



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
ESTRUTURAS**

PABLO JOSÉ TAVARES GOMES

**IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM ESPAÇO DE
ESTADOS UTILIZANDO O ALGORITMO ERA/OKID**

Salvador

2019

PABLO JOSÉ TAVARES GOMES

IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM ESPAÇO DE ESTADOS UTILIZANDO O ALGORITMO ERA/OKID

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação de Engenharia de Estruturas do Departamento de Construção e Estruturas da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Universidade Federal da Bahia

Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Santana Alves

Salvador

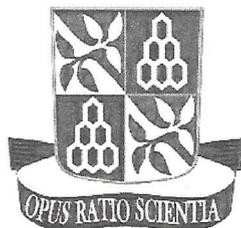
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Tavares Gomes, Pablo José
IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM ESPAÇO DE ESTADOS
UTILIZANDO O ALGORITMO ERA/OKID / Pablo José Tavares
Gomes. -- Salvador, 2019.
109 f. : il

Orientador: Marco Túlio Santana Alves.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação de
Engenharia de Estruturas) -- Universidade Federal da
Bahia, Escola Politécnica, 2019.

1. Identificação de Sistemas. 2. ERA. 3. OKID. 4.
Sistemas Dinâmicos. 5. Análise Modal. I. Santana
Alves, Marco Túlio. II. Título.



Universidade Federal da Bahia
Escola Politécnica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Aos treze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove, às 14h00, no LABINFO (Laboratório de Informática do Departamento de Engenharia Mecânica) da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, reuniram-se por vídeo conferência os professores doutores Marco Túlio Santana Alves (orientador), Paula Frassinetti Cavalcante (membro interno), ambos do quadro docente da EPUFBA, e Edson Hideki Koroishi (membro externo), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, para a avaliação da Dissertação do mestrando PABLO JOSÉ TAVARES GOMES, intitulada **IDENTIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS EM ESPAÇO DE ESTADOS USANDO O ALGORITMO ERA/OKID**. O prof. Marco Túlio Santana Alves presidiu a banca com a presença da profª. Paula Frassinetti Cavalcante e do mestrando Pablo José Tavares Gomes no LABINFO, além do prof. Edson Hideki Koroishi, que atendeu a defesa remotamente (vídeo-conferência) direto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio. Após a apresentação e arguição, a banca reuniu-se e considerou, por unanimidade, que o candidato foi **APROVADO**.

Salvador, 13 de dezembro de 2019

Marco Túlio Santana Alves

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Paula Frassinetti Cavalcante

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Edson Hideki Koroishi

Departamento Acadêmico de Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -
UTFPR – Campus Cornélio Procópio

Data da Homologação pelo Colegiado:

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Agradeço principalmente à minha esposa Gisele e minha filha Liz, pela compreensão devido a grande quantidade de horas de estudo. Ao pequeno Daniel, que já chegou no meio da turbulência e já sentiu algumas ausências para terminar a dissertação.

Agradeço também aos colegas do mestrado, por compartilharem seus conhecimentos sempre que necessário ao longo da realização das disciplinas.

Também agradeço aos professores do Mestrado em Engenharia de Estruturas, em especial ao professor Marco Túlio, pois sem sua orientação não seria possível atingir este resultado.

Agradeço aos colegas da UNIFEI e UTFPR, pelo fornecimento dos dados experimentais para utilização na dissertação. Sem estes dados não seria possível a aplicação da metodologia e obtenção dos resultados.

“Fazer, todos os dias, as mesmas coisas e esperar resultados diferentes é a maior prova de insanidade.”
(Albert Einstein)

Resumo

O ERA foi desenvolvido no ambiente de engenharia aeroespacial na década de 80 para permitir a identificação de sistemas complexos em espaço de estados. Para a utilização do ERA são necessárias uma entrada impulsiva e medições das saídas do sistema, para composição da matriz de Hankel. A decomposição em valores singulares desta matriz permite a identificação das matrizes que regem o sistema. A dificuldade em trabalhar com entradas impulsivas em sistemas reais e a necessidade de redução de esforços computacionais em sistemas pouco amortecidos foram motivadores para o desenvolvimento do ERA/OKID, sendo esta metodologia uma derivação da teoria do ERA aplicando-se um filtro de observador de estado ou filtro de Kalman. Estas duas metodologias têm sido utilizadas no âmbito da engenharia de controle para permitir a identificação de sistemas complexos e o desenvolvimento de controladores ótimos, visto que os sistemas são identificados em espaço de estados e essa representação é essencial nesta área de conhecimento. Porém, as ferramentas mostram grande potencial no auxílio da análise modal de sistemas, visto que uma das possibilidades, após a identificação da realização mínima do sistema, é a obtenção dos parâmetros modais - frequência natural e fator de amortecimento, por exemplo. Para evidenciar estas possibilidades, o trabalho apresenta os conceitos básicos de identificação de sistemas, as teorias para o desenvolvimento do ERA e do ERA/OKID e da análise de sistemas por superposição modal. Além disso, o algoritmo do ERA/OKID é aplicado a dois sistemas experimentais, a saber: um clássico sistema mecânico de 2 GDLs e uma viga flexível. Os resultados obtidos para ambos foram bem interessantes.

Palavras-chave: Identificação de Sistemas. ERA. OKID. Sistemas Dinâmicos. Análise Modal.

Abstract

ERA was developed in the aerospace engineering environment in the 1980s to enable the identification of complex state-space systems. To use ERA an impulsive input and measurements of the system outputs for Hankel matrix composition are required. The singular value decomposition of this matrix allows the identification of the matrices that govern the system. The difficulty in working with impulsive inputs in real systems and the need to reduce computational efforts in low damped systems motivated the development of ERA/OKID. This methodology is a derivation of the ERA theory by applying a state observer filter or Kalman filter. These two methodologies have been used in the field of control engineering to allow the identification of complex systems and the development of optimal controllers, since the systems are identified in state space and this representation is essential in this area of knowledge. However, the tools show great potential to aid the modal analysis of systems, since one of the possibilities, after identifying the minimum system realization, is to obtain the modal parameters - natural frequency and damping factor, for example. To highlight these possibilities, the work presents the basic concepts of systems identification, the theories for the development of ERA and ERA/OKID and systems analysis by modal superposition. In addition, the ERA/OKID algorithm is applied to a two different experimental systems, namely: a classic 2 DOF mechanical system and a flexible beam. The results obtained for both were very interesting.

Keywords: System Identification. ERA. OKID. Dynamic Systems. Modal Analysis.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Componentes de um sistema de controle.	31
Figura 2.2 – Efeito do filtro de observador de estado na resposta de um sistema no domínio do tempo.	46
Figura 2.3 – Diagramas de Bloco: Sistema Real (a) e Sistema com Observador de Estado (b).	50
Figura 3.1 – Sistema Experimental - Pórtico com 2 GDL.	62
Figura 3.2 – Modelo Esquemático da Estrutura com 2 GDL.	62
Figura 3.3 – Diagrama de Massas Concentradas da Estrutura.	63
Figura 3.4 – Sistema Experimental - Viga Flexível com Atuador Eletromagnético.	64
Figura 3.5 – Bancada experimental utilizada.	65
Figura 3.6 – Modelo Esquemático ERA.	66
Figura 3.7 – Fluxograma do OKID.	67
Figura 4.1 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1	71
Figura 4.2 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1	72
Figura 4.3 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1	72
Figura 4.4 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1	73
Figura 4.5 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1	73
Figura 4.6 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2	75
Figura 4.7 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2	75
Figura 4.8 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2	76
Figura 4.9 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2	76
Figura 4.10 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2	77
Figura 4.11 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3	78
Figura 4.12 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3	78
Figura 4.13 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3	79
Figura 4.14 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3	79
Figura 4.15 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3	80
Figura 4.16 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4	82
Figura 4.17 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4	82
Figura 4.18 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4	83
Figura 4.19 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4	83
Figura 4.20 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4	84

Figura 4.21–Comparações entre as FRF’s Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.	86
Figura 4.22–Comparações entre as Saídas Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.	87
Figura 4.23–Comparações entre os Gráficos de Diagonal de Sigma - ordens 10, 20, 30 e 40.	88
Figura 4.24–Comparações entre os Indicadores de Confiança - ordens 10, 20, 30 e 40.	89
Figura 4.25–Comparações entre as FRF’s Teóricas, Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.	90
Figura 4.26–Parâmetros de Markov. (ordem do sistema n=10)	91
Figura 4.27–FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema n=10) . .	92
Figura 4.28–Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema n=10)	92
Figura 4.29–Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=10)	93
Figura 4.30–Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=10)	93
Figura 4.31–Parâmetros de Markov. (ordem do sistema n=30)	95
Figura 4.32–FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema n=30) . .	96
Figura 4.33–Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema n=30)	96
Figura 4.34–Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=30)	97
Figura 4.35–Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=30)	97
Figura 4.36–Parâmetros de Markov. (ordem do sistema n=50)	99
Figura 4.37–FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema n=50) . .	100
Figura 4.38–Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema n=50)	100
Figura 4.39–Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=50)	101
Figura 4.40–Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=50)	101

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Dados Dimensionais do Sistema Experimental com 2 GDL.	61
Tabela 3.2 – Massas e Rigidezes do Sistema.	62
Tabela 3.3 – Dados dos Equipamentos de Aquisição de Dados.	63
Tabela 3.4 – Dados dos Equipamentos da Bancada.	64
Tabela 4.1 – Dados Compilados Caso 1.	74
Tabela 4.2 – Dados Compilados Caso 2.	77
Tabela 4.3 – Dados Compilados Caso 3.	81
Tabela 4.4 – Dados Compilados Caso 4.	85
Tabela 4.5 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=10)	94
Tabela 4.6 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=30)	98
Tabela 4.7 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=50)	102

Lista de abreviaturas e siglas

ARMAX	Modelos <u>A</u> uto <u>R</u> egressivos com <u>M</u> édia <u>M</u> óvel e Entradas <u>E</u> Xógenas
CMI	<i>Consistent Modal Indicator</i>
EMAC	<i>Extended Modal Amplitude Coherence</i>
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>
ERA/DC	<i>Eigensystem Realization Algorithm/Data Correlation</i>
ERA/OKID	<i>Eigensystem Realization Algorithm/Observer Kalman Identification Filter</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus de Liberdade
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
MAC	<i>Modal Amplitude Coherence</i>
MDOF	<i>Multiple Degree of Freedom</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MPC	<i>Modal Phase Collinearity</i>
MSV	<i>Modal Singular Value</i>
OKID	<i>Observer Kalman Identification</i>
PBH	Popov-Belevitch-Hautus test
SDOF	<i>Single Degree of Freedom</i>
SIMO	<i>Single Input Multiple Output</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
SOM	Seletor de Ordem do Modelo

Lista de símbolos

Arábicos

$[A]$	matriz da dinâmica do sistema no domínio discreto
$[A_C]$	matriz da dinâmica do sistema no domínio contínuo
$[\hat{A}]_m$	matriz da dinâmica do sistema em coordenadas modais
$[\hat{A}]$	matriz $[A]$ identificada
$[\bar{A}]$	matriz da dinâmica do sistema com observador incorporado
$[B]$	matriz dos atuadores no domínio discreto
$[B_C]$	matriz dos atuadores no domínio contínuo
$[\hat{B}]_m$	matriz dos atuadores em coordenadas modais
$[\hat{B}]$	matriz $[B]$ identificada
$[\bar{B}]$	matriz dos atuadores com filtro de Kalman incorporado
$[C]$	matriz dos sensores no domínio discreto e contínuo
$[\hat{C}]_m$	matriz dos sensores em coordenadas modais
$[\hat{C}]$	matriz $[C]$ identificada
$[C_S]$	matriz de amortecimento do sistema teórico
$[C_m]$	matriz de amortecimento modal
$[D]$	matriz de perturbação dos sensores devido aos atuadores no domínio discreto e contínuo
$[\hat{D}]$	matriz $[D]$ identificada
$[E_m]$	matriz auxiliar para determinação de $[\hat{C}]$
$[E_r]$	matriz auxiliar para determinação de $[\hat{B}]$
$\{f(t)\}$	vetor da força modal
$[G]$	matriz do ganho do observador
$[H]$	matriz de Hankel

$[I]$	matriz identidade
$[K]$	matriz de rigidez do sistema teórico
$[K_m]$	matriz de rigidez modal
l	tamanho da amostra ou comprimento do vetor de dados
m	número de entradas
$[M]$	matriz de massa do sistema teórico
$[M_m]$	matriz de massa modal
MAC_i	coerência de amplitude modal relativo ao modo i
MSV_i	valor singular do modo i
n	ordem do sistema
$[O_m]$	matriz matriz nula quadrada de ordem m
$[O_r]$	matriz matriz nula quadrada de ordem r
p	número de parâmetros de Markov do observador
$[P]$	matriz de observabilidade
$[P_m]$	matriz de observabilidade em coordenadas modais
\bar{q}_i	evolução temporal esperada do modo i
\hat{q}_i	evolução temporal identificada do modo i
$[Q]$	matriz de controlabilidade
$[Q_m]$	matriz de controlabilidade em coordenadas modais
$[R]$	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz $[H]$
r	número de saídas
$[S]$	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz $[H]$
$\{u\}$	vetor de controle ou de entrada
$[U]$	matriz dos dados de entrada do sistema
$[v]$	matriz de entrada para o sistema com observador
$[V], [\bar{V}]$	matriz dos dados de entrada do sistema como observador

$\{x\}$	vetor de estados
$\{\hat{x}\}$	estado estimado
$\{x\}_m$	vetor de estados em coordenadas modais
$\{y\}$	vetor das medidas
$[Y]$	parâmetro de Markov do sistema
$[\bar{Y}]$	parâmetro de Markov do observador
$[\bar{Y}_k]^{(1)}$	parâmetro de Markov do observador devido à entrada
$[\bar{Y}_k]^{(1)}$	parâmetro de Markov do observador devido à saída
$[\bar{Y}_k]^0$	parâmetro de Markov do ganho do observador
$\{z\}$	vetor de deslocamentos
$\{\dot{z}\}$	vetor de velocidades
$\{\ddot{z}\}$	vetor de acelerações

Gregos

α	parâmetro que compõe o número de linhas da matriz de Hankel H
β	parâmetro que compõe o número de colunas da matriz de Hankel H
φ	vetor arbitrário
ψ	autovetor
Ψ	matriz modal
Δt	tempo de amostragem
$\hat{\Lambda}$	matriz diagonal dos autovalores da matriz \hat{A}
$\hat{\lambda}_i$	autovalor identificado relativo ao modo i
λ_i	autovalor esperado relativo ao modo i
$[\Sigma]$	matriz resultante da decomposição em valores singulares da matriz $[H]$
σ	elemento da diagonal da matriz $[\Sigma]$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Objetivos	29
1.2	Organização do Trabalho	29
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
2.1	Identificação de Sistemas Dinâmicos	31
2.1.1	Representação de Modelos em Espaço de Estados	34
2.1.2	Controlabilidade e Observabilidade	35
2.2	ERA	37
2.2.1	Realização em Coordenadas Modais	41
2.2.2	Indicadores de Confiança	43
2.2.2.1	Coerência de Amplitude Modal - MAC	44
2.2.2.2	Valor Singular do Modo - MSV	45
2.3	ERA/OKID	45
2.3.1	Equação Básica do Observador	46
2.3.2	Recuperação dos Parâmetros de Markov do Sistema Original e Ganhos do Observador	52
2.4	Resposta Dinâmica de um Sistema Utilizando a Superposição de Modos de Vibração	54
2.4.1	Obtenção das Frequências Naturais e dos Modos de Vibração	55
2.4.2	Solução para um Sistema com Amortecimento Viscoso e Excitação Harmônica utilizando Superposição dos Modos	58
2.4.3	Características das FRF's	60
3	MATERIAIS E METODOLOGIA	61
3.1	Materiais e Equipamentos	61
3.1.1	Sistema Experimental 1	61
3.1.2	Sistema Experimental 2	63
3.2	Metodologia	66
3.2.1	ERA	66
3.2.2	ERA/OKID	67
3.2.3	Ajuste do Modelo Teórico	68
4	RESULTADOS	71
4.1	Resultados Sistema 1	71
4.1.1	Ordem Estimada do Sistema - $n = 10$	71

4.1.2	Ordem Estimada do Sistema - $n = 20$	75
4.1.3	Ordem Estimada do Sistema - $n = 30$	78
4.1.4	Ordem Estimada do Sistema - $n = 40$	82
4.1.5	Conclusões Parciais	86
4.2	Resultados Sistema 2	91
4.2.1	Ordem Estimada do Sistema - $n = 10$	91
4.2.2	Ordem Estimada do Sistema - $n = 30$	95
4.2.3	Ordem Estimada do Sistema - $n = 50$	99
4.2.4	Conclusões Parciais	103
5	CONCLUSÕES	105
	REFERÊNCIAS	107

1 Introdução

A modelagem está intrinsicamente ligada ao ser humano, visto que para facilitar a interação no dia a dia com as diversas tecnologias, normalmente são estabelecidos modelos mentais, que permitem a operação de sistemas complexos com pequeno gasto de energia. Um exemplo trazido por [Aguirre \(2007\)](#) sobre os modelos mentais é a direção de um carro, sendo que quando aprende-se a dirigir, cada pessoa estabelece um modelo mental do carro em questão e tem dificuldades quando deve dirigir um carro diferente, pois o carro é alterado, mas o modelo mental não é atualizado instantaneamente.

Os modelos mentais utilizados no dia a dia têm suas limitações, haja vista a dificuldade de se definir por estes modelos uma relação entre as entradas e saídas de um determinado equipamento, por exemplo. Diante disso, torna-se necessário o estabelecimento de modelos matemáticos para descrever processos, sendo estes modelos particularmente importantes nos campos da física e da engenharia. A área de modelagem matemática tem o objetivo de descrever sistemas reais por meio de relações matemáticas.

A área de modelagem matemática pode ser classificada dependendo do conhecimento ou não da natureza do processo que se pretende modelar. Desta forma, a modelagem será do tipo caixa branca, quando se conhece a natureza do processo, e do tipo caixa preta quando estas relações são desconhecidas ou pouco conhecidas. A modelagem caixa preta também é conhecida como Identificação de Sistemas.

A área de Identificação de Sistemas visa a modelagem de sistemas dinâmicos através de observações do sistema e ensaios experimentais, onde o principal objetivo é estabelecer a relação entre as entradas e saídas do sistema através de modelos matemáticos ([ALVES, 2005](#)). A motivação principal para o estudo de técnicas de identificação residem no fato de que frequentemente as equações que governam o sistema são desconhecidas, ou então são conhecidas, mas o levantamento das mesmas e de seus parâmetros seria impraticável por questões de tempo e/ou recursos ([AGUIRRE, 2007](#)).

Um dos primeiros exemplos bem sucedidos de identificação de um modelo é o de Gauss, que em 1795 desenvolveu o método dos mínimos quadrados e que em 1801 utilizou este método para determinação da órbita e posição do asteroide Ceres, descoberto neste mesmo ano ([CONCEIÇÃO, 2012](#)). No início do século XX, outras técnicas de identificação foram desenvolvidas, envolvendo sistemas estocásticos com modelos de média móvel (MA) e auto regressivos (AR), assim como o surgimento de teorias de processos estacionários ([WIENER et al., 1930](#)) ([YULE, 1927](#)). Os sistemas autoregressivos com entradas exógenas (ARX) foram desenvolvidos nessa mesma época.

Um maior desenvolvimento das teorias de identificação na área de sistemas de

controle teve início na década de 1960, impulsionados pela corrida espacial e, principalmente, pela introdução da representação de sistemas na forma de espaço de estados por [Kalman \(1960\)](#), sendo que até a década anterior, as técnicas de controle eram baseadas nos diagramas de Bode, Nyquist e Nichols ou na análise da resposta ao degrau, ou seja, limitadas a sistemas de uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *single input single output*) ([GEVERS, 2006](#)) ([CONCEIÇÃO, 2012](#)).

A representação de sistemas em forma de espaço de estados permitiu a derivação de uma série de teorias e algoritmos para identificação de sistemas, sendo os primeiros relacionados aos conceitos de controlabilidade e observabilidade ([GILBERT, 1963](#)) ([KALMAN, 1963](#)). [Ho e Kalman \(1966\)](#) evoluíram a partir destas teorias para o conceito de realização mínima para um determinado sistema, mostrando que esta realização seria equivalente à realização do sistema real representado através dos parâmetros de Markov. Além disso, inspirações para novos desenvolvimentos vieram com a publicação do trabalho de [Box e Jenkins \(1970\)](#), onde foi possível a estimação de parâmetros em séries temporais ([ÅSTRÖM; KUMAR, 2014](#)).

Um método bastante conveniente para a área de sistemas de controle foi desenvolvido por [Juang e Pappa \(1985\)](#), o algoritmo para realização de autosistemas (ERA, do inglês *Eigensystem Realization Algorithm*), que permite a identificação de um modelo em espaço de estados, assim como a obtenção de seus parâmetros modais. O ERA é um moderno e poderoso método para identificação modal, que permite a identificação de estruturas de comportamento dinâmico complexo, como é o caso das estruturas aeroespaciais ([PAPPA; ELLIOTT; SCHENK, 1993](#)). É um método no domínio do tempo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple Input Multiple Output*) e que identifica muitos modos simultaneamente ([SCZIBOR, 2002](#)).

Duas derivações foram propostas para o ERA: o ERA/DC (com correlação de dados) e o ERA/OKID (com observador de estado/filtro de Kalman) ([JUANG; COOPER; WRIGHT, 1988](#)) ([JUANG et al., 1993](#)). O ERA/DC foi desenvolvido com o objetivo de reduzir a influência dos ruídos de medição nos resultados da identificação, enquanto o ERA/OKID permite uma redução nos esforços computacionais para obtenção do modelo identificado.

Juntamente com o ERA, [Juang e Pappa \(1985\)](#) avaliaram a sensibilidade do algoritmo quanto a ruídos de medição, sendo propostos dois indicadores de confiança para expurgar os modos de ruído: Coerência da Amplitude Modal e Colinearidade da Fase Modal. Posteriormente, outros indicadores foram propostos com o mesmo objetivo ([PAPPA; ELLIOTT; SCHENK, 1993](#)) ([ALVES, 2005](#)).

Os dados experimentais para utilização do ERA são os parâmetros de Markov, que formam a matriz de Hankel. Porém, a obtenção dos parâmetros de Markov experimentalmente tem sido uma dificuldade nos métodos baseados no ERA ([SCZIBOR, 2002](#)).

Na prática, estes parâmetros podem ser obtidos no domínio da frequência, por meio das funções de resposta em frequência (FRF) e convertidos em parâmetros de Markov através da transformada inversa de Fourier (TSUNAKI, 1999).

O algoritmo tratado nesta contribuição demonstra sua potencialidade em publicação recente, onde SILVA et al. (2019) o emprega para a identificação de viga de material composto para fins de projeto de controlador.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo o estudo da potencialidade do ERA/OKID na análise modal de estruturas. Pretendeu-se:

- validar a metodologia experimentalmente, através da aplicação num sistema com 2 graus de liberdade (GDL), e
- aplicar o algoritmo numa viga flexível excitada por atuador eletromagnético para obtenção de seus parâmetros modais dominantes.

1.2 Organização do Trabalho

Para atingir o objetivo proposto, a dissertação está organizada da seguinte maneira:

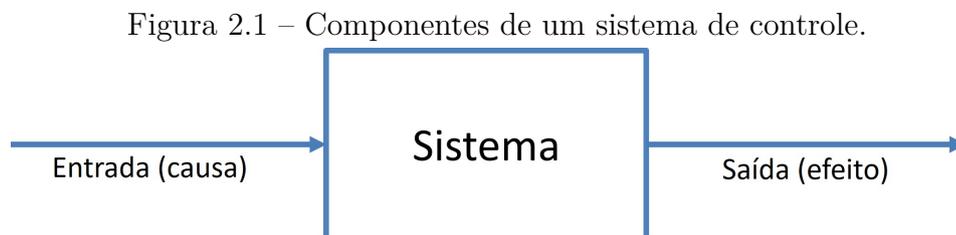
- Capítulo 2 - Fundamentação Teórica: serão apresentadas as teorias necessárias para o desenvolvimento da dissertação, desde uma introdução à identificação de sistemas, passando pelas teorias do ERA e do ERA/OKID e terminando pelo método de superposição dos modos de vibração;
- Capítulo 3 - Materiais e Metodologia: serão apresentados os dados dos sistemas identificados, assim como as metodologias utilizadas para a identificação e obtenção do modelo teórico;
- Capítulo 4 - Resultados: consolidação dos resultados da aplicação do algoritmo de identificação e comparação com o esperado;
- Capítulo 5 - Conclusões: apresentação das conclusões do trabalho.

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta os principais conceitos relacionados ao trabalho e possibilita a compreensão do assunto abordado no mesmo. O item 2.1 apresenta os principais conceitos relacionados a identificação de sistemas, assim como conceitos de controlabilidade e observabilidade. O item 2.2 apresenta o desenvolvimento da teoria relacionada ao ERA, assim como conceitos da realização em coordenadas modais e indicadores de confiança para aplicação no método. O item 2.3 apresenta o desenvolvimento da teoria para aplicação do ERA/OKID, assim como para a recuperação dos parâmetros de Markov do sistema real e do ganho do observador. O item 2.4 apresenta os conceitos sobre o método da superposição dos modos, necessários para a modelagem teórica dos sistemas estudados.

2.1 Identificação de Sistemas Dinâmicos

Um sistema é definido, no âmbito de controle, como um conjunto de objetos que realiza um objetivo e que pretende-se estudar (COELHO; COELHO, 2004). A Figura 2.1 apresenta os principais componentes de um sistema de controle.



Fonte: Adaptada de Coelho e Coelho (2004)

Três problemas de controle podem ser associados a Figura 2.1, conforme abaixo (COELHO; COELHO, 2004)

- **Análise:** O sistema e a entrada são conhecidos e deve-se obter a saída;
- **Projeto:** O sistema e a saída desejada são conhecidos e deve-se obter a entrada que fornece tal saída;
- **Identificação:** As entradas e saídas são conhecidas e deve-se obter o sistema, de modo que a saída estimada se aproxime da saída medida.

Fundamentalmente, identificação de sistemas é a área da engenharia que estuda métodos e projeta ferramentas computacionais para permitir a construção de modelos matemáticos a partir de dados medidos.

Algumas considerações devem ser feitas sobre o modelo a ser desenvolvido e serão tratadas a seguir. Deve-se observar, por exemplo, se o sistema pode ser considerado como linear ou se deve ser tratado como não linear, sendo esta característica normalmente verificada através do princípio da superposição. Modelar um sistema como linear simplifica muito a modelagem (AGUIRRE, 2007).

Outra característica é a invariância no tempo, sendo um sistema considerado invariante quando suas propriedades não variam com o tempo, ou seja, a mesma dinâmica é aplicada independentemente do tempo. Considerar um modelo invariante no tempo também simplifica a modelagem.

Os modelos podem ser elaborados na forma discreta e contínua, sendo que a segunda forma representa a evolução do sistema no tempo. Modelos discretos avaliam o sistema em instantes discretos (específicos) e são descritos por equações a diferenças.

As modelagens podem ser determinísticas ou estocásticas, sendo os modelos determinísticos obtidos por meio de variáveis não aleatórias e os estocásticos mediante variáveis aleatórias. Estes últimos modelos trabalham melhor com incertezas.

Uma das formas de classificação dos modelos matemáticos diz respeito ao conhecimento do sistema e das leis da física que o governam (AGUIRRE, 2007), sendo que as formas mais comuns de modelagem são:

- Modelagem Caixa Branca;
- Modelagem Caixa Preta.

Quando o sistema e as leis físicas que o governam são conhecidos, trata-se de uma modelagem caixa branca ou modelagem pela física ou natureza do processo. Nem sempre é possível seguir por este tipo de modelagem, pois dependendo do sistema, será necessário um grande conhecimento e dispêndio de recursos para modelá-lo.

Uma das características da modelagem caixa preta é que não são necessários conhecimentos prévios do sistema e das leis físicas que o governam para modelagem matemática, bastando-se ter acesso aos dados de entrada e saída. Este tipo de modelagem também é conhecida como modelagem empírica ou Identificação de Sistemas.

Aguirre (2007) apresenta as principais etapas de um problema de identificação:

- Testes dinâmicos e coleta de dados;
- Escolha da representação matemática a ser usada;
- Determinação da estrutura do modelo;
- Estimação de parâmetros; e

- Validação do modelo.

