UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

MÁRCIA AZEVEDO CAMPOS

TESE DE DOUTORADO

Salvador/BA
2019

MÁRCIA AZEVEDO CAMPOS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito à obtenção do título de **Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências**, sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias e coorientação da Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina.

Salvador/ BA

2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Campos, Márcia Azevedo
Uma Sequência Didática para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico no 6° Ano do Ensino Fundamental / Márcia Azevedo Campos, Luiz Márcio Santos Farias, Sandra Magina. -- Salvador, 2019.
206 f. : il

Orientador: Luiz Márcio Santos Farias.
Coorientadora: Sandra Magina.
Tese (Doutorado - Programa de Pós Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências - PPGEFHC/UEFS/UFBA) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física/UFBA, 2019.

1. Ensino Fundamental. 2. Álgebra Elementar. 3. Pensamento algébrico. 4. Sequência Didática. 5. Aprendizagem matemática. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Magina, Sandra. I. Farias, Luiz Márcio Santos. II. Magina, Sandra. III. Título.

MÁRCIA AZEVEDO CAMPOS

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º. ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Resultado: _______________, em ____de ___________ de ________.

Luiz Márcio Santos Farias – orientador ____
Doutor em Didática das Ciências e Matemática – U. Montpellier 2/França
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Sandra Maria Pinto Magina – coorientadora _______________________________________
Doutora em Educação Matemática – U. London/Inglaterra
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC

Andréia Maria Pereira de Oliveira – examinadora interna ____________________________
Doutora em Ensino Filosofia e História das Ciências – UFBA/UEFS
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Geilsa Costa Santos Baptista – examinadora interna _________________________________
Doutora em Ensino Filosofia e História das Ciências – UFBA/UEFS
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Eurivalda Ribeiro dos S. Santana – examinadora externa _____________________________
Doutora em Educação Matemática – PUC/SP
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC

Itamar Miranda da Silva – examinador externo _____________________________________
Doutor em Educação em Ciências e Matemática – UFPA
Universidade Federal do Acre – UFAC

Izabella Oliveira – examinadora externa ____
Doutora em Educação – Université du Québec à Montréal –UQAM
Université Laval – Québec/Canadá

Leandro do Nascimento Diniz – examinador externo _________________________________
Doutor em Ciências da Educação – UMinho/Portugal
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB

Rosemeire de Fatima Batistela – examinador externo ________________________________
Doutora em Educação Matemática – UNESP/Rio Claro
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão – examinadora externa ___________________________
Doutora em Educação Matemática – U. de S. de Compostela/Espanha
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

À Rodrigo, amor maior, e toda sua vida!

À Duda, sonho gestado junto, uma nova vida!

À Henrique, exemplo que fiz, vida longa!

À Ró, amor de presente da vida para a vida!

À Mainha, vida de desprendimento que só se explica pelo amor!

"Entrega o teu caminho ao Senhor, confia nele, e o mais ele fará" (Sl 37:5).

E "[...]Até aqui nos ajudou o SENHOR" (I Sm 7:12b).

AGRADECIMENTOS

Poderia resumir esse texto em uma palavra: Gratidão!
E todos estariam guardados no coração.
Mas a vontade é externar, quão grata sou.
AGRADEÇO:

A DEUS, autor da minha vida: a ti SENHOR, toda honra e toda glória. Te agradeço pela vida, por ter me concedido coragem, determinação e sabedoria para viver as lutas e ter me concedido tantas vitórias.

À minha família: à Rogério, esposo compreensivo, companheiro, que sempre apoiou as minhas decisões e se fez bem presente nas minhas ausências; à minha mãe Nildaci, na simplicidade se fez visionária, lutadora, desprendida e me fez chegar até aqui. Cremos, mas só o amor explica! Ao meu amado filho Rodrigo, pela concretização do sonho e do amor; ao meu irmão Davi, à Nete e aos meus sobrinhos Daniel e Lara, pela alegria. Amo vocês!

Aos meus familiares que sempre me apoiaram e incentivaram: À Ma. Elvira, pelo exemplo: Luciana, pelo acolhimento; Tia Dé e Binha, por serem mães: e a Ana Cláudia, que por mais quatro anos se doou como mãe à Rodrigo.

Aos meus queridos amigos, pela certeza e alegria de saber que os tenho sempre: ao Prof. Dr. Klayton Porto, companheiro e grande incentivador desse doutorado. Vencemos meu Amigo!!!
À Mariana, que com Isa, continua movimentando minha vida; à Luana e Dai, meus parceiros; à Cida e Elane, amigas mais que irmãs; à Mesa 4 que me sustentou de alegria e churrascos; à turma Gym, que malhou comigo o corpo, deixando os dias e a alma mais leves, e a todos que aqui não nomeie!

Aos colegas do grupo de estudos NIPEDICMT que se tornaram amigos (e coautores) nessa caminhada na busca do mesmo sonho: #Vamosacabarlogocomisso!!!
E a um anjo (que pariu um anjo Gabriel!!!) que me acolheu com carinho e cafés, caronas e casa, quando seria nômade. Muito obrigada Su (Sueli)! Um ser brilhante no meu coração para a vida toda.

Ao meu querido orientador Prof. Luiz, um coração do tamanho do mundo, acelerado, uma sede de valorização do Ser professor que não o deixa esquecer do tratamento: Professora... Professor... Muito obrigada por ter me recebido, acreditado e acompanhado! Perdão pelo que não consegui acompanhar, sempre serei grata!

A minha querida orientadora e agora coorientadora Sandra Magina, pela presteza, paciência e competência que pude desfrutar em nossas frutíferas conversas, e me fez chegar até aqui! Estamos aqui de novo, quiçá ali, acolá, ... em mais um jornal de agradecimentos, como dizia!

À Eurivalda, pelos valiosos ensinamentos, resenhas e resumos em faz e refaz, em idas e vindas...e fui.... Guardei no coração o "alegrar com a alegria dos outros" (SANTANA, 2015) e fui viver o sonho além do sonho chamado PPGEM.

Aos professores e professoras da Banca de Qualificação e Defesa: Andréia, Geilsa, Eurivalda, Itamar, Izabella, Leandro, Rose Batistela e Tânia. Nos encontros e reencontros que a academia nos proporciona recebi de vocês as melhores contribuições, a atenção, o cuidado, as leituras parágrafo a parágrafo, os pareceres, no mais são minhas as limitações. Muito obrigada!

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia –UESB peça licença, à FAINOR, à Universidade Federal da Bahia – UFBA pelo curso PPGEFHC, e à Capes pelo apoio financeiro. Juntos possibilitaram as mais de 100 pontes aéreas e terrestres VDC – SSA.

.

À Rita, uma alma boa que sensibilizou comigo. Obrigada Professora!
Aos meus queridos alunos, agentes vibrantes das minhas escolhas!

GRATIDÃO a todos e a todas!

A autora

CAMPOS, Márcia Azevedo. **Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º. Ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia: Salvador, 2019.

RESUMO

Apresentamos uma Sequência Didática, pelos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática, contendo atividades de resolução de problemas com números naturais. Esta reúne problemas que (re)apresentamos do livro didático em uso e que elaboramos a partir dos estudos realizados, além de momentos didáticos que visam analisar que *condições* e *restrições* atuam sobre a implementação dessa Sequência no 6º. Ano do Ensino Fundamental, visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Traçamos como objetivo geral: investigar quais contribuições e as *condições* e *restrições* de implementação de uma Sequência Didática – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º. Ano do Ensino Fundamental e com atividades de resolução de problemas para o desenvolvimento do pensamento algébrico; e como objetivos específicos: (a) analisar as condições e as restrições para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de problemas de operações com números naturais; (b) investigar estratégias mobilizadas pelos alunos a partir das produções orais e escritas ao resolver problemas com números naturais que que revelem aspectos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico; (c) analisar as produções (escrita e oral) dos alunos nas respostas dadas aos problemas propostos quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações para a aprendizagem matemática. Entrelaçamos a nossa pesquisa à abordagem qualitativa, de natureza interpretativa que busca conhecer, descrever e analisar as ações dos alunos e o raciocínio que mobilizam quando se deparam com problemas que podem evocar o pensamento algébrico. O aporte às análises veio da Teoria Antropológica do Didático nos estudos de Chevallard, Bosch, e seus colaboradores; Kaput; Kieran; Squalli: Radford; Almeida; Oliveira e Câmara; Duval, dentre outros. A pesquisa se deu em uma escola pública estadual, interior da Bahia, com 111 alunos, que participaram de três fases de experimentação. Resultados indicam que o pensar algebricamente se manifesta principalmente ao manipular objetos desconhecidos de forma analítica como se fossem conhecidos; na capacidade de estabelecer relações entre os dados de um problema; evocando objetos *não-ostensivos* a partir de *ostensivos* presentes nos problemas, significando-os. Os problemas aritméticos mostraram-se propícios ao estabelecimento de relações que indicaram desenvolvimento do pensamento algébrico, nas vertentes de raciocínio sequencial, equacional, de equilíbrio e funcional, este último com mais dificuldade de percepção. Foi baixo o uso de estratégias de resolução algébrica com uso de letras e símbolos, justifica-se por ainda não serem formalmente introduzidos na álgebra. Consideramos que o pensamento algébrico não necessariamente está associado ao uso desses elementos. A forma como as atividades são propostas aos alunos, sua condução, explorando *ostensivos* e variados registros de representação semiótica, como a linguagem natural, icônica e numérica, contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Encontramos assim evidências para validar a nossa sequência, discutindo-a pelas bases legais e teóricas e referendando aos domínios da álgebra, e assim promover o conhecimento.

Palavras-Chave: Ensino Fundamental. Álgebra Elementar. Pensamento algébrico. Sequência didática. Aprendizagem matemática.

CAMPOS, Márcia Azevedo. **Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º. Ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia: Salvador, 2019.

ABSTRACT

We present a Didactic Sequence, by the methodological assumptions of Didactic Engineering, containing problem solving activities with natural numbers. This presents problems that we present from the textbook in use and that we elaborate from the studies carried out, as well as didactic moments that aim to analyze what conditions and restrictions act on the implementation of this Sequence in the 6th. Year of Elementary School, aiming at the development of algebraic thinking. We outline as general objective: to investigate what contributions and conditions and restrictions of implementation of a Didactic Sequence - elaborated for the teaching of operations with natural numbers, in the 6th. Year of Primary Education and with problem-solving activities for the development of algebraic thinking; and as specific objectives: (a) to analyze the conditions and constraints for the development of algebraic thinking from problems of operations with natural numbers; (b) investigate strategies mobilized by students from oral and written productions in solving problems with natural numbers that reveal aspects inherent in the development of algebraic thinking; (c) to analyze the written and oral productions of the students in the answers given to the proposed problems regarding the development of algebraic thinking and its implications for mathematical learning. We interweave our research to a qualitative approach, of an interpretive nature that seeks to know, describe and analyze the actions of students and the reasoning that mobilize when they are faced with problems that may evoke algebraic thinking. The contribution to the analysis came from the Anthropological Theory of Didactics in the studies of Chevallard, Bosch, and their collaborators; Kaput; Kieran; Squalli: Radford; Almeida; Oliveira e Câmara; Duval, among others. The research was carried out in a state public school, in the interior of Bahia, with 111 students, who participated in three phases of experimentation. Results indicate that thinking algebraically manifests itself mainly by manipulating unknown objects analytically as if they were known; in the ability to establish relationships between the data of a problem; evoking non-ostensible objects from the ostensible ones present in the problems, meaning them. Arithmetic problems proved to be conducive to the establishment of relations that indicated the development of algebraic thinking, in terms of sequential, equational, equilibrium, and functional reasoning, the latter with more difficulty of perception. It was under the use of algebraic resolution strategies with the use of letters and symbols, justified by not being formally introduced in algebra. We consider that algebraic thinking is not necessarily associated with the use of these elements. The way the activities are proposed to the students, their conduction, exploring ostensible and varied records of semiotic representation, such as the natural, iconic and numerical language, contribute to the development of algebraic thinking. We thus find evidence to validate our sequence, discussing it on the legal and theoretical grounds, and commending the fields of algebra, and thus promoting knowledge.

Keywords: Elementary School. Elementary Algebra. Algebraic thinking. Following teaching. Mathematical learning.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

APRESENTAÇÃO

Esta seção trata das motivações iniciais que conduziram a esta pesquisa, compreendendo o momento do encontro com o objeto de pesquisa, as inquietações e as discussões que revelaram a problemática e levaram à construção dos objetivos, além da busca pelos aportes teóricos que os subsidiaram.

As pesquisas em Didática, enquanto campo de estudo de situações de ensino e produção de conhecimento, são articuladas em torno de uma questão. Entendemos que a problemática de uma pesquisa é o conjunto dessas questões que surgem de um contexto estudado e vivenciado, articuladas e validadas num determinado quadro teórico para responder as indagações e os objetivos de pesquisa, a partir das hipóteses (questões abertas, premissas) induzidas pelo quadro teórico.

Para embasar e direcionar o nosso estudo delimitamos como tema o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de resolução de problemas de operações com números naturais, de natureza aditiva e multiplicativa, pelos alunos[1] do 6º. Ano do Ensino Fundamental, objeto de nosso estudo, dado ênfase à produção de significados aos objetos algébricos que podem ser evocados pelos alunos na resolução desses problemas.

Nesse primeiro momento, para situar o leitor, assumimos o pensamento algébrico como uma ação exclusivamente humana, cognitiva e revelada na atividade matemática através do estabelecimento de relações, nos processos de generalizar, modelar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido e construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica. Mais sobre essa caracterização é encontrado no Capítulo II.

[1] Sem diferenciação de gênero, usaremos em nosso texto o termo aluno(s) para nos referirmos ao conjunto de estudantes constituído por pessoas, sejam do sexo masculino ou do sexo feminino. Como também sinônimo de estudante(s), que por vezes aparecerá no texto, a depender do contexto.

O texto desta tese, apesar de ser redigido por mim, será construído na primeira pessoa do plural, pois se trata de uma produção conjunta com meus orientadores. E dessa forma algumas convicções e experiências relatadas pertencem a mim, doutoranda, visando um fim comum, a construção e a defesa desta tese.

E para descrever o desenvolvimento e o percurso da pesquisa que culminou na tese de doutoramento e cujo texto aqui se apresenta, a estruturação foi feita pela divisão em capítulos. No Capítulo I, intitulado *O caminho em direção à aprendizagem matemática* trazemos a introdução, destacando o encontro com o objeto de pesquisa que gerou a problemática e levou à elaboração dos objetivos que norteiam o estudo. Destacaremos também o objeto do saber do nosso estudo, os Números Naturais como também as inspirações filosóficas que nos fizeram problematizar a aprendizagem matemática pelo pensamento algébrico.

O Capítulo II, intitulado *Quadro Teórico da Pesquisa,* traz uma discussão sobre o nosso objeto matemático de estudo, a álgebra elementar[2]. Apresentamos reflexões e abordagens teóricas que sustentam as argumentações da nossa questão de pesquisa e trazem a definição dos termos que são utilizados pela álgebra. Discutimos a produção de significados e a formação inicial do pensamento algébrico na resolução de problemas, como nos estudos do *Early Algebra*[3]. Trazemos assim pesquisas correlatas que se aproximam do nosso estudo no sentido de situá-lo no atual contexto das pesquisas da Educação Matemática.

Ainda no mesmo Capítulo II, fizemos uma análise das indicações legais que esses documentos preveem para o ensino de Matemática no 6º. Ano do Ensino Fundamental, discussão essa apoiada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática[4] e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que ainda se encontra em processo de implantação. Como base legal para as discussões analisaremos também o Currículo das Escolas Públicas do Estado da Bahia, suas diretrizes, normas e regulamentações para o referido nível de ensino. É nesse contexto que se insere o estudo que aqui apresentamos,

---

[2] Aqui refiro à Álgebra Elementar como a que é estudada nos níveis fundamental e médio como uma abordagem básica de conceitos algébricos como equação, incógnita, variável.

[3] O termo *Early Algebra* e sua caracterização serão discutidos no item 2.1.4.

[4] Chamaremos aqui de PCN de Matemática aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do 3º. e 4º. Ciclos do Ensino Fundamental de Matemática. Trata-se de uma coleção de caráter institucional, elaborada pelo Ministério da Educação com o papel de serem norteadores da educação no Brasil, na perspectiva de contribuir para uma nova prática pedagógica (BRASIL, 1988, p. 05). Objetivam contribuir para que os alunos, através de uma prática pedagógica docente significativa, tenham acesso a um saber matemático que lhes possibilite, de fato, a inserção no mundo social e do trabalho enquanto cidadãos.

buscando justificar a questão de pesquisa que o norteia no que prevê o Currículo de Matemática, nos PCN (BRASIL, 1988), que são documentos que dão visibilidade à parte da relação institucional com os objetos do saber.

Com o objetivo central de investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico, buscamos pesquisas correlatas sobre esse processo para nos situarmos nas discussões atuais.

Os aspectos teóricos da Teoria Antropológica do Didático, como os objetos *ostensivos* e *não-ostensivos*, e as *condições* e *restrições* de existência do nosso objeto de estudo compõe ainda o Capítulo II. Trazemos também os resultados de pesquisas que coadunam com o nosso objetivo e, a partir de seus resultados, traçamos parâmetros de análises para os nossos dados. Estes foram categorizados nas pesquisas correlatas que investigamos, realizadas no Brasil e no exterior, dentre elas as pesquisas de Almeida (2016), Lins (1992, 1994a, 1994b), Kaput (1999, 2008) e Radford (2006, 2009, 2011b), além de seus colaboradores.

No Capítulo III, *Caminhos Metodológicos*, levando em consideração os objetivos traçados na pesquisa, apresentamos os arcabouços teóricos da Engenharia Didática que deram sustentação à elaboração da sequência didática que propusemos e às nossas análises e discussões, em busca de validar as hipóteses de estudo que construímos. Apresentamos o universo da pesquisa, destacando que a instituição social é uma escola da rede pública, particularmente turmas de 6º. Ano do Ensino Fundamental. Os participantes da pesquisa são os alunos dessas turmas e a professora de Matemática (única para as três turmas), cuja prática é norteada pelo que é preconizado nos documentos legais em vigência. Do mesmo modo, fez-se necessário também a análise de livro didático em uso, pela sua influência no ensino que é ministrado e sobre os saberes que são institucionalizados em sala de aula a partir dele.

Ainda no Capítulo III, descrevemos detalhadamente a sequência didática e todo o processo de elaboração e aplicação das atividades de experimentações que a constituíram, além de mostrar caminhos para a análise dos dados colhidos com a aplicação da sequência.

A análise dos instrumentos de produção de dados, se dá em duas etapas: *a priori* e *a posteriori*. Ambas, análise didática *a priori* dos problemas das seções de experimentação da sequência e as análises *a posteriori* que denominamos *Análises dos*

Resultados, estão no Capítulo IV. Por se tratar de um estudo majoritariamente qualitativo, detemos na análise qualitativa dos dados produzidos, atentando para essas especificidades e suas possíveis interferências nos resultados, fazendo as inferências pertinentes ao estudo em questão.

E o no Capítulo V traremos as *Considerações Finais*, retomando as questões de pesquisa colocadas e as hipóteses levantadas, traçando uma síntese dos resultados encontrados para responder às indagações iniciais e os objetivos construídos para o estudo que culminou na tese.

Nesse capítulo final analisamos também a importância dos resultados e dos instrumentos utilizados para o desenvolvimento do pensamento algébrico, como também para o enriquecimento da prática docente. Apresentamos a sequência didática que propusemos, suas *condições* e *restrições* no ensino de Matemática do 6º. Ano, enquanto proposta pensada para minimizar as dificuldades no ensino e aprendizagem matemática escolar e especificamente da álgebra, a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico. E assim mostraremos as contribuições do nosso estudo para a Educação Matemática e, especificamente, para a Didática da Matemática, indicando caminhos para novos estudos revelados no percurso deste.

CAPÍTULO I:

CONSTRUINDO E PROBLEMATIZANDO O ESTUDO

1.1 A Educação Matemática e a Didática da Matemática: campos de estudo

A Educação Matemática, destaca Ubiratan D´Ambrósio (1993), surgiu como campo científico que surgiu 1908, durante o Congresso Internacional de Matemática, na Itália, onde educadores preocupados com o ensino de Matemática criaram uma comissão precursora da Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI), que passou a realizar, a cada quatro anos, um congresso internacional, o ICME - International Congress on Mathematical Education. E esta então se consolidou como área de pesquisa interdisciplinar, espaço próprio de diálogo entre a Matemática e a Educação, que aborda relações entre o ensino e aprendizagem.

O campo de estudo denominado Didática da Matemática surgiu como uma área cientifica que investigava essencialmente os objetos de ensino. Sua origem remete a pesquisadores como Guy Brousseau, Yves Chevallard, Gérard Vergnaud, dentre outros, que tiveram um papel essencial na definição dessa área de estudo. Na origem do movimento teórico está a ideia de que é possível descrever e explicar de maneira racional os fenômenos de ensino, fenômenos que suscitam, em geral, mais o empirismo ou a opinião que o discurso racional (BESSOT, 1994).

A Didática da Matemática, assim como a Educação Matemática, são campos de estudo em desenvolvimento cujas fontes imediatas principais são a antropologia, a sociologia, a psicologia, a pedagogia, a linguística, além de outros conhecimentos, que discutem o pensar e o saber, dada a complexidade dos processos e das situações de ensino e aprendizagem em matemática. A matemática, com sua natureza estritamente simbólica, e a educação, com seus desafios com o ensino e a aprendizagem, imprimem às pesquisas que buscam desvendá-los um caráter muito particular a esse campo de estudo.

A Didática da Matemática possui um objeto de estudo definido por Chevallard, Bosch e Gascón (2001) como *sistema didático*, que tem por finalidade o estudo da questão geratriz da pesquisa, a fim de encontrar uma resposta ou um conjunto de respostas. Nele há um estabelecimento de relações entre o professor, o aluno e o saber. Em nosso trabalho o sistema didático é constituído em torno de tarefas articuladas dentro de uma organização matemática que envolve os números naturais e que propiciam a formação do pensamento algébrico.

As pesquisas em Didática da Matemática são frequentemente articuladas em torno de uma questão, colocada como um problema de ensino, e de aprendizagem, pois entendemos ser a aprendizagem o objetivo maior do ensino. A Didática da Matemática é definida por Almouloud (2017) como sendo

> [...] a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam (p. 14).

Assim, situamos o nosso estudo no campo da Educação Matemática, num duplo movimento de teorização e de experimentação, cujas discussões teóricas perpassam pela Didática da Matemática.

Quanto a distinção que o autor faz entre ensinar e aprender nos permite refletir sobre a diferença entre os objetos de um ensino, as intenções do professor e a realidade dos conhecimentos adquiridos pelos alunos, numa inseparabilidade entre ensino e aprendizagem, pois entendemos ser a aprendizagem o objetivo do ensino.

1.2 A álgebra: encontro com o objeto de pesquisa

Vivenciando a Educação Matemática, o ensino e a aprendizagem de Matemática ao longo da nossa prática docente e pelas pesquisas realizadas, surgiu a motivação inicial para o desenvolvimento deste estudo. E mais especificamente o ensino e aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental.

E pesquisas sobre a aprendizagem da álgebra (BEDNARZ; JANVIER, 1996; BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; KIERAN, 1991; MARCHAND; BEDNARZ, 2000; RADFORD; GRENIER, 1996, apud OLIVEIRA; RHÉAUME, 2014) despertaram a Didática, enquanto campo de estudo da Educação Matemática, para os estudos sobre a resolução de problemas algébricos.

Pelas orientações curriculares que regem o Ensino Fundamental no Brasil, os PCN (BRASIL, 1988) a álgebra formal faz parte do currículo do 7º ano do Ensino Fundamental. Nesse momento, o seu ensino passa a adotar uma postura mais semiótica de uso de símbolos e signos linguísticos, quando a aritmética pura, unicamente, não dá conta de solucionar os problemas.

No Brasil, as pesquisas que buscaram diagnosticar as dificuldades de aprendizagem da álgebra se intensificaram a partir dos anos 80, com a ascensão da Educação Matemática. Buscavam, sobretudo, entender os processos de ensino e aprendizagem da álgebra e assim propor soluções.

A partir dos anos 90 pesquisadores da Educação Matemática (DA ROCHA FALCÃO, 1993; LINS, 1992; KAPUT, 1999, 2008; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; ARCAVI, 2005; BLANTON; KAPUT, 2005; CAHARRER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; ALMEIDA, 2016; dentre outros) centraram suas discussões no ensino e na produção de significados pelos alunos para os objetos e processos da álgebra, com o interesse de entender os modos de produzir significados pelos alunos. Para esses pesquisadores o centro da aprendizagem da álgebra deve ser o pensamento algébrico. Argumentam também que o ensino voltado para a manipulação de técnicas e de símbolos sem sentido não é suficiente, não possibilita ao estudante entender a álgebra como deveria.

Atualmente as pesquisas sobre a aprendizagem da álgebra centram-se na produção de significados através do desenvolvimento cada vez mais precoce do pensamento algébrico. Estudos que argumentam a introdução do pensamento algébrico desde os anos iniciais de escolaridade, como o *Early Algebra* que começou nos Estados Unidos, vêm se difundindo por todo mundo.

O estudo de Campos e Magina (2015) sobre a aprendizagem da álgebra elementar, identificou dificuldades cognitivas detectadas nas ações dos alunos em interpretar problemas algébricos que exigiam uma tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica por alunos do 7º. Ano do Ensino Fundamental. Essas dificuldades residiam principalmente em significar os elementos algébricos necessários à codificação da linguagem algébrica simbólica. Nesse sentido, de acordo com os estudos que argumentam sobre a introdução algébrica mais precoce, como o *Early Algebra*, entendemos que a introdução do pensamento algébrico se dá num processo que começa desde os anos iniciais. Nesse sentido, poderíamos focar o nosso estudo em qualquer um desses anos, no entanto escolhemos o 6º. Ano por anteceder a introdução formal da álgebra, que se dá no 7º. Ano, de acordo com as orientações legais curriculares em vigor, os PCN (BRASIL, 1998) para o ensino de Matemática no Brasil.

Assim, surgiu o interesse em aprofundar essas discussões, no que tange à produção de significados para os conceitos algébricos, um dos temas inquietantes na Educação Matemática. Dentre as conclusões obtidas sobre a aprendizagem dos conceitos algébricos o estudo apontou a linguagem, enquanto forma de comunicação do pensamento, como um tema significativo e central na questão da interpretação dos símbolos matemáticos e respectivos significados a eles atribuídos.

No entanto, pelas experiências docentes, pela pesquisa realizada (CAMPOS; MAGINA, 2015) e no convívio direto em sala de aula (primeira autora), diagnosticamos que, quando os alunos são introduzidos na linguagem algébrica, no estudo das expressões algébricas, das equações, dos polinômios, etc., a relação deles com a Matemática se estreita diante das dificuldades com a nova linguagem, a algébrica, de números e letras.

A partir dessas observações e pelas inquietações geradas, na perspectiva de trazer uma proposta de superação das dificuldades com a interpretação e resolução de problemas algébricos, de pensar analiticamente e construir, interpretar e validar modelos algébricos, sejam elas de origem cognitiva, epistemológica ou didática, o nosso interesse em pesquisar tais problemas aumentou significativamente.

Fizemos então um estudo empírico de pesquisas em Educação Matemática com o objetivo de diagnosticar as causas das dificuldades apresentadas na aprendizagem de álgebra, com um olhar focado especificamente nas pesquisas que mostraram dificuldades associadas ao não desenvolvimento do pensamento algébrico, ou de critérios que elencamos como essenciais ao seu desenvolvimento. Faremos oportunamente, no Capítulo II, um levantamento sistemático dessas pesquisas e de seus pressupostos epistemológicos que justificam a nossa problemática.

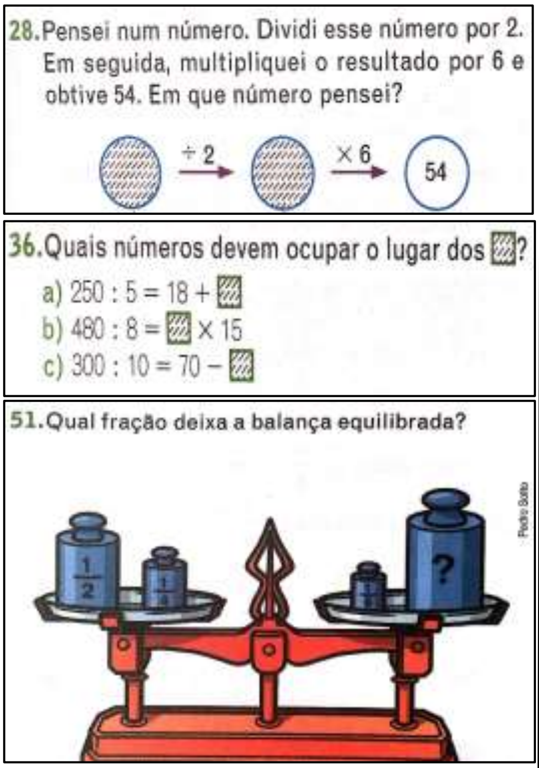
E como objetivamos investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico, um estudo da álgebra escolar se faz necessário. A álgebra faz parte do processo de Educação Matemática vivenciado pelos estudantes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ainda que a sua indicação nos documentos legais (PCN, 1988; BNCC, 2017) seja apenas para os anos finais do Ensino Fundamental. No entanto, o pensamento algébrico já está presente no ensino da Matemática nas séries iniciais quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido, o valor do *quadrinho* tão comum nos livros didáticos, mesmo sem atribuir a esse objeto *ostensivo*[5] um valor ou símbolo que o represente.

A partir do 6º. Ano inicia-se na escola o ensino da álgebra, não formalizado pelos documentos oficiais, caracterizado pela representação dos valores desconhecidos nos problemas com o uso de letras e símbolos e pela noção de equilíbrio presente nos problemas. E no 7º. Ano esse ensino é formalizado ao se introduzir as equações de primeiro grau e sua resolução, lidando então com as incógnitas. A noção de variável e a escrita algébrica passa a ser o tema principal das aulas de matemática, a partir do 8º ano. A Figura 1 ilustra essas situações, num paralelo entre problemas apresentados no livro didático do 6º e do 7º. Ano. Tal paralelo ilustra a argumentação que fizemos sobre a aplicação da sequência no 6º. Ano trazer benefícios para a aprendizagem algébrica futura, especificamente no ano seguinte, o 7º. Ano, quando se dá a introdução formal dos conteúdos algébricos.

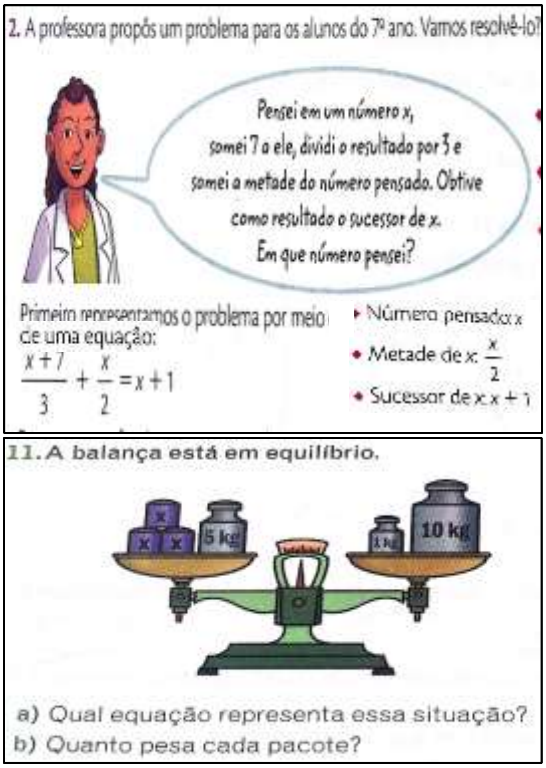
[5] O termo *ostensivo* é usado por Bosch e Chevallard (1999) para indicar aquilo que se apresenta visível, manipulável e estabelecem uma dialética do *ostensivo* e do *não-ostensivo* onde buscam responder a origem dos conceitos matemáticos, enquanto objetos *não-ostensivos* e sua relação com os objetos *ostensivos* que os representam. Esses conceitos são discutidos mais amplamente no item 2.2.3 deste texto.

Figura 1: Problemas extraídos do livro didático *Praticando Matemática*

6º. Ano



7º. ano



Fonte: Aldrini, Vasconcelos (2015, 6º. Ano (p. 55, 57, 1930; 7º. Ano (p .207, 216))

Observa-se que, como exemplificado e ilustrado na Figura 1, a institucionalização do uso de letras e o equacionar só aprecem nos problemas do 7º. Ano, em cumprimento às orientações legais. Entendemos que tanto o *ostensivo quadrinho* como a letra *x* são objetos que servem para evocar um número desconhecido, têm a mesma função. No entanto o equacionar, enquanto uma relação de equilíbrio, como a própria palavra equação, são novos no 6º ano. É o limiar entre a aritmética do 6º. Ano e a álgebra do 7º. Ano, e onde situamos a nossa pesquisa, de natureza qualitativa, dentro do vasto campo de estudo da Educação Matemática.

Especificamente pensamos oferecer uma proposta de ensino para o 6º. Ano, onde situa uma linha tênue entre a aritmética e a álgebra. Então elaboramos uma sequência didática, tal como discutida por Artigue (1996) nos pressupostos teóricos da Engenharia Didática, para trabalhar situações problemas da Matemática que objetivam calcular valores desconhecidos e que sejam propicias ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Espera-se assim amenizar dificuldades de aprendizagem matemática e algébrica futura do aluno do 6º. Ano, ao proporcionar o desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes, não necessariamente associado a conteúdos algébricos, como o uso de letras como variáveis ou incógnitas e suas manipulações, mas a partir de toda atividade matemática que envolva o pensar. E assim oferecer para o professor uma possibilidade didática de promover a aprendizagem. E então questionamos:

Que contribuições uma Sequência Didática – elaborada com atividades de resolução de problemas com números naturais envolvendo operações de natureza aditiva e multiplicativa e aplicada a alunos do 6º. Ano do Ensino Fundamental – traz para o desenvolvimento do pensamento algébrico?

E ainda,

Que *condições* e *restrições* atuam sobre a implementação dessa sequência didática no 6º ano visando o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir dos estudos realizados?

Trata-se de situações de ensino com problemas intencionalmente elaborados e selecionadas a partir do livro didático e da revisão de literatura, para que garantam o exercício de elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Notadamente aspectos de percepção de regularidades; a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; e a presença da generalização na expressão das relações e conexões entre as variáveis dos problemas no registro da língua natural (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993).

E nesse contexto, com vistas a responder esse questionamento e os demais que surgirem no trilhar pelos caminhos da pesquisa, é que se insere esta pesquisa cuja problemática e objetivos serão destacados a seguir.

A nossa discussão é pautada na produção de conhecimento, ~~cujo fim é a produção de conhecimento~~. Não se despreza aqui o conhecimento e as crenças já existentes, admitindo tal como Cobern (2004, apud BAPTISTA, 2010), que a apreensão é baseada em uma estrutura, mínima que seja, já existente de conhecimento. Como sustentação dessa inseparabilidade, ensino e aprendizagem, aportamos na Teoria Antropológica do Didático, que apesar de não tecer hipóteses específicas sobre a aprendizagem, faz uma crítica à separação do conhecimento do conteúdo do conhecimento pedagógico, por considerar que ambos se fundem para constituir o conhecimento matemático para o ensino.

Construir a problemática de uma pesquisa significa então estabelecer um conjunto de questões coordenadas que se colocam em um determinado campo teórico para que sejam respondidas e então solucionado o problema de pesquisa, atendendo aos objetivos propostos. No caminho às respostas introduz-se uma metodologia da pesquisa e apresenta as conclusões esperadas sob forma de hipóteses, que são questões abertas e passiveis de serem confirmadas ou refutadas, aportadas pelo quadro teórico escolhido.

1.3 As hipóteses

E na Matemática dispomos de variados problemas, e que vivem em qualquer conteúdo como problematização do conhecimento. Para Vergnaud (1990) o conhecimento é mestre na resolução de problemas pois leva o aluno a pensar, buscar e buscar estratégias formais ou informais de resolução, a partir das suas experiências. Portanto, é razoável inferir que usar a resolução de problemas para a introdução de conceitos matemáticos, em especial os algébricos, através de situações que possam desenvolver o pensamento algébrico contribuirá para a aprendizagem matemática. É a nossa primeira hipótese de estudo.

Pesquisas realizadas (PONTE; VELEZ, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012; PEREIRA; BRAGA, 2012; ANDRADE; BECHER, 2011; BORRALHO; BARBOSA, 2011; ALMEIDA, 2016, dentre outras) com o objetivo de investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes da educação básica vêm mostrando a necessidade de diversificar as atividades que são propostas aos alunos, sejam nos livros didáticos, sejam em atividades outras aplicadas em sala de aula. Essas partem da premissa de que, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, no sentido de construir significados para os objetos algébricos e suas representações, o trabalho com atividade algébrica de resolução de problemas, em detrimento ao transformismo algébrico, é importante visto que na resolução de problemas há um esforço cognitivo maior do aluno, especialmente na *conversão* (DUVAL, 2003) da linguagem natural dos problemas para a linguagem algébrica, ação fundamental para a resolução de problemas de estrutura algébrica e assim para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entendemos que a atividade de resolução de problemas, pelo uso da linguagem natural consolidaria a aprendizagem matemática pela significação dos objetos algébricos, não apenas como ferramentas, mas com significados (CAMPOS; MAGINA, 2015). Por significação entendemos a ação de falar a respeito e fazer bom uso de um determinado conceito. Assim, o aluno produz significados para os conceitos, os algébricos por exemplo, dentre outras ações, quando é capaz de falar com propriedade a respeito dos objetos matemáticos da álgebra.

De forma mais ampla, no processo de aprendizagem entendemos a produção de significados como a capacidade de argumentação do aluno sobre um determinado conteúdo, a partir do momento que é capaz de produzir justificações, argumentar, ir além do que é ensinado, produzir crenças sobre o que está sendo visto e justificá-las no contexto vivido ou que possa ser vivido. É pensar sobre. Nesse sentido adotamos a prerrogativa de Lins (2012) de que a produção de significados é necessária para a produção de conhecimentos, ao afirmar que “sempre que há produção de significado há produção de conhecimento e vice-versa” (p. 28). E produção de conhecimento é o foco desse estudo.

Pensar a formação do pensamento algébrico como parte integrante e indissociável do processo de construção de conhecimento matemático algébrico é idealizar que os estudantes tenham uma formação matemática que vá além da mera utilização de fórmulas e algoritmos num rito de repetição e não de produção.

Para Radford (2009) a representação de valores desconhecidos pelo uso de letras, ou um símbolo qualquer e suas manipulações, não caracterizam atividade algébrica. Para o autor, a atividade algébrica se constitui a partir de observação de regularidades, relações e propriedades matemáticas associadas a uma metodologia considerada adequada ao desenvolvimento das capacidades algébricas, atividades estas onde os alunos deverão prever, discutir, argumentar e comprovar as suas ideias, não se prendendo unicamente com o treino de procedimentos.

Numa perspectiva similar, mas com quadros teóricos diferenciados, nasceu nos Estados Unidos o movimento denominado *Early Algebra*[6] (BLANTON; KAPUT, 2002; BLANTON; CONFREY, 2004; CAHARRER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT, 1998, 2000) como proposta curricular na qual se propõe introduzir a álgebra desde os primeiros anos do ensino básico,

[6] Ver mais em 2.4.1 neste texto.

transversalmente, durante o ensino e aprendizagem das diferentes temáticas. São estudos relacionados à generalização de padrões e de relações numéricas e funcionais.

Considerando ser importante desenvolver o pensamento algébrico o quanto antes, esta tese apresenta uma proposta didática com esta finalidade, que poderá servir de inspiração para professores interessados como um *modelo didático* para a introdução da álgebra no Ensino Fundamental, pensando romper possíveis rupturas decorrentes dessa introdução, tais como as elucidadas por Da Rocha Falcão (1993) e pelos pesquisadores do *Early Algebra.*

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) analisaram uma série de situações matemáticas quanto a potencialidade em desenvolver o pensamento algébrico, em menor ou maior grau, e concluíram que não existe uma forma única de manifestar o pensamento algébrico, que pode ser por meio de expressão de signos linguísticos variados, como a linguagem geométrica, aritmética ou algébrica.

Confirma-se assim que não há necessidade de uma linguagem estritamente simbólico-formal para se trabalhar a educação algébrica e desenvolver o pensamento algébrico. Esse tipo de pensamento pode surgir a partir de problemas que garantam o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico que, segundo Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p. 87) são "percepções de regularidades; percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; tentativa de expressar a estrutura de uma situação-problema; presença da generalização".

Silva e Savioli (2012), em uma pesquisa que tinha por objetivo compreender como alunos do 5º. ano do Ensino Fundamental lidam com atividades matemáticas que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico, observaram que, por meio das respostas apresentadas e das indagações e afirmações dos estudantes durante a resolução das atividades, os estudantes investigados têm condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não apresentando linguagem simbólica algébrica. E os resultados de Oliveira e Câmara (2011) comprovaram a premissa de que esses alunos já mobilizam elementos do pensamento algébrico.

Portanto, entendendo que o pensamento algébrico não necessariamente está associado ao uso de letras para resolver problemas (RADFORD, 2009; CAHARRER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006), temos como hipótese segunda que o aluno do 6º. Ano, que teve pouco ou nenhum contato com a álgebra formal e sua linguagem pela adequação à orientação curricular que rege o ensino brasileiro, consegue significar os objetos matemáticos dos problemas, apropriar-se da linguagem e significar o desconhecido a partir das relações e conexões que estabelece. Trata-se de inseri-lo no contexto dos problemas que levem ao desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes, tal como propõe o *Early Algebra* e desmistificando fenômenos de algebrismo ou aritmeticismo (DA ROCHA FALCÃO, 2008), ou seja, do uso de procedimentos aritméticos ou algébricos puros, sem o estabelecimento de relações entre eles.

Duval (2003) afirma que as competências algébricas são estruturadas pela capacidade de produzir expressões algébricas que traduzem um problema e pelos aspectos sintáxico e semântico das expressões algébricas ao manipulá-las formalmente. Duval (2009, 2011) define tais situações como operações cognitivas de *conversão* e *tratamento*[7] presentes na atividade matemática e fundamentais para que ocorra a aprendizagem.

No âmbito da Didática da Matemática não se espera modelos para solucionar problemas de aprendizagem, visto que esse campo de estudo "propõe descrever e explicar os fenômenos relativos às relações entre o ensino e a aprendizagem" (ALMEIDA; LIMA, 2013, p. 82). Espera-se promover situações de ensino em que a aprendizagem, em especial a transição da aritmética à álgebra, ocorra de forma tranquila, mais firme, substancial e significativa.

E essa transição da aritmética à álgebra é historicamente marcada, no início do século XIX, pela introdução dos "signos algébricos", por muito tempo ignorados pela aritmética. E esses novos elementos do discurso matemático foram sendo gradativamente introduzidos no ensino da álgebra elementar, atenuando e formalizando a passagem da aritmética à álgebra (CHEVALLARD, 1985).

Epistemologicamente, da aritmética à álgebra, há uma quebra de paradigma, quando um por si só não serve mais como fundamento para explicitação do outro. Não se trata de um novo paradigma, mas sim de criar condições para superar esses *obstáculos epistemológicos*[8] ou *rupturas epistemológicas* (DA ROCHA FALCÃO, 1997).

---

[7] Sobre tais operações cognitivas ver mais em DUVAL, R **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

[8] O conceito de obstáculos epistemológicos na perspectiva teórica de Gaston Bachelard (1884-1962) está ´presente na construção do conhecimento científico. Segundo a epistemologia bachelardiana, o

Da Rocha Falcão (2008) entende que a passagem da aritmética à álgebra deve ser situada num contexto que abra espaço para os aspectos de ruptura e prezando pelos aspectos de continuidade. Outros estudiosos, por sua vez, investigam a natureza de tal *ruptura* (DA ROCHA FALCÃO, 1997, 2008; KIERAN, 1995; USISKIN, 1995, entre outros).

Essa ruptura também é referida na BNCC (BRASIL, 2017) ao destacar que nas

> [...] propostas pedagógicas devem ser consideradas medidas para assegurar aos alunos um percurso contínuo de aprendizagens entre as duas fases do Ensino Fundamental, de modo a promover uma maior integração entre elas [...] realizar as necessárias adaptações e articulações, tanto no 5º quanto no 6º ano, para apoiar os alunos nesse processo de transição, pode evitar ruptura no processo de aprendizagem, garantindo-lhes maiores condições de sucesso (p. 57).

Rupturas podem ser as transições que se caracterizam por mudanças pedagógicas e estruturais na passagem do 5º.para o 6º. Ano, tais como a diferenciação dos componentes e dos professores, que passam de pedagogos generalistas a especialistas dos diferentes componentes curriculares. Outra *ruptura* diz respeito à passagem de um registro de representação a outro: da linguagem natural para a linguagem algébrica (CAMPOS; MAGINA, 2015).

Instaura-se assim do 5º. para o 6º. Ano uma quebra de um *Contrato Didático*. Trata-se de um dos principais elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), situado no centro das discussões entre professor, aluno e o saber, desempenhando um papel central na análise e na construção de situações para o ensino e a aprendizagem da matemática. É por meio dele que se inicia o processo de ensino e aprendizagem, com a divisão de tarefas e criando expectativas, professores e alunos, em relação uns aos outros e a respeito dessas tarefas.

Investigações como a de Carraher e Schliemann (2007) dão a indicação de que alguns erros e dificuldades manifestadas durante a aprendizagem da álgebra podem ter sido promovidos, ou agravados, pela separação que comumente é efetuada entre as duas referidas áreas. Surge assim a ideia de que, havendo falta de ligação entre essas duas

---

conhecimento científico progride mediante rupturas epistemológicas sucessivas. Porém esse processo é marcado por algumas dificuldades ou "entraves", denominados por Bachelard de obstáculos epistemológicos.

importantes áreas da Matemática, nomeadamente no ensino ministrado no 6º. Ano do Ensino Fundamental, em que os alunos não são estimulados a estabelecer relações entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas, esses alunos poderão enfrentar maiores dificuldades durante a aprendizagem da álgebra (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2012).

Entendemos então que o ensino da Matemática com uma abordagem algebrizada da aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da álgebra em anos posteriores. E surge assim nossa hipótese terceira: inserir o aluno no contexto de situações que são limiares entre a aritmética e a álgebra pode contribuir para a aprendizagem algébrica futura.

Diante do contexto discutido sobre o nosso objeto de estudo, a álgebra e a formação do pensamento algébrico, e sobre a formação do conhecimento e do caráter subjetivo do pensamento, emergem questões sobre como se dá o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico e quais as suas influências na aprendizagem da Matemática no 6º. Ano do Ensino Fundamental. Mobilizar o pensamento algébrico em tarefas matemáticas são estratégias didáticas de promoção da aprendizagem.

As pesquisas destacadas nessa problematização têm objeto de investigação comum ao que investigamos e trilharam por caminhos próximos ao que traçamos para o nosso estudo: o de investigar a formação do pensamento algébrico enquanto essencial à aprendizagem matemática e algébrica futura. Porém, um sujeito pode estar em um determinado nível de desenvolvimento do pensamento algébrico (ALMEIDA, 2016) quando se depara com uma dada situação, e noutro ao se deparar com outra situação (BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009).

Assim, o nosso diferencial é propor um modelo didático para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir das respostas específicas de alunos do 6º. Ano aos problemas de operações com números naturais. Estes problemas integram uma sequência didática intencionalmente elaborada com momentos didáticos de experimentação que visam a construção da proposta didática. Além disso, a nossa proposta constitui um estudo que visa compreender a produção real dos significados e conceitos usados pelos alunos no local onde eles interagem, a sala de aula, com os conteúdos previstos para o ano e a unidade letiva.

Entendemos que o desenvolvimento do pensamento algébrico, ou de qualquer outra forma de pensar, na Matemática ou em qualquer área do conhecimento, possa ser promovido independente do conteúdo ou do aspecto teórico cognitivo focado na situação. Então selecionamos problemas diversos envolvendo operações com números naturais, por ser o conteúdo trabalhado à época da realização das experimentações em sala de aula.

São problemas icônicos, numéricos e mistos, que buscam trabalhar relações e conexões entre as variáveis dos problemas, através da percepção de regularidades, de aspectos variantes e invariantes (funcionais) e da generalização do saber que extrapole os limites do conteúdo e da situação trabalhada. Acrescenta-se que são problemas reais, do contexto onde os participantes vivem e das *instituições* que são sujeitos, como o livro didático, que exerce um domínio e, por conseguinte, um papel fundamental na produção do conhecimento escolar.

1.4 Os objetivos

E traçando o caminho de como devem ser planejadas as atividades didáticas que promovam esse desenvolvimento, a partir das hipóteses levantadas, traçamos o nosso objetivo central:

- **Investigar quais contribuições e as *condições* e *restrições* de implementação de uma Sequência Didática – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º. Ano do Ensino Fundamental e com atividades de resolução de problemas – para o desenvolvimento do pensamento algébrico.**

A escolha do 6º. Ano se justifica por ser o foco dos estudos que argumentam que é o ano escolar onde a álgebra deve começar a ser vista, como uma pré-álgebra, sem necessariamente estar associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Justifica-se também por ser o ano que antecede a introdução formal da álgebra, o limiar entre a aritmética e a álgebra, de acordo com os documentos oficiais, os PCN (BRASIL, 1988), que regem esse nível de ensino no Brasil, além das *rupturas* já elucidadas aqui.

