnica são as acepções de funções seno e cosseno. A teoria que justifica a tecnologia são as funções trigonométricas. O autor aborda mais três exercícios do tipo aludido; o que varia, porém, são as funções – tangente, secante, cotangente e cossecante. Na técnica o que muda é o conceito da função para encontrar o domínio.

Os dois exercícios resolvidos a seguir são do tipo $T_{3:}$ calcular os valores de t, a coordenada y de p(t) é igual a 0 e a coordenada x de p(t) é igual a 0. O primeiro solicita o cálculo da coordenada y, e o segundo da coordenada x. As técnicas para resolução dessa tarefa foram:

f_3: utilizar a definição de círculo unitário para compreensão dos pontos e imagem;

f_5: aplicar o conceito de pontos sobre um círculo unitário;

f_6: aplicar a acepção de simetria dos pontos sobre um círculo unitário para entender os pontos simétricos que zeram p(t).

Nessa atividade, por termos técnicas distintas, também teremos tecnologias diferentes. Temos a definição de círculo unitário; pontos sobre um círculo unitário; e simetria dos pontos sobre um círculo unitário. A teoria que justifica as tecnologias empregadas são as funções trigonométricas.

A atividade seguinte se repete bastante – designadamente, seis vezes nos exercícios resolvidos e cinco nos complementares.

Figura 29 – Atividade: encontrar os valores das funções trigonométricas em um ponto.

20.8 Encontre as seis funções trigonométricas de $\pi/2$.

Ver Fig. 20-8. Como o comprimento do círculo unitário é 2π, $P(\pi/2)$ é um quarto da volta no círculo unitário a partir de (1,0). Assim, $P(\pi/2) = (0,1) = (x,y)$ e segue-se que:

$\text{sen}(\pi/2) = y = 1$	$\csc(\pi/2) = 1/y = 1/1 = 1$
$\cos(\pi/2) = x = 0$	$\sec(\pi/2) = 1/x = 1/0$ não é definido
$\text{tg}(\pi/2) = y/x = 1/0$ não é definido	$\text{cotg}(\pi/2) = x/y = 0/1 = 0$

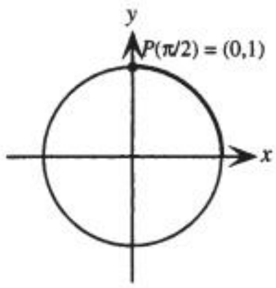


Figura 20-8

Fonte: Safier (2011, p. 181).

O tipo dessa tarefa é T_4: determinar as funções seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante, dado um valor. As técnicas usadas pelo autor foram:

f_3: empregar a definição de círculo unitário para compreensão dos pontos e imagem;

f_4: utilizar o conceito das funções trigonométricas para encontrar seu domínio.

A tecnologia que justifica a técnica adotada são as definições de funções trigonométricas e de círculo unitário. A teoria que justifica a tecnologia são as funções trigonométricas.

A próxima atividade refere-se ao estudo dos sinais das funções trigonométricas, de acordo com os quadrantes. Observemos a Figura 30.

Figura 30 – Atividade do livro sobre estudo de sinais das funções.

20.9 Se $P(t)$ está em um quadrante, diz-se que t está naquele quadrante. Para t em cada um dos quatro quadrantes, obtenha a seguinte tabela, mostrando os sinais das seis funções trigonométricas de t.

	Quadrante I	*Quadrante II*	*Quadrante III*	*Quadrante IV*
sen t	+	+	−	−
cos t	+	−	−	+
tg t	+	−	+	−
csc t	+	+	−	−
sec t	+	−	−	+
cotg t	+	−	+	−

Como sen $t = y$ e csc $t = 1/y$ e y é positivo nos quadrantes I e II e negativo nos quadrantes III e IV, os sinais de sen t e de csc t são como os mostrados acima.

Como cos $t = x$ e sec $t = 1/x$ e x é positivo nos quadrantes I e IV e negativo nos quadrantes II e III, os sinais de cos t e de sec t são como os mostrados acima.

Como tg $t = y/x$ e cotg $t = x/y$ e x e y têm os mesmos sinais nos quadrantes I e III e sinais opostos nos quadrantes II e IV, os sinais de tg t e de cotg t são como os mostrados acima.

Fonte: Safier (2011, p. 181).

O tipo da atividade em questão é T_{18}: estudar o sinal das funções trigonométricas. A técnica é f_{7}.

T_7: analisar no círculo unitário o sinal de cada função trigonométrica, e em cada quadrante.

A tecnologia empregada são os sinais das funções trigonométricas, e a teoria são as funções trigonométricas.

A atividade seguinte apresenta outro formato, com um caráter mais formal, solicitando a prova das propriedades de simetria delineadas anteriormente.

Figura 31 – Atividade do livro sobre estudo de sinais das funções.

20.11 Prove a lista de propriedades de simetria citadas na página 178 para pontos de um círculo unitário.

(a) Para qualquer número real t, $P(t + 2\pi) = P(t)$.

(b) Se $P(t) = (x, y)$, então $P(-t) = (x, -y)$.

(c) Se $P(t) = (x, y)$, então $P(t + \pi) = (-x, -y)$.

(a) Seja $P(t) = (x, y)$. Como o perímetro do círculo unitário é precisamente 2π, o ponto $P(t + 2\pi)$ é obtido percorrendo exatamente uma vez o contorno do círculo a partir de $P(t)$. Logo as coordenadas de $P(t + 2\pi)$ são as mesmas de $P(t)$.

(b) Ver Fig. 20-10.

Fonte: Safier (2011, p. 182).

O tipo dessa tarefa é T_5: provar propriedades de simetria. Esse tipo de atividade requer uma técnica que proporcione o desenvolvimento da abstração para conseguir provar o que é solicitado. A técnica é:

f_8: provar, utilizando conceitos de círculo unitário, bem como o conhecimento de coordenadas, as propriedades de simetria.

De acordo com a técnica exibida, temos como tecnologia a acepção de círculo unitário. A teoria são as funções trigonométricas.

De maneira análoga à anterior, as duas próximas atividades apresentam um caráter mais formal de prova e demonstração. A diferença é que a primeira solicita a demonstração das propriedades de periodicidade das funções seno, cosseno e tangente, e a segunda a prova das diferentes identidades trigonométricas. Os tipos são, T_6: provar propriedades de periodicidade, e T_7: provar as identidades trigonométricas.

Figura 32 – Atividades do capítulo 20 com caráter demonstrativo.

20.13 Demonstre as propriedades de periodicidade das funções seno, cosseno e tangente.

Seja $P(t) = (x,y)$; então $P(t+2\pi) = P(t) = (x,y)$. Segue imediatamente que $\text{sen}(t+2\pi) = y = \text{sen}\, t$ e $\cos(t+2\pi) = x = \cos t$.

Também, $P(t+\pi) = (-x,-y)$. Logo, $\text{tg}(t+\pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \text{tg}\, t$.

20.14 Prove as identidades recíprocas.

Seja $P(t) = (x,y)$; então, segue-se que:

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen}\, t} \qquad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos t} \qquad \text{cotg}\, t = \frac{x}{y} = 1 \div \frac{y}{x} = 1 \div (\text{tg}\, t) = \frac{1}{\text{tg}\, t}$$

Portanto, segue-se, por algebrismo:

$$\text{sen}\, t = \frac{1}{\csc t} \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t} \qquad \text{tg}\, t = \frac{1}{\text{cotg}\, t}$$

Fonte: Safier (2011, p. 183).

As técnicas das atividades referidas são:

f_9: provar as propriedades utilizando definições de periodicidade, bem como o conceito das funções seno, cosseno e tangente.

f_{10}: provar as identidades trigonométricas a partir de suas acepções e especificidades.

A atividade 20.14 repete-se seis vezes; o intuito é solicitar a prova das distintas identidades trigonométricas – recíprocas, pitagóricas, negativas e quocientes. A tecnologia são as definições das propriedades de periodicidade e das identidades trigonométricas. A teoria são as funções trigonométricas.

A tarefa seguinte solicita que sejam encontradas, através de uma das funções trigonométricas, em um determinado quadrante, as demais funções.

Figura 33 – Problema complementar 20.23.

20.23 Dados tg $t = -2$ e t no quadrante IV, encontre as outras cinco funções trigonométricas de t.

1. Secante. Da identidade pitagórica $\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$. Como t é especificado no quadrante IV, sec t deve ser positivo (ver Problema 20.9). Portanto,

$$\sec t = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

2. Cosseno. Da identidade recíproca,

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. Seno. Da identidade do quociente, $\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$; portanto,

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{tg} t \cos t = (-2)\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. Cotangente. Da identidade recíproca,

$$\operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

5. Cossecante. Da identidade recíproca,

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{-2/\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Fonte: Safier (2011, p. 185).

O tipo da tarefa é T_8: encontrar cinco funções trigonométricas por meio de uma delas em um quadrante específico. A técnica desse tipo de tarefa é f_{11}.

f_{11}: utilizar as identidades trigonométricas para encontrar as funções, a partir do quadrante e função determinados.

Essa tarefa requer o uso das identidades trigonométricas de maneira efetiva, para compreensão e análise das relações, de modo a determinar as funções trigonométricas a partir dos quadrantes e função explicitada. A atividade em questão se repete no capítulo seis vezes. A tecnologia desse tipo de tarefa são as identidades trigonométricas, e a teoria são as funções trigonométricas.

As duas últimas tarefas do capítulo em foco solicitam o estudo da paridade das funções trigonométricas; elas são do tipo T_9: mostrar a paridade das funções trigonométricas.

Figura 34 – Tarefas sobre a paridade das funções.

20.41 Mostre que cosseno e secante são funções pares.

20.42 Prove que seno, tangente, cotangente e cossecante são funções ímpares.

Fonte: Safier (2011, p. 186).

A técnica é f_{12}:

f_{12}: Utilizar a definição de funções trigonométricas para mostrar sua paridade; e também o conceito de função par e ímpar.

A tecnologia empregada é a acepção de funções pares e ímpares. A teoria são as funções trigonométricas.

O capítulo subsequente é destinado ao gráfico das funções trigonométricas, visto que o autor preferiu expor a representação gráfica em um capítulo distinto do que se dedica à definição das funções trigonométricas.

O autor inicia o capítulo apresentando os gráficos das funções seno e cosseno, com as seguintes informações, os domínios de f(t)=sen t e f(t)=cos t são idênticos: todos os números são reais, R.; as imagens dessas funções também são iguais: o intervalo [1,1]. Por intermédio dessas informações, ele expõe o gráfico da função u=sen t e u=cos t.

A seção posterior diz respeito às propriedades dos gráficos básicos.

Figura 35 – Propriedades dos gráficos básicos.

PROPRIEDADES DOS GRÁFICOS BÁSICOS

A função $f(t) = \text{sen}\, t$ é periódica com período 2π. Seu gráfico repete um *ciclo*, considerado como a porção do gráfico para $0 \le t \le 2\pi$. O gráfico é frequentemente chamado de *curva seno básica*. A *amplitude* da curva seno básica, definida como metade da diferença entre os valores máximo e mínimo da função, é 1. A função $f(t) = \cos t$ é também periódica com período 2π. Seu gráfico, dito a *curva cosseno básica*, também repete um ciclo, considerado como a porção deste gráfico para $0 \le t \le 2\pi$. O gráfico pode igualmente ser visto como uma curva seno com amplitude 1, deslocada $\pi/2$ para a esquerda.

Fonte: Safier (2011, p. 187).

Percebe-se, na seção ora citada, a exploração das características das funções seno e cosseno; porém, o autor apresenta como propriedades dos gráficos básicos, delineando a amplitude do gráfico e ressaltando que o gráfico da função cosseno pode ser entendido como uma senoide deslocada para a esquerda por um fator π/2.

Em seguida, o autor expõe a seção gráfico de outras funções seno e cosseno. Neste item, aborda as transformações do gráfico de uma função seno e cosseno. Através de cada parâmetro, conceitua uma transformação no gráfico.

Assim, para gráficos de $u = A\ sen\ t$ e $u = A\ cos\ t$, tem-se a amplitude do gráfico alterada para A positivo e negativo. Para gráficos de $u = sen\ bt$ e $u = cos\ bt$, sendo b positivo, define-se a contração do gráfico. *U = sen (t – c)* e *u = cos (t – c)* são curvas padrões seno e cosseno, respectivamente, transladadas c unidades para a direita, se c positivo, e para c negativo c unidades para a esquerda.

No que compete ao parâmetro d, temos *u = sen t + d* e *u = cos t + d,* são curvas seno e cosseno, respectivamente, trasladadas para cima d unidades se d positivo, e para baixo d unidades se d negativo.

Por fim, temos o gráfico das funções *u = sen (bt – c) + d* e *u = cos (bt – c) + d* que correspondem a combinações das características acima, representadas pelos parâmetros *A, b, c, d*.

Por intermédio dessa explicitação da seção gráfico de outras funções seno e cosseno, o livro apresenta dois exemplos: um para esboçar o gráfico da função seno, e outro da função cosseno – ambos através das transformações do gráfico por meio dos parâmetros. O tipo de tarefa é T_{10}: esboçar o gráfico da função seno e cosseno. A técnica empregada é f_{13}:

f_{13}: a partir dos parâmetros, analisar a lei de formação identificando as transformações do gráfico para, em seguida, esboça-lo.

A tecnologia utilizada são as transformações do gráfico das funções seno e cosseno, e a teoria são as funções trigonométricas.

Na sequência, o livro expõe a seção gráficos das outras funções trigonométricas. Nesse tópico, tem-se a apresentação do esboço, domínio e imagem dos gráficos das funções tangente, secante, cotangente e cossecante.

O autor prossegue exibindo os exercícios resolvidos do capítulo; num total de 13 exercícios resolvidos, divididos em três tipos de tarefas. O primeiro exercício resolvido é uma tarefa do tipo T_{11}: explique as propriedades do gráfico da função seno e/ou cosseno, conforme Figura 36.

Figura 36 – Exercício resolvido 21.1 gráfico da função seno.

21.1 Explique as propriedades do gráfico da função seno.

Lembre-se que sen t é definido como a coordenada y do ponto $P(t)$ obtido de um comprimento $|t|$ em torno do círculo unitário a partir do ponto (1,0) (ver Fig. 21-9). À medida que t aumenta de 0 a $\pi/2$, a coordenada y de $P(t)$ aumenta de 0 a 1; à medida que t aumenta de $\pi/2$ a $3\pi/2$, passando por π, y diminui de 1 para -1, passando por 0; à medida que t aumenta de $3\pi/2$ a 2π, y aumenta de -1 para 0 (ver Fig. 21-10). Isso representa um ciclo ou período da função seno; uma vez que a mesma é periódica com período 2π, o ciclo mostrado na Fig. 21-10 repete-se quando t aumenta de 2π para 4π, de 4π para 6π e assim por diante. Para t negativo, o ciclo também é repetido quando t aumenta de -2π para 0, de -4π para -2π e assim por diante.

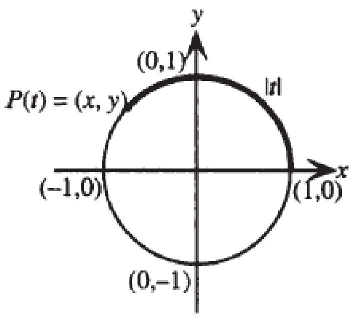


Figura 21-9

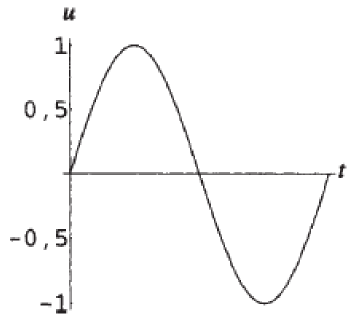


Figura 21-10

Fonte: Safier (2011, p. 190).

A técnica usada para resolver esse tipo de tarefa é f_{14}:

f_{14}: analisando a função pelo ciclo trigonométrico, e comparando-a com o esboço de seu gráfico, pode-se explicar as propriedades da função.

A tecnologia são as propriedades do gráfico das funções trigonométricas, e a teoria as funções trigonométricas.

Esse tipo de tarefa/questão se repete mais uma vez, sendo que a 21.3 é com a função cosseno.

As questões 21.10 e 21.12 são similares à tarefa do tipo T_{11}; a diferença é que a 21.10 trabalha com a função tangente, e a 21.12 com a função secante. Desse modo, categorizamos as atividades como tarefas do tipo T_{12} e T_{13}, respectivamente. T_{12}: explique as propriedades e esboce o gráfico da função tangente; e T_{13}: explique as propriedades e esboce o gráfico da função secante.

O exercício seguinte é o 21.2, que é do tipo T_{11}: explique como esboçar o gráfico das funções seno e cosseno; esses gráficos são do tipo “outros gráficos das funções seno e cosseno”, ou seja, gráficos esboçados através da análise dos parâmetros. A técnica para resolução exposta no livro é f_{15}:

f_{15}: a partir da análise dos parâmetros, determinar a amplitude, período, mudança de fase; dividir os intervalos em subintervalos e, depois, exibir o comportamento da curva.

A tecnologia empregada são as transformações do gráfico das funções seno e cosseno, e a teoria as funções trigonométricas. Essa atividade se repetiu no exercício 21.4.

As outras atividades resolvidas do livro foram: 21.6; 21.7; 21.8; 21.9; 21.12; e 21.13. Essas tarefas foram todas do tipo T_{10}: esboçar o gráfico das funções seno e cosseno; num total de seis exercícios desse tipo. Já a 21.11 foi do tipo T_{16}: esboçar o gráfico da função tangente. A técnica foi a f_{13}:

f_{13}: a partir dos parâmetros, analisar a lei de formação, identificando as transformações do gráfico para, na sequência, esboça-lo.

A tecnologia utilizada foram as transformações do gráfico das funções seno e cosseno, e a teoria as funções trigonométricas.

Em seguida, o livro expõe os exercícios complementares, num total de oito: três do tipo T_{15}: determine a amplitude e/ou o período das funções trigonométricas; três do tipo T_{10}: esboce o gráfico das funções seno e cosseno; um do tipo T_{16}: esboce o gráfico da função tangente e/ou secante; e um do tipo T_{12}: explique as propriedades do gráfico da função secante e tangente.

Com base na apreciação do livro texto da disciplina de pré-cálculo, levantamos algumas condições e restrições deste livro enquanto instituição dominante.

A organização didática do livro analisado é clássica, iniciada com o conteúdo em ambos os capítulos, com exercícios ao final de cada capítulo. O autor introduz o capítulo 20 explorando o círculo unitário e os pontos no círculo, não havendo o momento de primeiro encontro, ou seja, o momento de estudo 1. Nesse sentido, o momento de estudo é iniciado com a exploração do bloco tecnológico-teórico, que, de acordo com Chevallard (2002), é o momento 3. Esse fato também ocorre no capítulo 21, pois este começa com a abordagem do gráfico das funções seno e cosseno e suas características, e, em seguida, demonstra as propriedades do gráfico das funções.

Na sequência, os dois capítulos abordam alguns exemplos sobre o assunto no bloco tecnológico-teórico, o qual pode ser configurado como o momento 4, de provar a técnica, uma vez que não houve uma tarefa inicial; para elaboração de uma técnica e maior exploração, os exemplos apresentados proporcionam a explicitação do bloco tecnológico-teórico por meio da explanação de uma atividade que já evidencia a forma de resolvê-la através dos exemplos. Após estes e a abordagem de outras seções de conteúdos, o livro expõe os exercícios resolvidos, os quais podem ser interpretados como o momento de institucionalização das técnicas exibidas nos exemplos e nas explanações dos conteúdos. Ao final, o livro apresenta as atividades complementares, que podem reforçar a institucionalização junto à avaliação.

Verifica-se que o padrão demonstrado acima persiste nos dois capítulos, e que a obra não privilegia exemplos contextualizados, ou de aplicação de fenômenos periódicos; há apenas a exposição do conteúdo e atividades para exercitar a técnica abordada em cada seção. Vale ressaltar que o livro não incentiva o uso de *softwares* ou de outros instrumentos que permitam explorar o conteúdo de maneira dinâmica e diferenciada.

Nesse aspecto, explicitaremos no quadro a seguir as condições e restrições levantadas na análise do livro texto da disciplina de pré-cálculo da UEFS.

Quadro 15 – Condições e restrições do Livro de Pré-Cálculo – LPC para o ensino de funções seno e cosseno.

REFERÊNCIA	CONDIÇÃO / RESTRIÇÃO
Condição LPC 01	Define as funções seno e cosseno a partir do círculo unitário.
Condição LPC 02	Utiliza diferentes representações para compreensão das características das funções seno e cosseno.
Condição LPC 03	Apresenta de forma explícita as transformações do gráfico das funções seno e cosseno como propriedades do gráfico.
Restrição LPC 01	Não usa, ou incentiva a reconhecer, as potencialidades dos *softwares* de construção de gráficos para entendimento das características das funções seno e cosseno.
Restrição LPC 02	Não expõe as funções seno e cosseno para interpretar/modelar fenômenos periódicos e situações em diferentes contextos.
Restrição LPC 03	Não apresenta de modo integrado o gráfico das funções seno e cosseno junto a sua definição. Não estuda os aspectos das funções junto à acepção.

Fonte: a autora (2020).

Nesse segmento, através das análises realizadas com a finalidade de responder os problemas docentes, explicitamos as condições e restrições levantadas na apreciação para instituir o modelo dominante, que nos embasará para a confecção do modelo de referência, além de nortear as praxeologias possíveis que tomaremos como referência para propor nossa problemática possibilística.

2.5 LEVANTAMENTO DAS CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES DAS ANÁLISES REALIZADAS: EM BUSCA DE UMA RESPOSTA AO PROBLEMA DIDÁTICO

Alicerçados na análise do MED, constatamos que muitas das restrições levantadas se encontram em níveis do topo da escala de codeterminação, como, por exemplo, a sociedade, e acabam refletindo nos níveis do sistema didático, como pedagogia, disciplina, setor e tema. Ademais, nota-se, de acordo com o exame dos documentos e livros, que em muitas análises há um problema de isolamento entre temas, setores e áreas de estudos da matemática.

No âmbito do Ensino Médio, tivemos como condições levantadas nos documentos o estudo das funções seno e cosseno associado à trigonometria no triângulo retângulo e/ou à trigonometria no ciclo trigonométrico, de modo a permitir uma melhor abrangência das funções seno e cosseno (PCNEM; PCN+; OCEM); articulação das funções seno e cosseno com fenômenos periódicos e situações de aplicação do conteúdo (PCNEM; PCN+; BNCC); e apoio de tecnologias, a exemplo de *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria para trabalhar funções seno e cosseno (BNCC).

Como restrições presentes nos documentos, isto é, condições restritivas, a ausência do uso de tecnologias articulado ao ambiente papel e lápis para o ensino de funções seno e cosseno (PCNEM; PCN+; OCEM).

Já no livro didático, que é um dos recursos mais empregados na prática de ensino, as condições foram: a presença de fenômenos como a roda gigante e a maré para trabalhar, respectivamente, o ciclo trigonométrico e as funções periódicas individualmente; transformações gráficas das funções por meio de análise gráfica; e o trabalho, primeiro, da trigonometria no ciclo para, em seguida, o das funções trigonométricas.

Como restrições do livro didático, pontuamos que: não relaciona o ciclo estudado no capítulo anterior com as funções seno e cosseno ao abordar as representações gráficas, definindo a função no ciclo de modo isolado e apresentando na sequência a relação de uma tabela de valores para entendimento do gráfico, sem qualquer associação com o ciclo trigonométrico estudado antes; expõe o ambiente papel e lápis e o informatizado apenas para comparar valores em decimais com radianos, não explorando a matemática discreta explanada no ambiente informatizado em integração com a contínua abordada no ambiente papel e lápis.

Na perspectiva das condições e restrições expostas, o modelo dominante a responder o problema didático aborda o estudo das funções seno e cosseno após a trigonometria, porém não articula o domínio geométrico do círculo com o gráfico das funções; mesmo isto sendo indicado pelos documentos oficiais e no dispositivo livro didático, ocorre de forma distinta. Além disso, o modelo dominante aponta o emprego de tecnologias para o ensino de matemática, mas isto não acontece de maneira efetiva no modelo dominante.

Quanto ao modelo dominante na esfera do Ensino Superior, temos, na análise dos documentos, as condições: a vivência do objeto do saber funções seno e cosseno no Ensino Superior; o trabalho com funções seno e cosseno no primeiro e segundo semestres; e o incentivo ao uso de tecnologias no ensino de matemática. Como restrição, apresenta uma breve discussão sobre domínios (conteúdos) que são introduzidos no Ensino Superior, não tendo demarcado o conteúdo do Ensino Básico específico a ser abordado em uma licenciatura em matemática.

Quanto à obra referência para o curso de Pré-cálculo, temos como condições: define as funções seno e cosseno a partir do círculo unitário; utiliza diferentes representações para compreensão das características das funções seno e cosseno; e expõe de modo explícito as transformações do gráfico das funções seno e cosseno como propriedades do gráfico. Como restrições: não emprega, ou estimula a reconhecer, as potencialidades dos *softwares* de construção de gráficos para entendimento dos aspectos das funções seno e cosseno, trabalhando o discreto e o contínuo; não apresenta as funções seno e cosseno para interpretar/modelar fenômenos periódicos e situações em contextos diversos; não expõe de forma integrada o gráfico das funções seno e cosseno junto ao seu significado; e não estuda as características das funções junto à definição.

O modelo dominante expresso na esfera do Ensino Superior é o estudo das funções seno e cosseno definidas pelo círculo trigonométrico; entretanto, não articuladas à representação gráfica, sendo que ambas são trabalhadas de maneira isolada e sem qualquer aplicação ou modelação, fenômenos e uso de tecnologias para seu estudo.

Verificamos que o modelo dominante no campo do Ensino Médio comunga com o do Ensino Superior, apresentando a possibilidade de definir as funções por meio do ciclo trigonométrico; contudo, não as articula com o gráfico das funções. Além disso, não ocorre uma integração com ambientes tecnológicos que proporcionem o trabalho das funções seno e cosseno de maneira efetiva.

Compreendemos que, apesar dos documentos serem de anos distintos, o uso de tecnologias no ensino e na aprendizagem já era abordado como um recurso metodológico ou metodologia de grande potencial para o ensino de matemática. Ressaltamos que até mesmo algumas atualizações de documentos não estimulam a utilização dos recursos tecnológicos para o ensino de funções seno e cosseno.

O fato mencionado confirma o que Trouche (2005) destacou em seu trabalho na França, a saber, que, à época, ainda havia relutância quanto ao emprego de novas tecnologias, inclusive da calculadora, em sala de aula, mesmo após sua inserção nos currículos escolares. De maneira análoga acontece no Brasil, pois, uma vez que as instituições que estão no nível sociedade não reconhecem e incentivam o uso de tecnologias, os sujeitos que estão nos níveis escola e pedagogia podem não distinguir a utilização de tecnologias enquanto uma ferramenta com potencial para o estudo das funções seno e cosseno.

Observa-se, em linhas gerais, como atesta Chevallard (2002), que, ao determinarem uma organização matemática para ser implantada em sala de aula, os professores buscam abranger os níveis de maior especificidade, como tema e assunto; nos setores mais acima não há uma preocupação por parte do docente, resultando numa falta de motivação, já que, segundo o autor ora citado, é nos níveis superiores que as tarefas motivadoras estão.

Apresentaremos no capítulo seguinte, com base no MED/MPD, diretrizes para um Modelo Praxeológico de Referência – MPR para o estudo de funções seno e cosseno.

3 MODELO EPISTEMOLÓGICO/PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA – MER/MPR

No capítulo anterior, em nosso MED/MPR, analisamos o problema de ensino das funções seno e cosseno na esfera do Ensino Médio e do Nível Superior. Alicerçados nas condições e restrições levantadas, dentro da problemática de base sobre as funções seno e cosseno, poderemos reformular tal problemática da seguinte forma: é possível proporcionar o estudo das funções seno e cosseno integrado a um dispositivo tecnológico por meio de um PEP no Ensino Superior e na Educação Básica resgatando a sua razão de ser? Quais praxeologias matemáticas podem ser consideradas para que o trabalho com as funções seno e cosseno possa ser compreendido? Quais elementos teóricos são necessários para descrever, justificar e interpretar um estudo de funções seno e cosseno por intermédio de um percurso investigativo? Como podemos trabalhar com uma organização matemática das funções seno e cosseno que privilegie a abordagem no ciclo trigonométrico, através de um instrumento tecnológico, que possa viver no Ensino Médio e no Superior?

Fundamentados na Teoria Antropológica do Didático – TAD, desenvolvemos a dimensão epistemológica do problema e, a partir do modelo dominante revelado, apresentamos o Modelo Epistemológico de Referência (MER) sobre as funções seno e cosseno. Vale salientar que a dimensão epistemológica reflete o modo como podemos descrever um dispositivo didático PEP a respeito das funções seno e cosseno integrado ao GeoGebra por meio de um MER compatível com o modelo epistemológico da atividade matemática.

Nesse cenário, visando proporcionar um modelo de referência que não esteja no paradigma monumentalista, como afirma Chevallard (2004), mas no paradigma do questionamento do mundo, buscamos nos referenciar em um modelo epistemológico de referência que permita a investigação didática através de questionamentos.

A TAD possibilita ao pesquisador a liberdade para abrangência das condições e restrições institucionais; a partir disso, propicia a construção de um modelo que pode proporcionar a (re)construção de praxeologias a fim de desenvolver a atividade matemática (BOSCH; GASCÓN, 2005; GASCÓN, 2011). O MER, apesar de constituir um modelo, é considerado uma ferramenta de trabalho teórico e experimental, conforme Licera (2017), sendo, assim, alternativo e provisório, colocado à prova durante todo o processo de experimentação da pesquisa.

Como declarado anteriormente, o MER faz parte da dimensão epistemológica, sendo essencial ser revelado, já que permite o entendimento de alguns caminhos da investigação, como ressalta Gascón (2011): a amplitude do âmbito matemático, devendo o MER ser abrangente; os fenômenos didáticos que serão visíveis ao investigador; os tipos de problemas que podem surgir na pesquisa; e as tentativas de explicação que podem ser propostas, ou seja, as soluções consideradas admissíveis.

Exporemos neste capítulo uma proposta de Modelo Epistemológico de Referência Alternativo sobre funções seno e cosseno, baseados nos trabalhos de Nguyen Thin (2011). Advertimos que o MER está pautado em elementos levantados no estudo histórico-epistemológico e na razão de ser das funções seno e cosseno; nas condições e restrições levantadas no modelo dominante; e do contexto extra-matemático para o intra-matemático, abordando a modelação de fenômenos periódicos integrados ao GeoGebra como contexto principal nesta pesquisa.

Nesse sentido, explicitaremos nosso MER, em termos dos questionamentos que Gascón (2011) pontua, no quadro 16.

Quadro 16 – Questionamentos do MER.

O que é um conhecimento matemático?
Como interpretá-lo?
Como é descrito esse conhecimento?
Quais são seus componentes e como são estruturados?
Como se pode modelar o conhecimento matemático desde o modelo epistemológico geral até o mais específico?
Qual é a razão de ser do conhecimento matemático?
Quais são as questões matemáticas ou extra-matemáticas que respondem ao estudo de funções seno e cosseno no âmbito da atividade matemática?
O que se entende por fazer matemática, aprender, comunicar, adquirir, ensinar ou aplicar o conhecimento matemático?
Como é gerado e como se desenvolve?
Como é transformado em diferentes instituições?
Qual a amplitude no domínio matemático para elevar um problema didático?

Fonte: a autora (2020).

Sob a chancela da TAD, desenvolvemos os passos a seguir (CHEVALLARD, 1989; CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997; LICERA, 2017): estabelecer um sistema inicial de objetos e relações que não possuem respostas diretas e imediatas, a partir das ferramentas apresentadas nesse sistema; expor a praxeologia matemática de referência para esta pesquisa, que inclui as definições de um sistema matemático cujos elementos correspondem aos objetos e relações do sistema inicial – as questões são interpretadas matematicamente – nessa etapa, destaca-se o trabalho técnico inserido no modelo a fim de interpretar e responder as questões alçadas no sistema primeiro – há também a avaliação da pertinência do modelo; por fim, a formulação de novos problemas através do modelo matemático, com o intuito de aprofundar o estudo do sistema inicial, podendo surgir problemas independentes que necessitem de outra modelagem.

Assim, apresentaremos o modelo epistemológico de referência que fundamenta o percurso de estudo e pesquisa empreendido, bem como as análises do modelo dominante.

3.1 O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO SOBRE FUNÇÕES SENO E COSSENO

A construção de nosso MER é norteada por quatro questionamentos, de acordo com as etapas explicitadas anteriormente, denominados de Q_a, Q_b, Q_c e Q_d. As questões Q_a são relativas à razão de ser das funções seno e cosseno. A questão Q_b está relacionada à modelação matemática, destinada à questão extra-matemática, que permite a modelação matemática por meio das funções seno e cosseno. A Q_c é a parte da organização matemática e didática, privilegiada para a modelação, que possa viver tanto no Ensino Superior quanto no Médio. Por último, temos a Q_d, que trabalha como o GeoGebra possibilita o entendimento da organização matemática. Frisamos que as questões são dependentes umas das outras e que não há uma ordem específica; nesses termos, organizamos desta forma com vistas a uma melhor compreensão.

3.1.1 As funções seno e cosseno e a razão de ser

Ao ponderar a respeito das possíveis razões de ser para o ensino de funções seno e cosseno, formulamos as seguintes questões (Q_a): “Quais contextos podemos utilizar para trabalhar com o estudo das funções seno e cosseno? Quais são as questões que podem responder à construção de uma praxeologia em torno das funções seno e cosseno?”.

Quando pensamos no ensino de matemática, e a partir das análises dos documentos que norteiam esse processo, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, temos a condição de empregar a linguagem matemática na compreensão dos fenômenos da natureza.

No que se refere à trigonometria e aos fenômenos periódicos, esse fato também é constante. Uma vez que a periodicidade é um conceito forte na modelação de fenômenos naturais, e atrelada às funções periódicas, temos as funções seno e cosseno como um objeto matemático de potencial elevado para modelização/modelagem dos fenômenos citados.

Conforme alega Nguyen Thin (2011), as funções têm um papel de destaque como ferramentas de modelação matemática, pois, por meio delas, vários fenômenos evolutivos e variáveis podem ser modelados, sendo ambos presentes em disciplinas como física, biologia, economia e outras. Nesse aspecto, as funções, em especial as funções periódicas, são capitais para a modelação de problemas extra-matemáticos.

Convém-nos ressaltar a razão de ser da matemática asseverada por Sensevy e Mercier (1999 *apud* NGUYEN THIN, 2011, p. 23, tradução nossa):

> - fazer matemática é fazer modelos que irão controlar fenômenos na realidade;
> - fazer matemática é usar ferramentas para resolver problemas e também construir ferramentas para resolver problemas ou ferramentas de estudo e problemas que eles resolveriam.

Podemos observar, através das razões de ser aludidas, a capacidade da matemática modelar fenômenos de diversas ciências.

De acordo com o estudo histórico-epistemológico feito neste trabalho, o desenvolvimento da trigonometria e das funções seno e cosseno partiu das necessidades práticas do homem, a exemplo do cálculo de distâncias inacessíveis, da abrangência do tempo por meio das mudanças climáticas e movimentos celestiais; da compreensão do dia e da noite; para, depois, formalizar a trigonometria e contribuir com a invenção do cálculo infinitesimal; ou seja, algumas razões de ser são, inicialmente, sociais e, posteriormente, avançam para razões de ser puramente matemáticas.

Desse modo, a trigonometria para modelação de fenômenos naturais sempre esteve presente em todo processo evolutivo. Vale mencionar que as instituições analisadas, como PCN, PCN+, BNCC e livro didático do Ensino Médio, ressaltam como condição a importância das funções seno e cosseno para modelar fenômenos periódicos, mesmo não explicitando uma praxeologia matemática para essa modelação.

Destacamos como razão de ser das funções seno e cosseno, a partir da análise da evolução do conceito, a modelação de fenômenos periódicos e a trigonometria como interações da análise numérica e geométrica, contribuindo para o cálculo infinitesimal. Em nosso PEP, vamos explorar a razão de ser voltada à modelação de fenômenos periódicos, no intuito de reconstruir uma praxeologia matemática sobre funções seno e cosseno que possa viver tanto no Ensino Superior quanto no Médio.

Quando nos referimos a modelar, modelização ou modelagem matemática, assumimos o conceito abordado por Chevallard (1989), que o denomina de intra ou extra-matemático. O autor explicita que trabalhos intra-matemáticos são os relacionados ao estudo de objetos da matemática, e os trabalhos que proporcionam o estudo matemático de outros objetos são extra-matemáticos, como sistemas físicos, biológicos, sociais e outros. E são esses estudos matemáticos de tais sistemas não matemáticos que ele intitula de modelagem/modelação matemática (CHEVALLARD, 1989).

Assim, ao pensarmos em modelação de fenômenos periódicos, temos inúmeros campos a serem abordados, sobretudo o da física, pois, como afirma Klein (2000 *apud* NGUYEN THIN, 2011), a relação da física com a matemática é bastante forte, em diferentes contextos e em diversos objetos matemáticos. Na acepção de Klein (2000 *apud* NGUYEN THIN, 2011), a física apresenta três eficiências matemáticas para modelagem, a saber: antecipação de resultados de experimentação ou de resultados físicos produzidos anteriormente; estrutura explicativa; e a geração de novas ideias, conceitos ou soluções para problemas antigos ou inéditos.

Nesse caráter, a partir da razão de ser das funções seno e cosseno considerada em nosso MER, que é modelar fenômenos periódicos, nosso PEP será desenvolvido no campo da modelização de fenômenos físicos para compreensão das funções seno e cosseno, uma vez que, para Gruber e Benoit (1998 *apud* NGUYEN THIN, 2011), a matemática é a linguagem física e também o pensar físico, configurando a forma de traduzir os fatos da natureza. Os autores ainda apontam que a física permite, com a resolução dos seus problemas com o suporte da matemática, o desenvolvimento de conhecimentos novos e importantes para a matemática.

Por intermédio das relações estabelecidas entre as ciências físicas e matemáticas, optamos por eleger os fenômenos periódicos da física para modelação em nosso Percurso de Estudo e Pesquisa, pois em vários ramos da física temos fenômenos periódicos, como mecânica, eletromagnetismo, ondas e outros.

Na próxima seção, explicitaremos um pouco mais sobre a modelação dos fenômenos periódicos para o ensino de funções seno e cosseno.

3.1.2 Modelação de fenômenos por meio das funções seno e cosseno

Ponderando o contexto desta pesquisa, que são discentes do primeiro e segundo semestres de um curso de Licenciatura em Matemática provenientes, em sua maioria, da escola pública, recém-saídos do Ensino Médio, escolhemos trabalhar funções seno e cosseno de maneira que os estudantes possam apreender o tema em questão e, ao mesmo tempo, reunir arcabouço teórico-pedagógico para suas futuras práticas enquanto professores. Desse modo, ao resgatar a razão de ser das funções seno e cosseno, deparamo-nos com a modelização de fenômenos periódicos e, em decorrência do referido fator, optamos por restringir a abordagem a fenômenos físicos, por serem muito trabalhados no Ensino Médio e por permitirem uma maior exploração das funções seno e cosseno e suas características.

Partindo do domínio extra-matemático, questionamos, na corrente seção, para melhor entendimento do MER, Q_b: "Quais fenômenos físicos periódicos podemos considerar para trabalhar a modelação por meio de funções seno e cosseno? O que devemos sopesar ao optar pela modelização de fenômenos periódicos físicos?".

Como foi registrado anteriormente, os fenômenos físicos periódicos atuam em diferentes ramos, como mecânica, eletromagnetismo, ondas, cristalografia etc. Três deles, no entanto, merecem destaque: movimento da terra em torno do sol e em torno de seu próprio eixo, caracterizados como movimentos circulares; movimentos oscilatórios, como de um pêndulo simples; e movimento das ondas, como a vibração de uma corda.

Conforme Nguyen Thin (2011), os fenômenos citados, na física, ocorrem numa estrutura que combina as três dimensões do espaço com a única dimensão do tempo, conhecida como espaço-tempo – o espaço, considerado contínuo e tridimensional; e o tempo, contínuo e linear.

Quando citamos o tempo, consideramos o tempo matemático, que está vinculado à utilização da matemática enquanto um instrumento para modelar fenômenos temporais ao longo do tempo.

O tempo é muito presente na física, em diversos estudos de fenômenos. O tempo permite colocar em equação a observação de fenômenos físicos e conseguir dados para serem analisados.

Como ressalta Nguyen Thin (2011), o tempo é considerado, na física, sob a forma de um número real, simbolizado pelo parâmetro t, e oferece duas representações: a linear e a cíclica. O tempo pode ser medido através do movimento periódico. Feynman (1965 *apud* NGUYEN THIN, 2011) pontua que podemos medir o tempo utilizando alguma coisa que se repita de maneira regular, ou seja, periódica.

Não vamos, porém, aprofundar-nos no tempo, uma vez que nosso interesse é discutir quais fenômenos periódicos podemos usar na modelação de um fenômeno físico para o estudo de funções seno e cosseno que possam ser utilizados com estudantes do primeiro semestre de Licenciatura em Matemática e no Ensino Médio.

No que tange aos fenômenos periódicos, baseamo-nos na obra de Young e Freedman (2008) e na pesquisa de Nguyen Thin (2011), este conforme indicado anteriormente, sobre o tema.

De acordo com Young e Freedman (2008), um movimento periódico são movimentos que se repetem indefinidamente. Nesse sentido, pode ser representado por uma função periódica. As funções periódicas são funções que se repetem regularmente em intervalos iguais ao período. As funções trigonométricas são das funções periódicas mais estudadas na Educação Básica e também vivem no Ensino Superior – em especial, as funções seno e cosseno; esta pode ser interpretada como uma função seno transladada.

Temos na física fenômenos que utilizam as funções seno e cosseno para descrevê-los. Um exemplo nesse cenário é a projeção de um espaço unidimensional de um movimento padrão circular, o movimento ao final de uma mola de massa, ou a aproximação de oscilações de pequeno desvio angular de um pêndulo (NGUYEN THIN, 2011, 2011). Além disso, temos a representação gráfica dessas funções circulares, que podem ser usadas para representar ondas de fenômenos oscilatórios.

As funções seno e cosseno podem ser empregadas para representar a soma de funções infinitas e periódicas complexas dos processos físicos, de modo simples. Essa informação é a ideia da série de Fourier, na qual séries trigonométricas permitem a resolução de problemas distintos, envolvendo a física e a matemática, que contenham equações diferenciais, tendo aplicações no processamento de imagens e sinais, óptica, acústica, econométrica e outros. Convém-nos sinalizar que essa soma de funções seno e cosseno, que representa a série de Fourier que pode ser aproveitada em fenômenos físicos periódicos, apresenta, para nós, uma restrição institucional, já que a série de Fourier não vive na instituição Ensino Médio e nos primeiro e segundo semestres do curso de Licenciatura em Matemática, por fazer parte da disciplina de cálculo III, destinada às séries de convergência e equações diferenciais ordinárias.

O movimento periódico é essencial ao entendimento de estudos sobre as ondas, corrente elétrica, som e luz. O movimento harmônico simples está associado às funções periódicas seno e cosseno. A partir desse movimento é possível estudar fenômenos oscilatórios. Conforme Young e Freedman (2008), o movimento harmônico simples é capaz de descrever, com um modelo simplificado, diversos tipos de movimentos periódicos.

Para os autores supracitados, temos dois movimentos relacionados às formas de movimentos periódicos: os oscilatórios harmônicos e os circulares. Ambos utilizam as funções seno e cosseno para sua modelagem matemática. Apesar de nem sempre serem trabalhados de maneira articulada (NGUYEN THIN, 2011), apenas na Educação Básica, buscaremos, em nosso MER, explorar o movimento oscilatório harmônico e o movimento circular para estudar funções seno e cosseno.

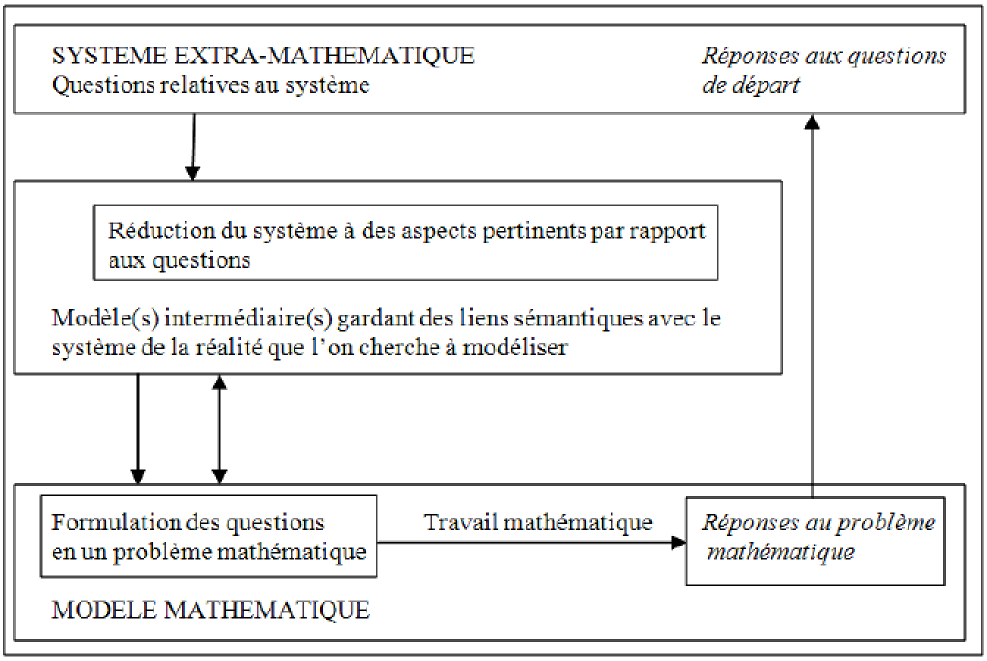
Nesse sentido, para modelação dos fenômenos físicos mencionados, é preciso considerar conceitos como amplitude, ciclo, período e frequência, que serão explicitados na seção sobre a organização matemática e didática do MER. Antes, contudo, faz-se necessário abordar a modelização matemática desses fenômenos.

De acordo com Sodré (2007), o termo modelo matemático é abrangente e pode ser aplicado em distintas áreas do conhecimento. O autor afirma que um modelo matemático pode ser uma representação de um sistema real que mostra como ocorrem as modificações e a formulação e que configure um sistema. Nguyen Thin (2011) cita alguns físicos, como Alaire (2005), que consideram a modelização matemática como a arte/ciência para representar uma realidade física, ou até mesmo transformar modelos abstratos acessíveis à análise para o cálculo; isto é, representar de forma simples um objeto técnico, ou um processo real complexo que não pode ser compreendido em sua totalidade, por meio de um modelo.

Neste segmento, a modelagem ou modelização matemática considerada no corrente trabalho comunga com Bessot (2010 *apud* NGUYEN THIN, 2011)), que principia seu estudo demonstrando um esquema a partir do sistema extra-matemático, passando por um modelo intermediário entre a situação extra-matemática e o modelo matemático – primeiro nível de abstração da realidade. Em seguida, temos a passagem do modelo intermediário para o matemático. O próximo passo é a fase de trabalho matemático no modelo matemático, explorando as questões e a matemática que está envolvida. Por fim, retorna-se ao questionamento inicial com o intento de, através das respostas matemáticas encontradas, buscar possíveis respostas para o problema extra-matemático (NGUYEN THIN, 2011).

O modelo exposto no esquema abaixo representa a modelização matemática para a solução de um problema no contexto extra-matemático discutido por Bessot (2010 *apud* NGUYEN THIN, 2011). Salientamos que, em nossa pesquisa, utilizaremos o dispositivo de PEP com uma questão geratriz aberta que envolva um problema de modelização da física para o estudo de funções seno e cosseno.

Figura 37 – Esquema do processo de modelização de Bessot (2010).



Fonte: Nguyen Thin (2011, p. 54).

Destarte, frisamos a relevância da modelização matemática no estudo de funções seno e cosseno, uma vez que a ausência desse tipo de atividade traz como implicação o fenômeno da rigidez e atomização das praxeologias matemáticas escolares (tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior). Esse fenômeno está atrelado à desarticulação dos conteúdos na matemática escolar, bem como à ausência de justificativa das técnicas empregadas e de questionamentos, pois, muitas vezes, é apresentada uma matemática engessada, sem a presença de uma matemática modelada efetivamente nas instituições escolares (LUCAS *et al*, 2014).

No próximo tópico, ampliaremos a análise à organização matemática e didática que será seguida em nosso MER e, consequentemente, no PEP, uma vez que, explicitados os possíveis fenômenos periódicos que podem ser modelados pelas funções seno e cosseno, faremos o estudo das organizações matemáticas a serem consideradas para modelação desses fenômenos pelo objeto matemático desta pesquisa.

3.1.3 Organização Matemática e Didática das funções seno e cosseno

Ao pensarmos no estudo de funções seno e cosseno, perguntas como as expostas a seguir vêm à tona: "como ensinar? O que privilegiar? Para que ensinar as funções seno e cosseno?". Ao refletirmos sobre o modelo dominante analisado, as restrições reveladas na corrente pesquisa nos fazem ponderar acerca da organização matemática e didática de nosso MER. Nesse aspecto, temos as seguintes questões que nortearam nosso trabalho, Q_c: “Quais características das funções seno e cosseno devemos considerar neste estudo? Quais organizações matemáticas e didáticas, para o ensino de funções seno e cosseno, podemos privilegiar para a modelação de fenômenos físicos que possam viver tanto no Ensino Superior quanto no Médio? Quais as condições e restrições levantadas no MED?”.

Ao planejar desenvolver um estudo para funções seno e cosseno com estudantes de Licenciatura em Matemática por meio da modelagem de fenômenos físicos, buscamos minimizar o fenômeno da rigidez matemática e proporcionar a compreensão das funções seno e cosseno por intermédio de uma investigação. Desse modo, através de um estudo baseado na averiguação, objetivamos que os discentes entendam as funções seno e cosseno por meio de questionamentos a serem levantados a partir da questão geratriz.

É plausível refletir sobre as organizações matemáticas que devem ser distinguidas no MER em foco para que a finalidade seja alcançada e, após levantamento das organizações matemáticas, alcançá-las didaticamente. Na sequência, exploraremos as restrições levantadas no MED com o intuito de alcançá-las para nossa problemática possibilística e, por fim, construir o MER do presente trabalho.

3.1.3.1 Organização matemática para o estudo das funções seno e cosseno

As funções seno e cosseno remetem à trigonometria, que, na maioria das vezes, é recordada através do triângulo retângulo e do círculo, ambos importantes à compreensão das funções referidas, porém apresenta diversas dificuldades nesse processo. O trabalho de Loeng (2019) busca compreender o aprendizado dos alunos referente a trigonometria e funções trigonométricas no Ensino Médio, e as dificuldades dos mesmos na compreensão desses conceitos. Em especial na passagem da trigonometria do círculo para as funções trigonométricas. Para isso, a autora utiliza três organizações matemáticas locais trabalhadas no nível secundário equivalente ao nosso Ensino Médio, as quais são: organização matemática local relativa à trigonometria no triângulo; organização matemática local relativa à trigonometria no círculo trigonométrico; e a organização matemática local relativa as funções trigonométricas.

Loeng (2019) ressalta em seus resultados a existência de obstáculos didáticos e epistemológicos nesse processo, que requer uma maior investigação, bem como diversas dificuldades dos alunos referentes a compreensão de radianos, confusão na passagem do registro gráfico do círculo trigonométrico para o gráfico das funções trigonométricas, relacionados aos não-ostensivos, entre outras. Nesse sentido, consideraremos essas dificuldades na análise de nosso PEP.

Nosso trabalho, está voltado a essa passagem da organização matemática local relativa a trigonometria no círculo trigonométrico para organização matemática local relativa as funções trigonométricas, de forma integrada. Ou seja, almejamos trabalhar por meio de fenômenos periódicos a integração entre o modelo circular e o modelo oscilatório.

Ao optarmos por desenvolver um MPR alternativo para o estudo de funções seno e cosseno utilizando o GeoGebra enquanto ferramenta, a partir de um problema de modelagem matemática de fenômenos periódicos físicos, temos que abranger os conteúdos matemáticos necessários ao desenvolvimento do MER e, posteriormente, do PEP.

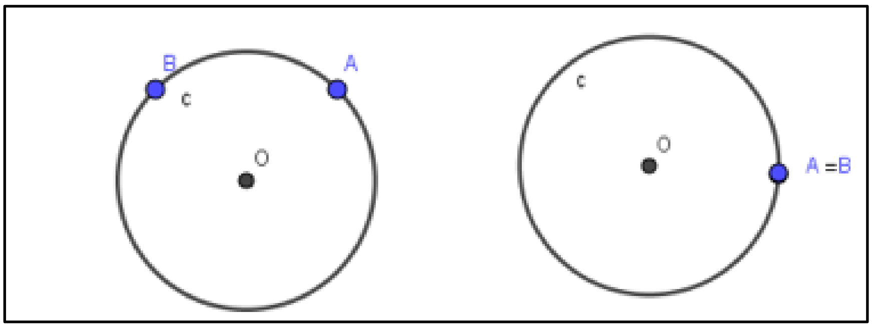
Tendo em vista que os estudos anteriores revelaram os fenômenos periódicos físicos como movimento oscilatório harmônico e os movimentos circulares como fenômenos em potencial para estudarmos as funções seno e cosseno, priorizamos em nosso MER a trigonometria no ciclo trigonométrico para principiar o trabalho com funções seno e cosseno. Assim, apresentaremos a seguir a organização matemática imprescindível para propor nosso MER.

A análise ora em pauta inicia-se com o estudo do ciclo trigonométrico até chegar às funções seno e cosseno. Antes, contudo, convém examinar alguns objetos matemáticos relevantes ao entendimento do ciclo trigonométrico.

3.1.3.1.1 Arcos

Para compreender o ciclo trigonométrico é preciso entender o conceito de arcos. De acordo com Iezzi (1977, p. 1-C), temos: “dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes e cada uma dessas partes é denominada arco de circunferência $\widehat{AB}$” (Figura 38). Se os pontos A e B coincidem, temos dois arcos: o primeiro é um ponto, o arco nulo; e o segundo é o arco de uma volta, isto é, uma circunferência (Figura 38).

Figura 38 – Representação de um arco de circunferência AB e de um arco nulo/uma volta.



Fonte: a autora (2020).

Ao buscarmos comparar arcos, faz-se necessário medi-los. O arco de uma circunferência apresenta duas formas de medição: a angular e a linear. Todo arco de uma circunferência tem um ângulo central correspondente, o qual vale a relação que a medida angular do arco equivale à medida do ângulo central correspondente. Quanto à medida linear, temos que é a medida do comprimento que corresponde ao arco esticado. A medida de arcos e ângulos tem como unidade de medida o grau e o radiano. O grau é um arco unitário igual a 1/360 da circunferência que contém o arco a ser medido. Já o radiano é um arco unitário com comprimento igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Nesses termos, uma circunferência mede 360º; em radianos é equivalente a 2π. A partir dessa consideração é possível realizar conversões entre as unidades utilizando a comparação de 360º e 2π ou de 180º e π.

Dessa forma, para entendimento dos arcos, faz-se necessário abrirmos uma organização matemática para a análise que permita avançar para o círculo/ciclo trigonométrico. Nesse sentido, apresentaremos, no quadro 17, uma praxeologia matemática para estudo dos arcos.

Quadro 17 – Praxeologia matemática sobre arcos e medidas.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: exprimir determinado ângulo em grau para radiano ou em radiano para grau.	τ_1: estabelecer a correspondência entre radianos e grau, e, em seguida, calcular por regra de três.	$[\theta, \Theta]_1$: medidas de arcos/arcos e ângulos.

T_2: dado um arco AB e o tamanho da corda AB, calcule a medida do arco.	f_2: comparar o segmento AB com um lado de uma figura inscrita na circunferência (por exemplo, um hexágono) e daí relacionar com o número de lados da figura para achar o tamanho do menor arco e calcular a medida do arco.	$[\theta, \Theta]_1$: medidas de arcos/arcos e ângulos.

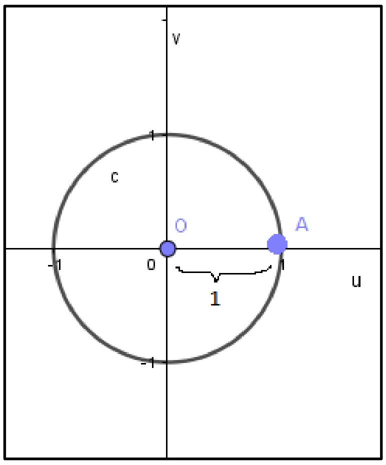
Fonte: a autora (2020).

Uma vez que compreendemos um arco, vamos ao estudo do ciclo trigonométrico.

3.1.3.1.2 Ciclo trigonométrico

Na concepção de Iezzi (1977), dado um sistema cartesiano ortogonal uOv, em um plano, se tomarmos uma circunferência **c** de centro 0 e raio igual a 1, temos a circunferência de comprimento 2π (Figura 39). Definindo uma aplicação do conjunto dos números reais sobre **c**, associamos a cada número real x um único ponto na circunferência, considerando que: se x = 0, o ponto P coincide com A; se x > 0, a partir de A temos um percurso anti-horário cujo comprimento é x e o ponto final do percurso é P; se x < 0 temos um percurso de comprimento |x|, no sentido horário, com p sendo o ponto final do percurso. A circunferência **c** definida com origem em A é o ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica. Alguns autores classificam a definição citada como função de Euler.

Figura 39 – Representação de um ciclo trigonométrico.



Fonte: a autora (2020).

Se o ponto P está associado ao número x, então P é a imagem de x no ciclo trigonométrico. Se o ponto P é a imagem do número x_0, então P será a imagem dos números $x_0 + 2\pi$, $x_0 + 4\pi$, $x_0 + 6\pi$, entre outros, ou seja, P é a imagem dos elementos do conjunto $\{ x \in R / x = x_0 + 2k\pi, k \in Z \}$. Dois números que têm a mesma imagem no ciclo são côngruos (IEZZI, 1977). Além disso, temos que o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas do plano cartesiano dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes: o primeiro quadrante com o eixo das abscissas e ordenadas positivo; o segundo quadrante com o eixo das abscissas negativo e o das ordenadas positivo; o terceiro quadrante com os eixos das abscissas e ordenadas negativos; e o quarto quadrante com o eixo das abscissas positivo e o das ordenadas negativo.

No que se refere à simetria no ciclo trigonométrico temos três tipos: no tocante ao eixo das ordenadas, em relação à origem e em relação ao eixo das abscissas. Desse modo, temos arcos simétricos se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias.

Pontuamos que o ciclo trigonométrico é definido considerando-se o plano cartesiano, os eixos das abscissas e sendo unitário, isto é, com raio igual a 1 – o que facilita praxeologias para o estudo de funções seno e cosseno. Abaixo, exporemos o quadro 18 com praxeologias matemáticas a respeito do ciclo trigonométrico.

Quadro 18 – Praxeologia matemática sobre ciclo trigonométrico.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: dividir o ciclo em n (por exemplo: n=12) partes iguais, utilizando A como um dos pontos divisores. Determinar os x ($x \in [0, 2\pi[$) cujas imagens são pontos divisores.	τ_1: comparar verificando que cada parte é (1/n) . 2π, e que p é a imagem de x quando o arco é igual a x, construindo uma tabela com os possíveis valores da imagem de x e os valores de x.	$[\theta, \Theta]_1$: definição do ciclo trigonométrico/arcos e ângulos.
T_2: encontrar a imagem no ciclo de valores de x dados.	τ_2: utilizar a expressão: valor de x é igual à imagem vezes 2π, ou seja, $Vx = im \times 2\pi$.	$[\theta, \Theta]_1$: definição do ciclo trigonométrico/arcos e ângulos.

Fonte: a autora (2020).

3.1.3.1.3 Seno e cosseno de um arco

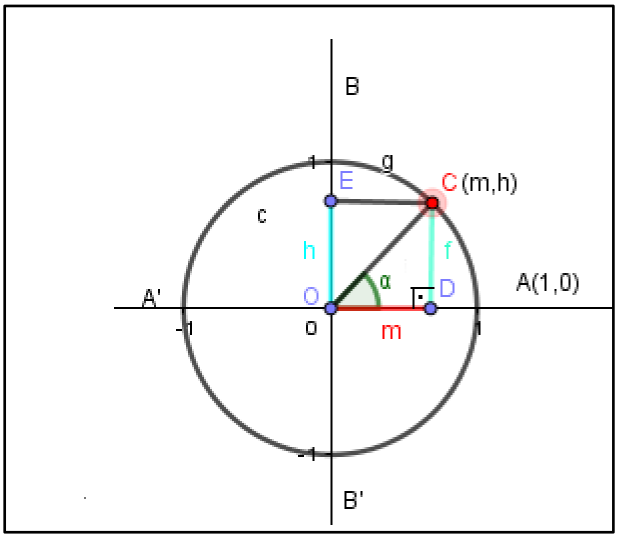
A partir da definição de seno e cosseno em um triângulo retângulo são válidas as relações a seguir:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}\ e\ cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}.$$

Nesse caráter, ampliando o conceito para o ciclo, observaremos, na figura 40, situada adiante, o triângulo DOC e o arco AC que estão no primeiro quadrante; temos que a medida do ângulo do triângulo inscrito na circunferência é igual à medida do arco. O eixo BB’ é o eixo das ordenadas, considerado também como eixo dos senos. O eixo AA’ é o eixo das abscissas, denominado como eixo dos cossenos.

Então, temos no primeiro quadrante que o seno de α é igual a DC/OC, ou a projeção do ponto C no eixo dos senos, dividido pelo raio da circunferência que é igual a 1, isto é, h/1 =h. Nessa configuração, para todo arco AC do ciclo trigonométrico, com medida (AC)= α rad, α ∈ R, e 0 ≤ α ≤ 2π, sen α = h, ordenada de C. Já quanto ao cosseno no primeiro quadrante temos que cos α =OD/OC = m/1=m. Para todo arco AC do ciclo trigonométrico, com medida (AC)= α rad, α ∈ R, e 0 ≤ α ≤ 2π, cos α = m, abscissa de C.

Figura 40 – Representação de um ciclo trigonométrico.



Fonte: a autora (2020).

Com base no significado de seno e cosseno no círculo temos as seguintes praxeologias:

Quadro 19 – Praxeologia matemática sobre seno e cosseno no ciclo.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: dada a medida de um segmento MN no eixo das abscissas e de um segmento BC no eixo das ordenadas, na circunferência de raio unitário e no primeiro quadrante, determine o valor de seno e cosseno do ângulo α.	f_1: calcular o valor do seno e cosseno a partir da medida dos segmentos.	$[\theta, \Theta]_1$: definição de seno e cosseno no círculo trigonométrico/trigonometria no círculo.

Fonte: a autora (2020).

Consideremos também as funções periódicas, uma vez que seu conceito é relevante à compreensão das funções seno e cosseno. Conforme traz Iezzi (1977, p. 17-C), “uma função f: $A \rightarrow B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição $f(x + p) = f(x), \forall x \in A$. O menor valor de p que satisfaz a equação é chamado de período”.

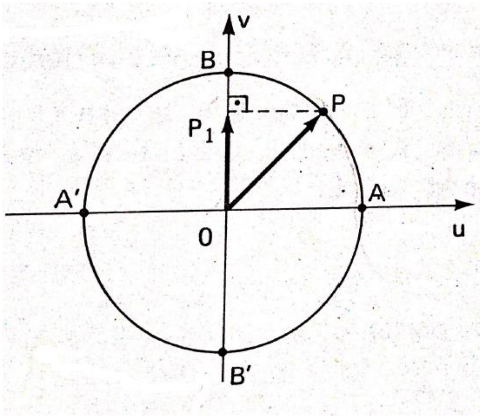
3.1.3.1.4 Função seno e função cosseno

Levando em consideração os estudos realizados, apresentaremos a seguir o objeto matemático desta pesquisa: as funções seno e cosseno. Antes de discorrer sobre as referidas funções, faz-se necessário situá-las historicamente. Para isso, retomaremos parte da análise histórico-epistemológica.

De acordo com Kennedy (1992), a função seno nasceu a partir do que ele chama de função corda. Para o autor, nas aplicações da função corda era preciso dobrar o arco antes de usá-lo como argumento em uma tábua de cordas. Assim, o arco original na tábua de cordas assumia o valor de variável independente, e, ao se pensar em calculá-lo, utilizaram a metade da corda de um arco duplo, surgindo a função seno. As tábuas de senos mais antigas foram descobertas na Índia, local em que, provavelmente, foram originadas. Esses indícios históricos fundamentaram a concepção das funções seno e cosseno como as entendemos hoje.

Nesse sentido, a função seno é definida, segundo Iezzi (1977, p. 17-C, grifos do autor), da seguinte maneira: “Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos sen x) a ordenada $\overline{OP}_1$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos *função seno* a função f: R→R que associa a cada real x o real $\overline{OP}_1$ = sen x, isto é: f(x) = sen x”.

Figura 41 – Definição da função seno pelo ciclo.



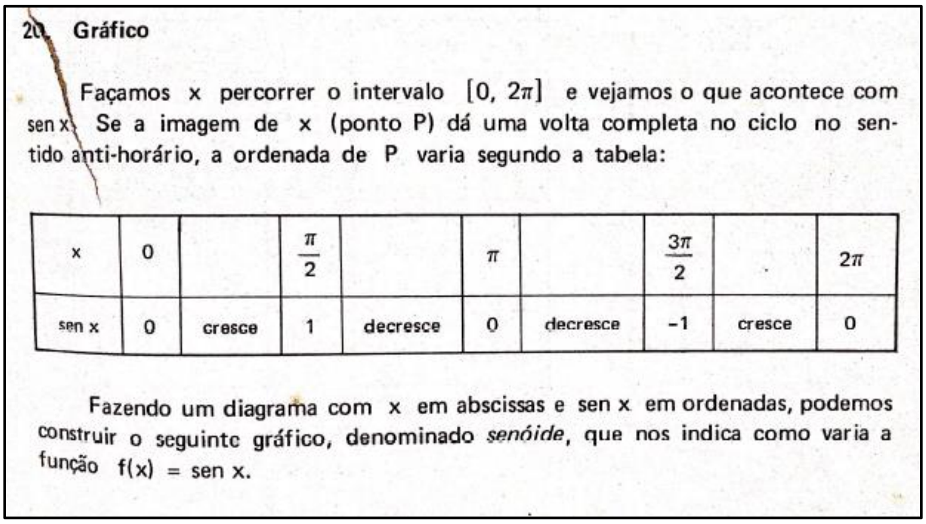
Fonte: Iezzi (1977, p. 17-C).