Testes dinâmicos e coleta de dados

Como a identificação de sistemas se propõe a analisar dados de entrada e saída para a obtenção dos modelos matemáticos, alguns aspectos determinantes a respeito destes dados devem ser observados, como por exemplo: definição dos locais de excitação do sistema, definição dos tipos de sinais a serem utilizados e definição do tempo de amostragem. Em geral, estas escolhas são baseadas na experiência do analista na identificação de sistemas dinâmicos, sendo inclusive intuitivas (ALVES, 2005) (AGUIRRE, 2007).

Para alguns casos de sistemas mais complexos, podem ser propostos testes dinâmicos no sistema, com a variação dos dados de entrada, para que o modelo obtido seja mais robusto.

Escolha da representação matemática a ser usada

Existem na literatura diversas formas de representação de sistemas dinâmicos através de modelos matemáticos, como por exemplo os modelos Auto Regressivos, Representação em Espaço de Estados e Funções de Transferência. Dependendo da necessidade, um modelo pode ser mais adequado que outro. Independentemente da representação escolhida, Ogata (2010) sugere que a primeira aproximação deve ser simplificada, por exemplo desconsiderando aspectos não lineares do sistema para representá-lo como linear. Caso a validação posterior do modelo mostre que a precisão não está adequada, uma nova análise deve ser conduzida com os elementos preteridos anteriormente.

Determinação da estrutura do modelo

Quando os modelos são lineares, a definição de sua estrutura corresponde a definição do número de pólos e zeros e do cálculo do atraso puro de tempo. Para modelos auto regressivos com média móvel e entradas exógenas (ARMAX), por exemplo, um dos aspectos mais importantes nesta etapa é a seleção da ordem do modelo (AGUIRRE, 2007).

Estimação dos Parâmetros

Nesta etapa deve ser escolhido o algoritmo a ser utilizado na estimação dos parâmetros. Muitos deles derivam do método dos mínimos quadrados, desenvolvido por Gauss em 1795 para o estudo das órbitas dos planetas.

Validação do Modelo

Tendo obtido um modelo, deve ser verificado se o mesmo apresenta as características de interesse do sistema original. A facilidade desta validação será proporcional à quantidade de informações disponíveis do sistema original e quão evidente está a pretensão de utilização do modelo. Como os modelos apresentam somente algumas características do sistema real, este será válido se trazer as características mais relevantes para o cenário em questão.

2.1.1 Representação de Modelos em Espaço de Estados

A representação de modelos matemáticos através das Funções de Transferência é uma das mais utilizadas para este fim. As Funções de Transferência são funções que modelam o comportamento dinâmico de um par entrada-saída de um determinado sistema no domínio de Laplace (AGUIRRE, 2007). Com esta ferramenta, a análise do ganho entre a saída e a entrada fica mais simplificada, visto que a solução de uma equação algébrica (transformada de Laplace) é muito mais simples que a solução de uma equação diferencial (BRANDOLT, 2002).

Outra representação bastante utilizada, que será foco no restante deste trabalho, é a representação na forma de Espaço de Estados, sendo que além de permitir a análise de sistemas MIMO com mais facilidade, pode ser utilizada para modelar também as relações entre as variáveis internas ao sistema, sendo estas duas características limitações na representação por Funções de Transferência (AGUIRRE, 2007) (OGATA, 2010).

Um modelo linear típico representado em forma de Espaço de Estados apresenta as equações 2.1 e 2.2 (OGATA, 2010):

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_C]\{x(t)\} + [B_C]\{u(t)\} \quad (2.1)$$

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} + [D]\{u(t)\} \quad (2.2)$$

Ou na sua forma discreta (equações 2.3 e 2.4):

$$\{x(k+1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\{u(k)\} \quad (2.3)$$

$$\{y(k)\} = [C]\{x(k)\} + [D]\{u(k)\} \quad (2.4)$$

Onde:

- $\{x\}$ é o vetor de estado;
- $\{u\}$ é o vetor de entrada;

- $\{y\}$ é o vetor de saída;
- $[A_C]$ e $[A]$ são as matrizes da dinâmica do sistema nos domínios contínuo e discreto;
- $[B_C]$ e $[B]$ são as matrizes dos atuadores no sistema nos domínios contínuo e discreto;
- $[C]$ e $[D]$ são as matrizes dos sensores e da perturbação dos sensores devido aos atuadores.

Duas observações importantes sobre a representação em forma de espaço de estados são apresentadas neste momento (AGUIRRE, 2007):

- O conhecimento dos vetores de estado em qualquer instante t_0 especifica o estado ou condição do sistema neste instante;
- A representação em espaço de estados não é única, ou seja, um sistema pode ser representado por mais de um modelo no espaço de estados.

2.1.2 Controlabilidade e Observabilidade

Para a identificação de sistemas é necessária a introdução dos conceitos de controlabilidade e observabilidade. Para o desenvolvimento destes conceitos, um sistema invariante no tempo deverá ser representado em forma de espaço de estados conforme equações 2.1 e 2.2.

Um sistema é dito controlável se os estados do sistema podem ser controlados a partir de suas entradas, ou seja, se para qualquer estado inicial $\{x(0)\} = x_0$ e qualquer estado final $\{x_1\}$, existe uma entrada $\{u(t)\}$ que transfere $\{x_0\}$ para $\{x_1\}$ em um espaço finito de tempo.

A solução para a equação 2.1, para um instante t_f será:

$$\{x(t_f)\} = e^{[A_C](t_f-t_0)}\{x(t_0)\} + \int_{t_0}^{t_f} e^{[A_C](t_f-\tau)}[B_C]\{u(\tau)\}d\tau \quad (2.5)$$

A solução do modelo discreto da equação 2.3 para um instante $t_f = k\Delta t$, onde Δt é o tempo amostral, será:

$$\{x(k)\} = [A]^k\{x(0)\} + \sum_{j=1}^k [A]^{j-1}[B]\{u(k-j)\} \quad (2.6)$$

Ou na forma matricial:

$$\{x(k)\} = [A]^k \{x(0)\} + \begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots & [A]^{k-1}[B] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{u(k-1)\} \\ \{u(k-2)\} \\ \{u(k-3)\} \\ \vdots \\ \{u(0)\} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Se um determinado sistema permitir ir para qualquer estado em tempo finito, iniciando em $t = 0$, então poderá partir de qualquer condição inicial para alcançar qualquer estado final em tempo finito. Então, para verificar se um sistema é controlável, basta verificar se é possível chegar em qualquer estado final a partir do estado inicial $t = 0$. Partindo desta observação, a equação 2.7 é reescrita da forma:

$$\{\hat{x}(k)\} = \{x(k)\} - [A]^k \{x(0)\} = \begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots & [A]^{k-1}[B] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{u(k-1)\} \\ \{u(k-2)\} \\ \{u(k-3)\} \\ \vdots \\ \{u(0)\} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A matriz $\begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots & [A]^{k-1}[B] \end{bmatrix}$ tem um papel importante no controle do sistema e é definida como matriz de controlabilidade $[Q_k]$. Para que o sistema linear, invariante no tempo e de ordem n definido pela equação 2.3 seja controlável, basta que o posto da matriz de controlabilidade $[Q_k]$ seja de ordem n , ou seja, $\text{posto}([Q_k]) = n$.

Para verificar se um sistema é observável, considere a equação de estado 2.3 e a equação de saída 2.4 num intervalo de tempo $[0, k-1]$ para quando $\{u(0)\} = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \{y(0)\} &= [C]\{x(0)\} \\ \{y(1)\} &= [C]\{x(1)\} = [C][A]\{x(0)\} \\ \{y(2)\} &= [C]\{x(2)\} = [C][A]^2\{x(0)\} \\ &\vdots \\ \{y(k-1)\} &= [C]\{x(k-1)\} = [C][A]^{k-1}\{x(0)\} \end{aligned}$$

Ou:

$$\{Y_k\} = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A] \\ [C][A]^2 \\ \vdots \\ [C][A]^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \{x(0)\} = [P_k] \cdot \{x(0)\} \quad (2.9)$$

A matriz $[P_k]$ é a matriz de observabilidade do sistema e, assim como as definições e conceitos de controlabilidade, o sistema será observável se o posto da matriz $[P_k]$ tiver a mesma ordem que o sistema, ou seja, $\text{posto}([P_k]) = n$.

2.2 ERA

O *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) foi apresentado por [Juang e Pappa \(1985\)](#) como uma alternativa para identificação de sistemas dinâmicos em espaço de estados, permitindo a obtenção dos parâmetros modais e do modelo reduzido de um determinado sistema. Foi desenvolvido inicialmente para aplicação na indústria aeroespacial, devido a complexidade de representação matemática caixa branca para estes sistemas, mas hoje em dia tem sido muito utilizado para sistemas de controle. O ERA foi formulado como uma versão estendida do algoritmo apresentado por [Ho e Kalman \(1966\)](#). A representação de sistemas em forma de espaço de estados permite a avaliação da observabilidade e da controlabilidade de todos os estados do sistema.

Para a aplicação do ERA, considera-se um sistema dinâmico, invariante no tempo e modelado em sua forma discreta através das equações 2.3 e 2.4. Considera-se também que o sistema é observável e controlável. Aplicando-se uma entrada impulsiva $\{u_k\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}$ e considerando $\{x_0\} = 0$, a resposta do sistema será:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \quad \{u_0\} = 1 & \{x_1\} &= [B] & \{y_0\} &= [D] \\ k = 1 &\Rightarrow \quad \{u_1\} = 0 & \{x_2\} &= [A][B] & \{y_1\} &= [C][B] \\ k = 2 &\Rightarrow \quad \{u_2\} = 0 & \{x_3\} &= [A]^2[B] & \{y_2\} &= [C][A][B] \\ k = 3 &\Rightarrow \quad \{u_3\} = 0 & \{x_4\} &= [A]^3[B] & \{y_3\} &= [C][A]^2[B] \\ & & \vdots & & & \\ k = \dots &\Rightarrow \quad \{u_k\} = 0 & \{x_{k+1}\} &= [A]^k[B] & \{y_k\} &= [C][A]^{k-1}[B] \end{aligned}$$

Resumindo os resultados acima, tem-se:

$$\{u_k\} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

e

$$[Y_k] = \begin{cases} [D] & \text{se } k = 0 \\ [C][A]^{k-1}[B] & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

A sequência de matrizes constantes que compõem as saídas do sistema, considerando a entrada impulsiva, são conhecidas como parâmetros de Markov $[Y_k]$. Estes parâmetros são utilizados como base para identificação dos modelos do sistema no domínio discreto. Como $[D] = [Y_0]$, somente as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ precisam ser determinadas para obtenção do modelo representativo do sistema.

O primeiro passo para determinação das matrizes acima (JUANG; PAPPA, 1985), após a determinação de $[Y_k]$, é a montagem da matriz de Hankel ($[H(0)]$) e a matriz de Hankel deslocada ($[H(1)]$), conforme abaixo:

Para $k = 1$, tem-se:

$$[H(0)] = \begin{bmatrix} [Y_1] & [Y_2] & [Y_3] & \dots \\ [Y_2] & [Y_3] & [Y_4] & \dots \\ [Y_3] & [Y_4] & [Y_5] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C][B] & [C][A][B] & [C][A]^2[B] & \dots \\ [C][A][B] & [C][A]^2[B] & [C][A]^3[B] & \dots \\ [C][A]^2[B] & [C][A]^3[B] & [C][A]^4[B] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$[H(1)] = \begin{bmatrix} [Y_2] & [Y_3] & [Y_4] & \dots \\ [Y_3] & [Y_4] & [Y_5] & \dots \\ [Y_4] & [Y_5] & [Y_6] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C][A][B] & [C][A]^2[B] & [C][A]^3[B] & \dots \\ [C][A]^2[B] & [C][A]^3[B] & [C][A]^4[B] & \dots \\ [C][A]^3[B] & [C][A]^4[B] & [C][A]^5[B] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Observando os termos da matriz $[H(0)]$, verifica-se que a mesma é uma composição das matrizes de controlabilidade e de observabilidade, conforme abaixo:

$$[H(0)] = [P_\alpha][Q_\beta] = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A] \\ [C][A]^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Da mesma forma, pode-se escrever:

$$[H(1)] = [P_\alpha][A][Q_\beta] \quad (2.11)$$

Ou de forma geral:

$$[H(k-1)] = [P_\alpha][A]^{k-1}[Q_\beta] \quad (2.12)$$

O segundo passo para a identificação do sistema é a decomposição em valores singulares da matriz de Hankel (JUANG; PAPPA, 1985). Assim, tem-se:

$$[H(0)] = [R][\Sigma][S^T] \quad (2.13)$$

Sendo $[R]$ e $[S]$ matrizes com suas colunas ortonormais e $[\Sigma]$ uma matriz retangular com:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [\Sigma_n] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

e

$$[\Sigma_n] = \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n] \quad (2.15)$$

Onde $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ é monotonicamente decrescente, ou seja: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Sejam $[R_n]$ e $[S_n]$ matrizes com as n primeiras colunas das matrizes $[R]$ e $[S]$, respectivamente. Como $[R]$ e $[S]$ são ortonormais, as matrizes $[R_n]$ e $[S_n]$ também o são. Assim:

$$[H(0)] = [R_n][\Sigma_n][S_n^T] \quad (2.16)$$

A seguinte propriedade das matrizes ortonormais será aplicada posteriormente:

$$[R_n^T][R_n] = [I_n] = [S_n^T][S_n] \quad (2.17)$$

O próximo passo é igualar a equação 2.10 com a equação 2.16, fatorando a matriz $[\Sigma_n]$:

$$[P_\alpha][Q_\beta] = [R_n][\Sigma_n][S_n^T] = [R_n][\Sigma_n]^{1/2} \cdot [\Sigma_n]^{1/2}[S_n^T] \quad (2.18)$$

Por analogia entre os termos da equação 2.18, pode-se considerar:

$$[P_\alpha] = [R_n][\Sigma_n]^{1/2} \quad \text{e} \quad [Q_\beta] = [\Sigma_n]^{1/2}[S_n^T]. \quad (2.19)$$

Identificação de A

Utilizando a equação 2.11 e substituindo os termos da equação 2.19, obtêm-se:

$$[H(1)] = [P_\alpha][A][Q_\beta] = [R_n][\Sigma_n]^{1/2}[A][\Sigma_n]^{1/2}[S_n^T] \quad (2.20)$$

O próximo passo é a pré multiplicação dos termos da equação 2.20 por $[R_n^T]$ e pós multiplicação dos termos da mesma equação por $[S_n]$. Então:

$$\begin{aligned} [R_n^T][H(1)][S_n] &= [R_n^T][R_n][\Sigma_n]^{1/2}[A][\Sigma_n]^{1/2}[S_n^T][S_n] = [I_n][\Sigma_n]^{1/2}[A][\Sigma_n]^{1/2}[I_n] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [R_n^T][H(1)][S_n] = [\Sigma_n]^{1/2}[A][\Sigma_n]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para a identificação da matriz $[A]$, efetua-se a pré e pós multiplicação dos termos da equação 2.21 por $[\Sigma_n]^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} [\Sigma_n]^{-1/2}[R_n^T][H(1)][S_n][\Sigma_n]^{-1/2} &= [\Sigma_n]^{-1/2}[\Sigma_n]^{1/2}[A][\Sigma_n]^{1/2}[\Sigma_n]^{-1/2} \\ [\Sigma_n]^{-1/2}[R_n^T][H(1)][S_n][\Sigma_n]^{-1/2} &= [I_n][A][I_n] \\ [\hat{A}] &= [\Sigma_n]^{-1/2}[R_n^T][H(1)][S_n][\Sigma_n]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Onde $[\hat{A}]$ na equação 2.22 é a matriz $[A]$ identificada.

Identificação de B

Para a identificação da matriz $[B]$, define-se uma matriz auxiliar $[E_m]$, conforme abaixo:

$$[E_m] = \begin{bmatrix} [I_m] \\ [O_m] \\ \vdots \\ [O_m] \end{bmatrix}$$

Onde $[I_m]$ é uma matriz identidade e $[O_m]$ é uma matriz quadrada nula, ambas de ordem m .

A identificação de $[B]$ se dará por meio da multiplicação da matriz de controlabilidade $[Q_\beta]$ pela matriz $[E_m]$. Porém, como nem sempre $[Q_\beta]$ estará disponível, utiliza-se a matriz de controlabilidade decomposta da matriz de Hankel, conforme equação 2.19. Então:

$$[\hat{B}] = [\Sigma_n]^{1/2} [S_n^T] [E_m] \quad (2.23)$$

Identificação de C

Analogamente ao desenvolvido para identificação de $[B]$, para a identificação de $[C]$ define-se uma matriz auxiliar $[E_r]$, conforme abaixo:

$$[E_r] = \begin{bmatrix} [I_r] & [O_r] & \cdots & [O_r] \end{bmatrix}$$

Onde $[I_r]$ é uma matriz identidade e $[O_r]$ é uma matriz quadrada nula, ambas de ordem r .

A identificação de $[C]$ se dará através da multiplicação da matriz $[E_r]$ pela matriz de observabilidade $[P_\alpha]$. Como nem sempre $[P_\alpha]$ estará disponível, utiliza-se a matriz de observabilidade conforme equação 2.19:

$$[\hat{C}] = [E_r] [R_n] [\Sigma_n]^{1/2} \quad (2.24)$$

2.2.1 Realização em Coordenadas Modais

Com o objetivo de verificar que a realização determinada pelo ERA é a de mínima ordem, propõe-se a verificação utilizando indicadores de confiança, que serão detalhados no item 2.2.2. Para a utilização destes indicadores, a realização deve ser convertida para suas coordenadas modais (ENG, 2019).

Para a conversão, seja a matriz de autovetores discreta $[\hat{\Psi}]$, calculada a partir de $[\hat{A}]$, e que será utilizada para a transformação linear abaixo:

$$\{x(k)\} = [\hat{\Psi}] \{x(k)_m\} \quad (2.25)$$

Substituindo a equação 2.25 na equação de estados e na equação de saída identifi-

cadadas:

$$\{x(k+1)_m\} = [\hat{\Psi}]^{-1} [\hat{A}] [\hat{\Psi}] \{x(k)_m\} + [\hat{\Psi}]^{-1} [\hat{B}] \{u(k)\} \quad (2.26)$$

$$\{y(k)\} = [\hat{C}] [\hat{\Psi}] \{x(k)_m\} + [\hat{D}] \{u(k)\} \quad (2.27)$$

As equações 2.26 e 2.27 fornecerão os parâmetros da realização modal, onde:

- $[\hat{A}]_m = [\hat{\Psi}]^{-1} [\hat{A}] [\hat{\Psi}] = [\hat{\Lambda}]$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores identificados do sistema (λ_i , com $i = 1, 2, \dots, n$);
- $[\hat{B}]_m = [\hat{\Psi}]^{-1} [\hat{B}]$ é a matriz dos atuadores em coordenadas modais;
- $[\hat{C}]_m = [\hat{C}] [\hat{\Psi}]$ é a matriz dos sensores em coordenadas modais.

O sistema identificado poderá ser reescrito em coordenadas modais conforme equação 2.28:

$$\{x(k+1)_m\} = [\hat{\Lambda}] \{x(k)_m\} + [\hat{B}]_m \{u(k)\} \quad (2.28)$$

$$\{y(k)\} = [\hat{C}]_m \{x(k)_m\} + [\hat{D}] \{u(k)\}$$

O fator de participação modal para o j -ésimo modo corresponde à j -ésima linha da matriz de influência de entrada nas coordenadas modais, ou seja, $[\hat{B}]_m$. A forma expandida de $[\hat{B}]_m$ pode ser verificada abaixo (SCZIBOR, 2002):

$$[\hat{B}]_m = \begin{bmatrix} \{\hat{b}_1\} \\ \{\hat{b}_2\} \\ \vdots \\ \{\hat{b}_n\} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

As formas dos modos podem ser verificadas na matriz de influência de saída nas coordenadas modais, ou seja, $[\hat{C}]_m$ (SCZIBOR; MARQUES, 2003). A forma expandida de $[\hat{C}]_m$ corresponde a:

$$[\hat{C}]_m = [\{\hat{c}_1\} \quad \{\hat{c}_2\} \quad \dots \quad \{\hat{c}_n\}] \quad (2.30)$$

Combinando as equações 2.29 e 2.30 com a matriz dos autovalores identificados $[\hat{\Lambda}]$, pode-se reescrever os parâmetros de Markov nas coordenadas modais:

$$[\hat{Y}]_k = [\hat{C}]_m [\hat{\Lambda}]^{k-1} [\hat{B}]_m \quad (2.31)$$

$$[\hat{Y}]_k = \sum_{i=1}^n \{\hat{c}_i\} \lambda_i \{\hat{b}_i\}$$

As matrizes de controlabilidade e observabilidade também poderão ser expressas nas coordenadas modais, conforme abaixo (SCZIBOR, 2002):

$$[P_m] = [R_n] [\Sigma_n]^{1/2} [\hat{\Psi}] \quad (2.32)$$

$$[Q_m] = [\hat{\Psi}]^{-1} [\Sigma_n]^{1/2} [S_n^T]. \quad (2.33)$$

Onde $[P_m]$ é a matriz de observabilidade modal e $[Q_m]$ é a matriz de controlabilidade modal.

2.2.2 Indicadores de Confiança

Uma característica inerente ao ERA, quando o sistema a ser identificado é complexo, é a identificação de um número maior de modos dos que existentes na frequência analisada (SCZIBOR, 2002). Para facilitar a análise dos modos reais na frequência, foram desenvolvidos uma série de indicadores de confiança que permitem a identificação do conjunto real dos autovalores que descrevem o sistema (ENG, 2019). Estes métodos permitem a distinção entre os modos estruturais e os modos computacionais, ou ruídos de medição e arredondamentos, durante a execução do algoritmo.

Duas das técnicas para permitir a distinção entre os modos reais de vibração e os modos de ruído serão explorados nas próximas sessões: Coerência de Amplitude Modal e Valor Singular do Modo. Porém, outras técnicas estão disponíveis para consulta na literatura: Seletor de Ordem do Modelo (SOM), Coerência de Amplitude Modal Estendida - EMAC (*Extended Modal Amplitude Coherence*), Colinearidade de Fase Modal - MPC (*Modal Phase Collinearity*) e Indicador de Consistência Modal - CMI (*Consistent Modal Indicator*) (ALVES, 2005) (PAPPA; ELLIOTT; SCHENK, 1993) (SCZIBOR, 2002) (SCZIBOR; MARQUES, 2003) (ENG, 2019) (TSUNAKI, 1999) (OLIVEIRA, 2003) (JUANG; PAPPA, 1985).

2.2.2.1 Coerência de Amplitude Modal - MAC

O método da Coerência de Amplitude Modal (MAC, do inglês *Modal Amplitude Coherence*) avalia a consistência da série temporal identificada, excluindo as questões de ortogonalidade. O MAC resulta num valor entre zero (0) e um (1), sendo que a proximidade do valor unitário indicará que a série temporal identificada pelo ERA se aproxima de uma série idealizada partindo-se dos dados do sistema.

Para o cálculo da evolução temporal identificada, deve-se retomar a forma modal dos parâmetros de Markov identificados nas coordenadas modais definidos pela equação 2.31. Desta equação, pode-se perceber que cada parâmetro de Markov pode ser descrito como uma combinação das n componentes que contribuem para o modelo (ALVES, 2005). Sendo assim, pode-se reescrever os parâmetros de Markov da seguinte forma:

$$[\hat{c}_i \hat{b}_i \quad \hat{c}_i \hat{\lambda}_i \hat{b}_i \quad \dots \quad \hat{c}_i \hat{\lambda}_i^{l-2} \hat{b}_i] \Rightarrow i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

Sendo l o comprimento do vetor de dados. Agora, definindo \hat{q}_i como sendo a evolução temporal construída através dos dados identificados (autovalores $\hat{\lambda}_i$ e vetor linha \hat{b}_i) e correspondente a:

$$\hat{q}_i = [\hat{b}_i \quad \hat{\lambda}_i \hat{b}_i \quad \dots \quad \hat{\lambda}_i^{l-2} \hat{b}_i] \Rightarrow i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

Para o cálculo da evolução temporal esperada decorrente dos dados do sistema (\bar{q}_i), retoma-se a matriz de controlabilidade modal definida pela equação 2.32 e aplica-se o desenvolvimento da equação 2.16, onde se obtém:

$$Q_m = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_1 \quad \lambda_1 b_1 \quad \dots \quad \lambda_1^{l-2} b_1] \\ [b_2 \quad \lambda_2 b_2 \quad \dots \quad \lambda_2^{l-2} b_2] \\ \vdots \\ [b_n \quad \lambda_n b_n \quad \dots \quad \lambda_n^{l-2} b_n] \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

O MAC pode ser entendido como um produto escalar entre a evolução temporal esperada (\bar{q}_i) e a identificada (\hat{q}_i) para cada modo, portanto:

$$MAC_i = \frac{|\bar{q}_i \hat{q}_i^*|}{\sqrt{|\bar{q}_i \bar{q}_i^*| \cdot |\hat{q}_i \hat{q}_i^*|}} \quad (2.37)$$

O * mostrado na equação tem o significado de transposto conjugado. A equação 2.37 é aplicada para todos os modos e o índice i está compreendido no intervalo de $[1, n]$,

sendo n a ordem estimada para o sistema. Após o cálculo dos valores de MAC para todos os modos, os mesmos são agrupados na forma de um vetor, conforme abaixo:

$$MAC = [MAC_1 \quad MAC_2 \quad \cdots \quad MAC_i] \quad (2.38)$$

2.2.2.2 Valor Singular do Modo - MSV

O Valor Singular do Modo (MSV, do inglês *Mode Singular Value*) verifica a contribuição de cada modo na resposta impulsiva do sistema (JUANG, 1994). Se um determinado modo contribui significativamente para a entrada impulsiva do sistema identificado, este modo também contribuirá para a entrada impulsiva dos dados reais, garantindo a eficiência do algoritmo na identificação. Para o cálculo da contribuição de cada modo, utiliza-se o valor máximo da sequência modal apresentada anteriormente pela equação 2.34 (ALVES, 2005). Assim sendo:

$$MSV_i = \sqrt{|\hat{c}_i|(1 + |\hat{\lambda}_i| + |\hat{\lambda}_i^2| + \cdots + |\hat{\lambda}_i^{l-2}|)|\hat{b}_i|} \approx \sqrt{\frac{|\hat{c}_i| \cdot |\hat{b}_i|}{1 - |\hat{\lambda}_i|}} \quad (2.39)$$

Onde l corresponde ao número de parâmetros de Markov, ou seja, o número de medições realizadas na saída do sistema quando a entrada é aplicada. Para a aproximação da equação 2.39 ser válida, l deve ser suficientemente grande. Assim como no MAC, os MSVs de cada modo podem ser agrupados num vetor, conforme abaixo:

$$MSV = [MSV_1 \quad MSV_2 \quad \cdots \quad MSV_i] \quad (2.40)$$

Para este trabalho, será adotado o MSV normalizado pelo valor máximo.

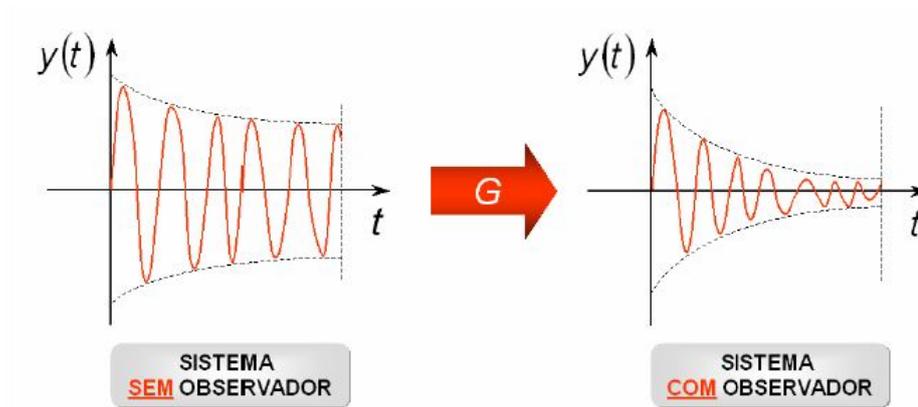
2.3 ERA/OKID

Uma particularidade necessária para a utilização do ERA é a entrada impulsiva unitária, conforme $\{u_k\} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$. Porém, nem sempre nos sistemas reais é possível este tipo de impulso. A aplicação do ERA utilizando um Filtro de Kalman num determinado sistema, desvincula a necessidade da entrada impulsiva, garantindo mais flexibilidade ao algoritmo e abrangência do método. Quando o filtro de Kalman, ou filtro de observador de estado, está associado ao ERA, o algoritmo corresponde à aplicação do *Observer Kalman Identification* ou ERA/OKID, como será tratado a partir de agora.

