



UFBA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA INDUSTRIAL - PEI

MESTRADO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL

ERBET ALMEIDA COSTA

**Controle preditivo com estabilidade nominal garantida
para sistemas integradores com polos repetidos**



**SALVADOR
2017**



CONTROLE PREDITIVO COM ESTABILIDADE NOMINAL GARANTIDA
PARA SISTEMAS INTEGRADORES COM POLOS REPETIDOS

Erbet Almeida Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Industrial, da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Industrial.

Orientadores: Márcio André Fernandes
Martins
Ricardo de Araújo Kalid

Salvador
Agosto de 2017

Costa, Erbet Almeida
Controle preditivo com estabilidade nominal garantida para
sistemas integradores com polos repetidos / Erbet Almeida
Costa. -- Salvador, 2017.
82 f.

Orientador: Márcio André Fernandes Martins.
Coorientador: Ricardo de Araújo Kalid.
Dissertação (Mestrado - Pós-Graduação em Engenharia
Industrial) -- Universidade Federal da Bahia, Escola
Politécnica, 2017.

1. Controle Automático. 2. Teoria de Controle - Controle
Preditivo. I. Martins, Márcio André Fernandes. II. Kalid,
Ricardo de Araújo . III. Título.

**CONTROLE PREDITIVO COM ESTABILIDADE NOMINAL GARANTIDA PARA
SISTEMAS INTEGRADORES COM POLOS REPETIDOS**

ERBET ALMEIDA COSTA

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de pós-graduação em Engenharia Industrial da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Industrial.

Examinada por:

Prof. Dr. Cristiano Hora de Oliveira Fontes 
Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2001.

Prof. Dr. Oscar Alberto Zanabria Sotomayor 
Doutor em Engenharia Química pela Universidade de São Paulo, Brasil, 2002.

Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão 
Doutor em Engenharia Eletrônica e Computação pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica, Brasil, 1999.

Salvador, BA - BRASIL
Agosto 2017

CONTROLE PREDITIVO COM ESTABILIDADE NOMINAL GARANTIDA PARA SISTEMAS INTEGRADORES COM POLOS REPETIDOS

ERBET ALMEIDA COSTA

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de pós-graduação em Engenharia Industrial da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em Engenharia Industrial.

Examinada por:

Prof. Dr. Cristiano Hora de Oliveira Fontes _____
Doutor em Engenharia Química pela Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2001.

Prof. Dr. Oscar Alberto Zanabria Sotomayor _____
Doutor em Engenharia Química pela Universidade de São Paulo, Brasil, 2002.

Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão _____
Doutor em Engenharia Eletrônica e Computação pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica, Brasil, 1999.

Salvador, BA - BRASIL

Agosto 2017

Agradecimentos

A Deus, Criador de todas as coisas, “Porque d’Ele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas...” (Romanos 11:36).

Exprimo aqui meus profundos agradecimentos a todos aqueles que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho. Inevitavelmente, despreziosamente, omitirei alguns personagens, todavia de forma alguma retiro-lhe a devida importância.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Márcio Martins e Prof. Dr. Ricardo Kalid, pois antes de orientadores são amigos incondicionais. Ao Prof. Kalid subsiste o encargo de ter-me apresentado ao fabuloso universo do desenvolvimento científico. Ao Prof. Márcio gratulo por, de forma vital, ter-me indicado o caminho dos controladores preditivos, por todos os direcionamentos necessários e correções de trajetória quando necessário. Sobeeja a ambos minha gratidão pelas pequenas e, algumas vezes, longas conversas sobre as trivialidades e complexidades da vida.

Aos meus amigos e companheiros de pós-graduação com os quais compartilhei maior parte desse processo que, diante dos empecilhos que a pesquisa científica apresenta, não pouparam tempo nem mediram esforços para fornecer suas visões e possíveis caminhos para seguir. Em especial, Raony pelo triângulo de pascal, e a Daniel e Rodrigo pelas sugestões bem fundamentadas e, constantemente, difíceis de colocar em prática. Aos demais, eventualmente omitidos por escassez de palavras e de espaço, agrade-os por nosso "café-científico" e pelas risadas de todos os dias.

Deixo aqui meus mais profundos agradecimentos aos meus familiares, em especial à minha querida Mãe, Valdenice, que vez ou outra dizia-me “Isso eu também sei fazer...”, quando via-me imerso em algumas das equações que eventualmente “quebrou-me a cabeça”. A meu Pai, Sebastião, que sempre me foi um exemplo de honestidade e perseverança a quem restou a árdua tarefa de educar-me e moldar-me

no que sou. A meus irmãos Janair, Êder e Jesana agradeço por todas as experiências que nos trouxeram até aqui. Para alguns “há irmãos mais chegados que irmãos...”, todavia este é um sentimento que não experimento, pois não há amigos mais chegados que vocês.

Dentro das formalidades, agradeço à FAPESB (Termo de Outorga de Bolsa N^o: 3299/2015) que suportou-me financeiramente durante 18 dos 24 meses necessários à realização desse trabalho.

*“Ninguém vai me frear, ninguém
vai me dizer o que eu devo fazer...”*

Criolo

*‘O que lhe parece fácil talvez seja,
na verdade, um desafio.’*

Maurício Baia

Resumo da Dissertação apresentada à UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma estratégia de controle preditivo com garantia da estabilidade nominal, aplicável a sistemas com polos estáveis distintos e integradores repetidos. A lei de controle, livre de erro de regime permanente, é obtida dentro de um problema de otimização em uma camada através da utilização de um modelo em espaço de estados de ordem mínima baseado na resposta ao degrau do sistema. A estabilidade do sistema em malha fechada é alcançada adotando o horizonte de predição infinito e uso de um conjunto apropriado de restrições terminais suavizadas. O método proposto é experimentado através da simulação nos sistemas Barra e Bola e Prato e Bola considerando os cenários servomecanismo e de atenuação de distúrbios e, também, desassociação entre a planta e o modelo, incluindo o caso não-linear. Os resultados mostram não apenas a efetividade do controlador proposto no sentido da teoria de estabilidade e convergência, mas também apontam para uma questão fundamental do ponto de vista prática, a saber, a garantia de factibilidade do problema de otimização.

Palavras-chave. Engenharia de Controle Automático; Teoria de Controle - Controle Preditivo.

Abstract of Dissertation presented to PEI/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

This work presents the development of a model predictive control strategy with guarantee of nominal stability, applicable to systems with distinct stable and repeated integrating poles. The offset-free control law is obtained inside a one-step optimization formulation through the development of a minimal order state-space model based on an analytical step response of the system. The stability of the closed-loop system is achieved by considering an infinite prediction horizon along with the inclusion of an appropriated set of slacked terminal constraints. The proposed method is illustrated through simulations in a Ball and Beam and a 2DOF Ball Balancer system for output tracking and rejection of disturbance cases, as well as a plant-model mismatch scenario, including a nonlinear plant model. The results demonstrate not only the effectiveness of the proposed controller concerning to the theoretical issues of stability and convergence, but also point out to a fundamental issue from the practical point of view, namely the guarantee of feasibility of the control optimization problem.

Keywords. Automatic Control Engineering; Control Theory - Model Predictive Control.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Quadros	xiii
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Sistemas com múltiplos polos integradores	1
1.2 MPC com estabilidade nominal garantida	4
1.3 Objetivos do trabalho	9
1.4 Publicações	9
1.5 Estrutura do Trabalho	10
2 Modelo em espaço de estados	11
2.1 Função de transferência	11
2.1.1 Transformada inversa de Laplace para polos integradores re- petidos	12
2.1.2 Transformada inversa de Laplace para polos estáveis distintos e integradores repetidos	13
2.2 Modelo para sistemas com polos integradores repetidos - Caso SISO .	14
2.3 Modelo com polos integradores repetidos - Caso MIMO	19
2.4 Modelo para sistemas com polos estáveis distintos e integradores re- petidos	23
3 Formulação do controlador MPC nominalmente estável	25
3.1 Controlador IHMPC para sistemas integradores repetidos	25
3.2 Primeira Extensão do controlador IHMPC	30

3.3	Segunda Extensão do controlador IHMPC	36
3.4	Controlador IHMPC para sistemas estáveis e integradores repetidos .	39
4	Resultados de simulação dos controladores	43
4.1	Sistema Barra e Bola	43
4.1.1	Modelagem	44
4.1.2	Controladores IHMPC	49
4.2	Sistema Prato e Bola	59
5	Conclusões e considerações finais	67
5.1	Conclusões	67
5.2	Trabalhos futuros	68
	Referências	71
A	Programação quadrática	75

Lista de Figuras

2.1	Trajectoria da saída.	14
2.2	Trajectoria corrigida da saída.	15
4.1	Sistema Barra e Bola.	44
4.2	Diagrama de corpo livre do sistema barra e bola.	44
4.3	Diagrama de corpo livre completo.	45
4.4	Diagrama de corpo livre do servomotor.	47
4.5	Diagrama de controle sistema Barra e Bola.	50
4.6	Diagrama de controle em cascata com IHMPC.	50
4.7	Saída do sistema Barra e Bola.	52
4.8	Entrada do sistema Barra e Bola.	53
4.9	Função objetivo do controlador.	53
4.10	Saídas do sistema barra bola.	54
4.11	Entrada do sistema barra bola.	55
4.12	Diagrama de controle sistema Barra e Bola não linear com um único IHMPC.	57
4.13	Posição da bola - 1° Saída do sistema.	58
4.14	Ângulo do servomotor - 2° Saída do sistema.	59
4.15	Entrada do sistema.	59
4.16	Função objetivo do Controlador.	60
4.17	Variáveis de folga do Controlador.	60
4.18	Sistema prato e bola.	61
4.19	Diagrama de corpo livre para uma dimensão do Prato e Bola.	61
4.20	Diagrama de controle sistema Prato e Bola.	61

4.21 Diagrama de controle sistema Prato e Bola utilizando controlador IHMPC.	62
4.22 Diagrama X-Y com controlador IHMPC.	64
4.23 Variáveis de folga controlador IHMPC.	65

