

Douglas Lisboa Santos de Jesus

# **O papel demonstrativo dos diagramas na geometria euclidiana**

Salvador

2017

Douglas Lisboa Santos de Jesus

## **O papel demonstrativo dos diagramas na geometria euclidiana**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Universidade Federal da Bahia  
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas  
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave

Salvador  
2017

De Jesus, Douglas Lisboa Santos

J58 O papel demonstrativo dos diagramas na geometria euclidiana/ Douglas Lisboa Santos de Jesus. – Salvador, 2017.

98 p. : il.; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia

Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas

Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Salvador, 2017

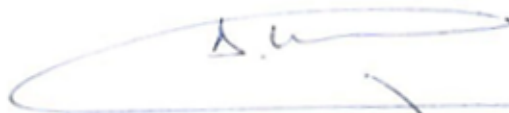

1. Prova diagramática. 2. Geometria euclidiana. 2. Análise retórica. I. Lassalle Casanave, Abel. II. Universidade Federal da Bahia. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

CDD: 514.12



Ata da defesa pública da dissertação de Douglas Lisboa Santos de Jesus, realizada no dia 23 de setembro de 2017.

Aos vinte e três dias do mês de setembro do ano de dois mil e dezessete, às oito horas, na sala de aulas do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFBA, foi instalada a sessão pública para julgamento da Dissertação Final elaborada pelo mestrando **Douglas Lisboa Santos de Jesus**, intitulada: **“O papel demonstrativo dos diagramas na geometria euclidiana”**. Em seguida, o orientador Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave deu continuidade aos trabalhos. A Banca julgadora foi constituída pelos seguintes professores: Prof. Dr. Abel Lassalle Casanave (Orientador/UFBA), Prof.ª Dr.ª Gisele Dalva Secco (UFRGS) e Prof. Dr. Marco Aurélio Oliveira da Silva (UFBA). Passou-se à exposição do mestrando Douglas Lisboa Santos de Jesus, seguida da arguição dos professores integrantes da banca. A Banca reuniu-se, então, em separado, tendo resolvido, por unanimidade, pela sua **Aprovação**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e lavrada a presente ata. Salvador, 23 de setembro de 2017.

  
Abel Lassalle Casanave (Presidente)  
M/ma de U —  
Gisele Secco  


À Djanira Lisboa.

## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Lassalle Casanave, por sua orientação durante todo o trabalho, assim como sua atenção aos pequenos detalhes que se refletem nas principais linhas da Dissertação.

Aos membros da banca, a Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Secco e o Prof. Dr. Oliveira da Silva, por aceitarem examinar a redação final deste texto.

Ao Prof. Dr. Seoane pela acolhida e orientação durante a missão de estudos em Uruguai, a qual resultou na elaboração de capítulo da Dissertação.

Ao Prof. Dr. Sautter, pelo profissionalismo e gentileza com os quais possibilitou a ida à UdelaR.

À Cleide Couto, pelo incondicional apoio.

À CAPES, pelo importante estímulo financeiro a esta pesquisa.

“O questionamento trabalha na construção de um caminho.”

Heidegger

“Deixe o uso das palavras ensinar-lhe o seu significado. (De maneira similar é dito com frequência em matemática: deixe a *prova* ensinar-lhe *o que* estava sendo provado.)”

Wittgenstein

## Resumo

A recente literatura em historiografia e filosofia da prática matemática apresenta um novo cenário sobre o estatuto epistemológico dos diagramas. Resgatam-se aí algumas das principais discussões sobre a maneira como um sujeito pode obter conhecimento através de justificativas diagramáticas. Dentro deste quadro intelectual, apresenta-se nesta investigação uma defesa dum modelo de prova matemática parcialmente baseado em diagramas. Como caso de estudo paradigmático, adota-se aqui os *Elementos* de Euclides sob a perspectiva metodológica da *análise retórica*. O principal argumento apresentado pretende demonstrar a seguinte tese: uma correta análise das provas euclidianas deve reconsiderar a prática matemática prescrita pelos *Elementos* num modelo de justificativa que incorpore não apenas a *análise lógica* de estruturas dedutivas, como também sua dimensão *normativa*, dependente, portanto, da audiência. Uma objeção frequente às provas euclidianas decorre da correta observação que o diagrama é uma instância física imperfeita, donde se seguiria que também uma prova diagramática é, de um ponto de vista lógico, imperfeita. É comum entre comentadores e filósofos a alegação de que as provas euclidianas possuem “lacunas” inferenciais, cuja correção deveria ser feita mediante novos axiomas dentro duma concepção formal de prova. Assim, cada passo em uma prova seria autorizado se, e somente se, é uma fórmula bem formada que, ou é um axioma, ou segue-se da aplicação duma regra de inferência. Em réplica, fica demonstrado que a principal deficiência deste argumento reside numa significativa negligência da prática matemática euclidiana. Mais ainda: não oferece uma explicação satisfatória para a estabilidade da teoria engendrada pelos *Elementos*. Isso é verificado a partir dum estudo mais detalhado acerca do Postulado 2. Através duma aclaração sobre o seu suposto uso não uniforme nos Livros I-VI pode-se constatar que a geometria euclidiana, no tocante às suas provas, é estável e racionalmente controlada. Para além da geometria de Euclides, mostra-se como a análise retórica poderia ser pensada como um método investigativo na filosofia da ciência.

**Palavras-chave:** Prova diagramática. Geometria euclidiana. Análise retórica.



## Abstract

The recent literature on historiography and philosophy of mathematical practice presents a new scenario about the epistemological status of diagrams. Some of the main discussions about the way a subject can obtain knowledge through diagrammatic justifications are rescued. Within this intellectual framework, it is presented here a defense of a mathematical proof model partially based on diagrams. As a paradigmatic case study, Euclid's *Elements* are adopted here from the methodological perspective of the *rhetorical analysis*. The main argument through this text tries to prove the follow thesis: a correct analysis of the Euclidean proofs should reconsider the mathematical practice prescribed by the *Elements* in a justification model that incorporates not only the *logical analysis* of deductive structures, but also their *normative* dimension, therefore, dependent on the audience. A frequent objection to the Euclidean proofs stems from the correct observation that the diagram is an imperfect physical instance, from which it would follow that a diagrammatic proof, from a logical point of view, is also imperfect. It is common among commentators and philosophers the claim that the Euclidean proofs have inferential "gaps", which should be corrected by new axioms within a formal conception of proof. Thus, each step in a proof would be allowed if, and only if, it is a well-formed formula which is either an axiom or follows from the application of an inference rule. In reply, it is demonstrated that the main deficiency of this argument lies in a significant neglect of Euclidean mathematical practice. Moreover, it does not offer a satisfactory explanation for the stability of the theory engendered by *Elements*. This is verified from a more detailed study of Postulate 2. Through a clarification on its supposed non-uniform use in Books I-VI it can be seen that Euclidean geometry, in relation to its proofs, is stable and rationally controlled. Beyond the geometry of Euclid, it is shown how rhetorical analysis could be thought of as an investigative method in the philosophy of science.

**Keywords:** Diagrammatic proof. Euclidean geometry. Rhetorical analysis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Por uma defesa das provas heterogêneas</b>	<b>6</b>
2.1	Estratégia do capítulo	6
2.2	Caso de estudo: <i>Os Elementos</i> de Euclides	6
2.3	Objecções às justificativas diagramáticas	14
2.4	Entre a lógica e a retórica: o caso do Postulado 2	19
2.5	Observações finais	24
<b>3</b>	<b>Filosofia da prática matemática</b>	<b>25</b>
3.1	Estratégia do capítulo	25
3.2	Uma releitura da linguagem dos geômetras	25
3.3	Procedimento <i>dia' grammon</i> : anotações historiográficas	32
3.4	Os atributos exatos e co-exatos nas provas euclidianas	37
3.5	Observações finais	45
<b>4</b>	<b>Análise lógica e dispensabilidade de diagramas</b>	<b>46</b>
4.1	Estratégia do capítulo	46
4.2	Formalização dos <i>Elementos</i>	46
4.2.1	A forma lógica da linguagem operativa	48
4.2.2	Apresentação sintático-formal das provas heterogêneas	52
4.3	O infinito na geometria euclidiana	55
4.4	Controle sintático e diagramático	61
4.5	Observações finais	66
<b>5</b>	<b>Análise retórica das provas heterogêneas</b>	<b>68</b>
5.1	Estratégia do capítulo	68
5.2	Prova retórica: argumentos canônicos e entimemáticos	68
5.3	A arte retórica e a audiência euclidiana	76
5.4	Arte retórica e ciência demonstrativa	82
5.5	Observações finais	90
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>91</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>95</b>

# 1 Introdução

É bem conhecida a dependência parcial das provas euclidianas em relação ao diagrama. Nalgum momento é preciso voltar os olhos para a figura que acompanha o argumento a fim de certificar-se do porquê uma inferência ter sido feita. É também conhecida a objeção típica a esta estratégia argumentativa. Uma vez que o diagrama desenhado num plano material é sempre uma instância física imperfeita, nunca poderá satisfazer as propriedades exigidas dos entes matemáticos. Por exemplo: uma linha sempre apresenta espessura. Portanto, uma prova matemática baseada em justificativas diagramáticas seria, de um ponto de vista lógico, imperfeita. E como não há queixa alguma sobre a correção formal dos teoremas de Euclides, seguir-se-ia daí que suas provas não devem ser diagramáticas.

Que se tem notícia, objeções ao uso do diagrama em provas matemáticas aparecem pela primeira vez em textos de Platão. Uma cena comum em seus diálogos, e depois confirmada nos *Memoráveis* de Xenofonte, é esta: na maioria das ocasiões em que Sócrates fala da geometria a seus discípulos, seja para fazer uma analogia com a própria filosofia, seja para discutir a prática geométrica, ele é taxativo ao negar algum papel epistemológico significativo aos diagramas em provas matemáticas. Não é estranho, portanto, que em uma das primeiras referências a estes artefatos (de um ponto de vista da organização cronológica), no *Fedon 73a-b*, Platão faça um dos adversários de Sócrates defender a tese de que é possível obter conhecimento matemático por este meio.

Ao contrário de Platão, Aristóteles menciona a atividade matemática em raríssimas ocasiões. Este aparente laconismo não deve afastar o fato de Aristóteles ter desenvolvido, nos *Segundos Analíticos*, um dos mais importantes modelos de ciência na literatura ocidental. Aplicada à geometria, a ciência demonstrativa descrita por ele, de maneira até mesmo mais radical do que Platão, retira do diagrama qualquer papel que não esteja relacionado com a heurística. Ou seja: o diagrama, na matemática, seria somente um recurso psicológico, ou mesmo psicotécnico, numa acepção mais moderna, que ajudaria a descobrir novas proposições matemáticas.

Pouco se sabe acerca da compilação dos *Elementos*, de seu autor ou mesmo como foi sua recepção na Antiguidade. O neoplatônico Proclo, em seus *Comentários* ao Livro I dos *Elementos*, fala de Euclides como um herdeiro direto da Academia de Platão. O compilador dos *Elementos* representaria o ápice do conhecimento matemático grego que, segundo o relato tradicional que Proclo passa adiante, iniciou-se com Tales, ao qual seguiu-se Hípias de Elis, Pitágoras de Samos, Anaxágoras, Oenopides de Chio, Hipócrates de Chio, Teodoro de Cyrene, o próprio Platão, Archytas de Tarentum, Teeteto de Atenas e Eudoxo de Cnido. Curioso notar que mesmo Heath, em *A History of Greek Mathematics* (1921), não apresenta nenhuma objeção a esta narrativa. E apesar da alegada influência platônica, Proclo não hesitou em tentar compatibilizar a teoria de Euclides e a ciência demonstrativa

de Aristóteles.

E ainda assim, depois de quase 800 anos das palavras de Platão e Aristóteles, o tratado matemático mais importante até então infringia sistematicamente as advertências sobre o uso das justificativas diagramáticas. Este fato, porém, não era de muita importância para quem desejava corrigir as provas de Euclides.

As objeções de Platão e Aristóteles ecoaram ainda até o séc. XX. Com o desenvolvimento da lógica simbólica no último quarto do séc. XIX, era agora possível argumentar que a tese desses autores acerca das justificativas diagramáticas era verdadeira também no tocante aos *Elementos*. Bastaria deduzir os teoremas euclidianos dentro um sistema axiomático-formal baseado num estilo de prova puramente linguístico. E embora a herança de Platão e Aristóteles nunca tenha sido reivindicada de maneira explícita, Hempel recorre ao mesmo raciocínio em “Geometry and Empirical Science” (1945), bem como Reichenbach em *The Philosophy of Space and Time* (1958) e Carnap em *An Introduction to the Philosophy of Science* (1966). À diferença de Proclo, estes autores passaram a afirmar que as provas euclidianas, fora deste tratamento formal, já não poderiam satisfazer as exigências de rigor matemático.

O objetivo desta dissertação é contestar esse raciocínio. Pretende-se mostrar aqui que a principal deficiência na crítica aos argumentos diagramáticos de Euclides — de Platão a Carnap — decorre duma negligência em relação à prática matemática engendrada pelos *Elementos*. Caso a análise filosófica seja capaz de apreender este outro lado da justificativa matemática, será possível então notar como o emprego dos diagramas nos *Elementos* está circunscrito por um corpo de autorizações racionalmente orquestrado, desde um ponto de vista epistemológico, sem com isto implicar em nenhuma imperfeição lógica. Espera-se também que esta dimensão normativa da justificativa matemática seja capaz de aclarar, ao menos parcialmente, a estabilidade da teoria euclidiana.

A literatura especializada das últimas décadas revela um acentuado interesse por práticas cognitivas baseadas em argumentos diagramáticos. Uma generosa exposição das mais recentes publicações encontra-se em Lemon, Mumma & Shin (2013), com especial atenção às discussões em psicologia, computação, inteligência artificial, lógica e matemática; Blackwell (2001), por sua vez, destaca alguns artigos em psicologia cognitiva e inteligência artificial; Moktefi & Shin (2013) tratam exclusivamente de lógica e matemática. Como é possível notar, a ênfase destes autores incide sobre mecanismos cognitivos necessários para que um sujeito compreenda um argumento diagramático ou o desenvolvimento de novos *softwares* dedicados às interações homem-máquina. Apesar disso, esta literatura contribui com importantes subsídios para se pensar o caso dos *Elementos* e de que maneira seria possível reabilitar as provas diagramáticas de Euclides.

Tendo em conta esta nova abordagem às provas diagramáticas, esta dissertação procura apresentar um quadro conceitual conciliador entre a epistemologia e a lógica. De um lado,

porque é importante investigar as condições sob as quais um sujeito estaria autorizado a justificar uma afirmação matemática a partir do artefato gráfico; de outro, porque é preciso mostrar que o uso do diagrama poderia preservar a consequência lógica numa inferência. Ou seja: que não é possível fazer uma inferência inválida numa prova baseada em diagramas. Daí a importância dos *Elementos*, cujas provas ainda hoje representam o caso de estudo paradigmático. Dentre as publicações sobre a historiografia e filosofia da prática matemática, vale registrar as contribuições de Mancosu (2005) e Esquisabel & Sautter (2013). Alguns dos principais argumentos apresentados aqui estão inseridos nesta tradição.

Esta investigação tenta demonstrar a verdade de sua alegação principal adotando a seguinte estratégia. Em primeiro lugar, é preciso saber como Euclides organizou sua obra e como o diagrama é empregado em suas provas. Trata-se dum breve resumo de seus princípios e suas táticas de argumentação. É preciso mostrar, a partir daí, que dentro de sua prática matemática um sujeito não poderia deduzir falaciosamente nenhuma afirmação geométrica. Deve-se demonstrar, enfim, que a lógica simbólica é insuficiente para analisar a prática matemática de Euclides, apesar de sua reconhecida importância filosófica.

O método de Euclides é descrito no capítulo 1. Ressaltam-se aí a estrutura dedutiva de suas provas, articuladas em torno dos seus princípios (Definições, Postulados e Noções Comuns), e o recurso ao diagrama. E apesar das objeções de Platão e Aristóteles, não há dúvidas que os teoremas nos *Elementos* foram inequivocamente demonstrados. Esta observação servirá como indício de que a disputa sobre o papel demonstrativo dos diagramas negligenciou a prática matemática de Euclides e os mecanismos epistemológicos ali arrolados. Em contraste, portanto, à concepção, por assim dizer, idealizada da justificativa matemática, o caminho traçado aqui busca capturar as provas reais de Euclides. Ainda assim, alguém poderia insistir na comparação entre linguagem e diagrama para então argumentar que o artefato gráfico, ao contrário do artefato linguístico, é suscetível a procedimentos pouco claros. O melhor exemplo em favor desta tese é o Postulado 2, cuja aplicação ao longo dos Livros I-VI apresenta uma falta de uniformidade supostamente incompatível com o conhecimento geométrico e o próprio método de construção geométrica de Euclides. Logo, as provas euclidianas são esclarecidas através da análise lógica ou, para além do estudo formal, pode-se incorporar igualmente aspectos epistemológicos sobre como alguém faz geometria. Estas respectivas alternativas estão associadas aos autores Avigad, Dean & Mumma (2009), partidários duma reconstrução lógica, e, de outro lado, Lassalle Casanave & Panza (2015), os quais advogam uma reconstrução retórica.

O capítulo 3 percorre a literatura disponível sobre a emergência do pensamento dedutivo entre os gregos no intuito de esclarecer o uso dos diagramas na prática matemática de Euclides, com especial atenção ao caso do Postulado 2. O objetivo aí é destacar algumas evidências documentais de como os diagramas eram incorporados nas provas e se haveria

algum tipo de regra para sua manipulação. Este capítulo traz alguns argumentos abalizados, parcialmente, na reconstrução histórica de Netz (1999), a qual permite alguns apontamentos sobre o uso dos diagramas na Grécia clássica. Seguindo Manders (2008), é dito que as provas de Euclides encerram uma parte textual e uma gráfica, onde cada uma delas justifica afirmações concernentes a atributos exatos (métricos) e co-exatos (topológicos), respectivamente. Esta dicotomia esclarece, parcialmente, como o diagrama é empregado, mas não responde em definitivo o problema sobre o Postulado 2.

O capítulo 4 discute a tese de Avigad, Dean & Mumma. Apresenta-se, brevemente, o sistema formal destes autores e como os atributos exatos e co-exatos de Manders são formalizados aí. Como o leitor perceberá, estes autores advogam em favor da ideia de que uma prova matemática, dentro da definição *standard*, é uma sequência de fórmulas bem formadas onde cada uma delas ou é um axioma ou se segue da aplicação de alguma regra de inferência. Sucederia então que independente dos aspectos normativos e retóricos, os diagramas poderiam ser dispensados da prática matemática. Deste modo, argumentam, o problema acerca do Postulado 2 poderia ser esclarecido através da postulação de retas infinitas. Ocorre, porém, que esta estratégia, como ficará dito, é incompatível com a geometria euclidiana, que somente admite prolongações finitas de seções de retas. Neste particular, importa realçar como o uso do Postulado 2 exige a cooperação entre texto e diagrama até mesmo nas ocasiões em que Euclides *supostamente* teria empregado retas infinitas. Para além destas discussões, o capítulo apresenta algumas objeções pontuais à ideia de identificar justificativa matemática e objetos sintáticos. Acrescentam-se, por fim, algumas notas de aclaração sobre a ideia de controle cognitivo proposta por Manders, donde então reivindica-se uma dicotomia entre controle diagramático e controle sintático.

O capítulo 5 amplia a proposta de Lassalle Canave & Panza a partir de algumas especulações em torno das evidências documentais disponíveis. Discute-se, em primeiro lugar, como deveria ser a composição da audiência euclidiana e como esta contribui na aceitabilidade de uma prova. Este capítulo procura adiantar-se também às possíveis objeções sobre a natureza contingente desta audiência. Indo além destas questões pontuais, o capítulo apresenta algumas objeções à costumeira interpretação dos *Elementos* a partir dos *Segundos Analíticos* de Aristóteles. Apresentam-se aí algumas evidências documentais em favor de uma aproximação histórica entre a geometria de Euclides e a arte retórica helenista. Caso esta afirmação seja correta, a contribuição de Aristóteles para a compreensão da geometria euclidiana poderia ser repensada como algo inovador dentro da literatura filosófica.

## 2 Por uma defesa das provas heterogêneas

### 2.1 Estratégia do capítulo

Seguindo o léxico introduzido por Barwise & Etchemendy (1996), uma prova *homogênea* é definida como qualquer estrutura dedutiva composta unicamente por representações linguísticas, seja verbal, interpretada num vernáculo ordinário, ou formal. Uma prova é *heterogênea* se, além da linguagem, incorpora representações gráficas de quaisquer tipos. As provas de Euclides, descritas na seção 2.2 abaixo, são verbais e heterogêneas. A seção 2.3 apresenta as principais objeções filosóficas ao uso dos diagramas em provas matemáticas. A seção 2.4 centra-se no caso do Postulado 2 e sua suposta aplicação não uniforme ao longo dos Livros I-VI dos *Elementos*. O capítulo encerra com uma breve exposição das soluções de Avigad, Dean & Mumma e, de outro lado, Lassalle Casanave & Panza.

### 2.2 Caso de estudo: *Os Elementos* de Euclides

Em sua totalidade, os *Elementos*<sup>1</sup> expressa uma teoria dedutiva informal distribuída em treze livros<sup>2</sup>. Pouca coisa se sabe ao certo sobre a origem e organização desta obra; e menos ainda é possível dizer sobre os objetivos do seu organizador. Euclides não parece ter se importado em esclarecer os princípios matemáticos que somente enuncia no início do Livro I ou mesmo acrescentar alguma nota aos procedimentos que adota ao longo de suas provas. Dos princípios que o leitor deveria aceitar, Euclides discrimina três listas: Definições (Ὅροι), Postulados (Αιτήματα) e Noções Comuns (Κοινὰ Ἔννοιαι).

Com exceção dos Livros VIII-IX e XII-XIII, os demais são precedidos por um grupo de definições acerca do gênero de entes sob estudo e seus atributos, a exemplo das magnitudes geométricas nos Livros I-IV, e dos números, no Livro VII. E além destas propriedades, também as relações, como quando fica dito o ângulo obtuso ser maior que um reto (Definição I.11) e o agudo menor que este (Definição I.12), donde se segue que o agudo é menor que o obtuso, embora Euclides não precise dizer; também o paralelismo entre retas (Definição I.23), ser tangente (Livro III), ou a proporcionalidade entre magnitudes

<sup>1</sup> Adota-se aqui a edição crítica de Heiberg (1883). O trabalho de Heiberg serve de referência para a maioria das traduções dos *Elementos* no séc. XX; dentre estas, foram consultadas as traduções de Heath (1908), para o inglês, Vitrac (1990), para o francês, Puerta Castaño (1991), para o espanhol, e Bicudo (2009), para o português. Exceto por esta nota, nenhuma menção será feita à história do texto euclidiano. Para informações desta ordem, consultar Heath (1921) e Vitrac (2012).

<sup>2</sup> Para fins didáticos, a organização proposta por Mueller (1981) será adotada. Deste modo, os Livros I-VI tratam da geometria plana distribuída da seguinte maneira: geometria plana retilínea nos Livros I-II, a teoria do círculo, no Livro III, polígonos regulares, no Livro IV, teoria das proporções, no Livro V, e teoria das proporções aplicada à geometria plana, no Livro VI. A discussão principal sobre as provas heterogêneas de Euclides limita-se apenas a estes livros. Sobre os demais livros, Mueller continua: os Livros VII-IX encerram a aritmética dos *Elementos*, o Livro X trata das linhas irracionais, o XI diz respeito à geometria sólida elementar, o método da exaustão, no XII, e o Livro XIII trata dos poliedros regulares (as figuras platônicas).

quaisquer (Livro V). O Livro I possui 23 definições, dentre as quais as mais importantes para a presente exposição foram reunidas no quadro abaixo.

Definições (Ὅροι)

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos
- ∴
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira (ὄρος) é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura (Σχῆμά) é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras (ὄρων).
15. Círculo é uma figura plana (σχῆμα ἐπίπεδον) contida por uma linha, em relação à qual todas as retas que a encontram, a partir de um ponto dos postos no interior da figura (σχήματος), são iguais entre si.
- ∴
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, sendo produzidas ilimitadamente (καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον) em cada um dos lados, em nenhum [ponto] se encontram.

Em sua acepção ordinária, o verbo definir (ὀρώω)<sup>3</sup> poderia significar algum exercício da visão: contemplar, colocar algo ou alguém às vistas. É este sentido que lhe confere Homero em *Ilíada* XXIV.633 ao relatar como Príamo sentiu-se aprazido pela contemplação (ὀρόωντες) de Aquiles<sup>4</sup>. Ocorre que os entes matemáticos e seus atributos nunca podem ser acessados pela visão ou qualquer outro sentido. Trata-se, portanto, duma contemplação do intelecto, guiado, não obstante, por uma instância física, *i.e.*, o diagrama. Diz-se também que ὄροι é uma fronteira entre duas regiões contíguas. É esta a acepção escolhida para as expressões ὄρος e ὄρων nas definições I.13 e I.14. Assim entendidas, as definições marcam um limite semântico dum termo em relação ao seu uso ordinário. É oportuno recordar aqui as palavras de Platão, segundo quem as figuras sensíveis são constituintes do ofício do geômetra, muito embora o raciocínio estabelecido não seja sobre *estas* coisas traçadas, mas sobre as coisas *com que se parecem*. “Aquilo que eles modelam ou desenharam, de que existem as sombras e os reflexos n’água, servem-se disso como se fossem imagens, procurando ver o que não pode avistar-se senão pelo pensamento” (Platão, *República*, 510e)<sup>5</sup>.

<sup>3</sup> Para referências ao léxico grego, consultar Mugler (1958).

<sup>4</sup> Cf. tradução de Alberto Nunes (2015).

<sup>5</sup> Cf. Alberto Nunes (2000).



Portanto, Euclides exigiria de seu leitor duas coisas. Em primeiro lugar, que fosse capaz de adequar-se à terminologia técnica disposta nas definições. Em segundo lugar, que percebesse uma diferença entre os entes ali arrolados e suas representações gráficas.

### Postulados (Αιτήματα)

1. Fique postulado traçar (ἀγαγεῖν) uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. E produzir (ἐκβαλεῖν) uma reta finita (πεπερασμένην), continuamente, sobre uma reta.
3. E com qualquer centro e qualquer distância, um círculo pode ser traçado (γράφεσθαι).
4. E todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. E caso uma reta caia sobre duas retas e faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, então sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente (ἄπειρον), encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

A tradução de Αιτήματα por “Postulados” preserva em português a ideia contida no verbo αἰτέω: requisitar, demandar. Um postulado é aquilo que o leitor deve aceitar como verdadeiro, ou o que está habilitado a fazer. Esta última interpretação é compatível com um dos sentidos de “princípios” (ἄρχαι): comando. Daí a fraseologia dos postulados 1-3, os quais, rigorosamente, não expressam proposição alguma, mas antes autorizam algumas operações: *traçar* ou *produzir* uma reta e que um círculo *pode ser traçado*. Estes princípios serão chamados *postulados construtivos*. Cada um deles autoriza uma relação supostamente bilateral entre a entrada textual e a saída diagramática. De um lado, porque o texto chancela a introdução duma reta, uma prolongação finita ou um círculo — sendo esta a acepção mais apropriada de construção geométrica —, e de outro, porque cada vez que um postulado é usado a configuração gráfica é sensivelmente alterada.

Não deixa de ser estranho o uso desta linguagem *operativa*, *i.e.*, a menção a estas operações cinemáticas, numa disciplina que, a princípio, não parece admitir nenhum tipo de movimento. Se é verdadeiro dizer que os entes matemáticos não são tangíveis aos sentidos, então o ato de traçar ou prolongar uma reta seria concernente ao diagrama, não à reta em si. É ainda menos compreensível falar que um ente matemático ocupa sucessivamente várias posições no espaço. O laconismo euclidiano, outra vez, provoca uma intervenção filosófica. Uma explicação inicial poderia ser encontrada em Proclo, o primeiro comentador da obra euclidiana de quem se tem notícias.

Em seus *Comentários* ao Livro I dos *Elementos*, Proclo propõe uma explicação baseada na ideia de movimento imaginativo, ou da imaginação (φαντασία). Seguindo as lições

de Platão, Proclo argumenta que a imaginação ocupa uma posição intermediária entre a sensibilidade e o intelecto, bem como a matemática estaria também entre as coisas sensíveis e as ideias eternas. Ora, o movimento na matemática não poderia decorrer das ideias eternas, que são imóveis. A essa altura, Proclo recorda que toda representação na imaginação é uma imagem cuja origem encontra-se na realidade física exterior. Todavia, acrescenta ele, é preciso discriminar três tipos de movimento: aquele próprio dos entes físicos, aquele da matemática, e o da imaginação. Seria a imaginação, conclui, a responsável por introduzir movimento entre os entes matemáticos<sup>6</sup>, como parece ser o caso dos postulados construtivos (Proclo (1992, pp. 145-147)). Ou seja: as construções geométricas seriam referentes a operações na imaginação e não ao que é feito no plano material com a régua e compasso. Ainda assim, restaria explicar por que Euclides adotou uma linguagem operativa quando poderia muito bem optar por enunciados declarativos.

Uma tentativa de aclaração aparece em Levi (2001). Ele argumenta que cada postulado construtivo determinaria, univocamente, a existência dos entes ali arrolados<sup>7</sup>. Portanto, não haveria problema algum em reformular estes postulados como proposições de quantificação mista (Levi (2001, pp. 97-103)). Logo, ao dizer que, por exemplo, pode-se traçar uma reta, Euclides quereria dizer o seguinte: *para quaisquer dois pontos distintos, há uma, e somente uma, reta entre eles*. De modo que, nesta nova formulação, os postulados construtivos resultam nas seguintes proposições:

- 1'. *Existe, e é único*, o segmento que une dois pontos quaisquer.
- 2'. *Existe, e é única*, a prolongação retilínea de um segmento, a partir de qualquer um dos seus extremos.
- 3'. *Existe, e é única*, a circunferência em um dado plano, com centro dado e com uma distância dada no plano.

Note-se que, ao contrário de Euclides, esta nova formulação não pode deixar de enunciar a unicidade da reta. Raras são as ocasiões onde, nos *Elementos*, fica dito que a reta introduzida é única; nos Livros I-VI isso acontece apenas na quarta proposição do Livro I. Levi deixa de aclarar, no entanto, que as retas introduzidas por Euclides são o que modernamente entende-se por segmentos finitos de reta.

---

<sup>6</sup> Oliveira da Silva (2016) chama atenção para o fato de Alberto Magno, no séc. XIII, ter utilizado argumento muito similar ao de Proclo para explicar o suposto movimento na geometria de Euclides sem, no entanto, ter entrado em contato (direto) com os *Comentários* e apresentando, do outro lado, uma leitura mais generosa sobre os diagramas.

<sup>7</sup> Esta parece ser a opinião comum entre especialistas contemporâneos. Ver Heath (1921, p. 274) e Szabó (1978, 271).

### Noções Comuns (Κοινὰ Ἔνοιαι)

1. As coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
2. E caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
5. E o todo é maior do que a parte.

Em comparação aos postulados, que são próprios da geometria, as chamadas noções comuns são princípios aplicáveis a qualquer gênero de conhecimento. Aqui, parece haver um consenso entre comentadores<sup>8</sup> sobre um suposto parentesco entre as noções comuns de Euclides e os axiomas (ἀξιώματα), ou axiomas comuns (κοινὰ ἀξιώματα), estudados por Aristóteles em *Segundos Analíticos*, 76a40. São estas as coisas, diz Proclo, chamadas axiomas indemonstráveis e que são admitidas por todos os homens (por isto comuns) e que ninguém disputa sua evidência (Cf. Proclo (1992, pp. 152-155)). Por sua vez, Levi observa que a noção de igualdade nas noções comuns tem dois significados: como congruência, que pode significar, a seu turno, uma relação entre figuras ou a transformação do espaço em sua totalidade, e como equivalência. A Noção Comum 1, como aplicada nas duas primeiras proposições dos *Elementos*, poderia ser usadas nas duas acepções. As noções 2 e a 3 poderiam expressar operações de soma e subtração nos livros aritméticos. Por exemplo: se é o caso que  $m = n$ , então  $m + x = n + x$ . A Noção Comum 4, por outro lado, fala pela primeira vez em coincidência e como é aplicada na quarta proposição, significaria sobreposição de figuras. A Noção Comum 5, supondo-se que não houve interpolação, estabelece uma relação mereológica entre magnitudes<sup>9</sup> (Levi (2001, pp. 109-110)).

A primeira prova<sup>10</sup> dos *Elementos* solicita a construção dum triângulo equilátero sobre uma reta dada. Suponha-se agora, por um momento, que alguém tomou em suas mãos uma régua graduada e desenhou no quadro um triângulo cujos lados, cada um, tem 10cm. É evidente que esta pessoa não fez o que lhe foi prescrito. Em primeiro lugar, porque esta

<sup>8</sup> Cf. Heath (1908, pp. 222-232) e Vitrac (1990, pp.178-179).

<sup>9</sup> Como lembram Heath e Vitrac, esta lista de princípios passou por diversas discussões no baixo helenismo resultando nalgumas revisões e alterações desde então. A edição de Campano da Novara no séc. XIII, por exemplo, contém 16 princípios geométricos e 14 princípios aritméticos. Esta viria a ser a primeira edição impressa dos *Elementos*, em 1482, e uma das duas mais importantes referências para as traduções no séc. XVI. A outra era a de Simon Grynaeus, a qual trás uma lista de postulados apenas com os três primeiros, transferindo os dois últimos para a lista de noções comuns. Atualmente, os principais *scholars* do texto euclidiano reconhecem como postulados apenas aqueles listados acima; de outro lado, não há uma opinião definitiva sobre as noções comuns, variando de 5 a 9, com uma advertência de que, salvo a lista já destacada de 5 noções comuns, os demais seriam possíveis adulterações de copistas.

<sup>10</sup> Referências às proposições e provas de Euclides são sinalizadas por um número romano, a indicar o livro, seguido por um algarismo arábico, indicando a proposição ou prova.

pessoa ignorou, ou não entendeu, que cada passo deveria ser justificado por algum princípio. Em segundo lugar, e mais importante, porque embora seja concedido que foi descrito um triângulo e que seus lados são iguais, isto seria verdadeiro, com certa aproximação, somente acerca daquela instância. Caso uma prova matemática fosse de algum modo dependente de verificação empírica, seria com justiça objeto das mais rasteiras objeções. Por sinal, Aristóteles já havia se adiantado a isto ao dizer: “E tampouco o geômetra supõe coisas falsas, como afirmam alguns, dizendo que não há que servir-se do falso e o geômetra assim o faz ao dizer que mede um pé aquilo que não mede um pé, ou que é reta uma linha traçada sem que seja reta” (Aristóteles, *Segundos Analíticos*, 76b40-44)<sup>11</sup>.

E se fosse dito para esta pessoa que ela poderia justificar um passo por meio do diagrama? De acordo com os autores até aqui citados, o diagrama deveria ser admitido na geometria apenas como um dispositivo heurístico, *i.e.*, um auxílio psicológico no processo de descoberta (εὐρησις) de (novas) proposições matemáticas em oposição ao processo de justificação. É sabido, porém, que nos *Elementos* o diagrama também participa da prova. Ou seja: para além de seu reconhecido papel heurístico, o artefato gráfico concorre na justificação de alegações matemáticas. O problema sobre o estatuto epistemológico dos diagramas reside em saber se alguém estaria autorizado a proceder desta maneira.

A prova I.1 requisita a construção dum triângulo equilátero sob uma reta qualquer dada. O raciocínio procede da seguinte maneira. Através do Postulado 3 fica descrito um círculo  $BCD$  tomando-se  $A$  por centro e distância  $AB$ . E pela mesma razão, fica descrito o círculo  $ACE$  a partir do ponto  $B$  e  $BA$  como distância. Na sequência, assume-se a construção do ponto  $C$  na interseção dos círculos descritos. E através do Postulado 1 ficam traçadas as retas  $AC$  e  $BC$ . Logo, por Def. I.15,  $AB$  é igual à  $AC$  e  $BA$  é igual à  $BC$ . Portanto, por Noção Comum 1,  $AC$  é igual à  $BC$ .

