



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA
DAS CIÊNCIAS



CECILIA MANOELLA CARVALHO ALMEIDA

**UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO
DE PROBABILIDADE**

Salvador
2018

CECILIA MANOELLA CARVALHO ALMEIDA

**UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO
DE PROBABILIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia – UFBA, na Linha de Pesquisa de Ensino de Ciências, como requisito parcial à obtenção do título de mestra em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Professor Dr. Luiz Márcio Santos Farias.

Salvador
2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ALMEIDA, CECILIA MANOELLA CARVALHO
UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE
PROBABILIDADE / CECILIA MANOELLA CARVALHO ALMEIDA. --
SALVADOR, 2018.

149 f. : il

Orientador: LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS.

Dissertação (Mestrado - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO,
FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS) -- Universidade Federal da
Bahia, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, 2018.

1. ENSINO DE PROBABILIDADE. 2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO
DIDÁTICO. 3. ENGENHARIA DE FORMAÇÃO. I. FARIAS, LUIZ MARCIO
SANTOS. II. Título.

CECILIA MANOELLA CARVALHO ALMEIDA

**UM MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO
DE PROBABILIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia – UFBA, na Linha de Pesquisa de Ensino de Ciências, como requisito parcial à obtenção do título de mestra em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Aprovada em:
09 de abril de 2018

Banca Examinadora

Professora Doutora Cileda Queiroz e Silva Coutinho – PUC-SP
(Membro)

Professor Doutor Jonei Cerqueira Barbosa – UFBA
(Membro)

Professora Doutora Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires – UEFS
(Membro)

Professor Doutor Luiz Márcio Santos Farias – UFBA
(Orientador)

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me proporcionou a saúde e a força necessárias para realizar este trabalho. Fé em Deus sempre!

À minha família: meu marido, meus pais, meus irmãos, meus filhos e, principalmente, minha sogra, que cuidou deles nas minhas ausências. Amo a todos!

Aos meus amigos, que Deus colocou no meu caminho para que me amparassem nos momentos de dúvidas e insegurança; a quem chamo carinhosamente de “irmãos”... Todo o meu carinho a: Anete, Daniela, Rosiléia, Bartira, Lúcia, Rita Cinéia, Eliane, Edmo, Gilson, Leandro, Vitor e a todos aqueles que contribuíram de uma forma ou de outra com a construção e aprimoramento desta pesquisa.

À minha amiga-irmã Sueli, responsável pela minha volta aos estudos, com seus empurrões significativos e palavras de apoio, de amparo, pelas reclamações e pela paciência de ouvir minhas ideias... Você mora no meu coração. Que Deus te abençoe sempre!

Ao meu orientador, professor Dr. Luiz Márcio Santos Farias, pela confiança depositada desde a aceitação do projeto até o final da pesquisa e pela oportunidade de crescimento. Muito obrigada!

Aos professores participantes da banca de qualificação: Jonei Cerqueira, Auxiliadora Pires e Cileda Coutinho, pelas contribuições valorosas e encaminhamentos que permitiram o desenvolvimento desta pesquisa. Muito obrigada pela atenção dispensada!

Aos professores do IFBA integrantes da pesquisa, que contribuíram para este estudo me permitindo participar de suas vivências. Muito obrigada!

Ao amigo Ives pelo apoio disponibilizado às minhas turmas do ensino médio. Muito obrigada!

Aos amigos dos grupos EMfoco e NIPEDICTM que promoveram meu crescimento em discussões em prol de uma Educação Matemática melhor.

Aos demais, o meu muito obrigada!

RESUMO

O objeto Probabilidade vem sendo discutido no Ensino Médio sob uma perspectiva que visa aprimorar o conhecimento sobre os fenômenos aleatórios presentes no cotidiano. A todo o momento, estamos sujeitos a tomadas de decisões baseadas em incertezas que nos levam a escolhas, por vezes, equivocadas. Neste trabalho discutimos um modelo didático idealizado por professores e para professores a respeito da abordagem do ensino de Probabilidade, levando-se em consideração a dualidade do seu conceito. Objetivamos assim, construir um modelo didático de referência que aborde o ensino de Probabilidade, integrando as interpretações: clássica e frequentista. Para tanto, elegemos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) como lente teórica. Desenvolvemos este trabalho no formato *multipaper*, segundo três artigos que correspondem aos nossos objetivos específicos. O primeiro apresenta um estudo histórico-epistemológico sobre o conceito de Probabilidade, o segundo artigo trata-se de uma análise institucional sobre os documentos oficiais que norteiam este saber e o terceiro e último artigo descreve uma Engenharia de Formação com um modelo epistemológico didático de referência (MDR). Esta engenharia, que apreende elementos da Engenharia Didática Clássica, em que os participantes experimentam uma sequência didática para ser utilizada em turmas do terceiro ano do Ensino Médio, permitiu evidenciar a necessidade de novos modelos didáticos para o ensino de probabilidade que permitam aos professores de matemática, minimizar possíveis obstáculos existentes no estudo deste conceito.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade. Teoria Antropológica do Didático. Praxeologias matemáticas. Engenharia didática de formação.

ABSTRACT

The Probability object is being discussed in high school from a perspective that aims to improve the knowledge of the random phenomena present in everyday life. At all times, we are subject to decision-making based on uncertainty that lead us to choices sometimes misleading. In this paper we discuss a teaching model designed by teachers for teachers regarding the probability of the teaching approach, taking into account the duality of its concept. We aim thus building a didactic reference model that addresses probability teaching, integrating interpretations: classical and frequentist. For this, we chose the Didactic Anthropological Theory (TAD) as a theoretical lens. We developed this work in multipaper format according to three articles that correspond to our specific objectives. The first presents a historical-epistemological study on the concept of probability, the second article it is an institutional analysis of the official documents that guide this knowledge and the third and final article describes a training Engineering with a didactic epistemological reference model (MDR). This engineering, seizing elements of Classical Didactic Engineering, where participants experience a didactic sequence to be used in the third year of high school classes, has highlighted the need for new educational models for teaching probability that enable math teachers minimize possible obstacles in the study of this concept.

Keywords: Teaching of Probability. Anthropological Theory of Didactics. Mathematical Praxeologies. Formation didactic engineering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ingénierie et systémique	38
Figura 2 – Engenharia de Formação	38
Figura 3 – Estrutura da dissertação	42
Figura 4 – Níveis de Codeterminação Didática	75
Figura 5 – Definição de Probabilidade	90
Figura 6 – Definição de Probabilidade associada a eventos equiprováveis	91
Figura 7 – Tarefas e tipos de tarefas	92
Figura 8 – Técnicas	93
Figura 9 – Desenho da Engenharia de Formação	109

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Pesquisas envolvendo o ensino do conceito de Probabilidade	19
Quadro 2 – Pesquisas sobre o conceito de Probabilidade	26
Quadro 3 – Níveis de codeterminação didática	75
Quadro 4 – Descrição dos itens do capítulo estudado	87
Quadro 5 – Encontros da engenharia didática de formação	108
Quadro 6 – Análise do 1º encontro	119
Quadro 7 – Análise do 2º encontro	121
Quadro 8 – Análise do 3º encontro	122
Quadro 9 – Análise do 4º encontro	122
Quadro 10 – Análise do 5º encontro	124
Quadro 11 – Análise do 6º encontro	125

LISTA DE SIGLAS

AM –	Atividade matemática
CAPES –	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EDF –	Engenharia Didática de Formação
ENEM –	Exame Nacional do Ensino Médio
IFBA –	Instituto Federal da Bahia
LD –	Livro didático
MDR –	Modelo Didático de Referência
MED –	Modelo Epistemológico Dominante
MER –	Modelo Epistemológico de Referência
OD –	Organização Didática
OM –	Organização Matemática
OML –	Organização Matemática Local
OMP –	Organização Matemática Pontual
OCEM –	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OP –	Organização Praxeológica
PCN –	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+ –	Parâmetros Curriculares Nacionais mais
PCNEM –	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PNLD –	Programa Nacional do Livro Didático
PPI –	Projeto Político Institucional
PUCSP –	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SE –	Sessões de estudo
TAD –	Teoria Antropológica do Didático

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	15
1 Apresentação	16
1.1 Introdução	16
1.2 Revisão de literatura	19
1.3 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)	32
1.4 Objetivos	37
1.5 Aspectos metodológicos de investigação	38
1.5.1 Engenharia didática de formação	38
1.5.2 Engenharia didática clássica	40
1.6 Estrutura da dissertação	41
Referências	42
CAPÍTULO 2	49
2 Artigo 1: Estudo histórico e epistemológico sobre o conceito de Probabilidade: algumas contribuições	50
2.1 Introdução	50
2.2 Aporte teórico	52
2.3 Elementos da História da Probabilidade	53
2.4 Um olhar epistemológico para a Probabilidade	62
2.5 Algumas considerações	66
Referências	68
CAPÍTULO 3	71
3 Artigo 2: Aporte da teoria antropológica do didático numa análise institucional sobre o saber Probabilidade para o Ensino Médio	72
3.1 Introdução	72
3.2 Análise institucional	74
3.3 Análise a partir da TAD	75
3.4 Análise dos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio	82
3.5 Orientações curriculares para o ensino de Probabilidade	84
3.6 Análise do objeto Probabilidade no livro didático do ensino médio	86
3.7 Livro Didático utilizado	88
3.8 Organização praxeológica	90
3.8.1 Critérios de identificação	93
3.8.2 Critérios da razão de ser	94

3.8.3 Critério da pertinência	93
3.9 Considerações finais	94
Referências	95
CAPÍTULO 4	99
4 Artigo 3: Observações acerca de uma engenharia didática de formação para o ensino de Probabilidade	100
4.1 Introdução	101
4.2 Ensino de Probabilidade	102
4.3 Formação de professores que ensinam Probabilidade	104
4.4 A Teoria Antropológica do Didático	105
4.5 A engenharia didática de formação	107
4.6 Percurso da investigação	109
4.7 Análises preliminares sobre a engenharia de formação	110
4.8 Comparativo das análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	119
4.9 Algumas considerações	128
Referências	129
CAPÍTULO 5	132
5.1 Considerações finais	134
Referências	139
ANEXOS	140

Capítulo 1

Apresentação

1 Apresentação

Início este trabalho apresentando ao leitor um pouco do que motivou a elaboração desta pesquisa. Apresento também, uma revisão de literatura que permite justificar minha escolha pelo tema e, em seguida, a teoria adotada, os objetivos dispostos em artigos, os aspectos metodológicos e o formato organizacional da dissertação.

1.1 Introdução

Nesta pesquisa, apresenta-se como tema o ensino do conceito de Probabilidade. O tema referido foi eleito a partir de inquietações em torno da minha prática pedagógica. Enquanto professora de turmas de terceiro ano do Ensino Médio no Instituto Federal da Bahia, ao me deparar com o tema Probabilidade, não tinha ideia de como ensiná-lo, já que o estudei apenas no curso superior, na disciplina de Estatística, tendo este sido apresentado num formato associado a cálculos de inferências estatísticas. A minha maior dificuldade neste âmbito concentrava-se na forma como esse objeto foi definido – com a ausência da abordagem, por parte dos professores, da ideia de acaso e de fenômeno aleatório, por exemplo – e, principalmente, em relação às indagações que surgiam dos estudantes na tentativa de resolver problemas relacionados a este conceito.

Nesse sentido, na procura de livros e de trabalhos que pudessem me auxiliar na compreensão de algumas lacunas existentes na minha formação, e pela ausência de respostas, surgiu a necessidade de pesquisar sobre a temática em pauta, a fim de buscar, em colaboração com professores que também lecionavam no ensino médio, possíveis soluções para uma melhoria do ensino de Probabilidade neste nível de escolaridade.

Uma destas lacunas é a forma como o conceito de Probabilidade é apresentado aos alunos do ensino médio, isto é, apresentado pela definição clássica¹ (laplaciana) e limitado a espaços amostrais equiprováveis. Neste caminhar,

¹ A definição ou interpretação clássica da Probabilidade é aquela expressa pela razão entre o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis, resultante de uma experiência aleatória. Esta definição será discutida ao longo de todo o trabalho.

encontrei pesquisas que já se preocupavam com o conteúdo de Probabilidade apresentado somente deste modo.

Verifiquei também, que muitos são os trabalhos que apontam, em seus estudos, uma preocupação iminente em: trabalhar metodologias voltadas a uma apresentação do conceito de Probabilidade em que são abordadas suas interpretações; e, principalmente, quanto à criação de sequências didáticas. Nestas, os objetivos são discutir o conceito de Probabilidade de forma integrada e, além disso, apresentar aos professores alternativas para o desenvolvimento do ensino do conceito de Probabilidade no que concerne ao seu caráter aleatório.

Nos documentos oficiais, a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é proposto que o componente curricular Probabilidade seja abordado desde o ensino fundamental, dada a relevância de se introduzir para os estudantes a natureza do caráter aleatório em situações que possam compreender o acaso.

Dessa forma, percebendo-se a ênfase dada a um tipo de conceito de Probabilidade em detrimento de outro, houve a preocupação de se investigar como o ensino de Probabilidade poderia ser visto considerando-se duas interpretações do conceito: a interpretação clássica (mencionada anteriormente) e a interpretação frequentista.

A interpretação clássica, definida por Laplace no século XIX e utilizada até hoje, conceitua a Probabilidade limitando-a a espaços amostrais equiprováveis. No caso enumerável finito temos: $P(A) = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número total de elementos em } \Omega}$ (MAGALHÃES, 2013, p. 10). Já a interpretação frequentista foi palco de discussão dos estudos de Von Mises e Bernoulli. Utilizaremos aqui a definição dada por Magalhães (2013, p. 11):

Uma outra definição, denominada frequentista ou estatística, considera o limite de frequências relativas como o valor da probabilidade. Para tal, seja n_A o número de ocorrências de A em n repetições independentes do experimento em questão. Assim,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} .$$

Coutinho (1994) demonstrou certa preocupação com o ensino de Probabilidade, discutindo uma proposta de apresentação de forma integrada² do conceito de Probabilidade. Neste patamar, defendo que as dificuldades no âmbito do

² Coutinho (1994) evidencia como objetivo apresentar uma sequência didática que aborde, além da interpretação clássica, a interpretação frequentista, quando promove aos alunos o trabalho com o acaso sobre situações aleatórias.

ensino dos saberes escolares são potencializadas, sobretudo, quando se trata da exploração de conceitos nas diferentes práticas institucionais (ALMEIDA, 2015). As dificuldades apontadas, aliadas a uma preocupação em estudar teoricamente e discutir aspectos da prática pedagógica do professor, de modo a contribuir com uma melhor apresentação do conceito de Probabilidade, justificam, nesta pesquisa, a escolha como base teórica da Teoria Antropológica do Didático, que se insere na linha da Didática da Matemática.

Nesta pesquisa, com base nos estudos de Barquero, Bosch e Gascón (2013), Chevallard (1999; 2013), Bosch e Chevallard (1999), foi apresentado um modelo epistemológico de referência (MER) e também um modelo epistemológico dominante (MED) que juntos buscam assinalar e/ou revelar elementos do saber institucionalizado no ensino do componente curricular Probabilidade associado à incompletude da apresentação do seu conceito. Estas construções serviram de base para o estudo e desenvolvimento de um modelo epistemológico didático de referência (MDR), realizado com professores de uma escola pública federal da Bahia.

Com a finalidade de construir um modelo epistemológico didático de referência, estruturamos este trabalho em formato multipaper³, cuja disposição se distribui em cinco capítulos. O primeiro capítulo é o de introdução, no qual apresentamos nossa motivação, o quadro teórico, a metodologia e uma discussão de literatura dando sentido e razão de ser para a nossa pesquisa. Os capítulos dois, três e quatro são artigos. O primeiro deles representa um estudo histórico-epistemológico da Probabilidade; o segundo apresenta uma análise institucional sobre os documentos que norteiam este saber; e o último artigo descreve o trabalho realizado com professores sobre uma engenharia didática de formação. No último capítulo encontram-se as considerações finais.

Queremos anunciar um modelo didático de investigação desta pesquisa quando analisamos os fenômenos didáticos gerados na sala de aula, tentando responder a seguinte questão: “É possível, por meio de uma proposta de engenharia didática de formação, observar as concepções dos professores que lecionam Probabilidade e propor mudanças em sua prática em sala de aula? Quais as contribuições de uma engenharia didática de formação construída por professores

³ Apresentamos o formato ao longo deste capítulo.

de forma a integrar as interpretações clássica e frequentista da Probabilidade em turmas do ensino médio?”.

Dessa maneira, tem-se a seguinte hipótese de pesquisa: há restrição⁴ na apresentação do conceito de Probabilidade quando esta é revelada pelos professores aos alunos. A hipótese aludida é reforçada pela concepção da matemática como uma ciência exata e estruturalista em relação ao seu caráter determinístico, o que não permite aos professores desenvolverem junto aos alunos sequências que propiciem percepções e/ou discussões sobre o acaso. A ausência desta percepção impossibilita aos alunos compreenderem que a Probabilidade é uma medida da incerteza, dificultando suas tomadas de decisões sobre eventos cotidianos e fazendo, muitas vezes, com que deixem de participar efetivamente da sociedade, isto é, de receberem uma formação digna para o exercício da sua cidadania.

A fim de justificar esta pesquisa, apresento a seguir uma revisão de literatura dos estudos desenvolvidos sobre o conceito de Probabilidade.

1.2 Revisão de Literatura

Apesar do crescente surgimento de pesquisadores interessados em desenvolver estudos sobre Estatística, pouco tem sido produzido no tocante à Probabilidade, especialmente quando o tópico é o ensino de seu conceito, já que ainda é pequena a quantidade de trabalhos acadêmicos nesse rol.

Para apresentar uma discussão sobre o que se tem produzido em Probabilidade, neste item mostrarei algumas pesquisas que versam a respeito do ensino e aprendizagem da Probabilidade, expondo suas questões e objetivos. Farei isso com a finalidade de situar conceitualmente a presente pesquisa, além de delimitar sua problemática.

Santos (2015) realizou um estado da arte até o ano de 2012, a partir de um levantamento realizado no banco de teses da CAPES, buscando trabalhos que abordassem questões relacionadas ao processo de ensinar e aprender Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória em diversos níveis de ensino. Nesta seleção,

⁴ Restrição no sentido da palavra apresentada de modo condicionante. Dicionário *on-line* de português.

dos 258 trabalhos analisados por ele, 43 tratam do tema Probabilidade, divididos entre 38 dissertações e 5 teses.

Destes 43 trabalhos, foram selecionadas 18 pesquisas que abordavam questões relacionadas ao ensino do conceito de Probabilidade. Apresentamos estas pesquisas no quadro abaixo, destacando seu objetivo, teoria e metodologia,

Quadro 01 – Pesquisas envolvendo o ensino do conceito de Probabilidade.

AUTOR	Título/ano	Objetivo	Referencial teórico	Metodologia
ABE, T. S.	<i>O ensino de probabilidades por meio das visões clássica e frequentista.</i> 2011	Investigar a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvessem duas visões diferentes de probabilidade, a clássica e a frequentista.	Teoria das situações didáticas	Engenharia didática
AMÂNCIO, J. R.	<i>Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID.</i> 2012.	Elaborar uma sequência didática em que fossem propostas situações que favorecessem a construção dos conceitos probabilísticos, em um nível introdutório, e que evitassem os equívocos conceituais sobre probabilidade descritos na literatura.	Shulman	Engenharia didática
BIGATTÃO JR., P. A.	<i>Concepção do Professor de Matemática sobre o Ensino da Estocástica.</i> 2007	Verificar como os docentes de Ensino Fundamental II veem os conceitos estocásticos quando confrontados com situações-problema que envolvam variabilidade na análise exploratória dos dados.	⁵	Pesquisa bibliográfica
CARVALHO, R. P. F.	<i>A formação de conceitos probabilísticos em crianças da 4ª série do ensino fundamental.</i> 2005.	Analisar a constituição do conceito científico de probabilidade em alunos da 4ª série do Ensino Fundamental a partir dos conceitos cotidianos por eles desenvolvidos.	Perspectiva vygotskiana	Método de análise microgenético
COUTINHO, C. Q. S.	<i>Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático.</i> 1994.	Estudar as concepções espontâneas ou pré-construídas dos alunos à propósito do acaso e de probabilidades, analisando as sequências experimentais de introdução a estes conceitos, a partir da observação da estabilização da frequência relativa de um evento após um grande número de repetições da experiência aleatória.	Teoria das Situações Didáticas (TSD)	Engenharia Didática
FIGUEIREDO,	<i>Probabilidade</i>	Introduzir o conceito da	Teoria de	

⁵ Os espaços em branco representam informações que não conseguimos identificar nos trabalhos apresentados.

A. C.	<i>Condicional: Um enfoque de seu ensino-aprendizagem.</i> 2000.	Probabilidade Condicional em cursos de Estatística na Universidade.	Registros de Representação de Raymond Duval	Engenharia Didática
GONÇALVES, M. C.	<i>Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica.</i> 2004.	Identificar as concepções atuais dos Professores de Matemática em exercício no Ensino Fundamental sobre Probabilidade, e verificar se há relação entre estas concepções e as diferentes tendências do Ensino de Probabilidade nas décadas de 70, 80 e 90.	TAD e concepções docentes	Organização praxeológica
GOULART, A.	<i>O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a Escola Básica.</i> 2007.	Analisar o discurso institucional dos conceitos probabilísticos na Escola Básica e verificar se esse discurso instrumentaliza o professor para que ele trabalhe com esses conceitos, de forma que, os alunos aprendam esse conceito de forma significativa.	TAD	Organização Praxeológica
MAROCCI, L. M.	<i>O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma de 1º ano do ensino médio.</i> 2011.	Investigar os processos de elaboração conceitual probabilística dos alunos, quando inseridos em um contexto de resolução de problemas.	Perspectiva histórico-cultural, probabilidade e resolução de problemas	Pesquisa-ação
OLIVEIRA, P. G.	<i>Probabilidade: Concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da Teoria das Concepções (CKC).</i> 2010.	Diagnosticar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos alunos do Ensino Médio em situação de resolução de problemas, quando a aprendizagem é feita tendo como material didático o Caderno do Professor e o Caderno do Aluno, elaborados segundo a nova proposta curricular implementada no estado de São Paulo, em 2008.	Teoria das Concepções	Estudo de caso
RIBEIRO, R. E. S.	<i>Uma proposta de ensino de probabilidade no Ensino Médio.</i> 2012.	Desenvolve, analisa e valida uma sequência didática para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio.	Resolução de problemas (Polya e Pozo)	Estudo de caso
RODRIGUES, M. R.	<i>A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de Probabilidade.</i> 2007.	Propor a utilização da Urna de Bernoulli como modelo Fundamental no ensino de Probabilidade.	Teoria dos Campos Conceituais e Teoria das Situações Didáticas	
SANTANA, M. R. M.	<i>O acaso, o provável, o determinístico:</i>	Refletir sobre o ensino proposto desta temática com o objetivo de identificar como professores do	Teoria dos Campos Conceituais	Entrevista semiestruturada

	concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. 2011	Ensino Fundamental de escolas públicas concebem o ensino de probabilidade.		
SANTOS, P. A.	<i>A modelagem como proposta para a introdução à probabilidade por meio dos 'passeios aleatórios da Mônica'</i> . 2010	Propor a análise das contribuições que uma sequência de ensino aplicada na sala de aula no sentido inverso da praxeologia usual traz para a apropriação introdutória do conceito de probabilidade.	Teoria Antropológica do Didático (TAD)	Pesquisa-ação
SANTOS, J. J. A.	<i>Desenvolvimento de um objeto de aprendizagem para o ensino de conceitos de probabilidade</i> . 2011.	Desenvolver um Objeto de Aprendizagem e investigar sua utilização no processo de ensino de conceitos de probabilidade.	Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e Construcionista de Papert	Estudo de caso
SILVA, I. A.	<i>Probabilidades: a visão Laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito</i> . 2002.	“O estudo e aplicação de uma sequência didática na qual os conceitos ou noções que conduzem à definição de probabilidades fossem abordados a partir de atividades ou situações-problema, e as concepções frequentista e clássica de probabilidade pudessem ser integradas no ensino, tendo em vista uma aprendizagem mais profunda e significativa em termos de compreensão e aplicação das probabilidades.”	Transposição didática	

Fonte: Santos (2015).

Farei comentários a respeito de alguns destes estudos, apresentados no quadro acima baseado em Santos (2015). A escolha das pesquisas comentadas configurou-se devido a uma maior aproximação com a problemática do presente trabalho.

Em Coutinho (1994), cujo estudo tem como objetivo “investigar como se dá a aquisição dos primeiros conceitos de Probabilidade utilizando a visão frequentista” (COUTINHO, 1994, p. 31), a autora propõe:

estudar as concepções espontâneas ou pré-construídas dos alunos a propósito do acaso e probabilidades, analisando as sequências experimentais de introdução a estes conceitos a partir da observação da estabilização da frequência relativa de um evento após um grande

número de repetições da experiência aleatória (COUTINHO, 1994, p. 4).

Coutinho (1994) levanta como problemática a necessidade de uma mudança no programa de ensino de Probabilidade voltado para a abordagem com ênfase na visão clássica e com base na equiprobabilidade. Para isso, a autora parte das noções de experiência aleatória, espaço amostral e frequência, para a construção de modelos matemáticos que permitam aos alunos a experimentação através de situações reais.

Em seu trabalho, a autora realiza uma análise da evolução histórica da formação do conceito de Probabilidade, e fundamentada nisto empreende uma apreciação epistemológica sobre esse saber.

Uma das constatações da autora, inferida por meio da comparação das respostas à questionários, são as concepções errôneas dos alunos, classificadas por ela como entraves de natureza cognitiva: “a crença de equiprobabilidade devido à ausência de informações sobre o evento a ser observado” e “a crença de que a Probabilidade de um evento pode ser influenciada por informações obtidas pelo observador” (COUTINHO, 1994, p. 131).

A autora amplia seu estudo na tese apresentada em 2001, a qual o estudo parte das concepções verificadas nos trabalhos anteriores (COUTINHO, 1994) acerca do ensino de Probabilidade e na possibilidade da mudança na introdução da abordagem frequentista. Especificamente, a questão central salientada no trabalho é:

Dans quelles conditions didactiques les élèves peuvent-ils se familiariser avec des situations aléatoires en contexte scolaire et s’engager dans une appréhension de nature probabiliste et en termes de modèle de telles situations dès le Collège? (COUTINHO, 2001, p. 17).

Sob quais condições didáticas podem os alunos se familiarizar com situações aleatórias em contexto escolar e participar em uma apreensão de natureza probabilística e em termos de modelo de tais situações desde o ensino fundamental? (COUTINHO, 2001, p. 17, tradução nossa).

Observamos que a autora constrói sua tese a partir da apresentação de um estudo sobre a ideia de acaso e noções de Probabilidade e modelo, estudo destinado a definir o campo dos problemas no qual pode ser baseada uma didática

das Probabilidades. Coutinho (2001) completa a delimitação apresentando os conceitos de campo pseudo-concreto, a experiência aleatória e o modelo de Urna Bernoulli, abordado por meio de um ponto de vista didático.

Como conclusão, a autora aponta que a introdução do conceito de Probabilidade através de modelos experimentais que propiciem ao aluno verificar a estabilização da frequência, ou seja, a dupla abordagem da apresentação do conceito de Probabilidade, desenvolve nos estudantes uma aprendizagem mais completa.

Nesta pesquisa, o trabalho de Coutinho (1994; 2001) nos dá suporte na construção de um modelo epistemológico, pois analisamos em seu desenvolvimento histórico e epistemológico a construção do saber Probabilidade, além de verificarmos como podemos utilizar sequências para integrar os enfoques clássico e frequentista pretendidos neste estudo.

Em Silva (2002), é apreciada uma proposta de sequência didática em que foi recomendado que se apresentassem atividades e situações-problema que abordassem os conceitos que conduzem à definição de Probabilidade e à integração das visões clássica e frequentista, o que, para o pesquisador, é fundamental a uma aprendizagem mais significativa dos conceitos de Probabilidade.

O autor estabelece como questão de pesquisa: “é possível organizar uma sequência de ensino que encaminhe uma apreensão de modo significativo e abrangente da noção de Probabilidade?” (SILVA, 2002, p. 19).

Como fundamentação teórica, foi utilizada por ele a Transposição Didática de Yves Chevallard (1991) e a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1991). O autor constitui uma relação entre o fenômeno da Transposição Didática e o desenvolvimento do conceito de Probabilidade, realizando neste sentido as classificações entre o saber sábio, o saber a ensinar e o saber ensinado. Para ele, “o estudo da Transposição Didática nos permite delinear a abordagem a qual daremos ao trabalho” (SILVA, 2002, p. 26).

Silva (2002) realiza ainda um estudo histórico e epistemológico em sua pesquisa e também uma análise da Teoria das Probabilidades nos documentos oficiais e livros didáticos, e é a partir destes estudos que o autor constrói sua sequência didática. Em suas conclusões, infere que o desenvolvimento do conceito de Probabilidade, por meio das sequências didáticas construídas, gerou reações expressivas: nos alunos, maior interesse e participação nas aulas; e no professor da

turma, uma percepção maior quanto à importância do desenvolvimento do pensamento probabilístico pelos alunos, além da mediação orientada das atividades que visam facilitar a institucionalização dos conceitos.

A pesquisa de Silva (2002) representa um norte para o que objetivamos fazer no que diz respeito à formação de professores e o ensino do conceito de Probabilidade. Observamos que Silva (2002) não só permitiu a abordagem das duas interpretações da Probabilidade, como destacou possíveis caminhos tanto para a modificação da concepção dos estudantes quanto dos professores.

O trabalho de Abe (2011) objetivou investigar a aprendizagem de Probabilidade por alunos do nono ano do ensino fundamental a partir de situações que envolviam as visões clássica e frequentista da Probabilidade. O trabalho foi fundamentado teoricamente pela Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), e metodologicamente pela Engenharia Didática de Artigue (1995).

Nesse sentido, foram construídas sete sessões de atividades com os conceitos de Probabilidade, que foram compostas por: experimentos aleatórios e determinísticos; espaço amostral; evento elementar e impossível; espaço amostral equiprovável e não equiprovável; visão clássica; visão frequentista; e articulação entre a visão clássica e a frequentista. Em todas as sessões o olhar foi direcionado sobre a engenharia didática, confrontando-se hipóteses da análise *a priori* com a *posteriori*.

Abe (2011) alega a importância de o tema abordado em seu trabalho ser realizado nas séries finais do ensino fundamental, para que o aluno, ao ingressar no ensino médio, já apresente algum conhecimento sobre ações realizadas em seu cotidiano.

Também na pesquisa de Ribeiro (2012) objetivou-se “elaborar, investigar e validar uma sequência didática que auxilie no ensino e na aprendizagem de Probabilidade no terceiro ano do ensino médio” (RIBEIRO, 2012, p. 27). Para o autor, “a compreensão de um modelo probabilístico proporciona aos estudantes conhecimentos e habilidades úteis em sua vida” (RIBEIRO, 2012, p. 11). O referencial teórico utilizado são os cenários de investigação e ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose (2008), e a resolução de problemas segundo Polya (1995) e Pozo (1998).

O autor realiza ainda uma revisão bibliográfica e faz citação dos trabalhos de Goulart (2007) e Rodrigues (2007) – ambos trabalham com o conceito de

Probabilidade e as dificuldades apresentadas por professores em trabalhar esse tema. Estes trabalhos têm suas referências baseadas em teorias da Didática da Matemática: o primeiro deles na Teoria Antropológica do Didático e o segundo na Teoria dos Campos Conceituais.

Considerando os trabalhos de Goulart (2007) e Rodrigues (2007). Goulart (2007) tem como propósito a análise do discurso institucional sobre os conceitos de Probabilidade. O autor verificou nesse contexto a predominância da abordagem clássica da Probabilidade e a ausência de um discurso que permita outra abordagem no ensino do seu conceito.

Rodrigues (2007), em sua pesquisa, expõe uma proposta de utilização da urna de Bernoulli a partir de uma atividade chamada “garrafa de Brousseau”, construída com o aporte das teorias das situações didáticas e da teoria dos campos conceituais. Rodrigues (2007) busca em seu modelo a construção dos conceitos probabilísticos e o desenvolvimento da importância de apresentar as interpretações, clássica e frequentista, aos alunos.

Goulart (2007), na apreciação do discurso institucional realizada na sua pesquisa, conclui que os documentos oficiais não dispõem ferramentas que permitam aos professores ensinar os conceitos probabilísticos de forma mais significativa. Além disso, essa ausência é refletida nos livros didáticos e no baixo desempenho em questões do exame nacional do ensino médio (ENEM).