Lista de Símbolos

$a_{0,1,2 \dots n}$	Parâmetros da função de transferência, p. 12
$b_{0,1,2 \dots n}$	Parâmetros da função de transferência, p. 12
$A_{0,1,2 \dots n}$	Constante da expansão em frações parciais para polos integradores repetidos, p. 12
$G(s)$	Função de transferência, p. 12
\mathbf{u}	Vetor de entradas do sistema, p. 12
d	Operador derivativo, p. 12
n	Grau do numerador da função de transferência, p. 12 12
nst	Grau polinômio denominador da função de transferência referente ao número de polos estáveis do sistema, p. 12
$r_{1,2 \dots l}$	Raízes do denominador da função de transferência, p. 12
s	Variável complexa do domínio da frequência, p. 12
t	Tempo, p. 13
$d_{i,l}^{in}$	Constantes da função de transferência no domínio do tempo, referente aos termos variantes no tempo e relacionados aos estados integradores, p. 13
$d_{i,l}^{st}$	Constantes da função de transferência no domínio do tempo, referente aos termos variantes no tempo e relacionados aos estados estáveis, p. 13

$d_{i,0}$	Constantes da função de transferência no domínio do tempo, referente aos termos constantes no tempo, p. 13
k	Instante de amostragem, p. 13
$[y(t)]_k$	Trajectoria de saída, p. 14
$[y'(t)]_k$	Trajectoria de saída corrigida, p. 14
Δt	Intervalo de amostragem, p. 14
$\Delta \mathbf{u}_k$	vetor das ação de controle calculadas no instante k , p. 14
\mathbf{x}^{in}	Vetor de estados integradores, p. 14
\mathbf{x}^{st}	Vetor de estados estáveis, p. 14
\mathbf{x}^s	vetor de estados artificiais da parametrização, adicionado pela resposta ao degrau do sistema, p. 14
$[x^s]_k$	Estado integrador artificial no instante k , p. 14
$[x_{ni}^{in}]_k$	Estados integradores reais no instante k , p. 14
e	Operador exponencial, p. 14
A, B, C	Matrizes do modelo em espaço de estados discreto, p. 17
τ	Submatriz de A , p. 18
\mathbf{B}^s	Submatriz de B relativa aos estados integradores artificiais, p. 18
\mathbf{B}^{st}	Submatriz de B relativa aos estados estáveis, p. 18
\mathbf{B}^{in}	Submatriz de B relativa aos estados integradores do sistema, p. 18
\mathbf{F}^{in}	Submatriz de A relativa aos estados integradores do sistema, p. 18
nd	Multiplicação entre o número de entradas, saídas do sistema e estados integradores repetidos, p. 21

ne	Multiplicação entre o número de entradas e saídas do sistema, p. 21
\mathbf{F}^{st}	Submatriz da matriz \mathbf{A} relativa aos estados estáveis, p. 23
$\mathbf{\Psi}^{st}$	Submatriz da matriz \mathbf{C} relativa aos estados estáveis, p. 23
nx	Número total de estados, p. 24
J_k	Valor da função objetivo, p. 25
\mathbf{Q}_y	Matriz de pesos para o erro de predição, p. 25
\mathbf{R}	Matriz de supressão de movimentos, p. 25
$\mathbf{\Gamma}_j$	Matriz de somatório da matriz \mathbf{F}^{in} , p. 26
m	Horizonte de controle, p. 26
y_{sp}	Valor de referência, p. 26
\mathbf{u}_{max}	Matriz de empilhamento dos valores máximos para as ações de controle, p. 27
\mathbf{u}_{min}	Matriz de empilhamento dos valores mínimos para as ações de controle, p. 27
$\Delta \mathbf{u}_k^*$	Vetor das ações de controle ótimas calculadas no instante k , p. 28
$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$	Vetor das ações de controle ótimas herdadas do instante k , p. 28
\mathbf{M}	Matriz de empilhamento da progressão dos estados integradores, p. 28
$\tilde{\mathbf{x}}^{in}$	Estados integradores calculados com a solução herdada, p. 28
\mathbf{N}	Matriz de empilhamento, p. 29
\mathbf{P}	Matriz de empilhamento das matrizes \mathbf{B}^s , p. 29

$J_{1,k}$	Valor da função objetivo, p. 29
J_k^*	Valor da função objetivo utilizando a solução ótima, p. 29
$\tilde{J}_{1,k}$	Valor da função objetivo utilizando a solução herdada, p. 29
$\tilde{\mathbf{x}}^s$	Estados integradores artificiais calculados com a solução herdada, p. yperpage29
\mathbf{S}_y	Matriz de supressão das variáveis de folga relacionadas aos estados integradores artificiais., p. 30
$\delta_{y,k}$	Variável de folga adicionada ao problema de otimização para suavizar o erro de predição, p. 31
$\delta_{y,k}^*$	Variáveis de folga com a solução ótima, p. 31
$\Delta \mathbf{u}_\infty$	Solução ótima do problema de otimização após o horizonte de controle, p. 33
$\delta_{in,k}$	Variável de folga adicionada ao problema de otimização para suavizar os estados integradores puros, p. 36
$\Delta \mathbf{u}_a$	Solução ótima da camada superior do problema de otimização., p. 37
$\Delta \mathbf{u}_b$	Solução ótima da camada inferior do problema de otimização., p. 37
$\delta_{in,k}^*$	Variáveis de folga com a solução ótima, p. 38
$F_{x,r}$	Componente da força inercial, p. 44
$F_{x,t}$	Componente da força gravitacional, p. 44
J_b	Momento de inércia da bola, p. 44
α	Ângulo de inclinação da barra ou do prato, p. 44
γ_b	Ângulo de giro da bola, p. 44
m_b	Massa da bola, p. 44

$x(t), y(t)$	Posição da bola em relação às extremidades da barra ou do prato, não confundir com os estados ou a saída do sistema, p. 44
n_i	Grau do denominador da função de transferência equivalente ao número de polos integradores repetidos, p.
r_b	Raio da bola, p. 45
L_{beam}	Comprimento da barra, p. 46
θ_l	Ângulo de inclinação do servomotor, p. 46
g	Aceleração da gravidade, p. 46
r_{arm}	Distância entre o eixo do motor e o encaixe da barra, p. 46
K_{bb}	Ganho da função de transferência entre ângulo e posição da bola, p. 47
V_m	Tensão aplicada ao motor, p. 47
A_m	Constante do modelo do servomotor não linear, p. 48
B_{eq}	Constante do modelo do servomotor não linear, p. 48
J_{eq}	Momento de inércia equivalente, p. 48
K	Constante de proporcionalidade entre o ângulo e a tensão aplicada no servomotor, p. 48
$\omega_l(t)$	Velocidade angular do servo, p. 48
C_{bb}	Controlador mestre, p. 49
C_s	Controlador escravo, p. 49
θ_r	Limites admissíveis o valor do ângulo, p. 57
x_r	Limites admissíveis para as saídas: posição da bola na barra ou no prato, p. 57

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo tem por finalidade introduzir a presente dissertação. Inicia-se por apresentar a revisão da literatura que aborda as linhas principais do trabalho, as motivações e lacunas que visa encobrir e, finalmente, exibirá a estruturação do trabalho. A motivação advém da inexistência até então, de um controlador preditivo que possuísse algumas características, dentre as quais citam-se aplicabilidade plausível, estabilidade nominal garantida, sem erro de regime permanente e aplicável a sistemas eletromecânicos, tais como Barra e Bola (*ball and beam*) ou Prato e Bola (*ball and plate*). A característica que mais se destaca é a presença de múltiplos estados integradores no sistema, portanto, instável em malha aberta.

1.1 Sistemas com múltiplos polos integradores

Os sistemas Barra e Bola (APKARIAN JACOB; LÉVIS, 2011) e Prato e bola (QUANSER, 2013) são kits educacionais eletromecânicos amplamente utilizados na literatura como ambiente de testes para novas rotinas e teorias de controle e, principalmente, demonstração de controle em cascata. Olfati-Saber (2001) caracteriza alguns sistemas eletromecânicos como subatuados e, entre eles, está o sistema Barra e Bola. Para ser classificado como subatuado é necessário possuir maior quantidade de variáveis controladas do que manipuladas. Essa característica é produzida, basicamente, quatro razões (OLFATI-SABER, 2001): i) dinâmica intrínseca do sistema; ii) redução de custos ou finalidades práticas; iii) falha de atuadores; iv) introduzido de modo artificial no sistema a fim de criar características desejadas a uma aplicação.

Os dois sistemas (Barra-bola e Prato-bola), além de subatuados, são governados por dinâmicas que possuem múltiplos polos integradores, semelhantemente ao quadricóptero (SCHREIER, 2012), espaçonaves (DODDS; VITTEK, 1998) e discos rígidos (GOH et al., 2001).

As dinâmicas que regem os sistemas Barra e Bola e o Prato e bola, são idênticas, porém diferem na quantidade de variáveis, já que, no primeiro caso, tem-se um sistema SIMO (do inglês *Single Input Multiple Output*), com duas variáveis controladas (posição da bola e ângulo de inclinação do servo mecanismo) e uma manipulada (tensão aplicada ao servomotor). O sistema Prato e Bola, por sua vez, é MIMO (do inglês *Multiple Input Multiple Output*) com duas tensões, uma posição em cada direção do prato e dois ângulos de inclinação. De forma pragmática, as abordagens de controle aplicadas ao caso SIMO podem ser adequadas ao caso MIMO.

Quanto ao controle, a literatura especializada apresenta as mais variadas abordagens de controle aplicadas a sistemas com as características dinâmicas dos sistemas eletromecânicos supramencionados, os quais são objetos de aplicação desta dissertação. São empregadas desde as estratégias clássicas até modernas, dentre tais se destacam: controle PID (Proporcional Integrativo Derivativo) (SINAGA et al., 2011; CERVANTES; DÍAZ; RIVERA, 2017); controladores baseados em lógica fuzzy (SOUZA et al., 2014; LIN; HUANG, 2012; MORENO-ARMENDÁRIZ et al., 2010); integração entre controle e observadores de estados variantes no tempo (SIRA-RAMIREZ, 2000; FILHO; FORTALEZ, 2014); abordagem não-linear de trajetória baseada em realimentação (HO; RIZAL; CHU, 2013); controle ótimo (HUNG et al., 2017; CHAGRA; DEGACHI; KSOURI, 2017); e, também, diferentes abordagens de controle preditivo baseados em modelo - MPC (do inglês *Model Predictive Control*) (ZHIYU; TIM, 2007; HARA; TAKAHASHI; KONISHI, 2011; ORAVEC; JADLOVSKA, 2015; CHAGRA; DEGACHI; KSOURI, 2017).