Assim, a função seno apresenta as seguintes características:

- A imagem da função seno é o intervalo [-1,1], justifica-se, pois, se P está no ciclo, sua ordenada só varia de -1 a 1;
- Se x for do primeiro ou segundo quadrante sen x é positivo. Se for do terceiro e quarto quadrantes sua ordenada é negativa, então sen x é negativo;
- Sen x é crescente se x percorrer o primeiro e quarto quadrantes;
- Sen x é decrescente se x percorrer o segundo ou terceiro quadrante;
- A função seno é periódica e seu período é 2π.

Convém-nos, antes de explorar a representação gráfica, basearmo-nos na forma que Iezzi (1977) expõe o tema, pois o autor apresenta o gráfico fazendo um estudo através do ciclo trigonométrico, conforme a Figura 42.

Figura 42 – Estudo para esboço do gráfico da função seno pelo ciclo.



20. **Gráfico**

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com sen x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

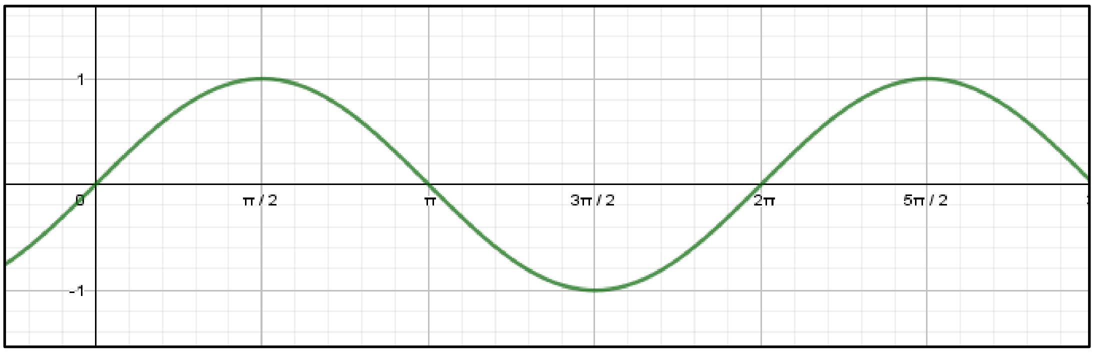
Fazendo um diagrama com x em abscissas e sen x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *senóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \text{sen } x$.

Fonte: Iezzi (1977, p. 19-C).

A partir das características da função seno e do estudo do ciclo feito por Iezzi (1977), conseguimos compreender a articulação do ciclo trigonométrico com o gráfico da função. Por meio dessa análise podemos esboçar o gráfico da função seno.

Será possível observar na próxima imagem que o gráfico da função seno continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0, uma vez que o domínio da função é o conjunto dos números reais. Notamos que o período da função é 2π, e que esta possui pontos de crescimento e decrescimento. Chamamos o gráfico em foco de gráfico da função básica de seno. Podemos constatar que a função completa o ciclo de 0 a 2π, e é limitada de -1 a 1.

Figura 43 – Gráfico da função seno.

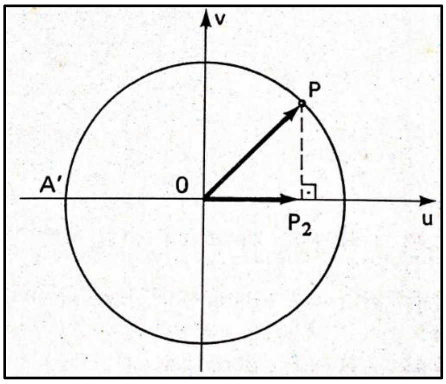


Fonte: a autora (2019).

Quanto à função cosseno, Iezzi (1977, p. 26-C, grifos do autor) pontua que: “Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos cos x) a ordenada $\overline{OP}_2$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos *função cosseno* a função f: R→R que associa a cada real x o real $\overline{OP}_2$ = cos x, isto é: f(x) = cos x".

Assim como na função seno, Iezzi (1977) apresenta o ciclo e em seguida utiliza as informações deste para introduzir o gráfico da função cosseno.

Figura 44 – Definição da função cosseno pelo ciclo.



Fonte: Iezzi (1977, p. 26-C).

Desse modo, a função cosseno possui as seguintes características:

- A imagem da função cosseno é o intervalo [-1,1];
- Se x for do primeiro ou quarto quadrante cos x é positivo. Se for do segundo ou terceiro quadrante cos x é negativo;
- Cos x é crescente se x percorrer o terceiro ou quarto quadrante;
- Cos x é decrescente se x percorrer o primeiro ou segundo quadrante;
- A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Com base nos aspectos da função cosseno e sua definição no ciclo trigonométrico, Iezzi (1977) mostra a passagem da interpretação do ciclo trigonométrico para a gráfica (Figura 45). O gráfico da função cosseno é uma cossenoide.

Observamos que, a partir das características explicitadas na imagem, e da tabela apresentada, podemos construir o gráfico da função cosseno, o qual é denominado de cossenoide.

Figura 45 – Estudo para esboço do gráfico da função cosseno pelo ciclo.

23. Gráfico

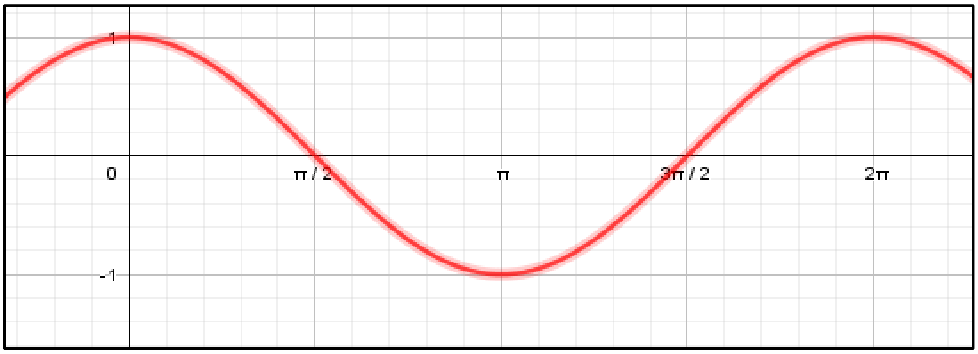
Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com cos x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fonte: Iezzi (1977, p. 27-C).

E, assim, montando um plano cartesiano com os valores de x no eixo das abscissas e os valores de cos x no eixo das ordenadas, podemos construir o gráfico da função cosseno e observar sua variação. A seguir, temos o esboço do gráfico da cossenoide.

Figura 46 – Gráfico da função cosseno.



Fonte: a autora (2020).

De forma análoga à função seno, na função cosseno o domínio é R, então o gráfico da função continua à esquerda de 0 e à direita de 2π. Vale ressaltar que a cossenoide pode ser interpretada como uma senoide transladada $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda.

Notamos que o período da função é 2π e que esta contém pontos de crescimento e decrescimento. Esse gráfico é chamado de gráfico da função básica de cosseno. Podemos constatar que a função completa o ciclo de 0 a 2π e é limitada de -1 a 1.

Quadro 20 – Praxeologia Matemática sobre as funções seno e cosseno.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: associar as funções seno e cosseno com pontos no ciclo trigonométrico ao gráfico no plano cartesiano e esboçar o gráfico das funções.	f_1: identificar os pontos correspondentes no ciclo e no plano cartesiano e, em seguida, traçar o gráfico das funções seno e cosseno.	$[\theta, \Theta]_1$: definição das funções seno e cosseno/funções circulares/trigonométricas.
T_2: identificar as características das funções no ciclo e no gráfico das funções seno e cosseno.	f_2: comparar e associar no ciclo e no gráfico a imagem, período, domínio das funções seno e cosseno e, na sequência, descrevê-las.	$[\theta, \Theta]_1$: definição das funções seno e cosseno/funções circulares/trigonométricas.

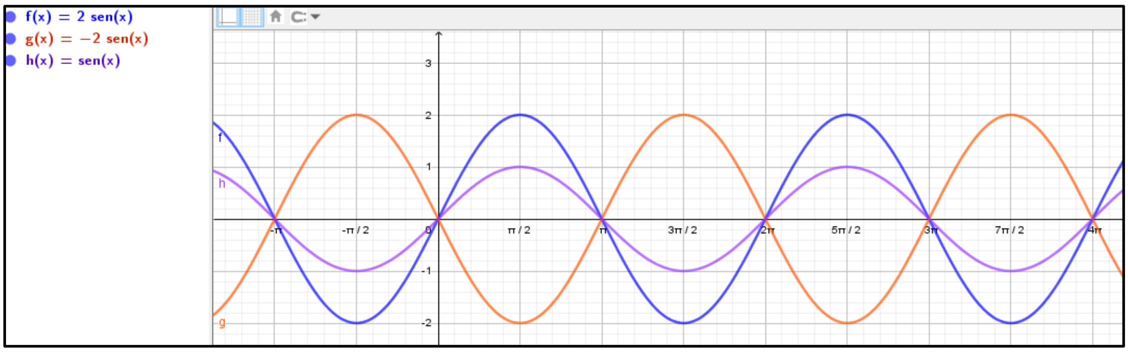
Fonte: a autora (2020).

Sendo as funções seno e cosseno funções circulares, e a partir dos estudos levantados para fenômenos físicos periódicos, objetivamos em nosso MER apresentar as funções seno e cosseno por intermédio do círculo de forma conjunta, ou seja, consideramos que o trabalho com a função, desde o conceito até as representações, pode ser feito simultaneamente com a representação no ciclo trigonométrico e no gráfico, conforme expusemos acima. Desse modo, não há uma ruptura no conhecimento, mas uma relação entre as representações das funções seno e cosseno.

Ponderemos agora as funções básicas f(x)= sen x e g(x)= cos x; podemos ter variações dessas funções através de parâmetros, que representam as transformações dos gráficos, isto é, algumas características das funções. Tais mudanças são de suma importância para a modelação matemática de fenômenos físicos, uma vez que parte significativa dos fenômenos periódicos apresenta alterações por meio de parâmetros em sua lei de formação. Neste segmento, estudamos cada um de maneira individual.

Para uma função f(x) = A sen x, o parâmetro A representa a amplitude da função. Assim, temos para A positivo uma função com gráfico dilatado por um fator A, ou seja, com amplitude A, sendo uma curva seno padrão. Para A negativo, temos o gráfico da função seno com amplitude |A|, e conhecida como curva seno invertida. Na figura 47, há um exemplo realizado no GeoGebra: para A = 2 o gráfico azul, para A = -2 o gráfico vermelho e, por fim, o gráfico da função seno básica.

Figura 47 – Gráficos de três funções seno no GeoGebra.



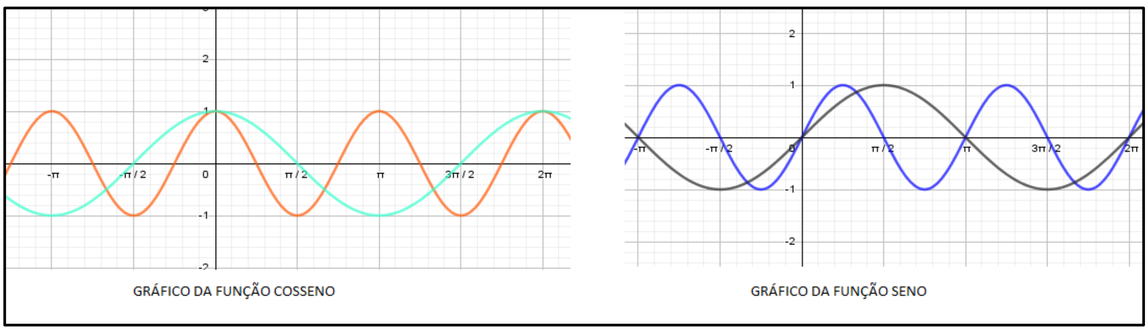
Fonte: a autora (2019).

Observamos, a partir da figura 47, as características das funções através da comparação dos gráficos – compreendendo a curva seno invertida da função g(x) = -2 sen x. e a amplitude 2 nas funções f(x) = 2 sen x, de forma dinâmica e interativa.

O mesmo ocorre com a função cosseno. Assim, temos g(x)= A cos x com as seguintes condições: para A positivo o gráfico é dilatado por um fator A, isto é, com amplitude A, sendo uma curva cosseno padrão. Para A negativo, temos o gráfico da função cosseno com amplitude |A| refletida no tocante ao eixo vertical e conhecida como curva cosseno invertida.

Dadas as funções f(x) = sen bx e g(x)= cos bx, com b positivo, o gráfico de f(x) é uma curva seno padrão com contração por um fator b em relação ao eixo x e, consequentemente, um período 2π/b. O gráfico de g(x) é uma curva cosseno padrão com período 2π/b.

Figura 48 – Gráficos das funções seno e cosseno transformados no GeoGebra.



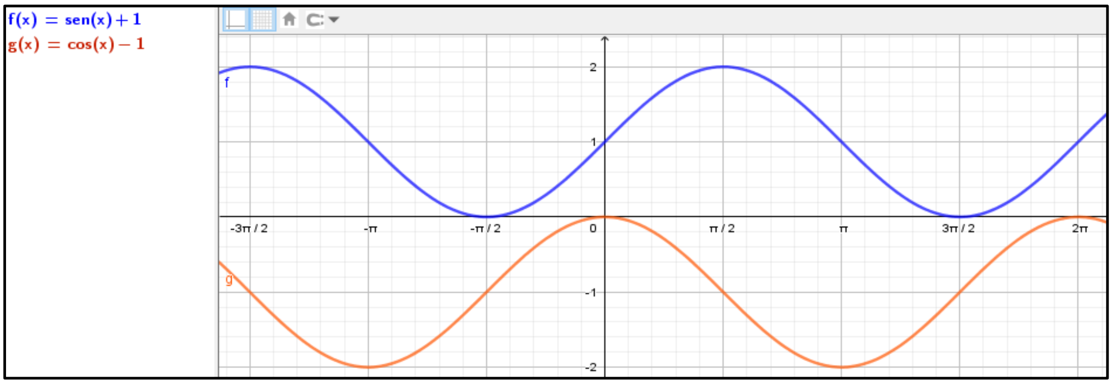
Fonte: a autora (2020).

De acordo com o gráfico exposto na Figura 48, supracitada, podemos depreender, de maneira dinâmica, o comportamento das funções, bem como o seu comportamento quando comparadas as funções básicas cosseno e seno com as funções transformadas pelo parâmetro *b =2*, a saber, com período π. Através das imagens acima, podemos compreender ainda as transformações gráficas das funções seno e cosseno de forma mais efetiva, uma vez que a imagem permite, por meio da visualização, entender o conceito trabalhado.

A próxima transformação está vinculada à translação horizontal do gráfico das funções seno e cosseno. Seja f(x)= sen (x-c) e g(x)= cos (x-c), temos que o gráfico da função f(x)= sen (x-c) é uma curva seno transladada |c| unidades para a esquerda se c for positivo, ou transladada |c| unidades para a direita se c for negativo. E o gráfico de g(x)= cos (x-c) é uma curva cosseno padrão transladada |c| unidades para a direita se c for negativo, ou transladada |c| unidades para a esquerda se c for positivo. Essa modificação é chamada de mudança de fase, não sendo esta, porém, uma denominação universal.

Temos como última transformação a relacionada com o eixo vertical conhecida como translação vertical. Dadas as funções f(x) = sen x + d e g(x)= cos x + d, a partir do parâmetro d temos os seguintes resultados: se d for positivo, o gráfico das funções f(x) = sen x + d e g(x)= cos x + d é transladado |d| unidades para cima; se d for negativo, temos uma translação vertical de |d| unidades para baixo no gráfico das funções f(x) = sen x + d e g(x)= cos x + d. Vejamos o exemplo na figura 49 com as funções f(x) = sen x + 3 e g(x)= cos x -3.

Figura 49 – Gráficos das funções seno e cosseno transladados verticalmente.



Fonte: a autora (2020).

Considerando as transformações expostas, podemos perceber o quão o *software* em foco pode auxiliar na compreensão das referidas modificações, uma vez que, para modelar matematicamente fenômenos periódicos, é de expressiva relevância o entendimento desses fenômenos.

Assim, temos o quadro de praxeologias relacionadas às transformações gráficas das funções seno e cosseno.

Quadro 21 – Praxeologia Matemática sobre as transformações gráficas das funções seno e cosseno.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: esboçar o gráfico das funções do tipo f(x)= A + sen (x-c) +d e g(x)= A + cos (x-c) – d.	f_1: identificar as transformações gráficas, alcançá-las no gráfico e esboçar o gráfico de cada função.	$[\theta, \Theta]_1$: transformações gráficas das funções seno e cosseno/funções trigonométricas.
T_2: determinar a lei de formação das funções a partir da análise do gráfico.	f_2: analisar a função circular representada no gráfico, identificar as transformações gráficas sofridas no gráfico e, por fim, determinar a lei de formação da função.	$[\theta, \Theta]_1$: transformações gráficas das funções seno e cosseno/funções trigonométricas.

Fonte: a autora (2020).

Nessa perspectiva, através da análise do MED, ou seja, dos documentos oficiais que fundamentam o currículo de matemática e de livros da Educação Básica e Superior, levantamos algumas condições e restrições institucionais para o estudo/ensino das funções seno e cosseno, bem como a organização matemática posta nesses documentos.

Além disso, com base nos estudos estabelecidos no MER e nas praxeologias matemáticas destacadas, explicitaremos a organização matemática e as praxeologias de referência do MER.

Nesse sentido, conforme salientam Bosch e Gascón (2005), retomaremos agora o modelo dominante alicerçado nas condições e restrições existentes para constituir a organização matemática de nosso MER/MPR.

De acordo com o MED, o modelo dominante no que se refere às funções seno e cosseno na esfera do Ensino Médio comunga com o do Ensino Superior, evidenciando a possibilidade de definir as funções por meio do ciclo trigonométrico, mas sem articulação com o gráfico das funções. Ademais, não ocorre uma integração com ambientes tecnológicos que permita trabalhar as funções seno e cosseno de forma efetiva.

Apoiados no modelo dominante apresentaremos na sequência a (re)construção praxeológica das funções seno e cosseno. Por intermédio das condições institucionais expostas e das restrições levantadas, nosso MER visa proporcionar uma reconstrução praxeológica das funções em questão por meio da modelação de fenômenos físicos periódicos integrada ao GeoGebra.

É viável afirmar que as Organizações Matemáticas Locais deste trabalho não são aleatórias; foram escolhidas segundo o objetivo do MER aqui traçado. Portanto, temos:

- Organizações Matemáticas que trabalham conceitos das funções seno e cosseno de maneira intuitiva, sem revelar a intenção didática (Omi).
- Organização Matemática que aborda o modelo circular relacionado a uma questão contextualizada em língua natural para observação das características do ciclo trigonométrico integrado às funções trigonométricas (Omc).
- Organização Matemática de forma exploratória, que busca, a partir das construções de modelos no GeoGebra, a exploração destes para construção de definições matemáticas (Ome).

A seguir, temos os tipos de tarefas pertinentes às organizações matemáticas explicitadas.

Quadro 22 – Tipos de tarefas por Organizações Matemáticas das funções seno e cosseno.

Omi	Omc	Ome
Determinar o período em que se repete um fenômeno por observação e análise dos dados;	Compreender pontos congruentes do ciclo trigonométrico com um fenômeno que apresenta uma trajetória circular;	Construir modelos matemáticos dinâmicos para estudo por meio do *software*;
Determinar a frequência em que ocorre um fenômeno por observação e análise dos dados;	Determinar pontos específicos, analisando as variáveis tempo e altura;	Observar as relações e características matemáticas entre os modelos;
Determinar a amplitude do fenômeno por observação e análise dos dados;	Escolher um modelo para representar o fenômeno estudado;	Experimentar os modelos, manipulando-os para construção de conceitos matemáticos;
Mensurar valores através dos padrões estabelecidos com as análises e observações;	Analisar uma situação, verificar sua periodicidade e responder os questionamentos da situação	Analisar atividades com fenômenos anteriores a partir dos modelos no *software* GeoGebra construído;

	com base nas observações feitas;	
Modelar um fenômeno por meio da observação deste;	Determinar a periodicidade em que ocorre o fenômeno;	-
Analisar uma situação cotidiana vinculada ao fenômeno e propor uma solução através dos estudos realizados.	-	-

Fonte: a autora (2020).

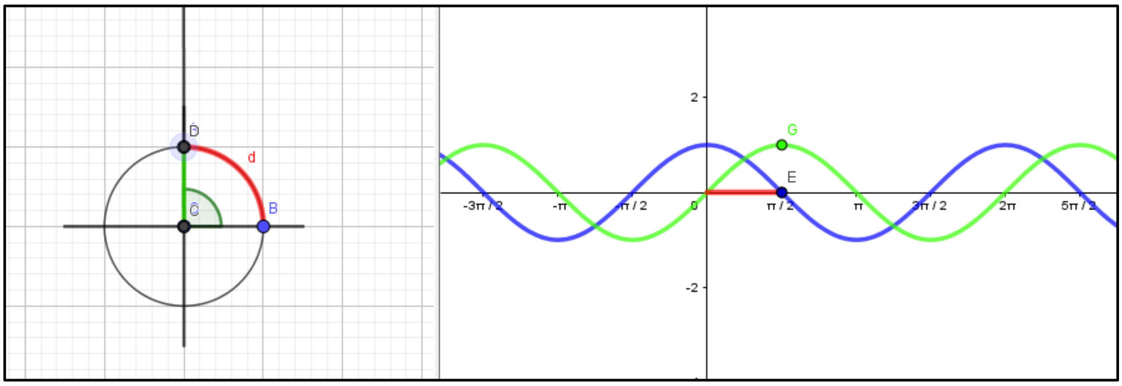
Nesse aspecto, em nossa praxeologia matemática tomamos como pilar as condições levantadas com a apreciação do MED. Optamos por trabalhar com a modelação de fenômenos físicos periódicos integrada ao GeoGebra para desenvolvimento de nosso PEP.

A primeira condição a ser considerada diz respeito a trabalhar com as funções seno e cosseno por intermédio da modelação de fenômenos físicos periódicos. A escolha dessa condição se dá em virtude de esta permitir a ampliação do estudo das funções em pauta, aproximando-se da razão de ser. Em seguida, buscaremos propiciar o trabalho com o ciclo trigonométrico e as relações trigonométricas paralelo às funções seno e cosseno, utilizando como ferramenta o *software* GeoGebra, uma vez que este instrumento possibilita, de forma dinâmica, o trabalho com as funções seno e cosseno e com o ciclo trigonométrico ao mesmo tempo.

Salientamos as restrições institucionais, ao trabalharmos com um ambiente informatizado na escola, como infraestrutura, quantidade de computadores e acesso à internet e a um espaço informatizado. Elencamos, contudo, possibilidades para conseguir desenvolver nosso PEP ponderando as restrições averiguadas, como, por exemplo: trabalhar com o uso do GeoGebra online; utilizar o *software* citado como calculadora gráfica no aplicativo de smartphones; e desenvolver o PEP em pequenos grupos. Aspiramos com esse levantamento de possibilidades nos planejarmos para eventuais restrições que possam surgir no percurso da experimentação do PEP.

Na imagem abaixo, é possível visualizar um modelo contínuo do gráfico criado pela autora, que, de modo simultâneo no *software* GeoGebra, consegue trabalhar com o ciclo trigonométrico e com o gráfico para compreensão das funções seno e cosseno (Figura 50).

Figura 50 – Ciclo trigonométrico dinâmico integrado com o gráfico das funções seno e cosseno.



Fonte: a autora (2020).

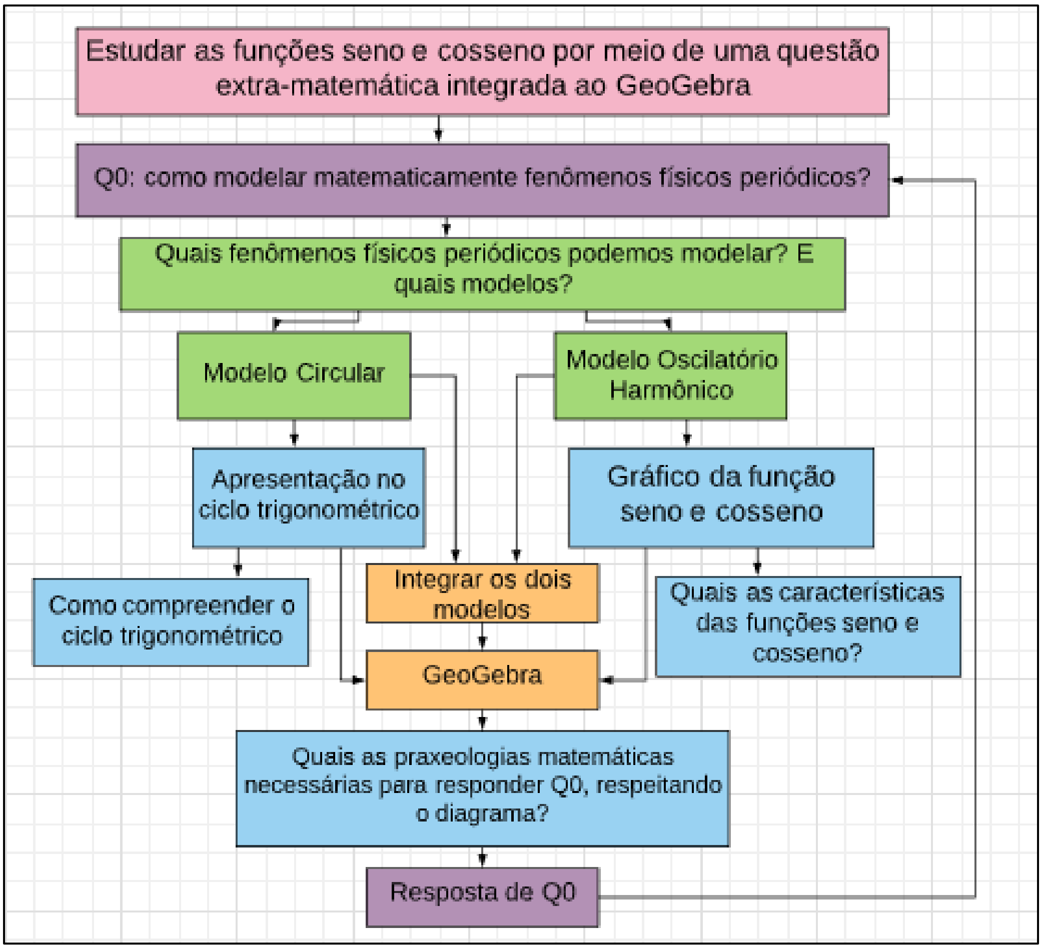
Almejamos explorar esses dois modelos de forma contínua a fim de permitir durante a experimentação do PEP o estudo das funções seno e cosseno integradas ao GeoGebra de maneira investigativa. A ação matemática que ansiamos nessa perspectiva é uma tarefa do tipo T: modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos; tipo de técnica esperada τ: utilizar as funções seno e cosseno com os modelos circular e oscilatório harmônico integrados, por meio do GeoGebra; a tecnologia θ: funções seno e cosseno, ciclo trigonométrico; fenômenos periódicos; já a Teoria é Θ: funções trigonométricas.

Nesse contexto, modelar fenômenos físicos periódicos para estudar funções seno e cosseno requer a compreensão das funções trigonométricas que sofreram alguma modificação por intermédio de um parâmetro. Desse modo, privilegiamos as diferentes representações das funções, no campo algébrico, aritmético e geométrico, a fim de proporcionar o entendimento das funções e suas características nos três campos e, em especial, trabalhar de forma conjunta a definição das funções seno e cosseno, seus atributos, gráficos e transformações. Para tanto, o *software* GeoGebra será de grande valia no intuito de alcançar a apreensão das funções seno e cosseno nos diferentes domínios.

Assim, o nosso MER é composto por várias organizações pontuais $[T, \tau, \theta, \Theta]$, isto é, compõe-se de uma amálgama dessas organizações pontuais em torno de uma tecnologia, tendo, nesse âmbito, uma organização denominada, segundo Chevallard (2002), de organização matemática local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. A organização local deste trabalho refere-se à tecnologia θ: funções seno e cosseno, com a teoria Θ: funções trigonométricas; tendo em nosso tema de estudo um conjunto de tarefas T_i $(i \in I)$ sendo uma técnica τ_i para cada tipo de tarefa.

A reconstrução praxeológica difere do modelo dominante porque vamos propor um PEP por meio de um contexto extra-matemático, com o emprego do GeoGebra e a partir de uma questão geratriz, composta por questões secundárias, sob a possibilidade de construção de outras indagações feitas pelos licenciandos em matemática, com o intento de erigir o saber funções seno e cosseno. Nesse sentido, exporemos o desenho do MER alternativo para instituir nosso PEP.

Figura 51 – Desenho do MER Alternativo.



Fonte: a autora (2020).

Percebemos no desenho do MER que o estudo de funções seno e cosseno será em um contexto extra-matemático que se direcionará para um intra-matemático, ou seja, a partir de um problema de modelização matemática almejamos trabalhar as organizações matemáticas a respeito das funções seno e cosseno. O GeoGebra, por seu turno, tem o papel crucial de promover a integração dos modelos, para que o ensino das funções referidas seja explorado de forma conjunta com o ciclo trigonométrico, bem como as características das funções e sua representação gráfica.

Salientamos a importância dessa articulação do GeoGebra enquanto um software para integração do modelo circular e oscilatório para o estudo das funções seno e cosseno, uma vem que a própria BNCC destaca isso na habilidade EM13MAT306:

> (**EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BRASIL, 2018, p. 528, grifos do autor).

Dessa maneira, aproveitaremos o GeoGebra de modo integrado para abordar as funções seno e cosseno na modelação dos fenômenos físicos periódicos. Na sequência, explicitaremos um pouco acerca do *software* GeoGebra, a fim de justificar a sua utilização em nosso PEP.

3.1.4 O GeoGebra para compreensão das funções seno e cosseno e suas características

O GeoGebra é um *software* livre de matemática dinâmica que permite o seu uso gratuitamente. Com grande potencial, esse *software* possibilita o trabalho com a álgebra, geometria em duas e três dimensões, gráficos, calculadora de probabilidade, estatística, tabelas, entre outros. Um dos pontos mais benéficos do GeoGebra é a possibilidade de se trabalhar simultaneamente com a representação numérica, algébrica e gráfica/geométrica.

Iniciado em 2001 na Universidade austríaca de Salzburg por Markus Hohenwarter, o objetivo primeiro do *software* em pauta foi desenvolver um tipo novo de ferramenta para o ensino de matemática nas escolas da Educação Básica que propiciasse a junção de resultados numéricos, algébricos e gráficos (HOHENWARTER; FUCHS, 2004).

Atualmente, o programa apresenta uma versão online, uma para computadores, tablets e smartphones. Essas possibilidades aumentam o alcance do *software* facilitando o seu uso, uma vez que proporciona o acesso em computadores mais antigos e ainda permite, além do acesso pelo computador, que os alunos ou escolas que não tenham a máquina utilizem-no por meio de smartphones.

Segundo Nascimento (2012), o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas e usado por mais de 190 países. Por ser um programa de elevado número de downloads, aproximadamente

300.000 por mês, foram criados os Institutos Internacionais de GeoGebra (IGI), que funcionam como uma rede de apoio e organização virtual para o uso do *software*.

O GeoGebra vem rompendo o estereótipo da matemática estática, pois, através da utilização do *software*, o estudante entra em contato com a matemática dinâmica por intermédio de construções e manipulações, compreendendo, assim, o conhecimento matemático de forma diferenciada. O formato visual de exploração e manipulação aguça a curiosidade e espírito de pesquisador do aluno na busca por investigar as construções e passos realizados no *software*, proporcionando uma aprendizagem baseada em questionamentos e explorações. Salientamos que o GeoGebra é um programa de fácil manuseio e autoexplicativo, o que permite uma maior acessibilidade ao *software.*

Desse modo, pensar no GeoGebra no ensino de funções seno e cosseno é interpretar o *software* como uma ferramenta capaz de propiciar o entendimento do saber matemático de forma integrada. Quando falamos em integrar o *software* estamos baseados em Bittar (2011), o que equivale a permitir que o GeoGebra faça parte do arsenal do professor, sendo empregado na construção do conhecimento matemático desde o planejamento até a realização da atividade com o *software*, não sendo inserido apenas na sala de aula.

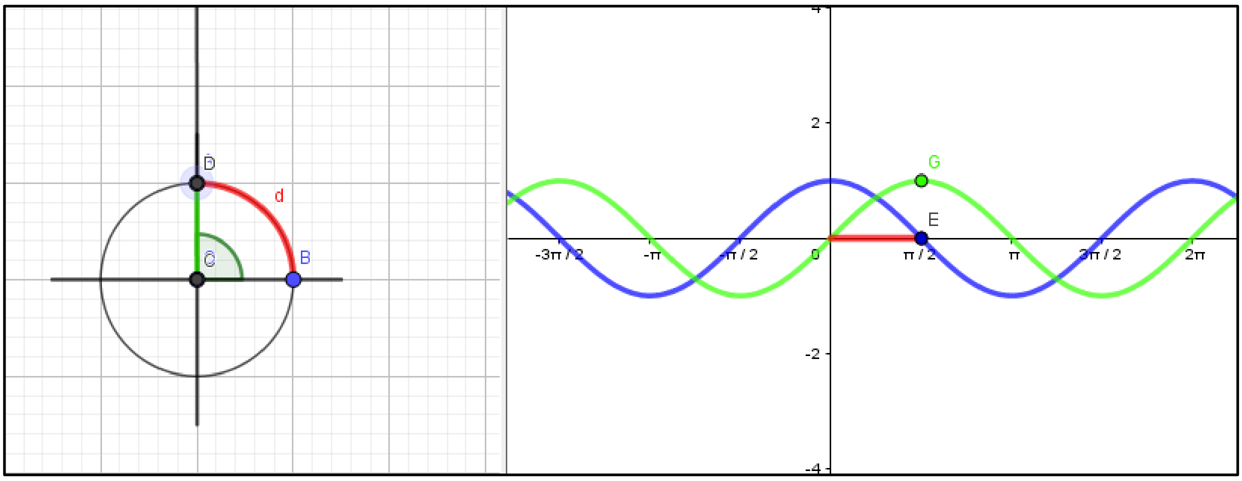
Isso significa planejar no dispositivo didático questões secundárias que possibilitem, a partir da investigação em busca da resposta R♥ da Q_0, ao aluno recorrer ao *software* como um meio capaz de proporcionar um caminho para uma resposta R◊.

Optamos por trabalhar com o GeoGebra por este possuir uma estrutura dinâmica que permite o emprego de diferentes ferramentas simultâneas e por possibilitar o trabalho com distintos recursos da matemática, como geometria, gráficos, tabelas, probabilidade, álgebra, estatística e outros. Diante do seu potencial pedagógico, escolhemos o *software* aludido para ser a ferramenta tecnológica de integração das funções seno e cosseno e do ciclo trigonométrico na modelação de fenômenos físicos periódicos. Salientamos que o modelo apresentado de referência desse trabalho, permite a utilização de outros *softwares*, não apenas o GeoGebra. A escolha nossa pelo GeoGebra nessa tese, foi devido a ser um *software* acessível, gratuito, de fácil manipulação, e já utilizado pelos estudantes participantes da pesquisa.

Na próxima imagem, temos um recorte do potencial do GeoGebra para trabalhar funções seno e cosseno. Essa imagem é um recorte da tela de um arquivo GeoGebra dinâmico e interativo em que, à medida que movimenta o ciclo trigonométrico, os pontos que estão no gráfico das funções seno e cosseno se deslocam. Temos o gráfico verde da função sen x, o azul da função cos x e a reta vermelha, que representa a medida do arco no plano cartesiano; todos são interativos e permitem compreendermos a relação do ciclo trigonométrico com as funções circulares seno e cosseno.

Nesse sentido, poderemos observar, através da imagem a seguir, o comportamento das funções seno e cosseno no *software* GeoGebra, pois este detém diversas ferramentas que proporcionam uma melhor dinâmica para abrangência dos conceitos.

Figura 52 – Ciclo trigonométrico dinâmico integrado com o gráfico das funções seno e cosseno.



Fonte: a autora (2020).

Uma das ferramentas citadas no parágrafo anterior é a de controle deslizante; por meio dela podemos construir controles deslizantes para cada parâmetro de funções do tipo f(x)= a + b.sen (cx + d) ou g(x)= a + b.cos (cx + d), possibilitando-se, assim, o entendimento eficaz das transformações do gráfico das funções.

E como o contexto do nosso PEP é extra-matemático, especificamente a modelagem de fenômenos físicos periódicos, será necessário o estudo das funções seno e cosseno transformadas pelos parâmetros a, b, c e d, ou seja, o estudo da variação do período, amplitude, translação vertical e horizontal, dilatação e contração das funções.

Nesse viés, apresentaremos no capítulo seguinte o nosso Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP.

4 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA - PEP PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES SENO E COSSENO

No segundo capítulo apresentamos o Modelo Epistemológico/Praxeológico de Referência desta pesquisa, em torno do qual, a partir de quatro questões, expusemos a organização do MER. Essa organização demonstrou, inicialmente, as razões de ser das funções seno e cosseno, conforme estudo histórico-epistemológico feito no MED e com base nas análises institucionais. Na sequência, evidenciamos um contexto extra-matemático para nosso PEP, o qual comunga com a razão de ser das funções, uma vez que o contexto é a modelização de fenômenos físicos periódicos. Diante do âmbito para modelação matemática, apresentamos elementos da organização matemática das funções seno e cosseno a ser seguida em nosso PEP. E, por fim, discutimos timidamente as potencialidades do GeoGebra para o ensino das funções referidas.

Perante o exposto acima, considerando as análises realizadas e as restrições demonstradas na problemática de base do estudo das funções seno e cosseno, adaptamos nosso PEP através das restrições encontradas, para que em nossa problemática possibilística fosse possível resgatar a razão de ser das funções seno e cosseno, como revelado no MED – em busca de minimizar os efeitos da rigidez matemática no ensino de funções seno e cosseno, bem como das incompletudes referentes à desarticulação das organizações matemáticas escolares concernentes às funções em foco no Ensino Médio e Superior.

Fundamentados no resultado evidenciado nos estudos do MED, temos que o modelo atual de funções seno e cosseno, muitas vezes, está situado no paradigma monumentalista, como ressalta Chevallard (2013b), ou seja, de visita às obras, a saber, o ensino ocorre conforme uma ida aos museus: o professor apresenta o conteúdo e os estudantes contemplam a obra, sem muita interação. A presente pesquisa, no entanto, assim como nosso PEP, está situada no paradigma que Chevallard (2013b) denomina de questionamento do mundo, pois visa o conhecimento do mundo por meio do questionamento.

Salientamos que o objetivo geral desta investigação é analisar como um modelo alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno.

Embasados na TAD, exporemos no próximo tópico nosso PEP, o qual deriva e será analisado por intermédio do que Chevallard (2007) chama de *Schéma Herbartien*, isto é, esquema herbatiano, que será explanado também na seção seguinte.

4.1 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA

O PEP é um dispositivo didático que está inserido no paradigma de questionamento do mundo. Chevallard (2013b) enfatiza que no paradigma citado as obras matemáticas são concebidas como respostas às questões problemáticas cuja abordagem permite uma melhor vivência na sociedade. E desta maneira se constitui a razão de ser do conhecimento.

Associado ao esquema herbatiano/*Schéma Herbartien*, o PEP, de forma geral, parte de uma questão geratriz Q_0, e, a partir dela, gera outras questões, secundárias, e outras respostas com o intuito de chegar à resposta R♥.

Principiamos com uma pergunta *Q*, realizada em um sistema didático *S (X; Y; Q)*, sendo *X* um coletivo de estudantes, entre outros, e *Y* um conjunto, ou uma pessoa, ou, ainda, um conjunto vazio de assistentes de pesquisa, e/ou um diretor de estudo. O objetivo é estudar *Q* em busca de uma resposta *R* que satisfaça algumas restrições. Assim, temos o seguinte sistema: $S(X; Y; Q) \rightarrow R$. Geralmente, não se mobiliza, para resolver o sistema, apenas uma única ferramenta praxeológica e uma disciplina. À procura de uma resposta *R*◊, *X* reunirá e organizará um ambiente *M*. Através da exploração, gerará respostas *R*◊, que, ao serem analisadas, proporcionarão caminhos para a construção da resposta *R*♥ (CHEVALLARD, 2009).

De acordo com Chevallard (2009), as outras respostas serão como obras culturais *O*, que fornecerão ferramentas para ponderar *R*◊ e construir a resposta esperada. As obras *O* farão parte de outras disciplinas estabelecidas. Nesta esfera, temos o esquema herbatiano: $(S(X; Y; Q) \rightarrow M) \rightarrow R^{\heartsuit}$. De forma mais completa: $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{R^{\lozenge}_1, R^{\lozenge}_2, ..., R^{\lozenge}_n, O_{n+1,...}, O_m\}] \rightarrow R^{\heartsuit}$. Desse modo, o esquema herbatiano nos possibilita repensar a organização didática clássica e promover uma nova organização.

O intento do nosso PEP constitui-se de um duplo propósito. Por um lado, almejamos que os estudantes, por meio de fenômenos físicos periódicos, consigam compreender as funções seno e cosseno com o auxílio do GeoGebra. Por outro, buscamos, a partir do MER, que esses estudantes obtenham, através do PEP, a resposta para o problema docente: como ensinar as funções seno e cosseno na Escola Básica? Aspiramos alcançar os objetivos mencionados por intermédio dos questionamentos feitos no PEP a partir da questão geratriz, bem como, através das respostas secundárias, lograr a resposta *R*♥. Nesse sentido, busca-se propiciar aos licenciandos em matemática da UEFS as seguintes metas:

- Compreender um fenômeno físico periódico a partir da modelação matemática;

- Questionar a organização matemática para o estudo escolar atual de funções seno e cosseno;
- Abranger a potencialidade do GeoGebra para explorar a organização matemática das funções seno e cosseno e modelar fenômenos periódicos;
- Identificar a razão de ser das funções seno e cosseno;
- Compreender a problemática de base e, através da problemática possibilística posta, buscar a resposta para a questão geratriz.

Dessa maneira, a partir do PEP, espera-se que os estudantes alcancem os objetivos acima. Apresentaremos agora a organização geral de nosso PEP.

4.1.1 Organização geral do PEP

O contexto da aplicação são estudantes do 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS. O âmbito em foco foi selecionado uma vez que é no referido semestre que o saber funções seno e cosseno vive. A aplicação ocorreu em duas turmas, com 15 alunos cada, da disciplina de Pré-cálculo, com carga horária de 60 horas. Nessa disciplina são trabalhados diferentes conteúdos, inclusive funções seno e cosseno. Desse modo, organizamos o PEP em seis sessões, com um tempo médio de duas horas cada. O tempo extra foi utilizado fora da aula da disciplina. A seguir, apresentaremos a organização geral do PEP:

- A primeira sessão é o encontro com a Q_0. Nesse momento, houve a exposição da organização geral do estudo e, a partir da apresentação da questão geratriz, surgiram questões derivadas/secundárias a serem respondidas. Nessa sessão 1 os licenciandos em matemática trabalharam em pequenos grupos e utilizaram um caderno de trabalho para cada grupo; neste foram registradas todas as ideias, questões derivadas da Q_0, respostas e rascunhos. O caderno funcionou como um diário de trabalho, que conta todas as informações;
- Na segunda sessão, após exploração da Q_0, foi exposta a Q_1 para análise e trabalho dos licenciandos;
- *A priori*, estiveram disponíveis tarefas no desenvolvimento do PEP relacionadas ao nosso MER. Essas questões nortearam a aplicação do PEP complementando as questões levantadas pelos licenciandos durante a aplicação. Em cada sessão apresentamos,

enquanto formadores, questões e tarefas para que os alunos as abordassem, em pequenos grupos, as quais fazem parte do PEP. E, através do desenvolvimento do grupo, estávamos disponíveis para orientar e esclarecer possíveis dúvidas;

- Ao final de cada sessão, foram realizadas socializações dos trabalhos desenvolvidos nos grupos a fim de exibir as respostas provisórias $R^{\lozenge}$ de cada grupo e validá-las. Nesse momento classificamos as questões problemáticas e/ou respostas a essas questões secundárias em conjunto, e, quando necessário, provocamos questões que ainda não tinham surgido no processo a respeito da atividade matemática. Assim, todos entram em consenso no percurso a seguir, de forma a avaliar quais questões e/ou respostas se priorizam, quais requerem maior atenção e quais podem ser deixadas de lado.

Vale salientar que ao aplicar um dispositivo PEP estamos diante de um processo aberto. Assim, a organização planejada na experimentação do PEP pode mudar a todo instante no decorrer da aplicação. Compreendemos que o planejamento *a priori* é uma orientação do trabalho, mas o PEP deve seguir a própria dinâmica levantada em sala, mesmo que pareça que está se afastando do planejamento inicial.

Na seção subsequente apresentaremos o PEP planejado.

4.1.2 Um PEP para o estudo de funções seno e cosseno

Partindo da questão geratriz, nosso PEP se baseia na seguinte questão Q_0: "Como modelar fenômenos físicos periódicos?". A partir da Q_0 algumas questões derivadas aparecem: Q_1: "Quais são os fenômenos físicos periódicos que podemos modelar matematicamente?"; Q_2: "Como se pode utilizar os modelos circular e/ou oscilatório harmônico?"; Q_3: "Quais organizações matemáticas são necessárias para compreender os modelos circular e oscilatório harmônico e modelá-los matematicamente?"; e Q_4: "Como posso explorar de maneira conjunta os dois modelos de fenômenos físicos periódicos com o *software* GeoGebra?". Ressaltamos que as questões derivadas de Q1, Q2, Q3 e Q4 são oriundas de Q0 e por isso são interligadas, sob o objetivo de conduzir os licenciandos em matemática a chegar à resposta esperada $R^{\heartsuit}$.

O PEP foi desenvolvido no laboratório de informática do curso de licenciatura em matemática e na sala de aula. Os alunos tiveram acesso aos computadores com o *software* GeoGebra, bem como pesquisaram sobre os fenômenos físicos periódicos. Durante as sessões de experimentação do PEP, utilizamos tarefas a serem resolvidas à medida que as questões surgiam nos grupos de trabalho.

A seguir, apresentaremos as tarefas que foram desenvolvidas em cada sessão.

Na primeira sessão apresentamos a Q_0, e os estudantes foram convidados a discutir sobre ela. Esperamos nessa ocasião o surgimento de questões derivadas da Q_0, de modo a conduzir o trabalho. Após registro das questões secundárias e suas respostas, começamos a socialização destes itens.

A sessão 2 foi iniciada com a questão Q1, derivada das questões secundárias demonstradas pelos discentes. Q_1: “Quais são os fenômenos físicos periódicos que podemos modelar matematicamente?”. Nesse momento, a **atividade 1** para os estudantes foi buscar sobre os fenômenos físicos periódicos em livros de física ou na internet. Após pesquisa e registro de questionamentos e respostas que surgiram, socializamos estes tópicos discutindo-os com a turma.

Tabela 4 – Atividade 2: a altura da água foi registrada no Porto de Aratu, na Bahia, em 1º e 2 de julho de 2019, na tabela abaixo.

01 / 07/ 2019		02/07/2019	
Manhã	**Tarde**	**Manhã**	**Tarde**
0h 1,8 m	12h 1,8 m	0h 1,1 m	12h 1,5 m
1h 2,1 m	13h 2,0 m	1h 1,6 m	13h 1,6 m
2h 2,4 m	14h 2,2 m	2h 1,9 m	14h 1,8 m
3h 2,0 m	15h 2,6 m	3h 2,4 m	15h 2,1 m
4h 1,5 m	16h 2,0 m	4h 2,2 m	16h 2,6 m
5h 1,0 m	17h 1,9 m	5h 2,0 m	17h 2,3 m
6h 0,8 m	18h 1,2 m	6h 1,5 m	18h 1,7 m
7h 0,5 m	19h 0,7 m	7h 1,0 m	19h 1,1 m
8h 0,2 m	20h 0,4 m	8h 0,5 m	20h 0,8 m
9h 0,6 m	21h 0,3 m	9h 0,2 m	21h 0,6 m
10h 1,0 m	22h 0,9 m	10h 0,7 m	22h 0,2 m
11h 1,4 m	23h 1,3m	11h 1,3 m	23h 0,6 m

Fonte: a autora (2020).

a) Observando a tabela acima, o que você pode concluir sobre o fenômeno?

b) Quantas marés altas existem por dia? E quantas marés baixas existem em cada dia? (Maré alta é o nível mais alto de cada maré alta. Maré baixa é o nível mais baixo de cada vazante).

c) Qual a amplitude média das marés no Porto de Aratu nos dois dias registrados? (A amplitude das marés em um dia é a diferença de altura da maré alta e da próxima maré baixa).

d) Uma família quer realizar um passeio de barco de duas horas em alto-mar saindo da praia no dia 3/7/2019. Qual será o melhor horário para a família pegar uma maré que não seja nem alta e nem baixa?

e) Construa uma figura, utilizando o GeoGebra, que permita apreciar as alturas de água no Porto de Aratu durante os dias 1º, 2 e 3 de julho de 2019.

Uma vez feito isso, fomos à sessão 3. Introduzimos a referida sessão com a exploração de uns fenômenos físicos periódicos levantados por vários grupos na sessão 2. Na ocasião, trabalhamos com o fenômeno da maré. Solicitamos a integração do GeoGebra de forma mais livre, com o intuito de desenhar uma figura que representasse o comportamento do fenômeno, conforme atividade 3.

Na sessão 3, trabalhamos outro fenômeno físico periódico, que foi o movimento da roda-gigante. O objetivo da sessão mencionada foi a exploração do fenômeno e os possíveis modelos circular e oscilatório que poderiam surgir durante a resolução dos licenciandos. Contemplamos na atividade 3 o fenômeno e a tarefa explorada.

Atividade 3 (Adaptada de Nguyen Thin (2011)).

Na Festa de *Réveillon* da cidade de Salvador há uma roda-gigante de 40 m de diâmetro cujo centro está localizado a 22 m do chão.

A roda sempre gira uniformemente na mesma direção. No início da jornada, a cabine P está no ponto mais baixo e Carlos estava nessa cabine. Ele faz uma viagem de 3 voltas que dura 30 minutos. A partir destas informações, responda os questionamentos abaixo:

a) Quando Carlos está na posição mais alta?

b) Calcule a altura da cabine de Carlos no solo após 2,5 minutos de viagem, após 7 minutos, após 12 minutos e após 22 minutos.

c) Construa uma figura utilizando o GeoGebra para apreciar as alturas da cabine P durante as três voltas da viagem.
d) A partir dos 35 m de altura, podemos ver o Farol da Barra. Por quanto tempo Carlos poderá ver o Farol em cada volta?

Temos duas atividades envolvendo fenômenos físicos periódicos para uma modelagem matemática. Diferentemente das atividades expostas em livros didáticos, essas tarefas não apresentam a lei de formação, nem indicação do modelo a ser utilizado na resolução. As duas atividades deixam livre a escolha do modelo, para que o licenciando possa analisar e esboçar o modelo que ele julgar pertinente. Devido a isso, os últimos questionamentos das duas tarefas solicitam a construção de uma figura, deixando os estudantes livres para escolher.

Durante a realização das atividades 2 e 3, temos respostas, de acordo com o trabalho com os estudantes, da questão Q_3: "Quais organizações matemáticas são necessárias para compreender os modelos circular e oscilatório harmônico e modelá-los matematicamente?".

Nas sessões 5 e 6 exploramos construções no GeoGebra para trabalhar o estudo das funções seno e cosseno em nosso PEP, a partir de Q_4: "Como posso explorar de forma conjunta os dois modelos de fenômenos físicos periódicos com o *software* GeoGebra?". Desenvolvemos nas duas sessões os dois roteiros para apreensão de fenômenos periódicos por meio da construção de modelos matemáticos no GeoGebra para o estudo das funções seno e cosseno.

O primeiro roteiro está relacionado à construção do ciclo trigonométrico dinâmico, junto ao gráfico das funções seno e cosseno. A construção em foco permite a abordagem da relação do modelo circular e do oscilatório, trabalhando, assim, as funções seno e cosseno integradas à trigonometria no ciclo. Nesse sentido, exploramos as organizações matemáticas levantadas em Q_3 e, a partir das respostas, junto às duas atividades, desenvolveremos os roteiros explanados a seguir.

Atividade 4: *Roteiro 1* – de construção do modelo circular junto à do gráfico das funções seno e cosseno.

1) Crie um círculo "C" com centro na origem e de raio =1;
    a. Usaremos para ilustrar o círculo trigonométrico;
2) Criar um segmento no eixo das abscissas ("x") que passe pela origem (-1.5 a 1.5);
    a. Visualizar o eixo das abscissas ("x");
3) Criar um segmento no eixo das ordenadas ("y") que passe pela origem (-1.5 a 1.5);

   a. Visualizar o eixo das ordenadas (“y”);
4) Criar um ponto “O” na origem (0,0);
   a. Usaremos para montar o arco de três pontos;
5) Criar um ponto “A” (0,1);
   a. Usaremos para montar o arco de três pontos;
   b. Para criar o ponto “A” usaremos a ferramenta “Ponto” e clicaremos sob o círculo “C”;
   c. O Ponto “A” é criado dentro do círculo “c”; dessa forma, ele apenas poderá se movimentar percorrendo o círculo “C”;
   d. Usaremos para movimentar e visualizar o caminho percorrido no círculo trigonométrico;
6) Criar um ponto “B” (1,0);
   a. Usaremos para criar o arco de três pontos;
   b. Para criar o ponto “B” usaremos a caixa de entrada B = (1,0);
      i. Isso não vai influenciar no resultado, mas podemos demonstrar a diferença de um ponto “A” e um “B”;
   c. Nesse caso o ponto “B” não foi criado sob o círculo, então ele poderá se movimentar livremente;
7) Criar uma semirreta com origem em “O” e passando por “A”;
   a. Aqui pode ser trabalhada a noção de tangente;
8) Criar um arco “d” com os pontos (O, B, A);
   a. Utilizaremos a ferramenta arco circular;
   b. Necessitamos de três pontos e usaremos os pontos (O, B, A);
   c. Assim, podemos visualizar o percurso do ponto “A” ao percorrer o círculo trigonométrico;
9) Criar o ponto “C” (A,0) [Nesse caso, o “x” vai assumir o valor do “x” do ponto A];
   a. Usaremos a caixa de entrada;
   b. Queremos que o ponto “C” percorra apenas a abscissa (“cosseno”) e em função do valor de “x” da coordenada do ponto “A”, de modo que, quando movimentarmos o ponto “A”, o ponto “C” percorra o caminho desejado e possamos melhor visualizá-lo;
10) Criar o ponto “D” (0,D) [Nesse caso, o “y” vai assumir o valor do “y” do ponto A];
   a. Usaremos a caixa de entrada;

b. Queremos que o ponto “D” percorra apenas a ordenada (“seno”) e em função do valor do “y” da coordenada do ponto “A”, de modo que, quando movimentarmos o ponto “A”, o ponto “D” percorra o caminho desejado e possamos melhor visualizá-lo;

11) Criar um segmento (D,A);
   a. Utilizaremos para visualizar o segmento a ligação entre o ponto “A” e o eixo das ordenadas;
   b. Na formatação colocaremos o segmento com tracejado;
12) Criar um segmento (A,C);
   a. Utilizaremos para visualizar o segmento a ligação entre o ponto “A” e no eixo das abscissas;
   b. Na formatação colocaremos como tracejado;
13) Criar um segmento (C,O);
14) Criar um segmento (O,D);
   a. Assim podemos visualizar o caminho percorrido no eixo das ordenadas;
   b. Na formatação colocaremos a cor verde;
15) Usar a ferramenta ângulo e criar (B,O,A);
   a. Utilizaremos para visualizar o ângulo feito entre os pontos (B,O,A) e melhorar a compreensão dentro do círculo trigonométrico;
16) Criar o ponto “E” (d,0) [Nesse caso, o “x” vai assumir o valor do “x” do arco “d”];
   a. Observação importante: utilizaremos uma segunda janela na criação desse ponto;
   b. Para isso, vamos ao menu exibir/janela de visualização 2;
   c. Antes de criar o ponto iremos dar um click na janela 2;
      i. Fazendo isso o ponto criado será exibido apenas na janela 2;
   d. O ponto “E” tem coordenadas (d,0); assim, podemos visualizar o ponto “E” em função do caminho percorrido do ponto “A” no círculo trigonométrico;
17) Criar um segmento (0,0) e o ponto “E”;
   a. Como temos o início na origem e o ponto “E” está em função do arco “d”, o segmento representa o caminho percorrido no círculo trigonométrico linearmente;
18) Criar o ponto “F” (x(E), xSEM);
   a. O ponto “F” terá a coordenada com o “x” em função do “x” do ponto “E” e o “y” em função do “x” do ponto “C” – aqui lembramos que o ponto “C” percorre

apenas o eixo das abscissas e representará o valor do ponto “A” na função cosseno;

19) Criar o ponto “G” (x(E), y(D));
    a. O ponto “G” terá a coordenada com o “x” em função do “x” do ponto “E” e o “y” em função do “y” do ponto “D” – aqui lembramos que o ponto “D” percorre apenas o eixo das ordenadas e representará o valor do ponto “A” na função seno;

20) Criar a função “f(x) = cos(x)”;
    a. Mudar a cor para azul;
    b. Visualizar o ponto “F” na função cosseno;

21) Criar a função “g(x) = sen(x)”;
    a. Mudar a cor para verde;
    b. Visualizar o ponto “F” na função seno;

A partir das construções acima, responda as questões abaixo:

a) O que você pôde observar ao final da construção? Descreva;
b) Movimente o ciclo trigonométrico. O que aconteceu com o gráfico das funções seno e cosseno?
c) O que você pôde concluir a respeito dessa construção?
d) Quais modelos foram construídos e de que forma você pode utilizar essa construção para o ensino de funções seno e cosseno e de fenômenos periódicos?

Após exploração do roteiro em pauta, os alunos foram convidados a realizar mais uma construção no GeoGebra. Observemos o segundo roteiro.

Atividade 5: *Roteiro 2* – Estudando fenômenos periódicos por meio do GeoGebra.

1) Abra o programa GeoGebra e, na barra de ferramentas, clique no botão seletor “controle deslizante” e selecione essa opção. Em seguida, clique em qualquer lugar na janela de visualização para o controle ser criado;

2) Na sequência, nomeie o controle por *a* e coloque um valor mínimo e um máximo no controle, por exemplo, de -15 a 15, com incremento 0,1 ou 1. Confirme no botão Ok ou aplicar, dependendo da versão;

3) Repita os passos anteriores mais 3 vezes, criando controles *b*, *c* e *d*;

4) Agora, na caixa de entrada, digite a função básica f(x) = sen(x);

5) Digite agora na caixa de entrada a função g(x) = a + b*sen(c*x + d);

6) Depois, movimente cada controle responsável por um parâmetro e observe o que ocorre;

7) Digite a função h(x) = cos(x) na caixa de entrada;

8) Agora digite a função j(x) = a + b*cos(c*x + d);

9) Movimente os parâmetros dos controles deslizantes, através dos seletores, e observe o que acontece.

Após as construções realizadas responda os questionamentos abaixo:

1º) O que você pôde observar ao alterar o parâmetro *a* das funções *g(x) = a + b*sen(c*x + d)* e *j(x)= a + b*cos(c*x + d)* para um valor positivo e para um valor negativo com as funções?

2º) Movimente o parâmetro b nas funções *g(x) = a + b*sen(c*x + d)* e *j(x)= a + b*cos(c*x + d)*. O que você observou?

3º) Oscile o parâmetro *c* das funções *g(x)= a + b*sen(c*x + d)* e *j(x)= a + b*cos(c*x + d)* e relate o que ocorreu.

4º) Faça a mesma coisa com o parâmetro d nas duas funções, e explique o que acontece.

5º) Agora, oscile os quatro parâmetros das funções g(x) e j(x) e compare com as funções f(x) e h(x). O que você observou?

6º) Com base nessa atividade, como você pode utilizá-la para auxiliar a responder a atividade 2 e 3?

A construção em foco permite compreender o significado de cada parâmetro e a influência destes nas funções seno e cosseno. A partir dessa construção é possível também relacionar fenômenos físicos periódicos, tais como o movimento de um pêndulo, o movimento vibratório dos tímpanos, o comportamento da maré, entre outros.

Por intermédio das explorações das sessões do PEP e das questões secundárias possíveis que surgiram, buscamos a resposta para nossa Q_0 a fim de que os licenciandos em matemática chegassem à resposta *R*♥.

4.1.3 Análise *a priori* do PEP

As tarefas desenvolvidas, renomeadas como atividades e roteiro de construção, intentam nortear os estudos das questões derivadas da questão geratriz, tendo sido elaboradas considerando o MER desenvolvido e as condições e restrições institucionais reveladas no MED.

Diferentemente das atividades apresentadas em manuais didáticos, as questões de modelação/modelização matemática dos fenômenos periódicos não expõem um modelo a ser seguido, nem explanam uma lei de formação para ser apenas aplicada aos dados. As atividades requerem que o licenciando se questione sobre suas escolhas didáticas, para, em seguida, resolver as demandas em pauta.

Pontuamos que a atividade 1 refere-se a pesquisar a resposta para Q_1, de forma livre. Já as atividades 2 e 3 apresentam seu primeiro questionamento aberto, para que o licenciando em matemática explicite seu entendimento e resolva a proposição na sequência. Em seguida, as questões estão relacionadas à modelação matemática dos fenômenos, podendo ser algébrica, gráfica, geométrica ou numérica. A última questão, como já foi citado, privilegia a construção de um modelo circular ou oscilatório com o auxílio do GeoGebra. Percebe-se, nas atividades aludidas, que não há menção de período ou de periodicidade nas questões, pois este fator deve ser constatado pelos alunos a partir da análise das tarefas.

Quanto à atividade 4, roteiro 1, é destinada à construção de um ciclo trigonométrico e ao gráfico da função seno e da função cosseno de maneira interativa, ou seja, a medida em que movimenta o ciclo, os pontos se movimentam no gráfico revelando a medida do arco do ciclo, bem como das funções sen x e cos x. Essa atividade permite a exploração dos fenômenos periódicos do movimento circular e do movimento oscilatório.

Já a atividade 5, roteiro 2, explora a noção de amplitude, período, translação, dilatação e contração do gráfico, isto é, aborda as transformações sofridas nos gráficos das funções seno e cosseno. Essa atividade é de suma importância, uma vez que, ao modelar os fenômenos periódicos físicos, geralmente as leis de formação são funções seno e cosseno transformadas por algum parâmetro que corresponde à característica da função. Nesse aspecto, a partir da construção mencionada, pode-se explanar melhor a respeito das características dos fenômenos físicos periódicos, e melhor representá-los com o *software* GeoGebra. Consequentemente, expõe-se melhor as funções seno e cosseno.

Como o nosso objetivo é analisar como um modelo alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno, elencamos algumas variáveis relacionadas a cada atividade. Observa-se que as tarefas, para responder as questões derivadas de Q_0, são apresentadas como atividades, mas possuem um caráter mais aberto, de modo a possibilitar que os licenciandos reflitam, discutam e construam as respostas.

A primeira variável refere-se aos fenômenos físicos periódicos, ou seja, está relacionada ao modelo: se é oscilação harmônica ou movimento circular. Nesse sentido, esperam-se as seguintes classificações das atividades:

- Atividade 1: que apareçam fenômenos com os dois modelos, a saber, oscilação harmônica e movimento circular;

- Atividade 2: oscilação harmônica;
- Atividade 3: movimento circular e oscilatório;
- Atividade 4: permite os dois modelos, oscilação harmônica e movimento circular;
- Atividade 5: movimento oscilatório.

Infere-se que, nas atividades, a periodicidade não está explícita, isto é, solicitando o período da função; porém, espera-se que os licenciandos, ao analisá-las, consigam perceber a periodicidade.

A segunda variável destina-se à potencialidade da função quanto ao registro, sendo ele algébrico, numérico, gráfico, linguagem natural ou geométrico. Destacamos que a referida variável, dependendo da escolha, influencia na estratégia de resolução do licenciando, pois a forma com que é apresentada a tarefa pode conduzir ou privilegiar uma técnica específica. Nessa conjuntura, classificamos as atividades em:

- Atividade 1: linguagem natural;
- Atividade 2: ostensivo numérico;
- Atividade 3: linguagem natural;
- Atividade 4: ostensivo geométrico e gráfico;
- Atividade 5: ostensivo gráfico.

Constata-se que buscamos, nas atividades, promover a maior possibilidade de registros contemplados nas tarefas, a fim de proporcionar aos licenciandos a experiência com diferentes maneiras de explorar as funções seno e cosseno.

4.1.3.1 Análise *a priori* detalhada do PEP

Nesta seção, ampliaremos a análise *a priori* de cada atividade de modo refinado, explanando a organização matemática para que a tarefa demandada seja resolvida.

Na atividade 2, o fenômeno físico estudado são as marés. Essa atividade não trata, especificamente, de um fenômeno periódico, mas quase, pois este tem uma regularidade. Espera-se que o aluno observe as características e consiga compreender o fenômeno citado.

O registro da atividade é o numérico, não apresentando, assim, o registro gráfico, nem o algébrico. Dessa forma, deixar-se-á livre para que o licenciando escolha o modelo a ser utilizado.

Na primeira pergunta podem ser geradas diferentes respostas do tipo: é periódico; a maré sobe e desce com certa regularidade; é uma senoide; vai depender do clima, mudanças do nível da água ou outras alterações.

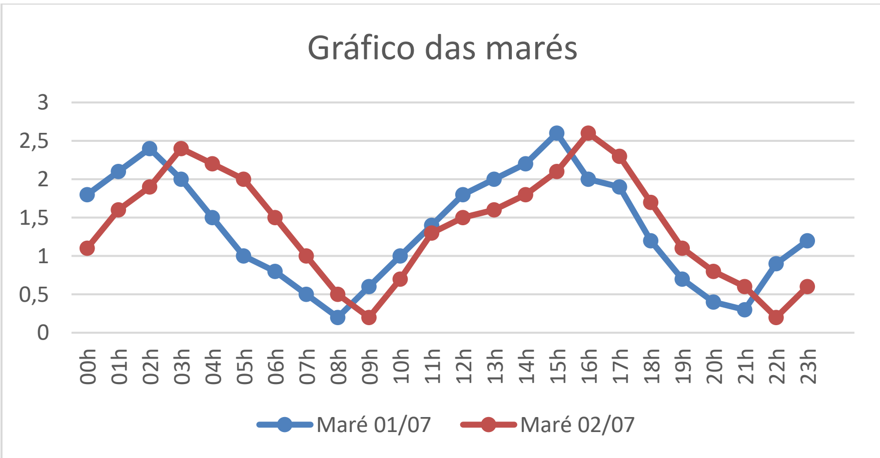
Na letra b, a resposta está explicitada na tabela, então basta interpretá-la e perceber que, por dia, existem 2 marés baixas e 2 marés altas.