Já Rodrigues (2007), constatou que os estudantes apreendem os conceitos de Probabilidade através de uma modelização pseudoconcreta (urna de Bernoulli). O autor chama a atenção para a possibilidade de inserção do modelo em cursos de formação de professores.

Ribeiro (2012) apresenta algumas questões que nortearam sua pesquisa:

Como desenvolver um ensino de Probabilidade de forma interessante e contextualizada?; A compreensão de conceitos de Probabilidade pode auxiliar o aluno na compreensão de sua realidade?; É possível desenvolver o ensino de Probabilidade através da resolução de problemas em um cenário para investigação com referências à realidade? (RIBEIRO, 2012, p. 27).

O autor, assim como Coutinho (1994), aplicou um questionário para identificar as concepções iniciais dos alunos sobre o conceito de Probabilidade. Essa primeira análise permitiu ao pesquisador averiguar, por meio das respostas dos estudantes,

que “os alunos, em geral, conhecem superficialmente o significado de aleatório e Probabilidade” (RIBEIRO, 2012, p. 41). Partindo desta análise, foram realizadas sequências didáticas. Foram empreendidas ao todo seis sequências que buscavam trazer entendimento à abordagem de resolução de problemas sobre os conceitos de Probabilidade. O autor pôde inferir que o trabalho efetivado sobre ambientes de aprendizagem em cenários de investigação propiciou aos alunos o envolvimento com este saber.

Dando curso ao levantamento das pesquisas, realizamos uma busca no banco de teses e dissertações da CAPES a fim de verificar produções sobre Probabilidade de 2013 a 2017. Colocamos o descritor: “conceito de Probabilidade”, o que nos permitiu encontrar 11 produções, todas elas no formato de dissertação.

São elas:

Quadro 02 – Pesquisas sobre o conceito de Probabilidade.

Autor	Título/ano	Objetivo	Teoria	Metodologia
PEREIRA, J. E.	<i>Uma sequência didática utilizando jogos para introdução do conceito de probabilidade. 2013.</i>	Introduzir os conceitos de experimento aleatório, probabilidade de ocorrência de um evento e espaço amostral de probabilidade equiprovável e não equiprovável.		Sequência didática com o uso de jogos
SOUZA, G. de O.	<i>Explorações de estudantes do 9º ano sobre o conceito de probabilidade com o software tinkerplots 2.0. 2015.</i>	Investigamos conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre probabilidade com o uso da ferramenta <i>Sampler</i> do <i>tinkerplots 2.0</i> .		Entrevistas semiestruturadas
JUNG, M. O.	<i>Questionário Virtual Para o Ensino de Probabilidade. 2013.</i>	Apresentamos uma proposta que sugere, num primeiro momento, uma problematização para, depois, conceituar e definir os termos que envolvem a Probabilidade.		Questionário virtual e interativo
DANTAS, E. A.	<i>Probabilidade: uma reflexão teórico-prática no ensino da matemática. 2013.</i>	Explorar o conceito de probabilidade, nos aspectos históricos e pedagógicos, utilizando jogos e situações desafiantes através de atividades orientadas, buscando mostrar a importância desse		Metodologias investigativas

		conhecimento na formação cognitiva do aluno.		
ADÃO, T. da S.	<i>Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas. 2013.</i>	Elaboração de atividades usando jogos com dados e moedas para a introdução ao estudo de probabilidade.		
NASCIMENTO, J. L.	<i>Probabilidade e Probabilidade Geométrica - além dos dados, moedas e cartas de baralho. 2015.</i>	Divulgar a ciência e estimular os alunos e professores da educação básica a fazerem pesquisa moderna, com um texto caracterizado por linguagem simples e aplicações práticas interessantes.		
SANTOS, C. S. R. dos	<i>Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais. 2014.</i>	Verificar como ocorre a construção do conceito de probabilidade por estudantes do 2º ano do Ensino Médio.	Teoria dos Campos Conceituais	Jogos e sequências de atividades
RITTER, D.	<i>O ensino de probabilidade geométrica: desafios e possibilidades. 2017.</i>	Investigar quais são as contribuições do ensino de Probabilidade Geométrica na aprendizagem do conceito de Probabilidade.	Aprendizagem significativa	Três Momentos Pedagógicos (TMP) proposta por Delizoicov e Angotti (1990)
CANAVEZE, L.	<i>O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP. 2013.</i>	Descrever e analisar um cenário de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade em três classes de segunda série do Ensino Médio, em uma escola da rede pública estadual do município de Sorocaba, interior do estado de São Paulo.		
ALBUQUERQUE, R. R. C. de	<i>O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade. 2015.</i>	Apresentar uma proposta de aula para introdução do ensino de probabilidade por meio do Jogo dos Discos que é baseado no conceito de probabilidade geométrica e consiste em determinar a probabilidade de um disco não interceptar as linhas de uma superfície quadriculada, quando lançado aleatoriamente.		
LUZ, C. C.	<i>Letramento</i>	Diagnosticar invariantes	Teoria dos	Estudo de

	<i>probabilístico no ensino médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2015.</i>	operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas, para que busquemos elementos que permitam uma proposta de modelo de construção de conceito (modelo de evolução de aprendizagem).	Campos conceituais	caso
--	---	--	--------------------	------

Fonte: arquivos das pesquisas mencionadas. A autora (2018).

Conforme o quadro anterior, apresento algumas considerações das pesquisas elencadas neste quadro tomando a aproximação com a problemática desta investigação como aspecto norteador.

Luz (2015) expõe como motivação o seguinte:

Escolhemos fazer uma pesquisa dentro do campo da aprendizagem da probabilidade e, para isso, partimos dos resultados observados em Coutinho (2001) para delinear nosso estudo. Percebemos assim, a necessidade de uma pesquisa que articulasse o enfoque clássico e frequentista, por meio da probabilidade geométrica e com a utilização de um ambiente computacional para as simulações dos experimentos aleatórios (LUZ, 2015, p. 17).

A autora citada apresenta como intuito primordial, “diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas, para que busquemos elementos que permitam uma proposta de modelo de construção de conceito” (LUZ, 2015, p. 17). Nesse âmbito, a autora utilizou como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais. Luz (2015) assevera que esta teoria permitiu a articulação com os princípios do letramento probabilístico de Gal (2005).

A pesquisa desdobrou-se metodologicamente por um estudo de caso proposto através de uma sequência didática desenvolvida a respeito de três situações didáticas aplicadas a alunos voluntários do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular paulista. A proposta das situações didáticas analisadas por meio dos protocolos de registro definiu como objetivo a articulação das visões clássica e frequentista.

Luz (2015) conclui sua pesquisa apontando que:

Acreditamos que nossos alunos obtiveram um desenvolvimento no que se refere ao conhecimento sobre probabilidade a nível básico... Percebemos o não conhecimento por parte dos alunos do enfoque

frequentista da probabilidade e a possibilidade de trabalhar em um contexto geométrico, mas por meio das atividades adquiriram este conhecimento, mobilizaram os invariantes e conseguiram articular estes conhecimentos quando solicitados, facilitando a realização das atividades (LUZ, 2015, p. 125).

As pesquisas mais recentes destacadas nesta pesquisa são os trabalhos de Souza (2015) e Ritter (2017). Ambos utilizaram um *software* para exploração de problemas envolvendo o conceito de Probabilidade.

A dissertação de Souza (2015) tem por objetivo investigar conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental sobre Probabilidade com o uso da ferramenta *Sampler* do *TinkerPlots 2.0*. O autor apresenta uma discussão teórica do conceito de Probabilidade, abordando os conceitos principais associados a experimentos aleatórios, e discorre sobre os encontros com os estudantes na aplicação do sistema por meio de teste-piloto.

O autor enfatiza em sua pesquisa que o uso do *software* em simulações de atividades de experimentação de situações aleatórias permitiu aos alunos uma melhor aproximação entre a interpretação clássica e a frequentista.

Por fim, Ritter (2017) realizou sua pesquisa com estudantes do ensino médio e buscou investigar quais são as contribuições do ensino de Probabilidade Geométrica na aprendizagem do conceito de Probabilidade. A autora organizou atividades a serem aplicadas aos alunos seguindo a abordagem metodológica dos três momentos pedagógicos proposta por Delizoicov e Angotti (1990), que norteou suas sessões de estudo nas quais, além dos questionários, foram desenvolvidas atividades no *software* geogebra.

A autora se apoia teoricamente na Teoria da Aprendizagem Significativa concebida por Ausubel (1968); e observa nos momentos de aprendizagem dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo de geometria que impactam na aprendizagem do conteúdo de Probabilidade.

Assim, as pesquisas citadas são significativas, pois contribuem para a construção do modelo epistemológico didático aqui proposto, no momento em que reforçam e apoiam a hipótese da relevância do ensino de Probabilidade ser apresentado aos alunos de forma integrada, através de sequências didáticas que abordem conjuntamente as interpretações: clássica e frequentista.

Desde os trabalhos de Coutinho (1994), vêm se desenvolvendo sequências didáticas nesse propósito, com o olhar voltado à aprendizagem do aluno sobre a

teoria das Probabilidades e, conseqüentemente, ao apoio aos professores em sala de aula. Nos trabalhos aqui apontados, foram constatadas discussões acerca dos elementos que articulam o conceito de Probabilidade (como espaço amostral, experimento aleatório, acaso etc.), indicados nas pesquisas, desde o ensino fundamental até o ensino superior, como ausências da exploração do caráter aleatório devido à apresentação deste conceito se dar por uma única interpretação, a interpretação clássica.

Desta forma, o que foi verificado nesta revisão bibliográfica, corroborando com a finalidade desta pesquisa, é a apresentação de alternativas didáticas de apoio aos professores para estender o conceito de Probabilidade tradicional (interpretação clássica), agregando-o a novos conceitos (interpretação frequentista, geométrica, lógica etc.) na busca pela melhoria do processo de ensino e aprendizagem deste saber, e, assim, permitir que o ensino de Probabilidade seja apresentado associado à aleatoriedade e conectado à Estatística.

Neste contexto, nesta pesquisa tem-se a preocupação em apresentar um modelo epistemológico de referência que permita observar um problema didático e discuti-lo através de um modelo didático de referência, quando propomos uma engenharia didática de formação desenvolvida em seis encontros com o intuito de fornecer aos professores partícipes da pesquisa subsídios para explicar de maneira integrada o ensino do conceito de Probabilidade.

Neste trabalho, trataremos da incompletude⁶ da atividade matemática do sujeito quando ensina o conceito de Probabilidade por meio da Teoria Antropológica do Didático; o que permite olhar o desenvolvimento do saber Probabilidade e tornar evidente a sua razão de ser⁷ nas práticas escolares, buscando entendimento num estudo sobre sua epistemologia e observando suas transposições, além das condições e restrições em que este saber vive.

Assim, para dar suporte teórico à pesquisa proposta, e observando-se que há poucos estudos que abordam o tema sob o viés da Teoria Antropológica do Didático, trago a seguir alguns elementos por meio dos quais se discute o referencial teórico em questão.

⁶ Utilizamos este termo como definido em Lucas, Fonseca, Gascón e Casas (2014).

⁷ A “razão de ser” é um conceito da Teoria Antropológica do Didático, podendo ser definida como as condições que permitem e fundamentam a permanência do ensino de determinado saber em uma determinada instituição.

1.3 A Teoria Antropológica do Didático – TAD

A Transposição Didática estuda as diferentes possibilidades de transformação às quais um determinado saber científico passa até tornar-se suscetível de ser ensinado. Ao levarmos em consideração esses processos de transposição, escrevemos o problema didático associado ao ensino de Probabilidade no âmbito da Teoria Antropológica do Didático – TAD, ou seja, discutimos as transformações sofridas por este conhecimento resultante no âmbito das ações humanas e institucionais.

A TAD surgiu com o intuito de responder algumas questões que a Transposição Didática não respondia numa análise do homem frente aos objetos do conhecimento. Ademais, a TAD procura compreender as condições para o estudo das organizações praxeológicas nas relações: instituição, aluno e saber.

Chevallard (1999) define como conceitos primitivos da TAD os conceitos de objeto O, pessoa X e instituição I. Para o autor, tudo é objeto. Consideramos como instituição: a escola, o professor, os alunos, o livro didático etc. São verificadas a existência e o significado destes termos observando-se as relações existentes entre o objeto e as instituições, chamadas de relação institucional $R(I,O)$; e as relações existentes entre o objeto e as pessoas, denominadas como relação pessoal $R(X,O)$. Nesta pesquisa, por exemplo, o objeto do saber O: ensino de Probabilidade existe para uma pessoa X: professores ou alunos; na instituição I: 3º ano do Ensino Médio.

Além disso, a TAD utiliza-se das definições de ecologia para o estudo do saber. Fernandes (2015) realiza um estudo sobre o termo ecologia desde seu surgimento e inserção na TAD. O termo ecologia, como ciência, perpassa a biologia. Para a teoria aqui investigada, a ecologia representa o ambiente específico onde um objeto do saber vive. Neste sentido, este estudo ecológico segue acompanhado por seus elementos: o ecossistema, *habitat* e nicho, definidos, nesta ordem, como a sociedade, o lugar em que vive e o modo de viver de determinado saber.

Segundo Almouloud (2007, p. 113):

A problemática ecológica amplia o campo de análise e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Nesta visão, os objetos têm inter-relações hierárquicas que permitem identificar e analisar as estruturas

ecológicas dos objetos. O autor vai assim buscar apoio na ideia de nicho, habitat, cadeia alimentar, ecossistema, para tentar explicar as relações entre os objetos e no estudo em si mesmo.

Numa acepção mais ampla, a análise do problema desta pesquisa pode ser associada à referida teoria, quando investigada a “vida” do objeto Probabilidade, observando-se o ecossistema, no qual vive seu *habitat* e seu nicho. Por exemplo, de um modo geral, observamos o saber Probabilidade no ensino médio, como está posto nos documentos oficiais, nos livros didáticos, no planejamento dos professores.

A TAD estuda e analisa as práticas institucionais por meio das organizações praxeológicas. Segundo Chevallard (1999), a noção de praxeologia ou organização matemática é importante, pois preserva a atividade matemática. Neste trabalho, será contemplada a praxeologia que organiza a relação de três professores que ensinam Probabilidade, a fim de desenvolver, a partir do que ensinam, uma nova praxeologia.

A palavra praxeologia é composta por *práxis+logos*, representando dois blocos: o bloco ligado à *práxis*, o bloco do saber-fazer; e o bloco associado ao *logos*, o bloco do saber.

Estes blocos devem ser inseparáveis: o bloco do saber-fazer e o bloco do saber. O bloco do saber-fazer é constituído pelos *tipos de tarefas* e pelas *técnicas*. Os *tipos de tarefas* permitem descrever o problema por uma ação representada por um verbo, a exemplo de: *calcular* a Probabilidade, *apresentar* o espaço amostral etc. E para que esta ação seja realizada, é preciso que seja descrita e apresentada uma *técnica* que permita às tarefas serem desenvolvidas, como por exemplo: descrever o diagrama de árvore para o lançamento de duas moedas. O bloco em questão também é conhecido como o bloco prático-técnico. Nas vivências de sala de aula, verificamos que os professores que ensinam Probabilidade pautam suas atividades dando ênfase a este bloco. Associado ao bloco prático-técnico, podemos dar como exemplo, para esta pesquisa, tarefas como: calcular a Probabilidade, definir o espaço amostral etc.

O outro bloco, o bloco do saber, é constituído pela parte organizadora e formalizadora do saber, nele estão: a *tecnologia* e a *teoria*. Nele surgem as provas, descrições e comprovações que formalizam a utilização das técnicas aplicadas, num discurso tecnológico, sendo que a tecnologia justifica a técnica. Este discurso tecnológico, por sua vez, está apoiado na teoria, ou seja, como este saber está

formalizado pela academia nos documentos norteadores, a teoria justifica a tecnologia. Estes quatro elementos – tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria – compõem uma organização matemática.

As organizações matemáticas são classificadas em: pontuais, locais, regionais ou globais. Quando um conjunto de técnicas, tecnologias e teorias diz respeito a um tipo de tarefa, temos a formação de uma organização praxeológica pontual. Já quando reunimos uma série de organizações pontuais, passamos a ter uma organização matemática local; quando arranjamos essas organizações em torno de uma tecnologia comum, temos uma organização matemática regional. Em nível global a chamaremos de saber matemático (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Nesta pesquisa, lançamos nosso olhar sobre a elaboração de um modelo epistemológico de referência (MER) para avaliar o fenômeno didático⁸ evidenciado no modelo epistemológico dominante (MED), com o objetivo de construir um modelo epistemológico didático de referência que analisa as restrições que podem surgir nas organizações matemáticas para o ensino de probabilidade.

Assumimos como modelo epistemológico dominante (MED) o conjunto de ferramentas concebidas pela noosfera e que situam a ecologia de determinado saber. Para analisarmos um MED, buscamos observar como um saber vive nos documentos oficiais, na universidade, nas escolas, no livro didático etc.

Barquero, Bosch e Gascón (2011, p. 14) afirmam que:

Como foi demonstrado em alguns trabalhos anteriores realizados no campo da TAD, o modelo epistemológico dominante de matemática em uma instituição de ensino, ou seja, a maneira particular de interpretar e descrever a matemática na referida instituição, condiciona fortemente o modo de interpretar (dos sujeitos da referida instituição) o que é ensinar e aprender matemática, ou seja, o modelo docente atual (GASCÓN, 2001). Poderia até mesmo dizer-se que o modelo epistemológico dominante em uma instituição constitui um componente essencial da tecnologia didática na referida instituição.

Segundo Fonseca, Gascón e Lucas (2014), a formulação de um problema didático envolve sempre a interpretação da atividade matemática em jogo. Esta interpretação é descrita através de um modelo epistemológico, que, para a Teoria

⁸ Definimos como fenômenos didáticos aqueles que decorrem do processo de ensino e de aprendizagem.

Antropológica do Didático, é imprescindível para resolver o problema didático presente em determinada instituição.

Ainda de acordo com os autores aludidos, a explicação deste modelo é essencial para se poder formular o problema didático como um problema científico. Assim, esta explicação constitui-se numa resposta à dimensão epistemológica deste problema, e se materializa por um modelo epistemológico de referência (MER).

A formulação de outros aspectos ou dimensões do problema didático, bem como as possíveis respostas a eles, são necessariamente baseadas no MER do campo de atividades matemáticas que está em jogo (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014, p. 4, tradução nossa).

Neste aspecto, verificamos nesta pesquisa que é possível construir um MER envolvendo o conceito de Probabilidade de posse do MED representado pelos documentos normativos deste saber. Na aceção de Bosch e Gascón (2010) e de Barquero, Bosch e Gascón (2011), estes modelos epistemológicos representam base para modelos epistemológicos didáticos, e é neste sentido que, de posse do MED e do MER, pretendemos construir um MDR.

Para apreciação do MDR, utilizaremos a Teoria dos Momentos Didáticos de Chevallard (1999), em que analisamos as praxeologias didáticas ou organizações didáticas através de seis momentos didáticos ou de estudo.

Segundo Chevallard (1999), as organizações didáticas são respostas às questões originadas pelo problema ecológico levantado. Descreveremos, de acordo com este autor, os Momentos de Estudo ou momentos didáticos, a fim de produzir uma análise do percurso da organização didática pesquisada.

A noção de momento não remete mais do que na aparência à estrutura temporária do processo de estudo. Um momento, no sentido dado à palavra aqui, é primeiramente uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator em um processo multifatorial. Bem entendido, uma gestão saudável do estudo exige que cada um dos momentos didáticos seja realizado no momento certo, ou mais exatamente, nos bons momentos: por um momento de estudo geralmente é realizado várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios que brotam no tempo. Nesta visão, será indicado que a ordem colocada, posteriormente, nos diferentes momentos didáticos é de fato amplamente arbitrária, porque os momentos didáticos são, em primeiro lugar, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica (CHEVALLARD, 1999, p. 21).

Uma organização didática é descrita por seis momentos de estudo. O primeiro momento é definido como o momento do primeiro encontro com a organização matemática que está em jogo; o segundo momento diz respeito à exploração de um determinado tipo de tarefa e à elaboração de uma determinada técnica relativa a esse tipo de tarefa; o terceiro momento trata do estudo da constituição do entorno tecnológico-teórico relativo aos outros momentos. Neste pensamento, o terceiro momento diz respeito à primeira etapa do estudo juntamente com os outros dois (primeiro e segundo) momentos do bloco do saber-fazer (CHEVALLARD, 1999).

O quarto momento equivale ao trabalho da técnica que corresponde ao momento no qual colocamos em prova a técnica utilizada e observamos o bloco do saber. O quinto momento é o da institucionalização e tem o propósito de determinar a organização matemática construída. O sexto momento corresponde ao da validação e está diretamente ligado ao momento da institucionalização; ele tem o papel de verificar o aprendizado e de discutir sobre a organização matemática proposta (CHEVALLARD, 1999).

De uso destas ferramentas, nesta pesquisa propõe-se apresentar o saber Probabilidade no âmbito da epistemologia, revelando-se um modelo epistemológico dominante que permitirá a reconstrução de uma organização matemática para o ensino deste saber – organização esta que é apoiada sobre um modelo epistemológico de referência.

A pretensão que nós temos é a de construir um modelo didático de referência (MDR) com e para professores que lecionam Probabilidade no ensino médio. Assim, reconstruir as praxeologias matemáticas referentes ao saber Probabilidade, é atuar sobre a atividade matemática desses sujeitos numa dada instituição.

Podemos verificar, nestes termos, na apreciação das pesquisas, que parte de uma análise descritivo-analítica do modelo epistemológico de referência que apresenta o ensino de Probabilidade presente hoje nas instituições escolares, que, de posse desses elementos sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, realiza uma conexão explanando a proposta de um modelo epistemológico didático de referência (MDR). Para isso, propõe-se uma engenharia de formação com três professores do ensino médio de uma escola pública federal que ensinam este saber. A formação tem o objetivo de reforçar a ideia do ensino do conceito de Probabilidade de forma a abordar seu caráter aleatório.

A partir dos elementos teóricos apresentados, definimos a seguir os objetivos desta pesquisa.

1.4 Objetivos

Considerando o aspecto desta pesquisa enquanto qualitativa, e o que discutimos até o momento, é possível enunciar como objetivo geral deste estudo: **construir um modelo didático de referência que aborde o ensino do conceito de Probabilidade, integrando as interpretações: clássica e frequentista.**

Para tanto, tendo como lente teórica a TAD, concebemos e experimentamos um dispositivo didático, por meio de uma Engenharia de Formação, que tem elementos da Engenharia Didática Clássica, em que os participantes desenvolvem uma sequência didática para ser experimentada em turmas do terceiro ano do ensino médio.

A proposta de apresentação desta dissertação está configurada no formato multipaper – o qual exporemos no próximo tópico. Nessa conjuntura, cada artigo representa um objetivo específico:

- *Construir um modelo epistemológico de referência do conceito de Probabilidade a partir de um estudo histórico-epistemológico.*
- *Construir um modelo epistemológico dominante do saber Probabilidade através da análise institucional.*
- *Construir um modelo didático de referência que aborde a dualidade do conceito de Probabilidade construído a partir da cooperação com professores.*

1.5 Aspectos metodológicos da investigação

Diante dos objetivos propostos, neste estudo, e amparados teoricamente pela TAD, apresento a Engenharia Didática, metodologia que norteia esta pesquisa. Para construção do modelo didático de referência proposto, utilizamos a engenharia didática de formação nos moldes da Engenharia Didática Clássica. Essa junção

metodológica atende à proposta deste trabalho, pois suas fases contemplam o modelo epistemológico de referência aqui analisado.

A seguir, apresento as duas definições das engenharias: a de formação e a clássica, apesar de salientar que nesta pesquisa, metodologicamente, elas funcionam como uma única engenharia didática.

1.5.1 Engenharia Didática de Formação

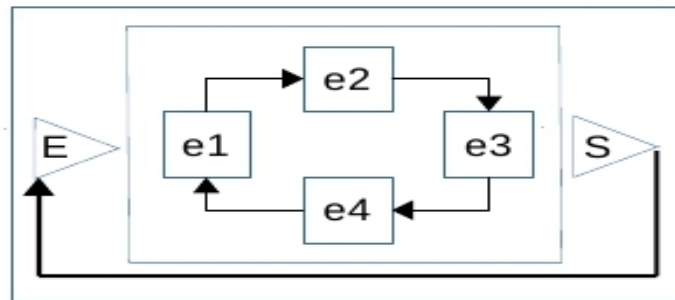
Diante da proposta de construção do MDR com professores, metodologicamente, tomo como base os princípios de uma engenharia didática de formação baseada em elementos da engenharia didática de Artigue (1988), na busca pela construção de uma sequência didática que proporcione aos docentes a apresentação aos alunos do caráter aleatório da Probabilidade, integrando as interpretações clássica e frequentista.

Nesse intuito, partiremos de encontros com professores de matemática a fim de realizar uma atividade formadora com educadores do terceiro ano do ensino médio. A atividade será desempenhada por meio de sessões de formação que proporcionem a construção de uma sequência didática integradora para o ensino de Probabilidade. Os princípios da engenharia didática de Artigue (1988) estão conectados à engenharia de formação de Bailleul (2015).

Bailleul (2015) afirma que a engenharia de formação é um conjunto organizado de ferramentas de desenvolvimento pessoal que tem o propósito de analisar, através de medidas apropriadas, respostas a determinados tipos de problemas, trazendo correções, inflexões e até mesmo mudanças em comparação com o cenário original.

O autor supracitado apresenta um quadro no qual é possível verificar o desenvolvimento da engenharia. Para o autor, qualquer atividade de engenharia é condicionada por um ambiente sistêmico autônomo e interdependente; são exemplos de sistemas: sistema educacional, sistema acadêmico, sistema de formação etc. Este ambiente dinâmico de engenharia fornece sua entrada E com suas normas e regras; assim, o que o “sistema de engenharia” produz como resposta (conhecimento, habilidades esperadas pelos treinadores aos treinados, dentre outros) constitui saídas S.

Figura 01 – Ingénierie et systématique.



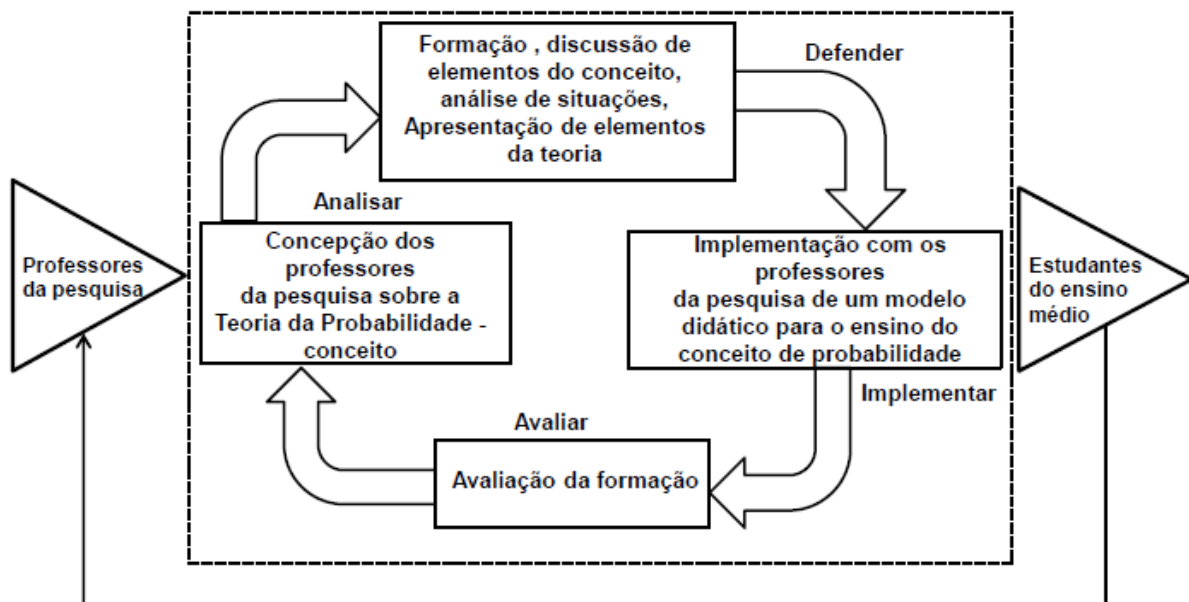
Fonte: Bailleul (2015).

Assim, Bailleul (2015, p. 144) afirma que:

Como e quando o processo, o "sistema de engenharia" assume diferentes estados sucessivos. Cada saída produz para um sistema de estado n constitui uma entrada para o estado $n + 1$. A Figura 1 indica quatro estados (e1, e2, e3 e e4 no diagrama acima) correspondente a quatro fases através das quais passa toda a atividade de engenharia quando considerado na sua totalidade. Estes quatro estados podem ser identificados e distinguidos por verbos: analisar, recomendar, implementar, avaliar.

Nesta pesquisa, será realizada a análise do esquema proposto por Bailleul (2015).

Figura 2 – Engenharia de formação.



Fonte: a autora (2018).

O esquema acima representa o desenvolvimento da formação desta pesquisa na perspectiva do esquema sugerido por Bailleul (2015), de forma que: o estado e1, corresponde à análise da concepção dos professores em relação à teoria da probabilidade, da aprendizagem dos alunos; já o estado e2, corresponde ao item em que recomendamos a formação de alguns pontos da teoria da probabilidade, apresentação da TAD, discussão e análise do modelo; o estado e3 equivale à implementação do modelo didático; e o estado e4, à avaliação da formação.

1.5.2 Engenharia Didática Clássica

O desenvolvimento do modelo didático de referência aqui adotado, apesar de seguir os objetivos de uma engenharia de formação, será construído segundo os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1996).

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que tem por objetivo analisar situações didáticas propostas que constituem o objeto de estudo da Didática da Matemática. Artigue (1996, p. 247) descreve a engenharia como “um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre as concepções, realização, a observação e a análise de sequências de ensino.”.

São descritos dois níveis de engenharia: a microengenharia e a macroengenharia. As pesquisas de microengenharia consideradas mais fáceis de implementar, permitem levar em conta, localmente, a complexidade do fenômeno de sala de aula. Já as pesquisas de macroengenharia, visam complementar as pesquisas de microengenharia e são, portanto, inevitáveis, apesar de todas as dificuldades metodológicas e institucionais que elas apresentam (ARTIGUE, 1996).

A Engenharia Didática se caracteriza, então, por uma metodologia baseada em experimentações em classe. Nesse campo, esta pesquisa é classificada como uma microengenharia; localmente, é desenvolvida em um pequeno espaço de tempo e sobre um pequeno grupo de professores que lecionam Probabilidade no ensino médio.

Neste trabalho, descrevemos as etapas desta engenharia de formação baseada numa Engenharia Didática clássica em suas quatro etapas fundamentais: as análises preliminares, a análise *a priori*, a experimentação e a análise *a posteriori*.

As análises preliminares, conforme Artigue (1996), conceituam a fase da Engenharia Didática em que dispomos o quadro teórico geral e também os conhecimentos específicos sobre o tema; isto é, a epistemologia da Probabilidade no estudo histórico-epistemológico que foi realizado, as análises dos documentos norteadores: PCN, PCNEM, OCNEM, livro didático, PCN+, etc., a revisão bibliográfica, a observação naturalista⁹ e a análise das entrevistas.

Na fase das análises *a priori*, apreciamos as variáveis de comando da Engenharia Didática construída: as variáveis macrodidáticas e as microdidáticas. De acordo com Artigue (1996, p. 255), as variáveis macrodidáticas se referem à organização global da Engenharia Didática; já as variáveis microdidáticas se referem à organização local da engenharia.

Analizamos estas variáveis segundo uma sequência de encontros de formação com professores com a finalidade de construir uma sequência didática para o ensino do conceito de Probabilidade de maneira a integrar as interpretações clássica e frequentista. O objetivo desta fase foi o de entender como os professores concebem a teoria da Probabilidade, como estabelecem seus contratos didáticos para daí preverem as questões que podem surgir.

Quanto à fase da experimentação, classificamos aqui como o momento no qual os professores realizaram a construção da sequência almejada. Observamos as sessões de encontro, como os professores se comportaram diante da seleção de conteúdos, o que eles propuseram etc.

Na fase de análise *a posteriori*, verificamos se as hipóteses levantadas na análise *a priori* foram confirmadas; e se não, o porquê de não terem sido. Estas confirmações decorreram também da validação interna da formação. Faremos uma confrontação da análise *a priori* com a análise *a posteriori*. A Engenharia Didática realizada será descrita no terceiro capítulo desta dissertação.