O ERA/OKID foi desenvolvido originalmente para estruturas aeroespaciais, pois devido a característica levemente amortecida destas estruturas, a resposta a excitação tem um decaimento do sinal muito lento, ou seja, um tempo de acomodação muito grande. O observador de estado induz um amortecimento artificial no sistema, fazendo com que a

resposta associada ao impulso seja mais rápida (ALVES, 2005). A figura 2.2 mostra uma comparação do decaimento da resposta com e sem a aplicação do filtro de Kalman.

Figura 2.2 – Efeito do filtro de observador de estado na resposta de um sistema no domínio do tempo.



Fonte: Alves (2005)

A utilização do filtro de Kalman transforma o sistema original em outro, matematicamente, e fornece os parâmetros de Markov do observador. Estes parâmetros são decompostos entre os parâmetros de Markov do Sistema Verdadeiro e a contribuição ou ganhos do filtro do observador.

2.3.1 Equação Básica do Observador

Para a equação básica do sistema com observador, retoma-se o sistema linear, discreto e invariante no tempo descrito pelas equações 2.3 e 2.4. Considerando as condições iniciais nulas $\{x(0)\} = 0$, a solução do sistema para a sequência $k = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ será:

$$\begin{aligned}
\{x(0)\} &= 0 \\
\{y(0)\} &= [D]\{u(0)\} \\
\\
\{x(1)\} &= [B]\{u(0)\} \\
\{y(1)\} &= [C][B]\{u(0)\} + [D]\{u(1)\} \\
\\
\{x(2)\} &= [A][B]\{u(0)\} + [D]\{u(1)\} \\
\{y(2)\} &= [C][A][B]\{u(0)\} + [C][B]\{u(1)\} + [D]\{u(2)\} \\
&\vdots \\
\{x(l-1)\} &= \sum_{i=1}^{l-1} [A]^{i-1}[B]\{u(l-1-i)\} \\
\{y(l-1)\} &= \sum_{i=1}^{l-1} [C][A]^{i-1}[B]\{u(l-1-i)\} + D\{u(l-1)\}
\end{aligned}$$

Agrupando este conjunto de equações em forma matricial, tem-se:

$$\begin{matrix} (m \times l) & (m \times rl) & (rl \times l) \\ [y] & = [Y] + [U] \end{matrix} \quad (2.41)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
[y] &= [\{y(0)\} \quad \{y(1)\} \quad \{y(2)\} \quad \cdots \quad \{y(l-1)\}] \\
[Y] &= [[D] \quad [C][B] \quad [C][A][B] \quad \cdots \quad [C][A]^{l-2}[B]] \\
[U] &= \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \cdots & \{u(l-1)\} \\ & \{u(0)\} & \{u(1)\} & \cdots & \{u(l-2)\} \\ & & \{u(0)\} & \cdots & \{u(l-3)\} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \{u(0)\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Conforme observado por [Juang et al. \(1993\)](#), a equação 2.41 é uma representação entre a relação da entrada e da saída ao longo do tempo. A matriz $[y]$ é uma matriz dos dados de saída de dimensão $m \times l$, onde m é o número de saídas e l é o número de dados adquiridos. A matriz $[Y]$ possui dimensão $m \times rl$, onde r é o número de entradas,

e apresenta todos os parâmetros de Markov a serem determinados. A matriz $[U]$ é uma matriz triangular superior $rl \times l$ dos dados de entrada.

Uma análise simplificada da equação 2.41 mostra que existem $m \times rl$ incógnitas na matriz de parâmetros de Markov, porém somente $m \times l$ equações. Quando $r > 1$, $[Y]$ não apresenta solução única, sendo que para $[Y]$ ser unicamente determinada $r = 1$. Mesmo assim, quando o sinal de entrada é zero ($\{u(0)\} = 0$), ou quando os sinais de entrada não possuem a frequência adequada (por exemplo, sinais harmônicos), ou quando o vetor de dados l é muito grande, a matriz $[U]$ se torna mal condicionada e a matriz $[Y]$ não poderá ser calculada com a precisão adequada.

Agora, considerando o caso onde $[A]$ é assintoticamente estável, de maneira que para um p suficientemente grande $[A]^k \approx 0$ para todos os $k \geq p$, a equação 2.41 pode ser aproximada por:

$${}^{(m \times l)} [y] = {}^{[m \times r(p+1)]} [Y] + {}^{[r(p+1) \times l]} [U] \quad (2.42)$$

Onde:

$$[y] = [\{y(0)\} \quad \{y(1)\} \quad \{y(2)\} \quad \cdots \quad \{y(p)\} \quad \cdots \quad \{y(l-1)\}]$$

$$[Y] = [[D] \quad [C][B] \quad [C][A][B] \quad \cdots \quad [C][A]^{p-1}[B]]$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \cdots & \{u(p)\} & \cdots & \{u(l-1)\} \\ & \{u(0)\} & \{u(1)\} & \cdots & \{u(p-1)\} & \cdots & \{u(l-2)\} \\ & & \{u(0)\} & \cdots & \{u(p-2)\} & \cdots & \{u(l-3)\} \\ & & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \{u(p)\} & \cdots & \{u(l-p-1)\} \end{bmatrix}$$

As matrizes $[U]$ e $[Y]$ da Equação 2.42 são versões truncadas das matrizes da Equação 2.41. A escolha do comprimento do vetor $l > r(p+1)$ deve ser feita de modo que o termo $[C][A]^k[B]$ seja aproximadamente zero para $k \geq p$, onde r é o número de entradas e p é um inteiro. A Equação 2.42 mostra que nesta versão truncada existem mais equações ($m \times l$) do que incógnitas $[m \times r(p+1)]$, permitindo a realização da Equação 2.3 e a obtenção da matriz $[Y] = [y][U]^\dagger$ utilizando os p primeiros parâmetros de Markov, sendo $[U]^\dagger$ a pseudo inversa da matriz $[U]$. Cabe observar que quanto maior o p escolhido menor o erro de aproximação.

Para estruturas espaciais levemente amortecidas, o inteiro p e o comprimento l necessários para tornar a aproximação válida fazem com que a matriz $[U]$ fique muito grande,

dificultando a obtenção da pseudo inversa $[U]^\dagger$. Para permitir que a solução da equação 2.42 seja obtida e que os parâmetros de Markov sejam encontrados, a teoria de controle sugere um amortecimento artificial, ou seja, não físico, através da incorporação de uma realimentação do sistema, para torná-lo tão amortecido quanto se deseja. Matematicamente essa realimentação corresponde à adição e subtração do termo $[G]\{y(k)\}$ no lado direito da equação de estados 2.3, então:

$$\{x(k+1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\{u(k)\} + [G]\{y(k)\} - [G]\{y(k)\}$$

Substituindo um dos termos $\{y(k)\}$ conforme a equação 2.4:

$$\{x(k+1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\{u(k)\} + [G]([C]\{x(k)\} + [D]\{u(k)\}) - [G]\{y(k)\}$$

$$\{x(k+1)\} = [A]\{x(k)\} + [B]\{u(k)\} + [G][C]\{x(k)\} + [G][D]\{u(k)\} - [G]\{y(k)\}$$

$$\{x(k+1)\} = ([A] + [G][C])\{x(k)\} + ([B] + [G][D])\{u(k)\} - [G]\{y(k)\}$$

Redefinindo os termos:

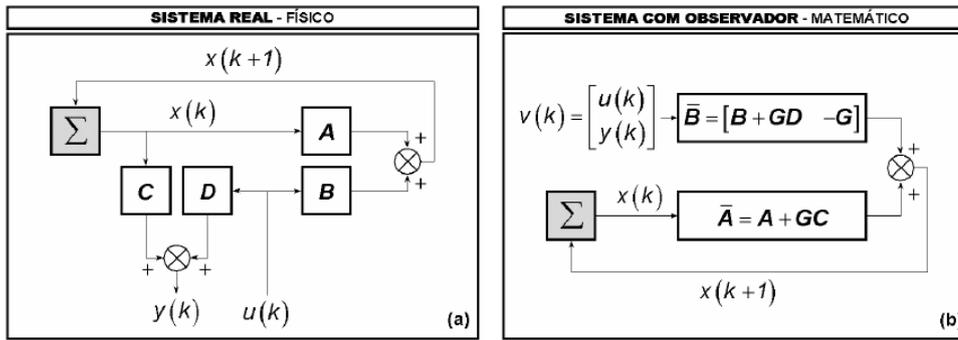
$$\{x(k+1)\} = \overline{[A]}\{x(k)\} + \overline{[B]}\{v(k)\} \quad (2.43)$$

Onde:

- $\overline{[A]} = [A] + [G][C]$ é a matriz da dinâmica com o observador incorporado (ordem $n \times n$);
- $\overline{[B]} = [B] + [G][D] - [G]$ é a matriz posicionadora dos atuadores com o observador incorporado (ordem $n \times [rxm]$);
- $\{v(k)\} = \begin{bmatrix} \{u(k)\} \\ \{y(k)\} \end{bmatrix}$ é a matriz de entrada;
- $[G]$ é uma matriz arbitrária ($n \times m$) escolhida para fazer a matriz $\overline{[A]}$ tão estável quanto necessário para a análise.

A equação 2.43 é matematicamente idêntica à equação 2.3, porém com matrizes e entradas diferentes. Esta é, na verdade, uma equação na forma do observador, quando o vetor $\{x(k)\}$ é considerado como um vetor de observador de estado. Então, a solução da equação 2.43 fornece os parâmetros de Markov do Observador. A Figura 2.3 apresenta uma comparação entre o sistema real e o sistema após a introdução do observador de estado.

Figura 2.3 – Diagramas de Bloco: Sistema Real (a) e Sistema com Observador de Estado (b).



Fonte: Alves (2005)

Abaixo pode ser visualizada a descrição de entrada e saída na forma matricial atualizada:

$$\begin{bmatrix} m \times l \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \times [(m+r)(l-1)+r] \\ \bar{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(m+r)(l-1)+r \times l] \\ V \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Onde:

$$[y] = [\{y(0)\} \quad \{y(1)\} \quad \{y(2)\} \quad \cdots \quad \{y(p)\} \quad \cdots \quad \{y(l-1)\}]$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} [D] & [C][\bar{B}] & [C][\bar{A}][\bar{B}] & \cdots & [C][\bar{A}]^{p-1}[\bar{B}] & \cdots & [C][\bar{A}]^{l-2}[\bar{B}] \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \cdots & \{u(p)\} & \cdots & \{u(l-1)\} \\ & \{v(0)\} & \{v(1)\} & \cdots & \{v(p-1)\} & \cdots & \{v(l-2)\} \\ & & \{v(0)\} & \cdots & \{v(p-2)\} & \cdots & \{v(l-3)\} \\ & & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \{v(0)\} & \cdots & \{v(l-p-1)\} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \{v(0)\} \end{bmatrix}$$

O fato da matriz $[G]$ ser escolhida arbitrariamente, faz com que os autovalores de $[\bar{A}]$ sejam arbitrariamente atribuídos por um sistema observável. O desenvolvimento matemático pode ser interpretado como posicionando todos os autovalores de $[\bar{A}]$ na origem, ou seja, um observador sem batimento (ALVES, 2005) (PHAN et al., 1992). Este

fato resulta em $[C][\overline{A}]^k[B] \approx 0$ para $k \geq p$. Como a utilização de dados reais com ruídos resultam em $[C][\overline{A}]^k[B] \approx 0$ para $k \geq p$, sendo p suficientemente grande, a resolução dos parâmetros de Markov do observador seguem a seguinte abordagem:

$$\begin{matrix} (m \times l) \\ [y] \end{matrix} = \begin{matrix} m \times [(m+r)p+r] \\ \overline{[Y]} \end{matrix} + \begin{matrix} [(m+r)p+r] \times l \\ [V] \end{matrix} \quad (2.45)$$

Onde:

$$[y] = [\{y(0)\} \quad \{y(1)\} \quad \{y(2)\} \quad \cdots \quad \{y(p)\} \quad \cdots \quad \{y(l-1)\}]$$

$$[Y] = [D] \quad [C][\overline{B}] \quad [C][\overline{A}][\overline{B}] \quad \cdots \quad [C][\overline{A}]^{p-1}[\overline{B}]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \{u(2)\} & \cdots & \{u(p)\} & \cdots & \{u(l-1)\} \\ & \{v(0)\} & \{v(1)\} & \cdots & \{v(p-1)\} & \cdots & \{v(l-2)\} \\ & & \{v(0)\} & \cdots & \{v(p-2)\} & \cdots & \{v(l-3)\} \\ & & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \{v(p)\} & \cdots & \{v(l-p-1)\} \end{bmatrix}$$

As matrizes $[V]$ e $\overline{[Y]}$ da Equação 2.45 são versões truncadas das matrizes $[V]$ e $\overline{[Y]}$ da Equação 2.44. Se os dados tem uma realização conforme Equações 2.3 e 2.4, então $\overline{[Y]} = [y][V]^\dagger$ é atendida pelos p primeiros parâmetros de Markov do sistema, onde $[V]^\dagger$ é a pseudo inversa da matriz $[V]$. A equação 2.45 mostra que os parâmetros de Markov do observador não necessariamente decaem assintoticamente com os primeiros $p-1$ passos. Para que a solução de $\overline{[Y]}$ seja única, as linhas da matriz $[V]$ devem ser linearmente independentes. Além disso, para reduzir os erros no cálculo da pseudo inversa de $[V]$, as linhas de $[V]$ devem ser o mais independentes possível. Como resultado, o valor máximo atribuído a p deve ser de tal forma a maximizar o número de linhas independentes $[(m+q)p+m]$ de $[V]$.

As equações anteriores consideravam as condições iniciais nulas, ou seja, $\{x(0)\} = 0$. Para condições iniciais não nulas, a equação 2.4 pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\overline{[y]} = [C][\overline{A}]^p[x] + \overline{[Y]}[V] \quad (2.46)$$

Onde:

$$\overline{[y]} = [\{y(p)\} \quad \{y(p+1)\} \quad \{y(p+2)\} \quad \cdots \quad \{y(l-1)\}]$$

$$[x] = [\{x(0)\} \quad \{x(1)\} \quad \{x(2)\} \quad \cdots \quad \{x(l-p-1)\}]$$

$$[\overline{Y}] = [[D] \quad [C][\overline{B}] \quad [C][\overline{A}][\overline{B}] \quad \cdots \quad [C][\overline{A}]^{p-1}[\overline{B}]]$$

$$[\overline{V}] = \begin{bmatrix} \{u(0)\} & \{u(1)\} & \cdots & \{u(l-1)\} \\ \{v(p-1)\} & \{v(p)\} & \cdots & \{v(l-2)\} \\ \{v(p-2)\} & \{v(p-1)\} & \cdots & \{v(l-3)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{v(0)\} & \{v(1)\} & \cdots & \{v(l-p-1)\} \end{bmatrix}$$

Para um caso particular, quando $[\overline{A}]^p$ é pequeno o suficiente e os estados de $\{x\}$ são controlados, o primeiro termo da equação 2.46 pode ser desconsiderado. Então:

$$[\overline{y}] = [\overline{Y}][\overline{V}] \quad (2.47)$$

Onde a solução pelo método dos mínimos quadrados, considerando que o termo $[\overline{V}][\overline{V}]^T$ exista, é:

$$[\overline{Y}] = [\overline{y}][\overline{V}]^T [\overline{V}][\overline{V}]^T^{-1} \quad (2.48)$$

Caso contrário, o termo $[\overline{V}]^T [\overline{V}][\overline{V}]^T^{-1}$ deve ser substituído por $[\overline{V}]^T$, resultando em:

$$[\overline{Y}] = [\overline{y}][\overline{V}]^T \quad (2.49)$$

Para condições iniciais não nulas e desconhecidas, deve ser utilizada a equação 2.47, para eliminar os efeitos destas condições iniciais, visto que estes dados podem ser desconsiderados após p passos.

2.3.2 Recuperação dos Parâmetros de Markov do Sistema Original e Ganhos do Observador

Para o cálculo dos parâmetros de Markov do sistema em $[Y]$ a partir dos parâmetros de Markov do observador, obtidos anteriormente, deve-se particionar $[\overline{Y}]$:

$$[\overline{Y}] = [\overline{Y}_0] \quad [\overline{Y}_1] \quad [\overline{Y}_2] \quad \cdots \quad [\overline{Y}_p] \quad (2.50)$$

Onde:

$$\overline{[Y_0]} = [D]$$

$$\begin{aligned}\overline{[Y_k]} &= [C][A]^k[B] \\ &= [C]([A] + [G][C])^{k-1}([B] + [G][D]) - [C]([A] + [G][C])^{k-1}[G] \\ \overline{[Y_k]} &\equiv [\overline{[Y_k]}^{(1)} - \overline{[Y_k]}^{(2)}]; \quad k = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

O sinal negativo do segundo termo da equação anterior permite que $\overline{[Y_k]}^{(2)} = [C]([A] + [G][C])^{k-1}[G]$.

Para o cálculo do primeiro parâmetro $[C][B]$, basta o desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}[Y_1] &= [C][B] \\ &= [C]([B] + [G][D]) - ([G][C])[D] \\ &= \overline{[Y_1]}^{(1)} - \overline{[Y_1]}^{(2)}[D]\end{aligned}\tag{2.51}$$

O cálculo do segundo parâmetro $[C][A][B]$, é como se segue:

$$\begin{aligned}\overline{[Y_2]}^{(1)} &= [C]([A] + [G][C])([B] + [G][D]) \\ &= [C][A][B] + [C][G][C][B] + [C]([A] + [G][C])[G][D] \\ &= [Y_2] + \overline{[Y_1]}^{(2)}[Y_1] - \overline{[Y_2]}^{(2)}[D]\end{aligned}$$

Isolando o termo $[Y_2]$: $[Y_2] = \overline{[Y_2]}^{(1)} - \overline{[Y_1]}^{(2)}[Y_1] + \overline{[Y_2]}^{(2)}[D]$ (2.52)

Desenvolvimento semelhante é realizado para o cálculo do terceiro parâmetro $[C][A]^2[B]$:

$$\begin{aligned}\overline{[Y_3]}^{(1)} &= [C]([A] + [G][C])^2([B] + [G][D]) \\ &= [C][A]^2[B] + [C][G][C][A][B] + [C]([A] + [G][C])[G][C][B] + [C]([A] + [G][C])^2[G][D] \\ &= [Y_3] + \overline{[Y_1]}^{(2)}[Y_2] + \overline{[Y_2]}^{(2)}[Y_1] + \overline{[Y_3]}^{(2)}[D]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [Y_3] = \overline{[Y_3]}^{(1)} - \overline{[Y_1]}^{(2)}[Y_2] - \overline{[Y_2]}^{(2)}[Y_1] - \overline{[Y_3]}^{(2)}[D]\tag{2.53}$$

A formulação para o cálculo geral dos parâmetros de Markov do sistema é obtida por indução matemática, conforme abaixo:

$$[Y_k] = \overline{[Y_k]}^{(1)} - \sum_{i=1}^k \overline{[Y_i]}^{(2)}[Y_{k-i}] \Rightarrow k = 1, \dots, p\tag{2.54}$$

$$[Y_k] = - \sum_{i=1}^p \overline{[Y_i]}^{(2)} [Y_{k-i}] \Rightarrow k = p + 1, \dots, \infty$$

Após a obtenção dos parâmetros de Markov do sistema, procede-se para a derivação das matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ a partir das matrizes de Hankel e Hankel deslocada do sistema para a aplicação do ERA.

O cálculo dos parâmetros de Markov do ganho do observador segue raciocínio semelhante ao realizado para os parâmetros do sistema, e por indução matemática são encontradas as fórmulas gerais abaixo (ALVES, 2005) (JUANG et al., 1993):

$$\begin{aligned} [Y_1]^0 &= [C][G] = \overline{[Y_1]}^{(2)} \\ [Y_k]^0 &= \overline{[Y_k]}^{(2)} - \sum_{i=1}^{k-1} \overline{[Y_i]}^{(2)} [Y_{k-i}]^0 \Rightarrow k = 2, \dots, p \\ [Y_k] &= - \sum_{i=1}^p \overline{[Y_i]}^{(2)} [Y_{k-i}]^0 \Rightarrow k = p + 1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.4 Resposta Dinâmica de um Sistema Utilizando a Superposição de Modos de Vibração

As análises dinâmicas de um sistema visam descrever ao longo do tempo o comportamento deste sistema a forças aplicadas, dependendo das condições iniciais. Já a análise modal de um sistema permite que o mesmo seja caracterizado quanto aos principais parâmetros modais - frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração - e uma análise mais simplificada, principalmente quando aplicada para uma identificação experimental (WAGNER, 2017).

A modelagem simplificada de um sistema caracterizando-o como somente um grau de liberdade nem sempre é possível, pois resulta em uma descrição inadequada do sistema. Na maioria dos casos, a modelagem necessita de múltiplos graus de liberdade (MDOF, do inglês *Multiple Degree of Freedom*), deixando os modelos mais precisos, porém mais complexos. A descrição da dinâmica de um sistema MDOF linear é dada por um conjunto de equações diferenciais ordinárias agrupadas na seguinte forma matricial:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C_s]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{p(t)\} \quad (2.56)$$

Ou para o caso sem amortecimento:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [K]\{z\} = \{p(t)\} \quad (2.57)$$

Onde:

- $[M]$ é a matriz de massas do sistema;
- $[C_S]$ é a matriz de amortecimento;
- $[K]$ é a matriz de rigidez;
- $\{z\}$ é o vetor de deslocamentos;
- $\{\dot{z}\}$ é o vetor de velocidades;
- $\{\ddot{z}\}$ é o vetor de acelerações;
- $\{p(t)\}$ é o vetor das forças externas do sistema (para o caso de vibrações livres, este vetor é igual a zero).

Normalmente os termos acoplantes das matrizes $[M]$, $[C_S]$ e $[K]$ são diferentes de zero (por exemplo, $k_{ij} = k_{ji} \neq 0$), então a resolução das equações 2.56 e 2.57 resultará na análise simultânea de N equações e N incógnitas. O método da superposição dos modos vem para simplificar a resolução de problemas MDOF, onde o conjunto de equações acopladas, necessárias para a resolução das equações 2.56 e 2.57, são transformadas em um conjunto de equações desacopladas utilizando os modos de vibração do sistema sem amortecimento (CRAIG; KURDILA, 2006).

2.4.1 Obtenção das Frequências Naturais e dos Modos de Vibração

O primeiro passo para a utilização do método de superposição dos modos é a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema não amortecido, sendo para isso utilizado o seguinte problema de autovalor:

$$([K] - \omega^2[M])\psi = 0 \quad (2.58)$$

Resultando em N autovalores ω_r^2 e N autovetores ψ_r , para $r = 1, 2, \dots, n$. As raízes quadradas dos autovalores, ou seja, ω_r , representam as frequências naturais do sistema, enquanto os autovetores ψ_r representam os modos.

A verificação da ortogonalidade dos modos é realizada em relação às matrizes $[M]$ e $[K]$ e será demonstrada através de dois modos quaisquer i e j . Então, da equação 2.58:

$$([K] - \omega_i^2[M])\psi_i = 0 \quad (2.59)$$

$$([K] - \omega_j^2[M])\psi_j = 0 \quad (2.60)$$

As seguintes operações se seguem para verificação da ortogonalidade:

- Pré-multiplicação da equação 2.60 por ψ_i^T ;
- Cálculo da transposta da equação 2.59;
- Pós-multiplicação da equação resultante do item anterior por ψ_j ;
- Subtração entre as duas equações derivadas de 2.59 e 2.60, após as operações listadas nos itens anteriores.

Encontrando:

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\psi_i^T[M]\psi_j = 0 \quad (2.61)$$

Considerando as frequências naturais distintas:

$$\psi_i^T[M]\psi_j = 0 \quad (2.62)$$

Demonstrando que os modos são ortogonais a $[M]$. Manipulações matemáticas semelhantes às demonstradas podem ser aplicadas para comprovação da ortogonalidade em relação à $[K]$:

$$\psi_i^T[K]\psi_j = 0 \quad (2.63)$$

De forma generalizada os modos são agrupados numa matriz modal da seguinte forma:

$$[\Psi] = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n] \quad (2.64)$$

E a diagonalização das matrizes $[M]$ e $[K]$, para posterior aplicação do método de superposição dos modos, é dada por:

$$[M_m] = [\Psi]^T[M][\Psi] = \text{diag}(M_r) \quad (2.65)$$

$$[K_m] = [\Psi]^T[K][\Psi] = \text{diag}(K_r) = \text{diag}(\omega_r^2 M_r)$$

Com a diagonalização das matrizes de massa e de rigidez ($[M_m]$ e $[K_m]$), num sistema com amortecimento as equações de movimento ficariam acopladas somente pela matriz de amortecimento $[C_S]$. Como o caso mais comum de amortecimento em estruturas dinâmicas é o amortecimento proporcional, onde a matriz de amortecimento é uma composição das matrizes de massa e rigidez do sistema, a matriz $[C_S]$ atende a ortogonalidade requerida

pelo método de superposição dos modos e pode ser diagonalizada da mesma forma que as matrizes $[M]$ e $[K]$. Então:

$$[C_m] = [\Psi]^T [C_S] [\Psi] = \text{diag}(C_r) = \text{diag}(2\xi_r \omega_r M_r) \quad (2.66)$$

Finalizando as etapas de desacoplamento para análise modal posterior, uma mudança de variável deve ser introduzida, permitindo que as respostas do sistema sejam em coordenadas modais:

$$\{z(t)\} = [\Psi]\{n(t)\} = \sum_{r=1}^N \psi_r n_r(t) \quad (2.67)$$

Substituindo a equação 2.67 na equação 2.56 e pré-multiplicando por $[\Psi]^T$, têm-se:

$$[M_m]\{\ddot{n}\} + [C_m]\{\dot{n}\} + [K_m]\{n\} = \{f(t)\} \quad (2.68)$$

Onde:

- $[M_m] = [\Psi]^T [M] [\Psi] = \text{diag}(M_r)$ é a matriz de massa modal;
- $[C_m] = [\Psi]^T [C_S] [\Psi] = \text{diag}(C_r) = \text{diag}(2\xi_r \omega_r M_r)$ é a matriz de amortecimento modal;
- $[K_m] = [\Psi]^T [K] [\Psi] = \text{diag}(K_r) = \text{diag}(\omega_r^2 M_r)$ é a matriz de rigidez modal;
- $\{f(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\}$ é o vetor da força modal.

Podemos reescrever a resposta dinâmica do sistema dada por 2.68 através das N equações modais desacopladas, conforme abaixo:

$$M_r \ddot{n}_r + 2\xi_r \omega_r M_r \dot{n}_r + \omega_r^2 M_r n_r = f_r(t) \quad \Rightarrow \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (2.69)$$

Conversão das condições iniciais em coordenadas modais

Como as variáveis foram alteradas, permitindo a análise de equações desacopladas nas coordenadas modais, conforme equação 2.67, as condições iniciais de entrada para solução do sistema acoplado têm que ser adaptadas para a solução do sistema desacoplado. Dados $\{z(0)\} = z_0$ e $\{\dot{z}(0)\} = \dot{z}_0$, e valendo-se da equação 2.67, então:

$$\begin{aligned} \{z(0)\} &= [\Psi]\{n(0)\} \\ \{\dot{z}(0)\} &= [\Psi]\{\dot{n}(0)\} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Multiplicando as equações anteriores por $[\Psi]^T[M]$:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T[M]\{z(0)\} &= [M_m]\{n(0)\} \\ [\Psi]^T[M]\{\dot{z}(0)\} &= [M_m]\{\dot{n}(0)\} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Visto $[M_m]$ ser diagonal, as condições iniciais podem ser obtidas para cada modo, conforme equações 2.72:

$$\left. \begin{aligned} n_r(0) &= \frac{1}{M_r} \psi_r^T [M] \{z(0)\} \\ \dot{n}_r(0) &= \frac{1}{M_r} \psi_r^T [M] \{\dot{z}(0)\} \end{aligned} \right\} r = 1, 2, \dots, N \quad (2.72)$$

2.4.2 Solução para um Sistema com Amortecimento Viscoso e Excitação Harmônica utilizando Superposição dos Modos

Considerando uma força de excitação harmônica $p(t) = P \cos \omega t$ em um sistema com amortecimento viscoso proporcional, a equação modal dos movimentos pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{n}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{n}_r + \omega_r^2 n_r = \frac{1}{M_r} F_r \cos \omega t \quad (2.73)$$

Onde $F_r = \Psi_r^T P$.