A letra c requer um cálculo de variação. Podemos ter algumas estratégias de resolução: a primeira é a partir do cálculo da variação com os dados da tabela.

Para isso, fazemos no dia 01/07 o seguinte cálculo: 2,4 – 0,2 = 2,2 (variação da primeira maré alta e baixa) e 2,6 – 0,3 = 2,3 (variação da segunda maré alta e baixa); agora calculamos a média das marés (2,2 + 2,3)/2 = 2,25. Sendo no dia 01/07 a amplitude de 2,25 metros. No dia 02/07/2019 repetimos cálculos similares aos do dia 01/07. Temos 2,4 – 0,2 = 2,2 (variação da primeira maré alta e baixa) e 2,6 – 0,2 = 2,4 (variação da segunda maré alta e baixa); agora calculamos a média das marés (2,2 + 2,4)/2 = 2,3.

Outra maneira de calcular ocorre através da representação das alturas da maré em relação às horas do dia, em um plano cartesiano, no qual, a partir dos pontos, pode se tracejar um gráfico, permitindo a compreensão da amplitude. Examinemos o gráfico abaixo:

Figura 53 – Gráfico das marés da atividade 2.

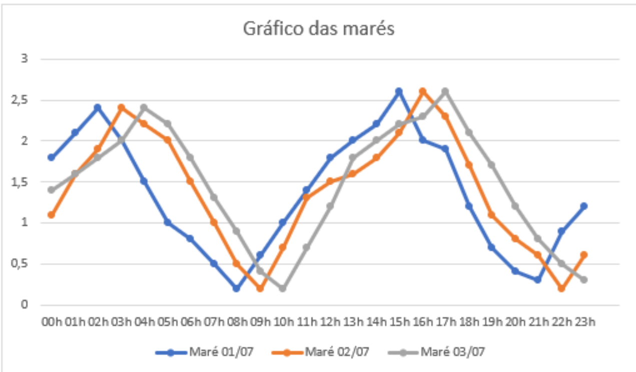


Fonte: a autora (2020).

Frisamos, porém, que consideramos como melhor estratégia a primeira, referente ao cálculo da média das variações das marés por dia.

Já a letra d) requer que o estudante observe a regularidade entre os dias 01/07 e 02/07 e, por intermédio desses dados, estime as marés do dia 03/07. Com base na estimativa, o aluno deverá analisar e perceber o melhor horário de instabilidade durante duas horas para realização do passeio. Para resolver, o licenciando pode esboçar numa tabela os valores dos dias 01 e 02 e, em seguida, mensurar os valores do dia 03. Através dos dados obtidos, poderá analisar por meio da tabela ou construir um gráfico com os valores; na sequência, deverá observar os horários em que os pontos têm um comportamento um pouco constante, ou melhor, sem uma grande variação de altura das marés. Notemos a figura 54:

Figura 54 – Registro gráfico e da tabela da atividade sobre as marés.



1		Maré 01/07	Maré 02/07	Maré 03/07
2	00h	1,8	1,1	1,4
3	01h	2,1	1,6	1,6
4	02h	2,4	1,9	1,8
5	03h	2	2,4	2
6	04h	1,5	2,2	2,4
7	05h	1	2	2,2
8	06h	0,8	1,5	1,8
9	07h	0,5	1	1,3
10	08h	0,2	0,5	0,9
11	09h	0,6	0,2	0,4
12	10h	1	0,7	0,2
13	11h	1,4	1,3	0,7
14	12h	1,8	1,5	1,2
15	13h	2	1,6	1,8
16	14h	2,2	1,8	2
17	15h	2,6	2,1	2,2
18	16h	2	2,6	2,3
19	17h	1,9	2,3	2,6
20	18h	1,2	1,7	2,1
21	19h	0,7	1,1	1,7
22	20h	0,4	0,8	1,2
23	21h	0,3	0,6	0,8
24	22h	0,9	0,2	0,5
25	23h	1,2	0,6	0,3

Fonte: a autora (2020).

Nessa questão podemos ter alguns pontos de análise. Se o aluno compreende que não deve ser a maré baixa nem a alta, ele verá o momento médio entre esse intervalo durante o dia – o que pode representar os horários das 06h às 08h e das 07h às 09h. Porém, se ele considerar alguns fatores, como o melhor horário, ou se interpretar a maior instabilidade, onde não há uma variação grande, a resposta poderá ser outra. A questão em debate vai revelar as possíveis compreensão e interpretação dos discentes perante o fenômeno das marés. Podemos também pensar na regularidade, que permite abranger o melhor momento para o passeio.

A última questão solicita a criação de uma figura no GeoGebra que represente as alturas das marés durante os dias 01, 02 e 03.

A partir dos dados explicitados, e da tabela construída na letra d), obtêm-se os elementos para escolha da figura. Espera-se que o estudante construa o gráfico de uma senoide para representação. Temos, assim, a primeira estratégia para construção no GeoGebra, a partir da aproximação dos valores.

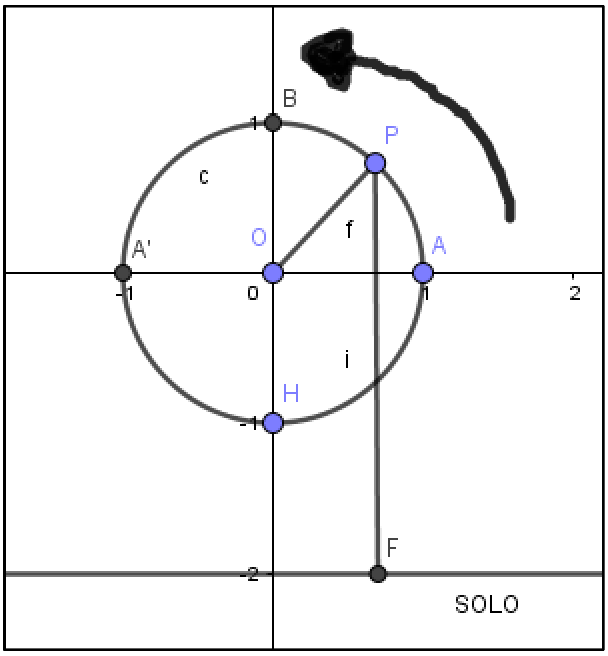
Outro ponto a ser considerado para construção é a lei de formação, ou seja, a fórmula algébrica para compreensão das alturas das marés, uma vez que a situação das marés é periódica com período aproximado de 12 horas. Assim, temos a lei de formação $H = a*\sin(\omega t+\varphi) + b$.

Quanto à atividade 2, que se refere à roda-gigante, temos: o movimento da roda-gigante é uniforme e circular, o que possibilita modelá-lo em uma senoide, como alguns fenômenos físicos periódicos. Essa atividade permite a articulação do modelo circular e do oscilatório.

Optamos por apresentar a situação em uma linguagem natural, para não determinar um modelo, e deixar, neste segmento, que os estudantes escolham, de maneira livre, uma forma de resolução, mesmo associando a roda-gigante a um modelo circular. Espera-se que apareçam os dois modelos, o oscilatório e o circular, na resolução da atividade.

Vale destacar que um passeio na roda-gigante são três voltas completas, sendo cada volta de 10 minutos. Então, temos o período T = 10 minutos. O passeio, por sua vez, tem a duração de 30 minutos.

Figura 55 – Modelo circular sobre atividade da roda-gigante.



Fonte: a autora (2020).

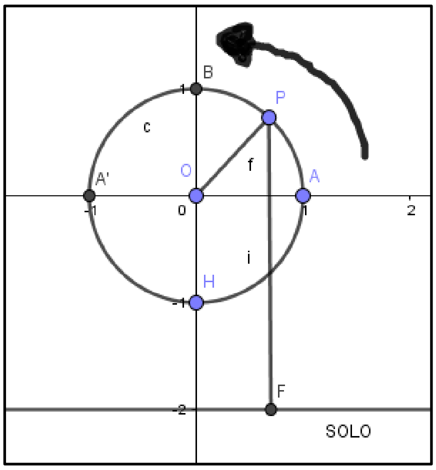
Modelo O: $h = A \cos(\omega t + \varphi) + B$ onde h é a altura de uma cabine ao solo, A é o raio da roda-gigante, B é a distância do centro da roda-gigante até o solo, ω a velocidade angular e φ a fase inicial.

A letra a) da atividade 3 solicita o momento em que Carlos está na posição mais alta. Necessitaremos utilizar a noção de período do fenômeno. Para isso, realizaremos alguns cálculos.

A volta completa da roda-gigante ocorre em 10 minutos; temos, então, que 1 volta = 2π. Para compreendermos o que ocorre a cada minuto, basta realizar uma regra de três, obtendo que cada minuto representa 1/10 de uma volta, então 1 minuto representa = $\pi/5$.

Nesse sentido, utilizando o modelo C, temos a seguinte estratégia:

Figura 56 – Modelo circular sobre atividade da roda-gigante.



Fonte: a autora (2020).

Se Carlos está no instante inicial no ponto H, para alcançar a altura mais alta ele deverá realizar meia-volta, ou seja, chegar ao ponto B. Isso significa que ele deverá realizar um trajeto de 180° ou π. Se em uma volta ele leva 10 minutos, meia-volta corresponde a 5 minutos. Como temos uma periodicidade de 2π e o passeio são 3 voltas, Carlos estará no ponto mais alto em 5 minutos, 15 minutos e 25 minutos durante o passeio.

Quanto ao modelo O, temos o seguinte: $h = A \cos(\omega t + \varphi) + B$:

$h - 22 = A \cos(\omega t + \varphi)$

$A = 40/2 = 20$

$\omega = 2\pi/t = 2\pi/10 = \pi/5$

$h = 22 + 20 \cos(\pi t/5 + \phi)$

Sendo t = 0, temos h = 2m, então cos ϕ = - 1. Assim, $\phi = \pi$. Daí, h = 22 + 20 cos (πt/5 + π) = 22 – 20 cos(πt/5). Dessa maneira, Carlos está na posição mais alta quando h toma o valor máximo: cos(πt/5) = -1 $\Leftrightarrow$ πt/5 = π + k2π $\Leftrightarrow$ t = 5 + 10 k, k$\in$Z.

De tal modo, nas três voltas, temos: para t = 5 minutos (k = 0), t = 15 minutos (k = 1) e t = 25 minutos (k = 2).

Verificamos que o modelo circular é de mais fácil compreensão para os estudantes.

Quanto à letra b, solicita-se calcular a altura da cabine de Carlos no solo após 2,5 minutos de viagem, após 7, após 12 e após 22 minutos. Para isso, o licenciando poderá construir uma tabela de valores e analisá-las, bem como, depois da construção da tabela, esboçar um gráfico para visualizar as posições de Carlos na cabine.

Observa-se que os valores t = 12 minutos e t = 22 minutos pertencem à segunda e à terceira rodada, respectivamente. Em t = 12 e t = 22 a cabine P está na mesma posição, uma vez que temos um fenômeno periódico, de T = 10.

Vamos calcular por intermédio do modelo C. Temos que 2,5 minutos são um quarto de volta; logo, P estará na mesma posição do ponto A e a 22 metros de altura, ou seja, a mesma distância do centro da roda-gigante ao solo.

Após 7 minutos, IOP = $\frac{7\pi}{5}$, então A’OP = $\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$, daí h = 22 + 20 sin $(\frac{\pi}{10}) \approx 28{,}18$ m.

Após 12 minutos, IOP = $\frac{2\pi}{5}$, então POA = $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$, daí h = 22 – 20 sin $(\frac{\pi}{10}) \approx 15{,}82$ m e, consequentemente, depois de 22 minutos também será 15,82 m.

Pelo modelo O temos: h = 22 + 20 cos $(\frac{\pi t}{5} + \pi)$ = 22 – 20 cos $(\frac{\pi t}{5})$. A partir daí, podemos calcular a altura da cabine P nos horários solicitados, substituindo os valores de t na fórmula encontrada:

t = 2,5 minutos, h = 22 – 20 cos $\frac{\pi}{2}$ = 22 m

t = 7 minutos, h ≈ 28,18 m

t = 12 minutos, h ≈ 15,82 m

t = 22 minutos, h ≈ 15,82 m

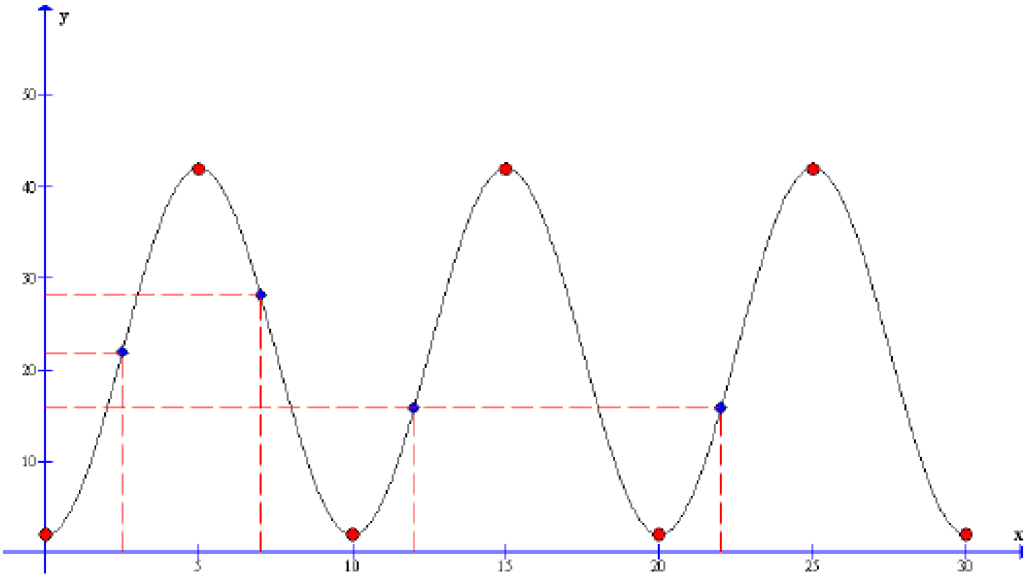
A terceira estratégia é articular os dois modelos, como traz Nguyen Thin (2011), a saber, modelo C → modelo O (fórmula algébrica) h = 22 + 20 sen (π / 2 + πt / 5) = 22 – 20 cos πt / 5.

Portanto, por meio da fórmula que representa a altura h em função de t: h = 22 – 20 cos πt/5, pode-se calcular a altura da cabine P nos horários requeridos, como a estratégia anterior.

4bCOgr: modelo C → modelo O (gráfico sinusoidal).

Usando o modelo C, calcule a altura da cabine em momentos específicos (posição A, A ‘, B, B’). Em seguida, o gráfico que representa a altura pode ser construído vinculando-se os pontos encontrados. Devido à periodicidade, temos o gráfico em três períodos. A partir daí, nós encontramos as alturas correspondentes aos horários solicitados, transformando, assim, o modelo C em modelo O com a representação gráfica.

Figura 57 – Modelo oscilatório sobre a atividade da roda-gigante.



Fonte: a autora (2020).

É possível resolver a atividade proposta, ainda, sem utilizar qualquer das estratégias expostas.

No tocante à letra c), pede-se a criação de uma figura utilizando o GeoGebra para apreciar as alturas da cabine P durante as três voltas da viagem.

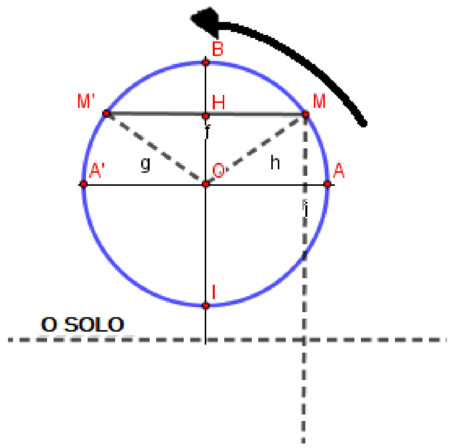
Para resolução o estudante poderá escolher um modelo circular, um modelo algébrico do modelo O ou uma representação gráfica de uma senoide sobre o modelo O.

A letra d) propõe que, a partir dos 35 m de altura, é possível ver o Farol da Barra. Por quanto tempo Carlos poderá ver o Farol em cada volta?

A aplicação na questão 4 (d) é oposta à da questão 4 (b). Aqui o intervalo de altura é dado para encontrar os horários correspondentes. Esta questão impede a estratégia relacionada ao modelo O e favorece o modelo C, como mostraremos a seguir.

Utilizando o modelo C: utilizamos o círculo para encontrar os ângulos e tempos correspondentes.

Figura 58 – Modelo circular para compreensão da atividade da roda-gigante.



Fonte: a autora (2020).

OH = 13 m, então cos MÔH = 13/20 = 0,65

MÔH ≈ 49,46º

MÔI≈ 180º - 49,46º ≈130,54º ≈ 0,73π

1 minuto -------→ 1/10 de volta = π / 5

?-----------------→ 0,73π

t_M = 3,65 minutos

M’ OI ≈ 180º + 49,46º ≈ 229,46º ≈ 1,27π

1 minuto -----→1/10 de volta = π / 5

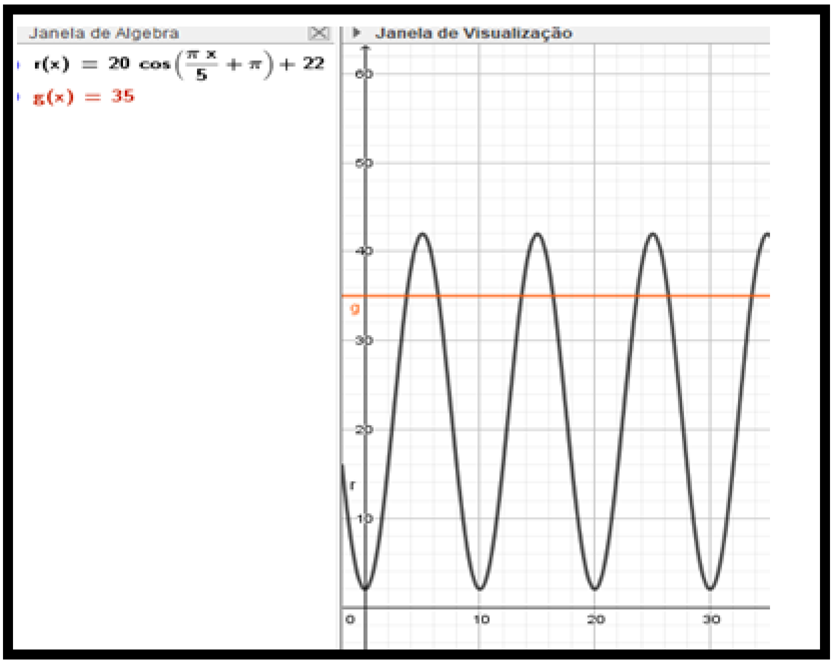
?---------------→ 1,27π

$t_{M'}$ = 6,35 minutos

Portanto, na primeira volta, Carlos poderá ver o Farol da Barra por 6,35 – 3,65≈2,7 minutos. Ele faz 3 voltas, então, para poder ver o Farol da Barra, basta multiplicar 2,7 x 3≈ 8,1 minutos.

Outra estratégia viável baseia-se no gráfico esboçado na letra c): construção de um gráfico para função y = 35 no mesmo plano cartesiano; então, vamos observar que os tempos solicitados correspondem aos valores no eixo x para que o gráfico, representando a altura da cabine P, seja maior que esta linha.

Figura 59 – Gráfico que representa a estratégia por meio da análise gráfica.



Fonte: a autora (2020).

Outra estratégia viável é ponderar que, se o movimento da roda-gigante é considerado retilíneo uniforme, a altura de uma cabine é uma função linear em função do tempo. Isso leva às seguintes respostas:

4 minutos --→ 40 m

1 minuto ---→ 8 m

x = 7/8 ≈0,875 (minutos)

Em uma rodada, Carlos pode ver o Farol da Barra por 2 x 0,875 = 1,75 minutos. Logo, em 3 voltas, Carlos verá o Farol da Barra por 3 x 1,75 = 5,25 minutos.

Nesse aspecto, os dois modelos, O e C, podem ser utilizados pelo aluno, mas, ao optar pelo modelo O, o discente poderá ter algumas dificuldades, uma vez que o modelo C oferece a resolução da questão mais facilmente.

Ao que se refere as atividades 4 e 5, nessas atividades, pede-se que os alunos considerem o GeoGebra para construção do saber matemático. Como os estudantes já tiveram um primeiro acesso para conhecimento do *software* noutro momento durante a disciplina de Pré-cálculo, conhecem as janelas do GeoGebra e alguns comandos.

Dessa forma, eles começaram a construir os modelos conforme roteiros das atividades 4 e 5. A partir dessas atividades, analisaram as tarefas 2 e 3, avaliando de que maneira poderiam explorar os modelos aprendidos nos exercícios. Além disso, temos a análise do GeoGebra para o estudo das funções seno e cosseno por meio da modelação de fenômenos físicos periódicos.

A atividade 4 busca integrar o modelo circular ao modelo oscilatório harmônico a partir do GeoGebra. A referida atividade apresenta os comandos para construção de um círculo trigonométrico integrado a uma representação gráfica das funções seno e cosseno, à medida que movimenta o círculo, há uma trajetória dos pontos no gráfico das funções, mostrando o trajeto dos pontos no gráfico das funções seno e cosseno.

O principal entrave que os licenciandos tiveram na tarefa em pauta foi a não familiaridade com os comandos do GeoGebra; mas, enquanto pesquisadora e aplicadora da atividade, estive em sala para auxiliá-los no que foi necessário quanto aos comandos.

Uma vez superados os comandos do GeoGebra, os discentes construíram os dois modelos dinâmicos, da oscilação e o circular. Após a construção, os estudantes responderam, através da análise das construções, questões relacionadas ao que perceberam ao manipular os dois modelos construídos e como eles poderiam utilizá-los para resolver as atividades 2 e 3, bem como outras atividades.

Já a atividade 5 buscou possibilitar a construção do conceito dos parâmetros que representam as transformações gráficas das funções seno e cosseno. A partir da construção de controles deslizantes e da manipulação destes em funções seno e cosseno, os licenciandos em matemática conseguiram compreender esses conceitos e perceber a potencialidade do GeoGebra para entendimento das definições citadas.

Assim como na atividade 4, os entraves identificados, uma vez que o roteiro está detalhado, foram dificuldades relacionadas à manipulação do GeoGebra. Entretanto, constituíram obstáculos de fácil resolução, tendo em vista que as atividades ocorreram em trio e a pesquisadora/aplicadora se fez presente em sala para possíveis esclarecimentos quanto aos comandos.

Uma vez analisadas *a priori* as atividades, para que possamos confrontar com os resultados obtidos, explicitaremos a seguir a experimentação do PEP em sala de aula. Vale salientar que a análise a priori realizada nessa sessão não tem o objetivo de prever os possíveis comportamentos esperados para controlá-los como na engenharia clássica, uma vez que estamos inseridos no paradigma de questionamento do mundo, por meio de um PEP. Mas sim, a fim de fazermos uma análise matemática, revelando os possíveis modelos matemáticos que poderão ser contemplados pelos estudantes, no desenvolvimento do PEP.

4.2 EXPERIMENTAÇÃO DO PEP

O PEP que desenvolvemos teve um caráter de metodologia de ensino das funções seno e cosseno, pois buscamos trabalhar de forma investigativa por intermédio de modelação de fenômenos periódicos, com organizações matemáticas sobre as funções aludidas. Optamos por trazer os conceitos de maneira implícita, para que os alunos que trabalharam com funções trigonométricas e trigonometria no Ensino Médio retomassem esses conceitos, e, ao mesmo tempo, aqueles que não viram os conteúdos em questão durante a vida escolar pudessem construir, através da experiência de análise, modelação dos fenômenos.

Caracterizamos nosso PEP como adaptado, uma vez que foi utilizado para o estudo de funções seno e cosseno, integrado ao GeoGebra, em uma disciplina de um curso de formação inicial de professores de matemática.

Ademais, nosso MER, baseado em um modelo epistemológico, e nos estudos de Nguyen Thin (2011), é um Modelo alternativo, já que nem todas as atividades do PEP não foram elaboradas conforme discussão da Q_0 e das questões secundárias com os licenciandos em matemática, mas algumas delas foram a partir da pesquisadora e seus orientadores, com base na inferência de possíveis questões a serem trazidas pelos estudantes.

Um dos fatores que nos fez organizar previamente as atividades que compõem o PEP junto à Q_0 foi o recorte temporal, pois a experimentação ocorreu na disciplina de Pré-cálculo, cuja carga horária é de 60 horas, e o objeto matemático funções seno e cosseno é trabalhado no final do semestre, o que, consequentemente, nos fez ter pouco tempo para trabalhar, restando apenas 6 sessões para experimentação. Consideramos, neste contexto, o tempo como uma restrição.

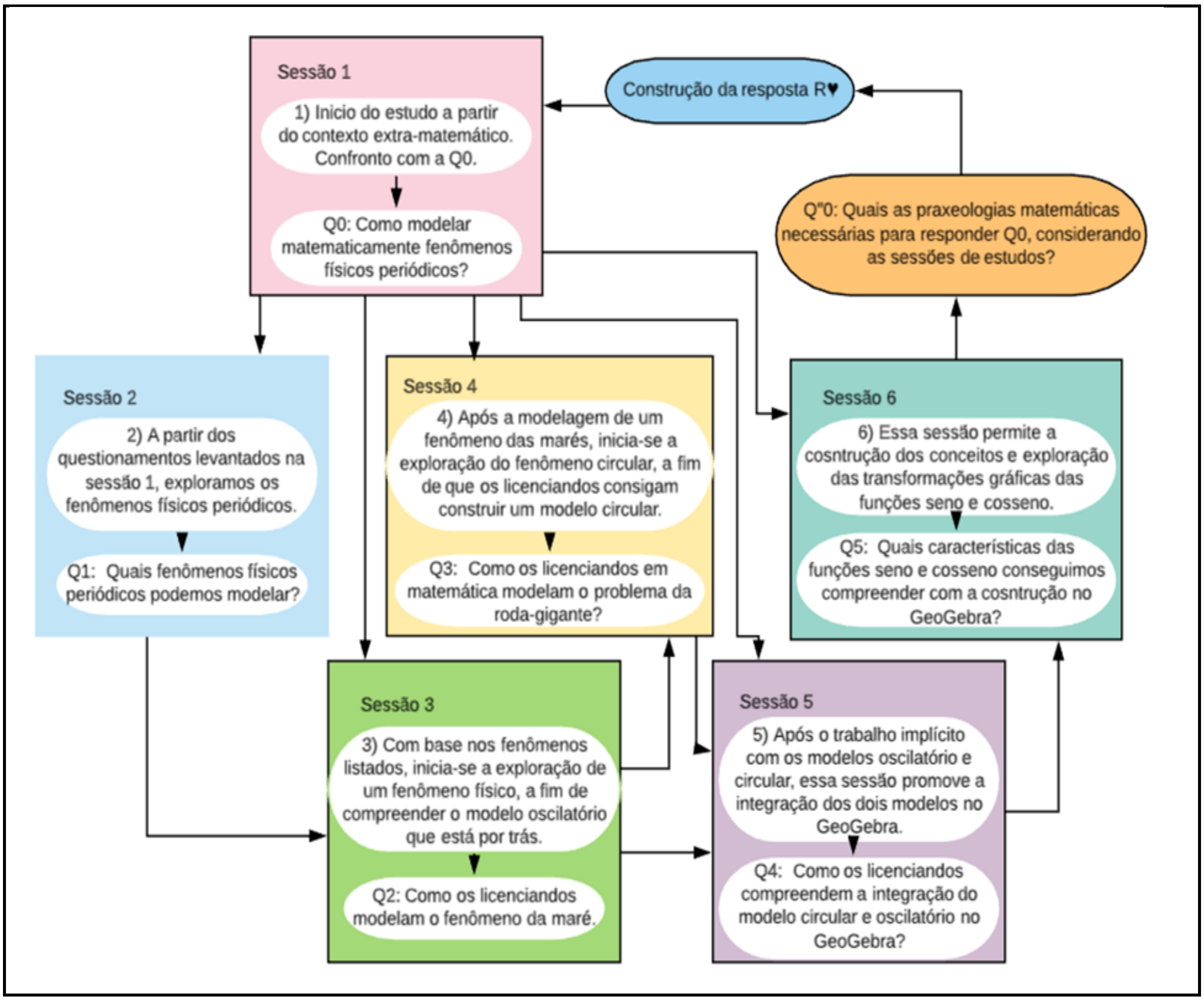
Desse modo, após trabalharmos na disciplina com a trigonometria no triângulo retângulo e no círculo, através de aulas expositivas dialogadas, e com auxílio da exploração de atividades, começamos a experimentação do PEP.

4.2.1 Aspectos introdutórios do PEP na Experimentação

A experimentação ocorreu na disciplina de Pré-cálculo, com duas turmas de 15 alunos cada. Cada turma foi dividida em trios, para que fosse viável a discussão entre os estudantes. Os alunos receberam um pequeno caderno, caneta e lápis, a fim de haver o ambiente papel e lápis para construção de estratégias e pensamentos, além de tecer um diário de campo para registrar todas as ideias relacionadas às atividades desenvolvidas.

O PEP foi construído em seis sessões, cada uma com, mais ou menos, duas horas. Apresentaremos um desenho-mapa no quadro 23, que representa cada sessão de estudo e que, juntas, formam o eixo estrutural do nosso PEP.

Quadro 23 – Mapa das sessões com questões estruturais do PEP.



Fonte: a autora (2020).

Nesse sentido, as sessões foram realizadas no laboratório de informática da UEFS destinado ao curso de matemática. As sessões ocorreram com as duas turmas em horários distintos, porém, ao final da sessão 6, juntamos as duas turmas para possibilitar a socialização e discussão dos resultados com as duas turmas de Pré-cálculo.

Como dividimos os alunos das duas turmas em trios, tivemos cinco trios em cada turma; utilizamos para identificação o seguinte código: grupo 1, grupo 2... grupo 10. Os cinco primeiros da turma 1 e os cinco últimos da turma 2. Salientamos que cada estudante recebeu um caderno pequeno para registrar suas estratégias, ideias e possíveis resoluções individuais e em grupo. Além de todo arquivo do GeoGebra, os cadernos citados foram enviados para o e-mail da pesquisadora enquanto diretora do estudo.

Para melhor organização, as questões derivadas da exploração da $Q_{0,}$ chamadas de secundárias, expostas pelos discentes foram classificadas como questão dos estudantes - *Qe*, acompanhada pelo número da questão. Nas respostas, identificamos a questão através da primeira numeração; após dois pontos significa o número do grupo que demonstrou a questão. Quando mais de um grupo apresentou a mesma questão, separamos com vírgula o número do grupo, por exemplo, $R_{1:1,2,3,...10}$◊ significa resposta da questão 1, explanada por todos os grupos, ou seja, do 1 ao 10. Utilizamos o símbolo losango (◊) para representar a resposta institucional de cada grupo temporária, a cada questão secundária levantada, em busca de alcançar a resposta espera a questão Q_0. A partir das respostas, sabemos os grupos que expuseram as questões.

As questões secundárias desenvolvidas por nós, diretores de pesquisa, foram representadas apenas pela letra Q e pela numeração. A seguir, explicitaremos cada sessão.

4.2.1.1 Sessão 1

A sessão 1 ocorreu no dia 02 de setembro de 2019 com as duas turmas, sendo a turma 1 das 7h30 às 9h30 e a turma 2 das 10h30 às 12h30.

Iniciamos a sessão 1 distribuindo os kits com um caderno pequeno, uma caneta e um lápis com borracha para cada aluno, além de dividir a sala em trios. Optamos em dividir cada turma de 15 alunos em trios, para auxiliar no processo de discussão e exploração do PEP. Em seguida, explicamos a metodologia do estudo, que seria por investigação. A partir de um questionamento que eu apresentei, eles buscaram informações, para responder à questão proposta, na internet, em livros e em tudo o que estava disponível no laboratório de informática, local em que aconteceram as sessões de aulas. Frisamos a necessidade de registro no caderno de todas as informações levantadas durante todo o percurso.

Ao explicitar a metodologia, os estudantes ficaram interessados pela forma de condução do trabalho, achando um desafio, uma vez que não estavam habituados em trabalhar no paradigma de questionamento do mundo.

Após a explicitação da metodologia de estudo, coloquei no quadro branco a Q_0: “Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos?”. Nesse momento, eles anotaram a

Q_0 no caderno e começaram a questionar alguns significados de certos termos presentes na Q_0, resultando em questões secundárias, e foram em busca de respostas para essas questões.

Surgiram diferentes indagações a respeito da Q_0. Nas próximas linhas, explanaremos as questões secundárias levantadas pelos alunos e suas respostas R◊.

A primeira questão que todos os 10 grupos levantaram foi a que denominamos de Q_1; a resposta a essa questão, nos dez grupos, foi similar, mudando apenas na escolha das palavras (sinônimos). Dessa forma, optamos pela escrita que mais se repetiu. Observemos abaixo a questão e a resposta dos discentes:

Qe_1: o que são fenômenos físicos periódicos?

$R_{1:1,2,\,3,\,\ldots 10}$◊: são fenômenos que se repetem em um mesmo intervalo de tempo.

A segunda questão secundária levantada também foi abordada por nove grupos, apenas o grupo três não levantou essa questão. Houve algumas variações nas respostas, as quais explicitaremos a seguir.

Qe_2: o que é modelar matematicamente? O que é modelagem matemática?

$R_{2:1}$◊: a modelagem, mais do que uma ferramenta útil para resolução de problemas, pode contribuir de forma significativa para a visão da ciência adequada à prática científica moderna, cuja essência está na criação de modelos matemáticos.

$R_{2:2}$◊: a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos, e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.

$R_{2:4}$◊: é uma área que tem por objetivo criar um modelo matemático para explicar algum fenômeno natural.

$R_{2:5}$◊: seria aplicada no ensino para despertar no aluno o interesse por assuntos matemáticos que os estudantes não conhecem.

$R_{2:6}$◊: a modelagem matemática é uma perspectiva, algo a ser explorado, o imaginável. Surge da necessidade de compreender os fenômenos que cercam o indivíduo para interferir ou não em seu processo de construção.

$R_{2:7/8}$◊: é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento destes. Consiste na arte ou tentativa de descrever matematicamente um fenômeno.

$R_{2:9}$◊: é representar simbolicamente as formas, características e mecanismos de situações ou fenômenos utilizando a matemática.

$R_{2:\,10}$◊: consiste em traduzir simbolicamente uma realidade, isto é, descrever uma situação observada usando uma linguagem matemática.

A questão Qe_3 ocorreu em dois grupos.

Qe_3: como modelar matematicamente?

$R_{3:3}$◊: acreditamos que seja modelado por meio de contagem do tempo de duração dos fenômenos, obtendo-se a possibilidade de controlar algo durante esse fenômeno.

$R_{3:8}$◊: inicialmente, precisamos conhecer o padrão de tempo, ou seja, o período em que o fenômeno se repete. Para isso, é necessário estabelecer um ponto inicial e um ponto final para o ciclo. Seria conveniente poder analisar o estágio entre o começo e o fim para facilitar previsões. Para tanto, uma boa opção é transformar em função, pois saberíamos o estágio em função do tempo.

As questões subsequentes foram particulares de alguns grupos, isto é, não houve repetições. Apresentaremos abaixo as questões.

Qe_4: como desenvolver um padrão matemático para fenômenos físicos que acontecem periodicamente?

$R_{4:2}$◊: transformando fenômenos físicos em problemas matemáticos e integrando a física à matemática, trazendo esses fenômenos para a matemática a fim de resolvê-los por meio de observação e análise de uma experimentação, por exemplo.

Qe_5: qual a relação com a trigonometria?

$R_{5:6}$◊: a relação pode se dar por intermédio das funções trigonométricas.

Qe_6: por que os fenômenos periódicos são importantes?

$R_{6:7}$◊: são importantes pois podem ser muito úteis para medir a passagem do tempo.

Qe_7: o que sabemos sobre os fenômenos periódicos?

$R_{7:7}$◊: podemos considerar o tempo relacionado a uma circunferência.

Qe_8: em que se aplicam os fenômenos físicos periódicos?

$R_{8:1}$◊: estão em pesquisas científicas, em nosso dia a dia, em ciências como a biologia, matemática e outras.

Qe$_9$: os fenômenos periódicos implicam todos os conteúdos matemáticos?

R$_{9:1}$◊: todos não sabemos, mas em trigonometria, sim.

Qe$_{10}$: como essa modelação dos fenômenos é utilizada para contribuir em nossa realidade?

R$_{10:1}$◊: é utilizada para quantificar fenômenos que se repetem prevendo seus acontecimentos.

De acordo com as questões levantadas, observamos diferentes perspectivas dos grupos, ao mesmo tempo em que constatamos questões em comum. Após discussão entre os grupos e registro nos cadernos, os estudantes foram convidados a socializar as questões e respostas levantadas a partir da análise da Q$_0$.

Verificamos que as questões levantadas pelos grupos levam à compreensão da questão geratriz. E, por meio das questões secundárias, os discentes levantaram hipóteses próprias quanto ao objeto do saber matemático envolvido e concepções pessoais sobre a matemática, bem como a relevância e aplicações dos fenômenos físicos periódicos.

Ao socializarem as questões surgidas, os estudantes ficaram surpresos por duas questões serem repetidas praticamente em todos os grupos. As demais questões que apareceram foram individuais de cada grupo, o que permitiu um leque maior de proposições para entendimento dos caminhos para responder a Q$_0$.

A questão que mais se repetiu foi a *Qe$_1$*, a saber, o que são fenômenos físicos periódicos; quanto à resposta, não houve diferenças expressivas.

Já a segunda questão foi repetida por nove grupos, com respostas distintas. Os grupos trouxeram a modelagem como uma forma de traduzir simbolicamente uma realidade e fenômenos; como uma área para simular sistemas reais; como um meio de proporcionar a interação da matemática com a realidade; e como uma maneira de criar modelos para explicar fenômenos. Ou seja, os licenciandos levantaram diversos modos para responder o que significa modelar matematicamente.

A terceira questão levantada pelos alunos foi: como modelar matematicamente? Quanto a ela, dois grupos mencionaram o estabelecimento de padrões para modelar, por intermédio de funções e de contagem de tempo ou alguma forma de controle do fenômeno. Percebemos, então, indícios relacionados ao objeto matemático a ser estudado.

As demais questões foram apresentadas por cada um dos grupos, não havendo repetições. Observamos nessa sessão as diferentes percepções dos alunos, como por exemplo a aluna 8 do grupo 4, turma TP01, que apresenta indícios de outras praxeologias utilizadas no curso de eletrotécnica, como observamos a seguir, no trecho da transcrição no quadro 24.

Quadro 24 – Trecho 1 de transcrição turma TP 01 sessão 1.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:04:51 00:05:49	Aluna 8	Ai eu relembrei algumas coisas que tinha estudado em eletrotécnica sobre o comportamento de alguns componentes eletrônicos é... de resistência, resistor, capacitor e disjuntor, e ai ... a gente avalia a cada um desse componente em relação ao circuito que a gente tá, de acordo com gráfico e tem determinado componente está atrasado 90 graus em relação a tensão que está sendo aplicado a ele, está adiantado 90 graus, e ai a gente analisa de acordo ao gráfico e ele tem que tá perfeito. Se não tiver perfeito é sinal que tem alguma coisa ali dando errado, você pode acabar queimando, ou nem funcionando circuito que você desenvolveu. Talvez eu trago até algumas fotos de algumas práticas que eu realizei com esses circuitos. Se eu ainda tiver né.	Grupo 4

Fonte: a autora (2020)

Outro fato que requer atenção, é a associação inicial dos estudantes da questão geratriz com a trigonometria. Compreendemos já como indícios para a inserção futura da organização matemática do círculo trigonométrico e das funções trigonométricas. Uma vez que, pelos registros dos estudantes, já fica perceptível a citação de ostensivos discursivos que apresentam elementos dessas organizações matemáticas, conforme quadro 25:

Quadro 25 – Trecho 1 de transcrição turma TP02 sessão 1.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:02:16 00:03:02	Aluna 4	Dias, é outras coisas... e a gente também se perguntou, é..., o que é a modelagem matemática, que eu acho que a maioria, cinquenta por cento se perguntou a mesma coisa, mas é... uma perspectiva, algo a ser explorado, imaginável e o inimaginável, necessidade de compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não no seu processo de construção. E... depois a gente se perguntou, qual a relação disso com a trigonometria e aí a gente chegou na ideia de	Grupo 6

		que as funções. E aí a gente ficou com uma pergunta, será que essas funções são capazes de modelar? e aí a gente parou aí (risos)	
04:09:00 00:04:49	Aluna 6	A gente também (riso) como todo mundo, fomos pesquisando cada parte e agente também viu, que se vai se repetindo a cada vez, a gente tinha que achar um ponto inicial e um ponto final, então a gente acabou lembrando das ondas senoidais, que sempre vão se repetindo, se repetindo, pode ser o início lá da onda, em cima ou embaixo. A gente também foi lembrando de exemplos, como a fase da lua e aí acabou entrando em trigonometria. Que também a gente pode perceber que no círculo trigonométrico que se repetem, por exemplo: O seno, o seno de zero é zero, seno de noventa é um, seno de cento e oitenta é zero e seno de trezentos e sessenta é menos um, aí vai se repetindo.	Grupo 7

Fonte: a autora (2020)

Destacamos também que as questões levantadas conduziram ao desenho do percurso para chegarmos à resposta esperada (*R*♥) da questão geratriz Q0. Em anexo, segue a transcrição do momento de socialização das respostas dessa sessão 1 das turmas TP01 e TP02 na íntegra.

Observa-se que conforme característica do PEP, nessa sessão a dialética pergunta e resposta, foi bastante evidente, ao explorar a questão Q0, a fim de auxiliar na compreensão da mesma.

Ao que se refere ao papel da professora, sujeito *Y* da pesquisa, ela exerceu a função de mediadora, nessa sessão. No intuito de mediar as discussões dos alunos no momento de socialização, garantido a participação de pelo menos um membro de cada grupo. Isso pode ser observado no texto, uma vez que essa sessão foi destinada a exploração da Q0 por meio da dialética perguntas e respostas pelos estudantes.

Com base nas referidas questões, planejamos a sessão 2, com o objetivo de proporcionar aos alunos responder quais são os fenômenos periódicos que podem ser modelados matematicamente. Apontaremos essa questão a seguir.

4.2.1.2 Sessão 2

A sessão 2 ocorreu no dia 04 de setembro de 2019; esta sessão foi mais curta, com duração de uma hora, em virtude de ser destinada à exploração da Q_1 e sua socialização. Na turma 1 a sessão ocorreu das 8h30 às 9h30 e na turma 2 das 9h30 às 10h30. Introduzimos a sessão na turma 1 com a questão Q_1: "Quais fenômenos físicos periódicos podemos modelar?".

Os estudantes, ao se depararem com a questão, começaram a pesquisar em livros e na internet fenômenos físicos periódicos. A sessão em pauta ocorreu em sala de aula.

As respostas à Q_1 de cada grupo estão evidenciadas a seguir:

Grupo 1, R_1:$_1$◊: batimentos cardíacos; ondas sonoras; ondas marítimas; ciclo menstrual; rotação da terra; visita do cometa Halley.

Grupo 2, R_1:$_2$◊: fases da lua; dia e noite; visita do cometa Halley; pêndulo simples; estações do ano; El Niño.

Grupo 3, R_1:$_3$◊: bombear o sangue; as vibrações das placas tectônicas; a rotação da terra em relação ao sol; piscar dos olhos; as fases da lua; níveis da maré; astronomia; acústica.

Grupo 4, R_1:$_4$◊: ondas; fenômenos elétricos, óticos e mecânicos; frequência cardíaca; fases da lua; estações do ano; ciclo menstrual; aniversário.

Grupo 5, R_1:$_5$◊: ondas marítimas; estações do ano; fases da lua; ciclo da maré; dia e noite.

Grupo 6, R_1:$_6$◊: o dia; fases da lua; relógio; ciclo menstrual; pressão sanguínea; estações do ano; variação da temperatura atmosférica; calendário; batimentos cardíacos; movimento de translação e rotação.

Grupo 7, R_1:$_7$◊: fases da lua; o dia e a noite; cometa Halley; frequência cardíaca; aniversário; estações do ano; fenômeno El Niño; movimentos das marés; pêndulos; ondas sonoras; rotação e translação; horário de pico.

Grupo 8, R_1:$_8$◊: estações do ano; fases da lua; ciclo da maré; dia e noite; ciclo da vida de certos animais; ondas; batimentos cardíacos; translação e planetas ao redor do sol.

Grupo 9, R_1:$_9$◊: órbita dos planetas em relação às estrelas; trajetórias de cometas; estações do ano; ciclo da lua; ciclo de um pêndulo simples; ciclo de um pêndulo de Newton; ciclo de ondas eletromagnéticas e mecânicas; *spin* de partículas substanciais.

Grupo 10, R_1:$_{10}$◊: o movimento do sol e da lua; calendário; fases da lua; frequência cardíaca; rotação e translação.

Observamos que os estudantes realizaram uma pesquisa de diferentes fenômenos periódicos, os quais permitiram ampliar a discussão. A primeira discussão levantada foi a respeito do ciclo menstrual; alguns grupos afirmaram que não é bem um fenômeno periódico, pois pode haver mulheres que têm um ciclo menstrual irregular. Ao debater o ponto mencionado, o grupo 5 pontuou que tal fenômeno conta como periódico em casos de ciclos menstruais regulares, já que conseguem estabelecer uma frequência, um padrão. Feito isso, os grupos que discordaram concordaram com a alternativa.

Um fato interessante é que, nas respostas dos licenciandos, as ondas marítimas e níveis das marés apareceram com certa frequência. Esse fato é notório, uma vez que a atividade trabalhada na sessão 3 foi, justamente, sobre as marés – o que mostra um desenho convergente ao percurso para alcançar a resposta *R*♥. Novamente, a professora, aparece como mediadora na socialização dos resultados, sendo os estudantes os principais atores nesse processo do PEP. Podemos acompanhar no anexo C a transcrição da aula de uma turma.

4.2.1.3 Sessão 3

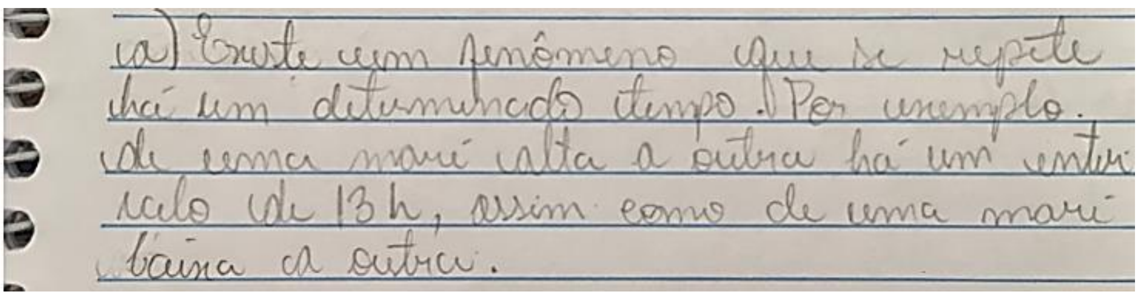
A sessão 3 aconteceu no dia 04 de setembro de 2019, em um horário extra, com as duas turmas juntas, das 13h30 às 15h30.

Principiamos a sessão entregando o roteiro de uma atividade a respeito de um fenômeno físico periódico citado por eles na sessão dois; neste caso, a cheia das marés[6] no Porto de Aratu. A tarefa apresenta um registro numérico em uma tabela dos horários e altura da maré em dois dias consecutivos durante 24 horas, além de cinco questionamentos sobre o fenômeno.

Analisamos as respostas de cada grupo da atividade inteira e as demonstraremos na sequência.

O primeiro questionamento da atividade 2 referiu-se à letra a), denominada aqui de **Q_{2a}: "Observando a tabela acima, o que você pôde concluir sobre esse fenômeno?**". A figura 60 mostra a resposta $R_{2a:1}$◊: do grupo 1.

Figura 60 – Resposta da atividade 2 grupo 1.


a) Existe um fenômeno que se repete há um determinado tempo. Por exemplo de uma maré alta a outra há um intervalo de 13h, assim como de uma maré baixa a outra.

Fonte: a autora (2020).

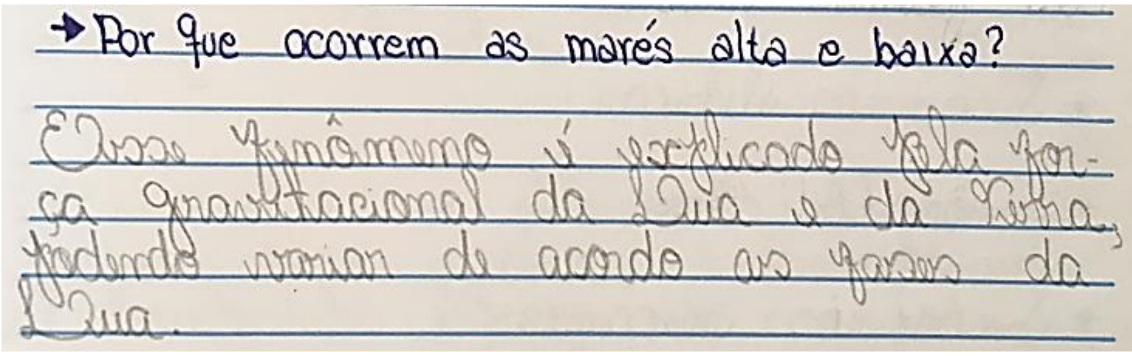
[6] Nível máximo de altura das águas do mar durante a enchente de maré.

Verificamos que, de acordo com os dados numéricos dispostos na tabela, o grupo em pauta percebeu certa periodicidade entre o fenômeno das marés, o que revela indícios para o estudo de um modelo, a exemplo do oscilatório. E eles comungam com a análise *a priori*, ao observarem que o fenômeno se repete num mesmo intervalo de tempo. A resposta do grupo 1 se reproduziu no grupo 3, e assim categorizamos como $R_{2a}:_{1/3}\lozenge$.

Já o grupo 2, apesar de notar a periodicidade, destaca que, de início, teve dificuldades de encontrar onde estava a periodicidade, por esta não ter, necessariamente, valores iguais. Os discentes relataram que só observaram em uma segunda análise, quando foram calcular as marés baixas e altas; categorizamos a resposta deles como $R_{2a}:_{2}\lozenge$.

Os grupos 4, 5 e 10 responderam afirmando que as cheias das marés estão relacionadas às fases da lua. Examinemos na figura 61 a resposta do grupo 4:

Figura 61 – $R_{2a}:_{4/5/10}\lozenge$ que representa as respostas dos grupos 4, 5 e 10.



→ Por que ocorrem as marés alta e baixa?

Esse fenômeno é explicado pela força gravitacional da Lua e da Terra, podendo variar de acordo as fases da Lua.

Fonte: a autora (2020).

A resposta dos grupos 4, 5 e 10 apresentam informações vinculadas à astronomia; eles inferiram que a força gravitacional da lua afeta diretamente a altura da água. O grupo 10 ainda acrescentou os horários das marés altas, que se dão devido às influências climáticas, e por causa da região em foco estão mais próximos dos efeitos gravitacionais do sol e da lua. E quando a maré está baixa é porque a distância entre a lua e o sol está maior e a força gravitacional está menor. Desse modo, a resposta dos grupos à Q_{2a} foi a $R_{2a}:_{4/5/10}\lozenge$.

Percebemos que tais grupos buscaram informações detalhadas a respeito de dados da astronomia que influenciam nas marés. Isso reforça a metodologia de questionamento do mundo, uma vez que os estudantes foram investigar sobre o tema, questionando acerca dos fenômenos a fim de compreenderem o processo físico que está associado ao assunto. E assim, acrescentando elementos praxeológica de outra disciplina, além da matemática.

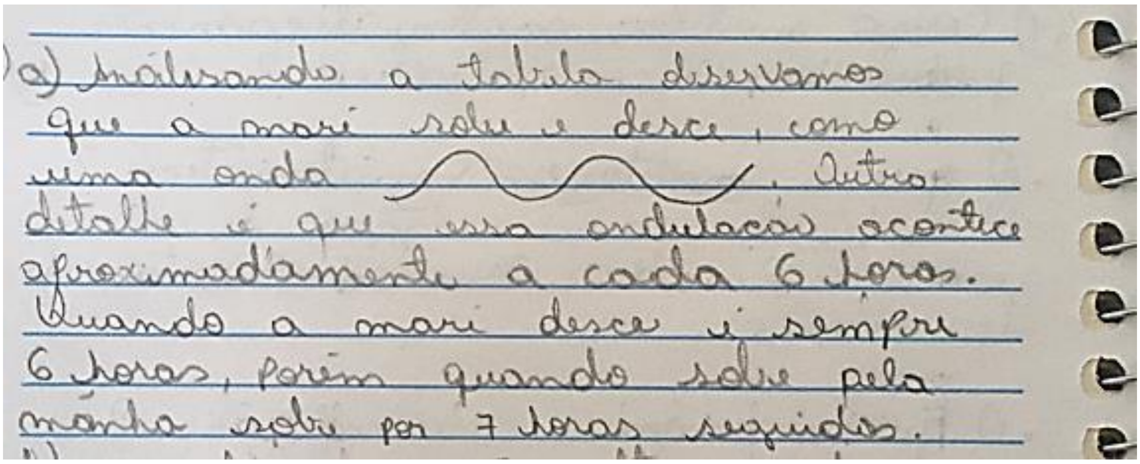
O grupo 6 aborda, em sua resposta, a oscilação. Sua resposta foi $R_{2a:6}$◊: “Nos dois dias apresentados na tabela há uma oscilação no crescimento e diminuição do tamanho da altura da água. Essa oscilação acontece de forma que se aproxima do movimento de um dia para o outro”.

Podemos inferir, por meio da resposta demonstrada, que o grupo 6 expõe uma tendência a um modelo para analisar o fenômeno estudado, neste caso, o modelo oscilatório. Esse fato mostra que os educandos já tiveram um olhar para modelar o fenômeno.

O grupo 7 explana a resposta $R_{2a:7}$◊: “O ciclo se repete a cada 12 horas aproximadamente. Existe um determinado tempo para começar o ciclo, que é quando o nível da água está igual/similar durante um período”. O grupo em questão destaca a periodicidade, abordando o nível igual/similar, ou seja, percebeu que no fenômeno da maré não há uma periodicidade exata em valores da altura, mas valores bem próximos.

Já o grupo 8 apresenta a resposta $R_{2a:8}$◊. Verifiquemos na próxima imagem.

Figura 62 – $R_{2a:8}$◊ que representa a resposta do grupo 8.


a) Analisando a tabela observamos que a maré sobe e desce, como uma onda. Outro detalhe é que essa ondulação acontece aproximadamente a cada 6 horas. Quando a maré desce é sempre 6 horas, porém quando sobe pela manhã sobe por 7 horas seguidos.

Fonte: a autora (2020).

O grupo 8 traz um desenho gráfico do fenômeno, comparando-o com uma onda, o que podemos inferir que parece uma senoide. Porém, ao abordar o período que sobe e desce a maré, a escrita fica um pouco confusa. Compreendemos, no entanto, que significa que o intervalo entre a maré alta e a maré baixa é de 6 horas, e que o intervalo de tempo entre a maré baixa e a maré alta é de 7 horas. Percebemos já registro de um ostensivo gráfico, para representar o não ostensivo que os estudantes querem evocar.

O grupo 9 analisa o fenômeno das marés a partir de pontos de crescimento e decrescimento. A resposta foi a $R_{2a:9}$◊: “Após analisar a tabela em busca de padrões, percebemos que o nível da água varia. Dividindo as manhãs e tardes em início, meio e fim, percebe-se uma variação crescente nos inícios e fins das manhãs e tardes. E ocorre uma variação decrescente no meio das manhãs e tardes".

A resposta do grupo 9 revela que se analisou a regularidade para abranger a quase periodicidade do fenômeno, e, por intermédio dessa informação, traçar os pontos de variação, isto é, de crescimento e decrescimento.

Nesse sentido, identificamos que os grupos, conforme os ostensivos gráficos relatados na análise *a priori*, chegaram às respostas almejadas, considerando as variáveis e características a serem trabalhadas.

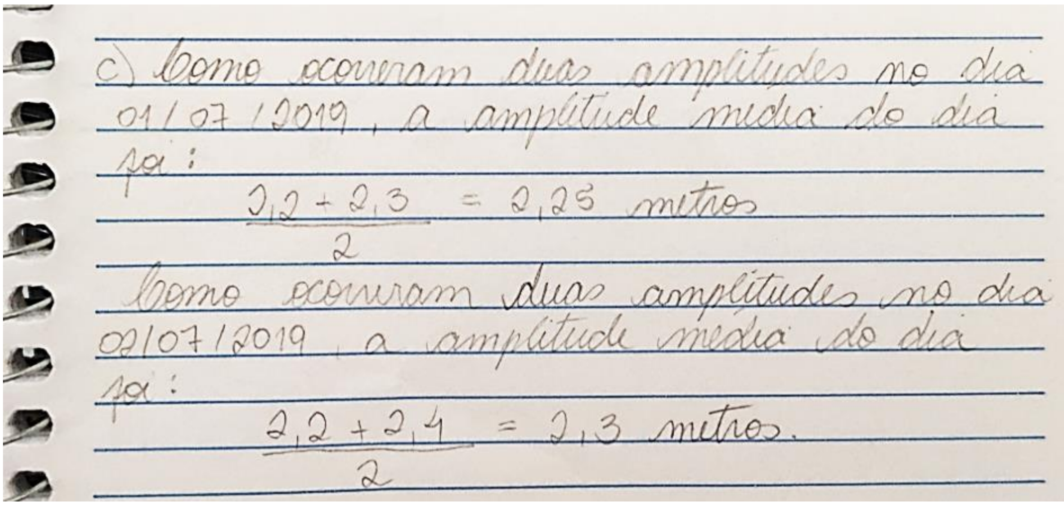
A próxima tarefa da atividade 2 foi a que denominamos de $\mathbf{Q_{2b}}$**:** "**Quantas marés altas existem por dia? E quantas marés baixas existem em cada dia? (maré alta é o nível mais alto de cada maré alta. Maré baixa é o nível mais baixo de cada vazante).** Esta é uma questão em que basta analisar-se o ostensivo gráfico, tabela de dados, para que os estudantes consigam compreender e encontrar a resposta. Todos os grupos chegaram à mesma resposta R_{2b}*:*$_{1/2/3...10}$◊*:* Duas marés altas e duas marés baixas. Nesse aspecto, percebemos que os grupos alcançaram o objetivo da questão, que é entender a regularidade e a quantidade de marés existentes por dia.

A tarefa seguinte foi a $\mathbf{Q_{2c}}$**: "Qual a amplitude média das marés no Porto de Aratu nesses dois dias? (a amplitude das marés em um dia é a diferença de altura da maré alta e da próxima maré baixa)"**. Como temos duas marés altas e baixas por dia, temos que calcular, inicialmente, a variação entre a primeira maré alta e a primeira maré baixa do dia; depois, calcular a diferença entre a segunda maré alta e a segunda maré baixa do dia, para que, ao final, consigamos calcular a variação média das marés no Porto em cada dia.

Os 10 grupos utilizaram como técnica o cálculo da variação de cada dia. Obtivemos três tipos de respostas.

Considerando a questão $\mathbf{Q_{2c}}$ como um tipo de tarefa, temos uma determinada técnica de resolução que mais se repetiu entre os grupos, especificamente cinco vezes, com os grupos 1, 3, 6, 7 e 9. A seguir, destacamos as respostas dos grupos 3 e 9, que representam a técnica utilizada.

Figura 63 – $R_{2c:9}$◊ que representa a resposta do grupo 9.

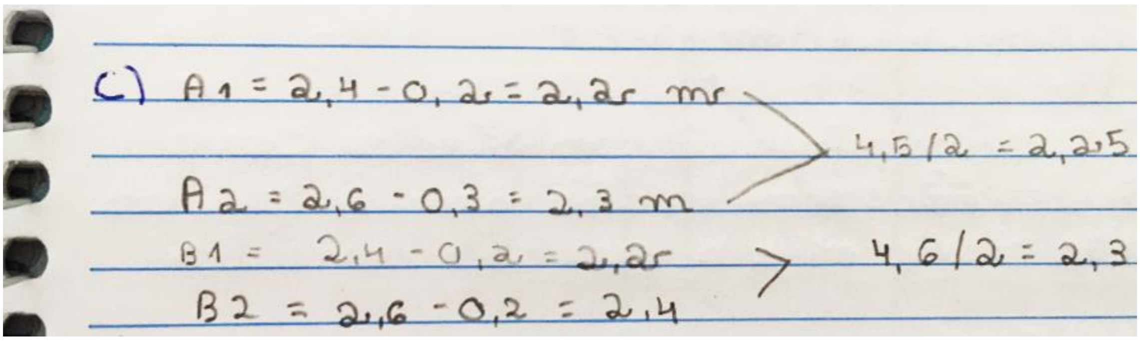


Fonte: a autora (2020).

De acordo com a resposta da figura 63, podemos perceber que há um cálculo implícito da variação entre as marés baixas e altas no dia, e, após ver a diferença entre a primeira maré alta e a primeira maré baixa do dia e a segunda maré alta e a segunda maré baixa do dia, o grupo calcula a amplitude média de cada dia, como previmos na análise *a priori*.

Já o grupo 3 demonstra o cálculo de cada amplitude da maré nos dois turnos, e depois realiza o cálculo médio da amplitude diária da maré, conforme a figura 64.

Figura 64 – $R_{2c:3}$◊ que representa a resposta do grupo 3.

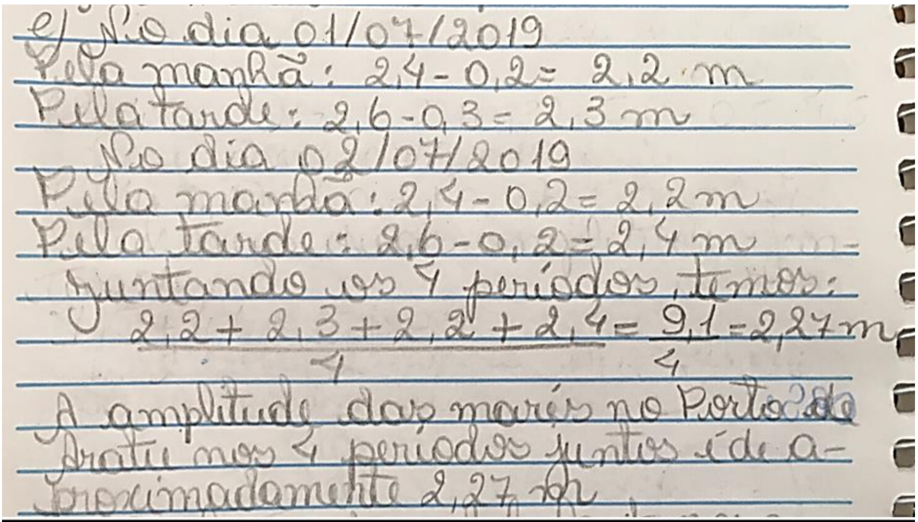


Fonte: a autora (2020).

O grupo três codificou os cálculos das variações das marés do dia 01/07 por A1 e A2 e as do dia 02/07 como B1 e B2. Observa-se que o grupo conseguiu lograr o desígnio da tarefa e encontrar a amplitude média das marés solicitada. As respostas dos grupos 6, 7 e 1 foram análogas às do grupo 3, obtendo também como resultado da amplitude média dos dias 01/07 e 02/07, respectivamente, 2,25 m e 2,3 m.

O segundo tipo de resposta obtida se repetiu nos grupos 2, 4, 8 e 10. Eles calcularam a variação entre a maré alta e baixa nos dois turnos, durante os dois dias, e, em seguida, calcularam a amplitude média entre os dois dias, ou seja, a média entre a amplitude do dia 01/07 e do dia 02/07. Podemos acompanhar na figura 65 a resposta do grupo 10.

Figura 65 – $R_{2c:10}$◊ que representa a resposta do grupo 10.



e) No dia 01/07/2019
Pela manhã: 2,4 - 0,2 = 2,2 m
Pela tarde: 2,6 - 0,3 = 2,3 m
No dia 02/07/2019
Pela manhã: 2,4 - 0,2 = 2,2 m
Pela tarde: 2,6 - 0,2 = 2,4 m
Juntando os 4 períodos, temos:
$\frac{2,2+2,3+2,2+2,4}{4} = \frac{9,1}{4} = 2,27\,m$
A amplitude das marés no Porto de Aratu nos 4 períodos juntos é de aproximadamente 2,27 m.

Fonte: a autora (2020).

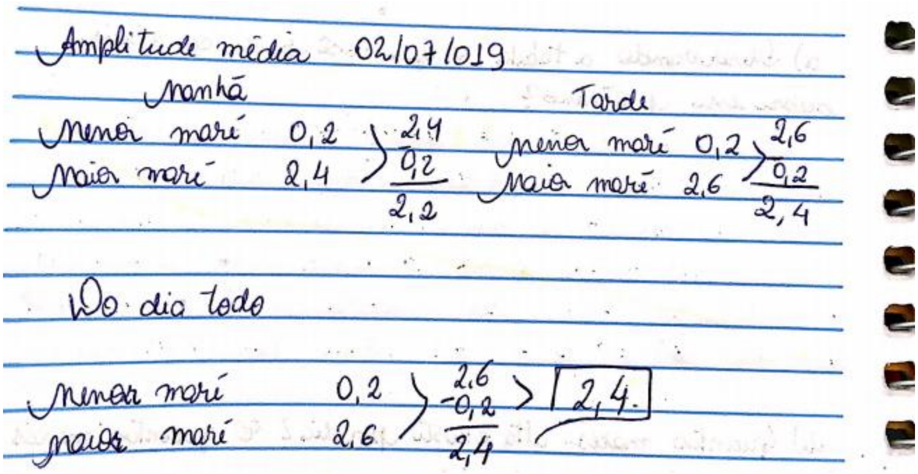
Conforme a figura 65, percebemos que o grupo 10 calculou igualmente aos grupos anteriores a variação média da amplitude de cada dia; porém, ao final, calculou a amplitude média dos dois dias, isto é, somou as amplitudes do dia 01/07 e 02/07, tirando a média.