Ao considerar abordagem clássica, obrigatoriamente usa-se a estrutura de controle em cascata (OLFATI-SABER, 2001). A cascata é composta por dois controladores, o mestre que modifica a referência do segundo (denominado de escravo), e este define o sinal de controle a ser implementado na planta. O controle em cascata visa resolver, principalmente, duas limitações (BROSILOW; JOSEPH, 2002): i) saída intermediária afeta diretamente a variável principal controlada; ii) o ganho

do segundo processo, incluindo o controlador, é não-linear. Os sistemas em discussão, se encaixam no primeiro grupo, pois a saída do sistema é afetada diretamente pela saída do primeiro controlador.

Nessa estrutura, pode-se adotar diferentes técnicas de controle desde o PID até uma abordagem proeminente que é o uso de controladores MPC. Esses controladores utilizam a modelagem do sistema como forma de prever sua resposta, quando uma ação de controle é inserida no sistema. Em sistemas subatuados, um MPC pode substituir os controladores mestres ou toda a estrutura de controle em cascata. Esse tipo de controlador produz uma lei de controle capaz de encontrar uma solução viável na presença de restrições, indiferentemente se são impostas nas entradas ou nos estados (NAGRATH; PRASAD; BEQUETTE, 2002; AFRAM; JANABI-SHARIFI, 2014).

Concentrando os esforços nos controladores MPC, algumas das aproximações apresentadas na literatura serão destacadas. Zhiyu e Tim (2007) propõem o uso de um MPC não linear irrestrito para o sistema Barra e Bola utilizando um modelo não linear de Hammerstein desassociado na forma de espaço de estados. O controlador é construído a partir de uma formulação em malha aberta e transformada em malha fechada através do recálculo dos ganhos a cada instante de amostragem. Considera, também, uma estrutura de janela móvel apenas na primeira atuação da planta. A estrutura em malha fechada, segundo o autor, é semelhante a um preditor de Smith em que a planta e o modelo de predição, obtido através da identificação do sistema, operam em paralelo e as ações de controle são aplicadas em um e outro e realimentados através do inverso da não linearidade. Utiliza, portanto, a estrutura convencional no controle não-linear. Seus resultados mostram bom desempenho nas regiões de pouca não-linearidade do sistema, porém uma grande limitação é a incerteza associada ao processo de identificação do sistema.

Uma outra abordagem foi apresentada por Hara, Takahashi e Konishi (2011), que compara o desempenho de dois controladores SISO restritos. O primeiro um MPC padrão de horizonte finito e o segundo MPC com atenuação de distúrbios. A primeira abordagem utiliza-se da janela móvel e o problema de otimização é resolvido a cada instante de amostragem. A primeira ação de controle é inserida na planta e resolve-se o problema de otimização nos próximos instantes de amostragem. A segunda

abordagem é uma extensão do controlador MPC padrão de horizonte finito no qual é adicionado o termo referente à atenuação de distúrbios, porém a estabilidade em malha fechada não é garantida.

Em termos de modelagem, Oravec e Jadlovská (2015) mostra que o modelo não linear obtido para o sistema Prato e Bola, através das expressões analíticas aplicando as leis de conservação do momento e da energia, possui resposta próxima do sistema físico. No mesmo trabalho, eles sugerem o uso de um MPC padrão SISO com horizonte de predição e controle finitos utilizando para predição um modelo linearizado em formato de espaço de estados, obtidos através da linearização das equações diferenciais obtidas para o sistema. Visto que o sistema Prato e Bola é MIMO, o controlador MPC apresentado por Oravec e Jadlovská (2015) gera uma malha de controle desacoplada, sobre a qual as ações são calculadas separadamente por dois controladores MPC. Os resultados apresentados mostram um controle suave sem oscilações fortes, todavia esse trabalho não apresenta mecanismos capazes de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

O panorama apresentado anteriormente, deixa margem para desenvolvimento de novos controladores aplicáveis a esses sistemas. Dentro do universo dos MPCs, os que ainda não foram aplicados a sistemas eletromecânicos são aqueles que possuem a garantia de estabilidade em malha fechada. Neste sentido, esta dissertação abordará o desenvolvimento de um controlador MPC com estabilidade nominal garantida, passível de aplicação em tempo real e que abarque as características dos sistemas Barra e Bola e Prato e Bola nos modelos de predição.

1.2 MPC com estabilidade nominal garantida

Controladores MPC com estabilidade nominal garantida são abordagens de controle que mantêm as propriedades estabilizantes do sistema em malha fechada para o caso de modelo perfeito, independentemente dos parâmetros de sintonia. Mayne (2014) faz um apanhado de tecnologias MPC existentes e expõe, com ávido interesse, os métodos capazes de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Segundo esse autor, a literatura industrial não se empenha em estudar os controladores MPC com garantia de estabilidade, todavia o ambiente acadêmico já direcionou esforços

a investigar os efeitos tanto da estabilidade quanto dos custos de controle.

Rossiter (2003) aponta alguns dos caminhos suficientes para alcançar a estabilidade nominal e, de forma congênere a Mayne (2014), aponta como principal caminho a adoção de um horizonte de predição infinito, pois isto implica que a função objetivo do controlador pode desempenhar características de uma função de Lyapunov, portanto, de custo limitado. Nesse mesmo trabalho, Rossiter (2003) segmenta os controladores nominalmente estáveis em duas classes, quais sejam: i) modo dual; ii) restrições terminais.

O modo dual é apresentado por Michalska e Mayne (1993) como uma forma de não submeter o controlador de horizonte infinito a restrições terminais de igualdade. Essa abordagem considera o uso sequencial de dois modos de controle. O primeiro deles é utilizado quando o sistema está longe do estado estacionário de interesse ou do ponto de operação. Este modo é responsável por levar o sistema para uma região dentro da qual está localizado o ponto ótimo, mais conhecida como conjunto terminal invariante. Ao atingir esse conjunto, todas as restrições de desigualdade, impostas ao sinal de controle, são assumidas como satisfeitas, porém não ativas, e o primeiro modo do controlador deixa de ser efetivo. Surge, então, a carência de um mecanismo capaz de levar o sistema assintoticamente para o ponto desejado, papel exercido pelo segundo modo. Em geral, o controlador associado a esse segundo modo baseia-se numa lei de controle de realimentação de estados, comumente adotado como o controle ótimo LQR (*Linear Quadratic Regulator*).

O controle em modo dual possui características estabilizantes almejadas em um controlador preditivo, todavia há alguns aspectos que limitam o uso de tais controladores, quais sejam (ROSSITER, 2003): i) desassociação entre os dois modos do controlador e ii) viabilidade. Ambos são influenciados pela escolha dos parâmetros do controlador, tais quais tamanho do conjunto terminal, horizonte de controle. Dois cenários destacam-se:

1. Se a escolha do conjunto terminal for ruim e o horizonte de controle pequeno, o sistema possivelmente apresentará uma desassociação significativa entre a predição dos dois modos, além de dispor de desempenho insatisfatório;
2. Se o conjunto terminal for muito restrito, o problema de otimização possivelmente será inviável, pois o primeiro modo do controlador não possuirá graus de

liberdade o suficiente para levar o sistema para um ponto dentro do conjunto terminal.

Ao sopesar as diferentes abordagens estabilizantes, González et al. (2011) argumentam que a viabilidade da abordagem em modo dual é limitada pela competição entre o tamanho do domínio da atração, custo computacional e o desempenho possível para um determinado horizonte de controle. Eles sugerem, então o uso da abordagem clássica do controlador preditivo de horizonte infinito (IH MPC) como solução e construção de uma lei de controle com domínio de atração maior.

Evidenciando a abordagem clássica do IH MPC, Rawlings e Muske (1993) é a principal referência. Nesse trabalho, os autores propõem um MPC linear com garantia de estabilidade nominal e com restrições para o caso regulador. Os estados estáveis estão relacionados ao custo terminal que é obtido através da solução da equação de Lyapunov. Por outro lado, os estados instáveis são submetidos a restrições que os forcem a convergir para a origem no fim do horizonte de controle. Essas restrições impedem que o valor da função objetivo cresça com o horizonte infinito.

Estendendo a abordagem anterior, Muske e Rawlings (1993) transforma o MPC regulador no caso servo através da inserção de uma camada de otimização adicional que modifica a origem do sistema. Desta forma, a camada superior é responsável por calcular os estados estacionários relacionados aos pontos de equilíbrio desejados e a camada inferior é o controlador MPC regulador padrão que calcula as ações de controle que direcionará o sistema para a nova origem.

O controlador MPC em duas camadas apresentado por Muske e Rawlings (1993) possui algumas limitações, quais sejam: i) o problema de otimização pode se tornar inviável se as restrições terminais relacionadas aos estados instáveis do sistemas implicarem em uma solução que extrapole as restrições de movimento (problema da infactibilidade). Nesses casos, a solução é estender o horizonte de controle de modo a obter uma solução viável, entretanto, este aumento pode tornar computacionalmente inviável a solução do problema ou diminuir o desempenho em virtude de respostas lentas (comummente obtidas com horizontes de controle grandes); ii) a formulação em duas camadas, quando aplicada ao caso servo, executa dois problemas de otimização no mesmo instante. Isto gera dúvidas no sentido de a interação entre as duas camadas desestabilizar o sistema, tornando o problema de otimização

inviável, ainda que se adote horizontes de predição infinito.

Como forma de sobrepujar as limitações da rota apresentada por Rawlings e Muske (1993), Rodrigues e Odloak (2003) apresentam um controlador livre de erro de regime, em uma camada, aplicável tanto ao caso regulador quanto servo e também com propriedades atenuantes na presença de distúrbios. Esta abordagem simplifica a formulação do controlador para torná-lo passível de utilização. Um dos avanços foi a inclusão de um modelo em espaços de estados característico proposto seminalmente por Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997), que se propõe a resolver questões sérias no que tange ao número de estados suficientes para representar um sistema. Em sua particularidade, o modelo em espaço de estados utilizado pelo controlador de Rodrigues e Odloak (2003) apenas é aplicável aos sistemas por ele representado, quais sejam, sistemas que possuam polos estáveis distintos e sem tempos mortos.