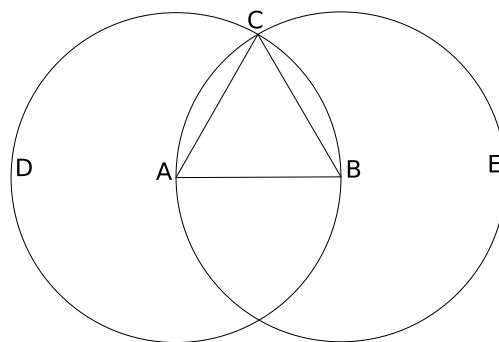


Figura 1 – primeira proposição dos *Elementos*

Euclides não mostra em lugar algum como construiu o ponto  $C$ . O leitor há de lembrar que nenhum princípio lida com intersecção de círculos. Aqui termina a bilateralidade entre

<sup>11</sup> A tradução consultada é a de Miguel Candel Sanmartín (1995b)

o texto e o diagrama. Pois a justificativa para esta construção é o próprio diagrama adjunto à prova. Antes de avançar neste tópico, importa esclarecer a tática argumentativa adotada nos *Elementos*.

As provas de Euclides obedecem uma trama argumentativa própria, facilmente discernível. Pelo que se sabe, Proclo foi o primeiro a evidenciar este fato. Segundo ele, toda prova euclidiana principia com um *enunciado* (προτασις) sobre o que será demonstrado; segue-se a isto uma *exposição/exibição* (ἐκθεσις); daí uma *locução particular* (διορισμός) a estabelecer as condições da prova; uma sequência de *construção* (κατασκευή) geométrica; uma sequência *dedutiva* (ἀπόδειξις), via linguagem; e o *encerramento* (συμπέρασμα). Atine-se para o esquema abaixo.

- 1. Enunciado**      Construir um triângulo equilátero sobre a reta dada.
- 2. Exibição**      Seja a reta limitada dada  $AB$ .
- 3. Determinação**    É preciso então, sobre a reta  $AB$ , construir um triângulo equilátero.
- 4. Construção**      Fique descrito, por um lado, com o centro  $A$  e, por outro lado, com a distância  $AB$ , o círculo  $BCD$ . E, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro  $B$ , e, por outro lado, com a distância  $BA$ , o círculo  $ACE$ . E, a partir do ponto  $C$ , no qual os círculos se cortam, até os pontos  $A$ ,  $B$ , fiquem traçadas as retas  $CA$ ,  $CB$ .
- 5. Dedução**        E como o ponto  $A$  é centro do círculo  $CDB$ , a  $AC$  é igual a  $AB$ ; de novo, como o ponto  $B$  é centro do círculo  $CAE$ , a  $BC$  é igual à  $BA$ . Mas a  $CA$  é igual à  $AB$ ; portanto, cada uma das  $CA$ ,  $CB$  é igual à  $AB$ . Mas coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si. Logo, também a  $CA$  é igual a  $CB$ ; logo, as três  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  são iguais entre si.
- 6. Conclusão**      Portanto, o triângulo  $ABC$  é equilátero e foi construído sobre a reta limitada dada  $AB$ .

QEF.

A locução contida na *protasis* parece indicar que a prova é válida para qualquer ente daquela classe; *v.g.*, qualquer triângulo equilátero pode ser construído sobre qualquer segmento; por isto a ausência de quaisquer letras ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ...). Por sua vez, a *ekthesis* tem uma dupla função: ao mesmo tempo em que introduz um ente matemático, um diagrama, que o representa, é exibido. A tradução mais aproximada para *diorismos* é *divisão*, e como a *ekthesis*, desempenha um papel duplo nas provas. Por um lado, Euclides conta, com uma locução particular, sob quais condições a prova se realizará, e por outro lado, quais propriedades os (novos) entes devem satisfazer. Na *kataskewe* os novos entes são

introduzidos na prova através dos postulados 1-3. É neste momento em que a configuração gráfica inicial é modificada. Na *apodeixis* é preciso mostrar que os entes construídos têm as propriedades prescritas; *v.g.*, que  $ABC$  é um triângulo equilátero. Uma vez demonstrada uma proposição, é comum que seja utilizada posteriormente como uma justificativa em outras provas. Este passo costuma ocorrer na *kataskewe* ou na *apodeixis*. Por fim, Euclides retoma o enunciado da prova na *symperasma* para assegurar que foi feito o requisitado, encerrando a prova com as locuções “o que era preciso fazer” (QEF) ou “o que era preciso demonstrar” (QED).

No que diz respeito às proposições deduzidas a partir dos primeiros princípios, Proclo discrimina *problemas* e *teoremas*. O relato de Proclo sugere que esta dicotomia era corrente em sua época e era usada na Academia de Platão. O comentador de Euclides fala que um problema é caracterizado por alguma ação: a construção de figuras, na geometria, bem como a divisão, subtração ou adição, na aritmética. A proposição I.1 dos *Elementos* é, portanto, um problema. Teoremas, por outro lado, lidam com as propriedades inerentes a cada figura; *v.g.*, I.6: *os ângulos na base de um triângulo isósceles são iguais*. Para Proclo, esta interpretação é verdadeira sobre os *Elementos* em função da maneira como Euclides encerra suas provas: todo problema termina com “o que era preciso fazer” (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι), e todo teorema termina com “o que era preciso mostrar” (ὅπερ ἔδει δεῖξαι). Proclo poderia mencionar também o fato de Euclides sempre formular seus problemas como um comando, ao passo que todo teorema é formulado como uma proposição. Ademais, é comum que a *diorismos* de um problema comece com “seja feito tal e tal coisa”, enquanto a *diorismos* de um teorema principie com “digo que tal”.

Continuando seu relato, Proclo aproveita a oportunidade para lembrar que Speusippus, sucessor de Platão na Academia, considerava que toda proposição matemática seria um teorema, enquanto Menaechmus, sucessor do matemático Eudoxo e contemporâneo de Platão, afirmava que toda proposição matemática seria (ou deveria ser) equivalente a um problema. Seria possível especular, embora Proclo não o faça, que, se toda proposição matemática é um teorema, então seria possível reformular, *e.g.*, os problemas de Euclides desta maneira; inversamente, se toda proposição matemática é um problema, então seria possível reformular os teoremas de Euclides como um comando. Proclo opta por uma posição conciliadora, emprestando assentimento parcial a ambos os lados. Speusippus estaria correto porque os problemas da geometria são distintos daqueles da mecânica, que trata do que é contingente. Ou seja: o comando do geômetra não seria referente ao mundo físico, como já foi mencionado. Por sua vez, Menaechmus estaria correto porque a descoberta de teoremas envolve o recurso a um tipo de matéria, mas esta é puramente intelectual. Seria, portanto, na imaginação onde estas construções e operações afins acontecem, ao passo que o conteúdo do entendimento, *i.e.*, as ideias eternas, permanecem imóveis, sem geração ou mudança (Proclo (1992, p. 64)).

Além destes, Proclo menciona Zenodotus, suposto sucessor de Oenopides do qual nada se sabe, que falava de teoremas como a busca pela característica atribuída ao tópico sob investigação ao passo que um problema pergunta pela condição de existência de algo, a mesma posição adotada por Posidonius. Para estes autores, segundo conta Proclo, pode-se estabelecer distinções gramaticais na formulação de teoremas e problemas. No caso de um problema, poder-se-ia formular como uma pergunta ou, como faz Euclides, como um comando e mesmo como uma declaração. Tome-se como exemplos as seguintes formulações para a proposição I.1:

- i. É possível construir um triângulo equilátero sob uma reta finita?
- ii. Construir um triângulo equilátero sob uma reta finita.
- iii. É possível construir um triângulo equilátero sob uma reta finita.

Aqui, a marca de um problema é a possibilidade. Por exemplo: quando Euclides pede que um triângulo equilátero seja construído em I.1 ele não exclui a possibilidade da construção dum isósceles ou um escaleno; por outro lado, quando é dito que os ângulos sob a base de um isósceles são iguais, isto pertence essencialmente a esta espécie de triângulo e não poderia ser de outra maneira. Por fim, a interpretação de Levi resultaria na seguinte formulação: para qualquer segmento de reta, existe um triângulo equilátero. Feitas estas observações, cabe agora apontar algumas das principais objeções ao uso dos diagramas nas provas euclidianas.

### 2.3 Objeções às justificativas diagramáticas

Como ficou dito em comentário à primeira prova dos *Elementos*, o diagrama é usado pela primeira vez na prova como uma instância material que *representa* entes geométricos. Como tal, possui propriedades típicas de objetos físicos, como espessura, largura, etc. Porquanto objeto visual, *exibe* uma configuração de acordo com as entradas textuais. Estas entradas são fornecidas pelos postulados construtivos (via linguagem, portanto) e é no processo de alteração da configuração inicial que ocorrem as justificativas diagramáticas, *i.e.*, quando o diagrama supostamente passa a ter um papel genuinamente epistemológico na prova. É preciso discutir agora se esta transição é legítima dentro da epistemologia da matemática ou se implica flagrante sofisma.

Nenhuma afirmação geométrica depende da precisão da régua e compasso ou da destreza do geômetra. O traçado físico dum diagrama, por ser sempre imperfeito, não pode satisfazer as exigências métricas das definições; e mesmo que este fosse o caso, o teorema seria verdadeiro apenas sobre uma instância, não sobre uma classe de entes matemáticos, o que é incompatível com o espírito desta ciência. Ato contínuo, um diagrama não poderia

preservar a verdade ao longo duma cadeia dedutiva. A literatura especializada defronta-se então com o seguinte dilema: ou os diagramas fornecem algum tipo de justificativa e, com isso, a precisão do seu desenho seria relevante para as provas, ou os diagramas não fornecem nenhum tipo de justificativa.

É lugar-comum afirmar que provas baseadas em representações gráficas possuem algum tipo de lacuna inferencial. No caso de Euclides, isto equivale a dizer que seus princípios são insuficientes para provar seus teoremas. Salvo algumas modificações, esta opinião é compartilhada por Carnap (1966, p. 126)), Kleene (1974, pp. 61-62), o qual não deixa de comparar as provas “imperfeitas” de Euclides ao modelo homogêneo formal, Vitrac (1990, p. 196), Hartshorne (2000, pp. 30-31) e Levi (2001, p. 113). A objeção ao uso dos diagramas em provas matemáticas é enunciada com clareza em Proclo, do qual falou-se até o momento. Já no prólogo dos *Comentários* ele declara:

Se nós considerarmos as figuras das quais o geômetra fala como pertencentes ao mundo sensível e não separada da matéria, como podemos dizer que a geometria emancipa-nos das coisas sensíveis, converte-nos para o reino da existência incorpórea, habitua-nos com a visão dos inteligíveis e prepara-nos para a atividade de acordo com o Intelecto? E onde, dentre as coisas sensíveis, vemos um ponto sem parte, uma linha sem largura, uma superfície sem grossura, igualdade de linhas a partir do centro ou, em geral, quaisquer figuras poligonais ou poliedrais sobre as quais nos ensina a geometria? E como as proposições desta ciência permanecem irrefutáveis quando as figuras e formas das coisas sensíveis são apenas mais ou menos o que são, movendo-se e mudando de toda maneira, cheias de indeterminação da matéria (...)? (Proclo (1992, p. 40)).

Diante desta aparente insuficiência dos princípios euclidianos, a solução encontrada por seus comentadores é acrescentar novos princípios para suprir a justificativa necessária. Heath, por exemplo, não hesita em dizer em seu *scholium* que Euclides não tinha autorização alguma para presumir a interseção no ponto  $C$ . Esta lacuna haveria de ser suprida, continua ele, por meio do *Princípio de Continuidade*: se um segmento de reta  $AB$  é dividido em duas partes, de modo que todo ponto do segmento  $AB$  pertence a uma destas partes, as extremidades  $A$  e  $B$  pertencem à primeira e à segunda parte, respectivamente e cada ponto da primeira parte que precede qualquer ponto da segunda parte, na ordem  $AB$  do segmento, então existe um ponto  $C$  do segmento  $AB$ , tal que cada ponto de  $AB$  que precede  $C$  pertence à primeira parte e cada ponto que se segue a  $C$  pertence à segunda parte (Heath (1908, pp. 234-241)). Daí então seria possível formular uma versão para as provas I.1 e I.12: caso a circunferência de um círculo, *e.g.*, o  $BCD$ , pertença inteiramente a uma figura dividida em duas partes, a saber, a parte dentro de  $ACE$  e aquela fora deste círculo, e se a circunferência possui pelo menos um ponto em comum com cada parte, então deve encontrar, *i.e.*, deve cortar, a fronteira entre as partes.

Ora, se é verdadeiro dizer que toda prova dependente de justificativas diagramáticas é imperfeita, então as provas heterogêneas de Euclides poderiam encerrar algum tipo



de falácia. E no entanto, o que se verifica em I.1 é o exato oposto: uma vez admitida a construção do ponto  $C$  a proposição fica inequivocamente demonstrada. Não parece ter ocorrido aos autores mencionados reconsiderar estas objeções em função da estabilidade da teoria euclidiana. É certo que a ausência de bilateralidade entre texto e diagrama exige alguma explicação, mas, em nenhum momento em que um ponto é aduzido numa prova a partir da interseção de dois círculos, Euclides incorre nalgum sofisma<sup>12</sup>. Tamanha é a importância deste feito que é possível resolver dois outros problemas a partir desta prova.

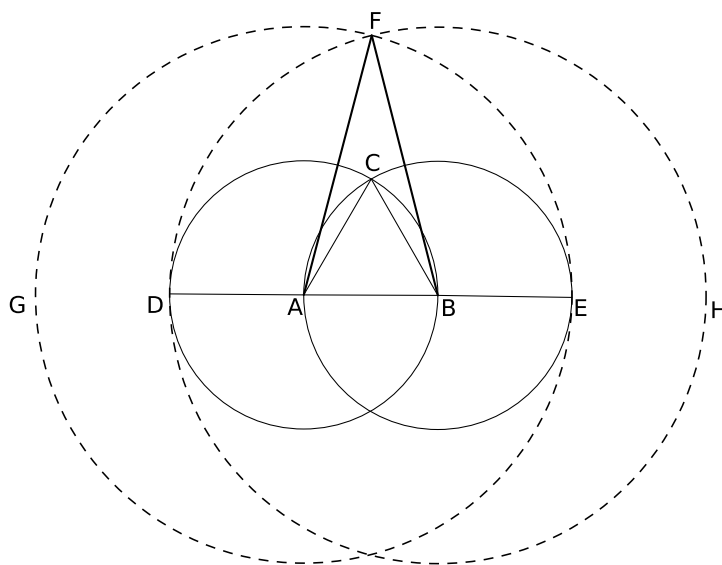


Figura 2 – A construção de um triângulo isósceles a partir de I.1

Se é correto pensar que um problema prova a existência de um ente matemático, como Levi parece sugerir, então Euclides apenas provou a existência de triângulos equiláteros. Nada foi dito sobre os isósceles e escalenos; e no entanto, a prova de I.5 é sobre propriedades do isósceles enquanto I.22 poderia aplicar-se aos escalenos. É Proclo quem assume a missão de apresentar estas provas.

A partir do diagrama disposto em I.1, fique prolongada a  $AB$  continuamente nas duas direções até os respectivos pontos  $D$  e  $E$  (Postulado 2). E a partir do ponto  $A$  e distância  $AE$ , fique descrito o  $EFG$  (Postulado 3); pela mesma razão, fique descrito o  $DFH$ . Sejam traçadas as  $AF$  e  $BF$  (Postulado 1). Logo, como  $AB$  é igual à  $AD$  (Def. I.15), e  $AF$  é o dobro de  $AD$ , então  $AF$  é o dobro de  $AB$ . Pela mesma razão será provado que  $BF$  é o dobro de  $BE$ . E  $AF$  e  $BF$  são iguais; pois, caso fique a  $AD$  até  $G$ ,  $AG$  e  $AF$  serão iguais (Def. I.15), o mesmo se passando com a  $BH$  em relação à  $BF$ . Portanto, sobre a  $AB$  ficou construído um triângulo isósceles; QEF.

Construa-se agora um triângulo escaleno. Para isso, tome-se a figura de I.1 mais os

<sup>12</sup> Isso ocorre em I.22, III.5, III.13, IV.1, IV.10 e IV.15.

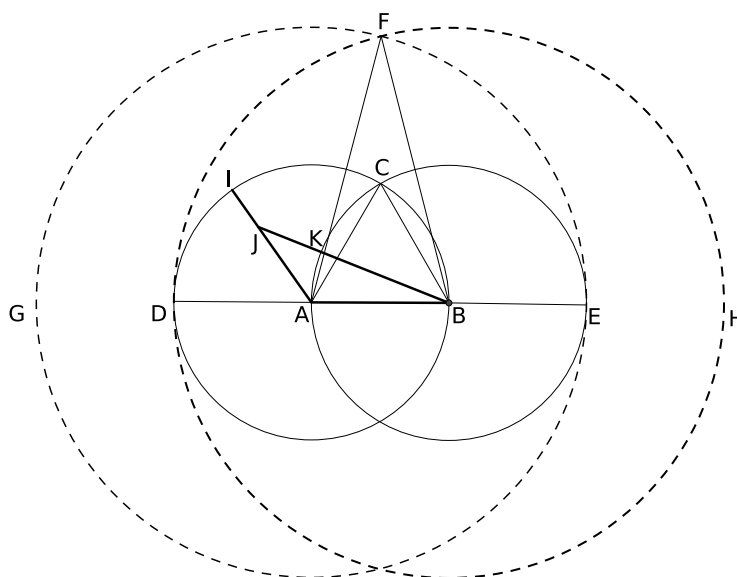


Figura 3 – A construção de um triângulo escaleno a partir de I.1

círculos  $EFG$  e  $DFH$ . Seja o ponto  $I$  sobre a circunferência de  $BCD$  e fique traçada a  $AI$ . E sobre esta  $AI$ , seja tomado o ponto  $J$  ao acaso e fique traçada a  $BJ$ . Ora,  $AI$  e  $AB$  são iguais, pois são raios de um mesmo círculo. Logo,  $AB$  é maior que  $AJ$ . E como  $B$  é o centro de  $ACE$ ,  $BK$  é igual à  $AB$ . Logo,  $BJ$  é maior que  $AB$ . Portanto, como  $AB$  é maior que  $AJ$  e  $BJ$  é maior que  $AB$ , o triângulo  $AJB$  é escaleno; QEF.

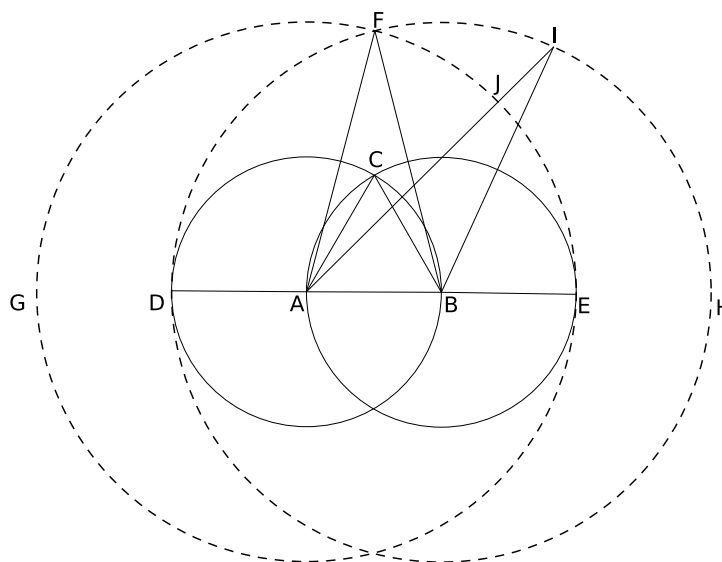


Figura 4 – Uma resolução alternativa para a construção do triângulo escaleno

Para construir um escaleno sobre  $AB$  Proclo poderia adotar a seguinte prova indireta (*reductio ad absurdum*). Fiquem descritas as  $AI$  e  $BI$ . Ora,  $BI$  é igual à  $BF$ , pois são raios dum mesmo círculo. E como  $BF$  é o dobro de  $AB$ , então  $BI$  é o dobro de  $AB$ . Agora,

$ABI$  será um triângulo escaleno caso  $BI$  e  $AI$  seja desiguais. Fique suposto o inverso: que  $BI$  e  $AI$  são iguais. Logo,  $AF$  é igual a  $BJ$ ; e  $BI$  é igual a  $BJ$ , a parte ao todo, o que é uma contradição. Portanto, não é o caso que  $BI$  é igual a  $BJ$ . Portanto, sobre a  $AB$  ficou construído o triângulo escaleno  $ABI$ ; QEF.

O conceito de prova, objeto desta dissertação, está subsumido às discussões da epistemologia. Sucede então que as provas matemáticas, as de Euclides em particular, devem ser examinadas a partir desta perspectiva. Atine-se para o fato de um sujeito precisar *compreender* as definições apresentadas ao longo dos *Elementos*, bem como *estar convencido* da verdade dos princípios euclidianos e, mais ainda, que aplicou *corretamente* os postulados construtivos. Estas são exigências tipicamente epistemológicas. Importa saber, portanto, se um sujeito pode adquirir conhecimento matemático a partir de justificativas diagramáticas; e se este é o caso, quais mecanismos cognitivos e epistemológicos estão envolvidos neste processo. Por outra parte, a análise formal destas estruturas dedutivas também contribui para uma aclaração do conhecimento matemático. Em razão disto, o conceito de prova também é objeto de estudo da lógica. Note-se, contudo, que dentro da literatura lógico-matemática, uma prova é costumeiramente definida como uma sequência de fórmulas onde cada uma delas ou bem é um axioma, dentro de um sistema formal, ou segue-se da aplicação imediata duma regra de inferência. Agora, uma vez que esta definição (*standard*) só reconhece provas homogêneas, verbais ou formais, é preciso também discutir se ela é suficiente para explicar o funcionamento da justificativa matemática em geral e aquelas verificadas nos *Elementos*.

Uma possível réplica aos críticos de Euclides principia por notar que estes negligenciaram a prática matemática engendrada pelos *Elementos*. Isso poderia resultar numa comparação não muito qualificada entre uma prova real e uma prova idealizada. Se, por outro lado, é correto dizer que é possível obter conhecimento matemático através das provas reais de Euclides, então é preciso também considerar quais habilidades são exigidas de um sujeito neste cenário. Por fim, seria interessante considerar a possibilidade de um sujeito mudar seu estado epistemológico em função do tipo de prova ele acompanha. Por exemplo: um sujeito poderia estar convencido de que I.1 é uma solução correta para o problema proposto? Feitas essas colocações, espera-se então que uma análise filosófica considere as seguintes questões:

- i. quais qualidades uma prova tem (ou deveria ter)?
- ii. quais habilidades cognitivas um sujeito deveria ter para que compreenda e verifique a correção de uma prova?
- iii. poderia um sujeito mudar seu estado epistemológico em face duma prova?

As questões colocadas acima devem ser pensadas a partir do problema sobre a estabilidade

da teoria euclidiana. Ou seja: se as provas heterogêneas de Euclides podem satisfazer estas questões, então a estabilidade dos *Elementos* perpassa pela admissão de que as justificativas diagramáticas são meios legítimos de se obter conhecimento matemático. Esta discussão mais global será pensada doravante a partir do caso do Postulado 2, a ser discutido na próxima seção.

## 2.4 Entre a lógica e a retórica: o caso do Postulado 2

Como qualquer manual de matemática, é comum haver nos *Elementos* alguns exercícios cuja resolução fica sob responsabilidade do leitor. Se vale para este caso, Euclides poderia ter dito a seus alunos em Alexandria, então o mesmo se passa com aquele outro. — *Mostre!* Em muitas situações, como em I.1, é preciso um olhar mais atento como o de Proclo para encontrar uma prova suplementar (por vezes alternativa) não explicitada por Euclides. Em outras ocasiões, como em I.15, Euclides fala diretamente a seu público como proceder doravante<sup>13</sup>. Parece que a prática adotada é a de provar o caso mais difícil e deixar ao leitor o caso mais simples sob a condição de seguir as mesmas prescrições. Tome-se como exemplo a proposição I.2

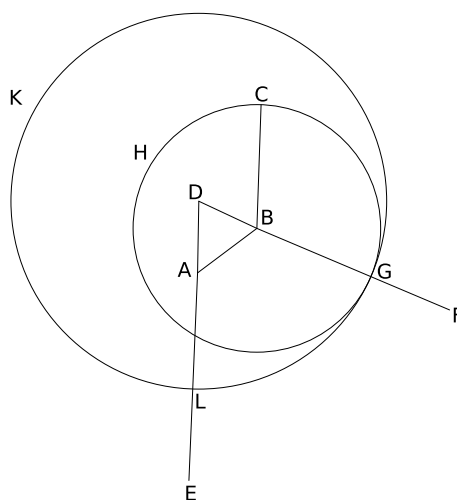


Figura 5 – proposição I.2

O objetivo dessa prova é a construção duma reta igual a outra dada num ponto dado. A *kataskheue* segue da seguinte maneira. Em primeiro lugar, fica traçada a  $AB$  e, sobre esta reta, é construído o triângulo equilátero  $ADB$ . O primeiro passo é autorizado pelo Postulado 1 e o segundo pelo teorema I.1, já demonstrado. Note-se que Euclides presume que  $AB$  e  $BC$  são desiguais, porque, trivialmente, se estas fossem de fato iguais, ter-se-ia

<sup>13</sup> Cf. I.16, I.17, I.18, I.20, I.27 e I.47

feito o requisitado. Euclides então supõe que  $AB$  é menor que  $BC$ . Em seguida, ficam prolongadas as  $DA$ ,  $DB$ , através do Postulado 2, até os pontos  $E$  e  $F$ , respectivamente. E, por meio do Postulado 3, ficam descritos os círculos  $CGH$  e  $GKL$ . O primeiro fora construído a partir do centro  $B$  e distância  $BC$ , enquanto o segundo ficou descrito a partir do centro  $D$  e distância  $DG$ . Para o sucesso desta prova, o leitor deve aceitar a construção dos pontos  $G$ , na interseção entre o círculo  $CGH$  e a  $DF$ , e, do outro lado, o  $L$ , na interseção entre o círculo  $GKL$  e a reta  $DE$ . Uma vez que isto é garantido, a dedução textual (*apodeixis*) segue da seguinte maneira. Como  $BC$  e  $BG$  são raios dum mesmo círculo, então são iguais, por Def. I.15. Pela mesma razão são iguais as  $DH$  e  $DG$ . Ora,  $DA$  e  $DB$  são iguais. Logo, as restantes  $BG$  e  $AH$  são iguais, de acordo com a Noção Comum 3, das quais ficou provado que  $BG$  é igual à  $BC$ . Portanto, por Noção Comum 1,  $BC$  é igual à  $AH$ ; QEF.

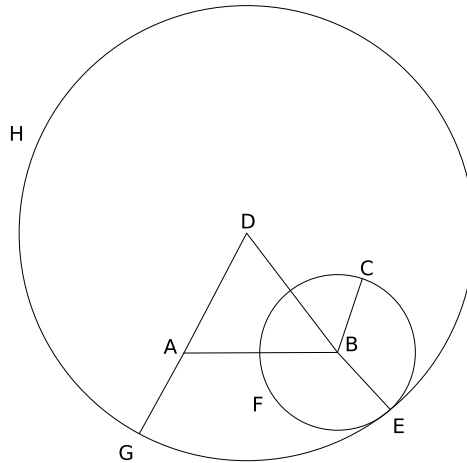


Figura 6 – Segundo caso de I.2 (com  $AB$  maior que  $BC$ )

Suponha-se agora que  $AB$  é maior que  $BC$ . Seja descrito o  $ADB$  sob a reta  $AB$ . Fique descrito o círculo  $CEF$  a partir de  $B$  e distância  $BC$ . Prolongue-se  $DB$  até  $F$ , na circunferência de  $BCF$ . E com centro em  $D$  e distância  $DF$ , fique descrito o círculo  $EGH$ . E a partir de  $DA$  fique prolongado a reta  $AE$  continuamente com a  $AD$ . Logo, como  $DE$  é igual à  $DF$  das quais a  $DA$  é igual à  $DB$ , então a  $AF$  é igual à  $BE$ . E como  $BE$  é igual à  $BC$ , então a  $AF$  também é igual à  $BC$ ; QEF.

Há uma diferença sutil na maneira como o Postulado 2 foi usado até aqui em relação ao procedimento euclidiano que merece maior atenção. Nos exercícios decorrentes de I.1, analisados por Proclo, o Postulado 2 foi usado para prolongar um segmento finito até a circunferência dalgum círculo. E o mesmo fez-se agora na produção das retas  $BE$  e  $AF$ . Euclides, ao contrário, contenta-se em introduzir uma prolongação arbitrária que *deveria* intersectar um círculo.

A fórmula gramatical nesta primeira aplicação do Postulado 2 é ligeiramente distinta de sua expressão original. Em I.2 (e também em I.5) Euclides não se importa em dizer que as prolongações  $AE$  e  $BF$  são colinearmente contínuas em relação às  $DA$  e  $DB$ . Em vez, opta pelo cognato ἐκβεβλήσθωσαν (produzias<sup>14</sup>) em voz passiva para dizer que  $AB$  foi produzida, continuamente, com a  $DA$ . Ainda assim, seria preciso supor que a reta produzida é “longa o suficiente” para cortar um dos círculos. Poderia ocorrer de uma das prolongações acabar sendo mais curta do que o necessário. Exigir, porém, que uma reta seja prolongada “o suficiente” aparenta ser também um tipo de procedimento *ad hoc* incompatível com o conhecimento geométrico<sup>15</sup>.

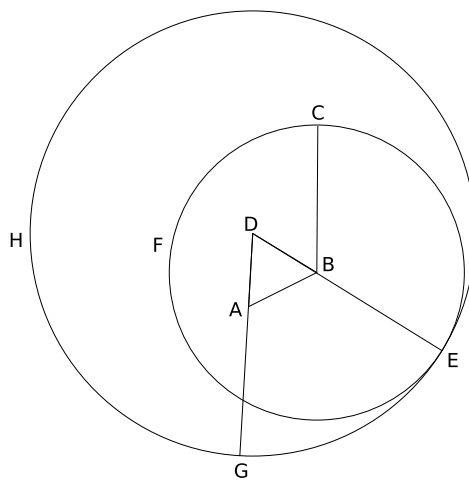


Figura 7 – reconstrução de I.2

Euclides poderia evitar esse procedimento pouco inteligível adotando a seguinte estratégia. Com centro em  $B$  e distância  $BC$ , fica descrito o círculo  $CEF$ . Com o Postulado 2, prolongue-se  $DB$  até um ponto  $E$  na circunferência deste círculo. Agora, com centro em  $D$  e distância  $DE$ , fique descrito o  $EHG$  e, na sequência, prolongue-se  $DA$  até  $G$  na circunferência do círculo recém-traçado. Este raciocínio restitui a beleza e rigor característicos do texto. Supondo então que a prática matemática de Euclides não é uma rapsódia de atos desconexos performados por aedos iletrados, mas, o justo contrário, é uma atividade regrada, a questão agora gira em torno deste emprego, por assim dizer, não genuinamente construtivo do Postulado 2.

Recorde-se então que, de acordo com a literatura especializada, especialmente em

<sup>14</sup> O trecho correspondente é: “fiquem produzidas as retas...” (ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ’ εὐθείας). Em I.5 Euclides opta pela expressão προσεκβεβλήσθωσαν.

<sup>15</sup> Hartshorne (2000, p. 20) também questiona o procedimento adotado em I.2, muito embora sua queixa seja apenas o fato de Euclides não adotar um atalho mais seguro. Lassalle Casanave & Panza (2012) relatam de maneira mais precisa que este procedimento é, estranhamente, o predileto de Euclides nos Livro I-VI.

Heath e Levi, cada postulado construtivo engendra uma asserção existencial e determina univocamente a saída diagramática. Isso é verdadeiro acerca do Postulado 1, cuja aplicação garante a construção duma reta, e do Postulado 3, o qual introduz o círculo. A formulação do Postulado 2, por outro lado, é pouco clara sobre qual tipo de configuração resultante. Não parece haver um critério unívoco para a aplicação deste postuldo. Uma possível solução é apresentada por Panza (2012, p. 89), para quem a reta produzida pelo Postulado 2 deve encontrar sempre a circunferência dum círculo, como neste exemplo acima, ou uma outra reta. Se esta interpretação é correta, então o problema seguinte é explicar como (e por que) Euclides procede desta outra maneira. Na maioria das vezes em que o Postulado 2 é empregado, o procedimento não é construtivo, como Panza afirma<sup>16</sup>.

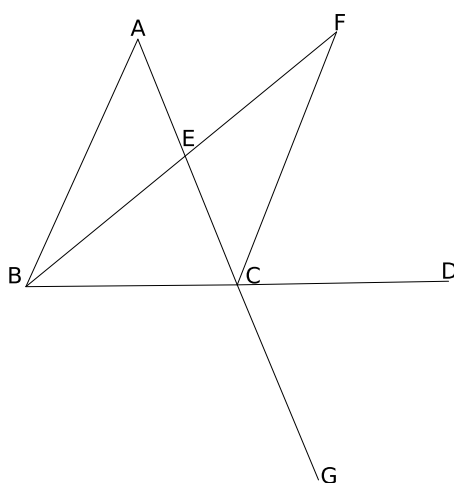


Figura 8 – proposição I.16

Esta aparente falta de uniformidade no uso do Postulado 2 agrava-se ainda mais em I.16. Aqui, o objetivo é mostrar que o ângulo externo  $ACD$  é maior que os  $ABC$  e  $BAE$ , internos e opostos. O Postulado 2 é aplicado primeiro à reta  $BC$  para obter  $CD$  e em seguida, é aplicado à  $BE$  para obter a prolongação  $EF$ . Nesta primeira ocasião o Postulado 2 segue sua formulação original: determina-se um ponto  $D$  arbitrário como limite. O problema é que a prolongação  $EF$  é dita igual à  $BE$ . Ora, se a reta produzida é arbitrariamente prolongada, então não haveria como garantir esta igualdade. Pior ainda: o diagrama não pode assegurar isto.

Das raras ocasiões em que o Postulado 2 é aplicado de maneira genuinamente construtiva, é em II.14 onde a reta  $DE$  fica prolongada até um ponto  $H$  determinado no semicírculo  $BHF$ . Aqui, vale ressaltar que Euclides já havia usado o Postulado 2 ao prolongar a  $BE$  até o ponto arbitrário  $F$ . A redação do texto revela que em todas essas provas o ato de

<sup>16</sup> Cf. I.5, I.16, I.17, I.20, I.31, I.32, I.37, I.38, I.44 e I.48; II.3, II.8, e II.11; III.31; IV.3 e IV.15; VI.1, VI.11 e VI.26.

prolongar ou produzir ( $\acute{\epsilon}\chi\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$ ) uma reta segue-se dum aplicação do Postulado 2. Esta aparente falta de uniformidade, portanto, não é acidental.

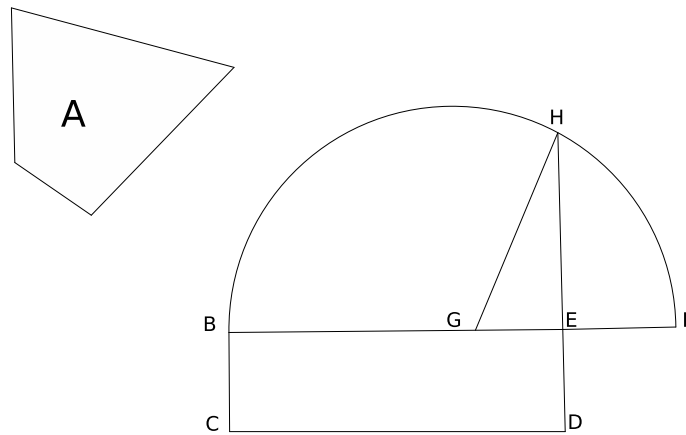


Figura 9 – proposição II.14

Uma explicação inicial resulta dum olhar mais cuidadoso sobre estas provas. Como Lassalle Casanave & Panza observam, não é necessário que  $EH$  seja o resultado do prolongamento de  $DE$ , embora o texto ateste o uso do postulado 2 ( $\kappa\alpha\iota \acute{\epsilon}\chi\beta\epsilon\beta\lambda\acute{\eta}\sigma\theta\omega \acute{\eta} \Delta E \acute{\epsilon}\pi\iota \tau\acute{o}\dots$ ). O que seria essencial para a resolução de II.14 é que o segmento  $EH$  seja o cateto do triângulo retângulo  $GEH$  do qual o outro cateto, o  $GE$ , é igual à  $GE$  e a hipotenusa igual à  $GF$ . Seguindo, portanto, as instruções do Livro I poder-se-ia obter a construção desejada para a prova sem o uso do Postulado 2. Em contraste, o argumento de I.16 depende inteiramente da prolongação (supostamente) arbitrária  $CD$  (Cf. Lassalle Casanave & Panza (2012, p. 113)).