Para a resolução do problema, são usadas as técnicas de resposta no domínio da frequência para números complexos. Para a parte Real da solução é considerada a equação 2.73 adaptada:

$$\ddot{n}_{r\Re} + 2\xi_r \omega_r \dot{n}_{r\Re} + \omega_r^2 n_{r\Re} = \frac{1}{M_r} F_r \cos \omega t \quad (2.74)$$

A parte imaginária será representada considerando que a força de excitação seja $p(t) = P \sin \omega t$. Então:

$$\ddot{n}_{r\Im} + 2\xi_r \omega_r \dot{n}_{r\Im} + \omega_r^2 n_{r\Im} = \frac{1}{M_r} F_r \sin \omega t \quad (2.75)$$

Multiplicando a equação 2.75 por $i = \sqrt{-1}$, adicionando-se o resultado à equação 2.74 e utilizando a fórmula de Euler:

$$\ddot{\bar{n}}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{\bar{n}}_r + \omega_r^2\bar{n}_r = \frac{1}{M_r}F_r e^{i\omega t} \quad (2.76)$$

$$\ddot{\bar{n}}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{\bar{n}}_r + \omega_r^2\bar{n}_r = \omega_r^2 \frac{F_r}{K_r} e^{i\omega t}$$

Onde $\bar{n} = n_{\Re} + n_{\Im}$. A solução em regime permanente para a equação 2.76 é:

$$\bar{n}_r = \bar{H}_{\frac{n_r}{F_r}}(\omega) F_r e^{i\omega t} \quad (2.77)$$

Onde $\bar{H}_{\frac{n_r}{F_r}}(\omega)$ é a função complexa de resposta em frequência (FRF) que é definida por:

$$\bar{H}_{\frac{n_r}{F_r}}(\omega) = \frac{\frac{1}{K_r}}{(1 - r_r^2) + i(2\xi_r r_r)} \quad (2.78)$$

Na equação 2.78 o termo r_r é a taxa de frequência modal, que é dada por:

$$r_r = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (2.79)$$

Como a magnitude e fase de $\bar{H}_{\frac{n_r}{F_r}}(\omega)$ pode ser determinada, a resposta modal se torna:

$$n_r(t) = \frac{\frac{F_r}{K_r}}{\sqrt{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2}} \cos(\omega t - \alpha_r) \quad (2.80)$$

Onde o ângulo de fase α_r é calculado por:

$$\tan \alpha_r = \frac{2\xi_r r_r}{1 - r_r^2} \quad (2.81)$$

Utilizando a relação da equação 2.67 na forma complexa e combinando com $F_r = \psi_r^T P$ e as equações 2.77 e 2.78, é encontrada a solução na forma complexa para $\{z\}$, onde:

$$\{\bar{z}(t)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_r \psi_r^T P}{K_r} \frac{1}{(1 - r_r^2) + i(2\xi_r r_r)} e^{i\omega t} \quad (2.82)$$

A solução de z no regime permanente e coordenadas generalizadas é derivada da equação 2.82, conforme abaixo:

$$\{z(t)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_r \psi_r^T P}{K_r} \frac{1}{\sqrt{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2}} \cos(\omega t - \alpha_r) \quad (2.83)$$

2.4.3 Características das FRF's

Da equação 2.82 pode-se extrair as FRF's complexas nas coordenadas físicas, $\overline{H}_{ij}(\omega)$, onde é verificada a influência da entrada harmônica p_j na coordenada z_i , sendo:

$$\overline{H}_{ij}(\omega) \equiv \overline{H}_{\frac{z_i}{p_j}}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{ir}\psi_{jr}}{K_r} \frac{1}{(1 - r_r^2) + i(2\xi_r r_r)} \quad (2.84)$$

Na equação 2.84, o termo ψ_{ir} é o elemento na linha i no r -ésimo modo de vibração, ou seja, o elemento na linha i e na coluna r da matriz modal $[\Psi]$.

Pode-se observar que as FRF's são independentes da magnitude da força de excitação para sistemas lineares, ou seja, não dependem do nível de excitação aplicado (SOUZA, 2008). Pode-se observar também que para um sistema MDOF, a FRF corresponde ao somatório das n FRF's desacopladas de sistema SDOF (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

A equação 2.84 pode ser plotada no plano complexo (plano Argand), sendo referido como uma plotagem de Nyquist. Neste caso, a frequência de excitação será o parâmetro e a parte real de \overline{H} ($\Re\overline{H}$) é plotada sobre a parte imaginária ($\Im\overline{H}$). Também é comum, e conveniente, a plotagem das partes reais e imaginárias sobre as frequências em Hertz. As partes Real e Imaginária de \overline{H} são dadas pelas equações 2.85 e 2.86 abaixo:

$$\Re(\overline{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{ir}\psi_{jr}}{K_r} \frac{1 - r_r^2}{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2} \quad (2.85)$$

$$\Im(\overline{H}_{ij}) = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{ir}\psi_{jr}}{K_r} \frac{-2\xi_r r_r}{(1 - r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2} \quad (2.86)$$

A teoria sobre as FRF's e suas respectivas plotagens é de extrema importância nas análises experimentais dinâmicas, visto que após a realização dos experimentos e de posse das curvas, os parâmetros modais podem ser obtidos, permitindo um melhor reconhecimento do sistema.

3 Materiais e Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido através dos dados experimentais gentilmente cedidos pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), referentes ao sistema 1, e pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), referente ao sistema 2, aplicando-se o algoritmo de identificação do ERA/OKID.

Este capítulo está dividido em dois principais itens. O item 3.1 tratará dos materiais e equipamentos utilizados para identificação dos sistemas experimentais. O item 3.2 descreve a metodologia utilizada para a aplicação do algoritmo e para ajuste do modelo teórico.

3.1 Materiais e Equipamentos

3.1.1 Sistema Experimental 1

Tendo em vista a validação da metodologia, o algoritmo do ERA/OKID foi aplicado aos dados de saída de uma estrutura com 2 graus de liberdade (GDL), sendo estes dados medidos e gentilmente fornecidos pela equipe da Universidade Federal de Itajubá para aplicação do algoritmo.

Descrição da Estrutura de Teste

O sistema experimental utilizado para a validação da metodologia é um pórtico de dois GDL. A estrutura composta por 04 hastes, 02 massas, 08 presilhas frontais e 16 presilhas traseiras, foi montada numa base fixa. As Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam os principais dados referente a estrutura ensaiada e a Figura 3.1 mostra a visão geral da mesma.

Tabela 3.1 – Dados Dimensionais do Sistema Experimental com 2 GDL.

Parâmetro	Dimensões
Hastes	500 mm x 30 mm x 1 mm
Massas	250 mm x 270 mm x 2 mm
Presilhas Frontais	60 mm x 40 mm x 10 mm
Presilhas Traseiras	60 mm x 20 mm x 20 mm

A excitação da estrutura foi realizada manualmente através de um martelo de impacto. A resposta do sistema foi captada através de um acelerômetro piezoelétrico fixado na extremidade oposta da excitação. Foi escolhido um ponto de excitação e um ponto de medição na saída. A Figura 3.2 apresenta um modelo esquemático da estrutura utilizada.

Tabela 3.2 – Massas e Rigidezes do Sistema.

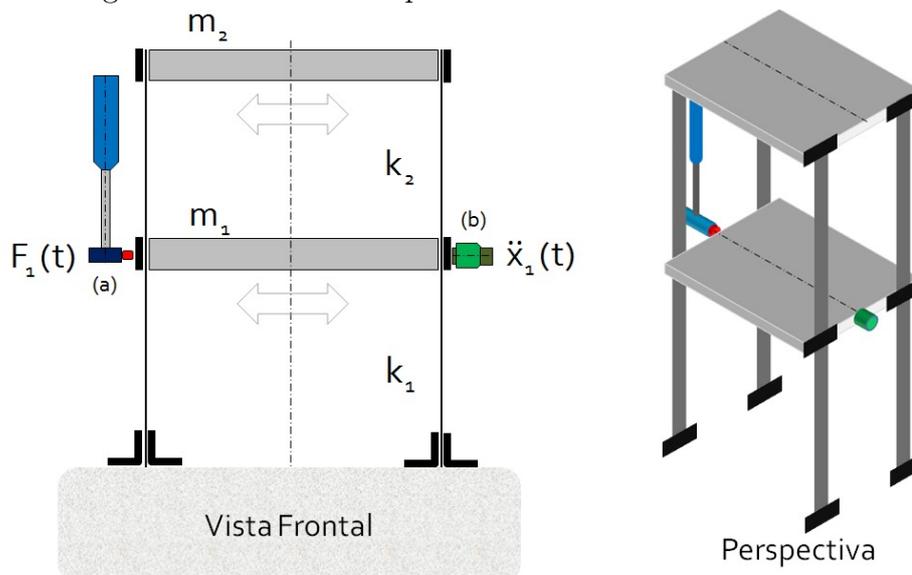
Parâmetro	Valores
Massas	$m_1 = m_2 = 4,1 \text{ kg}$
Rigidezes	$k_1 = k_2 = 12288 \text{ N/m}$

Figura 3.1 – Sistema Experimental - Pórtico com 2 GDL.



Fonte: Universidade Federal de Itajubá

Figura 3.2 – Modelo Esquemático da Estrutura com 2 GDL.



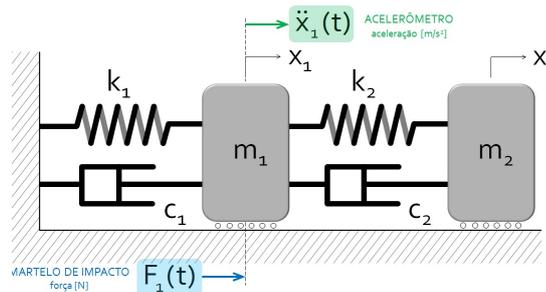
Fonte: Autoria própria.

A Tabela 3.3 apresenta os dados referentes à aquisição de sinais. A Figura 3.3 apresenta o diagrama de massas concentradas correspondente a estrutura utilizada no ensaio.

Tabela 3.3 – Dados dos Equipamentos de Aquisição de Dados.

Equipamento	Modelo	Fabricante
Martelo de Impacto	Type 8206	Brüel & Kjær
Acelerômetro	Type 4384	Brüel & Kjær

Figura 3.3 – Diagrama de Massas Concentradas da Estrutura



Fonte: Autoria própria.

3.1.2 Sistema Experimental 2

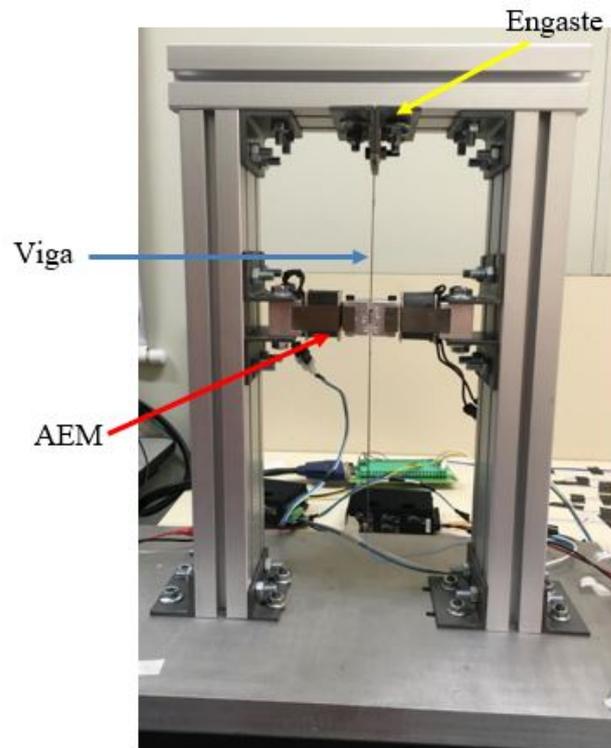
Conforme proposta do trabalho, o algoritmo do ERA/OKID foi aplicado aos dados de saída de uma viga flexível de aço inoxidável excitada com atuador eletromagnético, com o objetivo de identificar os modos de vibração. Os dados foram medidos e gentilmente cedidos pela equipe da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Descrição da Estrutura de Teste

A estrutura ensaiada pela UTFPR foi uma viga flexível de aço inoxidável e com as seguintes dimensões: 300 mm de comprimento, 26,5 mm de largura e 1 mm de espessura. A viga foi fixada em uma de suas extremidades para simular um engaste, deixando a outra extremidade livre, e foi montada numa estrutura que permitiu também a instalação do atuador eletromagnético (AEM), responsável pela excitação da estrutura. A Figura 3.4 mostra a visão geral da estrutura ensaiada.

A bancada experimental consistiu na utilização de um acelerômetro, posicionado na extremidade livre da viga, para medição dos deslocamentos gerados pela excitação causada pelos atuadores eletromagnéticos. Para melhorar a precisão dos valores medidos, antes do envio para a placa de aquisição, foi utilizado um condicionador de sinal. Amplificadores de sinal foram utilizados para converter o sinal de tensão da saída da placa em corrente elétrica para alimentação dos atuadores. Para finalizar, foram utilizados uma fonte e um microcomputador. A força de excitação foi aplicada a 120 mm do engaste, onde o AEM foi posicionado, através da aplicação de uma corrente elétrica impulsiva nos atuadores. A Figura 3.5 apresenta a bancada com os principais componentes e a Tabela 3.4 apresenta as informações técnicas dos equipamentos.

Figura 3.4 – Sistema Experimental - Viga Flexível com Atuador Eletromagnético.

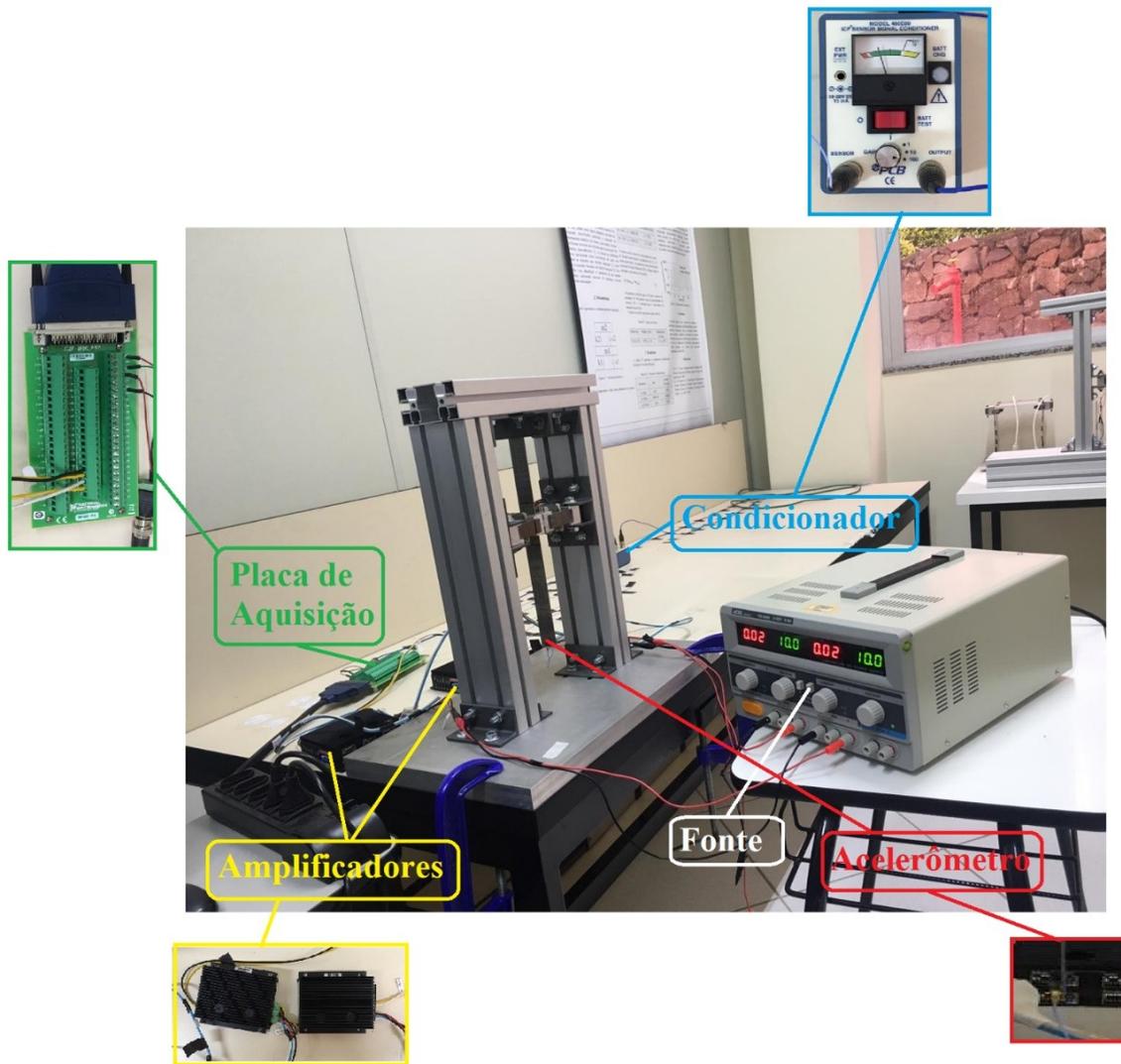


Fonte: SANTOS et al. (2019)

Tabela 3.4 – Dados dos Equipamentos da Bancada.

Equipamento	Modelo	Fabricante
Condicionador de Sinal	480E09	Piezotronics®
Acelerômetro		Piezotronics®
Amplificadores de Sinal	4-Q-DC	Maxon Motor®
Placa de Aquisição	PCI-6221	National Instrument
Fonte de Alimentação		
Microcomputador		

Figura 3.5 – Bancada experimental utilizada.

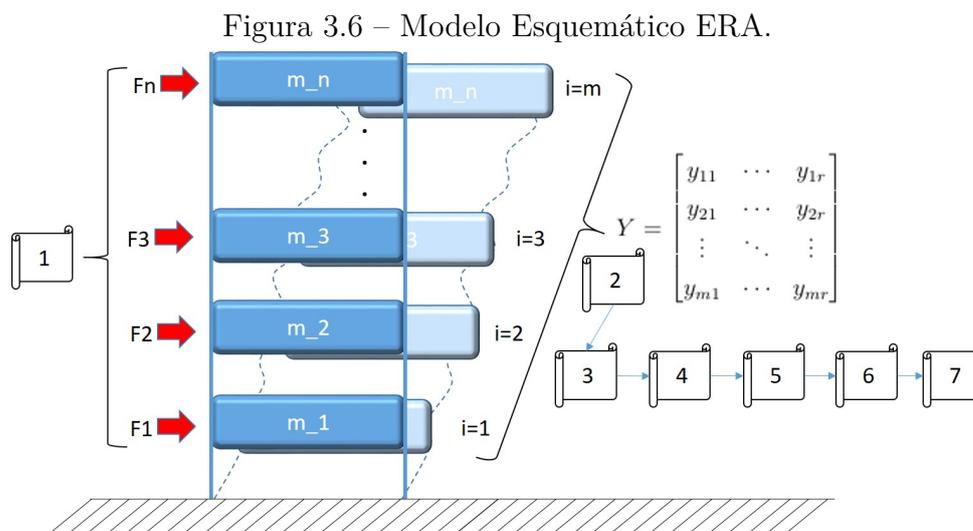


Fonte: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

3.2 Metodologia

3.2.1 ERA

O algoritmo do ERA/OKID foi aplicado a dois sistemas experimentais para identificação do sistema no espaço de estados. Para exemplificar a metodologia, a Figura 3.6 mostra um modelo esquemático da aplicação do algoritmo, sendo detalhado, em seguida, o passo a passo para aplicação do ERA.



Fonte: Autoria Própria

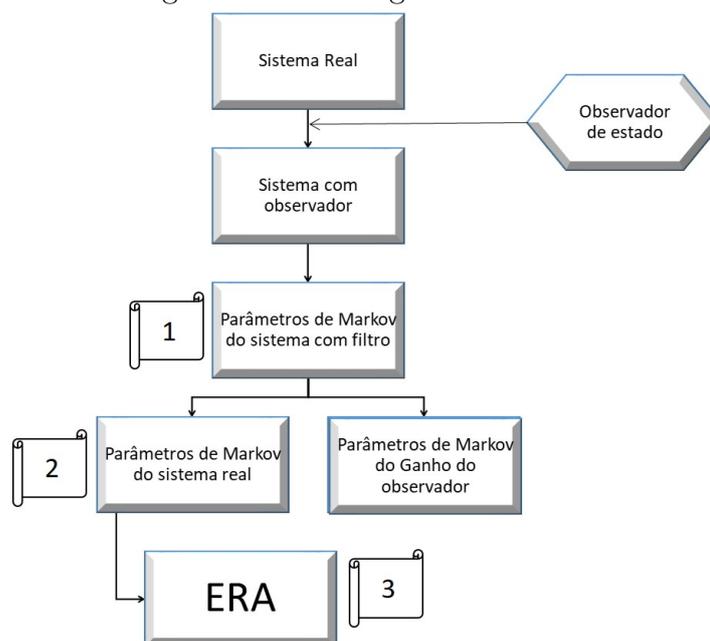
1. O primeiro passo para a aplicação do ERA é a excitação do sistema com sinais impulsivos e o monitoramento das saídas, anotando-se estes valores para o passo seguinte. O ensaio deverá excitar individualmente para entrada e medir as várias saídas para esta excitação, ou seja, o sistema experimental deverá ser do tipo SIMO (do inglês *Single Input Multiple Outputs*);
2. Após a excitação individual das entradas, agrupam-se as saídas nas matrizes de Hankel - $H(0)$ - e Hankel deslocada - $H(1)$ - conforme equações do capítulo anterior. Deve ser estimada a ordem n do sistema;
3. Decomposição da matriz $H(0)$ em valores singulares e construção das matrizes auxiliares E_m e E_r ;
4. Obtenção das matrizes identificadas do sistema - \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} , ou seja, da realização do sistema;
5. Aplicação dos indicadores de confiança para que seja selecionada uma nova ordem para o sistema;

6. Nova identificação do sistema com a nova ordem, selecionada no item anterior, ou redução de ordem das matrizes \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , através da remoção dos modos indesejados;
7. Comparação das respostas impulsivas e as FRF's dos sistemas real e identificado. Caso a comparação não seja satisfatória, reaplicar o ERA.

3.2.2 ERA/OKID

Conforme a teoria do ERA/OKID do capítulo anterior, dependendo do sistema pode ser necessário induzir um amortecimento artificial, ou não físico, para que a identificação seja possível, ou seja, o filtro de Kalman ou filtro do observador de estado. A partir dele, o sistema com observador é identificado e depois calculados os parâmetros de Markov do sistema real e do ganho do observador. O fluxograma do OKID é apresentado abaixo (Figura 3.7), assim como o passo a passo detalhado do mesmo a partir do sistema com o filtro aplicado.

Figura 3.7 – Fluxograma do OKID.



Fonte: Autoria Própria

- Passo 1:
 - Definir o valor de p que determinará os parâmetros de Markov do observador;
 - Montar as matrizes y e V (condições iniciais nulas) e \bar{y} e \bar{V} (condições iniciais não nulas);
 - Calcular \bar{Y} utilizando o método dos mínimos quadrados, obtendo-se os parâmetros de Markov do observador.

- Passo 2:
 - Através dos parâmetros de Markov do sistema com observador, obtidos no passo anterior, devem-se determinar os parâmetros de Markov do sistema real e os parâmetros de Markov do ganho do observador.
- Passo 3:
 - Utilizando os parâmetros de Markov do sistema real, aplica-se o ERA (conforme passo a passo explicado anteriormente) e determina-se a realização do sistema - \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} ;
 - Determinam-se os autovalores e autovetores do sistema identificado, convertendo a realização em coordenadas modais, para que seja possível o cálculo das frequências, amortecimentos e forma dos modos nas posições dos sensores.

3.2.3 Ajuste do Modelo Teórico

O modelo teórico foi obtido usando a teoria da superposição de modos, conforme apresentado na fundamentação teórica. Entretanto, todo modelo teórico deve ser ajustado a partir de dados experimentais. Assim, os dados de rigidez e massa que constam na Tabela 3.2 foram obtidos a partir da geometria e das propriedades mecânicas dos elementos que compõem a bancada e, neste sentido, os dados teóricos serviram de referência para o ajuste do modelo, que neste caso foi realizado através de tentativa e erro.

O primeiro passo foi ajustar as frequências naturais variando-se as rigidezes k_1 e k_2 . Cumprida esta etapa, o objetivo foi ajustar as amplitudes dos picos, o que foi realizado introduzindo-se amortecimento no sistema. É importante dizer que foi assumida a hipótese de amortecimento proporcional (CHOPRA, 1995), onde a matriz de amortecimento resultante é uma combinação linear da matriz de massa e da matriz de rigidez, como a seguir:

$$[C_S] = \gamma_1 \cdot [M] + \gamma_2 \cdot [K] \quad (3.1)$$

Onde γ_1 é o coeficiente que pondera a participação da matriz de massa e γ_2 o que pondera a contribuição da matriz de rigidez.

Os parâmetros γ_1 e γ_2 foram obtidos pelos métodos dos mínimos quadrados. Essa hipótese pode, naturalmente, acarretar uma diferença com o sistema real, mas que, mesmo assim, mostra-se como uma hipótese robusta.

