



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

DANIELLE SILVA LEÃO DE JESUS

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A ANÁLISE
NÃO LINEAR DE VIGAS TIMOSHENKO-VLASOV**

Salvador

2019

DANIELLE SILVA LEÃO DE JESUS

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A ANÁLISE
NÃO-LINEAR DE VIGAS TIMOSHENKO-VLASOV**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia, na linha de pesquisa Mecânica Computacional, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Alex Alves Bandeira

Salvador

2019

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo a Deus por iluminar a minha vida e os meus caminhos.

Ao professor Alex Bandeira pelo acompanhamento, ensino, orientação e constante estímulo durante toda a pesquisa. Grata pela amizade, paciência e por sempre acreditar que tudo vem dar certo. Aproveito para agradecer à Maria Alessandra e Felipe pela compreensão, torcida e por sempre me receberem com carinho na rotina de vocês.

À minha mãe e ao meu irmão pelo constante estímulo na minha educação, por sonharem comigo todos os meus sonhos e sempre me ajudarem a realizá-los, por estarem sempre ao meu lado me dando apoio, carinho, incentivo e amor. À minha família pela amizade, carinho e compreensão por todas as vezes em que precisei me ausentar das nossas reuniões e momentos importantes durante este período.

Aos meus amigos: Antônio, Bruno, Daniel, Gabriela, Gustavo, Ítalo e Ronei por todo auxílio e companheirismo durante essa jornada.

À Danilo, por ser sempre muito paciente, compreensivo, companheiro, por ser o maior incentivador na etapa final da pesquisa e por não deixar que eu desistisse.

Em especial, aos meus amigos Jéferson e Juliana por estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis que passei durante a realização desta pesquisa.

À FAPESB, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado da Bahia, pela bolsa de estudo, que permitiu dedicação integral ao programa de mestrado, e sem a qual seria impossível a realização desta pesquisa.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram com esta pesquisa.

A persistência é o caminho do êxito.
Charlie Chaplin

JESUS, D. S. L., Método dos Elementos Finitos Aplicado a Análise Não-Linear de Vigas Timoshenko-Vlasov. 125p. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

RESUMO

Esta pesquisa estuda o Método dos Elementos Finitos aplicado a análise não-linear de vigas Timoshenko-Vlasov. A princípio, objetiva-se investigar a formulação não linear tridimensional de vigas para simular estruturas reticuladas, considerando efeitos de empenamento da seção transversal como uma das variáveis do problema. Será desenvolvido um programa em linguagem C para a análise de estruturas de vigas considerando as equações constitutivas elásticas não-lineares através da lei de material de Simo-Ciarlet. A partir do programa desenvolvido, são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a consistência da formulação e em seguida, é realizada a validação dos resultados obtidos com uma modelagem computacional utilizando o software comercial ANSYS.

Palavras chave: Análise Não Linear, Método dos Elementos Finitos, Vigas Timoshenko-Vlasov.

JESUS, D. S. L., Finite Element Method applied to Nonlinear Analysis of Timoshenko-Vlasov Beams. 125p. 2019. Dissertation (Master in Structural Engineering) - Polytechnic School, Federal University of Bahia, Salvador, 2019.

ABSTRACT

This research studies the Finite Element Method applied to the non linear analysis of the Timoshenko-Vlasov beam. Initially, the objective is to investigate the non linear formulation for tridimensional beams to simulate reticulated structures, taking into account the cross section warping effects as problem variables. A software will be developed using the C programming language for the structural analysis of the beams mentioned. The non linear constitutive equations utilized are based on Simo-Ciarlet material law. Several numerical examples are generated from the developed software to illustrate the theory's validity, and following that, the obtained results are compared to similar problems modeled on the ANSYS comercial software, to evaluate the result's proximity. The obtained results suggest that the used formulations present satisfactory performance for the analysed examples.

Keywords: Nonlinear Analysis, Finite Element Method, Beam Theory, Timoshenko-Vlasov Beams.

LISTA DE SÍMBOLOS

α, β, γ	Índices gregos que variam de 1 a 2
A	Área da seção transversal
A_j	Matriz de conectividade do elemento j
\mathbf{B}	Operador matricial para cálculo das deformações generalizadas
\mathbf{B}_θ	Operador matricial da parametrização de Rodrigues
B	Bi momento interno atuante numa seção transversal
\bar{B}	Bi momento externo distribuído aplicado ao longo da barra, por unidade de comprimento
B^*	Bi momento concentrado atuantes nas extremidades da barra
$\bar{\mathbf{b}}$	Vetor das forças volúmicas externas atuantes sobre a barra
c	Constante de integração
C	Contorno da seção transversal
C_ω	Constante de empenamento da seção transversal ou J_ψ
\mathbf{d}	Vetor dos deslocamentos generalizados ou vetor dos graus de liberdade da barra
\mathbf{d}_θ	Vetor dos graus de liberdade para a parametrização de Rodrigues
\mathbf{D}	Matriz dos coeficientes de rigidez constitutiva
\mathbf{D}^L	Parcela constante da matriz \mathbf{D}
\mathbf{D}^Q	Parcela linear nas deformações da matriz
\mathbf{D}_{ij}^Q	Submatrizes 3x3 de \mathbf{D}^Q
\mathbf{e}	Vetor unitário que tem a mesma direção e sentido de $\boldsymbol{\theta}$
\mathbf{e}_1	Vetor da base local móvel ou base ortonormal, componente do sistema na configuração deformada em relação ao eixo 1
\mathbf{e}_2	Vetor da base local móvel ou base ortonormal, componente do sistema na configuração deformada em relação ao eixo 2
\mathbf{e}_3	Vetor da base local móvel ou base ortonormal, componente do sistema na configuração deformada em relação ao eixo 3
\mathbf{e}_1^r	Vetor da base local ortonormal de vetores, componente do sistema na configuração indeformada ou de referência em relação ao eixo 1
\mathbf{e}_2^r	Vetor da base local ortonormal de vetores, componente do sistema na configuração indeformada ou de referência em relação ao eixo 2

\mathbf{e}_3^r	Vetor da base local ortonormal de vetores, componente do sistema na configuração indeformada ou de referência em relação ao eixo 3
e_α	Operador matricial 2x2, definido por conveniência de notação
$e_{\alpha\beta}$	Elementos do operador e_α que funciona como símbolo de permutação
E	Módulo de elasticidade longitudinal
\mathbf{F}	Gradiente da transformação em termos da configuração corrente
\mathbf{F}^r	Gradiente da transformação em termos da configuração de referência
\mathbf{G}_θ	Operador tangente que caracteriza efeitos geométricos dos esforços internos para a parametrização de Rodrigues
\mathbf{G}_{ij}	Submatrizes 3x3 do operador tangente \mathbf{G}_θ
G	Módulo de elasticidade transversal
g_α	Coordenadas do centro de gravidade da seção transversal
$H_{\alpha\beta}$	Parâmetros de assimetria da seção transversal, ou coeficientes de inércia de terceira ordem
$h_1(\theta)$	Primeira função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_2(\theta)$	Segunda função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_3(\theta)$	Terceira função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_4(\theta)$	Quarta função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_5(\theta)$	Quinta função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_6(\theta)$	Sexta função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
$h_7(\theta)$	Sétima função trigonométrica auxiliar para cálculo de tensores de rotações
\mathbf{I}_p	Matriz identidade de ordem p
J	Determinante de \mathbf{F} , ou Jacobiano da transformação
$J_{\alpha\beta}$	Momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo qualquer
$J_{\alpha\beta}^G$	Momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo passando pelo seu centro de gravidade
J_0	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos qualquer
J_0^G	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos passando pelo seu centro de gravidade

J_0^S	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos passando pelo seu centro de cisalhamento
J_T	Momento de inércia da seção transversal à torção de Saint-Venant, para um par de eixos qualquer
J_T^S	Momento de inércia da seção transversal à torção de Saint-Venant, para um par de eixos passando pelo seu centro de cisalhamento
J_ψ	Momento de inércia ao empenamento da seção transversal (o mesmo que C_ω)
J_ξ	Jacobiano de uma função na variável escalar ξ
K	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\mathbf{\kappa}$
\mathbf{k}_C	Matriz de rigidez tangente de um elemento
\mathbf{k}_G	Matriz de rigidez tangente geométrica de um elemento
\mathbf{k}_L	Matriz de rigidez tangente do carregamento externo de um elemento
\mathbf{k}_T	Matriz de rigidez tangente de um elemento
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente da estrutura
L	Gradiente dos deslocamentos
l	Comprimento da barra
\mathbf{L}_θ	Operador tangente que caracteriza efeitos geométricos dos esforços externos, para a parametrização de Rodrigues
\mathbf{L}_{ij}	Submatrizes do operador tangente
M	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é \mathbf{m}
M_α	Momentos fletores atuantes na seção transversal (componentes do vetor \mathbf{m} nas direções \mathbf{e}_α)
\mathbf{m}	Vetor dos momentos internos atuantes numa seção transversal
$\bar{\mathbf{m}}$	Vetor dos momentos externos distribuídos aplicados ao longo da barra, por unidade de comprimento
\mathbf{m}^*	Vetor dos momentos concentrados atuantes nas extremidades da barra
\mathbf{m}^r	Vetor dos momentos internos da seção transversal retro rotacionados para a configuração de referência
N	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é \mathbf{n} / Matriz de interpolação dos elementos finitos da estrutura

N	Força normal atuante na seção transversal (componente do vetor \mathbf{n} na direção de \mathbf{e}_α)
N_α	Função de forma ou função de interpolação para elementos de barra isoparamétricos, referente ao nó
\mathbf{n}	Vetor das forças internas atuantes numa seção transversal
$\bar{\mathbf{n}}$	Vetor das forças externas distribuídas aplicadas ao longo da barra, por unidade de comprimento
\mathbf{n}^*	Vetor das forças concentradas atuantes nas extremidades da barra
\mathbf{n}^r	Vetor das forças internas da seção transversal retro rotacionado para a configuração de referência
\mathbf{O}	Tensor nulo de ordem 3
\mathbf{o}	Vetor nulo de dimensão 3
\mathbf{P}	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff / Vetor dos esforços nodais residuais de um elemento
P_{ext}	Potência dos esforços externos
P_{int}	Potência dos esforços internos
P_S	Parcela da potência externa relativa as forças de superfície
P_V	Parcela da potência externa relativa as forças de volume
\mathbf{p}	Vetor dos deslocamentos nodais generalizados de um elemento
p	Parâmetro escalar associado a função de empenamento ψ que dá sua intensidade
p^*	Empenamento imposto nas extremidades da barra
\mathbf{Q}	Tensor ortogonal das rotações da seção transversal
$\bar{\mathbf{q}}$	Vetor dos esforços externos generalizados aplicados ao longo da barra, por unidade de comprimento
\mathbf{q}^*	Vetor dos esforços generalizados concentrados atuantes nas extremidades da barra
Q	Bicortante de flexo torção (interno) atuante na seção transversal
\mathbf{R}	Vetor dos esforços nodais residuais da estrutura
\mathbf{r}	Vetor que descreve a posição dos pontos da seção transversal em relação ao seu eixo, na configuração deformada / Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
\mathbf{r}^r	Vetor que localiza os pontos da seção transversal em relação ao seu eixo, na configuração de referência

S	Segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
S_α	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo qualquer
S_α^G	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade
S_α^S	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo seu centro de cisalhamento
s_α	Coordenadas do centro de cisalhamento da seção transversal
T	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é t
T	Momento torsor interno total atuante na seção transversal
t	Vetor genérico que depende de θ
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor das forças superficiais externas atuantes sobre a barra
t	Tempo
U	Tensor resultante de operações algébricas que envolvem Γ , na parametrização de Rodrigues
u	Vetor dos deslocamentos de um ponto do eixo da barra
u*	Vetor dos deslocamentos impostos nas extremidades do eixo da barra
u_i	Componentes do vetor dos deslocamentos do eixo u
V	Tensor resultante de operações algébricas que envolvem Γ , na parametrização de Rodrigues
V_α	Forças cortantes atuantes na seção transversal, nas direções \mathbf{e}_α
x	Vetor que descreve a posição dos pontos da barra na configuração deformada
x_α	Coordenadas de um ponto no plano da seção transversal
x_α^G	Coordenadas de um ponto no plano da seção transversal em relação a um par de eixos que passa pelo seu centro de gravidade
Z	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é z
z	Vetor que descreve a posição dos pontos do eixo da barra na configuração deformada
Γ	Tensor que relaciona as velocidades angulares com a derivada temporal das rotações, para a parametrização de Rodrigues

$\boldsymbol{\gamma}$	Vetor das deformações em um ponto qualquer da seção transversal
γ_i	Componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}$
$\boldsymbol{\gamma}^r$	Vetor das deformações retro rotacionado para a configuração de referência
γ_i^r	Componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}^r$
Δ	Operador matricial diferencial para cálculo das deformações generalizadas
$\boldsymbol{\delta}$	Vetor dos deslocamentos de um ponto genérico da barra
δ_i	Componentes do vetor $\boldsymbol{\delta}$
δ	Símbolo de grandeza virtual (ou variação de uma grandeza)
δW_{ext}	Trabalho virtual dos esforços externos
δW_{int}	Trabalho virtual dos esforços internos
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor das deformações generalizadas da barra
$\boldsymbol{\varepsilon}^r$	Vetor das deformações generalizadas da barra, retro rotacionado para a configuração de referência
ε	Componente do vetor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ na direção \mathbf{e}_3^r ($\varepsilon = \gamma_3^r$)
$\boldsymbol{\zeta}$	Vetor que descreve a posição dos pontos do eixo da barra, na configuração de referência ou indeformada
ζ	Coordenada ao longo do eixo longitudinal indeformado, ou seja, ao longo de \mathbf{e}_3^r
$\boldsymbol{\eta}$	Vetor das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a força \mathbf{n}
$\boldsymbol{\eta}^r$	Vetor das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a força \mathbf{n}^r ou vetor $\boldsymbol{\eta}$ retro rotacionado para a configuração de referência
η_i	Deformações generalizadas componentes do vetor $\boldsymbol{\eta}$
η_i^r	Deformações generalizadas componentes do vetor $\boldsymbol{\eta}^r$
$\boldsymbol{\Theta}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor cujas componentes são os graus de liberdade da rotação da seção transversal, descrita por \mathbf{Q} , ou vetor das rotações
$\boldsymbol{\theta}^*$	Vetor das rotações impostas nas extremidades da barra
θ	Norma ou intensidade do vetor das rotações $\boldsymbol{\theta}$
θ_i	Componentes do vetor das rotações $\boldsymbol{\theta}$

$\boldsymbol{\kappa}$	Vetor das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a \mathbf{m}
$\boldsymbol{\kappa}^r$	Vetor das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a \mathbf{m}^r ou vetor $\boldsymbol{\kappa}$ retro rotacionado para a configuração de referência
κ_i	Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\kappa}$)
κ_i^r	Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\kappa}^r$)
λ	Constante generalizada de Lamé do material
μ	Constante generalizada de Lamé do material
$\boldsymbol{\nu}$	Versor normal ao contorno C da seção transversal
ν	Coefficiente de Poisson do material
ν_α	Componentes do versor $\boldsymbol{\nu}$ nas direções \mathbf{e}_α
$\boldsymbol{\xi}$	Vetor que descreve a posição dos pontos da barra na configuração de referência ou indeformada
ξ	Coordenada natural de um elemento de barra
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor dos esforços internos generalizados da seção transversal
$\boldsymbol{\sigma}^r$	Vetor dos esforços internos generalizados da seção transversal retro rotacionado para a configuração de referência
σ	Tensão normal atuante numa seção transversal (componente do vetor $\boldsymbol{\tau}$ na direção de \mathbf{e}_3 ou do vetor $\boldsymbol{\tau}^r$ na direção de \mathbf{e}_3^r)
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor das tensões atuantes nos planos da seção transversal normais a \mathbf{e}_3
$\boldsymbol{\tau}^r$	Vetor das tensões $\boldsymbol{\tau}$ retro rotacionado para a configuração de referência
$\boldsymbol{\tau}_\alpha$	Vetor das tensões atuantes nos planos cujas normais na configuração de referência são \mathbf{e}_α^r
τ_α	Tensões de cisalhamento atuantes numa seção transversal, ou seja, componentes do vetor $\boldsymbol{\tau}$ ou do vetor \mathbf{e}_α ou do vetor $\boldsymbol{\tau}^r$ na direção de \mathbf{e}_α^r
τ_{ij}	Componentes do vetor $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ (na base \mathbf{e}_j) ou do vetor $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$ (na base \mathbf{e}_i^r)
ψ	Função empenamento relativa ao centro de cisalhamento da seção transversal
ψ_0	Função empenamento relativa a um ponto qualquer da seção transversal
$\boldsymbol{\Omega}$	Tensor antissimétrico das velocidades angulares, cujo vetor axial é $\boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{\omega}$ Vetor das velocidades angulares associadas a uma rotação

∇ Operador gradiente

∇^2 Operador Laplaciano

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA.....	17
1.2 OBJETIVOS.....	18
1.2.1 Objetivos específicos	18
1.3 METODOLOGIA.....	19
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	20
1.5 REVISÃO DA LITERATURA	20
2 ROTAÇÕES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL.....	22
2.1 TENSOR DAS ROTAÇÕES	22
2.2 PARAMETRIZAÇÃO DE EULER.....	27
2.3 VELOCIDADES ANGULARES.....	29
2.4 ACELERAÇÕES ANGULARES.....	33
2.5 DERIVADA DO TENSOR F	34
3 ESTUDO DA FORMULAÇÃO PARA BARRAS RETAS SOB NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	40
3.1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL	40
3.2 TEORIA PARA BARRAS RETAS NO ESPAÇO.....	46
3.2.1 Propriedades setoriais de seções delgadas	47
3.2.2 Função Empenamento.....	50
3.3 CINEMÁTICA DAS BARRAS	55
3.3.1 Deformações	58
3.3.2 Tensões	70
3.4 ESTÁTICA DAS BARRAS	71
3.4.1 Potência dos Esforços Internos.....	72
3.4.2 Potência dos Esforços Externos	75
3.4.3 Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno	76
3.4.4 Linearização dos Trabalhos Virtuais.....	82
4 EQUAÇÕES ELÁSTICAS CONSTITUTIVAS PARA BARRAS.....	87
4.1 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA A TEORIA DE BARRAS.....	87
4.1.1 Material hiperelástico de Simo-Ciarlet sem considerar os termos de ordem superior	87

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A ELEMENTOS DE BARRAS ESPACIAIS.....	105
5.1 ELEMENTOS DE BARRA ISOPARAMÉTRICOS.....	105
5.2 FORMULAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO.....	107
5.3 EQUILÍBRIO INCREMENTAL E DA ESTRUTURA.....	110
5.4 FLUXOGRAMA DA PROGRAMAÇÃO.....	112
6 EXEMPLOS NUMÉRICOS	113
6.1 ANÁLISE DA CONFIGURAÇÃO DO EMPENAMENTO PRIMÁRIO NA VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I.....	113
6.2 VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I EM BALANÇO, SUBMETIDA A CARGA TRANSVERSAL CONCENTRADA NA EXTREMIDADE LIVRE.....	113
6.3 VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I EM BALANÇO, SUBMETIDA A FLEXO-COMPRESSÃO NA EXTREMIDADE LIVRE.....	116
6.4 FLAMBAGEM LATERAL DE PÓRTICO EM BALANÇO.....	119
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
7.1 CONCLUSÕES.....	121
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	122
REFERÊNCIAS.....	123
APÊNDICE A.....	126

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, a evolução computacional tem proporcionado muitos benefícios aos profissionais da área. Softwares têm sido desenvolvidos de forma a auxiliar desde o planejamento e gestão de projetos até o cálculo estrutural. Com relação a este último, a automatização tem permitido que a elaboração de projetos seja mais rápida e confiável, criando um dinamismo e praticidade ao engenheiro, possibilitando ao profissional enfatizar a busca pela concepção estrutural ideal, integrando a estrutura ao projeto arquitetônico de maneira econômica, segura e funcional.

Diante disso, a análise não-linear de sistemas estruturais tem atraído a atenção de muitos pesquisadores. Além de vir conquistando importância prática e aplicações cada vez maiores no ramo da Engenharia, a rápida e constante modernização dos equipamentos computacionais também vem impulsionando o seu desenvolvimento. Modelos fundamentados em formulações não-lineares, apesar da sua complexidade, podem produzir respostas extremamente satisfatórias.

O desenvolvimento de algoritmos computacionais para cálculo estrutural tem como princípio fundamental a utilização dos métodos numéricos aplicados aos problemas de interesse. Dentre os métodos numéricos existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca como um dos mais populares para a solução de problemas estruturais, além de apresentar uma solução que resulta, para modelo de barras sujeitas a grandes rotações, em aproximações muito próximas da realidade.

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Inicialmente a análise estrutural nos projetos de engenharia civil foi baseada em hipóteses de comportamento elástico dos materiais, através do uso de formulações aproximadas. Esse tipo de análise, conhecido como análise linear de estruturas, considera os materiais elástico-lineares; em que a elasticidade do material está associada à tendência de voltar à configuração inicial sem apresentar deformações residuais, após ter sofrido deformações decorrentes de ações externas com posterior alívio de carregamento. Atualmente, diversos modelos físicos são utilizados na formulação de vigas, considerando a plasticidade e a viscosidade.

Em virtude do desenvolvimento de projetos cada vez mais complexos e estruturas mais esbeltas, o empenamento das seções transversais se tornou um fator importante de projeto, pois

a pequena rigidez à torção dos perfis de seção aberta e parede delgada, comumente utilizados nessas situações, pode tornar esses elementos reticulados instáveis por uma combinação de torção e flexão, mesmo quando submetidos a tensões normais.

As metodologias analíticas usuais de cálculo e dimensionamento contemplam este panorama de forma aproximada e, muitas vezes, resultam em estruturas pouco econômicas ou que trabalham próximo ao seu limite de segurança. Nesse contexto, essa pesquisa visa oferecer auxílio na análise não linear estrutural de elementos reticulados, através do desenvolvimento de um software que atenda ao panorama que mais se aproxima da situação real de comportamento da estrutura.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo desta pesquisa é analisar a formulação não linear tridimensional de elementos de barras no espaço, considerando a teoria de Timoshenko-Vlasov.

1.2.1 Objetivos específicos

Pode-se citar como objetivos específicos:

- Realizar a revisão e demonstração da formulação de análise não linear para vigas incluindo a consideração dos efeitos de empenamento da seção transversal, grandes deslocamentos e grandes rotações em estruturas reticuladas;
- Elaborar um algoritmo computacional em linguagem C para a implementação da teoria de Timoshenko-Vlasov, seguindo a formulação matemática desenvolvida utilizando o Método dos Elementos Finitos;
- Simular exemplos numéricos de problemas clássicos da literatura para vigas de seção de paredes delgadas;
- Comparar os resultados obtidos no programa desenvolvido com os resultados obtidos pelo software comercial *Ansys* e com os resultados disponíveis na literatura.

1.3 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos definidos, a pesquisa será desenvolvida em três etapas: (i) revisão de literatura; (ii) adaptação e implementação da formulação desenvolvida; (iii) validação dos modelos propostos.

A primeira etapa consistirá em leituras sistematizadas referentes à álgebra tensorial, elementos finitos, leis dos materiais, análise não-linear, vigas Timoshenko-Vlasov e outros temas que apontem para a construção de categorias chaves para o conhecimento do objeto em estudo e posterior levantamento bibliográfico.

Com base nos conceitos teóricos da etapa anterior, para a segunda etapa, será realizada a demonstração da formulação de análise não-linear para vigas, considerada geometricamente exata, válida em situações de grandes deslocamentos, grandes rotações e deformações finitas.

Em seguida, será elaborado um algoritmo computacional em linguagem C, capaz de realizar análise não-linear de vigas de Timoshenko-Vlasov, seguindo a formulação matemática desenvolvida a partir do Método dos Elementos Finitos.

Dentre os métodos numéricos aplicáveis em problemas de engenharia, optou-se nessa proposta por utilizar do Método dos Elementos Finitos por se tratar de um método consagrado, por fornecer soluções precisas e por se tratar de um método de fácil implementação computacional. Sua metodologia consiste em dividir um corpo contínuo em elementos de menores dimensões e com um número finito de graus de liberdade, de forma que a solução obtida com essa nova configuração resulta em aproximações muito próximas da realidade.

Por fim, para a última etapa, a validação dos resultados será realizada por meio da comparação dos resultados obtidos no programa desenvolvido com os resultados obtidos através da literatura e do software comercial.

A análise estrutural será validada através dos resultados obtidos pelo software comercial Ansys, escolhido por se tratar de uma ferramenta amplamente difundida, utilizada para a realização de simulações multifísicas através do Método dos Elementos Finitos em análises estruturais e que opera de forma análoga ao software a ser desenvolvido nesta pesquisa.

Os modelos utilizados para a comparação tratam de problemas clássicos da literatura. Em particular, as estruturas analisadas serão barras de seção de paredes delgadas, em que o efeito do empenamento poderá ser observado com maior intensidade. A apresentação dos exemplos será dividida em duas partes: a primeira parte apresenta problemas de tensão e deformação em regime linear físico e geométrico; e a segunda parte apresenta exemplos com grandes rotações e grandes deslocamentos e pequenas deformações, isto é, geometricamente não-lineares.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação foi estruturada em oito capítulos, de forma que o presente capítulo, Capítulo 1, é destinado a exposição geral do problema a ser tratado, seguida da justificativa para escolha do tema, objetivos e metodologia empregados para a elaboração da pesquisa.

O Capítulo 2 destina-se ao estudo das rotações no espaço tridimensional, através da demonstração dedutiva da formulação utilizada. Neste capítulo, foi utilizado como referência principal o trabalho desenvolvido por Moreira (2009), em razão da sua pesquisa ser utilizada nas principais referências de estudo da formulação apresentada neste estudo.

No Capítulo 3, apresenta o estudo da formulação para barras retas sob não linearidade geométrica. Este capítulo foi elaborado baseado principalmente nos estudos desenvolvidos por Pimenta (1999) e Campello (2000), dando ênfase a dedução das formulações.

No Capítulo 4, foi desenvolvido o estudo das equações elásticas constitutivas para as barras.

No Capítulo 5, é apresentado o estudo do método dos elementos finitos aplicado a teoria de barras.

No Capítulo 6, são apresentadas as comparações dos resultados obtidos no programa desenvolvido com os resultados dos mesmos exemplos numéricos simulados em um programa computacional de elemento finitos (ANSYS) e os resultados da literatura clássica.

No Capítulo 7, é apresentada uma visão geral dos resultados obtidos e as principais conclusões alcançadas nas análises dos modelos numéricos analisados. Por fim, no capítulo de Referências são apresentadas as principais referências que embasaram o presente estudo.