Esta suposta indeterminação na prática euclidiana parece endossar as objeções de Platão e Aristóteles acerca do uso putativo dos diagramas em favor dum modelo ideal de prova. Pareceria que uma prática matemática baseada em provas heterogêneas é dependente de procedimentos inferenciais pouco inteligíveis que, em última instância, poderiam comprometer a correção formal do raciocínio. Se, porém, há uma alternativa razoável a isto, cumpre saber como poderia resolver esta aparente falta de uniformidade do Postulado 2. Uma vez que o organizador dos *Elementos* não demonstrou interesse em especulações filosóficas — o que não é uma falta em seu currículo — as atenções agora devem incidir sobre os modelos disponíveis de análise da geometria euclidiana.

A primeira alternativa é oferecida por Avigad, Dean & Mumma (2009). A tese principal destes autores é que uma correta e satisfatória explicação da estabilidade dos *Elementos* é através da *análise lógica*. Isto equivale a dizer que a trama inferencial de Euclides deve ser reconstruída na sintaxe dalgum sistema formal desenvolvido exclusivamente para esta finalidade. No tocante ao Postulado 2, a falta de uniformidade seria resolvida adotando-se uma concepção infinitista das retas (*i.e.*, a introdução de retas infinitas em ato) e, por



consequente, a supressão deste mesmo postulado. Esta seria a garantia da construção dos pontos  $G$  e  $L$  em I.2. E como a reta é infinita *em ato*, é sempre possível tomar um segmento igual a outro dado a partir de I.3<sup>17</sup>. Por exemplo: Euclides poderia ter prolongado, em I.16,  $BE$  até um ponto qualquer  $Z$  e, em seguida, cortado este segmento em  $F$ , igual ao  $BE$ . E por simetria, o mesmo poderia ser feito em II.14. Esta tese é parcialmente endossada pelas provas I.12 e I.22, onde fala-se expressamente em retas *ilimitadas* (εὐθείων ἄπειρον).

Outra alternativa é proposta por Lassalle Casanave & Panza (2015). De acordo com eles, uma reconstrução mais precisa das provas de Euclides seria por meio duma *análise retórica*. Dentro do recente quadro conceitual sobre a prática matemática, estes autores argumentam que uma correta análise da teoria euclidiana não pode negligenciar a prática engendradora por ela. De modo que, se se observa uma prática de provas baseadas em diagramas é porque estes objetos são essenciais nos *Elementos* e, portanto, as provas de Euclides são, de fato, parcialmente baseadas em diagramas. A pedra de toque continua a ser o Postulado 2. Em favor destes autores pode-se dizer que, embora Euclides fale de retas sem limites em I.12 e I.22, isto acontece apenas nestas duas provas. Além disso, a formulação do Postulado 2 trata apenas de retas finitas (πεπερασμένην εὐθείαν).

Ambas as teses são igualmente defensáveis, ainda que cada modelo de análise destaque um tópico especial dos *Elementos*. Todavia, como o cerne desta pesquisa é uma defesa das provas heterogêneas de Euclides, a proposta de Lassalle Casanave & Panza mostra-se mais adequada ao escopo e propósito desta dissertação. De toda maneira, é preciso cuidar em observar de perto como Euclides procede e a partir daí verificar se as conclusões aferidas mostram alguma afinidade com a análise retórica; se pode ser ampliada e aclarada nalguns pontos e quais outras observações podem ser feitas em comparação com a análise lógica. Um exame mais detalhado da prática matemática euclidiana será apresentado no próximo capítulo.

## 2.5 Observações finais

As disputas em torno do papel demonstrativo dos diagramas resultam duma justa preocupação filosófica sobre a natureza do conhecimento, com especial atenção ao conhecimento matemático. A tendência comum na filosofia, ao menos desde Platão, é rejeitar provas heterogêneas sob a alegação de que são imperfeitas. Sem embargo destas observações, é oportuno destacar o fato da teoria euclidiana ter alcançado tamanha estabilidade lógico-matemática apoiando-se em procedimentos rechaçados pela filosofia. Isso reforça, ao menos momentaneamente, a tese de que a prática matemática euclidiana pode ser a chave do sucesso de suas provas diagramáticas. A confirmação desta tese perpassa doravante por uma comparação entre as reconstruções conceituais em torno do Postulado 2.

---

<sup>17</sup> I.3: *Dadas duas retas desiguais, cortar da maior uma reta igual à menor.*

## 3 Filosofia da prática matemática

### 3.1 Estratégia do capítulo

A defesa das provas heterogêneas reivindicada aqui tenta incorporar conceitos epistemológicos junto ao estudo das suas estruturas dedutivas. É interessante discutir, por esta razão, o papel conferido às representações gráficas na Grécia clássica. A seção 3.2 apresenta algumas evidências documentais sobre este tema, com especial atenção às reconstruções historiográficas de Netz (1999) e Szabó (1978). A seção 3.3 traz algumas anotações a partir da historiografia cognitiva de Netz e sua aplicação ao caso do Postulado 2. A seção 3.4 retoma a disputa filosófica ao apresentar a distinção entre atributos *exatos* e *co-exatos* proposta por Manders (2008) que, se verdadeira, poderia aclarar a maneira como Euclides usava seus diagramas.

### 3.2 Uma releitura da linguagem dos geômetras

Como ficou dito, o léxico euclidiano chama atenção por incorporar termos relativos a operações visuais ou cinemáticas numa disciplina supostamente alicerçada no intelecto. As construções geométricas são sempre formuladas como comandos, tanto nos postulados 1-3 (traçar, prolongar, descrever) como na formulação dos problemas. E mesmo no caso dos teoremas Euclides fala em “mostrar” (δείξαι) a verdade duma proposição — pois daí decorre o sentido de “demonstração” (δείχνυμι). A análise do filósofo, por sua vez, tenta encontrar nestas expressões sua real forma lógica para além da aparência gramatical ou de sua dimensão pragmática. Por isso mesmo Platão e Aristóteles, seguidos por Proclo, procuraram depurar a linguagem matemática como forma de expurgar supostas ambiguidades. No entanto, a referência amiúde a estas operações no texto de Euclides poderia ser melhor explicada no contexto duma prática onde os diagramas eram conscientemente aduzidos nas provas. Pode-se especular, a partir disso, se em sua versão final os *Elementos* incorporou resquícios duma atividade baseada em justificativas diagramáticas.

A historiografia da matemática sempre reconheceu que a geometria clássica compreendia também o uso de diagramas. E no entanto, a possibilidade do artefato gráfico ser tratado como um meio legítimo de justificação matemática sequer é considerada por Heath (1921) ou Knorr (1975). A ênfase destes autores, como já destacado, continua a ser o aspecto linguístico das demonstrações. Uma explicação parcial para este raciocínio poderia ser o fato da geometria clássica ser encarada como uma grande novidade teórica na Antiguidade.

A historiografia costuma especular sobre um suposto parentesco entre a matemática grega e a prática matemática egípcia, cuja origem parece ter sido a necessidade de demarcação territorial. Então, sob uma suposição de que no Egito não havia um sistema matemático baseado em princípios, a matemática grega gradativamente afastar-se-ia destes

elementos empíricos alcançando o ápice de seu desenvolvimento teórico pouco antes de Euclides. A primeira ocorrência de uma narrativa parecida encontra-se nas *Histórias*<sup>1</sup>, II, 109, de Heródoto<sup>2</sup>:

Este rei [Sesóstris] também (eles disseram) dividiu o país entre todos os egípcios, dando a cada um uma parcela igual de terra, e tornou esta sua fonte de receita, aferindo o pagamento de um imposto anual. E qualquer homem que foi roubado pelo rio de uma parte de sua terra poderia vir a Sesóstris e declarar o que aconteceu; então, o rei enviaria homens para que examinassem e calculassem a parte pela qual a terra estava diminuída, de modo que, depois disso, deveria pagar em proporção ao imposto originalmente estabelecido. É a partir daí, na minha opinião, que os gregos aprenderam a arte de mensurar a terra [γεωμετρική] (...)

Outrossim Proclo retoma esta narrativa a partir de um relato agora perdido de Eudemo de Rodas. Proclo afirma: “Não é surpresa que a descoberta desta [a geometria] e outras ciências tenham suas origens na necessidade, uma vez que tudo no mundo da geração procede da imperfeição para a perfeição” (Proclo (1992, p. 52)). Assumindo então que a geometria grega aproximava-se mais da perfeição, Proclo continua: “Assim, eles [os egípcios] passariam naturalmente da percepção sensível para o cálculo e a partir daí para a razão” (Proclo (1992, p. 52)).

De fato, Szabó (1978) até mesmo conjectura a existência de alguma ruptura na matemática grega antes de Euclides. Esta ruptura, diz ele, teria resultado numa suposta atitude chamada de “anti-empirista” ou mesmo “anti-visual”. Esta atitude teria seu início na descoberta das magnitudes incomensuráveis e também contaria com a influência de filósofos associados com a Escola de Eleia, especialmente no desenvolvimento de demonstrações por redução ao absurdo (Cf. Szabó (1978, pp. 1919-216)). Esta tese é parcialmente compartilhada por Knorr, o qual observa que a descoberta das magnitudes incomensuráveis já não poderia basear-se em nenhum tipo de apelo à própria prática matemática para justificar suas declarações (Knorr (1975, p. 36)). Ou seja: a existência destas magnitudes dependeria doravante unicamente numa dedução exclusivamente linguística.

Agora, se é correto pensar que tal ruptura existiu, a estabilidade da geometria euclidiana continua sem uma explicação satisfatória. Em outras palavras, como um modelo de prova dependente de justificativas diagramáticas — *i.e.*, da manipulação de objetos sensíveis — é, não obstante, independente de qualquer tipo de verificação empírica? Seria justo pensar

<sup>1</sup> Cf. Carlos Schrader (1992).

<sup>2</sup> Este relato fora preservado pelo historiador e geógrafo Estrabão em seu livro *Geografia*, XVII.1 (tradução: Horace Leonard Jones (1917)): “Uma divisão exata e minuciosa do país foi exigida pela confusão frequente dos limites ocasionados no momento de cheias do Nilo, que tira, acrescenta e altera as várias formas dos limites e oblitera outras marcas pelas quais a propriedade de uma pessoa se distingue da outra. Por conseguinte, foi necessário medir a terra repetidamente. Daí é dito que a geometria originou-se aqui [no Egito], como a arte de manter delimitações, e a aritmética originada com os fenícios, a partir do comércio”. Ver Heath (1921, pp. 121-128) e Bicudo (2009, Introdução, p. 83).

que o segredo da estabilidade dos *Elementos* reside na *maneira* como estes objetos são manipulados.

De outro lado, Reviel Netz (1999) propõe uma releitura da historiografia da matemática desde um ponto de vista cognitivo. Esta proposta, mais especulativa que as de Heath e Knorr, privilegia a prática matemática ao reconsiderar também o processo de descoberta e comunicação de resultados matemáticos. Netz conjectura, por exemplo, que as comunicações ocorriam de dois modos. Eram exclusivamente discursivas, para matemáticos mais distantes, ou apresentações semi-orais, com o auxílio de diagramas, para um grupo de matemáticos próximos (Netz (1999, pp. 13-14)). Isto sugere que os *Elementos* foi pensado originalmente para circular internamente e que as provas eram apresentadas publicamente para uma seleta audiência. Logo, a linguagem euclidiana era algo muito familiar a este grupo. Netz afirma ainda que o uso de diagramas marcados por letras (*lettered*) era algo predominante na matemática grega, com raríssimas exceções na aritmética. A razão para isto, continua Netz, é que o diagrama era visto como uma regra em face da qual pouco desvio era admitido (Netz (1999, p. 13)). Ou seja: os diagramas eram indispensáveis para a leitura dos textos<sup>3</sup>.

Portanto, o uso de representações gráficas era algo muito comum em contextos intelectuais na Grécia clássica, não se restringindo à matemática, mas, naturalmente, sendo esse o caso paradigmático. Eram auxílios recorrentes na cartografia geográfica<sup>4</sup>, na arquitetura e na anatomia, onde ainda hoje são encontrados. Cabe notar que mesmo na aritmética, onde Netz admite um meio alternativo de representação, Euclides segue usando representações gráficas. Seja em sua teoria das proporções (Livro V), uma suposta herança do acadêmico Eudoxo de Cnido, ou no tratado aritmético (Livros IX-XII), o procedimento é sempre através dos traçados<sup>5</sup> (διά-γράμματα).

Dos materiais usados para desenhar os diagramas, Netz conjectura uma predileção pela óstraco (em cerâmica, portanto) ou mesas de cera. Somou-se a isso os papiros, já

<sup>3</sup> “Aristóteles usava diagramas marcados por letras em suas aulas. As letras faziam sentido no texto caso houvesse referência aos diagramas — o que é dito em algumas passagens. Além disso, Teofrasto mencionará mapas no *pinakes* [...] como parte das propriedades da escola. E finalmente, Aristóteles se refere aos *anatomaí*: livros que continham desenhos anatômicos que os alunos deveriam consultar como um complemento necessário às aulas” (Netz (1999, p. 14)).

<sup>4</sup> “Foi no reinado de Cleômenes que Aristágoras, o tirano de Mileto, chegou a Esparta. Quando ele teve um encontro com o rei, como relatam os lacedemônios, trouxe consigo uma tábua de bronze sobre a qual estava gravado o mapa de toda a terra e todo o mar e todos os rios” (Heródoto, *Histórias*, V.49).

<sup>5</sup> Heath é cauteloso ao observar que o método de resolução euclidiana é sempre geométrico. Isso não quer dizer, continua ele, que Euclides não concebesse estas questões como não-algébricas, mas sim que o método geométrico fosse o padrão. Isso significaria então que o tratamento geométrico dos Livros II e VI não teria um valor em si. Uma observação similar é feita por Levi para o qual a decomposição em triângulos de qualquer figura poligonal juntamente com a proposição II.1 e as Noções Comuns permitiria reduzir operações sobre áreas às mesmas operações sobre segmento sem haver necessidade de representações aritméticas (Levi (2001, p. 165)). Entretanto, o próprio Beppo Levi descreve o Livro II como um tratado de álgebra, desconsiderando sua advertência sobre eventuais projeções sobre os métodos de Euclides (Levi (2001, p. 171)). Ver também Knorr (1975, p. 26).

no século de Euclides, nos quais os diagramas eram dispostos ao fim, como uma nota de rodapé à prova. Na ausência de artigos mais simples como lápis e papel, é plausível supor que os diagramas eram previamente preparados para uma seleta audiência. O melhor indício é a própria linguagem empregada no texto de Euclides. Em I.1, como nas demais provas, a construção dos círculos vem acompanhada pela expressão γεγράφθω (descrever), para a qual a melhor tradução seria: seja admitido que  $ABC$  ficou descrito, etc. Deste modo, a referência ao ponto  $C$  nesta prova deveria ser reconhecida e aceita pela audiência. Depreende-se daí por que as construções auxiliares ou provas alternativas, como as de Proclo, são escassas nos *Elementos*: simplesmente não havia meios materiais adequados para apagar a configuração disposta. À audiência caberia, portanto, apreender *aquela* prova para, então, ir aos seus corolários e casos. Mas, para haver sucesso nisso, seria imperativo, de um lado, o diagrama ser produzido adequadamente, posto que a mais fina alteração comprometeria toda a trama demonstrativa e, de outro, ser apresentadas algumas regras que autorizem o uso do diagrama. É nesta dimensão normativa que se espera explicar o procedimento adotado no tocante ao Postulado 2.

Além dos diagramas geométricos, há evidências que atestam a existência duma variedade de outros artefatos gráficos na Grécia clássica e no período helenístico. E não apenas a régua e o compasso — portanto, configurações bidimensionais simples envolvendo retas, círculos e semicírculos, tais como as de Euclides —, mas também as configurações bidimensionais mais complexas envolvendo seções cônicas — elipses, parábolas e hipérbolas — eram conhecidas e usadas; igualmente as configurações decorrentes da teoria esférica. Por fim, técnicas para representar configurações tridimensionais, mais raro, também foram registradas entre pintores e matemáticos<sup>6</sup>. Com isso percebe-se as exigências de habilidades específicas na leitura dos artefatos gráficos. Como acontece hoje na cartografia, onde uma legenda é disposta adjunta a uma representação topográfica duma região, também os diagramas na matemática exigem do geômetra uma clara percepção de quais fatos são relevantes para a prova e quais são acidentais.

Diante deste cenário, não é estranho haver referências a operações com diagramas na linguagem dos geômetras. Ainda assim, alguém poderia argumentar, recordando Platão ou Aristóteles, que isto não mostra que as provas de Euclides fossem, de fato, baseadas em diagramas. Ocorre, porém, que até mesmo a palavra “diagrama” (διάγραμμα), em sua acepção técnica, não designava apenas configurações de linhas ou uma figura própria da geometria, mas sim *a própria proposição matemática*, um teorema matemático ou, em raras ocasiões, era usada para referir-se à toda prova. De fato, a percepção destes artefatos na literatura grega leva Netz a ir além e afirmar uma *relação metonímica* entre diagramas e proposições (Netz (1999, pp. 35-43)).

<sup>6</sup> Exemplos de representações gráficas tridimensionais encontra-se nos trabalhos do matemático Arquitas de Tarento. Ver Heath (1921, pp. 213-214; pp. 246-249).

O termo é usado da primeira maneira (*i.e.*, figura geométrica) por Platão em *República* 529c. Pouco após ter comentado sobre o ofício dos geômetras em 510, já mencionada, ele faz uma advertência sobre *essas figuras* (διαγράμματα), as quais poderiam ser examinadas por alguém versado na geometria, não pela verdade que delas pode-se extrair — acerca das relações de igualdade, do duplo ou qualquer outra proporção, em suas palavras —, mas sim pela beleza do trabalho. Em outra ocasião, desta vez em *Eutidemo*, 290c, Platão convida seu interlocutor a olhar o trabalho dos geômetras, os quais fazem diagramas (ποιοῦσι τὰ διαγράμματα), observação muitíssimo parecida àquela em *Fédon*, 73b<sup>7</sup>, mencionada na Introdução desta dissertação.

Estes relatos de Platão são parcialmente endossados pelo testemunho de Xenofonte, cuja memória apresenta um Sócrates muito mais preocupado com a praticidade da geometria e a relevância dos diagramas na educação dos jovens helenos<sup>8</sup>:

Por exemplo, no caso da geometria, dizia ele que o seu estudo devia ser feito até que o aluno, quando fosse necessário, estivesse habilitado a medir correctamente uma parcela de terreno, para a comprar ou vender, para a dividir, ou para justificar o seu rendimento. Esta parte é bastante fácil de aprender e, prestando atenção, pode-se, ao mesmo tempo, conhecer o tamanho da propriedade e calcular de que modo foi medida. Pelo contrário, desaprovava que se estudasse geometria até chegar às figuras [διαγραμμάτων] incompreensíveis, uma vez que não via qual a utilidade de semelhante saber. Não que fosse ele próprio desconhecedor dessas matérias mas dizia que estudos como esses consumiam toda a vida do homem, impedindo-o de adquirir outros saberes úteis (Xenofonte, *Memoráveis*, Livro IV, 7.3).

Será Aristóteles quem parece tomar “diagrama” no sentido proposto por Netz. Em *Metafísica*, 1051a22, o autor fala expressamente da prova dum διαγραμμάτων, o que só faz sentido se se adota a tradução “proposição geométrica”<sup>9</sup>. É preciso, contudo, ponderar as ocorrências destes termos no *corpus aristotelicum* por não haver fortes indícios se διάγραμμα pertencia à linguagem da matemática ou à linguagem sobre a matemática. Ou seja: se era uma expressão ordinariamente empregada pelos geômetras ou se tinha um sentido especial nas teorias sobre o conhecimento geométrico. Tome-se como exemplo a passagem em *Meteorológica*, 375b18<sup>10</sup>. A naturalidade com que o diagrama é aduzido, sem incorporá-lo, porém, ao texto original, reforça a conjectura de Netz acerca da presença consciente dos artefatos gráficos em contextos intelectuais. Recorde-se, no entanto, que em *Segundos Analíticos*, 76b40-44 Aristóteles é até mesmo taxativo ao dizer que o geômetra não poderia concluir nada a partir das linhas traçadas, mas antes daquilo representado

<sup>7</sup> Para a passagem de *Eutidemo*, cf. *Diálogos II*, traduzidos por Calonge Ruiz *et al.* (1983); sobre *Fédon*, cf. *Diálogos III*, traduzidos por García Gual, Martínez Hernández & Lledó Iñigo (1988).

<sup>8</sup> Cf. Ana Elias Pinheiro (2009, pp. 276-277).

<sup>9</sup> Cf. Martínez (1994).

<sup>10</sup> Cf. Lee (1952).

por estas. Depreende-se destas passagens que o diagrama era, no Liceu, um excelente componente adjunto ao raciocínio, não confundido-se, porém, com o próprio argumento.

A mesma indeterminação encontra-se em Proclo, em seu comentário à prova I.1. Fica dito aí ter sido Hipócrates de Chio o primeiro a descobrir muitas coisas na geometria, tornando-a mais robusta em suas provas (τα διαγράμματα) e levando-a, de fato, a um novo estado de ser. Ora, como é pouco provável Proclo ter em mente os artefatos gráficos, sobretudo por deter-se em provas alternativas onde seria possível obter uma configuração distinta, sua observação incide sobre as conquistas teóricas numa disciplina até então dependente de justificativas visuais.

A expressão διάγραμμα e seu cognato διαγράμματα jamais ocorrem no texto de Euclides. Nos raros momentos em que a figura é citada numa prova, o verbo escolhido é καταγράφω (desenhar), como em II.7, onde pela primeira vez é dito: “fique completamente desenhada a figura” (καταγεγράφθω τὸ σχῆμα)<sup>11</sup>. A locução aparece também em II.8, na qual lê-se: “fique descrita completamente a figura, em dobro” (καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα)<sup>12</sup>.

Outra observação desta natureza reforça o argumento de Netz. Em comentário ao *Teeteto* de Platão, Heath (1921, p. 203) afirma que o verbo γράφω, o qual comumente é traduzido por “desenhar”, em algumas circunstâncias significaria “provar”. No entanto, quando Euclides solicita o desenho duma figura no contexto duma prova sem mais, isso depende de autorizações já reconhecidas e aceitas pela audiência, as quais evocam igualmente o artefato linguístico. Ou seja: um diagrama, por si só, não constitui uma prova. Convém lembrar, de outro lado, a fraseologia adotada junto aos postulados 1-3. Pode-se dizer agora que nos momentos em que se solicita a construção dalgum ente, o entendimento poderia ser: seja admitido que foi provado a construção dos entes tais e tais. O que pode-se extrair disso, mais uma vez, é a indispensável participação dos diagramas em provas geométricas<sup>13</sup>.

Vale notar também as escolhas dos termos por parte de Knorr e Netz. O primeiro sugere que “diagrama” e “proposição (geométrica)” eram sinonímicas, ao passo que o segundo opta por uma figura retórica. A primeira escolha evoca a ideia que artefatos gráficos e linguísticos pertencem à mesma categoria de coisas, ao passo que a segunda evita a tese mais forte, sem argumentar em seu favor, com uma tácita observação sobre uma distinção entre ambos, apesar duma proximidade semântica. Para a presente discussão, a interpretação de Netz parece mais apropriada, ainda que este não seja o espaço adequado para ajuizar os méritos de suas observações. É forçoso reconhecer, no entanto, que apesar

<sup>11</sup> Netz observa ainda que Pappus usa διάγραμμα como equivalente a “proposição”; ao se referir a um diagrama no corpo de uma prova ele usa ὑπογράφη. Em algumas ocasiões, é até mesmo dito θεωρήματα ὑπογράμματα. Arquimedes, por sua vez, fala em σχήματα. Proclo não usa diagramma para se referir ao diagrama presente; para esse, é comum o uso de καταγραφή ou υπογεγραμμένη, no estilo de Euclides. Ver Netz (1999, p. 37).

<sup>12</sup> Cf. III.33, IV.5, VI.27-29, X.91-96, XIII.1-5 e XIII.13.

<sup>13</sup> Cf. Knorr (1975, pp. 72-73).

desta discussão, ainda não há garantias de como o geômetra pensava sua atividade; se pensava ser o diagrama a exibição de fatos relacionados com entes matemáticos, ou se se tratava duma escolha estilística, ou se mesmo pertenciam à terminologia técnica.

Uma situação bastante similar ocorre com o termo δείχνωμι, traduzido aqui por “prova”. Com raiz no verbo δείξαι — e variadas acepções na literatura clássica, de Homero<sup>14</sup> a Ésquilo<sup>15</sup> —, não há fortes indícios duma aplicação unívoca quando evocado ao fim das provas de Euclides (ὅπερ ἔδει δείξαι). Na esteira do que foi discutido até agora, é aceitável pensar o processo de prova tal qual a exposição pública do raciocínio matemático, cuja referência ao diagrama apareceria também ao final, como forma de mostrar que fora feito o requisitado.

Essa linha interpretativa não parece ter recebido uma atenção generosa dos autores consultados. A discussão mais próxima vem de Szabó (1978), para quem δείξαι deveria ser lido num sentido meramente figurativo na matemática. Isso significaria então que os diagramas não desempenham nenhum papel genuinamente demonstrativo nos *Elementos*. Ou seja:

(...) as demonstrações de Euclides não estão relacionadas com tornar alguma coisa visível. As palavras dele sugerem que ele está menos interessado em tornar suas proposições visualmente evidentes do que convencer o leitor da verdade através de uma sequência de argumentos abstratos. Ao contrário da opinião anterior, a matemática euclidiana não é realmente “visualizável” (Szabó (1978, p. 191)).

Ainda que a tese de Szabó seja uma honesta defesa da geometria euclidiana, ela não parece compatível com o próprio texto de Euclides e as evidências disponíveis. Na verdade, Szabó tentou dirimir as críticas a Euclides recusando-lhe sua maior façanha. De modo que é forçoso persistir no caminho inverso, a saber, que a recusa do papel demonstrativo dos diagramas nas provas de Euclides não explica por completo os aspectos mais importantes sobre a estabilidade de sua teoria. Logo, se há nestas provas o uso ostensivo de representações gráficas, não há porquê recusar o estatuto epistemológico a estes artefatos. Por isso mesmo é preciso olhar com especial interesse para a prática matemática e se porventura pode-se aclarar por aí a presença de expressões relativas a operações visuais.

<sup>14</sup> *Ilíada*, III.452: “Mas ninguém, entre troianos e seus ínclitos aliados, pôde *mostrar* (δείξαι) a Menelau, dileto de Ares, onde estava Alexandre” (ἀλλ’ οὐ τις δύνάτο Τρώων κλειτῶν τ’ ἐπικούρων δείξαι Ἀλέξανδρον τότ’ ἀρηϊφίλω Μενελάω).

<sup>15</sup> *Prometeu*, linhas 455-458: Eles não tinham sinais do inverno, nem da florida primavera nem do frutífero verão, no qual poderiam colocar a salvo seus frutos. Faziam tudo sem julgamento até eu *ensiná-los* a discernir o nascer e o ocaso das estrelas, algo difícil distinguir (ἦν δ’ οὐδὲν αὐτοῖς οὔτε χειμάτος τέχμαρ/οὔτ’ ἀνθεμώδους ἦρος οὔτε καρπίμου/ θέρους βέβαιον, ἀλλ’ ἄτερ γνώμης τὸ πᾶν/ ἔπρασσον, ἔστε δὴ σφιν ἀντολὰς ἐγὼ/ ἄστρον ἔδειξα τὰς τε δυσχρίτους δύσεις). Cf. Sottomayor (1992).



### 3.3 Procedimento *dia' grammon*: anotações historiográficas

O recurso a representações visuais na Grécia clássica era algo muito comum. Considerando, ademais, o processo de letramento, o sistema diagramático grego à época de Euclides era mais complexo e, ao mesmo tempo, mais informativo. Seria até mesmo possível dizer, e Netz de fato diz, que no caso da matemática, o uso de diagramas era mais importante, desde um ponto de vista epistemológico, entre os gregos do que entre os egípcios e os babilônios<sup>16</sup>. Não obstante esta revelação, que não precisa ser examinada em detalhes, Netz fala que a elite grega era educada para contemplar estas representações e não produzi-las. Logo, a audiência histórica de Euclides, supondo-se que a descrição de Netz é correta, era treinada para contemplar o diagrama em exibição e não para produzi-los ao longo das aulas. Essa poderia ser uma maneira de evitar a proliferação de outros tantos diagramas. Note-se que, sob esta suposição, Euclides deveria ter um maior cuidado na produção dos artefatos gráficos. Isso porque toda audiência deveria enxergar (sempre) os mesmos fatos.

Netz conjectura, por outra parte, que esta relação contemplativa não resultou, ao menos não imediatamente, numa abordagem puramente teórica da matemática e dos seus diagramas. Uma razão para se pensar desta maneira, continua ele, é que o artefato gráfico não seria visto como a representação de alguma coisa, como Platão e Aristóteles diziam, senão que era a própria coisa, *i.e.*, o ente matemático sob estudo.

O diagrama matemático não evoluiu como uma modificação de outros diagramas práticos, tornando-se cada vez mais teórico até que finalmente o diagrama geométrico abstrato foi desenhado. Os diagramas matemáticos podem ter sido os primeiros diagramas. O diagrama não é uma representação de outra coisa; é a própria coisa. Não é como uma representação de um edifício, é como um edifício, sobre o qual atuou-se e construiu (Netz (1999, p. 60)).

Porém, ainda que justificativas diagramáticas sejam admissíveis na matemática, seria preciso haver restrições pontuais ao uso do artefato gráfico. Esta é a lição a ser preservada das palavras de Platão e Aristóteles. O artefato gráfico não pode justificar, *e.g.*, se, de duas magnitudes quaisquer, qual das duas é a maior, ou se são iguais; ficam também restritas ao texto afirmações concernentes à proporcionalidade. Logo, se o diagrama não pode satisfazer propriedades ou relações métricas, como uma prática matemática poderia evitar que estas propriedades ou relações sejam deduzidas a partir do artefato gráfico?

A explicação de Netz, a ser discutida nestes próximos parágrafos, é que o texto “esconde” asserções *implicitamente contidas no diagrama* (Netz (1999, p. 26)), cuja percepção,

<sup>16</sup> Netz (1999, p. 58): “Existiam, é claro, os diagramas babilônios e chineses — embora os diagramas babilônios sejam menos centrais para a matemática da Babilônia, ou pelo menos para textos matemáticos babilônios (...), enquanto os diagramas chineses pertencem a um contexto diferente de representações dotadas de um rico significado simbólico (...). Em nenhum destes casos há uma referência ao diagrama com um sistema semelhante ao uso grego de letras. Normalmente, no caso babilônio, a figura é referida através de seus elementos geométricos (por exemplo, largura e largura dos retângulos), ou então a figura é inscrita com números que fornecem medidas de alguns de seus elementos” (...).

acrescenta-se aqui, em prol do argumento, poderia tornar uma prova mais fácil de ser acompanhada pela audiência. Ou seja: o diagrama codificaria algumas afirmações geométricas requisitadas nas provas que, se preciso fosse, poderiam ser verbalizadas pela audiência. Ainda sobre a cooperação bilateral entre o texto e o diagrama, Netz afirma que tanto o diagrama quanto o texto fixam referências, processo chamado por ele de *especificação*, dividida em quatro classes. Esta hipótese seria uma estratégia para acercar-se da maneira como os geômetras fixam referências a entes matemáticos através das letras no diagrama que aparece junto à prova.

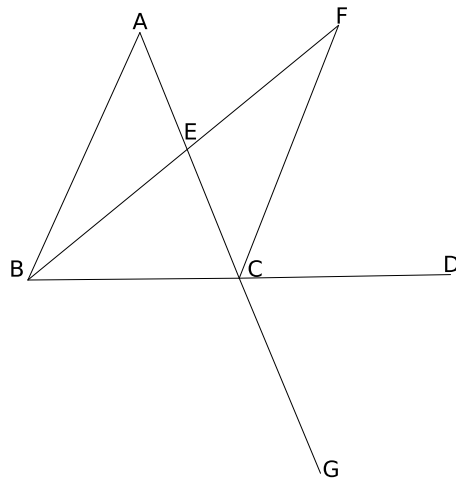


Figura 10 – proposição I.16

Para exemplificar isto, considere-se a prova I.16, mencionada no capítulo 2. Para provar que o ângulo externo  $ACD$  do triângulo  $ABC$  é maior que os respectivos ângulos internos e opostos, *i.e.*, os  $CAB$  e  $ABC$ , Euclides procede da seguinte forma. Assumindo-se que  $CD$  foi prolongado continuamente com a  $BC$ , fique cortado  $AC$  no ponto  $E$ , donde  $AE$  é posta igual à  $EC$  (teorema I.10). Em seguida, fique traçada a  $BE$  e fique produzida a  $BE$  até um ponto  $F$ , de modo que seja posta  $EF$  igual à  $BE$ . Por fim, seja traçada  $FC$  e, de outro lado, fique prolongada a  $AC$  até um ponto  $G$ . E como  $AE$  é igual à  $EC$  e, de outro lado, a  $BE$  à  $EF$ , as duas  $AE$ ,  $EB$  são iguais às  $CE$ ,  $EF$ , e o ângulo sob  $AEB$  é igual ao sob  $FEC$ , pois estão no vértice (teorema I.15). Portanto, a base  $AB$  é igual à  $FC$  e o triângulo  $ABE$  é igual ao  $FEC$  e os ângulos restantes iguais entre si (teorema I.4). Logo, o sob  $BAE$  é igual ao sob  $ECF$ . E como o  $ECD$  é maior do que o sob  $ECF$ , portanto, o sob  $ACD$  é maior do que o sob  $BAE$ ; QED.

Netz começa falando da *especificação completa*. Nesta classe, a saída diagramática é univocamente fornecida pelo texto; *v.g.*, quando ficou traçada uma reta entre dois pontos, como as  $BE$ ,  $FC$ . O diagrama, portanto, não acrescenta nada que já não tenha sido enunciado textualmente. Um outro exemplo seriam as letras usadas para designar cada vértice de um triângulo.

Em seguida, a *subespecificação*. Aqui a saída diagramática não é univocamente fornecida pelo texto, um procedimento, portanto, não genuinamente construtivo, como ocorre com o Postulado 2 aplicado nas prolongações de  $BC$  e  $BE$ . Nem o texto tampouco o diagrama fornecem pistas sobre como deveria ser a saída gráfica. Ainda assim, a reta requisitada por Euclides, independente da largura, só poderia ser produzida numa única direção.

Em terceiro lugar, a *não especificação completa*. Isso acontece quando o texto não determina a saída gráfica. Suponha que foi construído um ponto qualquer  $Z$  sobre a reta  $BF$ . Ora, ou ponto cai no segmento  $BE$  e, portanto, dentro do triângulo  $ABC$ , ou cai no segmento  $EF$  e, neste caso, fora do  $ABC$ . Note-se que por este raciocínio a audiência poderia ser facilmente conduzida ao erro. Este procedimento não poderia aplicar-se, por exemplo, ao ponto  $E$ ; é que  $AE$  precisa ser igual à  $EC$ .

Por fim, a *especificação transitiva*. Isso acontece quando uma letra muda sua natureza ao longo da prova, passando da subespecificação para a especificação completa, mas não o oposto, tampouco para a não especificação completa (Netz, (1999, p. 20)). Considere-se, novamente, a prolongação  $CD$ . Uma vez admitida esta construção, pode-se deduzir, olhando para o diagrama, que o ponto  $C$  está entre  $B$  e  $D$ .

Dentro deste quadro, o Postulado 2 pareceria ser o resultado duma subespecificação na prolongação de  $BC$ , enquanto deveria ser univocamente determinado na prolongação de  $BE$ . O problema, novamente, é não haver indícios de como sair dum tipo de especificação para outro. Como já foi mencionado no capítulo 2, Euclides não explica como procede ao usar o Postulado 2 para deduzir a igualdade entre  $BE$  e  $EF$ . Cumpre observar, além, que a relação mereológica<sup>17</sup> entre os ângulos  $ACD$ , o maior, e o  $ECF$ , o menor, é verificada no diagrama<sup>18</sup>, embora sua justificativa seja textual, através da Noção Comum 5. Por fim, note-se que a segunda parte da prova, apesar de ser enunciada, é deixada para a audiência. Para mostrar que o  $ACD$  é maior que o  $ABC$  seria o suficiente seguir as instruções disponíveis. Agora, como a audiência poderia obter sucesso nisso?

A questão realçada aqui diz respeito às autorizações um audiência deveria, supostamente, conhecer e seguir. Recorde-se que os postulados poderiam cumprir, ao menos *prima facie*, esta exata função a nível textual. Logo, se cabe ao texto justificar alegações sobre proporções e congruência (ou equivalência), ao diagrama cumpriria cancelar (ou codificar) um tipo peculiar de afirmações. Portanto, se é o caso que o diagrama codifica (ou “esconde”, como Netz afirma) algumas proposições, resta saber como um sujeito poderia acessá-las.