Quanto a seleção do conteúdo operações com números naturais como objeto a ser investigado, justifica-se por se tratar de um conteúdo previsto no Plano Pedagógico da

Escola para o 6º. Ano, na segunda unidade letiva, período de aplicação da pesquisa e que, por questões éticas, não podemos distanciar.

E assim, o ensino de números naturais é a porta de entrada do ensino de álgebra na educação básica. E ambas áreas temáticas, Números e Álgebra, são contempladas em nosso estudo, assim como as habilidades previstas que fazem o elo de ligação entre os objetos álgebra, números e pensamento algébrico através da resolução de problemas, como propomos neste estudo.

E esse elo nos levou a construção de um percurso de pesquisa guiado pela questão geratriz e pelos objetivos traçados para respondê-la. E para dar conta do objetivo geral mais amplo e assim construir o nosso percurso de estudo e pesquisa que culminou na nossa sequência didática, traçamos outros objetivos, de cunho mais específico, os quais enumeramos a seguir:

- Analisar as condições e as restrições para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de problemas de operações com números naturais;
- Investigar as estratégias mobilizadas pelos alunos a partir das produções orais e escritas ao resolver problemas com números naturais que revelem aspectos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico;
- Analisar as produções (escrita e oral) dos alunos nas respostas dadas aos problemas propostos quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações para a aprendizagem matemática.

A resolução de problemas na atividade matemática mostra-se útil no desenvolvimento de conceitos específicos e de ideias matemáticas. Acrescenta-se que se trata de uma metodologia que permite aos alunos experimentarem os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado, possibilitando o desenvolvimento do pensar matemático. Historicamente a abordagem de resolução de problemas tem assumido um papel importante no ensino, aqui destaco a matemática, e em especial da álgebra, por possibilitar o contato do aluno com uma linguagem natural que lhe é familiar e ao mesmo tempo usá-la para significar os elementos da álgebra.

Os números naturais estão presentes no desenvolvimento da matemática, em todos os níveis de ensino. É um conteúdo unificador, como afirmam Onuchic e Alevatto (2015). Dentre os nossos objetivos de estudo, está o de investigar a formação do pensamento algébrico a partir da resolução de problemas com números naturais.

1.5 Os números naturais: objeto do saber na resolução de problemas

Na vertente do pensamento algébrico os números são tratados como objetos de estudo (LINS, 1992), deixando de servir apenas como ferramentas na resolução ou modelação de situações problemas.

A resolução de problemas envolvendo números está presente em todos os níveis de ensino, mudando apenas o seu enfoque e as habilidades que são requeridas em cada caso. A ênfase dada ao desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas se adequa às determinações dos PCN (BRASIL, 1988), que o consideram o “ponto de partida para a atividade matemática” (p. 39-40).

A BNCC (BRASIL, 2017) prevê a resolução de problemas no ensino de matemática, tratada como uma “forma privilegiada da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental” (p. 262).

Os PCN (BRASIL, 1988) destacam que o uso de resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento, em situações do dia a dia, e possível em toda atividade matemática, justifica sua importância e inserção em todo o ensino básico. Destacam ainda a importância dos números naturais para a construção dos números inteiros e reafirmam que as atividades propostas não devem ser apoiadas apenas em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas. É preciso ir um pouco além e possibilitar a formação de um tratamento algébrico, do pensamento algébrico, que seja capaz de produzir generalizações, pela extensão dos conhecimentos já construídos (BRASIL, 1998).

Na BNCC (BRASIL, 2017) a área temática *Números* traz as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais como um objeto do conhecimento cuja finalidade descrita é a formação do pensamento numérico. E ampliamos ao pensamento algébrico, pois pensar no (número) desconhecido como se fosse conhecido é pensar analiticamente é atribuir uma significação, um signo (DUVAL, 2003). E o texto da BNCC (BRASIL, 2017) deixa claro essa intenção ao indicar que para a construção do conceito de número “é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos [...] (e) devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações” (p. 266).

Ressalta ainda a BNCC (BRASIL, 2017) que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade *Números* (BRASIL, 2018, p. 267). E por entendermos que esse pensamento é ampliado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais áreas, como a álgebra, reafirmamos a nossa hipótese de desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de problemas numéricos. E traça como habilidade específica "Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos" (p. 299), atribuindo significação às variáveis numéricas dos problemas.

A resolução de problemas compreendendo e significando os objetos matemáticos é um campo propício para o desenvolvimento do pensamento algébrico. E nesse entendimento a BNCC (BRASIL, 2017) traz na área temática Álgebra a resolução de "problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo" (p. 300) como objeto do conhecimento.

Os números naturais possuem a característica de ser um conteúdo unificador, como a própria matemática, pois liga diversos ramos da Matemática escolar e faz conexões com diferentes áreas do conhecimento. Esse caráter unificador e a importância do conteúdo números e operações para a Matemática aparece nos PCN quando esse preconiza que o estudo da álgebra seja introduzido no bloco de "números e operações" por meio de atividades que objetivem observar regularidades e expressar generalizações (BRASIL, 1988).

1.6 Inspirações filosóficas para problematizar o pensamento algébrico

A discussão filosófica sobre o conhecimento não se esgota em poucos parágrafos, mas aqui interessa-nos apenas situar o conhecimento, ainda que superficialmente, nas discussões filosóficas que embasam as ciências. Cabe-nos então discutir o conhecimento num ambiente mais restrito, aqui especificamente o ambiente escolar, visto que se trata de uma pesquisa em Didática da Matemática.

Faz-se necessário então um sistema de significação, a linguagem por exemplo, para que tais informações sejam compreendidas e então analisadas, vivenciadas, testadas e validadas como conhecimento.

Mezzaroba e Monteiro (2008) discutem a epistemologia do conhecimento na perspectiva humanista kantiana[9], e afirmam que "o conhecimento é o resultado de uma relação que se estabelece entre um sujeito que conhece, que podemos chamar de sujeito cognoscente, e um objeto a ser conhecido, o objeto cognoscível" (p. 7).

Lima (2012) traz uma reflexão crítica merleau-pontyana[10] sobre as ciências do homem para essa dicotomia sujeito (cognoscente) e objeto (cognoscível), a que se reduz o mundo humanista, com o seguinte questionamento: "como pode o homem ser, ao mesmo tempo, sujeito e objeto de conhecimento? " (p. 29). E o autor (p. 40) conclui que o conhecimento "situa o sujeito no mundo da vida, concreto existencial, dando corpo a consciência" e a sua percepção do mundo o situa ora como sujeito, ora como objeto. Nessa dualidade o corpo seria o meio próprio de se comunicar com o mundo e assim com suas experiências perceptivas que levam ao conhecimento.

No entanto, essas experiências perceptivas não são suficientes para descrever todas as realidades e sensações captadas pelo corpo do homem com e no mundo. A Filosofia por si só também não dá conta de descrever todas as experiências humanas e sistematizá-las na forma de conhecimento. Dessa forma se ramifica em diversas áreas, como a Teoria do Conhecimento, que se encarrega de estudar os aspectos cognitivos e os tipos de conhecimento, dentre eles o conhecimento científico (MEZZAROBA; MONTEIRO, 2008, p. 6-7).

Dois tipos de conhecimento são frequentemente discutidos nos ambientes escolares: o conhecimento cotidiano, ou empírico, e o conhecimento científico. O berço do conhecimento científico são as pesquisas enquanto que o conhecimento empírico se forma a partir das experiências vividas pelos sujeitos cognoscentes e suas interações com os objetos cognoscíveis (MEZZAROBA; MONTEIRO, 2008).

O conhecimento empírico se caracteriza popularmente por ser a soma de conhecimentos sobre a realidade, empirista, expressão do saber popular, do senso

[9] A partir da obra Crítica da Razão Pura[9] do filósofo da modernidade, o alemão Imannuel Kant (1724-1804)
[10] A partir da fenomenologia da percepção de Merleau-Ponty (1908-1961)

comum[11], enquanto que o conhecimento científico é fruto da produção de significados para os saberes[12] que são adquiridos e testados cientificamente (LAKATOS, 2010).

No entendimento de Lopes (1999) o conhecimento cotidiano, aquele das produções culturais diversas, é um obstáculo a ser suplantado no processo de desenvolvimento e construção do conhecimento científico, o que é construído e valorizado pela escola, na forma de conhecimento escolar. Lopes (1999), seguindo a definição focaultiana de conhecimento como saberes sistematizados e validados, afirma ainda que o processo de constituição do conhecimento escolar ocorre no embate com os demais saberes sociais, principalmente pelo embate dos conhecimentos científico e cotidiano. Cabe-nos, então, buscar compreender a relação, ainda conflituosa, entre essas três instâncias do conhecimento, no processo de ensino e aprendizagem.

Destarte, recai sobre o processo de ensino e aprendizagem, e mais precisamente sobre nós professores, a responsabilidade com a produção/construção de um conhecimento escolar que seja capaz de desmistificar a supremacia do conhecimento científico, legitimada pelo excesso de cientificismo.

No ambiente escolar deposita-se no cientificismo toda a esperança de solução aos problemas de conhecimento e da humanidade. No entanto, o conhecimento escolar deve valorizar os saberes que os alunos trazem consigo, tido como um conhecimento cotidiano, do senso comum, mas que deve servir de base à construção do conhecimento legitimado pela ciência e aceito por todos. Segundo Baptista (2010) a Ciência não é a única forma legitima de adquirir conhecimento, no entanto:

> [...] o que acontece é que, quando a cultura da ciência que está sendo ensinada se harmoniza com a cultura dos estudantes, as visões de mundo desses indivíduos são consideradas. Ao contrário, quando a cultura dos estudantes é incompatível com a cultura da ciência, o ensino tende a não aceitar as visões de mundo dos estudantes, forçando-os a rejeitarem os seus pensamentos. Como consequência disto, os estudantes terminam por não compreenderem a natureza do conhecimento científico, sendo levados a crer que a ciência é

---

[11] Adotamos aqui a definição de senso comum dada por Cotrim (2002, p. 46), como sendo o “[...] vasto conjunto de concepções geralmente aceitas como verdadeiras em determinado meio social” (COTRIM, Gilberto. Fundamentos da filosofia: história e grandes temas. 15. ed. São Paulo: Saraiva, 2002).

[12] Para alguns autores não há distinção entre os termos saber e conhecimento. No entanto, para Foucault (apud MACHADO, Roberto. *Ciência e saber*. Rio de Janeiro: Graal, 1981), os saberes (empírico, cotidiano, senso comum, leigo, tradicional) são mais amplos e quando sistematizados, verificados e testados rigorosamente formam o conhecimento.

> propriedade de alguns sábios, ao invés de um produto passível de revisão social (p. 685).

É importante que o objetivo do ensino das Ciências, e que podemos estender às demais áreas de conhecimento, seja a demarcação dos limites, e não a anulação de saberes que os alunos já trazem consigo (BAPTISTA, 2010). E no ensino torna-se necessário valorizar, e oportunizar, situações em que o aluno tenha o discernimento de escolher qual conhecimento melhor se aplica a uma dada situação e a sabedoria de trocar os conhecimentos aplicados quando a situação mudar. Ainda segundo Baptista (2010), esta proposta oferece a chance de mostrar aos estudantes como as ideias oriundas de um determinado saber podem contribuir para o desenvolvimento deste e de outros saberes. É o pensar sobre o próprio saber em questão e ser capaz de estabelecer relações entre este e outros saberes, como os conhecimentos prévios dos estudantes e os científicos, numa relação mútua no caminho para a construção de um novo conhecimento. Dessa forma, espera-se que o conhecimento produzido lhes seja útil, como também permita compreender o mundo e agir criticamente sobre ele. E nesse contexto é que se insere esta pesquisa: promover a formação do pensamento matemático algébrico e buscar meios à aprendizagem matemática, tornando-a mais próxima dos alunos, útil e, por conseguinte, capaz de torná-los críticos em suas realidades.

Não se trata aqui de discutir a supremacia de um conhecimento sobre o outro, mas de abrir uma discussão sobre os saberes que são importantes para a formação do pensamento matemático. Nesse contexto, o espaço escolar mostra-se um campo aberto para que essas contradições se expressem e sejam discutidas.

Mas o que caracteriza o pensamento matemático? Podemos facilmente encontrar nos dicionários[13] que o pensamento é o ato de pensar, uma atividade cognitiva de representação mental de algo concreto.

O pensar, enquanto uma característica humana e numa visão filosófica, é procurar verdades, lógicas, é estabelecer conexões. E este estabelecimento de relações e conexões envolve antes o pensar (LOPES, 1999). O processo de construção ou produção do conhecimento escolar está diretamente associado ao ato de pensar dos alunos.

---

[13] Na escrita desse texto consultamos os dicionários de Língua Portuguesa de Antônio Houaiss (2009) e Aurélio Buarque de Holanda (2010) e o Dicionário Online Caldas Aulete, disponível em www.aulete.com.br acesso em 16/02/18.

Discutindo o conhecimento nos colocamos frente aos questionamentos da atividade matemática enquanto produtora de conhecimento. E aqui especificamente do pensamento algébrico enquanto característica importante nessa produção. E para nos aportamos teoricamente no campo da Didática da Matemática, nosso campo de estudo, traremos no capítulo seguinte o aporte teórico das nossas discussões.

CAPÍTULO II:

REFERENCIAL TEÓRICO DO ESTUDO

Trazemos neste capítulo as ideias teóricas e estudos correlatos que deram sustentação à nossa pesquisa. Primeiramente, discutiremos a álgebra enquanto objeto e a formação do pensamento algébrico, focos do nosso estudo. Em seguida faremos uma explanação sobre a Teoria Antropológica do Didático sistematizada por Chevallard (1985) e que dará aporte às nossas análises teóricos-metodológicas. E finalizando o capítulo traremos as orientações curriculares em vigor (PCN) e em implantação (BNCC) para o Ensino Fundamental, para justificar a nossa inserção nesse nível de ensino.

2.1 Pensando a Matemática pelos caminhos da álgebra

Para discutirmos a álgebra e o pensamento faz-se necessário uma discussão anterior sobre a própria formação do conhecimento e as inspirações filosóficas para discutir o ato de pensar, uma vez que estes coexistem no processo de construção do conhecimento, em especial aqui, o pensamento matemático algébrico. Traremos à discussão a álgebra enquanto objeto matemático de estudo e campo de conhecimento da Matemática, suas definições, concepções e singularidades que influenciam na aprendizagem. E, por conseguinte, discutiremos seu ensino na perspectiva da formação do pensamento algébrico e assim a construção do conhecimento matemático algébrico.

A linguagem, enquanto forma semiótica de comunicação do pensamento, é objeto de discussão também neste estudo. A aprendizagem algébrica requer que a linguagem de signos e símbolos seja compreendida, assim como a própria Matemática. Compreender e usar adequadamente a linguagem pode ser um caminho à aprendizagem e formação do conhecimento.

E para situarmos nas discussões sobre o pensamento algébrico, fio condutor do nosso estudo, no campo de estudo da Educação Matemática, traremos estudos correlatos que têm esse objeto de estudo em comum e que servirão para validar as nossas discussões. Destacaremos em especial o movimento *Early Algebra*, que nos serviu de inspiração, enquanto um estudo que trata da álgebra e do pensamento algébrico e suas potencialidades. E discutiremos também níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico, de acordo com estudos desenvolvidos por Almeida (2016) e Radford (2009), que servirão às nossas análises.

2.1.1 A linguagem algébrica como forma semiótica de comunicação do pensamento

A Matemática lida com o abstrato, com signos linguísticos e objetos simbólicos que remetem a algo concreto, *ostensivo*, visível e manipulável. E essa peculiaridade pode lhe ter dado, ao longo da sua existência enquanto disciplina do currículo escolar, o título de inacessível, abstrata demais, difícil e sem ligação com o mundo cotidiano, concreto. E, como consequência, surgiram as dificuldades de aprendizagens, os desafios com o seu ensino. As pesquisas em Educação Matemática vêm estudando tais fatos em busca de explicações e meios de desmistificá-los, visando a aprendizagem matemática, ou seja, a produção do conhecimento matemático. E nessa produção de conhecimento matemático há de se observar também o contexto de aprendizagem onde o aluno está inserido, suas experiências e necessidades, para que os conceitos[14] (algébricos, no caso) lhes sejam significativos e úteis.

Lins e Gimenes (1997) assumem o termo significado como um conjunto de coisas que se diz respeito a um objeto. Segundo os autores, essa produção de significados também ocorre com a álgebra, no que definem como atividade algébrica:

> A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a Álgebra [...] A Álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 137).

---

[14] Utilizamos o termo conceito no que se refere à percepção, à ideia formada mentalmente, isto é, pelo entendimento do que é o objeto tratado. Trata-se de um pensamento que pode ser expresso por meio de palavras, gestos, como uma unidade cognitiva de significado.

Pela concepção de atividade algébrica apresentada pelos autores torna-se necessário investigar os significados que estão sendo produzidos nas atividades algébricas, e se estão sendo produzidos, pois a sua caracterização depende dessa significação[15]. E é nessa perspectiva que entendemos o estudo algébrico com efetiva construção de conhecimento e capacidade de produzir significado. No entanto, não podemos conceber a ideia da álgebra como uma atividade simplesmente, ou como uma ferramenta a serviço das outras áreas, mas como um domínio do conhecimento, dada a sua importância e solidez na aprendizagem matemática.

Assumimos que apropriar-se dos conceitos, contextualizá-los, identificá-los em outras situações e ser capaz de aplicá-los na construção de conhecimentos posteriores, dentro e fora da escola, é produzir significados. E é o que almejamos para os nossos alunos, a produção de significados para os conteúdos algébricos. Nessa significação a linguagem é essencial, seja na interpretação dos problemas matemáticos algébricos, como também para a comunicação dos resultados e do pensamento matemático desenvolvido para resolvê-los.

Radford (2006) trata o pensamento algébrico como uma “forma particular de refletir matematicamente” (p. 2), que envolve a capacidade de abstração e de generalização, numa unicidade entre a linguagem e o pensamento, e destaca ainda que o esforço para compreender a realidade conceitual e a produção de conhecimento inclui também, as práticas sociais subjacentes (RADFORD, 2009).

No processo de ensino e aprendizagem, e assim na atividade matemática, as conexões entre as ideias e os saberes que são apresentados aos alunos figuram como uma característica fundamental e estruturante do processo de fazer matemática e então produzir conhecimento. Concordamos com Ponte et. al. (2012) que é no estabelecimento de conexões, entendida como relação, nexo, analogia ou afinidade entre coisas diversas, que se desenvolve o pensamento matemático e a compreensão em matemática.

Vygotsky (2001), numa perspectiva socioculturalista, defende que o pensamento se forma a partir do aporte simbólico que é oferecido à criança no seu contexto sociocultural, onde se inclui a escola enquanto instituição social, e não por padrões de

---

[15] Adotamos o termo significação como semanticamente é definido no dicionário e que se ajusta à nossa pesquisa. Trata-se de uma representação mental relacionada a uma forma linguística, um sinal, aquilo que um signo quer dizer; acepção, sentido, significado. Disponível em http://ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/sentido-significado-e-significacao.

estruturas biológicas como uma atividade exclusivamente autônoma e individual. Para o autor, trata-se de uma função psicológica superior que envolve análise, síntese, abstração e generalização e promove o desenvolvimento dos sujeitos.

> Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível do pensamento. Consequentemente estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento (VYGOTSKY, 2001, p. 398).

Considerando pensamento e linguagem como funções psicológicas superiores na atividade humana (VYGOTSKY, 2001) e as diferentes conexões e inter-relações entre os saberes, transparece-nos que as experiências que o aluno vivencia em sala de aula, e fora dela, contribuem para a constituição do pensamento algébrico. É através da significação das palavras, termos e conceitos da álgebra que se constitui a aprendizagem algébrica (DA ROCHA FALCÃO, 1993), e, acrescentamos, pela capacidade de generalização que lhe é sinônimo, constitui a própria aprendizagem matemática.

Lins Lessa e Da Rocha Falcão (2005) trouxeram à discussão a formação do pensamento matemático, especificamente do conhecimento matemático-algébrico à luz da Psicologia da Educação Matemática, através de uma reflexão epistemológica da origem psicológica do conhecimento matemático. Discutiam, à época, o pensamento formado pela natureza biológica de acordo com Piaget (1973), em que a linguagem, enquanto “um recurso à função semiótica, recobrindo desde a utilização de signos[16] linguísticos orais ou escritos até o apelo a suportes simbólicos de forma geral” (p. 315), tem papel preponderante como uma subesfera do pensamento.

Ainda segundo Piaget (1973, apud DA ROCHA FALCÃO, 1993), o pensamento precede a linguagem, e esta é uma das formas de expressão do pensamento, e, portanto, lhe é subordinada. E a formação do pensamento depende de habilidades mentais capazes de evocar um objeto ou acontecimento ausente. Já para Vygotsky (2001), pensamento e linguagem tem raízes genéticas diferentes e são processos interdependentes desde o início da vida, mas, no entanto, a linguagem não pode ser “descoberta” sem o pensamento.

---

[16] Charles Sanders Peirce (1839-1914) matemático e filósofo americano, precursor da Semiótica definiu “signo, ou *representâmen,* é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém”. (PIERCE, 2005, p. 46).

A pesquisa de Lins Lessa e Da Rocha Falcão (2005) apontou “a possível construção do conhecimento sem ser necessariamente em primeira instância, mediado pela linguagem” (p. 321) e veio contestar a ideia de que a linguagem tem papel central no processo de construção do conhecimento matemático. E assim o pensamento matemático ocupa uma posição de destaque nesse processo, onde linguagem e sistema simbólico algébrico funcionam, juntos, como instrumentos psicológicos capazes de influenciar o desenvolvimento das funções psíquicas necessárias à aquisição do conhecimento.

O objetivo do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos (PONTE et al., 2012), ou seja, promover meios de torná-los verdadeiramente seres pensantes, capazes de construir conhecimento. Pensando no dinamismo do mundo atual onde vivem os indivíduos, não cabe à escola apenas fornecer informações aos alunos pensando nas suas necessidades futuras, pois esse futuro é uma incógnita.

É uma das funções da escola orientar e fornecer estratégias aos alunos que os capacitem a transformarem informações em conhecimento. Ao professor cabe então propor uma variedade de situações, semanticamente ricas e compostas por diferentes relações. Nessas situações, os conceitos devem ser desenvolvidos com os alunos, na formação do conhecimento, como uma relação entre saberes que já trazem consigo, ou os que lhes são apresentados. Cabe também ao professor analisar as conexões possíveis e úteis e os fatores que interferem ou contribuem para essa aprendizagem.

Diante dessas discussões nos posicionamos que o pensamento matemático implica estabelecer conexões (PONTE et al., 2012) entre os saberes já existentes e os novos, onde a linguagem é essencial (RADFORD, 2009), como é essencial a qualquer atividade humana (VYGOTSKY, 2001). E a linguagem, enquanto recurso semiótico de expressão do pensamento, tanto como o pensamento matemático, coexistem na atividade matemática, e juntos ocupam papel fundamental no processo de produção de conhecimento (DA ROCHA FALCÃO, 2005).

E o estabelecimento de conexões entre o pensar e os saberes novos e existentes é uma das características da atividade algébrica. Sendo assim discutiremos a seguir a álgebra, enquanto objeto de estudo e investigação, dentro do campo maior de pesquisas, a Educação Matemática, onde nos inserimos.

2.1.2 A álgebra e suas concepções nas pesquisas em Educação Matemática

A aprendizagem da álgebra formal tem recebido atenção de muitos pesquisadores e organizações (KIERAN, 1991; SOCAS et al., 1996; NCTM[17], 2000) que investigam a origem das dificuldades, e ao mesmo tempo, buscam compreender como acontece o processo de aprendizagem da álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico. A álgebra, entendida como um campo de estudo da Matemática, vem sendo estudada por esses pesquisadores, dada sua importância para o mundo do trabalho e o mundo científico da aprendizagem matemática, e pelas consequências que este processo traz consigo.

A ênfase dada aos estudos no campo do conhecimento da álgebra ainda não foi suficiente para amenizar os problemas com a sua aprendizagem. Descobrir as origens de tais dificuldades, detectadas nos diversos níveis de ensino, é meta de muitas pesquisas de educadores matemáticos. A pesquisa de Booth (1995) já trazia esses resultados que mostravam as dificuldades dos alunos acerca dos conhecimentos algébricos, ressaltando que detectar a natureza dos erros cometidos pelos alunos poderia ser um meio de entender a origem de tais dificuldades.

As pesquisas em Educação Matemática vêm discutindo a aprendizagem como também o ensino, em busca de novos meios (didáticos, por exemplo) que amenizem as dificuldades e promovam a aprendizagem, vencendo barreiras cognitivas e desfazendo misticismos criados em torno da aprendizagem algébrica, como a ideia de uma área de difícil aprendizagem. Os resultados ainda são insipientes, mas já mostram caminhos de superação. Um desses caminhos, e que aqui defendemos, é o ensino da álgebra pautado no desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir de problemas matemáticos que propiciem esse desenvolvimento.

E os problemas com a aprendizagem da álgebra, desde a sua inclusão no currículo, trazem resquícios de uma história de lutas por uma educação de qualidade, por uma Matemática mais próxima da realidade, que possa ser útil e também prazerosa, que permita conexões com outras áreas do conhecimento e oportunize crescimentos. Para que possamos compreender os entraves que ocorrem na aprendizagem da álgebra torna-se necessário buscar esses fatos históricos.

---

[17] National Council of Teachers of Mathematics.

A álgebra começou a fazer parte do currículo educacional brasileiro desde 1799, efetivamente no início do século XIX no ensino secundário. O seu ensino baseava na reprodução de modelos, adquirindo um caráter mais instrumental e era apresentada aos alunos de forma compartimentada, estanques, onde primeiro se estudava a aritmética, depois a álgebra e a geometria (MIRIOM; MIGUEL; FIORENTINI, 1993).

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) afirmam que, com o declínio do Movimento no final dos anos 70, a álgebra parece ter retomado o seu papel inicial, “qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário à resolução de problemas e equações” (p. 51). Os autores afirmam ainda que,

> a maioria dos professores ainda trabalha a álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões (p. 40).

Quase três décadas depois essa constatação é confirmada por Lins e Gimenes (1997) ao analisar a álgebra apresentada nos livros didáticos que “trazem apenas a técnica, como sendo os algoritmos necessários à prática, que são os exercícios” (p. 106).

Com o ensino e a aprendizagem da álgebra pautados em procedimentos não se estabelecia uma relação desta com os outros campos da Matemática e, portanto, da sua utilidade para a formação do pensamento matemático. Restringia-se a resolver problemas matemáticos, como uma ferramenta (LEE, 2001) para resolver problemas, em que os termos desconhecidos eram representados por letras.

No nosso entendimento, interpretações reducionistas da álgebra podem surgir com essa colocação, a de uma ferramenta. O próprio texto dos PCN (BRASIL, 1998) trouxe uma definição da álgebra como “uma poderosa ferramenta para resolver problemas” (p. 115). A visão enquanto ferramenta a serviço da Matemática, não privilegia a discussão sobre a educação algébrica e a formação do pensamento algébrico, pelo caráter pragmático que assume no processo de ensino e aprendizagem.

Atualmente a álgebra ocupa um lugar de destaque nos livros didáticos, mas quanto ao seu ensino ainda são poucas as reflexões. No campo da Educação Matemática vem ganhando destaque em estudos que argumentam que a atividade algébrica vai além de procedimentos, pois consiste no processo de produção de significados para os conceitos algébricos e que o pensar matemático e o bom uso da linguagem algébrica são imprescindíveis para a aprendizagem da álgebra (CAMPOS; MAGINA, 2015).

Do nosso ponto de vista, os conteúdos de álgebra constituem alicerces da Educação Básica. Dentre as várias concepções que a álgebra assume, por meio do conhecimento algébrico podemos modelar uma gama infinita de problemas que circundam a nossa vida. Através das relações e conexões estabelecidas no seu estudo, podemos elevar analiticamente o conhecimento matemático do aluno.

Não é uma tarefa fácil definir álgebra, ou conceituá-la no contexto da Educação. No nosso estudo, vamos tratá-la sob duas visões: a visão matemática e a visão psicológica, esta última pautada na caracterização epistemológica do termo. Usiskin (1995), por exemplo, em um dos capítulos do livro *As ideias da Álgebra*, ratifica nosso entendimento ao afirmar que "não é fácil definir a Álgebra" (p. 9).

Do ponto de vista da Matemática, e lançando mão de uma visão reducionista, a álgebra é vista como o ramo da Matemática que estuda as abstrações e generalizações dos conceitos e operações de aritmética, representando quantidades através de símbolos. Há uma visão da álgebra como uma Aritmética Generalizada, tal como define Lee (2001), mas entendemos ir além e então buscamos diferentes classificações e concepções para a álgebra. Concordamos com Kieran (2007) que a álgebra não é apenas como um conjunto de procedimentos, ferramentas ou aritmética generalizada, mas sim "consiste na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras" (p. 5) com significação dos objetos tratados.

A álgebra escolar ainda é vista associada à manipulação de símbolos e reprodução mecânica de regras operatórias para simplificar expressões algébricas, resolver equações, dando ao simbolismo algébrico uma importância maior que a própria compreensão do que estes significam (KAPUT, 1999; PONTE et al., 2012). Entendemos que a importância maior deve ser dada à significação e não à estrutura, numa álgebra voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que independe estarmos resolvendo problemas de natureza aritmética ou algébrica. Nesse entendimento é que nos aproximamos da álgebra como objeto de estudo, dada sua linguagem própria e capacidade de estabelecimento de relações e conexões que levam às generalizações fundamentais à aprendizagem matemática, como uma educação algébrica.

A concepção de educação algébrica presente nos PCN (BRASIL, 1998), e compartilhada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), indicam que a sua introdução e também a sua sustentação, devem ocorrer pela exploração de situações abertas, como problematização das situações do cotidiano, em que os alunos possam construir as noções algébricas a partir de suas próprias observações.

Encontramos nos PCN (BRASIL,1998) diferentes interpretações para a álgebra, que a define nas dimensões de Aritmética Generalizada, Funcional, Equações e Estrutural. Assim, entendemos que a álgebra é responsável pelos estudos da manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas. O termo álgebra, na verdade, compreende um espectro de diferentes ramos da matemática, cada um com suas especificidades, que vai desde a álgebra elementar que é vista na escola básica até as mais abstratas, como na Teoria dos Números, Topologia, dentre outros.

Pensar fazendo conexões e estabelecendo relações entre os saberes é a base da formação do pensamento, como já discutimos. E o desenvolvimento do pensamento algébrico é o foco deste estudo, e que discutiremos posteriormente.

Pesquisadores da Educação Matemática (USISKIN, 1995; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1997; 2001; KIERAN, 2007; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007, dentre outros) em diferentes países e sob diferentes enfoques e aportes teórico-metodológico, discutem as concepções de álgebra, seu ensino e a produção de significados para os conteúdos algébricos.

Lins e Gimenez (1997) centraram seus estudos na temática sobre como a álgebra e a aritmética se relacionam. Estes apontam que os objetivos traçados para o ensino, tanto da álgebra quanto da aritmética, devem versar sobre a habilidade dos alunos em resolver problemas e investigar modos de produzir significados para as situações problematizadas.

Lins e Gimenez (2001) trazem à discussão a tendência letrista que a atividade algébrica adquiriu, simplista quando se resume em “calcular com letras”. Apontam então uma visão de uso de letras para as abstrações das ideias matemáticas procedentes do pensar algebricamente e também destacam a relação das letras com o concreto e com fatos reais, o que chamou de *Modelagem Matemática*. Essa abordagem realista, destacam os autores, oportuniza os alunos aplicar em outros contextos os conhecimentos aprendidos na escola.

Concebendo a álgebra enquanto processo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) a consideram

> [...] como um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas. Esses procedimentos específicos consistem em técnicas algorítmicas ou processos iterativos que se aplicam a problemas ou conjunto de problemas, cuja resolução se baseia no segmento de uma sequência padronizada de passos (p. 82).

Os pesquisadores ainda trazem outras concepções para álgebra, dentro da esfera linguística: a concepção linguístico-estilística onde é caracterizada como uma linguagem particular criada com o objetivo de expressar corretamente os procedimentos específicos; a linguístico-sintático-semântica que consiste numa linguagem própria e concisa; e a linguístico-postulacional, a qual a caracteriza como uma linguagem simbólica com alto grau de abstração e generalidade comum a todos os campos da matemática. Nessa última identificamos a álgebra que trazemos à discussão neste texto. Todas elas tecem uma crítica à visão da álgebra como simples manipulação de expressões algébricas, técnicas e formalismos (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Concordamos que a álgebra carrega em si um certo simbolismo, mas que também expressa sentido e elementos capazes de produzir significados aos seus conteúdos e da matemática como um todo, pela capacidade de generalização. Primamos pela significação dos objetos algébricos na resolução de problemas matemáticos que levem à generalização (USISKIN, 1995; KAPUT, 1999; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 2007) visto que objetivamos como fim principal a aprendizagem matemática.

Nos estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (2003) encontramos classificações para a álgebra como: (a) Álgebra universal – aquela que estuda as ideias em comum de todas as estruturas algébricas; (b) Álgebra abstrata[18] – aquela que estuda as estruturas algébricas tais como grupos, anéis e corpos; (c) Álgebra elementar – aquela que diz respeito às operações aritméticas, mas que, ao contrário da aritmética, utiliza símbolos em vez de números; (d) Álgebra computacional – ou computação algébrica, é a tecnologia para a manipulação de fórmulas matemáticas por computadores digitais, que utiliza símbolos representando objetos matemáticos; por fim temos a (e) Álgebra linear, que é o

[18] O termo Álgebra Abstrata, ou Álgebra Moderna, é utilizado para diferenciá-la da Álgebra Elementar, mais antiga, a que é estudada na escola, em nível dos ensinos fundamental e médio.

estudo dos espaços vetoriais, transformações lineares, entre eles, que utilizam conceitos e estruturas fundamentais da matemática.

As concepções de álgebra trazidas por Usiskin (1995) estão relacionadas às compreensões e significados das letras, que trata como variável[19] e em modelo de generalização, define a álgebra como uma “aritmética generalizada”. Numa segunda concepção o autor considera o equacionar o problema uma forma de solucioná-lo, as letras são chamadas de incógnitas e a define como “estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas” (p. 56). Uma terceira concepção o autor a concebe como “estudo de relações entre grandezas”, onde as letras passam a ter um caráter de parâmetro onde as grandezas têm uma estreita relação com as funções. Por último trata da álgebra como “estudo das estruturas” dos sinais arbitrários, no ensino superior, mas relacionando-as com a educação básica.

O nosso estudo se situa, dentre essas classificações, na Álgebra Elementar (FIORENTINI et. al., 2003), aquela que é estudada no nível fundamental, por investigarmos o 6º. Ano desse nível de ensino, como uma álgebra escolar.

Concordando com Radford (2009), que o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem é o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico, discutiremos a seguir a álgebra e sua linguagem na formação do pensamento algébrico.

2.1.3 O pensamento algébrico nas pesquisas em Educação Matemática

Não há um consenso dentre os pesquisadores sobre o que é pensar algebricamente. Lee (2001), não encontrando essa definição, fornece uma concepção de álgebra como “Caminhos do Pensamento” que é entendida a partir dos pensamentos sobre as relações e conexões que a Matemática estabelece com outras áreas ou do mundo real. Há discussões que distinguem o pensar por relações, analiticamente, do pensar algebricamente.

[19] As pesquisadoras Trigueiros e Ursini (2005) utilizam a palavra variável para se referirem à utilização de letras em Álgebra.

Squalli (2003) coloca que o pensamento algébrico é um modo particular de raciocinar e que as habilidades do pensamento analítico são fundamentais ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois este serve para distinguir o pensamento algébrico da aritmética. No entanto, o autor, aponta que o pensamento algébrico e o raciocínio algébrico não significam a mesma coisa: pensar é uma tendência de mente e raciocínio é o que o torna operacional (SQUALLI, 2003). Reforça-nos assim a ideia de que, para tornar o pensamento algébrico explícito, a linguagem é essencial.

Na sua caracterização do pensamento algébrico, Squalli (2003) identifica quatro aspectos importantes desse pensamento: "(a) a capacidade de pensar analiticamente; (b) a capacidade de construir, interpretar e validar modelos algébricos de situações da vida real; (c) a capacidade de manipular expressões algébricas de acordo com regras pré-definidas; (d) e a capacidade de abstrair e generalizar relações e regras das estruturas algébricas, como também de situações reais ou matemáticas quaisquer" (p. 115-116, tradução própria).

Ponte, Branco e Matos (2009) compartilham da orientação prevista nos PCN (BRASIL, 1998) de que o objetivo do estudo da álgebra no Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento algébrico, que vai muito além de manipular símbolos. Para os autores,

> O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios servira (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

Para progredirmos na compreensão do modo de alcançar esse objetivo, um passo fundamental é buscar conhecer o processo de raciocínio dos alunos no desenvolvimento do pensamento algébrico.

A pesquisa de Fiorentini, Cristóvão e Fernandes (2005) identificou fases – pré-algébrica, de transição e do pensamento algébrico – no processo de aprendizagem da álgebra – que trazem aspectos que podem contribuem para identificar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico. São elas:

- Fase pré-algébrica: essa denominação é dada pelos PCN (BRASIL, 1998) como orientação ao ensino de álgebra no 5º. e 6º. Anos do Ensino Fundamental, quanto aos conteúdos que devem ser trabalhados, e os autores assim entenderam. Geralmente, e seguindo as orientações curriculares, é a fase onde os alunos tem o primeiro contato com as letras, mas não são levados a generalização do que elas representam, nem as conceber como variáveis;

• Fase de transição: essa fase é definida por Da Rocha Falcão (1993) como uma fase de rupturas, onde o aluno é levado a abandonar o raciocínio aritmético puro e passar a um raciocínio aritmético-algébrico, ou algébrico puro. Nesses extremos reside a ruptura epistemológica definida por Da Rocha Falcão e entendemos que pode estender pelos aspectos psicológicos/cognitivos, discutidos aqui como uma das possíveis causas dos problemas com a aprendizagem algébrica.

• Fase do Pensamento Algébrico: nesse estágio o aluno já vivenciou, podendo até ter superado, as rupturas e já é (ou acredita-se que seja) capaz de pensar e se expressar genericamente, conceber a ideia e a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, e que podem ser expressas algebricamente.

As fases descritas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) e observadas em suas pesquisas, lhes serviram para mapear o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico para entender a lógica do pensamento desses alunos. E enfatizam: “toda operação é realizada segundo uma lógica, e é essencial investigar essas lógicas se queremos entender as formas de pensar dos nossos alunos” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 114).

Grecco (2008) em uma pesquisa que tinha por objetivo apresentar uma proposta de sequência didática destinada a alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para a introdução à álgebra, observou que a resolução de problemas envolvendo a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e sequências pode favorecer o desenvolvimento dessa forma de pensar. Resultados próximos foram obtidos no estudo de Kern (2008), que ao investigar uma proposta de ensino voltada à introdução da álgebra por meio de relações funcionais, concluiu que o contato com problemas possibilita um significado maior para conceitos algébricos, como o de constante, além de potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças. Tais estudos ratificam nossa proposta de sequência didática, cujas atividades foram elaboradas com resolução de problemas que envolvem, dentre outras, atividades de sequências e padrões.

No processo de significação dos conceitos algébricos e sua linguagem nos problemas propostos Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), pela ótica de Vygotsky (2001), afirmam que há uma estreita relação entre o pensamento e a linguagem, pois são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento do outro e vice-versa. E afirmam que “no processo de aprendizagem a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005, p. 4-5). Nesse entendimento, para que os alunos desenvolvam aspectos referentes ao pensamento matemático algébrico, não necessariamente precisam dominar uma linguagem algébrica simbólica.

A Matemática se faz Matemática pela sua linguagem. Constitui-se assim a linguagem matemática, uma linguagem simbólica que faz uso de signos para se tornar compreensível. Esta é comunicada, dentre outros registros, pela linguagem natural, uma linguagem polissêmica que muda de sentido conforme o contexto em que está sendo empregada. Investigar o pensamento do aluno requer decodificar a linguagem natural, inseri-la no contexto estudado e então torná-la uma linguagem matemática simbólica.

O processo de apropriação da linguagem, e de diferentes linguagens, permite que o aluno expresse suas ideias de forma genérica sobre um conceito e o reconheça em diferentes linguagens (DUVAL, 2003) e o coloca mais próximo de resolver os problemas matemáticos em que a leitura e interpretação são os primeiros obstáculos.

Ainda em relação à discussão sobre o papel da linguagem na formação do pensamento algébrico, encontramos num artigo de Lins Lessa e Da Rocha Falcão (2005) uma discussão acerca da relação entre pensamento e linguagem no processo de apreensão conceitual na matemática. O estudo conclui que essa apreensão não necessariamente está associada à linguagem, mas no caso específico da álgebra, quando procedimentos aritméticos não dão conta de resolver os problemas, a linguagem se mostra fundamental.

Lee (2001) afirma que a linguagem algébrica é diferenciada pois assume um papel mais sintático, pelo uso de regras, do que semântico, com a produção de significados.

Para Godino e Font (2003) é interessante ao professor ter compreensão da importância da álgebra e sua linguagem, e consequentemente do pensamento algébrico, na formação do conhecimento matemático. Em consequência, na formação do professor é necessário que este construa a visão da necessidade de desenvolver o pensamento algébrico durante todos os níveis de ensino pois "o raciocínio algébrico implica em representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática" (p. 8). Para os autores o raciocínio algébrico é essencial à comunicação do pensamento algébrico.

Lins e Gimenez (1997) afirmam que "não há um consenso a respeito do que seja pensar algebricamente" (p. 89) e discutem sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da atividade algébrica, que eles chamam de "coisas da álgebra". E afirmam:

> Parte do trabalho de caracterizar a Atividade Algébrica é dar uma "descrição" de posse da qual possamos identificar essa atividade quando ela acontece. Outra parte, mais complicada, é tentar saber se há – e quais seriam, então – processos cognitivos peculiares a essa atividade (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 90).

Apesar de não existir esse consenso entre os pesquisadores da Educação Matemática sobre o que caracteriza o pensamento algébrico, estes apresentam suas diferentes perspectivas do que este seja, no sentindo de contribuir para o entendimento de como se dá essa forma particular de pensar.

Radford (2006) lembra que se ainda não temos uma caracterização definitiva para pensamento algébrico, isso se deve possivelmente ao "extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral"[20] (p. 2, tradução nossa).

Dentre os pesquisadores que buscaram caracterizar o pensamento algébrico e diferenciá-lo do pensamento aritmético, Kieran (1992) afirma que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e ao "uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional" (p. 4), enquanto que o pensamento aritmético está diretamente relacionado ao cálculo e operações que levam a um resultado.

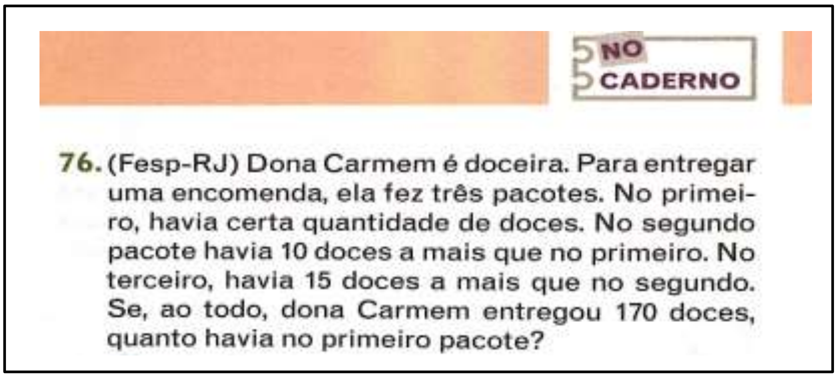
[20] "Scope of algebraic objects (e.g. equations, functions, patterns, ...) and processes (inverting, simplifying, …) as well the various possible ways of conceiving thinking in general" (RADFORD, 2006, p. 2).

Para Radford (2009, 2011) o que diferencia o pensamento algébrico do pensamento aritmético é a forma de lidar com as quantidades conhecidas. Para o pesquisador, no pensamento algébrico essas quantidades são indeterminadas (e, portanto, desconhecidas), mas lidamos com elas como se fossem conhecidas, manipulamos analiticamente e realizamos cálculos tal qual realizamos nos procedimentos aritméticos com números conhecidos. E essa indeterminação, própria de objetos algébricos, em oposição à determinação numérica, torna possível substituições de variáveis ou incógnitas nas equações ou funções.

Radford (2009) destaca também como elemento caracterizador do pensamento algébrico o simbolismo alfanumérico próprio da álgebra, considerado como um sistema semiótico, que pode ser único e insubstituível a depender do modo de significar os objetos algébricos. No entanto, Radford (2011, 2014) alerta que a notação algébrica e o uso de símbolos não necessariamente implicam pensar algebricamente.

O problema[21] destacado na Figura 2 mostra essa relação entre o pensamento aritmético e algébrico, quando exige do aluno relações aritméticas, operações e tratamento do desconhecido “uma certa quantidade de doces” como se fosse conhecido.

Figura 2: Problema extraído do Livro Didático *Praticando Matemática – 6º ano*



NO CADERNO

76. (Fesp-RJ) Dona Carmem é doceira. Para entregar uma encomenda, ela fez três pacotes. No primeiro, havia certa quantidade de doces. No segundo pacote havia 10 doces a mais que no primeiro. No terceiro, havia 15 doces a mais que no segundo. Se, ao todo, dona Carmem entregou 170 doces, quanto havia no primeiro pacote?

Fonte: Aldrini, Vasconcelos (2015, p.69).

O problema pode ser resolvido por sucessivas operações aritméticas de *tratamento* (DUVAL, 2003), com as relações estabelecidas numa sequência, como:

[21] Usamos o termo problema como sinônimo de uma situação matemática que requer ideias e estratégias para se chegar a uma solução.

Quadro 1: Esquema de resolução do Problema exposto na Figura 2

170 – 10 = 160 160 – 25 = 135, 135 : 3 = 45, que é a quantidade de doces que havia no primeiro pacote.

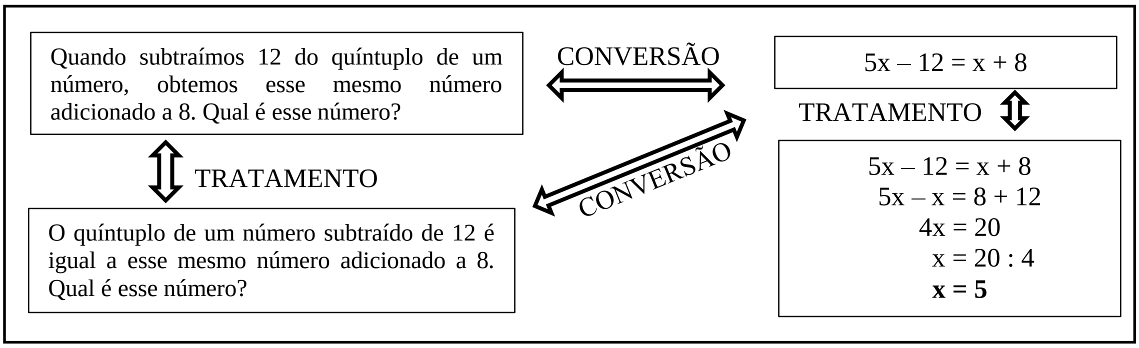
Fonte: os autores (2018).

Trata-se de um *problema de partilha*, um tipo especial de problema de estrutura algébrica que se caracteriza por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas, com uma referência ao todo (MARCHAND; BEDNARZ, 1999, apud ALMEIDA, 2016). Tal situação contempla a habilidade prevista na BNCC (BRASIL, 2017) de resolver problemas que envolvam partilha em partes desiguais, nesse caso envolvendo relações aditivas. Optamos por incluir na experimentação (2ª. sessão) problemas de estrutura algébrica, dentre eles que envolvam *partilha*s, no entanto o objetivo não é desenvolver a habilidade de resolver tais problemas, mas verificar o raciocínio dos alunos em resolvê-los, na busca de desenvolvimento do pensamento algébrico de resolução. Nessa possibilidade de resolução reside a *condição* do aluno dominar o conceito de adição, uma vez que se faz referência a uma quantidade de *doces a mais* e no entanto remete a operações de subtração.

Propor uma sequência didática é oferecer ao professor possibilidades didáticas de desenvolvimento do pensamento algébrico enquanto facilitador da aprendizagem matemática. Nesse sentido, é mister propor problemas, como o exposto na Figura 2, que possam ser resolvidos pelo raciocínio algébrico. São espaços ideais para se institucionalizar esse tipo de raciocínio, que defendemos ser importantes para a aprendizagem algébrica futura.

Visando a compreensão dos objetos da álgebra, as atividades de experimentação foram elaboradas em dois desses registros, a linguagem natural e a linguagem algébrica, com o objetivo de identificar processos cognitivos descritos por Duval (2003) como necessários à aprendizagem. São os processos cognitivos de *conversão*, quando há mudança de registro e de *tratamento*, dentro de um mesmo registro, conforme esquematizados na Figura 3.