1.5 REVISÃO DA LITERATURA

A implantação da teoria não linear para barras, como uma formulação consistente com os princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, envolvendo grandes rotações, sem a utilização de aproximações cinemáticas foi feita por Simo (1985), Simo e Vu-Quoc (1986), Simo e Vu-Quoc (1991), Simo, Fox e Hughes (1992) e por Pimenta e Yoyo (1993).

Simo e Vu-Quoc (1991) apresentaram as deduções das equações não lineares de equilíbrio estático para elementos de barras situados no espaço, incorporando as deformações devidas ao cisalhamento e empenamento da seção transversal e utilizando os parâmetros da teoria de Vlasov para bimomento e bicortante.

Fruchtengarten (1995) fez uma análise comparativa entre a teoria de Vlasov e a teoria não linear formulada por Pimenta e Yoyo (1993), encontrando erros na rigidez constitutiva do

material dessa última teoria que os motivaram a alterar a hipótese constitutiva para obter uma nova equação para a energia potencial a partir da teoria de Vlasov. No entanto, a sua pesquisa não incluía o grau de liberdade de empenamento para as seções transversais.

Seguindo as mesmas motivações para o estudo do efeito do empenamento da seção transversal, Campello (2000) apresentou uma teoria estrutural para barras retas no espaço considerando o empenamento não-uniforme como uma das variáveis do problema. Foram consideradas equações constitutivas elásticas lineares e quadráticas, em que os termos quadráticos referentes às deformações de empenamento foram desprezados. Nessa pesquisa, foi verificado que desprezando os termos de segunda ordem nas deformações, a matriz de rigidez constitutiva se torna incapaz de modelar a instabilidade por torção em barras comprimidas e gera resultados discrepantes para a flambagem lateral.

Mais tarde, Campello e Pimenta (2001) utilizaram a mesma teoria de barras apresentada por Campello (2000), considerando desta vez todos os termos de segunda ordem desconsiderados anteriormente nas equações constitutivas. As cargas de flambagem se mostraram fortemente afetadas pelos termos de segunda ordem a partir da lei do material. As equações constitutivas completas até a segunda ordem derivadas do material de Saint-Venant e Simo-Ciarlet permitiram a flambagem por torção. No entanto, o material de Simo-Ciarlet continuou incapaz de modelar problemas de flambagem lateral.

Lago (2012) fez uma generalização da equação constitutiva apresentada por Campello e Pimenta (2001) para incorporar todos os termos de ordem superior na equação constitutiva, utilizando o material de Saint-Venant com o intuito de investigar o efeito da instabilidade nas barras.

Diante do exposto, esta pesquisa dará continuidade ao estudo da teoria não linear de elementos de barras no espaço, sem incluir os termos de ordem superior nas equações constitutivas derivadas da lei de material de Simo-Ciarlet, considerando o efeito do empenamento com a proposição de uma equação explícita para a representação deste fenômeno.

2 ROTAÇÕES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Por definição, uma rotação é uma transformação que, dado um conjunto de três vetores, preserva o comprimento destes, o ângulo entre os pares de vetores e o volume (com sinal) gerado por eles. (MOREIRA, 2009)

Ainda de acordo com Moreira (2009), o estudo das rotações no espaço, elemento componente desta pesquisa, tem o comportamento regido pelo teorema fundamental de Euler que diz:

“O deslocamento de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno de um eixo que passa através daquele ponto.”

Portanto, para determinar as rotações no espaço é necessário conhecer a magnitude da rotação (ângulo de rotação) e o eixo em torno da qual a rotação ocorre.

2.1 TENSOR DAS ROTAÇÕES

Existem vários tipos de parametrização para o tensor das rotações. Dentre elas estão: parametrização vetorial de Euler; parametrização vetorial de Rodrigues; álgebra dos quatérnions; parametrização dos cossenos diretores; parametrização mista, na qual se trabalha com o tensor das rotações definido por um tipo de parametrização e utiliza um segundo tipo de parametrização para obter a composição das rotações, evitando singularidades; entre outros.

Para Ritto-Corrêa (2003), as parametrizações vetoriais são muito convenientes do ponto de vista computacional, pois permitem tratar as rotações de forma semelhante às translações, e podem ser amplamente usadas nos problemas de Engenharia Civil onde as rotações costumam ser moderadas.

Nesta pesquisa, será utilizada a forma generalizada de Euler-Rodrigues, utilizada por Campello (2000) e por Dasambiagio, Pimenta e Campello (2009), por Lago (2012) e por Leal (2014). Estas pesquisas foram utilizadas como principais referências nesse estudo da formulação de barras, devido a principal vantagem da utilização da formulação simplificada de Rodrigues, generalizada para a ampliação do seu intervalo de validade, igualando-o ao intervalo da parametrização de Euler.

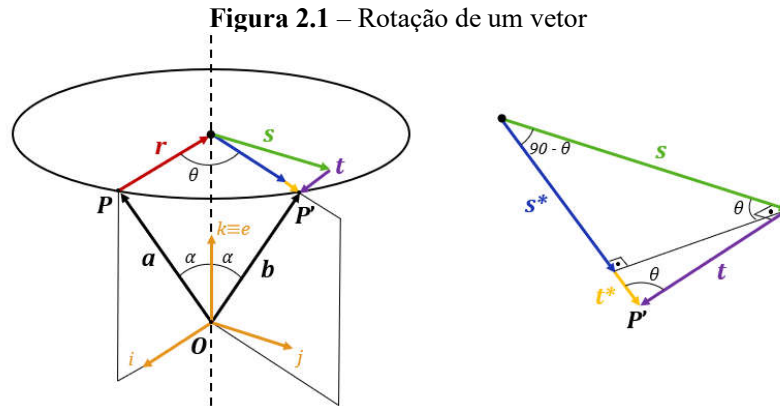
Matematicamente, uma rotação pode ser caracterizada por um tensor ortogonal pertencente ao grupo multiplicativo designado por $SO(3)$ (*Special Orthogonal Group*). (MOREIRA, 2009)

Ainda de acordo com Moreira (2009), este espaço $SO(3)$ é definido como:

$$SO(3) = \{ \mathbf{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \wedge \det(\mathbf{Q}) = 1 \} \quad (2.1)$$

A condição $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ resulta em seis condições de ortogonalidade que permitem que se possa representar o tensor \mathbf{Q} através de três valores independentes (parâmetros de rotação). Existem várias formas de representar o tensor ortogonal \mathbf{Q} , ou seja, de parametrizar o tensor das rotações; seja utilizando o vetor das rotações, os quartérnions, os ângulos clássicos de Euler, etc.

A seguir, será realizada a representação do tensor ortogonal \mathbf{Q} através do vetor das rotações, por ser de fácil percepção visual.



Fonte: Adaptado de Moreira (2009).

O deslocamento de um corpo rígido qualquer no espaço em torno de um ponto fixo O pode ser representado por um ponto P . Este ponto pode sofrer uma rotação qualquer em relação ao ponto fixo, descrito pelo vetor posição \mathbf{a} , conforme a Figura 2.1.

Através do teorema de Euler, a rotação do vetor \mathbf{a} pode ser representada em função do ângulo de rotação θ e o vetor unitário \mathbf{e} na direção do eixo de rotação.

Antes da obtenção da nova posição do vetor \mathbf{a} após a rotação, ou seja, o vetor \mathbf{b} , é necessário definir um sistema de eixos tri ortogonal com os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , para a realização da análise geométrica a partir de \mathbf{a} , \mathbf{e} e θ . Em que \mathbf{k} está na direção de \mathbf{e} , o vetor \mathbf{j} é ortogonal ao plano definido pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{e} , podendo ser obtido por:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e} \times \mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{e}\| \|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha}, \quad (2.2)$$

sendo α o ângulo entre \mathbf{e} e \mathbf{a} . E o vetor \mathbf{i} pode ser obtido através do produto vetorial entre \mathbf{j} e \mathbf{k} , conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

Desta forma, o vetor que representa a localização do ponto P após a rotação pode ser representado por:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t}, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{s} // \mathbf{j}$, $\mathbf{r} // \mathbf{i}$ e $\mathbf{t} // \mathbf{r}$. Como a nova posição do ponto P será analisada em função de \mathbf{a} , \mathbf{e} e θ , a seguir, os componentes do vetor que representa este deslocamento serão escritos em função dos mesmos parâmetros, através das relações geométricas observadas a partir da Figura 2.1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \mathbf{e} \times \mathbf{j} \|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha = -\|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha \mathbf{i}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{s} = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha \mathbf{j}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \text{sen}\alpha \mathbf{i}, \quad (2.7)$$

É possível ainda reescrever a equação (2.4) em função das projeções radiais na configuração rotacionada dos vetores \mathbf{s} e \mathbf{t} como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{r} + \mathbf{s}^* + \mathbf{t}^*, \quad (2.8)$$

em que

$$\mathbf{s}^* = \text{sen}\theta \mathbf{s} = \text{sen}\theta (\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{t}^* = \text{cos}\theta \mathbf{t} = -\text{cos}\theta (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})). \quad (2.10)$$

Substituindo as equações (2.5), (2.9) e (2.10) em (2.8), obtém-se:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + \text{sen}\theta (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \text{cos}\theta (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})) \quad (2.11)$$

Reorganizando os termos, chega-se a:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \text{sen}\theta(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{1} - \text{cos}\theta)(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})). \quad (2.12)$$

O produto vetorial $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ pode ser representado como:

$$\mathbf{e} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ e_x & e_y & e_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_y a_z - e_z a_y \\ e_z a_x - e_x a_z \\ e_x a_y - e_y a_x \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ou ainda pode ser reescrito como:

$$\mathbf{e} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \mathbf{O} \mathbf{a} \quad (2.14)$$

em que:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

E pode-se escrever também que:

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = \mathbf{O}^2 \mathbf{a}. \quad (2.16)$$

Em (2.15), \mathbf{O} é o tensor antissimétrico com vetor axial \mathbf{e} , ou seja,

$$\mathbf{O} = \text{skew}(\mathbf{e}). \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.14) e (2.16) em (2.12), obtém-se:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \text{sen}\theta \mathbf{O} \mathbf{a} + (\mathbf{1} - \text{cos}\theta) \mathbf{O}^2 \mathbf{a}. \quad (2.18)$$

Reorganizando os termos, a equação acima pode ainda ser escrita como:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{I} + \text{sen}\theta \mathbf{O} + (\mathbf{1} - \text{cos}\theta) \mathbf{O}^2] \mathbf{a}. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q} \mathbf{a}, \quad (2.20)$$

sendo:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \text{sen}\theta \mathbf{O} + (1 - \text{cos}\theta)\mathbf{O}^2. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) é conhecida como fórmula de Euler.

Utilizando a parametrização de Euler, o tensor \mathbf{O} , relativo ao vetor axial de giro da rotação será:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta}. \quad (2.22)$$

Assim, verifica-se que o tensor pode ser definido por:

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Além disso, sabendo que é válida a relação trigonométrica:

$$\text{sen}^2(a) = \frac{1 - \text{cos}(2a)}{2}, \quad (2.24)$$

e considerando $a = \theta/2$, a equação (2.21) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{2 \text{sen}^2(\theta/2)}{(2 \theta/2)^2} \boldsymbol{\theta}^2, \quad (2.25)$$

ou ainda:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{2(\theta/2)^2} \boldsymbol{\theta}^2, \quad (2.26)$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é um tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$, com $\|\boldsymbol{\theta}\| = \theta$. A equação (2.25) é conhecida na Mecânica dos Sólidos como fórmula de Euler-Rodrigues e \mathbf{Q} descreve uma rotação de intensidade θ , em torno do eixo determinado pelo versor $\mathbf{e} = (1/\theta)\boldsymbol{\theta}$, com θ positivo segundo a regra da mão direita aplicada a \mathbf{e} .

2.2 PARAMETRIZAÇÃO DE EULER

A parametrização vetorial escolhida para esta pesquisa é a parametrização de Euler. De acordo com Moreira (2009), esta parametrização tem como vantagem um significado geométrico simples no âmbito da própria rotação que visa representar, possuindo como parâmetros:

$$b = \text{sen}\theta \quad (2.27)$$

$$a = \text{cos}\theta, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e} \quad (2.29)$$

$$x = \theta = \|\boldsymbol{\theta}\|, \quad (2.30)$$

em que \mathbf{x} é um vetor de direção que coincide com o eixo de rotação \mathbf{e} , com norma θ .

Devido a escolha da parametrização de Euler, os coeficientes presentes no tensor das rotações, \mathbf{Q} , e no tensor que relaciona as velocidades angulares com a derivada temporal das rotações, \mathbf{F} , assumem os valores:

$$h = 1 \quad (2.31)$$

$$h_1(\theta) = \frac{\text{sen}\theta}{\theta}, \quad (2.32)$$

$$h_2(\theta) = \frac{1 - \text{cos}\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2}, \quad (2.33)$$

$$h_3(\theta) = \frac{1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta}}{\theta^2} = \frac{1 - h_1(\theta)}{\theta^2}, \quad (2.34)$$

$$h_4(\theta) = \frac{h_1(\theta) - 2h_2(\theta)}{\theta^2}, \quad (2.35)$$

$$h_5(\theta) = \frac{h_2(\theta) - 3h_3(\theta)}{\theta^2}, \quad (2.36)$$

$$h_6(\theta) = \frac{h_3(\theta) - h_2(\theta) - 4h_4(\theta)}{\theta^2}, \quad (2.37)$$

$$h_7(\theta) = \frac{h_4(\theta) - 5h_5(\theta)}{\theta^2}, \quad (2.38)$$

$$h_8(\theta) = h_9(\theta) = 0. \quad (2.39)$$

Para evitar indeterminações matemáticas na formulação, as equações (2.32) a (2.38) foram truncadas em série quando $\theta \leq 10^{-3}$, sendo reescritas como:

$$h_1(\theta) = 1 - \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 - \frac{1}{5040}\theta^6, \quad (2.40)$$

$$h_2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\theta^2 + \frac{1}{720}\theta^4 - \frac{1}{40320}\theta^6, \quad (2.41)$$

$$h_3(\theta) = \frac{1}{6} - \frac{1}{120}\theta^2 + \frac{1}{5040}\theta^4 - \frac{1}{362880}\theta^6, \quad (2.42)$$

$$h_4(\theta) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{180}\theta^2 - \frac{1}{6720}\theta^4 + \frac{1}{453600}\theta^6, \quad (2.43)$$

$$h_5(\theta) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{1260}\theta^2 - \frac{1}{60480}\theta^4 + \frac{1}{4989600}\theta^6, \quad (2.44)$$

$$h_6(\theta) = \frac{1}{90} - \frac{1}{1680}\theta^2 + \frac{1}{75600}\theta^4 - \frac{1}{5987520}\theta^6, \quad (2.45)$$

$$h_7(\theta) = \frac{1}{630} - \frac{1}{15120}\theta^2 + \frac{1}{831600}\theta^4 - \frac{1}{77837760}\theta^6. \quad (2.46)$$

onde foram desprezados os termos superiores a sexta ordem. Assim, observando as equações (2.31) a (2.39), o tensor das rotações definido em (2.26) pode também ser escrito como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + h_1(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.47)$$

Ou ainda na sua forma matricial como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

em que:

$$Q_{11} = 1 - h_2(\theta) \cdot (\theta_3^2 + \theta_2^2), \quad (2.49)$$

$$Q_{12} = -h_1(\theta) \cdot \theta_3 + h_2(\theta) \cdot (\theta_2\theta_1), \quad (2.50)$$

$$Q_{13} = h_1(\theta) \cdot \theta_2 + h_2(\theta) \cdot (\theta_3\theta_1), \quad (2.51)$$

$$Q_{21} = h_1(\theta) \cdot \theta_3 + h_2(\theta) \cdot (\theta_1 \theta_2), \quad (2.52)$$

$$Q_{22} = 1 - h_2(\theta) \cdot (\theta_3^2 + \theta_1^2), \quad (2.53)$$

$$Q_{23} = -h_1(\theta) \cdot \theta_1 + h_2(\theta) \cdot (\theta_3 \theta_2), \quad (2.54)$$

$$Q_{31} = -h_1(\theta) \cdot \theta_2 + h_2(\theta) \cdot (\theta_1 \theta_3), \quad (2.55)$$

$$Q_{32} = h_1(\theta) \cdot \theta_1 + h_2(\theta) \cdot (\theta_2 \theta_3), \quad (2.56)$$

$$Q_{33} = 1 - h_2(\theta) \cdot (\theta_2^2 + \theta_1^2). \quad (2.57)$$

2.3 VELOCIDADES ANGULARES

Segundo Campello (2000), a velocidade angular associada a uma rotação $\mathbf{Q}(t)$ pode ser escrita por um tensor de segunda ordem a partir da relação descrita na equação (2.58):

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \quad (2.58)$$

em que a notação de “ponto” sobre uma variável refere-se à derivada em relação ao tempo e $\boldsymbol{\Omega}$ é um tensor antissimétrico das velocidades angulares que possui como vetor axial o vetor $\boldsymbol{\omega}$, denominado vetor das velocidades angulares, definido posteriormente na expressão (2.69).

Considerando um vetor de eixo de rotação $\boldsymbol{\theta}$, de norma θ , ou seja, $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$, é possível escrever:

$$\theta^2 = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (2.59)$$

Derivando a norma em relação a dois eixos coordenados que compõem um plano pode ser escrita como:

$$2\theta\dot{\theta} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.60)$$

A equação (2.60) pode ser reescrita como:

$$2\theta\dot{\theta} = 2(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.61)$$

Isolando a derivada da norma na equação (2.61) obtém-se:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.62)$$

Derivando a equação (2.47) em relação ao tempo, considerando a regra da cadeia, resulta:

$$\dot{\mathbf{Q}} = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)(\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{h}_1(\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{\theta} + \dot{h}_2(\theta)\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.63)$$

Substituindo a equação (2.62) na equação (2.63) é possível obter:

$$\dot{\mathbf{Q}} = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)(\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\dot{h}_1}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta} + \frac{\dot{h}_2}{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.64)$$

Substituindo a equação (2.64) na equação (2.58) e utilizando as seguintes propriedades de tensores antissimétricos,

$$\boldsymbol{\theta}^T = -\boldsymbol{\theta} = -\theta \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\theta}^3 = -\theta^2\boldsymbol{\theta} = -\theta^2 \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\boldsymbol{\theta}^4 = -\theta^2\boldsymbol{\theta}^2 = -\theta^2 \begin{bmatrix} -e_y^2 - e_z^2 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_x e_y & -e_x^2 - e_z^2 & e_y e_z \\ e_x e_z & e_y e_z & -e_x^2 - e_y^2 \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

o tensor das velocidades angulares será calculado através da expressão:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)(\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}) + (h - h_1(\theta))\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}. \quad (2.68)$$

Vale ressaltar que devido a demonstração extensiva para a obtenção do tensor $\boldsymbol{\Omega}$, representado pela expressão (2.68), esta será omitida desta pesquisa.

O vetor axial das velocidades angulares será calculado por:

$$\boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1(\theta))\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta} \quad (2.69)$$

A equação (2.69) pode ainda ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1(\theta))\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}^T\dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.70)$$

O produto entre os vetores $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T$ será calculado por:

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & \theta_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Com as matrizes apresentadas em (2.65) a (2.67), pode-se perceber que:

$$\boldsymbol{\theta}^2 = \begin{bmatrix} -\theta_2^2 - \theta_3^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & -\theta_1^2 - \theta_3^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & -\theta_1^2 - \theta_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Além disso, sabendo que é válida a expressão:

$$\theta^2\mathbf{I} = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

pode-se afirmar que a equação (2.71) é equivalente a expressão:

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T = \boldsymbol{\theta}^2 + \theta^2\mathbf{I}. \quad (2.74)$$

A partir das equações (2.72) e (2.73), a equação (2.70) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1(\theta))\frac{1}{\theta^2}(\boldsymbol{\theta}^2 + \theta^2\mathbf{I})\dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.75)$$

Desenvolvendo os termos da expressão (2.75), tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) &= h_1(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (h - h_1(\theta))\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}^2\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ h\frac{1}{\theta^2}\theta^2\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\theta}} - h_1(\theta)\frac{1}{\theta^2}\theta^2\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

A equação (2.76) pode ainda ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = h\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (1 - h_1(\boldsymbol{\theta}))\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}^2\dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.77)$$

Colocando $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ em evidência na equação(2.77), tem-se:

$$\boldsymbol{\omega} = (h\mathbf{I} + h_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} + (1 - h_1(\boldsymbol{\theta}))\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}^2)\dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.78)$$

A expressão acima pode ser representada por:

$$\boldsymbol{\omega} = axial(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.79)$$

em que $\boldsymbol{\Gamma}$ é o tensor de segunda ordem que relaciona as velocidades angulares com a derivada temporal das rotações, e é definido por:

$$\boldsymbol{\Gamma} = h\mathbf{I} + h_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} + h_3(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.80)$$

Utilizando a parametrização de Euler obtém-se:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I} + h_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} + h_3(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}^2 \quad (2.81)$$

Assim, de maneira análoga a obtenção da equação (2.48), o tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ pode ser escrito em sua forma matricial como:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

em que:

$$\Gamma_{11} = 1 - h_3(\boldsymbol{\theta}).(\theta_3^2 + \theta_2^2), \quad (2.83)$$

$$\Gamma_{12} = -h_2(\boldsymbol{\theta}).\theta_3 + h_3(\boldsymbol{\theta}).(\theta_2\theta_1) \quad (2.84)$$

$$\Gamma_{13} = h_2(\boldsymbol{\theta}).\theta_2 + h_3(\boldsymbol{\theta}).(\theta_3\theta_1) \quad (2.85)$$

$$\Gamma_{21} = h_2(\boldsymbol{\theta}).\theta_3 + h_3(\boldsymbol{\theta}).(\theta_1\theta_2) \quad (2.86)$$

$$\Gamma_{22} = 1 - h_3(\theta).(\theta_3^2 + \theta_1^2) \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{23} = -h_2(\theta).\theta_1 + h_3(\theta).(\theta_3\theta_2) \quad (2.88)$$

$$\Gamma_{31} = -h_2(\theta).\theta_2 + h_3(\theta).(\theta_1\theta_3) \quad (2.89)$$

$$\Gamma_{32} = h_2(\theta).\theta_1 + h_3(\theta).(\theta_2\theta_3) \quad (2.90)$$

$$\Gamma_{33} = 1 - h_3(\theta).(\theta_2^2 + \theta_1^2) \quad (2.91)$$

2.4 ACELERAÇÕES ANGULARES

A aceleração angular associada a uma rotação $\mathbf{Q}(t)$ pode ser descrita por um tensor antissimétrico de segunda ordem, através da derivação em relação ao tempo da equação das velocidades angulares, representada em (2.58), obtendo a seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{Q}}^T. \quad (2.92)$$

Isolando o termo $\dot{\mathbf{Q}}$ da equação (2.58), obtém-se a expressão:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}. \quad (2.93)$$

A partir da equação (2.93), verifica-se que é válida a seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Omega}^T. \quad (2.94)$$

Substituindo a equação (2.94) na equação (2.92), tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Omega}^T. \quad (2.95)$$

Utilizando a equação (2.58), a equação (2.95) pode ser reescrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^T. \quad (2.96)$$

Sabendo que é válida a expressão para tensores antissimétricos: $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, a equação (2.92) pode ser representada por:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\Omega}^2. \quad (2.97)$$

O vetor das acelerações angulares é o vetor axial a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, sendo representado por $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ e pode ser obtido através da derivação da equação (2.79) em relação ao tempo, obtendo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Gamma}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\Gamma}}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.98)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ é obtido pela derivação da equação(2.81), sendo representado por:

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \dot{h}_2(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_2(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{h}_3(\theta)\boldsymbol{\theta}^2 + h_3(\theta)(\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}), \quad (2.99)$$

onde as derivadas em relação ao tempo dos termos $\dot{h}_2(\theta)$ e $\dot{h}_3(\theta)$ estão demonstradas no Apêndice A. Substituindo as referidas equações na equação (2.99), o vetor $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ pode ser reescrito como:

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = h_2(\theta)\dot{\boldsymbol{\theta}} + h_3(\theta)(\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}) + h_4(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta} + h_5(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\theta}^2. \quad (2.100)$$

2.5 DERIVADA DO TENSOR $\boldsymbol{\Gamma}$

No capítulo 3 serão utilizadas equações envolvendo o tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ e a sua derivada. Neste contexto, esta seção apresenta uma propriedade utilizada na demonstração da parcela de não linearidade geométrica para a obtenção da matriz de rigidez do elemento.

Partindo da consideração da equação (2.101):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial (\mathbf{I} - h_2(\theta)\boldsymbol{\theta} + h_3(\theta)\boldsymbol{\theta}^2)}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (2.101)$$

e utilizando a regra da cadeia e do produto de derivação na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = & -\frac{\partial h_2(\theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - h_2(\theta) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial h_3(\theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}^2 \\ & + h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (2.102)$$

O primeiro termo da derivação na equação (2.102) é dado por:

$$\frac{\partial h_2(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)}{\partial \theta}. \quad (2.103)$$

Realizando a derivação, considerando a regra do quociente, obtemos:

$$\frac{\partial h_2(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{\theta^2} - \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^3}. \quad (2.104)$$

Com o auxílio das equações (2.32) e (2.33), pode-se reescrever a equação (2.104) como:

$$\frac{\partial h_2(\theta)}{\partial \theta} = \frac{h_1(\theta) - 2h_2(\theta)}{\theta}. \quad (2.105)$$

O termo $\partial h_3(\theta)/\partial \theta$ da derivação na equação (2.102) é dado por:

$$\frac{\partial h_3(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right)}{\partial \theta}. \quad (2.106)$$

Realizando as derivações chega-se a:

$$\frac{\partial h_3(\theta)}{\partial \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)\theta^3 - (\theta - \sin \theta)3\theta^2}{\theta^6}, \quad (2.107)$$

ou ainda, com o auxílio das equações (2.33) e (2.34) tem-se:

$$\frac{\partial h_3(\theta)}{\partial \theta} = \frac{h_2(\theta) - 3h_3(\theta)}{\theta}. \quad (2.108)$$

Considerando que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{\left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right)}{\theta}, \quad (2.109)$$

manipulando os termos da equação (2.102) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta} &= -h_2(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + h_3(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \theta + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \\ &- \left(\frac{h_1(\theta) - 2h_2(\theta)}{\theta} \right) \frac{\left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right)}{\theta} \theta + \left(\frac{h_2(\theta) - 3h_3(\theta)}{\theta} \right) \frac{\left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right)}{\theta} \theta^2. \end{aligned} \quad (2.110)$$

ou ainda com o auxílio das equações (2.35) e (2.36), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta} &= -h_2(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + h_3(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \theta + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \\ &- h_4(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta + h_5(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta^2. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Seja $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\theta)$ um vetor genérico qualquer dependente de θ . Multiplicando a equação (2.111) por este vetor obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^T \mathbf{t}}{\partial \theta} &= \left[-h_2(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + h_3(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \theta + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) - h_4(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta \right. \\ &\quad \left. + h_5(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta^2 \right] \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Desenvolvendo a multiplicação na equação (2.112) chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^T \mathbf{t}}{\partial \theta} &= \left[-h_2(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \mathbf{t} + h_3(\theta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta} \theta + \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} - h_4(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta \mathbf{t} \right. \\ &\quad \left. + h_5(\theta) \left(\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) \theta^2 \mathbf{t} \right]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Com o objetivo de colocar o termo $\frac{\partial \theta}{\partial \theta}$ em evidência, busca-se reorganizar a equação (2.113). O primeiro termo a ser reorganizado na referida expressão é:

$$-h_2(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \mathbf{t}, \quad (2.114)$$

que pode ser obtido ao se reorganizar o produto do tensor antissimétrico como um produto vetorial, obtendo-se:

$$-h_2(\theta) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \mathbf{t} = -h_2(\theta) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \times \mathbf{t} = h_2(\theta) \left(\mathbf{t} \times \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right), \quad (2.115)$$

em que \mathbf{T} é o tensor cujo \mathbf{t} é o vetor axial, ou seja: $\mathbf{T} = skew(\mathbf{t})$.