1.6 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está estruturada no formato de um conjunto de artigos científicos chamado *multipaper*. Nesta proposta, parte-se do estudo do problema

⁹ Denominamos de Observação naturalista a aula observada cujo tema foi a apresentação do conteúdo de probabilidade ministrada pelos professores pesquisados.

didático que constitui a base do objetivo geral e dos resultados intermediários que compõem os artigos que visam atender aos objetivos específicos delineados. Este tipo de abordagem é chamada por Frank e Yukihiro (2013) de Artigos Verticais, de maneira que os artigos juntos integram as etapas para a construção da possível resposta ao nosso problema didático.

O artigo de Costa (2014) traz uma citação de Garnica (2011) sobre o formato multipaper:

[...] os textos dialogam, e muitas vezes revisitam momentos e temas já visitados: algo como que uma independência que complementa e, complementando, talvez organize informações de modo a permitir, sempre, reconfigurações e, é claro, ressignificações (GARNICA, 2011, p. 8 *apud* COSTA, 2014).

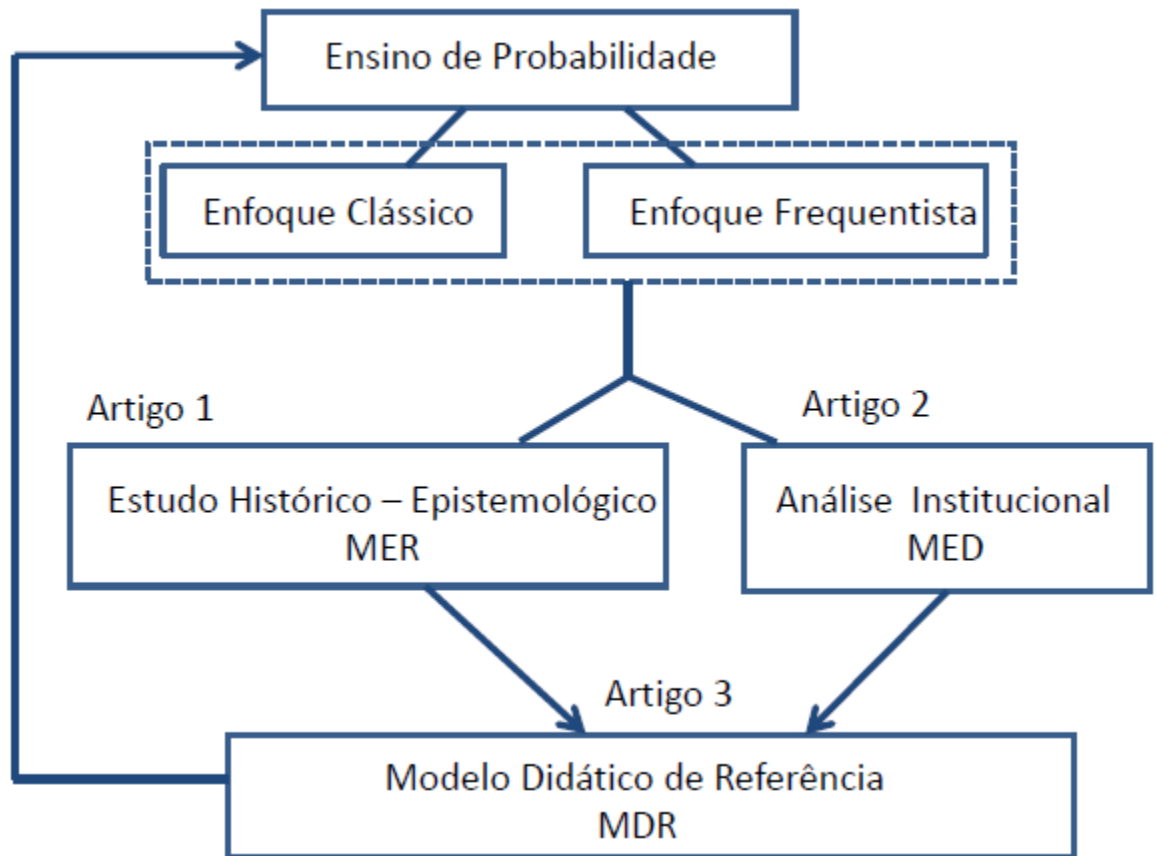
Desta forma, apesar de apresentar capítulos (artigos) que se constituem de maneira independente desta dissertação, eles têm um papel fundamental em conjunto: o de estruturar os modelos epistemológicos desta pesquisa numa orquestração de passos no sentido de uma proposta de formação continuada de professores sobre o saber Probabilidade.

Nesse âmbito, este trabalho é composto por cinco capítulos. O primeiro capítulo corresponde a esta introdução, que tem por objetivo apresentar todo o trabalho de forma a garantir ao leitor a clareza sobre o objetivo delineado a partir da dissertação, além da justificativa, de alguns conceitos da teoria adotada e a respeito da metodologia utilizada.

O segundo, terceiro e quarto capítulos representam os artigos e foram escritos como tal. Nesse diapasão, verifica-se, na introdução de cada artigo, uma repetição de ideias sobre o mesmo saber: a Probabilidade, a TAD etc. Em cada artigo, porém, são propostas ideias distintas.

Abaixo, apresento um esquema de como foi estruturada a ideia da pesquisa, que se propõe à construção de um modelo epistemológico didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade:

Figura 03 – Estrutura da dissertação.



Fonte: a autora (2018).

O segundo capítulo, a saber, o primeiro artigo, trata da apresentação de uma análise sobre elementos do modelo epistemológico de referência quando apresenta um estudo histórico, epistemológico e filosófico do conceito de Probabilidade. Este estudo permite compreender a razão de ser da teoria da Probabilidade quando propicia a análise da construção e surgimento de suas interpretações. Este ensaio será destinado para submissão à revista de ensino de ciências e matemática - **REnCiMa de Educação Matemática**.

O terceiro capítulo, isto é, o segundo artigo, tem o intuito de apresentar uma análise institucional do que constitui o modelo epistemológico dominante sobre a Probabilidade. Esta análise permite verificarmos as condições e restrições que são impostas a este saber de maneira a situarmos o modelo epistemológico didático de referência construído. Este artigo será submetido a uma revista da linha da Educação Matemática - Didática da Matemática, denominada **Educação Matemática Pesquisa**.

O quarto capítulo, e terceiro artigo, apresenta a engenharia didática presente nesta pesquisa, e tem a finalidade de apreciar um modelo didático de referência num estudo sobre uma engenharia de formação voltada à instrução de Probabilidade no ensino médio. Este artigo será submetido a uma revista de Educação Matemática chamada **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**.

No último capítulo desta dissertação, serão apresentadas as considerações finais, a partir da observação acerca de toda a dissertação e seus modelos para o ensino de Probabilidade.

Referências

ABE, T. S. **O ensino de Probabilidade por meio das visões clássica e frequentista**. 192 f. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

ADÃO, T. da S. **Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas**. 90 f. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2013.

ALBUQUERQUE, R. R. C. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade**. 50 f. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

ALMEIDA, C. M. C; FARIAS, L. M. Uma análise do conceito de probabilidade nos livros didáticos do ensino médio à luz da teoria antropológica do didático. I Simpósio latino –americano de didática da matemática, **anais**, Mato Grosso do Sul, 2016. Em: ladima.tuseon.com.br.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

AMÂNCIO, J. R. **Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID**. 227 f. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

ARTIGUE, M. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

_____. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9., p. 281-308, 1988.

BAILLEUL, M. L'Ingenierie de la formation : L'Exemple de la formation des tuteurs de stages en formation d'enseignants. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 137-161, 2015.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

_____. Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. III Congreso Internacional sobre la TAD. **CITAD**, v.3, p. 553-557, 2011.

BIGATTÃO JR., P. A. **Concepção do Professor de Matemática sobre o Ensino da Estocástica**. 150 f. 2007. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática) – Programa de pós-graduação em ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>.
Acesso em: 15 set. 2016.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Fundamentación antropológica e las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”, IN: Bronner, Alain et al. *Apports de la théorie anthropologique du didactique: Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. IUFM de l'académie de Montpellier 2010, p.55-90.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas-** conteúdos e métodos de ensino. Editora Ática. 1995.

CANAVEZE, L. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP**. 209 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CARVALHO, R. P. F. **A formação de conceitos probabilísticos em crianças da 4ª série do ensino fundamental**. 96 f. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Marseille, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

_____. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Editora Aique, Argentina, 1991.

COSTA, W. N. G. Dissertações e Teses Multipaper: uma revisão bibliográfica. In: Seminário Sul Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, 2014, Mato Grosso do Sul. **Anais...** Mato Grosso do Sul, v. 8, n. 1, p. 1-10, 2014.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista** – Estudo Epistemológico e Didático. 151 f. 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

_____. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le collège: de la modelisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-Geométréll.** 338 f. 2001. Thèse (Doctorat em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

DANTAS, E. A. **PROBABILIDADE: Uma Reflexão teórico-prática no ensino da matemática.** 89 f. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2013.

FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia.** 226 f. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

FIGUEIREDO, A. de C. **Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem.** 2000. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. P.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia em torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, n. 3, p. 289-318, 2014.

FRANK, A. G.; YUKIHARA, E. Formatos alternativos de teses e dissertações. 2013. Disponível em: <<http://cienciapratica.wordpress.com/>>. Acesso em: 20 abr. 2017.

GAL, I. T. "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: GRAHAM, A. J. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.** USA: Springer Science and Business Media, 2005.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar.** 420 f. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista de Rio Claro, São Paulo, 2011.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica.** 150 f. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

GOULART, A. **O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica.** 88 f. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

JUNG, M. O. **Questionário Virtual Para o Ensino de Probabilidade.** 56 f. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2013.

LUZ, C. C. L. **Letramento Probabilístico no Ensino Médio**: um estudo de invariantes operatórios mobilizados pelos alunos. 141 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

MAROCCI, L. M. **O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma de 1º ano do ensino médio**. 234 f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade São Francisco, São Paulo, 2011.

NASCIMENTO, J. L. **Probabilidade e Probabilidade Geométrica** - além dos dados, moedas e cartas de baralho. 72 f. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2015.

OLIVEIRA, P. G. **Probabilidade**: Concepções construídas e mobilizadas por alunos do Ensino Médio à luz da Teoria das Concepções (CKC). 197 f. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PEREIRA, J. E. **Uma sequência didática utilizando jogos para introdução do conceito de probabilidade**. 67 f. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RIBEIRO, R. E. S. **Uma proposta de ensino de Probabilidade no ensino médio**. 117 f. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RITTER, D. **O Ensino de Probabilidade Geométrica**: Desafios e possibilidades. 226 f. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2017.

RODRIGUES, M. R. **A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de Probabilidade**. 100 f. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTANA, M. R. M. **O acaso, o provável, o determinístico**: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. 96 f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTOS, P. A. **A modelagem como proposta para a introdução à probabilidade por meio dos passeios aleatórios da Mônica**. 201 f. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, J. J. A. **Desenvolvimento de um objeto de aprendizagem para o ensino de conceitos de probabilidade**. 77 f. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

SANTOS, C. S. R. dos. **Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais**. 67 f. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Bahia, 2014.

SANTOS, R. M. Estado da arte e história da pesquisa em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação. 348 f. 2015. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2015.

SILVA, I. M. **Probabilidade**: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito. 147 f. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus, 2008.

SOUZA, G. de O. **Explorações de estudantes do 9º ano sobre o conceito de Probabilidade com o software Tinkerplots 2.0**. 151 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

Capítulo 2

Artigo 1

2 ARTIGO I – ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE: ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES

Resumo

Neste artigo, buscamos apresentar uma parte do modelo epistemológico de referência que nos guiará no intuito de compreendermos aspectos relacionados ao objeto de estudo em questão: a Probabilidade, num estudo histórico-epistemológico deste saber. A análise histórica nos permitirá ver como foi desenvolvido o caráter multifacetado do conceito de Probabilidade através de significados atribuídos por alguns dos seus principais filósofos; nossa apreciação epistemológica vai nos possibilitar examinar as diferentes visões ou interpretações dadas ao seu conceito. Neste estudo, almeja-se lograr o entendimento da razão de ser do ensino de Probabilidade e das condições e/ou restrições que lhe são impostas para, assim, auxiliarmos a professores do ensino médio a abordarem este componente curricular de forma mais significativa em suas salas de aula.

Palavras-chave: História, Epistemologia, Probabilidade, Teoria Antropológica do Didático.

Abstract

In this article we seek to present a part of the epistemological model of reference that will guide us in the intention understand aspects related to our study object: Probability, in a historical-epistemological study of this knowledge. The historical analysis will allow us to see the multifaceted character of the concept of Probability was developed through meanings given by some of their main philosophers; our epistemological appreciation will make possible to examine us the different visions or interpretations given to his/her concept. In this study it is aimed at to achieve the understanding of the reason of being of the teaching of Probability, of the conditions and/or restrictions that are imposed on it and thus help secondary school teachers to approach this curricular component in a more meaningful way in the classrooms.

Keywords:

2.1 Introdução

A história tem um papel importante no entendimento de qualquer assunto da natureza das ciências, pois, além de permitir uma melhor compreensão do mundo científico, propicia uma apreciação mais clara do assunto abordado, fazendo com que os estudantes argumentem, elaborem discussões acerca da temática e sejam críticos na construção de seu aprendizado.

O presente trabalho histórico-epistemológico sobre o conceito de Probabilidade tem como objetivo construir um modelo epistemológico de referência do conceito de Probabilidade a partir de um estudo histórico-epistemológico. Principalmente, no que tange a averiguar três aspectos: a influência do determinismo que dominava a sociedade na época da elaboração do conceito de Probabilidade; a predominância da equiprobabilidade; e a evolução da Probabilidade até a axiomatização realizada por Andrei Kolmogorov (1903-1987), que possibilitou a confrontação das diversas interpretações da Probabilidade.

Verifica-se na história da matemática, que a Probabilidade tem uma concepção matemática e filosófica (KATZ, 2009; BOYER; MERZBACH, 2012). Matematicamente falando, neste contexto, nos referimos à Probabilidade no que toca à Teoria formalizada pelos axiomas de Kolmogorov. Já em relação a um ponto de vista filosófico, nos dirigimos às interpretações existentes na formação do seu conceito (clássica, frequentista, geométrica, subjetiva, entre outras). Daremos ênfase às interpretações clássica e frequentista.

Neste artigo, essa associação (interpretação clássica e interpretação frequentista) faz-se pertinente, e, quando apresentadas aos estudantes, estas diferentes interpretações possibilitam pensarmos num ensino do conceito de Probabilidade coerente com o que está posto nos documentos oficiais: a valorização de um aprendizado que propicie a confrontação da Probabilidade *a priori* (definida pela interpretação clássica); e da Probabilidade *a posteriori* (definida pela interpretação frequentista), fazendo com que os estudantes possam inferir, discutir e analisar resultados, debatendo possibilidades, ou seja, exercendo sua cidadania (BRASIL, 2000).

Particularmente, para nós, o ensino do conceito de Probabilidade no nível médio deveria abordar situações do dia a dia e sobre fenômenos aleatórios, permitindo que os estudantes sejam capazes de argumentar e fazer inferências sobre os eventos cotidianos.

Para tanto, buscaremos apresentar este desenvolvimento norteado pela Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), a qual propõe analisar as praxeologias matemáticas apresentadas, no intuito de revelar a razão de ser da Probabilidade para o seu ensino nos dias de hoje.

Apoiados nos estudos de Coutinho (1994), Cordani (2001), Almeida (2005) e Araújo (2013), ressaltamos que, quando a probabilidade é apresentada aos alunos,

de forma a evidenciar, prioritariamente, a abordagem de questões definidas sobre espaços amostrais equiprováveis, ou seja, baseados somente na interpretação clássica, limitamos os mesmos à realização do cálculo prévio da probabilidade de um evento, e, assim, não desenvolvemos nestes a habilidade de experimentar o caráter aleatório da probabilidade.

Desta forma, podemos construir um modelo epistemológico de referência quando trazemos à baila elementos da história e da epistemologia deste saber. Então, a fim de cumprirmos o objetivo proposto, observaremos a construção da Teoria das Probabilidades atrelada a sujeitos e momentos importantes de sua constituição.

Neste percurso, para um melhor entendimento de como a Teoria da Probabilidade foi formalizada e como surgiram interpretações variadas, a análise será voltada ao modo como os fatos surgiram, apontando-se elementos numa contextualização histórica.

Este estudo é parte integrante de uma pesquisa maior que tem por objetivo formular uma engenharia didática de formação com professores que se propõem à criação de um modelo epistemológico didático de referência para o ensino de Probabilidade, integrando as concepções: clássica e frequentista. Assim sendo, buscaremos nesta trajetória histórica e filosófica identificar o caráter multifacetado da Probabilidade em suas interpretações, em especial as interpretações mencionadas.

2.2 Aporte teórico

Com o propósito de fornecer subsídio à investigação aqui proposta sobre o ensino do conceito de Probabilidade, partimos de uma análise através das ferramentas teóricas e metodológicas da Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Yves Chevallard (1999), que tem o papel de situar a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais.

A TAD analisa as relações existentes entre o objeto, o saber e as instituições. Nesse juízo, contemplamos as relações institucionais e as relações pessoais que permitem a um saber matemático viver em determinada instituição. A TAD situa-se no programa epistemológico de investigação em didática da matemática (BOSCH; CHEVALLARD, 2006) quando analisa um fenômeno didático por meio de um modelo

epistemológico do conhecimento matemático. Assim, com o intuito de dar subsídio à nossa pesquisa de mestrado, a fim de analisarmos as organizações matemáticas (praxeologias) construídas para o saber Probabilidade, e de posse da TAD, neste artigo, faremos um recuo histórico que nos permitirá entender possíveis lacunas que estão postas nos documentos que norteiam o ensino do referido conteúdo.

Segundo Artaud (1998), uma breve investigação histórica possibilita entendermos a ecologia do saber probabilidade, como este saber vive e o que o produziu.

Fonseca, Bosch e Gascón (2014) afirmam que para a TAD, quando elaboramos um estudo sobre um problema didático, observamos uma interpretação da atividade matemática, ou ainda, um modelo de tal atividade em determinada instituição. A este modelo, que será descrito pela dimensão epistemológica deste problema, chamaremos de modelo epistemológico de referência (MER). Assim, verificamos que é possível construir um MER envolvendo um conceito de probabilidade que sirva de apoio a professores do Ensino Médio.

Neste artigo, partiremos da apreciação de elementos da história por meio de um olhar epistemológico da Probabilidade, a fim de construirmos um modelo epistemológico de referência sobre as diferentes formas de concepção e movimentos, destacando as dificuldades previstas no seu ensino.

2.3 Elementos da História da Probabilidade

Segundo Bennett (2003), desde a antiguidade, o homem se relaciona com o acaso. Documentos históricos apresentam relatos da era pré-cristã, na qual babilônios, gregos, egípcios e romanos usavam um osso chamado astrágalo para jogos de azar e em cerimônias religiosas. De acordo com Bennett (2003, p. 23),

O astrágalo tem quatro longas faces planas totalmente diferentes, as únicas em que ele pousaria quando jogado, duas pequenas extremidades arredondadas. Das quatro faces planas, duas são estreitas e planas e duas são largas, com um lado largo ligeiramente convexo e o outro ligeiramente côncavo.

A autora relata também o surgimento de outros tabuleiros e jogos com ossos. A transição do astrágalo para os dados levou vários milênios; foram surgindo dados

com duas, quatro, seis e até oito faces. Bennett (2003) descreve que desde os primórdios da civilização, as pessoas inventavam mecanismos simples com o objetivo de entender o acaso e os resultados de fenômenos aleatórios, com a finalidade de obter resultados favoráveis em jogos ou para tomadas de decisões mais sérias, como definir a escolha de quem vive e/ou de quem morre.

Encontramos na obra de Pichard (2001) dois pontos para justificar o porquê de a teoria da probabilidade ter partido dos jogos de azar e de se ter iniciado seus estudos tão tardiamente (a partir do século XVII). Segundo o teórico, havia uma concepção, por parte dos cientistas, da ausência de utilidade do estudo da teoria da probabilidade para os jogos. Além disso, as pessoas atribuíam os resultados dos sorteios ao “destino” ou à vontade divina. Outro ponto nesse sentido, consistia na proibição dos jogos pela igreja católica, que conferia ao diabo a atitude de apostar e incitar a discórdia.

Com o avanço dos jogos, começa-se a pensar em um estabelecimento de regras para vencedores e perdedores e a observar os fenômenos aleatórios que estão por detrás das jogadas. Daí, de fato, a Probabilidade surge com estudos sobre a aleatoriedade dos jogos de azar na tentativa de melhorar resultados em eventos incertos.

Nesse percurso, a Teoria das Probabilidades é construída com a finalidade de estudar fenômenos ou experimentos aleatórios. Definimos, segundo Rathje e Zörnig (2012), que um experimento aleatório é um procedimento que tem resultados não determinísticos em determinadas situações. Um resultado é uma simples realização de um fenômeno em consideração e não necessariamente “números”. Os autores ainda exemplificam:

Se uma pessoa escolhe um dia ao acaso e, então, coloca uma moeda de ouro na água para ver se ela afunda ou não, o experimento não é um experimento aleatório ainda que o dia tenha sido escolhido ao acaso. Mas se ela lança a moeda e o interesse está no resultado, se sai cara ou coroa, então esse é um experimento aleatório, devido à natureza não determinística do resultado, seja o dia escolhido ao acaso ou não para a realização do experimento (RATHJE; ZÖRNIG, 2012, p. 40).

Coutinho (1994) afirma que foi no século XIII que surgiram os primeiros escritos sobre a teoria da Probabilidade nas cartas de De Vetula. O principal nome

neste rol foi o de Gerolamo Cardano (1501-1576), que desenvolveu estudos com combinações possíveis com um, dois ou três dados.

Por exemplo, eu posso facilmente chegar a tirar um, três ou cinco que o dois, o quatro ou o seis. Os pares são colocados de acordo com esta igualdade se o dado é honesto ou caso contrário, eles são feitos maiores ou menores na proporção da lacuna para a verdadeira igualdade (PICHARD, 2001, p. 17, tradução nossa).

Nas análises de Cardano, vão surgindo pensamentos que levam a atribuir-se igual possibilidade, independentemente da face observada, ou seja, situações de equiprobabilidade na condução de uma definição formal para probabilidade objetiva (interpretação clássica). Cardano escreveu o *Liber de Ludo Aleae* (publicado após sua morte, em 1663), no qual conta, corretamente, as 36 possíveis sequências de dois dados e as 216 possíveis sequências de três dados, vindo a introduzir a sequência de probabilidade como uma frequência, muito questionado por matemáticos da época.

Também na Itália, outro renascentista desenvolveu estudos sobre sequências aleatórias: Galileu (1564-1642). Na sua obra *Sopra le scoperte dei dadi*, vários problemas sobre jogos de dados, inclusive alguns tratados por Cardano, são abordados. Sua curiosidade levanta discussões a respeito de uma teoria para explicar tais frequências.

Ao tratar de experimentos aleatórios, também buscamos uma definição para o conjunto de todos os possíveis resultados desse conjunto, expressão conhecida como espaço amostral.

De acordo com Pichard (2001), as publicações de Cardano e Galileu movimentaram pensamentos na Itália chegando à França. Surgiram os nomes de Pierre Fermat e Blaise Pascal. Chevalier de Méré apresenta a Pascal, em 1654, o seguinte problema:

[...] em oito lançamentos de um dado, um jogador deve tentar tirar um; mas após três tentativas frustradas, o jogo parou. Então, como ele deveria ser indenizado? Pascal começou a escrever para Fermat e o conteúdo das suas correspondências deram início à teoria das probabilidades (BOYER, MERZBACH, 2012, p.260).

Segundo Coutinho (2007, p. 4),

Esta nova apreensão do acaso, em situações de enumeração de possibilidades que podem ocorrer, marca o início das concepções probabilistas: ela se encontra explicitada na correspondência entre Pascal e Fermat, que data de 1654, mostrando que o acaso é “geometrizable”. Podemos dizer que com isso, Pascal e Fermat levavam em conta as regularidades macroscópicas observadas em jogos de azar (fenômeno reprodutível que tem intervenção do acaso) para a busca de um modelo matemático que as explicasse.

Essas correspondências foram publicadas anos depois, em 1657, por Christiaan Huygens, em seu tratado chamado *Ratiocinatus in Aleae Ludo*, obra que, por meio século, foi referência na área da teoria das probabilidades. Huygens começa, a partir do princípio do seu tratado, a formalizar a noção de *esperança matemática*. Tal noção foi expressa por Pascal no *Tratado do triângulo aritmético*, sob o nome de “valor da possibilidade”. Huygens acreditava que, embora nos jogos de puro azar os resultados fossem incertos, a possibilidade que um jogador tem de ganhar ou de perder possui um valor determinado (PICHARD, 2001).

Sobre a extensão das contribuições aos jogos de azar, Leibniz (1646-1716) trouxe acréscimos à conceitualização da probabilidade nomeadamente com a associação dos graus de probabilidade a graus de certeza, conhecida como Probabilidade epistêmica (ALMEIDA, 2005).

Seguindo uma ordem de apresentação de contribuições relevantes à teoria das Probabilidades, surgem, após o nome de Huygens, no século XVIII, os nomes de Pierre Rémond de Montmort, Jacques Bernoulli e Abraham De Moivre, entre 1708 e 1713, com a publicação de três livros importantes: *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*, por Montmort, em 1708; *De Mensura Sortis*, à memória de De Moivre, em 1711; e o livro *Ars Conjectandi*, de J. Bernoulli, em 1713. Estes trabalhos tratam, em grande parte, dos mesmos problemas, isto é, encontrar as Probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Os métodos combinatórios, recursão, série, esperança e condicional são encontrados nas três obras, em maior ou menor grau.

A teoria das probabilidades voltou a ser questionada nas contribuições de Montmort (1678-1719), nomeadamente na obra *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*, na qual o teórico aborda os problemas propostos, sugerindo novas análises sobre a obra de Cardano. Pichard (2001) afirma que Montmort recebeu aportes de Jean, Jacob e Nicolas Bernoulli para que consolidasse o pensamento combinatório em suas apreciações.

A família Bernoulli apresenta grandes contribuições no avanço da teoria das Probabilidades. No livro *Ars Conjectandi* (1713), Jacob Bernoulli (1654-1705) começou a discutir sobre o cálculo de Probabilidades na perspectiva de que as Probabilidades de que um erro dentro de um valor observado e do valor real deveria situar-se dentro de algum limite especificado e, em seguida, calculou o número de observações necessárias para elevar as Probabilidades àquela quantia (BERNSTEIN, 1998). Esta obra representa para o pensamento da época um avanço a uma nova perspectiva: a de definir o conceito de Probabilidade como resultado de experimentações futuras – origem da interpretação frequentista.

A obra citada está dividida em quatro partes: na primeira, há uma inserção de notas e comentários acerca do trabalho de Huygens; na segunda, o autor propõe soluções baseadas no cálculo de esperança matemática, por progressões geométricas infinitas; a terceira parte trata sobre permutações e combinações; e na quarta parte, apresenta questões, em aberto, as quais geraram discussões a respeito da lei dos grandes números.

Nesse sentido, Jacques Bernoulli propicia debates que, mais tarde, foram formalizados por Pierre Simon Laplace em seu *Ensaio filosófico sobre as probabilidades*, dando origem à, hoje, chamada interpretação clássica. Bernoulli e Leibniz discutiram suas ideias e apontaram em seus respectivos trabalhos uma nova interpretação para a teoria da Probabilidade, estudando a relação entre a Probabilidade de um evento sobre uma experiência aleatória e uma frequência relativa. Laplace vai chamar o resultado obtido de Teorema de ouro, e depois, de Lei dos grandes números.

Bernoulli, além de ter tratado da teoria das Probabilidades, não só trazendo uma teoria geral de permutações, combinações e o teorema binomial descoberto por Pascal, tratou dos chamados números de Bernoulli, que surgiram de uma fórmula de recorrência para números inteiros, com uma parte ilustrando a teoria das Probabilidades e a Lei dos grandes números.

A lei aludida forneceu fundamentação teórica para técnicas desenvolvidas na obtenção de estimativas em cálculos de Probabilidades de eventos. Segundo Magalhães (2013, p. 324),

Em um certo espaço de probabilidade, considere um experimento em que o evento A tem probabilidade $P(A) = p$. A intuição, frequentemente aceita, indica que em um grande número de

repetições do experimento, a frequência relativa de ocorrência de A se aproxima de p . Isto é, $\frac{n_A}{n} \approx p$, em que n_A é a frequência de A e n o total de repetições.

Magalhães (2013, p. 324) ressalta que, só foi possível colocar em bases sólidas, vários dos conceitos, intuitivamente aceitos, devido à formalização axiomática de Kolmogorov, em 1934. E, que, “para experimentos aleatórios, a noção intuitiva de Probabilidade, como frequência relativa para um grande número de repetições, torna-se um resultado matemático rigoroso, através da aplicação de um caso especial da Lei dos Grandes Números”. (MAGALHÃES, 2013, p.324).

A lei dos grandes números foi discutida e sofreu contribuições, também, a partir dos estudos de Markov e dos axiomas de Kolmogorov, propiciando uma definição mais rigorosa e não intuitiva.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) surgiu, então, como propulsor da visão clássica da Probabilidade, ao propor a definição de Probabilidade de um evento como o número de resultados favoráveis de todos os casos possíveis, acrescentando: "mas isso pressupõe os diversos casos igualmente possíveis." (LAPLACE, 2010, p. 46). Esta acepção é chamada pelo estudioso de primeiro princípio, na obra clássica *Ensaio filosófico sobre as Probabilidades*. Partindo dessa ideia, o matemático retrata a teoria da Probabilidade em dez princípios, chamados de princípios gerais do cálculo das Probabilidades.

O princípio nº 1 refere-se à definição de Probabilidade como a relação entre o número de casos favoráveis e número de todos os casos possíveis. O princípio nº 2 complementa o primeiro, estabelecendo, para casos que não sejam igualmente possíveis, que a Probabilidade seja calculada a partir das somas das possibilidades de cada caso favorável. O princípio nº 3 assevera que, se os eventos são independentes uns dos outros, a Probabilidade da existência de seu conjunto é o produto de suas Probabilidades individuais. O princípio nº 4 afiança que: quando dois eventos dependem um do outro, a Probabilidade do evento composto é o produto da probabilidade do primeiro evento pela Probabilidade de que, tendo ocorrido o primeiro, o outro ocorrerá. No princípio nº 5, encontra-se o seguinte:

[...] se forem calculadas *a priori*, a Probabilidade do evento ocorrido e aquela de um evento composto desse e de um outro que se espera, a segunda Probabilidade dividida pela primeira será a Probabilidade do evento esperado, inferida do evento observado (LAPLACE, 2010, p. 53).

Assim, para cada um dos princípios descritos por Laplace, são levantadas situações que justificam o primeiro princípio, com exemplos, e desta forma são apresentados os dez princípios. O matemático demonstra o que inicialmente chamava de teoria do acaso, como teoria da Probabilidade.

Além disso, Laplace discute seus princípios levantando vantagens quanto à análise de Probabilidades na investigação das leis dos fenômenos naturais, cujas causas são desconhecidas, e ainda propõe que seja aplicada às ciências morais, tratando de Probabilidades em julgamentos, testemunhos etc.

No livro referido de Laplace, também é possível verificar um tópico sobre os métodos analíticos para o cálculo de Probabilidade, no qual é feita uma análise associada às equações lineares e aos cálculos de diferenciais. O autor argumenta:

Frequentemente somos conduzidos a expressões que contêm um número tão grande de termos e fatores que as substituições numéricas tornam-se impraticáveis. É o que ocorre nas questões de probabilidade, quando se considera um grande número de eventos. Entretanto, é importante, nesses casos, ter o valor numérico das fórmulas para se conhecer com qual probabilidade são indicados os resultados que os eventos produzem ao se multiplicarem. É importante, sobretudo, dispor da lei segundo a qual essa probabilidade se aproxima sem cessar da certeza que ela atingiria quando o número dos eventos se tornasse infinito (LAPLACE, 2010, p. 80).