Figura 3: Ilustração das operações cognitivas de *conversão* e *tratamento*

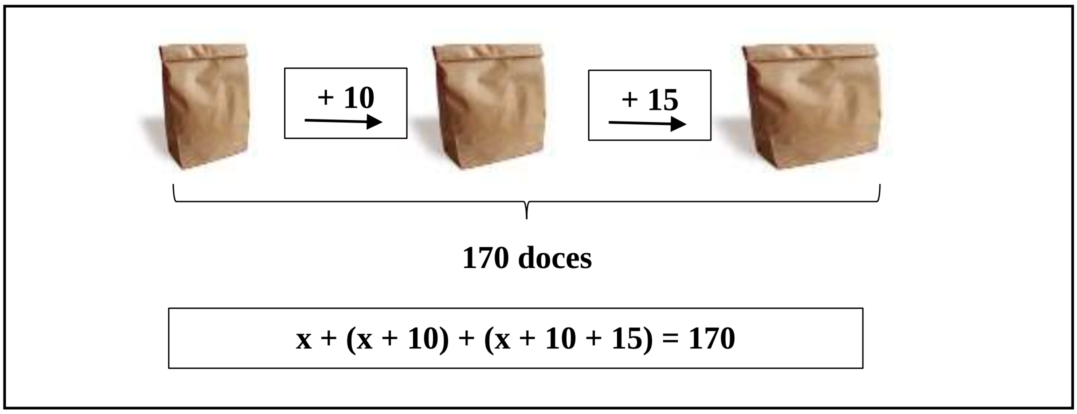


Fonte: os autores (2018).

Nesse sentido, apoiamo-nos na premissa de Duval (2003) para que ocorra a aprendizagem é imprescindível que o aluno transite por pelos menos dois desses registros e de Chevallard (1992) ao afirmar que os objetos *não-ostensivos* só são acessíveis a partir dos objetos *ostensivos* associados. Analisaremos então esses registros nas produções dos alunos nas experimentações.

O esquema mostrado na Figura 4 traz uma representação algébrica de *conversão* (DUVAL, 2003) da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Figura 4: Esquema algébrico do Problema exposto na Figura 2



Fonte: os autores (2018).

Nesse problema, as relações seguem uma sequência: o segundo pacote com dez unidades a mais que o primeiro, e o terceiro com quinze unidades a mais que o segundo, ou seja, a ordem 1º. Pacote → 2º. Pacote → 3º. Pacote, onde as grandezas são originadas de fontes diferentes.

Para realizar o processo de *conversão* (DUVAL, 2003) do registro da linguagem natural do enunciado do problema para o registro algébrico, temos que adotar, como fonte inicial, a quantidade de doces do 1º. pacote, que podemos representar por "**x**". Para o 3º. pacote a fonte já não é o 1º. pacote, e sim o 2º. Finalizando, como a soma das quantidades de doces dos três pacotes temos a equação: $x + (x + 10) + (x + 10 + 15) = 170$.

Entendemos que o *ostensivo*[22] *saquinho* de tamanhos diferentes (apresentados visualmente na Figura 4) pode levar a uma indução de acréscimo, ou seja, de adição. No entanto, o uso de *ostensivos* na atividade matemática segundo Chevallard e Bosch (1999) é válido nas situações iniciais como motivador e estimulador do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Defendemos, assim como Kieran (1992) e Duval (2003), que o esforço prévio de equacionar um problema, isto é, realizar o processo de *conversão* de registros de representação, é cognitivamente maior que o de escolher e executar um algoritmo algébrico, como na resolução apresentada (Figura 4). No entanto é um processo que mobiliza o pensar por estabelecimento de conexões, aqui discutido como imprescindível à atividade matemática.

Lins (1992) destaca a importância do transformismo algébrico como sendo adequado não só para se chegar à solução de uma equação, como também na formação do pensamento algébrico. Compreender as operações aritméticas e as propriedades necessárias para solucionar um problema, como na situação destacada (Figura 2), é pensar algebricamente. Entretanto, realizar mecanicamente os passos, como reprodução de um modelo, não mobiliza o pensamento algébrico. Ainda para Lins (1992) o aluno está pensando algebricamente quando consegue produzir significado para os objetos algébricos, como as equações ou inequações, ou quando consegue perceber regularidades ou ainda quando consegue identificar variáveis e incógnitas. E essa produção de significado para os objetos e os símbolos algébricos como elemento caracterizador do

---

[22] A discussão teórica sobre objetos *ostensivos* e seu uso na atividade matemática é melhor discutida no item 2.2.3 desse texto.

pensamento algébrico também é defendida por Da Rocha Falcão (1997). Ambos concordam que o aluno está pensando algebricamente quando constrói significado para os objetos algébricos e para a linguagem algébrica formal (simbólica).

Dessa forma podemos concluir que pensar algebricamente está diretamente ligado à produção de significados para os objetos da álgebra, como as letras, símbolos, presente nas equações, inequações, e o aluno atinge o estágio de pensar algebricamente quando é capaz de construir significados para os objetos da álgebra e também para a sua linguagem (LINS, 1992, 1994a, 1994b, KAPUT, 1999, 2008; RADFORD, 2009). A linguagem é um registro de representação do pensamento, um objeto *ostensivo*, responsável pela comunicação do aluno sobre o objeto que lida, é a exteriorização do pensamento e do conhecimento construído. E esse conhecimento, segundo Lins (1992), está no sujeito e não no texto que ele apresenta ou que lhe é apresentado.

Concordando com Lins (1992), não é o fato do aluno resolver uma equação que mostra que ele está pensando algebricamente, ele pode estar repetindo, de forma mecanizada, o modelo apresentado pelo professor. Não queremos com isso que o aluno do 6º. Ano mobilize objetos algébricos tal qual apresentado na Figura 2. Esperamos sim que este aluno, que visualiza e ouve a explanação do professor sobre essas possibilidades, desperte o seu pensar algebricamente.

O processo de construção do pensamento algébrico pelo aluno envolve significar as ações realizadas em cada passo. Por outro lado, resolver um problema aritmeticamente não descarta também o uso do pensamento algébrico uma vez que não é a "linguagem utilizada para revelar o pensamento que determina a forma que o sujeito está pensando" (ALMEIDA, 2016, p. 62). Para Lins (1992) o aritmeticismo, assim como a analiticidade e o internalismo são vertentes do pensar algebricamente.

Kaput (2008) também compartilha o pensamento de Lins (1992) de que o conhecimento, por ser uma atividade exclusivamente humana, está no sujeito e não no objeto e, portanto, o sujeito só adentra o pensar algebricamente a partir do momento que significa os seus objetos. Isto é, quando um sujeito visualiza ou responde uma equação como um objeto algébrico ele está pensando algebricamente, e entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membros e encontra caminhos para respondê-la.

Diante disso, Kaput (1999, 2008) destaca que o pensamento algébrico surge das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais simbólica, usada na justificação dos termos.

Concordamos com os autores por entender que, ao analisar uma atividade algébrica, analisaremos também a produção de significados aos seus conteúdos e os objetos que faz uso, como as letras, por exemplo. Como discutimos anteriormente, o ato de pensar, e pensar matematicamente, é produzir significados a partir das conexões e relações que são feitas nesse processo de significação, de construção do conhecimento, o conhecimento algébrico, no caso.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apontam como elementos que caracterizam o pensamento algébrico "a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização" (p. 87).

Kaput (2008), no entanto, defende que o foco do pensamento algébrico está na atividade de generalizar. Ou seja, abstrair, generalizar, estabelecer relações são operações mentais que, em conjunto, revelam-se imprescindível ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

É consenso entre os pesquisadores que aqui trouxemos para discutir e caracterizar o pensamento algébrico que essa tarefa não é simples. A álgebra é um extenso campo de estudo, que lida com diferentes objetos (equações, inequações, sistemas, funções, etc.) que requer analiticidade, produção de significados enquanto um sistema semiótico por excelência. Esse pode ser um dos motivos, no entanto, é consenso entre os pesquisadores que o pensamento algébrico do aluno deve ser trabalhado no ambiente escolar, pois é fundamental para que a sua aprendizagem ocorra, com significação dos objetos algébricos e apropriação da linguagem utilizada para representar esses objetos.

Em nossa pesquisa interessa-nos investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico, como recurso à aprendizagem matemática algébrica. Logo, convém-nos estabelecer nossa forma de conceituá-lo. Para fazê-la, fundamentaremos nosso conceito nas discussões de pesquisadores que aqui trouxemos e a qual passaremos a defender neste estudo. De nossa parte assumimos o pensamento algébrico como aquele que se caracteriza pelas conexões e relações que são estabelecidas no processo de construção das possíveis soluções dos problemas. Assim, pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido num contínuo processo de produção de significados para objetos da matemática e sua linguagem.

2.1.4 O movimento *Early Algebra* como inspirador da pesquisa

Como destacamos anteriormente, pesquisadores da Educação Matemática vêm discutindo o ensino de Matemática na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. Estes justificam que a sua inclusão prioritária no ensino da matemática desde os anos iniciais objetiva dar sentido e unidade à Matemática escolar.

Essa perspectiva foi bem difundida pelo movimento *Early Algebra*[23] que teve, dentre outros, Maria Blanton, James Kaput, David Carraher e Ana Lúcia Schliemann como pesquisadores pioneiros, e que surgiu como proposta curricular na qual se propõe introduzir a álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, transversalmente, durante o ensino e aprendizagem das diferentes temáticas.

A proposta resulta da análise e reflexão dos resultados de investigações (BLANTON; KAPUT, 2005; BLANTON, 2007; BASTABLE; SCHIFTER, 2007; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007), promovidas nas últimas décadas por pesquisadores da Educação Matemática em todo o mundo. Esses pesquisadores defendem que se forem disponibilizados desde os anos iniciais as noções que compõem a base da álgebra, os alunos poderão avançar nas futuras concepções algébricas com uma base mais sólida, de forma autônoma e com qualidade conceitual elevada.

O movimento *Early Algebra*, conforme destaca Blanton (2007), não se destina a ser vista como um conjunto separado de atividades para ser trabalhado depois da aritmética. Ele pode residir harmonicamente no currículo de Matemática dos anos iniciais, assim como no 6º ano, onde pesquisamos.

As ideias de Carraher e Schliemann (2007) nos inspiraram ao afirmarem que o *Early Algebra* reside quietamente nos currículos de Matemática e deve fundamentar-se

---

[23] Este grupo de trabalho teve origem na *Conferência Algebra Gateway to Technological Future*, em novembro de 2006, nos Estados Unidos da América. Disponível em: <http://www2.research.uky.edu/pimser/p12mso/pub/2009. Acesso em maio/18. Mais sobre o Early Algebra em http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp.

em contexto de resolução de problemas, tal como propusemos na nossa sequência didática, e produzindo significados para esses problemas.

Kaput (1998), uma das pioneiras do movimento, já afirmava que se deve abordar o pensamento algébrico desde o início da escolaridade, integrando-o com outros temas da Matemática levando em consideração as capacidades cognitivas e linguísticas dos alunos que os tornam capazes de construir significados e assim compreender os conteúdos trabalhados.

Conforme explica Neagoy (2009), o *Early Algebra*,

> [...] não significa ensinar a álgebra tradicional escolar mais cedo. Pelo contrário, trata-se de promover formas de pensar, fazer e comunicar sobre a matemática e de ensino-aprendizagem com a compreensão (p. 1).

Em traços gerais, o *Early Algebra* está associado ao estudo e à generalização de padrões e de relações numéricas, de relações funcionais, manipulação de símbolos e modelação. Kaput (1998, 2000) e Schliemann, et al. (2003) em estudos anteriores já consideravam ser necessário desenvolver junto aos alunos, com idades compreendidas entre os seis e os doze anos, o raciocínio e as relações algébricas.

O nosso entendimento é que esse processo pode acontecer ao longo do Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º. ao 5º. Anos aqui no Brasil), chegando até os primeiros anos do Ensino Fundamental Anos Finais (6º ao 9º. Anos) de forma gradual e nos limites cognitivos dos alunos. No entanto, como uma delimitação do objeto de estudo, focamos a nossa pesquisa no 6º. Ano, quando os alunos estão na faixa etária de onze a doze anos, limites da faixa considerada pelo *Early Algebra*, ficando os anos anteriores como sugestões de pesquisas futuras.

Os estudos (KAPUT, 1998, 2000; SCHLIEMANN et al., 2003) comprovaram que alunos entre seis e doze anos revelaram capacidade para resolver problemas algébricos, mesmo antes de conhecerem e fazerem uso de notação algébrica, onde se conclui ser necessário incorporar atividades de observação de regularidades, relações e propriedades matemáticas para que os alunos possam desenvolver competências algébricas.

A nossa inspiração no movimento *Early Algebra* reside especificamente por entender como um movimento que surgiu para pensar o ensino da Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Entendemos que este visa o desenvolvimento de competências (saber) e habilidades (saber fazer) para formar a base do pensamento algébrico a partir da resolução de problemas no contexto aritmético, onde vive a nossa pesquisa.

Não defendemos a antecipação de conteúdos, mas sim de primar pelo desenvolvimento de um raciocínio capaz de formar a base do pensamento algébrico. Como também não cremos que se trata de usar letras, símbolos na atividade matemática para caracterizá-la de atividade algébrica ou pensamento algébrico. Apoiados teoricamente em Kieran (2007) e Radford (2006) entendemos que o uso de letras e símbolos não equivale a fazer álgebra. A atividade algébrica reside nas generalizações, na resolução de problemas, como ferramenta para formar a base do pensamento algébrico.

O movimento, ao defender a integração do pensamento algébrico na Matemática escolar desde o seu início traz consigo a convicção de que as dificuldades dos alunos neste domínio, largamente documentadas pela investigação (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007), residem em grande parte no ensino da Matemática escolar.

Pensando o ensino da Matemática no Brasil, nossa realidade, vislumbramos a institucionalização dessas ideias e identificamos na BNCC (BRASIL, 2017), em processo de implantação, avanços nesse sentido.

Destacaremos a seguir níveis do pensamento algébrico que foram validados pelo pesquisador Almeida (2016) em pesquisa realizada com estudantes do 6º. ao 9º. ano do Ensino Fundamental. Utilizaremos como parâmetro de análise em nossa pesquisa os resultados do 6º. Ano.

2.1.5 Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico

As pesquisas destacadas na seção anterior nos revelaram que a melhor forma de levar o aluno a desenvolver o pensamento algébrico é levá-lo a resolver problemas variados. Mas, conforme questionou Almeida (2016, p. 17): “como saber se um aluno desenvolve ou não essa forma de pensar?” E esse questionamento o impulsionou a pesquisar um instrumento que possibilitasse identificar esses níveis de desenvolvimento revelado por alunos, diante de atividades de um modelo proposto.

Dentre os estudos sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nas pesquisas em Educação Matemática, encontramos na pesquisa de Almeida (2016) uma categorização em níveis para esse desenvolvimento. O pesquisador tratou de um tipo específico de problemas algébricos, os *problemas de partilha* (MARCHAND; BEDNARZ, 1999, apud ALMEIDA, 2016)), que se caracteriza por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas.

Para construir a sua caracterização do pensamento algébrico Almeida (2016) se apoiou nas perspectivas de Rômulo Lins, James Kaput, Luis Radford, Silva e Oliveira e Câmara e entendeu que a "caracterização de pensamento algébrico não é algo simples" (p. 79), mas é necessário. E conclui que pensar algebricamente requer as seguintes características: (1) capacidade de estabelecer relações; (2) capacidade de modelar; (3) capacidade de generalizar; (4) capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido; e (5) construir significados para os objetos e a linguagem simbólica algébrica (ALMEIDA, 2016, p. 84). Concluiu o pesquisador que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, como a "primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito" (p. 79).

As discussões de Almeida (2016) convergem com o nosso estudo quanto à possibilidade de questionarmos a existência de raciocínios algébricos em estudantes que não dominam as estruturas algébricas formais (por questões curriculares ou de ensino) e na forma de introdução da álgebra. O seu estudo se deu especificamente com problemas de partilha, mas, como sugere o próprio autor, estendemos o modelo a outros tipos de problemas, que se apresentam no livro didático analisado e que compuseram as atividades de experimentação da sequência didática.

Almeida (2016) categorizou de 0 a 3 os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico e mediu a percentagem de alunos em cada um deles. Os resultados específicos do 6º. Ano estão sistematizados no Quadro 3 das duas versões, uma preliminar (VP), e uma versão final (VF), e estes se mostraram bem próximos, como uma prova de validade de sua pesquisa. Utilizaremos estes critérios em nossas análises dos problemas propostos para a experimentação da sequência didática.

Quadro 2: Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico (PA) dos alunos do 6º. Ano descritos por Almeida (2016)

NÍVEL	DESCRIÇÃO	FREQUÊNCIA (% Alunos)		ANÁLISE
		VP	VF	
0	Ausência de PA	29%	30%	Não apresentam nenhuma característica do PA ao se depararem com problemas de partilha; não conseguem se apropriar do significado do problema
1	PA Intermediário	58%	50%	Entende a incógnita como um espaço vazio que deve ser preenchido com valores particulares e conhecidos; compreende o problema como uma equação, mesmo não usando a representação simbólica esperada; mobilizam as características (1), (2) e (3)
2	PA Incipiente	8%	14%	Usa estratégia algébrica, no registro sincopado; estabelece relações entre as informações do problema; mobilizam as características (1), (2), (3) e (4)
3	PA Consolidado	5%	6%	Mobilizam as cinco características do PA

Fonte: os autores, a partir dos dados de Almeida (2016).

Almeida (2016) conclui, concordando com Radford (2009), que "o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem é o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 161). E indica que essa linguagem essencialmente simbólica e sua manipulação devem aparecer de forma natural para o aluno, a partir das suas necessidades e maturidade, valorizando o caminho percorrido por ele para a formação do pensamento algébrico.

A seguir buscamos discutir alguns dos conceitos da Teoria Antropológica do Didático importantes para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

2.2 A Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), surgiu no campo da Educação Matemática, idealizada pelo matemático francês Yves Chevallard. Trata-se de uma teoria oriunda de um programa de investigação denominado Programa Epistemológico, que teve como ponto de partida os trabalhos de Guy Brousseau, também um pesquisador francês, que desde a década de 1960 tem se destacado no desenvolvimento dos estudos sobre a Didática da Matemática (KASPARY, 2014).

A nossa opção pela sustentação teórica da TAD deve-se ao fato de Chevellard propor uma didática específica para resolução de situações específicas que ocorrem no interior da Matemática escolar (e de outras disciplinas), tal como propusemos neste estudo, de acordo com as necessidades do objeto de estudo de determinados saberes e conhecimentos. A TAD proporciona "instrumentos claramente operatórios" (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa), que são resultados da construção de um modelo batizado de organização praxeológica, cujos componentes – *tipo de tarefa, técnica, tecnologia* e *teoria* – descrevem toda atividade matemática. Para essa discussão, tomemos o primeiro postulado da teoria que diz:

> [...] toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 5, tradução nossa).

Em consonância com o quadro teórico da TAD investigamos *o que é* e *como é* proposto o ensino de problemas envolvendo números naturais no livro didático adotado pela escola participante da pesquisa para o ano pesquisado, o 6º. Ano, a saber, *Praticando Matemática 6º. Ano* – Aldrini e Vasconcelos (2015). Assim, ao longo das discussões teóricas faremos excertos de atividades do livro didático como o objetivo de analisá-las quanto à capacidade de desenvolvimento do pensamento algébrico e então selecionar os tipos de problemas que constituirão as atividades de experimentação da sequência didática.

Lembramos que não é nosso objetivo oferecer uma proposta didática que não seja acessível aos participantes em outros contextos e outras situações fora da pesquisa. E então prezamos por selecionar atividades do próprio livro didático, por ser o instrumento mediador do ensino, de fácil acesso e, se bem utilizado, pode acrescentar ao trabalho didático do professor.

2.2.1 Uma Matemática para o ensino, um saber a ensinar

Identificamos em pesquisas correlatas dificuldades de aprendizagem na Matemática e em especial na atividade algébrica. Pensando o processo ensino e aprendizagem como um todo indissolúvel, propusemo-nos buscar soluções didáticas a esses problemas. E para distinguir os diferentes saberes envolvidos nesse processo, Chevallard (1985) partiu do pressuposto que a Matemática a ser ensinada (do professor) deve ser distinta da Matemática a ser aprendida (do aluno) sendo *objeto do saber* todos os conhecimentos socialmente disponíveis na literatura, numa dada *instituição*. E então pensamos uma sequência didática para o ensino da Matemática como uma estratégia ao trabalho didático do professor, para promoção do conhecimento.

Chevallard (1991) destaca que a Didática, e particularmente a Didática da Matemática, está inserida no campo da “antropologia do conhecimento, uma antropologia cognitiva” (CHEVALLARD, 1999, p. 149) onde tudo é *objeto*. Chevallard (1989) postula também que todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado em uma ou mais *instituições*, ou seja, nenhum saber existe no vácuo, num vazio social.

Nesse entendimento a escola, ambiente natural onde se realizou esta pesquisa, é um *objeto* e é uma das responsáveis por sistematizar e socializar o saber científico (saber sábio), tornando-o um *saber a ensinar*. Assim, o saber científico passará por transformações até que se configure um *saber ensinado*.

As *instituições* para Chevallard (1992) também podem ser objetos e são, por exemplo, “o livro didático”, “uma sala de aula”, ou “uma família”, ou seja, um local - não apenas no sentido físico. No nosso caso, estamos estudando a instituição sala de aula e também o livro didático, para análise das atividades propostas em busca de tarefas[24] que

[24] Utilizamos o termo tarefa no sentido etimológico da palavra de atividade ou trabalho a ser feito. Quando nos referirmos a *tarefa* como um componente da organização praxeológica descrita pela TAD esta virá grifada em itálico.

podem levar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, e então à aprendizagem matemática.

A Matemática é uma atividade humana que se vale de signos para ser comunicada. De acordo com Bosch e Chevallard (1999) o saber matemático, e toda forma peculiar de conhecimento, é fruto da atividade humana institucional a partir das relações que o indivíduo estabelece numa dada instituição com um dado objeto, é “algo que se produz, se utiliza, se ensina ou mais geralmente, se transpõe em instituições” (p. 85). Esse saber é produzido, utilizado e transmitidos dentro de uma, ou mais, instituições. São relações pessoais e institucionais com determinados objetos do conhecimento (ARTIGUE, 1996) ou com classes de objetos a serem ensinados.

2.2.2 A Teoria Antropológica do Didático e o nosso objeto de estudo

A TAD pode ser utilizada sob diferentes abordagens: *praxeológica*, como um modelo para análise da ação humana institucional; *ecológica*, como uma análise do lugar ocupado pelo objeto do saber; e na *dialética dos ostensivos e não-ostensivos* (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) que classifica os objetos do saber em manipuláveis, acessíveis diretamente, ou não.

Chevallard (1999) propôs a noção de organização praxeológica ou simplesmente praxeologia considerando que “toda atividade humana realizada pode ser descrita como um modelo único, que chamamos resumidamente pela palavra praxeologia” (p. 1) como conceito chave para estudar as práticas institucionais relativas a um objeto do saber, em particular, as práticas sociais em matemática. E ainda, praxeologia é “um método para analisar as práticas institucionais que permitem a descrição e estudo das condições de realização” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85).

Essa organização praxeológica, peculiar à TAD, articula-se em termos e expressões que descrevem o processo de aquisição do conhecimento. São eles: tipos de tarefas, técnica, tecnologia e teoria.

Interessamo-nos em fazer uma análise da organização matemática e da organização didática das tarefas propostas no livro didático de Matemática do 6º. Ano para o ensino de operações com números naturais em busca de tarefas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Entende-se por *tarefas*, a partir de Chevallard (1999), situações que evocam uma ação a ser realizada e que são transpostas (no sentido da Transposição Didática) por uma certa instituição. Para o autor, tudo o que é solicitado para uma pessoa fazer e é mediado por verbos de ação será uma tarefa ou um tipo de tarefa, que evoca uma determinada ação.

Chevallard (1992) considera *instituição* não o espaço físico em si, mas o local onde possa ser desenvolvida uma praxeologia. No nosso caso essa instituição é a sala de aula e a praxeologia que queremos identificar é aquela relativa à resolução de problemas numéricos que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A noção de *técnica* surge frente às *tarefas*, ao buscar maneiras de resolvê-las. Surge assim o segundo postulado da TAD: "a realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica" que a resolve (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 5, tradução nossa). Para Chevallard (1992) pode existir numa instituição várias técnicas relativas a um tipo de tarefa, sem, no entanto, serem necessariamente aceitas em outras instituições. Estas, *tarefas* e *técnicas*, constituem o bloco prático-técnico, que no nosso estudo será o saber fazer, ou seja, resolver problemas envolvendo números naturais, estabelecendo relações e conexões que levem ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Ilustramos com problemas encontrados no livro didático que analisamos.

Figura 5: Problema extraído do Livro didático *Praticando Matemática – 6º ano*

107. Eva tem 12 anos de idade. Sua mãe, Vilma, tem o triplo da idade de Eva. Que idade terá Vilma quando Eva tiver o dobro da idade que tem agora?

Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015. p.76).

Trata-se de um problema de estrutura aritmética (Figura 5), requer apenas *tratamentos* sucessivos (DUVAL, 2003), que são relações estabelecidas, no entanto, mais diretas e imediatas. No entanto pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações que sugerem estabelecer. Parte de um valor conhecido, que se relaciona com os demais dados, e de natureza aditiva e multiplicativa (dobro, triplo).

Tarefas como a apresentada na Figura 5 podem ser resolvidas por diferentes maneiras. Técnicas como tentativa e erro, operações inversas, dentre outras que podem surgir no contexto da resolução e até imprevisíveis. Assim entendemos que a técnica consiste em como fazer, responder ou executar uma certa tarefa que podem fracassar em algumas conjunturas, o que é denominado de alcance da técnica. No caso em destaque a técnica de tentativa e erro não é econômica, pode levar a exaustão, e equacionar a situação poderia levar à solução de forma mais rápida e prática. No entanto, a técnica de equacionar ainda não existe nesse contexto e só faria sentido se fosse compreensível e justificável pelos sujeitos que a praticam.

Justificar racionalmente o uso de cada técnica é definido por Chevallard (1999) como um discurso tecnológico, ou *tecnologia*. Trata-se de outro elemento da praxeologia que vem para responder questões como: quais os fundamentos matemáticos que legitimam a estratégia tentativa e erro? O discurso tecnológico pode variar dependendo da instituição em que estão sendo realizadas as tarefas. Chevallard (1998) afirma que existe uma naturalidade institucionalmente aceita em praticar tais técnicas, tornando sua justificativa desnecessária, por essa ser a “boa maneira” de fazer. E diante da imaturidade algébrica dos alunos é esperado que técnicas desse sentido sejam a solução para as tarefas que lhes são propostas.

Retomando a noção de praxeologia, segundo Chevallard (2001) é a tentativa de encontrar uma ou mais formas de resolver questões (ou atividades) problemáticas, regularmente e com sucesso, que surgem no seio da sociedade. E na tentativa de respondê-las, a tecnologia pode produzir novas técnicas (CHEVALLARD, 1998), diante da impossibilidade ou limitação de uma dada técnica.

E com as mesmas funções da tecnologia, mas com um aspecto mais abrangente, o de justificá-la e interpretá-la, surge a noção de *teoria*, que deve parecer também compreensível e justificável (CHEVALLARD, 1994). O que acontece nas instituições muitas vezes é uma teoria abstrata e desconectada das técnicas e tarefas (CHEVALLARD, 1998).

Em resumo, na perspectiva da TAD, para resolver uma *tarefa*, pode-se recorrer a uma ou mais *técnicas*. Além disso, necessitam possuir uma *tecnologia* capaz de compreender e validar a sua utilização, e uma *teoria* que fundamente essa tecnologia.

No nosso estudo, não se espera dos alunos que utilizem raciocínio algébrico e objetos da álgebra, como as letras, na resolução dos problemas numéricos, uma vez que ainda não foi visto o conteúdo. Esperamos que desenvolvam o pensamento algébrico a partir de relações e conexões que podem estabelecer, na resolução de problemas, campo propício ao estabelecimento dessas relações e conexões, a partir do bom uso da linguagem natural em que são redigidos. E o livro didático tende a institucionalizar procedimentos aritméticos e algoritmos, não estimulando o estabelecimento de relações e generalização, fundamentais ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Interessa-nos verificar, apoiados no estudo epistemológico e praxeológico, se as atividades propostas no livro didático, as tarefas e os tipos de tarefas, os problemas, favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir das conexões entre o pensar e o fazer do aluno.

Chevallard (1998) postula que a realização de qualquer tarefa resulta da implementação de uma técnica. E nosso olhar sobre essas instituições e sobre o que elas trazem como tarefas é no sentido de questionar se é tarefa, e se existe uma técnica que possa ser implementada para resolvê-la. Nesse sentido, trazemos à discussão atividades propostas pelo livro didático em análise, que se apresentam na Figura 6.

Figura 6: Problemas extraídos do Livro didático *Praticando Matemática – 6º ano*

15. Subtraindo o dobro de dois mil e vinte e sete do triplo de dois mil e quatro, obtém-se:

a) 1958 c) 3958
b) 2050 d) 10066

16. Flávia tem 7 anos de idade, e sua irmã Daniela tem o dobro de sua idade. O pai das meninas tem o dobro da idade das duas juntas. Quantos anos tem o pai de Flávia e Daniela?

17. Somando o quádruplo de 135 com o quíntuplo de 206, obtemos:

a) 1560
b) 1570
c) 1300
d) 1499

Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015, p.52).

São três problemas (Figura 6) que recaem numa mesma análise. Podem ser convertidos em uma equação algébrica, no entanto, trata-se de uma “simples codificação”[25] (DUVAL, 2003, p.19), de operações aritméticas explícitas, não favorecendo aos estudantes o desenvolvimento do pensamento. A *conversão* (DUVAL, 2003) é direta do registro da linguagem natural para o registro da linguagem simbólica numérica, sem estabelecer relações entre os dados do enunciado. A restrição a esses tipos de atividade – encontrar o dobro, o quádruplo, o quíntuplo – é associar à operação correspondente, como conhecimento de múltiplos de um número. As demais operações dos enunciados são bastantes explicitas: subtraindo, somando, e usuais ao aluno do 6º. Ano que já institucionalizou ao estudar operações fundamentais desde os anos iniciais.

Acrescenta-se ainda a esta atividade a forma como os problemas são propostos, o que é uma constante no livro analisado. São problemas, em sua maioria, de múltiplas escolhas que, de certa forma conduzem, ou induzem, os alunos a uma resolução por tentativa, por descarte de possibilidades. Entendemos que não são atividades das mais propícias a desenvolver o raciocínio lógico de conexões, relações e de desenvolvimento do pensamento algébrico.

A solução para esse tipo de problema, de múltipla escolha, pode ser produzida oralmente, de acordo com uma técnica de resolução discursiva bem estruturada, onde os cálculos são feitos mentalmente, com pouco recurso de registro escrito. Nota-se assim que o registro escrito, embora dominante, não é o único registro ativado na atividade. O discurso interior, silencioso, foi indispensável no decorrer da tarefa. Nesse sentido construímos a nossa hipótese de que a formação do pensamento matemático, muitas vezes silencioso e subjetivo, é importante para a aprendizagem matemática. E aqui particularizamos para o pensamento algébrico, como essencial à aprendizagem algébrica futura.

Para Marchand e Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) trata de um *falso problema*, por não estabelecer relações entre os dados do problema e, portanto, não pode ser considerado, de acordo com a caracterização adotada, um problema algébrico.

E dessa forma entendemos que não se trata de uma *tarefa*, pelos pressupostos da TAD, visto que não há necessidade da implementação de uma *técnica* para resolvê-lo. Há

[25] Segundo Duval (2011), os códigos são sistemas transmissores ou conversores de caráter físico da transmissão de informação. Difere dos registros que são sistemas produtores de representações, e que se referem aos objetos.

apenas a necessidade de significação das palavras dobro, triplo, que remetem à multiplicação, e domínio sobre esses registros semióticos, interpretando-os.

Nesse sentido, surge o questionamento que impulsiona a nossa pesquisa: qual a natureza do conhecimento matemático? Qual a natureza das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem matemática? Como evocar os objetos não perceptíveis e não manipuláveis do conhecimento, como o pensamento algébrico? É o que discutiremos a seguir.

2.2.3 Os objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* no desenvolvimento do pensamento algébrico

Discutir o pensamento matemático nos remete ao questionamento que permeia esta tese: como se dá a sua formação e, de forma mais ampla, como se constrói os conceitos matemáticos? No seio dessas discussões Bosch e Chevallard (1999) estabelecem uma dialética do *ostensivo* e do não-*ostensivo* onde buscam responder a origem dos conceitos matemáticos, enquanto objetos *não-ostensivos* e sua relação com os objetos *ostensivos* que os representam. E acrescentam,

> (...) os conceitos surgem da manipulação de *ostensivos* dentro de determinadas organizações matemáticas (é dizer, como respostas a certas tarefas problemáticas e um em torno tecnológico-teórico dado) e esta mesma prática que, ao institucionalizar ou oficializar-se, estabelece vínculos entre *ostensivos* e *não-ostensivos* que permitiram aos primeiros remeter ou representar aos segundos em futuras possíveis atividades (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 82).

De acordo com Chevallard e Bosch (1999) a dimensão instrumental distingue os objetos do saber constitutivo das organizações matemáticas em objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* na aprendizagem matemática, enquanto ferramentas materiais necessárias.

Kaspary (2014) usa um clássico exemplo de técnica de contagem como exemplo de objeto *ostensivo*, os recorrentes *risquinhos*, utilizados pelos alunos nos problemas com operações de números naturais, geralmente no registro de gestos para contar e o registro oral para comunicar os resultados.

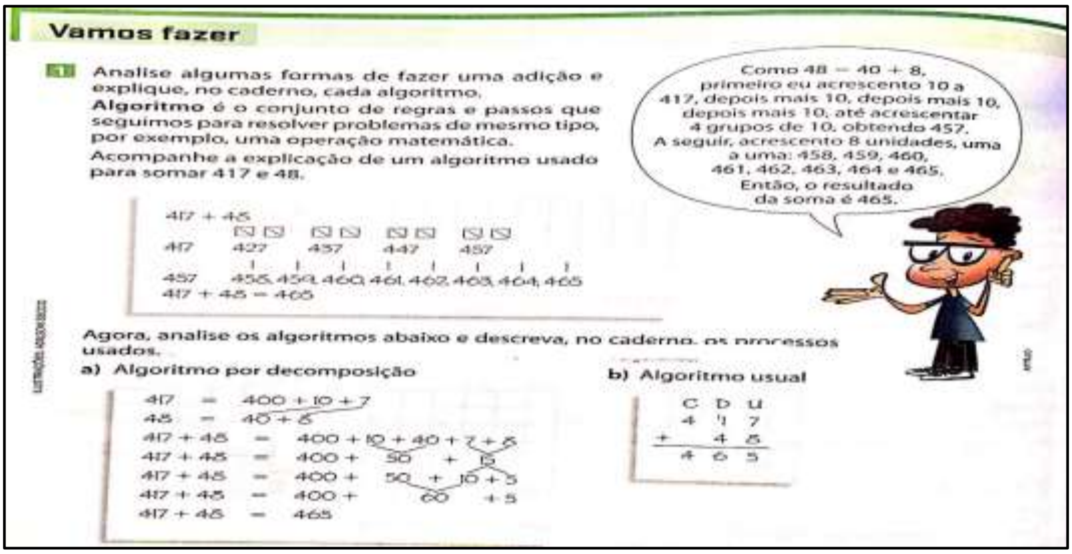
Os objetos *ostensivos* são de natureza sensível, de certa materialidade, manipulável, perceptível aos sujeitos e estão no nível do *saber-fazer*, com seus tipos de tarefas e suas técnicas próprias. Os *não-ostensivos* são objetos, como ideias, noções, conceitos, com a atividade principal de justificar e explicar, ou seja, estão no nível do "saber". Existem institucionalmente sem, no entanto, poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

E ambos, *ostensivos* e *não-ostensivos* constituem, na praxeologia descrita pela TAD, a parte prático-técnica (gerando o saber-fazer) e a parte tecnológica-teórica (amparada no saber).

A Teoria dos Registros de Representação – TRRS (DUVAL, 1995, 2003, 2009) explica tal situação de manipulação como sendo uma característica dos objetos matemáticos, pois estes só são acessíveis a partir de uma representação. Na perspectiva da TAD, os conceitos só são construídos a partir da manipulação de *ostensivos*. E esse é um entrave cognitivo na aprendizagem matemática. O que é abordado por Duval nos Registros de Representação Semiótica como sendo uma mudança de registros, que só dependeria do funcionamento cognitivo do sujeito, é visto na teorização de Chevallard como sendo uma prática cuja realização efetiva deve ser ligada à existência de uma praxeologia matemática local construída em torno de um dado tipo de problema.

E ilustraremos objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* a partir de atividades do livro didático em análise. Primeiramente, destacamos uma situação (Figura 7) que traz uma indicação dos autores do livro didático analisado quanto aos processos que podem ser utilizados para a resolução de problemas de operações com números naturais. Especificamente a situação explicita algumas formas de fazer adição.

Figura 7: Problema extraído do Livro Didático *Praticando Matemática – 6º. Ano*



Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015, p.34).

A situação exposta (Figura 7) começa explorando a base decimal, conteúdo que é contemplada no ano anterior, 5º. ano, conforme o planejamento curricular da escola. Aparece então os *ostensivos risquinhos* representando as dezenas da menor parcela a ser adicionada, o 48, que foi decomposto em dezenas e unidades.

Observa-se que esta estratégia fez com que a *técnica* de adicionar utilizando os *risquinhos* se tornasse econômica, visto que a maior parcela, o 417, poderia inviabilizá-la. Assim, a decomposição dessa maior parcela se deu pela centena, dezena e unidades. E indica que as unidades podem ser adicionadas uma a uma, deixando implícito o uso de *ostensivos*, sejam *risquinhos*, gestos, dedos, ou qualquer registro semiótico que dê acesso à sua representação. Ao final os autores sugerem um algoritmo usual de soma, como uma técnica que pode ser utilizada na mesma situação, de forma mais econômica. Nesse contexto, a institucionalização do algoritmo da soma pelo sistema posicional da base decimal se deu após um processo de construção do conceito de soma, que precisa passar pelas justificativas das técnicas empregadas.

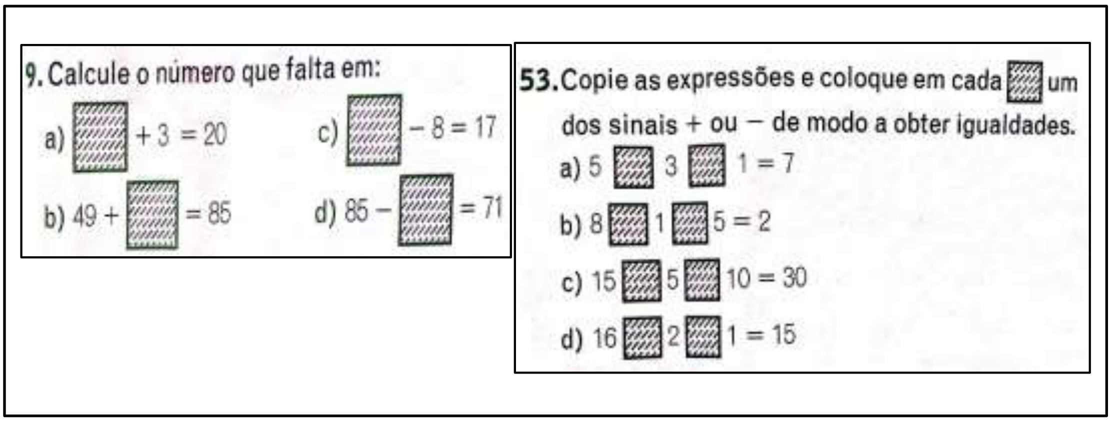
E justificar racionalmente o uso de cada técnica é definido por Chevallard (1999) como um discurso tecnológico, ou *tecnologia*, onde se estabelece as *condições* e *restrições* de uso para uma dada técnica, em determinado contexto.

A técnica *risquinhos* e agrupamento *restringe-se* à pequenas quantidades, não se tornando uma técnica econômica para problemas que envolvem valores maiores e mais de uma relação. O livro didático sugere essa restrição ao mostrar a técnica da decomposição (explicação e parte a) e em seguida a técnica de algoritmo do sistema posicional de numeração decimal (parte b).

O problema (Figura 7) propicia um raciocínio de conexões com saberes já institucionalizados. No caso, existe uma *condição* que o aluno domine a fatoração por agrupamento e a distribuição no quadro valor do lugar do sistema de numeração decimal que é um conteúdo previsto para o 5º. ano e que assumimos foi visto pelo aluno.

Tal como os risquinhos, o pensamento algébrico pode surgir a partir da presença dos *quadrinhos* nas tarefas representando um valor desconhecido ou uma operação necessária, como a atividade destacada na Figura 8.

Figura 8: Problema extraído do Livro Didático *Praticando Matemática – 6º ano*



9. Calcule o número que falta em:

a) $\square + 3 = 20$

b) $49 + \square = 85$

c) $\square - 8 = 17$

d) $85 - \square = 71$

53. Copie as expressões e coloque em cada $\square$ um dos sinais + ou − de modo a obter igualdades.

a) $5 \square 3 \square 1 = 7$

b) $8 \square 1 \square 5 = 2$

c) $15 \square 5 \square 10 = 30$

d) $16 \square 2 \square 1 = 15$

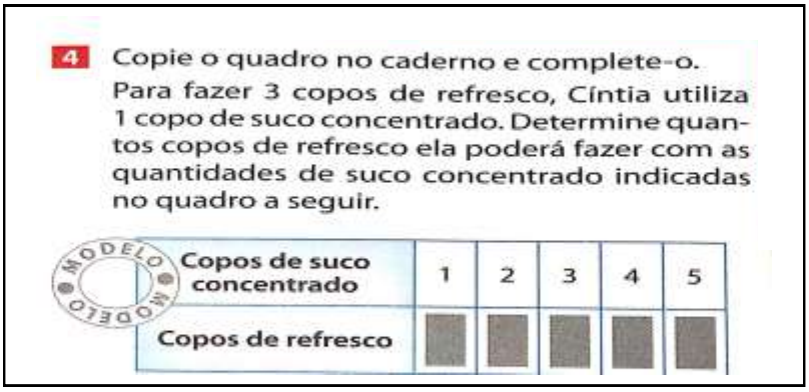
Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015, p.39 e 65, respec.).

E nesse momento o uso dos *ostensivos risquinhos, quadrinhos* e também dos algoritmos devem ser justificadas por um suporte teórico que sustente o seu uso, definido por Chevallard (1991) como sendo a tecnologia da técnica, que por sua vez precisa de uma justificativa, que é chamada de teoria da tecnologia, e que constitui a base final. O que constitui assim o que Bosch e Chevallard (1999) chama de *restrição*, ou seja, para existir em uma instituição, uma técnica deve se apresentar de forma compreensível, legível e justificada. Esta é uma restrição institucional mínima para permitir o controle e assegurar a efetiva conclusão das tarefas. As *condições* e *restrições* de uma tarefa dentro de uma instituição serão discutidas na próxima seção.

Os *ostensivos* têm a função de introduzir uma ideia, um conceito, que são os *não-ostensivos* associados, e então generalizar a partir da evocação desse. No entanto, o uso de *ostensivos* na atividade matemática se limita à introdução e ao processo de construção dos conceitos e sua significação. Quando este recurso não parecer o mais econômico ou não é mais facilmente justificável, ou até mesmo desnecessário, abandona-se então este *ostensivo* em virtude de um pensamento mais abstrato que se faz necessário (KASPARY, 2014). Esse momento, que acontece dentro da sala de aula numa relação direta professor/alunos, entendemos ser um momento propício para estimular o pensamento algébrico.

Surge assim a oportunidade de estimular o desenvolvimento de um pensamento matemático mais avançado, como o de estabelecimento de relações, conexões e de generalização. E então elaboramos uma sequência didática que propõe momentos didáticos e interacionistas, onde o principal objetivo é investigar a construção do conhecimento pelo aluno, vivenciado e conduzindo-os pelos caminhos do pensamento. Os tipos de tarefas presentes nos problemas apresentados na Figuras 7, 8 e 9 têm essa característica.

Figura 9: Problema extraído do Livro didático *Praticando Matemática – 6º ano*



4 Copie o quadro no caderno e complete-o.
Para fazer 3 copos de refresco, Cíntia utiliza 1 copo de suco concentrado. Determine quantos copos de refresco ela poderá fazer com as quantidades de suco concentrado indicadas no quadro a seguir.

Copos de suco concentrado	1	2	3	4	5
Copos de refresco					

Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015, p.54).

O *ostensivo* tabela (Figura 9) auxilia nas operações e relações funcionais, enquanto objetos *não-ostensivos*, devem ser acessados através dos números em proporção. Consideramos que o raciocínio funcional proveniente do raciocínio proporcional tende a se configurar como um alicerce da álgebra e uma base sólida para progressão das noções algébricas.

No entanto, as relações funcionais só existirão no contexto de sala de aula, na investigação diária e detectável pelo contato direto do professor com o aluno. São relações que se expressam muito mais no registro oral. Destaca-se então a importância do professor no fazer aflorar essas relações e, por conseguinte, a formação do pensamento algébrico, objeto que investigamos.

Os PCN (BRASIL, 1998) propõem que o professor tenha um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, através da proposição de atividades que façam o uso de letras como “variáveis nas relações funcionais, como incógnitas na resolução de equações e como símbolos abstratos na dimensão estrutural” (p. 116-122). Nessa mediação é que esses *não-ostensivos* se mostrarão na atividade matemática, e será nosso objeto de análise.

Bosch e Chevallard (1999) afirmam que objetos *não-ostensivos* só podem ser evocados a partir da manipulação adequada de objetos *ostensivos* associados, como uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou um discurso. Para os autores,

> [...] a aplicação de uma técnica se traduz pela *manipulação de ostensivos regulada por não-ostensivos*. Os *ostensivos* constituem a parte perceptível da atividade [...] Por contraste, a presença desse ou daquele não-*ostensivo* em uma prática determinada pode ser apenas induzida ou suposta a partir das manipulações de *ostensivos* institucionalmente associados. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 11, destaque do autor, tradução nossa).

Bosch e Chevellard (1999) usam o termo genérico *manipulação* para designar os diversos usos possíveis dos objetos *ostensivos* pelo sujeito. Assim o objeto equação, como expressão do pensamento algébrico, que aprendemos a manipular por propriedades operatórias, é um objeto não-*ostensivo* que necessita de uma representação para ser evocada, no registro algébrico por exemplo. O problema apresentado na Figura 10 tem essas características.

Figura 10: Problema extraído do livro didático *Praticando Matemática – 6º ano*

18. Hoje, o pai de Douglas tem o dobro de sua idade. Daqui a 6 anos, Douglas terá 30 anos. O pai de Douglas tem hoje:

a) 44 anos.
b) 46 anos.
c) 48 anos.
d) 60 anos.

Fonte: Aldrini; Vasconcelos (2015, p.78).

Uma possível *técnica* para resolver o problema (Figura 10) é equacioná-lo. A idade do pai de Douglas é uma incógnita de uma equação, um objeto não-*ostensivo* que para ser manipulado passa pela capacidade de tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009; SQUALLI, 2003), ou seja, de atribuir significado por uma representação, no registro algébrico por exemplo, à idade de Douglas, que também é desconhecida. Assim, a partir de um *ostensivo* x (incógnita idade de Douglas) e suas manipulações chegaria à solução do problema.

Os objetos *ostensivos* na atividade matemática assumem dois papeis: a função semiótica, dada sua capacidade de produzir significado, e a função instrumental, pela sua capacidade de integrar manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas (BOSCH; CHEVELLARD, 1999). Na análise da atividade matemática, essa dialética *ostensivo*/não-*ostensivo* (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) é geralmente concebida em termos de signos de objetos *não-ostensivos* que constituem o sentido e a significação, perceptíveis por algum órgão dos sentidos. O registro (oral, da escrita, gráfico, gestual, material) é um desses objetos *ostensivos* pois "é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto, externando, assim, o objeto *não-ostensivo* (ideia, noção, conceito) pensado pelo sujeito" (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 469).

Assim, conjecturamos, apoiados teoricamente no que argumentam Bosch e Chevallard (1999), que propor problemas no ensino de Matemática que admitam diferentes soluções, com base em diferentes técnicas que ativam uma pluralidade de registros *ostensivos*, como o oral, escrito, gráfico e gestual, é o caminho à aprendizagem. E nos identificamos com os estudos de Kaspary (2014) que observou em sua pesquisa que a diversidade de *ostensivos* tem papel vital para a aprendizagem matemática, e é através deles que os *não-ostensivos*, como o pensamento algébrico e os conceitos, são construídos.

E debruçando sobre as relações que unem, na atividade humana e na dialética dos objetos *ostensivos* e *não-ostensivos*, é que faremos as análises dos dados obtidos com a aplicação de atividades da sequência didática que propusemos, na sequência deste texto.