O segundo termo a ser reorganizado na equação (2.113) é:

$$h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} = h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \mathbf{t} \right) \quad (2.116)$$

e novamente abrindo o produto do tensor antissimétrico como um produto vetorial tem-se:

$$h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} = h_3(\theta) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}) + \boldsymbol{\theta} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \times \mathbf{t} \right) \right]. \quad (2.117)$$

Os produtos vetoriais da equação (2.117) podem ser abertos em produtos escalares resultando em:

$$\begin{aligned} & h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} = \\ & h_3(\theta) \left[- \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} + \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \mathbf{t} + \left(\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Transformando os produtos escalares em produtos diádicos na equação acima chega-se a:

$$\begin{aligned} & h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} = \\ & h_3(\theta) \left[-2(\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \otimes \boldsymbol{\theta}^T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

ou ainda a:

$$h_3(\theta) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \mathbf{t} = h_3(\theta) [\mathbf{T}\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}\mathbf{T}] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}. \quad (2.120)$$

O terceiro termo a ser reorganizado na equação (2.113) é:

$$-h_4(\theta) \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_4(\theta) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right). \quad (2.121)$$

Transformando o produto escalar em produto diádico tem-se:

$$-h_4(\theta) \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \mathbf{t} = -h_4(\theta) (\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}. \quad (2.122)$$

Por fim, o quarto e último termo a ser reorganizado na equação (2.113) é apresentado a seguir e possui demonstração análoga ao termo anterior, resultando em:

$$h_5(\theta) \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t} = h_5(\theta) (\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}. \quad (2.123)$$

Assim, após a reorganização de todos os termos, a equação (2.113) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[h_2(\theta) \mathbf{T} + h_3(\theta) (\mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - 2 \boldsymbol{\theta} \mathbf{T}) - h_4(\theta) (\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} + h_5(\theta) (\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}, \quad (2.124)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta}, \quad (2.125)$$

em que:

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = h_2(\theta) \mathbf{T} + h_3(\theta) (\mathbf{T} \boldsymbol{\theta} - 2 \boldsymbol{\theta} \mathbf{T}) - h_4(\theta) (\boldsymbol{\theta} \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta} + h_5(\theta) (\boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{t}) \otimes \boldsymbol{\theta}. \quad (2.126)$$

De acordo com Campello (2005), também é válida a expressão:

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})^T + \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{T} \boldsymbol{\Gamma}. \quad (2.127)$$

e a expressão:

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})^T), \quad (2.128)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = & -\frac{h_3(\boldsymbol{\theta})}{2}(\mathbf{T}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\mathbf{T}) - \frac{h_4(\boldsymbol{\theta})}{2}(\boldsymbol{\theta}\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}\mathbf{t}) \\ & + \frac{h_5(\boldsymbol{\theta})}{2}(\boldsymbol{\theta}^2\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}^2\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Diferenciando a equação (2.126) em relação a ζ tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = & h_4(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')\mathbf{T} + h_5(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')(\mathbf{T}\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}\mathbf{T}) \\ & - h_6(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')(\boldsymbol{\theta}\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}) + h_7(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')(\boldsymbol{\theta}^2\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}) \\ & + h_3(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{T}\boldsymbol{\theta}' - 2\boldsymbol{\theta}'\mathbf{T}) - h_4(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}') \\ & + h_5(\boldsymbol{\theta})[(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}')\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^2\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\theta}'] \end{aligned} \quad (2.130)$$

ou ainda:

$$\mathbf{V}'(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) = \mathbf{U}'(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{T}'}\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{T}}\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}'). \quad (2.131)$$

3 ESTUDO DA FORMULAÇÃO PARA BARRAS RETAS SOB NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Neste capítulo serão apresentados os princípios fundamentais que governam a teoria geral para barras retas de seção transversal rígida, com as quais é possível analisar estruturas através de uma formulação consistente tensorial, sem aproximações por meio de simplificações algébricas, acomodando grandes deslocamentos e grandes rotações, consistindo em uma formulação geometricamente não linear e puramente Lagrangiana Total.

De acordo com Santhymoorthy (1997), a avaliação do comportamento real das estruturas quase sempre perpassa pela consideração de formulações matemáticas não lineares. A não linearidade dos elementos estruturais pode se manifestar de duas maneiras distintas: não linearidade física ou não linearidade geométrica.

A não linearidade física decorre do fato do material apresentar relações não lineares entre tensão e deformação e tem a análise estrutural dependente do histórico de deformação sofrido pelo material, ou seja, o comportamento do material não é elástico linear. A não linearidade geométrica ocorre quando há perda da linearidade entre as relações de deslocamento e deformação, levando a estrutura a grandes mudanças na geometria e necessitando reformular as equações de equilíbrio iniciais. Esta última pode ser classificada em dois tipos: o primeiro, ocorre quando há pequenas deformações, porém, há grandes deslocamentos ou rotações; o segundo, ocorre com grandes deformações, que acompanha geralmente a não linearidade física. (LACERDA, 2014)

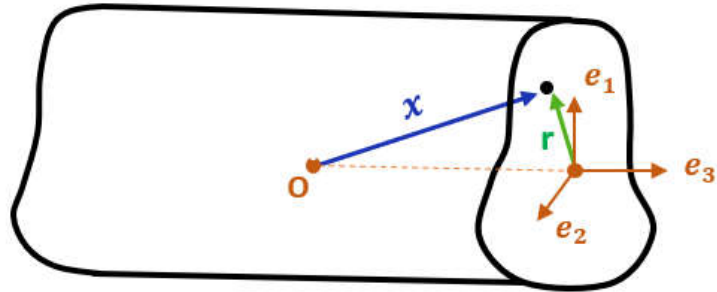
Segundo Campello (2000), a teoria para barras retas sob não linearidade geométrica pode ser considerada como uma generalização da teoria para barras retas no espaço sob linearidade geométrica. A única restrição adotada continua sendo a de que a seção transversal é rígida em seu próprio plano, ou seja, indeformável.

3.1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Neste capítulo, as grandezas vetoriais serão representadas por letras minúsculas em negrito e os tensores por letras maiúsculas em negrito; o produto escalar entre vetores será representado pelo símbolo “.”, o produto vetorial por “ \times ”, o produto escalar entre tensores por “:” e o produto tensorial ou diádico por “ \otimes ”.

O sistema de coordenadas utilizado está representado na Figura 3.1 que também representa os pontos da seção transversal de uma barra de comprimento l no espaço.

Figura 3.1– Representação de uma barra no espaço



Fonte: Adaptado de Campello (2000)

A partir da Figura 3.1, é possível verificar que as coordenadas de um ponto qualquer de uma seção transversal podem ser descritas por:

$$\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \zeta \mathbf{e}_3, \quad \zeta \in [0, l], \quad (3.1)$$

em que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 formam uma base ortonormal; sendo o vetor \mathbf{e}_3 coincidente com o eixo longitudinal da barra e \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são os vetores que definem o plano da seção transversal.

A área da seção transversal é obtida pela expressão:

$$A = \int_A dA = \int_A dx_1 dx_2. \quad (3.2)$$

Sabendo que, na Resistência dos Materiais, conforme apresentado por Timoshenko (1983), os momentos estáticos de uma seção transversal em relação aos eixos 1 e 2 são definidos por:

$$S_1 = \int_A x_2 dA \quad \text{e} \quad S_2 = -\int_A x_1 dA \quad (3.3)$$

As equações em (3.3) podem ser interpretadas como um sistema de equações lineares e podem ser representadas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dA. \quad (3.4)$$

Definindo a matriz $\bar{\mathbf{e}}$ por:

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

pode-se definir o fator $e_{\alpha\beta}$ como um símbolo de permutação, ou seja, o parâmetro $e_{\alpha\beta}$ representa as componentes da matriz \bar{e} , em que α corresponde a linha e β a coluna. Logo, o sistema representado na equação (3.4) pode ser reescrito como:

$$S_\alpha = e_{\alpha\beta} \int_A x_\beta dA. \quad (3.6)$$

A expressão (3.4) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\int_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dA = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\int_A x_\alpha dA = -e_{\alpha\beta} S_\beta. \quad (3.8)$$

As coordenadas g_α do centro de gravidade da seção são obtidas através da consideração representada na expressão:

$$\int_A (x_\alpha - g_\alpha) dA = 0. \quad (3.9)$$

Assim, podem ser obtidas por:

$$g_\alpha = \frac{1}{A} \int_A x_\alpha dA. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) pode ser escrita em forma matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \int_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dA. \quad (3.11)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.11), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Generalizando os termos, a equação (3.12) pode ainda ser reescrita como:

$$g_\alpha = -\frac{1}{A} e_{\alpha\beta} S_\beta. \quad (3.13)$$

Para isolar o momento estático na equação acima, a expressão (3.12) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = -A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Conhecidas as coordenadas do centro de gravidade (g_α), o momento estático da seção pode ser determinado por:

$$S_\alpha = A e_{\alpha\beta} g_\beta. \quad (3.15)$$

Sabendo que são válidas as expressões para os momentos de inércia de uma seção transversal:

$$J_{11} = \int_A x_2^2 dA, \quad J_{22} = \int_A x_1^2 dA \quad \text{e} \quad J_{12} = J_{21} = -\int_A x_1 x_2 dA, \quad (3.16)$$

e utilizando o termo de permutação definido em (3.5), as equações representadas em (3.16) podem ser reescritas na forma de um sistema de equações da forma:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \int_A - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} dA. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) pode ser reescrita por:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \int_A - \begin{bmatrix} e_{11} \cdot e_{11} + e_{12} \cdot e_{21} & e_{11} \cdot e_{12} + e_{12} \cdot e_{22} \\ e_{21} \cdot e_{11} + e_{22} \cdot e_{21} & e_{21} \cdot e_{12} + e_{22} \cdot e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} dA. \quad (3.18)$$

O termo J_{11} da equação (3.18) pode ser escrito por:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -(e_{11} \cdot e_{11} + e_{12} \cdot e_{21}) \cdot \int_A x_2 \cdot x_2 + (e_{11} \cdot e_{12} + e_{12} \cdot e_{22}) \\
&\quad \cdot \int_A x_1 \cdot x_2 = -e_{12} \cdot e_{21} \cdot \int_A x_2 \cdot x_2 = \\
&= e_{21} \cdot e_{21} \cdot \int_A x_2 \cdot x_2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

O termo J_{22} da equação (3.18) pode ser escrito por:

$$\begin{aligned}
J_{22} &= (e_{21} \cdot e_{11} + e_{22} \cdot e_{21}) \cdot \int_A x_1 \cdot x_2 - (e_{21} \cdot e_{12} + e_{22} \cdot e_{22}) \\
&\quad \cdot \int_A x_1 \cdot x_1 = -e_{21} \cdot e_{12} \cdot \int_A x_1 \cdot x_1 \\
&= e_{12} \cdot e_{12} \cdot \int_A x_1 \cdot x_1
\end{aligned} \tag{3.20}$$

O termo J_{12} da equação (3.18) pode ser escrito por:

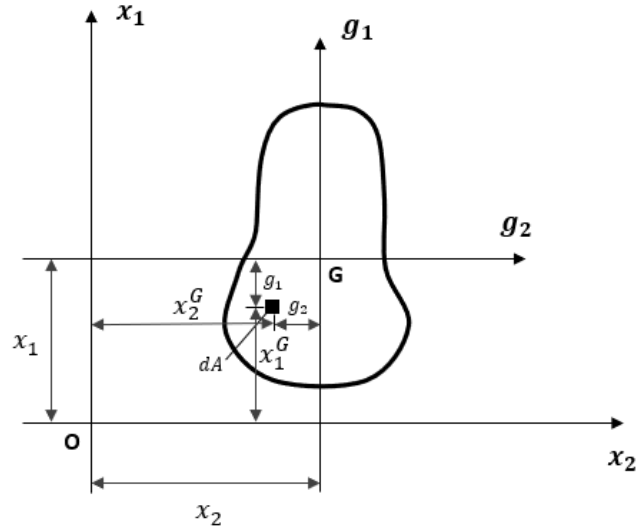
$$\begin{aligned}
J_{12} &= (e_{11} \cdot e_{11} + e_{12} \cdot e_{21}) \cdot \int_A x_1 \cdot x_2 - (e_{11} \cdot e_{12} + e_{12} \cdot e_{22}) \\
&\quad \cdot \int_A x_1 \cdot x_1 = e_{21} \cdot e_{12} \cdot \int_A x_2 \cdot x_1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Podemos adotar uma expressão geral para os momentos de inércia e produto de inércia da seção, ou momentos de segunda ordem da seguinte maneira:

$$J_{\alpha\beta} = e_{\gamma\alpha} e_{\delta\beta} \int_A x_\gamma x_\delta dA. \tag{3.22}$$

A seguir, a Figura 3.2 representa os eixos paralelos de uma seção transversal.

Figura 3.2- Teorema dos eixos paralelos



Fonte: Autor, 2019.

As coordenadas dos pontos para um par de eixos x_α^G com origem no centro de gravidade e paralelos aos eixos x_α serão dadas por:

$$x_\alpha^G = x_\alpha - g_\alpha. \quad (3.23)$$

Conforme Breitschaf e Barbosa (2014), os momentos de inércia para eixos quaisquer podem ser obtidos pelo Teorema da Translação de Eixos ou Teorema de Steiner:

$$J_{\alpha\beta}^G = J_{\alpha\beta} + Ad^2. \quad (3.24)$$

Escrevendo a equação (3.24) como um sistema de equações e utilizando o termo de permutação definido em (3.5), tem-se:

$$\begin{bmatrix} J_{11}^G & J_{12}^G \\ J_{21}^G & J_{22}^G \end{bmatrix} = \int_A - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} dA \\ - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2g_2 & g_1g_2 \\ g_1g_2 & g_1g_1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

A equação (3.25) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} J_{11}^G & J_{12}^G \\ J_{21}^G & J_{22}^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} e_{11} \cdot e_{11} + e_{12} \cdot e_{21} & e_{11} \cdot e_{12} + e_{12} \cdot e_{22} \\ e_{21} \cdot e_{11} + e_{22} \cdot e_{21} & e_{21} \cdot e_{12} + e_{22} \cdot e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 g_2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_1 g_1 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

resultando em:

$$J_{\alpha\beta}^G = J_{\alpha\beta} - e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} A g_\gamma g_\delta. \quad (3.27)$$

O momento polar de inércia é obtido por:

$$J_0 = \int_A x_\alpha x_\alpha dA = J_{11} + J_{22} = J_{\alpha\alpha}. \quad (3.28)$$

Em relação aos eixos x_α^G , o momento polar é definido por:

$$J_0^G = \int_A x_\alpha^G x_\alpha^G dA = \int_A (x_\alpha - g_\alpha)(x_\alpha - g_\alpha) dA. \quad (3.29)$$

Desenvolvendo os termos da integral representada em (3.29) e sabendo que os momentos de inércia em relação ao centro de gravidade são nulos, tem-se:

$$J_0^G = \int_A (x_\alpha^2 - 2x_\alpha g_\alpha + g_\alpha^2) dA = J_0 - A g_\alpha g_\alpha. \quad (3.30)$$

3.2 TEORIA PARA BARRAS RETAS NO ESPAÇO

Na análise do comportamento das estruturas, em termos de deslocamentos, rotações e esforços internos, surgiram, nas últimas três décadas, diversos autores que propuseram teorias e equações matemáticas visando a reprodução da maneira mais realista possível do comportamento dos elementos estruturais. Essas teorias tinham a função de caracterizar os componentes estruturais sujeitos a carregamentos externos, e com o passar dos anos foram sendo constantemente modificadas. Nesse contexto, a teoria clássica de barras é representada por três principais autores, cujas teorias são amplamente difundidas no meio acadêmico, sendo: Bernoulli-Euler, Timoshenko e Vlasov.

A Teoria de Bernoulli-Euler admite que as seções planas ortogonais ao eixo permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação. Entretanto, é sabido que a validade

de tal hipótese é verificada apenas em casos em que a seção transversal apresenta elevada rigidez a torção, ou seja, em que o empenamento e o cisalhamento transversal podem ser desprezados.

A Teoria de Timoshenko admite que as seções transversais do elemento permaneçam planas na configuração deformada, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo da barra, incorporando a influência da distorção da seção em relação ao eixo, causada pelo esforço cortante, ainda que de maneira aproximada.

A Teoria de Vlasov admite que durante a deformação do elemento de barra, a seção transversal é infinitamente rígida no seu próprio plano, porém deformável na direção normal, podendo assim sofrer empenamento. Esta teoria permite analisar o problema da torção não uniforme em estruturas de barras.

De acordo com Mori e Neto (2017), a importante contribuição da teoria de barras de Vlasov foi justamente a consideração do empenamento não uniforme, o que é de grande importância para elementos estruturais de paredes delgadas. O efeito do empenamento é fundamental para análise de diversos tipos de estruturas constituídas de barras esbeltas como, por exemplo, estruturas metálicas de pontes e edificações.

Nesta pesquisa, será utilizada a Teoria Geral de Vigas, considerada na literatura como uma generalização dos modelos de Timoshenko e Vlasov, aplicada a seções prismáticas de paredes finas ou seções delgadas, com a qual é possível analisar a deformação da seção transversal no seu plano e para fora dele (empenamento).

3.2.1 Propriedades setoriais de seções delgadas

Segundo Vlasov (1961), uma viga de parede fina é considerada como um sistema espacial composto de placas capazes de suportar, em cada ponto da superfície média, não só tensões normais e cisalhantes como também bimomentos. A deformação da viga não é analisada sob a hipótese usual das seções planas. Ao invés desta, Vlasov usa a hipótese mais geral e natural de inextensibilidade do contorno e ausência da tensão cisalhante, devido a torção na superfície média.

Ainda de acordo com o autor, esta hipótese constitui a base de uma nova equação de deslocamentos longitudinais na seção transversal. Esta equação é denominada por Vlasov de Lei das Áreas Setoriais e inclui a Lei das Seções Planas como caso particular, permitindo o cálculo das tensões nos casos mais gerais de flexo-torção de vigas.

Para Vlasov, são consideradas vigas de paredes finas as que satisfazem as seguintes relações:

$$\frac{d}{l} \leq 0,1 \quad \text{e} \quad (3.31)$$

$$\frac{t}{d} \leq 0,1 \quad , \quad (3.32)$$

em que

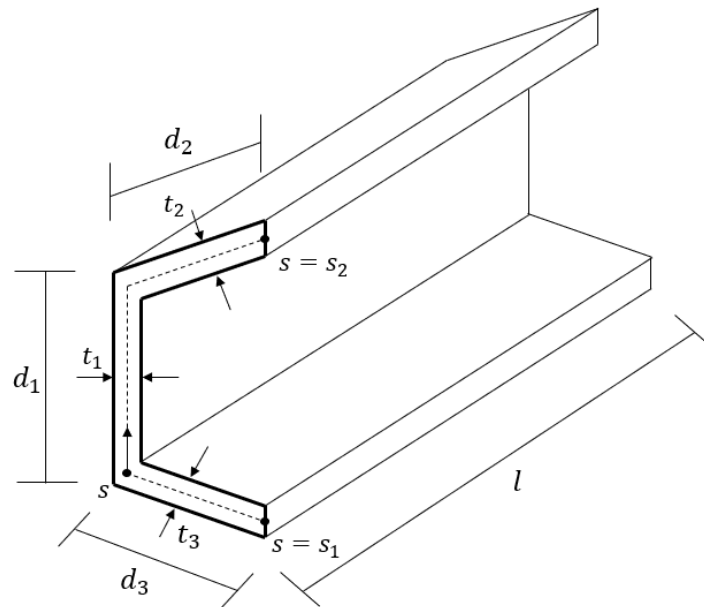
t = espessura da parede;

l = comprimento da viga (vão);

d = dimensão característica da seção transversal.

A seguir, na Figura 3.3, estão representadas as dimensões de uma seção de paredes finas, segundo a teoria de Vlasov.

Figura 3.3 – Dimensões de uma seção delgada aberta



Fonte: Adaptado de Mori e Neto (2017).

Para o estudo das particularidades das vigas de paredes finas torna-se necessário definir determinadas grandezas da geometria dos elementos, até então não utilizadas nas Teorias de

Euler e Timoshenko, obtidas a partir da seção transversal: área setorial e momento estático setorial.

a) Área setorial

Escolhe-se em relação linha média da seção de comprimento de arco s , um ponto exterior C , denominado polo, coincidente com o centro de cisalhamento. Sobre o contorno da linha média da seção são considerados os pontos S_1 e S_2 , distantes um do outro de ds . Ao ligar o ponto C aos pontos S_1 e S_2 , forma-se uma área infinitesimal $d\omega_s$, que é a diferencial da área chamada área setorial; conforme ilustrado na Figura 3.4.

A área setorial, ω , é definida pela integral:

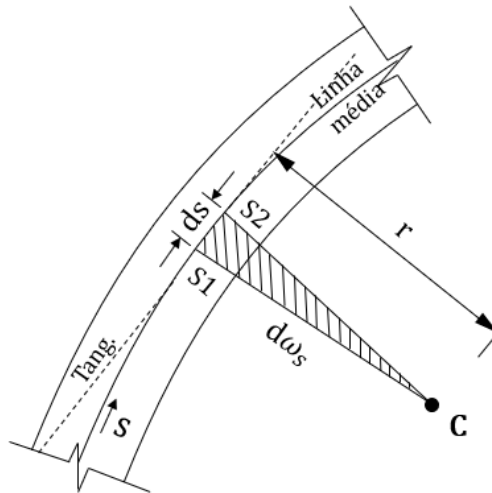
$$\omega = \int_0^s r ds, \quad (3.33)$$

em que:

r = menor distância entre a reta tangente a S_1 e o polo C ;

ds = segmento elementar da linha média.

Figura 3.4 – Representação da área setorial



Fonte: Adaptado de Mori e Neto (2017).

b) Momento estático setorial

É análogo aos momentos de primeira ordem da Resistência dos Materiais, apresentados na seção 3.1, e é determinado através da expressão:

$$S_{\omega} = \int_A \omega dA, \quad (3.34)$$

em que ω corresponde a área setorial da seção transversal.

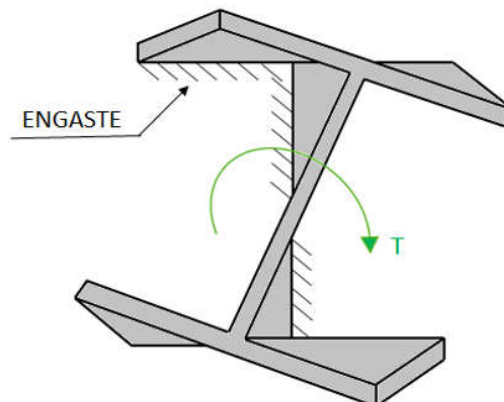
3.2.2 Função Empenamento

A distorção da seção plana causada por deslocamentos longitudinais de seus pontos é chamada de empenamento da seção (VLASOV, 1961). O empenamento ocorre porque esses pontos da seção transversal experimentam deslocamentos diferentes da direção do eixo longitudinal.

Se o empenamento for livre nas extremidades e o momento torsor aplicado for constante, diz-se que o perfil está submetido a uma torção uniforme ou pura ou torção de Saint-Venant. Se, por outro lado, o momento torsor for variável ou o empenamento estiver impedido em alguma seção, diz-se que o perfil está submetido a uma torção não uniforme.

De acordo com Oden e Ripperger (1981), quando um elemento de parede fina tem uma ou mais seções transversais restringidas ao empenamento, como o exposto na Figura 3.5, e está sob a ação de um sistema de cargas externas, este fica sujeito a uma complexa distribuição de tensões normais e transversais que não pode ser determinada por teorias elementares da resistência dos materiais.

Figura 3.5 - Empenamento de uma viga com seção I devido a torção de Vlasov



Fonte: Autor, 2019.

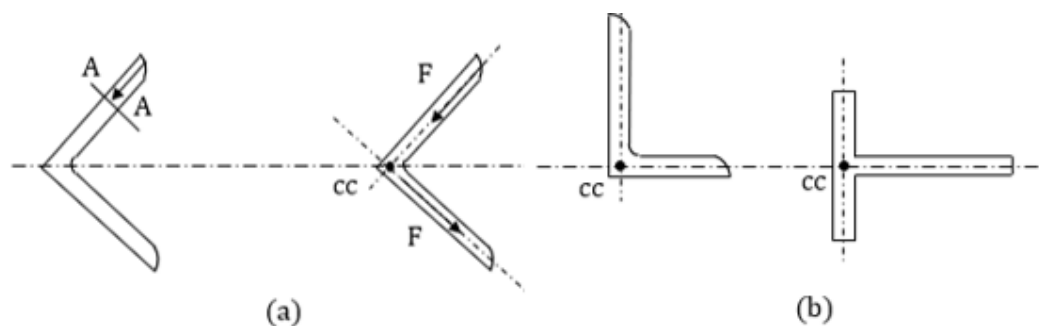
É sabido que, uma seção restringida ao empenamento não pode ter deslocamentos fora de seu próprio plano, então um sistema de tensões normais deve ser desenvolvido para eliminar este empenamento. No geral, estas tensões normais variam de ponto a ponto ao longo do elemento. Portanto, elas são acompanhadas por uma distribuição de tensões cortante não uniforme que, por sua vez, alteram a torção da seção.