Após a publicação de Laplace, os estudos acerca da teoria da Probabilidade aumentaram e geraram indagações a respeito de seu determinismo. De acordo com Coutinho (1994), no início do século XX, foi gradativamente verificada uma mudança qualitativa em relação às interpretações do acaso. Jules Henri Poincaré (1854-1912) evidenciou o limite do determinismo de Laplace e trouxe à baila observações sobre a natureza do acaso, como no seguinte exemplo: “Se um cone repousa sobre sua ponta, nós sabemos que ele vai tombar, mas não sabemos para que lado; nos parece que somente o acaso vai decidir” (POINCARÉ, 1912 *apud* COUTINHO, 1994, p. 23). Ele chega a considerar todas as variáveis aleatórias envolvidas ao acaso.

Encontramos em Henry (2001) a citação da obra *Calcul de Probabilités* de Henry Poincaré, que alega o seguinte:

A definição completa de probabilidade é uma espécie de petição de princípio: como reconhecer que todos os casos são igualmente prováveis? Uma definição matemática aqui não é possível; devemos, em cada aplicação, fazer convenções, dizer que consideramos tais e tais casos como igualmente prováveis. Estas convenções não são inteiramente arbitrárias, mas escapam do espírito do matemático que não terá que examiná-las, uma vez que são admitidos. Assim, todo problema de probabilidade oferece dois períodos de estudo: o primeiro, metafísico, por assim dizer, que legitima esta ou aquela convenção; o segundo, matemático, que aplica a essas convenções as regras de cálculo (HENRY, 2001, p. 64-65, tradução nossa).

Nesse campo argumentativo, para precisar o acaso, Poincaré classifica o acidente do equilíbrio do cone de repouso na sua ponta, referindo-se às causas regulares da sua simetria perfeita e não a um objeto de probabilidade. O estudioso compara o acaso a causas que nos escapam devido a uma desproporção entre as causas ínfimas e seus efeitos macroscópicos (COUTINHO, 2001, p. 26).

Quanto às contribuições à teoria das Probabilidades, aparecem também os trabalhos de Emile Borel e John Maynard Keynes. Ambos apresentam um olhar sobre a Probabilidade subjetiva na Teoria de Medidas. Faz-se importante citar também a Teoria Frequential de Von Mises, em que se propõe construir uma axiomática para a teoria da Probabilidade com base em duas condições axiomáticas: o axioma da convergência e o axioma da aleatoriedade; quando uma sequência satisfaz ambas as condições, é denominada de coletivo. Von Mises considera que a Probabilidade só existe quando aplicada a coletivos, sendo definida através dos limites das frequências relativas. Popper (2006, p. 82) demonstra uma definição de coletivo:

Um coletivo é, grosseiramente falando, uma sequência de eventos ou ocorrências, suscetível, em princípio, de continuidade indefinida, como, por exemplo, uma sequência de lançamentos, feita com um dado supostamente indestrutível. Cada um desses eventos apresenta certo caráter ou propriedade; por exemplo, o lançamento pode fazer com que apareça o número cinco e, assim, tem a propriedade cinco.

Von Mises é considerado um dos propulsores da teoria frequentista. Neste movimento, surge Thomas Bayes, que despertou um novo olhar à Probabilidade, em um ensaio publicado, após a sua morte, com as definições de Probabilidade *a priori* e de Probabilidade *a posteriori*. Coutinho (1994) extrai de Henry (1994) considerações a respeito da obra de Bayes:

Considerando a probabilidade de um evento como uma medida física, sem informação sobre esta, ele postula a priori a repartição uniforme de seus valores possíveis, deixando para reajustar a posteriori. Ele introduz assim duas noções de probabilidade: a primeira, que buscamos estimar, é objetiva, a segunda apreciando o valor possível da precedente, colocada a priori, é subjetiva (HENRY, 1994, p. 25 *apud* COUTINHO, 1994, p. 15).

Ainda segundo Coutinho (1994, p. 27),

O difícil caráter subjetivo da probabilidade, definido por Bayes, vem, muitas vezes, reforçar a concepção errônea de que a probabilidade de um evento depende das informações sobre esse evento, ou seja, das informações obtidas pelo observador (observações diferentes geram probabilidades para um mesmo evento).

Emile Borel (1871-1956), por seu turno, é responsável por uma comunicação estreita entre a Teoria das Probabilidades e a Teoria de Medidas. A probabilidade, nesse contexto, é concebida como uma medição. Na obra *Le Hasard*, de 1914, Borel introduz uma axiomática ao cálculo de Probabilidades; a noção de Probabilidade foi estendida para espaços inacabados. O matemático tece considerações expressivas sobre a lei fraca dos grandes números, ponderando ainda: “em suas diversas obras sobre o assunto, retoma numerosas contribuições epistemológicas sobre a noção de Probabilidade, assim como discorre sobre inúmeras aplicações” (COUTINHO, 1994, p. 24).

Andrei Nikolaevich Kolmogorov, em 1933, deu início à teoria moderna das Probabilidades, na qual apresentou um conjunto de axiomas matemáticos rigorosos e abstratos da Teoria da Probabilidade baseada na Teoria dos Conjuntos, reduzindo a Teoria das Probabilidades à Teoria da Integração. Encontramos em Magalhães (2013, p. 11) que:

Uma função P , definida na σ - álgebra F de subconjuntos de Ω e com valores em $(0,1)$, é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $A \in F$, $P(A) \geq 0$;
3. Para toda sequência $A_1, A_2, \dots \in F$, mutuamente exclusivos, temos $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Almeida (2005) relata em seu artigo, a ausência da predominância da visão determinista de Laplace e traz a questão da complexidade da natureza e da falta de conhecimento, ou de capacidade cognitiva, que foi fortemente abalada com as “revoluções científicas” na Física, especialmente na mecânica quântica. Almeida (2005) discute ainda que, para além do aprofundamento de vertentes lógicas (crença racional) e subjetivistas (crença pessoal), consolidou-se uma base de aceitação do indeterminismo, incluindo a posição de Karl Popper, relativamente à sua interpretação da Probabilidade baseada na teoria que propôs: a teoria de propensão.

A ausência de ferramentas matemáticas suficientes, permitiu que, por muito tempo, não se calculassem espaços de Probabilidade sobre sequências infinitas. Podemos compreender nesse aspecto, as origens e a evolução das práticas teóricas ou didáticas, os motivos que levaram, de Laplace a Kolmogorov, à separação dos campos semânticos e sintáticos. Assim sendo, a história, por meio de uma reflexão epistemológica, permite-nos situar as dificuldades teóricas e/ou didáticas relacionadas à introdução em sala de aula, do conceito de Probabilidade (PICHARD, 2013), possibilitando-nos outro olhar sobre este tema, como versaremos a seguir.

2.4 Um olhar epistemológico para a probabilidade

O conceito de Probabilidade é um assunto amplo que possibilita discussão e debates de cunho filosófico, epistemológico, ontológico, psicológico e até mesmo teológico. Além disso, está presente em diversas áreas do conhecimento, a exemplo da Estatística, Física, Química, Biologia, Economia etc. A Probabilidade também se situa na determinação de qualquer ação de base aleatória, indeterminista. Nesse campo, muitas são as suas definições, as suas interpretações.

Concordamos com Kasner e Newman (1976) no sentido de que sabemos muito pouco ou quase nada a respeito dos fenômenos que nos cercam. Dessa maneira, muitos de nossos julgamentos são baseados na Probabilidade. Para um estudo epistemológico da Probabilidade, nos deteremos em analisar a concepção deste saber em um viés epistemológico. Antecipadamente, salientamos que a Teoria da Probabilidade é contemplada por diversas visões, interpretações. Neste momento, apresentaremos aqui as principais interpretações da Probabilidade, com

base nos autores mais referenciados em estudos sobre o tema, buscando, com isso, apresentar o caráter multifacetado da teoria em pauta.

A filosofia das Probabilidades é uma filosofia anglo-saxônica e analítica, de inspiração científica, que foi desenvolvida paralelamente ao positivismo lógico no início do século XX. Almeida (2005) aponta que, a partir do século aludido, essas interpretações se deram devido às mudanças ocorridas na física, com as “revoluções científicas” na mecânica quântica. A visão determinista deixa de ser predominante e dá lugar ao indeterminismo e à tensão entre estas novas interpretações da Probabilidade.

Popper (2006) pondera a respeito da Probabilidade a partir de dois objetivos: o primeiro, de proporcionar fundamentos novos para o cálculo de Probabilidades desenvolvendo a Teoria da Probabilidade, como a teoria de frequência de Von Mises; e o segundo, de elucidar as relações entre Probabilidade e experiência. Nesse contexto, através da interpretação clássica, Popper (2006) apresenta duas classes de interpretações: as subjetivas e as objetivas. Segundo o autor, uma interpretação subjetiva trata o grau de Probabilidade em termos de medidas de sentimentos, de certeza ou incerteza, um grau de crença racional. Já a interpretação objetiva, considera todo enunciado de Probabilidade numérica, em termos de enunciado, acerca da frequência relativa com que o evento se manifesta.

Popper (2006) ainda levanta dois problemas referentes à interpretação dos enunciados de Probabilidade: aqueles que não enunciam uma Probabilidade em termos de números, e aqueles que a enunciam como Probabilidade numérica. Freire Jr. (2004) discorre em seu artigo “Popper, probabilidade e mecânica quântica” sobre como Karl Popper gerou contribuições para a teoria quântica e à teoria das Probabilidades, como fica explícito a seguir:

A principal contribuição intelectual especificamente popperiana para a controvérsia foi a recusa tanto da interpretação *frequentista* quanto da interpretação *subjetivista* como válidas, no âmbito das ciências físicas, para os enunciados probabilísticos. Recusando essas alternativas, Popper propôs a adoção, para esses enunciados, de uma interpretação em termos de *propensões* (FREIRE JR., 2004, p. 3).

A interpretação proposta por Guilles (2000) começa, já no primeiro capítulo, afirmando que a Teoria das Probabilidades tem dois aspectos: um matemático e outro filosófico, e apresenta as quatro principais correntes atuais de interpretação:

- Teoria lógica, que identifica probabilidade com o grau de crença racional, presume-se que dada uma mesma evidência, todos os seres humanos racionais terão o mesmo grau de crença em uma hipótese ou previsão.
- Teoria subjetiva, que identifica a probabilidade com o grau de crença de um indivíduo em particular, aqui não se assume mais que todos os seres humanos racionais, diante de uma mesma evidência, tenham o mesmo grau de crença numa hipótese ou previsão, diferentes opiniões são permitidas.
- Teoria frequentista, que define a probabilidade de um acontecimento como a frequência-limite com que esse resultado aparece em uma longa série de eventos semelhantes.
- Teoria da propensão, ou pelo menos uma de suas versões, leva a probabilidade a ser uma propensão inerente a um conjunto de condições repetíveis. Dizer que a probabilidade de um determinado resultado é p é reivindicar que as condições repetíveis têm uma propensão tal que, se fossem repetidas um grande número de vezes, elas produziriam uma frequência de resultado próximo a p (GUILLES, 2000, p. 1, tradução nossa).

Decorre que, nem todos os filósofos e/ou defensores de uma determinada interpretação particular da Probabilidade, admitem somente como válida. Popper refutava a ideia de uma Probabilidade objetiva, e a considerava ineficiente para o cálculo de Probabilidades. Com isso, o autor dá origem à teoria da propensão. Muitos outros estudiosos da época, ao fundarem a teoria subjetiva, acreditavam que a mesma seria capaz de responder todas as questões propostas. Isso não quer dizer que uma tem mais valor do que a outra, mas justifica a ideia de que a probabilidade não pode ser entendida ou, principalmente, não pode ser assim ensinada, isto é, ser lecionada considerando-se apenas uma de suas interpretações.

De acordo com Araújo e Iglioni (2013), para a educação matemática são três as interpretações proeminentes: a interpretação clássica, a interpretação frequentista e a interpretação subjetiva. Este artigo compõe parte de um trabalho no qual o enfoque será dado às duas primeiras interpretações mencionadas da Probabilidade.

Scheemaecker (2009) apresenta um estudo filosófico afirmando que o conceito de Probabilidade é fundamentalmente dual. Uma parte do conceito de

Probabilidade se preocupa com o grau de crença de certas proposições, como um conceito epistêmico, de fato, e faz referência à interpretação clássica da Probabilidade. A outra parte do conceito de Probabilidade é associada aos fenômenos estatísticos, à frequência de repetição de um evento que podemos realmente observar e a um olhar sobre a interpretação frequentista. Scheemaecker (2009) evidencia que, para a teoria frequentista, a Probabilidade é um conceito empírico, e que esta teoria é diametralmente oposta às teorias epistêmicas. O destaque nesta teoria, é que a mesma possibilita fornecer uma fundação rigorosa da noção empírica da Probabilidade.

Conforme Almeida (2005), a interpretação clássica vem a ser uma das primeiras definições propostas, apesar de sua construção ter sido efetivada no século XVII, a partir das ideias de Pascal, Bernoulli, Huygens e outros. Também conhecida como Probabilidade subjetiva, foi no século XIX que ocorreu a axiomatização da Probabilidade, na ocasião em que Laplace apresentou sua obra *Ensaio Filosófico sobre probabilidades* (1814), conduzindo as ideias rumo a uma compreensão matemática da Probabilidade como objeto – ao defini-la pela razão entre o número de casos favoráveis pelo número total de casos possíveis. Assim,

A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, de forma tal que estejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao evento cuja probabilidade é desejada. A relação entre esse número e aquele de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, que corresponde assim a uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador o número de todos os casos possíveis (LAPLACE, 1814 *apud* LAPLACE, 2010, p. 46).

Esta acepção mostra claramente o caráter determinista de Laplace e limita a hipótese de equiprobabilidade¹⁰. Conforme descrevemos anteriormente, esta linha de pensamento surgiu desde os estudos de Pascal e Fermat, com a resolução do problema do jogo interrompido proposto por Chevalier de Meré¹¹. A significação clássica ou laplaciana, apesar de utilizada somente em eventos elementares

¹⁰ O termo equiprobabilidade é utilizado na teoria da probabilidade para expressar uma situação onde todos os resultados possíveis do evento têm a mesma chance de ocorrer.

¹¹ Chevalier de Meré propõe o jogo a Pascal informando que o jogo seria finalizado ao se ter um vencedor de 6 partidas, mas foi interrompido quando um jogador tinha 5 vitórias e o outro tinha 3. Como dividir a aposta?

equiprováveis, é bastante usada para o cálculo de problemas de contagem em análise combinatória.

A interpretação frequentista é oriunda do cálculo das frequências relativas. Segundo Katz (2009), Jacob Bernoulli, em seu estudo sobre o assunto, há mais de 20 anos, queria poder quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades. Para isso, ele propôs verificar Probabilidades *a posteriori*, apreciando os resultados observados em muitos casos semelhantes, ou seja, considerando algumas estatísticas.

Verificamos em Katz (2009), que o objetivo do teorema de Bernoulli era ratificar que,

[...] à medida que o número de observações aumenta, a probabilidade de obter a relação verdadeira entre o número de casos em que algum evento pode acontecer e não acontecer, de modo que essa probabilidade possa eventualmente exceder qualquer grau de certeza (KATZ, 2009, p. 645, tradução nossa).

Mas, apesar deste aporte quanto à consideração de Bernoulli, o mesmo não teve sua obra publicada imediatamente, pois suas experimentações só podiam dizer o quão provável era que as frequências observadas se aproximassem de uma dada probabilidade (KATZ, 2009).

Por outro lado, Von Mises contribuiu com o conceito em questão, segundo Cordani (2001, p. 75), ao definir que:

A Probabilidade de um evento é tomada como limite da frequência relativa, considerando repetições infinitas de experimentos, sob as mesmas condições (daí o nome frequentista que esta teoria também possui). No entanto, a observação empírica é finita e esta teoria seria aplicável àquelas sequências finitas cujo comportamento se aproxima da idealização da sequência infinita. [...].

A interpretação da Probabilidade através da frequência relativa é realizada por experiência e, desta forma, podemos inferir a sua aproximação com a interpretação clássica, chamada de Probabilidade *a posteriori*. Sua apresentação permite, hoje, que no ensino de Probabilidade esta seja apresentada aos alunos por intermédio de sequências didáticas desenvolvidas a partir de situações reais, reforçando a presença da aleatoriedade e do caráter subjetivo do seu conceito.

2.5 Algumas considerações

Conforme havíamos exposto, este artigo propõe-se a apresentar um modelo epistemológico de referência constituído através de elementos da história e da filosofia da Probabilidade, a fim de fornecer ao leitor um panorama sobre as múltiplas interpretações deste saber, e também para que possamos entender os caminhos trilhados pelo modelo epistemológico dominante. Nesse segmento, objetivamos revelar um estudo histórico-epistemológico para o ensino deste componente curricular. Estudo este que reforçou a hipótese aqui trabalhada: a de que há predominância do determinismo da matemática, o que dificulta a apresentação de situações construídas por eventos não determinísticos, isto é, ocorrências que envolvem situações reais do cotidiano.

Observamos que, apesar de ter sido desenvolvida, de fato, a partir do século XVII, a Probabilidade foi elaborada na tentativa de se resolver problemas sobre a aleatoriedade desde tempos remotos. Nesse aspecto, até hoje vivenciamos em sala de aula dificuldades sobre como lidar com problemas e/ou fenômenos didáticos relacionados a tomadas de decisões acerca do acaso.

Neste artigo, discute-se também a necessidade, demonstrada ao longo dos anos, de se definir a probabilidade; além da forte influência da premissa de que para desenvolvermos um cálculo de probabilidades, calculamos os possíveis espaços amostrais pelos teoremas de análise combinatória, limitando nossa apreciação no tocante a acontecimentos equiprováveis sob espaços amostrais reduzidos.

Na análise do movimento histórico da probabilidade, pudemos verificar a variedade de suas interpretações, as quais foram refletidas e destinadas à construção de importantes teoremas que utilizamos cotidianamente. Hoje, a probabilidade é usada em várias áreas do conhecimento: Física, Biologia, Economia etc., inclusive quando aplicada à Estatística.

Enfatizamos também, que apenas com Kolmogorov foi possível fazer uma axiomatização da probabilidade; a interpretação clássica da probabilidade não dispunha de ferramentas para expressar a noção de aleatoriedade e trabalhar com conjuntos infinitos, com a definição da razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, que só faz sentido se todos esses casos têm a mesma chance de ocorrer. Situações estas, que são resolvidas por cálculo utilizando-se

técnicas de contagem, o que torna a aderência do ensino de probabilidade ao de análise combinatória.

Neste artigo, procuramos ainda explicar alguns elementos da história e da epistemologia da Probabilidade, que decorrem sobre qualquer dos principais feitos que compõem esta teoria. Na busca de uma razão de ser para o ensino do conceito de Probabilidade, verificamos que o desenvolvimento da Probabilidade se dá sem referência a Estatística, fruto talvez da configuração do ensino atual. O que podemos inferir é que a exploração de situações didáticas com uso da frequência relativa associada ao cálculo de Probabilidade, permitem uma melhor aproximação destes saberes.

A busca da convergência das interpretações da probabilidade, clássica e frequentista, resultam em mostrar aos alunos que é possível estudar o conceito de probabilidade sem nos limitarmos à equiprobabilidade. Isso faz com que aproximemos a estatística da probabilidade – trabalho que pode ser de grande valia para professores em turmas do ensino médio, onde se tem como finalidade desenvolver nos estudantes um entendimento sobre os fenômenos aleatórios cotidianos.

Referências

ALMEIDA, A. B de. **O Problema epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate**. 2005. 63 f. Trabalho realizado no âmbito da disciplina de Filosofia da Ciência do Curso de Mestrado de Filosofia e História de Ciência e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2005.

ARAÚJO, P. C. **Uma combinação de métodos de pesquisa em educação matemática: método bayesiano de dados difusos**. 2013. 257 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

ARTAUD, M. Conditions et contraentes de l'existence des mathematiques dans l'enseignement general. **IUFM d'Aix-Marseille**, France, n. 50, p. 23-38, 1998.

BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2003.

BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses**: a fascinante história do risco. 16 ed. Editora Campus, 1998.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em:
<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>.
Acesso em: 15 set. 2016.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Matemática**. Brasília: MEC, 2000.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Marseille, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CORDANI, L. K. **O ensino de estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. 2001. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista**- Estudo Epistemológico e Didático. 1994. 151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

_____. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le collège**: de la modelisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-Geomètre II. 2001. 338 f. Thèse (Doctorat em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

_____. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história aponta? **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.2, p.50-67, 2007.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la Modelización Funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, n. 17, p. 289-318, 2014.

FREIRE JR., O. **Popper, probabilidade e mecânica quântica**. Porto Alegre: Episteme, 2004.

GUILLES, D. **Philosophical Theories of Probability**. New York: Editora Routledge, 2000.

HENRY, M. Modelisation d'une situation aléatoire. In: _____ (Coord.). **Autour de la modélisation em Probabilités**. France: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação**: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos. 2. ed. Rio de Janeiro: Biblioteca da Cultura Científica, Editores Zahar, 1976.

KATZ, V. A History of Mathematics. 3. ed. Editora Pearson, 2009.

LAPLACE, P. S. **Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades**. Tradução, introdução e notas Pedro Leite de Santana. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, PUC-Rio, 2010.

MAGALHÃES, N. M. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Editora Edusp, 2013.

PICHARD, J. F. Les Probabilités au tournant du XVIII siècle. In: HENRY, M. (Coord.). **Autour de la modélisation em Probabilités**. France: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001.

POPPER, K. **Conjecturas e refutações**. Tradução Benedita Bettencourt. Coimbra: Livraria Almedina, 2006.

RATHJE, P. N.; ZÖRNIG, P. **Teoria da Probabilidade**. Brasília: Universidade de Brasília, Editora UNB, 2012.

SCHEEMAECCKER, X. de. **Les fondements philosophiques du concept de probabilité**. Bruxelles: Université libre de Bruxelles, Editora ULB, 2015.

Capítulo 3

Artigo 2

3 Artigo 2: APORTE DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO NUMA ANÁLISE INSTITUCIONAL SOBRE O SABER PROBABILIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

SUPPORT OF ANTHROPOLOGICAL THEORY OF TEACHING IN AN INSTITUTIONAL ANALYSIS OF KNOWLEDGE PROBABILITY FOR HIGH SCHOOL

RESUMO: Neste artigo, nos propomos a discutir a apresentação do saber Probabilidade nos documentos oficiais do ensino médio, assim como em um livro didático aprovado pelo PNLD 2015. Esta pesquisa decorre da análise de um modelo epistemológico de referência e compõe um estudo maior, que visa observar as incompletudes existentes no conceito de Probabilidade, propondo uma engenharia didática de formação com quatro professores que ensinam este saber, na busca da construção de uma sequência didática que pretende integrar as interpretações: clássica e frequentista. Assim, discutiremos, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, como estas instituições apresentam suas organizações matemáticas para o ensino deste saber, contemplando sua dimensão ecológica e econômica. Pretendemos averiguar também, a hipótese de que se faz necessário apresentar aos professores sequências didáticas que primem pelo ensino de Probabilidade de maneira integrada.

Palavras-chave: Probabilidade. Teoria Antropológica do Didático. Ensino Médio.

ABSTRACT: In this article, we propose to reveal how probability is presented in official high school documents as well as in a textbook approved by the PNLD 2015. This research is based on an analysis of a dominant epistemological model and composes a larger research aimed at observing existing incompleteness in the concept of probability and propose a training engineering with four teachers who teach this knowledge in the search to build a didactic sequence that aims to integrate interpretations: classical and frequentist. Thus, we will discuss according to the Anthropological Theory of the Didactics as these institutions present their mathematical organizations for this to know analyzing its ecological and economic dimension. We intend to confirm our hypothesis that it is necessary to present to the teachers didactic sequences that excel by the teaching of probability in an integrated way.

Keywords: Probability. Anthropological Theory of the Didactics. High school.

3.1 Introdução

É indiscutível o crescimento das pesquisas em Didática da Matemática, principalmente no âmbito da análise dos fenômenos matemáticos que intervêm no

processo de ensino e de aprendizagem. Neste artigo, analisamos esses fenômenos didáticos sob a lente da Teoria Antropológica do Didático (TAD), revelados nas organizações matemáticas apresentadas em alguns dos documentos¹² norteadores do saber Probabilidade na instituição Ensino Médio.

A preocupação iminente com o ensino de Probabilidade, faz com que pesquisadores desta área se debrucem a olhar, por exemplo, quais são os objetivos apresentados pelos documentos reguladores do ensino deste saber e quais destes, de fato, são postos em prática em sala de aula. Esta atenção se dá em virtude da busca da garantia do letramento probabilístico aos jovens, assegurando-se a formação de cidadãos mais conscientes na tomada de decisões impostas a eles no cotidiano.

Nesta perspectiva, observamos que há uma necessidade de se revelar uma Matemática desvinculada da visão tradicional, determinista, salientada nas discussões propostas por esses documentos, que, por sua vez, propõem o ensino de Probabilidade com ênfase em sequências que abordem o acaso e que permitam aos estudantes compreender os fenômenos probabilísticos presentes no mundo (OCNEM, 2006).

Esta investigação se dispõe a analisar o que está posto formalmente como exigência para o ensino de Probabilidade e, em especial, como está apresentado o seu conceito e qual tratamento é dado ao mesmo nos principais documentos oficiais do nível médio, a saber: as orientações curriculares para o ensino médio, os PCNEM, PCN+, OCNEM, PPI-IFBA e o livro didático, que conformam o currículo da instituição¹³ pesquisada.

Nessa conjuntura, à luz dos pressupostos da TAD, a fim de conhecer o nosso sistema didático, neste trabalho analisamos as organizações matemáticas curriculares sobre uma apreciação acerca do sistema organizacional conhecido como níveis de co-determinação (CHEVALLARD, 2005). Diante desta ferramenta, descreveremos sua escala a cada nível associado ao nosso saber pesquisado e também ao Livro didático, o qual terá sua organização descrita sob os critérios de verificação de Chevallard (1999), a fim de se revelar condições e restrições de vida do saber Probabilidade nestas instituições.

¹² Os documentos aqui apresentados são os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio, as orientações curriculares e o projeto político-pedagógico da escola pesquisada.

¹³ Nos referimos aqui ao terceiro ano do Ensino Médio.

Organizamos nossas ideias do seguinte modo: iniciamos o estudo com uma breve abordagem de como definiremos a análise institucional pela TAD, a análise através da apresentação da escala dos níveis de co-determinação que define o grau de relação entre a organização matemática e didática impostas, o que nos permite localizar o *habitat* (local onde vive o saber). Na sequência, apresentamos a Probabilidade presente nos documentos e, por fim, uma Organização Praxeológica do livro didático pesquisado por meio dos critérios de análise das praxeologias propostos por Chevallard (1999).

3.2 Análise institucional

A apreciação aqui proposta é alicerçada a partir dos elementos da TAD. O referido embasamento, nessa perspectiva, almeja examinar como o saber Probabilidade está posto nos documentos de referência, assim como apreciar a sua funcionalidade praxeológica, a fim de verificarmos como nosso problema didático se situa, levando em consideração os instrumentos normativos deste saber. Nesse segmento, o enfoque refere-se à análise das organizações matemáticas para o saber em jogo. Faz-se pertinente esclarecer também, que, por meio do objetivo de projetar e avaliar como este saber está sendo ensinado pelos professores, no campo teórico da TAD, será proporcionada uma base para desenvolvermos um modelo epistemológico didático de referência que será usado para descrever e analisar o modelo epistemológico dominante nas instituições observadas.

Seguindo os pressupostos da TAD, a análise institucional é uma etapa importante para a construção de uma modelização matemática no que tange ao saber a ser ensinado pelo professor. Esta apreciação possibilita entendermos a transposição didática do objeto investigado, ao verificarmos a distância entre o conhecimento ensinado pelo professor e o conhecimento apreendido pelo aluno, através das restrições apontadas nos níveis de co-determinação. E, desse modo, permite compreendermos também como o saber matemático está sendo posto nestes documentos.

As instituições visitadas por nós foram: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), a

Organização Curricular Nacional para o Ensino Médio (OCNEM) e uma coleção de livros na qual o saber Probabilidade está situado e que é a adotada pela escola na qual realizamos a presente pesquisa.

Assumimos neste estudo o conceito de análise institucional dado por Henriques et al (2012, p. 8).

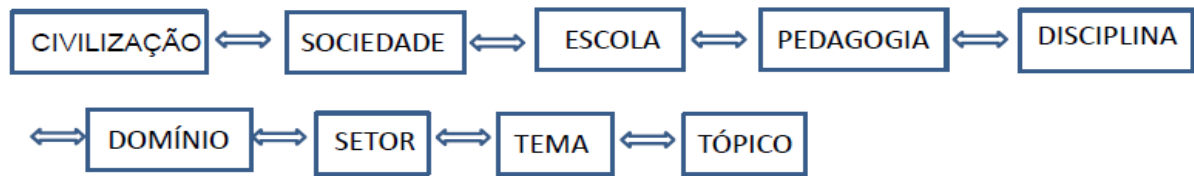
Análise institucional é um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses objetos que intervêm no processo ensino/aprendizagem.

Vale destacar também que, de acordo com a TAD, sob o ponto de vista de Bosch e Chevallard (1999), a ecologia, ou melhor, o problema ecológico, vai ampliar o campo de análise e irá abordar ostensões que se desenvolvem entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Partimos dos três postulados descritos por Chevallard (2002) para uma organização praxeológica. O primeiro deles assevera que “toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 6). O segundo postulado alega que “a realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 6).

Seguiremos neste estudo o terceiro postulado, que diz respeito à ecologia das tarefas e técnicas em relação às condições e restrições que permitem a produção e utilização deste bloco prático (tarefas e técnicas) em instituições. Assim, procuraremos responder o seguinte questionamento: “Quais as condições e restrições que favorecem ou permitem a existência do Ensino de Probabilidade?”.

3.3 Análise a partir da TAD

Para que o funcionamento do sistema didático seja apreendido, tomaremos como base os níveis de co-determinação didática de Chevallard (2002), que possibilitam localizar as diferentes condições e restrições em cada nível do saber Probabilidade em cada uma das instituições do esquema apresentado na figura 4.

Figura 04 – Níveis de Co-determinação Didática.

Fonte: Chevallard (2002) adaptado pela autora (2018).

Integrando os níveis de co-determinação didática ao objeto de estudo, a saber, o ensino de Probabilidade, faremos uma análise de cada item que compõe o esquema da figura 4. Em relação aos documentos oficiais norteadores deste saber, estes são representados na figura acima por: civilização – sociedade – escola – pedagogia – disciplina; e os outros níveis por: domínio – setor – tema – tópico, que estão relacionados às organizações praxeológicas (CHEVALLARD, 2002).

Para Chevallard (2002), os níveis de co-determinação estão ligados às praxeologias de tipo pontual, local, regional e global, tipos estes que serão classificados ao longo deste estudo. Esses níveis de co-determinação dialogam entre si e com o meio didático a que estão submetidos. E, ainda, cada nível ajuda a determinar a ecologia das organizações matemáticas e organizações didáticas pelas condições que oferece e restrições que impõe.

Identificaremos neste momento os níveis civilização, sociedade, escola e pedagogia, ou seja, os que são associados aos documentos oficiais, ilustrando-os com o que foi exposto aqui em relação ao nosso objeto, o ensino de Probabilidade. Assim, nesta pesquisa, assumiremos a seguinte classificação para análise:

Quadro 03 – Níveis de Co-determinação Didática.

CIVILIZAÇÃO	BRASIL
SOCIEDADE	NOOSFERA
ESCOLA	ESCOLA BÁSICA
PEDAGOGIA	ENSINO MÉDIO
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
DOMÍNIO	ANÁLISE DE DADOS E PROBABILIDADE
SETOR	PROBABILIDADE
TEMA	CONCEITO DE PROBABILIDADE
QUESTÃO	CALCULAR A PROBABILIDADE

Fonte: a autora (2018).

Nesta classificação, de acordo com o objetivo proposto, o de revelar como está posto o objeto Probabilidade, encontra-se o nível *civilização*. Para um melhor entendimento do assunto, buscamos em um dicionário¹⁴ o significado desta palavra e verificamos que: “A **civilização** é o estágio da cultura social e da civilidade de um agrupamento humano caracterizado pelo progresso social, científico, político, econômico e artístico. O vocábulo deriva do latim *civita* que designava cidade e *civile* (civil) os seus habitantes”. Existem várias interpretações referentes ao termo civilização; elegemos esta, para classificamos neste tópico o Brasil, local de onde provém a cultura que determina nossos valores, as leis que regulamentam o ensino para a escola básica e os documentos norteadores referentes tanto a cada fase de aprendizagem quanto ao que norteia a metodologia de ensino. Vale destacar, que o nível civilização compõe várias sociedades e neste sentido desde a Antiguidade os jogos de azar “envolvem” e “distraem” as pessoas e, apesar da Teoria das Probabilidades só ter sido formalizada no século XVIII, verificamos registros de jogos aleatórios desde os tempos antigos, conforme podemos constatar em Almeida (2016), Batanero (2005) e outros.