As características mais relevantes do modelo em espaço de estados apresentadas por Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997) são: i) aplicável a qualquer controlador MPC; ii) forma incremental das entradas (incorporação da ação integral para eliminar o erro de regime permanente); iii) número de estados reduzidos o que implica em facilidade de sintonizar o controlador, pois os autovalores da malha fechada podem ser facilmente avaliados; iv) baseado numa expressão analítica da resposta ao degrau do sistema; v) a predição do comportamento do sistema pode ser feita arbitrariamente e não necessita de tempos de amostragem iguais.

O controlador de Rodrigues e Odloak (2003), por sua vez, é construído como uma função contínua do custo, e propõe a solução das questões de factibilidade e garantia da estabilidade da formulação QDMC (Quadratic Dynamic Matrix Control). O principal avanço alcançado com esse controlador foi a incorporação de um conjunto de variáveis que suaviza as restrições terminais referentes a predição e fornece graus de liberdade adicionais ao problema de otimização, garantindo-lhe sempre uma solução viável. Obrigatoriamente, com o intuito de manter as propriedades de uma função de Lyapunov, é adicionada uma matriz de pesos que pondera as variáveis de folga e o resultado é somado diretamente ao valor da função objetivo. O uso dessa matriz é suficiente para limitar o uso das variáveis de folga e forçar o algoritmo otimizador a minimizar o uso de tais variáveis.

Posteriormente, Odloak (2004) combina os métodos de Rawlings e Muske (1993)

e Rodrigues e Odloak (2003) e apresenta um controlador com função objetivo discreta com garantia da estabilidade nominal e robusta (assumindo que a planta real pertence a um conjunto provável, caso multiplanta). Outro progresso significativo dessa formulação é a construção de um problema de otimização sem a necessidade de armazenar toda a predição ao longo do horizonte de controle, tal qual nas formulações QDMC e Rodrigues e Odloak (2003).

Em uma abordagem similar a Odloak (2004), Cano e Odloak (2003) apresentaram um controlador para sistemas integradores não repetidos com garantia da estabilidade nominal e robusta. Então, Carrapiço e Odloak (2005) combina os métodos de Rodrigues e Odloak (2003) e de Cano e Odloak (2003) e apresenta um controlador nominalmente estável. Nessa formulação, novas variáveis de folga são adicionadas ao problema de otimização para suavizar as restrições referentes aos estados integradores. Esta inclusão também é feita de forma que sejam mantidas as propriedades estabilizantes segundo os parâmetros de Lyapunov, tal qual a abordagem de Rodrigues e Odloak (2003).

Enquanto os controladores de Rawlings e Muske (1993) exigem valor mínimo para o horizonte de controle igual ao número de estados instáveis do sistema, na abordagem de Carrapiço e Odloak (2005), o mínimo é um. Desta forma, quando o horizonte de controle é inferior ao número de estados instáveis, o otimizador utiliza as variáveis de folga, encontra uma solução viável e nos instantes subsequentes as leva para zero.

É necessário ponderar que, anteriormente a Alvarez et al. (2009), não se compreendia, em sua totalidade, a existência de um valor mínimo para as matrizes que ponderam o impacto das variáveis de folga, relativas à predição, na função objetivo. Como consequência direta, imaginava-se que para as variáveis relacionadas aos estados instáveis ou integradores seguia-se o mesmo entendimento. Sutilmente, Alvarez et al. (2009) sugere que, uma vez que os sistemas integradores não estabilizam-se fora de um ponto de equilíbrio, as variáveis de folga convergirão quando os estados integradores forem zerados. Portanto, se o estado de equilíbrio for realizável, para qualquer matriz de pesos positiva-definida os estados convergirão para zero e, com isso, o controlador garante a convergência do sistema em malha fechada. No aspecto de desempenho de controle, a ideia aplicada por Martins e Odloak (2016) é utilizar

um valor em várias ordens de grandeza superior às matrizes que ponderam as parcelas da função objetivo de controle relacionadas ao erro de predição e as ações de controle, garantindo a efetividade da convergência.

Sob a perspectiva de aplicação em sistemas que possuem múltiplos polos integradores, tais quais o barra e bola ou prato e bola, o controlador em duas camadas apresentado por Rawlings e Muske (1993) é aplicável, todavia não apresenta algumas características fornecidas pela abordagem de Carrapiço e Odloak (2005). Portanto, a principal motivação deste trabalho é a construção do controlador para sistemas com polos integradores repetidos, pois Odloak (2004), Alvarez et al. (2009), Cano e Odloak (2003) e Martins (2014) abordam unicamente os casos nos quais não há repetição do polo integrador.

1.3 Objetivos do trabalho

Desenvolver um controlador preditivo baseado em modelo que possua garantia da estabilidade nominal para sistemas estáveis e integradores repetidos. Adicionalmente, os objetivos específicos que devem ser atingidos, são estes:

- síntese de um modelo em variáveis de estados baseado na expressão analítica da resposta ao degrau do sistema (extensão do trabalho da abordagem de Rodrigues e Odloak (2003));
- garantia da estabilidade utilizando o argumento de Lyapunov por adotar um horizonte de predição infinito, custo terminal associado aos modos estáveis e restrições terminais suavizadas;
- garantia de solução viável (factibilidade) para o único problema de controle (uma camada) através da introdução adequada de um conjunto de variáveis de folga.

1.4 Publicações

As publicações fruto deste trabalho são:

1. Costa, E. A.; Martins, M.A.F.; Schnitman, L.; Kalid, R.A; Controle preditivo nominalmente estável aplicado a um sistema barra e bola. XXI Congresso Brasileiro de Automática 2016. Anais...Vitória - ES: UFES, 2016;
2. Costa, E. A.; Martins, M.A.F.; Schnitman, L.; Kalid, R.A; Controle preditivo de horizonte infinito, com estabilidade nominal garantida aplicado ao sistema barra e bola não-linear. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente SBAI 2017. Anais... Porto Alegre - RS: UFRGS, 2017;
3. Costa, E. A.; Martins, M.A.F.; Schnitman, L.; Odloak, D.; Kalid, R.A; A stabilizing model predictive control strategy of integrating systems with repeated poles. ISA Transactions, 2017, Submetido para publicação.

1.5 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos, incluindo este capítulo introdutório.

O Capítulo (2) mostra as possíveis representações matemáticas dos sistemas de interesse e, na sua parte principal, a construção dos modelos em espaço de estados baseado numa expressão analítica da resposta ao degrau da função de transferência do sistema.

O Capítulo (3) apresenta a definição formal do controlador, os teoremas de estabilidade e suas provas, assim como outras extensões necessárias para garantir as propriedades estabilizantes do controlador.

Os resultados da aplicação do controlador proposto são apresentados no Capítulo (4) em dois sistemas selecionados, primeiramente o Barra e Bola (SIMO) e em segundo momento o Prato e Bola (MIMO). A robustez do controlador é testada frente ao uso de uma planta não-linear e o desempenho avaliado em diferentes cenários, quais sejam, caso servo e atenuação de distúrbios.

Por fim, no Capítulo (5) é apresentado um sumário das contribuições do trabalho e esboçadas suas conclusões, bem como uma indicação dos possíveis trabalhos futuros de continuidade da pesquisa.

Capítulo 2

Modelo em espaço de estados

Este capítulo mostra a construção de um modelo em espaço de estados na forma incremental das entradas para sistemas que possuam polos integradores repetidos. A modelagem segue a concepção de Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997), que sugere a construção de modelos com estados diretamente relacionados às saídas do sistema. A principal característica dessa representação de sistema é ter a saída diretamente relacionada com a resposta ao degrau do sistema.

Este capítulo está organizado como segue. A primeira seção fará um breve resumo do que são funções de transferências e apresentará a transformada inversa de Laplace. As seções subsequentes serão direcionadas a apresentar a construção dos modelos em espaço de estados para os sistemas com polos estáveis e integradores repetidos. Como forma instrutiva, será retratado o caso SISO e, consecutivamente, a generalização para um modelo MIMO. Fechando o capítulo, será apresentado um modelo em espaço de estados que represente a resposta ao degrau de sistemas com polos estáveis distintos e integradores repetidos.

2.1 Função de transferência

As propriedades estabilizantes de um sistema linear são definidas com base nas raízes do denominador da função de transferência que o caracteriza. Neste trabalho o foco principal recai sobre sistemas que possuem múltiplas raízes na origem, comumente chamados de sistemas integradores com raízes repetidas. De modo genérico a função de transferência que relaciona a entrada u com a saída y que possua ni polos

integradores repetidos é escrita como:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}{s^{ni}}, \quad (2.1)$$

em que $n \leq ni$.

Parte do interesse deste trabalho é dedicado também a sistemas com polos estáveis e integradores repetidos. Logo, a função de transferência $G(s)$ para um sistema com nst polos estáveis distintos e ni polos integradores repetidos é escrita como:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}{(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{nst}s^{nst})s^{ni}}, \quad (2.2)$$

em que $n \leq ni + nst$.

Uma vez que a parametrização apresentada por Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997) é realizada em uma função de transferência no domínio do tempo, é necessário aplicar a transformada inversa de Laplace nas Equações (2.1) e (2.2) e obter as respectivas representações no domínio do tempo. As seções posteriores apresentam os pontos relevantes ao desenvolvimento deste trabalho.