Para Oden e Ripperger (1981), em vista da hipótese de que a geometria da seção transversal não se altera durante a deformação, se pode concluir que a seção transversal do elemento se desloca como um corpo rígido, que tem sua posição determinada pelas translações dos pontos sobre a seção, mais os deslocamentos desses pontos devido a rotação da seção sobre algum ponto neste plano.

O ponto no plano da seção transversal sobre o qual a seção rotaciona é chamado de centro de torção, ou centro de cisalhamento, isto é, o único ponto da seção transversal que permanece fixo durante a deformação. A Figura 3.6 apresenta o referido ponto para alguns tipos de perfis.

Figura 3.6 – Centro de cisalhamento para alguns perfis

(a) Perfil L (ou cantoneira) com abas iguais. (b) Perfis L e T



Fonte: Autor, 2019.

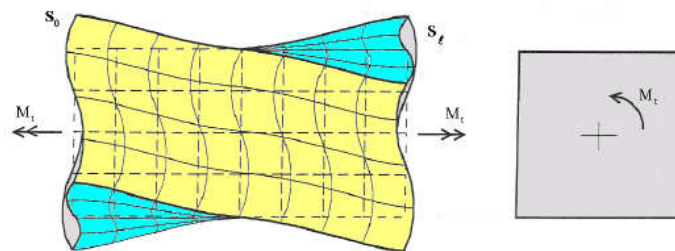
Na torção de Saint-Venant, o empenamento varia livremente nas extremidades e não varia entre as seções transversais distintas. No entanto, isso não ocorre na prática, pois os elementos estruturais possuem vinculações que restringem os deslocamentos. (ISHITANI e BITTENCOURT, 2000) A tendência de provocar empenamentos diferentes em seções vizinhas gera uma série de interferências recíprocas. (LANGENDONCK, 1960-b)

Se a barra for engastada em uma das extremidades, os deslocamentos longitudinais serão ali bloqueados, e aparecerão tensões normais σ_x à seção transversal, provocando alterações locais no campo de deformações e de tensões.

Pelo princípio de Saint-Venant, válido para seções maciças, esta mudança de distribuição de tensões ocorreria apenas nas regiões mais próximas às interferências.

Por exemplo, se a barra da Figura 3.7 estiver engastada em S_0 , ocorrerá torção não-uniforme em suas redondezas. Em regiões mais distantes, como a seção S_l ou outra seção intermediária, pode-se assumir que a torção seja uniforme. Segundo Timoshenko e Goodier (1970), a teoria da torção uniforme fornece resultados suficientemente precisos para que possa ser utilizada nestas regiões.

Figura 3.7 – Torção de barra prismática com base retangular



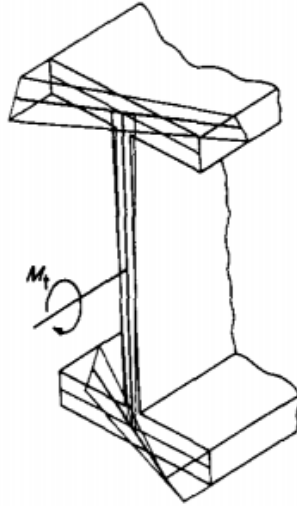
Fonte: Silva (2005)

Entretanto, para as seções delgadas com empenamento restringido, as tensões causadas pelo empenamento decaem muito lentamente a partir de seus pontos de aplicação e podem constituir o principal sistema de tensões da estrutura. Nesse caso, a influência do empenamento pode ser considerável e devem ser utilizadas as hipóteses da flexo-torção de Vlasov. Assim, pode-se considerar o valor da função empenamento, ψ , constante ao longo da espessura, de modo que a função corresponderá exatamente à área setorial ω da seção transversal.

Conforme apresentado por Cristino (2015), o empenamento na seção transversal pode surgir de forma primária ou secundária. O empenamento primário corresponde ao empenamento da linha média da seção transversal e o empenamento secundário corresponde ao empenamento na espessura da parede em relação a linha média da seção transversal.

O efeito do empenamento secundário assume uma particular relevância no caso de seções que não exibem o empenamento primário, como por exemplo seções retangulares esbeltas, seções em T e cantoneiras. A seguir, a Figura 3.8 apresenta os empenamentos primários e secundários na seção transversal.

Figura 3.8 – Empenamento primário e secundário de uma seção aberta de paredes finas



Fonte: Attard (1986)

Diante deste contexto, a função utilizada nesta pesquisa em cada segmento retangular da seção transversal para determinar o empenamento, também utilizada por Lago (2012) foi:

$$\psi(x, y) = \omega_{Vlasov} + \psi_{Fúria}, \quad (3.35)$$

em que, para determinar a área setorial principal de Vlasov, foi proposta a divisão da seção em elementos que compõem a sua linha média com a aplicação da equação:

$$\omega_{Vlasov} = (y_i - y_D)(x_j - x_D) - (x_i - x_D)(y_j - y_D) + \omega_0, \quad (3.36)$$

onde:

ω corresponde à área setorial principal da teoria de Vlasov;

x_i, y_i são as coordenadas do nó inicial da barra analisada;

x_j, y_j são as coordenadas do nó final da barra analisada;

x_D, y_D são as coordenadas do centro de torção da barra analisada;

ω_0 corresponde ao valor da função empenamento.

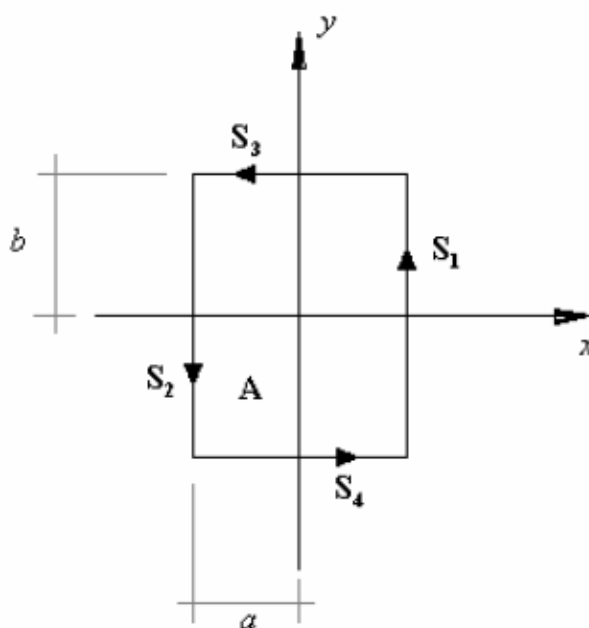
E o termo $\psi_{Fúria}$ se refere à equação proposta por Silva (2005) para a análise do empenamento em barras de seção transversal retangular maciça, dada por:

$$\psi_{Fúria}(x, y) = \psi_0 \quad (3.37)$$

$$\frac{(a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6)xy + \frac{35}{12}a^2b^2(-4x^3y + 4xy^3)}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6},$$

onde a é a semi base da seção transversal e b a semi altura, conforme ilustrado na Figura 3.9 que contém a seção em forma de retângulo.

Figura 3.9 – Seção em forma de retângulo



Fonte: Silva (2005)

É importante ressaltar que, a área setorial de Vlasov leva em consideração somente o empenamento primário das seções transversais. Neste caso, para que o empenamento secundário seja considerado, é necessário adicionar a função cúbica para domínios retangulares, apresentada na equação (3.37).

Por fim, define-se, a seguir, outras propriedades setoriais necessárias no desenvolvimento da formulação: o momento de inércia a torção e o momento de inércia ao empenamento.

Conforme demonstrado por Pimenta (1999), tem-se:

$$J_T = J_0 + e_{\alpha\beta} \int_A x_\alpha \psi_{0,\beta} dA, \quad (3.38)$$

como o momento de inércia à torção de Saint-Venant, em relação ao eixo da barra, e:

$$J_T^S = J_0^S + e_{\alpha\beta} \int_A (x_\alpha - s_\alpha) \psi_{,\beta} dA \quad (3.39)$$

como o momento de inércia à torção de Saint-Venant, em relação aos eixos paralelos x_α , que passa pelo centro de cisalhamento; em que J_0^S é o momento de inércia polar também em relação ao mesmo eixo.

Ainda de acordo com o demonstrado por Pimenta (1999), são válidas as seguintes relações:

$$\int_A \psi_{,\alpha} dA = e_{\alpha\beta} \int_A (x_\beta - s_\beta) dA = S_\alpha^S, \quad (3.40)$$

em que S_α^S é o momento estático em relação aos eixos paralelos aos eixos x_α , passando pelo centro de cisalhamento, e:

$$e_{\alpha\beta} \int_A x_\alpha \psi_{,\beta} dA = J_T - J_0 + A g_\alpha s_\alpha, \quad (3.41)$$

e

$$\int_A \psi_{,\alpha} \psi_{,\alpha} dA = J_0^S - J_T^S. \quad (3.42)$$

Por fim, define-se o momento de inércia ao empenamento, também conhecido por C_ω , será definido como:

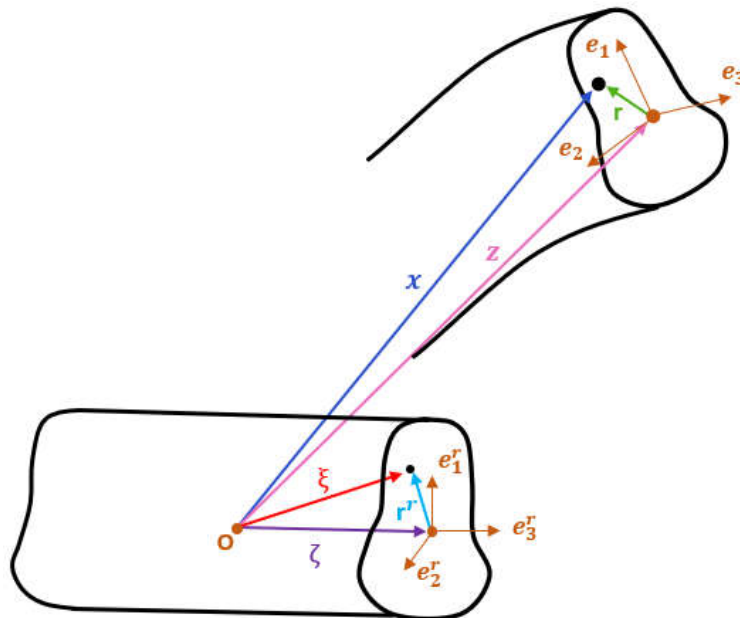
$$C_\omega = J_\psi = \int_A \psi^2 dA. \quad (3.43)$$

3.3 CINEMÁTICA DAS BARRAS

Como hipótese cinemática, supõe-se que as seções transversais inicialmente ortogonais ao eixo da barra permaneçam indeformáveis na projeção em seu plano, porém deixam de ser planas, devido a consideração do empenamento por torção.

Adota-se uma barra reta, de comprimento l , que na configuração indeformada (ou de referência) é definida uma base local ortonormal de vetores $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$ com \mathbf{e}_3^r ao longo do eixo da barra, conforme a Figura 3.10.

Figura 3.10 – Representação do movimento de uma barra no espaço



Fonte: Adaptado de Campello (2000).

Nesta configuração, observando a Figura 3.10, os pontos da barra podem ser descritos por uma função vetorial dada por:

$$\xi = \zeta + \mathbf{r}^r, \quad (3.44)$$

onde:

$$\zeta = \zeta \mathbf{e}_3^r, \zeta \in [0, l] \quad (3.45)$$

descreve a posição dos pontos do eixo da barra e:

$$\mathbf{r}^r = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r \quad (3.46)$$

descreve a posição relativa dos demais pontos da seção transversal.

O índice “ r ” sobre uma grandeza implica que ela se encontra na configuração de referência.

Após a deformação (na configuração deformada ou configuração corrente), é definida uma outra base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormal de vetores, chamada de base local móvel, onde as

seções transversais estão contidas nos planos ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Os pontos da barra passam a ser descritos por uma função vetorial $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\xi, t)$, dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3 \quad (3.47)$$

em que

$$\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}(\zeta, t) \quad (3.48)$$

descreve o movimento do eixo da barra e

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\xi, t) \quad (3.49)$$

descreve o movimento relativo dos demais pontos da seção em relação ao eixo deformado. Além disso, $\psi = \hat{\psi}(\xi, t)$ é a função empenamento relativa ao centro de cisalhamento e $p = \hat{p}(\zeta, t)$ é o parâmetro associado a ψ que dá a sua intensidade.

Conforme observado por Campello (2000), o parâmetro p não tem nenhuma relação com as rotações específicas da seção; passando a ser um grau de liberdade adicional para os pontos da barra, e completamente independente dos demais.

O vetor \mathbf{r} é dado por:

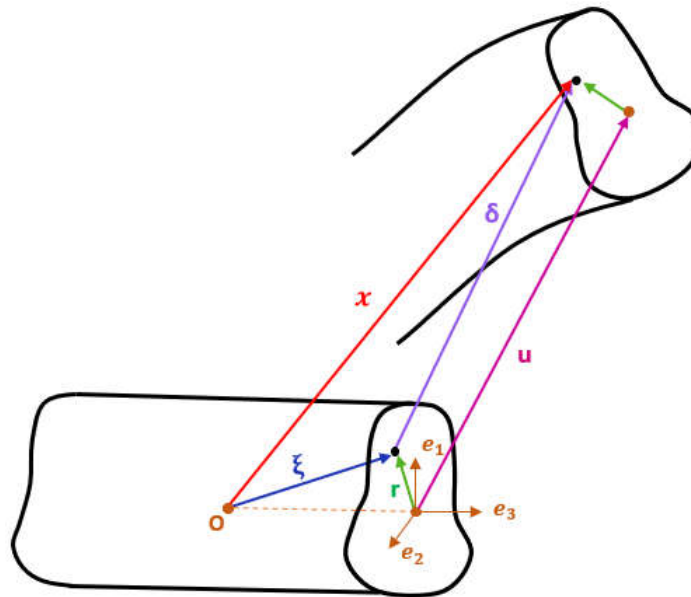
$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{r}^r = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (3.50)$$

Em (3.50), sendo $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}(\zeta, t)$ o tensor ortogonal das rotações das seções transversais e $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i^r$ formam uma base vetorial ortonormal, chamada de base local móvel (que é a base \mathbf{e}_i^r rotacionada). Note-se que \mathbf{e}_3 permanece normal às seções transversais, mas não é necessariamente coincidente com o eixo deformado da barra; enquanto \mathbf{r} permanece contido nos seus planos.

O tensor das rotações das seções transversais \mathbf{Q} pode ser obtido através da fórmula de Euler-Rodrigues, detalhada na seção 2. Através destas expressões, as rotações no espaço tridimensional são tratadas sem nenhuma aproximação geométrica.

A seguir, será feita a análise dos deslocamentos da barra a partir da Figura 3.11, que representa a deformação de uma barra no espaço.

Figura 3.11 – Deformação de uma barra no espaço



Fonte: Adaptado de Campello (2000).

Através da Figura 3.11, é possível verificar que o vetor δ dos deslocamentos dos pontos da barra pode ser expresso por:

$$\delta = \mathbf{x} - \xi \quad (3.51)$$

E, com o auxílio da Figura 3.10 e da Figura 3.11, é possível observar que o vetor \mathbf{u} dos deslocamentos dos pontos do eixo pode ser dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} - \zeta, \quad (3.52)$$

de maneira que as suas componentes caracterizam os graus de liberdade de translação das seções transversais.

3.3.1 Deformações

Das equações (3.47) e (3.50) tem-se:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + x_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \psi \mathbf{e}_3. \quad (3.53)$$

Sabendo que

$$(\cdot)_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad \text{e} \quad (\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (3.54)$$

o tensor das transformações \mathbf{F} , obtido através da diferenciação da posição na configuração corrente em relação à posição na configuração de referência, conforme apresentado por Reddy (2013), pode ser representado por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{x}' \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (3.55)$$

Por diferenciação tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial(\mathbf{z} + \mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3)}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial(\mathbf{Q}\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3)}{\partial x_\alpha}. \quad (3.56)$$

Substituindo a equação (3.46) na expressão (3.56), pode-se dizer que:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial(x_\alpha \mathbf{Q}\mathbf{e}_\alpha^r + \psi p \mathbf{e}_3)}{\partial x_\alpha}. \quad (3.57)$$

Resolvendo a diferenciação, a equação (3.57) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_\alpha} = \mathbf{Q}\mathbf{e}_\alpha^r + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\alpha + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3 \quad (3.58)$$

e

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z}' + \mathbf{r}' + (\psi p \mathbf{e}_3)'. \quad (3.59)$$

Desenvolvendo a derivação, em relação a ζ , da equação (3.59), tem-se:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z}' + \mathbf{Q}'\mathbf{r}^r + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \mathbf{Q}' \mathbf{e}_3^r. \quad (3.60)$$

em que, substituindo os termos na configuração de referência pelos seus respectivos valores em termos de configuração corrente, a equação (3.60) pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z}' + \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T \mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T \mathbf{e}_3. \quad (3.61)$$

A expressão (3.61) pode ainda ser simplificada e representada por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z}' + \mathbf{K}\mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \mathbf{K} \mathbf{e}_3. \quad (3.62)$$

em que

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}' \mathbf{Q}'^T \quad (3.63)$$

é um tensor antissimétrico cujo vetor axial é designado por $\boldsymbol{\kappa}$ e $(\cdot)^T$ denota a operação de transposição de matriz ou tensor.

Derivando a equação (3.52) em relação a ζ e reorganizando-a convenientemente, tem-se:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\zeta}' = \mathbf{u}' + \mathbf{e}_3^r. \quad (3.64)$$

Sabendo que a deformação de uma fibra é definida pela equação:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial l - \partial l^r}{\partial l^r}, \quad (3.65)$$

e com o auxílio da Figura 3.10 e a partir da equação (3.65), o vetor das deformações no espaço corrente pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial(\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \quad (3.66)$$

Através da equação (3.45) é possível perceber que a equação (3.66) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial(\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta} \mathbf{e}_3)}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \quad (3.67)$$

Desenvolvendo a diferenciação representada na equação (3.67) e utilizando a igualdade representada na equação (3.64), o vetor das deformações pode finalmente ser representado por:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{z}' - \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}' + \mathbf{e}_3^r - \mathbf{e}_3. \quad (3.68)$$

Desta forma, utilizando a equação (3.64), a equação (3.62) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{e}_3^r + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_3. \quad (3.69)$$

Substituindo (3.68) em (3.69), obtém-se:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_3. \quad (3.70)$$

Após a substituição das equações (3.58) e (3.70) na equação (3.55), tem-se:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{e}_\alpha + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + (\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (3.71)$$

Reorganizando os termos da equação (3.71), tem-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r} + \psi p' \mathbf{e}_3 + \psi p \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (3.72)$$

Além disso, sabendo que o tensor das rotações pode ser escrito como:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3^r, \quad (3.73)$$

o tensor gradiente da transformação pode ser determinado através da expressão:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) + \psi p' \mathbf{e}_3] \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (3.74)$$

Utilizando a transformação dos vetores:

$$\boldsymbol{\eta}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta}, \quad (3.75)$$

e

$$\boldsymbol{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}, \quad (3.76)$$

a equação (3.74) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} + \psi_{,\alpha} p \mathbf{Q} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}^r + \mathbf{Q} \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{Q} \mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{Q} \mathbf{e}_3^r) + \psi p' \mathbf{Q} \mathbf{e}_3^r] \otimes \mathbf{e}_3^r, \quad (3.77)$$

ou ainda:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \{ \mathbf{I} + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) + \psi p' \mathbf{e}_3^r] \otimes \mathbf{e}_3^r \}. \quad (3.78)$$

Definindo o vetor das deformações em um ponto qualquer da seção por:

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) + \psi p' \mathbf{e}_3^r. \quad (3.79)$$

Reescrevendo a equação (3.79) na forma matricial e utilizando a expressão (3.50), tem-se:

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \begin{bmatrix} \gamma_1^r \\ \gamma_2^r \\ \gamma_3^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1^r \\ \eta_2^r \\ \eta_3^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1^r \\ \kappa_2^r \\ \kappa_3^r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi p' \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Na expressão (3.80), γ_1^r e γ_2^r são as deformações transversais e γ_3^r as deformações longitudinais. As deformações longitudinais também podem ser representadas por:

$$\gamma_3^r = \varepsilon. \quad (3.81)$$

Desenvolvendo os termos da equação (3.81), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^r \\ \gamma_2^r \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1^r - x_2 \kappa_3^r + \psi p \kappa_2^r \\ \eta_2^r + x_1 \kappa_3^r - \psi p \kappa_1^r \\ \eta_3^r - x_1 \kappa_2^r + x_2 \kappa_1^r + \psi p' \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

A equação (3.78) pode ser simplificada da forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \{ \mathbf{I} + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r \}. \quad (3.83)$$

Considerando

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{I} + \psi_{,\alpha} p \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r, \quad (3.84)$$

A equação (3.84) pode ser escrita na forma matricial, como:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_1^r \\ 0 & 1 & \gamma_2^r \\ p\psi_{,1} & p\psi_{,2} & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

A expressão (3.83) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}^r. \quad (3.86)$$

Sabendo que a velocidade de um ponto genérico da barra é dada pela diferenciação do seu deslocamento em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\delta} = (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\xi}) = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\xi} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.87)$$

Com o auxílio da equação (3.59), é possível perceber que a equação (3.87) pode ser reescrita como:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{r}} + (\psi\dot{p}\mathbf{e}_3). \quad (3.88)$$

A partir de (3.64) tem-se ainda que:

$$\dot{\delta} = (\dot{\mathbf{u}} + \dot{\zeta}) + \dot{\mathbf{r}} + (\psi\dot{p}\mathbf{e}_3). \quad (3.89)$$

Desenvolvendo a derivada temporal obtém-se:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + \dot{\zeta} + \dot{\mathbf{r}} + \psi\dot{p}\mathbf{e}_3 + \psi p\dot{\mathbf{e}}_3. \quad (3.90)$$

Considerando que:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}\mathbf{e}_3^r \quad (3.91)$$

e sua derivada:

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_3^r \quad (3.92)$$

a equação representada em (3.90) pode ser rescrita como:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{r}^r + \psi\dot{p}\mathbf{e}_3 + \psi p\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_3^r. \quad (3.93)$$

Reescrevendo (3.93) em termos de configuração corrente, tem-se:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{r} + \psi\dot{p}\mathbf{e}_3 + \psi p\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{e}_3, \quad (3.94)$$

em que $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ é o tensor antissimétrico das velocidades angulares, definido no capítulo 2.

Reorganizando e simplificando a equação (3.94) obtém-se:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r} + \psi p\mathbf{e}_3) + \psi\dot{p}\mathbf{e}_3, \quad (3.95)$$

Sendo $\boldsymbol{\omega}$ o vetor axial do tensor $\boldsymbol{\Omega}$, a equação (3.95) pode ser reescrita como:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \psi p\mathbf{e}_3) + \psi\dot{p}\mathbf{e}_3. \quad (3.96)$$

Substituindo (2.79) em (3.96) tem-se:

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) + \psi \dot{p} \mathbf{e}_3. \quad (3.97)$$

Sabendo que o tensor antissimétrico \mathbf{K} das curvaturas da viga é dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T, \quad (3.98)$$

analogamente ao processo de obtenção de $\boldsymbol{\omega}$, é possível concluir que o vetor axial de \mathbf{K} pode ser representado pela equação:

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta}', \quad (3.99)$$

de forma que o vetor axial na configuração de referência seja dado por:

$$\boldsymbol{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\theta}'. \quad (3.100)$$

Derivando a expressão (3.99) em relação ao tempo tem-se:

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}'\dot{\mathbf{Q}}^T. \quad (3.101)$$

Reorganizando os termos da equação (3.101), tem-se:

$$\dot{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{Q}'\dot{\mathbf{Q}}^T. \quad (3.102)$$

A partir da manipulação conveniente da equação (3.102), pode-se reescrever:

$$\dot{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q}. \quad (3.103)$$

Sabendo, a partir da equação (2.58), é válida a expressão:

$$\boldsymbol{\Omega}^T = \dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q}, \quad (3.104)$$

a equação (3.103) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{Q}}' = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\dot{\mathbf{Q}}^T\boldsymbol{\Omega}^T\mathbf{Q}. \quad (3.105)$$

Sabendo que $\boldsymbol{\Omega}$ é um tensor antissimétrico e, por isso, é válida a expressão: $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, e utilizando a equação (3.98), tem-se que:

$$\dot{\mathbf{Q}}' = (\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Omega})\mathbf{Q}. \quad (3.106)$$

Derivando o tensor das velocidades angulares, definido em (2.58), em relação a ζ , obtém-se:

$$\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}'^T. \quad (3.107)$$

Substituindo a equação (3.106) na equação (3.107), chega-se a:

$$\boldsymbol{\Omega}' = (\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Omega})\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}'^T. \quad (3.108)$$

Sabendo que, a partir da equação (3.98), é válida a expressão:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{Q}'^T\mathbf{Q}, \quad (3.109)$$

e simplificando os termos, a equação (3.108) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Omega} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}^T. \quad (3.110)$$

Substituindo a equação (2.58) na equação (3.110) e sabendo que \mathbf{K} é um tensor antissimétrico, ou seja, é válida a expressão: $\mathbf{K}^T = -\mathbf{K}$, tem-se:

$$\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{K}. \quad (3.111)$$

A partir da equação (3.111), pode-se perceber que a derivada do vetor axial das rotações em relação a ζ pode ser definida por:

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}. \quad (3.112)$$

O gradiente das velocidades será obtido através da diferenciação do tensor das transformações em relação ao tempo, dada por:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^r + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r. \quad (3.113)$$

Reescrevendo (3.113) em termos de configuração corrente obtém-se:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r. \quad (3.114)$$

Com o auxílio da equação (2.58) na equação (3.114), tem-se:

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}^r. \quad (3.115)$$

Derivando a equação (3.78) em relação ao tempo, chega-se a:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}}^r = & \psi_{,\alpha} \dot{p} e_3^r \otimes e_\alpha^r + [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p e_3^r) \\ & + \psi \dot{p} \boldsymbol{\kappa}^r \times e_3^r + \psi \dot{p}' e_3^r] \otimes e_3^r.\end{aligned}\quad (3.116)$$

Substituindo a equação (3.116) na equação (3.115) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}} = & \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{Q} \{ \psi_{,\alpha} \dot{p} e_3^r \otimes e_\alpha^r + [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{r}^r + \\ & \psi p e_3^r) + \psi \dot{p} \boldsymbol{\kappa}^r \times e_3^r + \psi \dot{p}' e_3^r] \otimes e_3^r \}.\end{aligned}\quad (3.117)$$

Desta forma, a diferenciação no tempo das equações (3.75) e (3.76) será:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \dot{\mathbf{Q}}^T \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}^T \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.118)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r = \dot{\mathbf{Q}}^T \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{Q}^T \dot{\boldsymbol{\kappa}}. \quad (3.119)$$

Sabendo que a derivada em relação ao tempo do vetor $\boldsymbol{\eta}$ equivale a:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\mathbf{u}}' - \dot{e}_3, \quad (3.120)$$

substituindo a equação (3.92) na equação (3.118), chega-se a:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{Q}} e_3^r. \quad (3.121)$$

Com o auxílio da expressão desenvolvida em (3.104) e substituindo as equações (3.68) e (3.121) na equação (3.118), obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{u}' + e_3^r - e_3) + \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{Q}} e_3^r). \quad (3.122)$$

Com o auxílio da equação (2.58), a equação (3.122) pode ser reescrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{u}' + e_3^r - e_3) + \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}' - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Q} e_3^r). \quad (3.123)$$

Sabendo que é válida a expressão $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$ e utilizando a equação (3.91) pode-se escrever a equação (3.123) como:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \mathbf{Q}^T [-\boldsymbol{\Omega} (\mathbf{z}' - e_3) + \dot{\mathbf{u}}' - \boldsymbol{\Omega} e_3]. \quad (3.124)$$

Reescrevendo a equação (3.124) na forma vetorial, tem-se;

$$\dot{\eta}^r = \mathbf{Q}^T(-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 + \dot{\mathbf{u}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3). \quad (3.125)$$

Reorganizando os termos da equação (3.125), chega-se a:

$$\dot{\eta}^r = \mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{u}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}'). \quad (3.126)$$

Substituindo a equação (2.79) na equação (3.126), tem-se:

$$\dot{\eta}^r = \mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}})). \quad (3.127)$$

Com o auxílio das expressões desenvolvidas em (3.104) e (3.112), obtém-se:

$$\dot{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}). \quad (3.128)$$

Reorganizando os termos da expressão (3.128) e sabendo que é válida a expressão $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, pode-se reescrever a equação como:

$$\dot{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T(-\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}). \quad (3.129)$$

Reescrevendo a equação (3.129) na forma vetorial, tem-se:

$$\dot{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T(-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}), \quad (3.130)$$

ou ainda:

$$\dot{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}'. \quad (3.131)$$

Por fim, com o auxílio da equação (2.79), a equação (3.131) pode ser escrita como:

$$\dot{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}'\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}'). \quad (3.132)$$

De forma análoga a obtenção do tensor $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$, na equação (2.101), obtém-se o tensor $\boldsymbol{\Gamma}'$, conforme a expressão a seguir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}' = & h_2(\theta)\boldsymbol{\theta}' + h_3(\theta)(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}' + \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\theta}) + h_4(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\theta} + \\ & h_5(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\theta}^2. \end{aligned} \quad (3.133)$$

O vetor das deformações generalizadas $\boldsymbol{\varepsilon}$ será definido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^r \\ \boldsymbol{\kappa}^r \\ \dot{p} \\ \dot{p}' \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Derivando em função do tempo a equação (3.134), tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \\ \dot{p} \\ \dot{p}' \end{bmatrix}. \quad (3.135)$$

Substituindo as equações (3.127) e (3.132) na expressão acima, tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}})) \\ \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Gamma}'\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}') \\ \dot{p} \\ \dot{p}' \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

A expressão acima pode ser ainda ser reescrita por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{Q}^T\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Gamma}'\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}' \\ \dot{p} \\ \dot{p}' \end{bmatrix}. \quad (3.137)$$

Na equação (3.137), o termo \mathbf{Z}' corresponde ao tensor antissimétrico definido como:

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 0 & -z'_3 & z'_2 \\ z'_3 & 0 & -z'_1 \\ -z'_2 & z'_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.138)$$

cujo vetor axial é \mathbf{z}' e está representado em (3.64).