Para o nível *sociedade*, averiguamos as relações sociais definidas culturalmente pela civilização. Observamos assim, na esfera do ensino, como foram construídos os documentos norteadores para a educação básica. A Lei de Diretrizes e Bases de nº 9.394 delinea como objetivos da educação o seguinte:

Art. 1º A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais. § 1º Esta Lei disciplina a educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias. § 2º A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social (LDB, 1996, p. 1).

Esta lei reforça ao cidadão a necessidade de aprendizado, de tal forma que são os saberes em pauta que lhe fornecerão condições de buscar qualquer formação de seu interesse. Neste estudo, a matéria situa-se no âmbito da Educação Estatística, que descreve como uma das suas finalidades o letramento probabilístico. Segundo Gal (2005), o conhecimento da Probabilidade é relevante principalmente

¹⁴ Foi consultado o dicionário Informal on-line: <<http://www.dicionarioinformal.com.br/significado/civiliza%C3%A7%C3%A3o/11088/>>.

em situações que exigem interpretação de declarações probabilísticas, geração de julgamentos de probabilidade ou tomadas de decisão.

Ainda sobre a *sociedade*, os PCN foram construídos de acordo com a LDB e tendo como referência “a perspectiva de criar uma escola média, com identidade, que atenda às expectativas de formação escolar dos alunos para o mundo contemporâneo” (BRASIL, 2000). Para classificarmos este nível, consideramos pertinente apresentarmos a importância de se trabalhar os conceitos de Estatística e Probabilidade propostos.

Os PCN seriam os principais norteadores nesse contexto, além do Projeto Político Institucional do Instituto Federal da Bahia (PPI-IFBA)¹⁵, escola partícipe desta pesquisa. Dentre as finalidades do PPI-IFBA, destacamos a subsequente: “desenvolver a educação profissional e tecnológica como processo educativo e investigativo de geração e adaptação de soluções, técnicas e tecnológicas às demandas sociais e peculiaridades regionais” (IFBA, 2013, p. 30).

Já o nível *escola* é responsável pela aprendizagem e ensino dos saberes que compõem a escola básica. De acordo com Silva (2016, p. 61), “a escola é definida como instituição social dedicada ao estudo, onde se suspende temporariamente o fluxo das atividades comuns a vida para estudar, isto é, construir e desconstruir praxeologias da vida”. A escola, nessa perspectiva, é a responsável pela estrutura da ecologia construída na organização matemática e didática para o objeto de estudo Probabilidade.

Para melhor conceituar este nível, consideramos apropriado abordar o pensamento de Machado (2011, p. 68) retirado de Chevallard (2009):

No pensamento de Chevallard *et al* (2001, Prefácio) — [...] a escola leva as novas gerações a estudar aquelas obras humanas que melhor lhes servirão para compreender a sociedade na qual estão dispostas a entrar, pois disso depende a continuação da supremacia da cultura dominante. Para o teórico, a escola é o coração do Sistema Didático, pois é nela que ocorre o encontro entre aluno, professor e objeto de estudo.

Nesse sentido, os PCN enfatizam que o ensino de Probabilidade deve ser inserido no currículo dos alunos desde o início do ensino fundamental, salientando a importância de introduzir noções de acaso e aleatoriedade presentes no cotidiano

¹⁵ Este documento está disponível na página do IFBA, cujo endereço eletrônico é: <<http://portal.ifba.edu.br/proen/PPIIFBA.pdf>>.

das pessoas. No nível médio, a proposta de instrução do conceito em demanda é a de ser apresentado de forma que os estudantes sejam capazes de aplicar as ideias de Probabilidade de modo contextualizado sobre problemas que envolvam fenômenos naturais ou do dia a dia e em um ambiente que promova a aprendizagem.

Verificamos nestes documentos (PCN, PCN+, OCNEM), que apesar de primarem pelo ensino de Probabilidade em todos os níveis, apresentam os saberes Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória de maneira dissociada, trabalhando seus objetivos de forma distinta. Salienciamos, neste contexto, uma restrição no documento PCN+: a forte influência do caráter determinístico, que limita, em suas orientações, o ensino do conceito de Probabilidade: “Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados [...]” (PCN+, 2000, p. 126).

Já nas OCNEM, verificamos ao longo do texto, orientações aos professores de como associar o cálculo de Probabilidade e a Estatística:

Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado (OCNEM, 2000, p. 80).

As planilhas eletrônicas também são muito apropriadas para introduzir a noção de simulação probabilística, importante em diversos campos de aplicação... podem-se simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, contribuindo, assim, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência relativa observada em uma infinidade de repetições (OCNEM, 2000, p. 89).

Para o nível *Pedagogia* fica a responsabilidade de selecionar os conteúdos que compõem cada ano de ensino escolar, definindo a sua importância e motivo de escolha. Além disso, a este nível cabe também a incumbência de esclarecer quais saberes serão necessários para que num determinado momento o aluno aprenda aquele conteúdo específico. Por exemplo, o ensino de Probabilidade no Nível Médio, é contextualizado por uma questão de jogos, de chances, do acaso, mas definido de

modo limitado sobre espaços amostrais equiprováveis pela interpretação clássica.¹⁶ Desta maneira, o ensino de Probabilidade é restrito à abordagem de problemas que envolvam situações de contagem em conjuntos finitos, ocasionando uma perda na aprendizagem dos estudantes, que deixam de explorar seu caráter aleatório.

Segundo Lecoutre (1985), a abordagem baseada na equiprobabilidade leva a reforçar a presença de obstáculos de origem epistemológica¹⁷ relatado em seu artigo, a partir de um estudo com estudantes sobre jogos de dados, ela pôde constatar que os sujeitos da pesquisa acreditavam que os eventos aleatórios são intrinsecamente prováveis.

Ou seja, vale a pena, nesse percurso, reforçar que o determinismo matemático, marcante nas escolas básicas, determina, conforme as apreciações até aqui empreendidas, restrições aos educadores no sentido de pensar estratégias de inserção, em seus programas de ensino, da indeterminação e da incerteza, isto é, de projetar um olhar diferenciado para o ensino de Probabilidade.

Ainda sobre o lecionar da Probabilidade nos PCNEM, identificamos que:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (PCNEM, 2000, p. 44).

Já o nível *Disciplina*, representa o significado de disciplina escolar que conhecemos, isto é, posto como um saber curricular, um termo que designa determinado ramo do conhecimento.

Apresentamos até agora uma apreciação no tocante aos níveis que estão associados aos documentos oficiais. Os níveis hierárquicos: domínio, setor, tema e questão são considerados níveis mais baixos, no sentido de serem classificados como níveis característicos, e estão associados ao professor.

¹⁶ Definimos a interpretação clássica como conceito que relaciona a probabilidade como a razão definida pelo número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

¹⁷ Aqueles associados ao saber.

O nível *Domínio* representa o saber próprio da disciplina. Na disciplina de Matemática temos diversos domínios representados pelos PCN como as grandes áreas, são eles: números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade – de acordo com o PNLD 2015. O objeto Probabilidade estudado por nós tem sua área juntamente com a Estatística. Nos livros didáticos destinados ao ensino médio, o conteúdo de Probabilidade é apresentado de forma dissociada da estatística.

No domínio em pauta, tem-se: Estatística e Probabilidade; estamos assim no setor Probabilidade. Neste momento, faremos a análise das praxeologias matemáticas para o ensino médio. Partindo para o nível *tema*, a saber, a Definição de Probabilidade, apresentamos um estudo sobre como o seu conceito está disposto, e, para isso, explanaremos o nível das *questões*, como por exemplo: calcular a Probabilidade de um determinado evento. Nesse segmento, no nível *tema* verificamos a predominância da interpretação clássica nos livros didáticos do ensino médio trabalhada no nível *questões* no cálculo em espaços de equiprobabilidade.

Os níveis de co-determinação domínio, setor, tema e questão, estão diretamente ligados à organização praxeológica, conectados aos blocos do saber e do saber fazer. Nesta análise, alicerçados pelos níveis de co-determinação didática, indicamos que o presente estudo tenta percorrer todas as fases da transposição didática propostas por Chevallard (2005). Nos níveis superiores, estão as instituições produtoras do saber sábio, isto é, do saber responsável pela normatização do conteúdo proposto, que, no processo transpositivo, é transformado em saber a ser ensinado pela noosfera, que representa a comunidade acadêmica. Nesse trajeto, o saber é analisado e moldado novamente para ser ensinado pelo professor, e torna-se, então, um saber a ser aprendido pelos estudantes.

Barquero, Bosch e Gascón (2013) advogam que, segundo a TAD, no âmbito institucional, podemos analisar todas as instituições que podem intervir no processo de transposição didática, e o problema didático, por sua vez, não pode ser formado observando-se uma única instituição, pois se faz necessário examinar todo o conjunto de sujeitos envolvidos (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 16).

Neste aspecto, na presente análise podemos observar que há lacunas nos níveis de co-determinação associados ao ensino de Probabilidade que não permitem o seu avanço no que tange à criação de ecologias que propiciem a reconstrução de uma organização didática para o ensino deste saber. Essas lacunas são

identificadas a partir do estudo na observação realizada da prática dos professores, em sua condução.

Neste artigo, temos por objetivo expor, de posse da apreciação institucional aqui posta, lacunas na construção do objeto Probabilidade, apresentando como ele “vive” em determinadas instituições, com o intuito de criar subsídios para a construção de um modelo didático para este saber.

3.4 Análise dos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram criados com a finalidade de fornecer orientações sobre como o conhecimento deve ser abordado, orientando instituições e professores, e designando quais competências devem ser trabalhadas nas diversas modalidades de ensino. Os PCN têm como proposta:

...no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização (BRASIL, 2000, p. 5).

O conteúdo de matemática foi abordado neste documento na parte 3, destinada a Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. O documento está dividido em: capa; contracapa; sumário; apresentação; um tópico intitulado “o sentido do aprendizado na área”; competências e habilidades; além de um tópico com cada um dos conhecimentos: biologia, física, química e matemática, rumos e desafios; e bibliografia, totalizando 58 páginas.

Para Matemática, os PCNEM buscam orientar os professores no intuito de formar cidadãos, trabalhando o raciocínio lógico dedutivo, com a capacidade de criar estratégias, entender estimativas, conceitos e resolver problemas reforçando a importância de uma cuidadosa abordagem de conteúdos de Contagem, Estatística e Probabilidade no ensino médio.

Também é enfatizado pelo documento que “o conhecimento em Matemática é fundamental no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, enfatizado nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98”. (BRASIL, 2000, p. 9).

Nesse âmbito, o ensino de Probabilidade é abordado nos PCN desde o nível fundamental, devido à importância de que, desde as séries iniciais, os estudantes compreendam que os acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e seus possíveis resultados devem ser trabalhados a partir de noções de acaso e incerteza. No ensino médio, os parâmetros curriculares nacionais reforçam as propostas para o ensino de Probabilidade quando trazem como habilidades e competências “a compreensão do caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais utilizando instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades” (BRASIL, 2000, p. 95).

Os PCNEM abordam ainda considerações a respeito do saber estudado, o que deve ser acatado como relevante na construção do currículo de matemática para o ensino médio. Nesse processo, leva-se em juízo as diversidades culturais existentes em nosso país, o que valida mudanças significativas no currículo em ação, conhecido como a prática do professor e o seu plano de aula, preparado com base na proposta curricular da escola.

Apesar de verificarmos nos PCN ponderações acerca da importância do ensino de Probabilidade em relação ao seu caráter aleatório, além da ênfase para que os professores levem em conta o teor multifacetado do seu conceito, não encontramos nesse documento possíveis orientações para que haja uma abordagem desse aspecto na prática docente.

Na análise aqui empreendida, no âmbito da TAD, observaremos este documento no que diz respeito à escala hierárquica dos níveis de co-determinação didática. Segundo Chevallard (2005), os níveis de co-determinação didática estabelecem o enlace entre a organização matemática e a organização didática, no qual cada nível representa onde o saber está situado.

Nesse segmento, consideramos nosso modelo didático de referência, que deve ser específico sobre um tema, um setor ou oriundo de uma área da matemática escolar. Da mesma forma, este modelo deve ser coerente ao modelo didático de referência geral descrito ao nível da disciplina (matemática, neste caso), tomando em nota as condições e restrições dos níveis maiores: o nível pedagógico, da escola, da sociedade e da civilização (BOSCH; GASCÓN, 2010).

No que respeita aos níveis de co-determinação didática, os PCN fazem parte da sociedade, pois, como documento oficial, compõem a noosfera¹⁸ dando subsídios aos professores e indicando o que e quais saberes devem ser ensinados aos estudantes. Estas orientações são consideradas por nós, no âmbito teórico aqui contemplado, como condições ao bom funcionamento da sociedade. No que tange à esfera das restrições a este nível, consideramos como tal a ausência das orientações ao ensino do conceito de Probabilidade de forma integrada, apontadas neste estudo no parágrafo anterior.

3.5 Orientações curriculares para o ensino de probabilidade

Um dos principais objetivos deste documento é dar continuidade ao que se propõem a lei de diretrizes e bases (lei 9394/96) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM e PCN+), isto é, dar prosseguimento à formação obtida no ensino fundamental, aperfeiçoando seus conhecimentos na busca de ferramentas que possibilitem aos estudantes a garantia de exercer sua cidadania.

Apresentaremos primeiramente alguns elementos globais deste documento, observando a organização geral do mesmo, para, assim, podermos inferir se está organizado da seguinte maneira: capa, folha de rosto, contracapa, folha catalográfica, carta ao professor, apresentação, sumário e tópicos divididos pela área de conhecimento: biologia, física, matemática e química. O documento contém 140 páginas.

No documento, ao se contemplar a área de matemática, constata-se que em cada um desses tópicos constam: Introdução, Questões de conteúdo, Questões de metodologia, O uso de tecnologia, Organização curricular e projeto político-pedagógico, Temas complementares, Considerações finais e Referências bibliográficas.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino médio, o conteúdo de Probabilidade é apresentado em um bloco juntamente com a análise de dados. Na apresentação deste bloco é salientada a importância da Probabilidade ser

¹⁸ A noosfera é definida como o lugar onde ocorrem as interações entre o sistema de ensino e a sociedade; ela é responsável pelas discussões que permitem o funcionamento do sistema didático.

trabalhada desde o ensino fundamental, para que o estudante expanda seus conhecimentos sobre o caráter aleatório dos fenômenos probabilísticos. No documento, reitera-se que:

O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação (BRASIL, 2006, p. 78).

Nesse sentido, o documento frisa que o entendimento sobre o acaso e a incerteza permite que os alunos tenham a capacidade de compreender algumas características do seu conceito, o que corrobora com a hipótese aqui proposta, a saber: de que existe uma limitação da aprendizagem quando esta é baseada prioritariamente em espaços amostrais equiprováveis.

Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado (BRASIL, 2006, p. 80).

A partir do exposto, observamos que nesta citação consta que não devemos limitar o conceito de Probabilidade a espaços amostrais equiprováveis, mas, antes, estabelecer associações à frequência relativa para um grande número de experimentações.

É importante mencionar também que, no tópico que se refere à metodologia, o documento elenca como opção a criação de sequências didáticas que viabilizem uma melhor aprendizagem dos alunos através do uso de planilhas eletrônicas, por exemplo.

As planilhas eletrônicas também são muito apropriadas para introduzir a noção de simulação probabilística, importante em diversos campos de aplicação. Ao se usar a função "ALEATÓRIO ()", podem-se simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, contribuindo, assim, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência

relativa observada em uma infinidade de repetições (BRASIL, 2006, p. 89).

Assim, o documento enfatiza a pertinência do ensino deste componente curricular deixando clara a relevância de se trabalhar o caráter aleatório da Probabilidade.

3.6 Análise do objeto probabilidade no livro didático do ensino médio

O livro didático desempenha um papel importante na sala de aula da maioria dos docentes. É dele que são retirados os conteúdos escolhidos para serem ensinados pelos professores. Além disso, muitas vezes, é dele que são extraídas as estratégias de ensino, sendo a principal fonte de referência ou até mesmo o único manual utilizado no planejamento das aulas (LAJOLO, 1996).

Neste tópico, trataremos da abordagem dada pelos autores do livro didático adotado pela instituição pesquisada, o IFBA- *campus* Salvador - BA. O livro utilizado é denominado de *Matemática: Contexto e aplicações*, do autor Gelson Iezzi e colaboradores. Versaremos, nesse contexto, acerca do volume 2 da coleção do ensino médio. Neste livro, o saber Probabilidade está apresentado no último capítulo. Nessa empreitada, partiremos das considerações do Guia de livros didáticos - PNLD 2015 (BRASIL, 2015) e da ecologia segundo Artaud (1998) e Chevallard (2009).

O Programa Nacional do Livro Didático-PNLD foi criado em 1996 como um guia ao professor, com o intuito de garantir que os autores de livros cumprissem normas e dessem primazia aos saberes necessários à formação dos docentes. Esta análise apresentada agora é importante, pois compõe a apreciação aqui pretendida sobre a organização matemática posta para o saber Probabilidade, que, de acordo com o PNLD, tem como objetivo “utilizar os conceitos e procedimentos estatísticos e probabilísticos, valendo-se, entre outros recursos, da análise combinatória” (FNDE, 2014, p. 52).

No estudo de Rodrigues (2016) sobre os livros didáticos aprovados pelo PNLD (2015-2017), foi verificado que o tema Probabilidade é abordado em apenas um dos três volumes que compõem cada coleção, com pouco mais de 3% e, além disso, as seis coleções aprovadas abordam prioritariamente a interpretação clássica em sua definição e exercícios apresentados. A única coleção verificada pelo autor

que apresentava a interpretação frequentista não atingia sequer 2% de todas as atividades propostas.

Em relação ao bloco temático aqui proposto, o documento salienta lacunas observadas no conteúdo quando discorre:

Estadística e Probabilidade. Os conteúdos são apresentados com base em situações da atualidade, o que pode favorecer o interesse e a motivação do aluno. Porém, poucas delas oferecem possibilidades de interpretação e validação de resultados por parte do aluno. Por exemplo, há casos em que o valor encontrado para a média não pertence ao conjunto de valores assumidos pela variável, e nada se discute sobre o significado do resultado obtido. Cabe ressaltar, ainda, que as diferentes etapas da pesquisa estatística são pouco observadas. Além disso, a análise e interpretação dos dados obtidos são pouco exploradas, o que pode prejudicar o aspecto crítico primordial nesse tipo de pesquisa (FNDE, 2014, p. 56.).

Segundo Chaachoua e Comiti (2010), em várias pesquisas o uso da análise do livro didático tornou-se um recurso essencial para a compreensão do funcionamento ou para caracterizar o estado do sistema em um determinado momento. No entanto, nossa análise também deve considerar certos aspectos do ambiente para o estudo da relação institucional.

Para caracterizar melhor o estudo da relação institucional, apresentaremos uma análise praxeológica. Seguiremos o modelo proposto por Almouloud (2015), no intuito de fazermos a identificação dos tipos de tarefas propostas no capítulo sobre Probabilidade, para depois investigar as técnicas recomendadas e tecnologias associadas a estas técnicas. Faremos também uma avaliação seguindo os critérios de Chevallard (1998) abordados por Almouloud (2015), que são: critério de identificação, critério da razão de ser e critério de pertinência.

Segundo Almouloud (2007), os critérios para analisar tipos de tarefas são definidos da seguinte maneira:

1. Critério de identificação: verifica quais tipos de tarefas são apresentados de forma clara e bem identificados;
2. Critério das razões de ser: verifica quais razões de ser dos tipos de tarefas são explicitadas ou, ao contrário, se esses tipos de tarefa aparecem sem motivos válidos;
3. Critério de pertinência: verifica quais tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas frequentemente encontradas, bem como se são pertinentes, tendo

em vista as necessidades matemáticas dos alunos (ALMOULOU, 2007, p. 126).

Utilizaremos também, baseados nas ideias de Almouloud (2007), a metodologia para a investigação das técnicas e questões norteadoras que servirão para validarmos as técnicas destacadas na corrente análise. Listaremos a seguir, indagações apresentadas por Almouloud (2007, p. 126):

- Q1. As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas?;
- Q2. São de fácil utilização?;
- Q3. São imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto?;
- Q4. São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto?

Seguindo estas questões, nos propomos a verificar a organização matemática do livro didático adotado pela escola pesquisada, observando na análise em curso possíveis lacunas que darão suporte à construção da organização didática almejada.

3.7 Livro didático utilizado

Desenvolver uma apreciação a respeito do livro didático é analisar sua organização matemática e didática. Como já mencionamos, o livro didático pesquisado é o que está sendo usado pela instituição de ensino em questão. Neste sentido, é válido destacar algumas informações a respeito do compêndio referido: *Matemática, ciência e aplicações*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, foi publicado pela Editora Saraiva. Trata-se do volume 2 do ensino médio, contém 463 páginas e está dividido em 16 capítulos, sendo que, do total de páginas, 120 referem-se ao manual do professor (selecionamos o livro do professor) e 26 são dedicadas à Probabilidade.

Para que possamos realizar a organização praxeológica aspirada quanto ao saber Probabilidade, primeiramente, estabeleceremos uma organização praxeológica em relação à praxeologia matemática regional, aqui representada pelo capítulo dezesseis, no qual é abordado o ensino de Probabilidade.

Quadro 04 – Descrição dos itens do capítulo estudado.

Capítulo 16	Título do capítulo: Probabilidades
subtítulo 1	Experimentos aleatórios
subtítulo 2	Espaço amostral e evento
subtítulo 3	Frequência relativa e probabilidade
subtítulo 4	Probabilidades em espaços amostrais equiprováveis
subtítulo 5	Exercícios resolvidos – exercícios
subtítulo 6	Aplicações
subtítulo 7	Probabilidade da união de dois eventos
subtítulo 8	Probabilidade Condicional
subtítulo 9	Exercícios resolvidos – exercícios
subtítulo 10	Probabilidade da interseção de dois eventos
subtítulo 11	Eventos independentes
subtítulo 12	Aplicações
subtítulo 13	Exercícios resolvidos – exercícios
subtítulo 14	Lei binomial da Probabilidade
subtítulo 15	Exercícios resolvidos – exercícios

Fonte: dados extraídos de Iezzi et al (2013).

Cada subtítulo corresponde a um conceito a ser estudado; estes subtítulos são apresentados seguidos de exemplos de suas aplicações. No tocante à definição de Probabilidade, estamos interessados na parte que engloba desde o subtítulo 1 até o subtítulo 6.

Neste momento, faremos observações acerca do manual do professor que consta no final do livro. Verificamos, nessa perspectiva, como objetivo da coleção do livro didático, por exemplo, “o de proporcionar ao aluno conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competências e exercício da cidadania” (IEZZI et al, 2013, p. 331).

Essa análise praxeológica se dá devido aos professores utilizarem o livro referido com o manual do professor, e de posse dele, construírem uma apostila com o conteúdo de Probabilidade selecionado a ser ensinado por eles.

No tópico sobre Tratamento da Informação, que consta no manual do professor, anexado ao final do livro, os autores alegam que realizam um estudo completo da Probabilidade, apresentando uma pequena referência à história das Probabilidades. Para o conteúdo, são apresentados exemplos e exercícios resolvidos intercalados após cada conceituação realizada, enfatizando-se que essas atividades têm o papel de ilustrar os conceitos evidenciados e mostrar como são desenvolvidos. Basicamente, é orientado ao professor trabalhar o conceito de

Probabilidade ligado à adição e multiplicação de Probabilidades, eventos independentes, Probabilidade condicional e lei binomial da Probabilidade. Nestes, são gerados os objetivos específicos a seguir:

- Reconhecer fenômenos de natureza aleatória;
- Conceituar espaço amostral e evento de um experimento aleatório;
- Utilizar a frequência relativa para definir a probabilidade de ocorrência de um evento;
- Calcular probabilidades em espaços amostrais finitos equiprováveis;
- Utilizar as técnicas de contagem como um recurso a mais na resolução de problemas de probabilidade e etc. (IEZZI et al, 2015, p. 358).

O livro didático mencionado principia o conteúdo de Probabilidade com uma contextualização associada aos jogos de azar fazendo referência ao jogo da mega-sena. No compêndio, é apresentado o sorteio do jogo ligado ao que os autores denominam de experimento aleatório. Neste tópico, define-se como seria classificado um evento e um evento complementar, mas não se demonstram propostas, nem atividades que expressem a definição axiomática da Probabilidade.

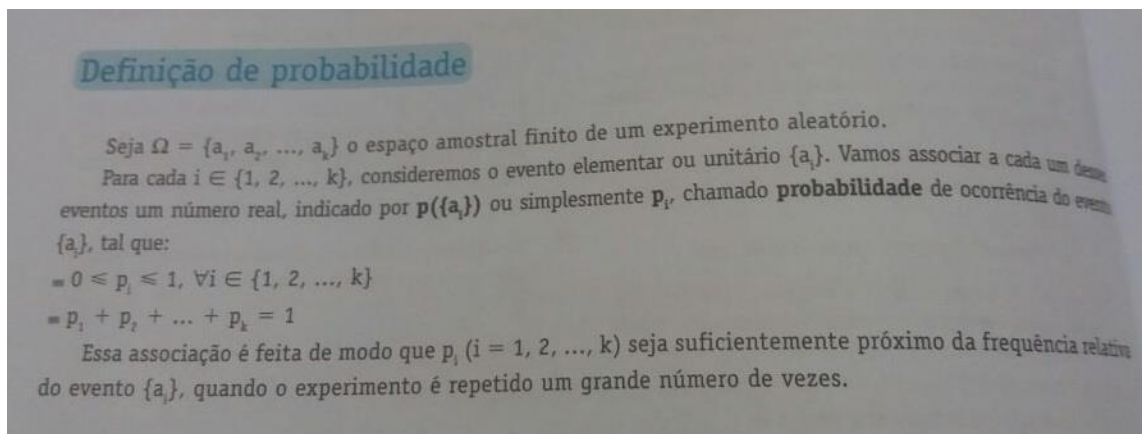
Este livro didático também explana os conteúdos probabilísticos baseados unicamente sobre a definição clássica, apresentando suas atividades, exemplos e exercícios sem fazer qualquer menção à definição frequentista (VIALI; OLIVEIRA, 2010). Além disso, como ferramenta de apoio aos professores que o empregam, limita a apresentação dos saberes relacionando-os à equiprobabilidade, indo de encontro ao que propõem os documentos curriculares oficiais aqui expostos.

Para uma análise segundo a TAD, inicialmente, vamos expor as tarefas sugeridas pelos autores, para, em seguida, identificar os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias. Faremos isso a fim de identificar as praxeologias que vivem nesta instituição. Para tanto, focalizaremos na organização referente ao início do capítulo no qual é demonstrada a parte conceitual da Probabilidade.

3.8 Organização praxeológica

No que tange à organização praxeológica da obra analisada, percebemos que os autores, após enunciarem a acepção de experimento aleatório, espaço amostral e evento com a simbologia utilizada pela teoria da Probabilidade, conceituam frequência relativa, e, assim, apresentam o conceito de Probabilidade, conforme a figura abaixo:

Figura 05 – Definição de Probabilidade.



Fonte: Iezzi et al (2013, p. 288).

A definição apresentada acima representa a acepção axiomática da probabilidade que, apesar de ser o primeiro conceito formal de Probabilidade evidenciado, não vem a ser discutido e nem mesmo explorado. Segundo Viali e Oliveira (2016, p. 8), “os autores deixam de explorar neste conceito as diversas propriedades da Probabilidade no cálculo de eventos compostos e de fazer um paralelo com ideias já vistas pelos alunos”.

Desta forma, a ausência de tipos de tarefas sobre este aparato tecnológico (a definição acima) não permite a construção de praxeologias que apresentem o conceito de forma integrada, fazendo com que o surgimento de obstáculos didáticos sejam favorecidos pelas escolhas dos professores que lecionam este saber, isso potencializa a chance de também estarem presentes nos alunos.

Na sequência, são evidenciados dois exemplos, e, a partir destes exemplos, são discutidas a proximidade entre a frequência relativa e o conceito de equiprobabilidade. Ao anunciar um exemplo que trata da frequência relativa, os autores colocam em discussão uma situação na qual, através do lançamento de uma moeda, a chance de ocorrência do evento ser cara é de $\frac{1}{2}$; nessa esfera,

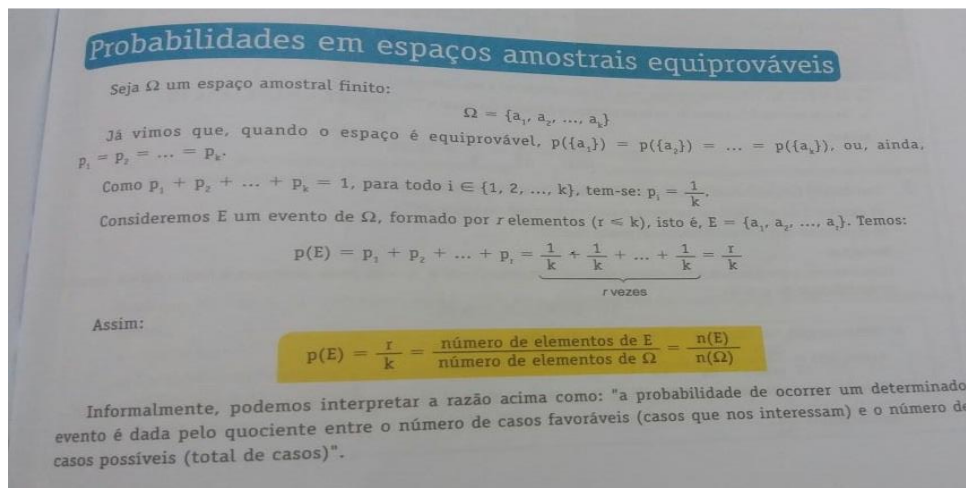
quando a moeda for lançada um grande número de vezes, espera-se que a frequência relativa seja muito próxima de $\frac{1}{2}$ – pensamento análogo para a situação envolvendo a coroa. Essa expectativa decorre da ideia de que a moeda possui duas faces construídas igualmente e, assim, simetricamente possuem a mesma chance de ocorrência.

Já noutro exemplo, os autores chamam a atenção para a semelhança entre o lançamento de uma moeda e o lançamento de um dado honesto. Entretanto, o assunto em pauta é a ideia de equiprobabilidade, levando-se em consideração a possibilidade de qualquer face apresentada ter a mesma fração de ocorrência.

Desta maneira, podemos evidenciar possíveis consequências didáticas na definição apresentada, como, por exemplo, a ausência de tarefas associadas ao conteúdo em questão, o que faz com que o estudante não entenda qual a razão de ser da apresentação do conceito.

Em seguida, o livro didático evidencia como tópico a definição clássica conectada a espaços amostrais equiprováveis, conforme a figura abaixo:

Figura 06 – Definição de Probabilidade associada a eventos equiprováveis.



Fonte: lezzi et al (2013, p. 289).

Logo após a definição clássica, os autores apresentam um bloco de propriedades associadas a essa mesma aceção, ou seja, a definição axiomática. As quatro propriedades apresentadas foram:

- 1ª) A probabilidade do evento certo é igual a 1.
- 2ª) A probabilidade do evento impossível é igual a 0.

3ª) Se E é um evento de Ω , distinto do evento impossível e também do evento certo, então $0 < p(E) < 1$.

4ª) Se E é um evento de Ω , então $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$ (IEZZI et al, 2013, p. 290).

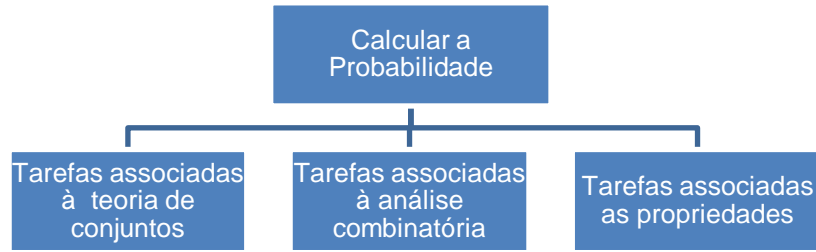
Observamos que o livro didático apresenta a definição axiomática associada à definição clássica. É apresentado um conjunto de tarefas para ilustrar as técnicas atreladas à teoria de conjuntos. O que verificamos é que, apesar dos tipos de tarefas apresentados estarem de acordo com os objetivos previstos no manual do professor que consta no livro, as atividades requerem dos estudantes somente o reconhecimento do espaço amostral e o desenvolvimento de técnicas de contagem. Esta disposição não permite que os professores trabalhem com diferentes formas de cálculo de Probabilidades, tampouco abordem situações com a aleatoriedade nos aspectos de variação e incerteza.