Uma observação inicial a este respeito gira em torno das referências explícitas nos *Elementos* e ao que Netz chama de *tool-box*, que, ainda segundo a sua terminologia, seriam relativas ao gênero de ciência sob estudo (Netz (1999, pp. 168-170). As referências explícitas,

<sup>17</sup> Sobre este tipo de inferência em provas heterogêneas, ver Lassalle Casanave (2013) e Lassalle Casanave (2012).

<sup>18</sup> Ver Heath (1908, pp. 332-33).

como sugere o nome, seriam afirmações incorporadas na versão final do texto, como as instruções em I.16. E também a menção a algum teorema já demonstrado no mesmo tratado. Neste particular, deve-se reconhecer que Euclides é bastante elusivo, excetuando-se uma única passagem na prova XIII.17, quando fala do teorema XI.38<sup>19</sup>. Isso não poderia ser diferente. Afinal, a circulação dos manuscritos era muito mais restrita, não fazendo sentido, por isto, acrescentar referências cruzadas ao que deveria conhecido pela audiência. Ora, o fato de Euclides não se importar em fazer referências explícitas pode sugerir, uma vez mais, que suas provas eram apresentadas oralmente (ou seguiam uma apresentação semi-oral), como fazem, por exemplo, os litigantes no contexto dum julgamento. Seria possível supor, portanto, que as habilidades exigidas pela audiência no que diz respeito ao diagrama não foram devidamente incorporadas na versão final dos *Elementos*, muito embora também seja razoável pensar que o texto permite uma reconstituição, ainda que parcial, deste cenário argumentativo.

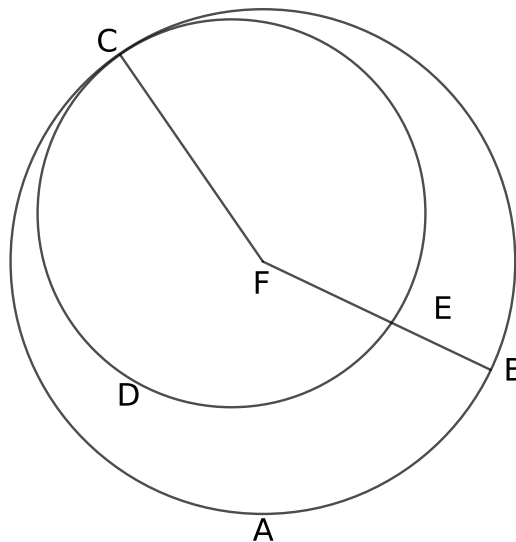


Figura 11 – proposição III.6

Esse conhecimento comum, subentendido, por assim dizer, que poderia ser pressuposto da audiência, é o *tool-box*. Cabe notar, porém, que este conhecimento requerido no contexto de uma prova, de acordo com Netz, deveria estar explicitado proposicionalmente nalgum lugar no texto. “Em alguns casos, é possível identificar postulados que os gregos ‘deixaram

<sup>19</sup> Provou-se em XI.38 que caso os lados dos planos opostos dum cubo sejam cortados em dois, e pelas seções sejam prolongados planos, então a seção comum dos planos e a diagonal do cubo cortam-se em duas. Já em XIII.17 mostra-se como construir um dodecaedro, o qual deve ser contido por uma esfera; além disso, que o lado do dodecaedro é uma irracional, chamado apótomo. Ao construir uma reta *OZ*, a qual corta o diâmetro dum cubo numa bissetriz, a justificativa é: isso foi provado no penúltimo teorema do Livro onze (τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελευτῶ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου).

de fora' e que foram substituídos pelo diagrama" (Netz (1999, p. 180). Tome-se como exemplo o diagrama disposto em III.6 dos *Elementos*<sup>20</sup>.

Suponha-se que os círculos  $ABC$  e  $CDE$  se tangenciam no ponto  $C$ . Como é possível perceber a partir do diagrama apresentado, Euclides deixa para a audiência a prova do caso em que os círculos se tangenciam externamente. A prova segue-se como uma redução ao absurdo. Supondo-se que  $F$  é o centro de  $ABC$  e  $CDE$ , seja traçada a  $BC$ ; seja traçada também a  $FE$ , prolongada na sequência até o ponto  $B$ . Logo,  $FC$  é igual à  $FB$ ; e também a  $FC$  é igual à  $FE$ . Portanto,  $FB$ , o todo, é igual à  $FE$ , uma de suas partes. De fato, é o diagrama que mostra que  $FE$  é parte da reta  $FB$ ; portanto, é um absurdo afirmar que são iguais. Segundo a proposta de Netz, a audiência de Euclides deveria conhecer a seguinte proposição supostamente codificada no diagrama: *caso o raio de um círculo dado seja prolongado continuamente, a reta prolongada e o círculo dado se intersectam em um ponto*. Agora, se isso é verdadeiro sobre a geometria euclidiana, qual o critério adotado? Ou seja: sob quais condições a audiência poderia usar o diagrama?

Netz argumenta que a geometria euclidiana viria a formar parte do currículo matemático à época de Apolônio e Arquimedes. Para as audiências destes respectivos matemáticos o conhecimento dos *Elementos* deveria ser pressuposto. "Porém, ao enfatizar a existência da 'tool-box', é claro que diferentes pessoas devem ter internalizado isso em graus variados, ou que os alunos devem ter conhecido isso menos do que iniciados" (Netz (1999, p. 217)). Portanto, a audiência histórica de Apolônio ou Arquimedes deveria ter um conhecimento elementar sobre a geometria euclidiana. Agora, se isto era o caso, a pergunta volta-se para o conteúdo da *tool-box* da prática matemática de Euclides. Ou seja: qual conhecimento deveria ser pressuposto de uma audiência euclidiana?

Importa insistir, de outro lado, que ao falar do papel da audiência no entendimento da prova matemática, Netz não considera duas possíveis objeções. Em primeiro lugar, seria possível dizer que uma prova dependente de audiência não poderia assegurar a correção formal de uma inferência dedutiva. É completamente irrelevante saber quem apresenta ou acompanha um argumento para decidir se uma determinada instância argumentativa é válida ou não. Em segundo lugar, e na esteira desta primeira objeção, seria possível lançar mão de algum argumento sobre o relativismo da prova matemática em função da constituição histórica e social da audiência. Ao destacar o contexto da descoberta, Netz não ultrapassa os limites da constituição histórica da audiência euclidiana sem considerar também como outro grupo de indivíduos poderia estar convencido que as provas heterogêneas de Euclides são legítimas. Aliás, ele até mesmo busca referendar a prática matemática euclidiana sob a hipótese de que esta era invisível aos seus praticantes. Em outras palavras, ainda que o diagrama fosse um mecanismo epistemológico eficiente, um

---

<sup>20</sup> III.6: *Caso dois círculos tangenciem-se, não será deles o mesmo centro*

sujeito não saberia dizer porquê isso é o caso (Netz (1999, p. 189))<sup>21</sup>.

Isto posto, a primeira coisa a reter-se em mente é que no contexto duma prática intelectual, como a matemática, há um conjunto de normas a viger sobre operações de acordo com os objetivos almejados e quais são os recursos disponíveis. É plausível supor, por isto, que existiam na prática matemática euclidiana alguns dispositivos normativos sobre as operações com diagramas; que algumas afirmações poderiam ser justificadas a partir dele e outras de exclusiva competência do texto. É preciso então retornar ao problema filosófico sobre o uso dos diagramas sem ignorar, é claro, as anotações historiográficas feitas até o momento.

### 3.4 Os atributos exatos e co-exatos nas provas euclidianas

Decerto os argumentos de Netz e Szabó, cada qual à sua maneira, ajudam a entender melhor o funcionamento da prática matemática de Euclides. Ainda assim, a questão sobre a estabilidade dos *Elementos* não parece ter sido propriamente considerada pela historiografia. Cabe insistir, por outra parte, que o sucesso da geometria euclidiana não poderia estar condicionada ao contexto histórico a partir do qual emergiu. Ou seja: para além das evidências documentais, é preciso discutir de que maneira um sujeito obtém conhecimento a partir de uma prova heterogênea. Daí a necessidade em tratar a audiência euclidiana desde uma perspectiva mais abstrata, considerando as habilidades que qualquer agente humano poderia manifestar, seja na Alexandria do séc. III a.C. ou na Bahia do séc. XXI.

Estas observações, no entanto, ainda não são suficientes para resgatar as provas heterogêneas de Euclides. Pois o problema agora não é apenas sobre a ênfase na prática matemática, mas sim em saber se neste contexto é possível evitar a ocorrência de alguma inferência inválida em vistas da natureza imperfeita dos diagramas. A dimensão deste problema pode ser apreendida através de alguns exemplos de falácias geométricas, como as analisadas por Maxwell (1959). Numa destas falácias, o autor ensina como “provar” que todos os triângulos são isósceles. Com isso ele pretendia mostrar como as justificativas diagramáticas de Euclides poderiam facilmente induzir um sujeito ao erro.

A “prova” apresentada por Maxwell segue da seguinte maneira. Seja um triângulo  $ABC$ ; é preciso mostrar que o lado  $AB$  é igual ao  $AC$ . Seja o bissetor interno do ângulo  $BAC$ , o qual encontra a perpendicular à reta  $BC$  no ponto  $C$ , cortando  $BC$  em duas. Seja traçada  $OD$ ,  $OQ$  e  $OR$  perpendiculares às  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Logo, como  $DO$  é igual a si mesmo,  $DB$  é igual à  $DC$  e os ângulos  $ODB$  e  $ODC$  são iguais, segue-se por I.4 que o triângulo  $ODB$  é igual a  $ODC$  e o lado  $OB$  é igual a  $OC$ . De maneira similar, prova-se que, por ser  $AO$  igual a si mesma e os ângulos  $RAO$  iguais aos  $QAO$  e  $ARO$

---

<sup>21</sup> Cf. Netz (1999, Introdução).

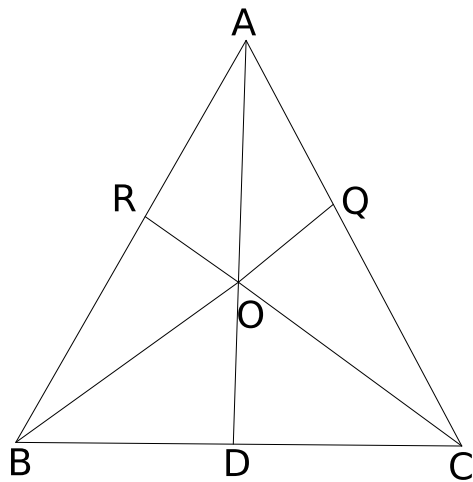


Figura 12 – Exemplo duma falácia geométrica

a  $AQO$ , então os triângulos  $ARO$  será igual ao  $AQO$ ; logo,  $AR$  é igual à  $AQ$ . Ora, dos triângulos  $OBR$  e  $OCQ$ ,  $ORB$  é igual a  $OQC$  por serem retos. E já foi provado a  $OB$  igual à  $OC$  e a  $OR$  igual à  $OQ$ . Logo, os triângulos  $ORB$  e  $OQC$  são iguais e disso se segue a igualdade entre  $RB$  e  $QC$ . E como a  $AB$  é igual à  $AR$  mais  $RB$  e também igual à  $AQ$  mais  $QC$ , então  $AB$  é igual a  $AC$ .

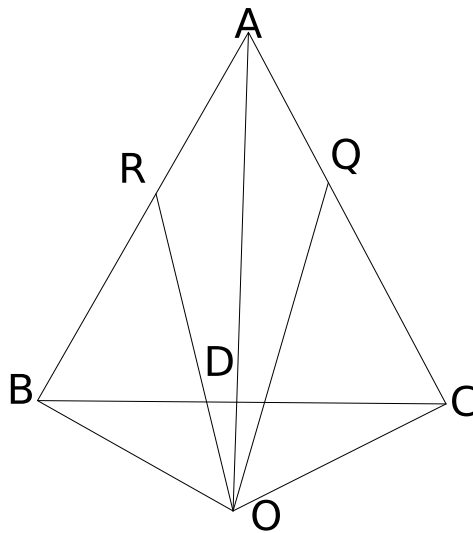


Figura 13 – Variação 2 na Falácia de Maxwell

O importante a perceber neste argumento é a indeterminação gráfica a partir da construção dos pontos  $O$ ,  $R$  e  $Q$ . Em momento algum foi dito no texto se a perpendicular à  $BC$  e a bissetora do ângulo  $BAC$  encontrar-se-ão internamente ou externamente ao triângulo  $ABC$ ; sobre os  $R$  e  $Q$ , não há garantias que cairão sobre as  $AB$  e  $AC$ , ou se cairão nas prolongações destas. No segundo caso  $Q$  e  $R$  caem além dos respectivos segmentos  $AB$  e  $AC$ . Ora, disso pode-se inferir que  $AB$  é igual à  $AR$  menos  $RB$ , igual também a  $AQ$

menos  $QC$ ; esta subtração, por sua vez, igual à  $AC$ . Logo, para qualquer figura retilínea trilátera, dois dos seus respectivos lados são sempre iguais; portanto, todo triângulo é isósceles.

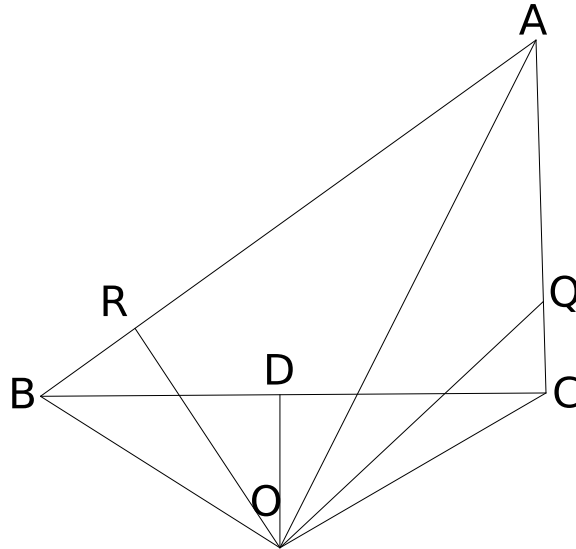


Figura 14 – Variação 2 na Falácia de Maxwell

Por esse exemplo pode-se entender melhor a crítica direcionada às justificativas baseadas em diagramas, cujas sombras imperfeitas, diria Platão, refletem somente os entes apreendidos pelo puro pensamento. A lição a ser apreendida, portanto, seria a que o diagrama, em comparação ao artefato linguístico, é suscetível a todo tipo de desvio. Agora, Maxwell deixa de observar algo importante nesta apresentação: falácias como essa nunca ocorrem nos *Elementos*. Resta saber então porquê (e como) isso não é o caso.

Dentro da literatura sobre a filosofia da prática matemática, uma tentativa de esclarecimento aparece em Manders ([1995] 2008). Ele argumenta que, no tocante às provas heterogêneas informais, é preciso assegurar algum tipo de *controle cognitivo* sobre o artefato gráfico a ser construído. Essa ideia de controle sobre artefato diz muito sobre a maneira como Euclides usa seus diagramas; porque numa relação de congruência não há como garantir, a partir da inspeção de dois diagramas quaisquer, que estes tenham as magnitudes necessárias. Este controle poderia ser alcançado, ao menos inicialmente, a partir da linguagem operativa dos *Elementos*. O importante a ser percebido, no entanto, é que a audiência deveria estar submetida a um repertório limitado de respostas no artefato gráfico de acordo com as entradas textuais. Ou seja: o repertório de respostas da audiência deve ser menos diversa que os objetos físicos qualificados como diagramas (Manders ([1995] 2008, p. 83)).

Recorde-se então da conjectura de Netz sobre a natureza contemplativa da educação grega. Ora, ainda que seja correto pensar que o diagrama não era sistematicamente desenhado e apagado em cada exposição, o compilador dos *Elementos* não poderia ignorar que alguma outra audiência desenhasse um diagrama completamente diferente daquele



requisitado; portanto, o controle exercido nas apresentações orais (sob a suposição de que tais apresentações eram comuns) deveria ser transferido também para a versão final do texto. Neste cenário, uma mesma saída gráfica sempre seria visualizada por alguma audiência, independente de sua localização.

O argumento central de Manders gira em torno duma nítida separação entre uma parte discursiva e uma parte gráfica nas provas de Euclides. Essa dicotomia, ainda que perceptível superficialmente, não fora admitida até o momento. A parte discursiva é um conjunto de asserções que justificam algum atributo, *i.e.*, configurações exibidas pelo diagrama, processo que poderia depender também das especificações mencionadas por Netz. Disso decorre que um passo numa prova euclidiana é justificado pelo texto, ou pelo diagrama, ou ambos.

Os atributos justificados apenas pelo texto, diz Manders, são chamados *exatos* e dizem respeito às propriedades métricas dos entes matemáticos. E disso estava ciente Platão, para quem o diagrama nada diz sobre a diagonal em si, sobre o duplo e outras propriedades afins; e Aristóteles, ao notar que é incorreto dizer que uma linha traçada mede um pé, posto que isso não é relativo ao uso da régua e compasso, ou à aparência do diagrama. Aqui, a mínima deformação no diagrama comprometeria toda a prova. No texto de Euclides, como foi observado no capítulo 2, estes atributos ocorrem, primeiro, nas definições. Em segundo lugar, na *ekthesis*, onde igualmente o referido ente satisfaz exigências métricas. E também a *diorismos* requisita a construção dalguma coisa com estas propriedades; e na *kataskewe* são construídos aquilo de que nada é parte ou o que não possui espessura, embora visualmente tangíveis em suas representações. E o que é deduzido (*apodeixis*) também é um atributo exato. São também exatas as relações de proporção, paralelismo e congruência entre magnitudes. Em suma, os atributos exatos são fornecidos unicamente pela parte textual.

Os atributos justificados pelo diagrama são chamados, em contraste, *co-exatos*. Estes atributos dizem respeito à *topologia* do diagrama, *i.e.*, sua configuração gráfico-espacial. Exemplos destes atributos envolvem o reconhecimento de regiões no plano: triângulos, quadriláteros, círculos e ângulos. Perceba-se, no entanto, que em nenhum momento pode-se deduzir, a partir do diagrama, que dois triângulos são iguais ou que um ângulo é reto. São também co-exatos a localização de pontos em dois lugares e interseção de curvas; o não paralelismo de retas ou que duas magnitudes não são tangentes. Ademais, contiguidade e relações de inclusão: um ponto que cai numa região ou segmento de reta; oposição no vértice; retas que dividem uma região em duas; também as chamadas relações baseadas em *mereologia* envolvendo o todo e suas partes, a saber, segmentos, triângulos e ângulos inclusos em outros; ângulos alternos; e, por fim, as relações de ordem, como quando um ponto cai colinearmente entre dois outros (Manders ([1995] 2008, p. 93)).

A importância desta dicotomia reside na percepção de que nos *Elementos* uma proprie-

dade exata *nunca é justificada pelo diagrama*. Quando fica dito, em I.16, que  $AE$  e  $EC$  são iguais, a justificativa textual é o teorema I.15, da mesma forma quando é afirmado que os ângulos  $AEB$  e  $FEC$  são iguais porque estão no vértice. Por outro lado, é o diagrama que mostra que o ponto  $E$  está entre os  $B$  e  $F$ .

O sucesso do controle cognitivo envolvido nas justificativas co-exatas depende de dois elementos. O primeiro deles é que o diagrama apresente invariabilidade topológica. Isso significa dizer que os fatos relevantes à prova não podem desaparecer após uma modificação sensível sobre a aparência do diagrama. Recorde-se que, como foi dito em diálogo com Netz, Euclides deveria assegurar que sua audiência, independente de sua constituição, fosse capaz de visualizar sempre os mesmos fatos. O segundo é referente a existência de alguma *disciplina diagramática*. Trata-se do domínio e exercício de habilidades concernentes à identificação de atributos co-exatos requeridos pela prática matemática (Manders ([1995] 2008, p. 89)).

A invariabilidade topológica permite restringir o escopo de respostas no tocante à saída diagramática em relação às entradas textuais. Na prova de I.16 acima, a prolongação da reta  $BC$  introduziu, no diagrama, o ângulo externo  $ADC$  e, na sequência, foi construída a reta  $FC$  interna a este ângulo. O texto não permite uma construção alternativa e mesmo que a  $FC$  seja posicionada mais próxima à  $CD$ , percebe-se ainda os ângulos  $ACF$  e  $FCD$  inclusos no ângulo  $ACD$  (uma relação mereológica, portanto). É verdade que somente o texto pode justificar que o todo é maior que cada uma de suas partes; no entanto, é o diagrama que mostra isso. Ou então, para retornar ao exemplo inicial desta dissertação, em I.1, na construção do ponto  $C$ . Pode-se dizer agora que a audiência está autorizada a retirar este ponto do diagrama porque, independente da destreza do geômetra ou de suas ferramentas, haverá sempre um ponto na interseção entre dois círculos descritos a partir duma reta comum. Isso pode ser aferido num desenho tortuoso como este abaixo.

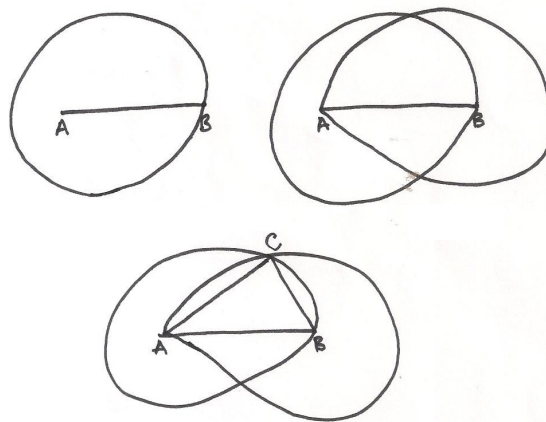


Figura 15 – Exemplos de co-exatos em I.1

Note-se, contudo, que embora o diagrama não precise ser (metricamente) perfeito, é necessário que possa exibir as propriedades topológicas relevantes. Caso o traçado dum círculo não seja capaz de estabelecer o exterior e o interior, então o diagrama não foi corretamente produzido. Mas, alguém poderia perguntar: Euclides poderia ter introduzido o ponto  $C$  através do texto? Talvez a questão mais interessante seja esta: por que Euclides *não deveria* proceder dessa maneira? Como já foi dito, a correção dessa prova não é afetada pelo emprego do diagrama. Seria possível até mesmo dizer, desde um ponto de vista epistemológico, que as habilidades intelectuais requeridas para operar com diagramas (o que envolve uma certa disciplina) não difere em graus das mesmas habilidades de alguém que manipula alguma linguagem formal. Bem observado, a possibilidade do erro no manuseio de uma linguagem formal é similar, senão a mesma, àquela que se pode encontrar em provas baseadas em diagramas.

Eis porque Manders introduz a disciplina diagramática em sua análise. Trata-se da organização dos dispositivos normativos e habilidades requeridas no contexto duma prática intelectual. No primeiro caso, a atenção às construções inseridas pelo texto junto às quais pode-se acrescentar exigências epistemológicas, como nunca introduzir elementos ao diagrama sem justificá-los. No segundo, fala-se do domínio duma linguagem natural regimentada em cooperação com certas determinações de construções geométricas. Deve ser possível também à audiência reconhecer falhas em algumas configurações gráficas ou quando variações topológicas ensejam provas por casos. Ou seja: uma disciplina diagramática deve dizer quando um diagrama foi *apropriadamente produzido* (Manders ([1995] 2008, p. 97)).

Portanto, a principal crítica até aqui analisada sobre a legitimidade de justificativas diagramáticas e, *a fortiori*, da provas heterogêneas, baseava-se numa indistinção acerca de quais afirmações são retiradas do diagrama. Por meio da dicotomia introduzida por Manders entre exatos e co-exatos é possível dar um passo mais seguro na explicação da estabilidade da geometria euclidiana. Uma prática matemática deve direcionar a disciplina no manuseio de diagramas unicamente para retirar atributos co-exatos. É função desta disciplina garantir respostas uniformes da audiência no tocante às saídas gráficas.

Retornando agora às objeções de Maxwell, pode-se compreender melhor o funcionamento da disciplina diagramática a partir da maneira como a prática matemática faz distinções de casos. Proclo já havia observado, ao comentar a prova I.2, que uma proposição enseja provas por casos quando o raciocínio mantém-se inalterado diante uma variedade de diagramas distintos, *i.e.*, quando pode ser demonstrada da mesma maneira, não obstante mudanças na posição de algum elemento da configuração gráfica (Proclo (1992, p. 174)).

O texto euclidiano é cuidadoso o suficiente para não permitir respostas ambíguas no diagrama, como a falácia apresentada por Maxwell. Esta preocupação, é claro, só faz sentido no contexto em que o diagrama era visto como parte integrante da prova. Por outro lado, Manders recorda que mesmo aí não haveria um procedimento unívoco para

determinar se uma demonstração exauriu todas as possibilidades de variações topológicas no diagramas, ou, em caso contrário, se há diversas outras possibilidades (Manders ([1995] 2008, pp. 106-107)). É preciso olhar para o diagrama para se certificar de que uma mesma entrada textual não poderia ser satisfeita por dois diagramas diferentes.

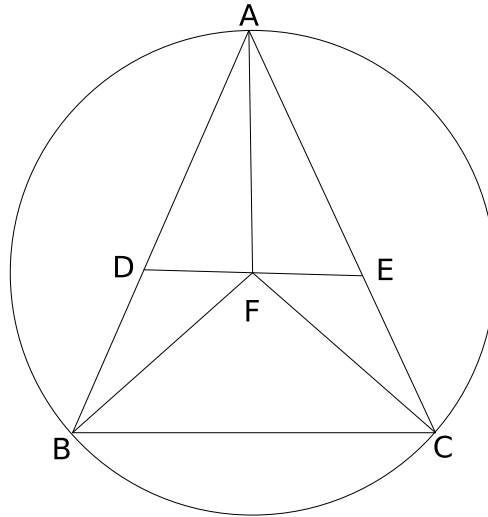


Figura 16 – proposição IV.5 (primeiro caso)

Seja, por exemplo, a prova IV.5, onde é requisitado circunscrever um círculo ao triângulo dado. Seja o triângulo  $ABC$ ; é preciso circunscrever um círculo ao triângulo  $ABC$ . Fiquem cortadas as  $AB$ ,  $AC$  em duas nos ponto  $D$ ,  $E$ , e a partir destes fiquem traçadas as  $DF$ ,  $EF$  em ângulos retos com as  $AB$ ,  $AC$ ; logo, encontrar-se-ão ou no interior do triângulo  $ABC$  ou sobre a reta  $BC$  ou no exterior da  $BC$ . Encontrem-se, primeiro, no interior, no  $F$ , e fiquem ligadas as  $FB$ ,  $FC$ ,  $FA$ . E, como a  $AD$  é igual à  $DB$ , mas também a  $DF$ , em ângulos retos, é comum, portanto, a base  $AF$  é igual à base  $FB$ . Do mesmo modo, então, será provado que também a  $CF$  é igual à  $AF$ ; deste modo, também a  $FB$  é igual à  $FC$ ; portanto, as três  $FA$ ,  $FB$  e  $FC$  são iguais entre si. Portanto, o círculo descrito com centro em  $F$  e distância  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$  passará também pelos pontos restantes e o círculo estará circunscrito ao triângulo  $ABC$ . Fiquem circunscrito como o  $ABC$ .

Encontrem-se, agora, as  $DF$ ,  $EF$  sobre a reta  $BC$  no ponto  $F$ , e fique ligada a  $AF$ . Do mesmo modo, então, ficará provado que o ponto  $F$  é centro do círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$ . Encontrem-se, enfim, as  $DF$ ,  $EF$  no exterior do triângulo  $ABC$  no ponto  $F$  e fiquem ligadas as  $AF$ ,  $BF$ ,  $CF$ . E, como a  $AD$  é igual à  $DB$ , mas também a  $DF$ , em ângulos retos, é comum, portanto, a base  $AF$  é igual à base  $BF$ . Do mesmo modo, ficará provado que também a  $CF$  é igual à  $AF$ ; assim, também a  $BF$  é igual à  $FC$ ; portanto, o círculo descrito com centro  $F$  e distância de uma das  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ , passará também pelos pontos restantes. Portanto, um círculo foi circunscrito ao triângulo dado; QEF.

Como o leitor há de notar, o recorte investigativo traçado até aqui permite explicitar

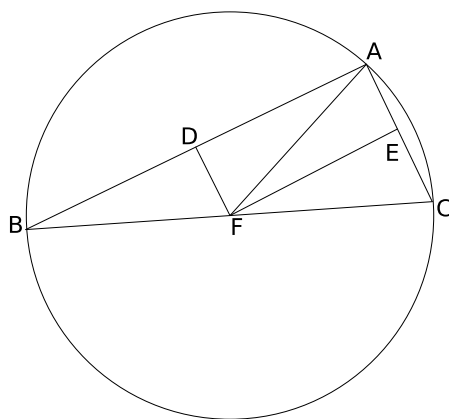


Figura 17 – proposição IV.5 (segundo caso)

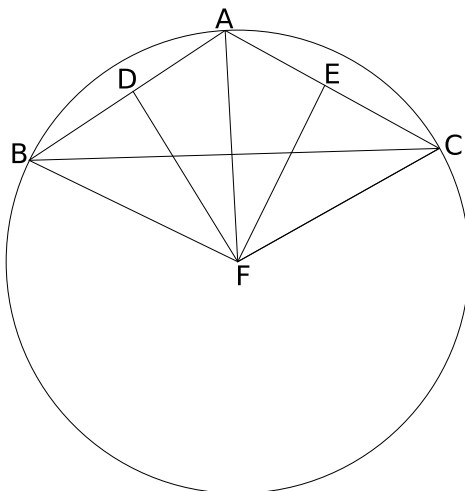


Figura 18 – proposição IV.5 (terceiro caso)

algumas diferenças entre o modelo de reconstrução histórica e aquele próprio da filosofia. Sobre a reconstrução histórica, é agora visível que ao historiador interessa tecer a trama por detrás das evidências documentais. Poderá interessar-lhe, por exemplo, reconstituir o cenário intelectual no qual vicejou uma determinada obra ou, em sentido inverso, mostrar como esta poderia ter assimilado resquícios duma prática histórica, ou socialmente, localizada. Daí a definição de Veyne (1971) da historiografia como *conhecimento de eventos através de documentos*. Que a reconstrução almejada aqui não pode ser exclusivamente deste tipo já ficou demonstrado nesta seção.

De acordo com o relato de Proclo, ao qual fez-se breve alusão, a mais importante contribuição de Euclides resumir-se-ia em sua capacidade de sistematizar o conhecimento matemático de sua época numa teoria dedutiva erigida a partir de um conjunto de princípios

científicos manifestamente verdadeiros, embora indemonstráveis, dos quais decorrem, necessariamente, outras proposições igualmente verdadeiras e irrefutáveis. E por sua privilegiada localização, supondo-se que tenha vivido no séc. III a.C., não seria desarrazoado dizer, a partir deste relato, que Euclides fora instado a preservar este conhecimento num modelo de ciência similar ao de Aristóteles. Por sinal, o léxico empregado por Proclo para descrever a geometria euclidiana é uma evidência de sua predileção filosófica.

Apesar das ressalvas, a narrativa de Proclo parece oferecer importantes pistas para compreender-se a matemática clássica e, em particular, os *Elementos*, como bem demonstra Heath. Todavia, a presença das justificativas diagramáticas e sua evidente incompatibilidade com o modelo de prova prescrito pelos *Segundos Analíticos* deveria instar uma nova guinada em relação a esta narrativa. Em vez disto, o recurso ao diagrama fora visto por estes autores como reflexo dum modelo de prova imperfeito, não muito rigorosa dentro dos preceitos da lógica. Em acréscimo ao que foi agora discutido, pode-se aqui dizer, caso a definição de Veyne seja correta, que estas objeções às justificativas diagramáticas acabam por ultrapassar em muito os limites da historiografia.

Em contraste, a reivindicação do filósofo concerne diretamente os problemas lógicos e epistemológicos subjacentes a uma teoria científica. Recorde-se o leitor que o problema sobre a natureza ou definição da prova em geral (e, em particular, da matemática), é um tópico da epistemologia. Caso a distinção entre atributos exatos e co-exatos mostre-se correta para a geometria euclidiana, será possível aclarar um importante dispositivo argumentativo das provas heterogêneas dispostas nos *Elementos*. Todavia, é preciso agora retornar ao problema sobre o Postulado 2 e considerar a solução de Avigad, Dean & Mumma dentro da análise lógica.

### 3.5 Observações finais

Este capítulo apresentou uma defesa das provas heterogêneas de Euclides desde a perspectiva da filosofia da prática matemática. Em primeiro lugar, destacou-se a linguagem empregada na geometria euclidiana e como a ocorrência de expressões relativas a operações visuais e cinéticas poderia ser melhor esclarecida sob a suposição de que os diagramas eram artefatos essenciais ao raciocínio matemático na Grécia clássica. Este argumento foi ampliado a partir das contribuições de Netz dentro da historiografia cognitiva. Em seguida, ficou esclarecido, por meio da distinção entre exatos e co-exatos de Manders, que embora Euclides utilize o diagrama para justificar alguma alegação, jamais uma propriedade métrica é baseada na aparência do diagrama. No entanto, esta distinção ainda não foi discutida a partir do uso do Postulado 2. É preciso saber se a alternativa de Avigad, Dean & Mumma apresenta uma explicação sólida em relação ao Postulado 2.

## 4 Análise lógica e dispensabilidade de diagramas

### 4.1 Estratégia do capítulo

A reabilitação da prática matemática euclidiana permite agora uma nova mirada sobre o Postulado 2. Afinal, se é verdadeiro dizer que a geometria euclidiana é baseada em justificativas diagramáticas, então a introdução de magnitudes infinitas não é algo trivial. Para acerrar-se destas questões, fica exposto na seção 4.2 o sistema formal de Avigad, Dean & Mumma e como a análise lógica poderia ser aplicada aos *Elementos*. Discutem-se na seção 4.3 as possíveis incompatibilidades entre magnitudes infinitas e a prática euclidiana. A seção 4.4 vai além destas dissemelhanças ao destacar possíveis limitações ao identificar-se a justificativa matemática a objetos sintáticos.

### 4.2 Formalização dos *Elementos*

Como foi debatido no último capítulo, o quadro conceitual da filosofia da prática matemática poderia elucidar, ainda que parcialmente, o problema sobre o papel demonstrativo dos diagramas tal como este é destacado a partir dos *Elementos*. Por outro lado, também ficou dito, no capítulo 2, que este tópico poderia contar com as contribuições da análise lógica no que diz respeito ao estudo das estruturas dedutivas nas quais se apresentam as provas euclidianas. Convém então tratar desta outra abordagem representada no artigo de Avigad, Dean & Mumma e de suas possíveis relações com a distinção estabelecida por Manders entre exatos e co-exatos.

É justo pensar que uma análise lógica das provas matemáticas resulte nalguma precisão conceitual exigida por uma teoria como a de Euclides. Tal seria o caso porque, dentro de um sistema forma como o de Avigad, Dean & Mumma, é-se capaz de explicitar os aspectos mais importantes da prova matemática que porventura ficam ocultos pela ambiguidade da linguagem ordinária. De início, isso poderia elucidar o caso da linguagem operativa dos *Elementos* e a alegada introdução do movimento sobre a qual Proclo comentava. Seria defensável dizer que esta disputa poderia ser resolvida atinando-se apenas para a forma lógica das proposições nas quais estas expressões ocorrem, dissolvendo assim a questão acerca do movimento na matemática pura. Se é correto pensar que os comandos euclidianos escondem algum quantificador existencial, então o maquinário simbólico da lógica permite um tratamento mais apropriado de teorias dedutivas de primeira ordem.

Outro aspecto da análise lógica a ser realçado diz respeito às propriedades metateóricas duma teoria matemática. Uma vez que a teoria objeto (por exemplo: a geometria plana engendrada pelos Livros I-IV dos *Elementos*) foi devidamente formalizada, ou logicamente reconstruída, espera-se que o sistema formal usado satisfaça alguns requisitos lógicos. Fala-se aqui, sobretudo, da consistência, *i.e.*, da impossibilidade lógica duma teoria encerrar

uma contradição, e da completude, *i.e.*, que uma teoria pode provar todas as proposições verdadeiras sob o seu escopo. Essa é uma vantagem em relação aos *Elementos* que deve ser ressaltada. Pois, saber se a geometria euclidiana é, por exemplo, completa — como, aliás, é sabido — não é algo que pode ser demonstrado a partir dos princípios arrolados por Euclides. Ao contrário dos atuais sistemas axiomáticos, a obra euclidiana não dispõe de ferramentas apropriadas para lidar com estes tópicos; isso é algo demonstrado *sobre* os princípios arrolados nos *Elementos*.