2.2.4 A razão de ser do objeto de estudo: *condições* e *restrições*

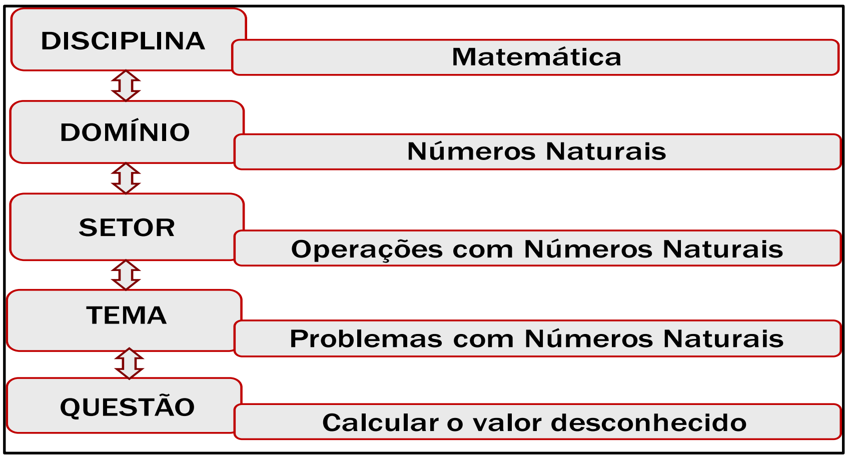
A TAD foi sistematizada a partir da das abordagens da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991), que estuda o processo de passagem do saber de uma instituição para outra, e da ecologia dos saberes que surgiu para questionar os objetos do saber e suas condições de existência.

Enquanto ampliação dessas abordagens a TAD introduziu termos como objeto, pessoa, instituições e relação pessoal ou institucional às análises praxeológicas das organizações matemáticas, já discutidos aqui. E nesse contexto antropológico, a relação institucional com o objeto do conhecimento que vive em determinada instituição constitui o sistema essencial de *condições* e *restrições* sob as quais se forma e evolui a relação pessoal de um indivíduo com o objeto, quando ele se torna sujeito da instituição (CHAACHOUA; BITTAR, 2016). Assim, analisar as *condições* e *restrições* de existência do objeto do saber em estudo, o pensamento algébrico, faz-se necessário.

Faremos assim o delineamento em nossa pesquisa dessa organização matemática, ou seja, o estudo em torno da Matemática quanto às *condições* e *restrições* do nosso objeto do saber. Dentro de uma organização matemática a segmentação de saberes matemáticos em um currículo de estudo em uma instituição é organizada em vários níveis.

A organização matemática que se apresenta no Quadro 3, refere-se a uma praxeologia didática do nosso estudo, visto que implementamos estas ações em uma sala de aula.

Quadro 3: Organização Matemática do estudo



Fonte: os autores, a partir de Chevallard (2002).

A organização matemática do estudo (Quadro 3) nos permitirá explicitar a estrutura curricular do objeto de estudo articulando-o em cada um desses *níveis de determinação matemática* (CHAACHOUA; BITTAR, 2016), fazendo o estudo da *razão de ser* de questões pontuais que comporão a sequência didática e das técnicas empregadas, não apenas nos níveis mais específicos de questão e tema. Chaachoua e Bittar (2016) afirmam que "os tipos de tarefas motivadoras estão nos níveis de determinação superiores: setores e domínios" (p. 7), ou seja, não nas situações mais pontuais, e sim nas situações no nível global.

Os níveis que se encontram abaixo do nível da *disciplina* estão organizados de forma agregada e correspondem a uma organização matemática crescente de maneira imbricada aos elementos das organizações praxeológicas pontual, local, regional e global. Assim, temos:

_uma organização praxeológica pontual no que diz respeito ao *assunto (questão)*, em nossa pesquisa pode-se considerar a praxeologia em torno do tipo de tarefa resolver problemas envolvendo operações com números naturais que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico - organização que responderia à seguinte questão "como resolver um problema desse tipo? ":

_ de uma organização local no que diz respeito ao *tema* pensamento algébrico, e a resolução de diferentes tipos de problemas que favorecem o seu desenvolvimento;

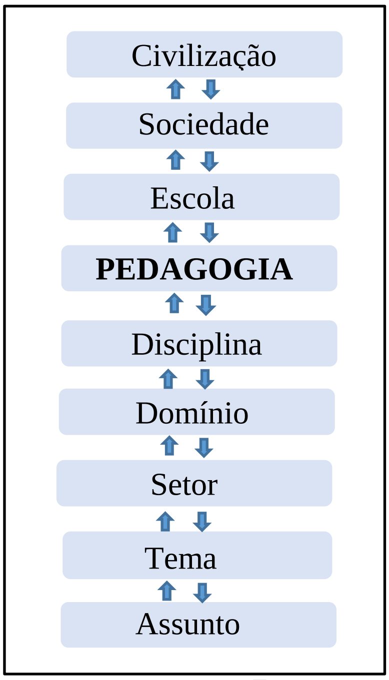
_ de uma organização regional, no que diz respeito, por exemplo, à noção de problemas numéricos que envolve todo um campo da Matemática ensinada no Ensino Fundamental, um *setor*;

_ enfim, de uma organização global que envolve todo o *domínio* de estudo, em nossa pesquisa o ensino da Matemática no nível fundamental.

Tendo em conta a necessidade de acrescentar níveis superiores a esta escala, Chevallard (2002) ampliou a distribuição das *condições* e *restrições* de existência de um objeto do saber em níveis que chama de codeterminação didática (Ver Figura 11), e a define como a relação entre as organizações matemática e didática. Assim situa um determinado saber numa escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade (CHAACHOUA; BITTAR, 2016).

São nove níveis que se inter-relacionam mutuamente, vão desde os níveis genéricos: civilização, sociedade, escola, pedagogia, para os níveis específicos no âmbito da matemática: disciplina, domínio, setor de estudo, tema e assunto, conforme mostra a Figura 11.

Figura 11: Escala dos níveis de Codeterminação Didática



Fonte: os autores, a partir de Chacon (2008, p.73)[26].

---

[26] Chacón (2008) faz um esquema da escala dos níveis de codeterminação didática proposta por Chevallard (2002). Cada nível refere-se a uma realidade e determina a ecologia das organizações matemáticas e didáticas relativas a esse saber. CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le**

A escala de níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002) é uma ferramenta adequada para a categorização das diferentes restrições que regulam a escolaridade. Através deles podemos identificar os parâmetros que regem o Ensino Fundamental e as escolhas que são feitas para as questões que compõem o livro didático. O estudo das *condições* e *restrições* da difusão dos saberes seria, segundo Chevallard (2002), a principal finalidade da Didática da Matemática

Chevallard, na abordagem da TAD, coloca no nível *sociedade* as discussões sobre as *condições* e *restrições* de um dado objeto do saber, que podem ser impostas pelos órgãos superiores que regulamentam o ensino, como ministérios, conselhos ou secretarias de educação. No nosso estudo a discussão se depara no nível *sociedade* com as *condições* e *restrições* que são impostas pelo Ministério da Educação para o ensino de Matemática no nível *escola* de Ensino Fundamental, dentro da *pedagogia* que é traçada para o 6º. Ano.

As características das condições, impedimentos e restrições impostas pelos níveis superiores aos níveis hierarquicamente inferiores pesam sobre as escolhas didáticas no livro didático do 6º. Ano na abordagem de resolução de problemas com números naturais. Apontamos um exemplo simples para cada nível hierárquico no contexto da nossa pesquisa, considerando a Civilização Brasil:

_ Sociedade: há uma expectativa de aprendizagem explicita, de um mínimo que o aluno deve aprender para desenvolver as competências básicas na disciplina (condições), no entanto esbarram com a falta de conhecimentos prévios dos alunos, ou de familiaridade com problemas que tratam o desconhecido, como os problemas algébricos (impedimentos, restrições). O Ministério da Educação representa esta sociedade no nosso estudo;

_ Escola: propõe valorizar as experiências e os conhecimentos prévios dos alunos, problemas que estimulem a construção da sua aprendizagem (condições), no entanto tais problemas devem ser desenvolvidos pelo próprio aluno, realizando tentativas, estabelecendo e testando hipóteses, validando resultados e verificando a sua veracidade (restrições). A escola em nosso estudo é a de Ensino Básico;

---

professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. THÈSE Du Doctorat De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul, 2008.

_ Pedagogia: diz os PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2107) que a aprendizagem matemática deve estar ligada à compreensão e à apreensão de significado aos objetos matemáticos (condição), mas para tanto as atividades devem ser contextualizadas, numa linguagem clara que permita uma leitura e significação dos objetos matemáticos (letras, símbolos, sinais, gráficos, ...) (restrição). No nosso estudo a pedagogia corresponde ao Ensino Fundamental.

2.3 O contexto do desenvolvimento do pensamento algébrico sob o olhar dos PCN e da BNCC no Ensino Fundamental

Aqui apresentamos uma síntese das implicações legais previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o ensino de Matemática para o 3º e 4º. Ciclos do nível Fundamental, especificamente para o 6º. Ano e na unidade temática Álgebra, nosso objeto de estudo. Buscamos também as diretrizes para a formação do pensamento matemático algébrico e encontramos na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, em processo de implantação[27] por ocasião da escrita deste texto, orientações legais que avançaram em relação aos PCN. Tais avanços justificam a sua inserção na nossa discussão, apesar de ainda não ser o documento normativo oficial, principalmente por prever um ensino de álgebra focado na produção de significados e a formação do pensamento algébrico desde os anos iniciais, propostas que aqui defendemos.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), instituição de referência no domínio das tendências curriculares internacionais, coloca que o ensino de Matemática deve explorar aspectos essenciais da álgebra, adequando-os às experiências e capacidades dos alunos de diferentes níveis etários, fazendo uso de representações múltiplas e introduzindo os símbolos algébricos de forma gradual, mas não tardia.

[27] A Base Nacional Comum Curricular - BNCC foi homologada pelo MEC em dezembro/2017 e a Resolução CNE/CP nº 2, de dezembro de 2017 estabelece dois anos para que os currículos das escolas públicas e privadas estejam alinhados aos dispositivos da Base. A BNCC tem prerrogativas de lei e estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Teve sua primeira versão apresentada pelo MEC em 2015 e após consulta pública a especialistas, professores das universidades e gestores das unidades de ensino foi lançada a segunda versão. Após novas consultas o MEC entregou a terceira e última versão e foi aprovada em dezembro de 2017, em votação no CNE - Conselho Nacional de Educação.

No que tange às orientações curriculares brasileiras, os PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2017), a aprendizagem matemática deve estar ligada à compreensão e à apreensão de significado aos objetos matemáticos. E esta é uma função da escola, enquanto ambiente social de divulgação dos saberes e de aprendizagem. Essa apreensão posta pelos parâmetros, em nosso estudo, reporta ao objetivo maior de investigar como o aluno atribui significados aos objetos matemáticos presentes na atividade e conteúdos algébricos. E na busca pelo ensino que fortaleça a significação dos seus objetos a BNCC argumenta que

> [...] a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (6º. ao 9º. Anos) também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares (BRASIL, 2017, p. 296).

Quanto ao ensino que é ministrado nesse nível de escolaridade a BNCC (BRASIL, 2017) indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências, entendida como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores" (p. 8). Inicia-se assim uma discussão social e pedagógica de inserir o aluno num contexto social "do que devem 'saber' (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem 'saber fazer' (considerando a mobilização desses)" (BRASIL, 2017, p. 13).

Um dos objetivos previstos nos PCN (BRASIL, 1998), é o "desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de situações de aprendizagem" (p. 64). E o desenvolvimento do pensamento algébrico, de forma mais ampla e conexa com outras áreas do conhecimento, é o cerne das discussões na unidade temática *Álgebra* na BNCC (BRASIL, 2017). Admitimos então que o pensamento algébrico se desenvolve com o estudo da álgebra, evolui e pode capacitar o aluno no uso da matemática, com mais desenvoltura, na resolução de problemas.

Os PCN preconizam que o estudo da álgebra seja introduzido no bloco de "números e operações" no 3º e 4º. ciclos da Educação Básica (6º. ao 9º. ano do Ensino Fundamental), por meio de atividades que objetivem (BRASIL, 1998, p.72): a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas; a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas; e a construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. No entanto, destacam que é “nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas” (p.50).

Quanto ao ensino de Matemática no 3º e 4º. Ciclos, os PCN (BRASIL, 1998), propõem que o professor tenha um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, através da proposição de atividades que façam uso de letras como “generalização de modelos, como variáveis nas relações funcionais, como incógnitas na resolução de equações e como símbolos abstratos na dimensão estrutural” (p. 116-122).

Especificamente para o 3º. Ciclo (6º. e 7º. Anos), os PCN (BRASIL, 1998) preconizam que sejam desenvolvidas tarefas no sentido de permitir que os estudantes compreendam a noção de variável e reconhecer a expressão algébrica como uma forma de demonstrar relações existentes entre variação de duas grandezas. E indicam o desenvolvimento do “pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem [...] que levem o aluno a expressar generalizações, [...] regularidades e identificar os significados das letras” (p. 64). E deixam para o 4º. Ciclo (8º. e 9º. Anos) a tarefa de “resolver situações-problema por meio de equações e inequações” (p.81) época em que orienta introduzir noções de incógnitas e variáveis.

A BNCC (BRASIL, 2017) avança e prioriza a formação do pensamento matemático, desde a unidade temática Números, quando preconiza a formação do pensamento numérico, e na unidade temática Álgebra que afirma “tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico” (p. 267). E instrui que esse pensamento algébrico deve ser estimulado desde os anos iniciais (1º. ao 5º. Ano) com “as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade” (p. 268), tal como a proposta *Early Algebra* já discutida aqui, e retomados, aprofundados e ampliados nos anos finais (6º. ao 9º. ano) do Ensino Fundamental. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas.

Identificamos na BNCC avanço quanto ao ensino de álgebra, que instrui deve ser voltado para a construção do significado dos objetos algébricos e da linguagem simbólica algébrica (BRASIL, 2017). Para tanto, o documento trata de unidades temáticas, dentre elas a álgebra, que de forma articulada devem orientar a formulação de habilidades que são responsáveis pela formação do pensamento matemático, e este pela construção do conhecimento matemático como um todo.

Pensando o ensino voltado para a significação dos objetos matemáticos e a formação do pensamento algébrico, a BNCC (BRASIL, 2017) traz uma concepção[28] de álgebra escolar voltada para a produção de significados para os conteúdos matemáticos, algébricos ou não, através do desenvolvimento do pensamento algébrico. Identificamos com a álgebra escolar que,

> [...] tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas [...] Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, 2017, p. 268).

Assim, cabe-nos enquanto pesquisadores propor situações em que, cada vez mais, os procedimentos puramente aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolver os problemas, levando os alunos à necessidade de estabelecer outros processos, como o desenvolvimento do pensamento algébrico. E apoiamos nessa indicação, visto que esse é o objetivo que conduz este trabalho

O Quadro 4 traz um recorte das habilidades e competências descritas na BNCC (BRASIL, 2017) para o ensino de Matemática no 6º. Ano, das áreas temáticas *Álgebra*, nosso objeto de estudo, e *Números*, com um recorte do objeto de conhecimento *operações com Números Naturais.* Neste último se deu a nossa investigação da formação do pensamento algébrico, através da resolução de problemas com esses objetos.

[28] Utilizamos o termo Concepção no mesmo sentido descrito por Garnica (2008) como "os 'algos' (crenças, percepções, juízos, experiências prévias, etc.) através dos quais nos julgamos aptos a seguir." (p. 498).

Quadro 4: Recorte das Competências e Habilidades - Matemático do 6º. Ano - BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais	**(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Álgebra	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017, p. 298-301).

Quanto aos objetos do conhecimento que devem ser trabalhados no ensino da unidade temática *Álgebra* no Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017) destaca para o 6º. Ano as propriedades de igualdade e problemas que tratam de partição. E deixam para o 7º. Ano a linguagem algébrica das letras enquanto variável ou incógnitas, considerando as expressões algébricas, proporcionalidade e equações. Nesse entendimento identificamos um limiar entre a álgebra como é vista no 6º. Ano, numa visão mais aritmetizada, e a álgebra do 7º. Ano, dotada de mais simbologia, e então situamos a nossa pesquisa no 6º. Ano conjecturando que inserir o aluno no contexto de situações que são limiares entre a aritmética e a álgebra pode contribuir para a aprendizagem algébrica futura.

Corroboram nesse sentido os estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Da Rocha Falcão (1993), Lins Lessa e Da Rocha Falcão (2005), Lins e Gimenez (1997) e Carraher (2007) que defendem a introdução da álgebra o quanto antes visando a formação do pensamento algébrico, a superação dos problemas cognitivos decorrentes da ruptura epistemológica[29] entre a aritmética e a álgebra e a produção de significados para os conceitos algébricos.

E os PCN (BRASIL, 1998) mencionam que uma pré-álgebra deve ser introduzida desde os anos iniciais para que o aluno vá se familiarizando com a sintaxe própria da álgebra, como as fórmulas, as equações, os símbolos, as variáveis e as incógnitas. (BRASIL, 1988, p. 50-51). Trata-se de uma indicação que não aparece de forma explícita nos livros didáticos, ou nos manuais do professor. Fica a cargo do professor essa extensão e a responsabilidade pela inserção de momentos didáticos que levem à formação do pensamento algébrico e não apenas prepare o aluno para a álgebra formal.

Na nossa problemática falamos de amenizar rupturas na passagem da aritmética à álgebra a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico, mas não de uma antecipação algébrica. Assim, a visão de uma pré-álgebra vai de encontro ao nosso entendimento que a álgebra deve ser trabalhada por todo o Ensino Fundamental. E nos anos iniciais e no e 6º.ano não seja uma preparação para a álgebra formal, como prevê os PCN (BRASIL, 1998), mas como um ensino voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico, capaz de oferecer noções que compõem a base da álgebra, e assim, o seu entendimento. Nesse sentido corrobora com nosso estudo as ideias vindas na BNCC (BRASIL, 2017).

E dessa forma trouxemos à discussão a BNCC por identificarmos avanços em relação aos PCN, diante da nossa proposta que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes no Ensino Fundamental. Esta tem como premissa contribuir para a aprendizagem matemática, e não necessariamente a aprendizagem de uma linguagem estritamente algébrica de letras e símbolos, mas da matemática que envolva o pensar, como na resolução de problemas. No entanto, procedemos a análise do livro didático em uso, dos manuais e nos referimos ao currículo, por época da construção dessa tese (2015-

---

[29] Termo utilizado por Da Rocha Falcão (1993), Filloy e Rojano (1984) e Vergnaud (1990) ao se referirem à passagem da aritmética à Álgebra, visto que os alunos passam de uma etapa de conhecimento matemático à outra, tendo que se apropriar de novos objetos matemáticos, dominá-los e reformular as suas concepções.

2019), apoiados nos documentos curriculares legais em vigor que são os PCN (BRASIL, 1998).

Pensar o ensino da Matemática inclui, a partir de uma realidade observada e vivida em nossa prática, romper os entraves com a aprendizagem da álgebra. Estes entraves podem surgir com as rupturas, argumenta Da Rocha Falcão (1993), e que apresentamos no Capítulo I, ao se referir às mudanças curriculares e aos primeiros contatos com as letras pelos alunos acostumados com a aritmética, na separação que é feita no ensino da aritmética e da álgebra. Tais rupturas podem ser decorrentes da compartimentalização do ensino da matemática, quando o aluno acostumado à aritmetização dos problemas se depara com a algebrização, ou com a falta de entendimento de uma sintaxe própria que a álgebra traz consigo.

Nesse sentido, e pensado amenizar tais rupturas, nos posicionamos por uma álgebra que é trabalhada ao logo do Ensino Fundamental, como propõe o *Early Algebra*, que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico, como preconiza a BNCC, capaz de preparar o aluno para pensar a Matemática e significá-la não só no contexto da resolução de problemas matemáticos, como em outros contextos, significando-os.

É consenso que o objetivo do ensino é desvendar para o aluno os caminhos da aprendizagem. Privilegiar no ensino o que lhes é útil, significativo é essencial na busca dessa aprendizagem (ALMOULOUD, 2007). Um ensino de álgebra centrado na utilização de simbologia desprovida de significado, com ênfase na aplicação de regras e técnicas visando a manipulação simbólica e com elevado grau de abstração, não contribui para construção do saber. Além disso, frequentemente a álgebra constituiu um domínio à parte, isolado dos outros temas do currículo de Matemática, e isolado, também, dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer valor. Como afirma Kaput (1999), “a álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos” (p. 2).

Nesse entendimento de estabelecer conexões com o mundo real, a BNCC (BRASIL, 2017) avança e trata de dimensões que devem ser seguidas no ensino e aprendizagem da álgebra e determina que um dos principais objetivos para o seu ensino passa a ser o de desenvolver o pensamento algébrico, um pensamento de relações e conexões.

Estabelecer relações entre os conceitos, aproximando-os de outros conceitos, outras áreas e conhecimento, e não somente dominá-los num único campo do conhecimento é o que entendemos por formação de um raciocínio específico a uma dada área do saber. E assim surgiu a nossa discussão sobre o pensamento matemático, essencial à aprendizagem matemática e que deve ser construído a partir das relações conceituais e epistemológicas. Cabe discutir, a partir dessa percepção, se o sucesso dos alunos com a aprendizagem da álgebra está condicionado apenas ao seu ensino e às práticas docentes por considerarmos a formação do pensamento algébrico fator indispensável à construção do conhecimento matemático generalizado. Enquanto questão de pesquisa que move esta tese, cabe-nos inferir também que esses resultados podem estar associados à falta de estratégias e atividades de ensino que favoreçam a formação do pensamento algébrico.

Visando essas conexões e relações entre saberes e vivências dos alunos, e garantir que relacionem observações empíricas do mundo real a representações, a BNCC (BRASIL, 2017) preconiza que o ensino da Matemática em toda educação básica deve acontecer de forma articulada com as unidades temáticas da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade.

Conforme salienta Kieran (2007), na prática da educação algébrica, o professor pode levar os alunos a dar visibilidade às estruturas matemáticas subjacentes à situação em estudo, promovendo o uso consciente de modos de representação favoráveis à generalização, à construção do conhecimento em que a linguagem possa desempenhar o seu papel de expressão e de comunicação do pensamento. E dessa forma estará promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico para além do ambiente escolar, significativa para o aluno.

Os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que “aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado” (p. 57) e inserem a álgebra em diversos campos do conhecimento afirmando que o seu estudo “constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização”. (BRASIL, 1988, p.115). Assim, a aprendizagem precisa estar centrada na construção de significados e na formação do pensamento algébrico, que possibilitem ao aluno a percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com os que variam, de poder expressar-se algebricamente e então generalizar o conhecimento.

De acordo com os PCN:

> [...] para que a aprendizagem possa ser significativa é preciso que os conteúdos sejam analisados e abordados de modo a formarem uma rede de significados. Se a premissa de que compreender é apreender o significado, e de que para apreender o significado de algum objeto ou acontecimento é preciso vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos, é possível dizer a idéia[30] de conhecer assemelha-se a idéia de tecer uma teia (BRASIL, 1998, p. 75).

São atuais e contínuas as pesquisas sobre a produção de significados (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; CARRAHER; SCHLIEMANN; SCHWARTZ, 2008; LINS, 2012; CAMPOS; MAGINA, 2015, dentre outras) para os conteúdos algébricos e a aprendizagem matemática. De forma geral estas pesquisas focam a produção de significados, pelo aluno, para o objeto matemático, fazendo uso de diversos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003), discutindo as especificidades da aprendizagem e do ensino da Matemática ligada aos aspectos semióticos.

A hipótese de que uma abordagem algebrizada da aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da álgebra em anos posteriores, nos coloca frente aos desafios com a sua aprendizagem e significação.

Nesse sentido defendemos a inclusão do pensamento algébrico no currículo de matemática, pelo seu caráter potencializador da aprendizagem e de dar sentido aos objetos matemáticos, a partir das tarefas que são trabalhadas em sala de aula e do enfoque que é dado pelo professor.

E para descrever as tarefas e ações que desenvolvemos em sala de aula para a produção dos dados de pesquisa, dentro da Sequência Didática que propusemos, traremos a seguir o percurso metodológico do nosso estudo.

[30] À época, 1988, a palavra ideia era grafada com acento, anterior ao Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa de 1990.

CAPÍTULO III:

PERCURSO METODOLÓGICO

3.1 Introdução

Este capítulo traz o percurso teórico-metodológico para a construção do estudo que culminou nesta tese que teve como objetivo central *investigar quais contribuições, condições* e *restrições de uma Sequência Didática – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º. Ano do Ensino Fundamental e com atividades de resolução de problemas – para o desenvolvimento do pensamento algébrico.*

Reiterando, assumimos pensamento algébrico como aquele que se caracteriza pelas conexões e relações que são estabelecidas entre os dados de um problema no processo de construção das suas possíveis soluções. E o pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009; SQUALLI, 2003), nesse estabelecimento de relações e conexões entre as ideias, num contínuo processo de produção de significados para os símbolos e objetos da álgebra, para os problemas algébricos.

E então elaboramos uma sequência didática, segundo os princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), com o objetivo de conhecer, interpretar e analisar as estratégias e o nível de pensamento algébrico que alunos mobilizaram ao se depararem com situações-problemas intencionalmente elaboradas. Para tanto fizemos *a priori* uma análise didática das tarefas que a integram e dos momentos didáticos que a constituíram.

Metodologicamente, a TAD nos deu aporte teórico para as análises de *tarefas*, suas implicações, *condições* e *restrições* para a aprendizagem matemática, especificamente quanto aos objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* no processo de construção dos conceitos e sua significação e assim para o desenvolvimento do pensamento algébrico, objeto de investigação deste estudo.

Traremos ainda neste capítulo o universo do estudo, destacando sua natureza numa discussão teórico-metodológica, traçando o desenho do experimento. Na sequência, descreveremos o estudo e seus participantes, a instituição e os instrumentos, como também pressupostos da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa que nos inspirou.

Denominamos o capítulo de *Percurso Metodológico* por entender que a metodologia da pesquisa é o percurso a ser realizado pelo pesquisador no processo de produção de conhecimentos em relação ao objeto a ser estudado. É mais do que um conjunto de processos e procedimentos que se restringe à utilização das técnicas e instrumentos de pesquisa, é também composto por reflexões teóricas que são de fundamental importância.

Nossa pesquisa teve início a partir da submissão do projeto inicial ao Conselho de Ética na Pesquisa (CEP) da Universidade Federal da Bahia, seguindo pelos ajustes que foram solicitados por esse comitê e foi tomando corpo pelas leituras e pelas experimentações realizadas. O parecer final do CEP (nº. 2.121.524, de 14/07/2017) foi favorável à pesquisa (APROVADA), que envolve seres humanos, no caso os alunos e a professora das turmas participantes. Partimos então para o delineamento metodológico de ação, ou seja, a elaboração dos instrumentos das experimentações, a partir dos objetivos traçados.

3.2 Fundamentos Teóricos e Metodológicos

3.2.1 Uma Engenharia Didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Em busca de uma modalidade de pesquisa adequada e consistente com a nossa proposta de estudo, identificamos a abordagem metodológica da Engenharia Didática idealizada primeiramente por Yves Chevallard, Guy Brousseau e Régine Douady na década de 1980 e depois sintetizada por Michàle Artigue, quando publica um artigo (ARTIGUE, 1990) na Recherches em Didactiques de Mathématiques[31] (BITTAR, 2017).

---

[31]Revista francesa de grande circulação entre pesquisadores da Educação Matemática. Uma versão em português desse artigo pode ser encontrada em Artigue (1996).

A Engenharia Didática é uma metodologia de investigação operacionalizada preferencialmente pelo método qualitativo e Artigue (1998, apud ALMOULOUD, 2012) a caracteriza como:

> (...) um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, permitindo uma validação interna a partir da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* (p. 26).

E ainda segundo Artigue (1988, apud ALMOULOUD, 2012), a Engenharia Didática foi apresentada como um método capaz de suscitar fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula, através da construção, realização, observação e análise de sessões de ensino.

A opção pela Engenharia Didática como metodologia se deu por “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático” (ALMOULOUD, 2007, p. 171), como o nosso estudo. Nessa conjuntura, existe a possibilidade de articulação entre conhecimento didático e conhecimento matemático, fazendo da prática docente também uma prática de investigação, permitindo que as experiências vivenciadas em sala de aula se tornem “produtos que podem ser reproduzidos para o ensino de Matemática” (SILVA, 2015, p. 18).

Adotamos em nosso estudo fases sequenciadas e interligadas da Engenharia Didática descritas por Artigue (1996) que compreendem *análises, experimentações* e *validações* das ações didáticas, descritas nos parágrafos seguintes, relacionando-as com a nossa pesquisa.

A primeira fase, a *análise prévia*, compreende a análise epistemológica dos conteúdos constantes no plano de ensino; o ensino habitual e seus efeitos/consequências; a compreensão dos alunos e das dificuldades e obstáculos que pontuam seu desenvolvimento; o campo de sujeição no qual se estabelecerá a realização didática e os objetivos da pesquisa (ARTIGUE, 1996).

Foi realizada uma análise epistemológica *prévia* do objeto matemático pensamento algébrico, análise institucional do livro didático, dos documentos legais que regem o ensino de Matemática no 6º. Ano e uma análise didática de pesquisas correlatas. Esta última compreendeu uma revisão de literatura, situando o problema de pesquisa num contexto maior, para identificar os possíveis *obstáculos epistemológicos* a serem enfrentados na formação do pensamento algébrico e justificar a sua inserção no ensino de Matemática do 6º. Ano.

A segunda fase, *concepção e análise a priori,* é quando o investigador decide o modo de agir sobre uma determinada quantidade de variáveis pertinentes para o problema estudado (ARTIGUE, 1996).

Ainda segundo Artigue (1996), o objetivo da *análise a priori* é:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Aqui a nossa hipótese de estudo de observação dos comportamentos dos alunos frente a uma tarefa proposta foi explicitada, a sequência didática concebida e a fundamentação teórica testada quanto a validade para respondê-la. E então foram pensadas as variáveis didáticas e como elas se relacionam com a hipótese de dificuldade na aprendizagem matemática e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Artigue (1996) indica a distinção de dois tipos de variáveis de comando: “1) as variáveis globais que dizem respeito da organização geral da engenharia; e 2) as variáveis locais, que dizem respeito a uma sessão ou fase da engenharia” (p. 202). Nesse sentido, a nossa variável global parte do questionamento como se dá o desempenho do aluno diante de cada objeto matemático, *ostensivos* ou *não-ostensivos*, identificados nas respostas às atividades de experimentação. E as nossas variáveis locais de estudo, *a priori*, são: (1) Apresentação dos problemas: linguagem natural ou icônica; (2) Tipo de problema quanto ao objeto matemático: sequência, equação, função ou aritmético/algébrico; (3) Nível de dificuldade dos problemas: simples ou sofisticado.

A terceira fase, a *experimentação*, conforme delimita Artigue (1996), é constituída pelo período de aplicação das atividades planejadas. Em um segundo momento, esta fase baseia-se na análise do conjunto dos dados obtidos na experimentação durante as sessões de ensino, assim como produções dentro ou fora de sala. Dessa maneira, a experimentação pressupõe: explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa; a determinação da população de alunos que participarão da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação dos instrumentos de pesquisa; o registro de observações feitas na experimentação (ARTIGUE, 1996).

A experimentação do nosso estudo se deu em três fases, com aplicação de atividades de resolução de problemas, em três salas de aula, tal como ocorre no ensino regular. Observamos *in loco* as produções dos alunos com o objetivo de identificar os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico (ALMEIDA, 2016), tal como objetivamos para este estudo, discutindo a proposta e fazendo ajustes necessários nos instrumentos a partir do que foi observado.

Na *análise a posteriori e validação*, quarta fase, consideram-se todas as informações obtidas na investigação por meio dos questionários, dos testes, das anotações do diário de campo, das filmagens, das produções dos alunos ou outros instrumentos que forem pertinentes.

Realizamos então a análise dos dados obtidos com as etapas de experimentação, na dinâmica observada na aplicação da sequência, comparando os resultados da análise *a priori* com a análise *a posteriori*, interpretamos teoricamente os fenômenos observados e produzidos com os instrumentos utilizados, e por fim, a validação teórica interna dos dados observados.

Segundo Bittar (2017), no processo de *validação*, deve-se fazer uma "análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas" (p. 106) e validando-os a partir das análises feitas inicialmente e durante todo o desenvolvimento da sequência didática. Trata-se de uma validação interna das hipóteses de investigação, uma vez que se analisa se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema.

A flexibilidade quanto às atividades, sua elaboração e revisão, é uma característica da Engenharia Didática que facilita o trabalho do pesquisador diante de fatores intervenientes. Acrescenta Bittar (2017) que,

> A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa e, ela não é fechada, como afirmam algumas críticas a essa metodologia. Ao contrário, ela propõe uma forma de preparar, aplicar e analisar sequências didáticas. Seu objetivo é promover a construção do conhecimento pelo aluno, com papel importante atribuído ao professor, e para que isso aconteça, ela é aberta. Essa metodologia propõe analisar o que ocorre ao longo do processo de ensino: conforme a situação vai

> se desenvolvendo, em sala de aula, o pesquisador redireciona, apresenta alternativas (p. 107).

Nesse sentido propomos para este estudo uma sequência didática que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da resolução de problemas, observados nas etapas de experimentação. Todas esses termos e etapas serão descritos em seus pormenores na sequência deste capítulo.

3.2.2 A Sequência Didática

Diante dos objetivos traçados construímos uma sequência didática embasada nos pressupostas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) visando o desenvolvimento do pensamento algébrico, aplicada em três turmas de 6º. Ano do Ensino Fundamental. As atividades da sequência foram elaboradas a partir de uma revisão sistemática de literatura em estudos correlatos e da análise das atividades do livro didático em uso, *Praticando Matemática – 6º. Ano*, e do manual do professor. A análise do livro didático permitiu identificar as praxeologias matemática e didática nos níveis de codeterminação didática inferior (assunto, tema, setor, domínio e disciplina) com seus respectivos tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria.

Assumimos aqui sequência didática como uma ação de ensino devidamente acompanhada, com observação dos alunos participantes, um esquema experimental de resolução de problemas, desenvolvidos nas sessões de *experimentação* e elaborados a partir de um estudo *preliminar*, observando os objetivos específicos de cada problema.

Realizamos uma análise matemática das atividades propostas na sequência didática das possíveis resoluções, das formas de controle e os resultados esperados, e também uma análise didática quanto às variáveis, *condições* e *restrições* e as competências relativas a cada atividade. Tais análises encontram-se no capítulo seguinte, o das análises.

No âmbito da TAD encontramos referência às situações didáticas. Chevallard (1991) afirma que uma situação didática existe em toda instituição social onde há uma intenção de que o outro aprenda. Assim, um *objeto do saber*, como a álgebra, pode existir em várias *instituições* e com funções distintas, numa dada situação didática. É o que propomos, uma sequência didática composta de situações didáticas que têm como objetivo estimular o pensamento algébrico do aluno.

Em suma, a partir dos princípios metodológicos da Engenharia Didática, fizemos as *análises preliminares* dos problemas propostos, evidenciando os saberes e os conhecimentos matemáticos relacionados com cada um deles. Realizamos as *experimentações* dessas atividades em sala de aula com os alunos participantes da pesquisa e suas *análises* serviram para a *validação* da proposta. Analisamos também os documentos oficiais que regem o ensino de Matemática no nível fundamental, especificamente o 6º. Ano, buscando *validar* a nossa proposta didática para o ensino de operações com números naturais através de problemas que despertem no aluno o pensamento algébrico através da resolução de problemas.

3.2.3 O pensamento algébrico e a resolução de problemas

Lins (1992) destaca que é uma característica do pensamento algébrico que as operações aritméticas se tornem objetos, ao mesmo tempo que são usadas como ferramentas. Assim, o nosso objeto de estudo é o pensamento algébrico que se encontra dentro do domínio da Álgebra Elementar, aquela que é estudada na escola nos níveis fundamental e médio.

No entanto, para investigarmos o pensamento algébrico, elencamos o conteúdo *Números Naturais e Operações* para elaborar as atividades de experimentação da sequência didática. Trata-se do conteúdo previsto no Plano Pedagógico da Escola para o 6º. Ano, que por questões éticas não podíamos distanciar. O que também não nos distanciou do objeto de estudo elencado, uma vez que os estudos empíricos que apresentamos nos mostrou que a resolução de problemas com números naturais é um campo propício e oportuno para introduzir noções de álgebra e mais especificamente o raciocínio matemático de pensar quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas, significando-as, ou seja, o pensamento algébrico.

Primar por atividades de resolução de problemas em linguagem natural foi uma estratégia adotada por nós que ressalta a importância do papel do professor em sala de aula. Nos aporta a pesquisa de Blanton e Kaput (2008) que identificaram que a transformação das tarefas típicas da aula de Matemática em problemas em linguagem natural, enquanto uma ação docente, é um dos passos que os professores têm de percorrer quando interessados em promover o pensamento algébrico nos seus alunos. Os autores recomendam ainda que os problemas aritméticos passem por um processo de algebrização, ou seja, que seja realizada a sua *conversão* (DUVAL, 2003) enquanto problemas aritméticos de resposta única em problemas que ofereçam oportunidades de construção de regularidades, conjecturas, generalizações, justificação e explicitação.

Kieran (2007) também sublinha a importância das tarefas do tipo resolução de problemas em articulação com as questões que o professor propõe na sua exploração, pois estas conduzem às "sequências estruturadas de operações que focam a atenção dos alunos em aspectos cruciais da forma e da sua generalização" (p. 22). Assim, as tarefas de natureza problemática são particularmente propícias ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois convidam ao estabelecimento de propriedades gerais.

3.2.4 A natureza da pesquisa

Quanto à natureza trata-se de uma pesquisa qualitativa, quanto ao seu método de análise dos dados, uma vez que se dedica à análise do processo, com os participantes em seu ambiente natural e os dados descritos e analisados intuitivamente, em consonância com os estudos de Creswell (2013) e Bogdan e Biklen (1994).

Espera-se resultados qualitativos que não necessariamente se tornarão um produto educacional, mas permitirão a compreensão dos efeitos causados pelas práticas desenvolvidas nas etapas da sequência didática.

As pesquisas, tanto qualitativas quanto quantitativas, fundamentam-se em pressupostos filosóficos que representam "como" o pesquisador irá aprender e "o que" ele irá aprender com o projeto. A dimensão epistemológica relaciona-se ao conhecimento e como ele pode ser obtido; na nossa pesquisa, pela perspectiva interpretativista (SCHWANDT, 2006; CRESWELL, 2013), esse conhecimento é relativo, subjetivo e só pode ser entendido do ponto de vista dos indivíduos que estão diretamente envolvidos, no caso pesquisadores e pesquisados, pela interpretação dos fenômenos.

Sendo o objetivo deste estudo conhecer o desempenho dos alunos com recurso à sequência didática com atividades de resolução de problemas, esta centra-se na atividade humana enquanto experiência social e na produção de significados a esses problemas. Pretende-se assim conhecer a realidade tal como ela é vista pelos atores que intervêm diretamente, no caso, os alunos participantes. Segundo Bogdan e Biklen (1994), as diversas formas de interpretar as experiências são acessíveis aos investigadores através da sua interação com os pesquisados quando buscam compreender o pensamento subjetivo destes. Assim, enquanto investigadores, buscamos interpretar as ações dos participantes e construir os dados para as nossas análises.

A produção dos dados empíricos que oferecem interesse às nossas análises se deu a partir das ações dos participantes no processo, que primam pelos significados dados às ações (BOGDAN; BIKLEN, 1994), em consonância com os conhecimentos implícitos na atividade.

Como o objetivo da nossa investigação é de descrever e interpretar os resultados obtidos com a aplicação das atividades de experimentação, especificamente as relações estabelecidas pelos alunos entre problemas numéricos e o pensamento algébrico, associamo-la a uma pesquisa descritiva com aval de Fiorentini (2012, p. 70), ao afirmar que "uma pesquisa é considerada descritiva quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema". Corroboram as visões de Rudio (2001, p. 56) que "a pesquisa descritiva está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los", visto que nosso objetivo investigativo vai além de descrever tais fenômenos, e de Bogdan e Biklen (1994, p. 48) que "a pesquisa (qualitativa) prioriza procedimentos descritivos" e, portanto, subjetivos, como é o pensamento.

A natureza qualitativa da construção dos dados, tal como propusemos, centra o processo cognitivo no sujeito, valoriza os aspectos subjetivos do comportamento humano, as suas experiências e os significados atribuídos às mesmas. E enquanto pesquisadores assumiremos a interpretação dos fenômenos observados no contexto estudado.

Para Bogdan e Biklen (1994), o fato de se pretender recolher dados no ambiente natural em que as ações ocorrem, descrever as situações vividas pelos participantes e interpretar os significados que estes lhes atribuem, justifica a realização de uma abordagem qualitativa. No entanto, classificá-la como qualitativa não descarta a possibilidade de olharmos dados quantitativos (numéricos) para as nossas análises, em buscam dos que eles dizem. São dados ricos em pormenores descritivos das ações dos participantes, dos locais e das conversas, cujo tratamento estatístico seria mais complexo.

Imprimimos também a essa tese um caráter de pesquisa qualitativa e documental, ao se analisar documentos como o livro didático. E por se tratar de uma experiência científico-didática, com alunos do Ensino Fundamental, caracteriza-se também uma abordagem metodológica empirista (BERNSTEIN, 2000), por considerarmos que os registros das observações realizadas na aplicação das atividades são dados empíricos, ou seja, provem de uma fonte direta, a aplicação de testes, mas que, apoiados numa teoria prévia, serão validados.

Como pesquisadores assumiremos hipóteses *a priori* como também a postura de nos colocar na transitividade entre abordagens teóricas da didática e as observadas na pesquisa, com foco na compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos, colocando em suspensão os saberes já construídos, buscando descrever o processo de significação dos conceitos algébricos, tanto no ensino como na aprendizagem. E, através das interações, construir conceitos e chegar ao seu entendimento.

3.2.5 O estudo: universo, participantes e instrumentos de pesquisa

Como universo de pesquisa temos uma escola da rede pública estadual da Bahia, de porte médio, que atende nos turnos matutino e vespertino. É uma escola localizada num bairro de classe média, na cidade de Vitória da Conquista, mas com uma clientela oriunda dos bairros populares que o circundam. Oferece as modalidades de Ensino Fundamental (anos finais) e Médio, com um total com 1.592 alunos, sendo 952 no turno matutino e 640 no turno vespertino (dados do ano de 2018, mesmo ano que foi realizada a pesquisa). A escolha desta escola como instituição social de pesquisa se justifica por atender aos requisitos do universo do nosso estudo e pelo fácil acesso, visto que a pesquisadora pertence ao seu quadro docente e pela disponibilidade da gestora e do quadro docente em nos receber. Além disso, a escola conta com uma quantidade ideal de turmas do 6º. Ano disponíveis para a nossa pesquisa.

Na exposição dos nossos dados, seguimos as indicações éticas e preservaremos o nome da escola, dos alunos e todo e qualquer fato que venha revelar a identificar os sujeitos envolvidos. O termo de consentimento da direção da escola foi assinado pelas partes e enviados ao Comitê. Os termos de consentimento e livre esclarecido (TCLE) dos responsáveis pelos alunos foram firmados apenas com os grupos selecionados que participaram efetivamente da pesquisa.

A pesquisa teve como participantes, além da pesquisadora, os alunos e a professora de Matemática de três turmas do 6º. Ano do turno matutino: Turma A, com 34 alunos; Turma B com 39 alunos; e Turma C com 38 alunos matriculados; com uma média de 30 alunos por aula durante as nossas sessões de experimentação. Todos esses alunos eram menores, pertenciam à faixa etária de 11 a 15 anos, e se dividiam quase igualitariamente entre os gêneros masculino e feminino.

Escolhemos três turmas por conta da possível evasão e infrequência às aulas, o que poderia causar o esvaziamento do nosso quantitativo de dados para as análises ao final da aplicação da pesquisa. A escolha foi aleatória, mas optamos pelo turno matutino por ter maior quantidade de alunos frequentes, em média 35 alunos, enquanto que no vespertino têm turmas com até 15 alunos. Além da regularidade na frequência existe uma menor evasão no turno matutino, segundo informações da gestora escolar, conforme dados do censo escolar nos últimos anos.

Foram dez encontros em cada turma, que ocorreram na segunda unidade letiva, compreendida entre os meses de maio a outubro de 2018.

A professora de Matemática das turmas participantes é licenciada em Matemática, leciona a vinte e seis anos nos níveis Fundamental e Médio, na mesma escola, e estava em sala de aula aguardando a sua aposentadoria que se deu logo após a pesquisa. A sua participação foi indireta, uma vez que não observamos suas aulas e se fez presente às sessões de experimentação da pesquisa, no entanto sem participação ativa.

A pesquisa teve como instrumentos testes diagnósticos escritos aplicados individualmente aos alunos, um em cada fase de experimentação da sequência didática, entrevistas orais que foram gravadas em dados de voz e transcritas ou comentadas nas análises dos nossos dados. Além desses instrumentos, utilizamos o livro didático como meio de consulta e aporte às dúvidas.

O critério de escolha do livro didático para as análises e elaboração dos testes foi a adoção pela escola participante. Analisamos o livro do 6º. Ano *Praticando Matemática* (ALDRINI; VASCONCELOS, 2015) adotado pela escola e que faz parte do Plano Nacional de Livro Didático (PNLD) no triênio 2015-2018. Folheamo-lo nas páginas referentes ao conteúdo Operações com Números Naturais – Unidade 2: Adição e

Subtração de Números Naturais e Unidade 3: Multiplicação e Divisão de Números Naturais em busca de problemas que atendessem aos nossos objetivos.

3.3 A sequência didática: experimentações

A sequência didática que propomos consta de oito momentos distintos distribuídos em onze encontros, assim denominados o tempo de uma hora-aula com duração de cinquenta minutos. Esses encontros se deram em dias diferentes em cada uma das três turmas devido à distribuição de carga horária.

Os momentos foram denominados de acordo com as atividades a serem realizadas e os objetivos traçados na elaboração da sequência didática.

O primeiro momento denominamos *Apresentação* e foi reservado para um diálogo com os alunos, que contou com a presença da professora, onde informamos sobre as suas participações no projeto cujo fim seria a produção de uma tese. Informamos-lhes sobre o direito de participar, ou não, e a condição coletiva de produção do conhecimento, onde estariam presentes na sala de aula, por um período determinado, a professora, a pesquisadora e eles. Em seguida foi explicado como seria realizada a pesquisa, sua relevância, seus objetivos e sua estrutura e a relação entre eles e a professora pesquisadora, assim como a responsabilidade de cada um na pesquisa.

Ainda nesse encontro realizamos a leitura e explicação do TCLE e solicitamos que os alunos levassem aos responsáveis para que estes analisassem e assinassem, caso concordassem com a participação do menor sob sua responsabilidade na pesquisa.

Ao final, abrimos espaço para que cada aluno falasse do seu sentimento em relação às aulas de Matemática e suas principais dificuldades, assim como sobre as expectativas com a pesquisa e a presença de uma pesquisadora em sala. Mostraram-se receptivos e curiosos, salvos alguns que se preocuparam com a quantidade de tarefas que teriam que responder, ou que não se manifestaram.

As fases seguintes, exceto o último encontro reservado à avaliação da proposta e da participação da pesquisadora em sala, são descritas como *experimentações*, seguidas das avaliações destas. Compreendem do segundo ao sétimo momentos da sequência e são fases diagnósticas de obtenção de dados para a pesquisa e assim responder às nossas indagações iniciais.

3.3.1 Desenho do Experimento

Quanto à sistemática de aplicação da sequência didática, sintetizamos no Quadro 5 a nossa pesquisa. As atividades foram aplicadas pela pesquisadora e acompanhada pela professora regente nas três turmas participantes (TA, TB e TC).

Quadro 5: Desenho do Experimento

ATIVIDADE	DURAÇÃO/ PREVISÃO	DESCRIÇÃO/OBJETIVOS DA ATIVIDADE
Apresentação da pesquisa	1 encontro Junho/2018	Apresentação da pesquisa e dos seus objetivos, dos termos legais e da função de cada um dos participantes na pesquisa; Entrega e explicação do TCLE para os alunos menores levarem aos responsáveis para assinarem
Experimentação: 1ª. sessão	2 encontros Junho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, trabalhando atividades intencionalmente elaborada para verificar o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Avaliação da 1ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 1ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos aos alunos quanto às dificuldades encontradas; Esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos utilizados por eles nas resoluções.
Experimentação: 2ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 2ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 2ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos aos alunos quanto às dificuldades encontradas; Esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos utilizados por eles nas resoluções.
Experimentação: 3ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 3ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 3ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos aos alunos quanto às dificuldades encontradas; Esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos utilizados por eles nas resoluções.
Encerramento	1 encontro Agosto/2018	Encerramento com discussão sobre a pesquisa e a participação da pesquisadora na sala de aula e avaliação das atividades desenvolvidas.

Fonte: os autores (2018).

Por se tratar de um planejamento flexível e suscetível de mudanças, os fatores intermitentes à essa sequência didática serão explanados e analisados ao final desse texto, após as análises dos resultados.

Os protocolos gerados com a aplicação dos testes e entrevistas foram organizados de forma a possibilitar a análise qualitativa *a posteriori*, que será descrita no capítulo das Análises dos Resultados. Detalharemos a seguir o processo das entrevistas.

3.3.2 As entrevistas e as observações

As entrevistas tiveram como objetivo esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos de resolução dos problemas registrados em meio escrito pelos alunos nas atividades de experimentação.