2.1.1 Transformada inversa de Laplace para polos integradores repetidos

Corripio e Smith (2008) apresenta o procedimento de aplicação da transformada inversa de Laplace em funções de transferência para obter a respectiva função resposta no domínio do tempo. Especificamente para funções que possuem raízes repetidas no denominador, a expressão é:

$$G(s) = \frac{K}{(s - r_1)^n}. \quad (2.3)$$

A expansão em frações parciais fornece:

$$G(s) = \frac{A_1}{(s - r_1)^n} + \frac{A_2}{(s - r_1)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{s - r_1}, \quad (2.4)$$

as constantes do numerador das frações são calculadas com base nas equações:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow r_1} s^n G(s), \quad (2.5)$$

$$A_k = \lim_{s \rightarrow r_k} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} s^{n+1} G(s). \quad (2.6)$$

A expressão final no domínio do tempo é escrita como:

$$S(t) = \left[\frac{A_1 t^n}{(n)!} + \frac{A_2 t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{A_n}{0!} \right] e^{-r_1 t}. \quad (2.7)$$

Considerando a expressão definida em (2.1), na qual a raiz r_1 é nula, a expressão no domínio do tempo fornece:

$$S(t) = \frac{A_1 t^{ni}}{(ni)!} + \frac{A_2 t^{ni-1}}{(ni-1)!} + \dots + \frac{A_{ni}}{0!}, \quad (2.8)$$

que, convenientemente, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S(t) = d_{i,0} + \sum_{l=1}^{ni} d_{i,l}^{in} t^l. \quad (2.9)$$

2.1.2 Transformada inversa de Laplace para polos estáveis distintos e integradores repetidos

A expansão em frações parciais para sistemas com nst polos estáveis distintos e ni integradores repetidos, com função de transferência genérica igual àquela definida em (2.2) produz:

$$\begin{aligned} S(s) = & \frac{A_1^{st}}{(s-r_1)} + \frac{A_2^{st}}{(s-r_2)} + \dots + \frac{A_{nst}^{st}}{s-r_{nst}} \\ & + \frac{A_1^{in}}{s^{ni+1}} + \frac{A_2^{in}}{s^{ni}} + \dots + \frac{A_{ni}^{in}}{s^2} + \frac{A_{(ni+1)}^{in}}{s^1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

A transformada inversa de Laplace em cada uma das parcelas, condensados em somatórios os termos semelhantes, fornece:

$$S(t) = d_{i,0} + \sum_{l=1}^{nst} d_{i,l}^{st} e^{-r_l t} + \sum_{l=1}^{ni} d_{i,l}^{in} t^l. \quad (2.11)$$

2.2 Modelo para sistemas com polos integradores repetidos - Caso SISO

O procedimento de parametrização concebido por Tvrzská de Gouvêa e Odloak (1997), e distintamente descrito por Rodrigues e Odloak (2003) para sistemas estáveis e integradores, serão aplicados ao modelo SISO da Equação (2.9) e as etapas fundamentais são:

1. Assumir que a cada instante de amostragem k , a resposta ao degrau do sistema pode ser representada por uma função similar à Equação (2.9), especificamente na forma:

$$[y(t)]_k = [x^s]_k + [x_1^{in}]_k t + [x_2^{in}]_k t^2 + \dots + [x_{ni-1}^{in}]_k t^{(ni-1)} + [x_{ni}^{in}]_k t^{ni}, \quad (2.12)$$

na qual $[x^s]_k$, $[x_1^{in}]_k$, ..., $[x_{ni}^{in}]_k$ são os parâmetros da trajetória de saída do sistema em malha aberta e estão diretamente relacionados às constantes resultantes da expansão em frações parciais. Em termos geométricos, a trajetória $[y(t)]_k$ pode ser representada tal qual a Figura (2.1).

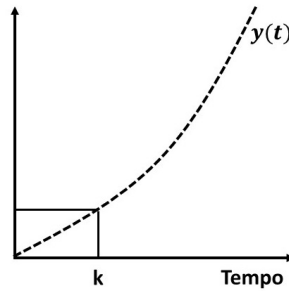


Figura 2.1: Trajetória da saída.

2. Atualiza a trajetória para uma entrada Δu_k do tipo degrau e a nova a trajetória da saída (malha fechada) é mostrada na Figura (2.2) e será escrita na seguinte forma:

$$[y'(t)]_k = [y(t)]_k + S(t)\Delta u_k, \quad (2.13)$$

sendo $\Delta u_k = u(k) - u(k - 1)$.

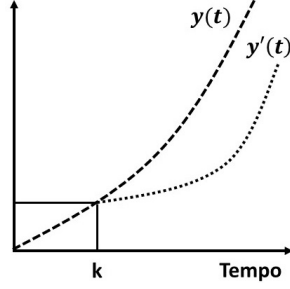


Figura 2.2: Trajetória corrigida da saída.

3. Move-se, então, para o próximo instante $k+1$, utilizando tempo de amostragem igual a Δt e recalcula a trajetória de saída, utilizando $k+1$ como nova origem:

$$[y(t)]_{k+1} = [y'(t + \Delta t)]_k = [y(t + \Delta t)]_k + S(t + \Delta t)\Delta u_k. \quad (2.14)$$

4. Substitui-se (2.12) e (2.9) em (2.14) e obtém-se:

$$\begin{aligned} [y(t)]_{k+1} = & [x^s]_k + [x_1^{in}]_k(t + \Delta t) + [x_2^{in}]_k(t + \Delta t)^2 + \dots \\ & + [x_{ni-1}^{in}]_k(t + \Delta t)^{ni-1} + [x_{ni}^{in}]_k(t + \Delta t)^{ni} \\ & + [d_0 + d_1^{in}(t + \Delta t) + d_2(t + \Delta t)^2 + \dots \\ & + d_{ni}(t + \Delta t)^{ni}]\Delta u_k. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Observação 1. Introdúz-se, neste ponto, a definição do binômio de Newton que fornece um mecanismo capaz de organizar os termos decorrente da expansão do binômio de ordem n tal qual:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad (2.16)$$

em que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.17)$$

Portanto, o uso do binômio de Newton, permite reescrever a equação (2.15) da seguinte forma:

$$[y(t)]_{k+1} = \binom{0}{0} [x^s]_k + [x_1^{in}]_k \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} t^{1-k} \Delta t^k$$

$$\begin{aligned}
& + [x_2^{in}]_k \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} t^{2-k} \Delta t^k + \dots + [x_{ni-1}^{in}]_k \sum_{k=0}^{ni-1} \binom{ni-1}{k} t^{ni-1-k} \Delta t^k \\
& + [x_{ni}^{in}]_k \sum_{k=0}^{ni} \binom{ni}{k} t^{ni-k} \Delta t^k \\
& + [d_0 + d_1^{in} \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} t^{1-k} \Delta t^k + d_2 \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} t^{2-k} \Delta t^k + \dots \\
& + b_{ni} \sum_{k=0}^{ni} \binom{ni}{k} t^{ni-k} \Delta t^k] \Delta u_k. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

5. Considerando a origem no instante de amostragem $k+1$ a resposta do sistema, definida em (2.12), é reescrita como:

$$[y(t)]_{k+1} = [x^s]_{k+1} + [x_1^{in}]_{k+1} t + [x_2^{in}]_{k+1} t^2 + \dots + [x_{ni}^{in}]_{k+1} t^{ni}. \tag{2.19}$$

Os estados são, então, definidos como:

$$\begin{aligned}
[x^s]_{k+1} &= \binom{0}{0} [x^s]_k + \binom{1}{0} [x_1^{in}]_k \Delta t + \binom{2}{0} [x_2^{in}]_k \Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{0} [x_{ni}^{in}]_k \Delta t^{ni} \\
&+ \left[\binom{0}{0} d_0 + \binom{1}{0} d_1^{in} \Delta t + \dots + \binom{ni}{0} d_{ni}^{in} \Delta t^{ni} \right] \Delta u_k \\
[x_1^{in}]_{k+1} &= \binom{1}{1} [x_1^{in}]_k + \binom{2}{1} \Delta t [x_2^{in}]_k + \binom{3}{1} \Delta t^2 [x_3^{in}]_k + \dots + \binom{ni}{1} [x_{ni}^{in}]_k \Delta t^{(ni-1)} \\
&+ \left[\binom{1}{1} d_1^{in} \Delta t + \binom{2}{1} d_2^{in} \Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{1} d_{ni}^{in} \Delta t^{(ni-1)} \right] \Delta u_k \\
[x_2^{in}]_{k+1} &= \binom{2}{2} [x_2^{in}]_k + \binom{3}{2} [x_3^{in}]_k \Delta t + \binom{4}{2} [x_4^{in}]_k \Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{2} [x_{ni}^{in}]_k \Delta t^{(ni-2)} \\
&+ \left[\binom{2}{2} d_2^{in} + \binom{3}{2} d_3^{in} \Delta t + \dots + \binom{ni}{2} d_{ni}^{in} \Delta t^{(ni-2)} \right] \Delta u_k \\
&\vdots \\
[x_{ni-1}^{in}]_{k+1} &= \binom{ni-1}{ni-1} [x_{ni-1}^{in}]_k + \binom{ni}{ni-1} \Delta t [x_{ni-1}^{in}]_k \\
&+ \left[\binom{ni-1}{ni-1} d_{ni-1}^{in} + \binom{ni}{ni-1} d_{ni-1}^{in} \Delta t \right] \Delta u_k \\
[x_{ni}^{in}]_{k+1} &= \binom{ni}{ni} [x_{ni}^{in}]_k + \binom{ni}{ni} d_{ni}^{in} \Delta u_k. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

6. A saída do sistema deve ser calculado no instante k , o que é equivalente a calcular a trajetória da Equação (2.12) no instante zero, logo, pode-se observar

que o valor de y no instante k é:

$$[y(t)]_k = [y(0)]_k = [x^s]_k. \quad (2.21)$$

7. Organiza o sistema de equações no formato de espaço de estados da seguinte forma:

$$[\mathbf{x}]_{k+1} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_k + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}_k, \quad (2.22)$$

$$[\mathbf{y}]_k = \mathbf{C}[\mathbf{x}]_k, \quad (2.23)$$

em que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0}\Delta t & \binom{2}{0}\Delta t^2 & \binom{3}{0}\Delta t^3 & \dots & \binom{ni}{0}\Delta t^{(ni)} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}\Delta t & \binom{3}{1}\Delta t^2 & \dots & \binom{ni}{1}\Delta t^{(ni-1)} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2}\Delta t & \dots & \binom{ni}{2}\Delta t^{(ni-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots & \binom{ni}{3}\Delta t^{(ni-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{ni}{ni}\Delta t^{(ni-ni)} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}d_0 + \binom{1}{0}d_1^{in}\Delta t + \binom{2}{0}d_2^{in}\Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{0}d_{ni}^{in}\Delta t^{(ni)} \\ \binom{1}{1}d_1^{in}\Delta t + \binom{2}{1}d_2^{in}\Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{1}d_{ni}^{in}\Delta t^{(ni-1)} \\ \binom{2}{2}d_2^{in}\Delta t + \binom{3}{2}d_3^{in}\Delta t^2 + \dots + \binom{ni}{2}d_{ni}^{in}\Delta t^{(ni-2)} \\ \vdots \\ \binom{ni}{ni}d_{ni}^{in}\Delta t^{(ni-ni)} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (2.26)$$