Nada obsta que uma teoria baseada em argumentos heterogêneos seja inteira, ou parcialmente, formalizada. Por sinal, esta foi uma das reivindicações feitas por Barwise & Etchemendy. Eles argumentaram, nesta ocasião, que o não reconhecimento do papel demonstrativo de diagramas na matemática poderia ser a causa da dificuldade de encontrar-se bons programas autômatos de demonstração (Barwise & Etchemendy (1996, p. 13)). Este novo tratamento dos argumentos heterogêneos na literatura especializada abriu precedentes para o desenvolvimento de programas heterogêneos de demonstração, como próprio *hyperproof* de Barwise & Etchemendy, para lógica de primeira ordem.

O artigo de Avigad, Dean & Mumma não é uma objeção às provas de Euclides ou uma réplica a Manders. Ao contrário, estes autores foram motivados por uma honesta defesa dos *Elementos* ao mesmo tempo em que reconhecem que a distinção entre atributos exatos e co-exatos estabelece um novo marco interpretativo sobre esta obra. Ainda assim, e aqui reside a tese principal deles, afirmam ser possível reconstruir as justificativas diagramáticas sintaticamente num sistema formal. Vale registrar a estratégia destes autores:

De um ponto de de vista lógico, o que torna uma prova euclidiana “diagramática” não é o fato de acharmos útil consultar um diagrama para verificar a correção da prova ou que, na ausência de tal artefato físico, tendemos a lançar os nossos olhos para a parte de trás das nossas cabeças e imaginar tal diagrama. Em vez disso, a característica saliente da prova euclidiana é que certos tipos de inferências são admitidos como básicos e são feitos sem outra justificativa. Quando dizemos que estamos analisando o raciocínio diagramático euclidiano, queremos dizer simplesmente que estamos tentando determinar quais inferências possuem essa característica básica, em contraste com as inferências geometricamente válidas que são explicadas em maior detalhe no texto dos *Elementos* (Avigad, Dean & Mumma (2009, pp. 12-13)).

De acordo com esta passagem, se é possível formalizar os atributos topológicos, então os diagramas são *dispensáveis* das provas euclidianas. Ora, não há motivo algum para se pensar que isso não poderia ser feito. O que está em disputa aqui não é se a análise lógica é relevante para compreender uma prova matemática. O problema, mais específico, é se a formalização dos *Elementos* seria suficiente para esclarecer os mecanismos epistemológicos vigentes numa prova heterogênea dentro de uma prática matemática.



### 4.2.1 A forma lógica da linguagem operativa

A formalização da geometria euclidiana proposta por Avigad, Dean & Mumma passa pela adoção duma linguagem formal desenvolvida exclusivamente para as provas heterogêneas presentes nos *Elementos*. Como de costume, também ficam definidas nesta linguagem as regras de formação e as regras de inferência<sup>1</sup>. As regras de formação definem as fórmulas bem formadas do sistema, *i.e.*, quais concatenações de símbolos são admissíveis. Funcionam, portanto, como uma gramática para um vernáculo ordinário. As regras de inferência, que serão discutidas na próxima subseção, fornecem autorizações formais para assegurar o processo dedutivo. Dentro deste quadro, uma prova é definida como uma seqüência de fórmulas, onde cada uma delas, ou bem é um axioma ou segue-se da aplicação prévia de uma regra de inferência.

Segundo a proposta de Avigad, Dean & Mumma, a teoria dedutiva engendrada pelos *Elementos* compreenderia um conjunto de objetos (entes geométricos e aritméticos) sobre os quais provar-se-ia algumas propriedades ou relações destes (ou entre estes). O recurso à teoria de conjuntos nesta axiomatização reflete um procedimento habitual em lógica formal, mas não é esclarecido em momento algum por estes autores se a estratégia é fiel ao método de Euclides. Seja como for, este mecanismo permite agora explicitar a quantificação nas proposições euclidianas, como já havia sugerido Levi. Assim, a sintaxe do sistema de Avigad, Dean & Mumma pode ser definida como o conjunto união dos dois respectivos subconjuntos. De um lado, o conjunto de símbolos pertencentes a toda teoria de primeira ordem, a saber:

1. um conjunto numerável de variáveis  $V$ , a abranger:
  - 1a. pontos  $\{ a, b, c, \dots \}$  ;
  - 1b. retas  $\{ L, M, N \dots \}$ ;
  - 1c. círculos  $\{ \alpha, \beta, \gamma \dots \}$ .
2. conectivos lógicos e quantificadores:  $\{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists \}$ ;
3. parênteses:  $(, )$ .

De outro lado, o subconjunto dos símbolos que variam de acordo com a teoria que pretende-se formalizar:

4. uma seqüência de conjuntos  $\langle R_i \rangle$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , onde cada  $R_i$  é um conjunto de letras predicativas de aridade  $i$ ;
5. uma seqüência de conjuntos  $\langle F_i \rangle$ , com  $i \in \mathbb{N}$ , onde cada  $F_i$  é um conjunto

---

<sup>1</sup> Para uma exposição completa do processo de axiomatização, o leitor pode consultar o já clássico trabalho de Kleene (1974), especialmente a parte II, capítulos 4-7. Carnap ([1937] 2000), partes I-III, também detém-se em longas discussões sobre formalização de teorias, com algumas observações sobre Hilbert. Seoane (2011) faz uma generosa apresentação introdutória a estes tópicos nos capítulos 3-8.

de letras de função de aridade  $i$ ;

6. um conjunto  $C$  de constantes.

Com ajuda dos símbolos da teoria de conjuntos é possível expressar formalmente o sistema  $\mathbf{E}$  de Avigad, Dean & Mumma da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = V \cup \{(\cdot), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\} \cup \bigcup_{i \in I} R_i \cup \bigcup_{i \in J} F_i$$

Como argumenta Manders, somente relações topológicas podem ser extraídas a partir da aparência do diagrama. O segredo de Euclides, ainda de acordo com Manders, deve-se ao fato de sua prática matemática limitar as respostas da audiência sem precisar verbalizar estas relações textualmente. Avigad, Dean & Mumma argumentam, por outra parte, que uma vez que estas relações topológicas são limitadas e facilmente discerníveis, uma maneira de dispensar os diagramas seria explicitando todas elas como termos primitivos dentro do sistema  $\mathbf{E}$ . Eis a lista completa:

Relação	Símbolo
O ponto $a$ cai sobre a reta $L$	Sobre( $a, L$ )
Os pontos $a$ e $b$ caem sobre o mesmo lado da reta $L$	Sobre( $a, b, L$ )
Os pontos $a, b$ e $c$ são distintos, colineares e $b$ está entre $a$ e $c$	Entre( $b, a, c$ )
O ponto $a$ cai sobre o círculo $\alpha$	Sobre( $a, \alpha$ )
O ponto $a$ cai dentro do círculo $\alpha$	Dentro( $a, \alpha$ )
O ponto $a$ é o centro do círculo $\alpha$	Centro( $a, \alpha$ )
As retas $L$ e $M$ se intersectam	Interseção( $L, M$ )
A reta $L$ e o círculo $\alpha$ se intersectam	Interseção( $L, \alpha$ )
Os círculos $\alpha$ e $\beta$ se intersectam	Interseção( $\alpha, \beta$ )

Dentro do sistema de Avigad, Dean & Mumma, qualquer fórmula envolvendo alguma destas relações equivale ao que Manders chamou de co-exato. Note-se, além, que é possível estabelecer, a partir desta lista, algumas deduções diretas que, nos *Elementos*, jamais são trazidas durante a prova. Por exemplo: pode-se deduzir que, se um ponto qualquer está sobre um círculo, então este ponto não está nem dentro do círculo nem é o seu centro. Ou seja:

$$\text{Sobre}(a, \alpha) \vdash \neg \text{Dentro}(a, \alpha) \wedge \neg \text{Centro}(a, \alpha)$$

De fato, esta inferência não faz uso de nenhum elemento gráfico. Mas, em quê a audiência ganharia em termos de compreensão? É verdade que a forma lógica acima é uma outra maneira (legítima, frise-se) de representar um mesmo raciocínio. Todavia, também é verdade que a versão homogênea exige uma série de inferências que, na versão euclidiana, são trivialmente visualizadas no diagrama.

Para os atributos métricos, a estratégia de Avigad, Dean & Mumma é aplicar algumas funções sobre o conjunto dos pontos. Ou seja: para obter-se uma reta é preciso ter dois pontos, assim como para um triângulo é preciso haver três, o mesmo valendo para os ângulos. Com isto, as magnitudes são representadas da seguinte maneira.

Magnitude	Função	Símbolo
Segmentos	segmento( $a, b, c$ )	$\overline{ab}$
Ângulos	ângulo( $a, b, c$ )	$\angle abc$
Áreas	área( $a, b, c$ )	$\triangle abc$

Com a adição do sinal de igualdade, =, a função soma, +, e uma relação menor-que, <, pode-se então construir as seguintes fórmulas:

Operações com segmentos:  $\overline{ab} = \overline{cd}, \overline{ab} < \overline{cd}, \overline{ab} \neq \overline{cd}, \neg(\overline{ab} < \overline{cd})$

Operações com ângulos:  $\angle abc = \angle cde, \angle abc < \angle cde, \angle abc \neq \angle cde, \neg(\angle abc < \angle cde), \angle abc = \angle cde + \angle fgh$

Operações com áreas:  $\triangle abc = \triangle cde, \triangle abc \neq \triangle cde, \triangle abc < \triangle cde, \neg(\triangle abc < \triangle cde), \triangle abc = \triangle cde + \triangle fgh$

À guisa de comparação, considere, mais uma vez, a construção do ponto  $C$  em I.1. O caminho adotado por Avigad, Dean & Mumma é similar àquele de Heath, a saber, introduzir um novo princípio à prova. A diferença é que, agora, não seria necessário apoiar-se em métodos alheios a Euclides, como usar o Princípio de Continuidade. Bastaria observar quais exigências os entes geométricos precisam satisfazer. Neste caso, é suficiente que o ponto  $C$  esteja sobre os dois círculos traçados. De modo que a justificativa, antes diagramática, passa a ser inteiramente linguística:

O ponto  $C$  está sobre o círculo  $\alpha$   
O ponto  $C$  está sobre o círculo  $\beta$ .

---

Os círculos  $\alpha$  e  $\beta$  se intersectam  $\therefore$

Uma vez que a inferência diagramática foi verbalizada (ou decodificada numa linguagem natural), pode-se então representar sua forma lógica no seguinte seguinte:

$$\text{Sobre}(c, \alpha) \wedge \text{Sobre}(c, \beta) \vdash \text{Interseção}(\alpha, \beta)$$

Como dito no capítulo 2, a linguagem operativa usado nos *Elementos* poderia sugerir algum tipo de movimento entre os entes matemáticos. Essa possibilidade, segundo Proclo, não poderia ser admitida porque a matemática trataria das ideias platônicas, eternas e imóveis. Uma maneira de esclarecer o procedimento euclidiano seria atinar para a centralidade de suas justificativas diagramáticas. Ou seja: sua linguagem operativa fora pensada para assegurar um controle cognitivo sobre o diagrama. Avigad, Dean & Mumma seguem o caminho inverso. Sob a suposição de o diagrama não desempenha nenhum papel epistemológico nas provas euclidianas, estes autores propõem reformular a linguagem operativa como proposições existenciais.

Essa interpretação já havia sido sugerida por Heath, Szabó e Levi. O Postulado 1, como foi dito, poderia ser reformulado da seguinte maneira: *Existe, e é único*, o segmento que une dois pontos quaisquer. Para manter uma maior aproximação ao sistema de Avigad, Dean & Mumma, adota-se a seguinte formulação: *para quaisquer dois pontos distintos, existe uma reta tal que ambos os pontos estão sobre esta reta*. Sua forma lógica, portanto, seria esta:

$$\text{Postulado 1: } \forall a \forall b ((a \neq b) \rightarrow \exists L \text{Sobre}(a, L) \wedge \text{Sobre}(b, L))$$

Já o Postulado 3, sua reformulação resulta na seguinte proposição: *Existe, e é única*, a circunferência em um dado plano, com centro dado e com uma distância dada no plano. Seguindo o mesmo raciocínio, este postulado pode ser formulado assim: *para quaisquer dois pontos distintos, existe um círculo tal que um destes pontos é o centro do círculo e o outro ponto está sobre o círculo*. E assim como feito antes, sua forma lógica seria a seguinte:

$$\text{Postulado 3: } \forall a \forall b ((a \neq b) \rightarrow \exists \alpha \text{Centro}(a, \alpha) \wedge \text{Sobre}(b, \alpha))$$

Note-se que, embora Levi tenha proposto uma verbalização para o Postulado 2, o sistema de Avigad, Dean & Mumma não contempla este princípio euclidiano. A razão para isso é que, para estes autores, a prolongação arbitrária de Euclides seria equivalente à postulação de retas infinitas. Ora, se este é o caso, então o conjunto de retas no sistema **E** já satisfaz esta exigência; logo, já na fórmula proposta para o Postulado 1 a reta introduzida é infinita.

Como também foi descrito no capítulo 2, a exposição/exibição ( $\epsilon\chi\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$ ) introduz um ente matemático – que, por definição, apresenta propriedades métricas – acompanhado dum diagrama que apresenta propriedades topológicas. Por exemplo: que a reta dada  $AB$  não tenha espessura. No sistema de Avigad, Dean & Mumma, porém, é preciso acrescentar

requisitos que dentro dos *Elementos* são, a princípio, desnecessários. Na reconstrução de I.2 é preciso dizer que os pontos arrolados são diferentes, algo que Euclides nunca faz simplesmente porque eles são representados por letras diferentes. (O processo de discriminação de entes matemáticos na geometria euclidiana parece depender, de algum modo, do seu método diagramático). Por outro lado, a  $\delta\iota\omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$  estabelece a consequência. Assim entendido, uma proposição dentro dos *Elementos* poderia ser pensada como uma condicional, cujo esquema proposicional seria o seguinte:

$$\forall \vec{a}, \vec{L}, \vec{\alpha} \wedge (\varphi(\vec{a}, \vec{L}, \vec{\alpha}) \rightarrow \exists \vec{b}, \vec{M}, \vec{\beta} \wedge ((\psi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{L}, \vec{M}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}))))$$

Ou seja: para todo ponto  $a$ , retas  $L$  e círculos  $\alpha$ , se estes objetos satisfazem as afirmações em  $\varphi$  ( $\acute{\epsilon}\chi\theta\epsilon\sigma\iota\varsigma$ ), então pode-se construir objetos  $b$ ,  $M$  e  $\beta$  tais que os entes construídos satisfaçam  $\psi$  ( $\delta\iota\omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ ). Dentro desta proposta, seria possível reformular a proposição I.1 da seguinte maneira: *para quaisquer dois pontos distintos, A e B, existe um ponto C tal que o segmento de reta AC é igual ao segmento BC e o segmento AC é igual ao AB*. Essa proposição equivale à seguinte proposição:

$$\forall a \forall b (a \neq b) \rightarrow \exists c (\overline{ac} = \overline{bc}) \wedge (\overline{ac} = \overline{ab})$$

Seguindo o mesmo procedimento, a proposição I.2 seria equivalente à seguinte proposição: *para quaisquer três pontos distintos, A, B e C, e reta qualquer L, se B e C estão sobre L, mas não o ponto A, então existe um ponto F tal que o segmento de reta AF é igual ao segmento BC*. Esta proposição seria equivalente à seguinte fórmula:

$$\forall a \forall b \forall c \forall L (b \neq c \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge \text{Sobre}(b, L) \wedge \text{Sobre}(c, L) \rightarrow \exists f (\overline{af} = \overline{bc}))$$

Uma vez que a sintaxe do sistema **E** consegue apreender também a linguagem operativa de Euclides, resta agora discutir a reconstituição das provas heterogêneas presentes nos *Elementos*.

#### 4.2.2 Apresentação sintático-formal das provas heterogêneas

Uma formidável característica de argumentos diagramáticos diz respeito ao dinamismo ali introduzido. A prova é mais breve e precisa por dispor fatos relevantes na configuração gráfica. Considere-se, mais uma vez, a prova I.2. Dentro das discussões do capítulo 3, pode-se agora dizer quais afirmações a audiência está autorizada a retirar do diagrama. Em primeiro lugar, as relações de ordem entre os pontos  $D$ ,  $B$ ,  $G$  e  $F$ ; por simetria, o mesmo vale para os  $D$ ,  $A$ ,  $L$  e  $E$ . Por exemplo: o ponto  $B$  está entre  $D$  e  $G$  e entre  $D$  e  $F$ . Percebe-se também inclusão de regiões: que o triângulo  $DAB$  está dentro do círculo  $CGH$ ; e como este círculo está dentro do  $GKL$ , segue-se que também o  $DAB$  e os respectivos

pontos  $D$ ,  $A$  e  $B$ ; por outro lado, o ponto  $C$ , sobre o círculo  $CGH$  está dentro do círculo  $GKL$ . Por fim, a interseção entre  $DF$  e os círculos  $CGH$  no  $G$ , o mesmo valendo para a reta  $DE$ . Atine-se então para estes fatos. Primeiro, não é de um todo impossível expressar algumas relações topológicas via linguagem, como, aliás, foi feito agora. Uma consequência natural, como também é visível, é uma prova mais extensa. Segundo, Euclides não precisa enunciar estas proposições por haver em sua audiência habilidades especiais concernentes a estas inferências. Mas uma prova heterogênea reserva ainda outras características.

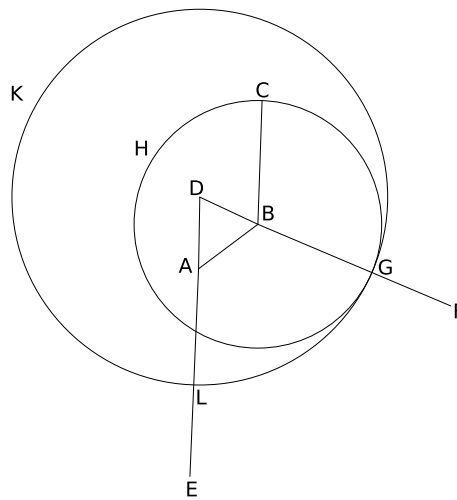


Figura 19 – proposição I.2

Atine-se para o quadro abaixo.

1. **Enunciado** Colocar em um ponto dado uma reta igual à reta dada
2. **Exibição** Seja o ponto dado  $A$  e a reta dada  $BC$ .
3. **Determinação** É preciso colocar no ponto  $A$  uma reta igual à reta dada  $BC$ .
4. **Construção**
  - $K_1$ : Seja ligado o ponto  $A$  ao  $B$ . [Postulado 1]
  - $K_2$ : Seja construído o triângulo equilátero  $DAB$  [I.1].
  - $K_3$ : Sejam prolongadas as retas  $DA$ ,  $DB$  até os respectivos pontos  $E$  e  $F$  [Postulado 2]
  - $\theta_1$ : Logo,  $A$  está entre  $D$  e  $E$ ; e  $B$  está entre  $D$  e  $F$  [diagrama]
  - $K_4$ : Com centro  $B$  e distância  $BC$ , seja descrito  $CGH$  [Postulado 3]
  - $\theta_2$ : Logo, o triângulo  $DAB$  está no círculo  $CGH$  [diagrama]
  - $K_5$ : Seja  $G$  o ponto de interseção do círculo  $CGH$  e a reta  $DF$  [Diagrama].
  - $\theta_3$ : Logo,  $G$  está entre  $D$  e  $F$  [diagrama]

- $\theta_4$ : Logo,  $G$  está entre  $B$  e  $F$ . [diagrama]  
 $\theta_5$ : Logo,  $G$  e  $B$  estão entre  $D$  e  $F$ . [diagrama]  
 $K_6$ : Com centro em  $D$  e distância  $DG$ , seja descrito  $GKL$  [Postulado 3].  
 $\theta_6$ : Logo, o círculo  $CGH$  está em  $GKL$  [diagrama]  
 $\theta_7$ : Logo, o triângulo  $DAB$  está em  $GKL$  [diagrama]  
 $K_7$ : Seja  $L$  o ponto de interseção entre  $GKL$  e a reta  $DE$  [diagrama]  
 $\theta_8$ : Logo,  $L$  está entre  $D$  e  $E$  [diagrama]  
 $\theta_9$ : Logo,  $L$  está entre  $A$  e  $E$  [diagrama]  
 $\theta_{10}$ : Logo,  $L$  e  $A$  estão entre  $D$  e  $E$  [diagrama]

## 5. Dedução Logo, etc...

QEF.

A introdução de novos objetos ocorre na *κατασκευή*; é também onde o diagrama passa a desempenhar um papel epistemológico. A estratégia de Avigad, Dean & Mumma é introduzir algumas regras inspiradas nos postulados construtivos que permitam deduzir uma fórmula existencial. Formalmente, diz-se que  $\Pi \vdash \exists(x)\Theta$ , onde o objeto a ser construído não pode aparecer em  $\Pi$ . É possível que  $\Pi$  seja vazio. Isso equivaleria a um ponto ou uma reta tomados ao acaso no início de uma prova. Para esclarecer este raciocínio, considere na prova I.2 a descrição do círculo  $CGH$ . Suponha então que  $\Pi$  é o seguinte sequente:  $\{b \neq c\}$ . Pela aplicação do Postulado 3 pode-se deduzir  $\Theta: \exists\alpha \text{ Centro}(b, \alpha), \text{ Sobre}(c, \alpha)$ .

Note-se, contudo, que a prova euclidiana prevê um ponto de interseção em  $g$ . E além disso o diagrama mostra, após esta construção, que o ponto  $b$  está dentro do círculo  $\alpha$  e entre os pontos  $d$  e  $g$ . A estratégia de Avigad, Dean & Mumma, mais uma vez, é introduzir uma regra que permita este tipo de inferência direta. Sua forma lógica é a seguinte:

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \vec{x} \Delta}{\Gamma \vdash \exists \vec{x} \Delta, \Theta}$$

Onde  $\Gamma$  é a lista de clausulas construtivas, *i.e.*, as condições que os objetos devem satisfazer na prova, e  $\Delta$  é a lista de relações diagramáticas os objetos introduzidos  $\vec{x}$  satisfazem. Por fim,  $\Theta$  é uma nova lista de relações métricas ou topológicas podem ser imediatamente deduzidas. Por exemplo: para deduzir, em I.2, o ponto de interseção  $g$  é preciso que este ponto esteja em  $M$  e sobre  $\alpha$ . Isso equivale à seguinte regra para interseções:

$$(\forall p, \forall L, \forall \alpha) \text{ Dentro}(p, \alpha) \wedge \text{ Sobre}(p, L) \rightarrow \text{ Intersecção}(L, \alpha)$$

Logo, é preciso fazer a seguinte inferência no sistema **E**:

O ponto  $g$  está sobre o círculo  $\alpha$

O ponto  $g$  está sobre a reta  $L$ .

---

O círculo  $\alpha$  e a reta  $L$  se intersectam  $\therefore$ .

A proposta de Avigad, Dean & Mumma, em resumo, consiste na formalização dos atributos co-exatos acrescidos, na sequência, de regras de inferências a determinar quais novas fórmulas podem ser deduzidas numa prova. Sob esta perspectiva, as justificativas euclidianas seriam então identificadas a objetos sintáticos. Porém, sendo o objetivo principal prover uma reconstrução fiel da geometria euclidiana de acordo com os princípios de Euclides e a maneira como este supostamente prova seus teoremas, a dispensabilidade dos diagramas resulta numa visão muito distante do método inferencial típico dos *Elementos*.

Este contraste é ainda mais evidente no caso do Postulado 2. Por vezes é preciso fazer, dentro duma reconstrução, algumas adaptações concernentes à teoria formalizada. A adoção da teoria dos conjuntos é um exemplo flagrante. O risco ao fazer isto, todavia, é a própria distância em relação à teoria objeto. Prova disso é a introdução de retas infinitas em ato nas provas euclidianas. “Por exemplo, nos *Elementos* Euclides toma as retas como segmentos de retas, embora o Postulado 2 permita qualquer segmento ser prolongado indefinidamente” (Avigad, Dean & Mumma (2009, p. 41)). A conclusão é mais radical: uma vez que é possível introduzir retas infinitas, este postulado é suprimido.

O estudo dos sistemas formais e suas propriedades tornou-se objeto da metamatemática (ou teoria da prova). Neste sentido, uma teoria objeto não é mais do que a sintaxe do sistema formal regida por regras de formação e regras de inferência sem haver qualquer referência ao conteúdo destes símbolos. Desvelar a sintaxe formal de uma prova matemática, portanto, poderia ser um tipo de revolução na prática matemática comparada à introdução do simbolismo algébrico no séc. XVI. Ou seja: a realização de demonstrações atentando-se unicamente para o processo mecânico de operações simbólicas. Ainda assim, a prática matemática ordinária não parece ser dependente desta nova abordagem. Mais ainda: a reconstrução de Avigad, Dean & Mumma revela uma limitação dentro da análise lógica e o argumento de dispensabilidade associado com ela. É preciso então discutir o uso de retas infinitas a partir da prática matemática de Euclides.

### 4.3 O infinito na geometria euclidiana

A expressão mais próxima a “infinito” nos *Elementos* é “ilimitado” ( $\alpha\pi\epsilon\iota\rho\omicron\nu$ ) e ocorre apenas quatro vezes: na Definição I.23, no Postulado 5 e nas proposições I.12 e I.22. Em contraste, o Postulado 2 fala expressamente da produção de retas finitas ( $\pi\epsilon\pi\epsilon\rho\alpha\sigma\mu\epsilon\nu\eta$ ). É evidente, portanto, que a reta introduzida via Postulado 2 não poderia ser infinita em ato. Por outro lado, não é certo também que este postulado engendre uma concepção de



retas potencialmente infinitas. Esta última possibilidade foi destacada por Proclo para, em seguida, mostrar que é falsa para a geometria euclidiana. Pouco depois de explicar os distintos tipos de movimento, como mencionado no capítulo 2, ele acrescenta: “Mas nós devemos entender que o caráter de ser produzido indefinidamente não pertence a todas as linhas. Isto não pertence tampouco ao circular nem ao cissoide, nem a nenhuma das figuras descritas por linhas, nem mesmo a todos estes que não encerram uma figura” (Proclo (1992, p. 147)).

Esta nota ainda não é suficiente. Avigad, Dean & Mumma poderiam alegar, por exemplo, que Euclides não tinha direito algum em introduzir retas infinitas em I.12 a não ser que fosse admitido também a existência desta espécie de retas em sua teoria. Daí então poderiam reivindicar a análise lógica como o melhor critério para esclarecer este procedimento. Então, a melhor maneira de rebater este argumento é mostrar como reconstruir esta proposição sem o recurso ao uso de retas infinitas.

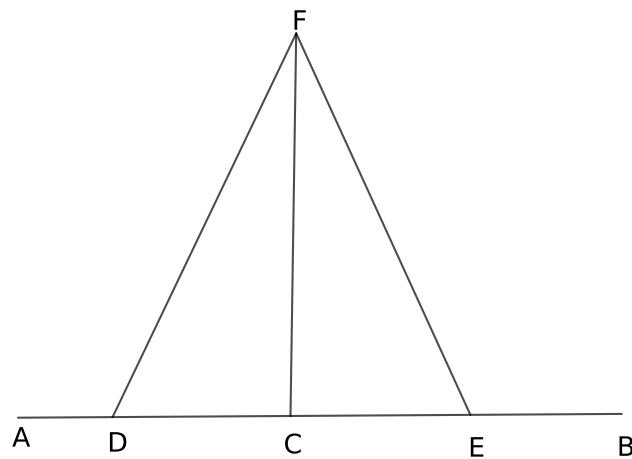


Figura 20 – proposição I.11

Antes de aclarar o procedimento em I.12, convém fazer uma breve recapitulação da prova I.11 para facilitar o argumento que se segue. Nestas duas provas Euclides mostra como construir uma reta perpendicular, ora a partir dum ponto sobre uma reta (I.11), ora em um ponto fora da reta (I.12). Em I.11 Euclides solicita a construção dum ponto  $D$ , encontrado ao acaso, sobre a reta *limitada*  $AB$ . Ora, como o ponto  $D$  caiu entre  $A$  e  $C$  (diagrama) e  $C$  está entre  $A$  e  $B$ , Euclides então pode construir, por I.2, a reta  $CE$  igual à  $DC$ . Seja então construído o triângulo equilátero  $FDE$  sobre a reta  $DE$ , como foi demonstrado em I.1. Seja então ligada a  $FC$ , via Postulado 1. Logo, sendo a  $DC$  igual à  $DE$ , com a  $CF$  comum a ambas, então as  $DC$ ,  $CF$  são iguais às  $EC$ ,  $CF$ . Ou seja: iguais aos quais acrescenta-se iguais o restante são iguais (Noção Comum 1). E como a base  $DF$ , do triângulo  $DCF$ , é igual à base  $EF$ , do triângulo  $ECF$ , então os ângulos  $DCF$  e  $ECF$  são iguais, como demonstrado em I.8<sup>2</sup>; e são ângulos adjacente à reta  $FC$ . E é dito na Definição

<sup>2</sup> I.8: caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, e tenham a

I.10: quando uma reta é alteada sobre outra reta, de modo a ter seus ângulos adjacentes iguais entre si, cada um dos ângulos é reto e a reta alteada é chamada perpendicular àquela sobre a qual se alteou; logo,  $FC$  é perpendicular à  $AB$ . QEF.

Em comentário a esta prova, Proclo (Proclo (1992, pp. 218-220)) observa corretamente que Euclides conseguiria provar esta proposição independente de  $AB$  ser limitada, ilimitada ou limitada num ponto e ilimitada noutra. Por exemplo: sendo  $AB$  limitada e  $C$  caindo não entre estes pontos, mas sim nas extremidades da reta ou para além desta, poder-se-ia aplicar o Postulado 2 e proceder com o mesmo raciocínio. Portanto, o fato do organizador dos *Elementos* falar em retas ilimitadas em I.12 pode significar que alí a prova não seria resolvida seguindo o mesmo argumento.

A prova de I.12 segue da seguinte maneira. Seja tomado o ponto  $D$  oposto ao  $C$  em relação à  $AB$ , sem limites. E com centro em  $C$  e distância  $CD$ , fique descrito o círculo  $EFG$ . Admita-se, pelo diagrama, que este círculo intersectou  $AB$  nos pontos  $E$  e  $G$ . Seja cortada a  $EG$  no ponto  $H$ , pelo teorema I.11. Fiquem traçadas as  $CG$ ,  $CH$  e  $CE$ . Logo, como  $GH$  igual à  $HE$ , e a  $HC$  sendo comum, então as  $GH$ ,  $HC$  são iguais às duas  $EH$ ,  $HC$ . E também a base  $CG$  é igual à base  $CE$ . Logo, o ângulo  $CHG$  é igual ao sob  $EHC$ . E são adjacentes. Ora, se uma reta é alteada sobre outra e faz seus ângulos adjacente iguais, então cada ângulo é reto, como ficou provado em I.10. Logo, ficou traçada uma perpendicular a partir dum ponto fora duma reta; QEF.

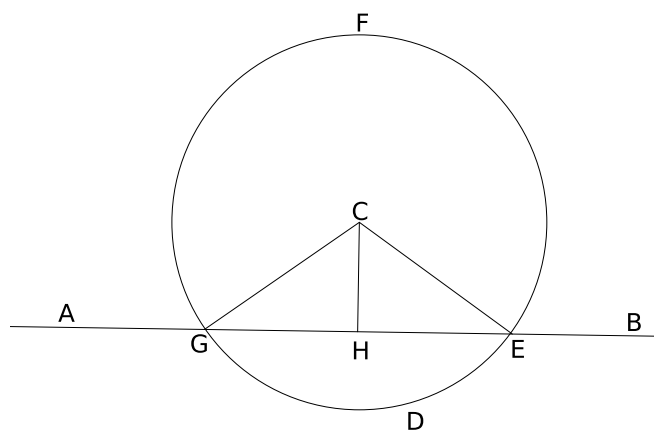


Figura 21 – proposição I.12

É natural que numa exposição moderna da geometria euclidiana, como aquela feita por Hartshorne, esse procedimento seja tomado como dado e não lhe seja acrescentado nenhuma explicação. É que para este autor a maneira como Euclides provava seus teoremas simplesmente não é relevante. De fato, o ofício do geômetra contemporâneo não depende de seu conhecimento sobre os *Elementos*. Ocorre que a ideia de que há conjuntos infinitos

---

*base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais*

de entes matemáticos igualmente infinitos, frequente da matemática contemporânea, não parece compatível com a geometria euclidiana. Este é justamente o caso do conjunto de retas apresentado por Avigad, Dean & Mumma.

Em I.11 Euclides havia mostrado como construir uma perpendicular a partir dum ponto sobre uma reta sem o uso de retas ilimitadas. Logo, a razão de Euclides falar em retas infinitas poderia ser esclarecida pela ideia de controle cognitivo do qual fala Manders. Pois, se a reta é finita, como costumeiramente é o caso nos *Elementos*, então o ponto  $C$  poderia cair colinearmente à  $AB$ ; ou então  $D$  poderia cair sobre  $AB$ ; ou então  $C$  e  $D$  poderiam cair no mesmo lado; ou, se fosse o caso de  $C$  cair acima de  $AB$ ,  $D$  poderia cair muito longe em relação ao  $C$ . Ou seja: não admitir retas infinitas em I.12 implicaria uma série de casos, cada um dos quais exigindo novas estratégias demonstrativas. E em nenhum destes “casos” ficaria construída a perpendicular. Este argumento é parcialmente adotado por Proclo (1992, p. 221), que retoma aí as objeções à ideia de infinito da geometria euclidiana. Logo, a reta em I.12 seria assumida como infinita em função da prática matemática de Euclides baseada em diagramas e não em virtude da ontologia por detrás dos *Elementos*. Convém ainda discutir as possíveis incompatibilidades entre a prática euclidiana e a postulação de retas infinitas, como foi sugerido por Avigad, Dean & Mumma.

Proclo principia sua objeção recorrendo à autoridade de Aristóteles em *Física 204a8-206a8*, onde se discute a impossibilidade do infinito ser um atributo de magnitudes físicas contínuas, seja em ato ou mesmo em potência. Ora, argumenta Proclo, se toda representação na imaginação é uma representação dalgo no mundo exterior (como foi dito no capítulo 2 desta dissertação), mas não existem magnitudes infinitas aí, como disse Aristóteles, então o infinito só poderia existir como um dos modos da imaginação. Porém, acrescenta ele, a imaginação não poderia conhecer algo infinito, posto que tudo que conhece vem acompanhado por forma e limite. Fala-se em infinito precisamente por haver conhecimento de entes finitos. Desta maneira, conclui, o infinito na geometria deve ser entendido como um recurso hipotético usado em função de entes finitos numa prova (Proclo (1992, pp. 222-223)).

Essa preocupação ocorre a Netz, para quem as proposições geométricas gregas não lidam com algum espaço infinito. As retas e planos, continua ele, seriam sempre seções finitas de entes infinitos projetados pelo geômetra. Disso conclui que as retas seriam *indefinidamente extensíveis*, e no entanto finitas no plano. Assumindo-se, ademais, a relação metonímica entre diagramas e proposições (geométricas), seguir-se-ia que o artefato gráfico é uma instanciação finita duma proposição (Netz (1999, pp. 32-35)). Alguém poderia argumentar, outra vez, que as retas euclidianas são potencialmente infinitas como supostamente ocorre em I.12 e I.22. Mas, se é correto falar que as provas de Euclides são diagramáticas, é ininteligível que um diagrama infinito possa ser exibido, como sugere I.12. Em I.22 Euclides é ainda menos claro, pois deliberadamente introduz uma reta limitada ( $\text{πεπερασμένη}$ ) num

ponto, mas fala duma ilimitada ( $\alpha\pi\epsilon\rho\omicron\varsigma$ ) noutro.

Uma dificuldade encontrada nos argumentos de Proclo e Netz sobre o infinito na geometria de Euclides deve-se ao fato da insistente recusa em conferir aos diagramas algum papel demonstrativo genuíno nos *Elementos*. Ao contrário do que afirmam estes autores, porém, seria até mesmo possível repensar a ontologia do tratado euclidiano a partir dos argumentos apresentados aqui em defesa das provas heterogêneas.