O uso de entrevistas, além dos instrumentos escritos, justifica-se pela necessidade de dispormos de mais um tipo de registro, o oral. Na perspectiva da TAD, já discutida no capítulo teórico desta tese, os conceitos só são construídos a partir da manipulação de objetos *ostensivos*, que são signos dotados de significado e sentido, caracterizados, segundo Bosch e Chevallard (1999), pelo registro oral, da escrita, gráfico, gestual ou material. Registro é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto, externando, assim, o objeto *não-ostensivo* (ideia, noção, conceito) pensado pelo sujeito. No nosso caso, esperamos que esse aluno externe o *não-ostensivo* pensamento algébrico.

Prevendo não ser tão espontâneo esse externar do pensamento algébrico, elaboramos roteiros para entrevistar os alunos cujas respostas deixassem dúvidas quanto à resolução dada aos problemas. Constituíram assim entrevistas do tipo semiestruturadas, visto que esse tipo de entrevista permite flexibilidade pelo seu caráter mais aberto e flexível, que retrata a espontaneidade dos entrevistados (BOGDAN; BIKLEN, 1994), essencial às nossas análises.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) nas investigações qualitativas, as entrevistas podem ser utilizadas, em conjunto com a observação participante, como estratégia para a recolha de dados descritivos. Esta se dá na linguagem do próprio sujeito, o que foi fundamental para entendermos o raciocínio utilizado pelos alunos na resolução dos problemas e nos permitiu "desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.134).

O procedimento para produção dos dados da pesquisa, por demarcar aspectos específicos a serem observados, foi feito através de observação semiestruturada das respostas dadas pelos alunos aos instrumentos de experimentação. A observação semiestruturada consiste numa observação segundo critérios ou variáveis planejadas, mas caracteriza pela liberdade do pesquisador no grupo observado (GIL, 2008). Todos os relatos orais que serviram de produção de dados foram registrados em meio escrito ou de gravação de voz para transcrição posterior e análise, sem uso de imagem, conforme acordado no TCLE.

Gil (2008) explica que nas entrevistas semiestruturadas o entrevistador permite ao entrevistado falar livremente sobre o assunto, mas, quando este se desvia do tema original, esforça-se para a sua retomada. Colocamo-nos em posição de observador e entrevistador com objetivos em mente e os nossos saberes em suspensão, para que pudéssemos identificar e registrar de forma mais fiel possível as manifestações do pensar dos alunos, através de sua linguagem natural.

Assim procedemos três seções de entrevistas, individualmente e sempre após as experimentações. Selecionamos para entrevistas alunos que mostraram estratégias diferentes das que previmos, ou que não forma claros em suas respostas. Os protocolos de entrevista serão discutidos no capítulo Análises dos Resultados e disponibilizados na integra, transcritos, nos Apêndices desse texto.

A seguir apresentaremos uma análise didática *a priori* das tarefas constantes das seções de experimentação quanto suas potencialidades no desenvolvimento do pensamento algébrico, e as *condições* e *restrições* de existência dessas tarefas na sequência didática que aqui propomos.

3.3.3 As atividades de experimentação

A fase da experimentação é o momento de se colocar em funcionamento a sequência construída e seus instrumentos diagnósticos, corrigindo-o se necessário, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. O objetivo dessa fase é levar o aluno à construção do conhecimento. Observamos os alunos participantes e refletimos sobre a sua função na pesquisa, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e as condições para a realização desta pesquisa. É a fase que nos fornece dados para as análises posteriores e que servirão para responder as nossas indagações de pesquisa.

As fases de experimentação coadunam com a preocupação de analisar a evolução do aluno ao longo da realização da sequência didática. Não se trata de traçar paralelos e comparação dos conhecimentos do aluno antes e depois da aplicação desta, são características de uma validação externa "[...] porque são externas à classe" (ARTIGUE, 1996, p. 284). São confrontos contínuos que surgem naturalmente ao longo da realização da sequência didática, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, que podem redefinir rumos e tarefas, se necessário. E assim fizemos. As fases anteriores eram a base da construção das posteriores, pela análise das tarefas e observações dos alunos no processo de construção das respostas aos problemas.

Para as atividades da fase de experimentação selecionamos problemas do livro didático em uso, ou elaboramos a partir delas, e também problemas selecionados nas análises *preliminares*, na revisão de literatura, que atendessem aos nossos objetivos e que se alinhavam com o conteúdo em estudo. São questões mistas que envolvem regularidades, sequências, pensamento funcional, partilha e cálculo de valor desconhecido.

Os problemas propostos na primeira fase de experimentação e suas análises serviram de base para a elaboração das atividades das demais fases de experimentação. Baseamos também nos problemas propostos pelo livro didático e manual do professor, além de criarmos situações que envolviam o conteúdo. Buscamos selecionar problemas que se mostravam mais propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico. São problemas matemáticos que envolvem operações com números naturais de natureza aditiva e multiplicativa.

Os objetivos traçados para os momentos de experimentação foram no sentido de diagnosticar as capacidades já adquiridas pelos alunos em relação à resolução de problemas numéricos e possíveis indícios de pensamento algébrico nessas resoluções. Os momentos de avaliação objetivavam avaliar o instrumento e assim adequar as experimentações posteriores à essa realidade e aos objetivos que traçamos.

É uma preocupação nossa, enquanto pesquisadores, não nos distanciarmos da realidade e do contexto onde esses alunos estão inseridos e, portanto, buscamos oferecer uma proposta didática que fosse mais próxima possível da realidade em que se insere este aluno da escola pública, dos livros didáticos que usam e das *instituições* a que se sujeitam.

Estas se constituem em diversas atividades do tipo *tarefas* abertas, fechadas, numéricas, icônicas, seguidas de uma avaliação a cada uma delas.

Estas experimentações serão apresentadas e descritas no capítulo seguinte, mais detalhadamente, e analisadas didaticamente quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.4 Síntese estrutural da Tese

O nosso estudo propôs e experimentou uma sequência didática com o objetivo de investigar sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico, através de atividades pautadas na resolução de problemas com números naturais, dentro do *domínio* Matemática do 6º. Ano.

No ensino pautado na resolução de problemas, os problemas são propostos como ponto de partida para a aula, buscando a construção de um novo conceito, conteúdo ou procedimentos matemáticos e dessa forma “os conteúdos fazem sentido para o aluno, que é protagonista na construção do seu próprio conhecimento” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2015, p. 3). No nosso caso são os conteúdos algébricos e os procedimentos necessários à resolução dos problemas.

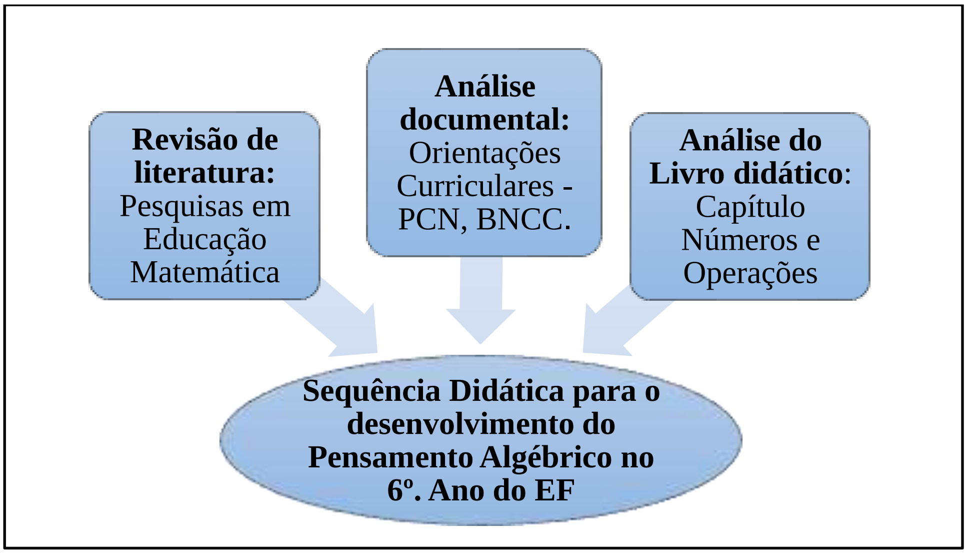
Um conceito, como os algébricos a que nos referimos neste estudo, uma definição ou uma tarefa, aqui as matemáticas, podem ser explicitados a partir de diferentes fontes. Essas fontes, tais como livros didáticos, documentos oficiais que orientam o ensino, artigos científicos, grupos de professores e de estudos, constituem os recursos capazes de promover o ensino. E com ele a aprendizagem. Segundo Gérard Vergnaud (1990), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, se estamos interessados em sua aprendizagem e seu ensino. É através das inter-relações entre os objetos envolvidos numa situação de ensino e na resolução de problemas que um conceito adquire significado para quem aprende.

A sequência didática foi construída a partir de uma revisão sistemática de literatura e dos documentos oficiais que regem o ensino de Matemática no nível fundamental, e através da análise das atividades que são apresentadas no livro didático em uso na escola em que se deu a investigação, especificamente o Capítulo *Números e Operações*. O olhar sobre essas fontes se deu a partir da potencialidade ou da indicação quanto ao desenvolvimento do pensamento matemático, estendendo ao pensamento algébrico, nosso objeto principal de investigação.

Através de uma análise didática selecionamos dentre os problemas vistos, os que atendiam aos aspectos identificados como caracterizadores do pensamento algébrico: "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativa de expressar a estrutura de uma situação-problema pela capacidade de generalização" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87).

O desenho do estudo está sistematizado na Figura 12.

Figura 12: Desenho do estudo



Fonte: elaboração própria (2018)

Esse modelo estrutural levará à defesa da tese desse estudo:

A introdução de uma Sequência Didática no 6º. Ano do Ensino Fundamental, com atividades pautadas na resolução de problemas com

números naturais, de natureza aditiva e multiplicativa, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

Destacamos que esse estudo com a sequência didática que propusemos é uma contribuição de nossa pesquisa para com a comunidade de Educação Matemática sob dois aspectos: o primeiro diz respeito ao campo científico, pois a originalidade está na construção do modelo conforme o entrelaçamento que se deu entre a sequência didática e as definições teóricas que subsidiaram a sua construção, aplicação e as análises. Não se finda, este é parcial como todo estudo que investiga o conhecimento, e, portanto, ser complementado por outras fontes, dando continuidade a uma gama de pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico; o segundo aspecto diz respeito a um modo de conceber o pensamento algébrico como um objeto matemático capaz de contribuir com a aprendizagem, não se limitando à aprendizagem algébrica, dado a riqueza de conexões e relações que esse tipo de pensar estabelece com outros conhecimentos, seja se apropriando dele, seja problematizando outros conhecimentos a partir dele.

CAPÍTULO IV:

ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 Introdução

Conforme delimitamos no capítulo metodológico, para as nossas análises qualitativas, elencamos duas categorias concebidas como: (i) análise didática *a priori* dos problemas que elaboramos para compor os instrumentos diagnósticos (testes) das etapas de experimentação, e as (ii) análises *a posteriori*, uma categoria que emergirá das respostas dadas pelos alunos aos instrumentos propostos. Emergirá assim uma terceira categoria que será a (iii) análise dos resultados, que parte de uma confrontação entre as duas primeiras, como também das respostas aos questionamentos realizados nas entrevistas e dados captados pelas observações realizadas.

No tocante a primeira categoria, *análise a priori*, analisamos as *condições* e *restrições* dos problemas para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e então para compor a sequência didática. Didaticamente discutimos as habilidades e competências que poderiam ser requeridas ou desenvolvidas nos alunos para atingirmos o objeto matemático pensamento algébrico, e matematicamente descrevemos as possíveis resoluções e os resultados esperados, fundamentados nos estudos que trouxemos em nossa pesquisa.

Na segunda categoria, a *análise a posteriori* dos instrumentos, analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas e confrontamos com as estratégias previstas, enquanto categorias de análise *a posteriori* que traçamos. Esta apoiou-se nos dados obtidos nas seções de experimentação, por meio de observações, entrevistas, das produções dos alunos e das discussões ocorridas durante os encontros, de forma interacionista, cuja confrontação possibilitou a validação das hipóteses de pesquisa.

Essas etapas serão descritas e confrontadas ao final desse capítulo como análises dos resultados, nossa terceira categoria, em busca de responder as nossas indagações iniciais e assim validar a sequência didática elaborada para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Trata-se de um processo essencialmente descritivo e interpretativo e as tarefas integradas que compuseram a sequência didática centraram na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do pensamento matemático algébrico, tendo em conta os tópicos matemáticos, como já foi referido. A exploração dessas tarefas tem como objetivos a identificação de regularidades, a expressão da generalização através da linguagem natural e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática algébrica.

Em relação às questões formuladas em linguagem simbólica o objetivo é analisar a significação dada pelos alunos a esses objetos. E com os problemas em linguagem natural pretende-se verificar se os alunos já apresentam algum indício de pensamento algébrico e em que níveis (ALMEIDA, 2016).

Quanto à resolução, era esperado técnicas como tentativa e refinamento, desfazendo operações ou até mesmo por transposição de termos e com operações cognitivas de *tratamento* e *conversões* (DUVAL, 2003), apesar de ser um procedimento da álgebra formal que ainda não viram.

4.2 Análise *a priori*

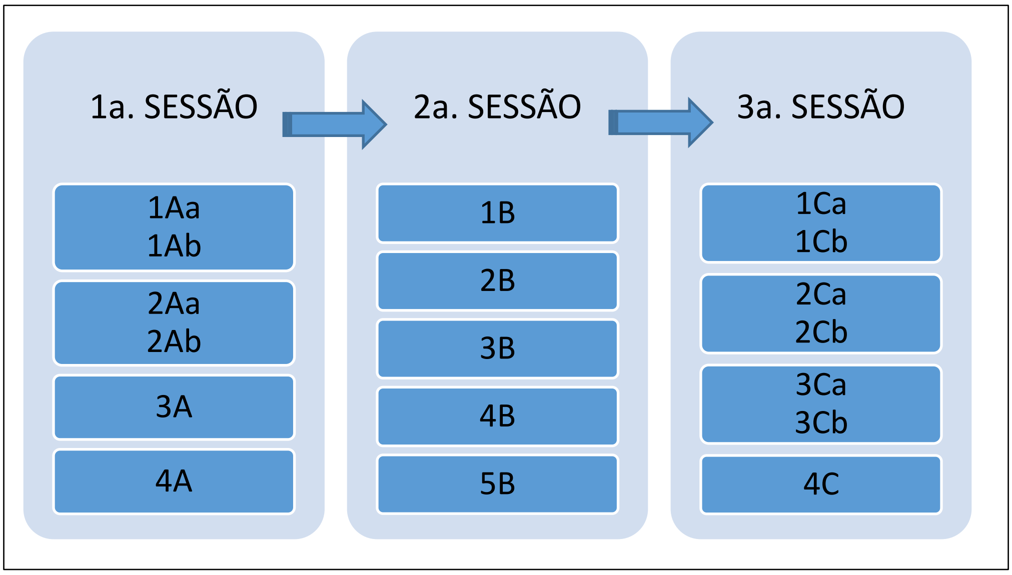
Nesta seção faremos a análise *a priori* dos problemas constantes dos testes das seções de experimentação.

São três seções de experimentação, totalizando treze problemas, em dezoito questões considerando as subdivisões dos problemas. Para facilitar a identificação dos problemas de designaremos por 1A a 4A os problemas da primeira sessão; por 1B a 5B os problemas da segunda sessão; e por 1C a 4C os problemas da terceira e última sessão de experimentação da sequência. As subdivisões de cada questão serão consideradas pela segunda letra em minúsculo.

A Figura 3 esquematiza essa distribuição dos problemas nas sessões.

.

Figura 13: Problemas das sessões de Experimentação da Sequência Didática



Fonte: os autores (2018)

São problemas nas vertentes matemáticas de equação, sequência, função e mistos ou que não se encaixam nessas três vertentes e que classificamos de aritméticos/algébricos para acomodar situações intermediárias entre o caráter operacional da aritmética e características algébricas. Segundo Chevallard (1984), pode-se considerar a existência de uma dialética entre o numérico e o algébrico, onde o numérico cria as condições para a construção do algébrico, que por sua vez dá o suporte para o estudo do numérico. São *tarefas* que, em sua grande maioria, são propostas em língua natural[32] e contextualizadas. Segundo Duval (2011), a língua natural é um sistema de *registro* que possui a função de comunicação e onde podemos descrever situações nas quais se procura criar um contexto por meio do qual se pode propor uma determinada *tarefa*.

Essa é uma classificação *a priori*, portanto, nas discussões de cada problema individualmente, podemos identificar problemas com mais de uma possibilidade de resolução, com mais de uma classificação ou que requerem mais de um tipo de raciocínio.

---

[32] Para este estudo as expressões língua natural e linguagem natural serão utilizadas para referir à língua materna, aquela que o indivíduo utiliza para se comunicar oralmente.

Assim podem ocorrer problemas algébricos/aritméticos com raciocínio funcional, ou sequencial, ou de equação.

Os enunciados de todos os problemas se apresentam no *registro de representação* da língua natural no entanto alguns problemas apresentam a linguagem figural ou icônica[33] completando esse enunciado. Assim, vamos categorizar os problemas quanto ao registro de representação em: linguagem natural, quando não apresentar nenhum recurso icônico; ou linguagem icônica, quando apresentar algum recurso icônico, como balança, bolinhas, quadrinhos, que necessitem de uma *conversão* de linguagem.

E quanto à resolução dos problemas, categorizamos a complexidade em simples ou sofisticado, de acordo com as relações e conexões que julgamos necessárias à resolução de cada problema. Esses termos *simples* e *sofisticado* foram usados por Porto (2018) em sua pesquisa. Por *simples* classificamos os problemas que necessitam de relações diretas apenas e conceitos básicos, como as operações fundamentais, para solucioná-los, que não lidam com o desconhecido, enquanto que os classificados como *sofisticados* requer um esforço cognitivo maior de lidar com o desconhecido, de numeralizar situações, de algebrizar.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas das atividades permitem controlar os comportamentos dos alunos e possibilitar que investiguemos as suas ações em busca de respostas às nossas hipóteses. Para tanto, descreveremos as escolhas das atividades e suas características matemáticas e didáticas; analisaremos a importância de cada situação para o aluno, as possíveis ações e estratégias que estes manifestarão e suas tomadas de decisão; além de prever comportamentos possíveis.

Ponderamos que, em seu cotidiano, os alunos do 6º. Ano e dos anos iniciais do Ensino Fundamental defrontam, quase sempre, com problemas de relações quantitativas, e então apresentam uma estreita relação com o pensamento algébrico. Por assim crer, presumimos que se apresentarmos atividades que exploram a generalização, a explicitação de leis, o raciocínio intuitivo e dedutivo e a identificação de estruturas operatórias influenciaremos na relação aluno/saber, em relação ao raciocínio algébrico e a linguagem da álgebra formal.

---

[33] Adotamos o termo *icônico* como sendo um "signo que apresenta uma relação de semelhança ou analogia com o objeto que representa" tal como se apresenta no Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa. Uma figura é um ícone como também é um *ostensivo*. E a nossa escolha se justifica por estas serem autoexplicativas de fácil leitura visual e acessível

Adotamos tal estratégia didática objetivando que esses alunos raciocinem algebricamente e comecem a utilizar uma linguagem simbólica algébrica para expressar e justificar suas ideias (BLANTON; KAPUT, 2005). Em nossas experiências docentes vivenciamos que o bom uso da linguagem algébrica, ou seja, um uso com significação, tende a antecipar a familiarização do processo lógico formal, e com isso desenvolver as estruturas necessárias à transição da aritmética à álgebra.

Reforçamos que não temos objetivo de propor um modelo de ensino, mas de discutir o que é institucionalmente posto e acessível em sala de aula, ao ensino e aos alunos, em termos de tarefas que levem à formação do pensamento matemático algébrico e então privilegiá-las no ensino da Matemática no 6º. Ano, visando uma aprendizagem algébrica futura.

Os problemas propostos para as sessões de experimentação são em linguagem natural ou icônica, requerem conhecimento básico de operações com números naturais e podem ser resolvidas por intuição de cálculo mental, tentativa e erro e por operações de *tratamentos* e *decodificações* (DUVAL, 2003). No entanto, em sua aplicação, primamos pela oralidade, sempre questionando o processo de resolução adotado por cada aluno, buscando verificar nas entrevistas individuais aos alunos quais conhecimentos estavam sendo mobilizados, em busca de indícios de raciocínio de estabelecimento de relações e conexões que externassem formação de pensamento matemático algébrico.

4.2.1 Experimentação: 1ª. sessão

Aqui analisaremos didaticamente *a priori* os problemas do teste aplicado na 1ª. sessão da experimentação que se apresentam no Quadro 6.

Para a elaboração dos problemas dessa primeira sessão nos inspiramos em Porto (2018). A sua pesquisa versava sobre a *Early Algebra* e foi aplicada no 3º ano e 5º. ano do Ensino Fundamental, numa proposta de verificar o nível de raciocínio algébrico desses alunos e chegou à conclusão que “a condução algébrica é plenamente viável didaticamente, uma vez que os estudantes pesquisados apresentam competências, esquemas e nível de raciocínio algébrico que os torna aptos à sua instrução” (PORTO, 2018, p. 165).

Traçamos como objetivo para este teste inicial verificar quais dos processos de desenvolvimento do pensamento algébrico (RADFORD, 2009) são mobilizados pelos alunos, especificamente quanto ao estabelecimento de relações com vistas à generalização, considerado o centro da atividade algébrica (KAPUT, 1999; RADFORD, 2009) e, portanto, do pensamento algébrico.

Objetivamos também propiciar aos alunos contato com problemas contextualizados que envolvam várias possibilidades de operações e uma (única) solução. Espera-se observar indícios de pensamento algébrico ao tratar o desconhecido como se fosse conhecido, mesmo não atribuído letras ou símbolos (RADFORD, 2009; SQUALLI, 2003).

E por entender, a partir dos resultados de pesquisas (BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009), que a estratégia adotada pelo aluno para a resolução de problemas é reveladora do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que se encontra, decidimos elaborar estratégias prévias de resolução e testá-las a partir das experimentações, como categorias de análise *a posteriori*. Assim, previmos as seguintes estratégias de resolução:

E1: A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.
E2: A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro.
E3: O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca das soluções.
E4: A utilização do aspecto de observação de regularidades.
E5: Uso de *ostensivos* para representar a situação problema.

O teste que se apresenta no Quadro 6 está de forma condensada e sem espaços de respostas e cálculos. Nos apêndices o apresentaremos tal como aplicado aos alunos.

Quadro 6: Teste aplicado na 1ª sessão da experimentação

Nome: ____ Idade: ____ Ano/Turma: ____

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

a) $\square + 5 = 12$. Então o $\square$ vale ____

b) $\square - 5 = 0$. Então o $\square$ vale ____

2) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R$3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

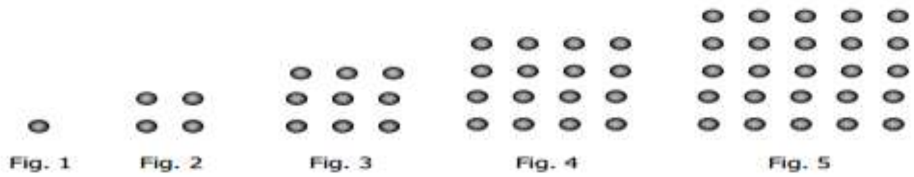
a) Quem tem mais dinheiro? ___________________

Por quê? ____

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso?

____

3) Observe a sequência das figuras quadrangulares formada por bolinhas. Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer 7ª figura?



Resp: ____

4) Ana gosta de brincar de sequências numéricas. Ela deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 10º número (termo) que ela escreverá?

5	9	13	17						

Resp ____

Fonte: os autores, elaborada a partir de Porto (2018).

4.2.1.1 Análise *a priori* dos problemas da 1ª. sessão de experimentação

Discutiremos aqui as atividades constantes do teste da primeira sessão de experimentação que servirão para produção de dados para as análises. Trata-se de um instrumento investigativo teste que contém um conjunto de quatro problemas em seis itens, nas vertentes matemáticas de equação e sequência. Os problemas apresentam em sua estrutura física características icônicas ou numéricas e, quanto à resolução, nível de complexidade simples e sofisticado.

Problema 1A:

> 1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?
>
> a) ■ + 5 = 12. Então o ■ vale ______________________________
>
> b) ■ – 5 = 0. Então o ■ vale ______________________________

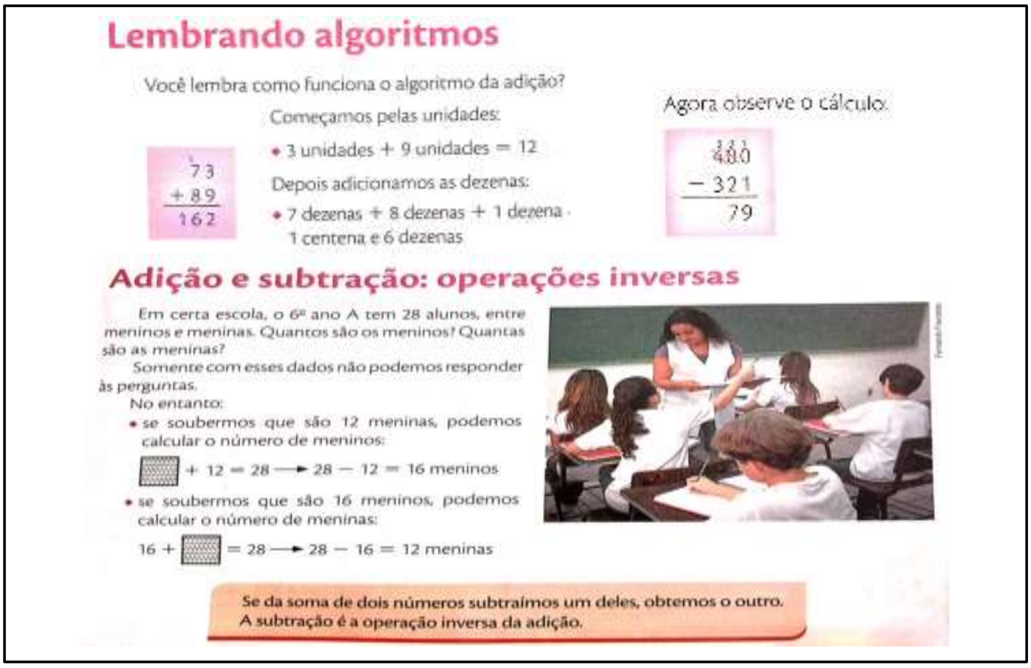
O Problema 1A apresenta uma tarefa em linguagem natural de natureza mista, numérica e icônica, que categorizamos de dificuldade simples. A *condição* para a sua realização é que esta requer estabelecimento de relação e cálculos mentais e/ou explícitos (**E1, E2 e E3**) com os elementos utilizados para representar o desconhecido, que remetem a uma equação, além do domínio das operações de adição e subtração.

A relação do quadrinho com o número cinco em ambas situações (a e b) evidencia que existe um valor único (uma constante) que se apresenta como um valor desconhecido (incógnita).

Esperamos que o aluno identifique que a figura geométrica assume o valor de números naturais, e a mesma figura em situações diferentes assume valores diferentes. E espera-se também a formação de um pensamento algébrico que subsidiará as primeiras ideias dos *não-ostensivos* incógnita e variável.

O manual do professor do livro didático analisado começa o Capítulo *Adição e Subtração de Números Naturais* sugerindo o uso de *algoritmos* utilizados nos anos anteriores, de adicionar ou subtrair pelo valor posicional (**E2**). Em seguida apresenta o uso de operações inversas para resolver esse tipo de problema. Essas situações são ilustradas na Figura 14.

Figura 14: Situação do manual do professor *Praticando Matemática - 6º. Ano*: uso de operação inversa



Lembrando algoritmos

Você lembra como funciona o algoritmo da adição?

$$\begin{array}{r} 73 \\ +\,89 \\ \hline 162 \end{array}$$

Começamos pelas unidades:

- 3 unidades + 9 unidades = 12

Depois adicionamos as dezenas:

- 7 dezenas + 8 dezenas + 1 dezena
  1 centena e 6 dezenas

Agora observe o cálculo:

$$\begin{array}{r} 400 \\ -\,321 \\ \hline 79 \end{array}$$

Adição e subtração: operações inversas

Em certa escola, o 6º ano A tem 28 alunos, entre meninos e meninas. Quantos são os meninos? Quantas são as meninas?

Somente com esses dados não podemos responder às perguntas.

No entanto:

- se soubermos que são 12 meninas, podemos calcular o número de meninos:

$\boxed{} + 12 = 28 \longrightarrow 28 - 12 = 16$ meninos

- se soubermos que são 16 meninos, podemos calcular o número de meninas:

$16 + \boxed{} = 28 \longrightarrow 28 - 16 = 12$ meninas

Se da soma de dois números subtraímos um deles, obtemos o outro. A subtração é a operação inversa da adição.

Fonte: Aldrini, Vasconcelos (2015, p.37).

Ao utilizarmos a propriedade da decomposição para justificar o algoritmo da adição, estamos fazendo álgebra. Estamos empregando procedimentos algébricos, uma vez que os próprios livros didáticos, como o em questão, estão renunciando à antiga linguagem de unidades, dezenas e centenas para explicar por algoritmos, e estão incorporando-os à linguagem da álgebra. A sistematização de um algoritmo, de um sistema de numeração e o uso dos números podem ter um caráter algébrico se a intenção não for os cálculos por si apenas, mas um exemplo genérico, um modelo (KAPUT, 2008).

Problema 2A:

2) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R$ 3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

a) Quem tem mais dinheiro? __________________

Por quê? ____
____

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso?

____
____

O Problema 2A apresenta uma tarefa mista que remete a duas situações matemáticas: uma função e uma equação. Em linguagem natural e numérica e com nível de resolução que identificamos como sendo sofisticada. Temos uma situação funcional, pois nos remete a ideia da relação de dependência, a quantia de João depende da quantia de Rodrigo, que também é desconhecida.

O problema apresenta de forma implícita a ideia de variável, visto que existe uma indeterminação quanto ao valor que se encontra no bolso de Rodrigo. Torna-se então uma *condição* à sua resolução estabelecer um comparativo analítico entre o que varia (dinheiro do bolso) e o que não varia (dinheiro da mochila) (**E3)**. Outra *condição* à sua resolução é a de tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009; SQUALLI, 2003), numeralizando-o.

Dessa forma, o problema poderia ser representado algebricamente, a partir da quantidade desconhecida **x** de dinheiro (reais) que tem no bolso de Rodrigo, da seguinte forma:

Dinheiro de Rodrigo: R(x) = **x + 3**

Dinheiro de João: J(x) = **2x**

A ideia de equação é implícita, como também a ideia de inequação quando questionamos:

(a) quem tem mais dinheiro? Ou seja, analisar as possibilidades:

$$R(x) > J(x) \text{ ou } R(x) > J(x); \text{ e}$$

(b) quando tiverem a mesma quantia, ou seja,

$$J(x) = R(x).$$

Nas duas situações diante da possibilidade de *tratar o desconhecido como se fosse conhecido,* é esperado que o aluno o faça através de uso de números quaisquer pelo uso do raciocínio aritmético puro, por tentativa e erro, por desconhecer procedimentos algébricos de uso de letras como incógnitas ou variáveis. Mas é esperado também que o faça através do uso de raciocínio algébrico de tratar o desconhecido valor que Rodrigo tem no bolso por **x** como um valor indefinido e variável.

Na alternativa (b) é esperado que surja a discussão sobre as várias possibilidades dos dois meninos terem a mesma quantia de dinheiro e a relação de dependência da quantia de João em relação à quantia que Rodrigo tem no bolso. Inclusive da possibilidade de não terem dinheiro. E assim surgirá as primeiras discussões sobre o que varia (termo independente) e o que não varia (termo dependente) em função do outro numa relação funcional.

Problema 3A:

3) Observe a sequência das figuras quadrangulares formada por bolinhas. Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer a 7ª figura?

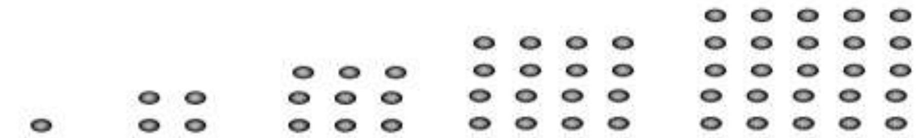


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Resp: ____

O Problema 3A apresenta uma tarefa de raciocínio sequencial, icônica e de natureza multiplicativa, quando menos, pois poderia ser resolvida pelos princípios da potenciação:

$$\text{Figura } 1 = 1^2 \text{ bolinhas}$$

$$\text{Figura } 2 = 2^2 \text{ bolinhas}$$

...

$$\text{Figura } 7 = 7^2 \text{ bolinhas}$$

...

$$\text{Figura } n = n^2,$$

Logo o termo geral da sequência é $a_n = n^2$.

Classificando-a algebricamente como uma função f, cujo domínio e contradomínio está contido em N*. Exclui-se o zero do conjunto uma vez que o *ostensivo* bolinha precisa ser representado.

Em linguagem algébrica dada uma função f, de domínio e imagem de números naturais, para cada número natural n diferente de zero, teremos que seu termo geral pode ser expresso por $a_n = f(n)$.

No entanto, por época da aplicação da pesquisa os alunos ainda não foram iniciados no conteúdo Potenciação com Número Naturais. Espera-se assim a percepção da relação de dependência entre o número de bolinhas e a posição da figura, gerando resoluções do tipo:

Figura 1: (1 x 1) bolinhas

Figura 2: (2 x 2) bolinhas

...

Figura 7: (7 x 7) bolinhas

...

Figura n: (n x n) bolinhas,

Logo o termo geral da sequência é

$a_n = (n \times n)$,

Que é o princípio geral da potenciação.

Em Matemática as Sequências são utilizadas comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função que é chamada de termo geral da sequência ou lei de recorrência. Os valores a_1, a_2, a_3, ... , a_n, são chamados termos da sequência. O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é dito o n-ésimo termo. Quando a diferença entre um termo e seu sucessor é a mesma em toda sequência esta se classifica como Progressão Aritmética. Se o termo seguinte for o produto do termo anterior esta se classifica como Progressão Geométrica[34]. No caso nenhuma das situações ocorreu e, portanto, trata-se apenas de uma sequência cuja Lei de Recorrência ou Termo Geral é dado por:

$$a_n = n^2$$

[34] Chama-se sequência finita toda aplicação f do conjunto $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Assim, em toda sequência finita, a cada número natural $i(1 \leq i \leq n)$ está associado um número $a_i \in \mathbb{R}$, onde $f = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n)\}$. Chama-se sequência infinita toda aplicação f de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Mais sobre Sequências em Dante (2008).

Consideramos de maior complexidade, sofisticada, pelas relações que se tornam necessárias à sua resolução, apesar de apresentar uma sequência repetitiva significativa, pois a partir da observação sistemática das figuras (bolinhas) é possível identificar a próxima posição pedida.

O estabelecimento de relações e conexões, a partir da existência de uma relação de dependência entre um termo e o seu antecessor é esperado por ser próprio das sequências (**E3**). Um termo qualquer sempre recorrerá ao termo antecessor (**E4**), portanto classifica-se com uma sequência recursiva, construída por uma determinada regra de formação.

Nesse problema, esperamos que o aluno faça desenhos em busca da resposta, ou observe regularidades. Esperamos também que identifique o comportamento sequencial das figuras, quanto ao número de bolinhas utilizadas para se construir cada uma delas, seja pelo número de bolinhas da base, numa relação de acréscimo horizontal, ou pela figura como um todo.

Assim,

Figura 1: tem 1 bolinha na base;

Figura 2: tem 2 bolinhas na base;

E como elas dão a ideia de uma forma quadrada (se unirmos os pontos das laterais), pode-se chegar à conclusão que:

Figura 7: tem 7 bolinhas na base.

Outra hipótese de resolução é que o aluno consiga estabelecer uma comparação vertical, uma relação entre o número de bolinhas necessárias a formação de cada figura e a sua posição na sequência. Como na horizontal e na vertical tem sempre o mesmo número de bolinhas, a sétima figura terá 7 bolinhas nesses dois sentidos, o que facilitará a sua representação *ostensiva.*

Não é esperado, no entanto esse problema submete a uma situação funcional em que o termo $a_{n =}$ f (n). A restrição a esse raciocínio funcional sistematizado nessa equação algébrica se deve ao fato dos alunos pesquisados não terem visto equação algébrica, por época da aplicação deste teste.

Esperamos que nessa tarefa o aluno perceba a ordem e a regularidade dos números (**E4**). Esperamos, mas não há muitas expectativas diante do nível de complexidade, que o aluno estabeleça uma generalização do padrão aritmético de crescimento.

Problema 4A:

4) Ana gosta de brincar de sequências numéricas. Ela deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 10º número (termo) que ela escreverá?

5	9	13	17						

Resp ____

O Problema 4A apresenta uma situação sequencial, de representação numérica e quanto à resolução classificamos previamente de complexidade simples. Trata-se de uma sequência numérica recursiva, denominada matematicamente como sequência aritmética ou Progressão Aritmética (PA)[35].

Classifica-se como PA crescente ($a_n > a_{n-1}$) infinita quanto ao números de termos, de razão (r) inteira e positiva, onde $r = (a_n - a_{n-1})$, onde o primeiro termo $a_1 = 5$ e cujo enésimo (posição) termo da PA, ou termo geral $a_n = a_1 + (n - 1).r$ pode ser representado por $a_n = 4n + 1$.

Esperamos que o aluno compreenda no problema a ordem e a regularidade dos números. Que ele perceba que para encontrar cada termo dessa sequência basta acrescentar quatro unidades, ou seja, que desenvolva um raciocínio sequencial, um passo à formação do pensamento algébrico. No entanto não é esperado que o aluno estabeleça uma relação generalizada ou uma lei de formação semelhante à de uma PA para encontrar o 10º termo da sequência. Acreditamos que ele irá adicionar o número 4 a cada termo até obter o termo preterido numa lógica recursiva, através de tentativa e erro, como também de observação de regularidades (**E1 e E4**).

[35] Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual cada termo, a parir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r, chamada razão da PA (DANTE, 2008, p. 136.).

4.2.2 Experimentação: 2ª sessão

O objetivo da 2ª. sessão da experimentação foi propiciar aos alunos contato com problemas contextualizados que envolvem várias possibilidades de operações em busca de solução única, com problemas de estrutura aritmética ou algébrica.

Espera-se que o aluno utilize a tentativa e erro no decorrer das atividades e perceba as limitações desta ferramenta, iniciando a busca por outros meios. Dentre esses meios espera-se observar na análise das resoluções dadas aos problemas, indícios de pensamento algébrico de tratar o desconhecido como se fosse conhecido, mesmo não lhes atribuído letras ou símbolos (RADFORD, 2009; SQUALLI, 2003).

4.2.2.1 Problemas de estrutura aritmética e algébrica

Para essa 2ª sessão de experimentação elencamos problemas do livro didático em análise, especificamente em linguagem natural, e a partir deles elaboramos outros. São problemas de estrutura aritmética e/ou algébrica, de estabelecimento de relações e conexões que podem privilegiar o desenvolvimento do pensamento algébrico na sua resolução. E esse estabelecimento de relações e conexões podem desencadear raciocínios do tipo funcional, sequencial ou de equacionar. Portanto, classificar um problema em aritmético ou algébrico não exime a sua condição de ser uma função, uma equação ou uma sequência, que foram as categorias que elegemos para analisar os problemas.

Os problemas de estrutura aritmética se caracterizam pelo uso de operações aritméticas diretas, cujos procedimentos aritméticos puros ou geométricos são suficientes para solucionar o problema (DA ROCHA FALCÃO, 1997).

Duval (2003) define problemas aritméticos como problemas matemáticos onde sucessivas operações cognitivas de *tratamento* são suficientes para solucioná-los, ou seja, de um esforço cognitivo menor que os problemas onde há necessidade de realizar *conversões*. Estabelece-se assim uma cadeia de operações aritméticas, geralmente de natureza aditiva e multiplicativa, que são executadas a partir dos dados do problema e comunicadas em linguagem oral ou escrita.

Os problemas de estrutura algébrica são aqueles que necessitam de estabelecimento de conexões entre os dados do problema em linguagem natural para *convertê-lo* em uma linguagem matemática, como a simbólica algébrica, por exemplo. É o processo cognitivo definido por Duval (2003) como *conversão d*e linguagens e que considera essencial à aprendizagem. Nesses problemas o aluno deve estabelecer "relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético" (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 3).

Há ainda os problemas que não são de estrutura aritmética nem algébrica, classificados por Marchand e Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) como falsos problemas por não estabelecer nenhum tipo relação ou conexão com outros saberes para a sua resolução. Como exemplo temos o Problema 1B da 2ª. sessão, que será apresentado e discutido à frente.

Na resolução de problemas de estrutura algébrica os procedimentos aritméticos puros mostram-se cansativos, enfadonhos ou, mesmo, insuficientes (DA ROCHA FALCÃO, 1997; RADFORD, 2011). Recorre-se assim aos procedimentos algébricos, como uso de letras para tratar o desconhecido, relações e conexões entre o desconhecido com o que é conhecido no problema, utilizados para facilitar sua resolução.

Para Marchand e Bednarz (1999, apud OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 2) "o que diferencia um problema de estrutura algébrica de um problema aritmético é que em um problema aritmético o aluno parte de valores conhecidos para chegar ao valor desconhecido".

Um problema de partilha é um tipo especial de problema de estrutura algébrica que se caracteriza por ter um valor conhecido, o total, que será repartido em partes desiguais e desconhecidas (ALMEIDA, 2016). Esse termo desconhecido tem relação com o(s) dado(s) do problema e pode ser tratado como uma incógnita e assim o problema pode ser *convertido* (DUVAL, 2003) em uma equação do primeiro grau.

Marchand e Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) destacam que um problema de partilha pode ser classificado de acordo com as relações existentes entre as partes. Essa classificação foi elaborada levando em consideração o número das relações, se uma ou mais, a natureza das relações, se aditiva ou multiplicativa, e o tipo de encadeamento das relações, ou seja, se *fonte, composição* ou *poço*.

Um encadeamento é tipo *fonte* quando as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza, como os Problemas 3B, 4B e 5B da 2ª sessão e o Problema 2C da 3ª. sessão de experimentação. Nos problemas de partilha cujo encadeamento é do tipo *composição*, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência. E nos problemas do tipo *poço*, as relações convergem para uma das personagens do problema e apresenta um nível de dificuldade mais alto devido ao baixo grau de *congruência semântica*, definido por Duval (2003) com a correspondência entre os registros de partida e de chegada no processo cognitivo de *conversão*, que considera indispensável à aprendizagem matemática.

Optamos por incluir em nossos testes das seções de experimentação apenas problemas algébricos de partilha com encadeamento dos tipos *fonte* e *composição*. Essa escolha se deve principalmente aos resultados divulgados nas pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Almeida (2016) que, pela alta congruência semântica e fácil *conversão* (DUVAL, 2003) da linguagem natural para a linguagem algébrica tem maiores possibilidades de corroborar com os nossos objetivos de observar o desenvolvimento do pensamento algébrico, sem, no entanto, associar ao tipo de problema. Os pesquisadores (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2016) perceberam que os participantes da pesquisa encontraram mais dificuldades em resolver problemas do tipo *poço*.

Observamos pela análise feita que o livro didático dá prioridade aos problemas de divisão em partes iguais, de estrutura aritmética. Encontramos no capítulo Números e Operações apenas um problema de partilha, e do tipo *composição*. Assim categorizamos os problemas dessa segunda sessão de aritméticos/algébricos por incluir os dois tipos, e dentre os algébricos consideraremos os problemas de partilha.

Mostrar que o pensamento algébrico pode surgir a partir de problemas mais simples, sem necessariamente estar associado ao uso de ferramentas algébricas, letras e símbolos é um dos nossos objetivos com a sequência didática. Constitui-se assim uma possibilidade didática ao professor de matemática.

Como exemplo de problema de estrutura aritmética temos o Problema 2 da 2ª. sessão, já que são problemas comuns nos livros didáticos consultados e, repetimos, não temos interesse em distanciar do contexto da sala de aula, do contexto matemático onde os alunos estão inseridos. Prezamos pelo desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do que é posto e acessível didaticamente e institucionalmente a esses alunos.

Já a natureza das relações entre os dados dos problemas que elaboramos pode ser aditiva, quando se lança mão de somas ou subtrações, ou multiplicativa, quando faz uso de multiplicações ou divisões, ou naturezas diferentes, quando se tem, em um mesmo problema, pelo menos uma natureza aditiva e uma multiplicativa[36]. Há problemas também de natureza mista, quando uma relação é de natureza multiplicativa e a outra de natureza aditiva, logo, esse problema é, de acordo com a natureza de suas relações, de naturezas diferentes (MAGINA, 2008). Estes serão apresentados e detalhados nas análises didáticas de cada problema, em separado, na sequência desse texto.

4.2.2.2 Análise *a priori* dos problemas da 2ª. sessão de experimentação

O Quadro 7 apresenta o teste que foi aplicado na segunda sessão de experimentação. O teste completo, tal como foi aplicado, se apresentada nos anexos. Optamos por destacar cada problema em separado e analisá-los.

[36] A natureza aditiva e multiplicativa é tratada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996). No Brasil, vários trabalhos contribuíram para o estudo e ampliação dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas (MAGINA, 2004, 2007, 2008; MERLINI, 2012; SANTOS, 2012; SANTANA, 2010, 2011; dentre outros)

Quadro 7: Teste aplicado na 2ª. sessão de experimentação

Nome: ________________________________ Idade: ____ Ano/Turma: ___

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

2) Pedro tem 12 figurinhas, Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que Pedro. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

3) André, Maria e Luna têm, juntos, 72 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

4) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

5) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de figurinhas de Paulo e Mário fique com quatro figurinhas a mais que Beto. Quantas figurinhas cada uma vai receber?

Fonte: os autores, a partir de Almeida (2016).

As estratégias que previmos para análise das tarefas propostas nessa segunda sessão são as mesmas descritas para a primeira, de **E1 a E5**. A saber:

E1: A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.

E2: A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro.

E3: O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca das soluções.

E4: A utilização do aspecto de observação de regularidades.

E5: Uso de *ostensivos* para representar a situação problema.

Destacaremos a seguir os problemas, individualmente, e faremos a análise didática. O teste completo, tal como foi aplicado aos alunos encontra-se nos anexos.

Problema 1B:

1) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

Esse problema pode ser convertido em uma equação algébrica, a partir do número desconhecido a que se refere, no entanto, trata-se de uma “simples codificação” (DUVAL, 2003, p.19) da linguagem natural, não favorecendo aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico. Se tratarmos o número desconhecido de **x**, ou quadrinho, ou qualquer *ostensivo*, conhecer a expressão dobro como uma ação multiplicativa e a relação de igualdade, é só transcrevê-lo para a linguagem matemática. Não é esperado que os alunos equacionem 2x + 20 = 50 uma vez que teve pouco ou nenhum contato com a álgebra formal, pela *restrição* curricular. No entanto, uma possível representação seria pelo uso do *ostensivo* quadrinho ou risquinhos e a equação (**E5**), para representar o número desconhecido:

$\square\ \square$ + 20 = 50 logo

$\square\ \square$ valem 30, e então

$\square$ vale 15

Duval (2003) alerta: não confundir codificação com a operação cognitiva de *conversão*, o esforço prévio de equacionar o problema, isto é, realizar a *conversão*, é cognitivamente maior que o de escolher e executar um algoritmo algébrico, como na resolução de uma equação polinomial do 1º grau.

Nesse caso, a *conversão* é direta do registro da linguagem natural para o registro da linguagem simbólica algébrica ou numérica apenas, sem estabelecer relações entre os dados do enunciado. Quanto as estratégias presumimos sejam utilizadas **E1** e **E2** apenas, que são suficientes para a resolução e disponíveis na memória cognitiva dos alunos, visto que são problemas já trabalhados em anos anteriores.

Para Marchand e Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) trata-se de um “falso problema”, por não estabelecer relações entre os dados do problema. No entanto optamos por inseri-lo por ser um problema comum nos livros didáticos, como o que analisamos, e assim analisá-lo a partir das respostas dos alunos, verificarmos o que foi diagnosticado por Almeida (2016) e então termos argumentos próprios quanto à sua capacidade de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O Problema 2B que segue é um problema de estrutura aritmética, pois parte de um valor conhecido para determinar valores desconhecidos.

Problema 2B:

2) Pedro tem 12 figurinhas, Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que Pedro. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

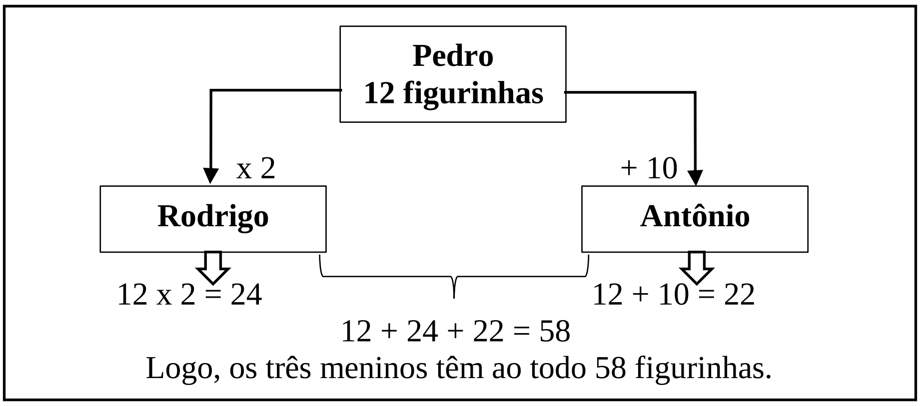
Por ser um problema de estrutura aritmética, requer apenas tratamentos (DUVAL, 2003) sucessivos, que são relações estabelecidas, no entanto, mais diretas e imediatas. Portanto o classificamos de complexidade simples. Pode promover o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações (**E3**) que sugerem estabelecer. No entanto, estratégias de cálculo mental são suficientes para resolvê-lo, por exemplo, tentativa e erro (**E1 e E2**).