Definindo:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}^T = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (3.139)$$

a expressão (3.137) pode ainda ser reescrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}' \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}' & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}' \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}' \\ \dot{p}' \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Definindo a matriz expressa na equação (3.140) como \mathbf{B}_θ , tem-se:

$$\mathbf{B}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}' \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}' & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

A matriz \mathbf{B}_θ pode ainda ser decomposta da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}' \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}' & \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$

Reescrevendo o segundo termo da equação (3.140), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}' \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}' \\ \dot{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \zeta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \zeta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{p} \end{bmatrix}. \quad (3.143)$$

Observando a equação (3.143), podemos definir Δ como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \zeta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \zeta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 1 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

e a derivada no tempo do vetor dos deslocamentos generalizados $\dot{\mathbf{d}}_\theta$, por:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{p} \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

O vetor dos deslocamentos generalizados \mathbf{d}_{θ} é, portanto, definido como:

$$\mathbf{d}_{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \\ p \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

Portanto, a equação (3.140) pode ser escrita por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}_{\theta} \Delta \dot{\mathbf{d}}_{\theta}. \quad (3.147)$$

3.3.2 Tensões

Conforme Reddy (2013), para usar a descrição Lagrangiana, na mecânica dos sólidos, as equações de movimento ou o equilíbrio de um corpo material que são encontradas na configuração deformada devem ser expressas em termos da configuração de referência conhecida.

Neste caso, pode-se utilizar o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, \mathbf{P} , que é energeticamente conjugado com o gradiente das velocidades, $\dot{\mathbf{F}}$, para representar as tensões atuantes na barra. Assim, o tensor \mathbf{P} pode ser expresso por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11}^r & P_{12}^r & P_{13}^r \\ P_{21}^r & P_{22}^r & P_{23}^r \\ P_{31}^r & P_{32}^r & P_{33}^r \end{bmatrix}. \quad (3.148)$$

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, \mathbf{P} , pode ser escrito em função dos seus vetores coluna como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{t}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\alpha}^r + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{e}_3^r. \quad (3.149)$$

Na equação (3.149), \mathbf{t}_{α} são as tensões atuantes nos planos normais aos vetores \mathbf{e}_{α}^r na configuração de referência e $\boldsymbol{\tau}$ é a tensão atuante no plano da seção transversal, ou seja, normal ao vetor \mathbf{e}_3^r ; ambos por unidade de área da configuração de referência. Esses vetores também podem ser representados como:

$$\mathbf{t}_\alpha = \mathbf{P}\mathbf{e}_\alpha^r \quad (3.150)$$

e

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}\mathbf{e}_3^r. \quad (3.151)$$

Assim, tomando como exemplo o eixo 1, tem-se:

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{P}\mathbf{e}_1^r = \begin{bmatrix} P_{11}^r & P_{12}^r & P_{13}^r \\ P_{21}^r & P_{22}^r & P_{23}^r \\ P_{31}^r & P_{32}^r & P_{33}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^r \\ P_{21}^r \\ P_{31}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^r \\ t_{21}^r \\ t_{31}^r \end{bmatrix}, \quad (3.152)$$

para o eixo 2, tem-se:

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{P}\mathbf{e}_2^r = \begin{bmatrix} P_{11}^r & P_{12}^r & P_{13}^r \\ P_{21}^r & P_{22}^r & P_{23}^r \\ P_{31}^r & P_{32}^r & P_{33}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{12}^r \\ P_{22}^r \\ P_{32}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12}^r \\ t_{22}^r \\ t_{32}^r \end{bmatrix}, \quad (3.153)$$

e para o eixo 3, tem-se:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}\mathbf{e}_3^r = \begin{bmatrix} P_{11}^r & P_{12}^r & P_{13}^r \\ P_{21}^r & P_{22}^r & P_{23}^r \\ P_{31}^r & P_{32}^r & P_{33}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{13}^r \\ P_{23}^r \\ P_{33}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{13}^r \\ \tau_{23}^r \\ \tau_{33}^r \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

Observado as expressões (3.152) a (3.154), os vetores \mathbf{t}_α e $\boldsymbol{\tau}$ podem ainda ser reescritos na sua forma indicial generalizada como:

$$\mathbf{t}_\alpha = t_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta + t_{3\alpha}\mathbf{e}_3 \quad (3.155)$$

e

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha\mathbf{e}_\alpha + \sigma\mathbf{e}_3, \quad (3.156)$$

em que τ_α e σ são as tensões de cisalhamento e a tensão normal, respectivamente, atuantes na seção transversal deformada.

3.4 ESTÁTICA DAS BARRAS

A estática das barras compreende o estudo da potência dos esforços internos e externos.

3.4.1 Potência dos Esforços Internos

De acordo com Pimenta (2006), a potência dos esforços internos de uma barra, de comprimento inicial l , é definida por:

$$P_{int} = \int_0^l \int_A \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dA d\zeta. \quad (3.157)$$

Com o auxílio da equação (3.117), o termo integrando da equação (3.157) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{P} : \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \\ \mathbf{P} : \mathbf{Q} \{ &\psi_{,\alpha} \dot{p} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &+ \psi \dot{p} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r] \otimes \mathbf{e}_3^r \}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Como é válida a seguinte expressão:

$$\mathbf{P} : \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} = \mathbf{P} \mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{P} \mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.159)$$

e sabendo que $\mathbf{P} \mathbf{F}^T$ é simétrico, ou seja, é válida a relação:

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T, \quad (3.160)$$

então $\mathbf{P} \mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0$, pois o produto escalar de um tensor simétrico por um tensor antissimétrico é nulo. Desta forma, a equação (3.158) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{P} : \mathbf{Q} \{ \psi_{,\alpha} \dot{p} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &+ \psi \dot{p} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r] \otimes \mathbf{e}_3^r \}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Sabendo que $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, pode-se ainda escrever a equação (3.161) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{P} : \{ \psi_{,\alpha} \dot{p} \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &+ \psi \dot{p} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r] \otimes \mathbf{e}_3^r \}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Substituindo as equações (3.150) e (3.151), pode-se reescrever (3.162) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= (\mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\alpha) \cdot \psi_{,\alpha} \dot{p} \mathbf{e}_3^r + (\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\tau}) \cdot [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &+ \psi \dot{p} \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r]. \end{aligned} \quad (3.163)$$

A partir da equação (3.163), é possível concluir a validade da relação entre os vetores:

$$\mathbf{t}_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\alpha = t_{\beta\alpha} \mathbf{e}_\beta^r + t_{3\alpha} \mathbf{e}_3^r \quad (3.164)$$

e

$$\boldsymbol{\tau}^r = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r + \sigma \mathbf{e}_3^r, \quad (3.165)$$

em que:

$$\mathbf{t}_1^r = \begin{bmatrix} \tau_{11}^r \\ \tau_{21}^r \\ \tau_{31}^r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2^r = \begin{bmatrix} \tau_{12}^r \\ \tau_{22}^r \\ \tau_{32}^r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}^r = \begin{bmatrix} \tau_{13}^r \\ \tau_{23}^r \\ \tau_{33}^r \end{bmatrix}. \quad (3.166)$$

Assim, a expressão representada em (3.163) pode, mais uma vez, ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{t}_\alpha^r \cdot \psi_{,\alpha} \dot{p} \mathbf{e}_3^r + \boldsymbol{\tau}^r \cdot [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &\quad + \psi \dot{p} \boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r]. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Substituindo a equação (3.167) na equação (3.163), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} &= \psi_{,\alpha} \dot{p} t_{3\alpha} + \boldsymbol{\tau}^r \cdot [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &\quad + \psi \dot{p} \boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r]. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Substituindo (3.168) em (3.157), tem-se:

$$\begin{aligned} P_{int} &= \int_0^l \int_A \{ \psi_{,\alpha} \dot{p} t_{3\alpha} + \boldsymbol{\tau}^r \cdot [\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \\ &\quad + \psi \dot{p} \boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{e}_3^r + \psi \dot{p}' \mathbf{e}_3^r] \} dA d\zeta. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Definindo os termos:

$$\mathbf{n}^r = \int_A \boldsymbol{\tau}^r dA = V_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r + N \mathbf{e}_3^r, \quad (3.170)$$

$$\mathbf{m}^r = \int_A (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) \times \boldsymbol{\tau}^r dA = M_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r + T \mathbf{e}_3^r, \quad (3.171)$$

$$Q = \int_A [t_{3\alpha} \psi_{,\alpha} + \boldsymbol{\tau}^r \cdot (\boldsymbol{\kappa}^r \times \mathbf{e}_3^r) \psi] dA, \quad (3.172)$$

$$B = \int_A (\boldsymbol{\tau}^r \cdot \mathbf{e}_3^r) \psi dA = \int_A \sigma \psi dA, \quad (3.173)$$

em que \mathbf{n}^r , \mathbf{m}^r , Q e B representam os esforços internos relativos as forças, momentos, bicortante e bimomentos, respectivamente, atuantes na seção transversal. Substituindo-os na equação (3.169), é possível concluir que a equação da potência dos esforços internos pode ser representada por:

$$P_{int} = \int_0^l (\mathbf{n}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \mathbf{m}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r + Q\dot{p} + B\dot{p}')d\zeta. \quad (3.174)$$

Vale ressaltar que as forças e momentos atuantes na seção transversal da barra são definidas em relação a configuração deformada. Assim, são expressos por:

$$\mathbf{n} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \mathbf{Q}\mathbf{n}^r = V_\alpha \mathbf{e}_\alpha + N\mathbf{e}_3 \quad (3.175)$$

e

$$\mathbf{m} = \int_A (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \boldsymbol{\tau} dA = \mathbf{Q}\mathbf{m}^r = M_\alpha \mathbf{e}_\alpha + T\mathbf{e}_3, \quad (3.176)$$

em que os termos V_α , N , M_α e T correspondem às forças cortantes, força normal, momentos fletores e momento torsor, respectivamente.

A vantagem de se construir uma formulação com \mathbf{n}^r , \mathbf{m}^r , Q e B é que estes não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido, o que não acontece com \mathbf{n} e \mathbf{m} . Portanto, são grandezas objetivas, da mesma forma que $\boldsymbol{\gamma}^r$, $\boldsymbol{\eta}^r$ e $\boldsymbol{\kappa}^r$, sendo logo convenientes para a definição de relações constitutivas. (CAMPELLO, 2000)

Portanto, define-se os vetores dos esforços internos ou tensões generalizadas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^r \\ \mathbf{m}^r \\ Q \\ B \end{bmatrix}. \quad (3.177)$$

Com o auxílio das equações (3.135) e (3.177), a expressão da potência dos esforços internos pode finalmente ser escrita como:

$$P_{int} = \int_0^l \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\zeta. \quad (3.178)$$

Substituindo a equação (3.147) na equação (3.178), tem-se:

$$P_{int} = \int_0^l \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta d\zeta. \quad (3.179)$$

3.4.2 Potência dos Esforços Externos

Conforme Pimenta (2006), a potência externa de um corpo é composta pela parcela relativa as forças de superfície e forças de volume. Desta forma, a potência externa de uma barra, de comprimento inicial l , é dada por:

$$P_{ext} = P_S + P_V = \int_0^l \left[\int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dS + \int_A \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dA \right] d\zeta, \quad (3.180)$$

em que $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ são o vetor das forças superficiais externas e o vetor das forças volúmicas externas, respectivamente, ambas na configuração atual por unidade de área da configuração de referência.

Substituindo a equação (3.97) na equação (3.180), obtém-se:

$$P_{ext} = \int_0^l \left[\int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot (\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) + \psi \dot{p} \mathbf{e}_3) dS + \int_A \bar{\mathbf{b}} \cdot (\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) \times (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) + \psi \dot{p} \mathbf{e}_3) dA \right] d\zeta. \quad (3.181)$$

Desenvolvendo os termos da integral, a equação (3.181) pode ser escrita como:

$$P_{ext} = \int_0^l \left[\int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{t}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \psi \dot{p} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_3 dS + \int_A \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{b}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \psi \dot{p} \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{e}_3 dA \right] d\zeta. \quad (3.182)$$

Definindo as expressões das forças, momentos e bi momento externos atuantes ao longo da barra, por unidade de comprimento de referência, conforme as expressões a seguir:

$$\bar{\mathbf{n}} = \int_S \bar{\mathbf{t}} dS + \int_A \bar{\mathbf{b}} dA, \quad (3.183)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \int_S (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{t}} dS + \int_A (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{b}} dA, \quad (3.184)$$

$$\bar{B} = \int_S \psi \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_3 dS + \int_A \psi \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{e}_3 dA, \quad (3.185)$$

a potência dos esforços externos atuantes na barra pode ser reescrita como:

$$P_{ext} = \int_0^l [\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \bar{B}\dot{p}]d\zeta. \quad (3.186)$$

A partir da equação (3.186), pode-se definir o vetor dos esforços externos generalizados, $\bar{\mathbf{q}}$, aplicados ao longo da barra, como:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \mathbf{r}^T \bar{\mathbf{m}} \\ \bar{B} \end{bmatrix}. \quad (3.187)$$

Substituindo as equações (3.183) a (3.185) na equação (3.187), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \int_S \bar{\mathbf{t}} dS + \int_A \bar{\mathbf{b}} dA \\ \mathbf{r}^T \left[\int_S (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{t}} dS + \int_A (\mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3) \times \bar{\mathbf{b}} dA \right] \\ \int_S \psi \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{e}_3 dS + \int_A \psi \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{e}_3 dA \end{bmatrix}. \quad (3.188)$$

Desta forma, com o auxílio da equação (3.145), é possível concluir que a expressão da potência dos esforços externos pode ser representada por:

$$P_{ext} = \int_0^l \bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{d}}_{\theta} d\zeta. \quad (3.189)$$

De acordo com Campello, Pimenta e Wriggers (2003), o termo $\mathbf{r}^T \bar{\mathbf{m}}$, é energeticamente conjugado com o vetor das rotações, $\boldsymbol{\theta}$ e o termo $\bar{\mathbf{m}}$ isoladamente não é. Esta combinação energética, não trivial, traz grandes consequências na análise não linear de estruturas de graus de liberdade rotacionais, uma vez que uma contribuição geométrica do momento aplicado é introduzida na forma bi linear tangente (matriz de rigidez).

3.4.3 Equações de Equilíbrio e Condições de Contorno

As equações de equilíbrio podem ser formuladas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, que é um princípio amplamente utilizado na Mecânica dos Sólidos para a solução de problemas de equilíbrio, cuja premissa é:

Uma condição necessária para que um corpo deformável esteja em equilíbrio é que, para qualquer campo de deformação cinematicamente compatível, o trabalho virtual externo, com forças de volume e de superfícies estaticamente deve ser igual ao trabalho virtual interno. (DYM e SHAMES, 2013)

Nesta pesquisa, será realizada uma linearização consistente das deformações, chamadas também de deformações virtuais, com o propósito de definir as variações das mesmas.

Assim, a partir desta linearização, as equações (3.127) e (3.132) podem ser escritas como:

$$\delta \boldsymbol{\eta}^r = \mathbf{Q}^T [\delta \mathbf{u}' + \mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] \quad (3.190)$$

e

$$\delta \boldsymbol{\kappa}^r = \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Gamma}' \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}'), \quad (3.191)$$

em que o símbolo δ acoplado a uma variável indica que a grandeza é virtual, ou seja, uma variação. Essas variações das deformações podem ser escritas como:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\eta}^r \\ \delta \boldsymbol{\kappa}^r \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix}. \quad (3.192)$$

Da mesma forma, com o auxílio da equação (3.145), a variação dos deslocamentos pode ser representada por:

$$\delta \mathbf{d}_\theta = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta p \end{bmatrix}. \quad (3.193)$$

De forma que, a partir da equação (3.147), possa ser reescrita como:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta. \quad (3.194)$$

Através das expressões da potência dos esforços internos (3.179) e externos (3.189) é possível perceber que as expressões do trabalho virtual dos esforços internos e externos da barra podem ser obtidas de forma análoga.

Desta forma, com o auxílio das equações (3.177) e (3.193), o trabalho virtual dos esforços internos pode ser representado por:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\zeta = \int_0^l \begin{bmatrix} \mathbf{n}^r \\ \mathbf{m}^r \\ Q \\ B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\eta}^r \\ \delta \boldsymbol{\kappa}^r \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix} d\zeta, \quad (3.195)$$

ou ainda por:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \mathbf{n}^r \cdot \delta \boldsymbol{\eta}^r + \mathbf{m}^r \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^r + Q \delta p + B \delta p' d\zeta. \quad (3.196)$$

Substituindo as equações (3.190) e (3.191) na equação (3.196), tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left(\begin{array}{l} \mathbf{n}^r \cdot (\mathbf{Q}^T [\delta \mathbf{u}' + \mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})]) \\ + \mathbf{m}^r \cdot (\mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Gamma}' \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}')) \end{array} + Q \delta p + B \delta p' \right) d\zeta. \quad (3.197)$$

Escrevendo em termos de configuração corrente, tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left(\begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot [\delta \mathbf{u}' + \mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})] + \mathbf{m} \cdot [\boldsymbol{\Gamma}' \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}'] \\ + Q \delta p + B \delta p' \end{array} \right) d\zeta. \quad (3.198)$$

Desenvolvendo os termos da integração acima, obtém-se:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left(\begin{array}{l} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}' + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})) + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})') \\ + Q \delta p + B \delta p' \end{array} \right) d\zeta. \quad (3.199)$$

Considerando a propriedade vetorial $\mathbf{w}(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, a equação (3.199) pode ser reescrita da forma:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left(\begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}' - (\mathbf{z}' \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})' \\ + Q \delta p + B \delta p' \end{array} \right) d\zeta. \quad (3.200)$$

De maneira análoga, com o auxílio das equações (3.187) e (3.193), o trabalho virtual dos esforços externos ao longo da barra será dado por:

$$\delta W_{ext} = \int_0^l \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}_\theta d\zeta = \int_0^l \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{n}} \\ \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}} \\ \bar{B} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta p \end{array} \right] d\zeta, \quad (3.201)$$

ou ainda por:

$$\delta W_{ext} = \int_0^l (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \bar{B} \delta p) d\zeta. \quad (3.202)$$

Reorganizando os vetores, a equação (3.202) pode ainda ser reescrita como:

$$\delta W_{ext} = \int_0^l (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) + \bar{B} \delta p) d\zeta. \quad (3.203)$$

A partir das equações que expressam os trabalhos virtuais dos esforços internos e externos, pode-se aplicar o Teorema dos Trabalhos Virtuais, com as condições de contorno essenciais nas extremidades:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0, \quad (3.204)$$

e

$$\forall \delta \mathbf{d}_\theta = \delta \widehat{\mathbf{d}}_\theta(\zeta) \mid \delta \widehat{\mathbf{d}}_\theta(0) = \delta \widehat{\mathbf{d}}_\theta(l) = \mathbf{0}. \quad (3.205)$$

Substituindo as equações (3.200) e (3.203) na equação (3.204), tem-se:

$$\int_0^l \left(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}' - (\mathbf{z}' \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})' + Q \delta p + B \delta p' - \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} - \bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \bar{B} \delta p \right) d\zeta = 0. \quad (3.206)$$

Efetuando-se integrações por partes ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$) nos termos em $\delta \mathbf{u}'$, $(\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta})'$ e $\delta p'$, verifica-se que:

$$\int_0^l \left(\begin{array}{l} -\mathbf{n}' \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{z}' \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{m}' \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) + Q \delta p - B' \delta p' \\ - \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} - \bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \bar{B} \delta p \end{array} \right) d\zeta \quad (3.207)$$

$$+ (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u})|_0^l + (\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}))|_0^l + (B \delta p)|_0^l = 0.$$

Utilizando as condições de contorno essenciais, representadas pela equação (3.205), a equação (3.206) poderá ser representada da forma:

$$\int_0^l \left(\begin{array}{l} -\mathbf{n}' \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{z}' \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{m}' \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \\ + Q \delta p - B' \delta p' - \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} - \bar{\mathbf{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - \bar{B} \delta p \end{array} \right) d\zeta = 0. \quad (3.208)$$

Reorganizando os vetores, a equação (3.208) pode ser reescrita como:

$$\int_0^l \left(\begin{array}{l} -(\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{z}' \times \mathbf{n} + \mathbf{m}' + \bar{\mathbf{m}}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) \\ -(B' - Q + \bar{B}) \delta p \end{array} \right) d\zeta = 0. \quad (3.209)$$

Considerando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, que transforma um problema em sua formulação fraca – forma variacional – em sua formulação forte – equação diferencial, e sabendo que os deslocamentos virtuais generalizados $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ e δp são arbitrários, é possível verificar na equação (3.209) que:

$$\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (3.210)$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{z}' \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{0}, \quad (3.211)$$

$$B' - Q + \bar{B} = 0. \quad (3.212)$$

Para poder incluir o trabalho dos esforços atuantes nas extremidades da barra, é necessário ainda que:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} - \delta W_{ext \text{ nós da barra}} = 0. \quad (3.213)$$

Sabendo que o vetor dos esforços concentrados (forças, momentos modificados e bi momento) atuantes nas extremidades da barra é definido por:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^* \\ B^* \end{bmatrix}, \quad (3.214)$$

a equação (3.213) pode ser reescrita como:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} - \mathbf{q}^* \cdot \delta \mathbf{d}_\theta = 0. \quad (3.215)$$

Substituindo as equações (3.207) e (3.214) em (3.215) e reorganizando os termos da expressão resultante, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^l [-(\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{m}' + \mathbf{z}' \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - (B' - Q \\ + \bar{B}) \delta p] d\zeta + \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}|_0^l + \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}|_0^l + B \delta p|_0^l \\ - \mathbf{n}^* \cdot \delta \mathbf{u}|_0^l - \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^* \cdot \delta \boldsymbol{\theta}|_0^l - B^* \delta p|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (3.216)$$

A equação de equilíbrio (3.216) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_0^l [-(\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{m}' + \mathbf{z}' \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) - (B' \\ - Q + \bar{B}) \delta p] d\zeta + (\mathbf{n} - \mathbf{n}^*) \cdot \delta \mathbf{u}|_0^l + (\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m} - \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^*) \\ \cdot \delta \boldsymbol{\theta}|_0^l + (B - B^*) \delta p|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (3.217)$$

É necessário salientar que a igualdade da equação (3.217) só é válida se:

$$(\mathbf{n} - \mathbf{n}^*) \cdot \delta \mathbf{u}|_0^l = 0, \quad (3.218)$$

$$(\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m} - \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^*) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}|_0^l = 0, \quad (3.219)$$

$$(B - B^*) \delta p|_0^l = 0. \quad (3.220)$$

As expressões de (3.218) a (3.220) caracterizam todas as condições de contorno do problema. A partir da equação (3.215), é possível observar que as referidas expressões são atendidas se atenderem as seguintes condições de contorno naturais:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(0) = \mathbf{n}^*(0) & \qquad \qquad \mathbf{n}(l) = \mathbf{n}^*(l) \\ \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^*(0) & \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^*(l) \\ B(0) = B^*(0) & \qquad \qquad B(l) = B^*(l) \end{aligned} \quad (3.221)$$

e as seguintes condições de contorno essenciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^*(0) & \qquad \qquad \mathbf{u}(l) = \mathbf{u}^*(l) \\ \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}^*(0) & \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}(l) = \boldsymbol{\theta}^*(l) \\ p(0) = p^*(0) & \qquad \qquad p(l) = p^*(l) \end{aligned} \quad (3.222)$$