Uma solução a este caso é sugerida por Panza (2012), para quem os argumentos de Euclides são sempre *locais*. Por argumento local entende ele o processo em que os entes geométricos “herdam” (palavras suas) algumas propriedades ou relações dos artefatos que os representam. Assim definida, a proximidade superficial ao que Manders chamou de co-exatos é flagrante; também Panza reconhece que a geometria de Euclides é parcialmente baseada em diagramas. No entanto, Panza poderia recusar esta aproximação a Manders. É que Panza, ao contrário de Manders, é mais enfático ao falar do paralelismo entre as provas diagramáticas de Euclides e a ontologia que, supostamente, é pressuposta por sua obra. Isso poderia significar, por exemplo, que os postulados construtivos, ao contrário da proposta de Avigad, Dean & Mumma, não descrevem objetos abstratos (retas, círculos), senão que autorizam a construção destes mesmos objetos e uma ulterior referência ostensiva a elas no diagrama. Ou seja: um ente matemático, nos *Elementos*, existe porquanto existe algum meio de exibí-lo. Por sinal, o cerne do argumento de Panza no tocante ao caráter local das provas euclidianas é mostrar como as condições de identidade entre entes geométricos decorrem do próprio diagrama.

*Prima facie*, o critério de identidade entre objetos perpassa pela referência a entidades singulares. Recorde-se, a este respeito, que todas as vezes que Euclides estabelece em suas provas uma relação de igualdade é sempre entre dois entes matemáticos, nunca entre classes. Daí então poder-se representar formalmente uma proposição deste tipo na seguinte fórmula:

$$\exists x\varphi(x) \wedge \forall y\varphi(y) \leftrightarrow y = x,$$

Ou seja: existe um  $x$  tal que  $x$  possui um atributo  $\varphi$  e, para todo  $y$ ,  $y$  possui  $\varphi$  se, e somente se,  $x$  e  $y$  são iguais. O leitor há de recordar que este é o raciocínio empregado por Euclides ao estabelecer a igualdade entre raios dum mesmo círculo. Aliás, Avigad, Dean & Mumma optam por uma tática similar ao apresentar a seguinte fórmula para igualdade entre raios:

$$\forall a \forall b \forall c \forall \alpha \text{ Centro}(a, \alpha) \wedge \text{Sobre}(b, \alpha) \rightarrow \overline{ba} = \overline{ac} \leftrightarrow \text{Sobre}(c, \alpha)$$

Ocorre, porém, que ao contrário do que pode sugerir esta fórmula, a maneira como os entes matemáticos são introduzidos por Euclides não decorre (apenas) duma quantificação

mista sobre o escopo de conjuntos.

Ora, a referência a singulares na geometria de Euclides é feita somente a objetos dados ou que, em princípio, podem ser dados. E como ficou dito, um ente geométrico é dado se, e somente se, há um diagrama que represente-o. Esta é a função da *ekthesis*. A seu turno, Panza argumenta que um ente geométrico é dado se, e somente se, um diagrama apropriado para representá-lo é canonicamente desenhado. Em vistas do que ficou demonstrado no capítulo 3, esta assertiva poderia ser modificada, sem prejuízo, da seguinte maneira: um ente geométrico é dado se, e somente se, há procedimentos canônicos que permitam uma representação gráfica. Estes procedimentos, enfim, dizem respeito às operações contidas nos postulados 1-3. Depreende-se daí que não é possível falar em retas potencialmente infinitas na geometria de Euclides porque não há procedimentos canônicos que permitam um ente infinito ser dado.

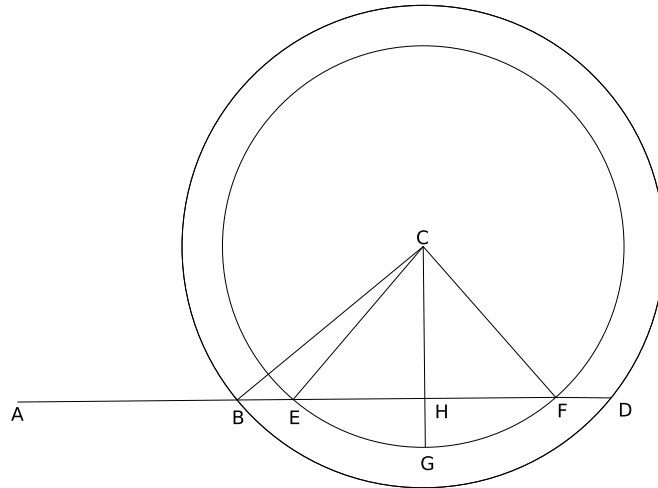


Figura 22 – reconstrução de I.12

Dito isso, Euclides poderia proceder da seguinte maneira em I.12. Seja a reta finita  $AB$  e um ponto  $C$  que não cai sobre ela. Logo, se  $C$  é colinear a  $AB$ , então não será construída uma perpendicular. Se este não é o caso, então  $C$  está acima ou abaixo de  $AB$ . Suponha que esteja acima. Caso isto suceda, então  $C$  poderá cair muito além de  $AB$ . Fique suposto isto. Fique então traçado  $BC$ . E como centro em  $B$  e distância  $BC$  fique descrito o círculo  $BCD$ . Seja então prolongada a  $AB$  até o ponto  $D$  na circunferência de  $BCD$  atravessando-o. A reta  $BD$ , portanto, corta  $BCD$  em dois pontos, o  $E$  e o  $F$ , respectivamente. Fiquem então traçadas as  $CE$  e  $CF$ ; e com centro em  $C$  e distâncias  $CE$  ou  $CF$  seja descrito o  $EGF$ . Por outro lado, seja cortada a  $EF$  no  $H$  e fique traçada a  $CH$  e através dela fique prolongada até o ponto  $G$  na circunferência de  $EGF$ . Será provado então que a partir de  $C$ , fora de  $AB$ , foi produzida uma perpendicular  $CH$ ; QEF.

Esta reconstrução revela que as provas de Euclides podem ser reconstruídas sem o uso de

retas infinitas (em potência ou em ato). Mais ainda: mostra que o papel demonstrativo do Postulado 2 é essencial à prática matemática euclidiana. Considerando, enfim, o argumento de Panza sobre o caráter local das provas euclidianas, pode-se concluir que a aplicação do Postulado 2 não pode prescindir do uso dos artefatos gráficos.

#### 4.4 Controle sintático e diagramático

Não resta dúvidas que Avigad, Dean & Mumma poderiam responder a estas questões. Até lá, porém, deve-se ressaltar que a análise lógica não é suficiente, embora necessária, para explicar por completo a geometria de Euclides e eliminar as justificativas diagramáticas. De outro lado, é oportuno destacar também algumas diferenças entre uma prova sintática e as provas de Euclides. Os próximos parágrafos consideram as questões apresentadas no capítulo 2 sobre as exigências técnicas uma análise filosófica dos *Elementos* deveria satisfazer.

A primeira questão gira em torno de quais qualidades uma prova tem ou deveria ter. Pode-se agora perceber como isto pode ensejar um contraste entre uma versão real, *i.e.*, como um matemático efetivamente prova seus teoremas, e sua versão idealizada, prescrita por modelos formais. Esses são alguns dos tópicos elogiados por Carnap em seu *Logical Syntax of Language*, oportunidade em que fala da importante axiomatização (ou suposta “rigorização”, como depreende-se de suas observações) da geometria de Euclides feita por Hilbert ainda no final do séc. XIX. “Ao elaborar um SA [Sistema Axiomático] de Geometria, é costume apenas indicar os axiomas especificamente geométricos. Para tornar possíveis as deduções, o cálculo proposicional e funcional, juntamente com a aritmética elementar, devem ser acrescentados” (Carnap ([1937] 2000, p. 271)).

O argumento de Carnap, aplicado à presente discussão, seria equivalente a dizer que prática matemática de Euclides seria interessante unicamente como objeto de estudo historiográfico, no contexto da sua *descoberta*, como parece ter sido um dos objetivos de Netz, e não como uma genuína preocupação filosófica sobre as *justificativas* ali arroladas. Isso porque, acrescentaria ele, independente de como os diagramas eram empregados, seria possível reduzir, *i.e.*, reconstruir, suas provas nalgum outro modelo de teoria dedutiva à maneira de Avigad, Dean & Mumma. A aproximação entre a reconstrução destes autores pode ser verificada na seguinte passagem de Carnap no *Aufbau*

Se usarmos a análise epistemológica de uma maneira consciente e claramente conceituada, poderemos reduzir os objetos (conteúdos de cognições, conceitos) [de uma ciência] para um outro [sistema] em uma extensão suficientemente grande para que a possibilidade de um sistema de redução geral (“sistema de construção”), pode ser demonstrado: é, em princípio, possível colocar todo o conceito de todas as áreas da ciência neste sistema, isto é, eles são redutíveis uns aos outros e, em última instância, alguns conceitos básicos ([1928] 2003, p. 308).

Ressalte-se, todavia, que a reivindicação principal aqui não é mostrar que a análise lógica dos *Elementos* é desinteressante ou que a definição *standard* deva ser abandonada. Ao contrário: deve-se reconhecer o mérito do trabalho de Avigad, Dean & Mumma ao destacar a estrutura formal das provas euclidianas por detrás dos labirintos da linguagem ordinária. Isso não deve escusá-los, todavia, de pensar a prática matemática unicamente sob a perspectiva formal; de ignorar a dimensão epistemológica concernente ao uso dos diagramas. É forçoso insistir, portanto, que a análise lógica é um critério muito restrito para uma compreensão mais ampla do processo de justificação matemática. Essa observação, se aceita, deveria vir acompanhada dum modelo analítico próprio para as provas reais. Desse modo seria possível evitar que o modelo sintático-formal seja tomado uma métrica absoluta.

Na sequência, a questão pelas habilidades cognitivas que uma audiência precisa ter para que compreenda e verifique a correção duma prova. No caso da geometria de Euclides, falou-se da capacidade de manipular artefatos gráficos e linguísticos e verificar quando um atributo co-exato é exibido pelo diagrama. No sistema de Avigad, Dean & Mumma, por outro lado, todas as habilidades estão relacionadas ao domínio duma linguagem formal e uma atenção à aplicação de regras de inferência. São, naturalmente, habilidades distintas; e no entanto, a transição de uma prova a outra não é feita gratuitamente, sem haver uma perda no controle cognitivo. Agora, uma questão que não é destacada por estes autores, mas lembrada por Kleene, é que mesmo num processo de axiomatização é preciso ater-se a alguns elementos epistemológicos concernentes à manipulação simbólica. “As asserções da metateoria precisam ser compreendidas. As deduções devem trazer convicção. Precisam proceder através de inferências intuitivas e não como nas deduções num sistema formal por meio de aplicação de regras de inferência” (Kleene (1974, 62)). Curioso notar, junto a essa fala de Kleene, que no *Logical Syntax of Language* ([1937] 2000, p. 271) fica dito que mesmo num sistema axiomático algumas regras podem ser assumidas *implicitamente* pela audiência. Professores de lógica por vezes deixam de enunciar regras de formação sob a suposição de que a atenção aos exemplos bastaria. E no entanto, poderia ocorrer dum aluno escrever “ $\wedge AB$ ”, “ $AB \wedge$ ” ou “ $\rightarrow AB$ ” por não encontrar regra alguma que determine quais concatenações simbólicas definem uma fórmula bem formada. Ora, esta era uma das principais críticas feitas a Euclides, qual seja, que não há regras concernentes à manipulação diagramática enunciadas explicitamente. Esta falta, contudo, pode ser esclarecida doravante a partir da sua prática.

Há que observar-se, além disso, que as habilidades cognitivas de acordo com o sistema de Avigad, Dean & Mumma são mais onerosas ao agente envolvido, posto que há um número maior de passos a ser dado em uma prova. Cabe perguntar, por isso, se um agente poderia satisfazer essas exigências. Considere, por exemplo, que para realizar uma prova sintática do sistema de Avigad, Dean & Mumma é preciso apreender pelo menos 70 regras de inferências e acompanhar uma prova com aproximadamente 100 passos!

Por fim, pergunta-se também pela possibilidade dum sujeito mudar seu estado epistemológico em face duma prova. Ora, não há razão para negar que isso possa ser o caso tanto na geometria de Euclides quanto no sistema de Avigad, Dean & Mumma. Cumpre observar em cima disso que se uma audiência percebe claramente a distinção exatos/co-exatos e está persuadida da correção da prova, não parece razoável dizer que o argumento diante si não é uma prova.

Outrossim seria possível comparar as observações feitas até o momento aos argumentos do matemático Yehuda Rav (1999), o qual procura igualmente (re)conduzir o conceito de prova ao centro da matemática desde uma perspectiva epistemológica. Segundo ele, a ciência matemática teria como objetivo a invenção de métodos, ferramentas e estratégias para resolver problemas previstos na agenda da investigação científica, ou mesmo antecipá-los; sejam estes problemas de natureza puramente teórica ou concernentes à aplicabilidade. Dentro deste quadro, seria possível dizer também, sob a ótica da retórica (como ficará dito no próximo capítulo), que um matemático deve pensar a maneira como seu raciocínio é exposto diante sua comunidade de pares e como esta emprestará assentimento à verdade dum teorema. Portanto, reter o olhar analítico apenas às estruturas dedutivas subjacentes às provas matemáticas, trazendo-as à luz por meio dum maquinário formal, como fizeram Avigad, Dean & Mumma, por vezes pode ignorar fecundos resultados a partir da existência dum problema até então não solucionado.

Um conhecido exemplo na história e desenvolvimento dos *Elementos* é o caso do Postulado 5. Que se saiba, Proclo foi o primeiro a especular se este postulado era de fato um princípio matemático e se seria possível demonstrá-lo na geometria euclidiana. Estas reflexões chegaram ao Oriente medieval, por volta do séc. IX, e foram recuperadas na Europa a partir dos séculos XVI-XVII. As diversas disputas sobre a possibilidade de provar este princípio não apenas resultaram numa primeira formulação da geometria não euclidiana, ao final do séc. XVIII, como reforçaram a necessidade de novas reflexões e métodos concernentes a tópicos metamatemáticos, tema que foi desenvolvido a partir do séc. XIX com David Hilbert. É neste trabalho comunitário — quiçá experimental — que Rav enxerga a estabilidade do conhecimento matemático.

A lição a ser retirada destes episódios, pontua Rav, diz respeito aos avanços matemáticos possibilitados por tais problemas. Caso fosse possível resolver quaisquer problemas desta natureza com algum tipo de algoritmo matemático, argumenta, a matemática não teria feito tais descobertas. Portanto, conclui Rav, deve-se entender que “[a]s provas são a maneira do matemático *mostrar o maquinário matemático* para resolver problemas e *justificar* que a solução proposta para um problema é, de fato, uma solução” (Rav, (1999, p. 13, grifos do autor)). Logo, fazer geometria ao estilo euclidiano não é apenas ater-se a uma sequência dedutiva em linguagem natural, mas também aperceber-se que as justificativas diagramáticas formam parte do maquinário cognitivo e epistemológico dos *Elementos*.



Uma concepção sintático-formal da prova matemática, como a de Avigad, Dean & Mumma, embora de notável importância para uma esclarecimento conceitual das provas euclidianas, simplesmente identifica as provas informais de Euclides a objetos sintáticos sem considerar como um sujeito poderia estar convencido de que o uso dos diagramas é legítimo.

De fato, a visão comum em escritos filosóficos parece ser que o conhecimento matemático reside em um corpo de teoremas (proposições, declarações), enquanto que a função das provas é derivar teoremas de primeiros princípios, axiomas verdadeiros, e assim conferir verdade aos teoremas. Ou, de forma menos aristotélica, as provas servem *apenas* para validar teoremas com base em axiomas aceitos. Não há dúvida de que a “visão comum” é aprumada e filosoficamente satisfatória. A principal desvantagem é que ele não se encaixa na prática matemática, nem é capaz de explicar a fonte do conhecimento matemático e a dinâmica de seu crescimento (Rav (1999, p. 15)).

Então, se uma prova matemática não é (apenas) uma derivação sintática dentro de um sistema formal, é possível pensar, metaforicamente, sugere Rav, um teorema como uma chamada editorial e a prova como a trama da história. Para além do caráter público do raciocínio matemático ilustrado nesta metáfora, é possível notar também como uma mesma história poderia ser contada de maneiras distintas, com estilos distintos, e, ainda assim, manter a objetividade requerida (Cf. Rav (1999, p. 22; 29)). A partir destas observações, Ravi conclui: “A matemática é uma arte coletiva: o processo social de checagens cruzadas, e recíprocas, parece ser o único meio de erradicar erros e garantir a coerência geral e estabilidade do conhecimento matemático” Rav (1999, p. 36)).

Dentro desta discussão, e das observações feitas por Manders, seria possível pensar numa distinção entre *controle diagramático*, exercitado no contexto de teorias e provas heterogêneas, e, do outro lado, *controle sintático*, habilidade exigida por teorias e provas homogêneas formais. Esta poderia ser uma maneira de ampliar os argumentos de Manders quando este fala em controle cognitivo na geometria euclidiana. Algumas anotações finais podem ser feitas a partir da tese de Keränen (2005) sobre o controle cognitivo na matemática.

De acordo com Keränen, há dois aspectos indispensáveis na vida epistemológica de sujeito no curso de uma investigação. Por um lado, tem-se os recursos epistemológicos disponíveis a um sujeito em determinado momento. Trata-se das habilidades que permitem perseguir determinado objetivo. Sob essa categoria, pode-se colocar os conceitos relevantes a uma teoria, o método através do qual espera-se obter (novo) conhecimento e o conhecimento o agente realmente tem. Por outro lado, tem-se os processos epistemológicos: o exercício dessas capacidades com vistas a alcançar um certo objetivo. Isso posto, a autora pretende então articular esses conceitos em torno do que chama controle cognitivo da seguinte maneira: “(...) O controle cognitivo é uma posição epistemológica apreciada em um processo epistemológico em virtude de ter-se uma configuração adequada de recursos

epistemológicos” (Keränen (2005, pp. 53-54)).

Portanto, uma maneira de comparar e avaliar (qualitativamente) os tipos de controle cognitivos fornecidos por uma teoria homogênea e uma heterogênea seria verificar qual delas oferece um quadro conceitual mais rico e abrangente de acordo com os objetivos previstos na agenda matemática. O controle cognitivo deve permitir que um sujeito, ou audiência, enfrente os desafios epistemológicos no curso de uma investigação matemática, muitos dos quais previstos na agenda científica. Neste ponto, Keränen argumenta que isso ocorreria em três níveis coordenados entre si. Num primeiro momento, um sujeito deveria ser capaz de localizar o grupo de fatos relevantes à sua busca. Interessaria saber restringir o escopo de sua investigação aos fatos da geometria e não, *e.g.*, os da álgebra linear. Em seguida, este sujeito deveria ser capaz de representar estes fatos. Neste nível, o sujeito deveria perceber também que alguns tipos de representação lhe permitiria resolver o problema de maneira mais eficiente. O último estágio diz respeito a como o sujeito deveria extrair (novos) fatos relevantes a partir do que fora feito nos primeiros níveis.

Em suma, um sujeito goza de controle cognitivo sobre um processo epistêmico em vistas à responder uma questão porquanto tenha identificado um conjunto de fatos cujo conhecimento torna possível resolver corretamente a questão; tenha escolhido uma representação organizadora deste conjunto; seja capaz de localizar e extrair fatos diretamente relevantes para responder a questão através da manipulação da representação.

Embora o trabalho de Keränen não tenha em seu horizonte uma análise mais detida da prática matemática — não obstante apresente claras aproximações ao texto de Manders —, seus argumentos ajudam a pensar melhor uma possível comparação entre o controle sintático e o diagramático.

Dentro do que foi discutido, a escolha do tipo de representação de fatos matemáticos deve levar em conta o tipo de audiência à qual um determinado resultado será comunicado. Portanto, a audiência deve servir de critério para avaliar a eficiência dum tipo de representação adotado; se, *e.g.*, é preciso comunicar uma prova a uma audiência com conhecimento avançado em álgebra, a adoção de representações algébricas é mais razoável do que as geométricas. E também deve-se apontar a importância da audiência na recepção e compreensão duma prova de acordo com as estratégias argumentativas adotadas por um matemático. O matemático poderá ignorar longos raciocínios se compreende que a audiência tem a formação intelectual correspondente. Tome-se como exemplo o caso em que o matemático comunica-se com seus pares, seja por escrito, num *paper*, ou numa apresentação oral. Tudo aquilo que este possa supor já ser conhecido e aceito pela audiência poderá ser intencionalmente ignorado ao longo de sua exposição.

Ora, por estas observações pode-se concluir que o sucesso dum tipo de controle cognitivo não pode está dissociado da audiência. Será à audiência que o matemático se dirige quando deseja saber se um determinado método poderia ser adotado ou se um argumento é correto;

não porque estas questões possam ser reduzidas ao conceito de audiência, mas porque encontra aí uma maneira de fornecer respostas uniformes e controladas de acordo com o problema a ser resolvido.

E a audiência ajuda, enfim, a discriminar um sujeito que compreende de fato uma prova e manipula corretamente os tipos de representação de quem simplesmente mimetiza uma derivação, sem com isso apresentar compreensão do processo argumentativo. É certo que, neste segundo caso, um sujeito pode verificar cada passo inferencial duma prova e consultar alguma lista com as regras de inferência adotada e, no entanto, ser incapaz de compreendê-la como um todo; não entender, por exemplo, porquê apresenta-se numa certa estrutura (linguística ou heterogênea); porquê envolve um tipo específico de representação ou vários e poliformes. Em outras palavras, a simples operação mecânica de checar a aplicação duma regra (sintática ou diagramática) não engendra compreensão, seja qual for o modelo sob estudo. “De fato, falar em ter um controle cognitivo sobre o processo de ler [acompanhar] uma prova é uma maneira de capturar a ideia intuitiva de entender uma prova” (Keränen (2005, p. 70))

Portanto, a objeção aqui traçada é sobre a identificação entre prova matemática e objetos sintáticos. Num sentido mais abrangente, a justificativa matemática é o resultado de uma prática racionalmente orquestrada que eventualmente ignora mecanismos formais. E nisto é possível encontrar subsídios para perseguir uma articulação conceitual própria, na qual pode-se entender como um exímio matemático pode malograr em persuadir sua audiência acerca de sua prova, ainda que seu argumento seja formalmente válido.

Costuma-se pensar, pois, que a criação de um diagrama dispensa regras rígidas tal qual a linguagem e que por isso qualquer inferência poderia ser feita quando, ao contrário, é no próprio ato de construção de um diagrama que o filósofo deveria concentrar sua atenção na busca de quais regras um sujeito deveria seguir. Argumentos baseados em diagramas, portanto, não menos que argumentos linguísticos (sejam verbais ou formais), envolvem um conjunto de habilidades para determinar como fazer uma inferência. Serve de exemplo a dificuldade que uma mente algebrística tem em compreender os diagramas de Euclides, embora seja perfeitamente possível representá-los algebricamente. Resta então saber como estas observações são articuladas dentro da análise retórica, que será discutida no próximo capítulo.

#### 4.5 Observações finais

Este capítulo apresentou os principais argumentos contra a alegação de que os diagramas são dispensáveis da prática matemática de Euclides. Dentro da discussão sobre o papel demonstrativo do Postulado 2, discutiu-se a suposta compatibilidade entre o procedimento euclidiano e o sistema formal de Avigad, Dean & Mumma. Ao contrário da formalização

destes autores, é possível proceder, nos *Elementos*, sem o uso de retas infinitas, o que foi verificado na reconstrução da prova I.12. A partir disso foi possível apresentar algumas observações críticas sobre a identificação entre prova matemática e objetos sintáticos, como ocorre em Avigad, Dean & Mumma, em Kleene e Carnap.

## 5 Análise retórica das provas heterogêneas

### 5.1 Estratégia do capítulo

Este capítulo tem a missão de ampliar e reforçar os principais argumentos em favor da análise retórica de Lassalle Casanave & Panza. A seção 5.3 apresenta a distinção entre provas canônicas e entimemáticas que, se verdadeira para a geometria euclidiana, explica o procedimento adotado em relação ao Postulado 2. A seção 5.4 apresenta algumas esclarecimentos sobre o conceito de audiência e em que sentido é dito que as provas euclidianas são dependentes da audiência. Discutem-se na seção 5.4 as aproximações da geometria euclidiana à doutrina aristotélica de ciência demonstrativa. Esta seção traz ainda algumas evidências historiográficas sobre as interações entre a geometria e a arte retórica na Grécia clássica.

### 5.2 Prova retórica: argumentos canônicos e entimemáticos

A tese de Manders sobre os atributos exatos e co-exatos, caso mostre-se correta para a prática matemática euclidiana, explica um importante aspecto do método inferencial aplicado ao longo dos *Elementos*. É de particular importância suas observações sobre a maneira como uma prática intelectual baseada em provas heterogêneas deveria restringir o escopo de respostas da audiência em função das sucessivas modificações topológicas do artefato gráfico, seja este, por exemplo, um diagrama geométrico ou um mapa cartográfico. Ademais, o controle cognitivo neste contexto, como também notou Keränen, deve permitir a um agente racional explorar determinações textuais sobre construções geométricas, perpassando pelo uso dos postulados construtivos, e, de outro, como reconhecer “falhas” nalgumas configurações gráficas que supostamente deveriam ser tomadas como diagramas.

Agora, antes de avançar na análise retórica de Lassalle Casanave & Panza, tema deste capítulo, convém ainda discutir algumas implicações a partir da interpretação de Manders em relação ao Postulado 2. Para estas considerações iniciais, tome-se a prova de II.14. O método adotado em II.14 é chamado quadratura ( $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\acute{\iota}\zeta\epsilon\upsilon\upsilon$  e  $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ ). Neste tipo de prova Euclides solicita a construção dalgum quadrilátero de área igual ao de alguma outra figura retilínea. Isso já havia sido feito em I.42, I.44 e I.45<sup>1</sup>.

Seja a figura  $A$ . É requisitado construir um quadrado com a mesma área. Seja construído então o paralelogramo retangular  $BD$  igual à retilínea dada (teorema I.145). Se  $BE$  é igual à  $A$ , ter-se-ia feito o que foi prescrito. Mas, se este não é o caso, ou  $BE$  ou a  $ED$  é a maior.

<sup>1</sup> I.42: *construir um paralelogramo igual ao triângulo dado, no ângulo retilíneo dado*; I.44: *Aplicar à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado*; I.45: *Construir no ângulo retilíneo dado um paralelogramo igual à retilínea dada*. O leitor deve notar que a noção de igualdade nestas proposições, assim como em II.14, não significa congruência.

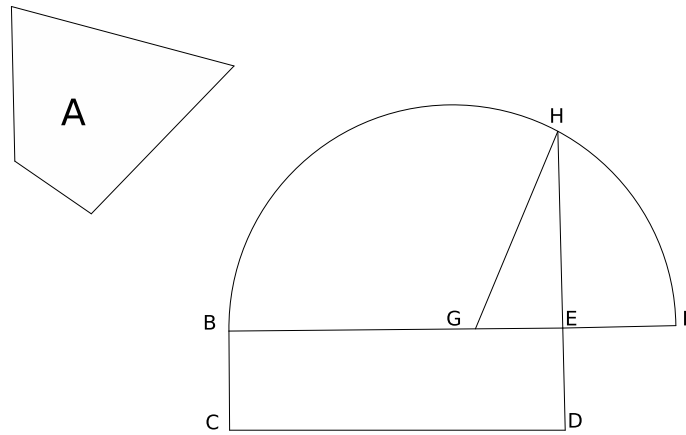


Figura 23 – proposição II.14

Suponha-se que  $BE$ ; e fique prolongada a  $BE$  continuamente até o  $F$  e fique posta igual a  $ED$ . Seja a  $BF$  cortada em duas no  $G$  (teorema I.10) e, com centro em  $G$  e distância  $GB$  ou  $GF$  fique descrito o semicírculo  $BHF$ . Seja prolongada  $DE$  até o  $H$  e seja traçada a  $GH$ . Logo, como a  $BF$  foi cortada em iguais no  $G$  e em desiguais no  $E$ , então o retângulo contido pelas retas  $BE$ ,  $EF$  com o quadrado sobre a  $EG$  é igual ao quadrado sobre a  $GF$ , como foi provado em II.5 De outro lado,  $GF$  é igual à  $GH$ ; logo, o quadrado contido pelas  $BE$ ,  $EF$ , com o sobre a  $GE$  é igual ao sobre a  $GH$ , como provado em II.5. Mas os quadrados sobre as  $HE$ ,  $EG$  são iguais ao sobre a  $GH$  (teorema I.47); portanto, os pelas  $BE$ ,  $EF$ , com o sobre a  $GE$  é igual aos sobre as  $HE$ ,  $EG$ . Seja subtraído o quadrado sobre a  $GE$  comum; portanto, o retângulo contido pelas  $BE$ ,  $EF$  restante é igual ao quadrado sobre as  $EH$ . E o pelas  $BE$ ,  $EF$  é o  $BD$ ; pois a  $EF$  é igual à  $ED$ ; portanto, o paralelogramo  $BD$  é igual ao quadrado sobre a  $HE$ . E o  $BD$  é igual à figura  $A$ . Logo, também a retilínea é igual ao quadrado que seja descrito sobre a  $EH$ . QEF.

Como já foi destacado, a primeira aplicação do Postulado 2, na prolongação de  $BE$ , é incompatível com a interpretação sugerida por Panza. Não há um segmento ou circunferência até onde a reta deveria ir. Por outro lado, Lassalle Casanave & Panza (2012), já haviam anotado que prolongação  $EH$ , embora genuinamente construtiva, *i.e.*, a representação gráfica é univocamente determinada, não seria relevante à prova. Euclides poderia até mesmo ter optado por construir  $EH$  a partir de I.11 ou I.12: produzir a perpendicular  $EH$  a partir de  $E$ , traçando, em seguida,  $HG$ , ou traçar  $GH$  e então produzir a perpendicular a partir de  $H$ . Para qualquer um destes “casos” não haverá nenhuma perda do controle sobre o artefato gráfico.

Ocorre, no entanto, que o Postulado 2 aplicado desta maneira justificaria um atributo exato. Logo,  $EF$  também deveria ser um exato. Todavia, a prolongação aparenta ser arbitrária. Portanto, ou o Postulado 2 assegura a construção dum ente exato ou justifica um co-exato; porém, se este último mostra-se verdadeiro, a proposta aqui reivindicada

deve ser abandonada por completo.

Uma maneira de restituir a construtividade ao Postulado 2 seria proceder da seguinte forma. Com centro em  $E$  e distância  $ED$ , fique traçado um círculo. Em seguida, seja produzida  $EF$  colinear à  $BE$  até a circunferência deste círculo. Logo, por Def. I.15,  $ED$  é igual à  $EF$ , como exige a prova. Por meio deste raciocínio é possível, de um lado, reabilitar a reconstrução de Panza para este postulado e, ainda mais, mostrar que o Postulado 2 introduz um atributo exato ou, pelo menos, como um co-exato passa a ser um exato. Esse caminho, frise-se, é admissível na matemática, mas nunca o inverso.

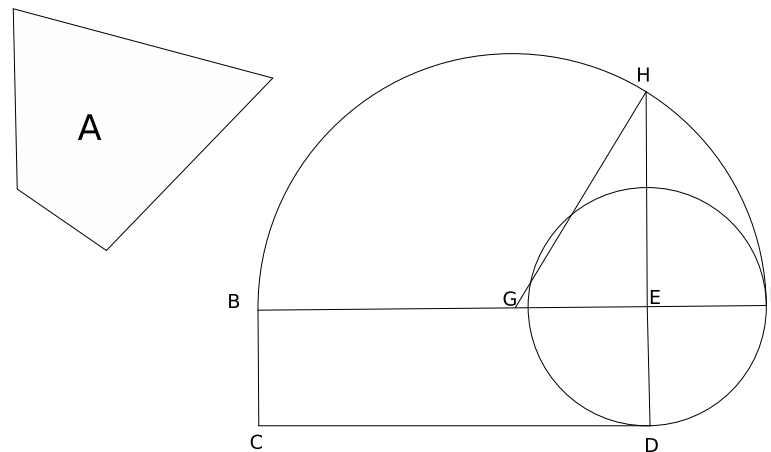


Figura 24 – Reconstrução de II.14

Recorde-se que, ao caracterizar os atributos co-exatos, Manders os associou com as propriedades topológicas intrínsecas das representações gráficas, as quais seriam ainda visualizáveis após uma série de modificações. Tal é o caso quando alguém traça uma reta através do Postulado 1; certamente a linha desenhada não satisfaz a definição de Euclides. Outrossim em relação ao Postulado 2 quando um limite não é estabelecido; sua aplicação não genuinamente construtiva à reta  $BE$  resulta num co-exato: a prolongação  $EF$ . Porém, quando sua construtividade é restituída, como feito acima, a reta prolongada  $EF$  passa a ser o raio de um círculo; portanto, a aplicação genuinamente introduz um atributo exato.

Retornando à I.16, a reconstrução segue-se da seguinte maneira. Com centro em  $E$  e distância  $EB$ , fica descrito um círculo; fica prolongado  $BE$  até  $F$ , na circunferência deste círculo. Logo,  $BE$  é igual à  $EF$ , como era exigido. Por outro lado, a  $CD$ , que não precisava respeitar restrições métricas, é também o raio dum círculo já descrito. Note-se, por fim, que a prolongação de  $AD$  até o ponto  $G$  segue da mesma maneira e a segunda parte da prova não será alterada.

Agora, a reconstrução aqui oferecida coloca o seguinte problema. Como uma audiência poderia acessar este procedimento? Não haveria como responder a esta questão considerando somente a audiência histórica de Euclides em Alexandria. Por isso é preciso considerar

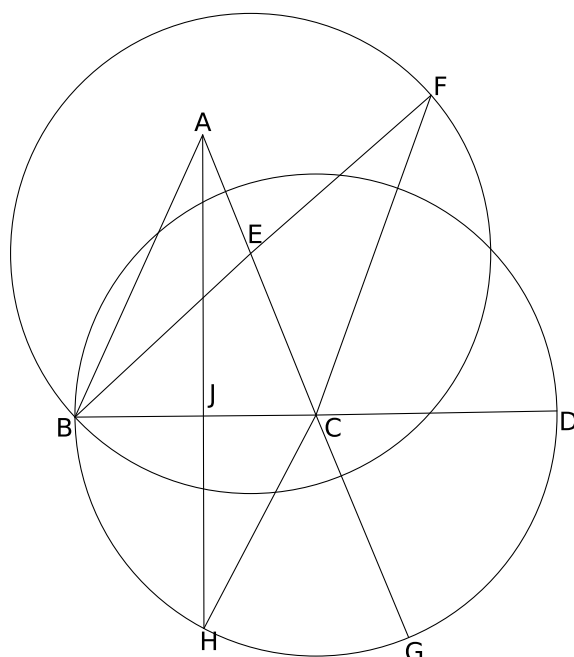


Figura 25 – Reconstrução de I.16

a audiência de maneira mais abstrata (ainda que seja preciso esclarecer melhor em que sentido). Dito isto, Lassalle Casanave & Panza (2015, p. 14) chamam atenção para um outro aspecto da prática matemática euclidiana que, embora não seja inteiramente compatível com a proposta de Manders, poderia ampliar o escopo da filosofia da prática matemática para o caso do Postulado 2. É que o método inferencial euclidiano, relativo a este postulado, argumentam Lassalle Casanave & Panza, poderia funcionar como que os *entimemas* introduzidos na literatura por Aristóteles. Neste sentido, as provas matemáticas, especialmente as de Euclides, poderiam ser aproximadas dalgumas categorias da retórica clássica.

Em *Primeiros Analíticos*, 70a10, o entimema é definido como um silogismo a partir de coisas semelhantes (εἰκότων) ou sinais<sup>2</sup> (σημείων). Aristóteles esclarece na mesma passagem que um silogismo a partir de coisas semelhantes é aquele que trata de proposições plausíveis sobre coisas que ordinariamente acontecem. Por exemplo: não é razoável emprestar assentimento a alguém de caráter duvidoso. Um silogismo a partir de signos trata de proposições demonstrativas, necessárias ou plausíveis. Mais precisamente, é um silogismo no qual verifica-se uma consequência lógica da verdade da conclusão a partir da verdade das premissas. Esta segunda definição, por enquanto, satisfaz a exigência básica duma prova matemática, a saber, que um argumento entimemático seja dedutivamente válido.

De fato, Aristóteles já havia apontado, em *Primeiros Analíticos* II.23, o caminho para se pensar as interações entre a retórica e a teoria do silogismo sob o conceito de prova ao

<sup>2</sup> Cf. Sanmartín (1995a).



dizer:

Agora, deve-se dizer que não só os raciocínios dialéticos e demonstrativos são formados através das figuras explicadas acima [*i.e.*, poderiam ser reduzidas a alguma das figuras da silogística], mas também os raciocínios retóricos e, em geral, qualquer argumento convincente e com qualquer método. Pois, de todas as coisas que temos certeza, bem é através de raciocínio, bem através da verificação (Aristóteles, *Primeiros Analíticos*, 68b9-14).