Ao expor as respostas na turma, surgiu um debate entre os grupos a respeito de qual resposta estava correta, as apresentadas pelos grupos anteriores (1, 3, 6, 7 e 9) ou as expostas pelos grupos 10, 2, 4 e 8. Um dos alunos do grupo 3 levantou a seguinte hipótese: "Se a amplitude das marés em um dia é a diferença de altura da maré alta e da próxima maré baixa, e se temos duas marés altas e duas baixas, devemos calcular por dia e não tirar a média entre dois ou mais dias, pois à medida que calculamos dia a dia maior será a precisão dos cálculos".

Após a explanação do estudante do grupo 3, os demais discentes da turma concordaram com a hipótese, a saber, a de compreender a amplitude média das marés por dia. E assim validaram as respostas que calcularam a amplitude diária, e refutaram a resposta final do grupo 10.

O terceiro tipo de resposta foi a do grupo 5, que calculou a amplitude das marés no turno da manhã e depois no turno da tarde em cada dia. Em seguida, pegou a menor maré baixa do dia e a maior maré alta do dia e calculou a amplitude, considerando como a amplitude média o resultado desse cálculo. Observemos a figura 66, que contém o cálculo da amplitude média realizado pelo grupo no dia 02/07/2019.

Figura 66 – $R_{2c:5}$◊ que representa a resposta do grupo 5.



Fonte: a autora (2020).

Segundo a imagem, o grupo 5 não considerou os períodos manhã e tarde para a resposta final, calculando a amplitude do dia 02/07/2019 e sopesando apenas a menor maré baixa e a maior maré alta do dia. Podemos inferir que pode ser efeito da não compreensão da periodicidade do fenômeno, conduzindo, assim, à resposta apresentada.

Essa resposta do grupo 5, um aluno do grupo 3 levantou a discussão sobre periodicidade, levantando a hipótese que o fenômeno das marés é quase periódico, e por isso deveria ser calculado considerando a manhã e a tarde. Já os alunos do grupo 5, defenderam a ideia que por não ser um padrão específico na periodicidade, não consideraram. Mas, um dos alunos do grupo 2, mostrou que a variação é pequena, e quem tem sim um comportamento padrão, inclusive retomou as respostas discutidas nas sessões 1 e 2, afirmando que na pesquisa de fenômenos físicos periódicos as marés apareceram.

A partir da argumentação dos alunos do grupo 3 e 2, a turma optou em não validar a resposta do grupo 5, com a justificativa que desconsiderou conceitos importantes da questão.

A penúltima tarefa da atividade dois foi a **Q_{2d}: "Uma família quer realizar um passeio de barco de duas horas em alto-mar saindo da praia no dia 03/07/2019; qual será o melhor horário para a família não pegar a maré alta e nem baixa?".**

Nessa tarefa, tivemos seis respostas diferentes; organizamos no quadro 26 as respostas encontradas.

Quadro 26 – resposta da tarefa 2d.

Grupo	Horário	Código	Justificativa
1	5 às 9 h	R_{2d}:$_{1}$◊	No dia 01/07 as marés altas foram às 2h e 15h, enquanto as marés baixas foram às 8h e às 21h. Já no dia 02/07 as marés altas foram às 13h e 16h, enquanto as mais baixas foram às 9h e 22h. Então, provavelmente, no dia 03/07 as marés altas serão às 4h e 14 h, enquanto as baixas serão às 10h e 23h. O ideal, também pelo horário, seria que a viagem fosse entre 5h e 8h, pois a partir das 10h a maré estará baixando e a viagem dura cerca de 2h.
2	13h às 15h	R_{2d}:$_{2}$◊	Esse é o melhor horário por ser o momento em que a maré está enchendo.
3/6/7/8	12h às 14h30min	R_{2d}:$_{3/6/7/8}$◊	A média das marés do dia 1 fica entre às 10h e 13h; já a do dia 2 fica entre 11h e 14h; aumentando em 1 hora por dia. Seguindo essa lógica, no dia 3 seria entre 12h e 13h.
4	10h às 12h	R_{2d}:$_{4}$◊	Porque é o horário em que a altura da maré tem um valor médio, nem muito alto, nem muito baixo.
5	8h às 9h	R_{2d}:$_{5}$◊	Pela variação da maré dos outros dias. E nesse horário ela não estará tão alta, nem tão baixa.
9/10	6h às 8h	R_{2d}:$_{9/10}$◊	Como um período de maré é igual a 6 horas, o indicado é que, para se pegar uma maré nem alta e nem baixa, saia-se 2 horas após o período da maré. Como a maré alta que ocorre pela manhã possui um nível mais baixo que a da tarde (baseado nos registros dos dias 01 e 02/07), indica-se que a família vá passear às 6h da manhã.

Fonte: a autora (2020).

Conforme a análise *a priori*, dois grupos chegaram à resposta destacada na análise. Mas, considerando os diferentes fatores, horário melhor, instabilidade da maré, entre outros, tivemos respostas distintas. Isso realça os olhares divergentes entre os grupos para avaliar uma mesma situação.

Desse modo, por avaliarmos que a melhor resposta vai depender da experiência pessoal do indivíduo, por exemplo: se gosta de acordar cedo; pegar um sol mais forte; se gosta de navegar ao entardecer; ou ao anoitecer, os estudantes optaram por validar todas as respostas.

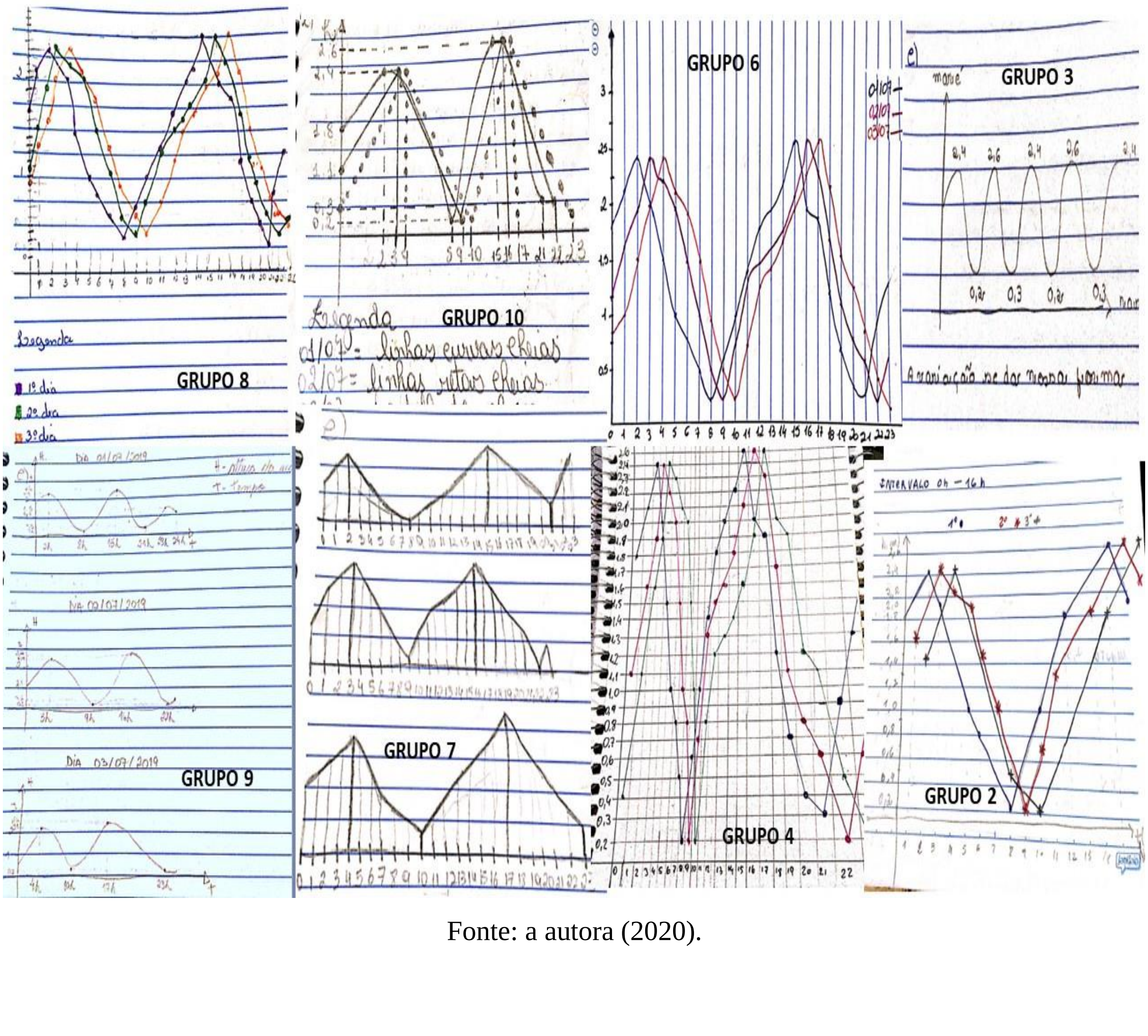
A última tarefa da atividade dois foi a **Q_{2e}: "Construa uma figura, utilizando o GeoGebra, que permita apreciar as alturas da água no Porto de Aratu durante os dias 01, 02 e 03 de julho de 2019"**. Nessa questão, os estudantes resolveram usar o ambiente papel e lápis para fazer o esboço do desenho e construir a figura escolhida no GeoGebra. O objetivo dessa tarefa foi observar qual modelo eles enxergavam na situação escrita, oscilatório ou circular.

Os 10 grupos apresentaram o modelo oscilatório, por meio de gráficos. As variações entre as respostas foram: alguns grupos fizeram cada gráfico em um plano cartesiano, e outros em um mesmo plano, a fim de observar as similaridades. Nenhum grupo expôs o modelo algébrico para esboço do gráfico, guiando-se pelos valores das marés e pelo horário.

Relevante frisar que todos os grupos primeiros traçaram um esboço em papel e lápis no caderno para, na sequência, fazerem no GeoGebra. Ou seja, percebemos nessa tarefa a necessidade ainda forte, por parte dos estudantes, em ter que esboçar por meio de ostensivos gráficos no ambiente papel e lápis, para depois transpor para o meio computacional.

A seguir, temos a figura 67, com a imagem dos gráficos de 8 grupos no ambiente papel e lápis. Os gráficos dos grupos 5 e 1 foram iguais aos do grupo 2, e por isso não estão na figura.

Figura 67 – Gráficos esboçados no ambiente papel e lápis.

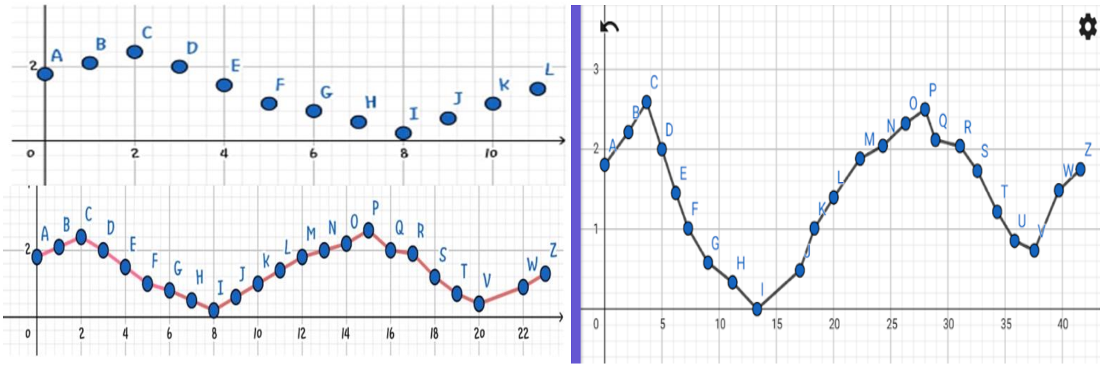


Fonte: a autora (2020).

De acordo com a figura, temos o modelo oscilatório predominante em todos os grupos. Constatamos que o grupo 9 apresenta uma curvatura no gráfico, dando a ideia de uma senoide, expondo um gráfico para cada dia, sendo cada um em um plano cartesiano. Já o grupo 3 esboça num único gráfico, de forma contínua, as variações das marés altas e baixas nos dias solicitados. O grupo 7 explana o desenho similar ao do grupo 9. E os demais grupos traçam três linhas de gráficos para representar cada dia em um mesmo plano cartesiano, respeitando o fenômeno quase periódico e mostrando a similaridade entre as possíveis curvas do gráfico.

Depois de esboçar os gráficos no ambiente papel e lápis, os estudantes traçaram os gráficos no GeoGebra, nos computadores e celulares. A grande dúvida entre alguns grupos era como fazer uma figura, no caso um gráfico, sem ter uma lei de formação. Acompanhando as discussões do grupo, os discentes utilizaram o plano cartesiano e linhas de grade no GeoGebra e, em seguida, marcaram os pontos. Contemplemos na figura 68 o percurso de construção do gráfico do grupo 8.

Figura 68 – Esboço da figura construída pelos grupos 08 e 07, respectivamente.



Fonte: a autora (2020).

O desafio para os alunos foi como eles ligariam os pontos criados no GeoGebra. O grupo, após discussão, optou por ligá-los com a ferramenta segmento de retas, conforme podemos observar na figura 68, a qual tem a variação da maré de um dia. A dúvida do esboço foi unânime entre os grupos, porém deixamos eles explorarem as ferramentas e descobrirem a melhor maneira de traçar o gráfico que representava o fenômeno em foco.

O grupo 9 utilizou o GeoGebra no celular e esboçou a figura de um gráfico. Vale salientar que o grupo citado foi o que, no ambiente papel e lápis, fez três curvas suaves em três planos cartesianos distintos para representar a oscilação das marés em cada dia; no GeoGebra apresentou em um mesmo plano cartesiano o gráfico (Figura 69).

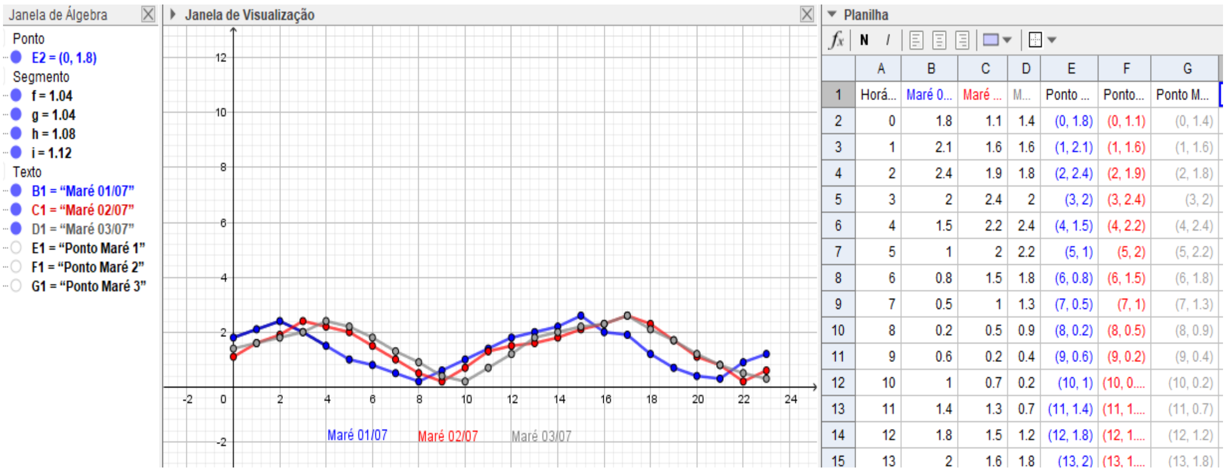
Figura 69 – Gráfico construído pelo grupo 9.

Fonte: a autora (2020).

Percebemos que o grupo conseguiu utilizar o *software* GeoGebra como uma ferramenta tecnológica capaz de auxiliar na compreensão e análise do fenômeno estudado.

Os demais grupos realizaram gráficos similares, mas no computador. A seguir, explanaremos a resposta do grupo 4, que se repetiu nos outros grupos.

Figura 70 – Gráfico construído pelo grupo 4.

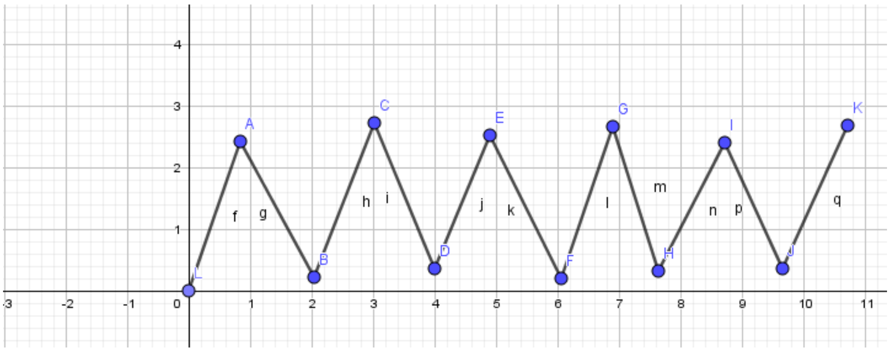


Fonte: a autora (2020).

Os grupos 1, 2, 4, 5, 6, 7 e 10 construíram seus gráficos por meio dos valores da tabela demonstrada, inferindo os valores do dia 03/07 a partir de um padrão que eles encontraram nos dias 01/07 e 02/07. Constatamos que, com o GeoGebra, o gráfico se aproxima do formato de uma curva senoidal. Esse fato é importante, pois começa a despertar nos estudantes o saber matemático que está em jogo na construção final da atividade.

O grupo 3, que expôs um gráfico contínuo com todas as marés, altas e baixas, dos três dias em uma mesma linha, reproduziu a figura também no GeoGebra. Verifiquemos a figura 71:

Figura 71 – Gráfico construído pelo grupo 3.



Fonte: a autora (2020).

O grupo representou as marés altas e baixas no plano e em seguida ligou os pontos. Ao socializar o resultado com a turma, o grupo externou que tentou fazer pelo caminho poligonal, mas não deu certo, então optou por um segmento de retas ligando os pontos. Ao explanar seu ponto de vista, alguns integrantes de outros grupos questionaram o porquê de o grupo não ter feito um gráfico para cada dia, já que eles utilizaram a altura das marés como ordenada e o horário como abscissa, não tendo, neste âmbito, como representar os dias 01, 02 e 03 no gráfico. Após essa colocação, o grupo afirmou que não tinha se atentado a essa informação, concordando com os demais grupos nas representações gráficas.

É interessante destacar, que apesar de ter reconhecido dificuldades para representar por meio de uma figura, no caso escolhido gráficos, por não possuir uma lei de formação, nenhum dos estudantes optaram por tentar esboçar uma lei de formação, para construção. Mas, percebemos, que a partir dos fenômenos das marés e suas variações, eles já enxergam o modelo oscilatório como uma forma de representar. Ratificamos isso, por meio dos ostensivos gráficos apresentados por eles.

A seguir apresentamos na tabela 5 a noções teóricas da TAD levantadas pelos estudantes na exploração do PEP nessa sessão.

Tabela 5 – Noções teóricas evocadas pelos estudantes na sessão 3

Noções teóricas	**Respostas**
Ostensivos mobilizados:	Na exploração da sessão 03, os estudantes levantaram **ostensivos discursivos e escriturais** nas respostas a atividade das marés; Evocaram também **ostensivos gráficos,** em especial na questão Q_{2e}.
Não-ostensivos evocados:	Variação da maré; a ideia de uma curva, algo que se aproxime de uma senoide é esboçada, porém sem um modelo algébrico, apenas o gráfico;
Dialéticas evocadas:	Individual e coletiva; Perguntas e respostas.
Tipo de tarefa por organização matemática exploratória:	Construir modelos matemáticos dinâmicos para estudo por meio do software; Analisar e calcular as variações e amplitudes das marés;
Tipo de tarefa por organização matemática contextualizada:	Escolher um modelo matemático para representar o fenômeno físico estudado; Analisar o melhor horário de estabilidade das marés para um passeio de barco, considerando os fatores naturais envolvidos na situação;

Fonte: a autora (2020)

Observa-se com base na tabela 05 que os estudantes levantaram noções teóricas da TAD, conforme esperávamos por meio da exploração da atividade apresentada na sessão 3, e assim conseguimos observar os ostensivos e dialéticas mobilizados por eles no momento de resolução e socialização das respostas.

Nessa sessão de estudo, a professora da disciplina vem mediando a discussão dos grupos, e também age nas institucionalizações das respostas junto aos estudantes. É a professora que vai mediar o processo de validação ou não das respostas dos grupos.

Destacamos o quão pertinente é a fase de socialização e discussão dos resultados, pois permite que os estudantes apresentem seu ponto de vista e os demais opinem, fortalecendo ou auxiliando na reflexão das estratégias solicitadas.

4.2.1.4 Sessão 4

A sessão 4 ocorreu no dia 06/09/2019 com as duas turmas juntas em uma aula extra no horário das 10h30 às 12h30, porém não conseguimos finalizar a socialização, e terminamos no dia 11/09/2019 cada turma em seu horário de aula. Nesta seção, começamos distribuindo a atividade 3, a qual está relacionada à roda-gigante do festival da virada de Salvador – BA. A escolha por essa roda-gigante específica, por ser conhecida por boa parte dos alunos e estar no estado no qual todos os educandos residem, trouxe uma melhor familiaridade.

A atividade elenca as seguintes informações: na festa de *réveillon* da cidade de Salvador há uma roda-gigante de 40 m de diâmetro e o centro está localizado a 22 m do chão. A roda sempre gira uniformemente na mesma direção. No início da jornada, a cabine P está no ponto mais baixo e Carlos estava nessa cabine. Ele faz uma viagem de 3 voltas que dura 30 minutos. Com base nessas informações, responda os questionamentos abaixo.

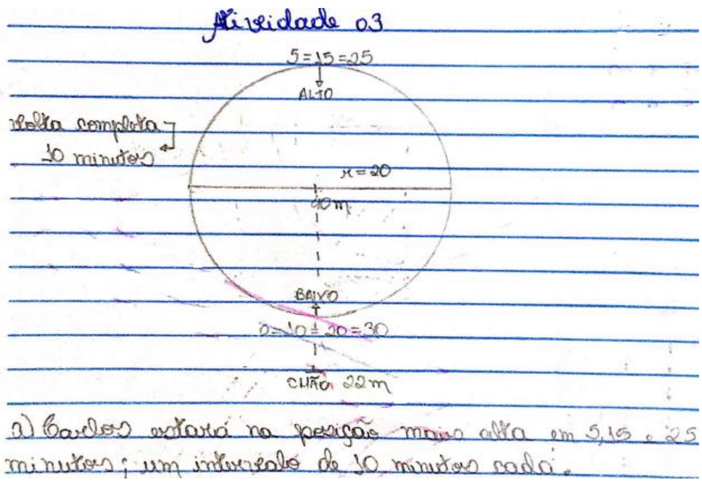
A primeira tarefa dessa atividade foi descobrir quando Carlos está na posição mais alta. Denominamos de $\mathbf{Q_{3a}}$**:** "**Quando Carlos está na posição mais alta?".** A seguir, exporemos as respostas encontradas pelos grupos.

Obtivemos duas respostas distintas. A primeira resposta se repetiu nos grupos 3 e 7, $\mathbf{R_{3a}}$**:**$_{3\,/\,7}$ ◊: "Como uma volta completa equivale a 10 minutos, se a cabine partir do ponto mais baixo, ela atingirá o ponto mais alto em 5 minutos, já que a volta completa equivale a 10 minutos".

Os grupos 3 e 7 consideraram apenas a primeira volta da roda-gigante, não percebendo que o movimento é periódico e se repete a cada dez minutos, e como o passeio dura três voltas, teríamos três momentos em que Carlos estaria no ponto mais alto.

Já os demais grupos, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, conseguiram compreender a periodicidade do movimento da roda-gigante e encontraram três valores nos quais Carlos estaria no ponto mais alto, em 5, 15 e 25 minutos. Então, temos $\boldsymbol{R_{3a}}$**:**$_{1/2/4/5/6/8/9/10}$◊: "Ele está na posição mais alta em 5 min, 15 min e 25 min". A seguir, destacamos a resposta do grupo 6, pois, além de apresentar os três momentos em que Carlos estaria no ponto mais alto, o grupo traz uma figura para ilustrar a explicação.

Figura 72 – Resposta do grupo 6.



Fonte: a autora (2020).

O grupo 6 desenhou um círculo para simular a roda-gigante, marcando os pontos côngruos, ou seja, o grupo marca no círculo o intervalo de tempo em que a cabine de Carlos passa pelo mesmo lugar. A partir dessa interpretação, o grupo concluiu os três momentos em que Carlos estará no ponto mais alto. Podemos inferir que o grupo já explana a ideia do ciclo trigonométrico, delineando os pontos que se repetem e determinando o período em que se repete o movimento.

Um fato que merece destaque, é a dialética individual e coletivo, pois no momento que os estudantes socializam seus resultados, inicia-se uma discussão, que por meio de perguntas e respostas aos grupos que estão socializando, toda a classe cresce. Podemos observar o interesse dos estudantes em ter sua resposta validada pela classe, no quadro 27.

Quadro 27 – Trecho de transcrição turma TP01 e TP02 sessão 4.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:00:49 00:00:56	Aluno 1	Então o do meu grupo e do grupo de “nome do aluno” estão incompletas. Vou completar para não invalidar minha resposta.	Aluno do grupo 7 fala do aluno do grupo 3.

Fonte: a autora (2020)

Nesse trecho em destaque da transcrição, após a apresentação da resposta de um dos grupos que deram os três valores, o aluno 1 teve a preocupação em corrigir sua resposta para que a mesma não fosse invalidada. Uma vez, que ele percebeu, que só tinha considerado a primeira volta da roda-gigante. Destacando assim, a importância da socialização das respostas, para validação dos argumentos e praxeologias construídas e/ou utilizadas por cada grupo.

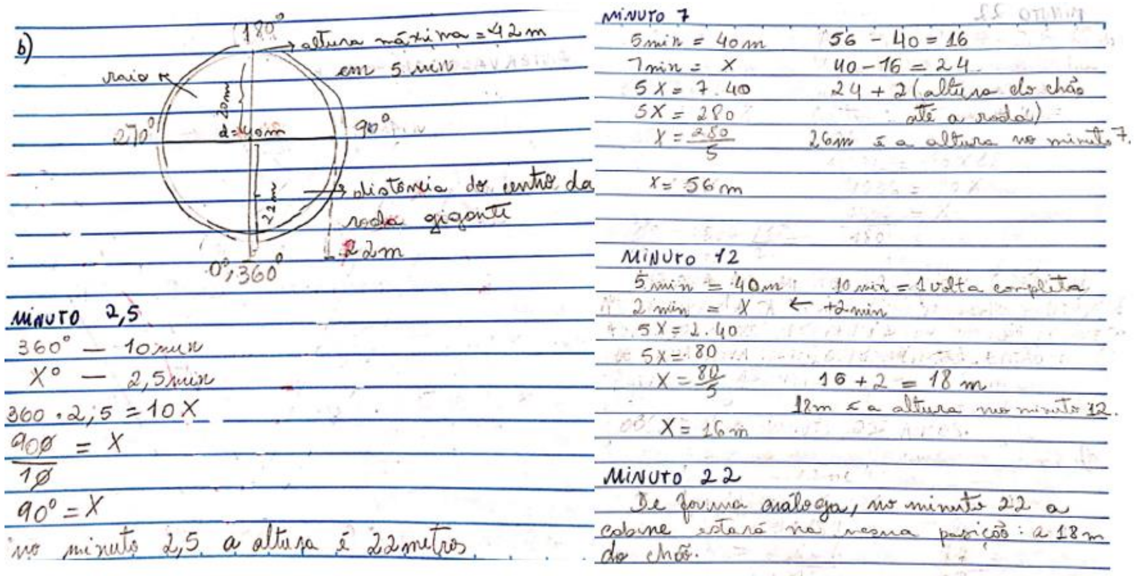
A tarefa seguinte da atividade 3 foi a **Q_{3b}: “Calcule a altura da cabine de Carlos no solo após 2,5 minutos de viagem, após 7 minutos, após 12 minutos e após 22 minutos”.** Os grupos responderam a tarefa sem utilizar nenhuma das estratégias levantadas na análise *a priori*, que foram o modelo circular e o oscilatório. Os grupos optaram por aplicar regra de três e encontrar as alturas solicitadas.

Os 10 grupos encontraram valores similares: para 2,5 minutos 22 metros; 7 minutos 26 metros; e 15 e 25 minutos, por serem côngruos, 18 metros.

Das atividades apresentadas do PEP, essa foi a que gerou mais discussões. No momento 2,5 minutos não houve muitas dificuldades, porém quando alterou para 7 minutos, 12 minutos e 22 minutos, as formas de resolução geraram discussões nas duas turmas. Destacamos três formas de resolução que apareceram entre os grupos.

A técnica de resolução mais predominante foi a $\boldsymbol{R_{3b}}$**:**$_{1/2/3/4/5/6/7}$◊: “Resolver utilizando regra de três simples, associando os minutos com a altura”. Essa técnica se repetiu em sete grupos. Observemos, na figura 73, o recorte da resposta de um dos grupos.

Figura 73 – Resposta $\boldsymbol{R_{3b}}$**:**$_{2}$ do grupo 2.



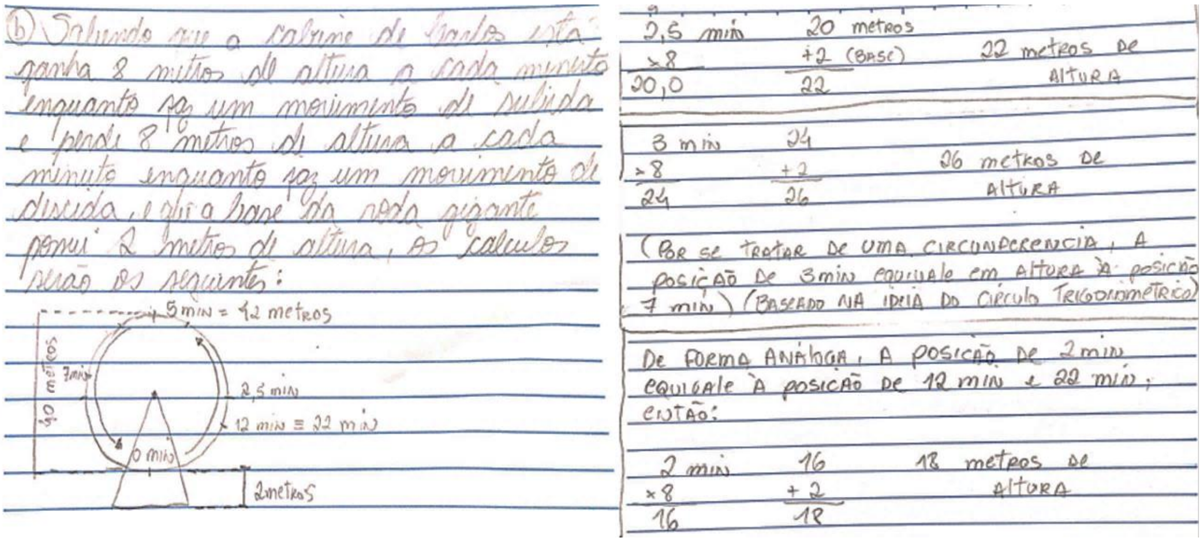
Fonte: a autora (2020).

O primeiro grupo desenha a roda-gigante e divide em graus, marcando alguns pontos, como 0º, 90º, 180º, 270º e 360º, fazendo certas alterações no posicionamento dos ângulos. Em seguida, calcula 2,5 minutos em graus, por uma regra de três. Nos valores seguintes o grupo já relaciona a altura em metros com o tempo em minutos, não utilizando mais as medidas em graus.

Percebe-se que o grupo associa a roda-gigante ao círculo trigonométrico, relacionando as medidas da altura e tempo com as medidas em grau do círculo.

A outra técnica de resolução empregada foi exposta pelos grupos 9 e 10. $\boldsymbol{R_{3b}}$**:**$_{9/10}$**:** O grupo relaciona quantos metros por minuto Carlos avança na subida, e quantos ele perde na descida. Na sequência, calcula os valores das alturas solicitadas nos intervalos de tempo determinados. Podemos acompanhar na figura 74.

Figura 74 – Resposta $R_{3b:9}$ do grupo 9.



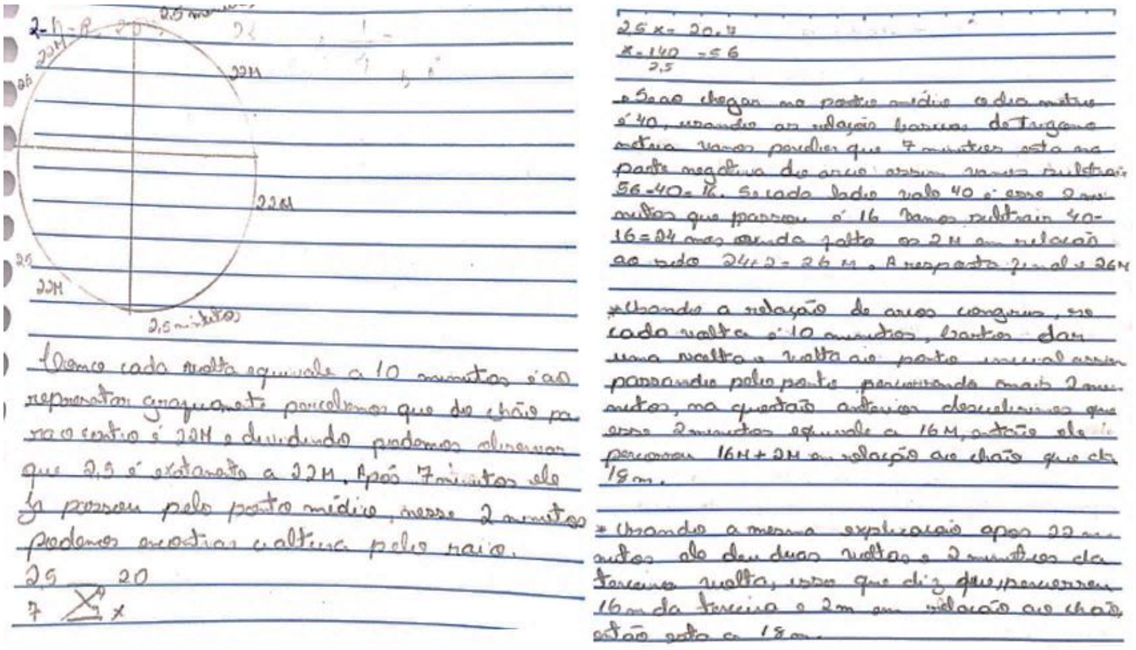
Fonte: a autora (2020).

Os grupos 9 e 10 responderam utilizando a estratégia de quantos metros por minutos Carlos ganha ou perde durante a subida e descida, respectivamente. A partir dessa informação, os grupos calcularam, por meio de uma operação de multiplicação, o tempo vezes a quantidade por minuto, que deu 8 metros; em seguida, acrescentaram os dois metros que representam a distância do solo ao ponto mais baixo da roda-gigante.

A outra técnica de resolução empregou a ideia de ponto médio e alguns conceitos da trigonometria. A técnica $R_{3b:8}$: "Identificar o ponto médio e perceber o diâmetro; depois, aplicar as relações de arcos côngruos, ver se o sentido é positivo ou negativo e calcular a altura nesse momento. Após o cálculo, acrescentar 2 metros ao valor encontrado referente à distância do solo ao ponto mais baixo da roda-gigante (Figura 75).

Conforme a técnica esboçada, observaremos, mais uma vez, que o grupo empregou noções de trigonometria para estudo na situação, e com base em seus conhecimentos prévios sobre o assunto traçou uma estratégia de resolução. Podemos inferir que, por intermédio do PEP, os licenciandos começaram associar os conhecimentos precedentes adquiridos com a questão geratriz apresentada. Desse modo, inicia-se um desenho para compreensão das funções seno e cosseno por meio de um PEP integrado ao GeoGebra. Verifiquemos a figura 75.

Figura 75 – Resposta $\boldsymbol{R_{3b:8}}$ do grupo 8.



Fonte: a autora (2020).

Observamos conforme as respostas dos estudantes apresentadas, eles não utilizaram nem o modelo oscilatório e nem o circular. Todos os grupos se basearam em um modelo de proporcionalidade. No modelo adotado pelos estudantes não consideraram que a proporcionalidade deveria ser entre o arco e o tempo ou a medição dos ângulos do centro. Assim, apenas realizaram uma proporção entre a abscissa e a ordenada, considerando o eixo das abscissas sendo o tempo e o eixo das ordenadas sendo a altura.

Essa associação de alguns estudantes, não condiz com a modelação matemática do problema, uma vez que não são observadas informações relevantes como: para proceder o cálculo da altura, é necessário considerar a congruência módulo orientação do arco dentro do intervalo [0, 180º] = [0, π]. Ou seja, a congruência módulo orientação do arco (positivo, se vai no sentido anti-horário; negativo se vai no sentido horário), isto é, com respeito a altura em relação ao solo deve-se traçar um eixo de simetria perpendicular ao solo para enxergar o círculo e seus respectivos pontos congruentes. A segunda, é congruência módulo 2×π×R, isto é, completada uma volta é como se tivesse "zerado" o comprimento. Lembrando de considerar a velocidade constante.

O grupo 2, que representou as respostas dos grupos 1, 3, 4, 5, 6 e 7, para calcular a altura da cabine P no instante 2,5 minutos, associou a roda-gigante ao círculo trigonométrico, encontrando o valor do ângulo que corresponde ao tempo 2,5 min por meio de regra de três, como observamos na figura 73, chegando a 90º e depois associou sendo ¼ de volta o que equivale a altura 22 metros. Mas, nos demais tempos, 7, 12 e 22 os estudantes já não consideraram essa estratégia, e resolveram realizando regra de três associando o tempo e a altura.

Já o grupo 9 e 10 ele discretiza o problema, isto é, ao invés de trabalhar com diâmetro, comprimento, raio, ângulos, os estudantes consideram a posição da cabine encaixada na roda-gigante, calculando o tempo que a cabine leva para sair de uma posição para outra. Nesse sentido eles associam quantos metros a cabine de Carlos ganha ou perde por minuto, na rotação da roda-gigante.

O grupo 8 aparenta ter conhecimentos a respeito de elementos da geometria e trigonometria, associando arcos côngruos, ponto médio, e o sentido positivo e negativo do círculo trigonométrico. Na resolução, o grupo consegue encontrar a resposta correta para 2,5 minutos, mas ao calcular para o tempo 7 minutos ele associa que a cabine já passou pelo ponto médio e resolve encontrar a altura utilizando o raio. Assim, realiza uma regra de três, considerando o raio no tempo 2,5 minutos igual a 20 metros e tentando descobrir o valor do raio para o tempo 7 minutos. O que invalida o modelo, pois o raio da roda gigante não vai variar. E acaba realizando um cálculo similar ao dos grupos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 para os demais tempos.

Ao socializar as respostas do grupo, inicia-se uma discussão a respeito da validade das mesmas. Na condição de professora, solicitei as três respostas que apareceram para analisarmos individualmente. A fim de validarmos ou refutarmos as mesmas. A seguir temos trechos do protocolo de transcrição da aula, para podermos compreender a discussão no momento de socialização dos resultados. Esses trechos serão apresentados em dois quadros, um referente a turma TP02 e depois outro referente a turma TP01.

Na turma TP02, um aluno do grupo 8, no momento de socialização da resposta, ele contou que tinha pensando em resolver de outra forma. Observe o trecho no quadro 28.

Quadro 28 – Trecho de transcrição turma TP02 sessão 4, anexo F.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:07:48 00:08:50	Aluno 11	Ai, depois disso descer (XXX) o excedente (XXX) equivale a um minuto, subtrai, deu dezesseis, aí quarenta menos dezesseis é vinte e quatro, é isso aí. Me fala esse negócio ai de escrever no caderno é um negócio que eu pensei quanto estava (XXX) só que eu desisti, porque é muito trabalhoso, sobre esse negócio do círculo trigonométrico, eu percebi, que se eu... associasse ao círculo trigonométrico, a altura do ponto seria no caso, como se fosse o seno daquele ponto se eu fizesse um ângulo na altura do centro, é tinha que subtrair noventa	(XXX) esse símbolo significa que passou um veículo que fez ruídos que não foi possível compreender o termo. Grupo 8.

		graus para chegar aqui, ai seria o seno do ponto mais, altura mais (XXX).	

Fonte: a autora (2020)

Observamos nesse trecho em destaque, que o estudante do grupo 8, apresenta indícios do modelo circular. Nesse momento, a professora aproveita para levantar uma discussão a respeito das respostas apresentadas. Afirmando que a regra de três aplicada por alguns grupos, considerando nos eixos da ordenada e abscissa, respectivamente, altura e tempo, não dá conta de responder o que se pede. E argumenta que há modelos matemáticos que podem ser utilizados, porém não foram utilizados pelos grupos. A pedidos dos estudantes a professora, apresenta a resolução dos 7 minutos no modelo circular, a partir da fala que o aluno do grupo 8 fez, no intuito de destacar as repostas a serem validadas e as refutadas pela turma, conforme entendimento do fenômeno.

Já na turma TP 01, uma das alunas questionaram o porquê alguns grupos utilizaram o ângulo para relacionar com o tempo e encontrar a altura no tempo 2,5, e nos demais tempos essa informação foi desprezada. Acompanhamos no quadro 29.

Quadro 29 – Trecho de transcrição turma TP01 sessão 4, anexo E.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:19:31 00:19:42	Aluna 10	Eu achei, que por exemplo o grupo 2, deveria utilizar a noção do ângulo na proporcionalidade nos demais valores do tempo. Mas eles só utilizaram no 2,5. Pois assim acho que ficaria melhor a resposta, confirmando a figura do ciclo desenhado por eles. Acho que essa proporcionalidade não está certa, não é professora?	
00:19:42 00:19:43	Professora	O que vocês acham?	
00:19:43 00:19:51	Aluna 2	Nós do grupo 2, pensamos inicialmente, mas percebemos que ficaria mais fácil se associarmos a ordenada altura com o a abscissa tempo. Assim não precisaria calcular cada ângulo.	
00:19:52 00:20:22	Aluna 8	Mas assim você não está considerando como algo circular, função/círculo. Acho que pela figura do geogebra que meu grupo construiu, esse modelo está errado, pois deveria associar com o ângulo ou arco. A relação seria o tempo com a medida do arco ou ângulo e assim encontraríamos o valor da altura, e para isso teríamos que calcular o seno. E até eu, calculei errado a forma de achar o tempo 7,5 e 12. Acho que é assim, concorda professora?	
00:20:23 00:20:25	Professora	Os demais grupos querem discutir a resposta do colega?	
00:20:25 00:20:37	Aluna 5	Quando fiz o esboço para o geogebra, dividi também em ângulos. Mas esqueci de associar isso as questões anteriores. Percebo que as questões se completam, nós que não percebemos isso. Acredito que podemos utilizar a ideia da aluna 8.	

00:20:37 00:20:42	Aluno 7	Professora como poderíamos resolver utilizando os ângulos, fiquei curioso. A senhora pode fazer?	
00:20:43 00:22:36	Professora	Como vocês apresentaram as respostas de vocês, agora vamos discutir um pouco. Temos que a regra de três aplicada altura e tempo, não responde o que se pede. Podemos utilizar dois modelos matemáticos, vou mostrar o circular que é o que apareceu um pouco nas discussões de vocês. Temos que, se associarmos 360° a 10 minutos (volta completa) podemos descobrir quantos graus temos em 1 minuto, que é 36°. Como o tempo 2,5min todos encontraram sem dificuldade, vamos utilizar o modelo circular para descobrir a altura em 7 minutos. Utilizando um modelo proporcional ou regra de três descobrimos que o ângulo que equivale a 7 minutos é 252°. Traçando no círculo trigonométrico um triângulo retângulo POD do ponto P em 7 minutos, o ponto O no centro da roda gigante e o ponto D no eixo das abscissas paralelo ao ponto 7,5 minutos, que equivale a 270° no ciclo trigonométrico que representa a roda-gigante. Então temos que o ângulo desse triângulo retângulo sendo 18° que é a diferença entre 270° (7,5 min) – 252° (5 min) = 18°, ou seja, o valor do ângulo de 0,5 minutos. Como temos um triangulo retângulo, então vale a relação sen $\theta = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$, sendo o raio da roda-gigante igual a 20 metros e sen 18º= 0,309 então sen 18° = $\frac{x}{20}$,<=> 0,309 = $\frac{x}{20}$, então x = 6,18 m. E como a distância entre os tempos 2,5 minutos e 7,5 minutos são iguais, em relação ao solo, temos que a distância de P no instante 7 minutos é: $h_{7min} = h_{2,5min} + x = 22 + 6,18 = 28,18$ m. Estão entendendo?	
...	...	...	
00:23:21 00:23:36	Aluna 9	Mas não é tão fácil para percebermos, pois estamos acostumados, a associar dois valores e associar um ao eixo x (abscissa) e o outro ao eixo y (ordenada), e não analisar se pode ter outra relação. Mas essa forma de resolver não é difícil e se encaixa com o desenho construído no GeoGebra da gente.	

Fonte: a autora (2020)

Conforme o trecho da transcrição acima, na socialização das respostas, uma das alunas questiona a relação com ângulo utilizada anteriormente por um determinado grupo. A partir desse momento, inicia-se a discussão da validade ou não, das respostas utilizadas. E com base nos argumentos levantados, a professora intervém, resolvendo a questão pelo modelo circular, e refutando as respostas incorretas.

Verificamos que a professora teve que intervir nas duas turmas, por solicitações dos alunos, à medida que eles começaram a descobrir os possíveis erros levantados e/ou a curiosidade sobre as discussões no momento de socialização das respostas. E assim, ela apresentou o modelo circular, de modo que eles compreendessem o que está em jogo na proporcionalidade da questão. Um fato que merece destaque é o uso do modelo circular pela professora, pois foram os que os estudantes começaram dar indícios para resolução da atividade, e não uma escolha da mesma.

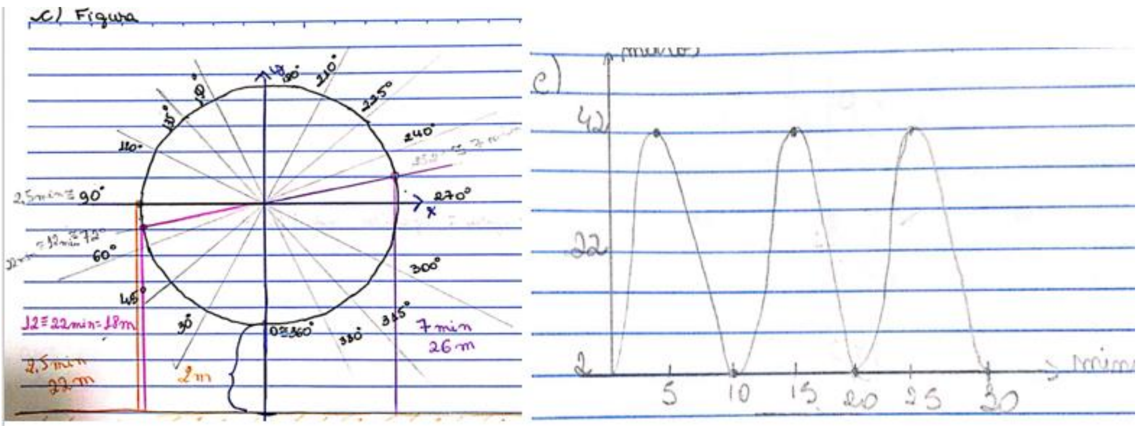
Assim percebemos, que o meio contendo o GeoGebra, possibilitou uma reflexão aos estudantes, no momento do debate das resoluções. A partir do momento que iniciou a discussão sobre as respostas dos grupos, alguns estudantes lembraram dos ostensivos gráficos construídos no software, e perceberam a diferença nas respostas apresentadas.

O interessante, é que os estudantes, após compreender o modelo circular, associa a figura construída por eles no GeoGebra, ressaltando a potencialidade desse ostensivo para o entendimento do saber matemático.

A tarefa seguinte foi denominada de $\boldsymbol{Q_{3c}}$: "**Construa uma figura utilizando o GeoGebra para apreciar as alturas da cabine P durante as três voltas da viagem".** Nessa tarefa, novamente alguns grupos optaram por realizar o desenho da figura no ambiente papel e lápis para, em seguida, elaborar no GeoGebra.

No primeiro grupo houve uma divergência entre dois membros; dessa maneira, escolheram explanar dois modelos distintos no ambiente papel e lápis, o oscilatório e o circular (Figura 76).

Figura 76 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:5}}$ do grupo 5.



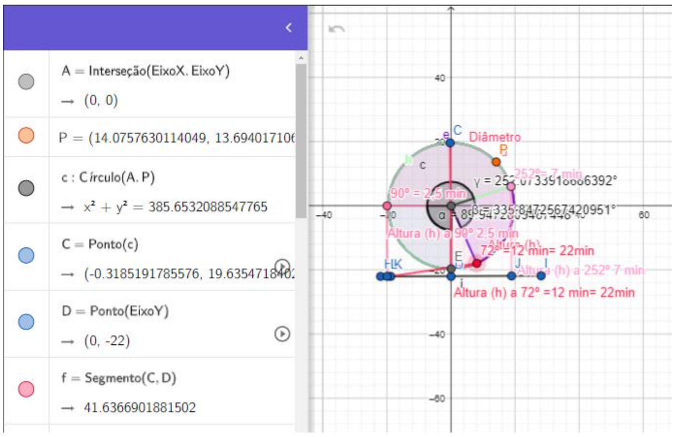
Fonte: a autora (2020).

O grupo discutiu que ambos os modelos representam as voltas da viagem. Percebemos que o grupo abordou o modelo circular, comparando-o ao ciclo trigonométrico, e o oscilatório para representar as voltas. De acordo com o objetivo da atividade, entendemos que o grupo 5 alcançou o que esperávamos, a saber, construir os dois modelos. Podemos concluir que a autonomia do PEP permitiu que os estudantes discutissem estratégias diferentes, de modo a validar os modelos encontrados.

Um fato interessante, é que no círculo trigonométrico desenhado pelo grupo houve uma rotação nos pontos, ou seja, como a roda-gigante começa na parte mais baixa, o grupo realizou uma adaptação no círculo, substituindo o ponto 270º por 0º e 360º, rotacionado 90º a menos em cada ponto. Esse fato se repetiu em todos os grupos que utilizaram o modelo circular, em radianos ou em graus.

Contudo, ao abordar no GeoGebra, o grupo optou por realizar um modelo circular para melhor representar o desenho (Figura 77).

Figura 77 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:5}}$ do grupo 5 no GeoGebra.

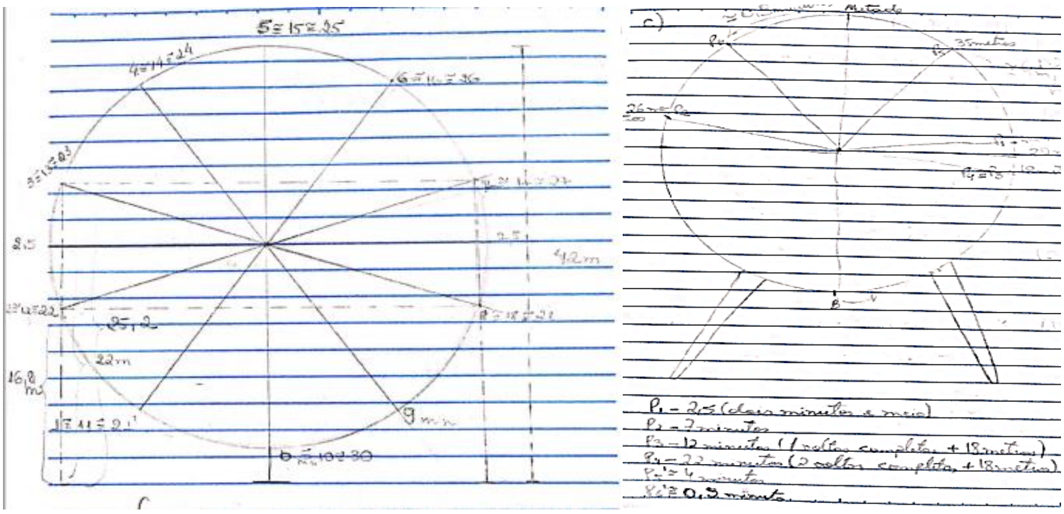


Fonte: a autora (2020).

O grupo, ao realizar o modelo, respeitou as medidas de diâmetros e raios, porém optou em trazer o centro na origem, não abordando a realidade apresentada na questão. Podemos inferir que isso ocorre devido ao hábito de realização de gráficos e construções utilizando-se a origem. Nesta esfera, ao se depararem com uma situação distinta, os estudantes decidiram por fazer adaptações que os deixassem mais confortáveis. A figura construída pelo grupo foi interativa, à medida que mexiam alguns pontos, realizavam uma trajetória circular, semelhante a um passeio na roda-gigante.

Os grupos 6 e 7 escolheram trazer no ambiente papel e lápis a figura do modelo circular. Exporemos a seguir a figura 78 que representa o modelo circular dos grupos 6 e 7.

Figura 78 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:6}}$**:** do grupo 6 e $\boldsymbol{R_{3c:7}}$**:** do grupo 7, respectivamente, no ambiente papel e lápis.

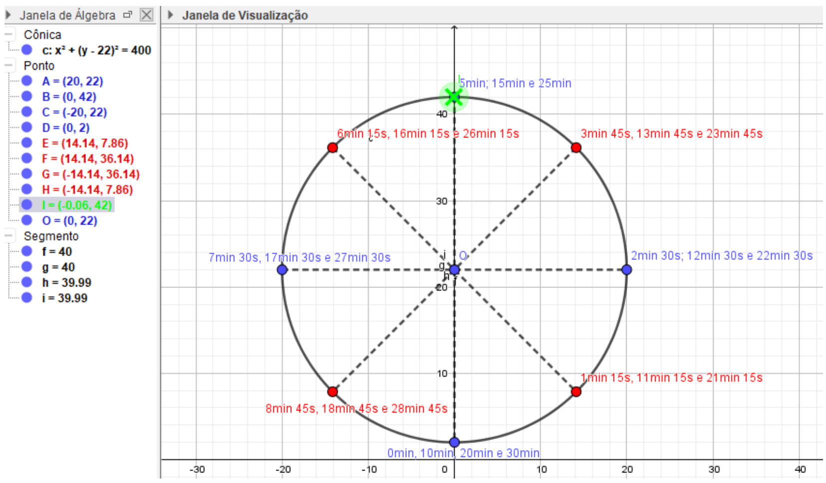


Fonte: a autora (2020).

A diferença entre os modelos dos grupos 6 e 7, é que o primeiro construiu o círculo baseado no tempo, ou seja, dividiu o círculo por minutos. Já o grupo 7 fez a divisão relacionada à altura da cabine de Carlos.

As figuras do GeoGebra dos dois grupos foram bem similares às traçadas no ambiente papel e lápis. A figura do grupo 6 (Figura 79) no GeoGebra foi também a reprodução do modelo circular, com divisões representando o tempo.

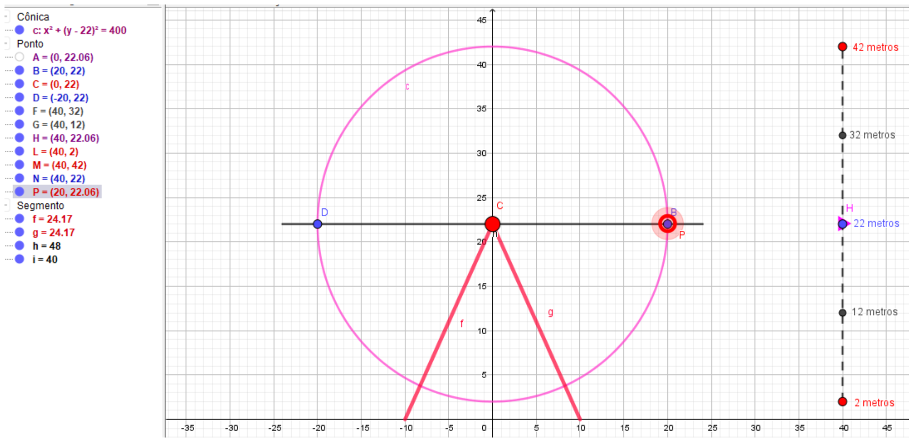
Figura 79 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:6}}$**:** do grupo 6 no GeoGebra.



Fonte: a autora (2020).

O grupo 7 construiu um círculo com o ponto móvel que, ao ser movimentado, sofria o deslocamento de uma marca em uma barra paralela ao círculo, representando a altura do ponto no instante em que era movido (Figura 80).

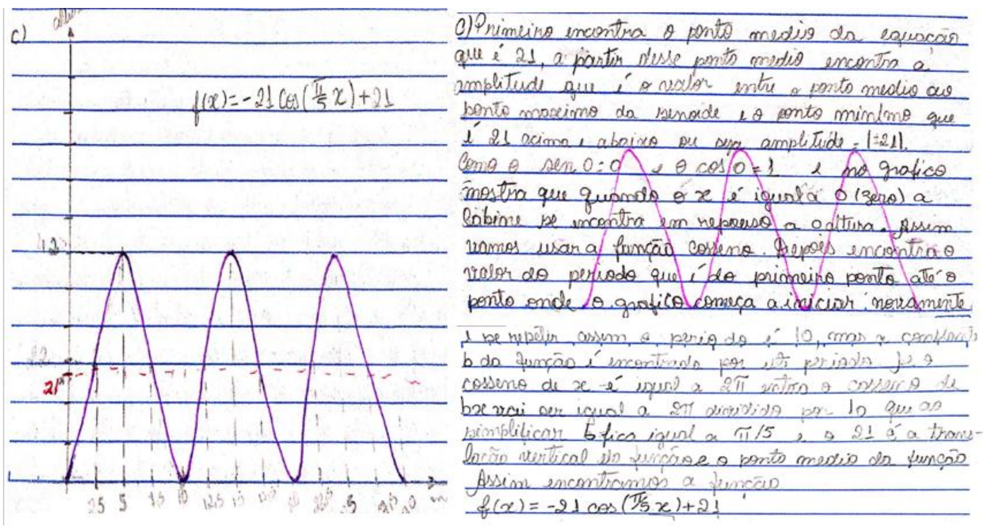
Figura 80 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:7}}$**:** do grupo 7 no GeoGebra.



Fonte: a autora (2020).

Segundo as imagens acima, os grupos conseguiram responder à finalidade da questão ao proporcionar uma figura de modo a possibilitar a apreciação das alturas da cabine de Carlos (P) durante o passeio na roda-gigante. O grupo 1, contudo, surpreendeu ao buscar a lei de formação que representa o modelo oscilatório, para, depois, esboçar o gráfico. Considerando a resposta do grupo foi $\boldsymbol{R_{3c:1}}$**:** construir a lei de formação que representa o fenômeno para traçar o gráfico, observamos o indício de uma técnica. Acompanharemos o raciocínio do grupo na figura 81.

Figura 81 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:1}}$**:** do grupo 1 no ambiente papel e lápis.



Fonte: a autora (2020).

Conforme o registro da figura 81, o raciocínio foi coerente; porém, no que se refere às constantes A e B da fórmula que representa, respectivamente, o raio da roda-gigante e a distância do centro da roda-gigante até o solo, houve um equívoco do grupo. As estudantes analisaram como amplitude e translação, não considerando o que, de fato, significam essas constantes. Constatamos, todavia, que surgiu a formalização algébrica do fenômeno, o que já expõe o conceito das funções senoidais. Observe no quadro 30 a transcrição d eparte da socialização de uma das alunas do grupo 1.

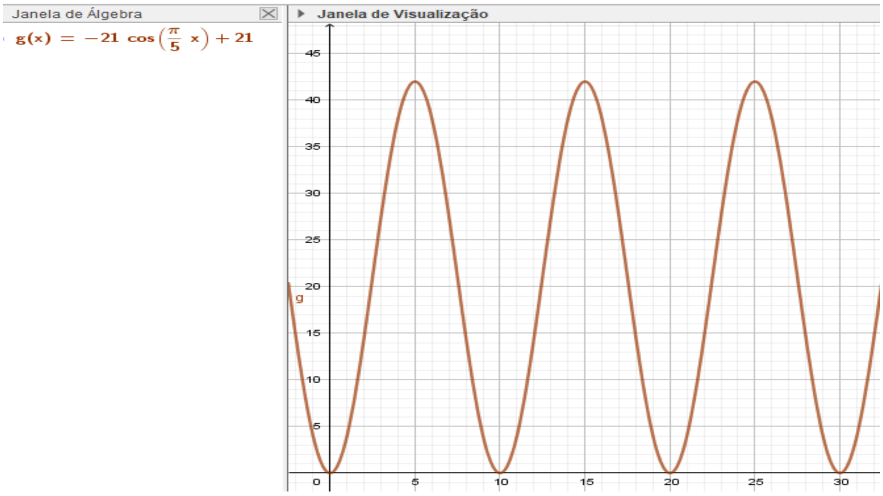
Quadro 30 – Trecho 2 de transcrição turma TP01 sessão 4, anexo F.

Tempo HH/MM/SS	Ator	Transcrição	Observação
00:40:31 00:41:11	Aluna 5	[...] Sonhei que eu estava sentada com um monte de caderno, um monte de papel em cima da cama fazendo, e aí, falou assim; É porque você não faz essa função? Você não fez essa função no caderno? Por que você não faz? Ai ei fiz, então fui pegar o caderno (no sonho). Então eu acordei e fique em cima da cama olhando para o teto, não sei por quê, mas eu fique lá, aí eu comecei a pesquisar, pesquisei vários sites, vi vários vídeos ai eu fiz, já sei como é que é, já sei mais o menos como eu vou fazer, então vou tentar achar aqui e comecei achar um monte de coisa e ai fui fazendo, ai eu achei uma função e ela não é do seno, é do cosseno, $f(x)=-21\cos(\frac{\pi}{5}x) + 21$.	
00:41:11 00:41:18	Aluno 11	Mas nessa função os parâmetros não seria 20 do raio e 22 a distância da roda até o solo?	Grupo 2
00:41:18 00:41:19	Aluna 5	Eita, não tinha me atentado a isso.	Grupo 1
00:41:20 00:41:27	Professora	Ai quando você representou no Geogebra você achou um movimento lá que representa a sua figura lá das alturas. Você deve fazer algumas alterações, nessa lei de formação.	A professora se aproxima da aluna, e mostra a ela, onde alterar.

Fonte: a autora (2020)

De acordo com a figura 81 e o trecho da transcrição, presente no quadro 30, ainda podemos perceber que o grupo iniciou o gráfico a partir da origem, não ponderando que a roda-gigante está a 2 metros do solo. Isso é ratificado na figura construída pelo grupo 1 no GeoGebra, a qual podemos observar abaixo.

Figura 82 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:1}}$**:** do grupo 1 no GeoGebra.



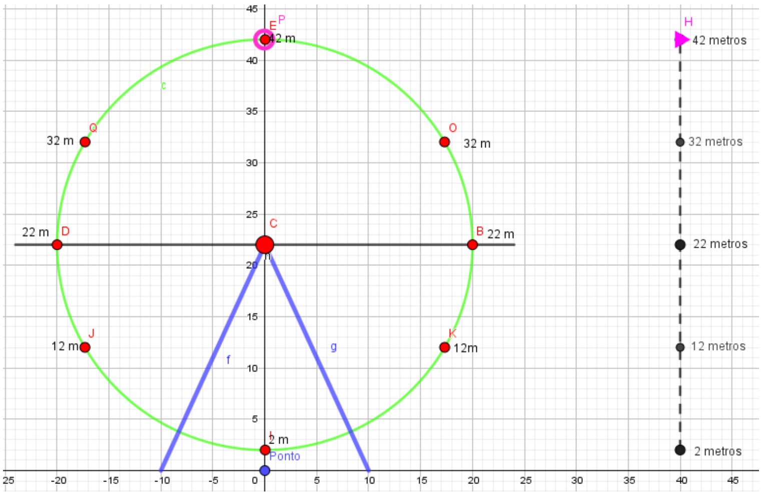
Fonte: a autora (2020).

Ao ser questionado na socialização sobre o resultado, uma vez que o raio da roda-gigante é 20 e que a roda-gigante está a 2 metros do solo, o grupo destacou que não tinha se atentado a essa informação e que considerou os 2 metros somados com o diâmetro, pondo, em consequência, o raio como 21. Mas, retificou as informações. Apesar da alteração do valor do raio e da distância entre o solo e o centro da roda-gigante, identificamos que o grupo consegue, em sua figura, representar a trajetória da roda-gigante no modelo oscilatório.

Os grupos 2, 3, 4, 8, 9 e 10 não apresentaram o modelo no ambiente papel e lápis, apenas no GeoGebra. Obtivemos três figuras no GeoGebra entre esses seis grupos, sendo todos os três tipos caracterizados no modelo circular.

O primeiro modelo foi categorizado como Resposta $\boldsymbol{R_{3c:2/4/9}}$: "Construir o círculo no GeoGebra e representar as alturas da cabine P em metros em pontos no círculo". A referida resposta se repetiu nos grupos 2, 4 e 9. Os grupos construíram um círculo e o dividiram marcando a altura da cabine em diferentes pontos do círculo. Além disso, os três grupos abordaram a barra representando a altura da cabine. À medida que se altera o tempo, a altura também é modificada, bem similar ao grupo 7. Vale ressaltar que os grupos 2, 4 e 9 construíram a barra com a ferramenta, sendo o ponto mínimo 2, e o máximo, 42. Examinemos a figura 83 do grupo 9, registrado em decorrência de os outros dois grupos terem feito figuras análogas.

Figura 83 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:2/4/9}}$**:** do grupo 9 no GeoGebra.

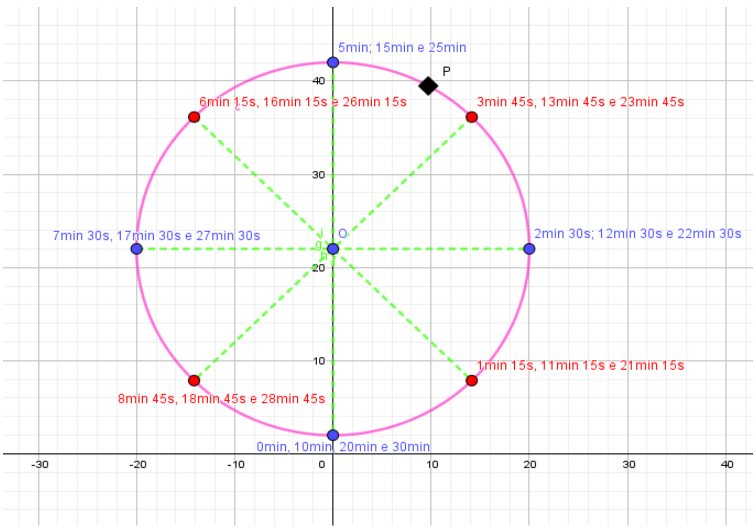


Fonte: a autora (2020).