Parte de um valor conhecido, a quantidade de figurinhas de Pedro, que se relaciona com os demais dados, portanto um problema aritmético de uma relação e de natureza mista, multiplicativa e aditiva. Em relação ao todo que se questiona na questão está implícita a ideia de adição, tal como é trabalhada nos anos anteriores e, esperamos, os alunos já dominem esse conceito.

As variáveis didáticas envolvidas são números naturais e pares, que permite um número de soluções finito e de ordem das dezenas. São elas: o número de figurinhas de cada menino; o número de figurinhas total dos meninos; e a relação entre o número de figurinhas de cada menino.

É esperado também, e incentivaremos isso em sala de aula, que os alunos utilizem algum *ostensivo* (**E5**) para representar o problema, como por exemplo desenhos, tracinhos, quadrinhos, comuns a esse nível de escolaridade (KASPARY, 2014). Um esquema de uma possível representação semiótica é apresentada na Figura 15.

Figura 15: Esquema de representação do Problema 2



Fonte: os autores (2018).

Os Problemas 3B e 4B que seguem são problemas algébricos de partilha do tipo *fonte*. Neles há um estabelecimento de relações entre as partes, aditiva ou multiplicativa, a partir de um único valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas.

Problema 3B:

3) André, Maria e Luna têm, juntos, 96 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

Trata-se de um problema de estrutura algébrica pois as operações aritméticas, puramente, não são mais suficientes. É semelhante ao Problema 2B, no entanto é caracterizado como um problema de partilha pois necessita do estabelecimento de relações (**E3**) entre os dados do problema para equacioná-lo. E assim o classificamos de raciocínio sofisticado. Tem encadeamento dos dados do tipo *fonte,* tendo como fonte o todo (total de figurinhas) e é de natureza multiplicativa nas duas relações que estabelece, enquanto que no Problema 2 conhece-se uma das partes, a de Rodrigo.

Como não parte de um valor conhecido de uma das partes, necessita estabelecer relações não tão diretas, entre os dados do problema, produzir significados, a fim de encontrar uma equação (*conversão*) que represente o enunciado. Resolvê-lo por meio de operações aritméticas puramente, através de tentativa e erro (**E1 e E2**) pode tornar o processo pouco econômico e cansativo, no entanto é previsível que o façam, assim como atribuindo valores nesse processo de tentativas.

Problema 4B:

4) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

Nesse problema há um encadeamento de relações com fontes diferentes, onde Beto depende de Paulo e Mario depende de Beto. Quanto à natureza das relações é duplo multiplicativo e de duas fontes, o número de figurinhas de Paulo e de Beto. Esperamos estratégias de cálculo mental ou cálculos explícitos (**E1 e E2**) como também o estabelecimento de relações (**E3**), peculiar a problemas algébricos como este.

Há um grau de congruência e de dificuldade que podemos considerar médio a sofisticado. No entanto, se redigirmos em fonte única, esse grau de congruência passa a ser mais alto, como no Problema 3B. E verificaremos esse fato na análise das respostas dadas à essas questões do teste, nas análises dos resultados.

Problema 5B:

5) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de figurinhas de Paulo e Mário fique com quatro figurinhas a mais que Beto. Quantas figurinhas cada uma vai receber?

Com essa nova formulação dada ao Problema 4B, como se apresenta no problema 5B, envolvendo duas relações de natureza diferentes, uma multiplicativa e a outra aditiva, o grau de congruência semântica pode aumentar e de dificuldade também. Um problema algébrico de raciocínio sofisticado. São relações de composição, com duas fontes, como no Problema 4B, porém uma delas é evocada pela adição, que é uma operação de mais familiaridade ao aluno.

Dois problemas semelhantes, a exemplo dos que propusemos como 4B e 5B, e que representam o mesmo objeto matemático, podem ter níveis de dificuldades diferentes, não do ponto de vista matemático, mas do ponto de vista cognitivo. E a linguagem aproxima o aluno das relações e estratégias que podem levar à solução do problema (**E1, E2, E3**). Vamos verificar entre as relações requeridas pelos problemas, aditiva ou multiplicativa, qual delas tem um nível de congruência semântica maior e de dificuldade também.

Almeida (2016) verificou que problemas com mais de uma fonte dificultam o estabelecimento de relações para alunos do 6º. Ano. Os alunos atribuem valores e por tentativa e erro buscam a solução do problema realizando operações aritméticas.

Entendemos que há mobilização de relações nestes procedimentos essencialmente aritméticos. No entanto não há uma generalização quando a incógnita aparece para o aluno como um espaço vazio que precisa ser preenchido por um valor específico, nas operações de tentativa e erro.

É esperado que os alunos realmente atribuam valores na tentativa de resolver tais problemas. No entanto, entendemos que nessa ação também são mobilizados processos como a capacidade de modelar situações para uma linguagem sincopada e a capacidade de construir significados para a linguagem e para os objetos algébricos dos problemas. E podem revelar então indícios de pensamento algébrico. Essa hipótese poderá ser validada a partir das respostas dos alunos aos instrumentos escritos da sequência didática e também pelas entrevistas que faremos em busca de testar a nossas hipóteses.

4.2.3 Experimentação: 3ª. sessão

Após a análise do livro didático em busca de tarefas que privilegiassem o desenvolvimento do pensamento algébrico e pela análise dos problemas propostos nas seções anteriores, elaboramos o instrumento desta terceira e última sessão de experimentação. São problemas em linguagem natural e mista, aritméticos/algébricos, de raciocínio sequencial, funcional e de equilíbrio, e dos tipos numérico e icônico.

Assim como nas sessões anteriores, atentamos para elaborarmos e selecionarmos tarefas próximas à realidade dos alunos e com potencialidades para desenvolver o raciocínio matemático de generalização, através das relações e conexões entre os dados dos problemas, e assim chegar ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

O Quadro 8 traz os problemas desta terceira sessão e que serão discutidos e analisados na sequência.

Quadro 8: Teste aplicado na 3ª. sessão de experimentação

Nome: ____ Ano/Turma: ________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Os números da tabela abaixo obedecem a uma sequência. Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco:

a)

9	15	21			39	

b) Qual o décimo número dessa sequência?

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

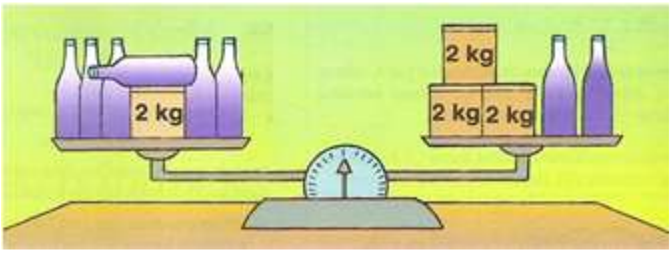
3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela abaixo com os valores para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

4) A balança ilustrada abaixo está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



Fonte: os autores, a partir de Aldrini, Vasconcelos (2015) e Porto (2018).

4.2.3.1 Análise *a priori* dos problemas da 3ª. sessão de experimentação

As estratégias que previmos para análise das tarefas propostas nesta terceira sessão são as mesmas descritas para a primeira e segunda seções de experimentação, de **E1 a E5.** Relembrando:

E1: A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro.
E2: A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro.
E3: O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca das soluções.
E4: A utilização do aspecto de observação de regularidades.
E5: Uso de *ostensivos* para representar a situação problema.

Problema 1C:

1) Os números da tabela abaixo obedecem a uma sequência. Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco:

a)

9	15	21			39	

b) Qual o décimo número dessa sequência?

O Problema 1C apresenta uma situação sequencial, de representação em linguagem natural e numérica no item (a) e em linguagem natural apenas no item (b). É de natureza aditiva, numa Progressão Aritmética crescente infinita e recursiva, cujo primeiro termo $a_1 = 9$, razão $r = 15 – 9 = 6$ e o termo geral ou lei de recorrência pode ser descrito pela equação $a_n = 3 + 6n$. É similar ao Problema 4A da primeira sessão, e classificamos de dificuldade simples. Apresenta no item (a) um *ostensivo* tabela que pode facilitar a percepção de regularidade (**E4**), que leva à solução do problema.

A situação (b) foi acrescentada em substituição à questão original do livro didático analisado (cito à p. 27, questão 5). Propositadamente questiona, em linguagem natural, o décimo termo dessa sequência com o objetivo de verificar a estratégia de observação de regularidades (**E4**), de estabelecer relações entre os dados conhecidos em busca do desconhecido e nesse contexto verificar indícios de pensamento algébrico de resolução. Trata-se de uma estratégia didática pensada para ser aplicada em sala de aula, ou nas entrevistas. Alongaremos este questionamento em busca dessas possibilidades que, acreditamos, possa ser feito em várias situações de resolução de problemas, buscando o raciocino de estabelecimento de relações e de generalização, fundamentais à formação do pensamento algébrico e à aprendizagem matemática.

Não é esperado que o aluno chegue a uma equação da lei de recorrência da sequência, principalmente porque essa lei $a_n = 3 + 6n$ não se dá pela soma imediata de a_1 com um múltiplo de n, como no Problema 1C. O valor 3 deve surgir a partir de tentativas (**E1** ou **E2**). No entanto esperamos que não tenha dificuldades em compreender a ordem e regularidade dos termos (**E3**).

Problema 2C:

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Os Problemas 2C, itens (a) e (b), se apresentam em linguagem natural e são classificados como problemas algébricos, onde há divisão de um todo conhecido em partes desconhecidas e desiguais, portanto um problema de partilha. Quanto à relação entre os dados do problema é do tipo *fonte,* conforme análises já realizadas anteriormente neste texto para os problemas similares da segunda sessão de experimentação. O problema do item (a) apresenta duas relações diferentes, uma multiplicativa e a outra aditiva e o problema do item (b) apresenta duas relações, ambas de natureza multiplicativa. Pelo número de relações, e diferentes, o classificamos de raciocínio sofisticado por requerer estabelecimento de relações (**E3**). Podem ser resolvidos por tentativas sucessivas, mas que podem ser procedimentos exaustivos (**E1, E2**).

Os problemas 2C foram elaborados a partir da única situação de partilha encontrada no livro didático analisado, que se encontra no capítulo Números e Operações (cito à p. 69, questão 76). Observamos que o livro analisado apresenta, em sua maioria, problemas de estrutura aritmética.

Propusemos atividades a partir da análise das questões do livro didático, acreditando que estas podem ser propícias ao desenvolvimento do pensamento algébrico, independentemente do tipo de questão, e são disponíveis ao professor e de fácil acesso para os alunos. Construímos assim argumentos para a nossa hipótese de que o desenvolvimento do pensamento algébrico não necessariamente está associado ao uso de símbolos, equações, incógnitas, variáveis, e sim pelo estabelecimento de relações e conexões ao tratar o desconhecido e a partir de então generalizar situações e pensamentos independente de trabalhar com a linguagem algébrica formal em problemas algébricos.

Problema 3C:

3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela abaixo com os valores pagos para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

Trata-se de um problema que apresenta uma situação funcional e que consideramos o nível de resolução simples, pois é possível solucioná-lo a partir de raciocínio aditivo e cálculo mental. A presença da tabela (a) pode facilitar a sua resolução e é pré-requisito para o item (b), que requer um nível de raciocínio mais sofisticado para solucioná-lo.

A *condição* para o aluno resolver este problema é ter noções básicas do conceito de proporcionalidade, pois se trata de uma proporção direta que matematicamente pode ser representada pela função $y = ax + b$, com $f: N \rightarrow N$, dada a nossa restrição de pesquisa aos números naturais. Nessa função **x** é variável e representa o número de horas, **a** e **b** são valores fixos que representam, respectivamente, o valor de cada hora e valor fixo, os três reais iniciais, e **y** é o valor pago em reais pelo estacionamento em função do número de horas estacionado.

Não é esperado que o aluno chegue a essa lei de relação funcional, pela própria *restrição* imposta pelo currículo do 6º. Ano, diante do contexto matemático que vive, ainda sem nenhum contato com equação. No entanto é esperado que perceba essa relação (**E3**) entre o que varia e o que não varia, construindo assim o conceito de variável, como também pela observação de regularidades (**E4**) a relação de dependência do valor final em relação à variável **x**, que é o número de horas estacionado. Não pode descartar a possibilidade de resolução por estratégias aritméticas de tentativa e erro (**E1** e **E2**) pela familiaridade que têm com as operações aritméticas.

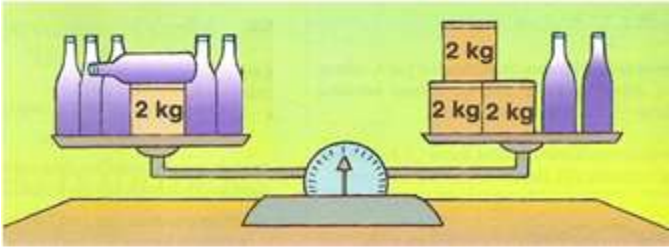
Na alternativa (b), temos uma situação funcional, com a presença de um *ostensivo* tabela que pode auxiliar no desenvolvimento de um raciocínio de generalização (KIERAN, 2007; RADFORD, 2009), pois nos remete à ideia da relação de dependência de um valor que está além dos valores explícitos na tabela. E, portanto, classificamos de raciocínio sofisticado, por essa generalização que induz.

O raciocínio funcional que o problema induz remete ao pensamento algébrico de pensar o desconhecido, tratar como se fosse conhecido e ainda de nomeá-lo. Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico surge a partir de "percepções de regularidades; percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; tentativa de expressar a estrutura de uma situação-problema; presença da generalização" (p. 97). E a generalização é o princípio dos estudos da *Early Algebra* (BLANTON; KAPUT, 2002; BLANTON; CONFREY, 2004; CAHARRER; SCHILIEMANN; BRIZUELA, 2006; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT, 1998, 2000) que consideram o centro da atividade algébrica (KAPUT, 1999; RADFORD, 2009) e, portanto, do pensamento algébrico.

Não é observado nos livros didáticos, em especial no livro didático analisado essa indução ao raciocínio funcional. A relação de dependência fica implícita nos problemas e é tratada como uma proporcionalidade apenas, omitem a relação existente entre as operações básicas da aritmética e as noções de funções (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2016). Acrescenta-se que na atual organização curricular, o conceito de função somente é estudado a partir do 8º ano, do Ensino Fundamental.

Problema 4C:

4) A balança ilustrada abaixo está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



O problema 4C foi elaborado a partir de duas situações do livro didático (cito à p. 75 e p. 193) que trazem a balança como um objeto *ostensivo* para evocar o conceito de equilíbrio e, portanto, de igualdade, como também a equivalência entre esses *ostensivos*, ou seja, garrafas e pesos. O conjunto dos *ostensivos* que representam o prato do lado esquerdo da balança equivale ao mesmo conjunto de *ostensivos* do prato do lado direito dessa igualdade. Existe ainda a possibilidade do *ostensivo* gestual que normalmente é apresentado com as mãos quando nos referimos aos dois lados da igualdade, ou aos dois pratos.

O problema aborda uma equação, de representação icônica e com nível de dificuldade que consideramos sofisticada. Requer, a princípio, estratégias de observação de regularidades (**E4**) para que se possa realizar qualquer cálculo aritmético (**E1** e **E2**). O problema apresenta uma relação de equivalência entre os pratos da balança que apresenta de forma implícita as propriedades simétrica e transitiva da aritmética. No entanto não é esperado que os alunos usem o sinal de igualdade e *convertam* a situação pictórica numa equação. As garrafas são objetos *ostensivos* que representam as incógnitas, os pratos representam os membros de uma equação e o "fiel" da balança o sinal de igualdade.

Algebricamente, podemos modelar a seguinte equação, considerando a garrafa como **x** e os pesos numéricos conhecidos da seguinte forma:

$$6x + 2 = 2x + 6$$

Nesse problema esperamos que o aluno possa perceber a relação de equivalência entre os pesos dos dois pratos da balança. Além disso que estrategicamente seja capaz de perceber que, se retirados de ambos os pratos iguais quantidades de pesos, ou garrafas, o equilíbrio permanecerá. Conjecturamos que a partir dessa estratégia o aluno seja capaz de inferir, a partir da visualização do lhe é *ostensivo*, ou seja, os pesos e garrafas, que um peso de 2 kg equivale a duas garrafas. E a partir daí que uma garrafa equivale a 1 kg, pela propriedade simétrica. Com isso o aluno estará construindo a noção de relação de igualdade (equilíbrio) não como um resultado de uma operação, e sim uma relação de equivalência (LINS; GIMENEZ, 2001).

4.2.4 Síntese da análise *a priori*

O objetivo da análise *a priori* foi determinar como as escolhas das atividades permitiam controlar os comportamentos dos alunos e possibilitar respostas às nossas hipóteses. Para tanto descrevemos as características matemáticas e didáticas dos problemas, analisamos as possíveis estratégias dos alunos, explorando a generalização, a explicitação de leis, o raciocínio intuitivo e dedutivo e a identificação de estruturas operatórias que poderiam influenciar na relação aluno/saber, no raciocínio algébrico e na linguagem da álgebra formal.

Os problemas foram em linguagem natural ou icônica, que requeriam conhecimento básico de operações com números naturais. Poderiam ser resolvidas por intuição de cálculo mental, tentativa e erro e por operações de *tratamentos* e *decodificações* (DUVAL, 2003).

Os problemas traziam *ostensivos*, como quadrinhos, bolinhas, tabelas, gráficos, esperando um pensamento algébrico que subsidiasse as primeiras ideias dos *não-ostensivos* incógnita e variável.

A *condição* que mais prevalece na solução dos problemas é tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009, SQUALLI, 2003), numeralizando-o.

Observou-se no livro didático uma ênfase maior nos problemas aritméticos. Apresenta sequências numéricas, de indução ao raciocínio aritmético e não foi observado indução ao raciocínio funcional. Entendemos que há aí uma *restrição* imposta pelo currículo do 6º. Ano, o fato dos alunos pesquisados não terem visto equação algébrica, por época da aplicação deste teste. No entanto presumimos que nas tarefas que demandavam esse tipo de raciocínio o aluno pudesse perceber ordem, regularidade dos números, o que varia, e, intuitivamente, o conceito de variável.

Com intuito de relembrar as nossas variáveis de pesquisa e a relação entre as questões do instrumento e essas variáveis, apresentamos a seguir um quadro síntese, o Quadro 9, contendo uma visão geral dessas questões. Nele são apresentados os tipos de problemas quanto ao objeto matemático, o registro de representação usado para apresentá-los e o nível de dificuldade de cada questão que categorizamos *a priori*. E também apresentamos o Quadro 10 com uma síntese das estratégias de resolução que previmos e discutimos na análise didática das questões, com os respectivos problemas. Estes servirão às análises *a posteriori* que trazemos em seguida.

Quadro 9: Os problemas das experimentações e o tipo de raciocínio requerido

Tipo de Problema/ Objeto matemático	Registro de Representação	Nível de dificuldade	Problema/item
SEQUÊNCIA	Linguagem Natural	Simples	**1Cb**
		Sofisticado	
	Linguagem Icônica	Simples	**1Ca; 4ª**
		Sofisticado	**3ª**
FUNÇÃO	Linguagem Natural	Simples	
		Sofisticado	**2Aa; 2Ab**
	Linguagem Icônica	Simples	**3Ca**
		Sofisticado	**3Cb**
EQUAÇÃO	Linguagem Natural	Simples	**1B**
		Sofisticado	
	Linguagem Icônica	Simples	**1Aa; 1Ab;**
		Sofisticado	
ARITMÉTICO/ ALGÉBRICO	Linguagem Natural	Simples	**2B; 2Ca; 3B**
		Sofisticado	**2Cb; 4B; 5B**
	Linguagem Icônica	Simples	
		Sofisticado	**4C**

Fonte: os autores (2018).

Os enunciados dos problemas são no registo da língua natural, sendo que os que apresentam figuras em sua formulação classificamos como linguagem icônica. Assim, são oito problemas em linguagem icônica e dez em linguagem natural. Privilegiar a linguagem natural é hipótese de estudo, quando assumimos que a resolução de problemas em linguagem natural e o apropriar-se da linguagem algébrica significando-a são fatores preponderantes à aprendizagem matemática.

Quanto ao nível de dificuldade dos problemas são dez classificados como simples e oito como sofisticados. A nossa premissa é que o pensamento algébrico pode surgir a partir de problemas mais simples, sem necessariamente estar associado ao uso de ferramentas algébricas, letras, símbolos ou em linguagem distante do contexto de quem o resolve. Primamos pela indução ao raciocínio de estabelecimento de relações e conexões, como o funcional, de equação, em problemas aritméticos e algébricos. E esse é um dos objetivos da sequência didática, enquanto possibilidade didática ao professor de matemática.

Quadro 10: Estratégias de resolução dos problemas previstas na análise *a priori*

Estratégia	Descrição	Problemas
E1	A utilização de estimativa ou cálculo mental, através da tentativa e erro	**1A; 1B; 1C; 2B; 2C; 3B; 3C; 4A; 4B; 4C; 5B**
E2	A busca das soluções utilizando cálculos explícitos, através da tentativa e erro	**1B; 1C; 2B; 2C; 3B; 3C; 4B; 4C; 5B**
E3	O estabelecimento de relações entre os dados do problema para a busca das soluções	**1C; 2A; 2B; 2C; 3A; 3B; 3C; 4B; 5B**
E4	A utilização do aspecto de observação de regularidades	**1C; 3A; 3C; 4C**
E5	Uso de *ostensivos* para representar o problema	**1B; 2B**

Fonte: os autores (2018).

Tais estratégias pensadas *a priori* são as nossas variáveis didáticas da pesquisa. São as possíveis ações que os alunos manifestarão nas suas tomadas de decisão em busca de solucionar os problemas. É o caminho que planejamos para observar o desenvolvimento do pensamento algébrico, visto que o aporte teórico nos instrumentou com esses requisitos considerados essenciais ao desenvolvimento desse tipo de pensar, tão importante à aprendizagem matemática.

Assumimos o pensamento algébrico como aquele que se caracteriza pelas conexões e relações que são estabelecidas no processo de construção das possíveis soluções dos problemas. Assim, pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido num contínuo processo de produção de significados para os símbolos e objetos da álgebra; é observar regularidades; fazer *conversões* de linguagem, como da linguagem natural para as linguagens oral, algébrica e figural e realizar cálculos; é manipular *ostensivos* para evocar os *não-ostensivos* imprescindíveis à aprendizagem matemática.

Dentre as estratégias previstas, temos o maior número de problemas concentrando-se em **E1** e o menor número em **E5**, gradativamente. Identificamos que nesse nível em que os alunos pesquisados se encontram, fechando um ciclo de aritmeticismo, a estratégia de tentativa é a mais comum, e assim verificamos nas pesquisas correlatas que nos aportaram na elaboração destas estratégias.

4.3 Análise *a posteriori*

Pelos pressupostas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), nossa opção metodológica, esta é a última fase e onde vamos efetuar uma análise cruzada, mais ampla, ao nível do pensamento algébrico, com o intuito de compreender as características dos alunos pesquisados frente às atividades propostas.

Esta fase, segundo Artigue (1996), se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com o que previmos e traçamos na análise *a priori*. Realizaremos a interpretação dos resultados, analisaremos as condições em que as questões propostas foram respondidas e cruzaremos com o nosso aporte teórico. Assim, emanarão as possíveis soluções ou contribuições para problemática levantada, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

Discutiremos aqui os resultados obtidos com a aplicação dos testes nas sessões e experimentação, fazendo uma confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori* realizadas, ponderando pelos objetivos de pesquisa que foram traçados, como também:

_ pelas estratégias de resolução que conjecturamos nas análises *a priori* para os problemas dos testes de experimentação;

_ pelas *condições* e *restrições* para a existência do objeto matemático pensamento algébrico no contexto da Sequência Didática elaborada;

_ dos aspectos inerentes ao pensamento algébrico destacados na revisão de literatura e nas teorias de aporte elencados;

_ pelos tipos de problemas e raciocínio matemático requerido – sequencial, funcional, de equação ou mistos, sejam aritméticos ou algébricos – de acordo os problemas experimentados;

_ pelos objetos *ostensivos* e outros registros de representação, como a linguagem, presentes nos problemas ou utilizados na resolução destes.

Defendemos que os *ostensivos* associados aos problemas são de grande importância para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pelas relações que estabelece. No entanto, nesta análise não intencionamos identificar todos os *ostensivos* e *não-ostensivos* que envolvem a construção de um novo campo de conhecimento, no caso a álgebra. Surgirão gestos, contagem nos dedos, para indicar operações e esses *ostensivos* não estarão aqui indicados. Dessa forma, *ostensivos* e os *não-ostensivos* aqui analisados serão aqueles identificados, tanto nos instrumentos analisados, como nas produções dos alunos obtidas por meio da resolução do teste. A exemplo: operações numéricas e propriedades operatórias de soma, subtração, multiplicação, divisão.

Antes, porém, vamos destacar uma visão geral dos números gerados pelas experimentações, necessários à essa última análise.

4.3.1 Experimentações: aplicação e análise geral

Foi aplicado um quantitativo de 228 testes, considerando as três sessões e as três turmas. No entanto 24 destes não serão considerados para efeito de análise qualitativa de respostas por estarem totalmente em branco. Surge então *a posteriori* uma nova categoria de análise, a **E0** como ausência de estratégia e que inclui os testes em branco ou que não conseguimos identificar a estratégia utilizada.

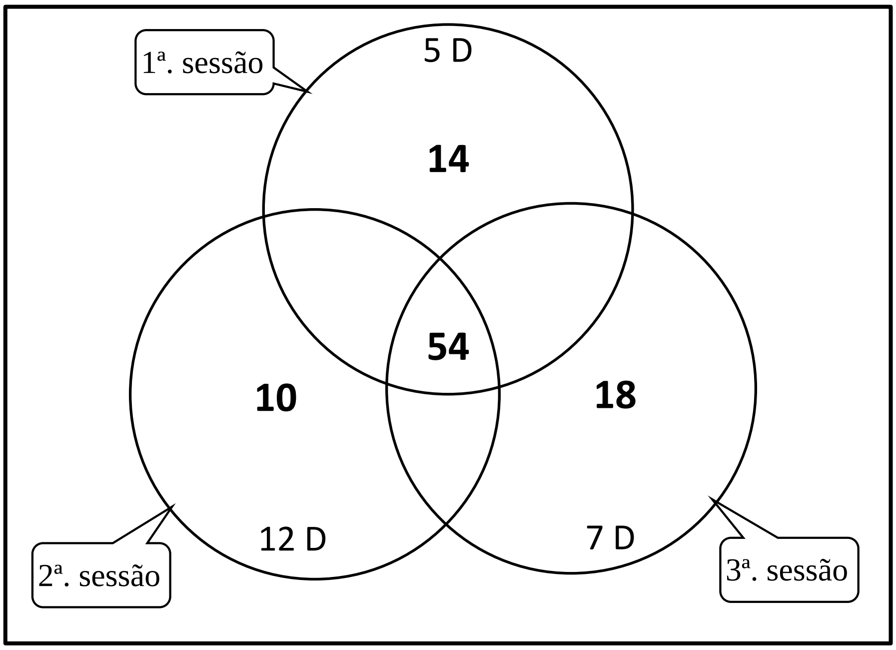
Foram 5 testes em branco na 1ª. sessão; 7 na 2ª. sessão; e 12 na 3ª. sessão. No entanto estes serão analisados quanto às possíveis razões de não terem sido respondidos, pois realizamos entrevistas com esses alunos. Oportunamente discutiremos esses casos.

Nas três turmas participantes foram distribuídos no total 111 TCLE para os alunos menores (e todos os matriculados eram menores) levarem para os seus pais ou responsáveis tomarem conhecimento e, caso concordassem, fazer a devolutiva devidamente assinado. Tivemos a devolutiva de 77 termos assinados e este constitui efetivamente o nosso universo de testes a serem analisados.

Considerando então como válidos os testes cujos alunos entregaram o TCLE e que constam algum registro de representação como resposta, seja a língua escrita, oral, figural, gestos, temos para as análises: 68 testes na 1ª. sessão; 72 na 2ª. sessão; e 64 na 3ª. sessão de experimentação, considerando as três turmas participantes. Considerando que o teste da 1ª. sessão continha 4 problemas; da 2ª. sessão 5; e da 3ª. sessão 4, totalizamos 272 problemas na 1ª. sessão; 360 na 3ª.; e 256 na 3ª. sessão. Fechamos assim um quantitativo de 888 problemas.

Fazendo a interseção entre esses testes aplicados, validamos 54 testes de alunos que participaram das três seções de experimentação, sendo 18 da 1ª. sessão; 20 da 2ª. sessão; e 14 da 3ª. sessão. Não vamos considerar a interseção duas a duas, apenas entre as três sessões. A Figura 16 esquematiza essa distribuição, na forma de um Diagrama de Venn[37]. Os testes em branco (ausência de estratégias) são representados com o número que representa a quantidade de testes, acompanhado da letra D.

Figura 16: Diagrama de Venn para representar a quantidades de testes aplicados



Fonte: os autores (2018).

[37] Diagrama criado por **John Venn** que consiste em círculos que possuem a propriedade de representar relações entre conjuntos numéricos. Fonte: https://brasilescola.uol.com.br

Tal como previmos, presumindo a necessidade, foram realizadas 18 entrevistas com o grupo de alunos que utilizaram algum registro de representação para responder os problemas, e que deixaram dúvidas nos procedimentos utilizados para solucionar os problemas. Estes alunos foram em número de: 5 na 1ª. sessão; 10 na 2ª. sessão; e 3 na 3ª. sessão de experimentação. Estas foram gravadas e transcritas e serão enxertos nas análises a seguir, quando couber.

Antes da aplicação dos testes de cada sessão de experimentação (cronogramas nos Quadros 11, 12 e 13), fizemos algumas considerações com os alunos:

_ A pesquisadora[38] aplicaria os testes, leria com eles, tiraria dúvidas, no entanto não poderia fornecer respostas ou dicas para a solução dos problemas, assim como a professora da turma;

_ As atividades eram para serem resolvidas individualmente, no entanto poderiam, e assim desejávamos, que trocassem ideias entre eles, se comunicassem, mas que não copiassem somente a resposta, discutissem a solução;

_ As respostas deveriam ser dadas nos espaços destinados a elas e à caneta;

_ Todo e qualquer cálculo ou procedimento para construir a resposta deveria ser registrado na folha, não apagar mesmo os que eles considerassem errado, neste caso poderiam circular ou fazer um traço indicando que era inválido.

4.3.2 Análise *a posteriori* dos problemas da 1ª. sessão de experimentação

Os testes completos já foram apresentados neste capítulo (Subseção 4.2) e destacaremos apenas os problemas a serem analisados.

Por se tratar de um estudo qualitativo em que objetivamos observar as *condições* e *restrições* para o desenvolvimento do pensamento algébrico, não nos interessou categorizar dados quantitativos de erros e acertos. O que nos interessa são as estratégias e o caminho para a construção desse tipo de pensamento, observando, claro, se esse caminho leva à solução do problema.

[38] Apesar desse texto ser escrito na 1ª. pessoa do plural, como produção conjunta de orientanda e orientadores, nesse e em alguns outros momentos o uso do termo pesquisadora se refere à orientanda, pois esta que fez a experimentação da pesquisa.

Previmos três encontros para a 1ª. sessão e estes aconteceram, no mês de julho e não em junho como previmos, em datas e horários diferentes em cada turma, conforme mostra o Quadro 11. Chamamos de encontro o período de uma hora/aula e utilizamos encontros que aconteciam no mesmo dia, em aula geminadas, para aplicar os testes por considerar ideal para não "quebrar" a aplicação dos testes.

No dia 06/07/2018 aconteceu o primeiro encontro em cada uma das três turmas, quando apresentação a pesquisa e seus objetivos, os termos legais e da função de cada um dos participantes na pesquisa. Em seguida entregamos o TCLE para os alunos menores levarem aos responsáveis para assinarem, caso concordassem. Lembramos que a devolutiva deveria ser feita na semana seguinte ou o mais breve possível. Enviamos 111 termos e tivemos a devolutiva de 77 deles assinados. Os encontros seguintes foram de aplicação dos testes de experimentação.

As entrevistas, quando necessário, foram realizadas após a conclusão das atividades de cada sessão. Enquanto as realizava (a pesquisadora) a professora da turma seguia seu planejamento com atividades rotineiras. Não as classificamos, *a priori*, como encontros, por se tratar de um momento especial, incerto e apenas com alguns alunos.

Quadro 11: Cronograma dos encontros na 1ª. sessão de experimentação

Encontro	**Data**			**Atividade desenvolvida**	**Duração aprox.**
	TA	**TB**	**TC**		
Apresentação	06/07/18	06/07/18	06/07/18	Apresentação da pesquisa/pesquisadora; entrega TCLE.	40 min
1º.	09/07/18	10/07/18	10/07/18	Aplicação do teste individualmente, atividades 1A e 2A.	40 min
2º.	09/07/18	10/07/18	10/07/18	Aplicação do teste individualmente, atividades 3A e 4A.	45 min
3º.	10/07/18	13/07/18	13/07/18	Discussão oral e em grupo sobre o teste aplicado e correção.	45 min
Entrevistas	13/07/18	16/07/18	16/07/18	Realização de entrevistas com alunos que deixaram o teste em branco ou cujas repostas deixaram dúvida.	30 min

Fonte: os autores (2018)

Nesse primeiro encontro, tal como previmos, os testes foram distribuídos individualmente. Os quatro problemas estavam impressos em uma folha de papel, frente e verso. Solicitamos que resolvessem um problema por vez e deixassem todos os cálculos e tentativas registrados. Cada problema foi resolvido primeiro pelos alunos e depois discutimos juntos, mesmo com as solicitações feitas durante a atividade.

A princípio solicitamos registrar as respostas e todo o processo a caneta, ou pelo menos a resposta final, mas alguns resistiram e entregaram a lápis.

Fazendo uma análise geral do teste e sua aplicação, observamos que a linguagem dos enunciados estava adequada, mesmo com as dúvidas de interpretação que surgiram, mas pelas nossas vivências entendemos como peculiar a esse nível de ensino, como também inerentes às estruturas dos problemas.

Fatores intervenientes surgiram! A primeira reação da turma ao receber o teste foi de espanto. Ouvimos muitas exclamações de alunos do tipo (informação verbal): _*Professora eu não sei fazer nada disso aqui*!

Nesse momento os incentivamos a ler os problemas, e com calma tentarem responder. E assim lemos juntos cada problema, mas evitando dar indicativos de como respondê-los.

Outro fator foi o fato de termos entregue aos alunos os problemas de uma só vez, deixando-os ansiosos em responder todos. Repensaremos para as próximas sessões esta estratégia.

A seguir apresento individualmente cada problema e sua *análise a posteriori*, assim como os pormenores de cada situação.

1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

a) $\blacksquare + 5 = 12$. Então o $\blacksquare$ vale ________________________________

b) $\blacksquare - 5 = 0$. Então o $\blacksquare$ vale ________________________________

Esse problema foi classificado como de dificuldade simples, cujas relações remetem a uma equação e fazendo uso de linguagem natural e icônica.

A resposta correta é: na primeira situação o quadrinho assume o valor 7 e na segunda vale 5. Para se chegar a esse resultado há necessidade de compreender operações de soma e subtração e suas inversas.

A seguir apresentamos individualmente cada problema e sua análise *a posteriori*, assim como os pormenores de cada situação.

1A) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

a) □ + 5 = 12. Então o □ vale ________________________________

b) □ – 5 = 0. Então o □ vale ________________________________

Classificamos *a priori* o problema 1A como de dificuldade simples, cujas relações remetem a uma equação, fazendo uso de linguagem natural e icônica.

A princípio buscamos observar nas resoluções dos alunos a sua percepção em relação ao aspecto de variável: na primeira situação o quadrinho assume o valor 7 e na segunda o mesmo quadrinho vale 5. Para se chegar a esse resultado há necessidade de compreender operações de soma e subtração e suas inversas.

Tivemos um percentual de 52% de acertos a esse problema, na média entre os itens a e b. A leitura desse índice, ainda que diferenciado se na adição (a) ou subtração (b), reforça as discussões que trouxemos até então quanto às competências dos estudantes em resolver problemas simples envolvendo as noções básicas de operações fundamentais, que já fazem parte do seu repertório de conceitos.

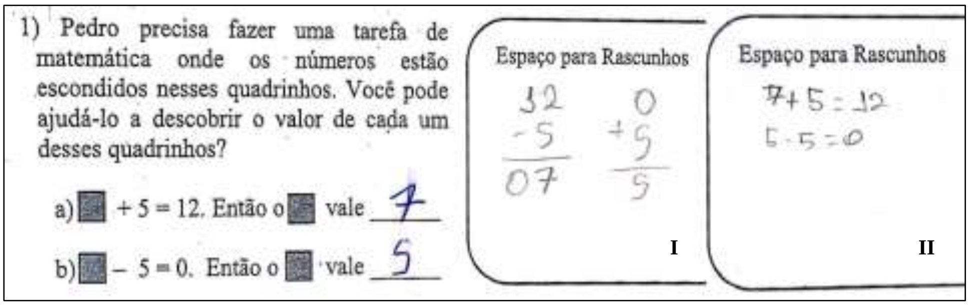
Destacamos três situações distintas quantos às respostas dos alunos a esse problema, que aconteceram com frequência:

I) Os que responderam direto, sem registrar nenhum cálculo (**E1);**

II) Os que registraram cálculos, seja como justificativa do cálculo mental (**E2**), ou utilizando operação inversa expressando raciocínio equacional de incógnita (**E3**).

A Figura 17 ilustra essas duas situações nos protocolos de pesquisa.

Figura 17: Resoluções do problema 1A pelos alunos TA2[39] (I), TA23 (II)



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Interessa-nos analisar como surgiu o raciocínio algébrico de pensar o *ostensivo* quadrinho como uma incógnita. Então entrevistamos o aluno (TA2) cujo protocolo está destacado na Figura 17 (I):

P[40]: *Por que você fez 12 – 5 para encontrar o resultado?*

A[41]: *Por que é assim professora*.

P: *Mas será que poderia ser diferente? Por que você subtraiu?*

A: *Diferente?* (pausa ...) *Não, não dá. Porque se somando com 5 dá 12 então tirei o 5 e achei o 7. E 7 mais 5 é 12.*

P: *E o quadrinho lhe ajudou a responder?*

A: *Ajudou.*

P: *Ajudou como assim?*

A: *Ele tampou o número que eu tinha que pensar*.

A partir das entrevistas entendemos que a troca do quadrinho por uma letra não interferiria na realização da tarefa. E ainda, reforça nossa hipótese de que os conteúdos e conceitos da álgebra não estão localizados em uma série específica, no uso de letras, símbolos, mas podem ser trabalhados ao longo da formação escolar do estudante. Encontrar um termo desconhecido dentro do quadro da aritmética generalizada, como na situação, é uma *tarefa* equivalente a resolver uma equação do primeiro grau. Tais

---

[39] Identificaremos os alunos pela Turma e número de ordem da lista de matricula. Assim TA2 significa que é o aluno de número 2 da Turma A. E assim para as demais turmas.
[40] Pesquisadora
[41] Aluno(a)

constatações vão ao encontro do que preconiza a BNCC (BRASIL, 2017), o movimento *Early Algebra* e as demais pesquisas que investigamos.

Nas nossas análises *preliminares* vimos que esse tipo de *tarefa* é apresentada no livro didático (do 6º. Ano que analisamos), especificamente no capítulo *Números e Operações*, de forma recorrente. Faz parte das atividades de fixação do conceito de subtração como operação inversa da adição, na aritmética generalizada.

As *tarefas* realizadas dentro da aritmética generalizada (USISKIN, 1995) são aquelas para as quais ainda não faz uso explícito das estruturas algébricas, comum a esse nível de ensino, pela obediência às orientações curriculares. Entretanto, as regras necessárias para a solução dessas tarefas permitem a manipulação dos *ostensivos* de forma a possibilitar a introdução e o desenvolvimento de novos *não-ostensivos* por meio da generalização dos *não-ostensivos* com os quais os alunos já têm vivência.

A *técnica* operação inversa tem sua resolução tanto dentro do quadro da aritmética quanto no quadro algébrico e, portanto, pode transitar pelo Ensino Fundamental, anos finais, na *condição* de conhecer e significar operações com números naturais, ou seja, de compreender o seu conceito e saber aplicar em outros contextos.

Na entrevista, quando questionamos se o quadrinho ajudou e porque subtraiu, para a resolução do problema buscamos indícios da ideia do *não-ostensivo* operação inversa da adição ser evocado a partir do *ostensivo* operações com números naturais. Em nenhuma das entrevistas obtivemos como resposta "uso da operação inversa". A nós ficou implícito: os *não-ostensivos* dessa tarefa estão relacionados ao conceito de números naturais e operações.

Partindo do pressuposto de que lidar com o desconhecido como se fosse conhecido em tarefas matemáticas é indício de um pensamento mais avançado, como o pensamento algébrico, privilegiar tais tarefas no ensino da Matemática é uma estratégia didática que consideramos válida.

Reside também não ostensivamente nesse problema 1A, assim como nos problemas 1B e 4C, a noção de igualdade como princípio de equivalência. São noções básicas da Álgebra Elementar que residem quietamente no currículo de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental à espera de serem despertadas. E o 6º. Ano é um momento propício.

2A) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R$ 3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

a) Quem tem mais dinheiro? __________________

Por quê? ____

____

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso?

____

____

A relação de dependência entre os dados do problema 2A nos fez classificá-lo de raciocínio funcional e nível de resolução sofisticado, diante da condição de ser aplicado no 6º. Ano. Como previmos, requer um conhecimento algébrico mais elaborado, na montagem de uma função a partir de um contexto numérico em linguagem natural, onde o desconhecido é variável. No entanto, não observamos nenhuma resolução que associasse o problema a uma situação funcional.

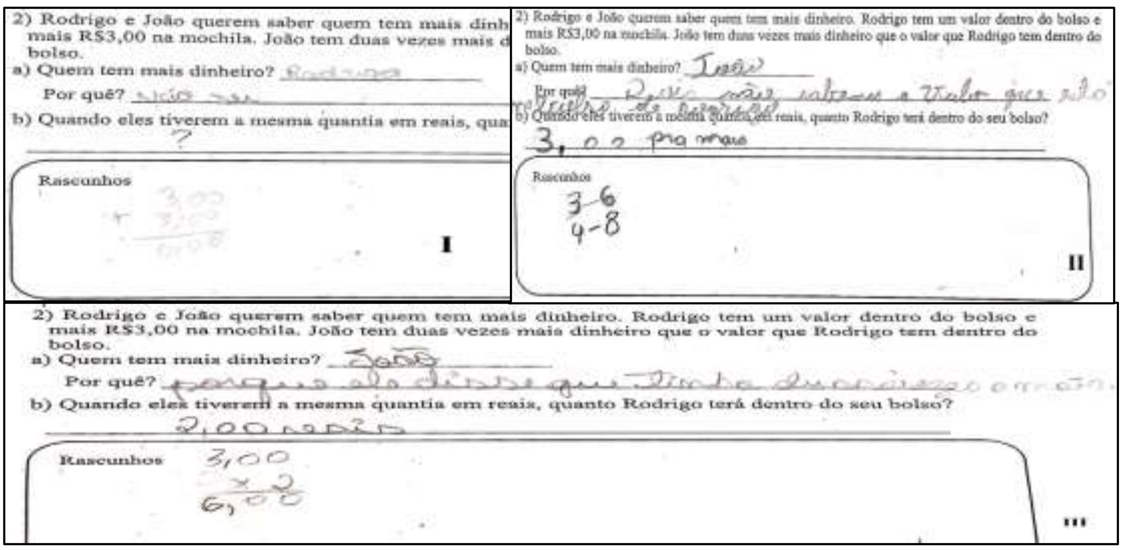
Elencamos nas respostas dos protocolos de pesquisa duas situações distintas quanto às relações que podem ser estabelecidas em problemas que admitem raciocínio de equacionar, como nesse problema 2A:

I) Não identifica equivalência, igualdade, incógnita e variável;

II) Identifica pelo menos uma dessas relações, mesmo que parcialmente.

Destacamos na Figura 18 essas três situações nos protocolos de pesquisa.

Figura 18: Resoluções do problema 2A pelos alunos TA13 (I), TB7 (II), TC21 (III)


2) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R$3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

a) Quem tem mais dinheiro?

Por quê?

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso?

Rascunhos

I

3-6

4-8

II

3,00

x 2

6,00

III

Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Os questionamentos propostos neste problema foram colocados na intenção de levar o aluno a generalizar propriedades fundamentais e que o auxiliaria na passagem da aritmética para a álgebra, vejamos:

_ “Quem tem mais dinheiro?” induz a um raciocínio de dependência funcional, e,

_ “ Quando eles tiverem a mesma quantia...” induz ao raciocínio de equilíbrio, de equação.

Auxílio esse que se daria, pelo nosso entendimento, na medida em que o *não-ostenvivo* propriedades dos números pudessem ser por ele mobilizado a partir do *ostensivo* operações com números naturais. Essa mobilização levaria à justificativa do fato de existir uma dependência, um valor que pode tornar as quantias iguais e outros valores que podem tornar as quantias diferentes, ora maior para João, ora maior para Rodrigo.

Na situação I temos o grupo de alunos que não conseguiram esse estabelecimento de relações e foi representado por mais de um terço dos alunos pesquisados. Na situação II temos um grupo de alunos cuja estratégia dispensada para solucionar o problema é operatória (**E1, E2**) no entanto já se percebe um caminho à generalização, um primeiro passo ao raciocínio funcional e de pensamento algébrico. Nas situações destacadas temos o protocolo de um aluno (II) que percebe apenas uma das relações, a de ordem, no entanto não consegue identificar dependência entre os valores dos meninos. A expressão usada por ele “*3,00 pra mais”* nos faz perceber o seu entendimento de dependência, como um raciocínio funcional, ou seja, que a situação de João ter mais dinheiro que Rodrigo só ocorrerá se Rodrigo tiver mais de três reais, considerando assim que o da mochila é invariável.

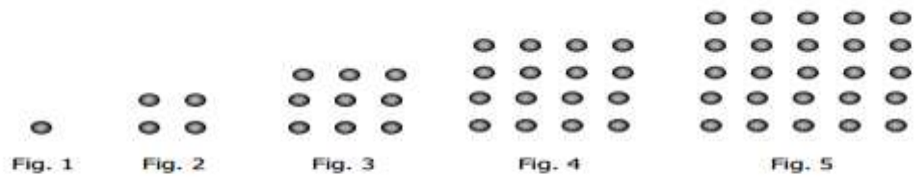
Tivemos um número menor de acertos no item 2Aa que atribuímos à impulsividade na leitura do *ostensivo* “duas vezes mais”. Estabelecendo só a relação de ordem (**E3**), evocou o *não-ostensivo* ideia de multiplicidade dentro do conjunto dos números naturais, apenas, sem significar a sua leitura e identificar a relação de dependência entre os dados do problema. É uma discussão que perpassa pela aprendizagem matemática, mas não é exclusiva, é de todo conhecimento. A dificuldade de interpretação e significação dos enunciados de um problema, de uma situação pode mascarar *ostensivos* que seriam fundamentais a sua resolução, como estratégias de resolução (**E5**) não observada.

O item 2Ab teve maior índice de acertos, o que não era esperado. Verificamos que se tratou de um estabelecimento simples de relações de maior e menor, raciocínio de inequação, a partir de tentativas (**E1; E2**) e se valendo da condição favorável de operar com números naturais, algo que lhe é facilmente evocado nesse nível de escolaridade. Os erros observados são na linha da operacionalização, mas não no conceito de adição.

Erros operacionais ainda são frequentes nesse nível de escolaridade. Foram frequentes em todos os testes. Durante a aplicação sempre chamávamos a atenção dos alunos para reverem os cálculos, não como indicativo de erro, mas para evitá-los.

Os problemas 3A e 4A trouxeram atividades de sequência. A *tarefa* é descobrir um padrão, ou mais de um, que define o comportamento da sequência e a partir de então generalizar. São estimulantes e fundamentais no momento da passagem da aritmética para a álgebra.

3A) Observe a sequência das figuras quadrangulares formada por bolinhas. Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer a 7ª figura?