Continuamos a análise sobre a organização praxeológica do livro didático com o olhar sobre os critérios de Chevallard (2009).

3.8.1 Critérios de identificação

Seguindo o critério de identificação sugerido, vamos observar se os tipos de tarefas propostas são apresentadas de forma clara e bem direcionada. Em nossa análise, verificamos, no que diz respeito ao bloco das tarefas, a seguinte tarefa como principal (T1): Calcular a Probabilidade. Essa tarefa está bem identificada e é baseada no conceito apresentado na figura 06, a probabilidade definida pela razão do número de elementos do evento proposto pelo número de elementos do espaço amostral, e corresponde à Probabilidade sobre espaços amostrais equiprováveis. Nesse sentido, os tipos de tarefas seguem esta definição apresentada em duas subdivisões: eventos definidos sobre a teoria dos conjuntos ou eventos sobre análise combinatória. Nesse intuito, a figura abaixo ilustra o que estamos abordando:

Figura 07 – Tarefa e tipos de tarefas.

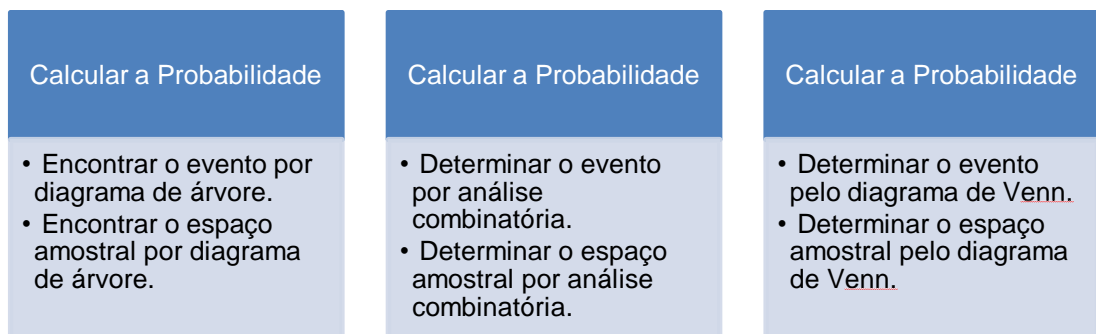


Fonte: a autora (2018).

3.8.2 Critério da razão de ser

Observando-se agora por meio do critério da razão de ser, as tarefas propostas seguem a limitação identificada na figura 7. Desse modo, sobrelevamos que o livro didático analisado restringe-se ao ensino da Probabilidade no âmbito do conceito e da resolução de problemas envolvendo o cálculo de espaços amostrais equiprováveis. Outrossim, da maneira como as tarefas são apresentadas, as mesmas podem ser desenvolvidas pelas técnicas:

Figura 08 – Técnicas.



Fonte: a autora (2018) com base em dados extraídos de lezzi et al (2015).

As técnicas supracitadas estão associadas ao bloco tecnológico-teórico, que justifica a técnica empregada. Assim, averiguamos que os conhecimentos matemáticos mobilizados foram o conceito de Probabilidade sob o espaço amostral equiprovável; como também, o conceito de espaço amostral e evento; e, no segundo bloco, o conhecimento sobre análise combinatória, no que toca a como determinar

arranjos, permutações e combinações. E, por fim, para o terceiro bloco, noções de união, intersecção e complementar de conjuntos.

3.8.3 Critério da pertinência

A organização proposta pelo livro didático que estamos analisando, pressupõe o ensino de Probabilidade associado a cálculos sobre espaços amostrais equiprováveis, priorizando e conferindo relevância à apresentação de tarefas que reforcem este caráter aos alunos, bem como à associação das questões com os conteúdos de análise combinatória, e em momento algum com o conteúdo de estatística. Consideramos relevante que o ensino de Probabilidade seja realizado de forma a contemplar o seu caráter aleatório, com problemas que o associem a situações reais para que os alunos possam vivenciar e experimentar situações não-equiprováveis apresentadas no cotidiano.

Como havíamos mencionado, o critério da pertinência revela quais tipos de tarefas são considerados representativos ao saber Probabilidade, levando-se em consideração as necessidades dos alunos do ensino médio. Em relação à metodologia de investigação das técnicas, proposta por Almouloud (2007), elaboramos as respostas subsequentes:

R1. Ao analisar as técnicas propostas à resolução das tarefas, não há um tipo de elaboração, visto que os autores contemplam nos exercícios resolvidos todos os tipos de técnicas que podem surgir nas resoluções das tarefas.

R2. Em relação aos tipos de técnica, ao observar se são de fácil utilização, podemos concluir que sim. O método para responder é procedimental, no qual é preciso apenas seguir o roteiro estabelecido nos exercícios resolvidos.

R3. No que diz respeito ao caso de as técnicas apresentadas serem imprescindíveis ao cumprimento dos tipos de tarefa, não; se a técnica não fosse apresentada anteriormente o estudante teria como realizar um processo de investigação e descobrir outros métodos viáveis à resolução do exercício.

R4. A esta última questão, podemos responder que sim. A resolução orientada proposta no manual não permite que o estudante realize interpretações errôneas se memorizar os passos da construção da resolução das tarefas.

3.9 Considerações finais

Este artigo se propôs a apresentar uma análise institucional sobre o conceito de Probabilidade que justifica a construção de um modelo epistemológico dominante para o ensino do conceito de Probabilidade. Nestes termos, buscamos apresentar, com base na TAD, como este saber está posto nos documentos norteadores e no livro didático utilizado pela instituição na qual nos dispomos a realizar uma engenharia didática de formação.

Numa análise teórica, identificamos um problema didático associado à abordagem do conceito de Probabilidade; em relação à dimensão econômica, pudemos verificar, através do estudo dos níveis de co-determinação, uma apresentação hierárquica sobre como o saber está situado, identificando-se condições e restrições para a Probabilidade.

É pertinente ressaltar também, que nos PCN e na OCNEM há orientação para o ensino de Probabilidade com ênfase na aprendizagem do aluno sobre o reconhecimento dos fenômenos aleatórios dispostos na natureza, o que pode ampliar seus conhecimentos sobre o raciocínio probabilístico e estatístico. Entretanto, há ausência de abordagem e de técnicas que permitam a construção de sequências para o ensino de Probabilidade levando-se em consideração suas diversas interpretações.

Observamos ainda, que o livro didático apresentado demonstra sua organização matemática voltada para o cálculo de Probabilidades sobre espaços equiprováveis, representando um desafio aos professores que desejam observar sequências que propiciem a discussão do caráter multifacetado do conceito de Probabilidade.

Na análise corrente, podemos perceber a lacuna que existe no ensino de Probabilidade no tocante à apresentação do seu conceito, o que nos leva a acreditar que uma proposta de engenharia de formação com os professores permitiria reconstruir uma organização didática para este saber, na tentativa de apresentar sequências que demonstrem o conceito de Probabilidade de forma a integrar as suas interpretações.

Referências

ALMEIDA, C. M. C.; FARIAS, L. M. S. Uma Análise do conceito de Probabilidade nos Livros didáticos do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático. In: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática – LADIMA, 2016, Bonito, Mato Grosso do Sul. **Anais...** Bonito, Mato Grosso do Sul, 2016.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

_____. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 42, p. 09-34, 2015.

ARTAUD, M. Conditions et contraentes de l'existence des mathematiques dans l'enseignement general permanences et evolutions. **IUFM d' aix-Marseilles**, n.50, p.23-38,1998.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

BATANERO, C. Significados de La Probabilidad en La Educación Secundária. **Relime**, v. 08, n. 3, p. 247-263, 2005.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas**: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. 2010.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs- Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Paris, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – Matemática**. Brasília: MEC, 2000.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: MEC, 2014.

_____. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Lei 9394/96. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 03 abr. 2017.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD**, Ensino Médio. Brasília: MEC, 2015.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CHAACHOUA, H.; COMMIT C. L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. **ACTES CITAD 2**, p. 771-789, 2010.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. Mairsele: IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120, 1998. Disponível em: <www.chevallard.free.fr>. Acesso em: 03 abr. 2017.

_____. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

_____. Organiser l'étude. 3. Ecologie & regulation. **Actes de la 11 École d' Été de Didactique des Mathématiques**. France: La Pensée Sauvage. 2002. Disponível em: <www.yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 15 jul. 2016.

_____. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire**. La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP, p. 239-263, 2005.

_____. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. Lyon: UMR, 2009. Disponível em: <www.chevallard.free.fr>. Acesso em: 03 abr. 2017.

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. USA: Springer, 2005. p. 39-63.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 26, n. 44, p. 1261-1288, 2012.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciências e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996.

LECOUTRE, M. P. Jugements probabilistes chez des adultes: pratique des jeux de hasard et formation en théorie des probabilités. **Bulletin de Psychologie**, Paris, 1985.

MACHADO, V. M. **Prática de estudo de ciências: formação inicial docente na unidade pedagógica sobre a digestão humana**. 268 f. 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

RODRIGUES, M. R.; MARTINS, E.G. A Abordagem do tema Probabilidade nos livros aprovados pelo PNLD para o triênio 2015 – 2017 e suas implicações no processo de

ensino e aprendizagem. Encontro nacional de educação Matemática – ENEM, **anais**, 2016.

SILVA, J. V. G. **Grandezas e medidas**: Um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. 427 f. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

VIALI, L.; OLIVEIRA, P. I. Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio. **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**, Editora Mercado de Letras, São Paulo, v. 1, p. 85-103, 2010.

Capítulo 4

Artigo 3

4 ARTIGO 3: OBSERVAÇÕES ACERCA DE UMA ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Resumo

Neste artigo, propõe-se apresentar um estudo sobre uma Engenharia Didática de Formação, cuja finalidade é construir um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade. Para tanto, derivamos de um problema docente no ensino deste saber, identificado no momento em que os professores apresentam aos seus alunos o conceito de Probabilidade priorizando somente uma interpretação: a interpretação clássica. Neste sentido, tomamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático, e de posse das praxeologias dos professores, buscamos desenvolver um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade, metodologicamente amparado por uma engenharia didática de formação. A construção deste modelo didático visa abordar a aleatoriedade da Probabilidade de forma a integrar nas praxeologias didáticas suas principais interpretações: a clássica e a frequentista. Pretendemos apresentar como resultado desta engenharia didática de formação, uma alternativa didática para uma melhor abordagem do conceito de Probabilidade pelos professores do nível médio.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade. Engenharia Didática. Modelo Didático de Referência.

Abstract

In this article, it is proposed to present a study on a Didactic Engineering of Training, whose purpose is to construct a didactic model of reference for teaching the concept of Probability. For this, we derive from a teaching problem in the teaching of this knowledge, identified at the moment in which the teachers present to their students the concept of Probability giving priority to only one interpretation: the classical interpretation. In this sense, we take as theoretical framework the Anthropological Theory of Didactics, and of possession of the praxeologies of the teachers, we seek to develop a didactic model of reference for the teaching of the concept of Probability, methodologically supported by a didactic engineering of formation. The construction of this didactic model aims to approach the randomness of Probability in order to integrate the main interpretations in the teaching praxeologies: the classical and the frequentista. We intend to present as a result of this training didactic engineering, a didactic alternative for a better approach to the concept of Probability by middle level teachers.

Keywords: Teaching of Probability. Didactic Engineering. Reference Didactic Model.

4.1 Introdução

Neste artigo, tem-se como objetivo apresentar e discutir um modelo didático de referência construído com professores sobre o ensino do conceito de Probabilidade. Ele é parte principal de um estudo maior em que se propõe observar, através de modelos epistemológicos, componentes do bloco tecnológico-teórico do saber Probabilidade e nuances das praxeologias dos professores, com o intuito de (re)construir praxeologias didáticas sobre o ensino do seu conceito.

Para isso, no âmbito da Teoria Antropológica do Didático, formulamos um problema didático¹⁹ considerando sua dimensão epistemológica por intermédio de um modelo epistemológico de referência.

O problema didático a que estamos nos referindo é o associado ao ensino do conceito de Probabilidade, hoje abordado prioritariamente a partir de problemas limitados à equiprobabilidade.

Neste sentido, descreveremos alguns elementos do discurso dos professores que permitam entender critérios e seleções de tarefas e técnicas atreladas ao ensino do conceito de Probabilidade, bem como de algumas das concepções dos professores verificadas nas etapas da engenharia nos momentos de estudo realizados.

Além disso, os documentos oficiais para o nível médio (OCEM; PCN+) recomendam que se utilize a Estatística e a Probabilidade como um conjunto de ideias e procedimentos que possibilitem aplicar a Matemática em questões rotineiras. Neste contexto, fica a cargo dos professores a função de problematizar situações cotidianas relacionadas a estes saberes, propiciando que os alunos desenvolvam a compreensão sobre fenômenos aleatórios.

Assim, neste artigo, apresentaremos um estudo realizado com três professores do ensino médio de uma escola pública federal da Bahia (o IFBA) que lecionam o componente curricular Probabilidade. Este estudo foi metodologicamente empreendido por meio de uma engenharia didática de formação e teve como propósito a construção de um modelo epistemológico didático de referência.

Foi possível verificar como resultado de observação, que os professores não abordam de maneira adequada o caráter aleatório da Probabilidade. A partir desta constatação, enfatizamos a importância de inserir na formação de professores uma

¹⁹ Definimos aqui Problema Didático como o problema de investigação em Didática da Matemática (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014).

discussão sobre um modelo epistemológico didático de referência para o ensino de Probabilidade que integre suas interpretações.

Neste aspecto, estruturamos este artigo do seguinte modo: começando com uma pequena abordagem do ensino de Probabilidade; depois, sobre a formação de professores; em seguida, tópicos da teoria que norteia esta investigação; e a engenharia didática de formação que foi realizada com os docentes.

4.2 Ensino de Probabilidade

Neste tópico, nos deteremos a discutir a conjuntura do ensino de Probabilidade de forma a complementar estudos realizados por nós em outros trabalhos. Gostaríamos de levantar as condições da importância do ensino de Probabilidade e os possíveis caminhos que se esperam do mesmo.

As interpretações de Probabilidade, até hoje, continuam sendo alvo de discussões em debates filosóficos, e o professor, por seu turno, precisa conhecer essas interpretações a fim de instigar o raciocínio dos estudantes quando confrontados com situações que envolvem a aleatoriedade (BATANERO, 2015).

Neste estudo, consideramos, em particular, as interpretações: clássica e frequentista. A interpretação clássica é definida como a razão dada pela quantidade de casos que nos interessam, pela quantidade de casos possíveis, delimitada pelo espaço amostral equiprovável; esta interpretação é também chamada de Probabilidade teórica. Já a interpretação frequentista é definida pelo limite da frequência relativa do experimento quando repetido um grande número de vezes.

Segundo Lopes (2008), para que o ensino de Estatística e Probabilidade contribua para a cidadania, é preciso que os alunos vivenciem, desde os anos iniciais, problemas reais, com ênfase em questões cotidianas, para que, assim, os estudantes desenvolvam sua visão de mundo. A autora reforça:

[...] consideramos que o trabalho com estatística e probabilidade torna-se relevante ao possibilitar ao estudante desenvolver a capacidade de coletar, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que é a grande base do desempenho de uma atitude científica (LOPES, 2008, p. 61).

Lopes (2008), nessa conjuntura, corrobora com esta pesquisa, ao levantar uma preocupação com o papel do professor que ensina Probabilidade, reforçando nosso argumento: o de que cabe ao docente desenvolver nos estudantes o pensamento estocástico²⁰ e criar situações que envolvam as diversas interpretações da Probabilidade²¹, permitindo, em suas aulas, o desenvolvimento da percepção da aleatoriedade.

A autora ainda defende que o ensino de Probabilidade quando trabalhado somente no nível médio priva os alunos de entenderem situações do dia a dia e de participarem melhor de tomadas de decisões como cidadãos. Lopes (2008) também realça a relevância para os professores em assumir uma prática pedagógica voltada à experimentação dos eventos probabilísticos associados a situações cotidianas, fornecendo, nesse segmento, subsídios aos estudantes para tomadas de decisões mais acertadas na sociedade.

Os PCN orientam que a Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, “como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real” (BRASIL, 2000, p. 123). Nesta configuração é que enfatizamos que, apesar destas orientações, os professores precisam estar atentos ao lecionar o conceito de Probabilidade. Apresentar o conceito referido não é só mostrar suas fórmulas que dizem respeito à razão do evento escolhido pelo total de eventos possíveis, mas, antes, deixar claro ao aluno como se dá o fenômeno aleatório e qual a sua importância na previsão dos possíveis resultados.

Batanero (2005) argumenta que, embora a estatística apresente uma boa axiomática, demonstra ainda um problema epistemológico no ensino de Probabilidade por ser um ramo da matemática que mantém até hoje discussões acerca de suas interpretações. A autora aponta, nessa perspectiva, a necessidade de o professor estar ciente deste problema para entender algumas dificuldades dos alunos, que precisam materializar conceitos concretos e modelos matemáticos.

Neste cenário, reforçamos a importância da reconstrução de praxeologias que podem conferir sentido ao estudo do saber Probabilidade, que hoje é apresentado pelos professores, em sua maioria, de modo desvinculado da aleatoriedade. Uma análise sobre estas organizações matemáticas e didáticas permite despertar o interesse pela pesquisa e discussão sobre o conceito de Probabilidade.

²⁰ Estocástico é um termo usado para associar a Estatística à Probabilidade.

²¹ Nos referimos às interpretações: clássica, frequentista, geométrica etc.

Deste modo, concordamos que os professores que ensinam Probabilidade devem ter como principal objetivo discutir as diferentes interpretações e assim apresentar aos estudantes uma sequência didática que permita desenvolver o aprendizado dos fenômenos aleatórios. Neste artigo, apresentamos tópicos de uma aula conceitual de três professores analisando-se suas concepções e ênfases na apresentação dos conceitos primitivos associados a este saber.

4.3 Formação de professores que ensinam Probabilidade

Acreditamos que existe uma lacuna na formação de professores, o que impede que o ensino do conceito de Probabilidade seja apresentado de maneira integrada, proporcionando aos estudantes que vivenciem situações cotidianas sobre o cálculo de Probabilidades.

Para nós, a partir do estudo aqui desenvolvido, é preciso que advenham mudanças nos cursos de formação a fim de fornecer aos professores ferramentas necessárias que possibilitem que ocorra o fenômeno da transposição do saber apreendido para o saber ensinado.

Gonçalves (2004), em sua pesquisa sobre a concepção dos professores de matemática em relação à abordagem frequentista como modelo para resolução de situações aleatórias, observou que os professores do universo pesquisado ensinam o conceito de Probabilidade apoiados nas suas concepções sobre aleatoriedade aprendidas quando estudaram no nível básico, e escolhem o livro didático pela quantidade de exercícios que ele possui.

Batanero (2015) argumenta que os matemáticos desenvolveram o campo da probabilidade como um conjunto de modelos que podem ser aplicados a situações incertas; no entanto, o progresso destes modelos não resolveu o debate filosófico em torno da aleatoriedade.

Há uma preocupação crescente, relatada nos trabalhos de Gonçalves (2004), Lopes (2008) e Batanero (2015), com a formação de professores que lecionam Probabilidade, no sentido de que faltam orientações para que a abordagem frequentista seja trabalhada em sala de aula. Observamos, através destes estudos, que estas dificuldades decorrem, sob um ponto de vista epistemológico, da inaceitabilidade da realização do experimento aleatório, que, pelo grande número de

repetições, apresenta uma aproximação eficaz do resultado estimado, mas nunca uma resposta exata para aquele resultado. Isso faz com que os professores não abordem em sala de aula o cálculo de Probabilidade *a posteriori*.

Verificamos também, em entrevista aplicada aos professores participantes de nossa pesquisa, que o conceito de Probabilidade é abordado somente pelo viés da equiprobabilidade, definindo-se todo o espaço amostral trabalhado como equiprovável, limitando, dessa forma, os estudantes à crença de que o cálculo de Probabilidade só pode ocorrer se conhecemos o conjunto de elementos do evento definido, geralmente o princípio fundamental da contagem.

4.4 A Teoria Antropológica do Didático

Neste trabalho, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) oferece ferramentas para que possamos analisar um problema didático associado a um problema docente e também na criação de um modelo didático que será representado através da reconstrução de praxeologias. Segundo Bosch et al (2006), a TAD questiona as condições e restrições que afetam o desenvolvimento da atividade matemática em uma determinada instituição²². Neste sentido, nos propomos a observar a ecologia da Probabilidade, revelando as condições alcançadas e restrições que estão ligadas ao ensino de Probabilidade por meio das praxeologias dos professores.

Chevallard (1999) enuncia como postulado principal da TAD, que esta situa a atividade matemática e, conseqüentemente, a atividade do estudo em matemática, no conjunto de atividades humanas e instituições sociais. Assim sendo, se “admite que toda atividade humana realizada regularmente pode ser descrita como um modelo único, que é resumido aqui como praxeologia” (CHEVALLARD, 1999, p. 222).

Desse modo, a Praxeologia ou organização matemática é descrita em dois blocos: um bloco da práxis, referente ao saber fazer, constituído pelas tarefas (e

²² “Chamamos de instituição a todo coletivo que permite e impõe a seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD, cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode viver em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado” (BARBOSA; LINS, 2016, p. 6).

tipos de tarefas) e técnicas, e um bloco do *logos*, referente ao saber, constituído pela tecnologia e pela teoria.

A tarefa é descrita como as atividades, problemas, exercícios, e está ligada a construções institucionais. Essas tarefas ou tipos de tarefas são construídas ou reconstruídas em torno de uma atividade matemática de determinada instituição (PAREDES, 2013).

Já a técnica, corresponde à maneira de realizar a tarefa; pode ocorrer que determinada técnica resolva somente parte das tarefas e, desta forma, seja necessária a utilização de outra técnica; pode ocorrer também de existirem técnicas que sejam superiores a outras. O bloco tecnológico-teórico é composto de um discurso racional sobre a técnica chamado de tecnologia. A tecnologia tem o objetivo de dar justificativa à técnica empregada. Já para justificar o discurso tecnológico, temos a teoria (CHEVALLARD, 1999).

Segundo Chevallard (1999), para analisarmos as praxeologias decorrentes das práticas docentes, devemos nos dispor a responder questões do tipo: “Como realizar determinado tipo de tarefa?”; e a resposta a esta questão será geratriz de uma praxeologia local em que serão desenvolvidas técnicas sobre uma tecnologia e teoria da praxeologia estudada.

O que faremos aqui, é descrever e analisar a praxeologia do professor descrita nas observações naturalistas realizadas por nós em função de sua organização matemática e didática²³ para o ensino de Probabilidade a turmas do terceiro ano do nível médio.

Para Chevallard (1999), as organizações didáticas são respostas às questões originadas pelo problema ecológico levantado. Descreveremos, de acordo com este autor, os Momentos de Estudo ou momentos didáticos a fim de produzir uma análise do percurso da organização didática pesquisada.

A noção de momento não remete mais do que na aparência à estrutura temporária do processo de estudo. Um momento, no sentido dado à palavra aqui, é primeiramente uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator em um processo multifatorial. Bem entendido, uma gestão saudável do estudo exige que cada um dos momentos didáticos seja realizado no momento certo, ou mais exatamente, nos bons momentos: por um momento de estudo

²³ Definimos Organização Didática como “o conjunto dos tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta” (CHEVALLARD, 1999, p. 238).

geralmente é realizado várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios que brotam no tempo. Nesta visão, será indicado que a ordem colocada, posteriormente, nos diferentes momentos didáticos é de fato amplamente arbitrária, porque os momentos didáticos são, em primeiro lugar, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica (CHEVALLARD, 1999, p. 21, tradução nossa).

Descreveremos a organização didática dos professores pesquisados identificando em sua organização didática os seis momentos de estudo. O primeiro momento é definido como o momento do primeiro encontro com a organização matemática que está em jogo; o segundo momento diz respeito à exploração de um determinado tipo de tarefas e da elaboração de uma determinada técnica relativa a esse tipo de tarefas; o terceiro momento trata do estudo da constituição do entorno tecnológico-teórico relativo aos outros momentos. Neste trajeto, este terceiro momento diz respeito à primeira etapa do estudo, juntamente com os outros dois (primeiro e segundo) momentos do bloco do saber-fazer (CHEVALLARD, 1999).

O quarto momento corresponde ao trabalho da técnica e equivale ao momento no qual colocamos em prova a técnica usada, observando o bloco do saber. O quinto momento é o da institucionalização e tem o propósito de determinar a organização matemática construída. O sexto momento, por sua vez, corresponde ao da validação e está diretamente ligado ao momento da institucionalização; ele tem ainda o papel de verificação do aprendizado e de discussão sobre a organização matemática proposta (CHEVALLARD, 1999).

Desta forma, a TAD permitiu o desenvolvimento da engenharia didática de formação na formulação do nosso problema didático sobre um modelo epistemológico, quando buscamos apresentar a relação das praxeologias dos professores com os momentos didáticos. Essa discussão ocorrerá nos tópicos a seguir, onde anunciamos esta engenharia.

4.5 A engenharia didática de formação

Para a construção do modelo epistemológico didático de referência (MDR), utilizamos uma trajetória metodológica através de uma engenharia didática de formação (EDF). Esta escolha se deu em virtude do estudo ser realizado com professores e, para tanto, a EDF formada compõe os pressupostos da engenharia

didática clássica (ARTIGUE, 1988) pelos objetivos da engenharia de formação (BAILLEUL, 2015).

Neste aspecto, apresentamos aqui um estudo de formação continuada com três professores, desenvolvida por meio dos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática Clássica. A engenharia didática como metodologia de pesquisa, é “classificada primeiramente como um esquema experimental que funciona como base para as realizações didáticas em sala de aula, ou seja, como a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino” (ARTIGUE, 1988, p. 3).

Partimos desta engenharia didática para uma engenharia didática de formação que definimos aqui como a metodologia da engenharia didática formulada em prol da formação continuada (BAILLEUL, 2015).

Para sermos mais precisos, tratamos de uma microengenharia²⁴ de formação, por intermédio da qual conduzimos os momentos de estudos realizados com os professores norteados pelas etapas da engenharia didática.

Artigue (1988) argumenta que, para procedermos por meio de uma engenharia didática, é necessário realizar quatro etapas, descritas como: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), as análises prévias descrevem:

A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar as seguintes vertentes: • epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; • do ensino usual e seus efeitos; • das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; • das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; • a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; • o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

A fase da análise *a priori* consiste em preparar o esquema experimental, ou a sequência didática, através do qual será realizada a experimentação. Nesta fase, levantamos as prováveis considerações a respeito do que pode ocorrer, controlando possíveis desvios.

²⁴ Microengenharia é um nível da engenharia didática que permite dar conta dos fenômenos existentes em sala de aula.

A fase da experimentação, é o momento de se colocar em prática o dispositivo didático planejado. A fase de análise *a posteriori* seria a etapa em que recolhemos as informações e verificamos, em confrontação, o que presumimos nas análises *a priori*.

4.6 Percurso da Investigação

Neste tópico, relatamos e analisamos como ocorreu a EDF realizada com três professores que ensinam probabilidade em suas turmas de terceiro ano do nível médio no Instituto Federal da Bahia, *campus* Salvador.

A EDF empreendida por nós se deu ao longo dos meses de julho a setembro de 2017, e foi embasada a partir de seis momentos de encontros formativos que constituíram discussões acerca da criação do modelo didático pretendido. A princípio, esses encontros de discussão seriam com os três professores juntos, mas, devido à diversidade da carga horária dos docentes, somente os últimos encontros ocorreram com a presença de todos no mesmo horário.

Adotamos uma postura ética em relação aos professores, já que esclarecemos todas as etapas da pesquisa mediante termo de consentimento dos educadores; além disso, buscamos resguardar sua identidade, a fim de evitar qualquer tipo de prejuízo ou eventual constrangimento.

O quadro abaixo apresenta a estrutura dos encontros realizados:

Quadro 05 – Encontros da engenharia didática de formação.

1º encontro	Entrevista, exposição de questões sobre a razão de ser, apresentação da pesquisa.
2º encontro	Apresentação das interpretações da Teoria da Probabilidade.
3º encontro	Apresentação de elementos da TAD e da engenharia didática.
4º encontro	Trabalho com artigos que justificam a importância do trabalho com a aleatoriedade.
5º encontro	Construção da sequência didática Análise e planejamento
6º encontro	Construção da sequência didática Validação.

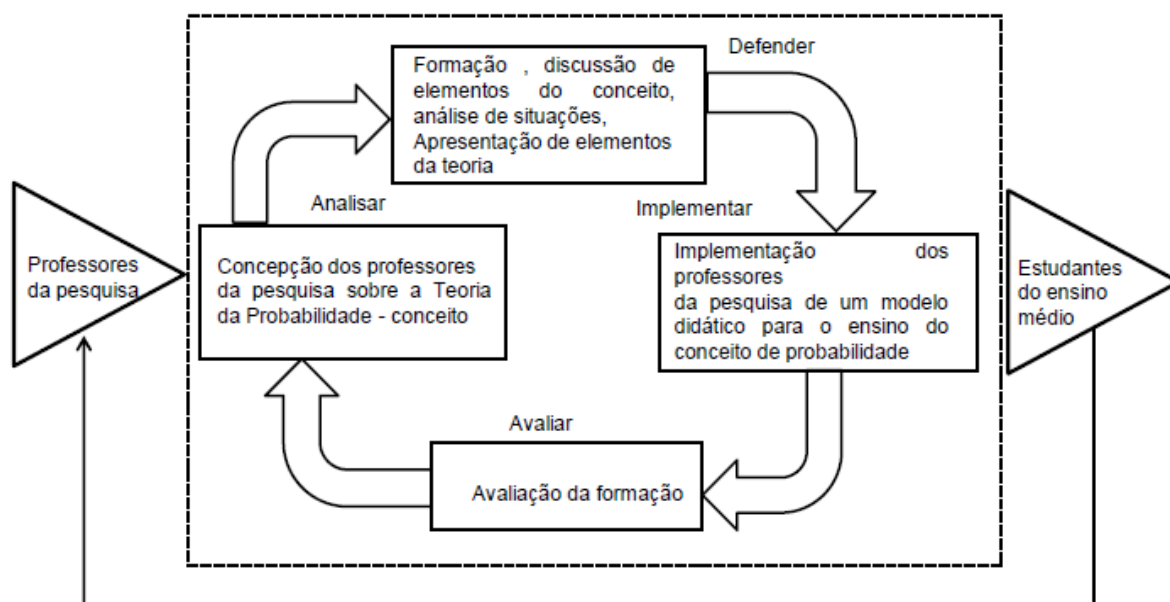
Fonte: a autora (2018).

Realizamos os encontros logo após os três professores participantes terem ensinado o conteúdo de Probabilidade, e de posse da análise dos protocolos de

suas aulas, observamos lacunas que corroboram com o problema didático levantado por nós nesta pesquisa.

Em nossa descrição da construção do MDR, abordamos as etapas da engenharia de formação de acordo com a figura abaixo. Nesta figura são relacionados os objetivos propostos por nós conforme as etapas descritas por Bailleul (2015): analisar, defender, implementar e avaliar.

Figura 09 – Desenho da engenharia de formação.



Fonte: a autora (2018).

Seguindo o que sugere a engenharia didática a partir destes momentos, descreveremos cada etapa da engenharia clássica associada aos objetivos da engenharia de formação, a fim de apresentarmos, ao final, uma proposta de modelo epistemológico didático de referência que permita aos professores que ensinam Probabilidade a integração das interpretações clássica e frequentista em suas propostas de aula.

4.7 Análises Preliminares sobre a engenharia de formação

Apresentaremos neste item, parte das análises preliminares relevantes à apreciação da engenharia de formação – uma análise mais completa pode ser

verificada ao longo de todo o trabalho de Almeida (2017). A partir da Teoria da Probabilidade (na apresentação do seu conceito) até a Formação dos professores, explanamos tópicos relevantes sobre três importantes dimensões (ARTIGUE, 1996): análise epistemológica, análise didática e análise cognitiva.

Vale salientar, que nossa hipótese é de que a proposta de um modelo epistemológico didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade integrando as interpretações clássica e frequentista no nível médio, criado por e para professores, permite um melhor ensino deste componente curricular.