Aristóteles retoma e amplia estas observações em *Retórica*, 1355a<sup>3</sup>. O que há de singular no tratamento aristotélico do assunto é a ênfase sobre o conceito de prova e a dimensão racional da persuasão. Não por acaso Aristóteles fala nesta passagem que o entimema é o cerne da prova por persuasão (πίστις) — própria da arte retórica — sendo então um *silogismo abreviado*. Tome-se como exemplo a seguinte inferência:

Sócrates é filósofo.

---

Sócrates é ardiloso ∴

É evidente que este raciocínio é formalmente inválido; não há nenhuma relação lógica entre ser filósofo e ser ardiloso. A proposta de Aristóteles, porém, não é apenas sobre a correção formal desta inferência mas ao fato de que a audiência poderia aceitar a conclusão caso fosse assumido como verdadeiro que todo filósofo é ardiloso. De sorte que se esta proposição fosse acrescida ao argumento acima, revelar-se-ia uma instância do silogismo AII de primeira figura:

Todo filósofo é ardiloso

Sócrates é filósofo.

---

Sócrates é ardiloso ∴

A importância da observação acima reside no caráter público ao qual Aristóteles vincula os entimemas. Pois a prova retórica é, por excelência, um ato público, dependente, portanto, da audiência. Vale registrar aqui as palavras do autor:

<sup>3</sup> Cf. tradução de Manuel Alexandre Júnior, Paulo Farmhouse Alberto & Abel do Nascimento Pena (2005).

(...) a demonstração retórica é o entimema e que este é, geralmente falando, a mais decisiva de todas as provas por persuasão; que, enfim, o entimema é uma espécie de silogismo, e que é do silogismo em todas as suas variantes que se ocupa a dialética, no seu todo ou nalguma das suas partes, e é igualmente evidente que quem melhor puder teorizar sobre as premissas do que e como se produz um silogismo também será o mais hábil em entimemas, porque sabe a que matérias se aplica o entimema e que diferenças este tem dos silogismos lógicos (*Retórica*, I, 1355a).

A analogia entre entimemas e o procedimento de Euclides é patente. Como ficou dito mais cedo em observações ao texto de Netz, raríssimas são as ocasiões em que o autor dos *Elementos* expõe suas razões de modo claro. Considere, a este respeito, a maneira como é estabelecida a igualdade entre os ângulos  $AEB$  e  $FEC$ :

Os ângulos  $AEB$  e  $FEC$  são opostos no vértice.

---

Os ângulos  $AEB$  e  $FEC$  são iguais  $\therefore$ .

Para saber porquê um sujeito aceitaria esta inferência bastaria atentar-se para a proposição I.15: *caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si*. De modo que o entimema acima resultaria no seguinte silogismo:

Todas as retas que se cortam fazem os ângulos no vértice iguais entre si

Os ângulos  $AEB$  e  $FEC$  são opostos no vértice.

---

Os ângulos  $AEB$  e  $FEC$  são iguais  $\therefore$ .

Na passagem seguinte àquela mencionada logo acima, Aristóteles define a retórica como a arte de discernir os meios de persuasão mais pertinentes a cada caso (*Retórica*, 1355b). E na mesma passagem ele já havia observado que persuasão é uma espécie de demonstração. Daí poder-se falar que a geometria persuade no tocante ao seu gênero de conhecimento. Por conseguinte, Lassalle Casanave & Panza tentam, por meio da chamada análise retórica, aplicar este preceito aristotélico às provas heterogêneas de Euclides. “Consideramos que uma prova entimemática deve ser considerada como uma prova em um *sentido genuíno* e não como um argumento aceitável que não tem poder de prova” (Lassalle Casanave & Panza (2015, p. 15, grifos acrescentados)). Uma prova em sentido genuíno, frise-se, diz respeito à prática matemática; são, portanto, as provas reais, como até aqui se falou.

Em sintonia com Netz e Manders, Lassalle Casanave & Panza argumentam que a teoria matemática dos *Elementos* não pode ser dissociada da prática matemática feita a partir desta obra. Ou seja: explicar como funciona as justificativas diagramáticas de Euclides é

entender quando alguém está habilitado a usar o artefato gráfico. Isso significa dizer que muito mais do que demonstrar teoremas, é preciso atentar-se para a dimensão normativa que rege as provas euclidianas. À diferença de Netz e Manders, como foi insinuado, o cerne da análise retórica reside no caráter público das provas matemáticas. É, portanto, um modelo de prova matemática dependente da audiência. Reivindica-se então passagem 1357b da *Retórica*, onde Aristóteles afirma ser função desta arte “(...) tratar das questões sobre as quais deliberamos e para as quais não dispomos de artes específicas, e isto perante uma audiência incapaz de ver muitas coisas ao mesmo tempo ou de seguir uma longa cadeia de raciocínios”.

É algo corriqueiro entre matemáticos deixar de enunciar alguma premissa por entender que a audiência já possui este conhecimento. Imagine como seria estranho e desnecessário a Goldbach explicar detalhadamente seu raciocínio a Euler, como se este fosse um completo ignorante sobre o assunto tratado. O sucesso da prova retórica, portanto, reside na adequação dos entimemas ao perfil intelectual da audiência. Considere-se, por exemplo, que para uma audiência devidamente treinada em geometria as provas de Euclides não exigem a explicitação linguística de todos os passos; seria possível até mesmo explicar uma prova como a I.1 sem nenhuma referência ao texto. Em contraste, um sujeito que nunca viu uma obra matemática sentiria dificuldades em compreender, *e.g.*, a sistemática omissão dos princípios ao longo da dedução. É a partir desta percepção que Lassalle Casanave & Panza introduzem a distinção entre provas *canônicas* e *entimemáticas*.

É chamada canônica uma prova completa de acordo com os princípios ou autorizações duma teoria ou prática. Pois daí decorre o sentido ordinário de cânone ( $\chi\alpha\nu\acute{o}\nu$ ): um corpo de princípios e normas que determinam o funcionamento duma disciplina ou prática. Diz-se também que um cânone é um modelo de alguma coisa ou comportamento — uma regra ( $\chi\alpha\nu\omicron\nu\acute{\iota}\varsigma$ ), portanto — e esta interpretação também é aceitável para as provas de Euclides. Vale ressaltar, porém, que a expressão canônica de uma prova nos *Elementos* é a sua versão heterogênea. Ou seja: recurso aos diagramas e a identificação de co-exatos formam parte do cânone euclidiano.

Dentro deste quadro, a tese de Lassalle Casanave & Panza aponta ainda para uma chave explicativa da expressão canônica do Postulado 2. Esta seria, de acordo com eles, aquela apresentada por Panza (2012): *fique postulado produzir uma reta continuamente com alguma outra até a circunferência de um círculo dado*. Dentro desta reformulação, a referência ao círculo serve como uma cláusula restritiva e evita a prolongação “arbitrária”. Como consequência, o Postulado 2, dentro desta interpretação, sempre introduz um atributo exato. Note-se, enfim, que, ao contrário de Avigad, Dean & Mumma, esta nova formulação não pretende “traduzir” a linguagem operativa de Euclides em algum sistema formal, senão restituir o seu significado dentro da prática matemática engendrada pelos *Elementos*.

Mas, Euclides não precisa proceder desta maneira em suas provas. Segue-se daí o que Lassalle Casanave & Panza chamam de prova entimemática. No tocante ao Postulado 2, Euclides apenas fala em prolongação, mas raramente explica como ficou construída a reta. Em I.2 e I.16 isso não é esclarecido. Esta economia inferencial, por assim dizer, é a marca duma prova entimemática. Recorde-se que nos *Elementos* a audiência deveria deduzir qual a justificativa aduzida na prova, sendo que em apenas uma ocasião Euclides fala explicitamente dalgum outro teorema provado. Lassalle Casanave & Panza, observam, no entanto, que é preciso haver alguns mecanismos que permitam reconstruir a versão canônica a partir da versão entimemática. No caso do Postulado 2, bastaria atinar-se para o uso do Postulado 3. Ou seja: a própria obra euclidiana já dispõe dos recursos necessários para reconstruir a versão canônica de suas provas entimemáticas. A suposta falta de uniformidade do Postulado 2, portanto, não seria sintoma duma prática pouco rigorosa, mas, o justo contrário, seria o indício duma atividade regrada e positivamente controlada.

A tese de Lassalle Casanave & Panza pode ser reforçada ainda considerando-se as circunstâncias materiais descritas por Netz. Pois, se é suposto que o diagrama era apresentado já pronto à audiência e, além disso, que o expositor não poderia refazê-lo à sua vontade ou lhe acrescentar novas construções (imagine, *e.g.*, uma inscrição na óstraco), então é razoável presumir que alguns procedimentos fossem esclarecidos ao longo da exposição. Caso fosse objetado como uma reta pode ser posta igual a alguma outra através do Postulado 2, seria suficiente ao expositor aduzir o uso do Postulado 3. Note-se que nas reconstruções oferecidas o diagrama é muito mais complexo e exigiria materiais mais sofisticados do que aqueles que Euclides poderia usar. Optar por provas entimemáticas seria, portanto, uma maneira muito razoável de preservar a correção da prova mantendo-a mais breve. Por outro lado, ainda que seja possível desenhar com certa precisão o diagrama correspondente à prova canônica, a configuração resultante não poderia povoar o plano com excessos de imagens e gráficos. A razão para isso é que Euclides colocaria em risco o controle cognitivo sobre o artefato gráfico; a audiência teria mais dificuldades em acompanhar a prova e a quais informações ater-se. Por isso mesmo Euclides ignora uma série de configurações dispostas graficamente para centrar-se nas mais pertinentes. Sendo assim, não fazer referência ao Postulado 3 seria uma maneira de tornar a prova mais simples e, portanto, mais inteligível.

A análise retórica consegue preservar e ampliar a proposta original de defesa das provas heterogêneas de Euclides ao revelar um importante dispositivo argumentativo presente nestas provas: os entimemas. O trabalho de Lassalle Casanave & Panza, ademais, mostra como um co-exato passa a ser exato, mas jamais o inverso. Convém agora discutir a relação entre a arte retórica e geometria euclidiana a partir do conceito de audiência.

### 5.3 A arte retórica e a audiência euclidiana

Como ficou dito, a análise retórica encontra em Aristóteles um importante interlocutor no que toca o estudo da prática argumentativa em ambientes públicos. Entende-se com isto que para além da análise formal de teorias dedutivas, o ato de apresentar ou aceitar argumentos publicamente forma parte da vida intelectual de todo agente humano. À diferença de suas observações em *Retórica*, porém, esta investigação procura mostrar que também a prova matemática pode ser estudada sob este prisma, a saber, como um espaço público de argumentação baseado em autorizações específicas. Sob este novo olhar, o recurso aos diagramas — antes rechaçado dentro da filosofia — é esclarecido a partir dalgumas observações sobre a natureza normativa da prática matemática de Euclides.

Ressalte-se que a reivindicação principal aqui, como demonstrado no capítulo 4, não foi mostrar que a análise lógica dos *Elementos* é desinteressante ou que a definição *standard* deva ser abandonada. Bem vistas as coisas, a reconstrução de Avigad, Dean & Mumma não é integralmente incompatível com a análise retórica. Na verdade, porque o entimema é também um argumento dedutivo, a justificativa diagramática não poderia comprometer a correção duma prova. E a validade formal duma prova certamente prescinde da audiência. Sucede então que o maquinário da lógica poderia iluminar alguns aspectos formais instanciados nas provas de Euclides.

Portanto, embora a análise retórica incorpore elementos extralinguísticos — a saber, orador e audiência, como será discutido abaixo —, uma prova sob esta perspectiva não envolve o assentimento a um teorema através de sofismas ou quaisquer recursos psicológicos, se com isto entende-se tomar uma inferência inválida por válida (e vice-versa) prescindindo-se de sua correção de maneira objetiva. Como já destacado, uma prova retórica entimemática também é uma estrutura dedutiva. Logo, a discussão não é sobre a validade das provas de Euclides que, aliás, nunca esteve em disputa, mas sim a sua *aceitabilidade*. Daí a queixa de Aristóteles em relação àqueles que, não percebendo ou ignorando a importância dos entimemas, almejavam apenas a vitória em debates ao excitar as paixões de seus interlocutores por referência às emoções ( $\pi\acute{\alpha}\theta\omicron\varsigma$ ) da audiência ou ao caráter ( $\xi\theta\omicron\varsigma$ ) do orador.

Este renovado apreço pela arte retórica é realçado também por Perelman & Olbrechts-Tyteca (2005), segundo os quais a teoria da argumentação<sup>4</sup>, ao menos a partir da Modernidade, esteve circunscrita ao modelo matemático de prova, o que seria acentuado a partir do final do séc. XIX com o surgimento de sistemas axiomáticos de Peano, Hilbert e Frege. Todavia, argumentam eles, isso expressaria uma limitação das capacidades intelectuais humanas ao omitir-se um estudo rigoroso de outras formas de argumentação, como havia

<sup>4</sup> Entende-se por *teoria da argumentação*, neste contexto, não apenas o estudo formal ou informal das teorias dedutivas, seja na lógica ou na retórica, senão o estudo do processo argumentativo como um todo, incluindo aí as inferências indutivas.

feito Aristóteles em suas investigações sobre o argumento retórico (*Retórica*) e dialético (*Tópicos*). Por retórica entendem então estes autores o estudo das técnicas discursivas (τέχνη λόγῳ) cujo principal objetivo é adesão a uma tese.

Sob uma certa linha interpretativa, esta reivindicação é defensável. Pode-se alegar, por exemplo, que para uma parte expressiva da literatura especializada contemporânea a retórica não goza da mesma estima que a lógica no que toca à análise de processos inferenciais. Haveria, portanto, uma negligência em relação a como agentes humanos procuram persuadir-se mutuamente em ambientes públicos. Isso porque a correção dum argumento, tal e qual uma prova matemática, poderia prescindir destes fenômenos. Ainda assim, não parece ocorrer a Perelman & Olbrechts-Tyteca que a própria visão tradicional de prova matemática poderia ser o reflexo desta limitação. Ao contrário, a identificação entre retórica e τέχνη λόγῳ reforça o preconceito já mencionado em relação à prática matemática ordinária em comparação com a teoria erigida a partir dela. Não há razão alguma para excluir os argumentos heterogêneos do escopo da retórica, visto que o raciocínio humano encontra nos artefatos gráficos dispositivos eficientes de aquisição e transmissão de conhecimento.

Da tradição clássica associada ao nome de Aristóteles, e à qual Perelman & Olbrechts-Tyteca tentam filiar-se, esta dissertação procurou preservar os componentes principais da arte retórica, a saber, o orador (ou expositor), o discurso e a audiência. Dentro deste quadro conceitual, a análise retórica busca reconstruir o espaço de argumentação prescrito pelos *Elementos* de Euclides no marco da prática intelectual desenvolvida a partir desta obra. Assim entendida, Lassalle Casavane & Panza propõem também uma espécie de *reconstrução racional* de teorias informais através duma depuração dos meios legítimos de expor-se uma prova a uma audiência, seja canônica ou entimemática. Não havendo, portanto, nenhum prejuízo no que diz respeito à correção formal dum argumento retórico, é justo pensar que o recurso aos artefatos gráficos serve, a princípio, como um meio legítimo de aquisição de conhecimento.

De acordo com Perelman & Olbrechts-tyteca, uma prática argumentativa — o diálogo, a deliberação, a demonstração científica, etc. — não poderia ser restringida apenas pelo estabelecimento da verdade de uma tese senão também deve considerar a adesão de uma comunidade de mentes, *i.e.*, uma audiência, ao que é dito pelo orador (Perelman & Olbrechts-tyteca (2005, p. 16)). Ora, a composição desta comunidade de mentes parece obedecer apenas a critérios contingentes, como pertencer a uma classe sócio-econômica, a um grupo político, um secto religioso, etc. É verdade que estes elementos podem ajudar o orador a moldar o seu argumento; um arguto político, por exemplo, poderia assegurar a adesão de sua audiência caso tenha conhecimento que a maioria alí compartilha as mesmas crenças religiosas. No entanto, isso não significaria que a adesão a uma prova retórica é sempre subjetiva?

O mínimo indispensável para a composição de uma audiência é a existência de alguma linguagem comum. Isso pressupõe, por sua vez, o domínio de habilidades concernentes à codificação e decodificação de algum sistema de representação. Seria suficiente para uma audiência euclidiana o domínio da linguagem operativa dos *Elementos* e das técnicas para a representação e decodificação dos diagramas. Portanto, a composição histórica ou social da audiência, ainda que seja relevante em determinados contextos, sobretudo por facilitar a comunicação e a adesão, não contribuem decisivamente na prática matemática euclidiana.

Cabe ainda resolver um dilema decorrente da proposta de Perelman & Olbrechts-tyteca. Segundo estes autores, caberia à audiência o papel principal na determinação da qualidade da argumentação e do comportamento do orador (Perelman & Olbrechts-tyteca (2005, p. 27)). O problema, como já destacado, é que a audiência, seja qual for o seu papel dentro da prova retórica, não tem qualquer importância para a correção do argumento. O que uma audiência pode decidir é se um argumento é aceitável ou não em uma determinada circunstância. Uma audiência inadvertida poderia aceitar um argumento inválido ou rejeitar uma inferência válida; e em ambos os casos, a dimensão subjetiva do sujeito (suas paixões, preconceitos, etc.) pode afetar a aceitabilidade de uma prova, mas nunca sua validade.

A distinção entre aceitabilidade, dentro da epistemologia, e validade, dentro da lógica, poderia aclarar uma dicotomia proposta por Perelman & Olbrechts-tyteca entre argumentos persuasivos e argumentos convincentes. Eles fazem a seguinte esclarecimento: “[p]ropomos chamar *persuasiva* a uma argumentação que pretende valer só para uma audiência particular e chamar *convincente* àquela que deveria obter adesão de todo ser racional” (Perelman & Olbrechts-tyteca (2005, p. 31)). Isso não quer dizer, todavia, que um argumento científico será sempre destinado a uma audiência universal. Este não parece ter sido o caso em relação aos *Elementos*. E ainda assim, não resta dúvidas sobre a capacidade de qualquer agente racional reconhecer a correção das provas euclidianas. O que poderia ser acrescentado aqui é que, desde a perspectiva da sua aceitabilidade, um argumento é persuasivo referente a uma audiência; um argumento que não pressupõe audiência alguma, mas somente considera a sua validade, seria então chamado convincente.

Descobrir o que é adequado a cada caso, como havia dito Aristóteles, significa selecionar os entimemas ou exemplos apropriados de acordo com quais habilidades uma audiência manifesta (ou deveria manifestar), posto que não é razoável presumir que todos tenham o mesmo entendimento sobre um tópico em debate ou sejam persuadidos pelas mesmas razões. Ressalte-se agora que se o conceito de persuasão ( $\pi\epsilon\iota\theta\acute{\omega}$ ) pode ser incorporado à análise das provas matemáticas, então deve ser vinculado à sua dimensão epistemológica de assentimento baseado em justificativas racionais, donde pode-se concluir que uma prova retórica é aquilo digno de confiança ( $\pi\acute{\iota}\sigma\tau\iota\varsigma$ ).

Com isto pode-se conjecturar que, para Aristóteles, a arte retórica não apenas é imprescindível aos afazeres humanos, como também poderia marcar uma área de interseção

entre lógica (mais precisamente, a teoria do silogismo) e epistemologia. É esta última asserção que merece ser reforçada aqui em conexão com a ideia de aceitabilidade à qual fez-se breve alusão.

Em comentários ao texto de Aristóteles, Grimaldi (1980, pp. 4-6) esclarece que uma arte (τέχνη) consiste nalgumas regras ou princípios apreendidos por um agente racional. Esta seria, a seu modo, também uma forma de conhecimento (ἐπιστήμη), oposta, por isso, à simples experiência (ἐμπειρία). Segue-se então que a preocupação primeira é explicar *o porquê* duma afirmação e não a impressão rapsódica de imagens na mente humana. Grimaldi relata, além, que embora a τέχνη seja conhecimento prático (ἐπιστήμη πρακτική), *i.e.*, uma atividade executada com destreza, ela também poderia envolver conhecimento teórico (ἐπιστήμη θεωρητική). Esta última linha deve ser entendida não em sentido absoluto — como se a retórica fosse um tipo de conhecimento teórico —, mas sim como a possibilidade duma arte ser ensinada e aperfeiçoada através de exercícios de acordo com princípios.

A descrição de Grimaldi pode ser reforçada por algumas passagens da *Retórica*, mas é em *Ética Nicomaqueia*<sup>5</sup> onde esta relação fica mais clara. No Livro VI fica dito que toda arte encerra algum conhecimento, que pode ser ensinado e possui um fim (τέλος). De modo que uma atividade é dita ser uma arte se, e somente se, envolve o raciocínio reto (Aristóteles, 1140a).

Tome-se como exemplo a arquitetura. É evidente que o Templo Expiatório da Sagrada Família, em Barcelona, ou a Igreja de São Francisco de Assis, cá na Bahia, não resultaram dalguma simples intuição. Ainda que seja admitida a intromissão dalgum fator psicológico — e a isto Aristóteles não parece opor-se —, cada traçado e desenho nestas construções revelam uma escolha cuidadosa de objetos e técnicas apropriadas. São estas técnicas, articuladas num corpo de instruções, que são apreendidas e ensinadas em vistas da consecução de um fim.

Atine-se, no entanto, que o fim duma arte como a arquitetura, exemplo escolhido por Aristóteles, é a construção duma casa ou monumento público. Ou seja: o conhecimento prático engendrado por uma arte visa sempre a produção de alguma coisa e, por isto, diz respeito ao que é contingente. Eis porque, na *Retórica*, Aristóteles fala somente em três espécies de discurso: deliberativo (συμβουλευτικός), jurídico (δικανικός) e epidítico (ἐπιδεικτικός). Desta maneira, todo discurso produzido em vistas duma apresentação pública poderia versar apenas sobre a tomada duma decisão mediante auxílio da razão, o que propriamente é a deliberação; a defesa ou ataque face um litígio; ou discurso laudatório ou acusatório a uma figura digna de alguma deferência, especialmente no caso dum encômio.

Poder-se-ia objetar, portanto, que embora a retórica não seja somente uma τέχνη λόγον, *i.e.*, uma arte do discurso, há que se reconhecer que toda audiência é reunida em torno de

<sup>5</sup> Cf. tradução de Julio Pallí Bonet (1985).



regras contingentes ao contexto histórico ou social. A esta possibilidade fez-se breve alusão no capítulo 3 em observações ao texto de Netz. Mais precisamente, Netz argumenta, desde a perspectiva da historiografia cognitiva da matemática clássica, que sequer é necessário que uma audiência seja reunida em torno das crenças que eventualmente possam manifestar sobre uma determinada prática. Logo, se a correção das provas de Euclides não está, nem jamais esteve, em disputa, a questão é saber como estes fatores não poderiam comprometer a convicção de alguém que faz geometria ao estilo de Euclides.

O exemplo privilegiado do discurso jurídico, naturalmente, encontra-se no direito e na ciência forense. No caso da ciência jurídica, o domínio da arte discursiva na forma da oratória — do falar fluente e corretamente — é premente às partes em litígio de tal modo que as provas apresentadas não podem ignorar a composição intelectualmente heterogênea da audiência. E caso deseje ser eficiente em seu objetivo, o orador (um perito ou advogado) deverá ater-se aos fatos mais relevantes e ainda sob disputa, posto que num argumento entimemático, o que não precisa ser enunciado é amplamente aceito. Por sinal, os julgamentos na Grécia clássica à época de Aristóteles não admitiam representação jurídica profissional, como começaria a acontecer em Roma. Disso é plausível supor que uma pessoa poderia perder um litígio por não dispor das ferramentas adequadas para sua defesa verbal, ainda que seu argumento fosse formalmente válido. Daí a importância dos logógrafos, como eram conhecidos os profissionais responsáveis por produzir discursos, que, segundo evidências documentais, foram os primeiros a escrever compêndios de retórica. Dito de outra maneira, para que uma prova jurídica seja aceita é preciso que haja alguma autorização formal acerca de quem poderia apresentá-la.

De maneira similar em assembleias deliberativas, num contexto onde espera-se que a audiência participe requisitando esclarecimentos, apresentando dúvidas, assentimentos ou objeções — exasperadas, muitas vezes. Aqui, espera-se também uma função performativa do discurso retórico por meio de exortações endereçadas aos membros da audiência.

Já o discurso epidítico, por sua natureza laudatória, pode reforçar a adesão de uma audiência de modo a fortalecer a disposição para a ação desejada. É, pois, o objetivo deste discurso o aumento de intensidade da adesão a valores compartilhados pelo audiência e pelo orador. Por isto, a evocação de elementos literários apresenta-se como um recurso importante de comunicação entre o expositor e sua audiência.

Como se nota, em cada uma dessas situações a prática argumentativa deve ser guiada por um conjunto de regras admitidas tacitamente pelo orador e audiência. É imperativo saber quem está autorizado a fazer um discurso público e quem pode compor a audiência. Trata-se, aqui, de regras sociais típicas duma sociedade, como pertencer a algum grupo ou classe, independente de suas prerrogativas. Em muitos casos, isto acaba por revelar o escopo dos direitos individuais em uma sociedade, como ocorria na Grécia clássica, onde mulheres, homossexuais e escravos não possuíam direito à fala em ambientes públicos, tampouco

poderiam participar de alguma audiência. Não é certo, todavia, que um discurso deva incorporar somente estas exigências. Neste caso, o importante é saber quais dispositivos são aceitáveis (testemunho, documento ou perícia) e quais deveriam ser rechaçados (como a tortura).

Espera-se, naturalmente, que uma audiência ideal seja composta por agentes racionais e que dominem uma linguagem natural. Ora, o domínio dum vernáculo encerra um conjunto de habilidades linguísticas que podem ser corrigidas ou exercitadas ao longo da vida de um agente e devem adequar-se a contextos específicos. Por isto mesmo uma prova retórica, endereçada a uma audiência, não apenas deve adequar-se às regras sintáticas como também a esta dimensão normativa que rege as relações intralinguísticas. No caso dos *Elementos*, esta análise procurou mostrar como as Definições, Postulados e Noções Comuns desempenham esta exata função. Por um lado, as Definições apresentam um léxico técnico a ser apreendido pela audiência, donde não apenas deve ser percebida uma cisão em relação ao uso costumeiro de termos como ponto, reta, círculo, etc., mas, de igual maneira, que o diagrama de um círculo não deve ser tomado como a entidade representada por isto. Por outro lado, os Postulados 1-3 autorizam modificações no diagrama dado. Em cada circunstância, cabe ao orador insistir na diferença entre diagrama e entes geométricos — como, aliás, fazia Sócrates no relato já mencionado — e corrigir sua audiência nos casos em que aplique algum postulado incorretamente. Aqui, portanto, a composição histórica ou social da audiência é irrelevante porquanto estas exigências sejam atendidas.

Ocorre, porém, que também a manipulação de representações gráficas exige habilidades especiais não menos complexas que as observadas no tocante à linguagem e, por isto, deve respeitar regras específicas. Mesmo alguém que ignore as regras gramaticais básicas sabe identificar o uso correto de certas expressões e quando alguém apresentou o comportamento indicado diante determinados padrões linguísticos. Eis porque a definição de retórica oferecida por Perelman & Olbrechts-Tyteca carece de uma revisão. Pois assim como um agente aprende a ler o vocabulário de Euclides, ele deve igualmente aprender como ver os seus diagramas. Em primeiro lugar, a audiência deve saber quais configurações gráficas podem representar adequadamente um ente geométrico. Em segundo lugar, deve saber como desenhar um diagrama de acordo com as ferramentas disponíveis. Por fim, deve saber quais propriedades exibidas pelo diagrama podem ser corretamente aduzidas numa prova, seja esta uma propriedade topológica ou mereológica. E ao orador cabe o papel de aclarar à sua audiência que estas propriedades em nada têm a ver com a perfeição do desenho.

Em suma, uma audiência euclidiana ideal é composta por agentes racionais (além do orador) que apresentam habilidades concernentes ao controle cognitivo sobre alguma linguagem verbal e diversos (embora limitados) artefatos gráficos, onde o escopo de avaliação do uso correto destes tipos de representação encontra-se na própria prática

geométrica. Deve-se então reconhecer que seria inapropriado perguntar pelas qualidades intrínsecas de cada tipo de representação fora dos propósitos humanos. E porquanto possa prescrever um novo método investigativo, esta análise propõe uma nova maneira de olhar o desenvolvimento dos *Elementos*. Pois, como foi destacado, as objeções às justificativas diagramáticas por parte de Platão e Aristóteles acabou por ser incorporada à literatura especializada. Importa acentuar, ainda que brevemente, esta diferença.

#### 5.4 Arte retórica e ciência demonstrativa

A proposta de Lassalle Casanave & Panza, vale ressaltar, pretende ser uma alternativa de análise conceitual dentro da filosofia da matemática. É compreensível, portanto, que estes autores não tenham considerado as interações entre os *Elementos* a retórica clássica desde um ponto de vista historiográfico. E mesmo entre os comentadores de Euclides essa possibilidade não suscitou alguma discussão digna de nota. Ainda assim, cabe a pergunta: seria possível enxergar na prática matemática euclidiana uma possível instância da arte retórica? A disputa sobre o estatuto epistemológico dos diagramas nos *Elementos* apresenta agora uma oportunidade para alguns novos apontamentos e sugestões. As observações iniciais dizem respeito à costumeira interpretação da geometria de Euclides a partir dos *Segundos Analíticos* de Aristóteles. Em seguida, especula-se a possibilidade de aproximar a geometria clássica e a retórica desde um ponto de vista historiográfico.

A teoria dedutiva engendrada pelos *Elementos* por vezes é interpretada à luz da doutrina aristotélica da ciência demonstrativa expressa nos *Segundos Analíticos*. Uma vez que aquela é a única peça disponível, em sua integralidade, de como poderia ter sido a geometria clássica, não seria insensato especular, até mesmo pela aproximação histórica, se Euclides foi influenciado por Aristóteles. Também não parece equivocado analisar os princípios e as provas de Euclides como forma de elucidar certas passagens do texto Aristotélico. De fato, esta linha interpretativa parece ter-se iniciado nos *Comentários*, 75.5-18, de Proclo e mesmo Heath, mais recentemente, não lhe fez sérias objeções. Ao contrário: Heath vai aos primeiros princípios descritos em *Segundos Analíticos*, I.6, 74b5, para compará-los às definições, postulados e noções comuns de Euclides (Heath (1908, 117-124)).

A análise retórica de Lassalle Casanave & Panza, claro esteja, não é subsidiada por alguma exegese da obra aristotélica. De maneira que, as eventuais incompatibilidades entre estes autores e a posição de Aristóteles sobre o assunto não devem ocupar muito tempo na atual discussão. Entretanto, esta possibilidade poderia ensejar alguns comentários pontuais acerca de novos argumentos ou evidências (documentais) que poderiam ser incorporados a esta proposta.

A análise do conhecimento demonstrativo nos *Segundos Analíticos* segue uma clara dis-

tinção entre princípios científicos e provas muito similar ao que é verificado nos *Elementos*. De acordo com Aristóteles, uma ciência deve ser erguida a partir de princípios, os quais devem ser manifestamente verdadeiros, imediatos, mais conhecidos que a proposição a ser provada; ademais, devem ser anteriores e causais em relação à conclusão (*Segundos Analíticos*, I.2, 71b22). Nota-se então como estas preocupações sobre a natureza epistemológica dos princípios fincam os alicerces do modelo de conhecimento buscado. Estes princípios, ainda de acordo com Aristóteles, são próprios de um gênero científico ou comuns a vários; é dito, no entanto, que são comuns por analogia, porque somente poderiam ser utilizados numa prova incluída no gênero da ciência em questão (*Segundos Analíticos*, I.10, 76a32). Heath então observa:

Se nós excluimos da lista de axiomas de Euclides (1) a afirmação de que duas retas não encerram um espaço, [posto que] é uma interpolação ao texto, e (2) o chamado Axioma das Paralelas, que é o quinto postulado, então a explicação de Aristóteles destes termos se encaixa muito bem na classificação de Euclides (Heath (1921, p. 336)).

Aristóteles chama os princípios próprios de *teses* (θέσις), e os divide em definições (ὄροι) e hipóteses (ὑπόθεσις). Uma definição, vale dizer, não é uma declaração com valor de verdade, de modo que sua principal função seria conferir significado aos termos técnicos duma ciência sem, no entanto, estabelecer a existência dos entes envolvidos. Ou seja: a audiência deveria apenas entender as definições. Tome-se como exemplo as definições I.1 e I.6 dos *Elementos*. Ambas tratam do ponto geométrico, ora como aquilo de que nada é parte, ora como o centro de um círculo; e no entanto, somente na proposição III.1 Euclides mostra como encontrar, ou construir, o centro de um círculo. Uma hipótese, por sua vez, é uma declaração com valor de verdade, universal ou particular, que pressupõe a existência do gênero de uma ciência e seus entes, como seria o caso das magnitudes geométricas ou da unidade, na aritmética (*Segundos Analíticos*, 76b33-36 e 72a23-24).

Tudo aquilo que não é assumido nas hipóteses *deve ser provado* a partir dos primeiros princípios. A título de comparação, tome-se como exemplo os triângulos nos *Elementos*. Como uma definição não estabelece a existência da coisa definida e Euclides tampouco fala de triângulos nos postulados e noções comuns, é preciso construí-los; e isso é feito logo em I.1; Proclo, por sua vez, mostra como construir um isósceles e um escaleno. Vale mencionar, todavia, que Aristóteles não apresenta uma única instância similar aos postulados de Euclides. Além disso, parece desconhecer (ou ignora deliberadamente) a linguagem operativa da geometria. Neste particular, tanto Heath como Szabó reconhecem a originalidade euclidiana, sem, contudo, apresentar alguma observação sobre a linguagem usada nos *Elementos*.

Dos princípios comuns, ou axiomas (ἀξιώμα), por vezes grafados axiomas comuns (κοινά ἀξιώματα) ou opiniões comuns (κοινὰ δόξαι), Aristóteles esclarece apenas que deveriam

ser pressupostos por diversas disciplinas. Aqui, o parentesco entre Aristóteles e Euclides é menos sutil. A evidente aproximação a Euclides decorre do exemplo favorito de axioma: de iguais que se tiram iguais os restantes são iguais. Essa proposição aparece nos *Elementos* como a Noção Comum 2.

Para além do seu desenvolvimento teórico, os *Segundos Analíticos* não ignora também a dimensão pedagógica. A razão para isso é que, embora a tese seja um princípio indemonstrável dentro de uma teoria — aquilo que um orador põe (τιθέναι) para sua audiência —, este também seria um requisito necessário para quem deseja aprender algo (*Segundos Analíticos*, I.2.72a16). Como já destacado, isso vale não apenas para o conhecimento demonstrativo, como também para o conhecimento prático, próprio da arte.

Ainda sobre este particular, Aristóteles recorda que as definições devem ser plenamente compreendidas (*Segundos Analíticos*, 71a13) e, no tocante aos demais, reconhece a possibilidade do dissenso. Pois, diz ele, uma hipótese é o que aceita sem haver contestação, enquanto que um postulado é sempre contrário à opinião de quem aprende (*Segundos Analíticos*, 76b30-33).

De acordo com essa passagem, os postulados de Euclides assumiriam a existência de pontos, retas, e círculos. E ainda que Aristóteles não seja claro acerca da distinção entre hipóteses e postulados, não é em absoluto equivocados pensar que do ponto de vista da prática matemática é assaz evidente aos praticantes que uma linha pode ser traçada entre dois pontos; e que a mesma pode ser prolongada ou servir como um raio de um círculo a ser descrito. Por outro lado, não é tão simples emprestar assentimento aos Postulados 4-5. Frise-se que para esses dois postulados o auxílio dos diagramas é nulo, de modo há um risco maior de tomar-se algo da representação gráfica como sendo do ente representado.

Todavia, se por um lado estas semelhanças podem justificar alguma conjectura sobre o estado da matemática à época de Aristóteles, é forçoso reconhecer, de outro lado, que a maneira como Euclides procede em suas provas é radicalmente distinto do que é descrito nos *Segundos Analíticos*. Aqui a maior dificuldade em conciliar ambos os textos, como, aliás, foi mencionado no capítulo 1, reside no fato de Aristóteles rejeitar um papel demonstrativo dos diagramas em favor de uma estrutura linguística de vários silogismos em sequência. Para que isto fique um pouco mais claro, considere como ambos demonstram a proposição III.31.