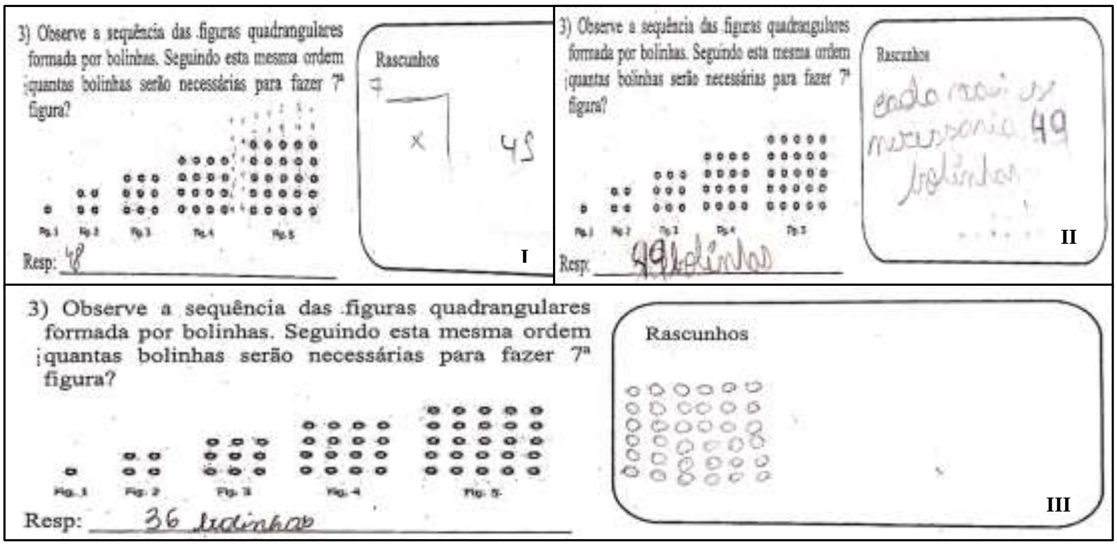
A apresentação icônica do problema 3A pode ter contribuído para o resultado de acertos em torno de 40%. Trata-se de um problema de solução única, mas de estratégias variadas, tal qual previmos *a priori*. No entanto observamos três outras que foram recorrentes, e para exemplificá-las temos os protocolos de pesquisa que estão na Figura 19.

I) Contou o número de bolinhas da base, desenhou a próxima e multiplicou os lados;

II) Associação entre a posição e o número de bolinhas, que é o produto (n x n);

III) Só desenhou a próxima, ou só deu a resposta, mas não generalizou.

Figura 19: Resoluções do problema 3A pelos alunos TA16 (I), TA22 (II) e TB20 (III)



Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Estas estratégias foram observadas nas respostas de alunos que acertaram os problemas, como também nos que erraram apenas a resposta final. Neste caso, observamos que se tratou de erros operacionais, não deixando de evidenciar raciocínio sequencial, recursivo, ou de progressão.

As estratégias I e III estão associadas ao uso de *ostensivos* para evocar operações e chegar ao termo desconhecido (**E5**) e a estratégia II traduz um raciocínio mais sofisticado de observação de regularidades (**E4**) e domínio dos conceitos das operações necessárias, sem, no entanto, torná-las *ostensivas*. A estratégia III foi a mais observada entre as respostas, independentemente de chegarem ao resultado correto. Observamos que chegavam à sexta figura e não atentavam para o enunciado. Faltavam-lhes a significação do enunciado e a generalização.

Para compreender a situação II entrevistamos dois alunos (TA16 (A_1) e TA22 (A_2)). Destacamos estas entrevistas, como informação oral, a seguir.

P: *Como você encontrou o número de bolinhas da sétima figura?*

A_1: *Ué, professora, tá lá! Na sete tem sete de um lado e sete de outro e aí dá 49.*

P: *Mas por que "na sete tem sete"?*

A_1: *Porque na 1 tem 1, na 2 tem 2 e tudo é multiplicando.*

P: *Você saberia me dizer então quantas bolinhas teria na 12ª. figura?*

A_1: *Sim, teria 24 ... (pausa). Não, teria ... (pausa) deixa eu fazer a conta.*

(e respondeu depois de calcular)

A_1: *Tem 124 bolinhas.*

E entrevistamos outro aluno em outra turma:

P: *Como você encontrou o número de bolinhas da sétima figura?*

A_2: *Eu pensei e vi que ia aumentando uma pro lado e uma pra cima.*

P: *E como você encontrou a resposta 49 bolinhas?*

A_2: *Só multiplicando.*

P: *Você saberia me dizer então quantas bolinhas teria na 12ª. figura?*

A_2: *Aí só fazendo a conta. Eu vou fazer a conta.*

(e respondeu depois de calcular)

A_2: *Tem 124 bolinhas.*

Classificamos esse problema *a priori* como de resolução sofisticada pensando numa possível relação com a potenciação (que os alunos ainda não tinham visto). No entanto, os *não-ostensivos* conceitos de sequência, sequência crescente e regularidade forma acessados. E a multiplicação deu conta de solucionar o problema.

Acrescenta-se que a representação icônica e os *ostensivos* relacionados à ordenação dentro da sequência facilitaram a estratégia de desenho que levou à percepção do aspecto recursivo (como toda sequência) e assim da generalização, como característica de pensamento algébrico. O recurso de imagens icônicas com um visual numérico favorece o desenvolvimento de abordagens intuitivas (LINS; GIMENEZ, 2001).

Problemas como os 3A e 4A se apresentam em livros didáticos desde os anos iniciais, como *tarefa* de desenhar a próxima figura, completar sequências mais simples, e que vão gradativamente dificultando, a partir dos conceitos que são aprendidos.

Essa *tarefa* de calcular o número de bolinhas de uma figura, que está além do que é mostrado, corrobora com nossa hipótese de que os aspectos da álgebra como a análise e generalização são trabalhados em anos anteriores a que ocorre a passagem da aritmética para a álgebra, sem necessariamente usarem objetos da álgebra. Ou seja, é o primar pelo raciocínio algébrico de resolução, não apenas a escrita algébrica.

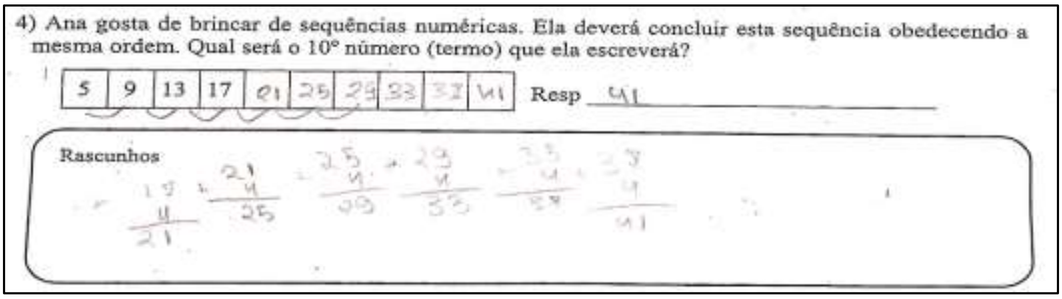
4A) Ana gosta de brincar de sequências numéricas. Ela deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 10º número (termo) que ela escreverá?

5	9	13	17						

Resp:

O problema 4A classificamos *a priori* como de raciocínio simples uma vez que remete a uma sequência recursiva crescente e aditiva, além da tabela que facilita a visão de regularidade e da própria sequência. O exemplo destacado no protocolo da Figura 20 traz um exemplo em que a lei recorrência aparece de forma clara pelo uso de um *ostensivo* risquinho para evocar a operação que originou a sequência.

Figura 20: Resolução do problema 4A pelo aluno TB20



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Nos dois problemas, 3A e 4A, o aluno fundamenta-se na generalização da relação existente entre os elementos que aparecem *ostensivamente* na sequência para encontrar termos desconhecidos *não-ostenvisos*. Quanto à capacidade de compreensão das sequências envolvidas nos problemas investigados e as estratégias (**E1, E2, E3, E4 e E5**) apresentadas nas respostas nos permite inferir que o aluno desenvolveu o pensamento algébrico, ao pensar o desconhecido como se fosse conhecido, ao generalizar, nas relações estabelecidas.

4.3.3 Análise *a posteriori* dos problemas da 2ª. sessão de experimentação

O Quadro 12 traz a sistemática e cronograma de aplicação dessa 2ª. sessão de experimentação. Discutiremos cada problema em separado na sequência do texto.

Quadro 12: Cronograma dos encontros na 2ª. sessão de experimentação

Encontro	Data			Atividade desenvolvida	Duração aprox.
	TA	TB	TC		
1º.	16/07/18	17/07/18	17/07/18	Aplicação do teste individualmente, atividades 1A e 2A.	40 min
2º.	16/07/18	17/07/18	17/07/18	Aplicação do teste individualmente, atividades 3A, 4A e 5A.	45 min
3º.	17/07/18	20/07/18	20/07/18	Discussão oral e em grupo sobre o teste aplicado e correção.	45 min
Entrevistas	20/07/18	23/07/18	23/07/18	Realização de entrevistas com alunos que deixaram o teste em branco ou cujas repostas deixaram dúvida.	30 min

O problema 1B, classificado como *falso problema* por Marchand e Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) pois os procedimentos aritméticos (**E1, E2**) puros são suficientes para solucioná-los, traz ainda assim a ideia de equivalência implícita na igualdade.

1B) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

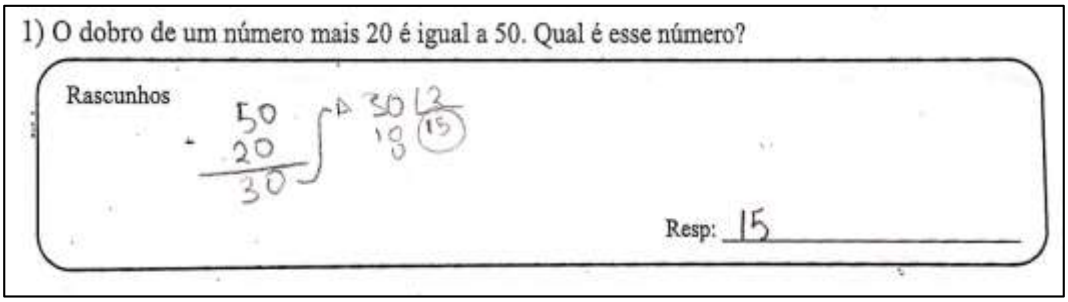
Apresenta-se em linguagem natural e pode ser representado por uma equação do tipo $2x + 20 = 50$, e expressar um raciocínio de incógnita. Segundo Duval (2003) uma simples decodificação faria a mudança da linguagem natural para a linguagem algébrica, por serem muitos próximos os registros de partida e de chegada. Segundo Marchand e

Bednarz (1999, apud ALMEIDA, 2016) o foco destes problemas está na técnica de resolução, o que evidencia a função da álgebra enquanto ferramenta apenas, não favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os *ostensivos* associados às possíveis *técnicas* são a representação de números inteiros, os naturais em nosso estudo, na forma numérica e algébrica e o *não-ostensivo* em jogo são as ideias associadas às operações entre números na forma algébrica e numérica, e seus múltiplos.

Não era esperado mas observamos dois casos de uso de operação inversa nas resoluções, conforme discutimos no problema 1A. Exemplos desses casos podem ser observados nas produções destacadas nos protocolos de pesquisa que seguem.

Figura 21: Resoluções do problema 1B pelo aluno TC2



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

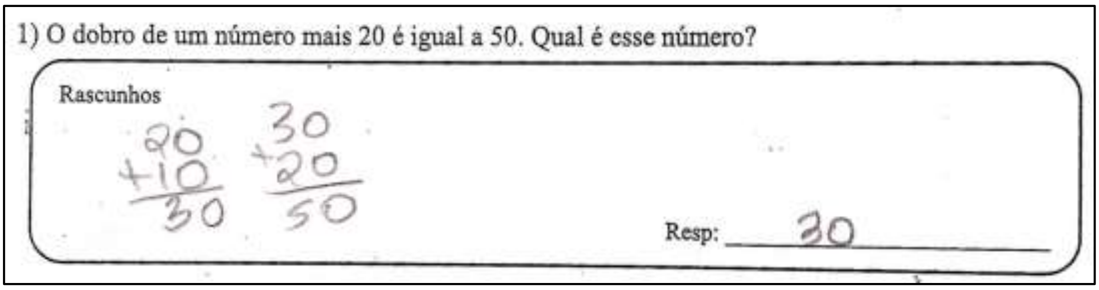
Observamos nos protocolos de pesquisa que nenhum aluno equacionou o problema. E assim previmos, visto que ainda não lidam com os objetos algébricos, como as letras, expressando valores desconhecidos. No entanto observamos raciocínio de operação inversa bem definido como retrata o protocolo destacado na Figura 21. O que nos induz à premissa de que o aluno domina as operações e trabalha a linguagem seja o ponto mais importante na resolução de problemas, significando assim essas operações.

O nível de acerto a esse problema foi em torno de 45%, com estratégias aritméticas, basicamente. Evidencia-se assim uma função da álgebra como ferramenta para encontrar uma solução que, conforme discutimos teoricamente, não acrescenta ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por ter um nível de conhecimento considerado técnico.

Trata-se de uma *tarefa* dentro da aritmética generalizada (USISKIN, 1995), auto instrutiva, e com recursos de memória, onde a ação inicial é escrever o que se lê, independente de usar a notação algébrica para dobro, e os aspectos da álgebra envolvidos consistem basicamente na linguagem e na equivalência entre *ostensivo* e estrutura. Assim, para a sua solução o *ostensivo* dobro deveria evocar o *não-ostensivo* que é a ideia de múltiplo de um número.

Observamos também erros operacionais ou falta de atenção em não considerar o dobro, enquanto múltiplo, na resolução. O protocolo abaixo retrata uma dessas situações.

Figura 22: Resolução do problema 1B pelo aluno TA21


1) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

Rascunhos

20 + 10 = 30

30 + 20 = 50

Resp: 30

Fonte: Dados da pesquisa (2018)

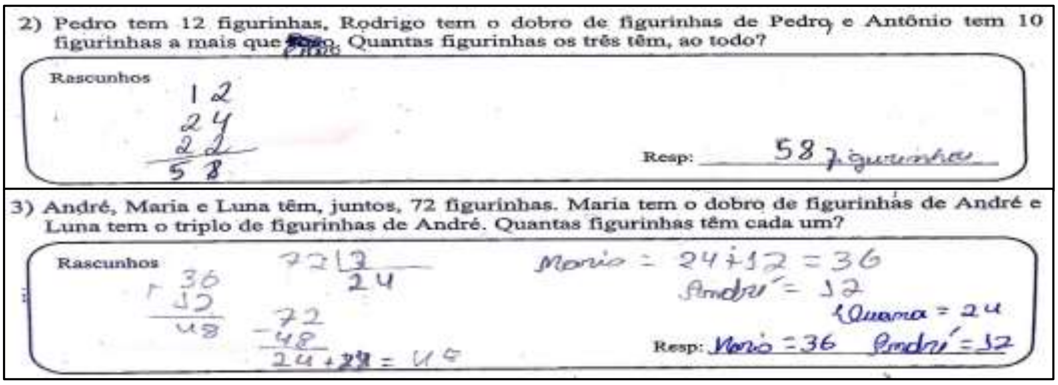
Os problemas 2B e 3B, que seguem, são problemas algébricos que também envolvem aspectos da linguagem e equivalência entre *ostensivo* e a estrutura do problema. As operações aritméticas da memória podem dar conta (**E1, E2**), e então classificamos de raciocínio simples, na condição de estabelecer relações entre os *ostensivos*, como números e expressões como dobro, triplo, a mais, ao todo e os *não-ostensivos* ideias a eles associados.

2B) Pedro tem 12 figurinhas, Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que João. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

3B) André, Maria e Luna têm, juntos, 72 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

O nível de acerto a esses problemas ficou em média de 30%, resultado que consideramos não satisfatório e que associamos mais à interpretação do que às próprias operações que exigem, que já estão disponíveis na memória do aluno, como observamos em problemas anteriores, e mostraram-se acessíveis. Os exemplos destacados na Figura 23 mostra os recursos de memória, principalmente recursos de operações, presentes e sendo acessados pelos alunos.

Figura 23: Resoluções dos problemas 2B e 3B pelos alunos TA18 e TB12, respec.



2) Pedro tem 12 figurinhas. Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que Pedro. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

Rascunhos

12
24
22
58

Resp: 58 figurinhas

3) André, Maria e Luna têm, juntos, 72 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

Rascunhos

Maria = 24+12 = 36
André = 12
Luana = 24

Resp: Mario = 36 André = 12

Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Como discutimos no capítulo teórico, os problemas algébricos trabalham os aspectos relacionados à álgebra que estão ligados à linguagem e significação do contexto onde eles vivem e dentro dos saberes já construídos e que podem ser evocados, rebuscados pela memória. Confirma-se assim nossa premissa sobre a importância da linguagem, numa visão mais cognitivista, em que para resolver um problema em linguagem natural, e a resposta seja obtida, como os problemas dessa 2ª. sessão, é necessária uma *conversão* do enunciado, isto é, passagem da linguagem natural das situações contextualizadas para a linguagem numérica da aritmética (DUVAL, 2003, 2009).

Os problemas 4B e 5B são classificados como problemas algébricos de partilha (composição) que se diferenciam apenas por operações e pelas relações que solicitam para a suas resoluções. Como necessitam de conexões com um todo a que se refere o

4B) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

5B) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de figurinhas de Paulo e Mário fique com quatro figurinhas a mais que Beto. Quantas figurinhas cada uma vai receber?

problema, diferentemente dos problemas 2B e 3B, os classificamos como de raciocínio sofisticado.

Dentre as estratégias de resolução observadas para esse tipo de problema destacam-se **E1** e **E2**, estratégias de cálculo que não levaram ao resultado final pois as relações entre os dados do problema era necessário.

E o resultado foi baixo índice de acertos, chegando a quase 70% de testes em branco, mas dentro do previsível. Muitas dúvidas surgiram desde a leitura, interpretação, a ordem das operações que deveriam seguir para solucionar os problemas, gerando muitas solicitações. Não se observou o estabelecimento de conexões (**E3**) em quantidade necessária para chegar à solução do problema. Trata-se de um problema onde todas as relações se referem a um todo, e essa teia de conexões a serem organizadas pode ter dificultado a ordenação das ideias dos alunos não acostumados a esse tipo de problema (algébrico de partilha).

Entrevistamos dois alunos desse grupo e trazemos os protocolos da entrevista realizada com um deles e que destacamos como informação verbal a seguir.

De posse do teste desse aluno (TB3) e indicando gestualmente para o problema 4B e depois para o 5B, começou a entrevista:

P: *Por que você não respondeu esse problema?*

A: *Porque não sei. Não entendi...*

P: *Mas você leu todo o problema? Qual foi a dificuldade?*

A: *Se fosse igual eu sabia.* (referindo-se à divisão em partes iguais)

P: *Vamos ler de novo então?* (e lemos juntos)

P: *E agora?*

A: *Eu vou ter que dividir esse 90, né?*

E o aluno, rememorando algumas ideias operatórias, ou seja, os *não-ostensivos* associadas aos *ostensivos* presentes no enunciado, como as palavras triplo, repartir, foi organizando o pensamento. Nesse momento entendemos que estava pensando algebricamente através das conexões que demonstrava realizar e pela significação que passou a dar ao problema. E então começou a ordenar suas ideias.

4.3.4 Análise *a posteriori* dos problemas da 3ª. sessão de experimentação

Reunimos na 3ª. sessão de experimentação problemas dos tipos já trabalhados nas sessões anteriores – aritméticos, algébricos, partilha, sequências, que remetem às ideias de equação, função – visando analisá-los novamente após sessões de discussões. Dessa forma algumas características dos problemas podem ser suprimidas, para não se tornar repetitivo.

São problemas bem próximos em suas dificuldades e formas de apresentação pois pretendíamos verificar se os alunos já conseguiam mostrar um raciocínio mais direto de generalização. Sabemos do importante papel do *ostensivo*, em especial aquele visível, manipulável, que torna a atividade matemática mais próxima e acessível, para a construção dos conceitos e significação dos objetos matemáticos, em especial os algébricos. No entanto, sabemos que é natural da atividade matemática que esses *ostensivos* sejam abandonados para darem lugar a um pensamento "mais" abstrato (KASPARY, 2014), como o de generalização, que necessita de uma ativação "quase mínima" de *ostensivos* no gerenciamento da atividade (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Vejamos o problema 1C que é uma atividade de sequência bem próxima às sequências dos problemas 3A e 4A já analisados.

1C) Os números da tabela abaixo obedecem a uma sequência. Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco:

a)

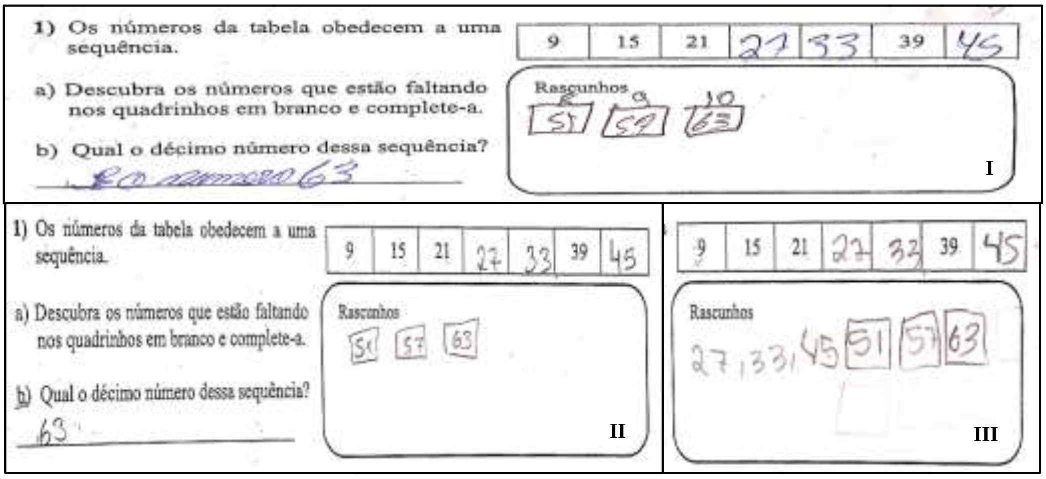
9	15	21			39	

b) Qual o décimo número dessa sequência?

O problema, no item 1Ca, traz um *ostensivo* tabela, e no item 1Cb um enunciado em linguagem natural para evocar um termo desconhecido. Trata-se de uma sequência recursiva, de natureza aditiva e crescente. Tivemos um número de acertos maior (65%) em relação aos problemas anteriores (3A e 4A), visto que o raciocínio sequencial já foi trabalhado, aqui e em anos anteriores. Observamos também que o uso da estratégia de observação de regularidades (**E4**) foi natural e imediato nas ações dos alunos.

Como esperado, não houve dificuldade em completar a sequência pedida. Propositadamente a tabela não traz o lugar (quadrinho) do décimo termo, como fizemos no problema anterior (4A). Na resolução alguns alunos sentiram necessidade de continuar o traçado da tabela (**E5**), de um *ostensivo* visual que evocassem o termo desconhecido.

Figura 24: Resoluções do problema 1C pelos alunos TA2 (I), TB9 (II) e TC20 (III)



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

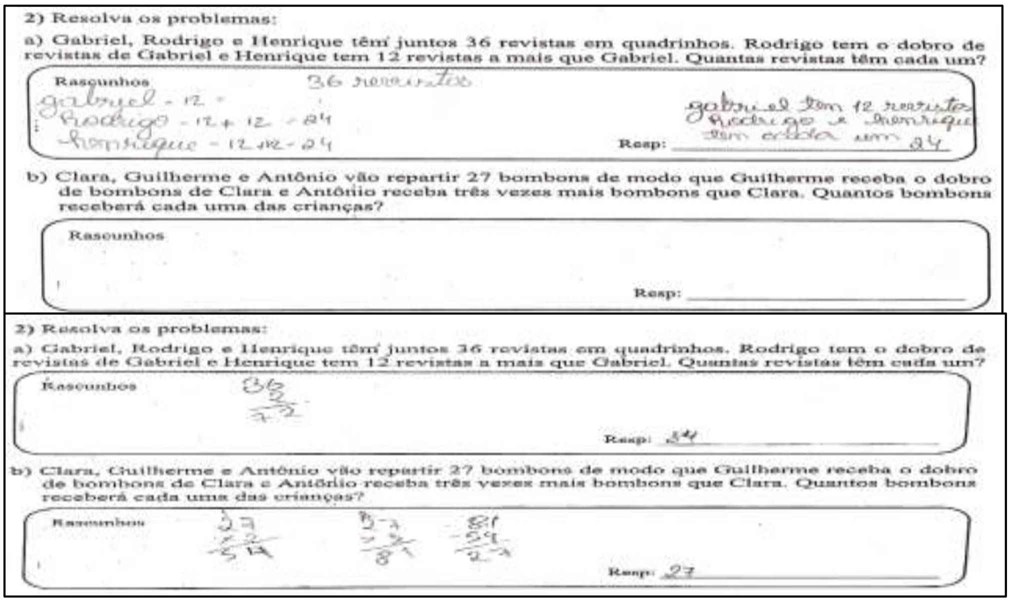
A Figura 24 traz exemplos de resolução do problema 1C em que o processo de generalização, que elencamos ser um dos mais importantes na formação do pensamento algébrico, ainda precisa da ativação de *ostensivos* para a sua construção. Ao tempo em que Bosch e Chevallard (1999) afirmam que o processo de generalização exige uma ativação mínima de *ostensivos*, os dados nos mostram que esse é um processo que deve ser explorado nos problemas, trabalhado como os alunos, na perspectiva da formação do pensamento algébrico que leva à aprendizagem.

Os problemas que seguem são classificados como algébricos de partilha, do tipo *fonte*, cuja fonte é única, Gabriel em (a) e Clara em (b), e se diferenciam apenas pelas relações aditivas e multiplicativas que traçam, tal como os problemas 4B e 5B da 2ª. sessão.

2C) Resolva os problemas: a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um? b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Classificamos os problemas 2C como de raciocínio sofisticado pelas relações que precisam ser estabelecidas para solucioná-los. E, apesar de já termos discutido problemas de partilha na sessão anterior, ainda assim tivemos um baixo número de acertos (20%). No entanto já verificamos algum estabelecimento de relações e conexões (**E3**), como previmos *a priori*, não suficientes para solucionar o problema, mas indicativos de pensamento algébrico de tratar o desconhecido (parte) em relação ao conhecido (todo). Ilustramos a seguir com protocolos de pesquisa.

Figura 25: Resoluções do problema 2C pelos alunos TA2, TC20, respect


2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

Rascunhos 36 revistas

gabriel - 12 -

Rodrigo - 12 + 12 - 24

henrique - 12 12 - 24

Resp: gabriel tem 12 revistas Rodrigo e henrique tem cada um 24

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Rascunhos

Resp:

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

Rascunhos

Resp: 34

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Rascunhos

Resp: 27

Fonte: dados da pesquisa (2018)

Nesses protocolos observa-se basicamente uso de estratégias de cálculo (**E1, E2, E3**), visto que as habilidades desses alunos para a resolução de problemas de partilha ainda estão num nível baixo.

Corrobora com nossa constatação o estudo correlato de Almeida (2016) com alunos do 6º. Ano: cerca de 30% não apresentaram nenhuma característica de pensamento algébrico; e apenas 5% dos alunos apresentaram as características elencadas *a priori* em sua pesquisa, indicadoras do desenvolvimento de pensamento algébrico.

O nível de congruência (DUVAL, 2003) dos problemas é maior naquelas cujas relações são aditivas. Fato é que os alunos encontraram dificuldade em evocar a ideia da multiplicação associada à expressão semiótica "três vezes mais", que aparece no item 2Cb, e fizeram como no item 2Ca em que a expressão "12 a mais que" remete a uma adição.

Não consideramos tais situações como erro operacional, e sim conceitual. O *ostensivo* "vezes" não foi suficiente para evocar o *não-ostensivo* ideia de multiplicação. Assim como o termo "mais" que soou fortemente associado à ideia de adição, mostrando que os conceitos também não estão bem estruturados, em não compreender a multiplicação como uma adição e que lhe cabe a palavra "mais". E esse foi um quadro geral nas análises dos problemas dentro dos campos aditivo e multiplicativo. As relações, expressões e termos dentro do campo aditivo têm maior congruência e univocidade semântica (DUVAL, 2003), quando os registros de ida e de volta são congruentes compreensíveis, e então é mais rapidamente evocada através de expressões em língua natural.

Assim como o problema 2A o problema 3C que segue, traz uma situação contextualizada, que classificamos como simples a linguagem e a resolução e que induz ao raciocínio de dependência funcional.

3C) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

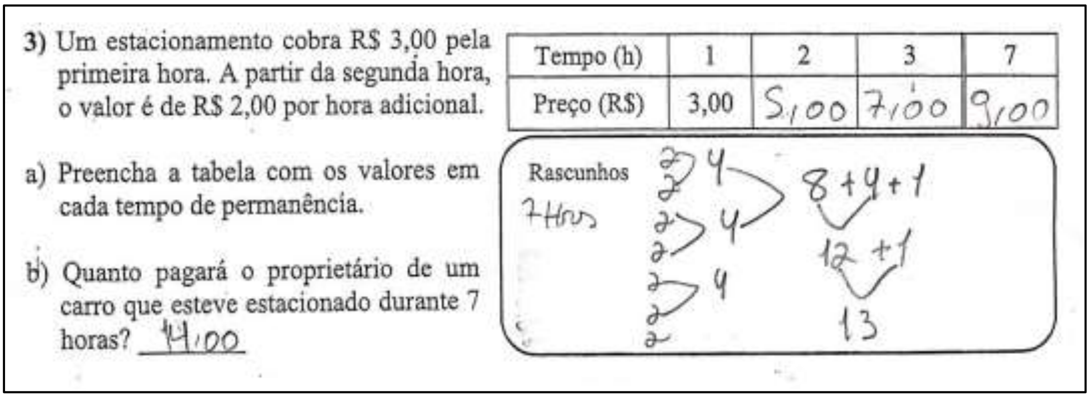
a) Preencha a tabela abaixo com os valores para cada tempo de permanência:

Tempo (Horas)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

As primeiras estratégias de resolução observadas para este problema 3C estão no campo da aritmética (**E1, E2**). E a proporcionalidade situa-se como um apoio para o raciocínio funcional, de estabelecimento de relações (**E3**), ainda que discretamente observadas. Quando o problema solicita um termo da sequência à frente (item 2Cb) requer então um raciocínio da generalização o que o torna de raciocínio mais sofisticado. Fatos esses que levaram a uma percentagem menor de acertos (35%) nesse item. Já o item 2Ca é uma sequência recursiva aditiva e de dificuldade simples, onde obtivemos em torno de 50% de acertos. Exemplos de resolução deste problema encontram-se na Figura 26, onde se observam basicamente uso de operações (com insucesso) e o raciocínio sequencial rebuscados da memória e que trabalhamos na 1ª. sessão.

Figura 26: Resolução do problema 3C pelo aluno TB7


3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

a) Preencha a tabela com os valores em cada tempo de permanência.

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas? 14,00

Tempo (h)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00	5,00	7,00	9,00

Rascunhos

7 Hrs

2 2 4, 2 2 4, 2 2 4, 2

8 + 4 + 1

12 + 1

13

Fonte: Dados da pesquisa (2018)

No entanto observamos no protocolo destacado na Figura 26 que há um estabelecimento de relações e conexões com o dado *valor da hora* e a incógnita do problema *valor pago pelas sete horas*, apesar dos cálculos incorretos que levou à resposta incorreta do problema. Outro dado interessante que podemos observar é o quão definido é o raciocínio sequencial do aluno que preencheu a tabela, com rapidez acreditamos, que não se deu conta que a sequência esta interrompida e preencheu como se não estivesse. Esses resultados, e outros que observamos, nos conduzem à ideia que exercícios de sequência, pelo uso de operações que lhes são peculiares, são propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico de estabelecimento de relações e conexões.

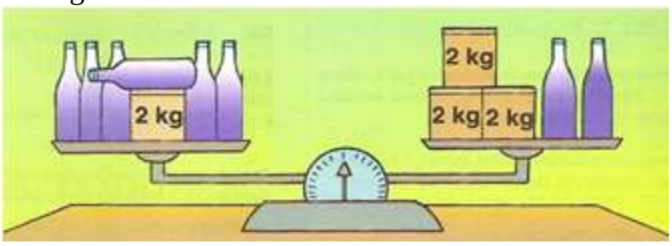
Os problemas que envolvem o raciocínio funcional simples mostraram propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir das estruturas aditivas que envolvem e da proporcionalidade que leva a uma ideia de dependência, um raciocínio funcional. É sabido que os conceitos de função não fazem parte do currículo desses alunos, no entanto, não os impediu de estabelecer essas relações de proporcionalidade.

Uma forma de introduzir a noção de função tende a ser favorecida a partir das estruturas que envolvem as operações aritméticas. Essa postura vai ao encontro das ideias e os estudos de Carraher, Schliemann e Brizuela (2006); Carraher e Schliemann (2007); Carraher, Schliemann e Schwartz, 2008, e outros; e das orientações legais (BRASIL, 2017) sobre os domínios das operações aritméticas e algébricas no desenvolvimento das ideias da variabilidade presente no raciocínio funcional.

O que observamos nos resultados dos testes sugerem que propor atividades aritméticas/algébricas na forma de resolução de problemas, é um caminho à aprendizagem matemática. Neles, "os conteúdos fazem sentido para o aluno, que é protagonista na construção do seu próprio conhecimento" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2015, p. 3).

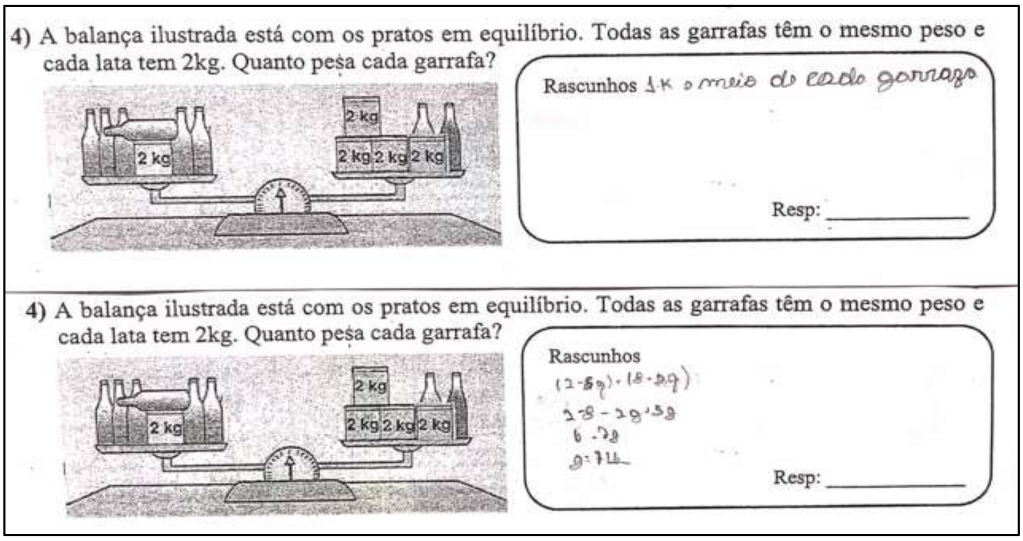
E o último problema traz o *ostensivo* balança, largamente utilizado nos livros didáticos, para evocar o *não-ostensivo* ideia de equilíbrio enquanto raciocínio equacional. O problema se apresenta em linguagem icônica, verificada por nós como uma aliada à resolução de problemas.

4C) A balança ilustrada abaixo está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



O principal aspecto da Álgebra envolvido nessa tarefa está relacionado à equivalência da igualdade. Faz-se necessário estabelecer uma equivalência entre os *ostensivos* da estrutura icônica e da linguagem natural do enunciado para solucionar o problema.

Figura 27: Resoluções do problema 4C pelos alunos TA2 e TB20



Fonte: Dados da pesquisa (2018)

Nos protocolos de pesquisa destacados, podemos identificar um conhecimento, ainda insipiente, do aluno em relação aos conceitos que envolvem uma equação. Ele identifica parcialmente a relação de equivalência que pode ser evocada a partir da balança de dois pratos. Nessa visão algébrica parcial, o aluno constrói uma relação de equivalência e alguma relação de igualdade. Por estratégias de cálculo mental (**E1**) chega inclusive a um resultado correto. Mas não equaciona ou escreve a sua estratégia. Indagados, respondiam sempre que "*fizemos as contas professora"* confirmando as suas habilidades operacionais e um conhecimento ainda insipiente da relação de igualdade enquanto equilíbrio.

4.3.5 Síntese da análise *a posteriori*

O objetivo da análise *a posteriori* residiu em realizar análise das produções dos alunos, estabelecer um paralelo com as análises *a priori* e então *validar* a nossa proposta, como característica da última fase de uma Engenharia Didática.

As atividades foram reapresentadas individualmente e analisadas com enxertos de produções escritas, relatos orais frutos das entrevistas e descrição das observações realizadas nas sessões de experimentação.

Nestas análises buscamos identificar as estratégias de resolução dos alunos, como previstas, visando analisar as *condições* para a implementação da sequência didática no ensino de Matemática do 6º ano, como um instrumento capaz de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As entrevistas mostraram-se fundamentais nesse processo, visto que os registros dos alunos, ou a falta deles, não nos permitiram entender os seus posicionamentos ou tirar conclusões. Estas foram realizadas para a produção de dados e transcrevemos como informação verbal. Buscamos com os questionamentos justificativas ou esclarecimentos para as respostas em branco, ou que não conseguimos identificar.

As estratégias previstas foram suficientes às análises *a posteriori*, exceto a que expressou ausência de resposta ou registros indecifráveis que chamamos de **E0.**

Trabalhamos com problemas que requeriam raciocínio de equação, função e sequências, como também problemas aritméticos e algébricos que poderiam remeter a um desses raciocínios, ou mais de um.

A análise *a posteriori* permitiu estabelecer um paralelo entre o que previmos e os dados reais dos testes. As justificativas teóricas embutidas nesse confronto serão a base da validação da sequência didática proposta.

As percepções *a posteriori* são descritas e analisadas no tópico seguinte, amparadas no aporte teórico, como Discussão dos Resultados.

4.4 Discussão dos resultados

Trazemos à memória a nossa filiação metodológica à Engenharia Didática, tal como sistematizada por Artigue (1996), que compreende quatro fases: a 1ª fase, das *análises preliminares*, a 2ª fase, da *concepção e da análise a priori,* a 3ª fase, da *experimentação* e a 4ª e última fase, da *análise a posteriori e validação.*

Seguindo os princípios de Artigue (1996), na primeira fase fizemos o levantamento dos obstáculos a serem considerados no desenvolvimento do pensamento algébrico, que em conformidade com os objetivos de pesquisa viabilizou a concepção da sequência didática; na segunda fase foram abordadas as variáveis didáticas e matemáticas de estudo para que pudessem ser observadas nas sessões de experimentação; e essa experimentação constituiu a terceira fase, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*; a última fase, a *análise a posteriori e validação* se caracteriza pela análise fina e cruzada entre os dados colhidos e o que previmos na análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e a construção de respostas às nossas indagações de pesquisa.

Cumprida as etapas da Engenharia Didática de acordo com a sequência didática que propusemos, aplicados os instrumentos de produção e recolhidos os dados, procedemos então à discussão dos resultados com o objetivo de validar o nosso estudo.

Para a discussão dos resultados retomamos as nossas variáveis de estudo, discutidas no capítulo metodológico. A variável global parte do questionamento: como se dá o desempenho do aluno diante de cada objeto matemático, *ostensivos* ou *não-ostensivos*, identificados nas produções dos alunos na análise *a posteriori*. E as variáveis locais são: apresentação dos problemas: linguagem natural ou icônica; tipo de problema quanto ao objeto matemático: sequência, equação ou função e aritméticos/algébricos; nível de dificuldade dos problemas: simples ou sofisticado.

Como categorias de análise *a posteriori* elencamos, *a priori*, cinco estratégias de resolução, **E1** a **E5**, descritas do Quadro 11 e nas análises *a posteriori* surgiu uma nova categoria, **E0**, para representar a ausência de estratégias, testes em branco ou respostas que não conseguimos decifrar.

Posto isto, construímos e apresentamos na sequência desse texto as nossas considerações a respeito dos resultados da pesquisa, além dos comentários que já tecemos nas análises *a posteriori*. Faremos essa explanação de forma sucinta neste relatório de pesquisa, na certeza e fidelidade do trabalho efetuado no decorrer do período de estudo, produção e análise dos dados gerados que culminou nesse texto.

4.4.1 A sequência didática e os problemas da experimentação

Reiterando, nosso objetivo não é capacitar o aluno a resolver problemas. Segundo Chevallard (1999) a resolução de problemas é intrínseca à atividade matemática, um veículo que leva à aprendizagem, onde os problemas devem ser vistos como uma forma de abordagem do conteúdo.

Os nossos problemas, como integrantes de uma sequência didática, são instrumentos para verificar o desenvolvimento do pensamento algébrico e a suas contribuições para a aprendizagem matemática. E para tanto construímos variáveis que são testadas e analisadas a partir da resolução de problemas diversos que propusemos.

Propomos uma sequência didática como uma ação de ensino devidamente acompanhada, com observação dos alunos participantes, um esquema experimental de resolução de problemas. Esta privilegiou resolução de problemas aritméticos e algébricos em linguagem natural, visto que identificamos nas *análises preliminares* sua importância na aprendizagem matemática. Dessa constatação teórica, e apoiados em estudos correlatos, construímos a nossa hipótese de que usar a resolução de problemas para a introdução de conceitos algébricos, através de situações que possam desenvolver o pensamento algébrico, traz contribuições à aprendizagem matemática. E os resultados nos aproximaram favoravelmente dessa premissa.

Não analisamos resultados quantitativos, mas os momentos de experimentação serviram para vivenciar o processo de significação aos problemas como indícios de pensamento algébrico.

A ação didática de propor resolução de problemas visa a aprendizagem, e nenhuma ação existe no vácuo. A implementação de qualquer ação traz mudança de comportamento, e por certo traz contribuições. Especificamente pretendíamos investigar quais e que tipo de contribuições a sequência didática pensada por nós traria à aprendizagem matemática, especificamente no desenvolvimento de um raciocínio capaz de amenizar dificuldades, rupturas e barreiras, sejam cognitivas ou epistemológicas. E esse raciocínio, o pensamento algébrico enquanto uma forma especial de pensar (BRASIL, 2017), com estabelecimento de relações e conexões entre os dados de um problema que levam à significação (BRASIL, 1988), à abstração e à generalização (RADFORD, 2009) do saber aprendido, constituiu o foco da nossa investigação.

4.4.2 Discutindo as variáveis didáticas

Construída a sequência, explicitada a hipótese de observação dos comportamentos dos alunos frente às tarefas propostas, pensamos então as variáveis didáticas e como elas se relacionam com a hipótese de dificuldade na aprendizagem matemática e o desenvolvimento do pensamento algébrico. E, *a priori*, elegemos: (1) Apresentação dos problemas: linguagem natural ou icônica; (2) Tipo de problema quanto ao objeto matemático: sequência, equação, função ou aritmético/algébrico; (3) Nível de dificuldade dos problemas: simples ou sofisticado.

Registra-se que os estudantes de nossa pesquisa não passaram por nenhuma instrução conceitual dos conteúdos algébricos, portanto, analisaremos os registros, e os discutiremos segundo o referencial teórico, independente de erros ou acertos. Observaremos as estratégias de resolução (ou tentativa) a partir de um repertório operacional e conceitual que, presumimos, seja existente.

4.4.2.1 A apresentação dos problemas

Relembramos que todos os enunciados dos problemas integrantes dos testes das experimentações eram em linguagem natural e alguns problemas contavam também com representações icônicas, como as sequências de bolinhas e balança.

Apoiados em Lins e Gimenez (2001) constatamos que o recurso de imagens icônicas com um visual numérico favorece o desenvolvimento de abordagens intuitivas. A linguagem visual surge para manipular *não-ostensivos* e, presumimos, induz a um critério de formação das sequências, de bolinhas por exemplo.

As formas de linguagens mostraram-se essenciais na resolução dos problemas. Não se trata da linguagem algébrica, que não lhe é familiar, dada a própria restrição curricular, mas de uma gama de registros semióticos, dotados de significado e sentido, que permitiram a realização de *tarefas* e a comunicação de seus resultados.

Pesquisas, como as de Fiorentini, Cristóvão e Fernandes (2005), Radford (2009) e Oliveira e Câmara (2011), revelaram que os alunos não precisam, necessariamente, dominar uma linguagem simbólica algébrica para desenvolver aspectos referentes ao pensamento algébrico. Importante se faz comunicar esse pensamento.

E observamos linguagens gestuais, oral, escrita, que desempenharam bem o papel de comunicação de pensamento. E esse é um momento didático de extrema importância, onde só o contato direto com o aluno permite recolher dados tão significativos. Evidencia-se assim o papel do professor na aprendizagem, e aqui, na percepção do pensamento algébrico, que não consideramos como algo totalmente abstrato, mas que carece de nuances de percepção que nem sempre pode ser registrado por uma linguagem qualquer.

A linguagem, como a linguagem natural e contextualizada dos problemas da experimentação, é a porta de entrada a qualquer raciocínio matemático. Prezar por uma linguagem clara, contextualizada é fundamental não só à resolução de problemas, como toda atividade humana que envolva o pensar. Concordamos com Bosch e Chevallard (1999) que "a fala é a expressão mais "próxima" da "consciência" - mesmo quando a voz não é projetada" (p. 18, tradução nossa) e se fala por meios de *ostensivos* visuais, gestuais e outros.

Problemas em linguagem natural ressaltam a importância dos *ostensivos* na atividade matemática e, consequentemente, para o desenvolvimento do pensamento algébrico de resolução. A partir deles, os *ostensivos,* é possível acessar os *não-ostensivos* associados (CHEVALLARD, 1992), mas que só são externados a partir de um registro semiótico, como a língua oral, escrita, icônica ou gestos. E essa engrenagem torna a atividade matemática mais acessível, possível e desmistificada. E assim, as atividades de resolução de problemas em linguagem natural é um oportuno momento didático de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nos problemas em linguagem icônica os *ostensivos* são mais facilmente manipuláveis e regulados pelas linguagens visual e gestual. Estes, quase sempre, não permitem observar um raciocínio de conexões, onde a generalização está diretamente ligada às formas, imagens, cores. Percebe-se uma elocução simples e precisa para descrever repetições (USISKIN,1995) que, entendemos, como uma visão da álgebra enquanto linguagem das generalizações.

Problemas de operações como 1A, em linguagem numérica, tiveram índice de acertos altos, porém pelo uso de estratégias aritméticas que não necessariamente levam à generalização (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007). São soluções pontuais, favorecidas pelo domínio de operações aritméticas disponíveis nos repertórios conceituais dos alunos.

Observamos também entraves com a linguagem, principalmente nos problemas aritméticos e algébricos da 2ª. sessão, onde os alunos mostraram dificuldades na interpretação. Inferimos que esta dificuldade reside na organização das ideias matemáticas e no estabelecimento de conexões e relações que levassem à solução destes problemas, à *conversão* para a linguagem matemática.

De forma geral, observamos saberes já construídos e que poderiam ser evocados pelos alunos, rebuscados pela memória. No entanto, o aluno lê o problema, mas não consegue identificar na linguagem natural os relacionamentos que levariam a uma escrita na linguagem matemática. Observamos que o aluno se perde desde a leitura até a formalização dessas relações, não as mantem na memória ou não conecta umas às outras, formando o que entendemos por pensamento algébrico de resolução.

Os *ostensivos* da linguagem natural, como as expressões, não foram suficientes para evocar *não-ostensivos,* especialmente nos problemas de partilha. Exceto quando essas relações eram aditivas, onde a *congruência* era maior entre o enunciado e o modelar da situação, mesmo que por estratégias de cálculos, sem equacionar o problema.

Argumentamos assim que problemas em linguagem natural são propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico, desde que possibilitem o estabelecimento de relações e conexões entre os dados dos problemas, ou seja, que haja significação. Nesse ponto, respeitadas as *restrições* ao nível de ensino e as *condições* que são impostas a cada objeto matemático, defendemos o trabalho de sala de aula com problemas em linguagem natural com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, e como já argumentamos, da própria aprendizagem matemática.

4.4.2.2 Os tipos de problema

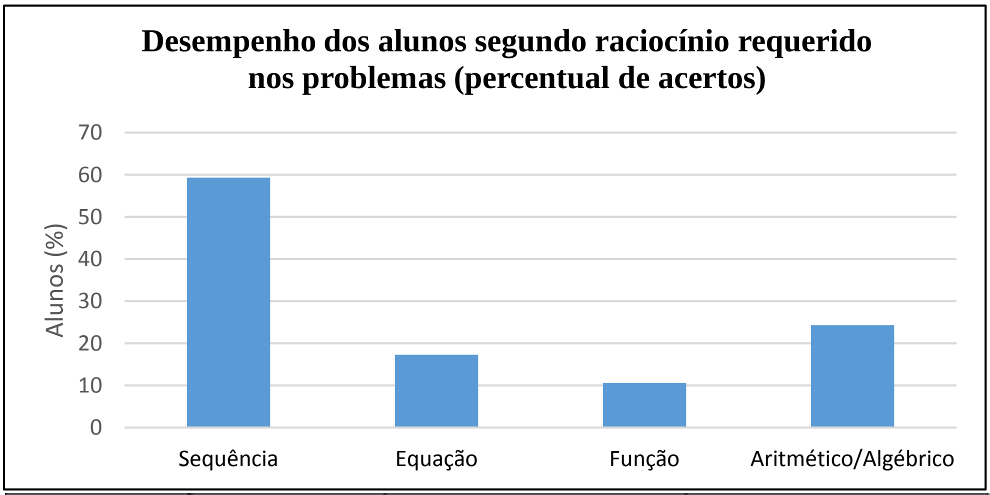
Pensando o objeto matemático a ser analisado nos problemas da sequência didática, elegemos os raciocínios de sequência, equação e função. Além dessas três vertentes, classificamos de aritméticos/algébricos os problemas que acomodaram situações intermediárias entre o raciocínio funcional, sequencial, de equação e mistos.

