CORREÇÕES DE ORDENS SUPERIORES PARA A INCERTEZA PADRÃO COMBINADA

Márcio A. F. Martins[1], *Reiner Requião*[2], *Ricardo Kalid*[3]

[1] Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, marcio.engquimica@gmail.com
[2] Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, reinereng@gmail.com
[3] Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da UFBA, Salvador, Brasil, kalid@ufba.br

Resumo: O presente trabalho apresenta expressões generalizadas de ordens superiores para a avaliação da incerteza padrão de medição. Resultados próximos daqueles provenientes do Suplemento 1 do GUM são alcançados por esses métodos a um baixo custo computacional.

Palavras chave: incerteza de medição, momentos de ordens superiores, propagação de incertezas, modelos não lineares.

1. INTRODUÇÃO

O Guia para a expressão da incerteza de medição (GUM) [1] utiliza a expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem da função de medição para expressar a melhor estimativa do mensurando e sua respectiva incerteza padrão, via a abordagem da lei de propagação de incertezas (LPU). Em muitos casos práticos, esse procedimento de primeira ordem é suficiente para caracterizar a incerteza padrão até mesmo em modelos de medição (fracamente) não lineares.

No que tange ao cálculo da melhor estimativa do mensurando, quando a função de medição é não linear, *i.e.*, ao invés de substituir as estimativas das grandezas de entrada diretamente na função (estimativa linear), pode-se optar por obter as observações independentes do mensurando a partir das observações (independentes) das grandezas de entrada previamente utilizadas na função, e assim calcular a média dessas observações (estimativa não linear). Entretanto, a incerteza padrão (combinada) de medição, associada a aquela estimativa do mensurando, é baseada em um método linear ou de primeira ordem. Existem modelos de medição, contudo, em que a não linearidade é significativa, dessa maneira o uso da aproximação linear para a avaliação da incerteza de medição do mensurando é incorreto, o que justifica o uso dos termos de ordens superiores da expansão em série de Taylor da função de medição.

Os termos de ordens superiores podem exibir muitas propriedades desejáveis em um processo de medição, entre estas se destacam: caracterização e detecção de não linearidades de sistemas de medição. Um esquema conceitual para ilustrar os efeitos das ordens superiores para a avaliação da incerteza de medição é apresentado na Fig. 1, sobre a qual são esboçados comportamentos da incerteza padrão em função do resultado de medição (estimativa) do mensurando, para diferentes aproximações ou expansões da série de Taylor da função de medição.

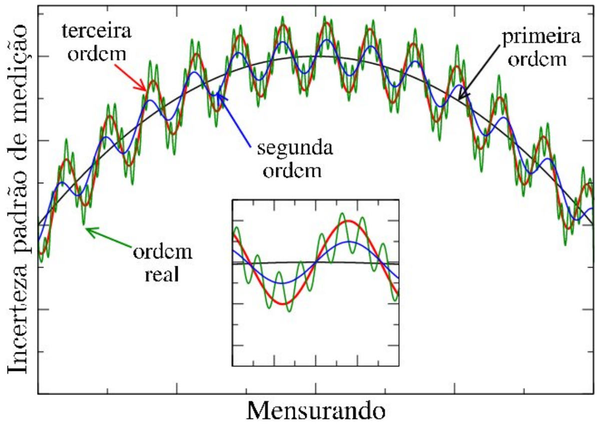

Fig. 1. Esquema conceitual para demonstrar os efeitos de ordens superiores em um processo de medição.

Como pode ser observado na Fig. 1, um aumento da ordem, por meio da expansão em série de Taylor da função de medição, na expressão da incerteza padrão tende a aproximar-se cada vez mais da ordem exata da incerteza padrão de referência[1]. Ou seja, o método de segunda ordem para avaliar a incerteza padrão é mais abrangente do que o método de primeira ordem, assim como o método de terceira ordem engloba o de segunda ordem e assim por diante, até que se reproduza completamente a não linearidade da função de medição.

Em diversos campos da ciência e tecnologia, como por exemplo, nanotecnologia e aplicações de engenharia de alta precisão de medição, incertezas de medição associadas a métodos não lineares são relevantes; alguns trabalhos mostram aplicações que necessitam recorrer a esses métodos em processos de medição, a saber: em teste de robustez de sistemas submetidos a ruídos [2] e em sistemas mecânicos de medição [3]. Portanto, avaliações de incertezas provenientes de métodos de ordens superiores podem ser utilizadas para refletir a correspondente influência da não linearidade existente em um processo de medição.