Neste pensamento, em relação à análise epistemológica, elaboramos um arcabouço que mostra o desenvolvimento histórico da teoria da Probabilidade, de forma a revelar sua razão de ser (ALMEIDA e FARIAS, 2017). Verificamos que ao longo dos séculos, a forte presença do determinismo matemático nas questões que envolviam situações de aleatoriedade, marcando o domínio do cálculo da Probabilidade, está situada pela interpretação clássica.

Sobre a análise didática, constatamos características dos professores em relação ao ensino de Probabilidade. No caso dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015, nenhum apresenta uma sequência didática que permita a demonstração das demais interpretações da Probabilidade. Reforçamos que esta é uma restrição ao ensino do seu conceito.

Além disso, verificamos que, apesar dos documentos oficiais primarem por um ensino de probabilidade desde os anos iniciais (BRASIL, 1997), não temos notícias do ensino deste saber nem mesmo nos anos finais do ensino fundamental, sendo normalmente apresentado apenas no nível médio.

Identificamos nos trabalhos de Coutinho (1994; 2001), Silva (2002), Abe (2013) e Luz (2015), condições apresentadas em suas sequências de ensino de probabilidade que possibilitam ao aluno experimentar calcular a probabilidade de forma teórica (pela interpretação clássica) ou de maneira experimental (pela interpretação frequencial).

Já em relação à análise cognitiva, averiguamos como era desenvolvido o ensino de probabilidade, no caso: “quais tipos de tarefas são destinados a serem abordados? Como os professores definem seus planos de aula?”. Aqui, nos apoiamos na TAD no intuito de apreciar as condições e restrições que mantêm um saber vivo em determinada instituição. Faremos uso desta teoria na análise da organização praxeológica do professor.

Para apreciação da praxeologia do professor, procedemos com a gravação das duas aulas iniciais de cada um dos educadores participantes (observação naturalista²⁵), nas quais cada um dos docentes apresentou o conceito de Probabilidade em suas respectivas turmas. Esta observação se deu no Instituto Federal da Bahia (IFBA) *campus* Salvador, com três professores partícipes da pesquisa, os quais nos referiremos aqui como Carlos, Maria e Ana²⁶.

Analisamos a prática docente através desta observação naturalista sem revelar, inicialmente, o propósito da observação e sem realizar qualquer intervenção. Nossa finalidade consistiu em verificar de que maneira os professores desta instituição conceituavam o saber Probabilidade. De antemão, acreditávamos que os professores não exploravam o ensino deste objeto, apresentando aos alunos uma única interpretação (clássica), ocasionando, desta forma, a ausência do desenvolvimento e exploração do caráter aleatório da Probabilidade, limitando-a a espaços amostrais equiprováveis.

Em entrevista realizada com os professores, nos foi relatado que, para o ensino deste conteúdo, utilizava-se o livro didático escolhido pela escola e um material criado por eles, uma apostila que contém exercícios a serem resolvidos pelos alunos em sala de aula. Um deles, o professor Carlos (pseudônimo), possui a formação de doutorado em Estatística e tem mais de trinta anos de experiência com turmas do nível médio. A segunda professora, Maria, tem mestrado em educação matemática e mais de cinco anos de experiência com turmas do ensino médio. E a terceira professora, Ana, é docente substituta, possui mestrado em matemática e não tem experiência com nível médio. Os professores, apesar de terem suas particularidades, seguem fielmente a apostila produzida por eles, a fim de que possam discutir seus planejamentos de forma unificada.

Procuraremos, através de recortes de trechos da transcrição da aula de cada um desses docentes, observar suas organizações didáticas apontando uma associação com os momentos de estudo (CHEVALLARD, 1999). No trecho citado abaixo da transcrição, destacamos o início da aula e a apresentação do assunto a ser discutido:

²⁵ Chamamos de Observação Naturalista no sentido posto por Comitti (2014).

²⁶ A fim de preservar a identidade dos professores da pesquisa, estes nomes são pseudônimos.

Prof. Carlos - ... hoje a gente vai começar a estudar é ... A Teoria das probabilidades... escreverei como noções de probabilidade... pro... ba... bi... li... da... des, vamos lá!... Então, vamos lá... antes de começar a falar sobre isso, probabilidade né, vocês já devem ter ouvido falar, por aí a probabilidade definida como chance de ocorrer alguma coisa...a ideia é essa, qual a chance de você ganhar na loteria, qual a chance de chover amanhã, né, qual a probabilidade, a chance a favor de alguém ou alguma coisa e qual é o papel nosso... a gente vai tratar isso de uma forma matemática. Tratar com números, então vamos começar a falar de algumas coisinhas aqui...

Profa. Maria - [...] Da matemática que estuda justamente o quê? As chances de algo acontecer. Quando é... Alguém joga um jogo, tipo, na mega-sena a Mega-Sena, quando a gente joga, ela tem uma probabilidade de... Já pensou em ganhar né? Na mega-sena? Claro que a gente sabe que há uma probabilidade muito pequena de um, ganharem, tanto que, na maioria das vezes sempre vai acumulando, acumulando, acumulando e ninguém ganha. Isso porque a gente já viu em combinatórias o quê? As possibilidades que tem são muito grandes, então a probabilidade de uma certa forma, como as possibilidades são grandes então a probabilidade acaba sendo um pouco menor.

Profa. Ana - Existem tipos de experimentos que a gente não tem como prever que vai acontecer, certo? Esse tipo de experimento é o que a gente chama de experimento aleatório, certo? Quando a gente não tem condições de prever o que vai acontecer, certo? Agora existem dados, por exemplo, que são viciados. Existem moedas que são viciadas. Apostadores, certo? Que manipulam, que colocam um ímã dentro do dado pra ele cair sempre, por exemplo, com a face 6 voltada para cima, certo? Esse seria um dado viciado. A gente não está trabalhando com esse tipo de dado, certo? Dados honestos, moedas, porque a gente chama de dados honestos, certo? Então a gente não tem como prever que vai acontecer e a probabilidade, ela tem a função de estudar esse tipo de experimento. Para isso surgiu a teoria da probabilidade, certo? ...Dentro das apostas, dos jogos de azar... Nesse tipo de jogo, de roletas, de cartas, você calcular a probabilidade de uma determinada carta sair, certo? Ele percebeu: "Não, eu tenho como saber que, por exemplo, se fulano jogou um rei de paus, considerando as cartas que estão na mesa e as que estão na minha mão, eu tenho como saber qual é a probabilidade de, né, que existem cartas que vão ter uma probabilidade mais alta, de acordo com o jogo que já está acontecendo.", certo? ...Não dependia só da sorte, certo? E sim de uma teoria que precisava ser formalizada para tratar de tudo isso, certo? E o primeiro conceito que a gente precisa estudar [...] E essa teoria, hoje em dia, depois que ela foi formalizada, certo?...

Observamos que os professores se utilizam de exemplos diversos para iniciar o tema da aula em questão: Teoria da Probabilidade. Falam de apostas, jogo de dados; e todos eles abordam exemplos em suas falas para explicar o que é chance. Perguntamos, em entrevista realizada posteriormente com cada um deles: "para

você, o que é chance?”. E obtivemos como respostas: “são as possibilidades”, e ainda, “chance é a Probabilidade que calculamos algo”. Verificamos que os professores Carlos e Maria associam o conceito de Probabilidade primeiramente ao conceito de chance. O professor Carlos alega: “qual é o papel nosso... a gente vai tratar isso de uma forma matemática”, o que demonstra a presença forte do determinismo matemático deste professor. Já para a professora Maria, a chance é evidenciada como possibilidade associada a cálculos de análise combinatória, assunto anteriormente apresentado por eles. A professora Ana, por sua vez, inicia a exposição falando sobre experimento aleatório e dá exemplos do dado e das cartas, afirmando que os cálculos destes itens podiam ser previstos. Consideramos que o significado de experimento aleatório ficou dissolvido na fala de Ana.

Para nós, a apresentação com exemplos de jogos de loteria se faz coerente com o que é defendido pelo PCNEM, isto é, que os alunos precisam compreender que a Probabilidade está associada a fenômenos cotidianos (BRASIL, 2000). Pelo olhar da TAD, buscamos averiguar na aula o momento do primeiro encontro, no qual os professores explanam o modelo da tarefa pertencente ao estudo do conceito de Probabilidade; os docentes, para apresentarem o conceito, fundamentalmente definem outras noções importantes que integram sua sequência didática para o ensino de Probabilidade, a saber: experimento aleatório, espaço amostral e evento, para, depois, definirem Probabilidade.

A fim de conceituarem o que seria um experimento aleatório e o espaço amostral, os professores usam exemplos citados no começo da aula: apostas, dados, baralho etc. Além disso, podemos observar que a abordagem a partir do experimento aleatório não é “natural”,

Prof. Carlos - O experimento aleatório é o que é qualquer experimento que, repetido várias vezes sobre condições idênticas, apresenta resultados diferentes... Repetindo o experimento que repetido sobre condições idênticas que traga resultados diferentes. Por exemplo, um experimento aleatório: jogar uma moeda pra cima, jogar uma moeda pra cima né, você não pode prever qual o resultado vai dar, vai dar cara ou coroa?... sobre condições idênticas, vou jogar pra cima, virar a moeda, depois jogar a moeda de outro jeito apresenta um resultado diferente... jogar um dado pra cima e observar a face superior... isso é um experimento aleatório... chamamos de espaço amostral de um experimento aleatório ...atenção para esta palavra: o conjunto de todas as possibilidades todos os resultados possíveis! Certo? Vou botar assim... De todos os resultados possíveis, todos os resultados possíveis...

Profa. Maria - deixa eu falar para vocês o que é espaço amostral. Se bem que já tem até aqui né? Bom, espaço amostral vai ser o que? O conjunto de todas as possibilidades que temos. O espaço amostral vai ser o conjunto de todas as possibilidades de algo ocorrer, certo? Bom, olha só. Ele, aí no... na apostila, tem alguns exemplos aí e a gente vai falar sobre eles.

Profa. Ana - E aí, a primeira coisa que a gente precisa estudar, pra entender a probabilidade é o que significa espaço amostral. Alguém já ouviu falar sobre isso? Não? O que é o espaço amostral? O espaço amostral vai ser o conjunto de tudo que pode acontecer num certo experimento aleatório. Então, por exemplo, quando eu lanço um dado. O que é que pode sair nesse dado? Quais são as possibilidades que eu tenho quando eu lanço um dado?

A primeira tarefa descrita pelos professores, fundamentada no livro e na apostila, é a seguinte: “baseado no lançamento de um dado, a) defina o espaço amostral, b) o número de elementos do espaço amostral, c) evento 1: ocorrência de um número maior ou igual a um e d) o número de elementos do evento 1”. Podemos reconhecer aqui o primeiro momento, no qual o professor inicia o processo de exposição dos tipos de tarefas realizadas pelos docentes; este momento será descrito em outros episódios da aula, quando, por exemplo, o professor utiliza-se do tipo de tarefa proposto para definir o conceito usado.

Os professores conceituam probabilidade segundo o livro didático empregado, em espaços amostrais equiprováveis:

Sendo U um espaço amostral equiprovável, isto é, com elementos que têm a mesma chance de ocorrer, e E um evento, com $E \subset U$, a probabilidade de ocorrer E é dada pela razão entre o número de casos favoráveis (que nos interessam) e o número total de casos possíveis. Matematicamente, é a razão entre o número de elementos de E e o número de elementos de U . Simbolicamente, escrevemos:

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(U)} \text{ (IEZZI et al, 2013, p. 20).}$$

Neste sentido, todos os tipos de tarefas apresentados pelos professores sobre a atividade “Calcular a Probabilidade”, serão descritos pela razão acima mencionada. Desta forma, chamamos a atenção para a incompletude da apresentação do conceito de Probabilidade, que partirá de tipos de tarefas relacionadas a espaços amostrais equiprováveis, não permitindo que a finalidade proposta pelo PCNEM, a saber, a de “Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados

para medidas, determinação de amostras e cálculo de Probabilidades” seja efetivada (BRASIL, 2000, p. 95).

O ensino destes componentes didáticos poderia ser realizado por meio de problemas investigativos, ou até mesmo por uso de uma sequência didática na qual, primeiramente, o estudante buscaria reconhecer os eventos da natureza probabilística classificando-os em determinísticos ou não determinísticos.

É possível verificar em nossa análise que há uma exploração por parte dos professores, por meio da forma como apresentam suas técnicas, de um esquema de memorização de acordo com o tipo de tarefa apresentado. Ilustramos abaixo este aspecto sobre os episódios aludidos:

Profa. Maria: Qualquer subconjunto do espaço amostral. Então, por exemplo, no experimento anterior... Tudo isso tá na apostila, viu, gente? Considere a ocorrência de um número par como sendo o evento A, tá? Então, quem é o conjunto ocorrência de um número par? 2, 4 e 6, certo?

Profa. Maria: Por exemplo, no baralho, que evento a gente poderia definir? Quem seria o espaço amostral de um baralho? Quando considerando o experimento: retirar uma carta do baralho? Certo? Qual é o espaço amostral? Ou seja, o que estou procurando?

Profa. Maria: Há? Duas em 6? De ocorrência de número par num lançamento de um dado?

E: 3 e 6.

Profa. Ana: Nesse caso mesmo, vamos, do lançamento de dados, certo? Bom, eu tenho um lançamento de dados e a gente já sabe que tem 6 possibilidades, né? A gente tem essas 6 possibilidades. Se o meu evento fosse, hã... cair a face.

Profa. Ana: Bom, vamos supor que o meu evento fosse esse, da ocorrência do número inscrito nas faces que sejam maiores que zeros e menores que sete. Seria o que?

E: todas as faces?

Profa. Ana: Todas as possibilidades que temos, né? Ou seja, o número do espaço amostral todo. Podia ser a face 1, face 2, face 3, face 4, face 5, até 6. Então nesse caso, a gente teria um evento certo.

Os professores vão expondo suas técnicas à medida que apresentam as definições da teoria da Probabilidade. Não identificamos o uso da técnica sobre o Diagrama de Venn nem da árvore de possibilidades, que poderiam ilustrar o espaço amostral solicitado e ainda permitir ao aluno responder a atividade com mais segurança e maiores opções de resolução.

Profa. Maria: Tem alguns casos da probabilidade que a gente talvez dá um pouquinho mais de trabalho porque a gente tem que saber o, a parte difícil, vamos dizer assim, é encontrar o que? O meu espaço amostral, mas basicamente é isso aí que a gente tem. Bom, aí olha só, tem um exemplo aí que diz: Um dado perfeito é lançado, ou seja, esse dado não é viciado, tá? Tem as mesmas chances de cair qualquer uma das 6 faces. Qual é a probabilidade que um número obtido seja múltiplo de 3, certo? Ele já dá aí, na verdade, pronto né? Bom, então meu conjunto do espaço amostral vai ser as faces de 1 até 6. Bom, se é múltiplo de 3? Então só pode ser 6 e 3. Então esse seria os meus elementos do evento, tá? Bom, a gente sabe que o número do meu espaço amostral é 6 e o número de elementos do meu evento é 2.

Profa. Maria: Bom, então usando isso aqui, a probabilidade desse evento seria 2 sobre 6, ou seja, dentre as 6 possibilidades totais que eu tenho, eu tenho duas chances de sair múltiplos de 3, certo?

Profa. Ana: Então o que eu tô observando é o que o número, o que eu quero, o que eu desejo, é que o número seja par, certo? Aí a gente chama esse desejo de casos favoráveis, certo? Eu tô observando, eu quero que saia um número par. Então quantos casos são favoráveis ao que eu tô observando? 1, 2, 3, né? O 2, o 4 e o 6. Então você tem 3 casos favoráveis entre quantos casos possíveis? 6, certo? Simplificando, a gente vai ter 1 sobre 2, certo? Ou zero cinco ou 50%, certo? Ok? Vamos fazer uns exercícios?

Apesar de concordarmos com a intenção dos professores em valorizar o aprendizado da Probabilidade pela determinação do espaço amostral, verificamos que alguns problemas trabalhados poderiam ser apresentados de maneira a deixar os alunos pensarem em aprimorar a técnica ou criar novas técnicas.

Profa. Maria: 2 dados não viciados são lançados. Por que eles são não viciados?

E: Porque ele tem a mesma chance de cair todos os números.

Profa. Maria: Isso. Então todos os elementos têm a mesma chance de acontecer. A mesma probabilidade de ocorrer, não é isso? Então ele vai lançar 2 dados simultaneamente e quer saber a probabilidade de que a soma dos resultados desse lançamento seja um número maior do que 6. É fácil? Eu quero perguntar uma coisa primeiro, tá? Quando você lança 2 dados, eu quero saber quantos elementos tem no espaço amostral no lançamento de 2 dados.

E: 21.

Profa. Maria: 21? 24?

E: 12.

Profa. Maria: Olha, vou jogar dois dados ao mesmo tempo. Eu quero saber tudo que pode acontecer, não é isso? Meu espaço amostral quem é? Tudo que pode acontecer. Se eu for lançar. Quem acha que é 12 levanta a mão.

E: (alguns levantam a mão).

Podemos observar, pelo trecho transcrito, o trabalho sobre a técnica de levantar o espaço amostral; alguns alunos apresentam dificuldades em descobrir qual é o espaço amostral no lançamento de dois dados, o que para nós ilustra bem o terceiro momento de estudo, pois os estudantes estão testando a técnica sobre o método estabelecido pelo professor. Daí, observamos a necessidade de aprimorar a técnica e, neste sentido, repensar a metodologia aplicada pelo professor de associar a resolução dos problemas de Probabilidade à definição colocada.

A partir dos três momentos de estudo levantados, podemos observar que o professor tem o papel de protagonista na aula, já que pouco se percebe a intervenção do aluno. Pelos trechos expostos, podemos perceber que os estudantes são condicionados a responder o que os professores apresentam de forma explícita. Neste aspecto, não podemos inferir que a técnica de exposição e resolução do conteúdo permite uma aprendizagem significativa por parte do aluno.

Nas aulas observadas, os estudantes fizeram uso apenas das apostilas. Não verificamos a utilização do livro didático em sala de aula, o que deve implicar a cristalização de praxeologias. O conteúdo foi trabalhado somente por meio de um número limitado de tipos de tarefas.

Outro trecho da aula dos professores pesquisados que merece destaque, é quanto à definição de Probabilidade apresentada pelo espaço amostral equiprovável:

Profa. Maria - ...a probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Bom, um espaço amostral equiprovável vai ser o que? O espaço em que os elementos têm a mesma chance de ocorrer, ou seja, vamos supor que a gente tem um lançamento de um dado só que ele não seja viciado. Sabem o que é um dado viciado, né? Dado viciado é aquele que você morre de jogar e sempre cai no mesmo número, certo? Então se ele não for um dado viciado, certo? Então a gente vai ter o que? A ocorrência das faces vai ser um evento equiprovável, ou seja, tem a mesma chance de cair a face 1, a face 2, a face 3 e por aí vai, certo? A roleta também, só que a roleta normalmente nos cassinos é viciada, nunca tem a mesma chance, todos os números, cair não têm a mesma chance, tá? Mas quando isso ocorre, a gente chama de espaço amostral equiprovável.

Neste contexto, o cálculo de Probabilidades se restringe a espaços amostrais equiprováveis, sem apresentação de uma justificativa. Outro ponto que consideramos pertinente comentar, refere-se ao fato de associar o que não é

equiprovável aos exemplos de dado e roletas “viciadas”. Para nós, falta relacionar algumas suposições a respeito do experimento aleatório:

- a) Há um número *finito* (digamos n) de eventos elementares (casos possíveis). A união de todos os eventos elementares é o espaço amostral Ω .
- b) Os eventos elementares são igualmente prováveis.
- c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde $m \leq n$ (MORGADO, 1991, p. 64).

Vê-se, através do fragmento acima, uma justificativa para a escolha desta apresentação e para a utilização desta interpretação. A não exposição destas hipóteses, para nós, acarreta um falso entendimento da definição de probabilidade por parte do estudante, que a concebe para todo e qualquer evento.

Partindo destas análises, podemos constatar que o ensino de probabilidade, atualmente, vem sendo apresentado aos alunos prioritariamente por uma interpretação: a clássica. Os professores não discutem situações que envolvam experimentações ou espaços amostrais não determinísticos, o que para nós representa uma lacuna na aprendizagem dos discentes.

4.8 Comparativo das análises *a priori* e *a posteriori*

Embasados nas entrevistas realizadas com os participantes da investigação, esperávamos que os mesmos introduzissem na construção de suas sequências didáticas algumas atividades que permitissem aos estudantes o desenvolvimento de elementos fortes da interpretação frequentista, visto que, em termos teóricos, estes se constituíram como principal objeto, por serem mais suscetíveis à modelação na questão da aleatoriedade.

Além disso, pela observação das aulas, almejávamos alguns esclarecimentos, como no momento da introdução dos conceitos de espaço amostral e do próprio conceito de Probabilidade, bem como dos termos determinístico, aleatório e equiprovável. Verificamos nos estudos de Ribeiro (2012) dificuldades apresentadas em relação ao entendimento destes conceitos iniciais.

No planejamento de nossa EDF sobre os momentos de estudo com os professores, buscamos explicar um quadro comparativo do que havíamos

planejado *a priori* e do que foi realizado, levantando as condições e restrições que possibilitam o envolvimento e construção do modelo didático pretendido.

Além disso, nos reunimos com cada um dos professores de modo a apresentar e esclarecer os objetivos da nossa proposta de formação.

Partimos da hipótese de que os professores não abordavam em suas aulas uma discussão sobre a aleatoriedade através da apresentação das demais interpretações da Probabilidade.

Para verificar a hipótese citada, realizamos uma observação naturalista das aulas dos professores envolvidos, assistindo às aulas sem realizar qualquer tipo de intervenção sobre a prática ou organização matemática; fizemos somente o registro do áudio das aulas (com o professor e os estudantes presentes).

Quadro 06 – Análise do 1º encontro.

Análise <i>a priori</i> – 1º encontro	Análise <i>a posteriori</i>
Nos propomos a assistir a aula dos professores sem realizar qualquer tipo de intervenção. Partimos da hipótese de que eles não apresentam diferenças entre os conceitos de espaço amostral, experimento aleatório, acaso, chance, frequência relativa. Buscávamos responder o seguinte: “como os professores conceituam probabilidade?”. Esperamos que os educadores apresentem os conceitos associados a exemplos do cotidiano.	Podemos confirmar que os professores falam muito rapidamente sobre os conceitos em pauta. Os professores apresentam os conceitos com exemplos do cotidiano. Os docentes priorizam os tipos de tarefas sobre cálculo do espaço amostral.
Apresentamos nossa proposta de intervenção na construção de um modelo didático. Almejamos a participação de todos, reforçando o sentido do pedido de apoio e colaboração.	Os professores, no início, ficaram preocupados se haveria muito trabalho e também sobre a relevância do tema da pesquisa. Somente três dos cinco professores aceitaram o convite.
Foram aplicadas as questões subsequentes no intuito de entender a razão de ser da probabilidade: “qual a relevância de ensinar probabilidade?; você observa que há dificuldades na aprendizagem do conceito de probabilidade?; se há, qual? Sugestões...”. Esperamos que os professores revelem o	Os professores afirmaram que é importante que os alunos aprendam a calcular probabilidades. Eles atribuem os erros a dificuldades em resolver problemas de análise combinatória, e apresentam a Probabilidade como ferramenta de apoio à resolução de questões de

entendimento sobre a importância do ensino do conceito de Probabilidade por meio de mais de uma interpretação, e sobre o fato de os alunos não conseguirem desenvolver o pensamento probabilístico devido à limitação da abordagem docente.	contagem.
---	-----------

Fonte: A autora (2018).

Primeiro, buscamos compreender como os professores concebem o ensino do conceito de Probabilidade, perguntando a eles como haviam planejado suas aulas; como eles separavam os conteúdos; o que eles achavam mais importante no aprendizado dos alunos; e se existiam dificuldades na aprendizagem do conceito. E, ainda, por que eles achavam isso e se haviam soluções.

Foi unânime a resposta dos três professores em relação ao aprendizado em Probabilidade. Todos responderam que não aprenderam o conteúdo de Probabilidade no nível médio e que se lembram de terem visto na universidade na disciplina Estatística, mas mais voltado à resolução de problemas de Estatística. Os professores relataram que aprenderam com sua prática, estudando pelo livro e resolvendo questões.

Essa resposta não foi uma surpresa para nós, que verificamos no estudo de Lopes (2008) que os professores licenciados não recebem qualquer formação para ensinar os conteúdos de estatística e probabilidade. Nesse segmento, já esperávamos uma resposta negativa quanto ao aprendizado aludido.

No que se refere à segunda questão, sobre o porquê de não abordarem a Probabilidade por outras vias, ouvimos do professor Carlos que “nos limitamos o ensino de probabilidade a espaços amostrais equiprováveis, pois não se trata de um curso de Probabilidade, só damos noções”; a professora Maria respondeu que “Probabilidade para ser resolvida com análise combinatória, os problemas de Probabilidade são resolvidos assim”; a terceira professora, Ana, respondeu que “não havia o porquê de aprofundar o ensino de Probabilidade pois as questões do ENEM que tinham Probabilidade eram sobre espaços amostrais equiprováveis”.

Neste sentido, pensamos em trabalhar problemas que abordassem a Probabilidade de forma não convencional, ou seja, que permitissem ao professor entender a importância de apresentar ao aluno o conceito de Probabilidade de

maneira mais ampla, e que levassem o docente a refletir o modo como ensinaria aos alunos situações de cálculo de Probabilidade sobre a aleatoriedade.

Apresentamos, nestes termos, a seguinte questão, adaptada de Silva (2002):

Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 4 bolas azuis e 2 bolas brancas, todas indistinguíveis pelo tato. Considere o experimento aleatório: retirada de uma bola da urna e observação da sua cor. Apresente o espaço amostral do experimento e em seguida classifique-o em equiprovável e não equiprovável.

Procuramos instigar nos professores a necessidade de os alunos entenderem bem a diferença entre o espaço amostral equiprovável, espaço amostral não equiprovável e experimento aleatório – definições fundamentais para a compreensão do conceito de probabilidade.

Indagamos aos professores como poderíamos apresentar questões relacionadas ao problema acima; os mesmos informaram que associam ao cálculo sobre a união e intersecção de eventos. São questões do tipo: *qual a probabilidade de retirarmos uma bola azul e uma bola vermelha? Ou qual a probabilidade de retirarmos uma bola azul ou uma bola vermelha?*

Constatamos que os professores abordam as propriedades da teoria da Probabilidade definidas na axiomatização apresentada por Andrei Kolmogorov, ligada ao conceito de Probabilidade pela interpretação clássica. Em seu material didático trabalhado, há uma sequência de questões que objetivam conduzir aos estudantes a uma padronização no raciocínio probabilístico. Como um artifício para seu aprendizado.

Quadro 07 – Análise do 2º encontro.

Análise <i>a priori</i> – 2º encontro	Análise <i>a posteriori</i>
Buscamos neste momento apresentar um pouco da Teoria da Probabilidade – caráter multifacetado do seu conceito. Acreditamos que muitas das interpretações, tais como a frequencial, geométrica, subjetiva, lógica etc., são desconhecidas pelos professores.	Confirmamos que os docentes desconheciam ou não utilizavam as demais interpretações da probabilidade.

Fonte: a Autora (2018).

Observamos, por intermédio das indagações dos professores, confusões em relação a alguns conceitos, a exemplo da diferença existente entre determinístico x equiprovável, aleatório, não equiprovável etc. Ponderamos que estas dificuldades têm origem epistemológica, já que os conceitos probabilísticos surgiram de diferentes concepções filosóficas, conforme abordado no artigo 1.

Os professores puderam reconhecer que vivenciam interpretações da probabilidade além da clássica, mas não as exploram. Podemos inferir que este fato se dá devido à ausência de opção nos livros didáticos e à falta de hábito dos professores quanto ao acesso de trabalhos científicos.

A oportuna exposição das variadas interpretações probabilísticas, fez com que houvesse uma discussão por parte dos professores quanto à descrição do modo como aprenderam probabilidade e suas concepções. Pudemos constatar, que o livro didático exerce forte influência no planejamento do professor.

Quadro 08 – Análise do 3º encontro.

Análise <i>a priori</i> – 3º encontro	Análise <i>a posteriori</i>
Apresentamos aos professores elementos da TAD: praxeologia – sistema didático-fenômeno didático. Objetivamos que os professores possam situar sua prática à praxeologia.	Os docentes reagiram bem à apresentação da teoria. Surgiram propostas sobre os conceitos apresentados.

Fonte: a Autora (2018).

A nossa proposição não consistiu em apresentar aos professores um curso de formação em TAD; mas demonstrar como a teoria justifica algumas ações por nós utilizadas e como responde algumas lacunas verificadas ao longo de uma trajetória escolar.

Quadro 09 – Análise do 4º encontro.

Análise <i>a priori</i> – 4º encontro	Análise <i>a posteriori</i>
Apresentamos seis trabalhos (artigos científicos) em que se desenvolveram trabalhos com o conceito de Probabilidade com a finalidade de mostrar que há maneiras de apresentar aos estudantes a Probabilidade	Os professores ficaram surpresos com a simplicidade das sequências explanadas e com a possibilidade de se realizar um trabalho mais amplo em relação ao conceito de Probabilidade.

em seu caráter aleatório. Esperamos que os professores assumam alguns dos tipos de tarefas evidenciadas nas sequências, de forma a contribuir para a criação do modelo.	
---	--

Fonte: a Autora (2018).

Os artigos apresentados foram extraídos dos **Anais** do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) ocorrido em São Paulo em julho de 2016. Os seis trabalhos classificados para a apresentação aos professores foram três relatos de experiência, duas comunicações científicas e o resultado escrito de um minicurso. A ideia de trabalhar com estes artigos pautou-se em mostrar que o problema didático voltado à discussão sobre a maneira como se ensina o conceito de Probabilidade, apesar de antigo, é contemporâneo e que existem propostas atuais para atacá-lo.

Os relatos de experiência apresentados dizem respeito ao “uso de materiais manipulativos: a oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística” (LIMA; BEZERRA; VALVERDE, 2016); “O bingo como recurso didático para o ensino de probabilidade: uma experiência no 9º ano do ensino fundamental” (RIBEIRO; PINHEIRO; DAMIN, 2016); e a “Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula” (PEREIRA et al, 2016). Estes relatos representam propostas de sequências didáticas que permitem o trabalho do conceito de probabilidade de forma experimental, aproximando a probabilidade teórica da probabilidade experimental sobre diferentes séries de ensino (fundamental e médio).

Nesse contexto, explanamos aos professores que, apesar do livro didático não apresentar técnicas para resolver as tarefas sobre o cálculo de probabilidade, há muito material desenvolvido por docentes disponível na internet.

A comunicação científica escolhida por nós, a saber: “Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade” (NOGUEIRA; FERREIRA, 2016), relata uma atividade desenvolvida com os conceitos básicos de probabilidade que permite que mostremos aos professores a importância de trabalharmos a técnica do diagrama de árvores, ferramenta considerada por nós importante para se trabalhar com os estudantes situações aleatórias.

E, por fim, o minicurso intitulado “Atividades para o ensino de probabilidade e estatística na educação básica”, de Magalhães (2016), foi escolhido com o intuito de apresentarmos de forma integrada situações de probabilidade e estatística no nível médio. Magalhães (2016) explora propostas e um ambiente de aprendizagem para trabalhar e aprofundar as questões.

Quadro 10 – Análise do 5º encontro.

Análise <i>a priori</i> – 5º encontro	Análise <i>a posteriori</i>
Discutidas as possibilidades, anunciamos aos professores a seguinte questão: “como poderíamos ensinar o conceito de probabilidade de forma a integrar as suas visões clássica e frequentista?”. Diante das discussões anteriores, o que esperamos é que, dentre as respostas dos professores, ocorra uma discussão sobre possíveis possibilidades de exploração de uma sequência de integração. Presumimos que os professores iniciem uma tempestade de ideias, questionando a mudança em suas praxeologias.	A solução proposta pelos docentes, foi a de alterar o plano de aula utilizado e inserir tarefas que permitam a abordagem e análise de situações que envolvem a aleatoriedade.
Propomos aos professores a construção de uma nova sequência didática para o ensino do conceito de Probabilidade. O que esperamos é que os professores busquem tipos de tarefas que permitam em suas técnicas ferramentas que possibilitem aos estudantes trabalhar com a Probabilidade <i>a posteriori</i> , através de uma situação de experimentação por meio de tecnologia.	Na nova sequência criada pelos professores, a solução disposta pelos mesmos foi iniciar a aula com um problema sobre o lançamento de uma moeda e de dados. Os docentes não procuraram recursos tecnológicos, pois, segundo os mesmos, a escola não dispõe de recursos para poder se trabalhar com a turma inteira.