Em síntese, o vetor dos esforços \mathbf{f} de uma barra é definido por:

$$\mathbf{f} = \left[\begin{array}{c} \int_0^l -(\mathbf{n}' + \bar{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\zeta + (\mathbf{n} - \mathbf{n}^*) \cdot \delta \mathbf{u}|_0^l \\ \int_0^l -(\mathbf{m}' + \mathbf{z}' \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}}) \cdot (\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}) d\zeta + (\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m} - \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{m}^*) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}|_0^l \\ \int_0^l -(B' - Q + \bar{B}) \delta p] d\zeta + (B - B^*) \delta p|_0^l \end{array} \right]. \quad (3.223)$$

3.4.4 Linearização dos Trabalhos Virtuais

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método de discretização muito utilizado para a solução de problemas de análise estrutural. De acordo com Lago (2012), a aplicação do MEF em estruturas não lineares recai na utilização do método de Newton para solução do sistema, de forma que incide na linearização das expressões que definem o equilíbrio do sistema. Esta linearização pode ser realizada através da derivada de Fréchet da expressão:

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext}, \quad (3.224)$$

atendendo as condições de contorno:

$$\forall \delta \mathbf{d} = \delta \hat{\mathbf{d}}(\zeta) \mid \delta \hat{\mathbf{d}}(0) = \delta \hat{\mathbf{d}}(l) = \mathbf{0}. \quad (3.225)$$

Substituindo as equações (3.178) e (3.189) em (3.224) e derivando em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \frac{\partial}{\partial t} (\delta W_{int} - \delta W_{ext}) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}) - (\bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}_\theta)] d\zeta. \quad (3.226)$$

Substituindo a equação (3.194) na equação (3.226), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \int_0^l [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_\theta \dot{\Delta} \delta \mathbf{d}_\theta) - (\bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\delta} \mathbf{d}_\theta)] d\zeta. \quad (3.227)$$

Desenvolvendo a derivação no tempo, a variação de δW resulta no operador tangente dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \int_0^l [\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{B}}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta - \dot{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \delta \mathbf{d}_\theta] d\zeta. \quad (3.228)$$

Na expressão (3.228), por não considerar derivadas de ordem superior, foi considerado que o termo $\frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{d}_\theta)$ é nulo. Considerando as manipulações algébricas nos termos das integrais, representadas a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \int_0^l \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \cdot \mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\theta}{\partial t} \Delta \delta \mathbf{d}_\theta - \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}_\theta} \frac{\partial \mathbf{d}_\theta}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{d}_\theta \right] d\zeta. \quad (3.229)$$

Definindo a matriz de rigidez constitutiva \mathbf{D} por:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.230)$$

a matriz simétrica que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos por \mathbf{L}_θ :

$$\mathbf{L}_\theta = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}_\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{uu} & \mathbf{L}_{u\theta} & \mathbf{L}_{up} \\ \mathbf{L}_{\theta u} & \mathbf{L}_{\theta\theta} & \mathbf{L}_{\theta p} \\ \mathbf{L}_{pu} & \mathbf{L}_{p\theta} & \mathbf{L}_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.231)$$

e utilizando o auxílio da equação (3.147)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \mathbf{B}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta, \quad (3.232)$$

a expressão em (3.229) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \int_0^l [(\mathbf{D}\mathbf{B}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta) \cdot (\mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{B}}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta - \mathbf{L}_\theta \dot{\mathbf{d}}_\theta \cdot \delta \mathbf{d}_\theta] d\zeta. \quad (3.233)$$

A expressão (3.233) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta W = \\ \int_0^l [(\mathbf{D}\mathbf{B}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta) \cdot (\mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\theta}{\partial \mathbf{d}_\theta} \frac{\partial \mathbf{d}_\theta}{\partial t} \Delta \delta \mathbf{d}_\theta - \mathbf{L}_\theta \dot{\mathbf{d}}_\theta \cdot \delta \mathbf{d}_\theta] d\zeta. \end{aligned} \quad (3.234)$$

ou ainda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta W = \\ \int_0^l [(\mathbf{D}\mathbf{B}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta) \cdot (\mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\theta}{\partial \mathbf{d}_\theta} \dot{\mathbf{d}}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta - \mathbf{L}_\theta \dot{\mathbf{d}}_\theta \cdot \delta \mathbf{d}_\theta] d\zeta. \end{aligned} \quad (3.235)$$

A parcela referente a não linearidade geométrica será inicialmente obtida através do seguinte formato:

$$\mathbf{G}_\theta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\theta}{\partial \mathbf{d}_\theta} \dot{\mathbf{d}}_\theta. \quad (3.236)$$

Devido a extensão na demonstração da matriz de rigidez geométrica dos esforços internos, referencia-se as pesquisas desenvolvidas por Campello (2000) e Pimenta (1993) para maior aprofundamento.

Logo, a expressão (3.233) pode ser redefinida como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta W = \int_0^l [(\mathbf{DB}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta) \cdot (\mathbf{B}_\theta \Delta \delta \mathbf{d}_\theta) + \mathbf{G}_\theta \Delta \dot{\mathbf{d}}_\theta \cdot (\Delta \delta \mathbf{d}_\theta) - \mathbf{L}_\theta \dot{\mathbf{d}}_\theta \cdot \delta \mathbf{d}_\theta] d\zeta, \quad (3.237)$$

em que os novos tensores que surgem são respectivamente:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} & \frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} & \frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p'} \\ \frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} & \frac{\partial B}{\partial p} & \frac{\partial B}{\partial p'} \end{bmatrix}, \quad (3.238)$$

ou ainda:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial p} & \frac{\partial n_1^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial p} & \frac{\partial n_2^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial p} & \frac{\partial n_3^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial p} & \frac{\partial m_1^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial p} & \frac{\partial m_2^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial p} & \frac{\partial m_3^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial Q}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial Q}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial Q}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial Q}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial Q}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p'} \\ \frac{\partial B}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial B}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial B}{\partial \eta_3^r} & \frac{\partial B}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial B}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial B}{\partial \kappa_3^r} & \frac{\partial B}{\partial p} & \frac{\partial B}{\partial p'} \end{bmatrix}, \quad (3.239)$$

correspondente a matriz de rigidez tangente da seção transversal, que simboliza a parcela puramente constitutiva do operador,

$$\mathbf{G}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{u'\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{G}_{u'\theta}^T & \mathbf{G}_{\theta\theta} & \mathbf{G}_{\theta\theta'} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\theta\theta'}^T & \mathbf{0} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & \mathbf{o}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.240)$$

é a matriz que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos.

As submatrizes de \mathbf{D} podem ser obtidas desde que se conheçam os elementos \mathbf{n}^r , \mathbf{m}^r , Q e B , representados pelas equações (3.170) a (3.173), ou seja, desde que se conheça a equação constitutiva. Já as submatrizes de \mathbf{G}_θ e \mathbf{L}_θ , a partir da ajuda dos tensores antissimétricos \mathbf{N} , \mathbf{M} e \mathbf{Z}' , cujos vetores axiais são \mathbf{n} , \mathbf{m} e \mathbf{z}' , respectivamente, são dadas por:

$$\mathbf{G}_{u'\theta} = -\mathbf{N}\Gamma \quad (3.241)$$

$$\mathbf{G}_{u'\theta}^T = \Gamma^T \mathbf{N} \quad (3.242)$$

$$\mathbf{G}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \Gamma^T (\mathbf{Z}' \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Z}') \Gamma - \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}' \mathbf{n}) + \mathbf{U}'(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2} (\Gamma^T \mathbf{M} \Gamma - \Gamma^T \mathbf{M} \Gamma') \quad (3.243)$$

$$\mathbf{G}_{\theta\theta'} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) + \frac{1}{2} \Gamma^T \mathbf{M} \Gamma = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) \quad (3.244)$$

$$\mathbf{G}_{\theta\theta'}^T = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) - \frac{1}{2} \Gamma^T \mathbf{M} \Gamma = \mathbf{V}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}) \quad (3.245)$$

e

$$\mathbf{L}_{uu} = \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{u}} \quad \mathbf{L}_{\theta u} = \frac{\partial (\Gamma^T \bar{\mathbf{m}})}{\partial \mathbf{u}} \quad \mathbf{L}_{pu} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{n}(l) = \mathbf{n}^*(l) \quad (3.246)$$

$$\mathbf{L}_{u\theta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad \mathbf{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial (\Gamma^T \bar{\mathbf{m}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad \mathbf{L}_{p\theta} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.247)$$

$$\mathbf{L}_{up} = \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial p} \quad \mathbf{L}_{\theta p} = \frac{\partial (\Gamma^T \bar{\mathbf{m}})}{\partial p} \quad \mathbf{L}_{pp} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial p} \quad (3.248)$$

O tensor \mathbf{L} depende diretamente do tipo de carregamento atuante sobre a barra, ou seja, esforços externos. Quando este for conservativo, com $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ não dependendo dos deslocamentos,

as derivações de (3.246) a (3.248) tornam-se nulas, à exceção de $L_{\theta\theta}$ e $L_{\theta p}$. Neste caso, a presença do fator \mathbf{F}^T impede que estes termos se anulem. Para carregamentos não conservativos \mathbf{L} não será simétrico.

Sendo a matriz constitutiva \mathbf{D} simétrica e os carregamentos ao longo da barra conservativos, o operador tangente será sempre simétrico, uma vez que \mathbf{G}_θ e \mathbf{L}_θ serão simétricos.

4 EQUAÇÕES ELÁSTICAS CONSTITUTIVAS PARA BARRAS

Equações constitutivas são igualdades que relacionam grandezas físicas com as quais procura introduzir um modelo mecânico às propriedades dos materiais. (PIMENTA, 2006).

Sabendo que materiais diferentes submetidos as mesmas condições apresentam comportamentos distintos entre si, este capítulo fará uma abordagem da formulação adequada de relações constitutivas elásticas, para aplicação nas teorias de barras. Será apresentada a equação constitutiva elástica excluindo todos os termos de ordem superior nas deformações para análise de barras com graus de liberdade de empenamento, a partir do modelo constitutivo hiperelástico do material de Simo-Ciarlet.

4.1 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA A TEORIA DE BARRAS

De acordo com Pimenta (2006), o Princípio da Objetividade é de fundamental importância para o desenvolvimento correto de equações constitutivas. Segundo este princípio, uma equação constitutiva não deve ser afetada por movimentos de corpo rígido superpostos ao movimento do sólido. Assim, como os movimentos de corpo rígido não provocam deformações, não devem alterar o estado interno de tensões.

Para a teoria geometricamente exata de barras no espaço, as componentes de alongamento e de distorção da deformação também podem ser relacionadas com as suas tensões correspondentes (tensões energeticamente conjugadas), através dos módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material. (CAMPELLO, 2000)

4.1.1 Material hiperelástico de Simo-Ciarlet sem considerar os termos de ordem superior

Conforme Reddy (2013), grande parte dos materiais apresentam curvas de tensão-deformação com comportamento não linear na fase elástica, ou seja, embora os materiais recuperem as deformações após a retirada de carregamento aplicado na fase elástica, estes possuem curvas não lineares, sendo denominados materiais hiperelásticos.

Pimenta (2006) afirma que as relações constitutivas hiperelásticas são expressas com base em uma função de energia de deformação específica (ψ), sendo tomada como potencial para as tensões.

Bandeira (2001) aponta que a correlação entre a energia de deformação específica e função do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff pode ser expressa em função do tensor de deformações de Cauchy-Green (\mathbf{C}) como:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad (4.1)$$

em que a função da energia de deformação pode ser escrita em função dos invariantes I_1, I_2 e J :

$$\psi = \widehat{\Psi}(I_1, I_2, J), \quad (4.2)$$

onde:

$$I_1 = \mathbf{I} : \mathbf{C}, \quad (4.3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} : \mathbf{C}^2, \quad (4.4)$$

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (4.5)$$

Logo, a equação (4.1) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (4.6)$$

Sabendo que um material Neo-Hookeano poli convexo simples pode ser representado pela função energia específica de deformação através da equação (SIMO & HUGHES, 1992):

$$\psi(I_1, J) = \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] + \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3 - 2 \ln J), \quad (4.7)$$

substituindo a equação (4.6) na equação (4.7) chega-se a:

$$\mathbf{S} = \frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} + \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}), \quad (4.8)$$

em que λ e μ são constantes conhecidas como as constantes de Lamé e são determinadas experimentalmente ou obtidas a partir do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de Poisson (ν) por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.9)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.10)$$

Desenvolvendo as multiplicações na equação (4.8) e desprezando os termos de ordem superior, o tensor \mathbf{S} pode ser reescrito como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Adotando a relação: $A = \det(\mathbf{C})$ e desprezando os termos de ordem superior, resulta:

$$A = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^{rT}\mathbf{F}^r) = 1 + 2\varepsilon. \quad (4.12)$$

Além disso, calculando a matriz inversa de $\mathbf{F}^{rT}\mathbf{F}^r$, tem-se:

$$(\mathbf{F}^{rT}\mathbf{F}^r)^{-1} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

em que:

$$a_{11} = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \gamma_1^{r2} + p^2\psi_{,2}^2\gamma_1^{r2} + p^2\psi_{,2}^2\gamma_2^{r2} - 2p\psi_{,2}\gamma_2^r - 2p\psi_{,2}\varepsilon\gamma_2^r, \quad (4.14)$$

$$a_{12} = \gamma_1^r\gamma_2^r + \gamma_1^rp\psi_{,2} + \gamma_2^rp\psi_{,1} + \gamma_1^r\varepsilon p\psi_{,2} + \gamma_2^r\varepsilon p\psi_{,1} - p^2\psi_{,1}\psi_{,2}\gamma_1^{r2} - p^2\psi_{,1}\psi_{,2}\gamma_2^{r2}, \quad (4.15)$$

$$a_{13} = -\gamma_1^r - p\psi_{,1} - \varepsilon p\psi_{,1} - \gamma_1^rp^2\psi_{,2}^2 + p^2\psi_{,1}\psi_{,2}\gamma_2^r, \quad (4.16)$$

$$a_{21} = \gamma_1^r\gamma_2^r + \gamma_1^rp\psi_{,2} + \gamma_2^rp\psi_{,1} + \gamma_1^r\varepsilon p\psi_{,2} + \gamma_2^r\varepsilon p\psi_{,1} - p^2\psi_{,1}\psi_{,2}\gamma_1^{r2} - p^2\psi_{,1}\psi_{,2}\gamma_2^{r2}, \quad (4.17)$$

$$a_{22} = 1 + 2\varepsilon + \gamma_2^{r^2} + \varepsilon^2 - 2\gamma_1^r p\psi_{,1} - 2\gamma_1^r \varepsilon p\psi_{,1} + \gamma_1^{r^2} p^2 \psi_{,1}^2 + \gamma_2^{r^2} p^2 \psi_{,1}^2, \quad (4.18)$$

$$a_{23} = -\gamma_2^r - p\psi_{,2} - \varepsilon p\psi_{,2} + p^2 \psi_{,1} \psi_{,2} \gamma_1^r - \gamma_2^r p^2 \psi_{,1}^2, \quad (4.19)$$

$$a_{31} = -\gamma_1^r - p\psi_{,1} - \varepsilon p\psi_{,1} - p^2 \psi_{,2}^2 \gamma_1^r + p^2 \psi_{,1} \psi_{,2} \gamma_2^r, \quad (4.20)$$

$$a_{32} = -\gamma_2^r - p\psi_{,2} - \varepsilon p\psi_{,2} + p^2 \psi_{,1} \psi_{,2} \gamma_1^r - p^2 \psi_{,1}^2 \gamma_2^r, \quad (4.21)$$

$$a_{33} = 1 + p^2 \psi_{,1}^2 + p^2 \psi_{,2}^2. \quad (4.22)$$

Sabendo que o jacobiano J é dado por:

$$J = \det|\mathbf{F}^r|, \quad (4.23)$$

calculando o seu valor correspondente, chega-se a:

$$J = 1 + \varepsilon - p\psi_{,1} \gamma_1^r - p\psi_{,2} \gamma_2^r. \quad (4.24)$$

Portanto, o termo $(J^2 - 1)$ resulta em, desprezando os termos de ordem superior:

$$(J^2 - 1) = 2\varepsilon + \varepsilon^2 \quad (4.25)$$

Logo, os índices da matriz apresentada na expressão (4.11) podem ser escritos conforme apresentados nas equações (4.26) a (4.34):

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{11}) + \frac{\mu}{A}(A - a_{11}) \\ S_{11} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{11}) + \frac{\mu}{A}(A - a_{11}) \\ &= \frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{12}) - \frac{\mu}{A}(a_{12}) \\
&= \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
S_{13} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{13}) - \frac{\mu}{A}(a_{13}) \\
&= - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{21}) - \frac{\mu}{A}(a_{21}) \\
&= \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{22}) + \frac{\mu}{A}(A - a_{22}) \\
&= \frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
S_{23} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{23}) - \frac{\mu}{A}(a_{23}) \\
&= - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
S_{31} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{31}) - \frac{\mu}{A}(a_{31}) \\
&= - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
S_{32} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1) \frac{1}{A}(a_{32}) - \frac{\mu}{A}(a_{32}) \\
&= - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
S_{33} &= \frac{\lambda}{2}(J^2 - 1)\frac{1}{A}(a_{33}) + \frac{\mu}{A}(A - a_{33}) \\
&= \frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} + \frac{2\mu\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Utilizando a relação $\mathbf{P}^r = \mathbf{F}^r \mathbf{S}$, em que \mathbf{F}^r foi definido em (3.85) e observando as equações (4.26) a (4.34), o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff pode ser escrito como:

$$\mathbf{P}^r = \begin{bmatrix} P_{11}^r & P_{12}^r & P_{13}^r \\ P_{21}^r & P_{22}^r & P_{23}^r \\ P_{31}^r & P_{32}^r & P_{33}^r \end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

onde:

$$P_{11}^r = \frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \gamma_1^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.36}$$

$$P_{12}^r = \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right) - \gamma_1^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.37}$$

$$P_{13}^r = - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right) + \gamma_1^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{2\mu\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.38}$$

$$P_{21}^r = \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right) - \gamma_2^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.39}$$

$$P_{22}^r = \frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \gamma_2^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.40}$$

$$P_{23}^r = - \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right) + \gamma_2^r \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{2\mu\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \right), \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
P_{31}^r &= p\psi_{,1} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} \right) + p\psi_{,2} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right) \\
&\quad - (1 + \varepsilon) \left(\frac{(\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2) - 2\mu)(\gamma_1^r + p\psi_{,1})}{2(1 + 2\varepsilon)} \right),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
P_{32}^r &= p\psi_{,1} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r \gamma_2^r}{1 + 2\varepsilon} \right) + p\psi_{,2} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} \right) \\
&\quad - (1 + \varepsilon) \left(\frac{(\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2) - 2\mu)(\gamma_2^r + p\psi_{,2})}{2(1 + 2\varepsilon)} \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
P_{33}^r &= -p\psi_{,1} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_1^r + p\psi_{,1}}{1 + 2\varepsilon} \right) \\
&\quad - p\psi_{,2} \left(\frac{\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2)}{2} - \mu \right) \left(\frac{\gamma_2^r + p\psi_{,2}}{1 + 2\varepsilon} \right) + (1 + \varepsilon) \left(\frac{(\lambda(2\varepsilon + \varepsilon^2) + 4\mu\varepsilon)}{2(1 + 2\varepsilon)} \right).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

A partir da definição da matriz dos coeficientes de rigidez constitutiva, expressa em (3.238), tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_3^r} \\ \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_2^r}{\partial \eta_3^r} \\ \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial n_3^r}{\partial \eta_3^r} \end{bmatrix}, \tag{4.45}$$

onde, de maneira análoga a obtenção dos termos a partir da lei material de Saint-Venant, com o auxílio das equações (3.170), (3.82), (4.38), (4.41), (4.44) e considerando que $\mu = G$ e $\lambda + 2\mu = E$, os termos da matriz acima podem ser definidos como:

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \eta_1^r} dA = GA, \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \eta_2^r} dA = 0, \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \eta_3^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \eta_3^r} dA = 0, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \eta_1^r} dA = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \eta_2^r} dA = GA, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \eta_3^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \eta_3^r} dA = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \eta_1^r} dA = 0, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \eta_2^r} dA = 0, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \eta_3^r} &= \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \eta_3^r} dA \\ &= EA - E(A\eta_3^r + S_1\kappa_1^r + S_2\kappa_2^r). \end{aligned} \quad (4.54)$$

A submatriz $\partial \mathbf{n}^r / \partial \boldsymbol{\kappa}^r$, de ordem 3×3 , é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_3^r} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \kappa_3^r} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial \kappa_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

em que os termos da submatriz são representados por:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \kappa_1^r} dA = 0, \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \kappa_2^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \kappa_2^r} dA = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial \kappa_3^r} dA = -GS_1, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \kappa_1^r} dA = 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_2^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \kappa_2^r} dA = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial n_2^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial \kappa_3^r} dA = -GS_2, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \kappa_1^r} dA = ES_1 - E(S_1 \eta_3^r + J_{11} \kappa_1^r + J_{12} \kappa_2^r), \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_2^r} &= \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \kappa_2^r} dA \\ &= ES_2 - E(S_2 \eta_3^r + J_{12} \kappa_1^r + J_{22} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial n_3^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial \kappa_3^r} dA = 0. \quad (4.64)$$

A submatriz $\partial \mathbf{n}^r / \partial p$, de ordem 3×1 , é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1^r}{\partial p} \\ \frac{\partial n_2^r}{\partial p} \\ \frac{\partial n_3^r}{\partial p} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

em que os termos presentes na submatriz são definidos como:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial p} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial p} dA = GS_1^S, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial p} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial p} dA = GS_2^S, \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial p} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial p} dA = 0. \quad (4.68)$$

A submatriz $\partial \mathbf{n}^r / \partial p'$, de ordem 3x1, é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{n}^r}{\partial p'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial p'} \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

em que:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial \tau_{13}^r}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial \tau_{23}^r}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_3^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial \tau_{33}^r}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.72)$$

A submatriz $\partial \mathbf{m}^r / \partial \boldsymbol{\eta}^r$, de ordem 3x3, é definida através de:

$$\frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_3^r} \\ \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_3^r} \\ \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

onde:

$$\frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial (x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \eta_1^r} dA = 0, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial (x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \eta_2^r} dA = 0, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1^r}{\partial \eta_3^r} &= \int_A \frac{\partial (x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \eta_3^r} dA \\ &= ES_1 - E(S_1 \eta_3^r + J_{11} \kappa_1^r + J_{12} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial (\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \eta_1^r} dA = 0, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial (\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \eta_2^r} dA = 0, \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2^r}{\partial \eta_3^r} &= \int_A \frac{\partial (\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \eta_3^r} dA \\ &= ES_2 - E(S_2 \eta_3^r + J_{12} \kappa_1^r + J_{22} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial (x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \eta_1^r} dA = -GS_1, \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial (x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \eta_2^r} dA = -GS_2, \quad (4.81)$$

e o termo $\partial m_3^r / \partial \eta_3^r$ é definido por:

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \eta_3^r} = \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \eta_3^r} dA = 0. \quad (4.82)$$

A submatriz $\partial \mathbf{m}^r / \partial \boldsymbol{\kappa}^r$, de ordem 3x3, é definida através de:

$$\frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_3^r} \\ \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_3^r} \\ \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_2^r} & \frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

em que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_1^r} &= \int_A \frac{\partial(x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \kappa_1^r} dA \\ &= EJ_{11} - E(J_{11} \eta_3^r + H_{11} \kappa_1^r + H_{21} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_2^r} &= \int_A \frac{\partial(x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \kappa_2^r} dA \\ &= EJ_{12} - E(J_{12} \eta_3^r + H_{21} \kappa_1^r + H_{12} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial m_1^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial(x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial \kappa_3^r} dA = 0, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_1^r} &= \int_A \frac{\partial(\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \kappa_1^r} dA \\ &= EJ_{12} - E(J_{12} \eta_3^r + H_{21} \kappa_1^r + H_{12} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_2^r} &= \int_A \frac{\partial(\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \kappa_2^r} dA \\ &= EJ_{22} - E(J_{22} \eta_3^r + H_{12} \kappa_1^r + H_{22} \kappa_2^r), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial m_2^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial(\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial \kappa_3^r} dA = 0, \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \kappa_1^r} dA = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_2^r} = \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \kappa_2^r} dA = 0, \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial \kappa_3^r} dA = GJ_0. \quad (4.92)$$

A submatriz $\partial \mathbf{m}^r / \partial p$, de ordem 3×1 , é definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1^r}{\partial p} \\ \frac{\partial m_2^r}{\partial p} \\ \frac{\partial m_3^r}{\partial p} \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

onde:

$$\frac{\partial m_1^r}{\partial p} = \int_A \frac{\partial(x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial p} dA = 0, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial m_2^r}{\partial p} = \int_A \frac{\partial(\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial p} dA = 0, \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_3^r}{\partial p} &= \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial p} dA \\ &= G(J_T^* - J_0^S - A g_\alpha s_\alpha). \end{aligned} \quad (4.96)$$

A submatriz $\partial \mathbf{m}^r / \partial p'$, de ordem 3x1, é definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{m}^r}{\partial p'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial m_2^r}{\partial p'} \\ \frac{\partial m_3^r}{\partial p'} \end{bmatrix}, \quad (4.97)$$

em que os termos que compõem a submatriz são obtidos por:

$$\frac{\partial m_1^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial(\psi p \tau_{13}^r - x_1 \tau_{33}^r)}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial m_2^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial(x_2 \tau_{33}^r - \psi p \tau_{23}^r)}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial m_3^r}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial(x_1 \tau_{23}^r - x_2 \tau_{13}^r)}{\partial p'} dA = 0, \quad (4.100)$$

Na matriz de rigidez constitutiva tem ainda a submatriz $\partial Q / \partial \boldsymbol{\eta}^r$, que pode ser definida como:

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \eta_1^r} \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta_2^r} \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.101)$$

em que:

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial(P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \eta_1^r} dA = G S_1^S, \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \eta_2^r} dA = GS_2^S, \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta_3^r} = \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \eta_3^r} dA = 0. \quad (4.104)$$

A submatriz $\partial Q / \partial \kappa^r$, de ordem 3×1 , é dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial \kappa^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \kappa_1^r} \\ \frac{\partial Q}{\partial \kappa_2^r} \\ \frac{\partial Q}{\partial \kappa_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

onde:

$$\frac{\partial Q}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \kappa_1^r} dA = 0, \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \kappa_2^r} = \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \kappa_2^r} dA = 0, \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \kappa_3^r} &= \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial \kappa_3^r} dA \\ &= G(J_T^* - J_0^S - Ag_\alpha s_\alpha). \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial p} dA \\ &= G(J_0^S - J_T^S) \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p'} &= \int_A \frac{\partial (P_{31}^r \psi_{,1} + P_{32}^r \psi_{,2} + P_{13}^r \kappa_2^r \psi - P_{23}^r \kappa_1^r \psi)}{\partial p'} dA \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

A submatriz $\partial B/\partial \boldsymbol{\eta}^r$, de ordem 3×1 , pode ser definida através de:

$$\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \eta_1^r} \\ \frac{\partial B}{\partial \eta_2^r} \\ \frac{\partial B}{\partial \eta_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.111)$$

em que:

$$\frac{\partial B}{\partial \eta_1^r} = \int_A \frac{\partial (P_{33}^r \psi)}{\partial \eta_1^r} dA = 0, \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta_2^r} = \int_A \frac{\partial (P_{33}^r \psi)}{\partial \eta_2^r} dA = 0, \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta_3^r} = \int_A \frac{\partial (P_{33}^r \psi)}{\partial \eta_3^r} dA = 0 \quad (4.114)$$

A submatriz $\partial B/\partial \boldsymbol{\kappa}^r$, de ordem 3×1 , é definida por:

$$\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \kappa_1^r} \\ \frac{\partial B}{\partial \kappa_2^r} \\ \frac{\partial B}{\partial \kappa_3^r} \end{bmatrix}, \quad (4.115)$$

em que:

$$\frac{\partial B}{\partial \kappa_1^r} = \int_A \frac{\partial (P_{33}^r \psi)}{\partial \kappa_1^r} dA = 0, \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \kappa_2^r} = \int_A \frac{\partial(P_{33}^r \psi)}{\partial \kappa_2^r} dA = 0, \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \kappa_3^r} = \int_A \frac{\partial(P_{33}^r \psi)}{\partial \kappa_3^r} dA = 0, \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p} = \int_A \frac{\partial(\sigma \psi)}{\partial p} dA = 0 \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p'} = \int_A \frac{\partial(\sigma \psi)}{\partial p'} dA = EJ_\psi. \quad (4.120)$$

Os novos coeficientes de inércia de terceira ordem $H_{\alpha\beta}$ que aparecem em alguns elementos são dados por:

$$H_{11} = \int_A (x_2)^3 dA \quad (4.121)$$

$$H_{12} = \int_A x_2 (x_1)^2 dA \quad (4.122)$$

$$H_{10} = \int_A x_2 [(x_1)^2 + (x_2)^2] dA = H_{11} + H_{12} \quad (4.123)$$

$$H_{22} = - \int_A (x_1)^3 dA \quad (4.124)$$

$$H_{21} = - \int_A x_1 (x_2)^2 dA \quad (4.125)$$

$$H_{20} = - \int_A x_1 [(x_1)^2 + (x_2)^2] dA = H_{21} + H_{22}. \quad (4.126)$$

Conforme Campello (2000), sabendo que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^L + \mathbf{D}^Q. \quad (4.127)$$

e que:

$$\mathbf{D}^L = \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 & 0 & 0 & -GS_1 & GS_1^S & 0 \\ 0 & GA & 0 & 0 & 0 & -GS_2 & GS_2^S & 0 \\ 0 & 0 & EA & ES_1 & ES_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ES_1 & EJ_{11} & EJ_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ES_2 & EJ_{12} & EJ_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -GS_1 & -GS_2 & 0 & 0 & 0 & GJ_0 & G(J_T^* - J_0^S - Ag_\alpha s_\alpha) & 0 \\ GS_1^S & GS_2^S & 0 & 0 & 0 & G(J_T^* - J_0^S - Ag_\alpha s_\alpha) & G(J_0^S - J_T^S) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_\psi \end{bmatrix}$$

(4.128)

$$\mathbf{D}^Q = \mathbf{D} - \mathbf{D}^L, \tag{4.129}$$

e a partir das definições de \mathbf{n}^r , \mathbf{m}^r , Q e B apresentadas nas equações (3.170) a (3.173), é possível estabelecer uma relação entre as tensões e deformações generalizadas $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, respectivamente, resultando em:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{D}^L + \frac{1}{2} \mathbf{D}^Q \right) \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4.130}$$

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A ELEMENTOS DE BARRAS ESPACIAIS

Neste capítulo será apresentado o método dos elementos finitos para grandes deformações; que consiste em particionar geometricamente um domínio, considerando as condições de contorno existentes. Desta forma, no campo associado, as tensões e deformações são aproximadas.

Vale ressaltar que as integrais serão resolvidas de forma aproximada, pois será utilizado processo de integração numérica de Gauss para calcular a equação do princípio dos trabalhos virtuais.

5.1 ELEMENTOS DE BARRA ISOPARAMÉTRICOS

De acordo com Pimenta e Campello (2003), a descrição da deformação de um elemento de barra gera um problema de valor de contorno cuja forma fraca, representada na equação (3.224), pode ser resolvida por várias técnicas de aproximação. Uma das técnicas de solução do referido problema é a aproximação de Galerkin, cujas funções devem ser fornecidas pelo método dos elementos finitos, escrevendo a interpolação de elementos finitos em um elemento particular.

Adotando o referido método e sabendo que cada nó de um elemento possui sete graus de liberdade (três translações, três rotações e um parâmetro de empenamento), os deslocamentos \mathbf{d} de um elemento de barra serão obtidos através da interpolação dos deslocamentos nodais, através da relação:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{p} \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{N} = \widehat{\mathbf{N}}(\xi)$ é a matriz que contém as funções de interpolação (normalizada para coordenadas naturais, isto é, $-1 \leq \xi \leq 1$ ao longo do elemento) e \mathbf{p} é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados do elemento, obtido por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

sendo que \mathbf{p}_i representa os graus de liberdade do nó i e n é o número de nós do elemento.

Como o vetor \mathbf{p} é definido como vetor dos graus de liberdade do nó e observando que na formulação da barra este vetor foi definido através da expressão (3.146), verifica-se que a expressão (5.2) pode ser representada por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1I} \\ u_{2I} \\ u_{3I} \\ \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \\ \theta_{3I} \\ p_I \\ u_{1J} \\ u_{2J} \\ u_{3J} \\ \theta_{1J} \\ \theta_{2J} \\ \theta_{3J} \\ p_J \end{bmatrix}_{14 \times 1} \quad (5.3)$$

Dentro do contexto dos elementos finitos, existem uma grande variedade de funções de interpolação. Estas funções dependem do tipo de elemento e do número de nós que ele possui, podendo ser lineares ou não lineares. (BANDEIRA, 2001) Nessa pesquisa são utilizados os elementos de barra de dois nós.

De acordo com Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), os componentes da matriz de interpolação \mathbf{N} são funções de forma dos elementos isoparamétricos, construídos a partir de funções de interpolação Lagrangianas. Essas funções são dadas por:

$$N_a = l_a^{n-1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{a-1})(\xi - \xi_{a+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_a - \xi_0)(\xi_a - \xi_1) \dots (\xi_a - \xi_{a-1})(\xi_a - \xi_{a+1}) \dots (\xi_a - \xi_n)} \quad (5.4)$$

em que n é o número de nós do elemento. As funções de forma podem ser expressas pela equação:

$$\mathbf{N}_a(\xi) = l_a^{n-1} \mathbf{I}_p = N_a \mathbf{I}_p \quad (5.5)$$

em que \mathbf{I}_p é a matriz identidade com dimensão igual ao número de graus de liberdade por nó.

A matriz de interpolação é dada por:

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_3] \quad (5.6)$$

Para elementos de barra de dois nós, os componentes da matriz \mathbf{N} assumem os valores:

$$N_1(\xi) = l_1^1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.7)$$

$$N_2(\xi) = l_2^1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)} = \frac{(\xi + 1)}{(1 - (-1))} = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (5.8)$$

Sabendo que as coordenadas ζ da barra são válidas no intervalo de 0 a l , enquanto as coordenadas ξ do elemento são normalizadas para o intervalo -1 a 1, é proposta a seguinte expressão a fim de criar uma relação entre as coordenadas:

$$\zeta = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 N_2 \quad (5.9)$$

substituindo os valores correspondentes aos termos, tem-se:

$$\zeta = l N_2 = \frac{l}{2}(1 + \xi) \quad (5.10)$$

(pois as posições dos nós 1 e 2 são $\zeta_1 = 0$ e $\zeta_2 = l$). Dessa forma, o Jacobiano da transformação de coordenadas será:

$$J_\xi = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = l \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{l}{2} \quad (5.11)$$

As derivadas das funções de forma em relação a ζ , pela regra da cadeia, serão dadas por:

$$\frac{\partial N_a}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = (J_\xi)^{-1} \frac{\partial N_a}{\partial \xi}. \quad (5.12)$$

5.2 FORMULAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO

Utilizando a equação desenvolvida anteriormente para o equilíbrio das barras no espaço e substituindo os deslocamentos generalizados \mathbf{d} pela expressão (5.1) nas expressões dos trabalhos virtuais, pode-se afirmar que o trabalho δW das forças residuais de um elemento é obtido por:

$$\delta W = \int_0^l [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \Delta(\mathbf{N} \delta \mathbf{p}) - \bar{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{N} \delta \mathbf{p})] d\zeta - \mathbf{q}^* \cdot (\mathbf{N} \delta \mathbf{p})|_0^l. \quad (5.13)$$

Reorganizando os termos da integração, tem-se:

$$\delta W = \left(\int_0^l [(\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{q}}] d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{p} - (\mathbf{N}^T \mathbf{q}^*)|_0^l \cdot \delta \mathbf{p}. \quad (5.14)$$

A equação (5.14) pode ainda ser escrita da forma:

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{p} - (\mathbf{N}^T \mathbf{q}^*)|_0^l \cdot \delta \mathbf{p}, \quad (5.15)$$

em que \mathbf{q}^* é o vetor dos esforços concentrados atuantes nos nós do elemento, \mathbf{f} é o vetor dos esforços nodais residuais, e $\delta \mathbf{p}$ é o deslocamento virtual.

No equilíbrio tem-se que:

$$\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{p} = (\mathbf{N}^T \mathbf{q}^*)|_0^l \cdot \delta \mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Assim, pode-se dizer que:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{N}^T \mathbf{q}^*)|_0^l \quad (5.17)$$

ou ainda:

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}_2^T \mathbf{q}^*(l) - \mathbf{N}_1^T \mathbf{q}^*(0) = \int_0^l [(\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}^T] d\zeta, \quad (5.18)$$

sendo necessário efetuar a mudança de coordenadas nas integrações, mediante o uso do Jacobiano J_ψ .

Definindo a matriz de rigidez tangente do elemento como:

$$\mathbf{k}_T = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (5.19)$$

a partir da definição do vetor dos esforços nodais residuais, \mathbf{f} , em (5.18), a matriz de rigidez tangente do elemento pode ser escrita como:

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l [(\Delta \mathbf{N})^T \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{p}} \boldsymbol{\sigma} + (\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{N}^T] d\zeta. \quad (5.20)$$

Desenvolvendo os termos nas integrações e realizando algumas operações matemáticas, tem-se:

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l [(\Delta \mathbf{N})^T \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} + (\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}} \cdot \mathbf{N}^T] d\zeta. \quad (5.21)$$

A partir das definições em (3.238), (3.240) e (3.231) chega-se a:

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l [(\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{G} (\Delta \mathbf{N}) + (\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\Delta \mathbf{N}) - \mathbf{N}^T \mathbf{L} \mathbf{N}] d\zeta. \quad (5.22)$$

Podendo ser reescrita como:

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_C + \mathbf{k}_G - \mathbf{k}_L, \quad (5.23)$$

em que

$$\mathbf{k}_G = (\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{G} (\Delta \mathbf{N}), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{k}_C = (\Delta \mathbf{N})^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\Delta \mathbf{N}) \quad (5.25)$$

e

$$\mathbf{k}_L = \mathbf{N}^T \mathbf{L} \mathbf{N}. \quad (5.26)$$

Vale ressaltar que os tensores \mathbf{G} e \mathbf{L} que aparecem nas integrais foram definidos na seção 3.4.4 e caracterizam os efeitos geométricos dos esforços internos e externos atuantes no elemento. Além disso, as parcelas \mathbf{k}_C , \mathbf{k}_G e \mathbf{k}_L são chamadas de contribuições constitutiva, geométrica e de carregamento, respectivamente, da matriz de rigidez tangente.

5.3 EQUILÍBRIO INCREMENTAL E DA ESTRUTURA

Seja \mathbf{A} a matriz de conectividade da estrutura, ou seja, a matriz que localiza os nós de um determinado elemento na estrutura global. A partir dessa matriz o vetor \mathbf{p}_j dos deslocamentos nodais de um elemento j pode ser extraído do vetor \mathbf{r} dos graus de liberdade (deslocamentos) nodais de toda a estrutura:

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{r}. \quad (5.27)$$

De maneira análoga, o vetor \mathbf{R} dos esforços nodais residuais de toda a estrutura pode ser relacionado com o vetor \mathbf{f}_j dos esforços nodais residuais do elemento j :

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \mathbf{f}_j. \quad (5.28)$$

Vale dizer que \mathbf{R} é função de \mathbf{p}_j , visto que é função de \mathbf{f}_j . Portanto, é uma função dos graus de liberdade nodais generalizados \mathbf{r} da estrutura, uma vez que $\mathbf{p}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{r}$.

A estrutura estará em equilíbrio quando a resultante dos esforços residuais globais for nula, ou seja, se existir um campo de deslocamentos e empenamentos que satisfaça a condição:

$$\mathbf{R} = \mathbf{o}. \quad (5.29)$$

A equação (5.29) resulta num sistema de equações não lineares, cuja solução pode ser obtida iterativamente através do Método de Newton, arbitrando uma estimativa inicial para o vetor \mathbf{r} , obtendo:

$$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}^i) \right)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{r}^i), \quad (5.30)$$

sendo \mathbf{r}^i e \mathbf{r}^{i+1} os graus de liberdade nodais da estrutura nas interações i e $i+1$, respectivamente.

Utilizando algumas expressões anteriores, a derivada parcial que surge na expressão (5.30) pode ser reescrita da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \mathbf{f}_j \right). \quad (5.31)$$

Reorganizando a expressão acima, tem-se ainda que:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A}_j^T \mathbf{f}_j), \quad (5.32)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \mathbf{r}}. \quad (5.33)$$

Utilizando a regra da cadeia, a equação (5.33) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \mathbf{p}_j} \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial \mathbf{r}}, \quad (5.34)$$

resultando em:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^T \mathbf{k}_T \mathbf{A}_j, \quad (5.35)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{K}_T, \quad (5.36)$$

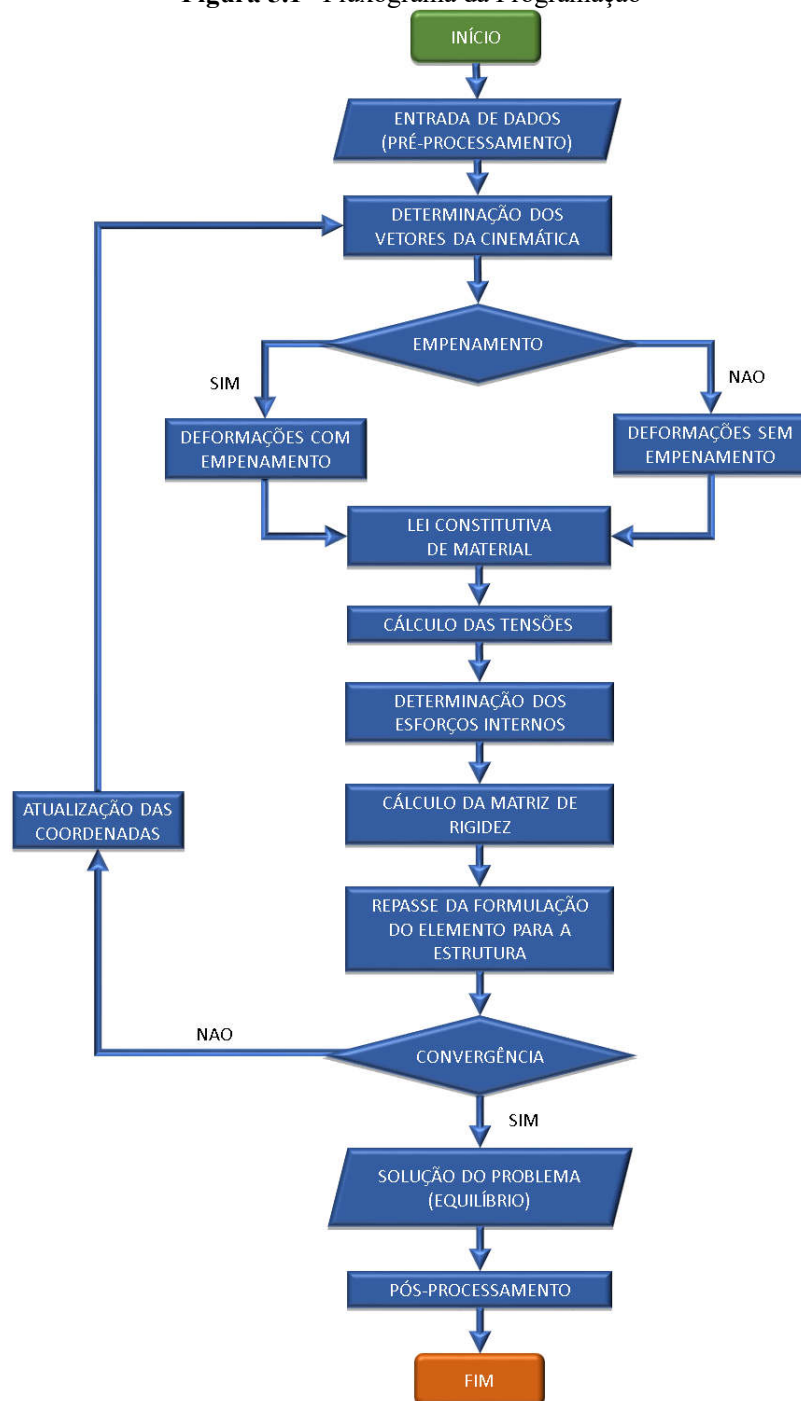
em que \mathbf{k}_{Tj} é a matriz de rigidez tangente do elemento j , expressa em (5.19) e (5.23), e \mathbf{K}_T , é a matriz de rigidez tangente da estrutura, ambas no sistema global. Portanto, a equação (5.30) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i - (\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{r}^i). \quad (5.37)$$

5.4 FLUXOGRAMA DA PROGRAMAÇÃO

A Figura 5.1 apresenta uma síntese do funcionamento do programa desenvolvido nesta pesquisa.

Figura 5.1– Fluxograma da Programação



Fonte: Autor, 2019.

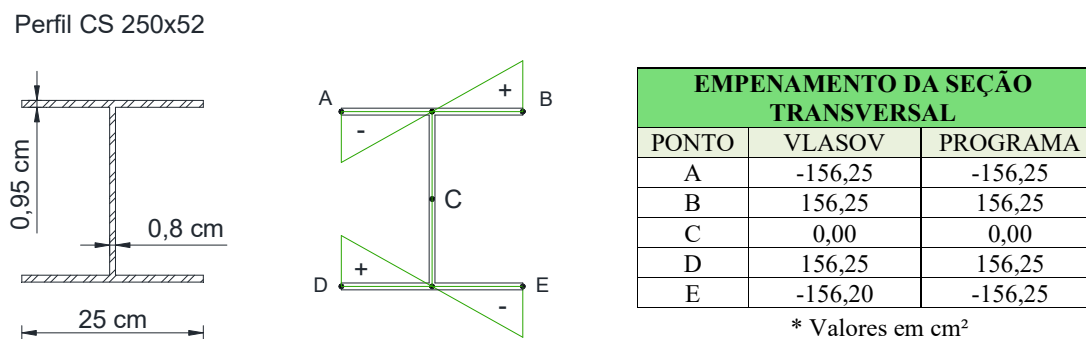
6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta problemas clássicos da literatura, cujas soluções serão comparadas com os resultados obtidos através do programa desenvolvido para a implementação da teoria demonstrada nesta pesquisa. Além disso, estes mesmos problemas serão modelados em programa comercial (ANSYS), com o intuito de demonstrar a validação dos resultados obtidos.

6.1 ANÁLISE DA CONFIGURAÇÃO DO EMPENAMENTO PRIMÁRIO NA VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I

Este exemplo consiste na análise da configuração da função empenamento da seção transversal comparando os valores encontrados no programa desenvolvido, através da formulação proposta, com os valores obtidos analiticamente através da teoria de Vlasov. O objetivo deste exemplo é verificar se a equação proposta para a determinação do empenamento primário está em concordância com a Teoria de Vlasov.

Figura 6.1 – Resultados da função empenamento de uma seção I



Fonte: Autor, 2019.

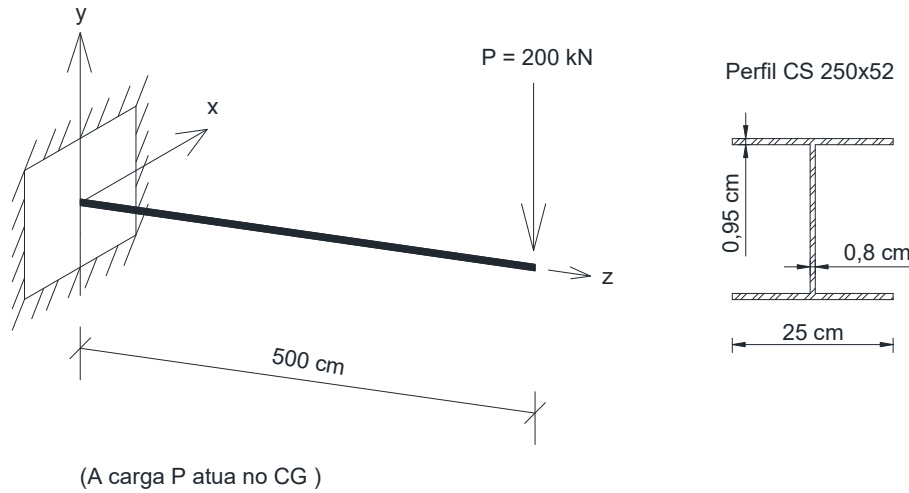
A partir da Figura 6.1 é possível verificar que os valores obtidos para a função do empenamento primário, utilizando a formulação proposta na seção 3.2.2, são idênticos aos valores obtidos através da teoria de Vlasov.

6.2 VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I EM BALANÇO, SUBMETIDA A CARGA TRANSVERSAL CONCENTRADA NA EXTREMIDADE LIVRE

Este exemplo foi abordado por Campello (2000) e consiste num perfil metálico de seção I em balanço, cujas dimensões e propriedades geométricas estão ilustradas na Figura 6.2. Uma

carga vertical concentrada é aplicada sem excentricidade no centro de gravidade da seção livre, e sua magnitude provoca grandes deslocamentos e grandes rotações no perfil. Para o material adotado foram considerados $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ e $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$.

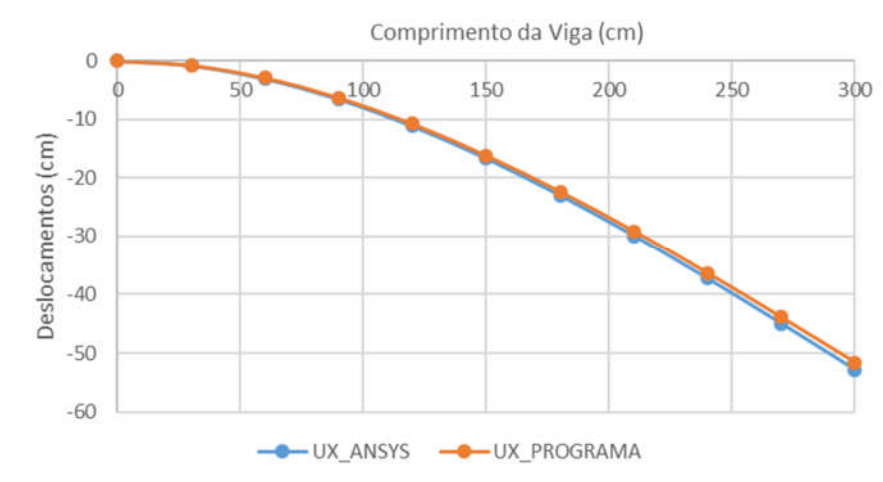
Figura 6.2 – Viga engastada em balanço sob flexão



Fonte: Campello, 2000.

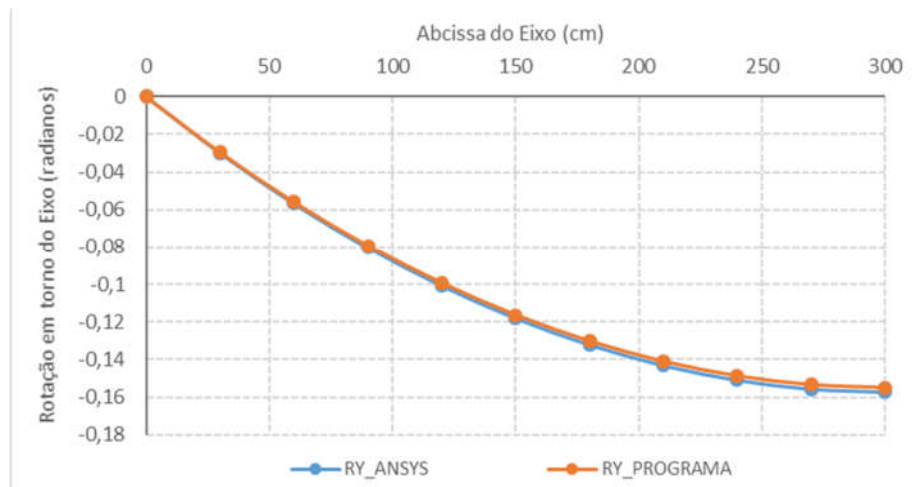
Novamente a viga foi discretizada em 10 elementos em seu eixo, totalizando 11 nós igualmente espaçados, com interpolação linear que comportam grandes deslocamentos e grandes rotações. Os resultados obtidos para rotações e deslocamentos foram comparados com os resultados do *Ansys* através das curvas representadas na Figura 6.3 a Figura 6.5.