[1] No presente contexto, a incerteza padrão de referência é aquela proveniente de um método que considera todas as não linearidades da função de medição, *e.g.*, o método proposto pelo Suplemento 1 do GUM (GUM S1)[4].

Em situações onde as funções de medição são fortemente não lineares, o GUM recomenda usar alguns termos de ordens elevadas à incerteza padrão combinada de primeira ordem [1, nota 5.12]. Entretanto, existem restrições quanto ao uso desses termos para avaliar a incerteza padrão usando funções de medição não lineares, são estas: as grandezas de entrada devem ser mutuamente independentes e gaussianas. Maiores detalhes sobre estas restrições podem ser consultados em [5].

De modo a superar essas limitações, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos: Lira [6] propôs uma expressão de segunda ordem para a incerteza padrão baseada no terceiro e quarto momento estatístico, contudo a função de medição era composta de apenas uma grandeza de entrada; Wang e Iyer [7] propõem uma expressão de segunda ordem para a incerteza padrão que contempla *N* grandezas de entrada na função de medição, entretanto essa última expressão é válida somente para as grandezas de entrada mutuamente independentes e gaussianas; Mekid e Vaja [8] propuseram expressões de segunda e terceira ordem para ambas as estimativas do mensurando e suas respectivas incertezas padrão em funções de medição que possuem uma ou duas grandezas de entrada; um trabalho mais abrangente foi proposto por Martins [9], no qual expressões generalizadas de segunda e terceira ordem, para avaliar a estimativa do mensurando e sua incerteza padrão, foram desenvolvidas. Essas expressões podem ser usadas em funções de medição que possuem *N* grandezas de entrada mutuamente independentes.

O presente trabalho visa apresentar uma aplicação das expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para avaliar a estimativa do mensurando e sua incerteza padrão em um modelo de medição bastante comum em diversas áreas da ciência. Os resultados obtidos foram comparados com os correspondentes resultados provenientes dos métodos GUM e GUM S1.

O texto deste artigo é parte considerável de um artigo mais abrangente [10], aceito recentemente para publicação pelo periódico internacional *Measurement*.

2. MÉTODOS

As expressões de segunda e terceira ordem são obtidas mediante a aplicação da LPU, após posterior expansão em série de Taylor da função de medição truncada nos termos de segunda e terceira derivadas. Esse procedimento requer o conhecimento dos momentos estatísticos de ordens superiores, tais como: terceiro, quarto, quinto e sexto momentos; o terceiro e o quarto momento possuem características físicas que são úteis e aplicáveis na avaliação da incerteza de medição aqui proposta. Os momentos estatísticos de terceira e quarta ordem podem ser relacionados, respectivamente, com a assimetria (γ) e a curtose (κ) da função de densidade de probabilidade (PDF) de uma grandeza de entrada.

A expressão de segunda ordem para a estimativa do mensurando é dada pela equação

$$y \approx y_{2\mathrm{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\right)u^2(x_i) \tag{1}$$

enquanto que a incerteza padrão associada à estimativa de segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned} u^2(y) &\approx u^2(y_{2\mathrm{ord}}) = \\ &\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u^2(x_i)}_{first\ order} + \gamma_i \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}u^3(x_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\frac{\kappa_i - 1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\right)^2 u^4(x_i) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\,\partial X_j}\right)^2 u^2(x_i)u^2(x_j) \end{aligned} \tag{2}$$