A imagem acima explana a variação das alturas à medida que movimenta o ponto P, o qual representa a cabine de Carlos. Assim, tanto na barra quanto no círculo, ao movimentar-se o ponto, temos a variação da altura.

A outra resposta $\boldsymbol{R_{3c:3/10}}$**:** "Construir um círculo no GeoGebra representando os pontos do círculo com o tempo em minutos que duram o passeio na roda-gigante". Os grupos que utilizaram a estratégia citada foram o 3 e o 10. Eles marcaram os pontos de repetição das alturas em função do tempo, uma vez que o fenômeno é periódico e se repete a cada 10 minutos. Desse modo, representaram as subdivisões em minutos, e a altura está representada no eixo y; à medida que P se desloca no círculo, a altura é determinada pela coordenada do ponto, ou olhando-se o valor correspondente no eixo y (Figura 84).

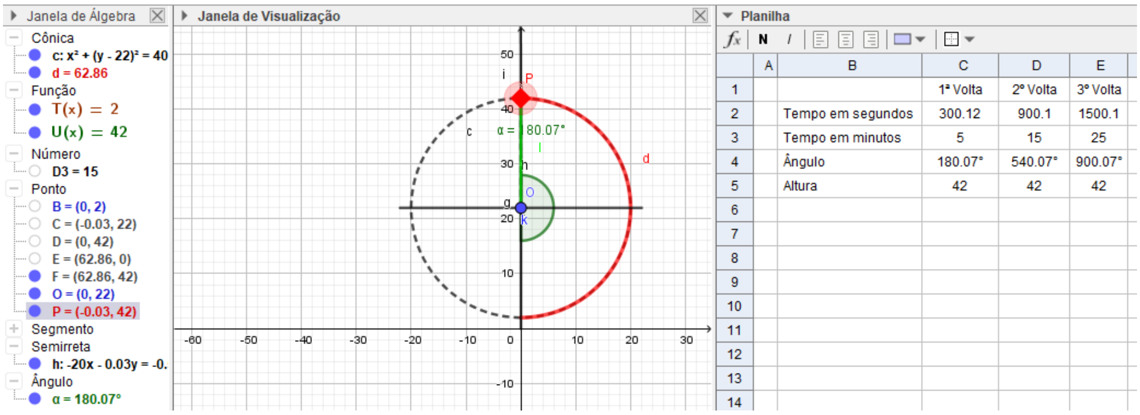
Figura 84 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:10}}$**:** do grupo 10 no GeoGebra.



Fonte: a autora (2020).

O grupo 8 desenvolveu uma figura no GeoGebra no modelo circular, acompanhada por uma planilha que expunha os valores do tempo em minutos e segundos, o ângulo e a altura em metros conforme a cabine, representada pelo ponto P, é movimentada. Então, temos $\boldsymbol{R_{3c:8}}$**:** "Construir um círculo dinâmico no GeoGebra, de modo que, à medida que movimentarmos o ponto P, encontremos a altura relacionada ao tempo e ao ângulo". Podemos visualizar a construção aludida na figura 85.

Figura 85 – Resposta $\boldsymbol{R_{3c:8}}$**:** do grupo 8 no GeoGebra.



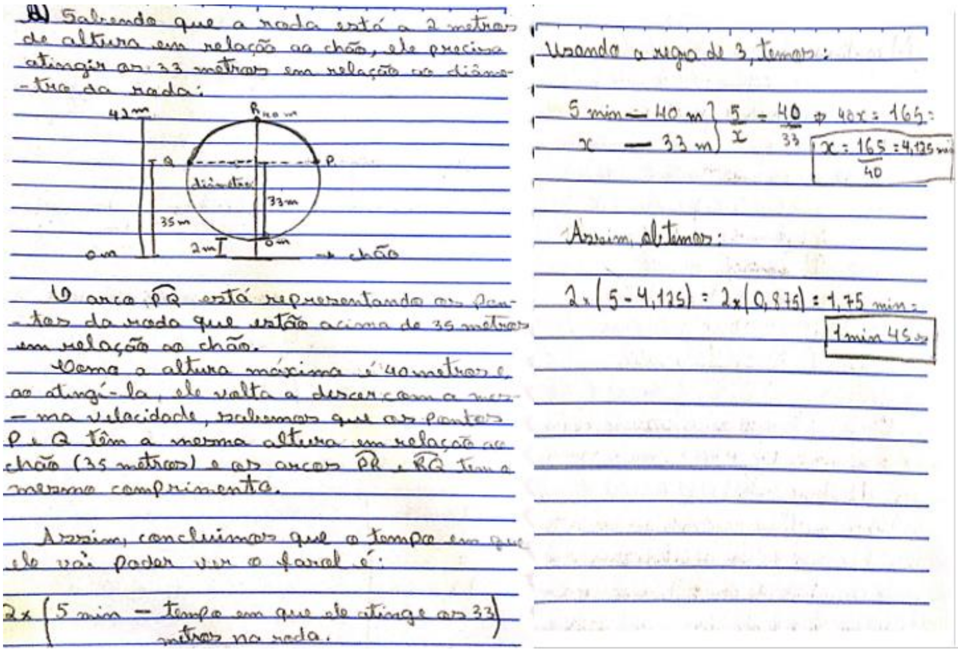
Fonte: a autora (2020).

De acordo com a figura 85, podemos inferir que o grupo 8 conseguiu, de forma dinâmica, representar no modelo circular uma figura que permite apreciar as três voltas da viagem. Isso possibilita destacar a importância de um estudo na perspectiva do paradigma que Chevallard (2001) enfatiza como questionamento do mundo, pois proporciona aos estudantes autonomia na pesquisa e desenvolvimento de respostas secundárias em busca da resposta maior, da questão geratriz/diretriz.

A tarefa seguinte da atividade 3 foi a $\boldsymbol{Q_{3d}}$**: "A partir dos 35 m de altura, podemos ver o Farol da Barra. Por quanto tempo Carlos poderá ver o Farol em cada volta?"**. Nessa tarefa tivemos cinco respostas distintas.

A primeira técnica utilizada se repetiu em sete grupos, a saber, 1, 2, 5, 7, 8, 9 e 10. A técnica foi $R_{3d:1/2/5/7/8/9/10}$◊**:** "Realizar a subtração de 35 menos 2, considerando que a roda-gigante está a 2 metros do solo. Em seguida, calcular uma regra de três simples para saber em qual intervalo de tempo a cabine se encontra a 35 metros de altura, ou seja, a 33 metros em relação ao diâmetro da roda. Após encontrar o tempo, subtrair o valor descoberto de 5, que é o tempo da altura máxima, e, por fim, multiplicar por 2, pois esse intervalo ocorre na subida da roda-gigante até alcançar a altura máxima, e na descida até alcançar novamente a altura de 35 metros, resultando em 1,75 minutos ou 1 minuto e 45 segundos por volta, num total de 5,25 ou 4 minutos e 15 segundos. Podemos avaliar a técnica descrita na figura 86:

Figura 86 – Resposta ***R**$_{3d:8}$*◊***:** do grupo 8 no ambiente papel e lápis.

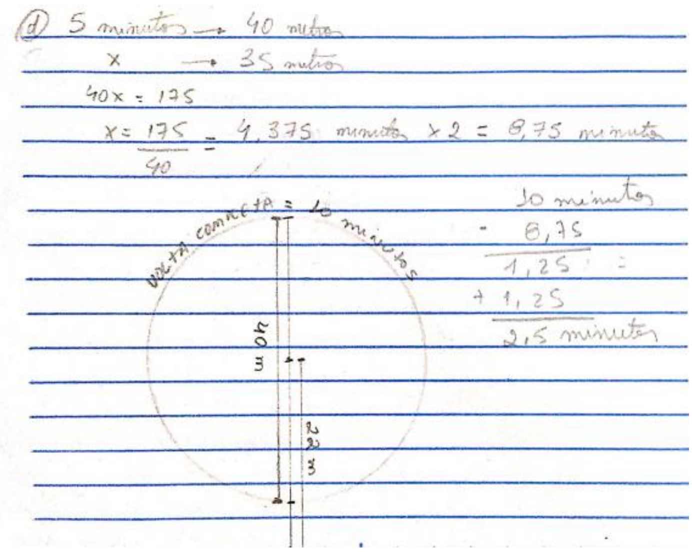


Fonte: a autora (2020).

O grupo 8 criou um modelo circular para representar sua estratégia e, em seguida, traçou uma fórmula para encontrar o tempo por volta para, ao final, aplicar a fórmula e descobrir o valor almejado. Os seis grupos restantes empregaram a mesma estratégia, porém a resposta do grupo 8 foi a que melhor representou a dos demais grupos.

A outra técnica utilizada foi construída pelo grupo 3, ***R**$_{3d:3}$*◊***:** "Calcula uma regra de três simples para saber em qual intervalo de tempo a cabine se encontra a 35 metros de altura; depois, multiplica por dois o valor encontrado e subtrai por 10. Ao obter o valor o grupo o duplica (Figura 87).

Figura 87 – Resposta ***$R_{3d:3}$◊:*** do grupo 3 no ambiente papel e lápis.



Fonte: a autora (2020).

O grupo 3 calculou a regra de três a fim de descobrir em quanto tempo Carlos chega a 35 metros de altura; porém, ao considerar 35 metros, deveria utilizar a altura de 42 metros em 5 minutos, e, ainda, ao encontrar o valor, alcançá-lo por dois e subtraí-lo por 10, o grupo deveria ter acrescentado ao resultado mais 1,25 – ao invés de somar 1,25 e multiplicar por 3 o valor encontrado, que significaria o tempo total nas três voltas.

O grupo 6 calculou a regra de três considerando 42 metros em 5 minutos e x para 35 metros, obtendo, aproximadamente, 4,17 minutos. Na sequência, identificou um ponto equivalente, que foi em 5,45 minutos, e concluiu que o tempo por volta é de 1 minuto e 28 segundos, ao subtrair 5,45 minutos por 4,17 minutos.

Já o grupo 4 não respondeu e, ao ser questionado, afirmou que não conseguiu pensar em uma estratégia rápida que cumprisse o intento da questão.

Os estudantes das duas turmas, nessa questão, apresentaram respostas distintas. Os ostensivos apresentados, foram gestuais ao explicar suas ideias, escriturais e gráficos. Alguns grupos conseguiram, por meio de discussões e reflexões, construírem um modelo similar ao circular.

A seguir, apresentamos a tabela 06, com as noções teóricas evocadas pelos estudantes nessa sessão de estudo.

Tabela 6 - Noções teóricas evocadas pelos estudantes na sessão 4.

Noções teóricas	**Respostas**
Ostensivos mobilizados:	Na exploração da sessão 03, os estudantes levantaram **ostensivos escriturais e gráficos** para representar a roda-gigante pelo modelo circular; e também **ostensivos discursivos**.
Não-ostensivos evocados:	Noção de periodicidade, diâmetro, raio e de pontos congruentes no círculo; Noções de ângulo e círculo trigonométrico; Noção de ponto médio, arcos côngruos, pontos congruentes no círculo, funções seno e cosseno; ponto máximo e mínimo de uma senoide; transformações das funções (parâmetros).
Dialéticas evocadas:	Individual e coletiva; Perguntas e respostas. A partir da dialética individual e coletivo, começam a discutir diferentes estratégias e apresentam ao seu trio, a fim de escolher uma que melhor represente. Além disso, faz uso dos ostensivos discursivos, para a explicação da construção do modelo oscilatório; E por meio da dialética pergunta e respostas, os alunos discute estratégias, questionando as respostas dos outros grupos, e apontando os possíveis equívocos nas resoluções a fim de alterar as incoerências que apareceram durante a resolução, e assim após alterações com contribuições de todos validar as estratégias apresentadas.
Tipo de tarefa por organização matemática exploratória:	Construir modelos matemáticos dinâmicos para estudo por meio do software; Experimentar os modelos, manipulando-os para construção de conceitos matemáticos; Observar as relações e características matemáticas entre os modelos;
Tipo de tarefa por organização matemática contextualizada:	Escolher um modelo matemático para representar o fenômeno físico estudado; Compreender pontos congruentes do ciclo trigonométrico com um fenômeno que apresenta uma trajetória circular; Determinar pontos específicos, analisando as variáveis tempo e altura;
Tipo de tarefa por organização matemática intuitiva:	Determinar o período e amplitude; Modelar um fenômeno por meio da observação deste; Analisar uma situação cotidiana;

Fonte: a autora (2020)

Nessa sessão percebemos a mobilização de diversos ostensivos, bem como organizações matemáticas para resolução das questões apresentadas. E assim, por meio dessa possibilidade de praxeologias para resolução as questões, obtivemos uma maior discussão no momento de socialização, a qual conseguimos perceber alguns equívocos na resolução, a qual a professora da turma, teve que intervir na discussão a fim de conduzir o processo de análise e validação das estratégias de resolução levantadas. Isso pode ser notado por meio da transcrição dessa sessão 4.

Isso se configurou, uma vez que as discussões levantadas nos grupos, necessitaram de esclarecimentos na fase de validação, e a professora agiu para institucionalizar algumas praxeologias levantadas pelos estudantes, e também para refutar alguns resultados levantados. Nota-se que os alunos conseguiram compreender as inconsistências nas respostas a serem refutadas, bem como as incompletudes de algumas que necessitavam ser corrigidas. Salientamos, que o esboço incompleto do modelo circular, relatado oralmente por um grupo, para refletir sobre uma atividade, instigou aos alunos, a solicitarem a professora a apresentação, por meio de ostensivos gráficos e discursivos, o modelo circular, e assim permitiu a institucionalização desse modelos nas turmas TP 01 e 02.

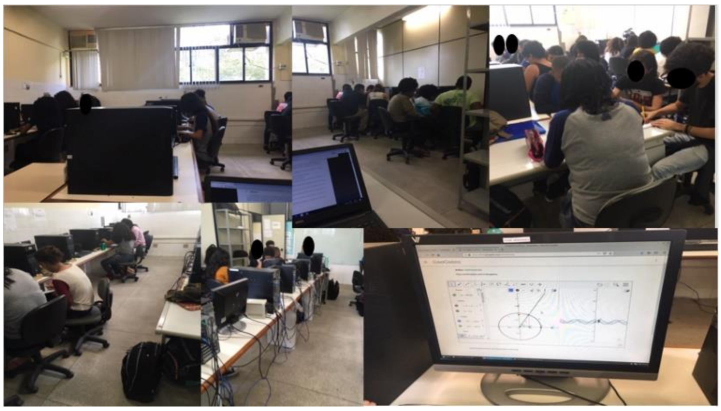
Nessa seção, observamos que a questão planejada foi respondida, isto é, “Como os licenciandos em matemática modelam o fenômeno da roda-gigante?”. Obtivemos como resposta que os licenciandos modelam aproveitando tanto o modelo circular quanto alguns grupos já conseguem integrar o modelo oscilatório com o circular, por meio de gráficos e do modelo algébrico da lei de formação da função.

Desse modo, inferimos que o PEP conseguiu alcançar o desígnio almejado, integrando o objeto do saber funções seno e cosseno ao GeoGebra.

4.2.1.5 Sessão 5

A sessão 5 ocorreu no dia 16/09/2019 no laboratório de informática do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS – LABMAT, sendo a turma 1 no horário das 7h30 às 9h30 e a turma 2 das 10h30 às 12h30 (Figura 88). Nessa sessão, começamos distribuindo a atividade 4, a qual constitui um roteiro para construção de um círculo trigonométrico e um gráfico das funções seno e cosseno interativos e integrados em janelas distintas em um mesmo arquivo.

Figura 88 – Sessão 5: turmas 1 e 2 no Labmat.



Fonte: a autora (2020).

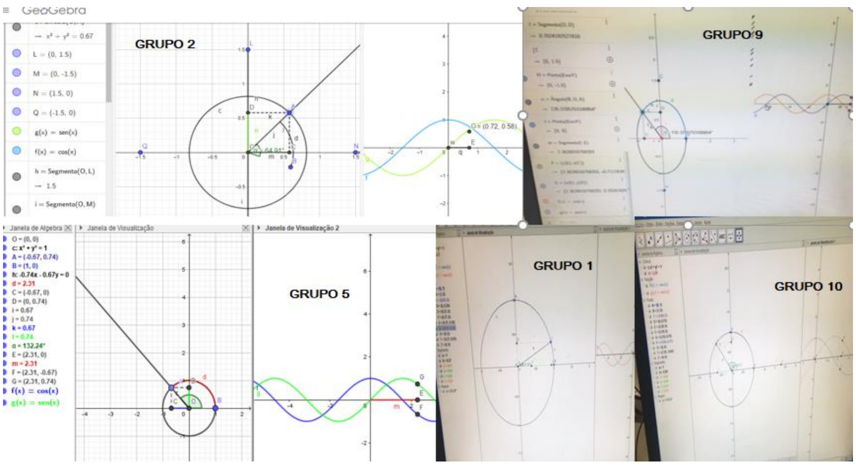
O objetivo da atividade mencionada foi promover a integração dos dois modelos, circular e oscilatório, de modo que os licenciandos compreendessem a importância dessa integração de modelos para o estudo das funções seno e cosseno.

Acompanhamos toda a construção no GeoGebra com os estudantes, nas duas turmas, auxiliando-os quando necessário em alguma dúvida quanto aos comandos no *software* GeoGebra.

As dificuldades enfrentadas nesse processo estiveram relacionadas à infraestrutura técnica do laboratório, pois nem todos os computadores tinham o GeoGebra, sem a possibilidade de baixá-lo. Outros aparelhos, por seu turno, não tinham internet; estas, portanto, configuraram uma restrição já prevista. Então, nos organizamos com as máquinas disponíveis com internet e com o GeoGebra, além de dois notebooks.

Todos os grupos conseguiram construir os dois modelos integrados no GeoGebra. A seguir, imagens das construções feitas pelos grupos.

Figura 89 – Construções no GeoGebra da atividade 4.



Fonte: a autora (2020).

Os grupos construíram os dois modelos integrados; como a atividade continha um roteiro passo a passo da construção, os entraves surgidos restringiram-se a alguns comandos do GeoGebra, que variavam da versão *online* para a versão instalada em alguns computadores, que possuíam a versão mais antiga. Porém, os desafios foram superados, durante a sessão.

Após a construção dos modelos, os grupos responderam quatro perguntas relacionadas à construção e entendimento dos modelos.

A primeira pergunta/tarefa foi a ***Q*$_{4a}$*:*** **"O que você pôde observar ao final da construção? Descreva".** Obtivemos as respostas abaixo:

R*$_{4a:1}$◊*: pude observar que, após todos os passos concluídos, a cada volta dada no círculo os pontos F e G percorriam na janela 2 as funções cos(x) e sen(x), respectivamente.

***R*$_{4a:2}$◊:** pudemos observar a relação entre os valores das funções seno e cosseno e os arcos no círculo trigonométrico.

***R*$_{4a:3}$◊:** observamos que o ciclo trigonométrico age com padrão uniforme com as funções seno e cosseno.

***R*$_{4a:4}$◊:** construção do modelo circular junto ao gráfico das funções seno e cosseno.

***R*$_{4a:5}$◊:** montamos um ciclo em uma das janelas, e na outra janela apareceram só as funções seno e cosseno. O gráfico apresenta um padrão repetido, sendo assim, um período, sendo infinito com intervalo de [-1,1] em relação ao eixo y.

R*$_{4a:6}$◊*: que o círculo trigonométrico mostra o movimento de cada volta nas funções seno e cosseno indicando que pode ser utilizado para observar fenômenos periódicos.

R*$_{4a:7}$◊*: a construção de um círculo trigonométrico e duas funções em formato de ondas. O ponto A é responsável por fazer os pontos F e G se movimentarem.

R*$_{4a:8}$◊*: foi construído um círculo trigonométrico, um arco móvel, um ângulo móvel e as funções seno e cosseno.

R*$_{4a:9}$◊*: a função g(x) = sen(x) se cruza com a função f(x) = cos(x). Quando o ponto A está em 90º e 270º, o ponto C fica na origem e o ponto D fica congruente ao ponto A, e se A estiver a 0º e a 180°, o ponto C fica congruente ao ponto A, e o ponto D fica na origem.

***R*$_{4a:10}$◊:** essas construções estão relacionadas com as voltas que ocorrem no ciclo trigonométrico, as quais estão acontecendo a partir do movimento do ponto A.

Na perspectiva das respostas acima, identificamos que os grupos conseguiram abranger a integração entre os dois modelos e a relação do modelo circular com o gráfico das funções seno e cosseno. Uma vez que, à medida que o ponto A do círculo se movia, os pontos C e D traçavam o movimento no gráfico das funções, representando, assim, a trajetória do ponto no círculo, no modelo oscilatório.

Quanto à próxima questão Q_{4b}: **"Movimente o ciclo trigonométrico. O que aconteceu com o gráfico das funções seno e cosseno?"**, obtivemos as seguintes respostas:

$R_{4b:1}$◊**:** a cada volta se repete o ciclo. O ponto F se movimenta em f(x) = cos(x) em relação à movimentação de A, assim como o ponto G se move em g(x) = sen(x) no tocante à A. Mas todas as vezes que o ponto G coincide com o ponto E os pontos voltam para o início onde G = (0,0) e F = (0,1).

$R_{4b:2}$◊**:** a medida em que movimentamos o arco "d", os pontos dos gráficos das funções seno e cosseno também se movimentam periodicamente.

$R_{4b:3}$◊**:** as funções seno e cosseno assumem valores diferentes a cada movimento do gráfico.

$R_{4b:4}$◊**:** os pontos G e F se encontram no ângulo de $\alpha = 45^o$ e nos ângulos congruentes a ele no terceiro quadrante. Os pontos G e F se encontram no ângulo $\alpha = 90^o$ na função cosseno. Os pontos G e E se encontram no ângulo $\alpha = 180^o$ na função seno. Para os demais valores os pontos E, F e G se posicionam em lugares diferentes no gráfico.

$R_{4b:5}$◊**:** os pontos W, E, Q, G e F se movimentam. A mudança de posição varia de acordo com a mudança do ciclo trigonométrico, subindo e descendo, indo para a direita ou para a esquerda; dessa maneira, os pontos variam e estão ligados ao ciclo.

$R_{4b:6}$◊**:** os pontos se movem na mesma direção seguindo o gráfico das funções, repetindo o movimento a cada volta. Os pontos G, E e F se movimentam paralelamente.

$R_{4b:7}$◊**:** no ângulo aproximado de 224,87º os pontos F e G se coincidem no encontro das funções. No ângulo de 180º os pontos E e G se coincidem. Aos 270º no ângulo os pontos E e F se coincidem. Aos 45º, G toca o encontro das funções.

$R_{4b:8}$◊**:** ao movimentar o ponto na circunferência os pontos da função se movimentam de acordo com a circunferência. Ao recomeçar uma volta no círculo, recomeça também nas funções.

$R_{4b:9}$◊**:** os pontos E, F e G se movimentam para a direita. O ponto G segue a função seno, o ponto F a função cosseno e o ponto E o eixo X.

$R_{4b:10}$◊**:** eles se movimentam, sendo que: g(x) = sen(x) é crescente no 1º e 4º quadrantes e é decrescente no 3º e 2º quadrantes; f(x) = cos(x) é crescente no 3º e 4º quadrantes e decrescente no 1º e 2º quadrantes; elas duas são periódicas, pois se repetem em um determinado tempo.

Os grupos levantaram características importantes para o estudo da trigonometria e funções trigonométricas. E, conforme acentuado em nosso MER, estudar as funções seno e cosseno integradas ao círculo trigonométrico permite compreender o modelo circular e oscilatório, para modelação de fenômenos periódicos utilizando as funções seno e cosseno. Além disso, proporciona o entendimento de conceitos e aspectos da trigonometria e funções trigonométricas em dois modelos distintos, ampliando, assim, a possibilidade de melhor apreensão das funções seno e cosseno.

A terceira tarefa da sessão 4 foi a Q_{4c}: **"O que você pôde concluir a respeito dessa construção?"**. Todos os grupos responderam a proposição. A seguir, explanaremos as respostas obtidas.

$R_{4c:1}$◊**:** que podemos relacionar o círculo trigonométrico ao gráfico das funções seno e cosseno, onde os pontos possuem um período de iniciação e término, para tornar a se repetir, conforme cada volta dada no círculo.

$R_{4c:2}$◊**:** após a construção foi possível visualizar duas formas de representar as funções seno e cosseno geometricamente, através do círculo trigonométrico e dos gráficos das funções.

$R_{4c:3}$◊**:** a construção do gráfico nos fez compreender a relação dos ângulos com as funções seno e cosseno por meio das posições no ciclo da circunferência.

$R_{4c:4}$◊**:** as funções seno e cosseno variam num movimento periódico. O gráfico da função seno tem início no ponto zero e atinge seu pico nos valores [-1, 1]; o gráfico da função cosseno começa no ponto 1 e também varia entre os intervalos [-1, 1], atingindo neles seu pico.

$R_{4c:5}$◊**:** as funções trigonométricas são funções periódicas onde há um padrão que se repete e que é chamado de período.

$R_{4c:6}$◊**:** que os fenômenos periódicos podem ser analisados como função trigonométrica facilitando o entendimento do movimento realizado e com que constância os fenômenos se repetem.

$R_{4c:7}$◊**:** que todos os passos devem ser seguidos diretamente para que os gráficos deem certo. E que podemos relacionar a função com o gráfico.

$R_{4c:8}$◊**:** é possível perceber a relação que há entre o círculo trigonométrico e a função; no mais, as observações que identificamos estão descritas nas questões anteriores.

$R_{4c:9}$◊**:** que todas as atividades precedentes (atividades 1, 2 e 3) podem ser representadas através de gráficos semelhantes aos realizados nessa atividade.

***$R_{4c:10}$*◊: que o círculo trigonométrico lembra a roda-gigante, onde P (cabine) realiza o mesmo movimento que o ponto A, ou seja, eles cumprem a função de dar voltas na roda-gigante e no círculo trigonométrico, respectivamente. Ademais, f(x) = cos(x) e g(x) = sen(x) lembram o movimento de ondas, que se repetem em um determinado período de tempo.

Ao analisar as respostas dos grupos, observamos quatro tipos de respostas ou técnicas para resolver a Q_{4c}. A primeira técnica ou categoria se repetiu nos grupos 1, 2, 3 e 8, cujo intento foi relacionar os modelos circular e oscilatório, isto é, os grupos conseguiram visualizar a integração do círculo trigonométrico com os gráficos das funções seno e cosseno. Nesse segmento, temos que os quatro grupos alcançaram a percepção da integração dos dois modelos.

A segunda categoria/técnica apresenta características específicas das funções seno e cosseno ao analisar os dois modelos construídos no GeoGebra. Esse tipo de técnica se repetiu nos grupos 4, 5 e 6.

A terceira categoria foi reproduzida nos grupos 9 e 10. Os grupos conseguiram constatar, no modelo dinâmico construído, um caminho para resolver as atividades anteriores, tanto a da maré quanto a da roda-gigante. O grupo 10 ainda ressaltou que, por meio do modelo circular construído, integrado ao gráfico das funções seno e cosseno, é possível representar a altura da roda-gigante de forma dinâmica nos intervalos de tempo determinados no passeio.

A quarta categoria/técnica foi empregada pelo grupo 7. Nessa categoria o grupo destacou a necessidade de seguir os passos descritos no roteiro de construção, para conseguir obter os dois modelos integrados. Salientamos a necessidade de concentração e dedicação para realização da atividade 4.

De acordo com a apreciação, podemos constatar o quão ricas foram a construção e análise dos modelos no GeoGebra na atividade 4, pois permitiram que os estudantes construíssem a percepção da relevância de relacionar os dois modelos no estudo das funções seno e cosseno.

É valido salientar, que após essas sessões os estudantes já conseguem compreender as organizações matemáticas do círculo trigonométrico e das funções trigonométricas, em especial, funções seno e cosseno, para modelar os fenômenos estudados. Integrando por meio de ostensivos gráficos e discursivos essas organizações matemáticas com o geogebra, para o estudo das funções seno e cosseno.

A outra tarefa foi ***Q_{4d}*:** **"Quais modelos foram construídos e de que forma você pôde utilizar essa construção para o ensino de funções seno e cosseno e de fenômenos periódicos?"**.

***R**$_{4d:1}$*◊**:** foram usados o círculo trigonométrico e gráficos senoidais das funções seno e cosseno. Pudemos utilizar para compreender o que ocorre em fenômenos periódicos como as ondas do mar, a volta que a terra faz em torno do sol, entre outros.

***R**$_{4d:2}$*◊**:** os modelos construídos foram as funções seno e cosseno no gráfico e no círculo trigonométrico. Pudemos utilizá-los para auxiliar no entendimento da periodicidade das funções e para explicar como podemos representar os fenômenos periódicos matematicamente.

***R**$_{4d:3}$*◊**:** as construções possibilitaram visualizar, na prática, e de maneira dinâmica, as aplicações das funções seno e cosseno, uma vez que a construção da roda-gigante, por exemplo, nos mostra uma coisa que vemos fisicamente, e através dela podemos fazer comparações por meio de gráficos.

***R**$_{4d:4}$*◊**:** esse modelo permite que seja entendido o gráfico das funções seno e cosseno e sua relação com o círculo trigonométrico. E, ainda, dá para mostrar a relação com o teorema de Pitágoras. Para estudos que usam a aplicação aludida, a construção desse gráfico pode facilitar a apreensão das mudanças que ocorrem.

***R**$_{4d:5}$*◊**:** essas transformações servem para mostrar a visualização do efeito da periodicidade da trigonometria, da repetição das marés em certos pontos, da altura máxima da roda-gigante, do padrão das curvas do gráfico do seno e cosseno, mostrando sempre um padrão que se repete em pontos específicos; assim, é possível evidenciar aos alunos como tais assuntos matemáticos estão presentes em nosso cotidiano, tornando, nesses moldes, o tema mais atraente. Em suma, a modelagem em pauta é essencial para a aprendizagem em sala.

***R**$_{4d:6}$*◊**:** os modelos construídos foram o círculo trigonométrico e o gráfico das funções seno e cosseno, que representam ondas. Essa construção pode ajudar os estudantes a visualizar como os fenômenos periódicos podem ser analisados e modelados por meio de funções trigonométricas. Através da visualização a compreensão do conteúdo fica melhor.

R**$_{4d:7}$*◊:** o círculo trigonométrico e o gráfico das funções seno e cosseno. Com a apreciação detalhada dos modelos construídos é perceptível que, assim como os fenômenos físicos periódicos, ocorre a repetição de maneira periódica tanto nas funções citadas quanto no círculo.

***R**$_{4d:8}$*◊**:** os modelos são o gráfico de função e círculo trigonométrico; ambos podem servir para o ensino de funções seno e cosseno e de fenômenos periódicos.

***R**$_{4d:9}$*◊**:** utilizando a figura feita e assemelhando-a ao círculo trigonométrico, divididas as suas medidas, pode-se estudar as funções seno e cosseno. E por se tratar de funções seno e cosseno, que são representadas por gráficos ondulatórios e periódicos, os fenômenos periódicos também podem ser representados de modo semelhante.

$R_{4d:10}$◊: ciclo trigonométrico e funções seno e cosseno. Essas construções podem ajudar no ensino das funções seno e cosseno e funções periódicas, porque assim visualizamos melhor a movimentação das funções e percebemos que as funções seno e cosseno, de acordo com o comportamento do gráfico, são periódicas, visto que elas se repetem em um determinado tempo.

Os 10 grupos identificaram os modelos. Podemos observar, com as respostas, que os licenciandos já começam perceber a associação do círculo com as funções seno e cosseno como uma organização didática a ser utilizada em sua futura prática de sala de aula. Neste aspecto, os grupos destacaram os benefícios do uso da organização referida para melhor visualizar e compreender as características das funções, entender o comportamento destas, entre outros.

Observamos a seguir, a tabela 7 que resume as noções teóricas evocadas pelos estudantes nessa sessão.

Tabela 7 – Noções teóricas evocadas pelos estudantes na sessão 5

Noções teóricas	**Respostas**
Ostensivos mobilizados:	Na exploração da sessão 5, os estudantes evocaram **ostensivos escriturais, gráficos, discursivos e gestuais;**
Não-ostensivos evocados:	Noção das transformações gráficas das funções seno e cosseno; Noção do ciclo trigonométrico e das funções seno e cosseno;
Dialéticas evocadas:	Individual e coletiva; Perguntas e respostas, pois a partir da exploração das construções no software os estudantes conseguem compreender e construir os conceitos matemáticos envolvidos.
Tipo de tarefa por organização matemática exploratória:	Construir modelos matemáticos dinâmicos para estudo por meio do software; Experimentar os modelos, manipulando-os para construção de conceitos matemáticos; Observar as relações e características matemáticas entre os modelos;

Fonte: a autora (2020)

Desse modo, podemos inferir, por meio dos resultados apresentados, que os estudantes já apontam indícios da compreensão e construção, de um praxeologia matemática sobre as funções seno e cosseno, conforme exibida em nosso MER, quadro 20.

Além disso, percebemos que as sessões até aqui trabalhadas, já contempla elementos que abordem os três tipos de organizações matemáticas destacadas em nosso MER, a saber: Organizações Matemáticas que trabalham conceitos das funções seno e cosseno de maneira intuitiva, sem revelar a intenção didática (Omi); as Organização Matemática que aborda o modelo circular relacionado a uma questão contextualizada em língua natural para observação das características do ciclo trigonométrico integrado às funções trigonométricas (Omc); e as Organização Matemática de forma exploratória, que busca, a partir das construções de modelos no GeoGebra, a exploração destes para construção de definições matemáticas (Ome).

Salientamos que a professora nessa sessão, teve o papel crucial de monitora do software GeoGebra, uma vez que a cada entrave na realização da atividade, por alguma questão de manipulação do software, ou dificuldade com algum comando, por ser um programa ainda novo para os estudantes, a professora se dirigia ao grupo para auxiliá-los. E assim, além de monitora do GeoGebra, a docente exerceu seu papel de mediação nas discussões e institucionalizações das resoluções utilizadas pelas turmas.

Nesse sentido, logramos o objetivo da sessão 5, o qual buscava que os estudantes compreendessem a integração dos modelos circular e oscilatório, de modo a considerar a sua importância para o estudo das funções em foco. E, como exposto nas respostas acima, percebemos que os licenciandos em matemática atingiram a finalidade da sessão.

4.2.1.6 Sessão 6

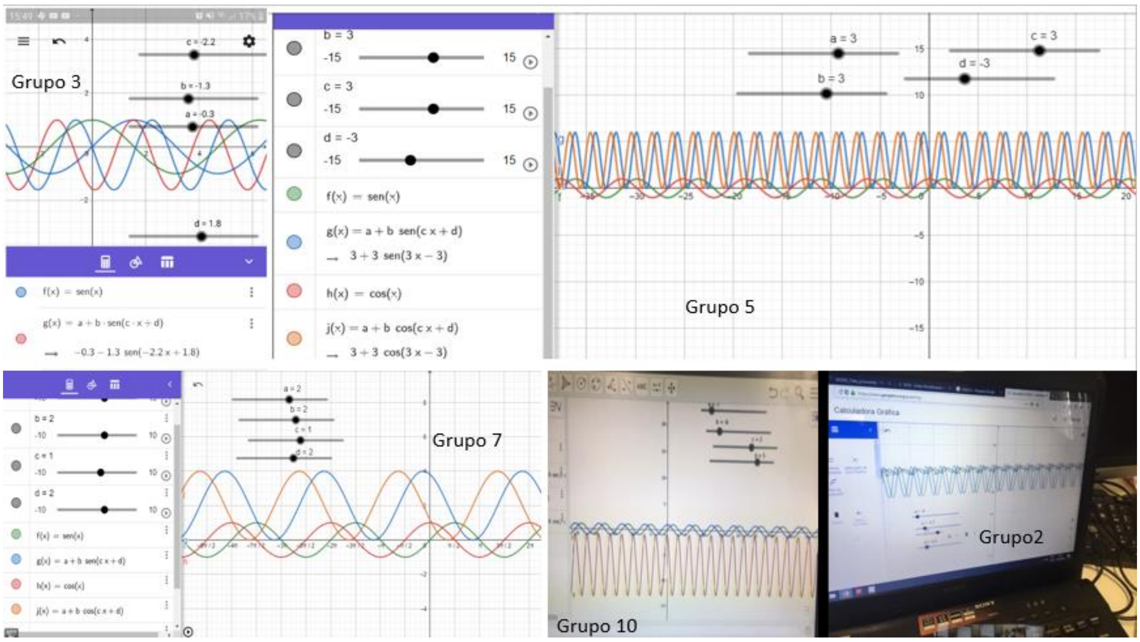
Essa sessão ocorreu no dia 20 de setembro de 2019. Na turma 2 das 7h30 às 9h30 e na turma 1 das 10h30 às 12h30, também no LABMAT. A sessão foi planejada para o desenvolvimento da atividade 5, a qual contém um roteiro de construção no GeoGebra. O objetivo da sessão foi permitir a construção dos conceitos sobre as funções seno e cosseno, além de explorar as transformações gráficas das funções. Desse modo, almejamos com essa sessão, ao final, responder a seguinte questão: “Quais funções seno e cosseno conseguimos compreender com a construção do GeoGebra?”.

A atividade 5 consiste em os estudantes construírem controles deslizantes no GeoGebra e, na sequência, funções atreladas aos controles, ponderando que cada controle representa uma característica das funções seno e cosseno e é responsável pelas transformações das funções e seus gráficos, como translação/deslocamento vertical ou horizontal, amplitude e período.

A partir da manipulação dos controles de cada parâmetro, os discentes identificaram as transformações sofridas no gráfico, construindo o conceito do parâmetro, isto é, à medida que o gráfico se transforma eles observam o que acontece e definem o parâmetro.

Conforme a atividade 4 da sessão 5, as dificuldades levantadas durante a construção foram relacionadas aos comandos do GeoGebra, que continha algumas alterações, de acordo com a versão do *software* que estava na máquina. Nessa perspectiva, esclarecemos as dúvidas ao longo das construções e todos os grupos conseguiram concluir a atividade (Figura 90).

Figura 90 – Construções no GeoGebra da atividade 4.



Fonte: a autora (2020).

Explanaremos na sequência as respostas dos estudantes às perguntas da atividade 5.

O primeiro questionamento foi ***$Q_{5/1º}$*:** **"O que você pôde observar ao alterar o parâmetro "a" das funções g(x) = a + b*sen(c*x + d) e j(x) = a + b*cos(c*x + d) para um valor positivo e para um valor negativo com as funções?"**. Nessa tarefa tivemos duas respostas com o mesmo significado, porém a linguagem diferenciou uma da outra.

A resposta que mais se repetiu entre os grupos foi a ***$R_{5/1º:1/2/3/4/6/8/9}$*◊*:*** "Ao alterar o controle 'a' das funções ocorre uma translação vertical. Para valores negativos as funções transladam para baixo e para valores positivos transladam para cima". 7 dos 10 grupos responderam abordando a translação vertical como característica do parâmetro A.

Podemos inferir que isso ocorre devido aos estudantes já terem trabalhado as transformações gráficas nas funções quadráticas. Isso permitiu que, ao observarem o comportamento da função sendo alterado de acordo com a variação do parâmetro A, associassem-no à translação vertical, uma vez que há um deslocamento do gráfico no eixo y, ao se movimentar o parâmetro A.

A outra resposta apresentada se repetiu em três grupos, a saber: grupos 5, 7 e 10. $\boldsymbol{R}_{5/1^o:5/7/10}$◊***:*** "Quando alteramos o parâmetro A para os valores positivos o gráfico se desloca para cima, e para os valores negativos o gráfico se desloca para baixo". A resposta aludida é bem similar à anterior, porém explana uma linguagem mais simples, registrando o deslocamento no eixo y.

Destarte, observamos que os grupos compreenderam o significado do parâmetro A.

A próxima tarefa da atividade 5 foi $\boldsymbol{Q}_{5/2^o}$***:*** **"Movimente o parâmetro b nas funções g(x) = a + b*sen(c*x + d) e j(x) = a + b*cos(c*x + d). O que você observou?"**.

Nessa questão, tivemos diferentes respostas. Apresentaremos agora cada uma delas.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:9}$◊***:*** o valor de "b" interfere na amplitude das funções.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:1/8}$◊***:*** observamos que, ao movimentar o parâmetro "b", a amplitude dos gráficos aumentava. Porém, quando o valor de B é negativo o "sentido" das ondas era invertido, ou seja, onde o gráfico subia, o fator B negativo descia e, assim, sucessivamente. Além disso, a amplitude diminui quando $0<b<1$ ou $-1<b<0$.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:3}$◊**:** o controle b corresponde à amplitude. Ao ser aplicado para valores positivos, a função seno parte do 0 e tende a crescer e depois decrescer; e a função cosseno parte de um valor positivo tendendo a decrescer e depois crescer. Para os valores negativos a função seno parte do 0 tendendo a decrescer e depois crescer; e a função cosseno parte de um valor negativo tendendo a crescer e depois decrescer.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:5}$◊***:*** quando b = 0 o gráfico fica uma linha; quanto maior o número positivo mais dilatada ou aumentada para cima pelo valor de B; já quando o número é negativo as funções se invertem, ficando de cabeça para baixo, seguindo a mesma dilatação do valor positivo, mas invertida.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:4/6/7}$◊***:*** quando b é positivo ou negativo a amplitude segue o mesmo movimento, é como se não importasse se é negativo ou positivo (-2 fica em módulo) (se -2 ou 2 a amplitude é a mesma).

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:2}$◊***:*** ao movimentar o parâmetro b, os gráficos das funções dilatam. Há mudanças no comprimento das ondas.

$\boldsymbol{R}_{5/2^o:10}$◊***:*** quando o valor de b é positivo a função sofre um esticamento e cresce, quando B é negativo ela vai diminuindo de tamanho.

O grupo 9 logo identificou que o parâmetro b era responsável pela amplitude das funções seno e cosseno. Os grupos 1, 8, 3 e 5, além de trazerem a amplitude, expõem que, quando alteramos para os valores positivos o valor de b, a curva da função tem uma amplitude maior; e quando modificamos para valores negativos, há uma inversão da curva e a amplitude aumenta, porém no sentido inverso. Destacamos essa afirmação pois percebemos nela a construção das características da amplitude pelos alunos, a partir da manipulação do controle na janela do GeoGebra.

Isso ratifica a relevância de se trabalhar de forma integrada às tecnologias para construção do saber matemático. Ao se atrelar um PEP ao GeoGebra, permite-se que o estudante, à medida que vai em busca de respostas secundárias para suas questões auxiliares, construa uma gama de ferramentas e informações, que, integrada às tecnologias, aumenta a exploração do saber em jogo.

Já os grupos 4, 6 e 7 tiveram o mesmo tipo de resposta: identificaram amplitude, considerando-a em módulo. Contudo, não perceberam a alteração na curva ao atribuir valores negativos para b. Mesmo com o exemplo apresentado na resposta de utilizar para b igual a 2 e -2, os grupos não constataram que houve uma inversão na curva.

O grupo 2 abordou o efeito de dilatação, mais uma vez atrelando-o às transformações gráficas estudadas anteriormente, realçando o efeito da amplitude como aumento do comprimento da onda. Observamos que o grupo apreendeu o efeito do parâmetro, porém, por não conhecer ainda a amplitude, não conseguiu definir o nome exato para a transformação ocorrida no gráfico.

Já o grupo 10 não percebeu que há uma inversão da curva quando os valores são negativos, afirmando que no positivo há um "esticamento e crescimento" do gráfico; quando negativo há uma diminuição no tamanho. O grupo não conseguiu identificar que há uma inversão na curva nos valores negativos, mas na amplitude positiva ou negativa o valor é o mesmo.

A questão 3 da atividade 5 apresentou o estudo do parâmetro c. ***$Q_{5/4°}$:*** **"Oscile o parâmetro c das funções g(x) = a + b*sen(c*x + d) e j(x) = a + b*cos(c*x + d) e relate o que aconteceu*".***

A finalidade da tarefa foi que os licenciandos construíssem o conceito do parâmetro c, ou seja, percebessem que está vinculado ao período da função seno ou cosseno. Ademais, almejamos que os estudantes compreendessem que na função seno, quando o período é negativo, o sentido da curva é invertido; e na função cosseno, por ser uma função par, tanto no período negativo quanto no positivo não há alterações na curva. Exporemos adiante as respostas dos grupos.

$R_{5/3°:1}$◊: esse parâmetro está relacionado à contração da função, logo, a seu período. Observamos que na função g(x) = a + b*sen(c*x + d) quando c é negativo a curva é invertida, e na função j(x) = a + b*cos(c*x + d) isso não ocorre.

$R_{5/3°:2/3/6}$◊: ao movimentar o parâmetro c, averiguamos que os gráficos ficam cada vez mais contraídos. Há mudanças na largura das "ondas".

$R_{5/3°:4/9/10}$◊: o período das funções diminui, isto é, pode dilatar ou contrair.

$R_{5/3°:5}$◊: de 0 a +∞, quanto maiores os valores mais as funções contraem horizontalmente. De 0 a -∞ quanto menor for o valor do número, mais as funções contraem.

$R_{5/3°:7}$◊: com a ampliação dos valores ocorre o aumento da frequência das ondas (valores positivos). Quando diminui o valor a frequência também aumenta (valores negativos).

$R_{5/3°:8}$◊: o gráfico contrai no eixo x, assim como no anterior, quando for negativo, é como no módulo, porém ocorre uma troca de lado, não sabemos se é exatamente uma reflexão no eixo x.

Conforme as respostas apresentadas, pontuamos que todos os grupos perceberam a contração do gráfico ao alterar o parâmetro c; mesmo não denominando de período, eles compreenderam a transformação que ocorre no gráfico. Porém, o grupo 1 foi o que deixou a resposta mais clara quanto às alterações no período nas funções seno e cosseno. O grupo 8 também sinaliza "uma troca de lados" quando os valores são negativos, mas não especifica que isso só ocorre na função seno, uma vez que a função cosseno é uma função par e, devido a isso, a inversão na curva não acontece.

Já os grupos 2, 3, 6, 4, 9, 10, 5 e 7 destacam que, ao deslizar o controle tanto para os valores positivos quanto para os negativos, os gráficos das funções contraem. Mas não especificam as alterações na função seno ou cosseno.

Nesta linha, os licenciandos conseguiram abranger a ideia do parâmetro c como responsável pela contração da função, ou período, ou frequência das ondas. Entretanto, em parte dos grupos não houve a distinção entre a função seno e cosseno, uma vez que são, respectivamente, funções ímpares e pares, logo o comportamento será distinto no que se refere à periodicidade quando o parâmetro é negativo.

A próxima questão foi associada ao parâmetro d. ***$Q_{5/4°}$:*** **"Faça a mesma coisa com o parâmetro d nas duas funções e explique o que acontece".**

A tarefa requer que os estudantes observem a translação horizontal do gráfico das funções seno e cosseno. Todos os grupos responderam a tarefa de forma correta, identificando a translação horizontal. A seguir, apresentaremos duas respostas, a que mais se repetiu e uma que elenca uma informação a mais.

***R**$_{5/4º:1/2/3/4/5/6/7/9/10}$◊:* o controle d corresponde à translação horizontal, onde, para valores positivos, o gráfico é transladado para a esquerda e, para valores negativos, o gráfico é transladado para a direita.

***R**$_{5/4º:8}$◊:* no parâmetro d ocorre a translação para a esquerda ou para a direita, isto é, mudança de fase. Quando o valor é positivo a mudança é para a esquerda, quando d assume um valor negativo a mudança é para a direita.

Frisamos que os 10 grupos entenderam o efeito de translação horizontal, ou seja, para a direita ou para a esquerda do gráfico. A diferença é que o grupo 8 menciona a informação de que essa translação horizontal é uma mudança de fase das funções seno e cosseno.

Nota-se que, mais uma vez, por ser um movimento das transformações gráficas vistas anteriormente, todos os estudantes identificaram a translação horizontal das funções. Isso ressalta a importância do resgate de conhecimentos prévios, em especial atrelado à manipulação do *software*, pois, por meio dessa integração, foi possível que os licenciandos associassem as transformações ocorridas nos gráficos com as já trabalhadas em outras funções.

A quinta pergunta da atividade 5 foi ***Q**$_{5/5º}$:* **"Agora oscile os quatro parâmetros das funções g(x) e j(x) e compare com as funções f(x) e h(x). O que você observou?".** O objetivo da tarefa foi proporcionar aos estudantes a percepção das variações que podem ocorrer nas funções seno e cosseno ao mesmo tempo, comparando as modificações com a função básica f(x) = sen(x) e g(x) = cos(x).

Destacamos quatro respostas de grupos distintos, pois as demais se repetiram.

***R**$_{5/5º:8}$◊:* ambas se movimentam juntas e ficam em lugares um pouco diferentes. O gráfico da função cosseno é deslocado $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda em comparação à função seno.

***R**$_{5/5º: 3/2/6/1/9}$◊:* as funções f(x) e g(x) são funções básicas seno e cosseno, mantendo-se na forma. Já as funções j(x) e h(x) são funções que se apropriam de valores, trazendo parâmetros, e cujo gráfico se movimenta de quatro maneiras diferentes (translação horizontal e vertical, contração e amplitude) que podem ser visualizadas.

$R_{5/5^{o}:\,5/4/10/7}$◊: acontecem todos os movimentos observados simultaneamente, e todos periódicos, pois, a partir de um momento, o processo volta a se repetir.

Na questão 5, os grupos alcançaram o desígnio de compreender as transformações realizadas nas funções seno e cosseno com os quatro parâmetros. E, ao comparar as funções transformadas com as funções básicas, eles ratificaram os conhecimentos construídos anteriormente nas questões que trabalharam cada parâmetro individualmente.

Mais uma vez, notamos a importância de um trabalho investigativo com auxílio do *software* GeoGebra, tendo em vista que a manipulação da ferramenta propiciou a construção dos conceitos sobre as transformações gráficas das funções seno e cosseno.

A última questão sobre a atividade 5 foi a $Q_{5/6^{o}}$. Nessa questão, solicitou-se que: **$Q_{5/6^{o}}$:** **"Com base nessa atividade, como você pode utilizá-la para auxiliar a responder as atividades 2 e 3?".** A finalidade principal era que os licenciandos associassem a tarefa aos conhecimentos adquiridos para funções seno e cosseno no GeoGebra nesse roteiro, a fim de contribuir na resolução das questões da atividade da roda-gigante e das marés do Porto de Aratu, uma vez que eles já adquiriram um melhor embasamento para o uso do *software*.

Destacamos abaixo as respostas dos grupos relacionadas à tarefa em pauta.

$R_{5/6^{o}:1}$◊: podemos utilizá-la para a construção dos gráficos e identificação de quais parâmetros fazem as funções serem modificadas, além de compreender os fenômenos periódicos.

$R_{5/6^{o}:2}$◊: trabalhamos nas atividades 2 e 3 com fenômenos periódicos. A partir da resolução dessa atividade, conseguimos visualizar e entender melhor como se dão esses fenômenos, com base no estudo das funções seno e cosseno, os processos de contração, dilatação e translação.

$R_{5/6^{o}:3}$◊: podemos utilizar para verificar a amplitude e os períodos. Na atividade 2, das marés, amplitude alta e baixa e períodos em que ocorrem. Na atividade 3, da roda-gigante, a amplitude relacionada aos pontos onde a cabine para e o período, que é quando a volta se repete em 10 minutos.

$R_{5/6^{o}:4}$◊: as construções dos gráficos podem auxiliar na visualização dos fenômenos periódicos.

$R_{5/6^{o}:5}$◊: tanto a atividade 2 quanto a 3 tratam de fenômenos periódicos. Então, pode-se usar o modelo da atividade 5, pois os gráficos são bem parecidos e, a partir da análise do gráfico da atividade referida, podemos contemplar melhor a periodicidade e comportamento gráfico das outras atividades.

R**$_{5/6º:6}$*◊:*** em relação à atividade 2, o uso das funções seno e cosseno pode servir como base para a construção das ondas, atribuindo valores de tempo e amplitude. Na atividade 3 ela serviria de auxílio para visualizar melhor o movimento da roda-gigante e da cabine no que tange à altura e ao tempo.

R**$_{5/6º:7}$*◊:*** é possível representar ambos exercícios encontrando as funções trigonométricas respectivas.

R**$_{5/6º:8}$*◊:*** como os exemplos das atividades são fenômenos periódicos, é possível usar as funções seno e cosseno para modelar os fenômenos apresentados nas atividades e empregar as transformações gráficas de acordo com a necessidade do fenômeno.

R**$_{5/6º:9}$*◊:*** a gente utilizaria os gráficos das atividades para responder as atividades 2 e 3, modificando apenas os valores máximos e mínimos do controle, ajustando-os para os valores específicos das tarefas 2 e 3.

R**$_{5/6º:10}$*◊:*** podemos observar que em um determinado tempo os movimentos das funções vão se repetindo, como os movimentos da roda-gigante e da maré. Essa atividade nos ajuda a visualizar melhor as mudanças de fases e os fenômenos periódicos, o que contribui fornecendo um suporte na hora de responder as atividades vinculadas aos fenômenos periódicos.

Conforme destacado nas respostas, todos os grupos afirmaram a atividade 5 como uma forma de representar as atividades 2 e 3, uma vez que envolvem a periodicidade. Os grupos ainda ressaltam, a exemplo do 7, que, para melhor representar, é necessário encontrar a lei de formação de cada fenômeno.

Durante a sessão 6, após a exploração e socialização dos resultados de cada grupo, a professora realizou a institucionalização dos conceitos sobre as transformações gráficas das funções seno e cosseno. Explicitando cada parâmetro trabalhado, a partir das experimentações realizadas no GeoGebra, e dos conteúdos prévios trabalhados anteriormente. Esse momento de institucionalização ocorreu de forma conjunta, a professora com os alunos, explorando o comportamento e alterações dos fenômenos estudados.

Segundo os grupos, a periodicidade dos fenômenos e as transformações gráficas das funções ao se utilizar o modelo da atividade 5, permite um melhor entendimento. Portanto, os licenciandos perceberam, na representação gráfica, um modo de melhor explorar as atividades envolvendo os fenômenos periódicos. a seguir na tabela 8, explicitaremos as noções teóricas evocadas pelos estudantes durante a participação na sessão 6.

Tabela 8 – Noções teóricas evocadas pelos estudantes na sessão 6

Noções teóricas	**Respostas**
Ostensivos mobilizados:	Na exploração da sessão 6, os estudantes levantaram **ostensivos escriturais, gráficos, discursivos e gestuais;**
Não-ostensivos evocados:	Noção das transformações gráficas das funções seno e cosseno;
Dialéticas evocadas:	Individual e coletiva; Perguntas e respostas, pois a partir da exploração das construções no software os estudantes conseguem compreender e construir os conceitos matemáticos envolvidos.
Tipo de tarefa por organização matemática exploratória:	Construir modelos matemáticos dinâmicos para estudo por meio do software; Experimentar os modelos, manipulando-os para construção de conceitos matemáticos; Observar as relações e características matemáticas entre os modelos;

Fonte: a autora (2020)

Por meio dos ostensivos gráficos e escriturais evocados pelos estudantes. Podemos inferir, que o modelo didático alternativo de nosso PEP, integrado ao geogebra, permitiu a construção das praxeologias matemáticas sobre as funções seno e cosseno, integradas as organizações matemáticas locais do círculo trigonométrico e funções trigonométricas. De modo a compreender as funções seno e cosseno e suas transformações. Observamos no quadro 31, as praxeologias matemáticas levantadas no MER que foram construídas pelos estudantes durante as explorações e participações em todas as sessões do PEP.

Quadro 31 – Praxeologias Matemáticas construídas sobre as funções seno e cosseno e suas transformações gráficas durante as sessões do PEP.

Tipo de tarefa	Técnica	Discurso tecnológico-teórico
T_1: associar as funções seno e cosseno com pontos no ciclo trigonométrico ao gráfico no plano cartesiano e esboçar o gráfico das funções.	τ_1: identificar os pontos correspondentes no ciclo e no plano cartesiano e, em seguida, traçar o gráfico das funções seno e cosseno.	$[\theta, \Theta]_1$: definição das funções seno e cosseno/funções circulares/trigonométricas.
T_2: identificar as características das funções a partir da análise no ciclo trigonométrico e no gráfico das funções seno e cosseno.	τ_2: comparar e associar no ciclo e no gráfico a imagem, período, domínio das funções seno e cosseno e, na sequência, descrevê-las.	$[\theta, \Theta]_1$: definição das funções seno e cosseno/funções circulares/trigonométricas.

T_1: esboçar o gráfico das funções do tipo f(x)= A + sen (x-c) +d e g(x)= A + cos (x-c) – d.	f_1: identificar as transformações gráficas, alcançá-las no gráfico e esboçar o gráfico de cada função.	$[\theta, \Theta]_1$: transformações gráficas das funções seno e cosseno/funções trigonométricas.
T_2: determinar a lei de formação das funções a partir da análise do gráfico.	f_2: analisar a função circular representada no gráfico, identificar as transformações gráficas sofridas no gráfico e, por fim, determinar a lei de formação da função.	$[\theta, \Theta]_1$: transformações gráficas das funções seno e cosseno/funções trigonométricas.

Fonte: a autora (2020).

Salientamos, que para o alcance dessas praxeologias matemáticas a utilização integrada do software GeoGebra foi de grande relevância. Pois o mesmo proporcionou a partir dos ostensivos gráficos, que os estudantes representassem os seus não ostensivos, de modo a compreender o estudo das funções seno e cosseno. Além disso, a modelação dos fenômenos físicos periódicos, permitiu que os estudantes, pudessem compreender um fenômeno e a partir de sua exploração, construir um modelo matemático para o estudo das funções seno e cosseno. E assim, a partir do modelo geométrico, chegar a exploração do algébrico, considerando as praxeologias matemáticas que privilegiam o modelo circular e o modelo oscilatório.

Nesse âmbito, observamos, de acordo com as seis sessões, que os discentes desenharam um rascunho para responder a nossa questão geratriz, aproximando-se da resposta esperada ***R*♥**.

Após finalização da atividade mencionada e explanação dos resultados pelos grupos, retomamos a nossa questão ***Q₀*: "Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos?".** Ao retomar a nossa Q_0, os alunos escreveram em seus cadernos de registros e, em seguida, socializaram as respostas de cada grupo. Acompanharemos abaixo a resposta esperada ***R*♥** de cada grupo.

***R*₁♥**: podemos modelar pelas funções trigonométricas e pelos parâmetros que indicam: amplitude, mudanças de fase, dilatações, contração, entre outros.

***R*₂♥**: na nossa primeira anotação falamos em desenvolver um padrão para fenômenos físicos que ocorrem em intervalos de tempo iguais. A partir do estudo mais aprofundado, nossa visão se confirmou; no estudo das funções seno e cosseno conseguimos verificar esse padrão e é por intermédio dele que podemos modelar essas periodicidades, desenvolvendo o padrão, onde há repetição dos ciclos.

R$_3$**♥**: através das funções trigonométricas.

R$_4$**♥**: a partir de funções matemáticas (como as funções seno e cosseno) e gráficos para interpretar as questões e visualizar a periodicidade dos fenômenos e outros comportamentos que possam interferir na sua periodicidade.

R$_5$**♥**: por meio das funções seno e cosseno e suas representações gráficas.

R$_6$**♥**: a modelagem matemática pode ser feita por intermédio das funções trigonométricas seno e cosseno.

R$_7$**♥**: na matemática existem duas funções, seno e cosseno, nas quais o gráfico tem uma forma periódica, e, ao alcançá-las, percebemos um comportamento com um início e um fim, assim repetindo-se. Ou seja, através de uma análise de fenômenos físicos periódicos, constata-se que há um movimento periódico entre seu começo e fim, como em funções seno e cosseno pode se modelar com a variação de valores na sua lei de formação (amplitude, período, translação). É possível também fazer o mesmo com fenômenos físicos periódicos, como, por exemplo, a maré, que pode ser analisada como uma forma de função; acreditamos que com isso possa ser estabelecida uma lei de formação para tal fenômeno.

R$_8$**♥**: é viável modelar por meio das funções trigonométricas utilizando transformações dos gráficos para ajuste ao fenômeno estudado.

R$_9$**♥**: por intermédio das funções trigonométricas e seus gráficos.

R$_{10}$**♥**: podemos modelar através de funções trigonométricas, como, por exemplo, as funções seno e cosseno e o círculo trigonométrico para auxiliar no modelo.

Destacamos, alicerçados nas respostas acima, que, partindo do contexto extra-matemático, os grupos conseguiram chegar ao contexto intra-matemático. Fundamentados no PEP, trabalhamos organizações matemáticas integradas ao GeoGebra para o estudo de funções seno e cosseno. Tendo a professora o papel de mediadora na aplicação do PEP, e os estudantes por meio das dialéticas perguntas e respostas, e ostensivos e não ostensivos, o papel principal nesse processo de estudo.

A utilização da modelação matemática, a partir de um contexto interdisciplinar, permitiu que os estudantes tivessem contato com a razão de ser social, das funções seno e cosseno, e por meio dessa exploração alcançassem dois modelos para o estudo dessas funções, o circular e o oscilatório.

Nesse sentido, apesar dos licenciandos em matemática, estarem inseridos em instituições que o contrato didático difere do paradigma do questionamento do mundo e do PEP, como foi mostrado no MED, os mesmos conseguiram estudar as funções seno e cosseno por meio de uma questão geratriz, e tendo o papel do professor como um mediador.

Ao fazer uso do *software* GeoGebra em nosso PEP de maneira integrada, foi possível compreender a relevância da integração do modelo circular com o oscilatório para o entendimento das funções em pauta e suas transformações.

Ao chegar nas funções seno e cosseno por meio do GeoGebra de modo integrado como um modelo matemático para trabalhar fenômenos físicos periódicos, alcançamos o ponto fulcral de nosso PEP.

Nesse sentido, no próximo tópico iremos analisar as sessões evidenciadas a partir de sistemas didáticos.

4.2.2 Análise do PEP vivenciado

Organizamos a análise com base no sistema herbatiano de Chevallard (2009). Dessa maneira, temos em nossa pesquisa um sistema didático S(X, Y, Q_0), no qual X representa os grupos de estudantes das turmas de Pré-cálculo, Y é o diretor de estudo (professora da disciplina/pesquisadora) e Q_0 é a questão geratriz. Através do estudo de Q_0/Q buscamos a resposta esperada, considerada por Chevallard (2009) como resposta *R*♥, ou seja, *S* (*X*; *Y*; *Q*) → *R*♥.

A partir da questão geratriz surgem questões secundárias e outras respostas *R*◊ (carimbadas) a fim de chegar à resposta esperada. E como geralmente não se mobiliza apenas uma ferramenta praxeológica para resolver um sistema didático, X organizam um ambiente M, como abordado anteriormente, e outras respostas serão como obras culturais, que fornecerão mecanismos para a análise das respostas $R^{\lozenge}$; assim, temos outros sistemas didáticos: [*S* (*X*; *Y*; *Q*) → {$R^{\lozenge}_1$, $R^{\lozenge}_2$,..., $R^{\lozenge}_n$, $O_{n+1,...,}$ O_m}] → *R*♥.

Porém, como nossa pesquisa teve como participantes dez trios, examinamos as respostas dos discentes, de parte das atividades como sistemas didáticos auxiliares, sendo um por grupo para cada sessão. Isto é, a cada sessão que trabalhamos com uma questão, almejamos organizar em sistemas didáticos auxiliares as análises de cada grupo. Apresentaremos a seguir os dados e análise de cada sessão de estudo.

Na primeira sessão de estudo, expusemos a questão geratriz Q0 e, a partir da exploração desta, os grupos levantaram questões secundárias e respostas para essas questões, como vimos acima.

Nosso sistema didático principal é o que nos leva à resposta da questão geratriz, isto é, [S (X; Y; Q) → *R*♥. Mas, para alcançá-lo em nossa experimentação do PEP, passamos por sistemas auxiliares com respostas $R\Diamond_n$ para que, por intermédio desses sistemas auxiliares, chegássemos ao sistema didático principal.

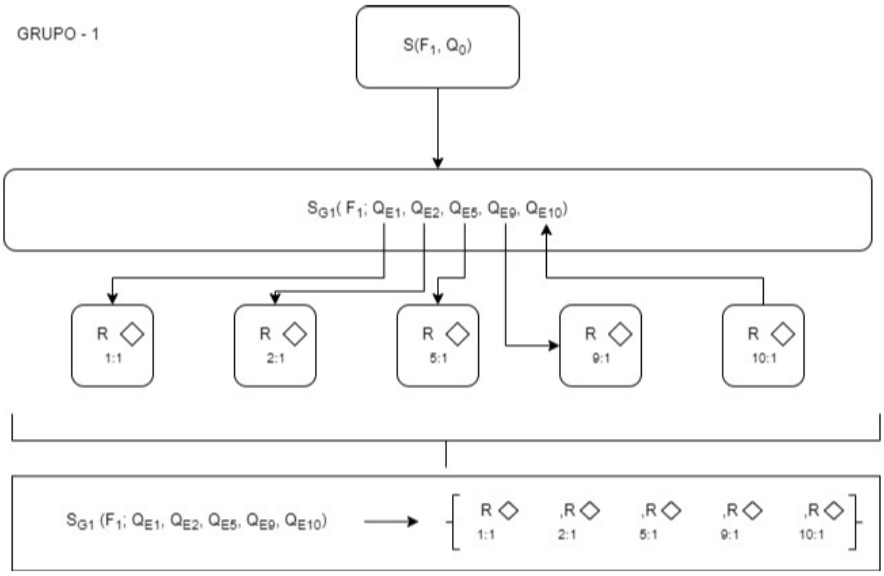
Nesse aspecto, demonstraremos a análise mais refinada das seis sessões de estudo, as quais denominaremos de formações enumeradas de um a seis, com as siglas F1, F2, F3, F4, F5 e F6. Em cada formação explanaremos um sistema auxiliar por grupo; ao final da análise de cada formação, construiremos um organograma resumindo um sistema didático auxiliar com a síntese da formação. Após realização, análise das seis formações e resumo dos organogramas, apresentaremos o organograma final representando o sistema didático basilar para alcançar a resposta *R*♥.

4.2.2.1 Análise da formação 1: sessão 1

A sessão 1 foi responsável pela exploração da Q_0, configurando o momento de encontro com a organização e de desafio aos discentes. Após esse primeiro momento de contato, iniciou-se o segundo momento, o da exploração dos tipos de tarefas e elaboração da possível técnica para o tipo de tarefa elaborada. A partir da Q0, surgiram novos questionamentos, e desses novos questionamentos surgiram técnicas mais refinadas que levaram à resposta da questão geratriz. Nesse sentido, explanaremos na sequência os sistemas auxiliares de cada grupo, construídos na formação 1 ou sessão 1.

O primeiro sistema auxiliar apresentado é o do grupo 1:

Figura 91 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 1.