Figura 6.3 – Deslocamentos no Eixo y



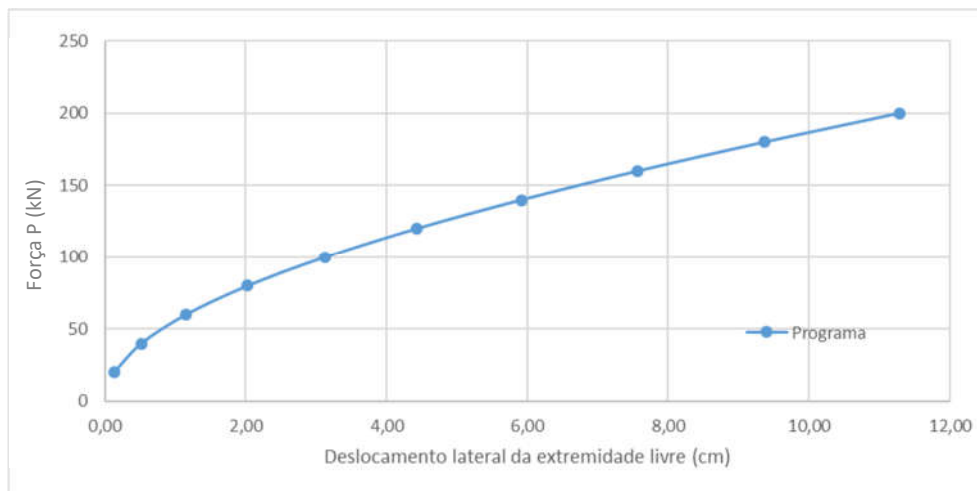
Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.4 – Rotações em torno do Eixo y



Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.5 – Curva de carga X deslocamento lateral



Fonte: Autor, 2019.

Quadro 1 – Deslocamentos do CG na Seção do Balanço

Grau de Liberdade	Campello (2000)	Autor (2019)	Diferença Percentual
u_x (cm)	-52.301	-51.560	1,42
u_y (cm)	0.000	0.000	0,00
u_z (cm)	-3.275	-3.185	2,74
θ_x (rad)	0.000	0.000	0,00
θ_y (rad)	-0.1571	-0.1550	1,34
θ_z (rad)	0.000	0.000	0,00
p (cm ⁻¹)	0.000	0.000	0,00

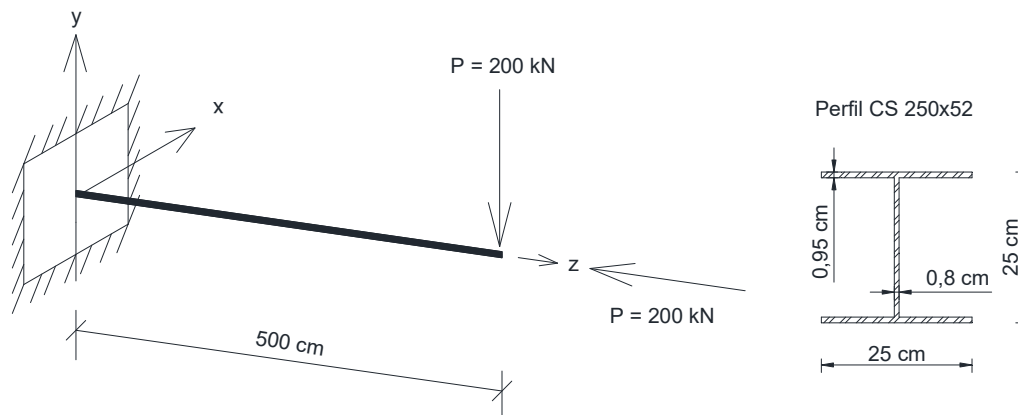
Fonte: Autor, 2019.

Neste exemplo também foram observadas diferenças percentuais inferiores a 2,75%, confirmando que o programa desenvolvido atende aos resultados esperados.

6.3 VIGA METÁLICA DE SEÇÃO I EM BALANÇO, SUBMETIDA A FLEXO-COMPRESSÃO NA EXTREMIDADE LIVRE

Este exemplo consiste em uma viga de seção I em balanço, cujas dimensões e propriedades geométricas estão ilustradas na Figura 6.6. Uma carga vertical e uma carga horizontal, ambas concentradas, são aplicadas na extremidade livre. Para o material adotado foram considerados $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$ e $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$.

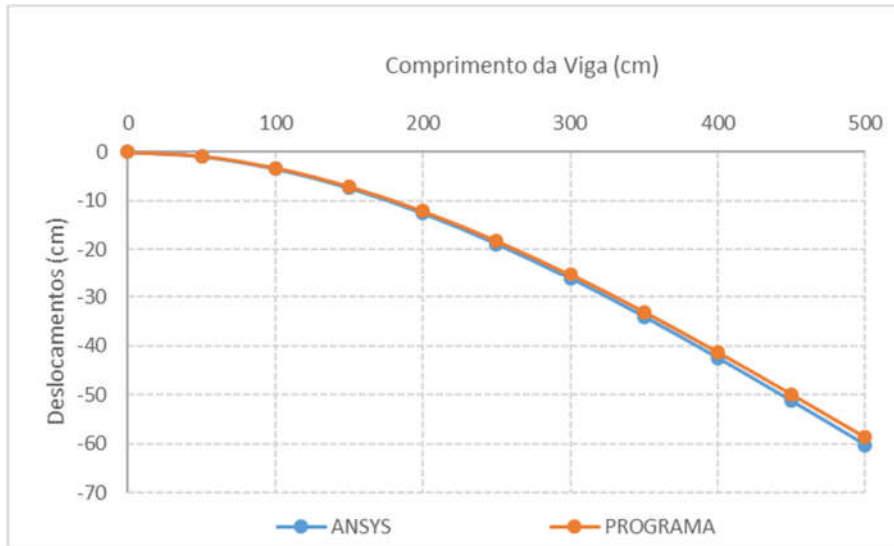
Figura 6.6 – Viga engastada em balanço sob flexo-compressão



Fonte: Autor, 2019.

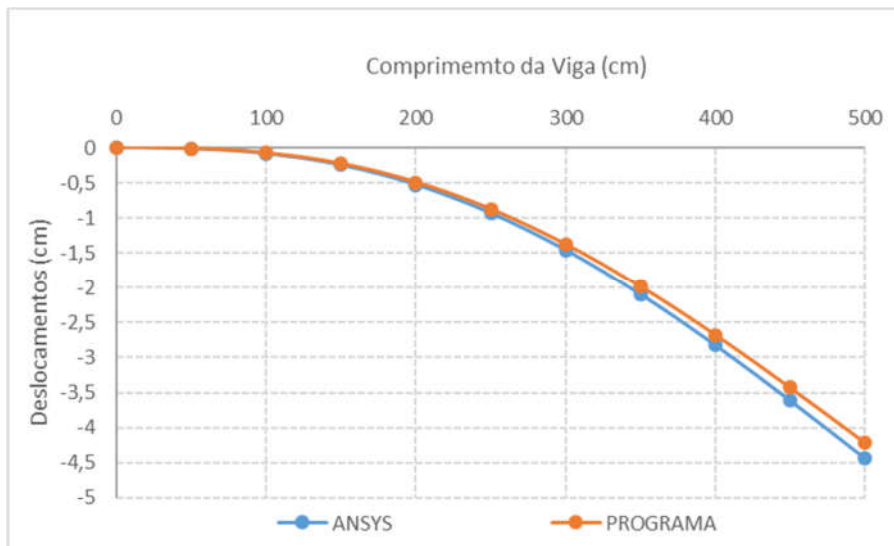
A viga apresentada neste exemplo foi discretizada em seu eixo por 11 nós igualmente espaçados, resultando em 10 elementos, com interpolação linear que comportam grandes deslocamentos e grandes rotações. Os resultados obtidos para rotações e deslocamentos foram comparados com os resultados do *Ansys* através das curvas representadas nas Figura 6.7 a Figura 6.10.

Figura 6.7 – Deslocamentos no Eixo y



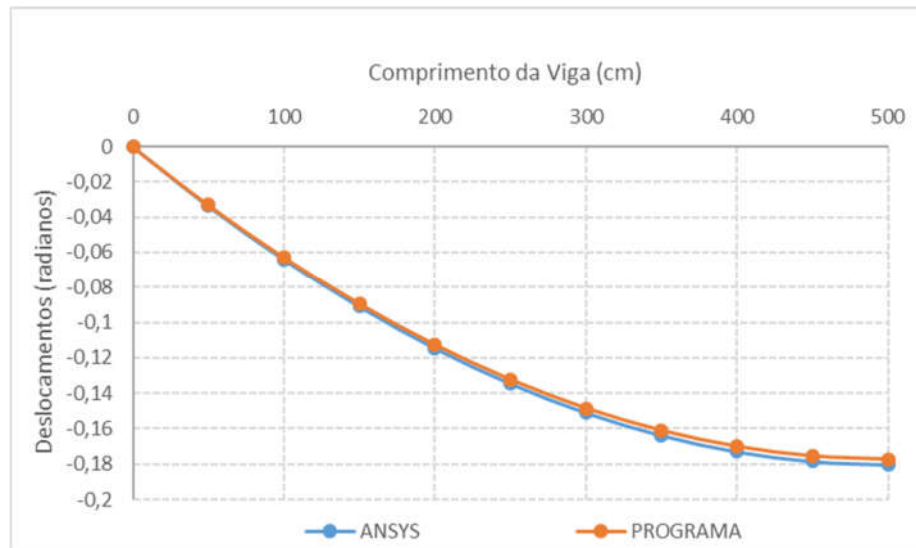
Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.8 – Deslocamentos no Eixo z



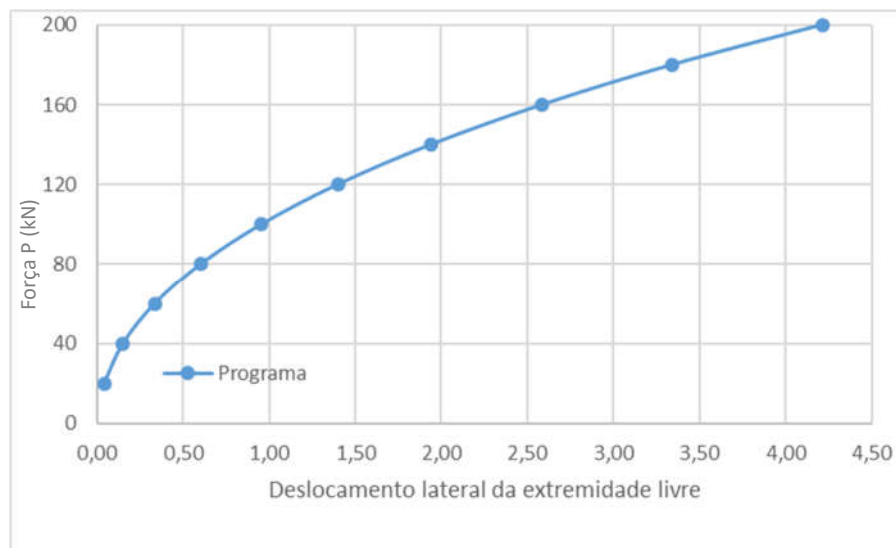
Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.9 – Rotações em torno do Eixo y



Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.10 – Curva de carga X deslocamento lateral



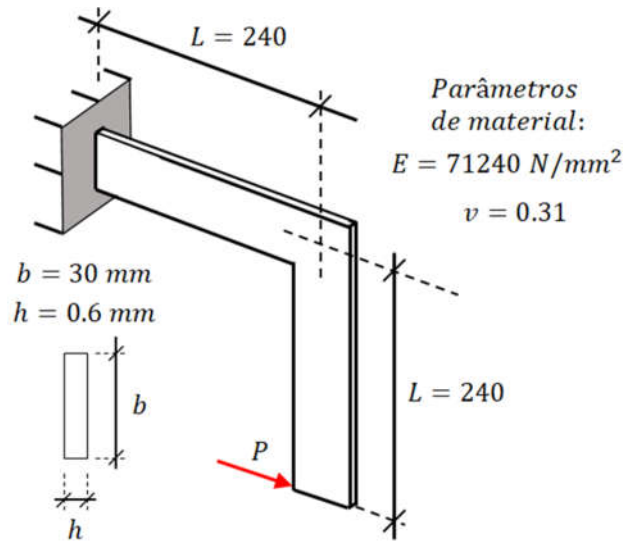
Fonte: Autor, 2019.

Mais uma vez foram observadas as diferenças de aproximadamente 1,55% entre os resultados comparados.

6.4 FLAMBAGEM LATERAL DE CHAPA RETANGULAR EM L

Este exemplo analisa uma chapa retangular em L, engastada em uma extremidade e livre na outra, submetido a uma carga horizontal aplicada na sua extremidade livre. As propriedades geométricas e dimensões do problema são apresentadas na Figura 6.11.

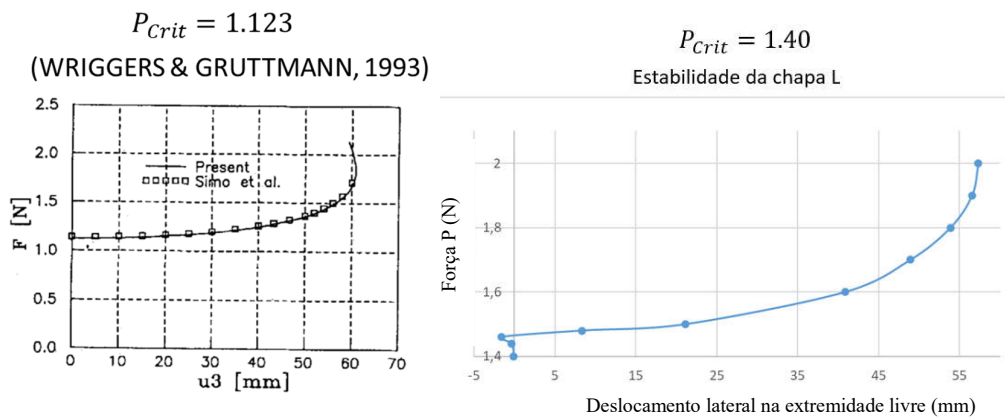
Figura 6.11 – Chapa retangular em L engastada em balanço



Fonte: Adaptado de Simo, Fox, & Rifai, 1990.

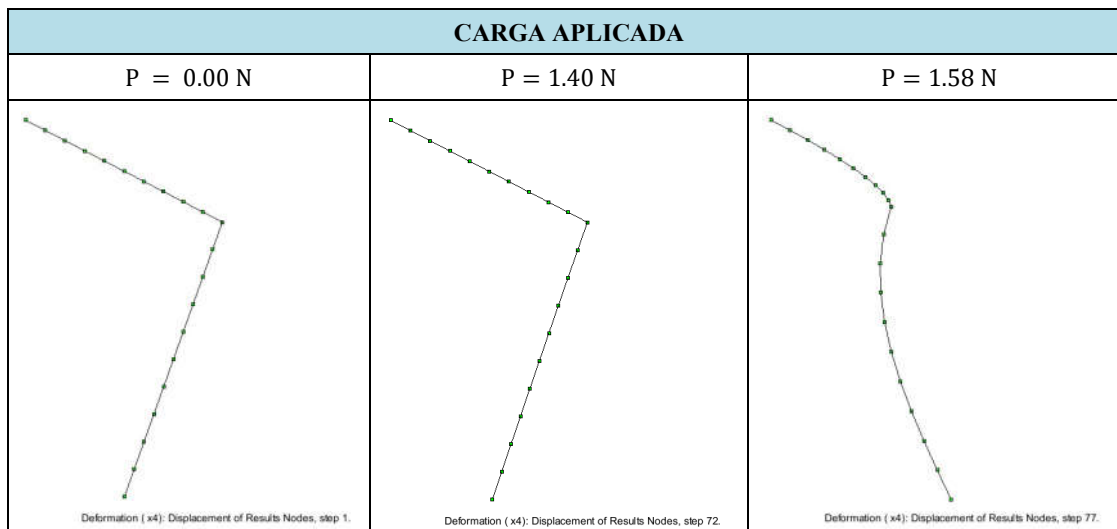
Por fim, a viga apresentada neste exemplo foi discretizada em seu eixo por 21 nós igualmente espaçados, resultando em 20 elementos. Os resultados obtidos para os deslocamentos laterais foram comparados com os resultados obtidos por Wriggers e Gruttman (1993), através das curvas representadas na Figura 6.10.

Figura 6.12 – Curva de carga X deslocamento lateral



Fonte: Autor, 2019.

Figura 6.13 – Configuração deformada da chapa em L



Fonte: Autor, 2019.

A Figura 6.13 apresenta as configurações deformadas do pórtico ilustrado na Figura 6.11. É possível observar que quando a carga P está na iminência de 1.4 N a estrutura começa a apresentar o efeito da flambagem lateral. É importante mencionar que os valores dos deslocamentos apresentados na Figura 6.13 estão numa escala correspondente a quatro vezes o valor obtido para facilitar a interpretação gráfica do comportamento da estrutura.

Percebe-se que a formulação com empenamento conferiu a estrutura analisada uma carga crítica um pouco maior do que a formulação utilizada pela literatura sem considerar o efeito do empenamento. No entanto, o caminho da solução apresenta uma instabilidade inicial, com pequenos deslocamentos contrários ao esperado. Logo, estes resultados indicam a necessidade de realizar ajustes no programa desenvolvido.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

As formulações apresentadas nesta pesquisa foram originalmente mostradas por Campello (2000). Em relação à demonstração da formulação, foram encontradas as mesmas equações da pesquisa utilizada como principal referência. No entanto, esta pesquisa deixa duas principais contribuições: (i) propõe um procedimento diferente para a determinação das propriedades geométricas e setoriais, através de um algoritmo numérico que particiona a seção transversal em elementos retangulares e (ii) demonstra detalhadamente a formulação de vigas, com o objetivo de facilitar a compreensão do leitor, e sua implementação computacional.

No que se refere ao estudo do equilíbrio da estrutura em análise, a formulação implementada apresentou resultados consistentes nas deformações e deslocamentos, tomando como parâmetros de convergência a energia do sistema e o módulo do vetor de força residual.

Para todos os exemplos propostos, foi verificada uma diferença inferior a 2,75% nos resultados numéricos obtidos pelo programa implementado, quando comparados com os resultados apresentados pelo Ansys e com as teorias clássicas da Resistência dos Materiais. Desta forma, pode-se afirmar que a pesquisa desenvolvida atingiu os objetivos e o programa desenvolvido opera em conformidade com as teorias clássicas da literatura.

Durante a análise da pesquisa, também foram observados valores com sinais negativos na diagonal principal da matriz de rigidez geométrica. Na matriz constitutiva, estas mesmas posições na diagonal principal apresentaram valores positivos e na obtenção da matriz de rigidez total da estrutura, nestas mesmas posições, a resultante da soma das matrizes de rigidez geométrica, constitutiva e da carga externa, resultaram em valores positivos.

Em relação ao estudo do empenamento primário da seção transversal para a teoria demonstrada nesta pesquisa, a formulação proposta, que utiliza um método genérico de integração por áreas através do particionamento da seção transversal em retângulos, apresentou resultados consistentes e satisfatórios quando comparados com os resultados obtidos no pela teoria de Vlasov, tanto no cálculo das propriedades setoriais, quanto para a geometria da seção empenada. Porém, ao inserir a equação do estudo do empenamento secundário, apesar da configuração deformada na seção transversal se apresentar geometricamente consistente, os valores obtidos não apresentaram convergência quadrática ou não convergiram.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Pretende-se em pesquisa futura, realizar uma demonstração detalhada da formulação da matriz de rigidez constitutiva, considerando os termos de ordem superior que foram desprezados na presente pesquisa, bem como a dedução do tensor G , que constitui a matriz de rigidez geométrica, a fim de verificar a existência de termos negativos e o estudo aprofundado da equação para análise do empenamento secundário. Ainda pesquisas futuras, pretende-se utilizar a formulação de elementos de barras implementada nesta pesquisa em conjunto com as formulações de contato mecânico.

REFERÊNCIAS

- ATTARD, M.M.; LAWATHER, R. Effect of Secondary Warping on Lateral Buckling. **Engineering Structures**, Vol. 11, Issue 2, pp. 112-118. Australia. 1989.
- BANDEIRA, A. A. **Análise de Problemas de Contato em 3D**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica de São Carlos, USP. São Carlos. 2001.
- BREITSCHAFT, ANA MARIA SENRA; BARBOSA, VALMAR CARNEIRO. **O Teorema dos Eixos Perpendiculares para um Corpo Rígido Qualquer**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2014.
- CAMPELLO, E. M. B. **Análise Não Linear de Perfis Metálicos Conformados a Frio**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica de São Carlos, USP. São Carlos. 2000.
- CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M. Geometrically Nonlinear Analysis of Thin-walled Space Frames. **Proceedings of the Second European Conference on Computational Mechanics (II EECM)**, Cracow, Polônia, 2001.
- CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. **Computational Mechanics 31**, Springer-Verlag, p. 505-518, 2003.
- CRISTINO, G. VANESSA. **Encurvatura Lateral por Flexão-Torção de Vigas Elásticas com Secção Aberta de Parede Fina - Estudo do Efeito da Deformação de Pré-encurvadura**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil. Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade de Coimbra, FCTUC. Coimbra.2015.
- DASAMBIAGIO, E. R.; PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. A Finite Strain Rod Model that Incorporates General Cross Section Deformation and its Implementation by the Finite Element Method. **Mechanics of Solids in Brazil - Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**. São Paulo, p. 145-168. 2009.
- DYM, C. L.; SHAMES, I. **Solid Mechanics: A Variational Approach**. Augmented Edition. ed. New York: Springer, 2013.
- FRUCHTENGARTEN, J. **Projeto de Estruturas Metálicas I**. Notas de Aula. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo. 1999.
- FRUCHTENGARTEN, J. **Sobre a Estabilidade de Perfis de Seção Aberta**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 245p. 1995.
- ISHITANI, H.; BITTENCOURT, T. N. **Estruturas de Concreto II**. Notas de Aula. 2000.
- LACERDA, E. G. M. **Análise Não Linear de Treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. Dissertação de Mestrado. Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN. Natal. 2014.

LAGO, L. B. **Estudo dos Efeitos Constitutivos Sobre a Estabilidade Elástica de Perfis Metálicos**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotecnia. Escola politécnica da USP. São Paulo. 2012.

LANGENDONCK, T. V. **Curso de Mecânica das Estruturas**. Resistência dos Materiais.. Deformações II. RM-3. 1960-b.

LEAL, L.A.A.S. **Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de aço**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica da USP. São Paulo. 2014.

MOREIRA, M. L. T. **Parametrização das Rotações em Teorias de Barras e Cascas**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica da USP. São Paulo. 2009.

MORI, D. D.; NETO, J. M. **Flexo-torção: Barras com seção aberta e paredes delgadas. Teoria e exemplos**. 2ª Edição. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo. São Carlos. 2017.

ODEN, J. T.; RIPPERGER, E. A. **Mechanics of Elastic Structures**. 2nd. ed. : McGraw-Hill, 1981.

PIMENTA, P. M. **Análise Não Linear Geometricamente Exata de Pórticos Espaciais**. Notas de Aula. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. São Paulo. 1999.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. São Paulo: Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 2006.

PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping. **Latin American Journal of Solids and Structures**, São Paulo, p. 119-140, 2003.

PIMENTA, P. M.; YOJO, T. Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames. **Applied Mechanics Reviews**, 1993. 118-128.

REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York: Cambridge, 2013.

RITTO-CORRÊA, M.C. **Análise de estruturas reticuladas: rumo a uma teoria geometricamente exacta, cinematicamente completa e fisicamente não linear**. Tese de Doutorado. 558p, Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa, 2003.

SANTHYAMOORTHY, M. **Nonlinear Analysis of Structures**. 2nd. ed. : CRC Press, 1997.

SILVA, H. F. **Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP. São Paulo. 2005.

SIMO, J. C. A finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1985. 55-70.

SIMO, J. C.; FOX, D. D.; HUGHES, T. J. R. Formulations of Finite Elasticity with Independent Rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1992. 277-288.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A Three-Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1986. 79-116.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A Geometrically Exact Rod Model Incorporating Shear and Torsion-warping Deformation. **Int. J. Solids Structures**, v. 27, p. 371-393, 1991.

TIMOSHENKO, STEPHEN, GERE, JAMES. **Mecânica dos Sólidos**. Vol. 1. LTC Editora, 1983.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3rd. ed. : McGraw-Hill, 1970.

VLASOV, V. Z. **Thin-walled Elastic Beams**. 2nd. ed. Moskva: Israel Program for Scientific Translations., 1961.

WRIGGERS, P., & GRUTTMANN, F. (1993). Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: theory and finite element formulation. **Int. J. Numer. Meth. Engrg.**, 2049-2071.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. Sixth Edition. ed. : Elsevier Butterworth Heinemann, 2005.

APÊNDICE A

Neste anexo serão apresentados os resultados para a derivação em relação ao tempo das funções auxiliares $h(\theta)$ definidas pelas equações (2.31) a (2.39).

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1(\theta) &= \frac{\cos\theta(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \text{sen}\theta\dot{\boldsymbol{\theta}}}{\boldsymbol{\theta}^2} = \frac{(1 - 2\text{sen}^2(\theta/2))(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\boldsymbol{\theta}^2} - \frac{\text{sen}\theta(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\boldsymbol{\theta}^3} \\
 &= \left(\frac{1}{\boldsymbol{\theta}^2} - \frac{h_1(\theta)}{\boldsymbol{\theta}^2} - h_2(\theta) \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= (h_3(\theta) - h_2(\theta))(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})
 \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_2(\theta) &= \frac{2\text{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2) \dot{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\theta}^2/4) - \text{sen}^2(\theta/2)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\boldsymbol{\theta}^4/4} \\
 &= \frac{\text{sen}\theta(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\boldsymbol{\theta}^3} - \frac{2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{2 (\boldsymbol{\theta}/2)^2 \boldsymbol{\theta}^2} \\
 &= \left(\frac{h_1(\theta)}{\boldsymbol{\theta}^2} - \frac{2 h_2(\theta)}{\boldsymbol{\theta}^2} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= h_4(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_3(\theta) &= \dot{h}_1(\theta) - \frac{(1 - h_1(\theta)) 2(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\boldsymbol{\theta}^2} \\
 &= (h_3(\theta) - h_2(\theta))(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) - 2 h_3(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= (h_2(\theta) - 3 h_3(\theta))(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= h_5(\theta)(\boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}),
 \end{aligned} \tag{0.3}$$