As expressões de terceira ordem para a estimativa do mensurando e sua incerteza padrão são, respectivamente,

$$y \approx y_{3\mathrm{ord}} = y_{2\mathrm{ord}} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\right)u^3(x_i) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u^2(y) &\approx u^2(y_{3\mathrm{ord}}) = \\ &u^2(y_{2\mathrm{ord}}) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\kappa_i}{3}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}u^4(x_i) \\ &+ \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\right)\{\mathrm{E}[(X_i - x_i)^5] - \gamma_i u^5(x_i)\} \\ &+ \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\right)^2 \{E[(X_i - x_i)^6] - \gamma_i^2 u^6(x_i)\} \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\,\partial X_j^2}\right)u^2(x_i)u^2(x_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left\{\gamma_i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\,\partial X_j}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2\,\partial X_j}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\,\partial X_j^2}\right)u^3(x_i)u^2(x_j)\right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\kappa_i\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2\,\partial X_j}\right)^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\,\partial X_j^2}\right)\right\}u^4(x_i)u^2(x_j) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\gamma_i\gamma_j\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\,\partial X_j^2}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2\,\partial X_j}\right)u^3(x_i)u^3(x_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{N}\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i\,\partial X_j\,\partial X_k}\right)^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2\,\partial X_j}\right)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial X_j\,\partial X_k^2}\right)\right\}u^2(x_i)u^2(x_j)u^2(x_k) \end{aligned} \tag{4}$$

Como previamente exposto na seção 1, as expressões de segunda e terceira ordem, aqui propostas, são aplicadas para grandezas de entrada mutuamente independentes. Maiores detalhes sobre as hipóteses, bem como a dedução dessas equações, podem ser consultadas na dissertação de mestrado [9].

Sobre o uso dessas expressões generalizadas é pertinente salientar que quando somente avaliações do Tipo A da incerteza, a respeito das grandezas de entrada, são disponíveis, um número grande de observações independentes, (pelo menos 30) deve ser requerido de modo a representar adequadamente os momentos estatísticos de ordens superiores (*e.g.*, quinto e sexto momentos).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo de caso abordado neste trabalho é uma função de medição regida pela seguinte expressão matemática:

$$Y = X_1 e^{(X_2 X_3)} \qquad (5)$$

Este tipo de modelo ocorre em várias áreas do conhecimento, tais como: química, física e engenharia. Os parâmetros estatísticos (e metrológicos) das grandezas de entrada desse modelo são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros estatísticos das grandezas de entrada do modelo de medição proposto.

Parâmetros	X_1	X_2	X_3
Estimativa $(\mathrm{u.X}_i)^2$	0,9891	1,6153	1,2019
Incerteza padrão $(\mathrm{u.X}_i)$	0,2615	0,1091	0,3532
Assimetria	0,1258	0,1831	0,1024
Curtose	2,7638	2,6626	2,3149
Quinto momento $(\mathrm{u.X}_i^5)$	0,0004	0,0002	0,0030
Sexto momento $(\mathrm{u.X}_i^6)$	0,0031	0,0001	0,0121

Como anteriormente exposto na seção 2, a aplicação dos métodos baseados na abordagem LPU (GUM, segunda e terceira ordem) requer o cálculo das derivadas parciais, as quais neste estudo de caso foram obtidas pela diferenciação algébrica. Com relação ao método GUM S1, foi atribuída uma PDF gaussiana para cada grandeza de entrada, cujas médias (esperanças) e desvios padrão são iguais as estimativas e incertezas padrão esboçadas na Tabela 1.

Na Fig. 2 é apresentado o resultado da PDF empírica do mensurando Y obtido pelo método GUM S1, para M=2x10^7 amostras de Monte Carlo. Esse método foi implementado na plataforma computacional MATLAB sob o sistema operacional LINUX (distribuição Ubuntu 9.04) em um computador operando com processador Intel Core 2 Duo de 2.10 GHz e 3 GB *RAM*. Os valores das estimativas do mensurando e suas respectivas incertezas padrão, bem como o tempo de processamento requerido pelos métodos GUM, segunda e terceira ordem e GUM S1 são mostrados no interior da Fig. 2.

[2] O símbolo $(\mathrm{u.X}_i)$ representa a unidade correspondente de cada grandeza de entrada genérica (X_i) do modelo de medição proposto.