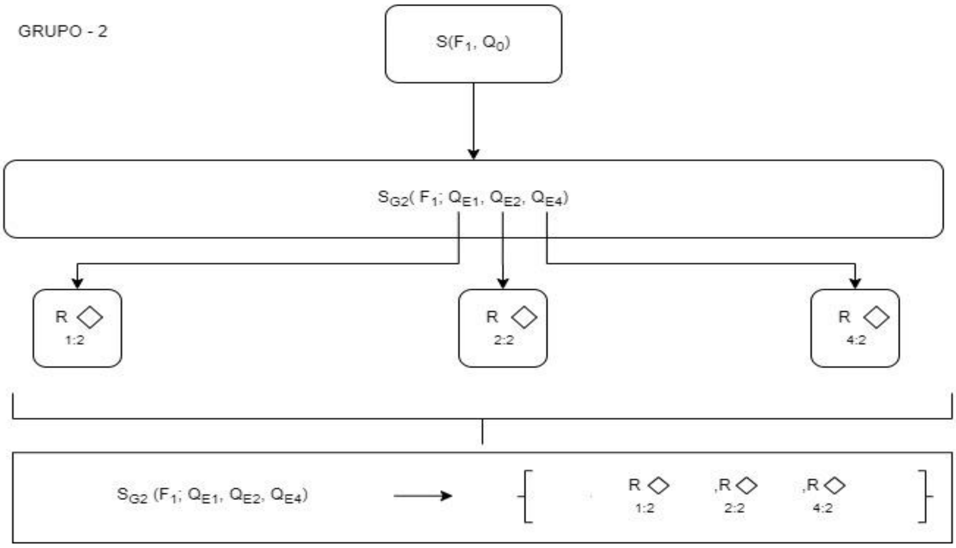


Fonte: a autora (2020).

O grupo 1, por meio da exploração da Q_0, levantou cinco questões secundárias. As questões foram relacionadas ao desmembramento da Q_0 para o entendimento desta. De acordo com as respostas evidenciadas nas questões, observamos que o grupo 1 buscou em mídias digitais, ou seja, as obras consultadas para responder as questões secundárias levantadas pelo grupo foram artigos científicos publicados sobre modelagem matemática e modelagem científica dos fenômenos físicos com o intuito de compreender como modelar. As questões 9 e 10 elaboradas por eles discutiram suas concepções a respeito do tema, com as respostas apresentadas – o que aponta indícios da dialética mídia-meio, pois os estudantes evocam conhecimentos adquiridos anteriormente e os confrontam com as informações levantadas nas questões antecedentes.

Quanto ao grupo 2, este expôs três questões secundárias no estudo da Q_0.

Figura 92 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 2.

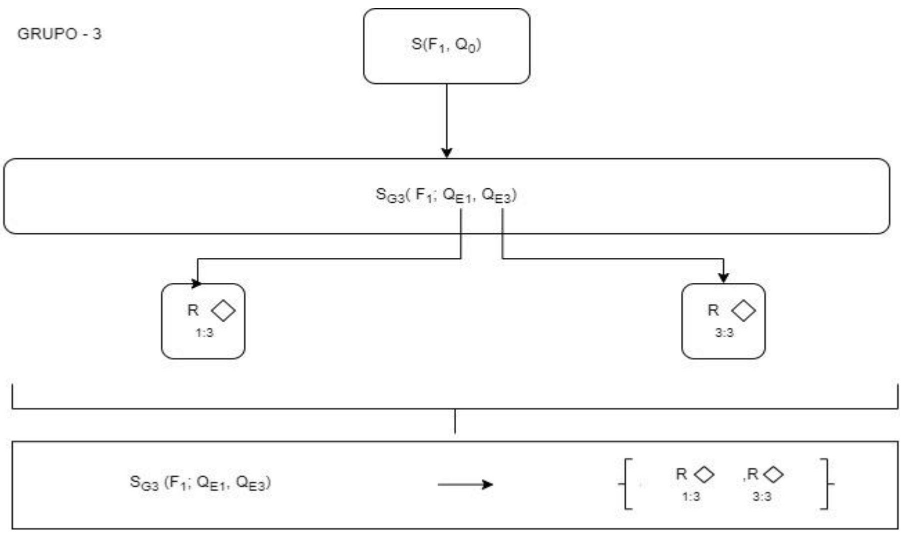


Fonte: a autora (2020).

As respostas para a questão secundária 1 foram iguais em todos os grupos, mas na questão secundária 2 o grupo 2 apresentou a definição de modelagem proposta por Biembengut e Hein (2011). Observamos, na consulta das obras, a abordagem de definições "prontas"; porém, o grupo utilizou das respostas das questões 1 e 2 para construir a resposta da questão secundária 4, por meio de discussões e formulações em conjunto – novamente o confronto com elementos conhecidos e novos conhecimentos é realizado para construção da resposta secundária.

Quanto ao grupo 3, este desenvolveu duas questões secundárias, a primeira com uma resposta padrão a todos os grupos, e a questão secundária 3 (Figura 93).

Figura 93 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 3.

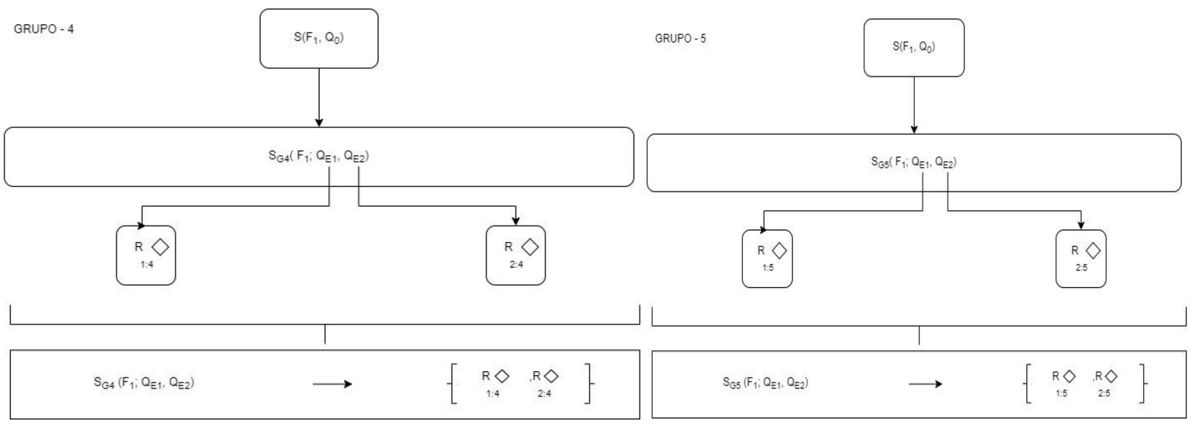


Fonte: a autora (2020).

O grupo apresenta a resposta de Q_{e3} baseado na definição de fenômenos periódicos e nos conhecimentos prévios estabelecidos durante sua vida escolar. O sistema auxiliar representado mostra a mobilização dos conhecimentos antecedentes sobre física, periodicidade e tempo para responder a Q_{e3}.

Quanto ao grupo 4, temos a repetição das questões secundárias 1 e 2. As respostas à Q_{e2} do grupo também foram embasadas a partir da leitura de artigos e de conhecimentos prévios, conforme afirmou o grupo.

Figura 94 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupos 4 e 5.

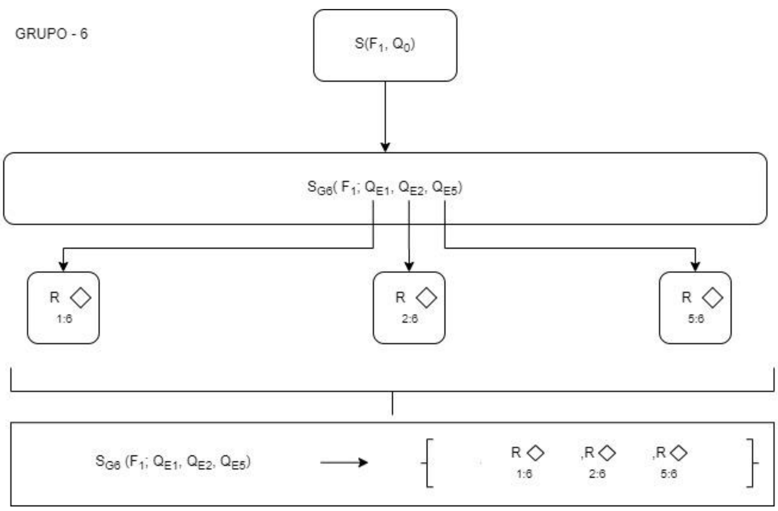


Fonte: a autora (2020).

O grupo 5 explanou a resposta à Q_{e2} embasado em conhecimentos pessoais, não tendo um aprofundamento maior, trazendo a modelagem para estimular o interesse pela matemática.

O próximo grupo foi o 6, que apresentou 3 questões, sendo elas a 1, 2 e 6.

Figura 95 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 6.

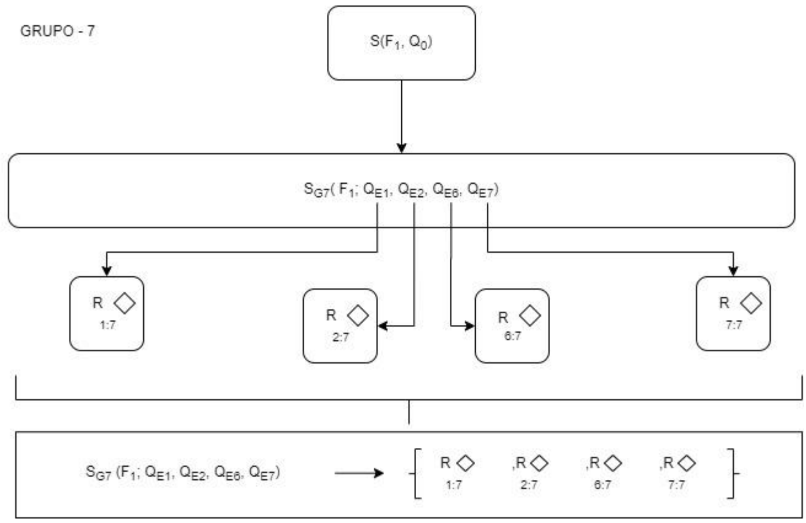


Fonte: a autora (2020).

A resposta à Q_{e2} do grupo fundamentou-se na mídia relacionada à matemática, buscando uma resposta oficialmente "carimbada", como aborda Chevallard (2007). Quanto à Q_{e5}, o grupo trouxe um questionamento sobre a trigonometria. Observou-se que, ao responder que as funções trigonométricas são um objeto do saber que pode estar envolvido no fenômeno, o grupo já mostra um discurso tecnológico-teórico sobre o tema, de modo a almejar uma assimilação com as funções.

O grupo 7 expôs quatro questões em seu sistema didático.

Figura 96 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 7.

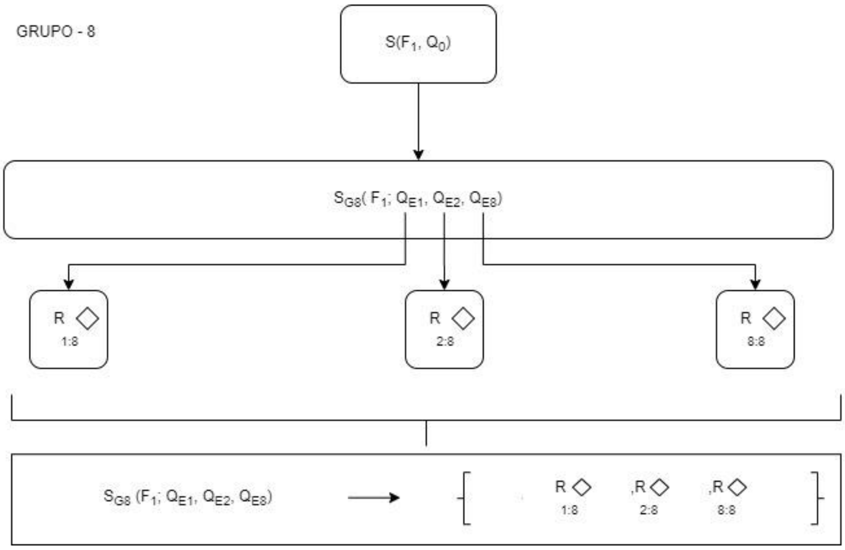


Fonte: a autora (2020).

Assim como o grupo 1, o grupo 7 apresentou na Q_{e2} a consulta de mídias para formalização da resposta à Q_{e2}. O grupo baseou-se em obras, indicando definições "prontas"; porém, utilizou das respostas das questões 1 e 2 para construir a resposta das questões secundárias 6 e 7. Já na Q_{e7}, assim como o grupo 6, verificamos a necessidade de um discurso tecnológico-teórico, visto que o grupo intentou relacionar o tempo com a circunferência, com os fenômenos físicos periódicos. Quanto à Q_{e6} o grupo explanou uma resposta mais específica, associada à medição do tempo, para destacar a importância dos fenômenos físicos periódicos.

O grupo 8 apresentou o sistema didático auxiliar seguinte:

Figura 97 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupo 8.

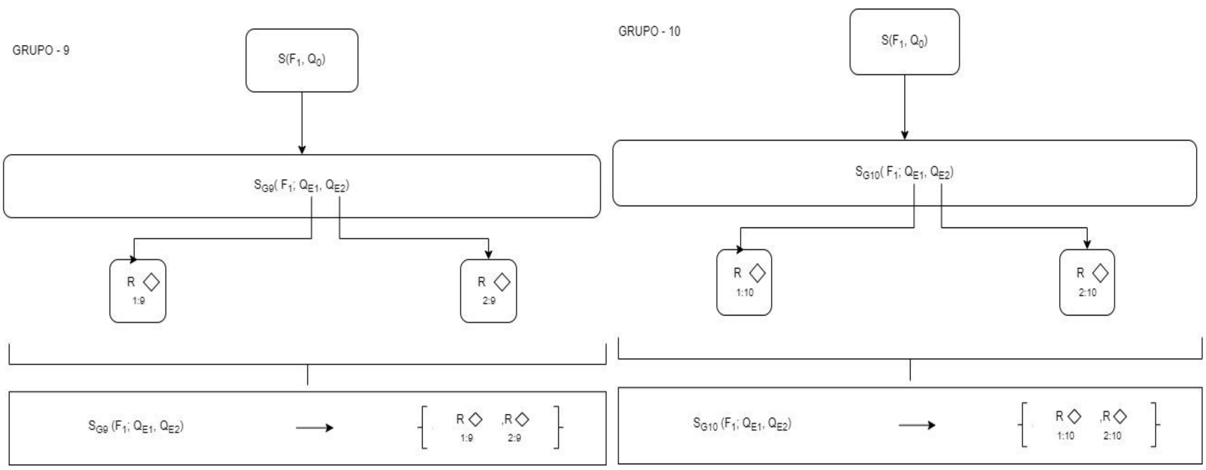


Fonte: a autora (2020).

O grupo 8 expôs na questão Q_{e2} a mesma resposta do grupo 7. Quanto à Q_{e3} o grupo abordou a modelação a partir do padrão de tempo, enfatizando a necessidade de estabelecer intervalos para realizar previsões, transformando assim em função. O grupo aponta um discurso tecnológico-teórico alicerçado na função como uma forma de modelar fenômenos. O grupo confronta as respostas das questões anteriores com seus conhecimentos. Observamos, assim, a dialética mídia-meio em ação.

Quanto aos grupos 9 e 10, ambos apresentaram as questões Q_{e1} e Q_{e2}.

Figura 98 – Organograma do sistema auxiliar da Formação 1 grupos 9 e 10.



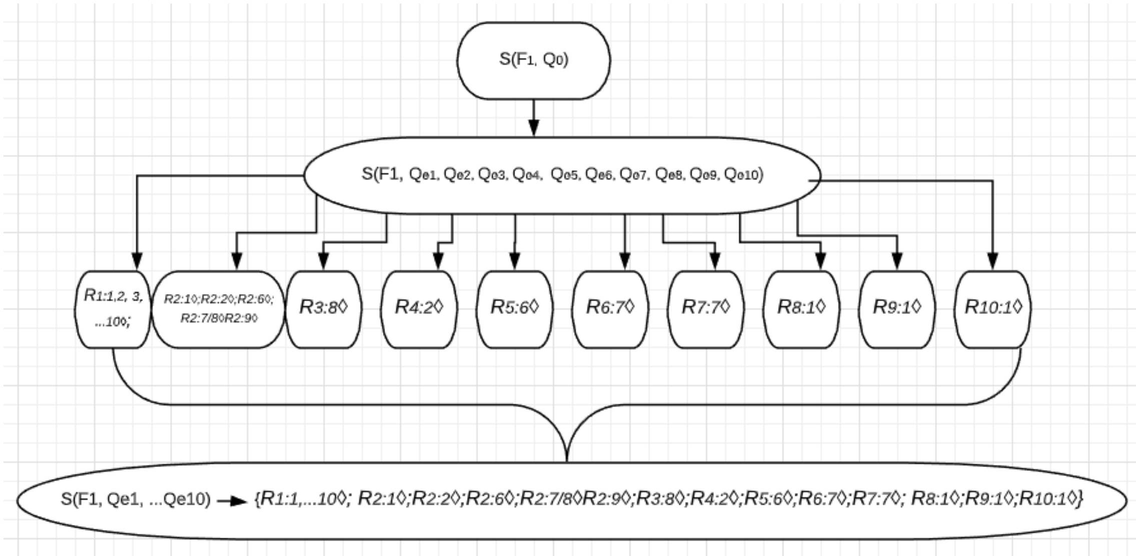
Fonte: a autora (2020).

Ambas as respostas são similares, e os grupos buscaram nas mídias as informações a respeito, consultando obras científicas publicadas e validadas no ambiente acadêmico.

Desse modo, conforme os sistemas didáticos auxiliares de cada grupo, explanaremos, a seguir, um organograma resumo dos sistemas didáticos para finalizar a análise da sessão 1.

Importante frisar que as questões e respostas do organograma abaixo foram validadas após a discussão com as turmas. Excluímos respostas não validadas pelo grupo e as repetidas, considerando apenas as que nos levaram ao percurso da resposta esperada *R*♥.

Figura 99 – Organograma resumo F1 do sistema auxiliar com as respostas validadas pelos grupos.



Fonte: a autora (2020).

4.2.2.2 Análise da sessão 2

Na sessão 2, após explanação das questões secundárias, e com base nas respostas das questões elaboradas pelos licenciandos, abordamos a questão Q_1. Esta questão foi planejada a fim de provocar os estudantes a averiguar os fenômenos físicos periódicos. Denominamos de formação 2 – F2. Conforme objetivo da sessão, os discentes pesquisaram uma série de fenômenos físicos. Exporemos na sequência os fenômenos elencados pelos alunos em forma de quadro. Pela natureza dos dados da questão não a destrinchamos em sistemas didáticos.

Quadro 32 – Fenômenos físicos periódicos elencados pelos alunos.

Fenômenos Físicos Periódicos
Ondas sonoras; ondas marítimas; ciclo menstrual; rotação da terra; visita do Cometa Halley; fases da lua; dia e noite; pêndulo simples; estações do ano; El Niño; bombeamento do sangue; vibrações das placas tectônicas; piscar dos olhos; astronomia; acústica; fenômenos elétricos, óticos e mecânicos; frequência cardíaca; ciclo da maré; relógio; pressão sanguínea; variação da temperatura atmosférica; calendário; movimento de translação e rotação; ciclo da vida de certos animais; órbita dos planetas em relação às estrelas; trajetórias de cometas; ciclo de um pêndulo simples; ciclo de um pêndulo de Newton; ciclo de ondas eletromagnéticas e mecânicas; e *spin* de partículas substanciais.

Fonte: a autora (2020).

Com base nos dados do Quadro 32, percebemos os diferentes fenômenos expostos pelos licenciandos. Realçamos que os fenômenos possuem características que permitem ser modelados pelo modelo circular e/ou oscilatório harmônico. Esse fato nos abre um leque de possibilidades ao trabalhar as praxeologias matemáticas no PEP.

Salientamos ainda que, entre os fenômenos periódicos, o ciclo da maré que planejamos anteriormente surgiu na experimentação como esperávamos, propiciando que os estudantes compreendessem a integração entre as sessões de formação/experimentação.

Essa sessão, permitiu o primeiro contato dos estudantes, com a razão de ser social das funções seno e cosseno, a partir da busca por diversos fenômenos físicos periódicos, que comungam com as algumas necessidades que foram levantadas na análise epistemológica da trigonometria e funções trigonométricas.

4.2.2.3 Análise da sessão 3

A sessão 3 foi planejada considerando como variável o modelo a ser trabalhado, oscilatório ou circular, e a potencialidade da função quanto ao registro – sendo o dessa atividade o numérico. A sessão em foco fez parte da formação 3 – F3. As praxeologias matemáticas que estão em jogo buscam, de forma intuitiva, determinar a periodicidade do fenômeno, a frequência em que ele ocorre, a amplitude e, por fim, após análise e mensuração de valores, por meio de uma figura, um modelo que melhor represente o estudo do fenômeno ciclo das marés. Foram cinco questões a serem respondidas nesta sessão. A seguir, temos o sistema didático auxiliar do grupo 1.

$$\text{G 1: } S1_{G1}(F_3;\ Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\!:_{1}\Diamond,\ R_{2b}\!:_{1..10}\Diamond,\ R_{2c}\!:_{1/3/6/7/9}\Diamond,\ R_{2d}\!:1\Diamond,\ R_{2e}\!:_{1}\Diamond\}$$

Ponderamos que o grupo 1, com base na análise da atividade 2, compreendeu a periodicidade e, por intermédio de ostensivos, escreveu a periodicidade com que se repete o fenômeno na questão 2, item a. Quanto ao item b, sem dificuldade, observou a tabela e entendeu a quantidade de marés altas e baixas.

No item c, o grupo apresentou, através de ostensivos, o cálculo da amplitude, expondo a variação das marés diretamente, sem realização de cálculo. Inferimos que por meio de não ostensivos os estudantes do grupo realizaram a variação entre as marés e explanaram o valor final no cálculo da amplitude. A técnica empregada foi o cálculo das operações para determinar a amplitude, configurando o discurso tecnológico-teórico, a variação média da amplitude/funções trigonométricas. No item d, o grupo mediu, a partir da periodicidade, os valores do dia 3 e, apoiado nas discussões, mensurou o melhor horário para o passeio.

Para o item e) o grupo utilizou o modelo oscilatório, partindo da construção no GeoGebra do domínio numérico para o gráfico, conforme almejávamos na análise *a priori*. Temos o modelo oscilatório forte em todos os grupos.

Quanto ao grupo 2, formou-se o seguinte sistema auxiliar:

$$G2: S1_{G2}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\!:_{2}\Diamond, R_{2b}\!:_{1,..10}\Diamond, R_{2c}\!:_{2/4/8/10}\Diamond, R_{2d}\!:_{2}\Diamond, R_{2e}\!:_{2}\Diamond\}$$

O grupo 2 abordou como resposta ao item a periodicidade, ressaltando, porém, a dificuldade em compreender o período do fenômeno, uma vez que não há um padrão explícito. De acordo com o entendimento de período explanado pelo grupo, este não conseguiu encontrar um valor exato para o período e sim um valor aproximado, considerando as variações. Observamos a ideia de exatidão muito predominante na matemática, e, por julgarem que o período deve ser um valor exato que se repete, a dificuldade se instaurou. Entretanto, conforme a confrontação entre os membros do grupo ocorria, este alcançou a resposta.

Quanto ao item b, o grupo respondeu de imediato. No item c), por seu turno, o grupo utilizou ostensivos das operações fundamentais para calcular a variação das marés e, em seguida, calculou a amplitude média geral dos dois dias juntos, somando tudo e dividindo por quatro. Pontuamos que o grupo restaurou o conceito de média aritmética para calcular, ou seja, evocou o não ostensivo e chegou à resposta apresentada. Contudo, não considerou que a amplitude era para ser calculada por dia; este fator foi levantado pelos demais grupos, que debateram e decidiram não validar as respostas dessa forma, uma vez que não consideraram na questão a junção das amplitudes, mas o cálculo médio da amplitude diária.

Quanto ao item d), o grupo mensurou e, com base na coluna construída do dia 3, esboçou o modelo oscilatório no GeoGebra, respondendo o item d

Os grupos 3 e 7 explanaram sistemas didáticos similares ao do 1; desse modo, evidenciaremos os sistemas a seguir.

G3: $S1_{G3}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\colon_{3}\Diamond, R_{2b}\colon_{1..10}\Diamond, R_{2c}\colon_{1/3/6/7/9}\Diamond, R_{2d}\colon_{3}\Diamond, R_{2e}\colon_{1}\Diamond\}$

G7: $S1_{G7}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\colon_{7}\Diamond, R_{2b}\colon_{1..10}\Diamond, R_{2c}\colon_{1/3/6/7/9}\Diamond, R_{2d}\colon_{7}\Diamond, R_{2e}\colon_{7}\Diamond\}$

Ambos os grupos expuseram no item a) a periodicidade como fator principal da observação. Atrelado a isso, os grupos apresentaram um discurso tecnológico-teórico semelhante ao do grupo 1 para levantar as questões seguintes. Além disso, os grupos abordaram ostensivos para o cálculo da amplitude média da maré e mobilizaram um discurso tecnológico-teórico para validação das respostas relacionadas à amplitude e funções trigonométricas, mas de maneira tímida.

Os grupos 4 e 10 apresentaram um discurso mais robusto no tocante à observação do item a), destacando a força gravitacional da lua e a da terra variando de acordo com as fases da lua como fatores que influenciam nas marés. Verifica-se um discurso tecnológico-teórico interdisciplinar que já apresenta tecnologias relacionadas à física para justificar a questão da atividade 2. No item b) responderam como todos os grupos.

No item c), assim como o grupo 2, os grupos 4 e 10 apresentaram ostensivos das operações fundamentais para calcular a variação das marés e depois calcular a amplitude média geral dos dois dias juntos, somando tudo e dividindo por quatro. Nessa esfera, os grupos restauraram o conceito de média aritmética para calcular, isto é, evocaram o não ostensivo e chegaram à resposta explanada. No entanto, não consideraram que a amplitude era para ser calculada por dia, e devido a isso a resposta não foi validada pela turma. Seguem abaixo os sistemas didáticos auxiliares dos grupos 4 e 10.

G4: $S1_{G4}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\colon_{4}\Diamond, R_{2b}\colon_{1,...10}\Diamond, R_{2c}\colon_{2,4,8.10}\Diamond, R_{2d}\colon_{4}\Diamond, R_{2e}\colon_{4}\Diamond\}$

G10: $S1_{G10}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}\colon_{10}\Diamond, R_{2b}\colon_{1,...10}\Diamond, R_{2c}\colon_{2,4,8.10}\Diamond, R_{2d}\colon_{10}\Diamond, R_{2e}\colon_{10}\Diamond\}$

Quanto aos itens d) e e) os grupos 4 e 10 mensuraram os valores das marés, e, a partir da variação das marés encontradas para o dia 03/07, esboçaram o modelo oscilatório. Percebe-se que a construção do grupo no ambiente papel e lápis é bem similar à do GeoGebra, e que ambos evocaram os ostensivos gráficos para representar o fenômeno estudado.

Quanto ao grupo 5, apresenta no item a) um discurso tecnológico-teórico semelhante ao dos grupos 4 e 10, expondo justificativas mais teóricas relacionadas a obras de física, com detalhes a respeito do fenômeno da maré. No item b) a resposta foi direta, sem confronto, a partir da observação da tabela. Já no item c) o grupo não considerou as variações diárias que ocorrem, apenas mobilizou ostensivos para calcular a variação entre a maior maré do dia e a menor, não atentando para a periodicidade do fenômeno, considerando somente o dia 02/07. Dessa maneira, a resposta não foi validada. Quanto aos itens d e f), o grupo mobilizou ostensivos e conseguiu mensurar os valores do dia 03/07, além de construir um modelo oscilatório, justificado pelo comportamento dos fenômenos de crescimento e decrescimento, resultando, assim, no sistema didático $S1_{G5}$.

$$G5: S1_{G5}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}:_{5}\lozenge, R_{2b}:_{1,...,10}\lozenge, R_{2c}:_{5}\lozenge, R_{2d}:_{5}\lozenge, R_{2e}:_{5}\lozenge\}$$

Os grupos 6, 8 e 9 apresentaram respostas análogas. No item 1 os três grupos destacaram a oscilação do fenômeno com pontos de variação de crescimento e decrescimento, o que já conforma um discurso tecnológico, relacionado a um comportamento padrão das funções, no qual podem-se analisar pontos em que a função cresce e decresce. Quanto ao item b) os três grupos chegaram à resposta esperada, por meio da análise de tabela, apenas por mobilização de não ostensivos, não explicitando o caminho até a obtenção dos valores. Observemos os sistemas abaixo.

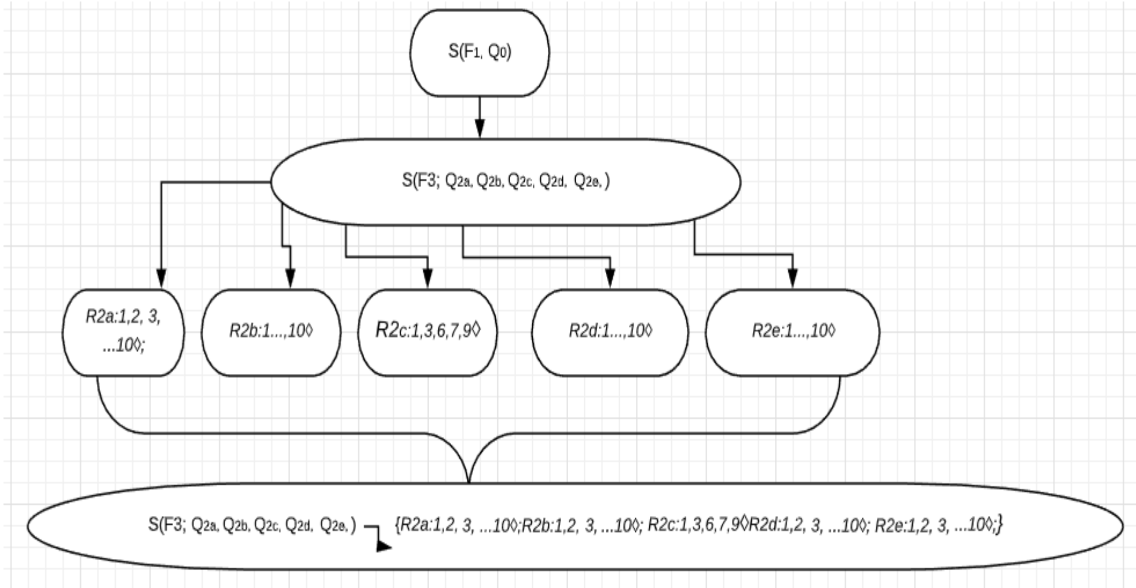
$$G6: S1_{G6}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}:_{6}\lozenge, R_{2b}:_{1..10}\lozenge, R_{2c}:_{1/3/6/7/9}\lozenge, R_{2d}:_{6}\lozenge, R_{2e}:_{6}\lozenge\}$$
$$G8: S1_{G8}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}:_{8}\lozenge, R_{2b}:_{1,...10}\lozenge, R_{2c}:_{2,4,8.10}\lozenge, R_{2d}:_{8}\lozenge, R_{2e}:_{8}\lozenge\}$$
$$G9: S1_{G6}(F_3; Q_{2a}, Q_{2b}, Q_{2c}, Q_{2d}, Q_{2e}) \rightarrow \{R_{2a}:_{9}\lozenge, R_{2b}:_{1..10}\lozenge, R_{2c}:_{1/3/6/7/9}\lozenge, R_{2d}:_{9}\lozenge, R_{2e}:_{9}\lozenge\}$$

No item c) os grupos 6 e 9 calcularam, através de ostensivos escritos, o valor médio da maré com estratégia validada pela turma. Já o grupo 8 apresentou a estratégia geral de calcular uma média da amplitude dos dois dias juntos, sendo uma resposta não considerada pela instituição. No item d) os grupos expuseram ostensivos escriturais para estabelecer os valores das marés no dia 03/07 e, em seguida, mobilizaram ostensivos gráficos para esboço do modelo oscilatório tanto no ambiente papel e lápis quanto no GeoGebra.

De acordo com as análises acima, os grupos mobilizaram diferentes ostensivos e não ostensivos para justificar as praxeologias e respostas apresentadas. Além disso, observamos a presença de discursos tecnológico-teóricos do campo da matemática e da física para justificar a técnica ou estratégia escolhida. Desse modo, acentuamos a interdisciplinaridade de movimentar o discurso interdisciplinar, explanando tecnologias de duas disciplinas distintas.

Nesse sentido, demonstraremos o organograma que representa o sistema didático auxiliar da sessão.

Figura 100 – Organograma resumo F3 do sistema auxiliar com as respostas validadas pelos grupos.



Fonte: a autora (2020).

4.2.2.4 Análise da sessão 4

A sessão 4 teve como objetivo explorar um fenômeno que permitisse ser modelado pelo modelo circular; para analisá-la, organizamos o tópico novamente em sistemas auxiliares, a fim de levantar os ostensivos e não ostensivos empregados, bem como o discurso tecnológico-teórico dos grupos.

O grupo 1 teve o seguinte sistema:

$$G1: S1_{G1}(F_4; Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}:_{1/2/4/5/6/8/9/10}\lozenge, R_{3b}:_{1/2/...7}\lozenge, R_{3c}:_{1}\lozenge, R_{2d}:_{1/2/5/7/8/9/10}\lozenge\}$$

O grupo 1, no item a), expôs ostensivos gráficos para construção de um círculo, analisando-os e, a partir de não ostensivos como a concepção de periodicidade, encontrou o período, respondendo à questão. No item b), através de ostensivos escritos mobilizados, o grupo calculou regra de três, associando a altura por minuto e encontrando as respostas.

No item c) o grupo 1, conforme análise *a priori*, buscou obras e mídias que compõem o meio, a fim de construir o modelo oscilatório por intermédio da lei de formação. O grupo mobilizou um discurso tecnológico-teórico da função seno e suas transformações gráficas/funções trigonométricas. A partir da lei de formação definida pelo grupo, este construiu o modelo oscilatório no GeoGebra e no ambiente papel e lápis. Porém, ao socializar com a turma o resultado, os colegas apontaram um equívoco na lei de formação da função por não se ter considerado o diâmetro de 40 e o raio de 20. O grupo, todavia, corrigiu a fórmula após discussão, e os colegas a validaram.

No item d) o grupo evocou ostensivos escriturais e, ao realizar algumas operações fundamentais, respondeu à questão.

O grupo 2 tem como sistema auxiliar da atividade 3 o $S1_{G2}$ abaixo:

G2: $S1_{G2}(F_4;\ Q_{3a},\ Q_{3b},\ Q_{3c},\ Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}\text{:}_{1/2/4/5/6/8/9/10}\lozenge,\ R_{3b}\text{:}_{1/2/...7}\lozenge,\ R_{3c:2/3/4/8/9/10}\lozenge,\ R_{2d}\text{:}_{1/2/5/7/8/9/10}\lozenge\}$

As respostas do grupo 2 evocaram os ostensivos e não ostensivos levantados pelo grupo 1. A diferenciação se dá no item c), já que neste o grupo apresenta o modelo apenas no ambiente do GeoGebra, construindo um modelo circular dinâmico acompanhado de uma barra de alturas que, à medida que mexe o ponto representando a cabine, sofre um deslocamento marcando a altura exata do ponto. Notamos que o grupo abordou ostensivos gráficos integrados ao GeoGebra de forma a aproveitar a geometria dinâmica do *software* para explorar os conhecimentos matemáticos em jogo. Ademais, constatamos que o grupo explanou não ostensivos relacionados à matemática e ao GeoGebra que permitiram a construção do modelo. Quanto ao item d), o grupo usou a mesma estratégia do grupo 1.

O grupo 3 apresenta o sistema didático $S1_{G3}$.

G3: $S1_{G3}(F_4;\ Q_{3a},\ Q_{3b},\ Q_{3c},\ Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}\text{:}_{3/7}\lozenge,\ R_{3b}\text{:}_{1/2/...7}\lozenge,\ R_{3c:2/3/4/8/9/10}\lozenge,\ R_{2d}\text{:}_{3/6}\lozenge\}$

No item a) o grupo considerou apenas uma volta da roda-gigante. Utilizou ostensivos para compreender o período, mas não se atentou ao fato de que o passeio dura 30 minutos, ou seja, três voltas. No item b) o grupo demonstrou a técnica de regra de três para obter o resultado; assim como os grupos 1 e 2, evocou ostensivos escritos para realização da atividade. Quanto ao modelo no GeoGebra, item c), o grupo expôs o modelo circular e, baseado na tecnologia do ciclo trigonométrico, dividiu o círculo marcando alguns pontos que representam certos ângulos, trazendo o eixo das ordenadas com a altura, e o das abscissas com o tempo. Isto é, aproveitou ostensivos gráficos para chegar ao modelo desenhado. No item d) o grupo aplicou o ostensivo escrito, a técnica de resolução regra de três, usando, porém, os dados de modo equivocado, sem chegar à resposta almejada.

O grupo 4 apresenta o sistema didático G4:

$$G4: S1_{G4}(F_4; Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}{:}_{1/2/4/5/6/8/9/10}\Diamond, R_{3b}{:}_{1/2/...7}\Diamond, R_{3c:2/3/4/8/9/10}\Diamond, R_{2d}{:}\ \varnothing\}$$

Assim como os outros grupos, o G4, no item a), utilizou os ostensivos gráficos para esboçar uma figura circular, encontrando o período do fenômeno ao memorar objetos não ostensivos, obtendo, assim, os três valores pretendidos. No item b) o grupo 4 respondeu conforme os demais grupos, sem dificuldades. Quanto ao item c) o grupo desenhou o modelo circular igual ao grupo 3, explorando as ferramentas do GeoGebra, e construiu um modelo dinâmico com o círculo dividido em ângulos marcando alguns pontos, trazendo o eixo das ordenadas com a altura e o das abscissas com o tempo. Quanto ao item d), o grupo não o respondeu.

O grupo 5 apresenta como sistema didático auxiliar o $S1_{G5}$:

$$G5: S1_{G5}(F_4; Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}{:}_{1/2/4/5/6/8/9/10}\Diamond, R_{3b}{:}_{1/2/...7}\Diamond, R_{3c:5}\Diamond, R_{2d}{:}_{1/2/5/7/8/9/10}\}$$

Nos itens a), b) e d) o grupo 5 comungou com os outros grupos, evocando ostensivos e não ostensivos para responder as questões, visando saberes anteriores para fundamentar suas respostas. Quanto ao item c) o grupo apresentou no ambiente papel e lápis o modelo circular e o oscilatório; devido a uma divergência no grupo, este optou por demonstrar os dois modelos. Podemos ver a dialética mídia-meio se materializando nos dados. Nessa perspectiva, utilizou ostensivos gráficos para representar o modelo circular e oscilatório. No GeoGebra o grupo escolheu representar o modelo circular dinâmico, abordando ferramentas tecnológicas para representar o fenômeno no círculo construído.

Analisando o sistema dos grupos 6 e 7, identificamos pontos em comum:

G6: $S1_{G6}(F_4;\ Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{ R_{3a}:_{1/2/4/5/6/8/9/10}\lozenge, R_{3b}:_{1/2/...7}\lozenge, R_{3c:6/7}\lozenge, R_{2d}:_{3/6}\lozenge\}$

G7: $S1_{G7}(F_4;\ Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}:_{3/7}\lozenge, R_{3b}:_{1/2/...7}\lozenge, R_{3c:6/7}\lozenge, R_{2d}:_{1/2/5/7/8/9/10}\lozenge\}$

Os grupos 6 e 7 no item a) utilizaram ostensivos escriturais para encontrar o período, gráficos para esboçar o círculo e compreender o fenômeno; o grupo 6 compreendeu que o círculo se repete por 3 voltas, uma vez que o passeio dura 30 minutos, mas o grupo 7 não se atentou e respondeu apenas acerca do tempo da primeira volta. Os grupos responderam o item b) sem dificuldade, tendo em vista que basta evocar o não ostensivo que representa a maré alta e baixa para lograr a resposta. No item c) os dois grupos apresentaram o modelo circular tanto no ambiente papel e lápis quanto no GeoGebra, criando, assim, modelos dinâmicos interativos, em que, à medida que se movimenta o ponto, encontra-se a altura da cabine no instante marcado. Quanto ao item d), o grupo 6, assim como o 3, aplicou a regra de três, mas interpretou os dados erroneamente. Já o grupo 7 conseguiu, a partir do modelo circular e por meio da resolução de operações básicas, encontrar os valores almejados.

O grupo 8 apresentou as respostas das questões secundárias da atividade 3 de modo análogo às dos grupos já mencionados, utilizando ostensivos e não ostensivos para responder as questões.

A diferenciação ocorreu por meio do item b) da atividade 3. Nessa tarefa o grupo empreendeu uma organização matemática com noções de arcos côngruos, círculo trigonométrico, sentido do círculo quando positivo e quando negativo, ponto médio, cálculo de diâmetro, vários conceitos da trigonometria. O grupo utilizou esse discurso tecnológico-teórico para justificar a técnica empregada para calcular a altura da cabine em determinados intervalos de tempo. Verifica-se que o grupo expôs uma noção de não ostensivos que foram evocados para validar a estratégia escolhida para encontrar as alturas.

A seguir, temos o sistema didático auxiliar do grupo 8.

G8: $S1_{G8}(F_4;\ Q_{3a}, Q_{3b}, Q_{3c}, Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a}:_{1/2/4/5/6/8/9/10}\lozenge, R_{3b}:_{8}\lozenge, R_{3c:2/3/4/8/9/10}\lozenge, R_{2d}:_{1/2/5/7/8/9/10}\lozenge\}$

Quanto aos grupos 8 e 9, os sistemas didáticos auxiliares são iguais. Ambos apresentaram as respostas dos itens a), c) e d) conforme os grupos anteriores. A resposta do item b) dos dois grupos é semelhante apenas entre si e recorda não ostensivos como pontos de crescimento e decrescimento das funções, para no modelo circular destacar a altura da cabine em determinados intervalos de tempo. Ou seja, os dois grupos abordaram ostensivos escriturais e gráficos para representar e relacionar os dados a fim de descobrir os valores solicitados.

Observemos na sequência os sistemas didáticos auxiliares dos grupos 9 e 10:

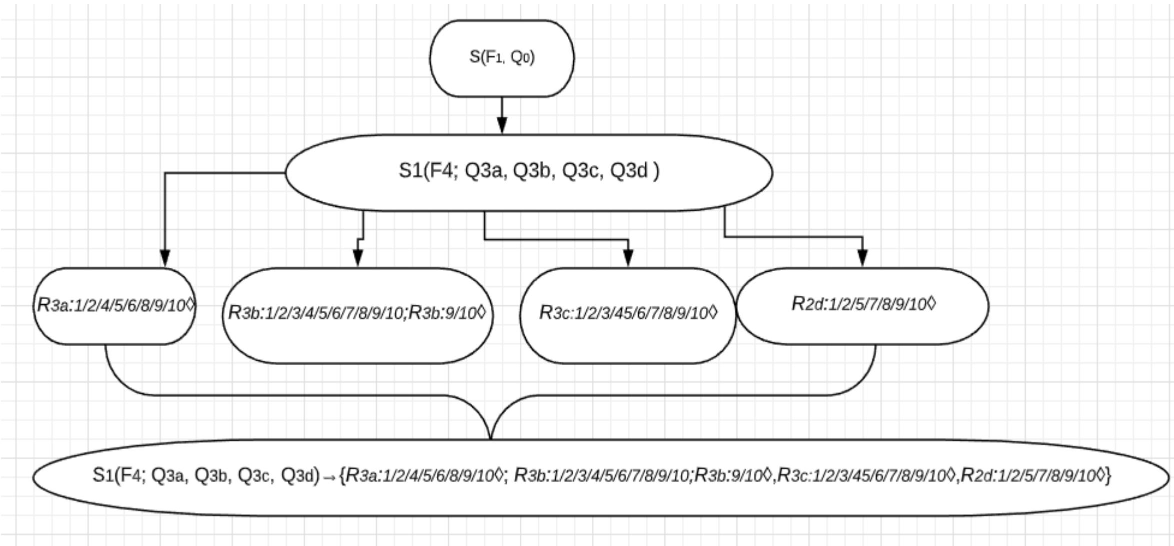
G9: $S1_{G9}(F_4;\ Q_{3a},\ Q_{3b},\ Q_{3c},\ Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a:1/2/4/5/6/8/9/10}\Diamond,\ R_{3b:9/10}\Diamond,\ R_{3c:2/3/4/8/9/10}\Diamond,\ R_{2d:1/2/5/7/8/9/10}\Diamond\}$

G10: $S1_{G10}(F_4;\ Q_{3a},\ Q_{3b},\ Q_{3c},\ Q_{3d}) \rightarrow \{R_{3a:1/2/4/5/6/8/9/10}\Diamond,\ R_{3b:9/10}\Diamond,\ R_{3c:2/3/4/8/9/10}\Diamond,\ R_{2d:1/2/5/7/8/9/10}\Diamond\}$

Há similaridades em todas as respostas, com referência a ostensivos e não ostensivos para alcançar as respostas das questões secundárias.

Explanaremos agora o sistema didático auxiliar que representa o resumo da sessão 4.

Figura 101 – Organograma resumo F4 do sistema auxiliar com as respostas validadas pelos grupos.



Fonte: a autora (2020).

4.2.2.5 Análise da sessão 5

A sessão 5 intentou trabalhar o modelo circular integrado ao modelo oscilatório no GeoGebra, a fim de explorar a similaridade entre ambos, e quão proveitoso para o estudo das funções seno e cosseno pode ser.

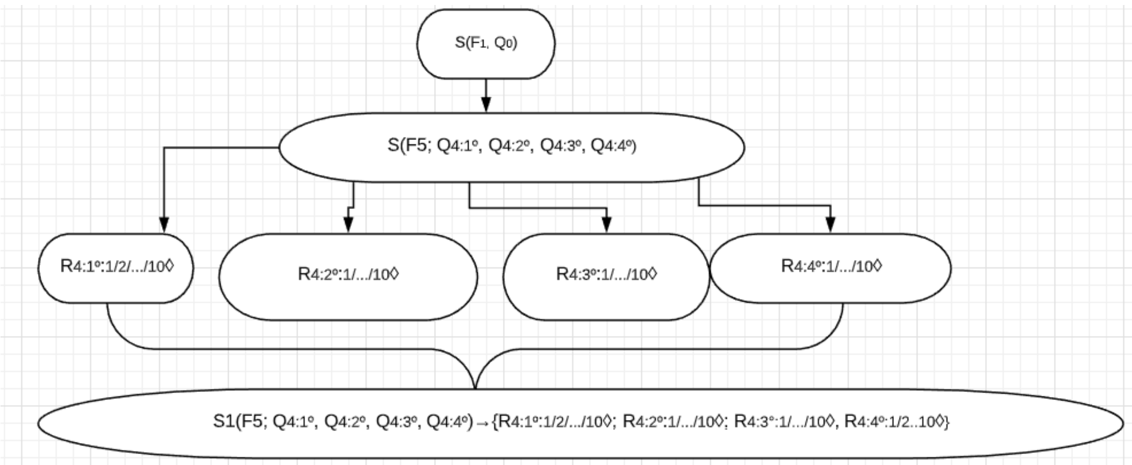
Na sessão em pauta todos os grupos conseguiram desenvolver a atividade e alcançar seu objetivo, que era permitir que os licenciandos compreendessem a integração dos modelos circular e oscilatório, de modo a considerar a importância destes para o estudo das funções seno e cosseno. Para tanto, os 10 grupos utilizaram o discurso tecnológico-teórico, que mostrou a relação integrada do círculo trigonométrico e funções seno e cosseno, de maneira a propiciar o levantamento de características comuns em ambos, evocando os ostensivos e não ostensivos necessários à compreensão dos questionamentos.

Como ambos os grupos alcançaram as respostas de forma similar, apresentando somente algumas distinções, conforme exposto na introdução da sessão 5, não desenvolveremos sistemas auxiliares individuais, pois todas as respostas individuais foram validadas.

Ressaltamos que a potencialidade do GeoGebra permitiu que os grupos lograssem o objetivo proposto e ainda relacionassem características comuns aos dois modelos. Desse modo, apresentaremos na sequência o sistema auxiliar resumo da sessão 5 e o organograma resumo.

$$S1\ (F5;\ Q_{4a}, Q_{4b}, Q_{4c}, Q_{4d}) \rightarrow \{R_{4:1^{o}:1/2/.../10\lozenge};\ R_{4:2^{o}:1/.../10\lozenge};\ R_{4:3^{o}:1/.../10\lozenge},\ R_{4:4^{o}:1/2..10\lozenge}\}$$

Figura 102 – Organograma resumo F5 do sistema auxiliar com as respostas validadas pelos grupos.



Fonte: a autora (2020).

4.2.2.6 Análise da sessão 6

Com o objetivo de permitir a construção dos conceitos sobre as funções seno e cosseno, além de explorar as transformações gráficas das funções, a sessão 6 foi a última da experimentação. Nessa configuração, almejamos, ao final, responder o seguinte questionamento: “Quais funções seno e cosseno conseguimos compreender com a construção do GeoGebra?”.

A análise da sessão não seguirá o padrão de ser por grupo, mas por cada questão da atividade. Isso acontece pois cada item da tarefa corresponde a uma característica das funções seno e cosseno e, em decorrência deste caráter, analisaremos individualmente a questão para expor os ostensivos e não ostensivos presentes.

A questão 1, que se refere ao parâmetro A, foi respondida por todos os grupos, que chegaram a esse fenômeno. Segundo as respostas analisadas, constatamos que eles associaram a não extensivos de transformações gráficas trabalhadas nas funções quadráticas. Percebemos isso ao analisar os ostensivos escriturais apresentados pelo grupo, do tipo: se A for positivo sobe em relação ao eixo y, transladando para cima, e se A for negativo desce transladando para baixo no eixo y.

Quanto à questão 2, refere-se ao parâmetro B, que é responsável pela amplitude. 9 dos 10 grupos chegaram à compreensão do parâmetro enquanto amplitude, porém alguns não compreenderam a alteração que a amplitude sofre ao assumir valores negativos, ou seja, a inversão da curva. O grupo 10 trouxe o parâmetro associando: a positivo cresce e negativo encolhe, de forma errônea. Em virtude do equívoco citado, na socialização a resposta do grupo não foi validada. Nestes termos, os grupos, novamente, confrontaram conhecimentos prévios trabalhados apresentando os não ostensivos, discorrendo sobre a amplitude por meio de ostensivos.

A questão 3 foi sobre o parâmetro C, que se refere ao período. Os 10 grupos perceberam a responsabilidade do parâmetro nas funções. Mais uma vez, temos um discurso tecnológico-teórico de transformações gráficas referentes a funções trigonométricas, tendo em vista que os grupos buscaram fundamentar suas respostas abordando características de dilatação e contração do gráfico; contração em $+\infty$ e $-\infty$; contração e inversão para valores negativos; e aumento e diminuição da frequência. Isto é, observa-se, por intermédio da experimentação, a construção de praxeologias que permitam a instituição de um saber validado por uma turma, utilizando um discurso tecnológico-teórico sob a tutela de obras e conhecimentos aprendidos previamente.

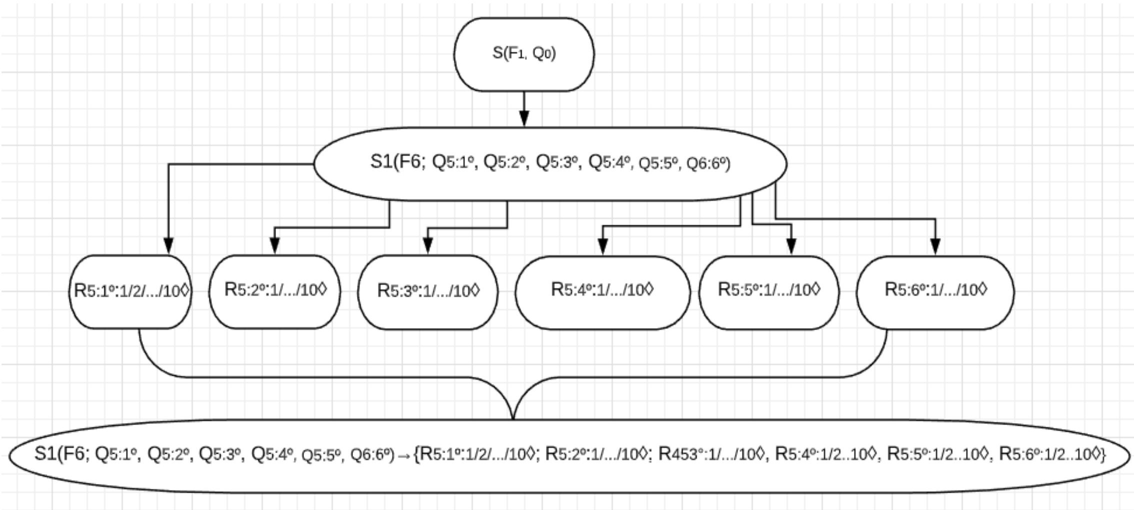
Quanto à resposta da questão 4, todos os grupos também a alcançaram sem dificuldades, uma vez que o parâmetro D é responsável pela translação horizontal, uma das transformações mais conhecidas pelos alunos por já terem sido trabalhadas nas funções quadráticas, polinomiais, entre outras. Desse modo, eles evocaram não ostensivos e justificaram a resposta demonstrando o comportamento do gráfico ao oscilar para a direita ou esquerda. Salientamos que essa já é uma resposta validada institucionalmente e, assim como a do parâmetro A, os grupos não tiveram entraves para respondê-la.

A questão 5 abordou a manipulação dos quatro controles deslizantes de vez, solicitando o que observaram. Os 10 grupos apontaram as transformações das funções de uma só vez, comparando-as com a função básica. Assim, destacaram o deslocamento do gráfico e as transformações.

A questão 6 indaga como os grupos podem utilizar a atividade para responder as anteriores. Os grupos indicaram a potencialidade da atividade 6 para compreensão dos fenômenos periódicos, uma vez que, ao obter a lei de formação do fenômeno, a atividade do GeoGebra permite o entendimento dos parâmetros e aspectos das funções seno e cosseno envolvidos. Percebe-se que a integração do GeoGebra possibilitou relacionar os ostensivos e os não ostensivos para o estudo das funções seno e cosseno, restaurando conhecimentos sobre funções e suas transformações, bem como o entendimento da trigonometria para compreensão das funções mencionadas.

Desse modo, apresentaremos o sistema didático auxiliar da sessão 6.

Figura 103 – Organograma resumo F6 do sistema auxiliar com as respostas validadas pelos grupos.



Fonte: a autora (2020).

Depois das seis sessões, ao final da socialização, os grupos retomaram a Q0 em busca da resposta esperada.

Após as praxeologias matemáticas trabalhadas, discursos tecnológico-teóricos, visitas a obras, dialéticas pergunta e resposta, mídia-meio e evocação de ostensivos e não ostensivos nas respostas, chegamos à averiguação da resposta *R*♥. Nesses termos, os licenciandos responderam à questão: “Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos?”.

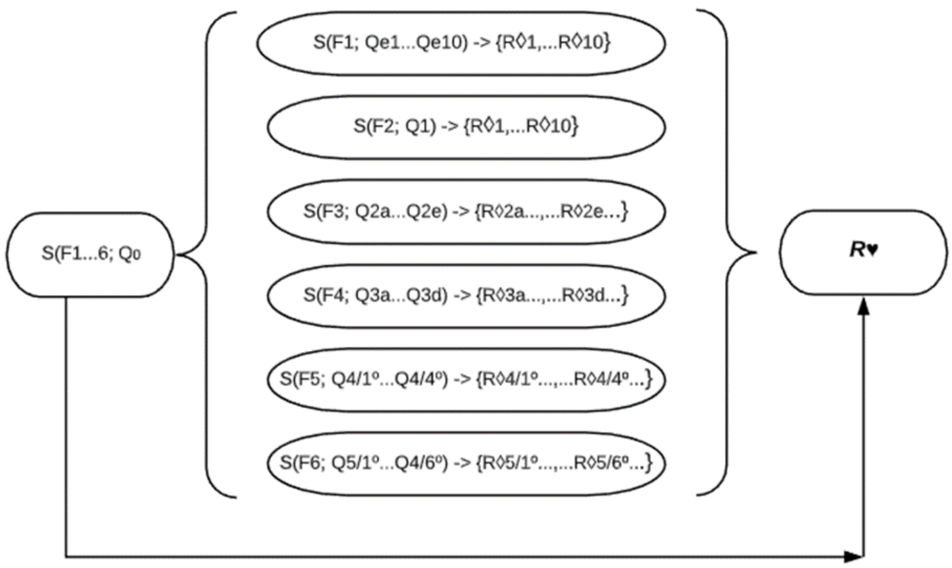
Realizamos um resumo das respostas dos grupos construindo a resposta conjunta *R*♥. Podemos modelar utilizando as funções trigonométricas, em especial as funções seno e cosseno, analisando seu comportamento pelos seus parâmetros, a saber, amplitude, período, mudança de fase, translações, contrações, e com auxílio do ciclo trigonométrico e modelo circular, que contribuem para o entendimento das funções e seus gráficos. Realçamos que é necessário encontrar a lei de formação.

Salientamos que o GeoGebra permitiu, de forma integrada, a percepção aludida, pois, por meio do *software*, os grupos compreenderam a possibilidade de uma organização matemática que possa integrar os dois modelos, circular e oscilatório, para apreensão das funções seno e cosseno.

Destacamos, ainda, que as tarefas do PEP foram construídas no intuito de sair da linguagem natural para o domínio algébrico e geométrico, trabalhando com organizações pontuais sobre a trigonometria e os fenômenos periódicos até organizações locais que possibilitaram o trabalho das funções seno e cosseno através dos fenômenos, proporcionando a utilização de dois modelos para estudos dos fenômenos. Com a integração do GeoGebra, propiciou-se estudar a integração dos modelos, bem como a construção dos conceitos referentes às transformações gráficas das funções seno e cosseno.

Demonstraremos a seguir o desenho final do PEP, a partir dos sistemas didáticos.

Figura 104 – Organograma final resumo das formações, sistema didático principal.



Fonte: a autora (2020).

Nesse sentido, alicerçados nas análises realizadas, observamos, a partir das respostas dos licenciandos em matemática, o diálogo entre a dialética mídia-meio, tendo em vista que os estudantes consultaram sistemas de mídias e, influenciados pelo meio, construíram suas respostas, alcançando o objetivo esperado.

Além disso, verificamos que na construção do conhecimento matemático funções seno e cosseno, houve a forte presença da dialética dos ostensivos e não ostensivos. Acentuamos, de acordo com Bosch e Chevallard (1999) e Bosch (2001), que ostensivos são objetos materiais do tipo escrito, gráfico, gestual, entre outros, perceptíveis aos seres humanos; já os não ostensivos são objetos que podem ser mobilizados por objetos ostensivos, como conceitos, intuições, noções e ideias próprias.

Nesse aspecto, conforme nosso modelo didático alternativo, ou seja, nosso Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, a construção do saber funções seno e cosseno, por intermédio do modelo oscilatório e circular, só foi possível em virtude de os licenciandos evocarem objetos ostensivos e não ostensivos integrados ao GeoGebra, que permitiram, a partir das mídias, chegar à compreensão das funções em foco.

Assim, o diálogo entre as dialéticas é capaz de imprimir no *logos* elementos significativos para o estudo das funções seno e cosseno integrados ao GeoGebra por meio de um PEP, uma vez que, ao observarmos a presença de não ostensivos trabalhados em outros objetos matemáticos anteriormente serem evocados através de objetos ostensivos escriturais e gráficos pelos licenciandos em matemática para entendimento do comportamento das funções seno e cosseno, ratificamos o alcance das praxeologias desenvolvidas.

Neste segmento, percebemos a possibilidade de trabalhar uma incompreensão de natureza epistemológica e didática, como levantada no MED, e promover o estudo das funções referidas integrado ao GeoGebra a partir de um PEP como modelação de fenômenos físicos periódicos, com praxeologias que permitam explorar os modelos circular e oscilatório.

Assim, considerando o nosso problema didático, “como desenvolver praxeologias matemáticas para o estudo das funções seno e cosseno de forma efetiva? o qual derivou de inquietações do tipo: “Como ensinar funções seno e cosseno para o público de alunos atuais (que vivem em uma geração tecnológica)? Será que estudar as funções seno e cosseno, com um olhar investigativo, poderá promover um melhor entendimento?”. Podemos inferir, que de acordo com as condições e restrições levantadas em nossas análises do MED, o uso de softwares, para o estudo das funções seno e cosseno, resgatando a razão de ser do objeto do saber estudado por meio de um contexto interdisciplinar e de um percurso investigativo, permite um estudo das funções seno e cosseno de forma efetiva. Pois, por meio desse estudo, conseguimos remodelar restrições implícitas institucionais que limitavam o surgimento de estratégias distintas para o estudo das funções seno e cosseno.

Além disso, por meio dos estudos de alguns elementos epistemológicos foi possível a compreensão de condições que permitiram desenvolvermos um trabalho, considerando o modelo geométrico como epistemológico de referência. E assim, apresentamos interseções do domínio algébrico e do domínio da análise, possibilitando a passagem do geométrico para o algébrico, por meio do domínio extra-matemático para o intra-matemático. Tendo como objetivo a modelação de fenômenos físicos periódicos, por meio do modelo circular e oscilatório para o estudo das funções seno e cosseno integrados ao GeoGebra, a partir de um PEP, como podemos observar na figura 105 nas considerações finais.

E por fim, atingimos um novo contrato didático, o qual o estudante tem o papel principal e o professor atua como um mediador no processo investigativo de construção de conhecimentos matemáticos.

Destarte, alcançamos nossa tese, a saber: um estudo de funções seno e cosseno em que o GeoGebra esteja integrado ao repertório de praxeologias dos sujeitos das instituições no Ensino Superior e Ensino Médio, no viés da dialética ostensivos e não ostensivos, capaz de minimizar incompreensões relacionadas às funções em foco por meio de um dispositivo de ensino experimental e investigativo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação realizada neste trabalho objetivou analisar como um modelo alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno. O contexto da pesquisa abrangeu licenciandos em matemática do primeiro semestre da Universidade Estadual de Feira de Santana. Para alcançarmos nosso objetivo, nos embasamos na TAD de Chevallard (1999; 2002; 2007; 2009).

Definimos nossa questão de pesquisa da seguinte forma: "Como licenciandos em matemática integram ferramentas tecnológicas para o estudo de funções seno e cosseno por meio de um percurso investigativo?".

Nesse sentido, revisitamos instituições dominantes a fim de levantar as condições e restrições para propor a problemática possibilística e averiguar o modelo predominante.

Iniciamos nosso MED a partir da análise histórico-epistemológica das funções trigonométricas. Essa análise revelou as razões de ser da trigonometria e das funções trigonométricas ao longo do tempo, demarcando que no começo do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas as razões de ser eram motivadas por razões sociais, as quais tinham motivações vinculadas às necessidades sociais da época. Mas, no decurso dos anos, as razões deixaram de ser sociais e passaram a ser razões puramente matemáticas, a exemplo do desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Porém, observa-se que não há uma efetiva integração entre essas razões de ser no estudo das funções seno e cosseno, atualmente, caracterizando o estudo das funções mencionadas, às vezes, com a ausência da razão de ser. O que levantamos como um fator que pode trazer uma incompreensão de natureza epistemológica.

Em seguida, empreendemos um levantamento, no cenário nacional e internacional, nos últimos cinco anos, de trabalhos de teses e dissertações no Brasil e na França sobre funções trigonométricas. Esse levantamento revelou que há uma carência de trabalhos acadêmicos sobre o tema, já que o número de estudos encontrados, no recorte temporal escolhido, tanto no cenário nacional quanto internacional, é insuficiente.

Apoiados nesses levantamentos e análises, fomos em busca de respostas para o problema docente surgido. Analisamos as esferas Ensino Médio e Ensino Superior, a fim de trazer à tona as condições e restrições existentes no modelo dominante.

Desse modo, o modelo dominante exposto na esfera do Ensino Superior e no Ensino Médio comunga nos aspectos que incentivam a definição das funções seno e cosseno a partir do ciclo trigonométrico, não apresentando, contudo, articulação do ciclo trigonométrico com o gráfico das funções seno e cosseno – sendo abordados, neste âmbito, os conteúdos de forma isolada, sem relação. Ademais, não há uma integração com ambientes tecnológicos que permita trabalhar as funções seno e cosseno de maneira concreta, por mais que a condições que pontem essa articulação. Salientamos que no Ensino Superior não há o incentivo de modelação de fenômenos para trabalhar as funções seno e cosseno. Já no Ensino Médio, os documentos enfatizam essa modelação, sem que esta ocorra de modo efetivo no livro didático analisado.

A partir da análise do Modelo Epistemológico/Praxeológico Dominante – MED, levantamos as condições e restrições institucionais para o estudo das funções seno e cosseno. Feito isso, compreendemos que há um problema de isolamento entre temas, setores e áreas de estudos da matemática, o que, consequentemente, acaba afetando o estudo de funções seno e cosseno, uma vez que muitas restrições estão na escala de níveis de co-determinação na sociedade e escola, o que interfere nos níveis domínio, setor e tema.