A partir dos amortecimentos ξ identificados, executou-se uma varredura nestes parâmetros até que o ajuste fosse assumido como adequado. Tanto para ajustar as frequências como as amplitudes, a teoria da superposição foi aplicada mais uma vez, até que se

observasse o ajuste por comparação entre o modelo ajustado e o medido. Os resultados para as matrizes do modelo ajustado foram:

$$[M] = \begin{bmatrix} 4,1 & 0,0 \\ 0 & 4,1 \end{bmatrix} \text{kg} \quad (3.2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 21800 & -12900 \\ -12900 & 12900 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad (3.3)$$

$$[C_S] = \begin{bmatrix} 2,7248 & 2,2359 \\ 2,2359 & 4,2673 \end{bmatrix} \text{N.s/m} \quad (3.4)$$

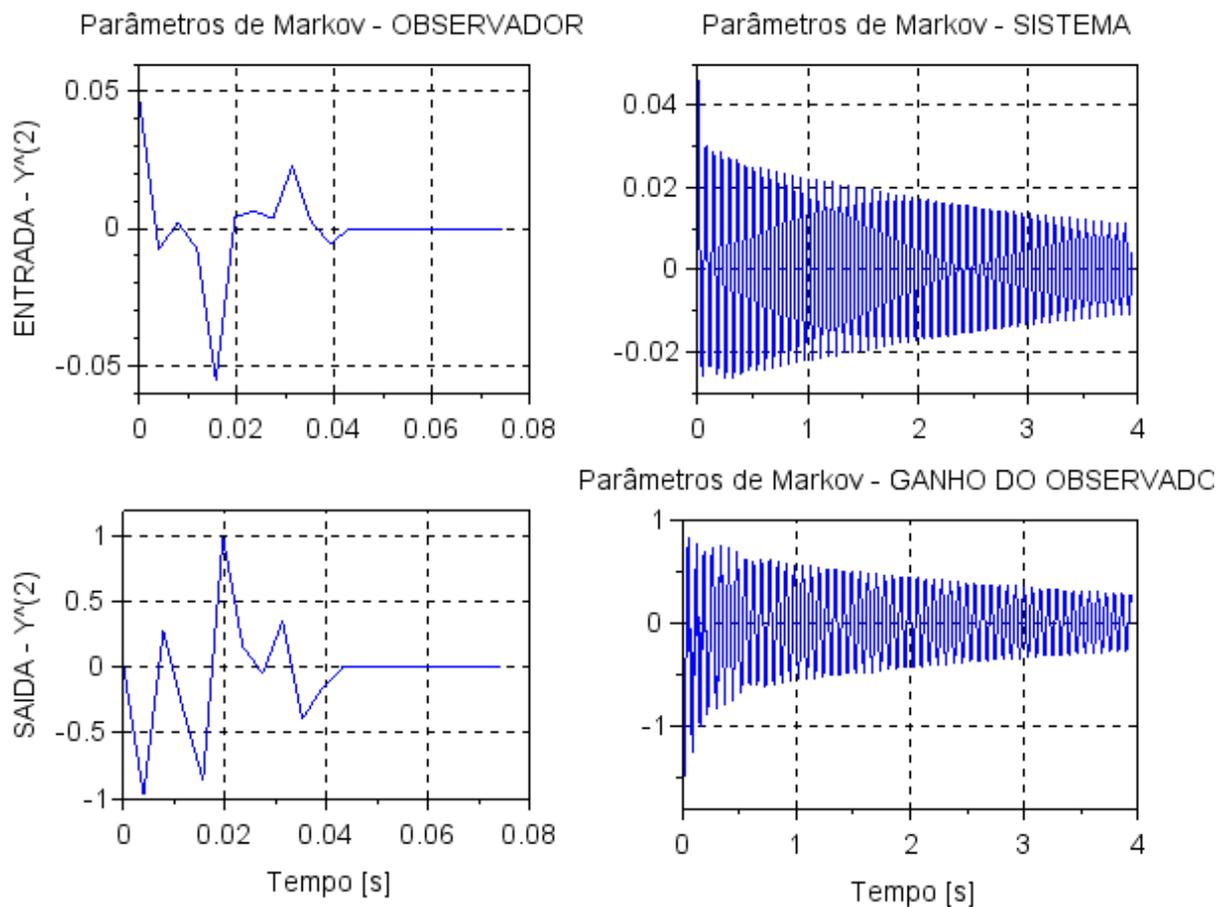
4 Resultados

4.1 Resultados Sistema 1

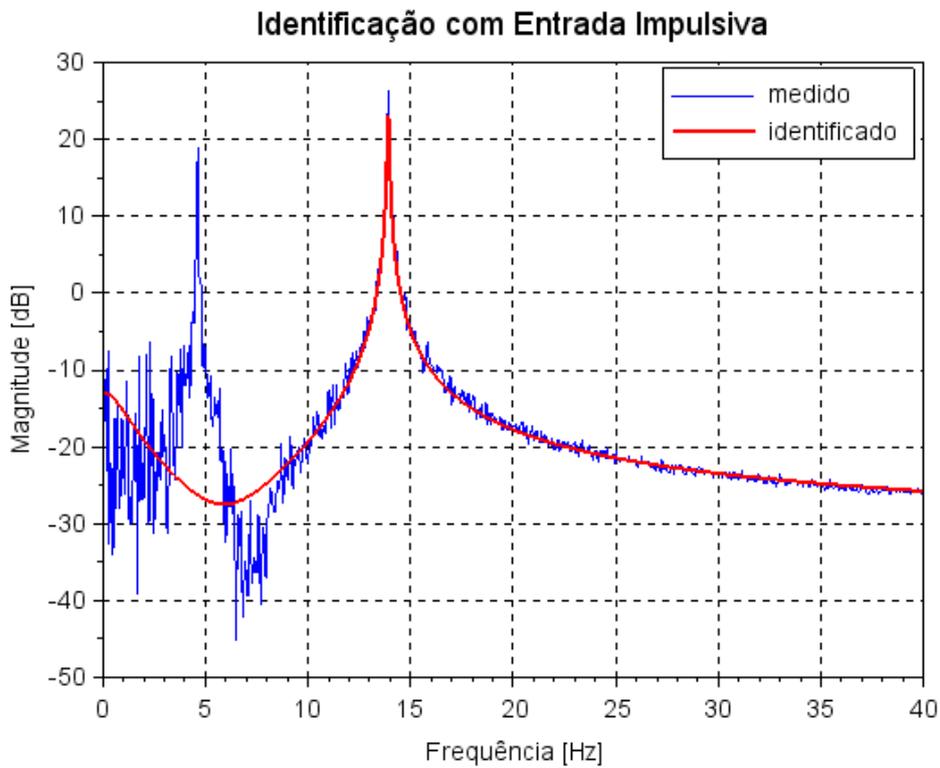
Para a validação da metodologia proposta, foram identificados os parâmetros do sistema 1 de 2 GDL do capítulo anterior para as seguintes ordens estimadas para o sistema: $n = 10, 20, 30$ e 40 .

4.1.1 Ordem Estimada do Sistema - $n = 10$

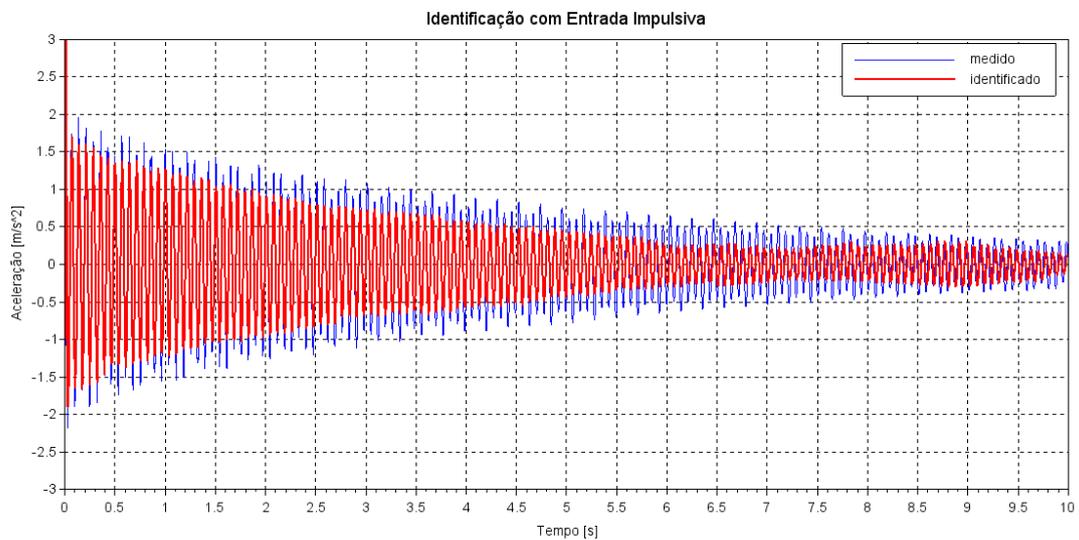
Figura 4.1 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1



Fonte: Autoria Própria

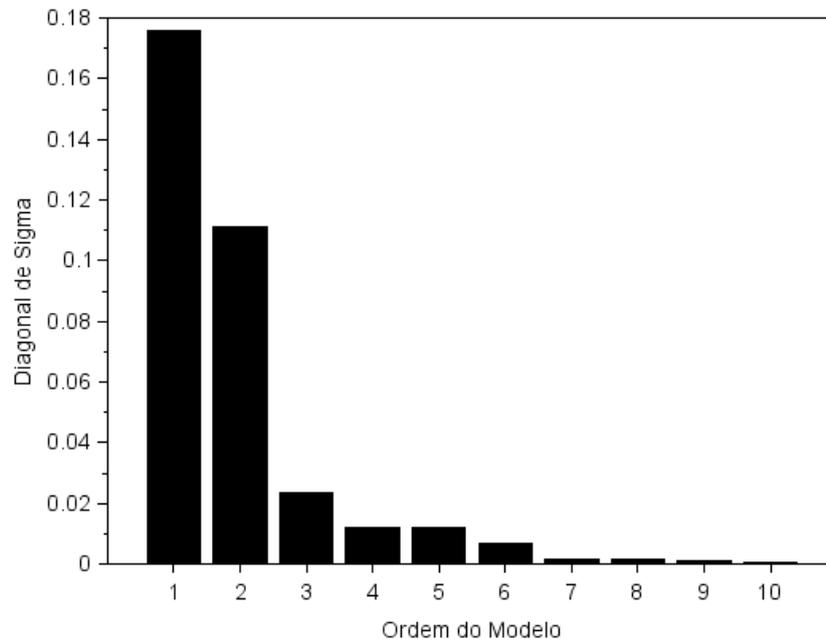
Figura 4.2 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.3 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=10$) - Caso 1

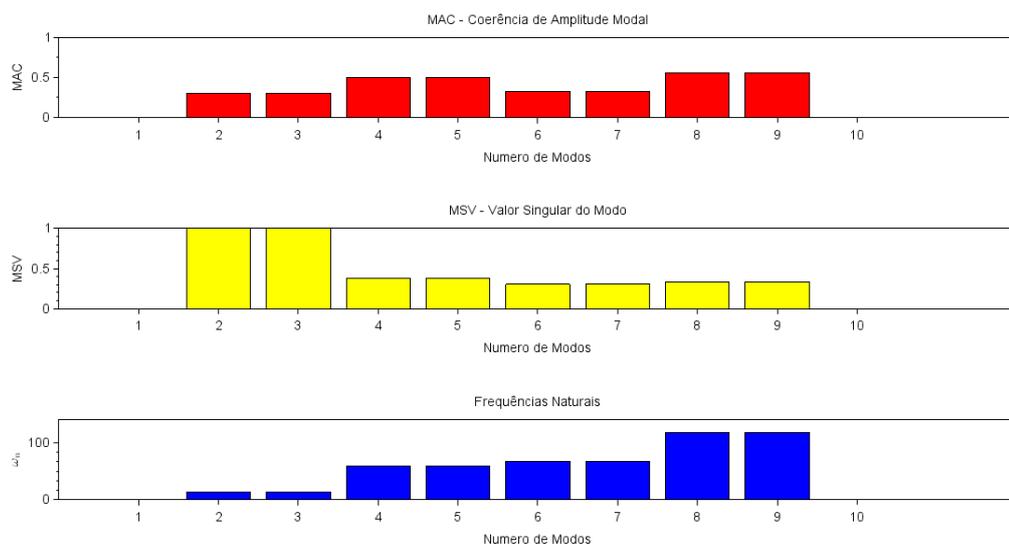
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.4 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=10) - Caso 1



Fonte: Autoria Própria

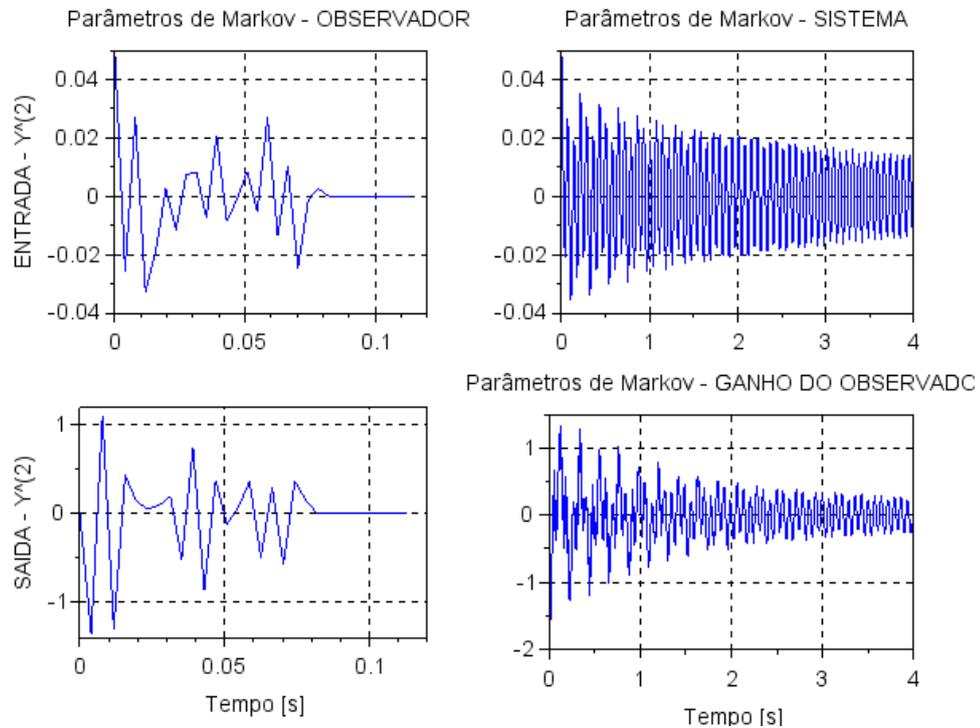
Figura 4.5 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=10) - Caso 1



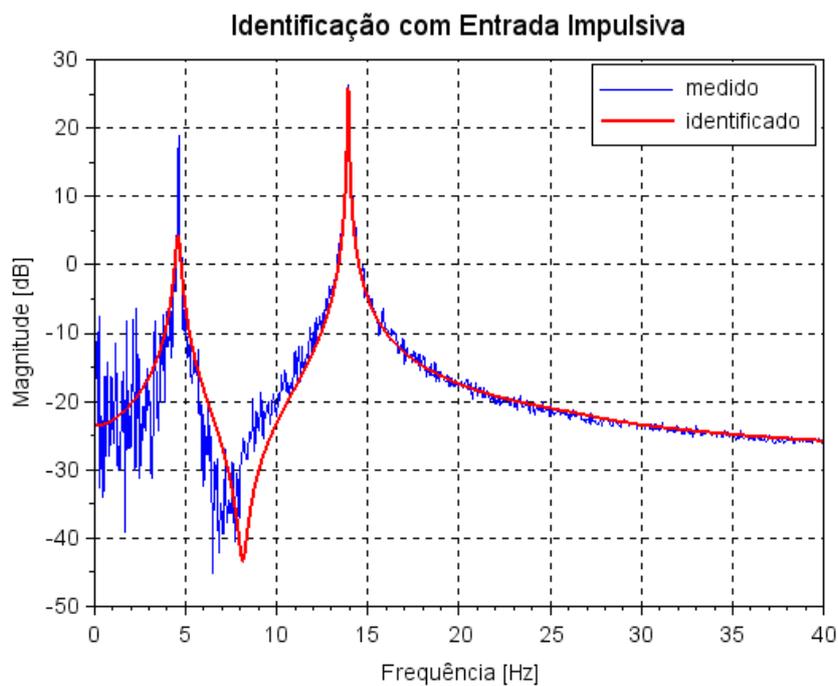
Fonte: Autoria Própria

Tabela 4.1 – Dados Compilados Caso 1.

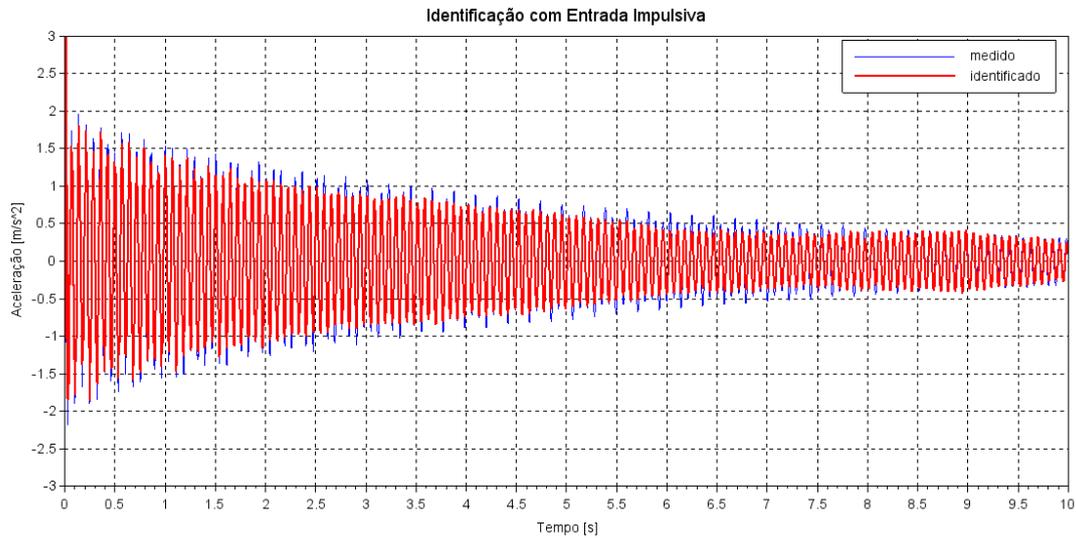
Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.345	0.617	1.18	1.0000
2	0.303	1.000	13.91	0.0028
3	0.303	1.000	13.91	0.0028
4	0.494	0.382	59.65	0.0896
5	0.494	0.382	59.65	0.0896
6	0.324	0.305	67.06	0.0088
7	0.324	0.305	67.06	0.0088
8	0.562	0.337	117.98	0.0641
9	0.562	0.337	117.98	0.0641
10	1.000	0.866	136.16	0.3411

4.1.2 Ordem Estimada do Sistema - $n = 20$ Figura 4.6 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2

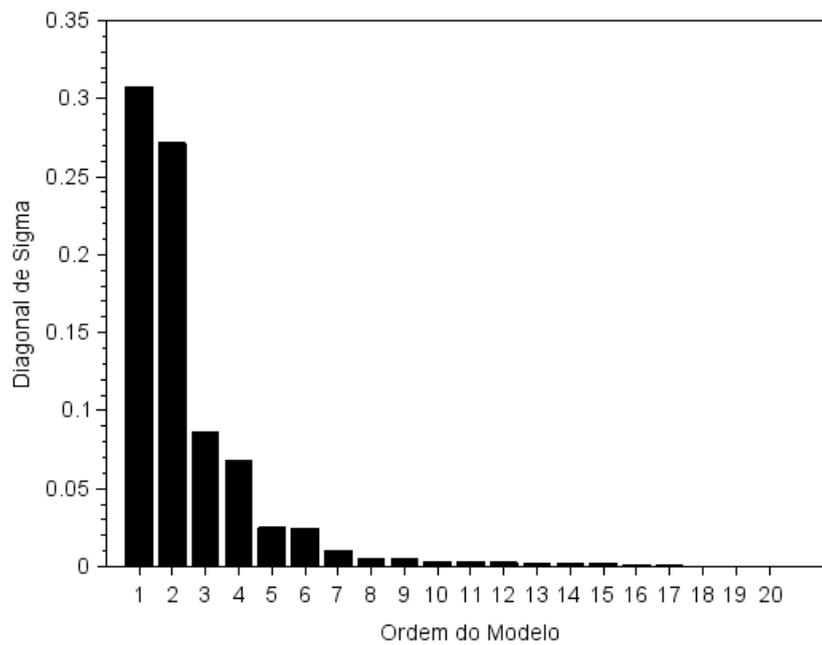
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.7 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2

Fonte: Autoria Própria

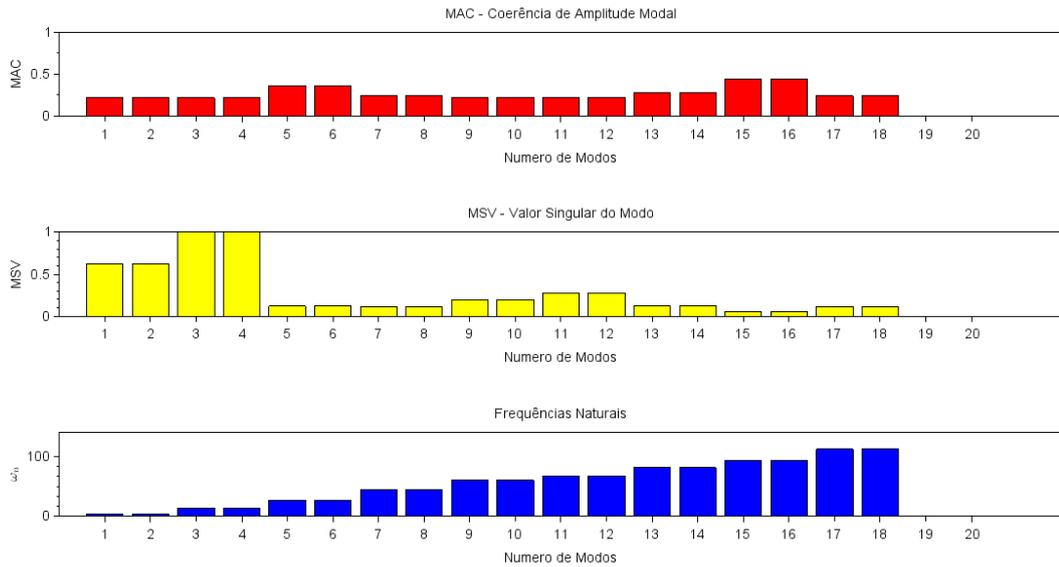
Figura 4.8 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.9 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=20$) - Caso 2

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.10 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=20) - Caso 2



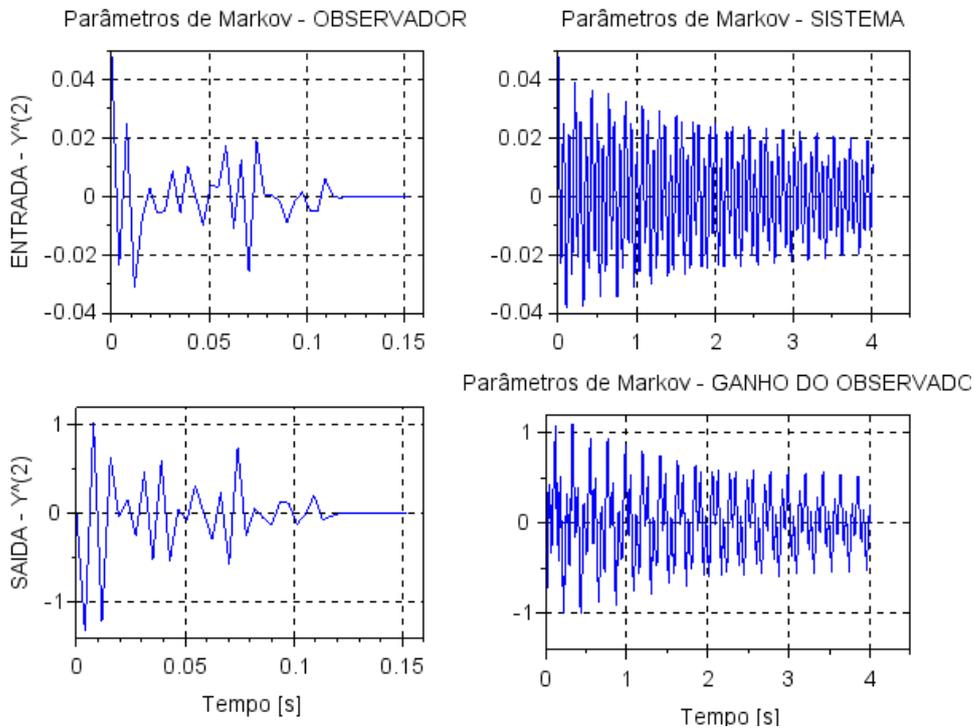
Fonte: Autoria Própria

Tabela 4.2 – Dados Compilados Caso 2.

Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.225	0.622	4.59	0.0291
2	0.225	0.622	4.59	0.0291
3	0.220	1.000	13.91	0.0020
4	0.220	1.000	13.91	0.0020
5	0.364	0.119	26.81	0.1013
6	0.364	0.119	26.81	0.1013
7	0.245	0.109	43.93	0.0112
8	0.245	0.109	43.93	0.0112
9	0.225	0.194	60.50	0.0022
10	0.225	0.194	60.50	0.0022
11	0.226	0.276	67.32	0.0021
12	0.226	0.276	67.32	0.0021
13	0.276	0.130	81.13	0.0129
14	0.276	0.130	81.13	0.0129
15	0.439	0.056	92.75	0.0464
16	0.439	0.056	92.75	0.0464
17	0.243	0.114	112.15	0.0041
18	0.243	0.114	112.15	0.0041
19	0.480	0.411	128.11	0.0414
20	1.000	0.369	139.20	0.3930

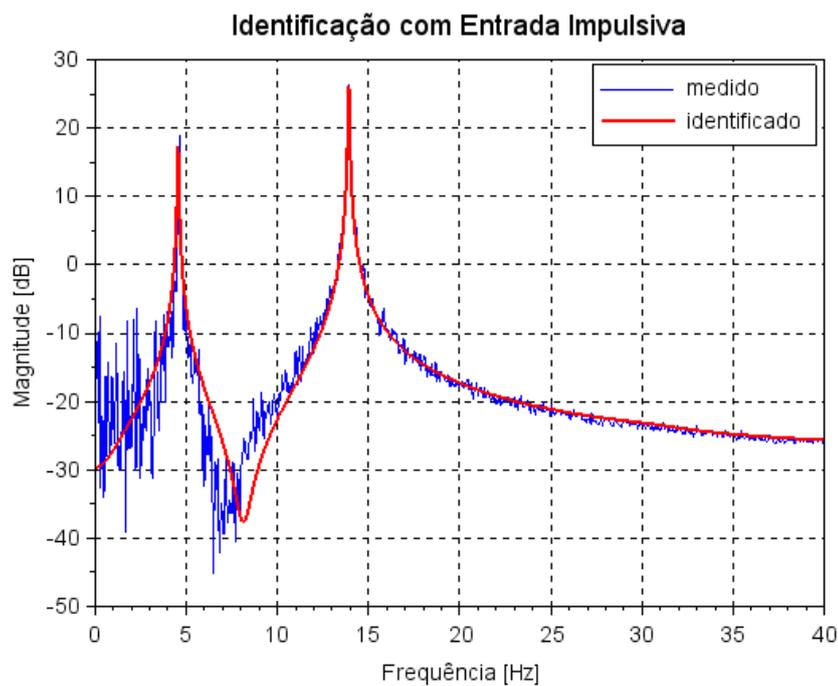
4.1.3 Ordem Estimada do Sistema - $n = 30$

Figura 4.11 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3

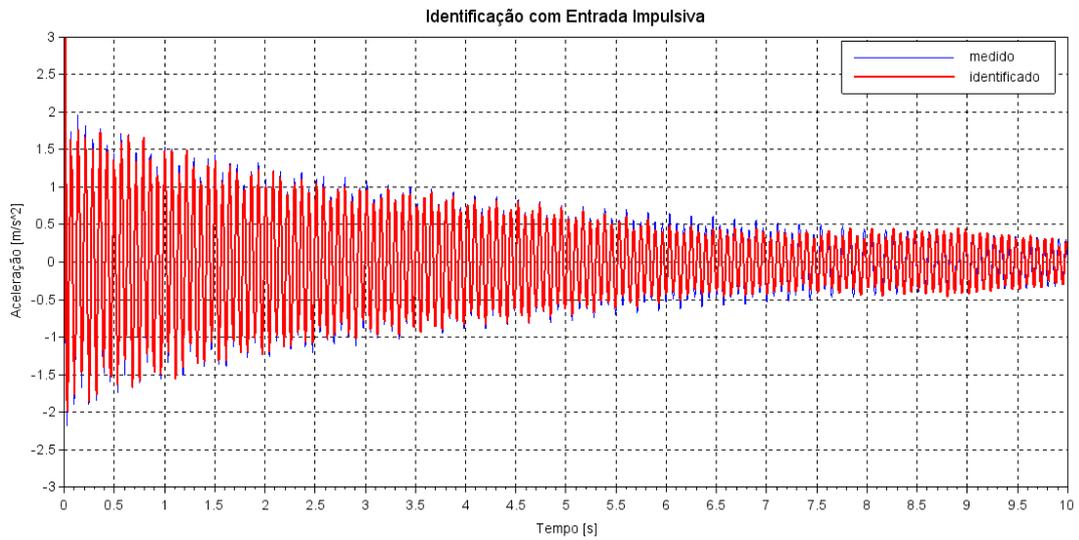


Fonte: Autoria Própria

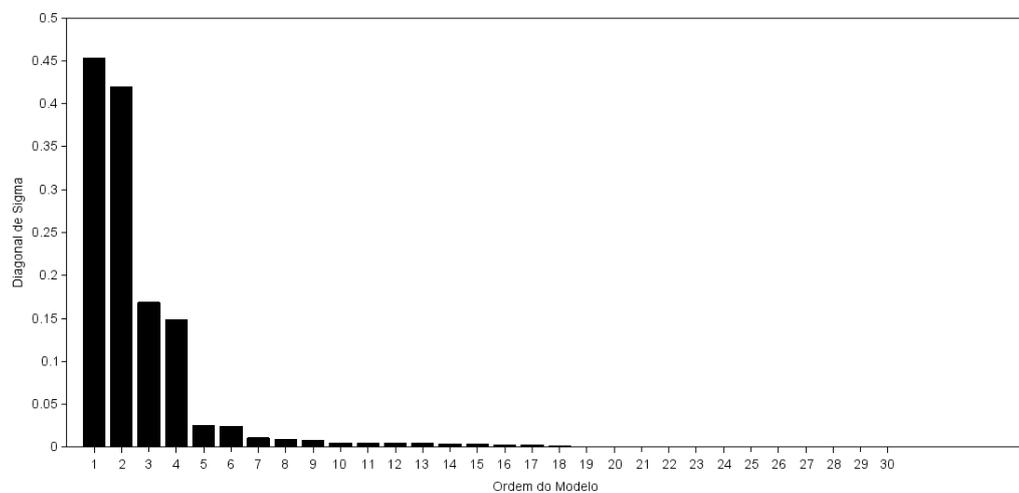
Figura 4.12 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3



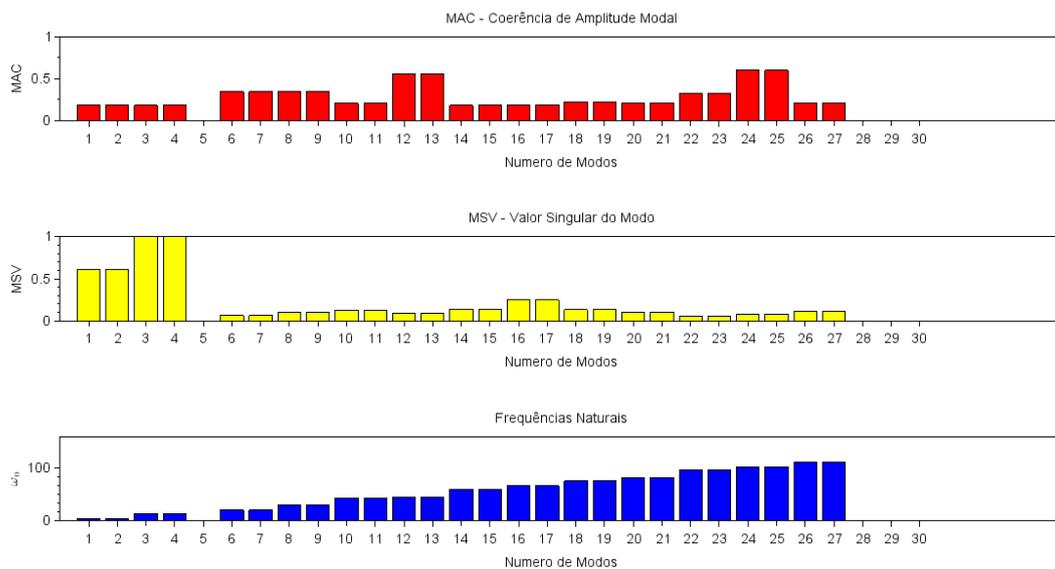
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.13 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.14 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.15 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=30$) - Caso 3

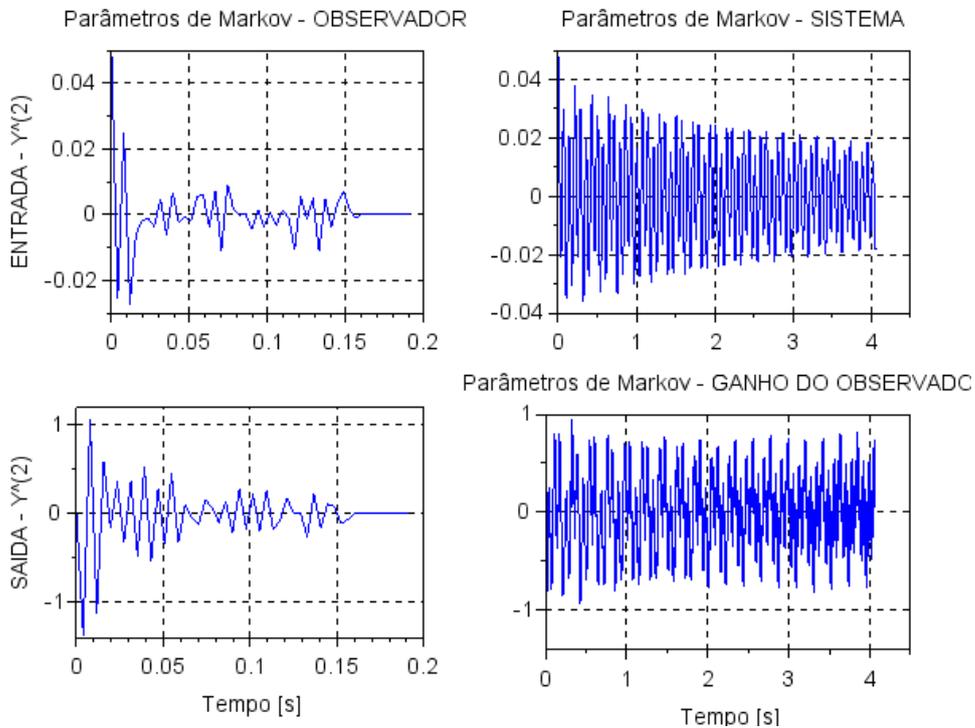
Fonte: Autoria Própria

Tabela 4.3 – Dados Compilados Caso 3.

Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.182	0.613	4.56	0.0065
2	0.182	0.613	4.56	0.0065
3	0.181	1.000	13.91	0.0020
4	0.181	1.000	13.91	0.0020
5	0.782	0.404	19.30	1.0000
6	0.345	0.064	20.71	0.1219
7	0.345	0.064	20.71	0.1219
8	0.352	0.101	30.72	0.0859
9	0.352	0.101	30.72	0.0859
10	0.207	0.124	44.08	0.0091
11	0.207	0.124	44.08	0.0091
12	0.555	0.094	45.50	0.1649
13	0.555	0.094	45.50	0.1649
14	0.182	0.141	60.27	0.0006
15	0.182	0.141	60.27	0.0006
16	0.188	0.248	67.29	0.0018
17	0.188	0.248	67.29	0.0018
18	0.226	0.131	76.14	0.0090
19	0.226	0.131	76.14	0.0090
20	0.215	0.102	82.89	0.0062
21	0.215	0.102	82.89	0.0062
22	0.328	0.057	96.83	0.0231
23	0.328	0.057	96.83	0.0231
24	0.599	0.082	103.59	0.0873
25	0.599	0.082	103.59	0.0873
26	0.205	0.107	112.22	0.0034
27	0.205	0.107	112.22	0.0034
28	0.509	0.525	128.15	0.0477
29	0.580	0.356	128.27	0.0652
30	1.000	0.383	141.19	0.4220

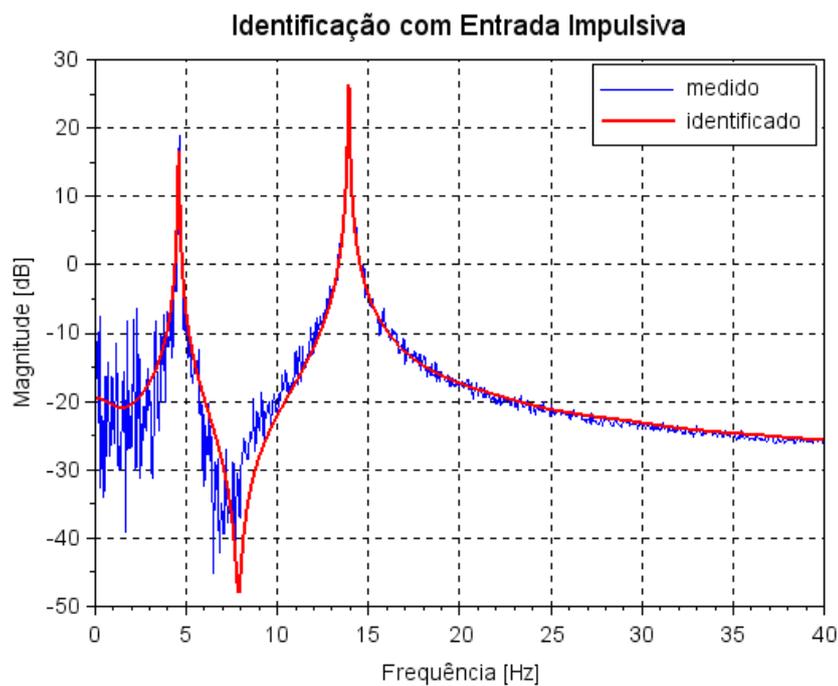
4.1.4 Ordem Estimada do Sistema - $n = 40$

Figura 4.16 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4

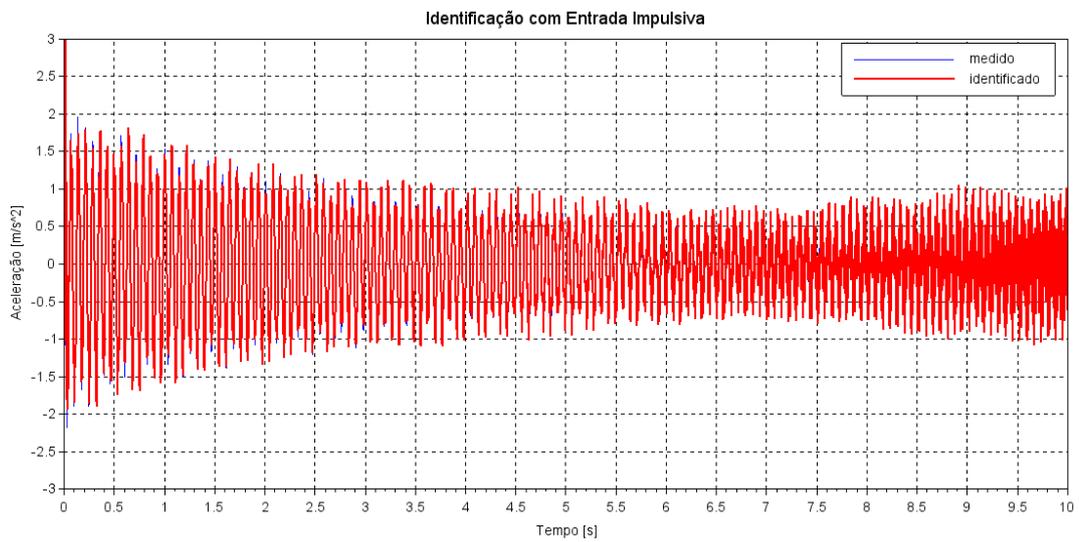


Fonte: Autoria Própria

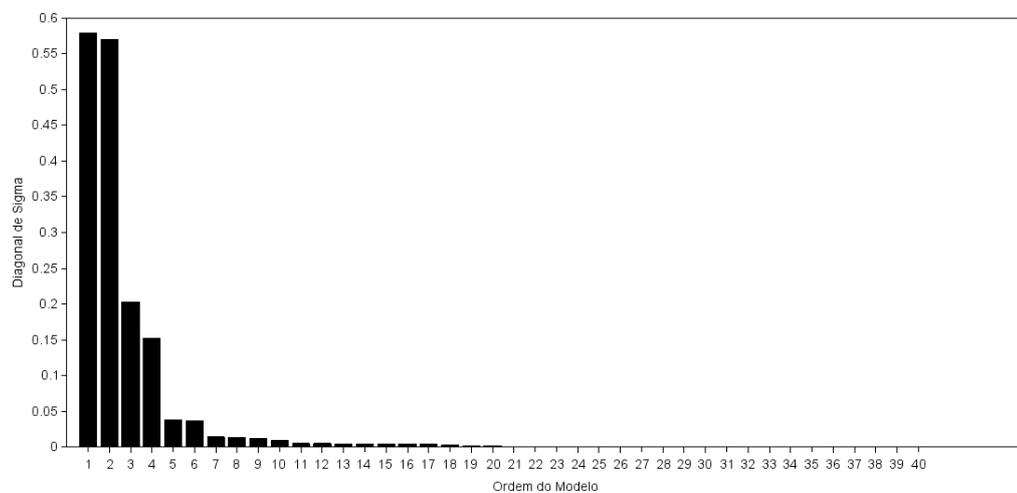
Figura 4.17 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4



Fonte: Autoria Própria

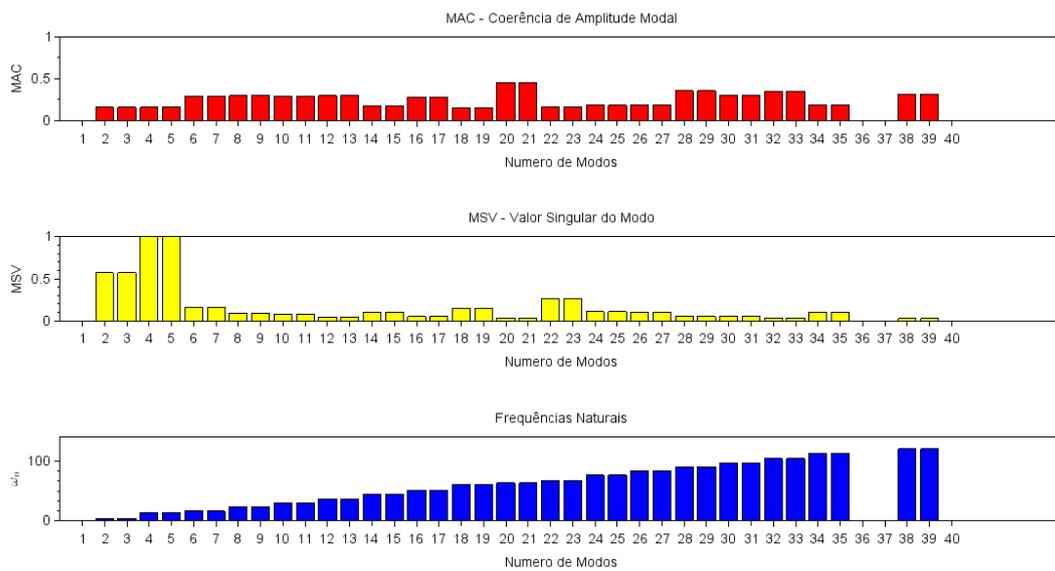
Figura 4.18 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.19 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.20 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema $n=40$) - Caso 4



Fonte: Autoria Própria

Tabela 4.4 – Dados Compilados Caso 4.

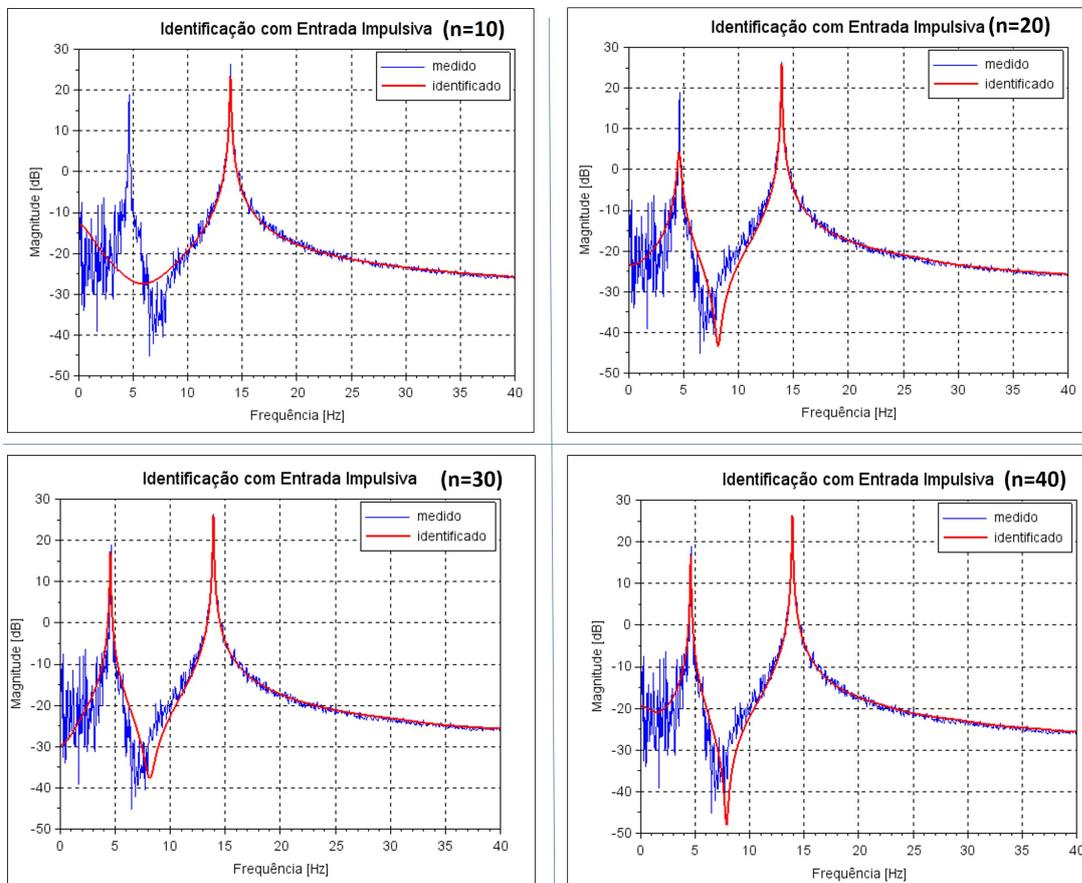
Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.252	0.278	1.21	1.0000
2	0.158	0.571	4.59	0.0057
3	0.158	0.571	4.59	0.0057
4	0.158	1.000	13.91	0.0020
5	0.158	1.000	13.91	0.0020
6	0.291	0.159	16.45	0.1065
7	0.291	0.159	16.45	0.1065
8	0.298	0.092	23.01	0.0801
9	0.298	0.092	23.01	0.0801
10	0.293	0.076	29.93	0.0592
11	0.293	0.076	29.93	0.0592
12	0.300	0.047	36.82	0.0507
13	0.300	0.047	36.82	0.0507
14	0.171	0.104	44.06	0.0045
15	0.171	0.104	44.06	0.0045
16	0.278	0.053	51.51	0.0305
17	0.278	0.053	51.51	0.0305
18	0.153	0.151	60.31	0.0006
19	0.153	0.151	60.31	0.0006
20	0.458	0.037	63.16	0.0760
21	0.458	0.037	63.16	0.0760
22	0.166	0.265	67.30	0.0018
23	0.166	0.265	67.30	0.0018
24	0.183	0.108	76.13	0.0046
25	0.183	0.108	76.13	0.0046
26	0.184	0.100	82.79	0.0043
27	0.184	0.100	82.79	0.0043
28	0.356	0.053	90.09	0.0305
29	0.356	0.053	90.09	0.0305
30	0.304	0.060	96.98	0.0200
31	0.304	0.060	96.98	0.0200
32	0.352	0.035	103.70	0.0259
33	0.352	0.035	103.70	0.0259
34	0.185	0.105	112.22	0.0033
35	0.185	0.105	112.22	0.0033
36	1.000	0.387	115.57	0.2356
37	0.859	0.270	115.57	0.2356
38	0.316	0.026	119.91	0.0176
39	0.316	0.026	119.91	0.0176
40	0.480	0.399	128.11	0.0416

4.1.5 Conclusões Parciais

Comparação Entre o Sistema Medido e Identificado

Analisando as figuras comparativas de FRF's medidas e identificadas do sistema para as quatro ordens estimadas ($n = 10, 20, 30$ e 40), pode-se observar que a identificação com o parâmetro $n = 10$ identifica somente um dos modos de vibração medidos. Assim que a ordem estimada aumenta, e isso pode ser observado nos valores de $n = 20$ e $n = 30$, os dois modos são identificados com boa superposição dos valores das frequências naturais. Ainda pode ser observado que apesar de identificar o valor da primeira frequência natural com precisão, a ordem $n = 20$ apresenta uma amplitude menor que o valor medido, fato superado quando a ordem estimada é igual a 30 ou 40. Observa-se também que o algoritmo permite identificar o fenômeno da antirressonância quando a ordem estimada é adequada ($n = 20, 30$ e 40), mesmo com uma certa defasagem entre o sistema medido e identificado. Para facilitar a observação destas conclusões, a Figura 4.21 replica as comparações entre as FRF's medidas e identificadas para as quatro ordens estudadas.

Figura 4.21 – Comparações entre as FRF's Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.

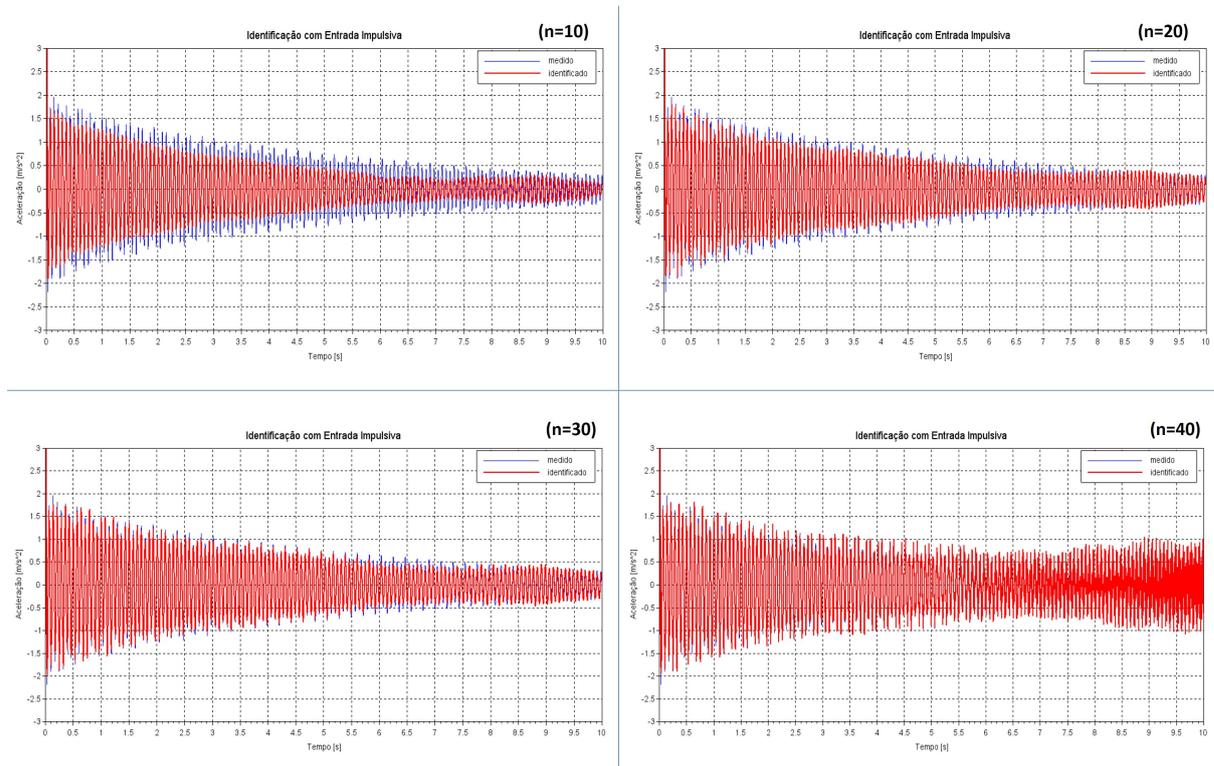


Fonte: Autoria Própria

Comparação entre as Saídas Medidas e Identificadas

Os gráficos de aceleração, que apresentam as comparações entre as saídas medidas e identificadas para cada ordem estimada ($n = 10, 20, 30$ e 40), apresentam boa sobreposição para o valor de $n = 30$. Observa-se que para o valor de $n = 10$ os valores medidos e identificados apresentam uma distância considerável e que para $n = 20$ os valores identificados se aproximam dos medidos, porém sem a sobreposição atingida com $n = 30$. Quando a ordem escolhida é de $n = 40$, a análise do gráfico mostra que além dos valores identificados serem pouco maiores que os medidos nos primeiros instantes, a partir do instante $t = 7$ a identificação mostra uma divergência acentuada, provavelmente devido a maior quantidade de ruídos computacionais impostos ao algoritmo devido a ordem elevada. As observações mostram que a estimativa do número de ordem 30 é a escolha mais adequada dos quatro valores testados no algoritmo. Para facilitar a visualização destas conclusões, a Figura 4.22 replica as comparações entre as saídas medidas e identificadas para as quatro ordens estudadas.

Figura 4.22 – Comparações entre as Saídas Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.

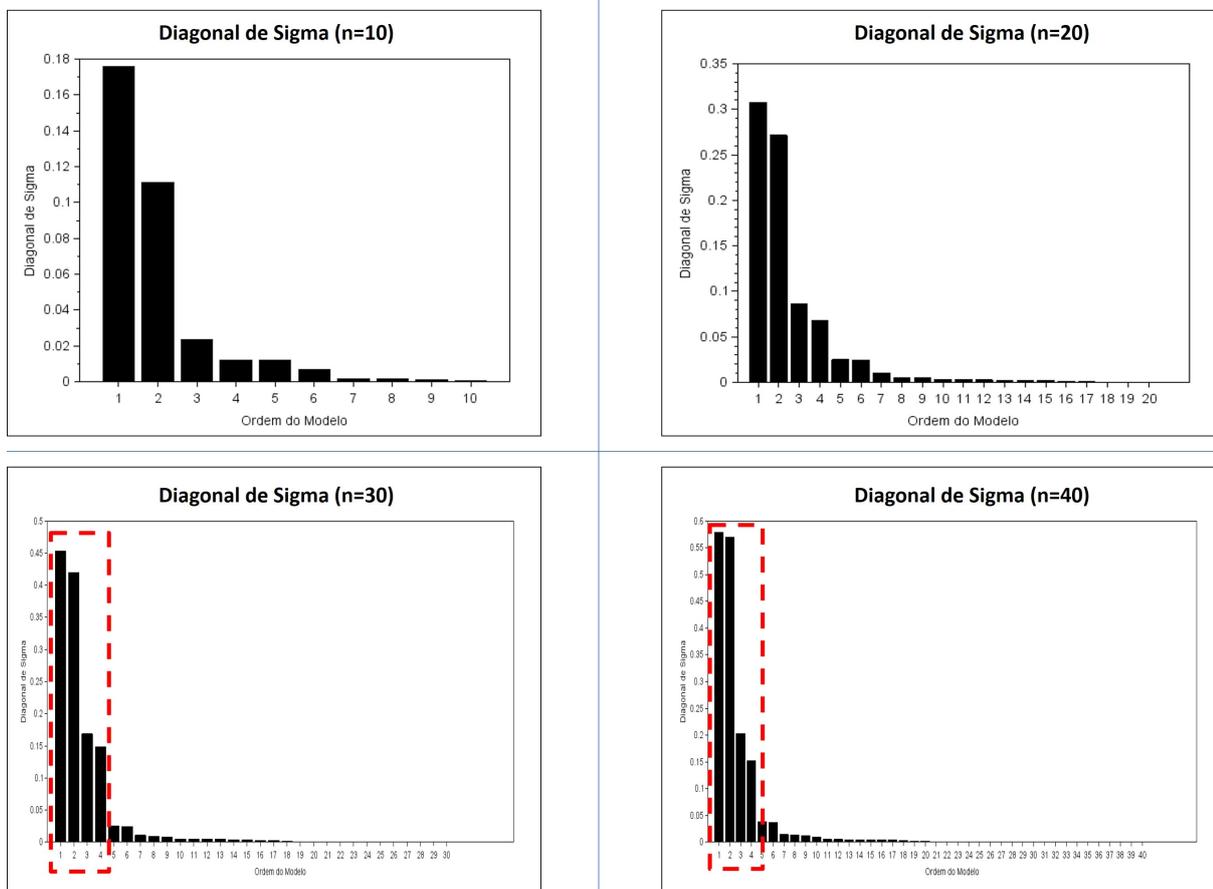


Fonte: Autoria Própria

Análise Diagonal de Sigma

O objetivo principal dos gráficos de barras com os valores da diagonal de sigma é avaliar a ordem do modelo, devendo mostrar de forma destacada a quantidade de GDL do sistema físico multiplicado por dois. Para o sistema físico analisado, com 2 GDL, os gráficos da diagonal de sigma deveriam apresentar 4 barras destacadas. A análise destes gráficos para as ordens estimadas ($n = 10, 20, 30$ e 40) mostra que somente as ordens 30 e 40 apresentam este número de colunas destacadas das demais, mostrando mais uma vez que a realização mínima para este sistema se aproxima do valor de 30. Para $n = 10$ pode ser observado que somente duas barras do gráfico se destacam das demais, justificando, inclusive, a falta da identificação de uma das frequências naturais, conforme supracitado. Para $n = 20$ verifica-se uma tendência para destaque de duas barras adicionais às primeiras, porém ainda com pouca relevância em relação a estas, podendo justificar a diferença na amplitude identificada em relação à medida de um dos modos para esta ordem estimada. Para facilitar a visualização destas conclusões, a Figura 4.23 compara os gráficos referentes às diagonais de sigma para as quatro ordens estudadas.

Figura 4.23 – Comparações entre os Gráficos de Diagonal de Sigma - ordens 10, 20, 30 e 40.