Fonte: a Autora (2018).

Verificamos neste encontro uma dificuldade por parte dos educadores na escolha dos tipos de tarefas que permitiriam a inclusão das demais interpretações da Probabilidade em suas propostas. Os professores pensaram situações em que pudessem trabalhar experimentações de cálculo de Probabilidade antes de

apresentar as definições de espaço amostral, evento etc. Observamos a existência de conflitos referentes ao entendimento de aleatoriedade; por vezes, vimos manifestada a definição de aleatório, aos resultados obtidos pela repetição em iguais condições e o desejo de associar seu cálculo a uma explicação determinista. Estes preconceitos sobre o cálculo intuitivo limitam a exploração sobre o incerto, visto que fogem do controle sobre os resultados das atividades propostas. Orientamos aos professores que realizassem um plano rascunhado através do qual, no encontro subsequente, que seria com todos, pudéssemos pensar em melhorias para o novo formato introdutório do conceito de Probabilidade.

O sexto encontro reflete a sequência didática construída pelos professores. Neste sentido, o que fizemos foi acrescentar na reconstrução praxeológica dos docentes, tipos de tarefas e técnicas que permitissem incluir a interpretação frequentista em sua organização didática e assim propiciar um trabalho mais efetivo sobre a aleatoriedade.

Quadro 11 – Análise do 6º encontro.

Análise <i>a priori</i>	Análise <i>a posteriori</i>
<p>Aqui, objetivamos uma sequência didática que trabalhe o conceito de Probabilidade observando seu caráter aleatório.</p> <p>Acreditamos que os professores, com o aporte do livro didático e dos artigos estudados, integrarão nesta sequência escolhas de tipos de tarefas que permitam a abordagem da interpretação frequentista.</p>	<p>Apesar de algumas dificuldades na construção, os professores classificaram algumas questões e as incluíram em seus planos de aula.</p>

Fonte: a Autora (2018).

A sequência didática foi planejada para ser realizada em cem minutos. Foi escolhido pelos professores começar com o exemplo de um experimento de uma moeda. Abaixo, segue a atividade planejada.

Atividade 1: Lançar uma moeda 50 vezes e verificar qual face aparece voltada para cima contabilizando-se a quantidade de caras e coroas do experimento. De acordo com o experimento realizado, você poderia encontrar a frequência de sair cara? E coroa?

Ao proporem esta atividade, os professores pretendem fazer com que os alunos retomem conhecimentos anteriores, quando, por exemplo, experimentam calcular a frequência do acontecimento de determinada face da moeda repetida sobre as mesmas condições e com cada resultado fornecido independentemente do outro. Os professores depois perguntariam: qual a Probabilidade de sair cara?

Neste sentido, trabalha-se nos estudantes o processo de geração de resultados aleatórios e a sequência de resultados obtidos. Os professores almejam, com esta atividade, definir Probabilidade, falar da frequência relativa e delinear os termos experimento determinístico e experimento aleatório. Além disso, alegam que esta experimentação poderá ser retomada ao longo de toda a aula, servindo de ilustração na introdução para os demais conceitos.

Depois desta atividade, os professores destacam que seria o momento de definir espaço amostral, evento, Probabilidade e suas propriedades. Abaixo, consta a atividade referida.

Atividade 2: Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Determine os seguintes subconjuntos: a) conjunto dos números de 1 a 15, b) o conjunto dos números menores que 1, c) o conjunto dos números pares e d) o conjunto dos números ímpares.

Os professores descrevem que estas atividades seriam realizadas conjuntamente com os alunos no intuito de apresentar os conceitos descritos acima ao longo de sua resolução. Na caracterização destes conjuntos, seria definido o que é o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório e o evento como seu subconjunto. Verificamos que os professores realizaram essas escolhas baseados no livro didático, que propõe essa formatação priorizando o caráter determinista da matemática, com exemplos e escolhas sobre um ambiente fechado. Os docentes pesquisados aqui, priorizam definir primeiro o conceito que desejam e depois abordar exemplificações. Na concepção deles, desta forma os estudantes assimilam melhor as tarefas propostas, isto é, quando apresentadas após o conceito. Inferimos que esta escolha se dá devido à escola de formação dos professores pesquisados, que possui um caráter conteudista e tradicionalista e também por resistência a mudança em suas práticas.

Para nós, explanar primeiramente o que desejamos obter, não possibilita que os alunos explorem dificuldades e entendam de onde partiu a construção do

conhecimento, para, assim, proporcionar-se o desenvolvimento de novas abordagens.

Os professores definem Probabilidade como a razão entre o número de elementos do evento solicitado e o número de elementos do espaço amostral sobre espaços amostrais equiprováveis.

Empreendemos uma intervenção ao questionar aos professores sobre a *equiprobabilidade*, perguntando para eles: *o que seria um espaço amostral equiprovável?* Buscamos fazer com que os professores abordem um momento de exploração deste tópico na sequência elaborada por eles.

Verificamos este momento na aula do professor Carlos, que cita os exemplos da jaula dos animais. Neste trecho, argumenta o seguinte:

Professor Carlos: ...presta atenção você está num zoológico numa jaula quem tá na jaula do lado da jaula, presta atenção tem uma anta... zebra e uma onça pintada...você passa e recebe uma azunhada nas costas...zráss, aí você olha aí tá todo mundo assim (professor assobia olhando para cima)... aí você olha assim, quem terá sido, meu Deus, quem me azunhou...quem foi?... zebra dá unhada em alguém? Hipopótamo dá unhada em alguém? Então aquilo ali é um espaço amostral que não é equiprovável... entendeu? Tem um bicho ali que tem mais chance de ser o culpado e você pode ter certeza, vá encima dele, prenda e condena!

A preocupação em deixar claro aos estudantes o significado da palavra equiprovável é verificada neste exemplo. Os professores definem Probabilidade como a razão do número de elementos do evento sobre o número de elementos do espaço amostral (interpretação clássica). Apoiamos os docentes quanto a decisão à retomada da atividade 1, enfatizando aos estudantes a verificação da ausência de padrão na sequência de resultados obtidos por repetição do lançamento da moeda, mas que o aumento deste número de jogadas faz se aproximar, cada vez mais, da probabilidade clássica, conceituada pela interpretação frequentista.

Salientamos aos docentes a relevância de associarmos o cálculo de Probabilidades por meio da interpretação clássica e da interpretação frequentista, pois, nessa perspectiva, proporcionamos aos estudantes a confrontação do que é calculado teoricamente (interpretação clássica) com o cálculo através da experimentação (frequentista) – deixando explícito aos estudantes que a Probabilidade é uma teoria que tem sua formalização através dos seus axiomas, mas sua base é intuitiva, caracterizada pelo cálculo sobre a realização de

fenômenos aleatórios.

4.9 Algumas Considerações

Neste artigo, buscamos construir um modelo didático de referência para o ensino do conceito de Probabilidade partindo das concepções de três professores de uma escola pública federal de Salvador - BA. Para realizarmos essa construção, nos apoiamos teoricamente na TAD. A partir das organizações matemáticas dos professores, identificamos possíveis lacunas para intervenções sobre a nossa proposta de ensino do conceito de Probabilidade por meio de duas interpretações: clássica e frequentista.

Assim, empreendemos uma engenharia didática de formação que direcionou os seis encontros realizados com os professores. Os docentes se reuniram juntamente conosco e então discutimos a criação de um trabalho colaborativo, a fim de estabelecer uma melhoria do ensino deste saber em sala de aula.

Partimos de uma visão reducionista em algumas respostas dos professores, no sentido dado a importância do ensino do conceito de Probabilidade na apresentação de outras interpretações. Essa postura nos motivou a continuar com a proposta de formação, a fim de mudarmos este paradigma.

O que de fato almejávamos, era que o conceito de Probabilidade não só fosse lecionado através de exemplos baseados em cálculo combinatório, mas que os estudantes e os professores pudessem explorar o caráter aleatório proposto nas tarefas escolhidas por eles.

Acreditamos que neste sentido, a nossa proposta de engenharia didática contribui para a formação inicial e continuada de professores de matemática que ensinam Probabilidade, pois permite o desenvolvimento de praxeologias voltadas à inserção de outras interpretações do conceito de Probabilidade em suas organizações didáticas.

Podemos constatar, que é preciso capacitar os professores para ensinar Probabilidade com uma abordagem completa do caráter aleatório, possibilitando-se, assim, que se discutam diferentes significados da Probabilidade quando da apresentação dos seus conceitos. Muitos autores, como Batanero (2015), Rodrigues (2014) e Lopes (2008), dentre outros, compartilham desta preocupação, quando

realizam uma pesquisa sobre o ensino do conceito de Probabilidade, verificando o quanto se fazem necessárias novas sequências didáticas.

Neste aspecto, o presente trabalho é intitulado um modelo didático que contribui com a formação dos docentes que lecionam este saber.

Referências

- ABE, T. S.; BITTAR, M. Ensino de probabilidades: a articulação entre as visões clássica e frequentista. In: COUTINHO, Cleda de Queiroz e Silva (Org.). Ensino e aprendizagem da estocástica na escola básica. **Mercado das letras**, v. 1, p. 9-120, 2013.
- ALMEIDA, C. M. C.; FARIAS, L. M. S. Uma Análise do conceito de Probabilidade nos Livros didáticos do Ensino Médio à luz da Teoria Antropológica do Didático. In: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática – LADIMA, 2016, Bonito, Mato Grosso do Sul. **Anais...** Bonito, Mato Grosso do Sul, 2016.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: característica e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ ANPEd. **REVEMAT**, Santa Catarina, v. 6, p. 62-77, 2008.
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9., p. 281-308, 1988.
- _____. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.
- BAILLEUL, M. L'Ingénierie de la formation: l'exemple de la formation des tuteurs de stages en formation d'enseignants. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 137-161, 2015.
- BARBOSA; E.S.T.; LINS, A.F. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Anais do SIPEM**, 2016.
- BATANERO, C. Significados de La Probabilidad en La Educación Secundária. **Relime**, v. 08, n. 3, p. 247-263, 2005.
- _____. **Understanding randomness: challenges for research and teaching**. Plenary lecture. Ninth european congress of research in mathematics education. Prague, 2015. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/documentos/cerme-lecture.pdf>>. Acesso em: 15 de maio de 2017.
- BOSCH et al, Estudiar matemáticas el es labón perdido entre enseñanza y aprendizaje. 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Matemática. Brasília: SEF/MEC, 1997.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – Matemática. Brasília: MEC, 2000.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: MEC, 2014.

_____. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Lei 9394/96. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 03 abr. 2017.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD**, Ensino Médio. Brasília: MEC, 2015.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Marseille, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

COMITI, C. Recherche en Didactique et Formation des Enseignants. **Revista Perspectivas em Educação Matemática**, v. 7, p. 444-456, Mato Grosso do Sul, 2014.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista** – Estudo Epistemológico e Didático. 151 f. 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

_____. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le collège**: de la modelisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-Geométrel. 338 f. 2001. Thèse (Doctorat em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. P.; LUCAS, C. O. Desarrollo de um modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, n. 3, p. 289-318, 2014.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Distrito Federal, v. 4, n. 2, p. 129-159, 2001.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. 150 f. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciências e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

LIMA, R. C.; BEZERRA, F. J. B; VALVERDE, M. A. H. Uso de materiais manipulativos: a oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística. Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno CEDES**, São Paulo, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

LUZ, C. C. L. **Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados pelos alunos**. 141 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

MAGALHÃES, M. N. Atividades para o ensino de probabilidade e estatística na educação básica. Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Editora SBM, 2000.

NOGUEIRA, L. M.; FERREIRA, R.S. Análise de invariantes operatórios dos esquemas de estudantes do ensino médio em situações de probabilidade. Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

PAREDES, H.M. La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático em la formación de profesores em la universidad católica de concepcion. **Actas del VII CIBEM** . Montevideo. 2013.

PEREIRA, P. B. S. S. et al. Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula. Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

RIBEIRO, N. A.; PINHEIRO, R. M.; DAMIN, W. O bingo como recurso didático para o ensino de probabilidade: uma experiência no 9º ano do ensino fundamental, Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

RIBEIRO, R. E. S. **Uma proposta de ensino de Probabilidade no ensino médio**. 117 f. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

RODRIGUES, A.C.C. **Formação de professores dos anos iniciais da escolarização: um estudo da disciplina Didática no curso de Pedagogia**. 399f.

Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SANTOS, T. T. B.; SANTOS, L. G. A. Jogos no ensino de probabilidade e análise combinatória: relato de uma proposta metodológica no ensino médio. Encontro Nacional de Educação Matemática - **ENEM**, São Paulo, 2016.

SILVA, I. M. **Probabilidade**: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito. 147 f. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

Capítulo 5

Considerações Finais

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nestas considerações finais, retomamos a proposta da presente pesquisa buscando apresentar o que foi desenvolvido neste trabalho e ao mesmo tempo procurando não esgotar a discussão sobre o tema, mas abrindo caminhos para novas investigações sobre o que não conseguimos suprir neste período do mestrado.

Nesta pesquisa, propôs-se trabalhar com três professores do nível médio que ensinam Probabilidade, investigando-se sobre como apresentam seus conceitos primitivos. A finalidade desta proposta é a construção de um modelo epistemológico didático de referência que permita o ensino do conceito de Probabilidade integrando as interpretações: clássica e frequentista.

Aqui, buscou-se discutir um problema didático verificado na apresentação do conceito de Probabilidade, por parte dos professores, quando limitado a uma única interpretação: a interpretação clássica. Essa problemática parte de estudos que mostram que os cursos de formação de docentes não evidenciam metodologias para a abordagem do conceito de Probabilidade sob outras interpretações (CORDANI, 2001; SANTOS, 2005; VIALI, 2008; GONÇALVES, 2004; SANTANA, 2011).

Neste caminhar, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) nos permitiu realizar uma análise ecológica, epistemológica e didática deste saber, através de modelos epistemológicos, disposta sobre os três artigos que compõem esta pesquisa. Analisamos um conjunto de condições e restrições que cerca o ensino de Probabilidade no nível médio. O objetivo principal destas análises é adquirir ferramentas para apresentar um modelo didático de referência (MDR) construído por professores de matemática que lecionam Probabilidade. Concordamos com Gascón (2001) na afirmação em que explana que a prática profissional do docente só é modificada se mudamos o modelo epistemológico habitual do professor.

Segundo Fonseca, Gascón e Lucas (2014), na TAD se faz imprescindível explicitar um modelo (uma interpretação) para que formulemos o problema didático que queremos construir no âmbito de um problema científico. Desta forma, explicitamos nosso modelo quando apresentamos nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER) sobre uma possível resposta ao problema didático por nós levantado, referente à exposição do conceito de Probabilidade pelos professores da instituição pesquisada. Buscamos uma resposta quando investimos na reconstrução

de praxeologias matemáticas para o ensino do conceito de Probabilidade, e quando proposto também na abordagem frequentista. Sobre uma formação continuada, desenvolvida a partir de uma engenharia didática de formação, verificaram-se elementos no processo transpositivo do ensino de Probabilidade.

Para atingirmos nossa meta, principiámos um trabalho com os professores, partindo da ideia de que, para que os docentes assumissem outras interpretações, era preciso primeiramente conhecê-las. Por isso a ideia de uma engenharia didática de formação, com encontros de formação que visam dar ênfase à importância do caráter aleatório.

Então, para que um MDR fosse construído, fez-se necessário elaborar um MER e um MED, e, juntos, os dois compuseram uma base para o modelo didático pretendido. Para organizarmos melhor os modelos desenvolvidos, adotamos o formato multipaper, de modo a atender em cada capítulo ao desenvolvimento de um modelo; além disso, buscamos por este formato com o desígnio de conferir maior visibilidade à pesquisa com a possível publicação do material produzido aqui em revistas especializadas da área da Educação Matemática.

Nestes termos, no primeiro artigo, desenvolvemos um estudo histórico e epistemológico sobre a Probabilidade. Pudemos identificar na análise epistemológica, a construção da Probabilidade, procurando entender sua razão de ser e tomando por base seu desenvolvimento histórico na apresentação de suas diferentes concepções da Probabilidade, ainda alvo de debates filosóficos.

Além disso, foi possível constatar as condições que permitiram entender o porquê da predominância da definição clássica relacionada pela condição de associar a aleatoriedade com a equiprobabilidade (BATANERO, 2015). O forte pensamento determinista presente desde o surgimento da Probabilidade até hoje, é considerado uma das restrições impostas ao ensino das outras interpretações.

No segundo artigo, foi desenvolvida uma apreciação ecológica através da análise institucional, pois era relevante saber quais elementos compunham o modelo epistemológico dominante quando analisamos como o saber Probabilidade “vive”, como está posto nos documentos oficiais, principalmente no livro didático utilizado pelos professores.

Podemos afirmar, que verificamos uma rigidez nas praxeologias matemáticas dos docentes que lecionam Probabilidade, evidenciada nos manuais usados por eles, e, ainda, em virtude da ausência de tipos de tarefas que possibilitem a

associação do saber Probabilidade ao saber Estatística. Isso nos permite inferir que a redução do ensino de Probabilidade a somente uma de suas interpretações, pode ocasionar uma limitação na aprendizagem dos estudantes, na ausência de uma percepção mais clara dos fenômenos aleatórios presentes no cotidiano.

Chevallard e Wozniak (2010) afirmam que existe um problema de infraestrutura quanto à Probabilidade, vista pela interpretação frequentista, pois passa a ser observada intrinsecamente como uma apresentação da frequência contemplada e não o oposto, mesmo que a relação de aproximação seja simétrica, isto é, a Probabilidade como uma aproximação da frequência empírica, que é central na modelagem probabilística de variabilidade estatística.

Silva (2002), em sua pesquisa, alegou que havia a ausência de um modelo matemático adequado para a abordagem do conceito de Probabilidade, dificuldade provocada pela falta de questões envolvendo o caráter subjetivo da Probabilidade. Neste estudo, chegamos à mesma conclusão, acrescentando-se que ainda não dispomos de solução para esta pauta, pois, embora os documentos oficiais salientem que o ensino do conceito de Probabilidade seja realizado com ênfase na abordagem do seu caráter aleatório, com situações que permitam aos estudantes uma associação com o mundo real, este modelo concretamente ainda não existe, já que os problemas dispostos nos livros didáticos, por exemplo, realçam a resolução de problemas combinatórios.

O último artigo discorre acerca de uma análise didática, quando verificamos alguns pontos da praxeologia dos professores pesquisados e assim construímos, a partir de suas concepções, um modelo didático que propicie construir/reconstruir suas praxeologias didáticas na inserção de tipos de tarefas que possibilitem a abordagem da interpretação frequentista.

Neste sentido, metodologicamente, foi realizada uma engenharia didática de formação que visava atingir o objetivo aqui proposto em seis encontros. A formação se deu com três professores e buscou, acima de tudo, mostrar aos docentes as vantagens e a importância do ensino da interpretação frequentista associada à interpretação clássica, fazendo com que se permita aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Nos encontros de estudos para o desenvolvimento da sequência, foi esperado um comportamento mais participativo dos professores. Identificamos, nesse contexto, certa resistência quanto à mudança de suas sequências didáticas. A

metodologia baseada no formato: definição – exemplo – exercício, é desenvolvida em praticamente todas as aulas dos professores, e justificada por eles como certa na aprendizagem. Os docentes participaram de todos os encontros e foram receptivos às demais interpretações, mas alegaram a ausência de interesse no uso da tecnologia (por dificuldade pessoal e/ou infraestrutura da escola).

Além disso, a instituição a qual os professores pesquisados pertencem, é uma instituição federal de ensino médio técnico que ainda nutre um modelo tecnicista de ensino, o que para nós representa uma resposta à certa resistência na criação do modelo didático almejado.

Em relação ao desenvolvimento da engenharia, e fazendo uma avaliação dos encontros, a quantidade de tempo disponibilizado foi satisfatória. A dificuldade concentrou-se no tocante aos professores dispensarem mais de uma aula para trabalhar com os alunos o conceito de Probabilidade. Os docentes alegaram que, como os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade são vistos juntos, não dispõe-se, assim, de um tempo suficiente para o conteúdo de Probabilidade.

A proposta era a construção de uma sequência didática que permitisse que os professores ampliassem suas aplicações com a abordagem frequentista e assim permitissem aos estudantes que estes lidassem melhor com situações envolvendo o acaso. A formação influenciou a maneira dos professores de compreender a Probabilidade, e, apesar de terem sido realizadas pequenas adaptações, o modelo construído por eles (apresentado em sua apostila) cumpriu o objetivo desta pesquisa, pois possibilitou verificar-se a importância de se apresentar aos estudantes tarefas que permitam trabalhar com a frequência relativa.

Em nossa avaliação, os docentes precisam investir na exploração de situações sobre espaços não equiprováveis e ainda sobre o desenvolvimento de maiores experimentações, além da realização de uma validação do modelo didático em sala de aula numa confrontação do que pensam os professores e de como os alunos percebem sua aprendizagem.

Acreditamos que novos modelos probabilísticos de variabilidade estatística devem ser desenvolvidos e aprimorados para atuarem no problema didático que decorre de como está posto o saber Probabilidade no ensino atual.

Almejamos continuar a desenvolver pesquisas sobre o ensino do conceito de Probabilidade não só visando contribuir na formação de professores que ensinam este saber, mas também sobre a aprendizagem de seus estudantes, e assim

permitir que novas perspectivas sejam levantadas e discutidas de maneira a auxiliar a criação de novos modelos didáticos.

Referências

BATANERO, C. **Understanding randomness**: challenges for research and teaching. Plenary lecture. Ninth european congress of research in mathematics education. Prague, 2015. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/documentos/cerme-lecture.pdf>>. Acesso em: 05 de fevereiro de 2018.

CHEVALLARD, Y.; WORNIAK, F. Un cas d' infrastructure manquante: statistique et probabilités em classe de troisième. III Congreso Internacional sobre la TAD. **CITAD** France. 2010.

CORDANI, L. K. **O ensino de estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. 2001. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la Modelización Funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, p. 289-318, 2014.

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Unuversidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciências e aplicações. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

SANTANA, M. R. M. **O acaso, o provável, o determinístico**: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. 96 f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SILVA, I. M. **Probabilidade**: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito. 147 f. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da Probabilidade. v.8, n.6 p. 143-156. **Revista Brasileira de História da Matemática**. 2008.

ANEXO – Entrevista**Programa de Pós-Graduação em Ensino,
Filosofia e História das Ciências**

Mestrado e Doutorado

**Entrevista**

Prezado(a) professor(a), o senhor(a) está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa de mestrado, respondendo os questionamentos abaixo no intuito de compreendermos melhor o processo de ensino do conceito de Probabilidade no ensino médio. Agradecemos desde já a sua colaboração.

- Em sua opinião, e de acordo com sua experiência, existem dificuldades na aprendizagem do conceito de Probabilidade? Quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem do conceito de Probabilidade?
- No caso de ocorrerem dificuldades, você acredita que estas dificuldades surgiram como?
- O que você acredita que pode ser feito para evitar o surgimento dessas dificuldades?

Anexo – Termo



**TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS EXTRITAMENTE
PARA A PESQUISA**

Eu _____, CPF _____, RG _____, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, os pesquisadores prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias e prof.^a. Esp. Cecilia Manoella Carvalho Almeida, responsáveis pelo projeto de pesquisa de mestrado, na turma _____, do 3º ano, do Ensino Médio, no Instituto Federal da Bahia – IFBA, sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo, libero a utilização das filmagens e/ou gravações de áudio para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e apresentações), em favor dos pesquisadores da pesquisa, acima especificados, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990), dos idosos (Estatuto do Idoso, Lei N.º 10.741/2003) e das pessoas com deficiência (Decreto Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004).

Salvador - BA, ____ de _____ de 2017.

Participante da pesquisa

Pesquisador responsável pelo projeto

Prof.

Cecilia Manoella Carvalho Almeida

CPF:

Anexo - Apostila

Este documento representa a apostila planejada pelos professores no 6º encontro de formação, a ser desenvolvida nas aulas destinadas ao ensino do conceito de Probabilidade.

Probabilidade

Certos experimentos quando realizados repetidas vezes, sob condições idênticas, apresentam resultados diferentes. Tais experimentos são chamados de experimentos aleatórios ou probabilísticos. A Teoria da Probabilidade é o campo da matemática que cria e desenvolve modelos matemáticos para o estudo de tais experimentos. Como exemplos de experimentos aleatórios podemos citar:

Lançamento de um dado.

Lançamento de uma moeda.

Retirada de uma ou mais de uma carta de um baralho.

O estudo de Probabilidades surgiu com os jogos de azar como jogo de cartas, roleta, etc., tendo como precursor o matemático italiano Girolamo Cardano.

Atualmente, além da teoria dos jogos, a Probabilidade é aplicada na Estatística, Biologia, economia, Sociologia, Meteorologia, etc.

Espaço amostral

Chamamos de espaço amostral **U** , o conjunto de todas as possibilidades para a ocorrência de um experimento aleatório. Chamamos de Evento **E** qualquer subconjunto do espaço amostral **U** .

Alguns exemplos:

1) No lançamento de um dado, defina:

a) O espaço amostral.

b) Número de elementos do espaço amostral.

c) Evento 1 : ocorrência de um número maior ou igual a 3.

d) Número de elementos do Evento 1 .

2) No lançamento simultâneo de um dado e uma moeda, defina:

a) O espaço amostral.

b) o número de elementos do espaço amostral.

Importante: Quando um Evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **Evento Certo**. Quando um Evento é Vazio ele é chamado de **Evento Impossível**. Por exemplo, no lançamento de um dado, o Evento "Ocorrência de um número maior que 0 e menor que 7 é um Evento Certo. O Evento "Ocorrência de um número maior do que 6 é um evento Impossível.

Probabilidade em Espaços Amostrais Equiprováveis

Seja U um espaço amostral equiprovável, isto é, com elementos que têm a mesma chance de ocorrer, e E um evento, com $E \subset U$, a probabilidade de ocorrer E é dada pela razão entre o número casos favoráveis (que nos interessam) e o número total de casos possíveis. Matematicamente, é a razão entre o número de elementos de E e o número de elementos de U . Simbolicamente, escrevemos:

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(U)}$$

Exemplo:

Um dado perfeito é lançado. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 3?

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{3, 6\}, N(U) = 6, N(E) = 2 \text{ e } P(E) = \frac{N(E)}{N(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Exercícios de Sala

01. Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 4 bolas azuis e 2 bolas brancas, todas indistinguíveis pelo tato. Considere o experimento aleatório: Retirada de uma bola da

urna e observação da sua cor. Apresente o espaço amostral do experimento e em seguida classifique-o em equiprovável e não equiprovável.

Qual a probabilidade de retirarmos uma bola azul e uma bola vermelha?

02. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Uma delas será sorteada. Determine:

a) O espaço amostral.

b) A probabilidade da ocorrência de um número par.

c) A probabilidade de ocorrer um número múltiplo de 3.

d) A probabilidade de ocorrer um número maior do que 9.

e) A probabilidade de ocorrer um número inteiro.

f) a probabilidade de ocorrer um número par **ou** múltiplo de 3.

g) a probabilidade de ocorrer um número par **e** múltiplo de 3.

03. Dois dados distintos, não viciados são lançados simultaneamente. A probabilidade de que a soma dos resultados nesse lançamento ser maior do que 6 é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{31}{36}$

e) 1

04. Descreva o espaço amostral para o lançamento de três moedas. Três moedas são lançadas simultaneamente para cima. Qual é a probabilidade de sair pelo menos duas faces iguais?

05. Numa urna são depositadas etiquetas compostas por todos os números de 4 algarismos distintos. Retira-se uma delas ao acaso. Qual é a probabilidade de que a etiqueta retirada contenha um número par e menor do que 5000?

- a) $11/27$ b) $17/125$ c) $22/37$ d) $2/9$ e) $2/3$

06. Considere as permutações obtidas com os algarismos 1,2,3,4 e 5. Na escolha ao acaso de uma delas, qual é a probabilidade de se obter um número divisível por 5?

- a) $1/5$ b) $1/4$ c) $1/3$ d) $1/2$ e) 1

07. Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. Qual é a probabilidade de que sejam escolhido um homem e duas mulheres?

08. Com os algarismos **2,3,4,6** forma-se vários números de três algarismos distintos. Cada número desses vira uma etiqueta que é colocada numa urna. Retira-se aleatoriamente uma etiqueta dessa caixa. Qual é a probabilidade de que a etiqueta retirada contenha um número múltiplo de três?

- a) $1/5$ b) $1/2$ c) $1/3$ d) $3/5$ e) $1/8$

Frequência relativa

Na frente do IFBA tem uma vendedora de geladinho. No final da aula, Maria e sua turma compram um geladinho. A vendedora oferece os geladinhos nos sabores: manga, cajá, umbu, coco, goiaba e maracujá. Maria adora o geladinho de manga. Ela gostaria de saber se escolhesse um dos seus colegas ao acaso, qual a chance de o colega escolhido goste do geladinho de manga também?

Discussão com os alunos: Como resolver essa situação?

Para resolvermos esta situação teremos que averiguar junto aos colegas de Maria qual o seu sabor preferido e estimar a probabilidade do sabor preferido ser manga, através da frequência relativa que indicam como preferida.

De um modo geral, estimamos a Probabilidade de um determinado acontecimento se realizar pela frequência relativa com que esse acontecimento se verifica numa série de repetições da experiência, que conduza a que o acontecimento se possa realizar ou não. Nesta situação, a realização da experiência que conduzia a que o acontecimento se realizasse ou não consistia em perguntar a um colega escolhido ao acaso qual o seu sabor favorito. O acontecimento realizava-se sempre que a resposta fosse “Manga”. Esta experiência diz-se aleatória, pois, antes de fazermos a pergunta, não sabemos a resposta, embora saibamos que será uma das 6 opções possíveis.

Atividade em dupla

Lançar uma moeda 50 vezes e verificar qual face aparece voltada pra cima contabilizando a quantidade de caras e coroas do experimento. De acordo com o experimento realizado, você poderia encontrar a frequência de sair cara? coroa?

Com o resultado das duplas o professor monta uma tabela no quadro e um gráfico calculando a Probabilidade.

Propriedades

Seja U um espaço amostral não vazio relativo a um experimento aleatório e A um evento de U . Assim,

(P1) Se $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$.

(P2) $P(U) = 1$.

(P3) Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$.

(P4) Se \bar{A} é o evento complementar de A , então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exercícios

01. Em uma reunião com n professores, um será escolhido ao acaso pra coordenar os trabalhos. Se a probabilidade de o escolhido ser professor de matemática é $\frac{n-6}{8}$, calcular o número máximo de participantes que pode ter nessa reunião?

02. Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da urna, a probabilidade de sair uma bola azul é o quádruplo da de sair uma bola branca. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca?

Adição de Probabilidades

Numa pesquisa entre 700 estudantes do IFBA a respeito de qual idioma eles preferem estudar, 180 preferem estudar inglês, 160 preferem estudar espanhol e 40 preferem estudar ambas as línguas. Escolhendo-se ao acaso um desses estudantes, qual é a probabilidade de que ele prefira estudar inglês ou espanhol?

Para resolver esse problema, devemos inicialmente usar a teoria dos conjuntos que nos diz que: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (1)

Seja **A** o número de estudantes que preferem estudar inglês e seja **B** o número de estudantes que preferem estudar espanhol. Assim,

$$n(A \cup B) = 180 + 160 - 40 = 300, \text{ logo } P(A \cup B) = \frac{300}{700} = \frac{3}{7}$$

Teorema da Adição de Probabilidades

Generalizando o problema anterior, e dividindo ambos os membros da igualdade (1) por $n(U)$, sendo **U** o espaço amostral do experimento, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

Deste modo, teremos o conhecido **teorema da adição de probabilidades**, cujo enunciado é o seguinte:

Sendo **A** e **B** eventos de um espaço amostral equiprovável **U**, finito e não vazio, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

obs.: (1) Esse teorema é aplicado quando queremos calcular a probabilidade de ocorrer um evento **A** ou um evento **B**, pois o conectivo "ou" indica a união dos dois eventos.

(2) Se **A** e **B** são eventos **mutuamente exclusivos**, isto é, se $A \cap B = \emptyset$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{detalhes em aula})$$

Exercícios de Sala

01. No lançamento de um dado honesto, determine:

- a) a probabilidade de sair número par ou múltiplo de 3.
- b) A probabilidade de sair ímpar ou múltiplo de 4.

02. Uma urna contém exatamente 20 bolas numeradas de 1 a 20. Retira-se ao acaso uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola com número múltiplo de 2 ou de 3?