Esses raciocínios não necessariamente estão formalizados para o aluno do 6º. Ano. E não nos surpreendeu poucos alunos expressarem raciocínio de equação ou função. E quando apresentaram foi de forma parcial, não levando ao resultado final do problema. No entanto, a categorização desses raciocínios se deu por entendermos que estes podem estar implícitos nos raciocínios aritméticos (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007) que são familiares e facilmente acessíveis pelos alunos pesquisados.

A Figura 28 traz um panorama do desempenho dos alunos nos problemas em relação ao raciocínio requerido na sua resolução.

Figura 28: Gráfico do desempenho dos alunos segundo o raciocínio requerido nos problemas

Fonte: Dados da pesquisa (2018)



Raciocínio	Nº problemas	Nº problemas*54 testes	Percentual de Acertos
Sequência	4	216	128 = 59,3%
Equação	3	162	28 = 17,3%
Função	4	216	23 = 10,6%
Arit/Alg	7	378	142 = 24,3%

As *tarefas* presentes nos problemas 1A, 3A, 4A, 1B, 1C, 3C e 4C realizadas dentro da aritmética generalizada, aquelas para as quais ainda não faz uso explícito das estruturas algébricas (USISKIN, 1995) foram as de maior índice de acertos. Enquanto que os problemas que requeriam raciocínio funcional mostraram-se menos exitosos, fato esse observado nos problemas 2A e 3C, que requeriam resoluções mais complexas, em cadeia, e um raciocínio de dependência que remetiam às ideias de variável e função. Esse tipo de raciocínio e de relações são discutidos na BNCC (BRASIL, 2017), uma promessa para a aprendizagem algébrica futura, após sua implantação.

Entre a primeira e a terceira sessão de experimentação pudemos observar avanços dos alunos quanto às habilidades de generalização e de buscar recorrências, enquanto relação de dependência e raciocínio funcional, na resolução dos problemas similares, como do problema 4A para o problema 1C. Resultados não necessariamente quantitativos, mas que refletem uma realidade. Consideramos o raciocínio de generalização o primeiro passo para a formação do pensamento algébrico que capacita o aluno a resolver problemas algébricos futuros. É a ampla habilidade de compreender a situação, identificar variáveis, relacionar elementos relevantes, rememorar saberes aprendidos e guardados na memória e então compará-los.

Presumimos que essa habilidade de generalização, cuja origem está nas operações básicas da aritmética, é reflexo de uma capacidade algébrica, como argumenta o *Early Algebra* e subjaz o repertório cognitivo do aluno. O que implica uma estreita ligação com o pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005).

E os problemas que envolviam sequências foram os mais exitosos. A exemplo dos problemas 3A, 4A, 1C e 3C. Neles observamos que os alunos trazem a ideia da sequência a partir das estruturas aditivas que envolvem, e da proporcionalidade que leva a uma ideia de dependência, um raciocínio funcional, numa perspectiva intuitiva e dedutiva, fato também observado por Porto (2018) em sua pesquisa, realizada com alunos do 3º. e 5º. Anos. Ou seja, são noções bem definidas em todo o Ensino Fundamental.

Lins e Gimenez (2001) alertam que se essa relação de dependência for essencialmente aritmética pode comprometer as noções algébricas futuras. É o que entendemos por aritmetização do raciocínio, quando, acostumados ao aritmeticismo, os alunos sentem dificuldades na educação algébrica. Coincide também com o que Da Rocha Falcão (1993) tratou como ruptura epistemológica na passagem da aritmética à álgebra, que defendemos possa ser amenizada, não pela antecipação algébrica nos anos iniciais e 6º. Ano, mas oferecendo atividades e momentos didáticos que oportunizem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para Lins (1992) o aritmeticismo é uma vertente do pensar algebricamente. E acrescentamos, um aritmeticismo de uso de operações com significado. Carraher e Schliemann (2007) afirmam que o estabelecimento de relações entre operações aritméticas e algoritmos é uma forma de raciocínio funcional, e verificamos nas experimentações.

As sequências, a partir de leis de recorrência aditivas, permitem tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2009), significando-o. Inferimos assim que as sequências são problemas propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois creditamos ao pensamento algébrico essa capacidade como premissa de estudo, conforme argumenta Almeida (2016) a partir de Radford (2009).

O não equacionar os problemas era previsível, pelas restrições que discutimos. A relação de equivalência abordada nos anos iniciais é retratada como resultado de uma operação (LINS; GIMENNEZ, 2001). O resultado de uma operação, quase sempre, reflete sentido único cuja univocidade e congruência semântica (DUVAL, 2003) ficam comprometidas. Sentimos que a dificuldade do aluno está em estabelecer relações a partir da linguagem natural, construir o conceito de igualdade e então manipular esses relacionamentos e chegar à solução do problema.

Pretendíamos verificar nos problemas passíveis de equacionar o quanto a noção de equivalência fazia parte do repertório dos alunos e quais os saberes mobilizados por eles a partir de uma relação de igualdade e com significação. No contexto dos problemas, essa relação poderia ser acessada a partir de *ostensivos* como os verbos *ser, ter, valer.* A exemplo dos problemas da 2ª. sessão 2B, 3B e 4B, respectivamente, em que aparecem expressões do tipo: *Pedro tem; Beto receberá; o número de figurinha é o dobro.* E não obtivemos resultados satisfatórios com esses problemas, os *ostensivos* não cumpriram o seu papel de evocar as ideias relacionadas a eles.

O problema 1B, cuja relação de igualdade era mais explícita, foi o que tivemos maior índice de acertos. A redação *O dobro de um número mais vinte é igual a 50. Que número é esse?* deixou clara a relação de igualdade. *A priori* classificamos esse problema de "falso problema" (MARCHAND; BEDNARZ, 1999, apud ALMEIDA, 2016) por justamente não privilegiar relações e conexões que favorecessem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nele não há necessidade de estabelecer relação de equivalência, uma vez que a *conversão* é direta, uma simples codificação (DUVAL, 2003).

No que concerne as diretrizes curriculares, os PCN (BRASIL 1998) deixam implícita essa ideia de equivalência ao orientar para a "aprendizagem de 'idéias' fundamentais (como as de proporcionalidade, equivalência etc.)" (p. 22, destaque nosso pela grafia à época). No entanto, usa o termo no sentido de igualdade em vários outros momentos, como "assim os alunos podem constatar a equivalência entre as expressões: $n^2 - n$ e $n \times (n - 1)$" (p. 117) e "discutir as representações $y = 2x + 2$ ou $y = 2(x + 1)$ e a equivalência entre elas" (p. 118).

A BNCC (BRASIL, 2017) avança nesse sentido, o mesmo do nosso entendimento, e trata a equivalência como uma das “noções fundamentais da matemática” (p. 266) que deve ser trabalhada “por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos” (p. 266), ou seja, vai além da igualdade. E a significação dos objetos matemáticos é um dos princípios do pensamento algébrico. Inferimos, a partir das nossas observações em sala de aula, que o aluno só consegue “lidar” com algo que é desconhecido se lhe é significativo.

E a noção insipiente de equilíbrio, se mostrou quando nenhum aluno equacionou os problemas que remetiam a um raciocínio de equação. Surpreendeu-nos positivamente o uso da operação inversa para resolver alguns problemas, como em 1A que é um problema aditivo de apenas uma relação, simples. Mas não conseguiram reaplicar o mesmo raciocínio nem equacionar os problemas algébricos da 2ª. sessão e o da balança em 4C, que exigiam mais relações.

A balança se mostrou um eficiente recurso para se trabalhar princípios de equivalência e equação. Uma verdadeira “metáfora do princípio de equivalência” (DA ROCHA FALCÃO, 2003, p. 61) que possibilitou a familiaridade algébrica no problema 4C, além de ser um recurso de justaposição através das leis do equilíbrio (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Ela desencadeou a noção de equivalência através de operação com números naturais, com recursos icônicos *ostensivos* e facilmente manipulados.

Sabemos que as atividades mediadas por balança de dois pratos apesar de favorecerem a construção do princípio de equivalência, apresentam limitações conceituais, suas *restrições*. Esse recurso analógico apresenta limites epistemológicos e não fornece condições para a transição do concreto para o campo abstrato (LINS; GIMENEZ, 2001). No entanto o seu uso, na formação inicial do conceito, dentro das condições das operações lógicas que a restringe, pode ser um aliado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, através da equivalência da abstração. Encontramos apenas dois problemas com uso de balança no livro didático analisado, pensamos que poderiam ser mais explorados esses recursos de balanças, diante da sua potencialidade.

Em suma, trabalhamos com problemas que requeriam raciocínio de equação, função e sequências, como também problemas aritméticos e algébricos que poderiam remeter a um desses raciocínios, ou mais de um. E os que os alunos tiveram um melhor desempenho, principalmente pelo uso de estratégias de cálculo mental ou explícito, foram os problemas que envolviam sequências. Atribuímos tal resultado às vivências anteriores, pelo reduzido número de relações que esses problemas exigem, e quando exigem são relações de recorrência aditivas, que são facilmente rememoradas e manipuladas.

4.4.2.3 O nível de dificuldade

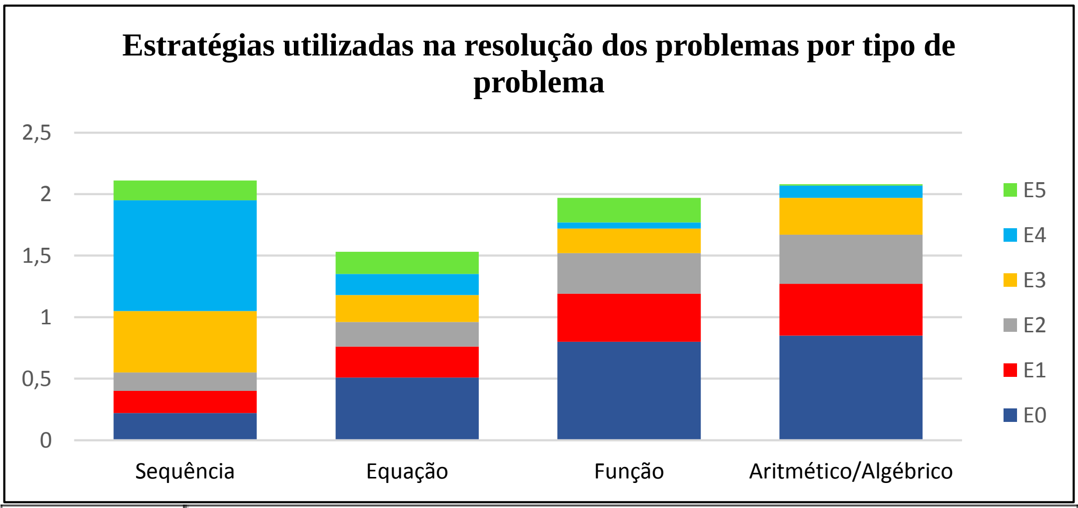
Os resultados nos apontaram que o nível de dificuldade *simples*, como apresentado nos problemas com sequências (3A, 4A, 1C e 3C) representa um aporte significativo para os alunos no desenvolvimento das primeiras noções algébricas. É recorrente uso de sequências nos anos iniciais, no entanto, entendemos que a sua continuidade nos anos finais não diminuiria o nível conceitual dos alunos. Desse modo, permite-nos sugerir que uma prática em sala de aula, com atividades que explorem sequências simples, dentro dos conteúdos previstos para cada ano, e assim no 6º. Ano, pode ser um caminho favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. E com ele a construção de vários conceitos algébricos, tais como equação e função, com vistas à generalização de padrões e a organização de leis sequenciais em diferentes contextos (BRASIL, 2017).

A variável *sofisticada* esteve sempre associada aos problemas que obtivemos o maior índice de erros, ou aqueles com uso de estratégias não adequadas ao problema. No entanto ela se faz necessária, principalmente nos problemas algébricos de mais de uma relação. São esses problemas os mais propícios ao desenvolvimento do pensamento algébrico, dado o número de relações e conexões que exigem e sua proximidade com o cotidiano do aluno (BRASIL, 1988; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). E esse amadurecimento se faz necessário para avançar no estudo da álgebra, a educação algébrica, que possibilita visibilidade às estruturas matemáticas subjacentes (KIERAN, 2007).

4.4.2.4 As estratégias de resolução dos problemas

A Figura 29 traz um panorama das estratégias, que previmos *a priori*, utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas e em cada tipo de problema quanto ao raciocínio requerido na sua resolução.

Figura 29: Gráfico das estratégias utilizadas na resolução dos problemas por tipo de problema



Raciocínio	Nº Alunos / Estratégia					
	E0	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**
Sequência	48	39	32	108	194	35
Equação	83	41	32	36	28	29
Função	173	84	71	43	11	43
Arit/Alg	321	159	151	113	38	04

Fonte: Dados da Pesquisa (2018)

Para a leitura do gráfico lembramos que uma mesma estratégia pode aparecer em mais de um problema, e um mesmo problema pode apresentar mais de uma estratégia.

Observamos que as estratégias mais utilizadas pelos alunos foram as de cálculo (**E1** e **E2**), explícitos ou mentais. Os cálculos mentais só puderam ser observados pela intervenção que a sequência proporcionou, durante a aplicação e nas discussões das atividades, pois o único registro escrito nos problemas que utilizaram tais estratégias eram as respostas finais.

E essas estratégias de cálculo (**E1** e **E2**) mostraram-se eficientes para solucionar os problemas, como 1A, 2A, 1B, 2B, 3B, 2C, 3C e 4C exceto os que requeriam maior quantidade de operações ou relações e que precisavam guardar na memória. Em seguida destacaram-se as estratégias de estabelecimento de relações (**E3**) que mostraram eficientes principalmente nos problemas de relações sequenciais, como 3A, 4A, 4B, 5B, 1C, 2C e 3C. A observação de regularidades (**E4**) também se fez presente nas resoluções desses problemas de sequências, principalmente nos problemas 3A, 4A e 1C. Tal estratégia se mostrou eficiente, pois pode estar diretamente ligado ao índice maior de acertos a esses problemas. E a estratégia de uso de *ostensivos* para representar o problema

(**E5**) foi a menos observada, apenas nos problemas 1C e 3A. Nesse último, inferimos que está diretamente ligado à eficiência dos *ostensivos* presentes nos problemas que se mostraram suficientes, não necessitando de outros. Ou, esse estabelecimento de relação *ostensivo/não-ostensivo* não se fez necessário.

A estratégia **E0** que surgiu nas análises *a posteriori* representou o maior quantitativo de testes, principalmente nos problemas algébricos e aritméticos, como da 2ª. sessão, 2B a 5B. Ela representou 62% dos 228 problemas distribuídos nos 54 testes que validamos.

Apresentados os dados produzidos, confrontadas às análises *à priori* e *à posteriori* traremos a seguir as nossas considerações finais do estudo. Um estudo que não se encerra em si mas traz um determinado ponto de vista de situações didáticas que oferecemos à Educação Matemática, como contribuição, inspiração ou caminhos a outros estudos ou à sua continuidade.

CAPÍTULO V:
CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Introdução

Trazemos à memória o nosso objetivo geral:

- *Investigar quais contribuições e as condições* e *restrições de implementação de uma Sequência Didática – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º. Ano do Ensino Fundamental e com atividades de resolução de problemas – para o desenvolvimento do pensamento algébrico*.

E os objetivos específicos:

- *Analisar as condições e as restrições para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de problemas de operações com números naturais;*
- *Investigar estratégias mobilizadas pelos alunos a partir das produções orais e escritas ao resolver problemas com números naturais que indiquem o desenvolvimento do pensamento algébrico;*
- *Analisar as produções (escrita e oral) dos alunos nas respostas dadas aos problemas propostos quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico.*

Para atingir o objetivo, responder às questões propostas e buscar obter um padrão de validade dos dados, e consequentemente evitar conclusões enviesadas, construímos e uma Sequência Didática sistematizada pelos princípios metodológicos de uma Engenharia Didática, que nos aportou na elaboração e aplicação dos instrumentos de intervenção e na produção dos dados de pesquisa.

Realizar uma Engenharia Didática nesse estudo foi frutífero. Direcionou as nossas análises, sistematizou a metodologia e possibilitou uma interessante interlocução entre os objetivos que traçamos, a partir do que os estudos nos mostraram *preliminarmente*, e o que recolhemos de dados nas *experimentações*. Chamamos esse momento de análise cruzada entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Para esta última recolhemos dados nos momentos de experimentação da sequência didática, com aplicação dos testes e entrevistas nas três sessões de experimentação, e então *validamos* a nossa sequência.

Analisados os dados, trouxemos as nossas premissas de estudo que chamamos de hipóteses, discutimo-las e tecemos as nossas considerações finais, buscando atender aos objetivos traçados.

Considerando as experimentações, que configuram uma intervenção didática pelos momentos de troca com os alunos pesquisados, como um todo, verificamos que houve ganho de entendimento, o que, para a perspectiva qualitativa adotada na pesquisa, configura-se em aprendizagem. Estes resultados estão de acordo com diversos pesquisadores que apontam o potencial de aprendizagem dos estudantes a partir de intervenções intencionalmente planejadas para esse fim.

O que não conseguimos detectar ou surgiu no percurso de estudo que culminou nesta tese deixamos como sugestões de pesquisas futuras. Aqui trazemos um relatório de estudo e pesquisa, um recorte de um objeto de estudo sob uma visão também limitada a nós, ao tempo, ao espaço, às visões, pois entendemos que o conhecimento é inesgotável e as fontes também.

5.2 Discutindo as hipóteses de estudo

Bosch e Chevallard (1999) discutem que as dificuldades na utilização dos *ostensivos* de representação dos objetos matemáticos está na relação não tão direta e “natural” entre o sistema de leitura e a escrita, ou seja, na *conversão* (DUVAL, 2003). A escrita congela os objetos no papel, enquanto que o discurso oral os movimenta. E não sendo essa relação tão óbvia, as técnicas que dependem desses *ostensivos* necessitam ser justificadas (CHEVALLARD, 1999). Isso conduz à expectativa de que os *não-ostensivos* a elas associados sejam construídos à medida que as tarefas são realizadas, pelo próprio aluno, em um processo de construção da sua independência em pensar.

No nosso estudo, ficou claro que essa construção deve ser processual, gradual, autônoma e sistemática, tal como argumenta Radford (2009), passando pelos problemas aritméticos até chegar aos problemas algébricos, que ainda estão sendo introduzidos no 6º. Ano. E nessa passagem processual dos *não-ostensivos* da aritmética para os da álgebra, reside o desenvolvimento do pensamento algébrico.

E diante do que nos foi apresentado no estudo através das leituras, das experimentações que produziram os dados, das vivências em sala de aula, observações e percepções, trazemos à tona as premissas iniciais desse estudo.

Os dados nos mostraram que (I) usar a resolução de problemas para a introdução de conceitos matemáticos, em especial os algébricos, através de situações que possam desenvolver o pensamento algébrico contribuirá para a aprendizagem matemática. Foram situações de raciocínio funcional, sequencial e de equação que possibilitaram esse avanço, que sentimos de uma sessão à outra, no acompanhamento dos alunos, nas entrevistas e observações. Não podemos garantir a difusão ou a manutenção desse conhecimento, que podemos sugerir como extensão dessa pesquisa, no entanto as observações de uma sessão a outra nos permitiram observar ganhos cognitivos dos alunos nas tarefas similares que propomos.

Os resultados apontam que propor atividades aritméticas e algébricas na forma de resolução de problemas, é um caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pelas relações e conexões que necessita estabelecer para a solucioná-los. O uso da linguagem natural e de situações contextualizadas nos problemas matemáticos aproxima o aluno de sua realidade, do que lhe é próximo, útil e prazeroso, além de desmistificar a ideia de uma disciplina de difícil aprendizagem. Enfrentamos resistências, entrega de testes em branco, fatores intervenientes e previsíveis, que gradativamente foram sendo contornados pelo oferecimento de possibilidades, de incentivos, de acompanhamento dos alunos. E estes iam cessando até o último teste. E mais uma vez a linguagem se mostrou fator essencial à aprendizagem. A capacidade de manipular essa linguagem é o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico, como de qualquer conhecimento.

A linguagem, por ser um recurso semiótico que permite a inter-relação com os demais saberes e estar diretamente ligada à proposição de tarefas em situação contextualizada, permite a comunicação dos resultados. É assim, fundamental na construção do saber matemático podendo contribuir de forma efetiva na passagem do raciocínio de relações aritméticas ao pensamento algébrico.

E o domínio da linguagem pode levá-lo a aprender o que aparentemente não sabe (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007), como tratar o desconhecido como se fosse conhecido, um dos pilares do desenvolvimento do pensamento algébrico, construindo assim uma aprendizagem significativa e duradoura.

Dessa forma é fato que (II) O aluno do 6º. Ano, que teve pouco ou nenhum contato com a álgebra formal e sua linguagem pela adequação à orientação curricular que rege o ensino brasileiro, consegue significar os objetos matemáticos dos problemas, apropriar-se da linguagem e significar o desconhecido a partir das relações e conexões que estabelece.

Por significação entendemos compreensão e esta leva à aprendizagem. Pois, como coloca Da Rocha Falcão (1993) é através da significação que se constitui a aprendizagem algébrica, e acrescentamos pela capacidade de generalização que lhe é sinônimo, constitui a própria aprendizagem matemática. Trata de inserir o aluno no contexto dos problemas que levem ao desenvolvimento do pensamento algébrico o quanto antes, como propõe o *Early Algebra*, não primando pelos conteúdos algébricos apenas, mas pelo pensamento de relações e conexões que pode promover essa generalização do pensamento, a partir da significação dos problemas e assim desenvolver o pensamento algébrico (USISKIN, 1995; KAPUT, 1999; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KIERAN, 2007).

Como dissemos, não podemos garantir a manutenção da aprendizagem, mas sua própria natureza, solidez são indicativo dessa manutenção. Assim, (III) inserir o aluno no contexto de situações que são limiares entre a aritmética e a álgebra, desmistificando fenômenos de aritmeticismo ou algebrismo, pode contribuir para a aprendizagem algébrica futura. Nessa discussão defendemos os pressupostos do movimento *Early Algebra* que, em consonância com as inovações curriculares que estão sendo implantadas no nível de Ensino Fundamental pela BNCC (BRASIL, 2017), traz em sua natureza elementos caracterizadores e constitutivos do pensamento algébrico e o coloca numa posição de destaque na aprendizagem matemática. Ambos preveem a introdução do pensamento algébrico a partir de noções algébricas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental como proposta de promover a aprendizagem e sua manutenção.

Pela proposta da BNCC (BRASIL, 2017) a álgebra trará as ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade como base para a formação do pensamento algébrico. Essas noções conceituais deverão ser enfatizadas a partir do estabelecimento de generalizações, da análise de interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL 2017). Esse é um item que trazemos à discussão, bem pontual na aprendizagem algébrica, por considerarmos válido e discutível, sem, no entanto, adentrarmos na discussão maior sobre a implantação da Base.

5.3 Respondendo as questões de pesquisa

Para direcionar o nosso estudo questionamos: *Que contribuições uma Sequência Didática – elaborada com atividades de resolução de problemas com números naturais envolvendo operações de natureza aditiva e multiplicativa e aplicada a alunos do 6º. Ano do Ensino Fundamental – traz para o desenvolvimento do pensamento algébrico?* E ainda: *Que condições* e *restrições atuam sobre a implementação dessa sequência didática no 6º ano visando o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir dos estudos realizados?*

E para respondê-las partimos do princípio que contribuímos com o conhecimento. Trata-se de uma proposta didática que se implementada pode levar ao conhecimento, como toda e qualquer ação didática pensada e sistematizada para esse fim.

Propusemo-nos analisar as *condições* e *restrições* para que essa sequência pudesse ser implementada no 6º. Ano, não como um modelo de ensino, mas como uma proposta pensada para o desenvolvimento do pensamento algébrico. É preciso pensar um ensino que valoriza os saberes, o contexto, as relações, a significação e o caminho percorrido no desenvolvimento do pensamento algébrico.

É fato que “o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas” (BRASIL, 1988, p. 37).

Sendo assim, as principais contribuições da sequência didática que elaboramos reside no diferencial de trabalhar com resolução de problemas em linguagem natural que privilegiam o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações e conexões que exigem no seu processo de resolução. E privilegiar o desenvolvimento do pensamento algébrico, nos mostrou os estudos correlatos, que contribui não só para a aprendizagem algébrica futura como para toda a matemática.

Dentre esses estudos destacam o *Early Algebra* com uma proposta de introdução algébrica desde os anos iniciais na visão de romper barreiras epistemológicas futuras. Essa proposta nos inspirou, não no sentido de uma antecipação dos conteúdos algébricos, mas sim de promover o raciocínio de resolução capaz de desenvolver esse tipo de pensamento que as pesquisas em Educação Matemática vêm discutido nas últimas décadas, e não se esgota. Estudos têm retomado essa discussão, principalmente como proposta de superar ou amenizar as dificuldades de aprendizagem com a matemática.

Existe uma *restrição* imposta pelos documentos legais, que traduz uma separação entre aritmética e álgebra nos currículos, no ensino de Matemática no nível fundamental, especificamente do 6º. para o 7º. Ano. Essa separação trouxe rupturas no ensino de Matemática que entendemos ser um dos fatores geradores das dificuldades de aprendizagem algébrica no 7º.ano, quando a álgebra é formalmente apresentada aos alunos, pela atual orientação curricular. E estudos como o nosso que situaram no 6º. Ano, limiar entre a aritmética e a álgebra escolar com sua linguagem própria de símbolos e letras que se inicia no 7º. Ano, buscando soluções a esse entrave, tanto no campo epistemológico como cognitivo.

Pensando nas contribuições da nossa sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pensamos resolução de problemas em linguagem natural pelas conexões e relações necessárias à sua resolução. Face a escolha, enxergamos a partir de estudos que compartilham da mesma ideia e nas novas diretrizes curriculares que estão sendo implantadas avanços em propor o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais visando a aprendizagem algébrica futura, amenizando rupturas ou entraves com a aprendizagem. E nessa discussão aportamos o nosso estudo no 6º. Ano, não como preparação para álgebra, mas como preparação para o estudo de toda a Matemática que visa a significação de seus conteúdos.

Corrobora nesse sentido o que coloca Chevallard (1985) sobre a passagem da aritmética à álgebra. Para o autor essa passagem se torna possível com o estabelecimento de uma relação pessoal satisfatória dos estudantes, através da memória e da linguagem, com as ferramentas da aritmética que são disponibilizadas em seus repertórios conceituais e que lhes permitem manipular os *ostensivos* associados aos *não-ostensivos* a eles relacionados.

Assim, as condições para que essa sequência seja implementada no 6º. Ano situam no campo curricular e no campo conceitual, respeitando as orientações a esse nível de ensino e os conteúdos previstos. Mas não há limitações. A nossa sequência foi pensada com problemas envolvendo Números Naturais, no entanto poderia ser pensada para qualquer conteúdo matemático e situação que envolva o pensar.

As *tarefas* propostas na sequência didática foram de natureza diagnóstica, construídas para a presente pesquisa e buscavam analisar se o aluno do 6º. Ano consegue desenvolver o pensamento algébrico a partir de resolução de problemas. Relacionavam-se aos aspectos da álgebra de memória, estrutura, linguagem, raciocínios sequencial, equacional e funcional, equivalência da igualdade em problemas aritméticos e algébricos, equivalência entre *não-ostensivos* e *ostensivos* capazes de evocá-los, generalização e análise, e quais as dificuldades encontradas por eles em formalizar esse pensamento.

Uma condição nos favoreceu foi o uso de resolução de problemas com uma linguagem natural, que é clara e acessível, de dificuldade simples para o desenvolvimento das relações e conexões que chamamos de pensamento algébrico de resolução, e que pode levar à generalização do saber aprendido.

Os dados produzidos indicaram que a relação com o aspecto da igualdade enquanto equivalência, da relação de dependência enquanto raciocínio funcional e de sequência como generalização de padrões não está estabelecido de forma satisfatória. Há necessidade ainda de uma reflexão dos alunos sobre as anotações por eles desenvolvidas, basicamente estratégias de cálculo, uma vez que parece não compreender o significado das anotações por eles realizadas. São imediatistas, não retornam ao enunciado dos problemas para verificar a resposta e então validá-la. Isso mostra a falta de compreensão e de significação da situação. E identificar *ostensivos* e evocar *não-ostensivos* não garante o sucesso e a compreensão do problema. Há que ter significação, o sujeito só adentra o pensamento algébrico a partir do momento que significa os seus objetos.

De acordo com Chevallard (1994), as relações pessoais dos estudantes com o saber são culturalmente construídas, mediadas pelas relações institucionais impostas a eles por instituições a que eles se submetem. E estas restrições vem da escola e suas diretrizes curriculares, do livro didático como manual de ensino. O mesmo ocorre com o saber matemático. A aprendizagem das operações com números naturais parece ser natural às crianças, desde as instituições familiares e sociais da infância (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Mas os saberes relacionados à álgebra são impostos pela instituição escolar. Assim, para que o estudante aprenda os saberes relacionados ao pensamento algébrico, da mesma forma que os demais saberes matemáticos, será necessário que se criem condições para o estabelecimento da relação pessoal desses estudantes com esses saberes, os mesmos que permitirão a passagem da aritmética à álgebra.

Chevallard (1985) afirma que essa passagem se torna possível com o estabelecimento, por parte dos estudantes, de uma relação pessoal satisfatória com as ferramentas (*técnicas*) disponibilizadas pelas tecnologias e desenvolvidas a partir da aritmética que lhes permitem manipular os *ostensivos* associados aos *não-ostensivos* a eles relacionados.

Observamos que os procedimentos aritméticos são significativos para os alunos. E não os desmerece. Mas chegará o momento em que resoluções aritméticas apenas não serão suficientes, não serão mais eficazes e úteis no estabelecimento de ligações e compreensão dos problemas. Faz-se necessário a partir de então o “desapego” aos *ostensivos* e à linguagem contextualizada em prol de um raciocínio mais sofisticado independentemente do modo como ele vai ser acessado. Que venham das conexões mentais, um pensamento algébrico mais solidificado pelas experiências vivenciadas.

Portanto, usar estratégias de variação de linguagens, de uso de *ostensivos* facilmente manipuláveis e de *não-ostensivos* facilmente acessíveis é um requisito básico apenas para o propósito de iniciar o trabalho algébrico em sala de aula.

Não estamos falando de transferir responsabilidades ao professor, às instituições ou aos órgãos regulamentadores, nem de propor modelos a se seguir. Eles são falíveis, não se encaixam em todos os contextos, não preveem as especificidades dos alunos, generalizam ou uniformizam pessoas. Falamos de estratégias didáticas e de resolução que amenizem as rupturas dessa passagem ou de chegada de um novo conhecimento, que possibilite então o desenvolvimento do pensamento algébrico.

5.4 A continuidade da pesquisa

Discutimos aqui as variáveis que movimentaram nosso estudo, direcionando nossas buscas pelo aporte teórico capaz de justificá-las no contexto da aprendizagem matemática. E como conhecimento elas não se esgotam em uma resposta ou um ponto de vista, pelo contrário, abre leques de possibilidades a outros olhares, a outras realidades a serem discutidas.

A subjetividade da pesquisa de cunho qualitativo nos deixa na liberdade ética de tecermos as ideias a partir do que observamos, amparados em uma fundamentação teórica. Todavia, essa impossibilidade de um retrato exatamente fiel nos coloca também em desconforto, pelo que não foi considerado na escrita desse texto. E então esse trabalho pode ser enriquecido por novas reinvestidas, voltadas às questões mais pontuais e ainda mais tênues do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Dessa forma, fica a sugestão de incrementar o estudo, como realizar testes estatísticos para validar quantitativamente as hipóteses e também observar aulas para verificar em que medida a prática de ensino do professor, no momento em que ele trabalha problemas similares aos propostos aqui, tende a desenvolver as mesmas estratégias previstas. Em particular, em que situações o ambiente de sala de aula, em sua rotina, proporciona o desenvolvimento do pensamento algébrico. Outra ideia que brotou no percurso da pesquisa é a de replicá-la no Ensino Médio e traçar um paralelo entre o quão esses alunos evoluem no pensamento algébrico na educação básica.

Pensamos habilidades de significação e generalização pelo estabelecimento de relações e conexões entre os saberes e o que é apresentado no problema como forma principal de desenvolvimento do pensamento algébrico. Por outro lado, é possível que realizar testes estatísticos para validar quantitativamente as hipóteses levem ao desenvolvimento de outros tipos de habilidades que não foram contemplados nos instrumentos de produção de dados utilizados, como pensar criticamente sobre a resolução de problemas, testar outras habilidades ou desenvolver raciocínios lógicos mais generalizados, etc. Para uma verificação neste sentido, seria necessário conduzir outra pesquisa e desenvolver outros tipos de instrumentos ou outros tipos de problemas para mensurar tais facetas da aprendizagem.

Para encerrar lembramos mais uma vez que se trata de um estudo com características de diagnóstico, com instrumentos de produção de dados que comportaram resoluções com papel e lápis, registros orais das entrevistas e visuais de observação. Por mais ricos que sejam estes meios, o tipo de análise que fizemos limitou-se a eles.

Esse é nosso relatório, de um ponto de vista de quem se situou num contexto particular.

ALDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática.** 6º. Ano. Editora do Brasil: São Paulo, 2015.

ALMEIDA, F. E. L; LIMA, A. P. B. Negociações do Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação no 8º Ano do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, FE/Unicamp, v. 21, n. 39, 2013.

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade**. 2016.Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

ALMOULOUD, S.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALMOULOUD, S. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática,** Pará, v.13, n. 27, p. 05-35, 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BAPTISTA, G. C.S. Importância da demarcação de saberes no ensino de ciências para sociedades tradicionais. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 16, n. 3, p. 679-694, 2010.

BESSOT, A. Panorama del quadro teorico della didattica matematica in Francia**. L'educazione matematica,** Italie, Anno XV, Serie IV, v.1, n.1, 1994.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, R. A. M.; BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.) **Investigações em didática da matemática**. UFPE-Recife, v. 1, p. 101-132, 2017.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: VICTOR, J. K. (Ed.) **Algebra: Gateway to a Technological Future**. Columbia/USA: The Mathematical Association of America, 2007.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 5, n. 36, p. 412-446, 2005.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife. **Anais...** UFPE: Recife, 2011.

BOSH, M., CHEVALLARD, Y**.** La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'estude et problematique. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensé Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, p. 77 – 124, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática**. Brasília, DF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Curricular Comum para o Ensino Fundamental (versão final)**. Brasília: 2017.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques,* Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CAMPOS, M. A.; MAGINA, S. **Construindo significados para o x do problema.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007, p. 669-705.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUEL, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 37, p. 87-115, 2003.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D **Early algebra and mathematical generalization.** ZDM – The International Journal on Mathematics Education, v. 40, p. 3-22, 2008.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: paradigmas, avanços e perspectivas. I SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA - LADIMA**. Anais** ... Bonito – MS, [s.n.], 2016.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique**. Grenoble: IREM de Genoble, n. 5, p. 51-94, 1985.

______. Le concept de rapport au savoir. **Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel.** Seminaire de Grenoble. IREM d'Aix-Marseille: 1989.

______. **La Transposicion Didactica: Del saber sabio al saber enseñado**. Argentina: La Pensée Sauvage, 1991.

______ . Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

______. Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In : ARSAC, G. et al. **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994.

______ . Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. **Recherches em Didactique dês Mathématiques,** v 19, n 2, p. 221-266, 1998.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

______ . Organiser l'étude. Ecologie & regulation. **Actes de la École d'Éte de Didactique des Mathématiques.** France: La Pensée Sauvage, 2002, p. 41-55

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CRESWELL, J. W. **Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches**. 2. ed. Thousand Oaks, Canadá: Sage, 2013.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. **Educação Matemática em Revista: SBEM**, São Paulo, ano 1, n.1, p. 5-11, 1993.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In; SCHILLIEMAN, A. D. et al. (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

______ . A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. et al. (Org) **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997. p. 85-107.

______ . **Psicologia da Educação Matemática: uma introdução**. 1ª. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

______ . **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______ . Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Editora da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa: Lisboa, 2005.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GODINO, J. D.; FONT. V. **Razonamiento Algebraico y su Didáctiva para Maestros.** Granada, Espanha: Universidade de Granada, 2003.

GRECCO, E. C. S. **O uso de padrões e sequências: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de 7º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação. 2008. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. **Ciência e Educação**. v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

KAPUT, J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–12 curriculum. In: FENNELL, S. (Ed.). **The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium**. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998, p. 25-26.

______ . Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E; ROMBERG, T.A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

______ . **Teaching and learning a new algebra with understanding**. National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science, 2000.

______ . What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.). **Algebra in the Early Grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008, p. 5-17.

KASPARY, D. R. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2014.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

KIERAN, C. Une approche aidante pour faire la transition avec l'algèbre. **Bulletin de l'A.P.M.E.P**, 1991, p. 25-28.

______ . The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning. In: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM, New York, 1992.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2010

LEE, L. Early – but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra. In: ICMI STUDY CONFERENCE, Melbourne, Austrália, 2001.

LIMA, A. B. M. Merleau-Ponty e a questão do corpo nas ciências humanas. **Saberes em perspectiva**. Jequié, v. 2, n. 3, 2012, p. 29-40.

LINS LESSA, M. M; DA ROCHA FALCÃO, J. T. Pensamento e Linguagem: Uma Discussão no Campo da Psicologia da Educação Matemática. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Recife, v. 18. n. 3, p. 315-322, 2005.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

______ . Campos semânticos y el problema del significado em álgebra. In**: UNO – Didáctica de las Matemáticas**. n. 1, Barcelona, 1994.

______ . O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et. al. (Ogs) **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**. São Paulo: Midiograf, 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas. Papirus, 1997.

______ . GIMENEZ, J. Sobre a Álgebra. In: LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001, p.89- 157.

LOPES, A. R. C. Conhecimento científico. In: **Conhecimento escolar: ciência e cotidiano**. Rio de Janeiro: EdUERJ, 1999, p. 126- 136).

MAGINA, S. **Repensando adição, subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** São Paulo: PROEM, 2008.

MEZZAROBA, O.; MONTEIRO, C. S. **Manual de Metodologia da Pesquisa no Direito.** 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. **Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro**. Zetetiké, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 39, 1993.

NEAGOY, M. **Planting the seeds of algebra, Prek2: explorations for the early grades**. London: Corwin, 2009.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: XIII CONFERÊNCIA ITERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Recife, 2011.

OLIVEIRA, I.; RHÉAUME, S. Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, n. 14, v. 4, p. 404-423, 2014.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. ***Anais***... Goiânia: UFG, 2015.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa, Portugal, 2009.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. In: **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro-RJ, n. 59, p. 53-68, 2011.

PORTO, R. S. O. ***Early Algebra*****: prelúdio da álgebra por estudantes do 3º e 5º Anos do Ensino Fundamental. 2018.** 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME. Bergen University College. v. 1, 2006

______ . Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: SIXTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. **Anais…** Lyon – França, 2009.

______ . **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Livraria da Física: São Paulo, 2011.

______ . The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal,** n. 26, p. 257-277, 2014.

RUDIO, F.V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. 32ª Edição, Vozes Editora: São Paulo, 2001.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M., EARNEST, D., GOODROW, A., LARA-ROTH, S., et al. Algebra in elementary school. In: PATERMAN, N.; DOUGHERTTY, B; ZILLIOX, J. (Eds.), **International conference for the psychology of mathematics education**. Honolulu: University of Hawaii, v. 4, p. 127–134, 2003.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B. M. Algebra in elementary school. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. especial, p. 107 – 122, 2012.

SCHWANDT, T. A. Três posturas epistemológicas para a investigação qualitativa: interpretativismo, hermenêutica e construcionismo social. In: DENZIN, N. K; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). ***O planejamento da pesquisa qualitativa*: teorias e abordagens**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 193-217.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. In: **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, UFSCar, v. 6, n.1, 2012.

SQUALLI, H. **Tout, tout,tout, vous saurez tout sur l'algèbre**. Trois-Rivières: Éditions Bande Didactique, 2003.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre Álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As ideias da Álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p.9-22.

VERGNAUD, G. **L'enfant la mathematique et la realite**. Berne: Peter Lang,1981.

VYGOTSKY, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes: 2001.

APÊNDICE A: Teste aplicado da 1ª. sessão de experimentação

Nome: ____ Idade: ____ Ano/Turma: ________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

a) $\square$ + 5 = 12. Então o $\square$ vale ______

b) $\square$ – 5 = 0. Então o $\square$ vale ______

Espaço para Rascunhos

2) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R$3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

a) Quem tem mais dinheiro? __________________

Por quê? ____

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso?

____

Rascunhos

3) Observe a sequência das figuras quadrangulares formada por bolinhas. Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer 7ª figura?

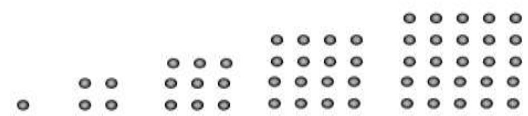


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Resp: _____________________________________

Rascunhos

4) Ana gosta de brincar de sequências numéricas. Ela deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 10º número (termo) que ela escreverá?

5	9	13	17						

Rascunho

Resp:______________________

APÊNDICE B: Teste aplicado da 2ª. sessão de experimentação

Nome: ________________________________ Idade: ____ Ano/Turma: ___

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

Rascunhos

Resp: __________________________

2) Pedro tem 12 figurinhas, Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que Pedro. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

Rascunhos

Resp: __________________________

3) André, Maria e Luna têm, juntos, 72 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

Rascunhos

Resp: __________________________

4) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

Rascunhos

Resp: __________________________

5) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de figurinhas de Paulo e Mário fique com quatro figurinhas a mais que Beto. Quantas figurinhas cada uma vai receber?

Rascunhos

Resp: __________________________

APÊNDICE C: Teste aplicado da 3ª. sessão de experimentação

Nome: ____ Ano/Turma: ________

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

1) Os números da tabela obedecem a uma sequência.

9	15	21			39	

a) Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco e complete-a.

b) Qual o décimo número dessa sequência?

____

Rascunhos

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

Rascunhos

Resp: __________________________

b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

Rascunhos

Resp: __________________________

3) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R$ 2,00 por hora adicional.

Tempo (h)	1	2	3	7
Preço (R$)	3,00			

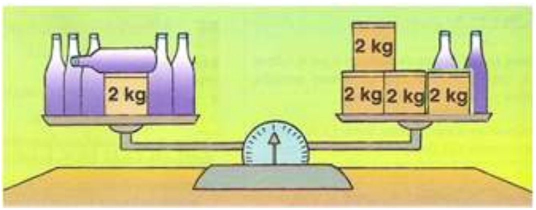
a) Preencha a tabela com os valores em cada tempo de permanência.

b) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

____

Rascunhos

4) A balança ilustrada está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



Rascunhos

Resp: _____________

TERMO DE CONSETIMENTO LIVRE E ESCLARESCIDO – TCLE
e de uso de imagem e voz

Prezado(a) Senhor(a),

Você está sendo convidado(a) a participar, autorizando seu(sua) filho(a) menor a participar, como voluntário(a) da pesquisa **“Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental ”** que tem como objetivo investigar os efeitos de uma intervenção de ensino na aprendizagem da Álgebra, a fim de ajudar o aluno na aprendizagem dos seus conceitos iniciais, considerando as dificuldades já diagnosticadas com a aprendizagem da matemática. Assim o participante deverá responder questionários escritos, entrevistas orais e realizar atividades em sala de aula sobre os conteúdos descritos, em seus horários normais de aula, sem prejuízos de carga horário ou de conteúdos. No entanto, por se tratar de uma atividade diferenciada e com outro professor, lembramos que podem ocorrer desconfortos nos estudantes em responder questionários, atividades ou realizar entrevistas, visto que são adolescentes que ainda estão em processo de formação, principalmente nos aspectos da socialização. Respeitaremos as especificidades de cada estudante e os estudantes diagnosticados com necessidades educacionais especiais e que participarão da pesquisa serão também acompanhados pelos profissionais habilitados em cada necessidade com os *Recursos de Inclusão* numa sala denominada *Multifuncional*, que já existe implantada na Escola e realiza esses acompanhamentos necessários. Nos comprometemos em não expor nem forçar a participação desses estudantes que se sentirem desconfortados com a pesquisa. Faremos o devido acompanhamento desse estudante nas demais atividades de ensino para que não tenha prejuízos de aprendizagem. Nos comprometemos a cumprir o planejamento escolar tanto em horas aulas como nos conteúdos, não causando assim dados ao planejamento curricular e o plano pedagógico da escola. Havendo desconfortos com a aplicação da pesquisa nos comprometemos também em providenciar assistência aos estudantes, seja pedagógico, psicológico, ou de qualquer natureza, encaminhando a profissionais habilitados.

Informamos que não haverá nenhum tipo de pagamento ou gratificação financeira pela sua participação uma vez que será realizada no horário regular de aula do estudante. No entanto poderá pleitear indenização por eventuais danos decorrentes da sua participação direta na pesquisa ou do filho(a) menor, de eventuais despesas decorrentes da participação na pesquisa. Você terá liberdade para pedir esclarecimentos sobre alguma questão, bem como para desistir de participar da pesquisa no momento que desejar, mesmo depois de ter assinado este documento, e não será, por isso, penalizado de nenhuma forma. Caso desista, basta avisar o(s) pesquisador(es) e este termo de consentimento será devolvido. Como responsáveis por este estudo, temos o compromisso de manter em segredo os dados pessoais e confidenciais com o anonimato dos participantes e da instituição, como forma de preservação das suas imagens. Informamos que o resultado deste estudo poderá ser publicado em revistas, eventos, livros sendo favoráveis ou não, de acordo com as práticas editoriais e éticas. Os documentos serão guardados pelo pesquisador por um período mínimo de cinco anos, podendo ser consultados nesse período, bastando solicitar aos pesquisadores o acesso.

Assim, se está claro para o senhor(a) a finalidade da pesquisa e se concorda em participar, pedimos que assine este documento, que será enviado ao Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo seres humanos – CEPEE/UFBA, é um Colegiado interdisciplinar, subordinado à Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), órgão responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de toda pesquisa que envolva seres humanos, que situa-se na Escola de Enfermagem da UFBA, campus Ondina, à Rua Augusto Viana, s/n, Sala 435 – Canela Salvador, Bahia, CEP 40110-060, telefone (71)3283-7615, com horário de funcionamento segunda e quarta das 12:00 às 18:00, e terça, quinta e sexta das 08:00 às 14:00h. E-mail: cepee.ufba@ufba.br.

No caso de responsável não-alfabetizado, pedimos que seja colocada a impressão digital no espaço da assinatura, após lido e assinado a rogo por uma pessoa de sua confiança.

Nossos sinceros agradecimentos por sua colaboração.

____

Márcia Azevedo Campos - marciazevedo70@hotmail.com
Rua Carlos D. de Andrade, 136 – Boa Vista -V.Conquista/BA (77)99913-1627

____

Luiz Márcio Santos Farias – lmsfarias@ufba.br
Rua Barão de Jeremoabo s/n, Ondina, CEP 40170-115, Salvador-BA (71)3283-6608

Eu,____,
RG nº: ____________________________________, li esse termo e autorizo meu/minha filho(a) ____ a participar da pesquisa **"Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental"** como voluntário(a), sob a responsabilidade da pesquisadora Márcia Azevedo Campos e sob supervisão do prof. Luiz Marcio Santos Farias (UFBA), pesquisador e orientador da pesquisa.

Estou ciente do objetivo desta pesquisa em que meu/minha filho(a) participará, em sala de aula e horário normal da escola, de atividades de Matemática propostas com o objetivo de ajudá-lo na apropriação dos conceitos de álgebra. Estou ciente ainda de que nesses momentos a produção escrita do meu filho(a) poderá ser fotografada sem que seu rosto apareça e da mesma forma sua voz poderá ser gravada. Sei ainda que todas as atividades que meu filho(a) realizar nessas aulas serão recolhidos pela pesquisadora para posterior análise. Estou sabendo, por fim, que o anonimato de meu filho(a) será preservado e que essas atividades, embora venham a contribuir para que meu filho(a) adquira mais conhecimentos matemáticos, não serão utilizadas como avaliação escolar, isto é, mesmo que erre na realização das atividades isso não acarretará em uma nota insuficiente na escola. Estou esclarecido que posso pedir mais esclarecimentos sobre esse projeto a qualquer momento. Estou ciente também que poderei requerer indenização quer seja em nome próprio e/ou do meu/minha filho(a) em razão de danos causados pela participação na pesquisa.

Vitória da Conquista, ____ de ______________ de 20__.

____

Assinatura ou impressão digital

____

Testemunha 1 (em caso de responsável iletrado)

____

Testemunha 2 (em caso de responsável iletrado)

OBS.: Este documento será obtido em duas vias (uma para o responsável e outra para o pesquisador) e impresso em três páginas: frente, verso e frente. As páginas que não constarem de assinatura deverão ser rubricadas ou colocada a impressão digital.