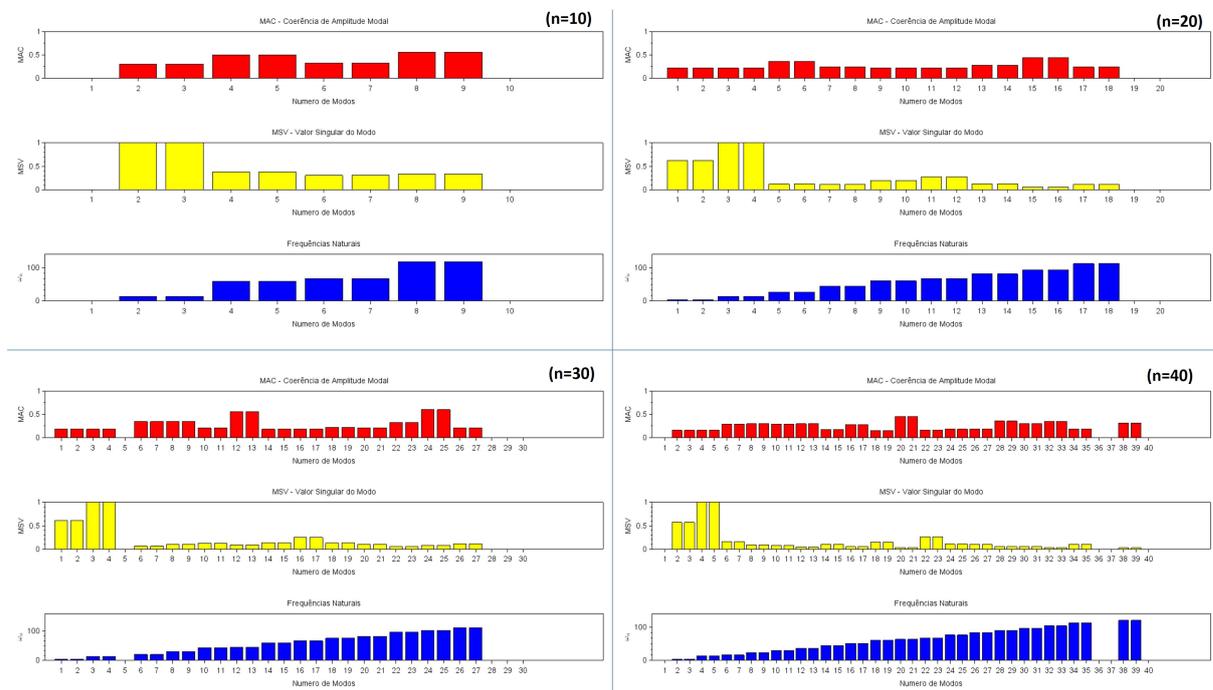


Fonte: Autoria Própria

Análise dos Indicadores de Confiança

A utilização do MSV normalizado pelo valor máximo permite uma rápida visualização dos modos dominantes do sistema, sendo que os valores maiores de MSV indicam estes modos. Após a análise anterior, dos gráficos da diagonal de sigma, que indicou que o sistema apresenta 2 GDL, a análise dos gráficos de MSV para as ordens estimadas ($n = 20, 30$ e 40), permite a obtenção das frequências naturais do sistema através da visualização dos pares de barras destacadas. Para um sistema com 2 GDL, estes gráficos apresentam 2 pares de barras com as frequências naturais do sistema. Uma vez extraídos os modos dominantes do sistema (índices 3 e 4; 1 e 2 para $n = 20$ e 30 , por exemplo), pode-se utilizar os dados das Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 para a obtenção das frequências naturais do sistema para estes modos. Para $n = 10$, mostrando coerência com o gráfico da diagonal de sigma, somente 1 par de MSV's aparece destacado, indicando novamente que o sistema teria somente um modo dominante. Para facilitar a visualização destas conclusões, a Figura 4.24 compara os gráficos referentes aos indicadores de confiança para as quatro ordens estudadas e os modos dominantes de cada ordem estimada foram destacados em negrito nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

Figura 4.24 – Comparações entre os Indicadores de Confiança - ordens 10, 20, 30 e 40.

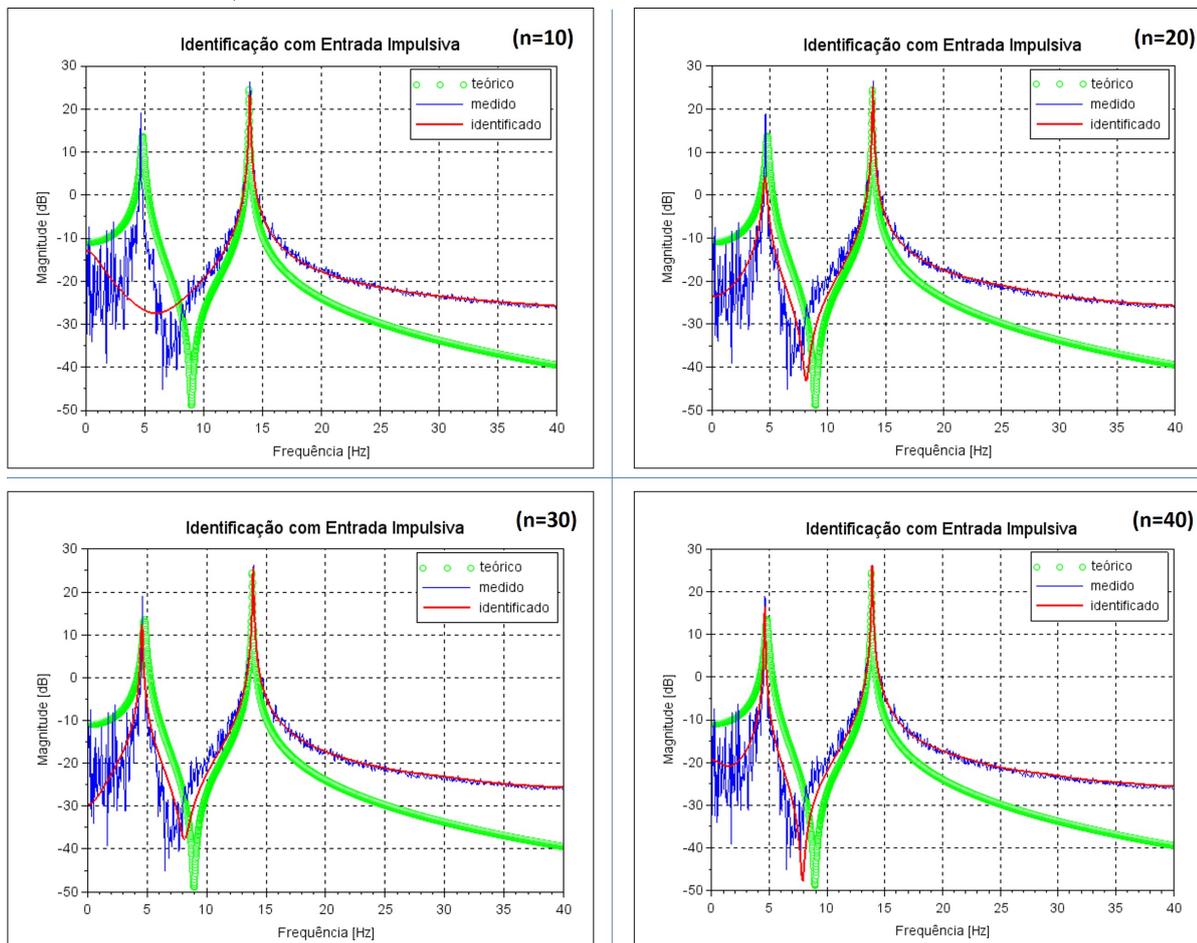


Fonte: Autoria Própria

Comparação das FRF's Teórica, Medida e Identificada

A Figura 4.25 considera, além das FRF's medidas e identificada, a FRF teórica obtida com a abordagem da superposição de modos discutidas na fundamentação.

Figura 4.25 – Comparações entre as FRF's Teóricas, Medidas e Identificadas - ordens 10, 20, 30 e 40.



Fonte: Autoria Própria

Constatou-se que ocorreu razoável concordância com a FRF teórica. As diferenças constatadas residem no fato de que na formulação teórica todos os parâmetros de propriedades mecânicas são determinísticos e que as condições de contorno (como por exemplo, o engastamento) são perfeitas. Como no ambiente experimental, estas condições não são plenamente garantidas, é natural que alguma carga de incerteza acometa os resultados, que ainda sim, se revelaram adequados.

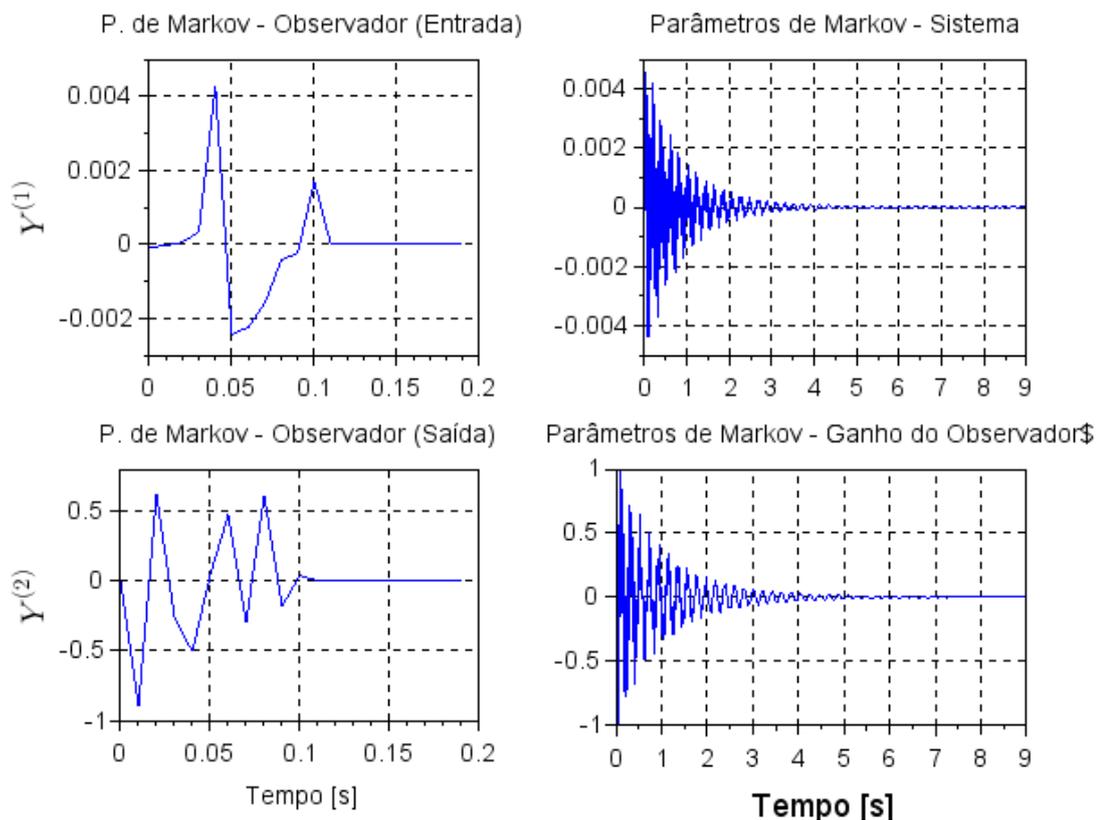
4.2 Resultados Sistema 2

Para o sistema 2, referente à viga flexível com atuador eletromagnético, o algoritmo do ERA/OKID foi aplicado para as ordens estimadas $n = 10, 30$ e 50 , retornando os gráficos dos parâmetros de Markov, da comparação das saídas medidas e identificadas, das FRF's medidas e identificadas, da diagonal de sigma e dos indicadores de confiança MAC e MSV. Para este sistema foi introduzido o gráfico de função de coerência juntamente com o gráfico de comparação das FRF's medidas e identificadas, facilitando a identificação de possíveis ruídos em faixas de frequência que possam ter influenciado nos resultados.

4.2.1 Ordem Estimada do Sistema - $n = 10$

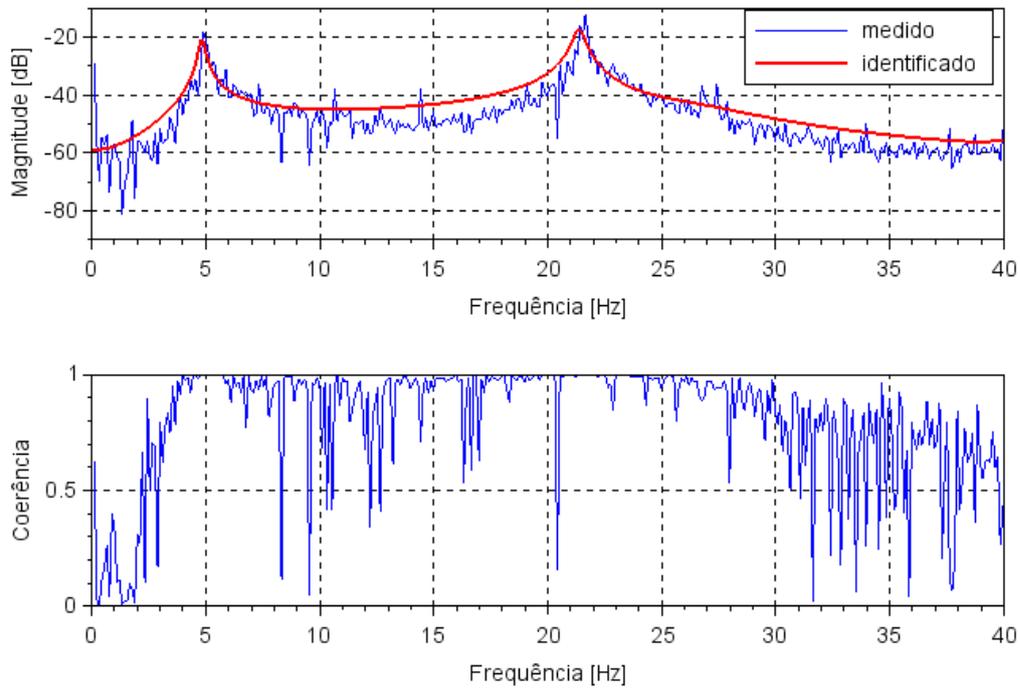
As Figuras 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30 representam os gráficos para a ordem estimada $n = 10$.

Figura 4.26 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=10$)

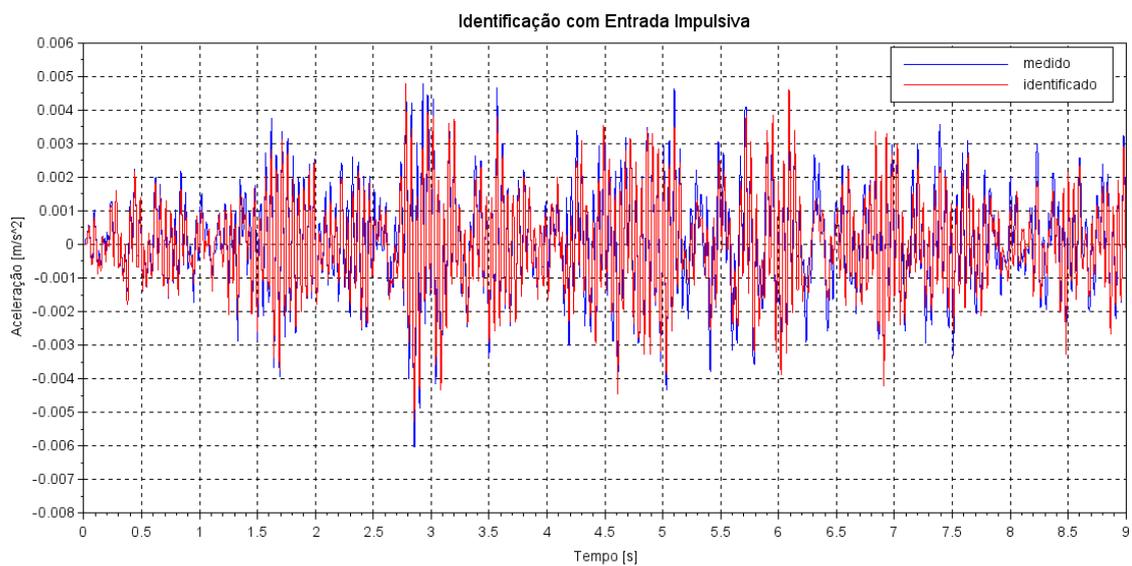


Fonte: Autoria Própria

A Tabela 4.5 apresenta de maneira consolidada as seguintes informações sobre a ordem estimada de $n = 10$: MAC, MSV, frequência natural e amortecimento, sendo estes dados apresentados para cada modo.

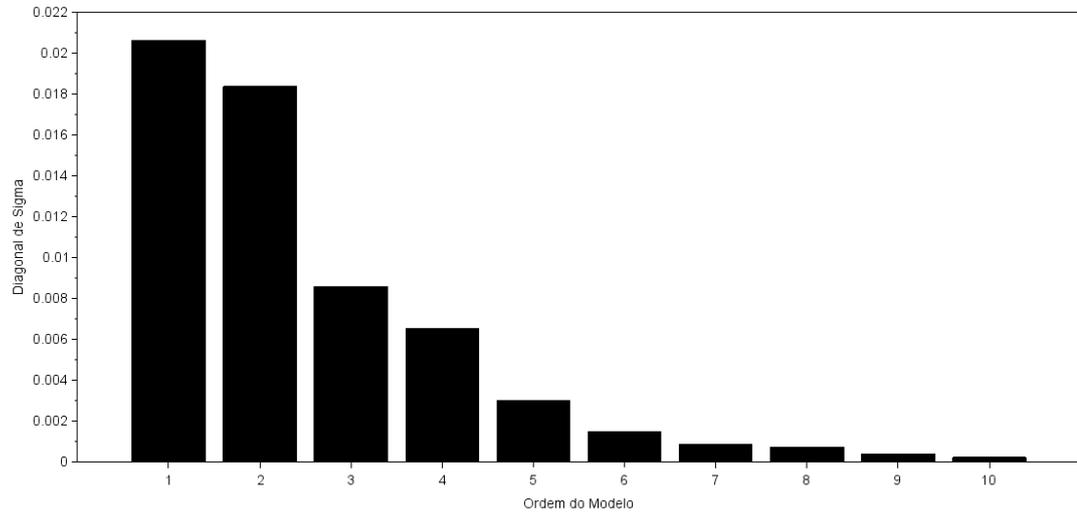
Figura 4.27 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=10$)

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.28 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=10$)

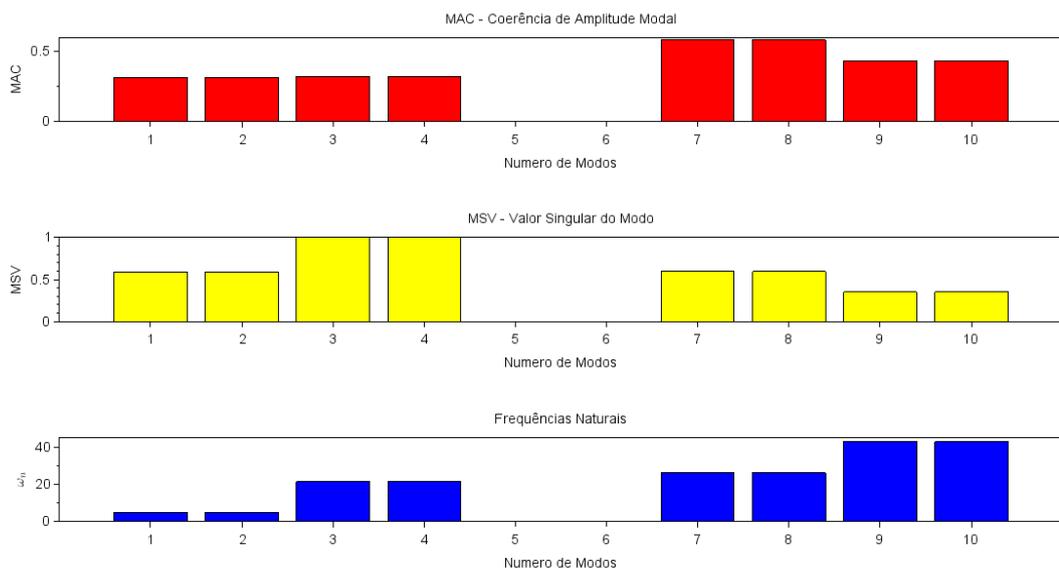
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.29 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=10)



Fonte: Autoria Própria

Figura 4.30 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=10)



Fonte: Autoria Própria

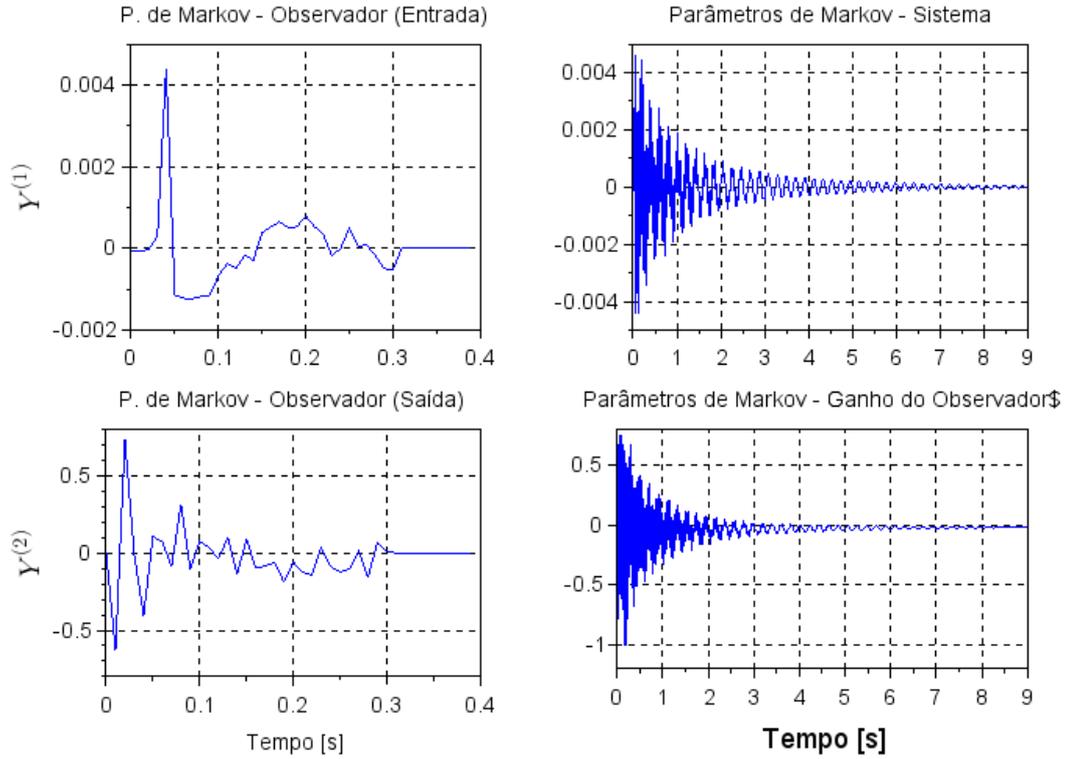
Tabela 4.5 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=10)

Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.312	0.026	4.83	0.0236
2	0.312	0.026	4.83	0.0236
3	0.323	0.045	21.37	0.0108
4	0.323	0.045	21.37	0.0108
5	1.000	0.105	25.91	0.8268
6	0.966	0.090	25.91	0.8268
7	0.584	0.027	26.20	0.1248
8	0.584	0.027	26.20	0.1248
9	0.432	0.016	42.87	0.0321
10	0.432	0.016	42.87	0.0321

4.2.2 Ordem Estimada do Sistema - $n = 30$

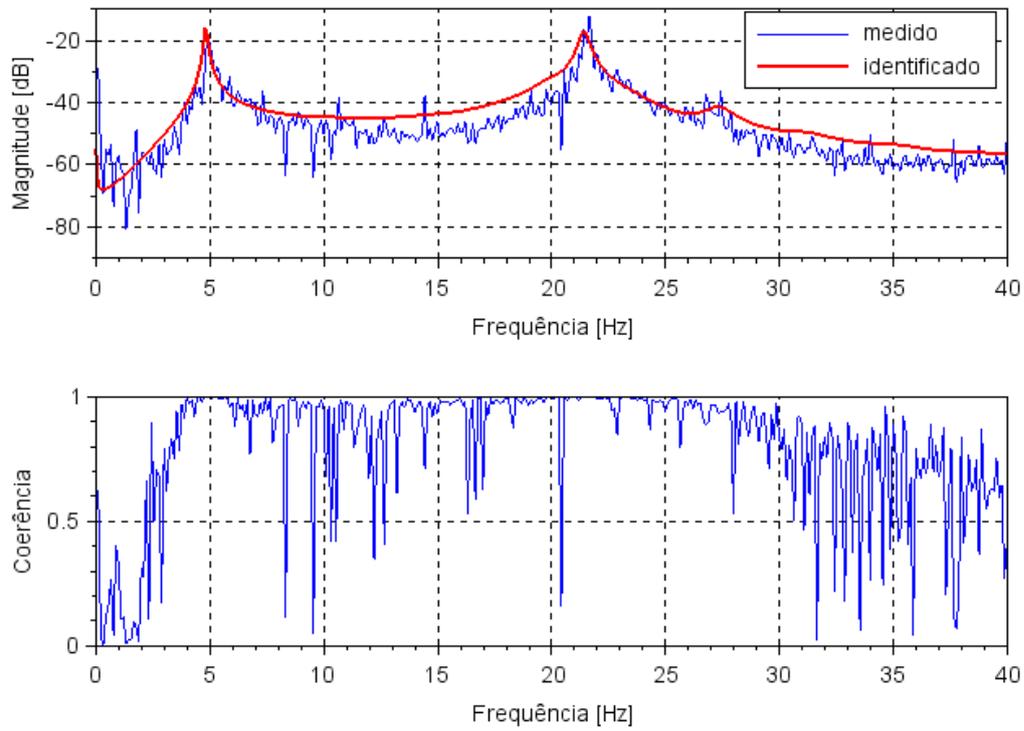
As Figuras 4.31, 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35 representam os gráficos para a ordem estimada $n = 30$.

Figura 4.31 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=30$)

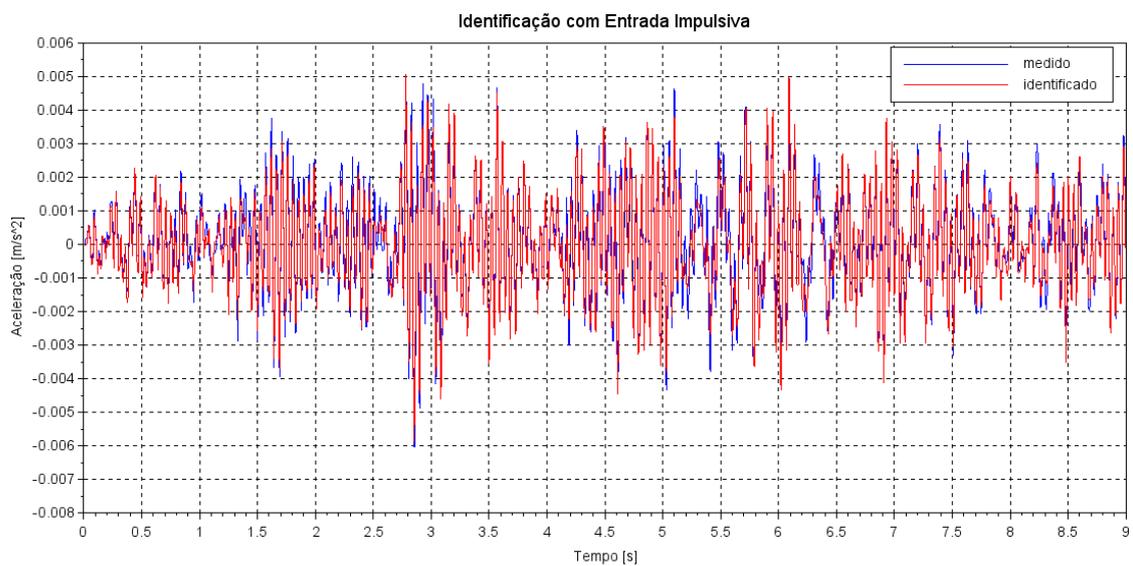


Fonte: Autoria Própria

A Tabela 4.6 apresenta de maneira consolidada as seguintes informações sobre a ordem estimada de $n = 50$: MAC, MSV, frequência natural e amortecimento, sendo estes dados apresentados para cada modo.