A fim apresentar as equações de uma forma mais compacta, as matrizes que formam o sistema em espaço de estados são remodeladas no seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} x_{(1,1)}^s \\ \mathbf{x}_{(ni,1)}^{in} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \\ 0 \end{bmatrix}_{(1,1)} \boldsymbol{\tau}_{(1,ni)} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{(ni,ni)}^{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1,1)}^s \\ \mathbf{x}_{(ni,1)}^{in} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} B_{(1,1)}^s \\ \mathbf{B}_{(ni,1)}^{in} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{u}_k, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{(1,ni)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(1,1)}^s \\ \mathbf{x}_{(ni,1)}^{in} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

em que x^s representa o estado artificial produzido pela forma incremental das entradas, $\mathbf{x}_{(ni,1)}^{in}$ são os estados integradores reais do sistema, e:

$$B^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} d_0 + \sum_{j=1}^{ni} \binom{j}{0} d_j^{in} \Delta t^j, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B}^{in} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{ni-1} \binom{j}{1} d_j^{in} \Delta t^j \\ \sum_{j=2}^{ni-2} \binom{j}{2} d_j^{in} \Delta t^j \\ \sum_{j=3}^{ni-3} \binom{j}{3} d_j^{in} \Delta t^j \\ \vdots \\ \binom{ni}{ni} d_{ni}^{in} \Delta t^j \end{bmatrix}_{(ni,1)}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{x}^{in} = \begin{bmatrix} x_1^{in} & x_2^{in} & \dots & x_{ni}^{in} \end{bmatrix}_{(ni,1)}^\top, \quad (2.31)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \Delta t & \Delta t^2 & \dots & \Delta t^{ni} \end{bmatrix}_{(1,ni)}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F}^{in} = \begin{bmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} \Delta t & \binom{3}{1} \Delta t^2 & \dots & \binom{ni}{1} \Delta t^{(ni-2)} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} \Delta t & \dots & \binom{ni}{2} \Delta t^{(ni-3)} \\ 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots & \binom{ni}{3} \Delta t^{(ni-4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{ni}{ni} \end{bmatrix}_{(ni,ni)}. \quad (2.33)$$

2.3 Modelo com polos integradores repetidos - Caso MIMO

Um sistema MIMO genérico, com nu entradas e ny saídas, que possui função de transferência que relaciona a saída i a uma entrada j com ni ($n \leq ni$) polos integradores repetidos, pode ser escrita como:

$$G_{i,j}(s) = \frac{b_{i,j,0} + b_{i,j,1}s + b_{i,j,2}s^2 + \cdots + b_{i,j,n}s^n}{s^{ni}}. \quad (2.34)$$

Seguindo o procedimento aplicado ao sistema SISO é possível construir a representação MIMO, todavia combinando o efeito de todas as entradas, a trajetória predita para a saída y_i é representada como uma função do tempo da seguinte forma:

$$[S_i(t)]_k = [x_i^s]_k + \sum_{j=1}^{nu} \sum_{l=1}^{ni} [x_{ijl}^{in}]_k t^l, \quad (2.35)$$

e $i = 1, 2, \dots, ny$; $j = 1, 2, \dots, nu$; $l = 1, 2, \dots, ni$.

Os estados são, então, definidos como:

$$[x_i^s]_{k+1} = [x_i^s]_k + \sum_{j=1}^{nu} \left[\sum_{l=1}^{ni} \binom{l}{0} [x_{ijl}^{in}]_k \Delta t^l + d_{ij} [\Delta u_j]_k + \sum_l \binom{l}{0} d_{ijl}^{in} \Delta t^l [\Delta u_j]_k \right], \quad (2.36)$$

$$[x_{lij}^{in}]_{k+1} = \sum_{f=l}^{ni} \binom{f}{l} \binom{f}{l} [x_{fij}^{in}]_k \Delta t^{(f-l)} + \sum_{f=1}^{ni} \binom{f}{i} d_{fij}^{in} \Delta t^{f-l} [\Delta u_j]_k. \quad (2.37)$$

Em notação matricial, seguindo a organização para o caso SISO [cf. Equações (2.27) e (2.28)], tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(ny,ny)} & \boldsymbol{\tau}_{(ny,nd)} \\ \mathbf{0}_{(nd,ny)} & \mathbf{F}_{(nd,nd)}^{in} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^{in} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}_k, \quad (2.38)$$

$$[\mathbf{y}]_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny,ny} & \mathbf{0}_{ny,nd} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_k. \quad (2.39)$$

Nesta conformaçaõ, os estados sãõ organizados de forma que os modos integradores artificiais inseridos pela resposta ao degrau seja a combinaçaõ de todas as entradas j que influenciam na saída i , portanto, o vetor de estados é:

$$[\mathbf{x}^s] = \begin{bmatrix} x_1^s & x_2^s & \dots & x_{ny}^s \end{bmatrix}^\top. \quad (2.40)$$

Por outro lado, os estados integradores reais do sistema precisam ser arrumados da forma mais conveniente possível, e escolheu-se uma conformaçaõ na qual $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{F}^{in} sejam compostas por matrizes diagonais preenchidas de acordo com o número de estados de cada função de transferênciã. Caso o sistema possua número de polos integradores diferentes para cada uma das entradas, substitui-se por zero os respectivos elementos das matrizes identidade que multiplicam o tempo de amostragem Δt . $[\mathbf{x}^{in}]$, $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{F}^{in} sãõ definidas, genericamente, como se segue:

$$[\mathbf{x}^{in}] = \begin{bmatrix} x_{1,1,1}^{in} & \dots & x_{1,1,nu}^{in} & \dots & x_{1,ny,nu}^{in} & \dots & x_{ni,ny,nu}^{in} \end{bmatrix}^\top, \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} \Delta t \mathbf{I}_{1,(ny,ny)} & \binom{2}{0} \Delta t^2 \mathbf{I}_{2,(ny,ny)} & \binom{3}{0} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3,(ny,ny)} & \dots & \Delta t^{ni} \mathbf{I}_{ni,(ny,ny)} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{F}^{in} = \begin{bmatrix} \binom{1}{1} \mathbf{I}_{(ne,ne)} & \binom{2}{1} \Delta t \mathbf{I}_{(ne,ne)} & \dots & \binom{ni}{1} \Delta t^{(ni-1)} \mathbf{I}_{(ne,ne)} \\ \mathbf{0}_{(ne,ne)} & \binom{2}{2} \mathbf{I}_{(ne,ne)} & \dots & \binom{ni}{2} \Delta t^{(ni-2)} \mathbf{I}_{(ne,ne)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{(ne,ne)} & \mathbf{0}_{(ne,ne)} & \dots & \binom{ni}{ni} \mathbf{I}_{(ne,ne)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(nd,nd)}, \quad (2.43)$$

em que: $ne = nu \cdot ny$ e $nd = nu \cdot ny \cdot ni$,

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{1,1}^s & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{1,2}^s & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{1,nu}^s \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{2,1}^s & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{2,2}^s & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{2,nu}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{ny,1}^s & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{ny,2}^s & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_{ny,nu}^s \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

em que: $i = 1, 2, \dots, ny$; $j = 1, 2, \dots, nu$; $l = 1, 2, \dots, ni$, e

$$B_{i,j}^s = d_{i,j}^s + \sum_{l=1}^{ni} d_{i,j,l}^{in} \Delta t^l, \quad (2.45)$$

$$\Delta \mathbf{u}_k = \left[\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \dots \quad \Delta u_{nu} \right]_k^\top, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{B}^{in} = \begin{bmatrix}
D_{1,1,1}^{in} & 0 & 0 & 0 \\
0 & D_{1,1,2}^{in} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & D_{1,1,nu}^{in} \\
D_{1,2,1}^{in} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & D_{1,2,2}^{in} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & D_{1,2,nu}^{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
D_{1,ny,1}^{in} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & D_{1,ny,2}^{in} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & D_{1,ny,nu}^{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
D_{2,1,1}^{in} & 0 & 0 & 0 \\
0 & D_{2,1,2}^{in} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & D_{2,ny,nu}^{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
D_{ni,ny,1}^{in} & 0 & 0 & 0 \\
0 & D_{ni,ny,2}^{in} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & D_{ni,ny,nu}^{in}
\end{bmatrix}, \tag{2.47}$$

$$D_{l,i,j}^{in} = \sum_{f=i}^{ni} \binom{f}{l} d_{f,i,j}^{in} \Delta t^{f-l}. \tag{2.48}$$

A matriz que relaciona os estados $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s & \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_k^\top$ com as saídas do sistemas $[\mathbf{y}]_k$ é:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny,ny} & \mathbf{0}_{ny,nd} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

2.4 Modelo para sistemas com polos estáveis distintos e integradores repetidos

Considerando uma função de transferência que possua nst polos estáveis e ni polos integradores repetidos, semelhante à Equação (2.2), o modelo será a aglutinação do apresentado na subseção (2.3) e do proposto por Odloak (2004), portanto o modelo final será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{st} \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} & \tau \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^{st} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^{in} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{st} \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^{st} \\ \mathbf{B}^{in} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}_k, \quad (2.50)$$

$$[\mathbf{y}]_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \Psi^{st} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^{st} \\ \mathbf{x}^{in} \end{bmatrix}_k. \quad (2.51)$$

Com exceção de \mathbf{F}^{st} , Ψ^{st} e \mathbf{B}^{st} , que são apresentadas a seguir, as matrizes que compõem o sistema de equação são idênticas às definidas nas seções predecessoras deste mesmo capítulo.

$$\mathbf{F}_{(nst,nst)}^{st} = \text{diag}[e^{-r_{1,1,1}t} \quad \dots \quad e^{-r_{1,1,nst}t} \quad \dots \quad e^{-r_{1,nu,1}t} \quad \dots \quad e^{-r_{ny,nu,1}t} \quad \dots \\ \dots \quad e^{-r_{ny,1,1}t} \quad \dots \quad e^{-r_{ny,1,nst}t} \quad \dots \quad e^{-r_{ny,nu,nst}t}],$$

$$\Psi^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(ny,ny \cdot nu \cdot nst)}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{B}^{st} = \text{diag} \left[d_{1,1,1}^{st} e^{-r_{1,1,1} \Delta t} \quad \cdots \quad d_{1,1,nst}^{st} e^{-r_{1,1,nst} \Delta t} \quad \cdots \quad d_{1,nu,1}^{st} e^{-r_{1,nu,1} \Delta t} \quad \cdots \right. \\ \left. \cdots \quad d_{ny,nu,1}^{st} e^{-r_{ny,nu,1} \Delta t} \quad \cdots \quad d_{ny,1,1}^{st} e^{-r_{ny,1,1} \Delta t} \right. \\ \left. \cdots \quad d_{ny,1,nst}^{st} e^{-r_{ny,1,nst} \Delta t} \quad \cdots \quad d_{ny,nu,nst}^{st} e^{-r_{ny,nu,nst} \Delta t} \right].$$

Observação 2. Para sintetizar um controlador IHMPC com estabilidade nominal, utilizando a construção do modelo em espaço de estados apresentado anteriormente, é necessário garantir que o modelo formulado é detectável e estabilizável. O teste adequado para essa comprovação é o de Popov-Belevitch-Hautus (HESPANHA, 2009) e resume-se a verificar que o posto das matrizes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}, [\lambda] \geq 0,$$

é igual ao número de estados $nx = ny + ni + nst$, o que confirma a propriedade requerida do modelo. No Capítulo (4) será apresentado esse teste para as matrizes de um dos sistemas utilizados para estudo de caso.