Em III.31 é preciso provar que, *em um círculo qualquer o ângulo no semicírculo é reto, enquanto o ângulo no segmento maior é menor que um ângulo reto e o ângulo no segmento menor é maior que um ângulo reto; além disso, o ângulo do segmento maior é maior do que um reto e, de outro lado, o ângulo do segmento menor é menor do que um reto*. A cooperação entre texto e diagrama já foi explicitada com ajuda de Manders e Netz, no capítulo 2. No momento, importa mostrar, em primeiro lugar, quais outras inferências estão disponíveis à audiência e, em segundo lugar, que a reconstrução desta prova torna

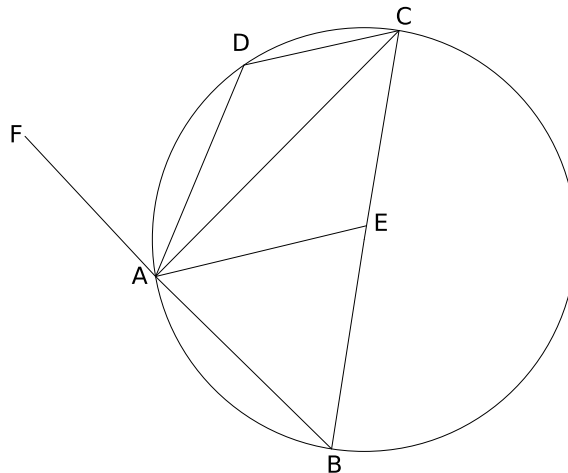


Figura 26 – proposição III.31

um co-exato num exato.

Recorde-se que toda prova euclidiana inicia com a exibição ostensiva (ἐκθεσις) dalguma configuração gráfica bidimensional para a audiência. E se é correto presumir a presença do diagrama completo, como afirma Netz, então é indispensável à performance do orador o esclarecimento sobre cada ente construído e suas respectivas justificativas. Seguindo a letra de Euclides, assume-se, sem prova, o círculo  $ABCD$  e, de outro lado, seu diâmetro  $BC$  e seu centro  $E$ . Na sequência, ficam construídos as retas  $BA$ ,  $AC$ ,  $AD$  e  $DC$ . Aqui, cada aplicação do Postulado 1 é acompanhada por uma entrada univocamente determinada no diagrama. E daí obtém-se o quadrilátero  $ABCD$  inscrito no círculo já disposto.

A seguir, o orador deve explicitar sob quais condições (διορισμός) esta prova realizar-se-á; ou seja: que o ângulo  $BAC$ , no semicírculo  $BAC$ , é reto e, de outro lado, que o ângulo sob  $ABC$ , no segmento maior que o semicírculo, é menor que um reto e, além disso, que o ângulo sob  $ADC$ , no segmento menor que o semicírculo, é maior que um reto. Esta é a única ocasião em que o orador faz notar-se na prova através da locução “digo que...”.

A prova prossegue, já na κατασκευή, com a aplicação do Postulado 2 à reta  $BA$ . Como já verificado em outros momentos, esta é uma inferência entimemática. Sabe-se, portanto, que dentro da teoria euclidiana é possível recorrer ao Postulado 3 para garantir a unicidade desejada da reta  $AF$ . Porém, esta não é a única inferência deixada à audiência. Percebe-se, por exemplo, que a prolongação de  $BA$  permite deduzir que  $A$  é um ponto de interseção entre a reta  $BF$  e o círculo  $ABCD$ . Segue-se também que  $A$  está entre  $F$  e  $B$ , como também  $E$  está entre  $B$  e  $C$ . É o diagrama e não o texto que permite este número maior de situações. E da construção de  $AE$ , via Postulado 1, pode-se deduzir que o ângulo  $BAE$  está dentro do  $BAC$  e  $BAD$ . Estas inferências, embora diagramáticas, dependem, claro, das determinações fornecidas pelo texto.

A dedução textual (ἀπόδειξις) segue da seguinte maneira. Da igualdade de  $BE$  e  $EA$ ,

por Definição I.15, segue-se que o ângulo  $ABE$  é igual ao  $BAE$ , pelo teorema I.5. Pela mesma razão prova-se que os ângulos  $ACE$  e  $CAE$  são iguais. Logo, o ângulo  $BAC$  todo é igual aos  $ABC$  e  $ACB$ . Aqui, a audiência deve perceber, no diagrama, estas relações mereológicas, embora a justificativa não dependa da parte visual. E como o ângulo  $FAC$ , exterior ao triângulo  $ABC$ , é igual aos ângulos  $ABC$  e  $ACB$ ; logo, o ângulo  $BAC$  é igual ao  $FAC$ ; logo, cada um destes é reto, de acordo com a Definição I.10. E que  $ABCD$  seja reconhecido como um quadrilátero deve ser apontado e reconhecido pela audiência, donde segue-se que seus ângulos opostos são retos, de acordo com o que foi provado em III.22. Mas o ângulo  $ABC$  é menor que um reto [diagrama]. Logo, o  $ADC$  que resta é maior que um reto; e está no segmento  $ADC$ , menor que um semicírculo. Ademais, prova-se que o ângulo do segmento maior, a saber, o contido pela circunferência  $ABC$  a reta  $AC$  é maior que um reto; e o do menor segmento, qual seja, o contido pela circunferência  $ADC$  e a  $AC$  é menor que um reto.

Agora, o que deve ser percebido aqui a partir desta incompatibilidade entre a ciência demonstrativa e as provas de Euclides é que a estratégia costumeira de reconstruir-se apenas a teoria dos *Elementos* negligencia aspectos importantes da prática prescrita por esta obra. Deve-se perceber que embora seja plausível presumir que o modelo de geometria à época de Aristóteles fosse de algum modo similar ao euclidiano, o que é flagrante quando o texto de Euclides é lido junto ao Livro I dos *Segundos Analíticos*, não é certo que o objetivo principal de Aristóteles fosse apresentar uma análise da maneira como o geômetra demonstrava seus teoremas; como esta disciplina era ministrada e quais outros recursos eram empregados. Em momento algum Aristóteles mostra-se preocupado com estes tópicos, exceto, talvez, na ocasião em que refuta a opinião sofista acerca dos diagramas. Deste modo, tudo que é possível depreender a partir do texto de Aristóteles é como uma prova haveria de ser em virtude dos requisitos lógicos e epistemológicos ali arrolados. Caso os *Elementos* seja desvinculado enfim do modelo descrito nos *Segundos Analíticos*, é possível perceber como a ideia de uma ciência demonstrativa aparece como algo novo. Como sugerido, esta linha interpretativa merece uma atenção especial, sobretudo por colocar em perspectiva mais ampla a relação entre a análise de Aristóteles e o nível de desenvolvimento da matemática na Grécia clássica.

Sobre este particular, deve-se recordar o processo de letramento na Grécia clássica. Como sugere Kennedy (1994), parece haver um paralelismo entre o estudo da gramática, na segunda metade do V<sup>o</sup> século, e a emergência dos primeiros manuais de retórica. Ou seja: com a penetração do letramento entre os gregos as principais características da retórica (antes presa à prática oral) pôde ser sistematizada e estudada. Nisto, é forçoso recordar que uma das principais teses defendidas por Netz acerca do desenvolvimento do modelo dedutivo de prova entre os gregos fora justamente o processo de letramento. E ainda mais importante foi este processo para a prática matemática baseada em justificativas diagramáticas.

Os *Elementos* de Euclides surgiu neste exato contexto. E por tudo que foi dito até agora, é pouco provável que a audiência de Euclides — e talvez o compilador da obra — nunca tenha tomado conhecimento sobre retórica. E se é correto pensar assim, poderia seguir-se também que a compilação dos *Elementos* incorporou algumas características do discurso retórico. Esta seria uma maneira de ampliar o escopo da análise de Lassalle Casanave & Panza para além dos argumentos filosóficos. Todavia, a escassa literatura permite somente alguns apontamentos e sugestões.

Como visto no capítulo 1, as provas de Euclides, desde Proclo, segue um roteiro peculiar. Em primeiro lugar, uma proposição é enunciada (προτασις); depois, um diagrama é exibido (ἔκθεσις); em seguida, é-se dito o objetivo da prova (διορισμός). Com exceção da προτασις, nenhum outro momento parece, desde um ponto de vista lógico, relevante ao argumento. Na sequência, tem-se a construção (κατασκευή) dalguns entes geométricos, onde na maioria das vezes verifica-se inferências diagramáticas, e a dedução textual (ἀπόδειξις) dos atributos exatos requeridos. Por fim, Euclides faz uma breve recapitulação da προτασις. É chegada a hora de discutir o porquê *deste* roteiro.

Segundo o relato de Kennedy, os manuais de retórica antes de Aristóteles discriminavam nitidamente três momentos do discurso. Em primeiro lugar, falavam na *descoberta* (εὑρεσις): quais os recursos disponíveis e aceitáveis àquele que busca persuadir uma audiência. O discurso jurídico, *e.g.*, aceita o testemunho, mas rejeita a confissão sob tortura; aceita uma prova forense, mas não se para obtê-la fora preciso cometer algo ilícito. Em segundo lugar, trata da *organização* (τάξις): qual ordem um discurso deve seguir. Pois independente de ser oral ou escrito, diz Aristóteles, demonstrar uma coisa implica a existência do que será demonstrado; e expor previamente um assunto tem por objetivo a demonstração (*Retórica*, III.2, 1414a). Por fim, fala-se também no *estilo* (λέξις): como o discurso deve ser apresentado, sendo mais importante ao discurso escrito.

Aristóteles fala destas questões pela primeira vez no Livro I da *Retórica*, em 1354b, para então dar-lhe total atenção no Livro III. Segundo ele, um discurso tem ao menos duas partes: a exposição (πρόθεσις) e a prova (πίστις). O orador deve dizer à audiência de que trata seu discurso para então passar à demonstração. Aristóteles admite, todavia, que outras partes poderiam ser incorporadas ao discurso, a depender do seu gênero (se deliberativo, jurídico ou epidítico). Tem-se aqui uma ponte entre Aristóteles e a tradição que lhe precedeu.

Ainda de acordo com Kennedy, e confirmado pelo texto de Aristóteles, os manuais de retórica identificavam quatro partes na organização: *proêmio* (προοίμιον), *narração* (διήγησις), prova por *persuasão* (πίστις) e conclusão ou *epílogo* (ἐπίλογος). O proêmio marca o início do discurso e o caminho a ser percorrido. Sua função é análoga ao prólogo, na poesia, e ao prelúdio, na música. Efetivamente, o proêmio serve também para dar uma amostra do conteúdo do discurso e que o entendimento da audiência não fique suspenso



e disperso. Em outras palavras: coloca em evidência qual a finalidade daquilo de que trata o discurso (*Retórica*, III.14, 1415a). A narração explica um estado de coisas em virtude de acontecimentos passados. Por isso mesmo, diz Aristóteles, pertence ao gênero jurídico, porque ninguém pode estabelecer uma narrativa sobre fatos futuros (*Retórica*, III.15, 1417b). Na prova é onde o orador deve manifestar-se em favor de sua tese principal antecipando-se também às objeções. Ou então apresentar sua defesa e refutar quaisquer objeções. É aqui onde deve aparecer os entimemas e os paradigmas. É, portanto, o cerne do discurso. E o epílogo, que é o fim do discurso, deveria servir a um dos seguintes propósitos. Tornar a audiência favorável à causa do orador e rejeitar a tese contrária; amplificar (as ações ou discurso do orador) ou minimizar (as ações ou discurso do adversário); dispor a audiência para um comportamento emocional; recapitular. De fato, pode-se recorrer a mais de um desses elementos num mesmo epílogo. “O início do epílogo, por isso, enuncia que se cumpriu o que se prometera, de tal forma que se há de expor o que foi tratado e porquê” (*Retórica*, III.19, 1419b).

Do que foi discutido até agora, é possível propor uma analogia entre a organização dos discursos retóricos e a organização dos *Elementos*. Em primeiro lugar, pode ser dito que o texto e o diagrama pertencem à invenção. Ou seja: ambos os artefatos desempenham funções heurísticas e epistemológicas. Sobre a organização, a semelhança é ainda mais evidente. Efetivamente, o proêmio euclidiano compreende o enunciado, a exibição e a determinação. É onde fica dito qual caminho deverá ser seguido. A narração corresponde então à construção. É onde reconstitui-se os passos que resultaram no diagrama presente. E o que é chamado prova corresponde à dedução textual, onde também encontra-se os entimemas, mas nunca um paradigma. Por fim, o epílogo é a conclusão, onde a prova é recapitulada, exatamente como diz Aristóteles, sem, contudo, haver referência ao caráter ou emoções do orador ou audiência.

Vale registrar que a conclusão apresentada aqui é parcialmente compartilhada por Grimberg (2015). Adotando como principal referência os textos de Peirce, Grimberg reconhece, de um lado, que os diagramas são meios legítimos de justificação matemática ao mesmo tempo em que observa, de outro lado, como somente relações topológicas são dependentes do artefato gráfico. Ele tenta explicar, enfim, o funcionamento do método inferencial de Euclides através duma aproximação à arte retórica.

Em seu estudo, Grimberg não menciona a dicotomia entre exatos e co-exatos de Manders e com isto acaba por ignorar a dimensão normativa das provas euclidianas. Seu argumento carece, portanto, duma importante categoria analítica no que diz respeito à maneira como os diagramas devem ser empregados ao longo duma prova. Isso não quer dizer que suas conclusões sejam equivocadas, senão que estão expostas às costumeiras críticas dentro da literatura filosófica. Poder-se-ia objetar que as operações com diagramas estão baseadas em regras elusivas e, por isto, inferiores em relação às regras dentro dum

sistema formal. É imperativo ao argumento de Grimberg mostrar como um sujeito não poderia inferir falaciosamente uma afirmação partir do diagrama.

Por outro lado, Grimberg incorpora dentre suas referências em retórica Cícero e Quintiliano sem oferecer uma ponte mais sólida entre estes autores e as provas matemáticas. Dentro de sua análise, Grimberg acaba por transferir o protagonismo da audiência para o orador ao destacar a maneira como a performance deste — em gestos, mímica, ênfase, movimento de surpresa afetada e mesmo demonstrações de paixão — facilitaria a assimilação duma prova (Grimberg (2015, p. 14)). Ora, é difícil perceber como estas performances poderiam surtir algum efeito sem considerar o papel decisivo da audiência na percepção e aceitação deste mesmo orador. Dito de outra maneira, o desempenho do orador deve adequar-se à audiência por ele escolhida. Ademais, não é esclarecido como uma prova sob tais condições seria válida e ainda assim dependente do orador. Grimberg poderia servir-se aqui dos entimemas aristotélicos como forma de reforçar esta dimensão retórica das provas euclidianas.

Outrossim Grimberg fala duma possível analogia entre as etapas da prova euclidiana e o cânone retórico, como acima proposto. O problema, porém, é que ao inserir Cícero e Quintiliano em sua análise, Grimberg acaba por ignorar a distância entre o modelo de arte retórica aristotélico, próximo ao tempo de Euclides, e aquele em voga no tempo destes autores. Grimberg argumenta, por exemplo, que uma aproximação entre as provas euclidianas e a retórica seria através da valorização da memória. Contudo, como Kennedy recorda, a memória seria definitivamente incorporada no cânone retórico, juntamente com a pronúncia, somente a partir da época de Cícero e Quintiliano. É plausível dizer que o estilo euclidiano valoriza a memória — e mesmo sua linguagem revela aspectos mnemônicos —, mas seria preciso localizar melhor sob quais condições isto permite uma conclusão sob possíveis elementos retóricos em suas provas.

O que é sugerido aqui, portanto, não é apenas uma explicação filosófica, mas, de fato, uma hipótese historiográfica sobre a composição do texto euclidiano. E mesmo que o compilador dos *Elementos* não tenha tomado como referência a *Retórica*, é certo que poderia utilizar-se dos diversos manuais disponíveis que tratavam destes assuntos, o exato oposto em relação aos *Segundos Analíticos*, de cujos tópicos, aliás, o próprio Aristóteles orgulhava-se em dizer ter sido o primeiro a explorar. E que Proclo use expressões típicas da tradição retórica não deve ser encarada como uma coincidência. É muito provável que ele mesmo tenha sido instruído nestas questões.

Pode-se estudar a prova matemática desde duas perspectivas. Por um lado, como uma investigação lógica acerca dos fundamentos do conhecimento matemático. Nesse caso, a finalidade pode ser eminentemente matemática — como desenvolver um sistema formal e, dentro dele, poder provar os teoremas de uma determinada teoria matemática e buscar novos teoremas — ou filosófica, onde o que interessa é compreender e explicitar os

mecanismos envolvidos no raciocínio matemático. De outro lado, seguindo a sugestão de Lassalle Casanave & Panza (2015, p. 8), a justificativa matemática pode ser pensada como espaço possível de argumentação dentro de um sistema razoavelmente claro de autorizações na qual se desenvolve uma prática descrita como afazer matemático. Pensando dessa maneira a matemática não é apenas uma sequência de atos, ideias ou resultados.

## 5.5 Observações finais

Este último capítulo apresentou a análise retórica de Lassalle Casanave & Panza e seus possíveis desdobramentos a partir do caso do Postulado 2. Viu-se que a distinção entre provas canônicas e entimemáticas não apenas pode explicar o procedimento supostamente não construtivo em relação a este princípio, como também mostra como um co-exato pode ser transformado num atributo exato, mas nunca o inverso. Foi esclarecido também de que maneira a dependência da prova matemática em relação à audiência não está associada com o conceito de validez, mas sim às discussões sobre aceitabilidade. O capítulo considerou, por fim, quais argumentos e evidência poderiam justificar uma aproximação entre a geometria euclidiana e a arte retórica na Grécia clássica.

Especulou-se, na sequência, a partir de algumas evidências documentais, que a arte retórica e não a silogística poderia ter sido empregada por Euclides na composição final de sua obra. Caso esta conclusão seja verdadeira, seria possível pensar que a herança filosófica dos *Elementos*, da Academia ou do Liceu, encontra-se muito mais próxima aos seus princípios e não na organização de suas provas. Além disso, seria interessante considerar a ciência demonstrativa de Aristóteles como um novo marco a partir do qual a prova matemática fora pensada no Ocidente.

## 6 Conclusão

É bem conhecida a dependência parcial das provas euclidianas em relação ao artefato gráfico. Por muitos anos esta constatação foi destacada na literatura filosófica como forma de advertir o leitor acerca das “imperfeições” de Euclides. Tal era feito por uma insistente comparação pouco qualificada entre representações linguísticas e gráficas. Não resta dúvidas que um artefato linguístico seja capaz de preservar a verdade numa prova geométrica concernente às propriedades métricas dos entes ali introduzidos. Entretanto, é forçoso reconhecer que representações gráficas — a exemplo dos diversos tipos de diagramas e mapas — desempenham um papel cognitivo tão importante quanto aquele ocupado por representações linguísticas e merecem, por isso, ser explorados em todas as suas possibilidades. Afinal, a maneira mais comum de um matemático comunicar os resultados alcançados é por meio de argumentos diagramáticos. Deste modo, se a matemática de Euclides é só mais uma instância desta prática intelectual, restava introduzir uma distinção mais precisa entre as justificativas diagramáticas e linguísticas.

Sabe-se agora que o procedimento *dia' grammon* de Euclides, longe da costumaz objeção de comentadores, historiadores e, em especial, filósofos, de Platão e Aristóteles a Carnap, Hempel e Reichenbach, reflete uma prática matemática racionalmente orquestrada baseada num corpo de autorizações sobre quais justificativas dependem do diagrama e quais são de exclusiva competência do texto. Foi a partir desta dimensão normativa, extensamente discutida por Manders e Lassalle Casanave & Panza, que esta Dissertação mostrou como uma prova heterogênea não implica nalgum tipo de imperfeição lógica. Ao adotar os *Elementos* como caso de estudo paradigmático, esta investigação procurou construir um caminho, seguindo o pensamento epigráfico de Heidegger, através da seguinte questão: qual a chave do sucesso das provas de Euclides? Ora, se por um lado a incompatibilidade entre justificativas diagramáticas e a definição *standard* de prova é flagrante logo na primeira proposição dos *Elementos*, fica claro ao longo desta obra, por outro lado, que o seu autor jamais conduz sua audiência a inferir uma falsidade. Daí o porquê desta ser uma inquirição filosófica. Se todo teorema fora demonstrado corretamente, não obstante a intromissão do diagrama, o desafio seguinte seria apresentar um quadro conceitual apropriado a este modelo de raciocínio matemático. Foram estas observações, portanto, que motivaram esta pesquisa acerca do papel demonstrativo do Postulado 2 no marco da filosofia da prática matemática.

Os *Elementos* de Euclides representa, ainda hoje, a mais importante referência de como poderia ter sido prática matemática à época de Platão e Aristóteles. Não obstante, pouco se sabe sobre as circunstâncias nas quais a obra foi compilada ou de seu autor. Especula-se, a partir dos *Comentários* de Proclo, que Euclides viveu aproximadamente no séc. III — transitando entre Grécia e Egito, onde supostamente estabeleceu sua Escola, em

Alexandria. Haveria, portanto, pelo menos 700 anos de distância entre Proclo e Euclides. Ainda assim, por não ter sido plenamente retificado pela historiografia, este relato é tomado como evidência de um suposto parentesco entre a prática matemática clássica e a análise filosófica. Discute-se, por isso, se Euclides teria tomado conhecimento da obra de Platão e Aristóteles e se incorporou o espírito filosófico da Academia ou do Liceu ao texto final; de outro lado, discute-se a possibilidade de aclarar a teoria de Euclides através do quadro conceitual daqueles filósofos.

É Proclo também quem prossegue uma narrativa “oficial” da história da geometria grega, marginalmente mencionada por Heródoto e Aristóteles, indo agora até Euclides. Nesta narrativa, Tales aparece como herdeiro direito da geometria egípcia e responsável por fincar os primeiros alicerces da prova matemática. A este sucederiam Pitágoras (e sua seita), no séc. V, e Platão, no séc. IV, o qual instruiu Teeteto e Eudoxo, a este sendo atribuída a teoria das proporções do Livro V dos *Elementos*. Euclides, portanto, aparece como aquele que reuniu e sistematizou o conhecimento matemático de sua época. Sendo uma narrativa, é claro, isto não pode ser provado. O curioso, porém, é que Proclo, e a historiografia que lhe seguiu, costumam realçar a ruptura da geometria grega em relação a sua predecessora a partir de seu desenvolvimento teórico e não consideram uma possível continuidade a partir de sua prática.

Ora, uma das principais conclusões apresentadas aqui é que esta narrativa deveria ser revisada, ou mesmo abandonada, diante as novas evidências. As mais recentes descobertas na historiografia junto às discussões dentro da filosofia da prática matemática abrem um novo leque de possibilidades para se (re)pensar o desenvolvimento e transmissão do conhecimento científico na Antiguidade. É possível olhar para a prática matemática pré-euclidiana no entorno do Mediterrâneo de uma maneira mais generosa, não mais como uma atividade ingênua, mas sim como outro espaço possível de argumentação positivamente regrada. Frise-se que esta proposta não é equivalente a algum tipo de “multiculturalismo” rasteiro onde toda forma de conhecimento é igualmente correta, senão que é aceitável estudar, *e.g.*, a prática matemática na China, Índia ou Babilônia para então trazer à luz algumas reflexões sobre o controle cognitivo exigido aí e quais mecanismos epistemológicos seriam essenciais a estas atividades. Dito de outra maneira, a análise retórica poderia resgatar componentes racionais das algumas práticas cognitivas para além de sua reconhecida importância historiográfica.

Seguindo um preceito metodológico similar ao que aparece nos *Elementos*, o capítulo 2 tratou de apresentar um léxico técnico apropriado para analisar as provas de Euclides. Constatou-se aí a maneira como os diagramas são usados e quais as principais objeções a este tipo de argumento, muito antes, inclusive, ao texto de Euclides; que o diagrama, sendo uma instância física imperfeita, jamais poderia representar adequadamente as propriedades métricas dos entes matemáticos. A réplica a este argumento começou então pela observação

de que a rejeição aos diagramas ignorava com frequência a maneira como o geômetra os utiliza em sua atividade. Tal foi a conclusão extraída de algumas passagens de Platão e Aristóteles. Por outro lado, era preciso explicar, para o Postulado 2, como a prática euclidiana poderia ser uniforme. Daí ser relevante a este debate comparar as soluções de Avigad, Dean & Mumma, sob a perspectiva da análise lógica, e aquela de Lassalle Casanave & Panza. É que nenhuma questão filosófica pode ser resolvida unilateralmente, sem considerar o valor de uma tese contrária.

O capítulo 3 trouxe as principais evidências documentais em favor da prática matemática euclidiana. Argumentou-se aí que a linguagem operativa empregada nos *Elementos* — relativa a exercícios visuais e operações cinemáticas — poderia ser melhor aclarada num modelo de prova matemática entendida como um (possível) espaço público de argumentação com referência ostensiva ao diagrama. (Poder-se-ia especular, como sugerido, que o compilador dos *Elementos* não tinha em mente fazer uma ampla divulgação da obra, o que poderia explicar aquele “prefácio” lacônico) Ainda assim, restava mostrar como um sujeito não poderia incorrer em alguma falácia a partir dos artefatos gráficos. Para resolver esta questão apelou-se ao artigo de Manders, cuja distinção entre exatos e co-exatos, se verdadeira, esclarece sob quais condições o diagrama é usado. Por outro lado, argumentou-se também que a distinção de Manders pode ser reforçada em alguns pontos, como no caso do Postulado 2. A explicação adotada então foi discriminar provas canônicas (completas) e provas entimemáticas (abreviadas) sob a suposição de que o raciocínio euclidiano, tal como a arte retórica, é direcionada a um público mais amplo cujas habilidades cognitivas legitimam que determinada premissa não precise ser enunciada. Mostrou-se ainda, como uma nota conclusiva, que a reconstrução retórica, no que toca ao Postulado 2, permite transitar dum atributo co-exato para um exato, mas jamais o sentido inverso; e que, se este for o caso, o argumento principal desta Dissertação terá sido refutado.

Sob a suposição de que essas conclusões são verdadeiras sobre a geometria de Euclides, coube ao capítulo 4 discutir a análise lógica de Avigad, Dean & Mumma. O capítulo principia com uma breve exposição da axiomatização destes autores e como os atributos exatos e co-exatos são formalizados. Ponderou-se, por outro lado, sobre a alegação de que esta análise seja fiel aos *Elementos*. Como foi demonstrado, a introdução de magnitudes (em ato ou potencialmente) infinitas na teoria euclidiana é incompatível com o método prescrito por sua prática. Foi este o cenário que Avigad, Dean & Mumma deixaram de estudar ao propor uma dispensabilidade dos diagramas; foi também esta deficiência identificada nas críticas de Carnap, Hempel, Reichenbach e Kleene. Esta constatação motivou a observação final sobre as limitações da análise lógica em identificar justificativa matemática a objetos sintáticos, ou, como também ficou dito, identificar ser rigoroso e ser formal. Ainda assim, a análise destes autores mostra-se importante ao explicitar a estrutura formal dos argumentos de Euclides e a dificuldade em formalizar suas inferências.

O capítulo 5 tratou então de apresentar novos caminhos investigativos a partir da análise retórica de Lassalle Casanave & Panza. A partir das recentes evidências encontradas sobre a retórica clássica foi possível especular sobre uma possível interseção histórica entre a composição dos *Elementos* e o contexto a partir do qual emergiu a arte retórica na Grécia clássica. É que o compilador desta obra, independente de quem tenha sido, muito provavelmente foi educado na arte da oratória e conhecia alguns dos principais compêndios de retórica da época, aplicando-os durante a exposição de suas provas. O mesmo não era o caso em relação aos *Segundos Analíticos*, cuja circulação não ia além dos limites do Liceu à época de Aristóteles. Ou seja: esta Dissertação procurou aproximar a tese de Lassalle Casanave & Panza sobre a geometria euclidiana a uma hipótese historiográfica. Ainda sobre este particular, foi oportuno destacar as diferenças entre a ciência demonstrativa de Aristóteles e a teoria de Euclides, donde então foi sugerido que ao contrário de ser uma análise da ciência à sua época, a ciência demonstrativa seria uma verdadeira revolução intelectual na filosofia. Por fim, discutiu-se a possibilidade da análise retórica ser ampliada para além da geometria clássica. Neste particular, fala-se dum novo tipo de método filosófico dedicado a reestruturar a trama conceitual por detrás duma teoria coordenada com a prática cognitiva realizada em seu entorno. Assim entendida, a análise retórica pode reivindicar a reconstrução racional de teorias científicas proposta por Carnap com as devidas observações e correções.

## Referências

- ARISTÓTELES. *Meteorologica*. Cambridge: Harvad University Press, 1952. Tradução: H. D. P. Lee.
- \_\_\_\_\_. *Ética Nicomaqueia*. Madrid: Editorial Gredos, 1985. Tradução e notas: Julio Pallí Bonet.
- \_\_\_\_\_. *Metafísica*. Madrid: Editorial Gredos, 1994. Tradução, introdução e notas: Tomas Calvo Martínez.
- \_\_\_\_\_. *Analíticos Primeros*. Madrid: Editorial Gredos, 1995a. Tradução, introdução e notas: Miguel Candel Sanmartín.
- \_\_\_\_\_. *Analíticos Segundos*. Madrid: Editorial Gredos, 1995b. Tradução, introdução e notas: Miguel Candel Sanmartín.
- \_\_\_\_\_. *Retórica*. 2. ed. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2005.
- AVIGAD, J., DEAN, E. & MUMMA, J. “A Formal System for Euclid’s Elements”. *The Review for Symbolic Logic*, v. 2, p. 1–83, 4maio 2009. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/0810.4315v3>>.
- BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J. “Visual Information and Valid Reasoning”. In: AllWein, G & Barwise, J. *Logical Reasoning with Diagrams*. Nova York: Oxford University Press, 1996. p. 3–23.
- BLACKWELL, A. F. *Thinking with Diagrams*. Países Baixos: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- CARNAP, R. *An Introduction to the Philosophy of Science*. Nova York: Basic Books, Inc., 1966.
- \_\_\_\_\_. *Logical Syntax of Language*. Londres: Routledge, 2000.
- \_\_\_\_\_. *The Logical Structure of the World and Pseudoproblems in Philosophy*. Chicago: Open Court Publishing Company, 2003.
- ESQUISABEL, O. M. & SAUTHER, F. T. *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico: historia y teoría*. Buenos Aires: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciarelli, 2013. Disponível em: <<http://gcfcf.com.br/pt/files/2014/02/Esquisabel-Sautter-Conocimiento-simbolico-y-conocimiento-grafico.pdf>>.
- ESTRABÃO. *The geography of Strabo*. Londres: London Heinemann, 1917. Tradução: Horace Leonard Jones.
- EUCLIDES. *Opera Omnia*. [S.l.]: Lipsiae: B.G. Teubneri, 1883. I-IV. Editado por Johan Ludvig Heiberg.
- \_\_\_\_\_. *The Thirteen Books of the Elements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908. v. 3 Vols. Tradução, introdução e comentários: Thomas L. Heath.



- \_\_\_\_\_. *Les Éléments*. Paris: Presses Universitaires de France, 1990. Tradução e comentários: Bernad Vitrac.
- \_\_\_\_\_. *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos, 1991. v. 3 Vols. Tradução, introdução e comentários: María Luisa Puertas Castaño.
- \_\_\_\_\_. *Os Elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. Tradução e introdução: Irineu Bicudo.
- GRIMALDI, W. M. A. *Aristotle, Rhetoric I: a Commentary*. Nova York: Fordham University Press, 1980.
- GRIMBERG, G. E. “O estatuto do diagrama nos *Elementos* de Euclides”. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 8, n. 1, p. 6–21, 2015.
- HARTSHORNE, R. *Euclid and Beyond*. Nova York: Springer-Verlag, 2000.
- HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921. 2 Vols.
- HEMPEL, C. G. “Geometry and Empirical Science”. *The American Mathematical Monthly*, v. 52, n. 1, p. 7–17, 1945.
- HERÓDOTO. *História*. Madrid: Editorial Gredos, 1992. Tradução e notas: Carlos Schrader.
- HOMERO. *Ilíada*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015. Tradução: Carlos Alberto Nunes.
- KENNEDY, G. A. *A New History of Classical Rhetoric*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- KERÄNEN, J. P. M. *Cognitive Control in Mathematics*. Tese (Doutorado) — University of Pittsburgh, 2005. Disponível em: <[http://d-scholarship.pitt.edu/9529/1/Keranen\\_etd.pdf](http://d-scholarship.pitt.edu/9529/1/Keranen_etd.pdf)>.
- KLEENE, S. *Introduction to Metamathematics*. Nova York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1974.
- KNORR, W. R. *The Evolution of the Euclidean Elements*. Países Baixos: R. Reidel Publishing Company, 1975.
- LASSALLE CASANAVE, A. “Por construção de conceitos”. In: KLEIN, J. T. *Comentários às obras de Kant: Crítica da Razão Pura*. Florianópolis: NEFIPO, 2012. p. 657–694.
- \_\_\_\_\_. “Diagramas en pruebas geométricas por *reductio ad absurdum*”. In: ESQUISABEL, O. M. & SAUTHER, F. T. *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico: historia y teoría*. Buenos Aires: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciarelli, 2013. p. 21–28.
- LASSALLE CASANAVE, A. & PANZA, M. “Sobre el significado del Postulado 2 de los *Elementos*”. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, v. 2, n. 1, p. 103–115, 2012. Disponível em: <<http://gcfcf.com.br/pt/files/2012/11/npsf-vol1-n2-abel-marco.pdf>>.
- \_\_\_\_\_. “Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de Euclides”. *Revista Latinoamericana de Filosofía*, XLI, n. 2, p. 147–170, 2015. Disponível em: <<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01300299>>.

- LEMON O. WITH MUMMA, J.; SHIN, S. “Diagrams”. 2013. Disponível em: <<http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/>>.
- LEVI, B. *Lendo Euclides*. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 2001. Tradução: Julián Fuks.
- MANCOSU, P., JØRGENSEN, K. F., & PEDERSEN, S. A. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Países Baixos: Springer, 2005.
- MANDERS, K. “The Euclidean Diagramm”. In: MANCOSU, P. *Philosophy of Mathematical Practice*. Nova York: Oxford University Press, 2008. p. 80–130.
- MAXWELL, E. A. *História*. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
- MOKTEFI, A. & SHIN, S. *Visual Reasoning with Diagrams*. Nova York: Springer Basel, 2013.
- MUELLER, I. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid’s Elements*. Massachusetts: MIT, 1981.
- MUGLER, C. *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs*. Paris: Librairie C. Klincksieck, 1958.
- NETZ, R. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- OLIVEIRA DA SILVA, M. A. “Movimento e objetos geométricos em Alberto Magno”. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, v. 3, n. 1, p. 23–31, 2016.
- PANZA, M. “The twofold role of diagrams in Euclid’s plane geometry”. *Synthese*, v. 186, p. 55–102, 2012. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00192165v2>>.
- PERELMAN, C. & OLBRECHTS-TYTECA, L. *Tratado de argumentação: a Nova Retórica*. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005. Tradução: Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão.
- PLATÃO. *Diálogos, II*. Madrid: Editorial Gredos, 1983. Tradução, introdução e notas: Calonge Ruiz, J. *et al.*
- \_\_\_\_\_. *Diálogos, III*. Madrid: Editorial Gredos, 1988. Tradução, introdução e notas: García Gual, C., Martínez Hernández, M. & Lledó Iñigo, E.
- \_\_\_\_\_. *A República*. Pará: EDUFPA, 2000. Tradução: Carlos Alberto Nunes.
- PROCLO. *A Commentary on the First Book of Euclid’s Elements*. Princeton: Princeton University Press, 1992. Tradução: Glenn R. Morrow.
- RAV, Y. “Why do We Prove Theorems?”. *Philosophia Mathematica*, v. 7, p. 5–41, 1999.
- REICHENBACH, H. *The Philosophy of Space and Time*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1958.
- SEOANE, J. *Lógica y Argumento*. Montevideo: Ediciones Universitarias UdelaR, 2011.
- SZABÓ, A. *The beginnings of Greek mathematics*. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1978.

VEYNE, P. *Comment on écrit l'histoire: Essai d'épistémologie*. Paris: Éditions du Seuil, 1971.

VITRAC, B. “The Euclidean ideal of proof in The *Elements* and philological uncertainties of Heiberg’s edition of the text”. In: CHEMLA, K. *The History of Mathematical Proof In Ancient Traditions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. p. 69–134.

XENOFONTE. *Memoráveis*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2009. Tradução, introdução e notas: Ana Elias Pinheiro.

ÉSQUILO. *Prometeu Agrilhoado*. Lisboa: Edições 70, 1992. Tradução, introdução e notas: Ana Paula Quintela Sottomayor.