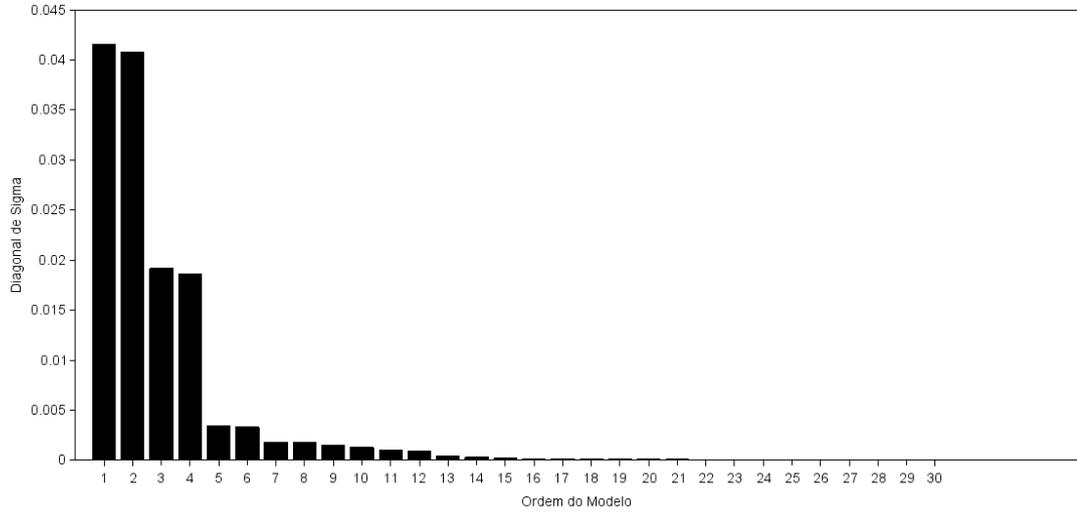
Figura 4.32 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=30$)

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.33 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=30$)

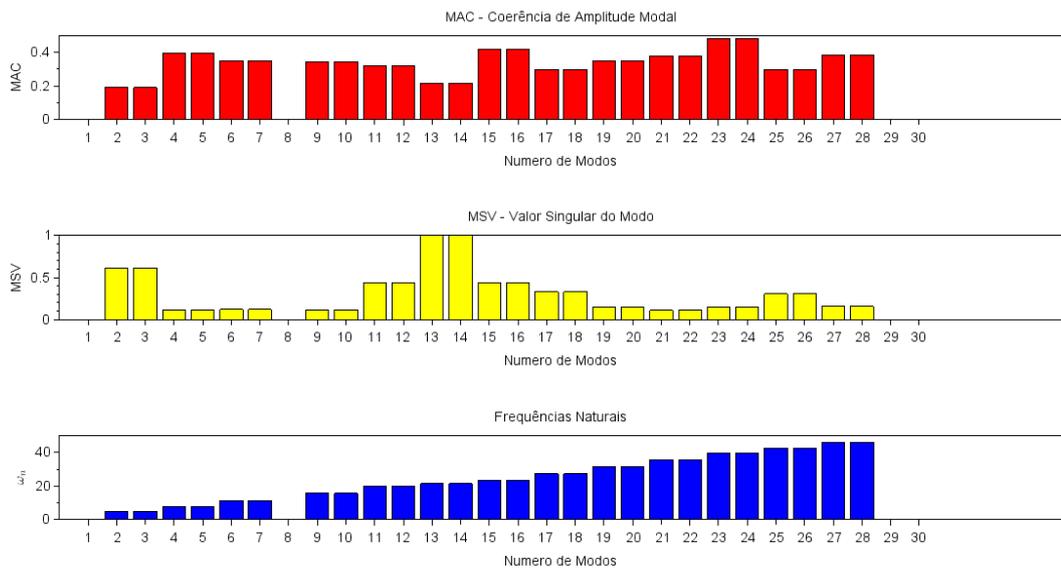
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.34 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=30)



Fonte: Autoria Própria

Figura 4.35 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=30)



Fonte: Autoria Própria

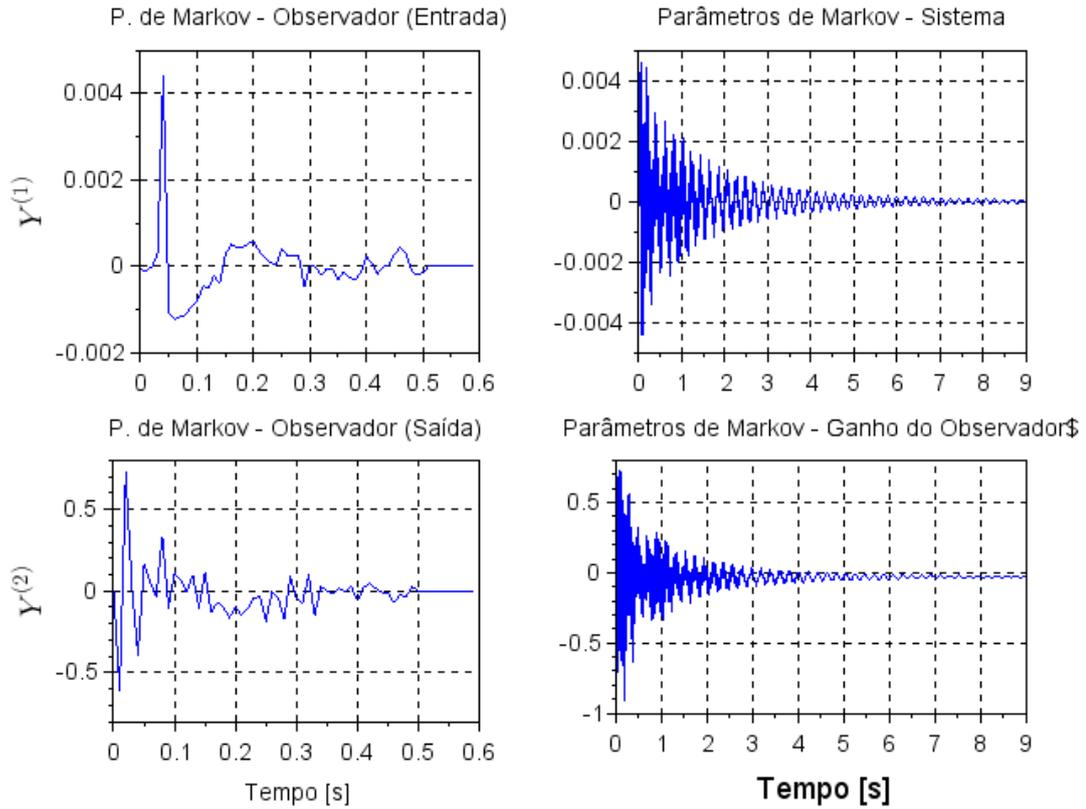
Tabela 4.6 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=30)

Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0.183	0.002	0.02	1.0000
2	0.190	0.026	4.83	0.0122
3	0.190	0.026	4.83	0.0122
4	0.395	0.005	7.98	0.1681
5	0.395	0.005	7.98	0.1681
6	0.351	0.005	11.33	0.0905
7	0.351	0.005	11.33	0.0905
8	0.886	0.071	12.21	1.0000
9	0.342	0.005	15.69	0.0615
10	0.342	0.005	15.69	0.0615
11	0.317	0.019	20.01	0.0401
12	0.317	0.019	20.01	0.0401
13	0.215	0.042	21.41	0.0094
14	0.215	0.042	21.41	0.0094
15	0.420	0.019	23.44	0.0657
16	0.420	0.019	23.44	0.0657
17	0.297	0.014	27.31	0.0249
18	0.297	0.014	27.31	0.0249
19	0.346	0.006	31.23	0.0317
20	0.346	0.006	31.23	0.0317
21	0.379	0.005	35.49	0.0344
22	0.379	0.005	35.49	0.0344
23	0.481	0.006	39.38	0.0531
24	0.481	0.006	39.38	0.0531
25	0.297	0.013	42.63	0.0160
26	0.297	0.013	42.63	0.0160
27	0.385	0.007	46.16	0.0275
28	0.385	0.007	46.16	0.0275
29	0.358	0.006	50.01	0.0215
30	1.000	0.072	62.38	0.5980

4.2.3 Ordem Estimada do Sistema - $n = 50$

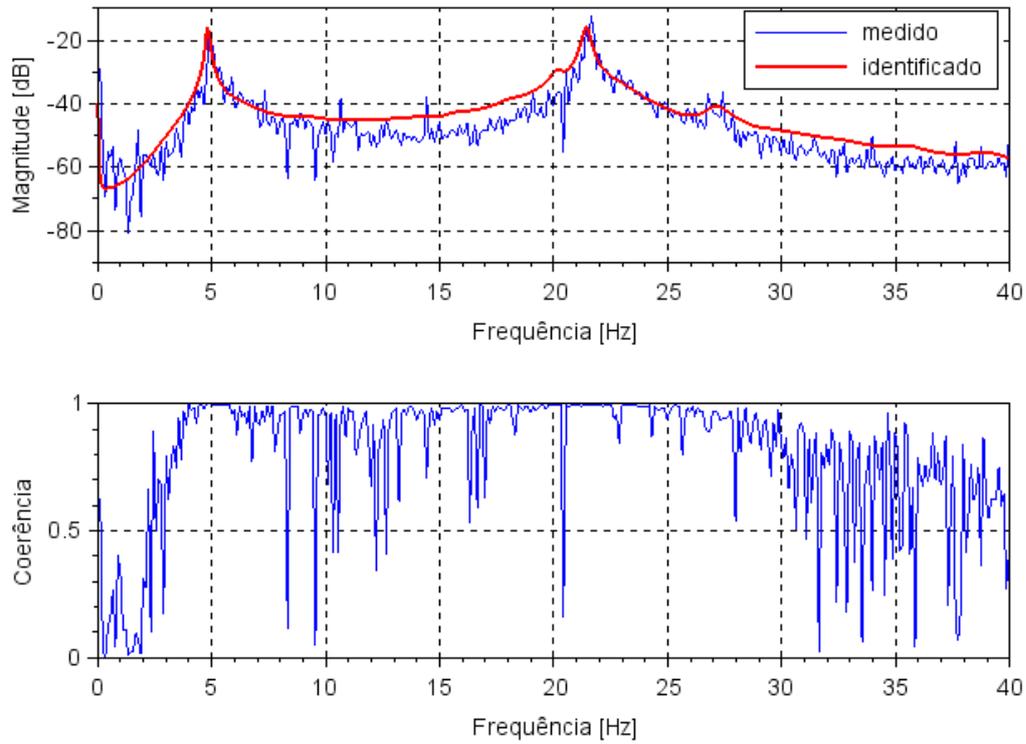
As Figuras 4.36, 4.37, 4.38, 4.39 e 4.40 representam os gráficos para a ordem estimada $n = 50$.

Figura 4.36 – Parâmetros de Markov. (ordem do sistema $n=50$)

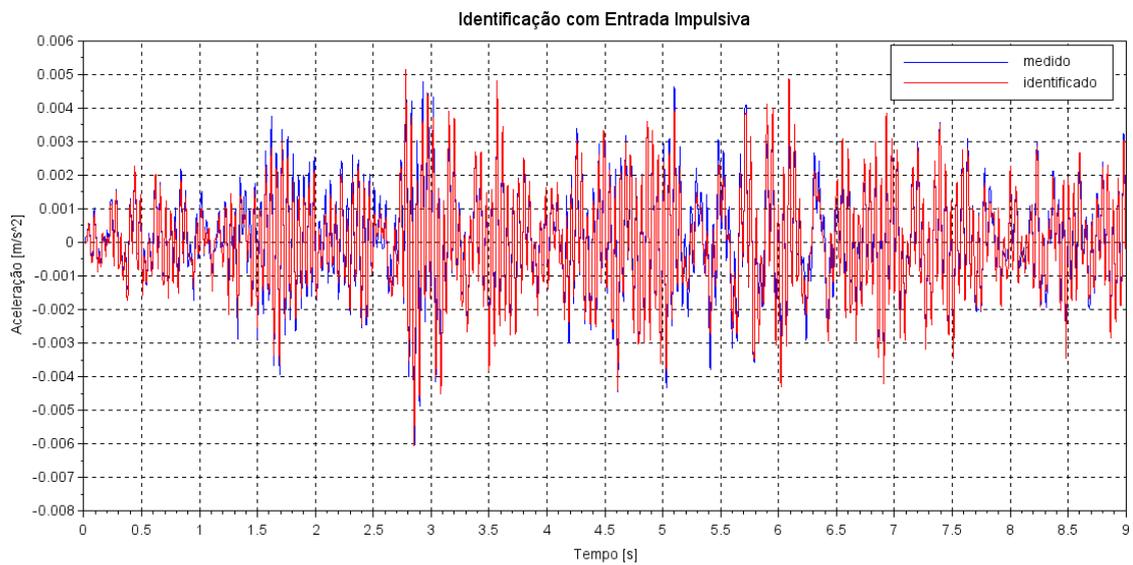


Fonte: Autoria Própria

A Tabela 4.7 apresenta de maneira consolidada as seguintes informações sobre a ordem estimada de $n = 50$: MAC, MSV, frequência natural e amortecimento, sendo estes dados apresentados para cada modo.

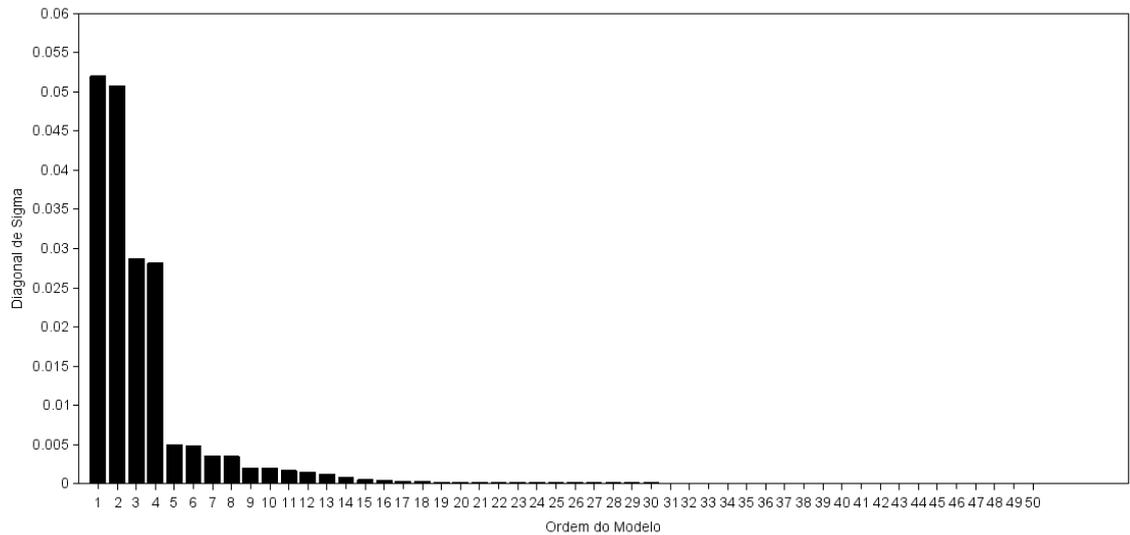
Figura 4.37 – FRF dos Sistemas Medido e Identificado. (ordem do sistema $n=50$)

Fonte: Autoria Própria

Figura 4.38 – Saídas Medida e Identificada. (ordem do sistema $n=50$)

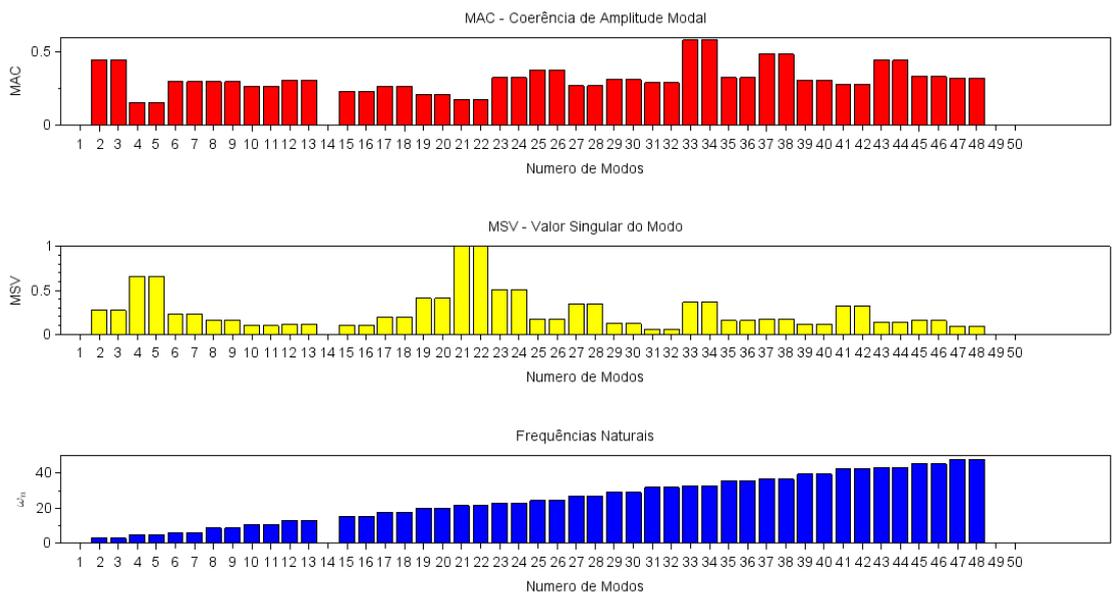
Fonte: Autoria Própria

Figura 4.39 – Diagonal de Sigma. (ordem do sistema n=50)



Fonte: Autoria Própria

Figura 4.40 – Indicadores de Confiança. (ordem do sistema n=50)



Fonte: Autoria Própria

Tabela 4.7 – Dados Compilados Viga. (ordem do sistema n=50)

Modo	MAC	MSV	ω (Hz)	ξ
1	0,141	0,003	0,00	1,0000
2	0,447	0,011	2,91	0,6085
3	0,447	0,011	2,91	0,6085
4	0,153	0,026	4,83	0,0116
5	0,153	0,026	4,83	0,0116
6	0,296	0,009	6,05	0,1193
7	0,296	0,009	6,05	0,1193
8	0,298	0,006	8,65	0,0845
9	0,298	0,006	8,65	0,0845
10	0,266	0,004	10,81	0,0524
11	0,266	0,004	10,81	0,0524
12	0,306	0,004	12,91	0,0602
13	0,306	0,004	12,91	0,0602
14	0,906	0,073	13,71	1,0000
15	0,233	0,004	15,42	0,0268
16	0,233	0,004	15,42	0,0268
17	0,267	0,008	17,86	0,0322
18	0,267	0,008	17,86	0,0322
19	0,212	0,016	20,16	0,0156
20	0,212	0,016	20,16	0,0156
21	0,175	0,039	21,43	0,0072
22	0,175	0,039	21,43	0,0072
23	0,324	0,020	22,89	0,0385
24	0,324	0,020	22,89	0,0385
25	0,377	0,007	24,40	0,0501
26	0,377	0,007	24,40	0,0501
27	0,270	0,014	27,09	0,0217
28	0,270	0,014	27,09	0,0217
29	0,313	0,005	29,05	0,0281
30	0,313	0,005	29,05	0,0281
31	0,290	0,002	31,81	0,0216
32	0,290	0,002	31,81	0,0216
33	0,583	0,014	32,74	0,1010
34	0,583	0,014	32,74	0,1010
35	0,325	0,006	35,57	0,0249
36	0,325	0,006	35,57	0,0249
37	0,485	0,007	36,51	0,0585
38	0,485	0,007	36,51	0,0585
39	0,305	0,004	39,41	0,0196
40	0,305	0,004	39,41	0,0196
41	0,280	0,013	42,69	0,0149
42	0,280	0,013	42,69	0,0149
43	0,445	0,006	43,05	0,0407
44	0,445	0,006	43,05	0,0407
45	0,333	0,006	45,36	0,0206
46	0,333	0,006	45,36	0,0206
47	0,320	0,004	47,97	0,0178
48	0,320	0,004	47,97	0,0178
49	0,349	0,006	50,01	0,0207
50	1,000	0,080	52,09	1,0000

4.2.4 Conclusões Parciais

Comparação Entre o Sistema Medido e Identificado

A análise das Figuras 4.27, 4.32 e 4.37 mostra que as FRF's do sistema identificado apresenta boa superposição com as FRF's do sistema medido, apesar das não linearidades referentes ao atuador eletromagnético. A comparação das duas FRF's mostra que o algoritmo do ERA/OKID identifica com razoável precisão as frequências naturais e respectivas amplitudes também para este sistema, mesmo com ordens estimadas reduzidas, sendo que estas informações, do ponto de vista da identificação, constituem os mais importantes pilares.

Verificam-se nestas mesmas figuras que a função de coerência indica uma boa correlação entre os sinais de entrada e saída medidos na faixa de frequência entre 5 e 25 Hz, devido a proximidade dos valores do gráfico da unidade. A partir de 25 Hz a função de coerência se afasta da unidade, indicando uma redução na qualidade do sinal.

Análise Modos Dominantes

As Figuras 4.34 e 4.39 apresentam quatro barras destacadas das demais, sugerindo que o sistema estudado apresenta 2 GDL, mesmo sabendo que se trata de um sistema contínuo (que na prática tem infinitos graus de liberdade). Quando o MSV normalizado, apresentado nas Figuras 4.35 e 4.40, é avaliado, pode-se extrair quais modos de vibração são os dominantes no sistema. Neste caso, os índices 4 e 5 indicam o primeiro modo e os índices 21 e 22 indicam o segundo modo, para $n = 50$ e os índices 2 e 3 indicam o primeiro modo e os índices 13 e 14 indicam o segundo modo, para $n = 30$, uma vez que os modos aparecem aos pares nos indicadores de confiança devido ao complexo conjugado dos auto-valores do sistema. Para $n = 10$, a análise das figuras 4.29 e 4.30 sugerem apenas 1 modo dominante, visto o destaque de apenas duas barras figuras citadas.

Uma vez extraídos os modos dominantes, pode-se utilizar os dados das Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 para a obtenção das frequências naturais do sistema para estes modos, informações importantes para projetos de controle de vibração. No caso do sistema com a viga flexível e atuador eletromagnético e ordem estimada $n = 50$, por exemplo, o algoritmo do ERA/OKID identificou as frequências naturais de 4,83 Hz e de 21,43 Hz para os índices 4/5 e 21/22, destacados em negrito na Tabela 4.7. Estes valores apresentam coerência quando comparados aos dois primeiros picos da Figura 4.37.

5 Conclusões

Estudou-se neste trabalho o método ERA e sua variação ERA/OKID para identificação de sistema dinâmicos em espaço de estados. Foram apresentadas as formulações matemáticas deste dois métodos, assim como foi apresentada a validação da metodologia, através da aplicação do algoritmo no primeiro sistema experimental. O algoritmo foi aplicado também para a identificação de um sistema experimental composto por uma viga flexível excitada por atuador eletromagnético visando a obtenção de seus parâmetros modais. A análise dos resultados experimentais permitiu concluir:

- o ERA/OKID é uma poderosa ferramenta na identificação de sistemas em espaço de estados, sendo esse tipo de representação importante na engenharia de controle, principalmente no projeto de controladores ótimos;
- quando a ordem estimada para a matriz de Hankel teve tamanho adequado, observou-se uma boa superposição dos resultados medidos e identificados pela ferramenta, apesar dos ruídos associados às medições do sistema experimental, permitindo a identificação, inclusive, de parâmetros modais com boa precisão;
- o ERA/OKID mostrou-se bastante eficiente e robusto na identificação dos parâmetros modais do sistema experimental com atuador eletromagnético, mesmo com as não linearidades associadas a este tipo de atuador;
- a disponibilidade das FRF's medidas para os dois sistemas foi essencial para o ajuste dos modelos identificados;
- o critério do MSV normalizado pelo valor máximo, para distinção dos modos reais dos modos de ruído, mostrou-se bastante eficiente e direto na obtenção dos modos dominantes, quando associado à análise da diagonal de sigma;
- a utilização do gráfico da função de coerência para o sistema 2, em conjunto com a comparação das FRF's medidas e identificadas, permitiu verificar a confiabilidade dos dados medidos, facilitando a análise e obtenção dos modos de vibração do sistema;

Pode-se dizer que os objetivos pretendidos com este trabalho, destacados em negrito abaixo, foram atingidos.

Estudo da potencialidade do ERA/OKID na análise modal de estruturas. Pretende-se:

- **validar a metodologia experimentalmente, através da aplicação num sistema com 2 graus de liberdade (GDL), e**
- **aplicar o algoritmo numa viga flexível excitada por atuador eletromagnético para obtenção de seus parâmetros modais dominantes.**

Como desdobramentos para futuros trabalhos, destaca-se:

- **avaliar a sensibilidade da variação do número de parâmetros de Markov escolhidos em relação à ordem estimada para o sistema, visando uma maior estabilidade da FRF identificada em relação à FRF medida;**

Finalmente, mostrou-se ser indispensável a sensibilidade do analista dos dados sobre o sistema estudado para uma boa identificação, visto que a correta estimação de alguns parâmetros necessários para a aplicação do algoritmo reduzem bastante os esforços computacionais, sendo esta condição particularmente importante em sistemas complexos.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas-Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2007.
- ALVES, M. T. S. *Avaliação Numérica e Experimental dos Métodos ERA e ERA/OKID para a Identificação de Sistemas Mecânicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- ÅSTRÖM, K. J.; KUMAR, P. R. Control: A perspective. *Automatica*, v. 50, n. 1, p. 3–43, 2014.
- BOX, G.; JENKINS, G. *Time series analysis: Forecasting and control*, holden day, san francisco, usa. 1970.
- BRANDOLT, H. G. *Simulação de escoamento em dutos por caracterização de eventos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- CHOPRA, A. K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. dos S. *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. [S.l.: s.n.], 2004.
- CONCEIÇÃO, S. M. d. *Métodos de identificação e redução de modelos para atenuação de vibrações em estruturas inteligentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012.
- CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- ENG, G. de V. *Análise de Estabilidade Angular Utilizando Métodos de Estimção de Amortecimento no Sistema Elétrico de Potência*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ, 2019.
- GEVERS, M. System identification without lennart ljung: what would have been different? *Forever Ljung in System Identification, Studentlitteratur AB, Norrtälje*, 2006.
- GILBERT, E. G. Controllability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, SIAM, v. 1, n. 2, p. 128–151, 1963.
- HO, B.; KALMAN, R. E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *at-Automatisierungstechnik*, OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, v. 14, n. 1-12, p. 545–548, 1966.
- JUANG, J.-N. *Applied system identification*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1994.
- JUANG, J.-N.; COOPER, J.; WRIGHT, J. An eigensystem realization algorithm using data correlations (era/dc) for modal parameter identification. 1988.

- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of guidance, control, and dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985.
- JUANG, J.-N. et al. Identification of observer/kalman filter markov parameters-theory and experiments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, n. 2, p. 320–329, 1993.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, SIAM, v. 1, n. 2, p. 152–192, 1963.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, L. C. *Identificação e Controle: Uma Aplicação em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezoelétricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 2003.
- PAPPA, R. S.; ELLIOTT, K. B.; SCHENK, A. Consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, n. 5, p. 852–858, 1993.
- PHAN, M. Q. et al. Identification of linear systems by an asymptotically stable observer. 1992.
- SANTOS, W. F. D. et al. Active vibration control applied to a composite material beam. In: *COBEM 2019 - 25th International Congress of Mechanical Engineering, Uberlândia-MG-Brazil*. [S.l.: s.n.], 2019.
- SCZIBOR, V. *Identificação modal de uma estrutura Aeronáutica via algoritmo de realização de sistemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2002.
- SCZIBOR, V.; MARQUES, F. D. Wing structure modal parameter estimation and qualification using era. In: *Proceedings of COBEM 2003 - 17th International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.], 2003.
- SILVA, C. A. X. et al. Active vibration control applied to a composite material beam. In: *COBEM 2019 - 25th International Congress of Mechanical Engineering, Uberlândia-MG-Brazil*. [S.l.: s.n.], 2019.
- SOUZA, M. G. d. *Identificação e caracterização de não-linearidades em dinâmica estrutural*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- TSUNAKI, R. H. *Identificação automatizada de modelos dinâmicos no espaço de estado*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.
- WAGNER, G. B. *Análise Modal Operacional no Domínio do Tempo: Um Estudo Crítico dos Métodos de Identificação*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, 2017.

WIENER, N. et al. Generalized harmonic analysis. *Acta mathematica*, Institut Mittag-Leffler, v. 55, p. 117–258, 1930.

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. *Nonlinearity in structural dynamics: detection, identification and modelling*. [S.l.]: CRC Press, 2001.

YULE, G. U. On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, The Royal Society London, v. 226, n. 636-646, p. 267–298, 1927.