Capítulo 3

Formulação do controlador MPC nominalmente estável

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma formulação do controlador MPC com garantia da estabilidade nominal. Inicialmente será apresentada a extensão do controlador proposto por Cano e Odloak (2003) para sistemas com estados integradores repetidos. Em um segundo momento será apresentado o controlador para sistemas com polos estáveis distintos e integradores repetidos que estende o controlador de Carrapiço e Odloak (2005).

3.1 Controlador IHMPC para sistemas integradores repetidos

Com objetivo de construir uma lei de controle para sistemas integradores repetidos propõe-se uma função objetivo que considera o erro de predição ao longo do horizonte infinito e as ações de controle no formato incremental das entradas, em símbolos:

$$J_{1,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2. \quad (3.1)$$

As matrizes \mathbf{Q}_y e \mathbf{R} são positiva definidas no domínio real e ponderam a importância entre as variáveis controladas e o esforço de controle, respectivamente. A primeira parcela da equação (3.1) refere-se ao erro de predição da planta no horizonte

infinito, que neste caso é idêntica ao modelo, no instante $k + j$, representada por $y(k + j|k)$, e o valor de referência y_{sp} . O horizonte de controle, dentro do qual o controlador minimizará as ações de controle $\Delta \mathbf{u}_k$ e levará as saídas para sua referência, é representado por m .

Por ser inexequível esse somatório, é crucial limitar esta parcela. Para tal, considera-se o conjunto que compreende o somatório do primeiro instante até o horizonte de controle m e, o termo remanescente é limitado através da imposição de restrições. Portanto, escreve-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k + m + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2, \quad (3.2)$$

A partir do modelo, equações (2.38), (2.39) e (2.49), com $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \forall k \geq m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k + m + 1|k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k + m + 1|k) = \mathbf{x}^s(k + m + 1|k) \\ \mathbf{y}(k + m + 1|k) &= \mathbf{x}^s(k + m|k) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}^{in}(k + m|k) \\ \mathbf{y}(k + m + 2|k) &= \mathbf{x}^s(k + m + 2|k) \\ &= \mathbf{x}^s(k + m + 1|k) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}^{in}(k + m + 1|k) \\ &= \mathbf{x}^s(k + m|k) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}^{in}(k + m|k) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{in}\mathbf{x}^{in}(k + m|k) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(k + m + j|k) &= \mathbf{x}^s(k + m|k) + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Gamma}_{(j-1)}\mathbf{x}^{in}(k + m|k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que:

$$\boldsymbol{\Gamma}_j = \sum_{i=0}^j (\mathbf{F}^{in})^i.$$

Substituindo (3.3) em (3.2):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k + j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{x}^s(k + m|k) + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Gamma}_j\mathbf{x}^{in}(k + m|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Portanto, limita-se o custo infinito de (3.1) através da imposição, na Equação (3.4),

das seguintes restrições:

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x}^{in}(k+m|k) = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Portanto, a lei de controle é formulada através do seguinte problema de otimização:

Problema 1:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k} J_{1,k},$$

sujeito a (3.5), (3.6) e:

$$\Delta \mathbf{u}(k+j|k) \in \mathbb{U} \quad (3.7)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u}_{max} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max}, \quad j = 1 \dots m \\ \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k-1) + \sum_{i=0}^j \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \leq \mathbf{u}_{max}, \quad j = 1 \dots m \\ \Delta \mathbf{u}(k+j|k) = \mathbf{0}, \quad j \geq m \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

A garantia da estabilidade em malha fechada da lei de controle, produzida por meio da solução sequencial do **Problema 1**, é formalizada através do seguinte teorema:

Teorema 1. Seja um sistema com polos integradores repetidos, composto por um par de matrizes de estado (\mathbf{A}, \mathbf{B}) estabilizáveis. Seja também o horizonte de controle superior à soma de estados integradores $m \geq (\sum \sum n_{i,j})$. Suponha ainda que no instante de amostragem k , a solução do **Problema 1** seja viável. Então, as ações de controle obtidas através da solução em instantes de amostragem subsequentes do **Problema 1**, levarão o sistema assintoticamente para o estado estacionário desejado.

Prova 1. Rawlings e Muske (1993) apresenta o procedimento mais comum para

provar a convergência de controladores IHMPC. Inicia-se é por mostrar que há viabilidade recursiva do controlador. Para tanto, considera-se que a solução ótima no instante k é $\Delta \mathbf{u}_k^* = \left[\Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \right]^\top$.

Uma vez que a planta é nominal, ao inserir a ação de controle $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top$ e mover o sistema para o próximo instante de amostragem, os estados do sistema terão o mesmo valor que a predição do modelo, ou seja: $\mathbf{x}(k+1|k+1) = \mathbf{x}(k+1|k)$ e a solução herdada será:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \left[\Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \quad \mathbf{0}^\top \right]^\top. \quad (3.9)$$

É necessário mostrar que a solução herdada, Equação (3.9), satisfaz as restrições terminais das Equações (3.5) e (3.6) e produz uma solução viável no instante $k+1$. Para os estados integradores repetidos tem-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^{in}(k+m+1|k+1) &= (\mathbf{F}^{in})^m \mathbf{x}^{in}(k+1|k+1) + \mathbf{M} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= (\mathbf{F}^{in})^m [\mathbf{F}^{in} \mathbf{x}^{in}(k|k) + \mathbf{B}^{in} \Delta \mathbf{u}^*(k|k)] + \mathbf{M} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \\ &= \mathbf{F}^{in} [(\mathbf{F}^{in})^m \mathbf{x}^{in}(k|k) + \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}_k^*] \\ &= \mathbf{F}^{in} \mathbf{x}^{in}(k+m|k) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que: $\mathbf{M} = \left[(\mathbf{F}^{in})^{(m-1)} \mathbf{B}^{in} \quad (\mathbf{F}^{in})^{(m-2)} \mathbf{B}^{in} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{in} \mathbf{B}^{in} \quad \mathbf{B}^{in} \right]$.

Os estados integradores artificiais do sistema precisam de atenção especial, uma vez que há dependência dos estados integradores. Substituindo a solução herdada na restrição obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp} &= \mathbf{x}^s(k+m+1|k) - \mathbf{y}_{sp} \\ \tilde{\mathbf{x}}^s(k+m+1|k+1) - \mathbf{y}_{sp} &= \mathbf{x}^s(k+1|k) + \tau \Gamma_{(m-1)} \mathbf{x}^{in}(k+1|k) + (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{y}_{sp} \\ &= \underbrace{\mathbf{x}^s(k|k) + \tau \mathbf{x}^{in}(k|k) + \mathbf{B}^s \Delta \mathbf{u}_k}_{\mathbf{x}^s(k+1|k)} \\ &\quad + \tau \Gamma_{(m-1)} \underbrace{[\mathbf{F}^{in} \mathbf{x}^{in}(k|k) + \mathbf{B}^{in} \Delta \mathbf{u}_k]}_{\mathbf{x}^{in}(k+1|k)} \\ &\quad + (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{y}_{sp} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\mathbf{x}^s(k|k) + \tau \mathbf{\Gamma}_{(m-1)} \mathbf{x}^{in}(k|k) + (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \mathbf{u}_k^* - \mathbf{y}_{sp}}_{\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp} = \mathbf{0}} \\
&\quad + \tau \underbrace{[(\mathbf{F}^{in})^m \mathbf{x}^i(k|k) + \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}_k^*]}_{\mathbf{x}^{in}(k+m|k) = \mathbf{0}} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

em que:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^s & \mathbf{B}^s & \dots & \mathbf{B}^s & \mathbf{B}^s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_{m-2} & \mathbf{N}_{m-1} & \mathbf{N}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_j = \sum_{l=1}^m (\mathbf{F}^{in})^{m-(j+l)} (\mathbf{B}^{in})^l.$$

Por sua vez, a restrição (3.7) será, obviamente, satisfeita se o problema de otimização possuir graus de liberdade.

Isto prova a viabilidade recursiva do **Problema 1**, pois se houver solução viável no instante k , o problema continuará factível nos instantes subsequentes.

A segunda parte do procedimento de Rawlings e Muske (1993) é provar a convergência assintótica do controlador. Do modo pragmático, consiste em mostrar que a função objetivo do controlador é assintoticamente decrescente. Então, escreve-se o valor da função objetivo utilizando a solução ótima para o instante k como:

$$J_{1,k}^* = \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}^*(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.12)$$

que, por sua vez, ao utilizar a solução herdada e o modelo de predição nominal, torna-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{1,k+1} &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+1+j|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \tilde{\mathbf{u}}(k+1+j|k+1)\|_{\mathbf{R}}^2 \\
\tilde{J}_{1,k+1} &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+1+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}^*(k+1+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

ao subtrair (3.13) de (3.12) restarão os primeiros termos dos somatórios da Equação

(3.12), portanto:

$$J_{1,k}^* - \tilde{J}_{1,k+1} = (\mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k})^\top \mathbf{Q}_y (\mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k}) + \Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}^*(k|k), \quad (3.14)$$

uma vez que \mathbf{Q}_y e \mathbf{R} são matrizes positiva-definidas, os termos do lado direito da Equação (3.14) serão não negativos, logo $\tilde{J}_{1,k+1} \leq J_{1,k}^*$.