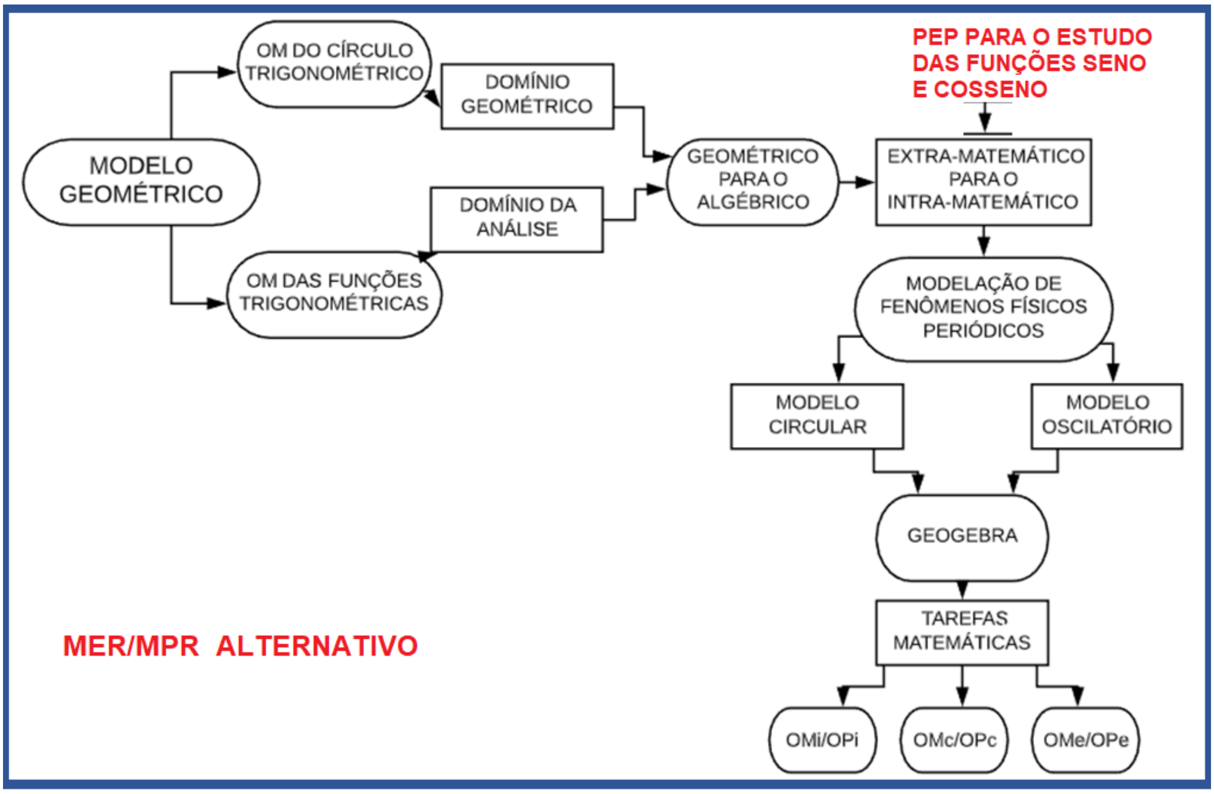
De acordo com as condições e restrições levantadas no MED, instituímos nosso MER, respondendo os questionamentos nele levantados. Consideramos que o contexto mais adequado para trabalhar o estudo das funções seno e cosseno é a modelação de fenômenos físicos periódicos, a partir de uma questão geratriz. A escolha dos fenômenos físicos periódicos foi devido à potencialidade de exploração de diferentes modelos de representação das funções seno e cosseno que ele permite, como o modelo circular e o modelo oscilatório harmônico. Intentamos utilizar diferentes fenômenos físicos, considerando que pudéssemos trabalhar as variáveis dos modelos oscilatório e/ou circular e a linguagem a ser abordada (natural, algébrica, geométrica ou gráfica), privilegiando, assim, o estudo das características das funções em pauta, de modo a viver tanto no Ensino Médio quanto no Superior.

Salientamos que o MER considerou as seguintes organizações matemáticas/praxeológicas: Organizações Matemáticas que trabalham conceitos das funções seno e cosseno de forma intuitiva, sem revelar a intenção didática (OMi/OPi); Organizações Matemáticas que trazem o modelo circular relacionado a uma questão contextualizada em língua natural para observação das características do ciclo trigonométrico integrado às funções trigonométricas (OMc/OPc); e Organizações Matemáticas de maneira exploratória que, a partir das construções de modelos no GeoGebra, permitem a exploração das definições para constituição de conceitos matemáticos (OMe/OPe). Consideramos as organizações matemáticas de modo organizado e integradas ao GeoGebra para que possibilitassem minimizar as incompreensões vinculadas ao estudo das funções seno e cosseno.

Nessa perspectiva, utilizamos como modelo de referência para o estudo das funções mencionadas a definição partindo do modelo circular para o modelo oscilatório, isto é, do ciclo trigonométrico para o estudo das funções de maneira integrada.

De acordo com o MER, instituímos nosso PEP com o objetivo de analisar como um modelo didático alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno. Vale ressaltar que o PEP, assim como todo o trabalho, teve como referencial teórico a TAD. Na figura 105, podemos observar o desenho do nosso modelo epistemológico/praxeológico alternativo de referência para construção do nosso PEP. Partindo do modelo epistemológico geométrico até chegar no PEP elaborado.

Figura 105 – Esquema do MER/MPR Alternativo para construção do PEP para o estudo das funções seno e cosseno.



Fonte: a autora (2020).

Conforme a metodologia deste trabalho, a metodologia do PEP, e comprometidos em responder nossa questão de pesquisa, estruturamos nosso PEP a partir de seis sessões de estudos, as quais permitiram um trabalho com duas turmas de Pré-cálculo da UEFS, num total de 30 alunos divididos em grupos de três integrantes.

O PEP foi planejado através de uma questão geratriz, capaz de gerar outras questões ditas secundárias, de modo a promover a investigação e elaboração de novas questões pelos licenciandos. Atrelados às questões levantadas pelos alunos, desenvolvemos atividades de investigação com praxeologias matemáticas que proporcionaram o desenho do estudo das funções seno e cosseno para alcançar a resposta da questão geratriz.

Nas sessões desenvolvidas, observamos que os licenciandos levantaram questionamentos secundários e foram em busca de respondê-los. Em seguida, expuseram diferentes fenômenos físicos periódicos que poderiam ser estudados.

A partir da primeira atividade, constatamos que os estudantes afirmaram a dificuldade em compreender um fenômeno periódico que não tem um período exato e constante. Mas conseguiram encontrar um padrão para inferir projeções de valores das marés para apresentar um modelo. Foi bastante forte a necessidade de os estudantes desenharem os modelos no ambiente papel e lápis, para somente depois ir ao GeoGebra.

Nesse âmbito, pontuamos que os licenciandos evocaram não-ostensivos e ostensivos (escriturais, discursivos e gráficos) para desenvolvimento da atividade – de modo a trazer conhecimentos anteriores, inclusive no ostensivo gráfico, ao esboçar o gráfico da senoide, e no não ostensivo a compreensão da periodicidade associada às funções seno e cosseno para representar o fenômeno estudado.

Na atividade com o modelo circular, verificamos que houve estudantes que apresentaram um discurso tecnológico mais robusto, por meio de pesquisas em mídias, e que, inseridos no meio, conseguiram formular a lei de formação para modelar o fenômeno estudado e construir o modelo oscilatório no GeoGebra. Assim, percebemos que o diálogo entre as mídias e o meio, e entre os ostensivos e não-ostensivos evocados, foi capaz de imprimir no *logos* elementos significativos, ressaltados na análise *a priori*, para o estudo de funções seno e cosseno.

De acordo com as técnicas esboçadas nos grupos, constatamos a utilização de não ostensivos relacionados a noções de trigonometria como arcos côngruos, estudo do sinal do círculo trigonométrico, ângulos em radianos e grau, entre outros, que foram evocados para o estudo na situação. Outrossim, houve o uso de ostensivos simbólicos, discursivos, gráficos e escriturais para manipulação e representação da técnica e do discurso tecnológico-teórico utilizado. Ou seja, compreendemos a implementação de técnicas traduzidas por uma manipulação de ostensivos regulados por não ostensivos. Como afirmam Bosch e Chevallard (1999), todo discurso tecnológico é realizado concretamente pela manipulação de objetos ostensivos, em particular, discursivos e escritos, que possibilitam materializar as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento da tarefa.

Além disso, apareceram modelos circulares e oscilatórios construídos de diferentes formas e linguagens, algébrica, gráfica, geométrica e com detalhes de ferramentas no GeoGebra que corroboram com a praxeologia de referência.

Ao avançarmos para as construções no GeoGebra do roteiro 1, fica notório que os licenciandos conseguiram compreender a relação do ciclo trigonométrico com o gráfico das funções seno e cosseno e relacionar características em comum, de modo a explorar o modelo construído na resolução das atividades anteriores sobre o modelo circular e o oscilatório. Nesse sentido, percebemos que os licenciandos evocaram ostensivos e não ostensivos para estabelecer as relações do ciclo trigonométrico com as funções seno e cosseno, compreendendo, assim, a integração de ambos.

Para isso, os ostensivos do GeoGebra foram cruciais ao entendimento, corroborando o que indicam os documentos oficiais do Ensino Médio (PCN+; OCEM, BNCC) e Iezzi (1977), a saber, o estudo das funções seno e cosseno a partir do ciclo trigonométrico.

Outro fator importante a ser enfatizado durante a aplicação do PEP no roteiro 1 foi o levantamento de ostensivos relacionados à periodicidade, imagem das funções seno e cosseno e relações dos ângulos com o gráfico das funções por meio do ciclo, que foram convocados pelos estudantes, durante a exploração da sessão 5, utilizando ostensivos para dar voz aos não ostensivos evocados, comungando com Chevallard e Bosch (1999) quando estes afirmam que a dialética ostensiva e não ostensiva geralmente é considerada em termos de signos e significados: objetos ostensivos são signos de objetos não ostensivos que constituem seu significado.

No roteiro 2 de construção no GeoGebra os alunos, a partir da construção, manipulação e exploração, construíram o conceito das transformações gráficas das funções seno e cosseno. Nessa atividade, observamos que os estudantes evocaram não ostensivos a respeito das transformações gráficas trabalhadas em funções quadráticas polinomiais. Percebemos isso ao verificarmos que os licenciandos utilizaram ostensivos escriturais para explicar o que acontecia em cada parâmetro, comparando aos conceitos trabalhados anteriormente, como, por exemplo, ostensivos discursivos e escriturais sobre translação vertical e horizontal; dilatação e contração do gráfico; e periodicidade a partir da repetição.

Nesse segmento, a partir do PEP planejado, buscando integrar o GeoGebra, para o estudo de funções seno e cosseno por meio da modelação de fenômenos periódicos, averiguamos que as dificuldades no estudo de funções seno e cosseno minimizaram, uma vez que, através das questões e atividades trabalhadas, incompreensões de natureza didática e epistemológica, como a ausência da razão de ser e a não articulação do modelo circular com o oscilatório no estudo das funções, reduziram-se ao ponto de percebermos a evolução dos licenciandos em compreender as funções em foco por intermédio de fenômenos físicos, explorando as características das funções, bem como as do ambiente computacional na integração dos dois modelos (oscilatório e circular).

Essa manipulação permitiu reconhecer a importância do trabalho com a integração do GeoGebra às funções seno e cosseno, bem como da utilização dos fenômenos físicos periódicos, tendo em vista que, por apresentar similaridade com a razão de ser social, o PEP trouxe à tona praxeologias que na organização didática aparecem nas instituições dominantes, porém não ocorre a integração efetiva dos modelos e com o uso de tecnologias. Com nosso PEP, mostramos que é possível integrar o GeoGebra ao estudo de funções seno e cosseno e construir a resposta esperada à nossa questão geratriz/diretriz/Q_0. Vale ressaltar, que o PEP construído nesse trabalho, bem como o modelo alternativo que orienta o PEP, permite a utilização de outros instrumentos tecnológico para integração no estudo das funções seno e cosseno. O GeoGebra foi uma escolha nossa, mas poderia ser substituído por um outro *software* que permitisse a construção de modelos circulares e oscilatório, geométrica e graficamente.

Destacamos que foi possível observar a visita a tópicos, temas e setores associados ao domínio da matemática nos diferentes campos, no processo de desenvolvimento da resposta *R* ♥, que foi: “Para modelar fenômenos físicos periódicos podemos utilizar as funções seno e cosseno, a partir dos modelos oscilatório e circular, considerando suas características e as transformações ocorridas nas funções”.

A partir da experimentação do PEP, identificamos as relações pessoais que os licenciandos em matemática participantes da pesquisa tinham com a trigonometria e funções trigonométricas. Percebemos que alguns estudantes tinham uma noção das funções seno e cosseno, e os demais conheciam um pouco da trigonometria, por esta já ter sido trabalhada na disciplina. No entanto, isso não inviabilizou o estudo, já que a maioria dos estudantes não teve contato com funções seno e cosseno, e como o PEP foi planejado para o estudo das funções, foi possível àqueles que não tinham uma relação pessoal construi-la a partir da exploração do dispositivo investigativo.

Apesar de estar em um contrato didático não habituado, os licenciandos não tiveram resistência a respeito do modelo investigativo do PEP, a partir da Q_0. Quanto ao meio considerado para desenvolvimento do PEP, os estudantes optaram por utilizar as mídias digitais para fundamentar suas questões e respostas, a partir de artigos científicos, blogs, vídeos, Anais de eventos e outros. Acentuamos o desenvolvimento dos discentes enquanto alunos do primeiro semestre em buscar mídias confiáveis para fundamentação de suas respostas secundárias, a fim de chegar à resposta *R*♥.

De acordo com as respostas, observamos que os estudantes em algumas tarefas seguiram caminhos distintos, não sendo totalmente o esperado na análise *a priori*. Mas também realçamos que esses caminhos distintos possibilitaram uma ampliação e/ou restruturação do PEP, como apresenta Santos Junior (2017), que menciona que os caminhos distintos destacam a dimensão do trabalho, pois permitem considerar os conhecimentos prévios dos estudantes e ampliá-los em função dos conhecimentos já existentes.

Destacamos, que esse trabalho está inserido no 1º semestre do curso de licenciatura em matemática, e que também pode ser abordado no Ensino Médio. E devido a isso, não ampliamos as organizações matemáticas para discussões que envolva outros objetos matemáticos mais avançados. Uma vez que nas instituições analisadas (BNCC, PCN, PCN+, DCCM, PPCLM, OCEM e outras) as quais fazem parte desse trabalho, apresenta a restrição de não permitir nesse momento ampliar para outros objetos do saber, que não esteja inserido nessa fase. Então deixamos como perspectivas futuras, ampliar as organizações matemática não apenas para as outras funções trigonométricas não contempladas, mas também para utilização por meio das series de Fourier, vetores e outros.

Neste conjunto, ratificamos as hipóteses levantadas na pesquisa, visto que na primeira hipótese temos: “Existem aspectos epistemológicos do saber que provocam restrições e/ou condições no desenvolvimento da prática institucional sobre o estudo de funções seno e cosseno.”. A partir da análise histórico-epistemológica levantamos as razões de ser tanto sociais quanto matemáticas da trigonometria e funções trigonométricas, como condições a serem consideradas no estudo das funções seno e cosseno. E como restrições, observamos rupturas epistemológicas que ponderamos na instituição do PEP e desenvolvimento da pesquisa.

Já a segunda hipótese de trabalho argumenta: “Restrições institucionais implícitas limitam o surgimento de estratégias distintas para o estudo de funções seno e cosseno.”. Averiguamos no modelo dominante a ausência da integração das tecnologias de forma efetiva[7] para o estudo das funções seno e cosseno. Além disso, não há um incentivo de utilização de problemas de modelação de fenômenos físicos para o estudo das funções referidas; o que pode ocasionar a limitação do surgimento de estratégias variadas para o estudo das funções seno e cosseno.

[7] Empregamos o conceito de forma efetiva trabalhada por Farias (2010); SOUZA (2015) os quais trazem o uso efetivo sendo uma forma eficiente e real de utilização de uma ferramenta, instrumento, teoria, explorando suas potencialidades e funções para construção do saber.

Com a finalidade de analisar como um modelo didático alternativo com o uso do GeoGebra favorece o estudo das funções seno e cosseno, defendemos a tese de que um estudo de funções seno e cosseno em que o GeoGebra esteja integrado ao repertório de praxeologias dos sujeitos das instituições no Ensino Superior e Ensino Médio, no viés da dialéticas ostensivos e não ostensivos e perguntas e respostas, é capaz de minimizar incompreensões relacionadas às funções seno e cosseno, por meio de um dispositivo de ensino experimental e investigativo. Salientamos que há outros *softwares* que podem auxiliar nessa integração, e que o GeoGebra é uma alternativa, a qual foi o *software* escolhido por nós.

Podemos inferir que as praxeologias levantadas no modelo didático integradas ao GeoGebra para o estudo das funções seno e cosseno permitem a vivência tanto no Ensino Superior quanto no Médio. Sendo assim, planejamos o nosso PEP para que servisse de base para que os licenciandos em matemática, enquanto futuros professores, possam dar vida ao dispositivo no Ensino Médio. Podemos inferir, a possibilidade dos alunos participantes considerarem o uso do PEP em suas práticas, uma vez que os estudantes participantes da pesquisa, atualmente, cursam a disciplina de Instrumentalização para o Ensino da Matemática II[8], que aborda o tema funções, e ao planejarem uma aula sobre funções trigonométricas alguns optaram pela utilização de um esboço de dispositivo investigativo, privilegiando o ensino a partir de uma questão geratriz que seja suficientemente ampla para gerar outras questões.

Os discentes utilizaram questões geratrizes relacionadas a fenômenos para iniciar o ensino de funções trigonométricas, do tipo: "Como a periodicidade do ciclo da lua influencia no crescimento das plantas? Qual a importância do entendimento do conceito das ondas estacionárias no estudo de instrumentos musicais de corda? Como podemos relacionar os fenômenos cíclicos da natureza à matemática?". Através das questões explanadas identificamos o interesse em desenvolver um dispositivo investigativo para o estudo das funções seno e cosseno, por intermédio da influência do PEP vivenciado por eles integrado ao GeoGebra.

Esperamos que o modelo didático alternativo deste trabalho possa viver em instituições do Ensino Médio, a fim de mitigar as lacunas e incompletudes no entendimento das funções seno e cosseno. Pretendemos que as praxeologias matemáticas deste estudo possam auxiliar o trabalho de outros professores e estudantes da Educação Básica, já que trabalhamos com licenciandos em matemática, justamente, para que eles sejam multiplicadores do PEP nas escolas. E assim, pretendemos que o trabalho resultante dessa tese possa viver no chão da sala

[8] Essa disciplina Instrumentalização para o Ensino de Matemática II - INEM II, aborda o conteúdo funções, e é ministrada por mim, por isso tenho conhecimento do acompanhamento da turma.

de aula, uma vez que o PEP foi pensado para viver tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior.

Almejamos ampliarmos essa pesquisa, em estudos futuros, por meio de alguns desdobramentos teóricos, a saber: pretendemos refinar a análise, utilizando também como ferramenta de análise a dialética mídia meio; cobiçamos ampliar o estudo histórico-epistemológico, considerando a periodicidade, bem como livros de matemática antigos, para promover um confrontamento de praxeologias; e objetivamos também aprofundar algumas estudos da tese, considerando pontos específicos das atividades do PEP, como uma discussão do discreto e do contínuo, e ampliação da modelação de fenômenos físicos em algumas sessões.

O MER do presente trabalho é alternativo, uma vez que permite a inserção ou retirada de elementos que o constituem. Essas inserções e supressões promovem o desenvolvimento de novas pesquisas. Dessa maneira, nosso PEP pode ser adaptado/alterado para outra aplicação, tanto no Ensino Superior quanto no Médio, a fim de obter o percurso desenvolvido pelos estudantes, em diferentes contextos e em outras instituições, contribuindo, assim, para futuras pesquisas sobre o tema.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. Ag; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis/SC, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista,** Curitiba, v. 1, p. 157-171, 2011.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didáticas: de los ―talleres de prácticas matemáticas‖ a los ―recorridos de estudio e investigación. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp. 49-85), Montpellier, França: IUFM de l'Académie de Montpellier. 2010. Disponível em: http://www.atd-tad.org/documentos/bosch-m-gascon-j-2010-fundamentacionantropologica-de-las-organizaciones-didacticas-de-los-talleres-de-practicas-matematicasa-los-recorridos-de-estudio-e-investig/. Acesso em janeiro de 2018.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *In*: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. (Coords.). **Balises en didactique des mathématiques**. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2005.

BOSCH, M. Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. **IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.** Huelva, 2001. p. 15-28. Disponível em: http://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/47884. Acesso em 15 jan. 2019

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs objet d'etude et problematique. **Recherches en didactique des mathématiques**. v. 19, n. 1, 1999. p. 77-124. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf. Acesso em 12 de janeiro de 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. **Diário**

Oficial da União, Brasília, 05 mar. 2002, Seção 1, p. 15. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: volume 2 –** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** PCN+ – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2006.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. (1990) **Desequilibrio y equilibración: categorías relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados** del IPN. Cidade do México, México, tese de doutorado (Educação Matemática).

CHEVALLARD Y. Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, **Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique**, LSD-IMAG Grenoble, p. 211–235, 1989.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. *In*: XVI JORNADAS DEL SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, 2001, Huesca. Huesca, 2001. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15. Acesso em: 13 maio 2019.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques. *In*: 3ES JOURNÉES D'ÉTUDE FRANCO-QUÉBÉCOISES, 2002. Université René-Descartes, 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62. Acesso em: abr. 2018.

CHEVALLARD, Y. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire**. In : DUCOURTIOUX, C.; HENNEQUIN, P.-L. (Ed.). La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP,. Paris: APMEP. P.239-263, 2004. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf. Acesso em: Março de 2019.

CHEVALLARD, Y. Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds). Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=147>. Acesso em: 20 de novembro de 2019.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009.

CHEVALLARD, Y. **I Jornadas de Estudio en Educación Matemática**. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba. 2013a. Argentina.

CHEVALLARD, Y. **La matemática en la escuela:** por una revolución epistemológica y didáctica. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013b.

CHEVALLARD, Y. Organisations didactiques: Les cadres généraux. **Notice du Dictionnaire de Didactique des Mathématiques 1997-1998 pour la formation des élèves professeurs de mathématiques,** 1998.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas.** El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

COLONEZE, B. R. S. **Módulo de aprendizagem e treinamento de funções trigonométricas:** fazendo o uso da tecnologia para a efetiva aprendizagem de funções trigonométricas com aplicação em eletrônica. 2012. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2012.

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno:** uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

COSTA, Felipe de Almeida. **O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa**. 2017. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, L. M. S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dansl'enseignement des mathématiques ausecondaire:** une analyse des pratiques enseignantesen classes de troisième et de seconde. 2010. 380 f. Tese (Doutorado em Didática das Matemáticas) – Universidade de Montpellier 2, França, 2010.

FARIAS, L. M. S., CARVALHO, E. F., SOUZA, E. S.de, PIRES, M. A. L. M. Uma análise do tipo clínico para compreensão do vazio didático. In: SANT'ANA, C. C. SANTANA, I. P., AMARAL, R. S. (Orgs.). **Grupo de estudos em educação matemática:** ações cooperativas e colaborativas constituídas por várias vozes. São Carlos: Pedro & João Editores, 2015, pp.137-162.

FARIAS, L. M. S., CARVALHO, E. F., TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação, Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 3, p. 97 – 119, 2018.

FARFÁN, R. y GARCÍA, M. A. El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En: J. Lezama, M. Sánchez y J.G. Molina (eds.). **Acta latino-americana de investigación en matemática educativa** (RELIME), 18, 489-494, 2005.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação matemática e pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 151, p. 1-28, 2013.

FONSECA, L. S. da. **Aprendizagem em trigonometria:** obstáculos, sentidos e mobilizações. São Cristóvão: Editora UFS, 2010.

FONSECA, L. S. da. **Funções Trigonométricas**: elementos "de" & "para" uma Engenharia Didática. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

FONSECA, L. S. da. **Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França**. 2015. 1 v. 495 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 14, p. 203-231, 2011.

HENRIQUES, A. **Saberes universitários e as suas relações na educação básica**: uma análise institucional em torno do cálculo diferencial e integral e das geometrias. Ibicaraí: Via Litterarum, 2019.

HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *In*: **Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference**. 2004. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/137b/7e90b60215b97afa4fd3fa0edada3ec167b8.pdf. Acesso em: 10 jan. 2019.

IEZZI, G. *et al*. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, vol. 3, 1ªed. 1977.

JUNIOR, J. V. N; CARVALHO, E. F.; FARIAS, L. M. S. As três dimensões do Percurso de Estudo e Pesquisa: teórica, metodológica de pesquisa e dispositivo didático. **Educação, Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 363 – 373, 2019.

KENNEDY, E. S. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992.

KLEIN, E. **L'unité de la physique**. Paris: Presses universitaires de France, 2000.

LEONARDO, Fábio Martins de (Ed.). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LICERA, M. **Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado**. 2017. 251 f. Tese (Doutorado en Didáctica de la Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Valparaíso, Chile, 2017.

LOENG, P. R.n **Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge**. 2019. 432 f. Tese (Doctorale en Savoirs, Sciences, Education) – Université de Paris, França, 2019.

LUCAS, C. **Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas**. 2010. 256 f. Tese (Doutorado em Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones) – Departamento de Matemática Aplicada I, Universidade de Vigo, Vigo, 2010.

LUCAS, C. *et al*. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? **Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD)**. SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

NGUYEN, T. N. **La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam**: une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation. 2011. 383 f. Tese (Doutorado em Ingénierie de la Cognition, de l'interaction, del'Apprentissage et de la créatio) – Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville, Université Grenoble Alpes, Francais. 2011.

OECD. PISA 2015. Prograamme for International Student Assessement (PISA) Results From PISA 2015. **Publishing**, 2016. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil.pdf. Acesso em: 7 dez. 2016.

PEDROSO, L. W. **Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com Uso do *Software* GeoGebra**. 2012. 271 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SAFIER, F. **Pré-cálculo**. Tradução técnica Adonai Schlup Sant'Anna. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

SILVA, T. H. P. da. **Funções trigonométricas elementares e tecnologia:** algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo. 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015.

SILVA, L. P. da. **Um estudo da atenção seletiva na aprendizagem das funções trigonométricas**: etiologias e tipologias de erros na perspectiva da neurociência cognitiva. 2019. 209 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

SILVEIRA, M. R. A. da; TEIXEIRA JUNIOR, Valdomiro Pinheiro. Educação matemática, linguagem e arte: a apreciação da matemática pela compreensão de suas regras. **Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 23, n. 1, p. 204-220, jun. 2015. Disponível em: https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/5639. Acesso em: 1 mar. 2020.

SOUZA, E. S. de. **Uma proposta de utilização efetiva da calculadora padrão no ensino de potência**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências – Universidade Federal da Bahia, Salvador – Ba, 2015.

TROUCHE L. Calculators in Mathematics Education: A Rapid Evolution of Tools, with Differential Effects. *In*: GUIN D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Ed.). The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. **Mathematics Education Library**, Boston, v. 36. Disponível em: https://www.academia.edu/2744640/Calculators_in_mathematics_education_A_rapid_evolution_of_tools_with_differential_effects. Acesso em: 12 jun. 2018.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Sears & Zemansky**: física II: termodinâmica e ondas. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

ANEXOS

ANEXO A

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 01 Turma 01

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data :
Tema trabalhado: Apresentação e exploração da Q0.
Duração da socialização na aula: 9 minutos
Descrição: Após apresentação da Q0: Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos? Os alunos analisaram a questão e começaram a levantar outras questões derivadas da Q0 e respondê-las. Após a finalização da exploração, foram convidados a socializarem para os outros grupos seus resultados. É esse momento de socialização que está transcrito aqui nesse protocolo, uma vez que não conseguimos gravar os momentos individuais de cada grupo, por ser duas turmas com um total de 30 alunos.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:00 00:00:20	Professora	Gente nesse momento eu vou pedir para vocês socializarem, vamos por grupo a grupo, se quiserem os três do grupo falarem, ou um do grupo falar, não sei, só para a gente ter uma noção o que que isso levantou nas discursões de cada grupo. Quem quer ser o primeiro grupo?	
00:00:20 00:00:21	Aluno 1	Eu pró	Grupo 4
00:00:20 00:00:21	Aluno 2	Nós aqui	Grupo 3
00:00:22 00:00:24	Professora	Quem dos dois?	
00:00:25 00:00:27	Aluno 1	A gente (rsrsrsrs)	Grupo 3
00:00:28 00:00:29	Professora	Pode falar	
00:00:29 00:00:36	Aluno 1	É .... Sim, esse fenômeno. Primeira pergunta foi o que são fenômenos periódicos?	Grupo 3
00:00:36 00:00:38	Professora	Primeira pergunta que gerou foi sobre fenômenos periódicos	
00:00:38 00:00:59	Aluno 1	Fenômenos periódicos pelo que percebi são ciclos que se repetem. Ai um exemplo que a gente achou mais fácil é a questão do sol e né.... O sol nasce ... e se põe então nasce então é um ciclo. Então ficou ciclo periódico seria isso. Tem um ciclo, se repete...	Grupo 3
00:00:59	Professora	Certo.	
00:01:01 00:01:09	Aluno 1	Depois... foi a pergunta de Aluno 2 do grupo, se isso era relacionado com a física ou se era com a realidade rsrsrsrs	Grupo 3

00:01:08 00:01:15	Aluno 3	A física que eu falei era física como ciência ou a física, mundo físico da realidade.	
00:01:15 00:01:17	Aluno 4	A gente também fez essa pergunta	Grupo 1
00:01:18	Professora	É interessante	
00:01:19 00:01:20	Aluno 1	É a pergunta de (nome do aluno)	Grupo 3
00:01:20 00:01:23	Todos	Risos	
00:01:24 00:01:25	Professora	Más é interessante...	
00:01:25 00:01:46	Aluno 1	E essa pergunta... Essa questão modelar não entendi, então perguntamos como modelar eles matematicamente? a gente achou que matematicamente, por exemplo no ciclo trigonométrico, pode ser utilizado para modelagem.	Grupo 3
00:01:47	Professora	Nome do aluno	
00:01:48 00:02:27	Aluno 5	Ah... Eu estava analisando que os fenômenos físicos periódicos é tudo aquilo que se repete da mesma forma em um mesmo intervalo de tempo. Se for parar para pensar que ocorre naturalmente, né, temos o nascer e entardecer do dia, ele é um ciclo do sol. É... em questão de modelar eu acredito que seja por meio da contagem do tempo de duração dos fenômenos, obtendo a possibilidade de controlar algo durante esse fenômeno	Grupo 3
00:02:28	Professora	Isso está anotado ai?	
00:00:29 00:00:31	Todos	Som ambiente	
00:02:32	Professora	Próximo grupo	
00:02:33 00:02:36	Todos	Som ambiente	
00:02:37 00:02:48	Professora	É importante que todos socializem com os colegas seus resultados. Vocês também, isso pode enriquecer nossa aula, ainda mais vocês que são de outra área, pode trazer uma outra visão. Vocês são de qual área?	Nessa sessão tinha dois alunos de computação acompanhando a aula. Os dados deles foram desconsiderado no trabalho, pois eles só assistiram algumas aulas como ouvintes.
00:02:48	Aluno 6	Computação.	
00:02:49 00:03:14	Professora	É, vocês não conhecem (nome da pessoa); Eles são alunos de computação e estão como ouvintes na outra turma de pré-cálculo nas quartas, por que eles já caem direto no cálculo, entende? Quem vem falar aqui? Prestem atenção que as perguntas de cada um podem ajudar vocês no desenvolvimento da atividade	
00:03:14 00:04:07	Aluna 7	A primeira pergunta que a gente teve, foi: O que são fenômenos físicos periódicos?	

		É... o que basicamente tudo... É que se repete, a gente colocou que é tudo que se repte na mesma forma e ao mesmo intervalo de tempo. A segunda pergunta que a gente colocou é: Onde se aplicam os fenômenos físicos periódicos? Certo? É que está relacionada ao período do dia... ao dia a dia e também está relacionada a ciências, a matemática e a biologia. As... a terceira pergunta foi podemos utilizar para modelar conteúdos matemáticos? Se sim, quais? A quarta, como é utilizada para contribuir com a nossa realidade? E o que seria essa modelagem? Como faria? E ai, essa última a gente não respondeu não...	
00:04:08	Professora	Nome aluno	Grupo 1
00:04:09	Todos	Risos	
00:04:10 00:04:13	Professora	Não têm problema (risos). Próximo.	
00:04:14 00:04:50	Aluno 2	É...a primeira pergunta que a gente debateu aqui foi: o que seria fenômenos físicos periódicos ?(risos) E depois perguntamos: Porque a matemática deve ser moldada? O que é uma curva periódica? É a gente responde que modelagem é concebida como uma forma de ensino. E a matemática deve se comportar de uma maneira periódica.	Grupo 4
00:04:51 00:05:49	Aluno 8	Ai eu relembrei algumas coisas que tinha estudado em eletrotécnica sobre o comportamento de alguns componentes eletrônicos é... de resistência, resistor, capacitor e disjuntor, e ai ... a gente avalia a cada um desse componente em relação ao circuito que a gente tá, de acordo com gráfico e tem determinado componente está atrasado 90 graus em relação a tensão que está sendo aplicado a ele, está adiantado 90 graus, e ai a gente analisa de acordo ao gráfico e ele tem que tá perfeito. Se não tiver perfeito é sinal que tem alguma coisa ali dando errado, você pode acabar queimando, ou nem funcionando circuito que você desenvolveu. Talvez eu traga até algumas fotos de algumas práticas que eu realizei com esses circuitos. Se eu ainda tiver né.	Grupo 4
00:05:49 00:05:55	Aluna 9	Mas, aí a gente também associou com batimentos cardíacos. É um ciclo também.	Grupo 4
00:05:55 00:06:03	Aluna 10	Mas ai surge a pergunta aqui entre eu e minha colega de grupo (nome do aluno): Os batimentos cardíacos, eles mudam, eles não são um ciclo.	Grupo 5
00:06:03 00:06:14	Aluna 5	Essa edição... é necessário ter o controle no peito, pois por mais que ele seja “aproximado” dependendo da situação tem o controle	A palavra entre aspas, não está muito clara no áudio. Grupo 3
00:06:15 00:06:16	Aluna 10	É batimento por minutos - BPM.	Grupo 4
00:06:18 00:06:37	Aluno 11	Vocês podem no caso analisar periocidade no final, algo em razão de alguma coisa, podem imaginar um plano cartesiano e fazer um gráfico de um batimento	Menino 1 computação

		cárdico em função de um tempo “x” e ai você pode fazer um gráfico que simula em função do tempo	
00:06:40 00:06:48	Aluno 12	E aqui também tem um exemplo que é a função seno de “x”, é diz que é um fenômeno periódico, pois a cada período de dois “2π” tudo volta a se repetir.	Menino 2 computação
00:06:49 00:06:50	Professora	Vocês têm mais alguma pergunta?	
00:06:50 00:06:54	Aluna 13	Não, só uma questão em relação ao ciclo menstrual da mulher, acho contraditório.	Grupo 2
00:06:54 00:07:18	Aluna 14	Ai o próprio texto que a gente achou deu alguns exemplos de alguns ciclos, e a gente questionou, um exemplo é o ciclo menstrual , nem toda mulher é igual, vai se repetir para se repetir 28 dias , certinho daquele jeito, e também vai variar de mulher para mulher, a mesma mulher as vezes não repete o ciclo regular com 28 dias, ela pode demorar mais, ela pode demorar menos, então não é igualzinho. Entendeu?	Grupo 5
00:07:19 00:07:23	Aluna 13	Só algumas mulheres são regulares.	Grupo 2
00:07:24 00:07:25	Professora	Tem coisas aí, interessantes.	
00:07:26 00:07:30	Todos	Som ambiente	
00:07:31 00:07:48	Aluno 15	O que seriam esses fenômenos físicos periódicos? Que fenômenos são esses? É ... podemos também cria um padrão matemático pra representar fenômenos físicos que se reproduzem com intervalos de tempos iguais, ou seja, de outra forma transformar fenômenos físicos em problemas matemáticos através da observação da experimentação.	Grupo 2
00:07:49 00:07:50	Professora	Alguém mais algo a apresentar?	
00:07:51 00:08:18	Aluna 15	É sobre, esse ..., sobre esse ciclo do sol, que nasce e põe, eu pensei na verdade na rotação da terra, que na translação que na verdade o sol ele não vai se mover, é a terra que está girando nela mesmo e do sol, então acho que o ciclo seria essa, não o sol nascer e se por.	Grupo 2
00:08:18 00:08:26	Aluna 13	No site que eu tava pesquisando nesse instante, ele deu o exemplo também da lua, das movimentações que ela faz entorno da terra.	Grupo 2
00:08:26 00:08:34	Professora	Eu estou adorando as discussões. Muito legal mesmo.	
00:08:34 00:08:46	Aluna 15	Que a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é o meio de fazê-las interagirem.	Grupo 2
00:08:47 00:09:04	Professora	Muito bem. Oh terminamos por hoje. O caderno é de cada um de vocês, não compartilhar com a outra turma. E qualquer ideia pode colocar no caderno. Temos coisas distintas entre os grupos e perguntas que se repetem, muito bem. Continuamos na próxima aula.	

ANEXO B

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 01 Turma 02

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data : 02/09/2019
Tema trabalhado: Apresentação e exploração da Q0.
Duração da socialização na aula: 6 minutos e 10 segundos
Descrição: Após apresentação da Q0: Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos? Os alunos analisaram a questão e começaram a levantar outras questões derivadas da Q0 e respondê-las. Após a finalização da exploração, foram convidados a socializarem para os outros grupos seus resultados. É esse momento de socialização que está transcrito aqui nesse protocolo, uma vez que não conseguimos gravar os momentos individuais de cada grupo, por ser duas turmas cada uma com 15 alunos.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:01 00:00:02	Professora	Quem vai começar?	
00:00:02	Aluno 1	A gente.	
00:00:02 00:00:03	Professora	Quem é a gente?	
00:00:03 00:00:04	Aluno 1	Nome dos alunos 1 e 2	Grupo 9
00:00:04 00:00:05	Professora	Ah, então comece.	
00:00:06 00:00:08	Todos	Som ambiente	
00:00:09 00:00:35	Aluno 2	A primeira pergunta que a gente se fez é sobre o que é modelar matematicamente e a gente chegou a resposta de representar simbolicamente as formas e os mecanismos e características e situações ou fenômenos utilizando a matemática. Por exemplo: representações laboratoriais de buracos negros.	Grupo 9
00:00:35 00:00:42	Todos	Som ambiente	Conversas paralelas sobre o exemplo, que não conseguimos distinguir.
00:00:42 00:00:43	Professora	O que mais?	
00:00:44 00:00:45	Aluno 1	Ai a gente fez a segunda pergunta	Grupo 9
00:00:46 00:00:54	Professora	Fez quantas perguntas? Podem fazer as perguntas, mesmo não tendo as repostas. Só para a gente conhecer, para ver se alguma coincide.	
00:00:55 00:00:59	Aluno 1	Ai a gente perguntou o que são fenômenos físicos periódicos.	Grupo 9
00:00:59 00:01:01	Professora	O que são fenômenos físicos periódicos?	

00:01:02 00:01:30	Aluno 1	São fenômenos que se repetem em determinado tempo, que eles se repetem tipo assim, que ele não tinha variação, como aquele do...da orbita da terra que eles giram...é...que em relação aos fenômenos periódicos que sempre giram na mesma...e passam sempre no mesmo ponto	Grupo 9
00:01:31 00:01:34	Professora	Entendi, é tipo movimento circular.	
00:01:34 00:01:35	Aluno 1	É isso aí. Que sempre passa pelo mesmo lugar	Grupo 9
00:01:36	Professora	Teve mais alguma?	
00:01:37 00:01:39	Aluno 1	Não. Que dá ideia que sempre passa pelos mesmos lugares.	Grupo 9
00:01:40 00:01:41	Professora	Quem é o próximo?	
00:01:41 00:01:44	Aluno 1	O que vai chegando perto do sol...	Grupo 9
00:01:45	Professora	Então fale	
00:01:46 00:01:48	Aluno 1	O movimento dos planetas no centro. Pode continuar.	Grupo 9
00:01:49 00:01:52	Aluna 3	A gente colocou, o que são os fenômenos físicos periódicos primeiramente?	Grupo 6
00:01:52 00:01:53	Professora	O que são fenômenos físicos periódicos.	
00:01:54 00:02:10	Aluna 3	Isso..., aí..., a gente achou que era meio que como se fosse uma medida do tempo, como se calcula o tempo, como se fosse o calendário, é... dias o nascer, o pôr do sol, as fases da lua	Grupo 6
00:02:11 00:02:16	Aluna 4	Que se repetem sempre, após o mesmo intervalo de tempo.	Grupo 6
00:02:16 00:03:02	Aluna 4	Dias, é outras coisas... e a gente também se perguntou, é..., o que é a modelagem matemática, que eu acho que a maioria, cinquenta por cento se perguntou a mesma coisa, mas é... uma perspectiva, algo a ser explorado, imaginável e o inimaginável, necessidade de compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não no seu processo de construção. E... depois a gente se perguntou, qual a relação disso com a trigonometria e aí a gente chegou na ideia de que as funções. E aí a gente ficou com uma pergunta, será que essas funções são capazes de modelar? e aí a gente parou aí (risos)	Grupo 6
00:03:03 00:03:07	Professora	Pronto. Quem mais? Vai, podem é vocês que decidem	
00:03:07	Turma	Risos	
00:03:08 00:03:09	Professora	Isso é comum..., por isso	
00:03:10 00:04:03	Aluno 5	É porque a gente colocou aqui né, o que é modelagem matemática e achamos uma resposta que é a área que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, fazer previsões de certos comportamentos, depois nos vimos aqui: O que são fenômenos físicos periódicos. São fenômenos físicos que demoram o mesmo tempo para se repetirem e a partir disso a gente já sabia o significado de alguns termos da	Grupo 8

		pergunta... então a gente foi procurar resposta para pergunta toda. Como modelar matematicamente fenômenos físicos periódicos? Não achamos uma resposta imediata. Mas pensamos inicialmente a gente precisa conhecer o padrão de tempo, ou seja, o período em que o fenômeno se repete. Mas, não adianta saber o padrão de tempo sem ter um referencial, vai começar de quando? Ai a gente pensou: Também é necessário estabelecer o ponto inicial do círculo, para pode saber quando se repetem, e analisar o estágio entre o início e o fim, é só isso...estamos ainda pensando sobre isso.	
00:04:04 04:08:00	Professora	Muito bem. Agora vou para esse lado aqui. Próximo?	
04:09:00 00:04:49	Aluna 6	A gente também (riso) como todo mundo, fomos pesquisando cada parte e agente também viu, que se vai se repetindo a cada vez, a gente tinha que achar um ponto inicial e um ponto final, então a gente acabou lembrando das ondas senoidais, que sempre vão se repetindo, se repetindo, pode ser o início lá da onda, em cima ou embaixo. A gente também foi lembrando de exemplos, como a fase da lua e aí acabou entrando em trigonometria. Que também a gente pode perceber que no círculo trigonométrico que se repetem, por exemplo: O seno, o seno de zero é zero, seno de noventa é um, seno de cento e oitenta é zero e seno de trezentos e sessenta é menos um, aí vai se repetindo.	Grupo 7
00:04:50 00:04:51	Professora	Muito bem. Último grupo?	
00:04:52 00:04:55	Turma	Conversas sobrepondo sobre o tema	
00:04:56 00:05:08	Professora	Meninas... podem ficar tranquilas, podem falar... não existe certo nem errado, essa é a vantagem dessa parte... é só fazer...o que fazer está valendo (risos)	
00:05:09 00:05:14	Turma	Conversas sobre o tema se sobrepondo.	
00:05:16 00:05:20	Professora	Ok, nome do aluno. Ai, vocês com toda atividade feita. Socializem.	A professora se dirige ao grupo, para ver o porquê que as alunas não querem socializar.
00:05:21 00:05:22	Aluna 7	Mas praticamente foram quase as mesmas coisas.	Grupo 10. As alunas desse grupo acham que por terem respostas iguais não vale a pena socializar.
00:05:22 00:05:30	Professora	Não tem problemas, pode ler do jeito que está aí, a intenção é essa. Mostrar que tem muitas coisas iguais entre vocês. Podem ficar tranquilas.	
00:05:31 00:05:34	Turma	Conversas sobrepondo.	

00:05:35 00:05:52	Aluna 8	A gente primeiro colocou o que é modelagem matemática /matematicamente, que é uma transformação da linguagem materna para a simbolicamente, consiste em introduzir simbolicamente uma realidade, isto é, descrever uma situação observada usando uma linguagem matemática.	Grupo 10
00:05:53 00:06:10		Também colocamos: O que são fenômenos físicos periódicos? São aqueles que se repetem periodicamente, ou seja, a cada período inteiro. Exemplo: as fases da lua, que se repetem a cada 28 dias.	Grupo 10
00:06:10 00:06:25	Professora	Muito bem turma, finalizamos por hoje. Gostei dos resultados. Até a próxima aula e não compartilhem as respostas com a outra turma, certo?	

ANEXO C

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 02 Turma 02

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data: 04/09/2019
Tema trabalhado: Apresentação e exploração da Q1.
Duração da socialização na aula: 7 minutos e 4 segundos
Descrição: Após apresentação da Q0 e dos questionamentos e respostas levantados e discutidos na sessão 01, objetivamos explorar quais são os fenômenos físicos periódicos. Então nossa Q1 foi: Quais fenômenos físicos periódicos podemos modelar? Os alunos analisaram a questão e começaram a responder, pesquisando na internet, em livros e a partir de seus conhecimentos pessoais. Após a finalização, foram convidados a socializarem para os outros grupos seus resultados. É esse momento de socialização que está transcrito aqui nesse protocolo.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:00	Professora	Pronto!	
00:00:03 00:01:10	Aluno 1	A gente listou alguns fenômenos que a gente já tinha pensado. Mas não tinha anotado antes. Uma delas são as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, a gente ficou meio na dúvida porque agora no mundo está tudo tão bagunçado, mas ai a gente que para poder até prever, o tempo, como vai ser, precisa fazer essas análises , então tem que partir de algo que acontece periodicamente. É... a questão sanguínea do coração é... eu lembro que o coração tem um batimento mais contínuo, não contínuo, mas acho que é mais o menos isso, e ai vai se repetir aquele... pelo mesmo tempo, as vezes uma aceleração ou não , mas... pode ser colocado também. Nível de água em uma bacia marítima, na verdade a maré, o aumento da maré; as fases da lua; as estações do ano; e os movimentos de rotação e translação que ai fica definido os dias e o ano.	Grupo 6
00:01:11 00:01:13	Professora	Pronto. Quem mais? Querem falar? (som ambiente)	
00:01:14 00:01:15	Aluno 2	A minha é bem parecida.	Grupo 8
00:01:15 00:01:18	Professora	É vão ser bem parecidas, fiquem tranquilos.	
00:01:18 00:01:20	Aluna 3	Boa noite!	Aluno chaga atrasado na aula e de forma irreverente cumprimenta a todos com um boa noite, apesar da aula ser diurna. Grupo 8
00:01:24 00:01:33	Todos	Conversas sobreposta e pedido de silêncio pela professora.	

00:01:34 00:02:04	Aluno 2	O ciclo da vida de certos animais que só vivem por um tempo determinado e daí para biólogos simular o tempo de vida e tal, e ter controle do estado de vida que o animal está. É...duração de dias e noites, translação de planetas ao redor do sol, não só da terra, mas de qualquer planeta em orbita; ondas em geral; e batimentos cardíacos.	Grupo 8
00:02:05 00:02:27	Professora	Você gosta de física (nome do aluno)? Não, é só por curiosidade, não porque eu vi que vocês não estavam pesquisando as respostas na internet e sim pelos conhecimentos de vocês e colocaram bastante, não foi? Vocês não estavam da internet em si, aí por isso que perguntei se vocês gostavam de física, e do que estudou em física, e tem boa memória.	
00:02:28 00:02:31	Turma	Som ambiente.	Conversas paralelas entre os estudantes.
00:02:31 00:03:04	Professora	Vamos? Na escola a gente ver uma física e gosta. Mas aqui tem alguns alunos que não gostam, porém tem uma vantagem perante a escola, aqui a física é teórica e prática, então vocês vão ter sessenta por cento de aulas teóricas e quarenta por cento de aulas práticas, isso na nota também, isso permite um entendimento melhor dos fenômenos estudados, eu particularmente, gosto. O currículo que vocês fazem parte diminuiu uma disciplina de física, antes vocês tinham, física I e física II. Hoje apenas a física I teórica e prática. Quem mais? Vá!	
00:03:05 00:03:26	Aluna 4	A gente colocou as fases da lua, sucessão de dias e noites, estações do ano, a vista do cometa Halley, frequência cardíaca, dia do aniversário, rotação e translação, fenômeno do el nino, onda senoidal, aumento das marés, movimentos dos pêndulos, funções trigonométricas e horário de pico.	Grupo 7
00:03:27 00:03:41	Professora	Mas as funções trigonométricas são fenômenos físicos? Os demais consigo perceber, mas e as funções, vocês acham que são fenômenos físicos periódicos?	
00:03:41 00:03:45	Aluna 4	É realmente não é um fenômeno. Não tínhamos nos atentados a isso.	Grupo 7
00:03:45 00:03:49	Todos	Som ambiente com conversas paralelas.	
00:03:49 00:03:51	Professora	Vocês, quem vêm agora?	
00:03:52 00:03:53	Aluno 5	Vai você.	Grupo 9
00:03:53 00:04:19	Aluno 6	As órbitas dos planetas em relação a sua estrela; trajetória de um cometa; estações do ano; ciclo lunar; ciclo de um pêndulo simples e de Newton; ciclo de ondas eletromagnéticas e mecânicas; e spin de partículas subatômicas.	Grupo 9
00:04:20 00:04:40	Professora	Muito bem. Meninas. Fiquem à vontade...Não precisam querer elencar todos, relaxem. Falem apenas os que vocês conseguiram responder até agora.	
00:04:40	Todos	Som ambiente	

00:04:43			
00:04:44 00:04:59	Aluna 7	A gente conseguiu o movimento do sol e da lua, calendário que foi construído através de corpos celestes, fases da lua, sendo 28 dias em 4 fases. A gente também colocou a rotação e translação e a frequência cardíaca.	Grupo 10
00:05:01 00:05:05	Professora	Pronto! Vocês vão observar que vão se repetir, porque são fenômenos clássicos.	
00:05:06 00:05:12	Aluna 8	Tipo quando a gente fez aqui e pesquisamos na internet, e encontramos a mesma coisa. Cada um em seu celular e conseguimos os mesmos fenômenos.	Essa aluna, relata a experiencia interna do grupo. Grupo 10
00:05:13 00:05:18	Turma	Som ambiente.	
00:05:18 00:05:22	Professora	Você! O que trouxe para nós?	
00:05:23 00:05:56	Aluno 9	Assim... eu não sei fazer... é que eu tô, não sei se estou fugindo do raciocínio da senhora, ou se é algo que também pode ser levado em consideração. Só que é assim, eu pensei em algumas leis da física, tipo gravidade, é a lei de... alguns modelos que o pessoal, que... cientistas usam... que alguns criadores usam, é...para poder medir certos tipos de coisas, tipo... como gravidade... a lei de Kirchhoff, velocidade e algumas notações cientificas que a gente pode encontrar.	Grupo 7
00:05:57 00:06:35	Professora	Bem, mais ou menos, porque estou querendo algo mais simples, apenas os fenômenos mesmo, como por exemplo o batimento cardíaco, como falaram, a maré, só que você já está me mostrando o como, ou o conteúdo específico para trabalhar com alguns desses fenômenos. Não é isso ainda, é só a questão mais simples. É só qual é o fenômeno mesmo. Tudo bem até aí? Conseguiram perceber que a gente enquanto turma tivemos coisas comuns em todos os grupos, e também distintas? Mas, o que é periódico?	
00:06:36 00:06:49	Aluno 10	É um período de tempo entre duas edições, é... progressiva de uma mesma “publicação”. É uma característica de acontecimentos, situações que se repetem após determinado período.	A palavra entre aspas, foi uma dedução, o áudio não está claro. Grupo 8
00:06:51 00:07:04	Professora	Tudo bem, era só para saber se vocês estavam lembrando. Muito bem, por hoje ficamos por aqui, na próxima aula continuaremos com nosso trabalho.	

ANEXO D

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 04 Turma TP01 e TP02 apenas a letra a

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data: 06/09/2019
Tema trabalhado: Socialização da atividade da roda-gigante.
Duração da socialização na aula: 2 minutos e 13 segundos
Descrição: O objetivo dessa atividade foi compreender como os estudantes de licenciatura em matemática do primeiro semestre, modelam o fenômeno da roda-gigante. Esse momento transcrito nesse protocolo, foi a socialização e discussão das estratégias realizadas pelos alunos, validados as respostas secundárias, a fim de chegar na resposta esperada, ao final do PEP. Esse protocolo inicial só explora a primeira questão da atividade com as duas turmas juntas, pois foi ao final da aula de aplicação da sessão. A continuação da transcrição, ocorreu em uma aula extra, apresentada no anexo E.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:00 00:00:03	Professora	Bem, vamos socializar, quem começa?	
00:00:03 00:00:14	Aluno 1	Eu. A pergunta foi, quando Carlos está na posição mais alta? Então, pelas minhas contas, quando se passarem 5 minutos do início da jornada.	Aluno do grupo 7
00:00:14 00:00:17	Aluno 2	Eu quero falar que a minha está parecida.	Aluno do grupo 3
00:00:17 00:00:18	Professora	Pode falar.	
00:00:18 00:00:35	Aluno 2	Eu coloquei assim, temos que como uma volta completa equivale a 10 minutos, se a cabine partir do ponto mais baixo, ela atingirá o ponto mais alto em 5 minutos, já que a volta completa equivale a 10 minutos.	Aluno do grupo 3
00:00:35 00:00:38	Aluna 3	Eu fiz diferente, posso falar.	Aluna do grupo 6
00:00:39 00:00:42	Professora	Claro que pode (nome do aluno).	
00:00:43 00:00:49	Aluna 3	Ele está na posição mais alta em 5 min, 15 min e 25 min, conforme a roda-gigante que desenhamos.	Aluna do grupo 6
00:00:49 00:00:56	Aluno 1	Então o do meu grupo e do grupo de “nome do aluno” estão incompletas. Vou completar para não invalidar minha resposta.	Aluno do grupo 7 fala do aluno do grupo 3.
00:00:56 00:00:57	Todos	Sim	A turma concorda com o aluno1
00:00:57 00:00:59	Aluno 4	Eu também fiz igual ao grupo de “nome da aluna”.	Aluna do grupo 6
00:00:59 00:01:01	Aluno 5	O nosso grupo também.	Aluna do grupo 1
00:01:01 00:01:15	Aluna 6	Eu só acrescentei que como ele começou no ponto mais baixo e fez três voltas com 30 minutos, o ponto	Aluna do grupo 8

		mais alto é quando faz metade da volta, então quando tiver em 5, 15 e 25 minutos.	
00:01:15 00:01:18	Professora	Muito bem. Alguém mais fez diferente:	
00:01:18 00:01:22	Aluno 7	Eu fiz igual ao de (nome da aluna).	Aluno do grupo 4 citou a resposta da aluna 3.
00:01:23 00:01:26	Professora	E aí pessoal, mais alguém fez diferente? Grupo 2, 5 e 10?	
00:01:27	Todos	Não professora.	Alunos dos grupos citados respondem.
00:01:28 00:01:46	Professora	Então vamos prosseguir para letra b. Calcule a altura da cabine de Carlos no solo após 2,5 minutos de viagem, após 7 minutos, após 12 minutos e após 22 minutos. Quem quer começar?	
00:01:47 00:01:49	Aluno 5	Nosso grupo começa professora.	Aluno do Grupo 1
00:01:50 00:01:56	Aluna 8	Professora o horário da aula terminou, já são 12:35, temos que almoçar. Demoramos muito resolvendo, acho que não vamos ter tempo para socializar hoje.	
00:01:57 00:02:08	Professora	Pronto, tudo bem. Acabei me passando no horário. Vamos fazer assim, encerramos hoje por aqui, e no dia 11/09 continuamos com as socializações, porém não vamos conseguir juntar as turmas. Tudo bem?	.
00:02:09 00:02:13	Todos	Tudo bem professora. Até semana que vem.	Alunos respondem em coro.
00:02:13	Professora	Até.	

ANEXO E

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 04 Turma 01 a partir da letra b

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data: 11/09/2019
Tema trabalhado: Socialização da atividade da roda-gigante.
Duração da socialização na aula: 42 minutos e 3 segundos
Descrição: O objetivo dessa atividade foi compreender como os estudantes de licenciatura em matemática do primeiro semestre, modelam o fenômeno da roda-gigante. Esse momento transcrito nesse protocolo, foi a socialização e discussão das estratégias realizadas pelos alunos, validados as respostas secundárias, a fim de chegar na resposta esperada, ao final do PEP.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:00 00:00:19	Aluno 1	Em cinco minutos ele está na metade do trajeto, ou seja, no top... no topo, logo se em cinco minutos ele estava a quarenta metros, ai fiz regra de três, que dava que era vinte, só que é vinte só na roda, ai a gente adiciona dois metros que é altura que a roda esta do chão e total dá vinte e dois.	Aluna do grupo 2
00:00:20 00:01:01	Aluno 2	É, eu fiz diferente, depois... da ajuda de uma certa pessoa, é... que... com regra de três, se em trezentos e sessenta graus ele fazia em dez minutos, é... em dois minutos e meio ele faz quantos graus? Ai deu noventa graus, então por esse desenho, noventa graus está no meio da roda, então seria a altura do raio, mais esses dois metros que seria a altura da roda ao chão, então vinte e dois metros.	Aluna do grupo 2
00:01:02 00:01:04	Professora	Interessante, os dois.	
00:01:05 00:01:09	Aluna 2	Mas, primeiro eu tinha feito com a mesma lógica	Aluna do grupo 2
00:01:09 00:01:21	Professora	Ok. O que eu acho interessante é que a gente ver uma mesma questão e um mesmo grupo e a gente já vê diferente formas, vamos ir espalhando para a sala. Grupo daqui, para depois ir para o lado daqui. Vocês...	
00:01;22 00:01:47	Aluno 3	Eu coloquei... o ponto inicial está a dois metros de altura do chão a zero minutos, a cinco minutos ele faz meia volta e está a quarenta e dois metros do chão, quarenta metros do diâmetro, mais dois metros do chão ao círculo da roda, em dois minutos e meio ele estará dando um quarto de volta, ou seja ele estará coincidindo com o centro da roda, estando a vinte e dois metros do chão.	Aluna do grupo 1

00:01:48 00:02:03	Aluno 4	Só fiz ai regra de três mesmo, (risos) eu achei que na verdade só transformei a distância do círculo mesmo com que eu achei, que deu vinte, só somei com dois metros excedentes.	Aluna do grupo 1
00:02:04 00:02:06	Professora	Essa foi aquela questão que vocês estavam dando errado... não várias respostas	
00:02:06 00:02:08	Alunas 3 e 4	Não, foi outra (riso)	Alunas do grupo 1
00:02:09 00:02:10	Professora	Pronto. você!	
00:02:10 00:02:11	Aluna 5	Eu desenhei os desenhos...	Aluna do grupo 1
00:02:11	Professora	Calma!	
00:02:12 00:02:25	Aluna 5	Desenhei a roda, a sai colocando os minutos, quando ele fechava e parava no meio, aí eu vi que em 2,5 ele já está em vinte e dois metros, e só isso. Não fiz cálculo nenhum nesse.	Aluna do grupo 1
00:02:26 00:02:27	Aluna 4	Nesse né, 2,5	Aluna do grupo 1
00:02:28 00:02:30	Professora	Aham, vocês!	
00:02:31 00:03:16	Aluno 7	É... eu opinei em pegar a roda gigante como um relógio, então no lugar do doze eu coloquei um zero, no lugar do três eu coloquei dois e meio, no lugar do seis o cinco, no lugar do nove, sete e meio. Então eu percebi que o intervalo era de dois e meio. Ai eu medir, eu sei que a distância entre um grau e outro é 15, 15 graus, ai eu dividir, ai eu marquei direitinho , ai depois em tracei uma reta, com mais numerações dividindo o período certinho e achei quem em dois minutos e meio, vinte e dois metros; sete minutos, vinte e seis; doze minutos é quatro metros e vinte e dois é quatorze minutos.	Aluno do grupo 7
00:03:17 00:03:20	Professora	Você já deu a resposta de tudo, era só 2,5.	
00:03:21 00:03:23	Aluna 6	“Eita” menino “ligeiro”.	Expressões populares da Bahia. Aluna do grupo 4
00:03:23 00:02:26	Aluno 7	Ai que legal, desculpas, não prestei atenção que era só 2,5 min.	Aluno do grupo 4
00:02:27 00:03:32	Professora	Não era só da primeira..., rapidinho (pedido de silêncio) Repete só a primeira parte agora.	
00:03:33 00:03:35	Aluno 7	A primeira parte? Eu interpretei a roda como um relógio	Aluno do grupo 4
00:03:33	Professora	É	
00:03:34 00:03:38	Professora	Hum hum, por que ela não tinha entendido, vá!	
00:03:39 00:03:42	Aluno 7	Um relógio, aí no lugar do doze no relógio, eu peguei o relógio e fiz assim.	Aluno do grupo 4
00:03:42 00:03:43	Aluno 6	Não, eu entendi.	Aluna do grupo 4
00:03:44 00:03:46	Professora	Essa parte entendeu, pode seguir.	

00:03:47 00:03:48	Aluno 7	Eu fiz assim, meio do caminho	Aluno do grupo 4
00:03:48 00:03:49	Professora	Eu sei.	
00:03:50 00:04:01	Aluno 7	Ai no lugar do doze eu coloquei o zero, no lugar do três eu coloquei o dois e meio, no ligar do seis eu coloquei o cinco, no lugar do nove eu coloquei o sete e meio.	Aluno do grupo 4
00:04:02 00:04:03	Professora	Ok, continua. Depois pergunta	
00:04:03 00:04:45	Aluno 7	Ai, eu vi que o intervalo, a angulação é quinze graus, ai dividir em quinze graus e fui marcando de 0,5 até chegar ao ponto que eu tinha marcado, aí depois eu fui encontrando, é... no eixo “y” eu fui marcando os intervalos, eu sei que aqui é o centro e o diâmetro é quarenta... então o raio é vinte, pronto. Então o meio da roda-gigante seria vinte, então eu fiz assim: De zero a vinte eu tenho que dividir em quantos para dar? Ai eu falo cinco, ai coloquei tudinho os pontinhos direitinho, de quatro em quatro, encima também, e depois fui ligando de pontinho em pontinho, até achar o ângulo.	Aluno do grupo 4
00:04:45	Professora	É.	
00:04:46 00:04:50	Turma	Som ambiente	
00:04:50 00:04:53	Professora	Ele fez uma analogia do círculo trigonométrico com o relógio	
00:04:54 00:05:01	Aluno 4	Eu também acho que fiz o círculo trigonométrico, mas só que eu conferi, eu fazia o cálculo e olhava, tá certo? Tá, tá certo? Não tá.	Aluna do grupo 1
00:05:01 00:05:04	Professora	Em função do tempo. Vocês...	
00:05:06 00:05:10	Aluna 8	É... pra achar..., é para falar sobre o 2,5 ou o resto todo?	Aluna do grupo 5
00:05:10 00:05:11	Professora	Só o 2,5.	
00:05:12 00:05:28	Aluna 8	O 2,5 eu fiz regra de três, aí deu 2,5 corresponde a 90 graus e pronto. Ai a altura como o raio é vinte metros, mais dois metros da distância da roda até o chão, ai ficou vinte e dois metros.	Aluna do grupo 5
00:05:29 00:05:30	Professora	Você... nome da aluna	
00:05:30 00:06:41	Aluno 9	É... eu fiz, eu desenhei, é... uma circunferência, marquei os principais graus que são noventa, é... zero, noventa, cento e oitenta, e duzentos e setenta, ai eu coloquei que é... no noventa seria dois minutos e meio, porque cento e oitenta seria cinco minutos e analisei a partir disso que quando a viagem completar dois minutos e meio a cabine vai estar na posição de noventa graus, que é a metade da metade de uma volta, é... então a cabine terá percorrido é... o equivalente a $\frac{\pi}{2}$, que também será equivalente à metade do diâmetro e estará, a vinte... e o	Aluna do grupo 3

		diâmetro, a metade do diâmetro é vinte, no caso vai ser o valor do raio, ai vai tá vinte metros do chão mais dois metros que é fora da circunferência, que seria da roda para o chão.	
00:06:42 00:07:26	Professora	Perceberam? O quanto a atividade levantou respostas diferentes, agora se eu ensinasse de uma forma vocês iriam todos, boa parte responder igualzinho ao o que eu fiz, não era assim? Alguns não, mas boa parte sim, porque é como se fosse assim: É uma característica você reproduzir o modelo trabalhado pelo professor. Mas essa situação foi interessante porque faz com que vocês levantem diferentes formas de resolver uma mesma questão. Vamos para os sete minutos? O da guerra? O grupo de vocês que começou primeiro, não é?	
00:07:27 00:08:02	Aluno 1	Eu fiz análoga a primeira né... fiz em cinco minutos ela estava a quarenta metros, em sete minutos quanto estavam? Ai deu que estava a cinquenta e seis, só que a altura máxima é quarenta, então não tem como está a cinquenta e seis metros, então eu fiz cinquenta e seis menos a altura máxima, assim eu achei dezesseis. Este dezesseis seria a quantidade que a roda iria decrescer, já que a altura máxima é quarenta, então fiz quarenta menos esses dezesseis, achei vinte e quatro, mais os dois metros da altura da roda em relação ao chão vinte e seis.	Aluna do grupo 2
00:08:05 00:08:07	Aluno 2	Eu teria feito logo quarenta e dois, pois é a altura máxima.	Aluna do grupo 2
00:08:08	Aluno 1	É, pode ser também.	Aluna do grupo 2
00:08:09 00:08:12	Turma	Conversa sobreposta	
00:08:12 00:08:13	Professora	Vocês!	
00:08:14 00:08:41	Aluna 3	Mesma coisa, a gente fez a regra de três, cinco minutos para quarenta, sete minutos para “x”, a gente achou que “x” igual a cinquenta e seis, mas a altura máxima é quarenta e dois, então a gente subtrai, achamos... cinquenta e seis menos quarenta no caso, deu dezesseis, depois a gente pegou quarenta e dois que é a posição máxima , subtraímos dezesseis e achamos vinte e seis metros, que é posição de sete minutos.	Aluna do grupo 1
00:08:41	Professora	Vocês!	
00:08:42 00:08:53	Aluno 7	A gente tinha feito no graf... Mas resolvemos fazer com regra de três, do mesmo jeito que Aluna 3. (nome da aluna).	Aluno do grupo 4
00:08:54 00:08:56	Professora	O grupo de “nome do aluno”.	
00:08:57 00:09:02	Aluna 10	É... eu fiz uma divisão da roda gigante, eu poderia mostrar no quadro?	Aluna do grupo 5
00:09:03	Professora	Pode, claro!	