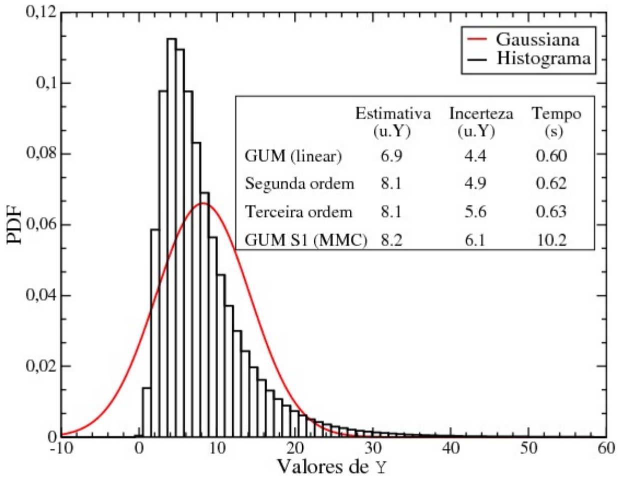

Fig. 2. Avaliação da incerteza de medição baseada nos quatros métodos: GUM, segunda e terceira ordem e GUM S1.

Como pode ser observado na Fig. 2, os resultados do método GUM S1 diferem daqueles obtidos pelo método GUM. Essas discrepâncias podem ser explicadas pela não linearidade da função de medição. Por outro lado, os resultados provenientes dos métodos de segunda e terceira ordem aproximam-se daqueles oriundos do método GUM S1, através de cálculos com um menor custo computacional.

Embora o tempo de processamento requerido pelo método GUM S1 seja negligenciável neste exemplo, o custo computacional para sua implementação pode ser significativo à medida que se crescem o número de grandezas de entrada e a não linearidade dos modelos de medição. Portanto, os métodos propostos de segunda e terceira ordem são bastante úteis para avaliar a incerteza padrão de medição em modelos não lineares com elevados número de grandezas de entrada.

4. CONCLUSÃO

Conforme exposto neste trabalho, os métodos de segunda e terceira ordem podem ser usados para avaliar a incerteza de medição, principalmente quando as funções de medição apresentam não linearidades significativas. Esses métodos possuem resultados mais próximos daqueles originados do método GUM S1 e quando as funções de medição forem polinômios de ordem dois e três os resultados desses métodos são, respectivamente, iguais do método GUM S1.

A principal vantagem dos métodos de segunda e terceira ordem em relação ao GUM S1 é o baixo custo computacional requerido, haja vista que o tempo de processamento desse último método pode ser bastante longo à medida que se aumenta o número de grandezas de entrada e a não linearidade dos modelos de medição. Portanto, pode-se concluir que os métodos propostos podem ser usados para avaliar a incerteza padrão de medição em modelos fortemente não lineares, o que possibilita ampliar a aplicabilidade da metodologia proposta no GUM.

Entretanto, ainda não foram desenvolvidas expressões análogas a fórmula de Welch-Satterthwaite quando se utiliza momentos estatísticos de ordens superiores para a avaliação dos graus de liberdade efetivos e, consequentemente, a estimativa da incerteza expandida (intervalo de abrangência do mensurando); essas expressões estão em fase de desenvolvimento pelos autores.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi suportado financeiramente pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS

[1] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML. *Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM 1995 with minor corrections). Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 2008:100.

[2] I. Bradaric, A. P. Petropulu, K. I. Diamantaras, "*Subspace design of low-rank estimators for higher-order statistics*", Journal of the Franklin Institute, vol. 339, nº 2, 2002, pp. 161-187.

[3] S. Mekid, "*Design strategy for precision engineering: Second order phenomena*", Journal of Engineering Design, vol. 16, nº 1, 2005, pp. 63-74.

[4] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, *Evaluation of Measurement Data - Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 2008:101.

[5] R. B. Frenkel, *Statistical background to the ISO guide to the expression of uncertainty in measurement*, Technology transfer series monograph nº 2, National Measurement Institute of Australia, 2006.

[6] I. Lira, *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance*, Institute of Physics Publishing, 2002.

[7] C. M. Wang, H. K. Iyer, "*On higher–order corrections for propagating uncertainties*", Metrologia, vol. 42, nº 5, 2005, pp. 406-410.

[8] S. Mekid, D. Vaja, "*Propagation of uncertainty: Expressions of second and third order uncertainty with third and fourth moments*", Measurement, vol. 41, nº 6, 2008, pp. 600-609.

[9] M. A. F. Martins, *Contribuições para a avaliação da incerteza de medição no regime estacionário*, 2010, 100 f., Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.

[10] M. A. F. Martins, R. Requião, R. A. Kalid, "*Generalized expressions of second and third order for the evaluation of standard measurement uncertainty"*, Measurement, 2011, doi:10.1016/j.measurement.2011.06.008.