00:09:04 00:09:13	Turma	Som ambiente	Todos falando ao mesmo tempo, a mesma coisa.
00:09:14 00:09:15	Professora	“Nome do aluno” vai ficar com ciúmes.	
00:09:16 00:09:19	Turma	Era para você ter feito isso com aquela outra explicação...	Todos falando ao mesmo tempo, a mesma coisa.
00:09:20 00:09:21	Turma	Como assim? Que roda é essa?	Todos falando ao mesmo tempo, a mesma coisa.
00:09:22 00:09:24	Turma	Arrasou! Eu teria feito um quadrado aí.	Todos falando ao mesmo tempo, a mesma coisa.
00:09:25	Turma	Risos	
00:09:26 00:09:31	Professora	Arrasou mesmo, parabéns. A mão livre construir um círculo assim tão perfeito.	
00:09:32 00:09:37	Aluna 3	Eu tinha um professor do cursinho que ele usava o centro do cotovelo dele	Aluna do grupo 1
00:09:37 00:09:44	Turma	É.....som ambiente	Conversas paralelas
00:09:44 00:09:46	Turma	Conversa sobreposta	
00:09:46 00:09:46	Aluna 10	Posso começar?	Aluna do grupo 5
00:09:47 00:09:48	Turma	Pode.	
00:09:49 00:09:51	Aluna 10	A gente tem aqui, cinco minutos, dois minutos e meio, acho que todo mundo achou isso, né?	
00:09:52 00:09:54	Turma	Fui ao contrário	
00:09:54 00:10:07	Aluna 10	Vai dar igual ao de dez minutos e aqui o de sete minutos e meio. Aí eu não sabia fazer o cálculo para resolver, eu tentei na regra de três e não consegui. Aí ei dividir aqui em cinco partes iguais	
00:10:07 00:10:10	Aluno 4	Nossa eu fiz isso! Eu fiz isso!	Aluna do grupo 1
00:10:11 00:10:45	Aluno 10	Ai no caso, como a diferença de cá para cá são dois e meio, então aqui seria vários intervalos de dois e meio, então ficaria cinco vírgula cinco, seis, seis e meio e sete. Aí eu peguei aqui e dividir em cinco partes também, só que aqui eu dividir em cinco partes de quatro, então aqui teria vinte no centro né? Aqui teria vinte e quatro, vinte e oito, trinta e dois e trinta e seis. Aí eu liguei daqui para cá dá vinte e quatro, vinte e quatro mais os dois daqui é igual a vinte e seis.	
00:10:46 00:10:47	Aluno 3	Genial.	Aluna do grupo 1
00:10:48 00:10:53	Turma	Palmas.	
00:10:53 00:10:54	Aluno 7	Humilha, humilha muito.	Alun0 do grupo 4
00:10:55 00:10:57	Aluna 4	Você não sabe fazer o cálculo, mas faz isso!	Aluna do grupo 1

00:10:57 00:11:00	Aluna 9	Eu descobri que era quatro metros em cada ponto.	Aluna do grupo 3
00:11:00 00:11:01	Turma	Risos	
00:11:02 00:11:03	Professora	“Nome do aluno”	Aluna do grupo 3
00:11:04 00:11:05	Aluna 9	É...?	
00:11:05 00:11:06	Turma	Risos	
00:11:06 00:11:08	Aluna 9	Depois de uma dessa eu fico até com vontade de ser a última.	
00:11:09 00:11:10	Professora	Fiquem à vontade.	
00:11:11 00:11:57	Aluna 9	É...eu tinha analisado a primeira né... e tinha dado vinte e dois, aí esse de sente minutos eu analisei a roda também, fiz a conta para descobrir, eu fiz que “x” é igual a noventa dividido para cinco, é...esses noventa graus, isso daria dezoito graus, aí se noventa graus é vinte metros, os dezoitos graus seria quatro metros, aí eu fui e contei lá que a cada ponto é quatro metros, eu fiz uma doideira muito parecida com a dela, dá vinte e seis no final.	Aluna do grupo 3
00:11:58 00:12:13	Professora	Observaram mais uma vez? Que cada cabeça pensa de uma forma, as vezes pensa coisas iguais, resolvem e aí chegam em uma resposta, em uma mesma reposta por diferentes caminhos. Isso é interessante e é rico, porque teve pessoas que não pensaram assim, não foi?	
00:12:14 00:12:15	Turma	Não!	
00:12:15 00:12:42	Professora	Mas no momento que ela veio para cá, isso despertou, poderia também... ai “nome aluno” falou eu também fiz assim, mas entende? Isso é rico, porque começa vocês a compreenderem outras formas de enxergar. Vimos uma simples partição de um círculo, de uma roda-gigante, vamos falar assim. Que até então a gente está com a roda, né? Que chegou em resultados parecidos. Vamos retomar já essas estratégias.	
00:12:43 00:12:45	Professora	E doze minutos? Vocês!	
00:12:46 00:12:48	Turma	Doze?	
00:12:49 00:12:55	Professora	É, porque já foi o sete. Dois e meio, sete, falta doze e vinte e dois. Já vou fazer doze e vinte dois ao mesmo tempo.	
00:12:56 00:12:58	Aluna 8	Ó... quem vai falar?	Aluna do grupo 5
00:12:59 00:13:04	Turma	Conversa sobreposta	
00:13:05 00:13:22	Aluna 1	Oh eu fiz assim, como era doze minutos e a gente tem aqui que em dez minutos ele já deu uma volta completa, logo ele voltaria para a posição inicial, então eu ignorei esses dez	Aluna do grupo 1

		minutos e usei apenas os dois, e ai fiz a regra de três, normal que... achei dezoito.	
00:13:22 00:13:23	Professora	Pronto e "nome do aluno" fez como?	
00:13:23 00:13:32	Aluno 11	Daí como ele dar uma volta completa, e mais 2 minutos. Então calculei igual a Aluna 1 e deu dezoito metros, por regra de três.	Aluno do grupo 2
00:13:32 00:13:33	Professora	Quanto?	
00:13:33 00:13:34	Aluno 11	Dezoito metros.	
00:13:35 00:13:37	Professora	Vocês!	
00:13:38 00:13:40	Aluna 3	Mesma coisa, só que a gente.	Aluna do grupo 1
00:13:40 00:13:42	Aluna 4	Ah, foi dezoito metros	Aluna do grupo 1
00:13:43 00:13:44	Professora	Repete, fala devagar.	
00:13:44 00:14:00	Aluna 4	Eu tinha feito doze e vinte e dois, porque eu queria ver direitinho, só que eu não sei porque estava dando diferente, ai depois de tanto ficar estressada, percebi que dava no mesmo, porque pela lógica ele iria parar né, ai eu fiz a mesma coisa e deu dezoito também com regra de três.	Aluna do grupo 1
00:14:00 00:14:03	Professora	Silêncio, por favor para escutarmos a colega. Vocês!	
00:14:04	Aluno 7	O meu deu quatorze	
00:14:05	Professora	Fale.	
00:14:06 00:14:08	Aluno 21	Eu fiz, e o do nosso grupo deu quatorze. Por regra de três.	
00:14:08 00:14:09	Professora	Qual foi a regra de três que vocês fizeram?	
00:14:10 00:14:39	Aluno 20	A gente fez assim: Cinco minutos, é... equivale a quarenta metros, doze vale a "x", ai fez meio pelos extremos, deu cinco "x", igual a doze vezes quarenta (5X=12*40), ai "x" é igual a doze vezes quarenta dividido por cinco (X=(12*40)/5), "x" é igual a doze vezes oito(X=12*8), "x" é igual a noventa e seis (X=96), menos quarenta que é da circunferência, cinquenta e seis, cinquenta e seis menos quarenta e dois (56-42), quatorze.	
00:14:40 00:14:43	Aluno 4	Mas você não somou com dois do excedente?	
00:14:43 00:14:48	Professora	Repete, é... repete de novo, tudo... é.	
00:14:49 00:15:20	Aluno 20	Ó, a gente fez, cinco é igual quarenta, doze é igual a "x", ai fica cinco "x" é igual a doze vezes quarenta, "x" é igual a doze vezes quarenta, dividido por cinco, "x" é igual a doze vezes oito, "x" é igual a noventa e seis menos quarenta, que é a circunferência, ai quarenta, aqui dá cinquenta e seis, cinquenta e seis menos quarenta e dois, quatorze .	

00:15:21 00:15:23	Professora	O que vocês acharam da resposta? Concordam?	
00:15:24 00:15:27	Aluna 3	Eu achei estranho essa forma.	
00:15:27	Aluno 7	Hum?	
00:15:28 00:15:29	Aluna 3	Não, falta mais quatro metros.	
00:15:30 00:15:31	Aluna 8	É... pra chegar no resultado.	
00:15:32 00:15:37	Aluna 3	Tá dando resultado um pouco mais... Conversas sobreposta.	
00:15:38 00:15:43	Aluna 9	Não, pera, no final é cinquenta e seis menos quarenta?	
00:15:43 00:15:44	Aluno 7	E dois.	(aluno completa a interrogação, o mesmo que informa que totaliza quarenta e dois)
00:15:45 00:15:46	Todos	A sala fica em silêncio.	
00:15:46 00:15:59	Aluna 9	Só que esse dois não é de fora, ficaria cinquenta e seis menos quarenta? Ai daria sessenta, para somar com o dois no final?	
00:15:59 00:16:00	Aluna 9	Não é isso não?	
00:16:00 00:16:04	Aluno 20	Não, mas não foi noventa e seis menos quarenta e dois?	
00:16:02 00:16:17	Aluno 4	Ó, mas se você pegasse noventa e seis e somasse logo com dois do excedente, e depois o resultado tu subtraísses só por quarenta, ia dar um valor, aí depois você subtraísse por quarenta de novo iria dar dezoito	
00:16:17 00:16:20	Turma	Som ambiente (silêncio)	
00:16:20 00:16:20 00:16:27	Aluna 4	Era porque o noventa e seis você fez a conta, mas não usou dos dois metros da roda gigante, da distância da roda gigante até o chão, que é dois metros	
00:16:27 00:16:28	Aluna 8	É para subtrair tu usou os dois metros.	
00:16:29 00:16:47	Aluno 4	Para subtrair, tu tirou foi quatro, quarenta e dois e quarenta e dois, tirou quatro metros, entendeu? E não somou em momento nenhum. Tu somaria noventa e seis com dois (96+2) que é o excedente ali, depois subtraia por oitenta no caso, que seria o quarenta menos quarenta e daria dezoito certinho.	
00:16:47	Professora	Entendeu?	
00:16:48	Aluno 7	Noventa e seis, noventa e seis mais dois, noventa e oito, menos quarenta.	
00:16:56 00:16:57	Aluna 6	Cinquenta e oito	
00:16:58 00:17:00	Aluno 7	Cinquenta e oito, menos quarenta e dois.	
00:17:01 00:17:02	Turma.	Menos quarenta	
00:17:02	Aluno 7	Quarenta de novo?	

00:17:03			
00:17:03 00:17:06	Turma	Quarenta, é... diâmetro da roda... é dezoito	
00:17:07 00:17:08	Turma	Bem que já somou o dois.	
00:17:09 00:17:10	Turma	Esse número dois é fixo mesmo.	
00:17:16 00:17:22	Professora	O dois é fixo, porque o que se repete é só a volta da roda-gigante, mas os 2 metros dela até o solo, não se repete, não é isso que vocês estão querendo dizer? Vamos continuar que voltaremos em breve. Vocês!	
00:17:22 00:17:23	Aluna 4	Sim.	
00:17:23 00:17:32	Aluna 8	É... pra achar o grau de doze minutos fiz regra de três, achei quatrocentos e trinta e dois, como circunferência é de trezentos e sessentas graus.	
00:17:32 00:17:34	Professora	Repete ai, calma ai, devagar!	
00:17:34 00:18:01	Aluna 8	Ó, para achar o graus que os doze minutos estavam eu fiz regra de três, deu quatrocentos e trinta e dois, mas como a circunferência só têm trezentos e sessenta graus eu fiz o cálculo, quatrocentos e trinta e dois dividido por trezentos e sessenta, ai deu uma volta e sobra setenta e dois graus, que no caso é a primeira determinação positiva, ai eu marquei no gráfico e para achar a altura nós achamos como a aluna 10 mostrou ali no quadro.	
00:18:01 00:18:05	Aluna 10	O meu deu a mesma coisa, só que lá embaixo	
00:18:01 00:18:07	Aluna 8	É... aí deu dezoito metros.	
00:18:07 00:18:08	Professora	Entendi. Agora “Nome aluno”.	
00:18:09 00:19:16	Aluna 9	Ah... eu coloquei aqui quando a viagem completa doze minutos a cabine terá percorrido o equivalente a uma volta e quase um quarto de outra volta, no caso ele vai ter dado uma volta e quase ter chegado nos noventa graus e isso vai ser equivalente a quase oitenta e dois graus, é... como na anterior eu tinha feito que noventa graus divido por cinco era dezoito, eu subtrair dezoito de noventa e deu setenta e dois e (xxx) com sessenta, ai isso deu uns quatrocentos e trinta e dois, só que dezoito graus equivale a quatro metros, então... quatro, é... quatro vezes quatro dá dezesseis, mais dois metros dá dezoito e fechou. Eu fiz..., é...,também é confuso explicar aqui agora. Eu fiz a mesma coisa na de vinte e dois minutos e também deu 18 metros.	
00:19:17 00:19:31	Professora	Interessante né? A gente ver caminhos mais longo, caminhos mais curtos, caminhos mais embaraçosos, mas todos aparentemente chegando no 18.	

		Agora comparando com o esboço de ciclo trigonométrico que vocês compararam a roda-gigante, e com as respostas calculadas por regra de três, utilizando a altura e o tempo o que vocês acharam?	
00:19:31 00:19:42	Aluna 10	Eu achei, que por exemplo o grupo 2, deveria utilizar a noção do ângulo na proporcionalidade nos demais valores do tempo. Mas eles só utilizaram no 2,5. Pois assim acho que ficaria melhor a resposta, confirmando a figura do ciclo desenhado por eles. Acho que essa proporcionalidade não está certa, não é professora?	
00:19:42 00:19:43	Professora	O que vocês acham?	
00:19:43 00:19:51	Aluna 2	Nós do grupo 2, pensamos inicialmente, mas percebemos que ficaria mais fácil se associarmos a ordenada altura com o a abscissa tempo. Assim não precisaria calcular cada ângulo.	
00:19:52 00:20:22	Aluna 8	Mas assim você não está considerando como algo circular, função/círculo. Acho que pela figura do geogebra que meu grupo construiu, esse modelo está errado, pois deveria associar com o ângulo ou arco. A relação seria o tempo com a medida do arco ou ângulo e assim encontraríamos o valor da altura, e para isso teríamos que calcular o seno. E até eu, calculei errado a forma de achar o tempo 7,5 e 12. Acho que é assim, concorda professora?	
00:20:23 00:20:25	Professora	Os demais grupos querem discutir a resposta do colega?	
00:20:25 00:20:37	Aluna 5	Quando fiz o esboço para o geogebra, dividi também em ângulos. Mas esqueci de associar isso as questões anteriores. Percebo que as questões se completam, nós que não percebemos isso. Acredito que podemos utilizar a ideia da aluna 8.	
00:20:37 00:20:42	Aluno 7	Professora como poderíamos resolver utilizando os ângulos, fiquei curioso. A senhora pode fazer?	
00:20:43 00:22:36	Professora	Como vocês apresentaram as respostas de vocês, agora vamos discutir um pouco. Temos que a regra de três aplicada altura e tempo, não responde o que se pede. Podemos utilizar dois modelos matemáticos, vou mostrar o circular que é o que apareceu um pouco nas discussões de vocês. Temos que, se associarmos 360° a 10 minutos (volta completa) podemos descobrir quantos graus temos em 1 minuto, que é 36°. Como o tempo 2,5min todos encontraram sem dificuldade, vamos utilizar o modelo circular para descobrir a altura em 7 minutos. Utilizando um modelo proporcional ou regra de três descobrimos que o ângulo que equivale a 7 minutos é 252°. Traçando no círculo trigonométrico um triângulo retângulo POD do ponto P em 7 minutos, o ponto O no centro da roda gigante e o ponto D no eixo das abscissas paralelo ao ponto 7,5 minutos, que equivale a	

		270° no ciclo trigonométrico que representa a roda-gigante. Então temos que o ângulo desse triângulo retângulo sendo 18° que é a diferença entre 270° (7,5 min) – 252° (5 min) = 18°, ou seja, o valor do ângulo de 0,5 minutos. Como temos um triangulo retângulo, então vale a relação sen θ = $\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$, sendo o raio da roda-gigante igual a 20 metros e sen 18º= 0,309 então sen 18° = $\frac{x}{20}$,<=> 0,309 = $\frac{x}{20}$, então x = 6,18 m. E como a distância entre os tempos 2,5 minutos e 7,5 minutos são iguais, em relação ao solo, temos que a distância de P no instante 7 minutos é: $h_{7min} = h_{2,5min} + x$ = 22 + 6,18 = 28,18 m. Estão entendendo?	
00:22:36	Todos	Sim	
00:22:36 00:22:38	Professora	E agora para o tempo 12 minutos e 22 o que faremos?	
00:22:38 00:22:39	Alguns alunos	O mesmo cálculo, porém com ângulo diferente.	Alguns alunos respondem em coro.
00:22:39 00:23:20	Professora	Vocês estão certos. Mas, podemos pensar de uma outra forma. Observe que 12 minutos é um ponto 2 minutos após uma volta completa. Então temos que 12 minutos é um ponto simétrico ao ponto P, ou seja, a 7 minutos, pois há uma meia volta entre eles. Então o valor de x do triângulo retângulo que podemos construir é o mesmo, por serem pontos simétricos e terem ângulos congruentes o valor do cateto oposto do triângulo retângulo formado também será 6,18m. Assim, para encontrar a altura, basta pegar o valor da altura no instante 12,5 minutos, que é igual a 22 metros, por ser côngruo a 2,5 minutos e subtrair 6,18 m. Então: h = 22 – 6,18 = 15,82 m. E como 22 minutos possui a mesma posição de 12 minutos, pois faz parte da terceira volta, a altura também será 15,82. Entenderam?	
00:23:21	Todos	Sim	
00:23:21 00:23:36	Aluna 9	Mas não é tão fácil para percebermos, pois estamos acostumados, a associar dois valores e associar um ao eixo x (abscissa) e o outro ao eixo y (ordenada), e não analisar se pode ter outra relação. Mas essa forma de resolver não é difícil e se encaixa com o desenho construído no GeoGebra da gente.	
00:23:36 00:23:50	Professora	Muito bem. Então vamos continuar as socializações, lembrando que essa resposta da proporcionalidade que vocês construíram de diferentes formas para dar 18, algumas foram refutadas, de acordo com nossa explicação. Concordam? E acrescentamos mais essa como resposta validada, certo?	
00:23:50	Todos	Sim.	
00:23:50	Professora	Vamos para letra “c” que é o do Geogebra né?	

00:23:53			
00:23:53	Turma	É.	
00:23:54 00:24:00	Professora	Então como você me enviaram já o arquivo, vamos para letra d. A partir dos trinta e cinco metros de altura podemos ver o farol da barra. Por quanto tempo Carlos poderá ver o farol em cada volva?	
00:24:00 00:24:03	Aluna 4	E fiz um textinho para poder falar.	
00:24:03 00:24:05	Professora	Se alguém quiser vim ao quadro também junto, pode!	
00:24:05 00:24:13	Aluna 9	“Nome do aluno” fez a análise desse negócio é... a divisão que ela fez de cinco espaço eu fiz para os dois lados	
00:24:14	Aluna 3	Eu também.	
00:24:15 00:24:24	Aluna 9	Eu fiz uma análise e cortando no eixo, é trinta metros? É trinta ou trinta e cinco?	
00:24:24 00:24:25	Aluna 3	Trinta e cinco.	
00:24:25 00:24:37	Aluna 9	É uma média assim cortando, fazendo uma linha dá um total de cinco espaços, como cinco espaços equivale a dois minutos e meio... é...	
00:24:37 00:24:41	Professora	Em suma, quanto tempo?	
00:24:41 00:24:45	Aluna 9	Dá no total sete minutos e meio nas três voltas Hum....	
00:24:46	Aluno 7	A minha deu menos.	
00:24:47	Aluna 3	Quantos?	
00:24:47 00:24:51	Professora	Sete minutos e meio nas três voltas, então dois minutos e meio.	
00:24:51	Aluno 9	Por volta	
00:24:51 00:24:54	Professora	Por volta, que acho que a pergunta é por volta, né? É, então é dois minutos e meio.	
00:24:54 00:24:56	Turma	Som ambiente.	
00:24:56 00:24:57	Professora	Outro grupo.	
00:24:57 00:24:58	Aluno 9	Estou um pouco assustada.	
00:24:58 00:24:59	Professora	Não, fique tranquila.	
00:25:00 00:25:47	Aluna 1	É, eu tinha feito... o seguinte. Se em cinco minutos ele estava a quarenta metros, quanto ele estivesse em trinta e cinco metros, quantos segundos seriam? Aí deu que seria quatro virgula trezentos e setenta e cinco minutos. Ai na minha cabeça, como daqui até aqui ainda que ele decline ele ainda estaria vendo, eu multipliquei por dois, que ficava oito virgula setenta e cinco. E aí eu fiz os quarenta metros, menos essa, não espera aí gente...	
00:25:47 00:25:48	Turma	Risos	
00:25:49 00:26:32	Aluna 1	Nem eu sei mais o que eu queria. Eu sei que eu tinha feito errado, porque eu tinha usado esse tempo que eu achei como se	

		fosse o tempo como se fosse o tempo que ele estava vendo, só que depois "nome do aluno" me alertou que na verdade esse tempo que eu achei na verdade foi o tempo que ele levou para chegar nos trinta e cinco metros, ou seja o tempo que ele estava vendo o farol da barra não foi esse, eu teria que tirar dos dez minutos que é uma volta completa esse tempo que ele levou para chegar, nos trinta e cinco metros e partir desse que sobrou eu multiplicar por dois, que seria o tempo que ele estaria aqui, e ai por mim eu achei que ele veria em uma volta, ele veria por um virgula vinte e cinto minutos	
00:26:33	Professora	Quem mais?	
00:26:34	Aluno 7	Deu quantos minutos?	
00:26:35 00:26:37	Professora	Um virgula vinte e cinco minutos	
00:26:37 00:27:59	Aluna 4	A gente venta achou o mesmo valor, é... primeiro eu acho que não me engano, porque eu acho que não coloquei aqui, mas usando também uma das coisas que "nome do aluno" falou, como ele começa a ver dos trinta e cinco metros, é... tem sete metros que ele consegue que ele..., dos sete metros ele consegue observar o farol, ai como ele começa ver o farol da barra a partir dos trinta e cinco metros de altura significa que ele consegue a partir de quatro virgula dezessete minutos, que eu achei o tempo. Isso levando em conta o início da jornada. Como a altura máxima é quarenta e dois metros, ele consegue ver desde os trinta e cinco, até os quarenta e dois, enquanto a poltrona ele ainda consegue ver até atingir novamente os trinta e cinco metros, que por sua vez acontece em cinco virgula trinta e quatro minutos, ai eu subtrair os cinco virgula trinta e quatro, que é quando ele finaliza e quando ele começa, que foram quatro virgula dezessete, ai deu um virgula sessenta e seis minutos, que corresponde a um minuto e quarenta segundos... em cada volta.	
00:28:00 00:28:01	Professora	O grupo todo concordou com isso?	
00:28:02	Grupo	Hunhum.	
00:28:03 00:28:04	Professora	E, vocês.	
00:28:05	Aluno 7	Eu não fiz esse.	
00:28:06	Professora	Vocês!	
00:28:06 00:28:07	Aluno 5	O da gente dá diferente.	
00:28:08 00:28:10	Professora	Podem falar, fiquem tranquilo. Não tivemos ainda uma resposta certa.	
00:28:11	Turma	Risos	
00:28:12 00:28:22	Professora	Deu certo um com o outro, calma! Não que a resposta está certa, porque as vezes vocês tiram como certo a resposta que as vezes se repetem, fique tranquila quanto a isso	
00:28:22 00:29:21	Aluna 10	Eu fiz a mesma coisa como fiz ai, só que nessa parte o espaçamento com diferença de quatro eu fiz uma diferencia de cinco, para eu poder	

		achar trinta e cinco, ai tinha trinta e cinco desse lado, trinta e cinco desse lado, ai trinta e cinco para quarenta uma diferencia de cinco, então cinco de uma lado, cinco de outro, vão dar dez. Em dez metros ele demora dois minutos, não, é... só sei que os dez metros... o meu Deus, como foi que eu fiz? Dá dez, dez metros seria dois minutos... dez metros, agora eu entendi, vinte metros é dois e meio, dois minutos e minutos e meio, então dez metros é um minuto e vinte e cinco, então na primeira volta ele demora um e vinte e cinco, na segunda dois minutos e meio e na terceira quatro e quinze. O que daria três e setenta e cinco, passando para minutos quatro e quinze.	
00:29:21 00:29:22	Professora	No total?	
00:29:23	Aluna 10	No total.	
00:29:34 00:29:30	Professora	Engraçado que o resultado de nenhum de vocês se repetiu. (risos seguido de silêncio)	
00:29:40	Aluna 1	Alguém acertou?	
00:29:43 00:30:19	Professora	Não sei, isso vocês vão descobrir breve, na outra turma também, na outra turma a gente não chegou a discutir mais sobre, mas os valores que botei no quadro, nenhum bateu com ninguém, As variações era um e pouco. A aula terminou e nem percebemos, só quando o outro professor chegou que saímos da sala. Estávamos muito empolgados discutindo sobre essa questão. Eu quero entender uma coisa, me expliquem por favor. Vocês consideram os trinta e cinco metros de altura da posição ou considerando os dois metros	
00:30:19 00:30:21	Aluna 3	Eu considerei duas vezes	
00:30:21 00:30:22	Aluna 10	Eu considerei sem	
00:30:22	Aluna 4	Eu considerei dois metros.	
00:30:23 00:30:30	Professora	É só para que eu saiba, quem considerou os dois metros e quem não. Deixe-me ver.	
00:30:30	Aluno 4	Eu considerei dois metros.	
00:30:31 00:30:47	Aluno 9	Eu parei e fique analisando isso e pensei, se vai considerar sem, então a roda deveria estar no chão, porque se a altura é a partir do chão, a torre está grudada no chão, então altura é a partir do chão	
00:30:48	Professora	Sim.	
00:30:49 00:30:50	Aluna 9	Então considerei com.	
00:30:50 00:30:52	Professora	Certo. Vocês não vão ficar para a aula de lógica depois não?	Dois alunos se levantam para ir embora.
00:30:52 00:30:57	Aluno 7	Por causa... do boato que terá paralisação dos policiais, temos que ir.	
00:30:58 00:30:59	Professora	Mas, não vai ter paralisação dos policiais gente	
00:30:59	Aluna 3	É só segunda.	

00:30:59 00:31:07	Aluno 7	O carro falou... o carinha do carro falou que de tarde não vai ter carro, então não vai ter como eu voltar. Então a gente está indo meio dia.	
00:31:07	Aluna 5	Ou “nome do aluno” e o trabalho de lógica, vai ser como?	
00:31:10	Aluna 10	Não vai ter prova.	
00:31:11 00:31:12	Aluno 7	Eu conversei com o professor	
00:31:13	Aluno 5	Tá	
00:31:14	Professora	Vão lá!	
00:31:14 00:31:19	Turma	Risos e conversas paralelas sem possibilidade de transcrição.	
00:31:19 00:31:28	Aluna 4	Professora, eu considerei, porque tipo assim, quanto fala que consegue ver abaixo de não sei a quantos metros, não simplesmente esquece aqueles dois metros ali.	
00:31:29 00:31:30	Professora	Calma!	
00:31:31	Aluna 3	Porque ele fala a altura, mas não fala ...	
00:31:32	Aluna 4	É.	
00:31:32 00:31:43	Professora	É isso que eu queria entender, se vocês enxergaram os trinta e cinco com a altura, já considerando a partir de trinta e cinco metros com os dois, ou trinta e cinco metros da roda gigante	
00:31:43	Turma	Da roda gigante	
00:31:44	Aluno 1	Agora a professora falou...	
00:31:45	Aluna 3	A gente fez com os dois	
00:31:46 00:31:54	Professora	Aqui foi considerando trinta e cinco a altura total já, aqui trinta e cinco só a roda né?	
00:31:54	Turma	É.	
00:31:55 00:31:57	Professora	“Nome do aluno” também, não foi isso?	
00:31:58 00:31:59	Aluna 9	O meu foi com a altura total.	
00:31:59 00:32:23	Professora	Altura total, a altura total, altura total e os dois sem, não foi isso? É só para eu anotar aqui, porque eu tenho que analisar como foi que cada um fez isso. Risos, por que eu estou com três, quatro, cinco, seis, sete e oito resposta diferentes, aí então eu vou descobrir qual é a lógica entre as repostas de vocês, é o meu divertimento do final de semana	
00:32:15	Turma	Risos.	
00:32:23 00:32:25	Turma	Risos.	
00:32:25 00:32:26	Aluna 1	Ah, o seu trabalho é...	
00:32:27 00:32:28	Professora	Não, não é do trabalho	
00:32:28 00:32:30	Turma	Risos,	
00:32:31 00:32:32	Aluna 3	Qual vai ser a diversão do final de semana? Tipo assim	
00:32:32 00:32:33	Aluna 5	Faz parte da, do seu...	

00:32:33 00:32:36	Professora	Da tese não, aqui já é por curiosidade mesmo. Risos.	
00:32:36 00:32:37	Turma	Risos.	
00:32:37 00:32:40	Professora	Que eu quero entender os caminhos percorridos	
00:32:40 00:32:41	Aluna 9	A senhora descobre e conta para a gente.	
00:32:41 00:32:48	Professora	Mas a intensão é essa, eu anotei as quatros de lá e aqui de vocês, uma, duas, três e quatro resposta de novo oito respostas.	
00:32:48 00:32:51	Aluna 1	Mas essas quatros daqui, foi diferente das quatro de lá?	
00:32:51 00:32:52	Aluna 3	Jesus, coitada	
00:32:52 00:32:56	Professora	Sim, acho que apenas essa de 1,25 que apareceu lá.	
00:32:56 00:32:58	Aluno X	Foi, porque eu fiz com "nome do aluno" e "nome do aluno".	
00:32:58 00:33:02	Professora	Foi, essa de um virgula vinte e cinco apareceu. "Nome do aluno" e "nome do aluno" são daqui.	
00:33:03 00:33:04	Aluna 8	Eles são daqui, não?	
00:33:04	Aluna 1	Sim.	
00:33:04	Professora	É.	
00:33:04	Aluna 9	Sim.	
00:33:05 00:33:08	Turma	Conversa sobreposta sem possibilidade de transcrição.	
00:33:08 00:33:17	Aluna 1	Foi no dia que aquele meu grupo faltou, dois membros e fiquei só, ai eu me desesperei, ai eu conversei com eles, mas sei que o final deles estão igual ao meu.	
00:33:13	Professora	Tranquilo.	
00:33:17 00:33:20	Aluna 9	Pois é mulher, a resposta dele está igual a minha também.	
00:33:20 00:33:23	Professora	Fiquem tranquilas...	
00:33:24 00:33:25	Aluna 9	A gente não sentou para discutir.	
00:33:25 00:33:30	Professora	Calma, isso vai dar certo! Vamos lá. Deixe eu anotar aqui esses resultados.	
00:33:30 00:33:31	Aluna 3	Mas isso ai é a parte deles.	
00:33:31 00:33:35	Aluna 4	Eu já ia falar, elas querem a parte delas.	
00:33:35 00:33:36	Aluna 4	A gente ficou por último também.	
00:33:37 00:33:39	Professora	É a representação, não é? Considerou (risos) vocês são ótimas. Só um momento.	A professora fez uma pausa para beber água.
00:33:39 00:34:40	Todos	Conversas paralelas	
00:34:40 00:34:53	Professora	Voltando! Vamos prosseguir, aqui.	
00:34:53	Aluna 8	Sua aula não acabou não professora?	
00:34:54 00:34:57	Professora	Não, claro que não. Nossa aula termina às doze e meia.	

00:34:58 00:34:59	Turma	Conversas sobreposta sem possibilidade de transcrição.	
00:34:59 00:35:08	Professora	Mas vamos lá. Retomando a letra “c”. Construa uma figura utilizando o Geogebra para apreciar o trecho da cabine “P”, Vocês fizeram a mão livre primeiro, não foi?	
00:35:08	Aluna 1	Não.	
00:35:09	Turma	Conversas sobrepostas sem possiblidade de transcrição.	
00:35:12 00:35:16	Aluna 9	A mesma figura que eu fiz para analisar a... questão foi a que eu fiz no Geogebra.	
00:35:14	Aluna 10	Eu também.	
00:35:17 00:35:18	Professora	Pronto! No Geogebra...	
00:35:18 00:35:19	Aluna 1	Mas pró, essa daí é para a gente ter no caderno?	
00:35:19	Professora	Qual?	
00:35:20 00:35:22	Aluno X	Essa aí letra c.	
00:35:22 00:35:24	Professora	Essa aí vocês não fizeram no Geogebra?	
00:35:24 00:35:25	Aluna 1	Na verdade, a gente não fez.	
00:35:25	Aluna 8	A gente fez no Geogebra	
00:35:26 00:35:27	Aluna 4	A gente fez no Geogebra	
00:35:28 00:35:29	Aluna 3	Eu fiz no Geogebra	
00:35:29 00:35:31	Professora	Então que não fez, faça e depois me envia, tudo bem?	
00:35:32 00:35:34	Aluna 4	Mas no caderno não, né? A gente já fez.	
00:35:34 00:35:39	Professora	Não. Vocês podem fazer no laboratório, ou no celular	
00:35:40 00:35:43	Aluna 1	Há já sei, posso fazer segunda feira na hora que “aluno 11” vim.	
00:35:43 00:35:53	Professora	Então faz assim, no final de segunda feira, se ele não conseguir fazer, no final da aula segunda feira ele faz.	
00:35:53 00:35:59	Turma	Conversas simultâneas	Sem possibilidade de compreensão da transcrição.
00:35:59 00:36:17	Professora	Ah tá, vai, vocês são da segunda turma. É porque depois do que vocês vão fazer no Geogebra não vai ter muita graça para fazer essa, entende? Por isso que eu quero que vocês façam antes, exatamente por isso, porque se não vai dizer: Ah não, não vou fazer isso mais, já fiz essa.	
00:36:18	Aluna 8	Eu já fiz essa (concordando com a fala da professora)	
00:36:19 00:36:32	Professora	Entende? Olha aqui, voltando a questão eu quero saber o que vocês pensaram em fazer no Geogebra, quem fez? Pode começar por aluna 9 (nome da aluna). Você me mostrou uma imagem, você fez o que?	

00:36:32 00:36:44	Aluna 9	A, eu fiz uma circunferência, e marquei os pontos, eu não consegui avançar muito, porque no celular é muito ruim para fazer, eu não conseguir alinhar ângulo, é essas coisas.	
00:36:45 00:36:46	Professora	Pronto, vocês!	
00:36:46 00:36:47	Aluna 9	Só fiz a circunferência mesmo.	
00:36:47 00:36:58	Aluna 8	Olha, a gente fez a circunferência, mas a gente teve a ajuda de um colega que ele falou que o gráfico de um círculo trigonométrico, ou melhor de uma função seno, função trigonométrica é um negócio assim, cheio de voltas.	A aluna faz o gesto em formato de ondas.
00:36:58 00:36:59	Aluna 10	Não é uma função simples.	
00:36:59 00:37:17	Aluna 8	É. Ai eu nem queria fazer, aí eu fiz logo desse jeito ai que é do círculo trigonométrico, eu coloquei ângulos, tem lá as opções de ângulos, coloquei arco trigonométrico que eu acho que é o nome disso e depois comecei a ver, mas eu coloquei uns ângulos, não foram exatos porque não dá para mexer certinho e tal e coloquei arcos trigonométricos. Depois eu mando para a senhora ver.	
00:37:17 00:37:19	Professora	Dá! Vocês que não sabem ainda.	
00:37:19	Aluna 8	É.	
00:37:20	Professora	Risos	
00:37:21	Aluna 8	Eu não conseguir mudar para ficar exato.	
00:37:21	Professora	Hanham	
00:37:22 00:37:30	Aluna 8	Ai eu tracei um segmento de reta do chão que eu fiz lá, até cada altura para poder determinar as alturas	
00:37:31 00:38:05	Todos	Conversas paralelas	Nesse momento a aluna 8, mostra a construção feita no geogebra para professora.
00:38:06 00:38:13	Professora	Muito bem, me enviem. É... vocês! Vão fazer ainda, não é? Nome de aluno 1, aluno 2 e aluno 3.	
00:38:14 00:38:21	Aluna 2	Não, eu fiz, copiei a figura que a gente tinha feito lá para gente, eu acho que é simétrico.	
00:38:22 00:38:24	Aluna 1	Mas é para desenha a função do ondulatório ou a do círculo?	
00:38:24 00:38:34	Professora	Uma figura. É vocês que vão escolher, isso é bem geral mesmo, é a escolha de vocês, quando vocês olharem assim, tipo:	
00:38:35 00:38:36	Professora	Prestem atenção meninas.	
00:38:36 00:38:56	todos	Conversas simultâneas.	
00:38:57 00:40:01	Professora	Vamos voltar aqui. É... estávamos onde? Na figura, pronto.	

		A figura vocês que vão escolher, o que vocês acham que melhor representa as alturas da cabine, se é uma função, se é um gráfico, se é um círculo, se é um desenho no Geogebra, é uma escolha de vocês, isso é uma coisa bem livre. Para a gente ver o que aparecer, o que pensarem. Vão ter momentos que os três do grupo, poderão ter figuras distintos, um exemplo: “Nome do aluno” quer um quadrado, “nome do aluno” quer um cone e “nome do aluno” quer... uma árvore, pronto. Se o grupo não entrou em um consenso, pode apresentar as três imagens diferentes. Perceberam? É algo bem livre, estou deixando vocês assim bem tranquilos.	
00:40:01 00:40:04	Aluna 4	Seja livre...seja livre	(A aluna canta um trecho de uma música na sala.)
00:40:04	Turma	Risos	
00:40:05 00:40:08	Professora	Tudo bem? Tudo bem cantora? Vamos lá, o grupo da cantora.	
00:40:09 00:40:10	Aluna 3	Conta essa história...	
00:40:10	Aluna 5	Assim	
00:40:11 00:40:15	Aluna 5	Eu comecei a fazer o desenho da... do negocinho da roda-gigante	
00:40:16	Professora	Daquele o que?	
00:40:17 00:40:24	Aluna 5	Do parangolé da roda-gigante, e aí do nada me deu sono eu parei e fui dormir e aí comecei a sonhar.	*parangolé é uma expressão regional, como se fosse balangandá, algum adereço;
00:40:24 00:40:29	Aluna 1	Meus Deus do céu.	
00:40:29 00:40:30	Professora	Olha o potencial dessa atividade.	
00:40:31 00:41:11	Aluna 5	Foi, eu fique fixada nesse negócio, meu namorado falou que eu estava ficando doida (risos), mas é. Sonhei que eu estava sentada com um monte de caderno, um monte de papel em cima da cama fazendo, e aí, falou assim; É porque você não faz essa função? Você não fez essa função no caderno? Por que você não faz? Ai ei fiz, então fui pegar o caderno (no sonho). Então eu acordei e fique em cima da cama olhando para o teto, não sei por quê, mas eu fique lá, aí eu comecei a pesquisar, pesquisei vários sites, vi vários vídeos ai eu fiz, já sei como é que é, já sei mais o menos como eu vou fazer, então vou tentar achar aqui e comecei achar um monte de coisa e ai fui fazendo, ai eu achei uma função e ela não é do seno, é do cosseno, $f(x)=-21\cos(\frac{\pi}{5}x) + 21$.	

00:41:11 00:41:18	Aluno 11	Mas nessa função os parâmetros não seria 20 do raio e 22 a distância da roda até o solo?	Grupo 2
00:41:18 00:41:19	Aluna 5	Eita, não tinha me atentado a isso.	Grupo 1
00:41:20 00:41:27	Professora	Ai quando você jogou no Geogebra você achou um movimento lá que representa a sua figura lá das alturas. Você deve fazer algumas alterações, nessa lei de formação.	A professora se aproxima da aluna, e mostra a ela, onde alterar.
00:41:27 00:41:29	Aluna 5	Isso, no Geogebra.	(concordando com a fala da professora).
00:41:29 00:41:32	Professora	Pronto! Estão vendo? O potencial que alcançamos.	
00:41:32 00:41:34	Turma	Risos.	
00:41:34 00:41:41	Professora	Diferentes respostas, não é? A gente observa o quão rico é, tivemos círculos, pensamos em funções, pensamos em gráficos, pensamos em árvores, entende? O que mais?	
00:41:42	Aluna 3	Assíntotas.	
00:41:42 00:41:49	Professora	Sim, em assíntotas e aí vai. Tudo bem? Já estão começando a enxergar uma luz no fim do túnel? Ou ainda não?	
00:41:49 00:41:52	Aluna 3	Eu sim, que dizer depende da luz...	
00:41:52 00:41:56	Aluna 8	Será que essa luz não tem a ver com as funções trigonométricas?	
00:41:56 00:41:58	Professora	Na próxima aula, a gente começa a melhorar isso. Tudo bem?	
00:41:59 00:42:03	Alunos.	Tudo bem. Até semana que vem.	

ANEXO F

Protocolo de transcrição da socialização das respostas da sessão 04 Turma 02 a partir da letra b

Instituição: Universidade Estadual de Feira de Santana
Data: 11/09/2019
Tema trabalhado: Socialização da atividade da roda-gigante.
Duração da socialização na aula: 20 minutos e 53 segundos
Descrição: O objetivo dessa atividade foi compreender como os estudantes de licenciatura em matemática do primeiro semestre, modelam o fenômeno da roda-gigante. Esse momento transcrito nesse protocolo, foi a socialização e discussão das estratégias realizadas pelos alunos, validados as respostas secundárias, a fim de chegar na resposta esperada, ao final do PEP.

Tempo **HH/MM/SS**	**Ator**	**Transcrição**	**Observação**
00:00:00 00:00:05	Turma	Vamos continuar com a socialização da aula passada. Quem pode começar?	
00:00:06 00:00:07	Aluno 1	Eu professora.	
00:00:07 00:00:11	Professora	Aluno 1 espera aí rapidinho. Pessoal eu não estou conseguindo ouvir “nome do aluno” acreditam? Olhe onde estou?	
00:00:12 00:00:29	Aluno 1	Ai diz que o diâmetro é quarenta né? Ai eu coloquei cinco minutos que é altura máxima de quarenta metros e dois e meio coloquei com a altura “x”, aí fiz regra de três, ”x” é igual a cem, ai deu vinte, mas como tem dois metros ai em relação ao solo eu somei, e deu vinte e dois.	Grupo 7
00:00:30 00:00:34	Professora	Regra de três? Vinte e dois? E você fez igual?	
00:00:34	Aluno 2	Não.	Grupo 7
00:00:35 00:00:41	Professora	Eu imaginei, porque você deu risada quando eu falei como ele fez, aí eu falei hum, no mesmo grupo vão sair coisas diferentes. Todos que quiserem podem falar.	
00:00:41 00:00:59	Aluno 2	Eu fiz assim, o diâmetro tem quarenta metros, demora cinco minutos para chegar ao topo, ai eu dividir quarenta metros por cinco minutos e deu oito metros por minutos, ai eu vi, oito vezes dois metros e meio, dava vinte metros, porém tem os dois metros que ele está acima do solo, ai somei, vinte mais dois, vinte e dois	Grupo 7
00:00:59 00:01:01	Professora	Outro grupo. “Nome do aluno” fez diferente?	
00:01:01 00:01:02	Aluno 3	Eu fiz, igual a ela.	Grupo 7
00:01:02 00:01:03	Professora	Pronto. Aqui!	
00:01:03 00:01:04	Aluno 3	Eu fiz igual ao aluno 1 (nome do aluno).	Grupo 9
00:01:04 00:01:07	Professora	Como? Igual a “nome do aluno” Ai!	

00:01:08	Aluno 3	Sim	Grupo 9
00:01:09 00:01:16	Aluno 4	Bem... eu resolvi assim, utilizei a informações dadas no problema, e depois regra de três e somar.	Grupo 9
00:01:17 00:01:21	Professora	Regra de três e somar, percebe que a mesma conta a gente usa de diferentes formas, isso é rico.	
00:01:22 00:01:24	Todos	Conversa paralela.	
00:01:24 00:02:15	Professora	E para vocês já levarem para a vida de vocês quanto futuros professores, é sempre bom em momentos em sala de aula. Abrir espaço, para que os alunos expliquem como resolveram um problema. Porque isso traz diferentes formas para eles enxergarem, ainda digo mais, vocês ainda podem solicitar que venham ao quadro. Assim eles resolvem do jeitinho deles, e ainda pode contribuir para o aprendizado dos outros que estão assistindo. Como ocorreu aqui, entenderam o que “nome aluno 1” fez, e também como “nome do aluno 2” resolveu, vocês todos viram, ótimo. Então não houve a necessidade de solicitar, que vocês fossem ao quadro para fazer uma operação, como regra de três, não é? Mas no caso uma escola básica é interessante, porque isso vai estar sempre retornando e é uma forma diferente.	
00:02:15 00:02:18	Aluno 1	E quando o aluno não tem nem noção de como fazer? (risos)	
00:02:18 00:02:48	Professora	Você, enquanto professor, tem que ter paciência, explique novamente, buscando outros argumentos para a explicação. E se ele não compreender, tente explicar de outra forma, associando com algo desafiador e/ou que seja do interesse ou da realidade desse aluno. Tudo bem?	
00:02:49 00:02:52	Aluno 1	Entendi. Desafio difícil.	
00:02:53 00:02:59	Professora	Mas tenha calma, você ainda está no primeiro semestre. Vamos continuar? Tempo 2 agora, sete minutos, deu quantos?	
00:02:59 00:03:01	Aluna 5	Vinte e seis.	Grupo 9
00:03:01 00:03:03	Professora	Vinte e seis? E vocês? Vinte e seis?	
00:03:04 00:03:06	Aluna 6	Sete minutos, vinte e seis virgula quatro	Grupo 6
00:03:06 00:03:07	Professora	Vinte e seis virgula quatro, e vocês?	
00:03:08	Aluna 7	Vinte e seis.	Grupo 8
00:03:09 00:03:10	Aluna 8	Pró, eu fiz várias coisas aqui (risos) é...	Grupo 6
00:03:11	Professora	Como?	
00:03:12 00:03:16	Aluna 8	É... ele deu vinte e seis, vinte e seis virgula quatro. Vinte e cinco virgula dois.	Grupo 6
00:03:17	Aluna 7	Oxi.	Grupo 8
00:03:17 00:03:18	Professora	Como você fez?	

00:03:18 00:03:52	Aluna 8	Porque eu fiz de várias formas, porque eu fiz primeiro é... fazendo a regra de três de um jeito, ai deu vinte e seis virgula quatro, ai fiz de um outro jeito que ai deu vinte e seis, que ai eu fiz a regra de três com o diâmetro e acrescentei dois e depois eu fiz a regra de três com a altura cinco metros do chão, que dá quarenta e dois metros, e altura de três do chão, porque ai eu já percebi que aos três minutos e a sete minutos eles atingem a mesma altura, ai eu fiz e deu vinte e cinco virgula dois. Ai eu já não sei mais.	Grupo 6
00:03:32 00:04:56	Professora	É por causa da aproximação, é porque vocês trouxeram, porque os dois metros está fora, então se você calcula o diâmetro em si, ele vai dar certinho, e aí depois acrescenta os dois, não é isso? Agora se você utiliza isso como informação vai dar uma alteração porque a distância dos dois metros não faz parte do diâmetro em si da roda gigante quando roda, então quando roda vai alterar toda a altura do círculo, entende? Porque aqueles dois daqui não é um dois que acompanha o círculo todo, ele fica fixo aqui, mas o círculo vai rodando aqui, estão vendo? Se você pega esses dois e coloca, é como se a roda-gigante tivesse quarenta e dois de diâmetro, então vai alterar toda a posição de tudo. Um exemplo, vocês que calcularam e deram vinte e seis, vocês fizeram pelo minuto?	
00:04:56	Aluno 1	Foi.	
00:04:57 00:04:59	Professora	Vocês viram o valor do minuto, fez conta e acrescentou a porcentagem?	
00:05:00	Turma	Sim	
00:05:01 00:05:04	Professora	Por isso que no seu, um deu vinte e seis, o outro deu vinte e seis ponto quatro e o outro...	
00:05:04 00:05:27	Aluna 8	Eu fiquei na dúvida qual era o jeito certo de fazer, fique na dúvida se era fazendo e acrescentado os dois depois, ou fazendo a altura total do círculo, porque o círculo como... porque dá meia volta, não é? E depois começa a repetir tudo novamente, então peguei como parâmetro os cinco minutos e fiz a regra de três equivalente ao sete, por isso que eu fiz desse jeito.	Grupo 6
00:05:27 00:05:32	Professora	Isso é bom, pois torna a discussão frutífera. Será que essas respostas estão todas certas? O grupo de “nome do aluno” fez como?	
00:05:32 00:06:04	Aluna 2	Eu fiz, eu olhei de novo, cinco é o ponto máximo, como é sete, oito vezes cinco, menos oito vezes dois, porque depois do cinco vai descendo, ai oito vezes cinco, quarenta, menos oitos vezes dois, dezesseis, quarenta menos dezesseis, vinte e quatro, mais dois, vinte e seis.	Grupo 7
00:06:05	Professora	Vocês!	
00:06:05 00:06:08	Aluno 9	A gente multiplicou por três.	Grupo 9
00:06:08 00:06:11	Professora	Multiplicou por três? Como assim?	

00:06:12 00:06:42	Aluno 9	Temos uma circunferência, que ele vai tá tipo, em uma medida, então é como a circunferência fosse uma função do círculo trigonométrico, então a medida que eu vou ter aqui, ela também vai está no lado de cá, então temos tipo uma congruência, então a gente percebeu que o três, e o sete, seriam a mesma coisa , só que o sete já faria o movimento de descida e ai a gente fez multiplicar ele.	Grupo 9
00:06:42 00:06:44	Professora	Vocês registraram isso no caderno?	
00:06:44 00:06:46	Aluno 4	A gente colocou aqui, no início da introdução.	Grupo 9
00:06:47 00:06:50	Professora	Trazendo isso que lembra uma função do círculo trigonométrico?	
00:06:51	Aluno 4	Não	Grupo 9
00:06:52 00:06:55	Professora	Coloque! Que isso é importante. Vocês escreveram o que você falou?	
00:06:56	Aluna 8	Mais ou menos,	Grupo 6
00:06:57 00:06:59	Professora	Registrem essas respostas no caderno. Escrevam na integra.	
00:07:00	Aluna 8	Professora?	Grupo 6
00:07:01 00:07:02	Professora	Não apague “Nome da aluna 8”.	
00:07:02 00:07:03	Aluna 8	Estou só acrescentando.	Grupo 6
00:07::03	Professora	Ah.	
00:07:04 00:07:05	Aluna 8	Porque tinha apagado o resultado.	
00:07:05 00:07:07	Professora	Porque eu quero todos os resultados! Vocês, por favor!	
00:07:07 00:07:38	Aluna 10	Eu fiz em outro local, mas vou ler aqui o trecho que a gente colocou, nessa parte multiplica três vezes oito, que dá vinte e quatro, mas dois que da vinte e seis metros, ai assim nessa ocasião é sabido que a posição de três minutos é equivalente a posição de sete minutos, isso por se tratar de uma circunferência, analogicamente isso também serve para a posições de dois minutos, doze e vinte dois. Pronto.	Grupo 10
00:07:38 00:07:41	Turma	Conversas se sobrepondo impossibilitando a transcrição.	
00:07:42 00:07:46	Aluno 11	Foi quase a mesma coisa, ele atinge a altura máxima em cinco minutos.	Grupo 8
00:07:46 00:07:47	Professora	Por favor, silêncio!	
00:07:48 00:08:50	Aluno 11	Ai, depois disso descer (XXXXXXX) o excedente (XXXXXXXXXX) equivale a um minuto, subtrai, deu dezesseis, aí quarenta menos dezesseis é vinte e quatro, é isso aí. Me fala esse negócio ai de escrever no caderno é um negócio que eu pensei quanto estava (XXXXXXXXXX) só que eu desisti, porque é muito trabalhoso, sobre esse negócio do círculo trigonométrico, eu percebi, que se eu... associasse ao círculo trigonométrico, a altura do ponto seria no caso , como se fosse o seno daquele ponto se eu fizesse um ângulo na altura do centro, é tinha que subtrair noventa	(XXXXXXX) esse símbolo significa que passou um veículo que fez ruídos que não foi possível compreender o termo. Grupo 8.

		graus para chegar aqui, ai seria o seno do ponto mais, altura mais (XXXXXX).	
00:08:50 00:08:53	Professora	Seria pegar os arcos côngruos e partir daí ver os senos correspondentes.	
00:08:53 00:09:01	Aluno 11	Ainda tinha que somar ou multiplicar por vinte, porque o círculo trigonométrico o raio é um e aqui é vinte, então eu desistir, ó deixa quieto (risos).	Grupo 8
00:09:01 00:09:05	Professora	Mas a ideia é excelente, mas você registrou no caderno? Isso está escrito?	Grupo 8
00:09:06	Aluno 11	Tá nada (risos).	
00:09:07 00:09:12	Professora	Escreve “nome do aluno”, está vendo que é por isso que eu peço para vocês escreverem! Vocês entenderam o raciocínio que Aluno 11 teve?	
00:09:13	Aluno 1	Mais ou menos.	Grupo 7
00:09:14 00:09:43	Professora	Ele utiliza a ideia de arcos e outros conceitos trigonométricos. Vamos analisar as respostas dadas. Obtivemos respostas com proporção altura versus tempo da roda-gigante; tivemos considerando o deslocamento da cabine, nos instantes solicitados; e também houve essa ideia de Aluno 11.	
00:09:43 00:09:44	Aluna 10	Fiquei curiosa.	Grupo 6
00:09:43 00:09:47	Professora	Vou fazer aqui a resolução desse problema no modelo circular, que está próximo com o que Aluno 11 respondeu.	Nome do aluno – Cris.
00:09:48	Alunos	Ótimo.	
00:09:48 00:12:19	Professora.	A regra de três aplicada por alguns grupos, considerando nos eixos da ordenada e abscissa, respectivamente, altura e tempo, não dá conta de responder o que se pede. Podemos utilizar alguns modelos matemáticos, mas vou mostrar o circular que é o que se aproxima com a ideia levantada pelo aluno 11. Temos que, se associarmos 360º a 10 minutos (volta completa) podemos descobrir quantos graus temos em 1 minuto, que é 36°. Como o tempo 2,5min todos encontraram sem dificuldade, vamos utilizar o modelo circular para descobrir a altura em 7 minutos. Utilizando um modelo proporcional ou regra de três descobrimos que o ângulo que equivale a 7 minutos é 252°. Ou podemos resolver associando o ângulo que equivale a 7 minutos, ou seja, como 5 minutos vale 180° e cada minuto vale 36°, basta somar 180° + 36° + 36° = 252°.Traçando no círculo trigonométrico um triângulo retângulo POD do ponto P em 7 minutos, o ponto O no centro da roda gigante e o ponto D no eixo das abscissas paralelo ao ponto 7,5 minutos, que equivale a 270° no ciclo trigonométrico que representa a roda-gigante. Então temos que o ângulo desse triângulo retângulo sendo 18° que é a diferença entre 270º (7,5 min) – 252° (5 min) = 18°, ou seja, 18º equivale o valor do ângulo de 0,5 minutos. Como temos um triangulo retângulo,	

		então vale a relação sen θ = $\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$, sendo o raio da roda-gigante igual a 20 metros e sen 18°= 0,309 então sen 18° = $\frac{x}{20}$,<=> 0,309 = $\frac{x}{20}$, então x = 6,18 m. E como a distância entre os tempos 2,5 minutos e 7,5 minutos são iguais, em relação ao solo, temos que a distância de P no instante 7 minutos é: $h_{7min} = h_{2,5min} + x = 22 + 6,18 = 28,18$ m.	
00:12:19 00:12:22	Aluno 11	Nossa professora, muito legal. Como pensei. Mas trabalhoso.	Grupo 8
00:12:23 00:12:24	Professora	Compreenderam a resolução?	
00:12:24 00:12:25	Alunos	Sim.	
00:12:26 00:12:32	Aluno 11	Então temos que desconsiderar as respostas erradas, e considerar essa ideia, nos fará avançar em trigonometria. Gostei. Só tenho que jogar a preguiça de lado. (risos)	Grupo 8
00:12:32 00:12:35	Professora	Com certeza aluno 11. Continuando, e os demais tempo 12 e 22? Como fizeram? Quanto deu?	
00:12:35 00:12:36	Aluna 5	Dezoito metros	Grupo 9
00:12:36 00:12:39	Aluna 6	Ai nesse caso foi a mesma coisa dos 7 minutos. (risos)	Grupo 6
00:12:40	Professora	Deu três respostas?	
00:12:41 00:12:55	Aluna 6	É, deu três e aí eu fiquei em dúvida e coloque dezesseis virgula oito, mas deu dezoito e deu... deu outro valor, acho que foi quinze virgula alguma coisa.	
00:12:55 00:12:56	Aluna 7	Eu não entendi o porquê o dela deu três? (se referindo a três repostas diferentes)	Grupo 8
00:12:56 00:12:57	Aluna 8	Porque ela fez de formas diferentes.	
00:12:57	Aluna 6	É que eu fiz de três formas diferentes.	
00:12:59	Aluna 7	Eu entendi de duas.	
00:13:00 00:13:23	Aluna 8	É que a outra eu fiz com outro parâmetro para fazer a regra de três, mas essa ai eu... tirei porque já tinha entendido que não dava, mas o valores deu dezesseis virgula oito, porque eu usei a mesma coisa que o outro na regra de três e eu usei a altura dos dois mesmo, que é a mesma do vinte dois que é o mesmo que doze, e ai deu dezoito em uma e dezesseis virgula oito em outra.	
00:13:23 00:13:24	Professora	E vocês?	
00:13:25 00:13:34	Aluna 2	A gente segui a mesma lógica, só dá para subir até o cinco, então: Oito vezes cinco, menos oito vezes cinco, mais oito vezes doze, aí deu dezoito	
00:13:34 00:13:45	Aluna 12	Quando é doze minutos e com dez minutos ele dá uma volta completa, aí fica, ele vai subir mais dois minutos que vai ser dezesseis metros, mais dois do chão, da altura do chão, dezoito.	Grupo 6
00:13:45 00:13:47	Professora	Dezoito. Vocês!	

00:13:47 00:13:49	Aluna 10	A gente fez a mesma coisa professora...	Grupo 10
00:13:50	Professora	Pronto.	
00:13:51	Aluna 10	e deu dezoito metros.	Grupo 10
00:13:52 00:13:55	Professora	Vocês também, que fizeram juntos né? E vocês?	
00:13:55 00:14:12	Aluna 7	Eu fiz... eu não fiz regra de três porque doze minutos ele deu uma vota completa mais dois, aí eu coloquei assim: É... com os resultados anteriores percebe-se que a cada dois minutos sobem dezesseis metros, mais dois metros fixo, dezoito	Grupo 8
00:14:13	Aluno 11	Dezoito.	Grupo 8
00:14:13 00:14:15	Professora	E aí o vinte e dois foi análogo né?	
00:14:16	Turma	Sim. É.	
00:14:17 00:14:22	Professora	São duas voltas e ai todo mundo conseguiu a mesma reposta, não foi? Do Doze. Foi?	
00:14:23 00:14:25	Aluno 4	Dezoito.	
00:14:26	Professora	É.	
00:14:27	Aluno 11	Dezoito.	
00:14:27 00:14:28	Professora	Eu falei o que?	
00:14:29	Aluno 4	Doze.	
00:14:29 00:14:31	Professora	Mas quis dizer doze minutos.	
00:14:31 00:14:32	Aluno 4	Ah, sim!	
00:14:33	Professora	Entende? Não foi isso?	
00:14:34	Aluna 6	Foi.	
00:14:35 00:14:49	Professora	Ai vem, vou para a “d” e depois a gente volta para a “c”, certo? A letra “d”: A partir dos trinta e cinco metros de altura podemos ver o farol da barra, por quanto tempo Carlos poderá ver o farol em cada volta?	
00:14:50 00:14:51	Aluna 13	Ai ai... risos.	Grupo 10
00:14:51 00:14:52	Aluna 2	Um minuto e trinta segundos.	Grupo 7
00:14:52 00:14:54	Aluno 11	Um minuto e quarenta e cinco segundos	
00:14:54 00:14:55	Aluna 6	Agora nesse caso uns trinta e cinco minutos, trinta e cinco metros são do solo??...	
00:14:56	Aluno O	Quantos?	
00:14:56 00:14:58	Aluna 7	Um minuto e quarenta e cinco segundos.	
00:14:59	Aluna 5	O meu deu um minuto e quinze,	
00:15:00 00:15:03	Aluna 6	Ai, mas... (risos)	
00:15:03	Professora	Fale.	
00:15:04 00:15:36	Aluna 6	Nesse caso eu fiz uma regra de três para saber que minuto ele estaria nos 4. E ai usando essa mesma regra de três que eu fiz nas outras, deu quatro virgula dezessete minutos que ele estaria a trinta e cinco metros, ai eu coloquei	

		assim... ah... primeira volta que vai ser equivalente a cinco vírgula quarenta e cinco minutos, então ele vai ver o farol por um minuto e trinta e oito segundos, ou ele verá por mais tempo, mas eu não fiz essa parte por eu deixei de lado, porque eu achei que não era (risos), porque...	
00:15:37	Professora	Fale.	
00:15:38 00:15:52	Aluna 6	Porque eu fiz a regra de três como quarenta e com altura de trinta e três, no caso da... que aí deu quatro virgula cento e vinte e cinco, só que eu ai não calculei o resto. Mas é isso.	
00:15:53 00:16:00	Professora	Outro grupo! Eu vi que não tivemos resultados iguais.	
00:16:01 00:16:02	Professora	Quem continua agora? Pode falar.	
00:16:02 00:16:29	Aluna 2	Eu esqueci de contar os dois metros do chão, então... eu coloquei, eu vi a relação entre quarenta e trinta e cinco ai dava... para ter um relação a cada cinco metros, então eu dividir o círculo em cinco metros cada, ai deu dezesseis divisões, só que em duas dela, dava para ver, era acima de trinta e cinco, então eu dividir dez por oito, que deu um virgula vinte e cinco, um minuto e quinze segundos.	
00:16:30 00:16:33	Turma	Som ambiente.	
00:16:34 00:16:35	Professora	Deixa anotar. Um minuto e quinze.	
00:16:36 00:16:37	Aluna 2	Só que o meu estar errado.	
00:16:38 00:16:39	Professora	E o de vocês deram quanto?	
00:16:40 00:16:42	Aluna 6	É isso, eu não sei direito.	
00:16:43 00:16:44	Aluna 7	Escolhe um valor ai!	
00:16:45 00:16:47	Aluna 6	Um minuto e trinta e oito segundos.	
00:16:47 00:16:50	Aluna 2	A esqueci de colocar os dois.	
00:16:51 00:16:54	Professora	Mas calma, vamos analisar ainda. Vocês desse grupo?	
00:16:55 00:17:34	Aluno 4	A gente pegou, fez a regra de três e relacionou o quatro, com a altura dele que era trinta e quatro, só que ai a gente tirou o dois da base e ai ficou trinta e dois mesmo, ai depois a gente pegou o “x” minutos, relacionou com trinta e três, porque é trinta e cinco menos os dois da base, ai depois a gente pegou, a gente calculou, mais o menos isso deu quatro virgula cento e vinte e cinco minutos, depois eu fiz o que mesmo meu Deus...	
00:17:34 00:17:51	Aluno 9	A gente uso de quatro virgula cento e vinte e cinco até o ponto máximo e do ponto máximo até mais por causa da diferença entre quatro virgula setenta e cinco a cinco, que deu zero virgula cento e vinte segundos, setenta e cinco segundos.	O outro integrante do grupo continua explicando.

00:17:52	Turma	Quarenta e cinco	
00:17:52 00:17:56	Professora	Aí deu quanto? Setenta e cinco segundos?	
00:17:57 00:17:58	Aluno 4	Não, aí depois a gente multiplicou	
00:17:59 00:18:09	Aluno 9	Só que como isso se repete porque ele está em uma circunferência, então a gente vai ver isso até o máximo, do ponto máximo vai ver até o mesmo tempo, entendeu? Porque ele vai chegar na mesma altura.	
00:18:09 00:18:15	Aluno 4	É trinta e cinco até o ponto máximo, aí foi oito, zero virgula oitocentos e setenta e cinco minutos.	
00:18:16 00:18:20	Aluno9	Só que isso vai se repetir, porque ele está em uma circunferência.	
00:18:20 00:18:21	Professora	E deu quantos?	
00:18:21 00:18:24	Aluno 9	Um virgula setenta e cinco minutos.	
00:18:24 00:18:26	Professora	Um virgula setenta e cinco minutos?	
00:18:27	Aluno 9	É.	
00:18:28 00:18:30	Turma	Não é não. Setenta e cinco minutos?	
00:18:31	Aluno 9	É.	
00:18:32 00:18:33	Turma	Som ambiente.	
00:18:34 00:18:35	Aluna 8	Quantos é que dá...	
00:18:36 00:18:40	Aluno 11	É igual a um minuto e quarenta e cinco segundos. É a mesma coisa.	
00:18:41 00:19:11	Turma	Som ambiente e conversas paralelas sobre o tema.	Enquanto a professora está anotando.
00:19:11 00:19:12	Professora	Vocês?	
00:19:13	Aluna 10	A mesma coisa.	
00:19:14 00:19:15	Professora	Faltou alguém?	
00:19:16 00:19:21	Aluno 11	A gente aqui fez a mesma coisa daquele lá, só que a gente pegou e transformou em um minuto que quarenta e cinco segundos, só isso.	
00:19:22 00:19:25	Turma	Som ambiente.	
00:19:26 00:19:29	Professora	Vocês fizeram também, podem ler a resposta.	
00:19:30 00:19:36	Aluno11	Eu fiz um esquema igual a esse aí, e apliquei contraexemplos, mas	
00:19:37 00:19:38	Professora	Então explica.	
00:19:38 00:19:40	Turma	Som ambiente.	
00:19:41 00:20:40	Aluno 11	Tá eu considerei a altura em relação ao chão também, então a rótula dentro do diâmetro deu trinta e três metros onde começaria a enxergar, aí eu fiz uma regrinha de três para saber onde iniciaria a chegada nos trinta e três metros e deu quanto tempo?	

		Quatro ponto cento e vinte segundos, aí ficou assim, a gente sabe quando chega na altura máxima é... cinco minutos, então se a gente pega cinco minutos e subtrai a questão do tempo, que dá o trinta e cinco e a gente sabe o quanto tempo irá durar aquele pedaço. E a gente sabe que quando ele descer, ele vai descer até o trinta e cinco também, aí a gente pega tudo isso e multiplica por dois, ai multiplica por dois dá um virgula trinta e cinco, e ai converte para segundos	
00:20:41 00:20:53	Professora	Pronto, muito bem. Segunda-feira a gente termina concluímos e começamos a outra atividade. Mas eu gostei bastante desses resultados.	