A solução utilizada do instante $k+1$ é uma solução viável herdada do instante anterior. Visto que o modelo é considerado perfeito (caso nominal), ao recalculas as ações de controle a solução ótima no instante $k+1$ coincidirá com a herdada. Logo, pode-se verificar que $J_{1,k+1}^* = \tilde{J}_{1,k+1}$, o que implica, portanto, que $J_{1,k+1}^* \leq J_{1,k}^*$. Como consequência direta, conclui-se que a função objetivo definida pelo **Problema 1** é não crescente, isto é, $J_{1,k}$ é convergente no sentido de Lyapunov para estabilidade em malha fechada. \square

3.2 Primeira Extensão do controlador IHMPC

De forma semelhante à vasta maioria de estratégias de controle MPC com garantia de estabilidade disponível na literatura, a função objetivo definida pelo **Problema 1** será decrescente se e somente se houver solução viável em um determinado instante de amostragem. Entretanto, o conflito entre as restrições (3.5), (3.6) e (3.7) do problema de otimização **Problema 1** pode inviabilizar a solução.

Uma forma convencional para mitigar este problema é utilizar horizontes de controle grandes, entretanto esta medida diminui o desempenho do controlador, bem como aumenta o custo computacional (MUSKE; RAWLINGS, 1993; RODRIGUES; ODLOAK, 2003). Outro caminho para sobrepujar estes problemas de viabilidade e aumentar o domínio de atração do controlador, preservando as propriedades estabilizantes, é incluir uma série de variáveis de decisão adicionais ao problema de otimização (CANO; ODLOAK, 2003; GARRIGA; SOROUSH, 2010; MARTINS; ODLOAK, 2016; GONZÁLEZ; ODLOAK, 2009).

As variáveis de folga estão relacionadas com a predição do erro de regime da saída do sistema. Elas são, obrigatoriamente, ponderadas através de uma matriz de supressão \mathbf{S}_y e o produto resultante é diretamente adicionado ao valor da função objetivo. Essa é uma abordagem suficiente para limitar o uso irrestrito dessas va-

riáveis e tornar inevitável ao otimizador minimizar seu uso. Portanto, para valores adequados da matriz \mathbf{S}_y e um estado estacionário alcançável, o otimizador levará as variáveis para zero.

Nesse contexto, a função objetivo torna-se:

$$J_{2,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2. \quad (3.15)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no **Problema 1** para escrever os estados no fim do horizonte de controle e separar os termos, estabelece-se o seguinte problema de otimização:

Problema 2:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\delta}_{y,k}} J_{2,k},$$

sujeito à (3.6), (3.7), (3.8) e :

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

A estabilidade da lei de controle proposta pelo **Problema 2** é apresentada através do seguinte teorema:

Teorema 2. Seja um sistema com polos integradores repetidos, composto por um par de matrizes de estado (\mathbf{A}, \mathbf{B}) estabilizáveis. Se, no instante de amostragem k , há solução viável para o **Problema 2**, as ações de controle obtidas através da solução em instantes de amostragem sucessivos do **Problema 2**, levará o sistema assintoticamente para o estado estacionário desejado.

Prova 2. Utilizando o mesmo procedimento adotado na prova do **Problema 1**. Então, seja a solução ótima no instante k é:

$$\Delta \mathbf{u}_k^* = \left[\Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \right]^\top \text{ e } \boldsymbol{\delta}_{y,k}^*.$$

Ao inserir a ação de controle $\Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top$ e mover o sistema para o próximo

instante de amostragem a solução herdada será:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = \left[\Delta \mathbf{u}^*(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}^*(k+m-1|k)^\top \quad \mathbf{0}^\top \right]^\top, \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{y,k+1} = \boldsymbol{\delta}_{y,k}^*. \quad (3.17)$$

A solução herdada, Equação (3.17), também satisfaz as restrições terminais das Equações (3.16) e (3.6) e produz uma solução viável no instante $k+1$. A convergência assintótica também é direta, uma vez que a função objetivo com a solução ótima é:

$$\begin{aligned} J_{2,k}^* &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k}^*\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}^*(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}^*\|_{\mathbf{S}_y}^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

com a solução herdada (3.17), o novo valor da função objetivo é:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{2,k+1} &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+1+j|k+1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{y,k+1}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \tilde{\mathbf{u}}(k+1+j|k+1)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{y,k+1}\|_{\mathbf{S}_y}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Subtraindo (3.19) de (3.18) restará:

$$\begin{aligned} J_{2,k}^* - \tilde{J}_{2,k+1} &= (\mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k}^*)^\top \mathbf{Q}_y (\mathbf{y}(k+1|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k}^*) \\ &\quad + \Delta \mathbf{u}^*(k|k)^\top \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}^*(k|k), \end{aligned} \quad (3.20)$$

portanto, desde que \mathbf{Q}_y e \mathbf{R} sejam matrizes positiva definidas, os termos do lado direito da Equação (3.20) será positivo, logo $\tilde{J}_{1,k+1} \leq J_{1,k}^*$. Como consequência direta, a solução ótima no instante $k+1$ produzirá $J_{1,k+1}^* = \tilde{J}_{1,k+1}$, o que implica em $J_{1,k+1}^* \leq J_{1,k}^*$ e, portanto, a função objetivo definida pelo **Problema 2** é assintoticamente decrescente caso o estado estacionário seja atingível, caso contrário convergirá para o mínimo que representa a menor distância possível entre o estado desejado e o alcançável, qual seja: $J_{2,\infty} = \boldsymbol{\delta}_{y,\infty}^\top \mathbf{S}_y \boldsymbol{\delta}_{y,\infty}$. \square

Observação 3. De forma complementar, é necessário mostrar que, se o estado desejado for alcançável e \mathbf{S}_y for escolhida apropriadamente, $J_{2,\infty}$ convergirá para zero ao fim do horizonte de controle.

Principia-se, portanto, considerando o valor da função objetivo que, ao fim do horizonte de controle, é:

$$J_{2,\infty} = \boldsymbol{\delta}_{y,\infty}^\top \mathbf{S}_y \boldsymbol{\delta}_{y,\infty} \quad (3.21)$$

Por sua vez, as restrições (3.6) e (3.16), no mesmo instante, podem ser escritas como:

$$\mathbf{x}^s(\infty) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,\infty} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{x}^{in}(\infty) = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Resolvendo o Problema 2 novamente após as condições anteriores, a solução de controle resultante é representada por $\Delta \mathbf{u}_\infty$ e irá satisfazer as restrições (3.6) e (3.16) que, em conjunto com o modelo do sistema, equivale a:

$$\mathbf{x}^s(\infty) + (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \mathbf{u}_\infty - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

$$(\mathbf{F}^{in})^m \mathbf{x}^{in}(\infty) + \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

A partir de (3.22) obtém-se $\mathbf{x}^s(\infty) - \mathbf{y}_{sp,k} = \boldsymbol{\delta}_{y,\infty}$ que, ao substituir em (3.24), produz:

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\infty} + (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \mathbf{u}_\infty - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

A fim de simplificar a análise, considera-se também $\Delta \mathbf{u}$ irrestrito, de modo que seja possível escolher $\Delta \mathbf{u}_\infty$ para que as ações de controle levem ao estado estacionário desejado. Como consequência direta $\boldsymbol{\delta}'_{y,\infty} = \mathbf{0}$, logo:

$$\boldsymbol{\delta}_{y,\infty} = (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \Delta \mathbf{u}_\infty. \quad (3.27)$$

Substituindo esse resultado em (3.21) obtém-se:

$$J_{2,\infty} = \Delta \mathbf{u}_\infty^\top [(\tau \mathbf{N} + \mathbf{P})^\top \mathbf{S}_y (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P})] \Delta \mathbf{u}_\infty. \quad (3.28)$$

Concomitantemente, é necessário calcular o valor da função objetivo $J'_{2,\infty}$ equivalente

ao utilizar a solução proposta para o Problema (2). Para resumir a análise, considere-se que o novo horizonte de controle (m) será igual a 2. Nesse cenário, o valor da função objetivo correspondente a solução proposta do Problema (2) é dado por:

$$\begin{aligned}
J'_{2,\infty} &= \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{y}(\infty + j) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\
&\quad + \sum_{j=0}^{2-1} \|\Delta \mathbf{u}(\infty + j)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}\|_{\mathbf{S}_y}^2,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
J'_{2,\infty} &= [\mathbf{y}(\infty + 1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}]^\top \mathbf{Q}_y [\mathbf{y}(\infty + 1) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}] \\
&\quad + [\mathbf{y}(\infty + 2) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}]^\top \mathbf{Q}_y [\mathbf{y}(\infty + 2) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}] \\
&\quad + [\Delta \mathbf{u}(\infty)]^\top \mathbf{R} [\Delta \mathbf{u}(\infty)] \\
&\quad + [\Delta \mathbf{u}(\infty + 1)]^\top \mathbf{R} [\Delta \mathbf{u}(\infty + 1)] + \|\boldsymbol{\delta}'_{y,\infty}\|_{\mathbf{S}_y}^2,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

pela Equação (3.27), $\boldsymbol{\delta}'_{y,\infty} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
J'_{2,\infty} &= [\mathbf{y}(\infty + 1) - \mathbf{y}_{sp,k}]^\top \mathbf{Q}_y [\mathbf{y}(\infty + 1) - \mathbf{y}_{sp,k}] \\
&\quad + [\mathbf{y}(\infty + 2) - \mathbf{y}_{sp,k}]^\top \mathbf{Q}_y [\mathbf{y}(\infty + 2) - \mathbf{y}_{sp,k}] \\
&\quad + [\Delta \mathbf{u}(\infty)]^\top \mathbf{R} [\Delta \mathbf{u}(\infty)] \\
&\quad + [\Delta \mathbf{u}(\infty + 1)]^\top \mathbf{R} [\Delta \mathbf{u}(\infty + 1)]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

considerando $\Delta \mathbf{u}_\infty = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(\infty) & \Delta \mathbf{u}(\infty + 1) \end{bmatrix}^\top$, é possível escrever as saídas (\mathbf{y}) em função dos estados ($\mathbf{x}^s(\infty)$ e $\mathbf{x}^{in}(\infty)$) e evidenciar $\Delta \mathbf{u}_\infty$, tal qual a Equação (3.28).

Portanto, utilizando o modelo de predição tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(\infty + 1) &= \mathbf{x}^s(\infty) + \begin{bmatrix} (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\infty \\
\mathbf{y}(\infty + 2) &= \mathbf{x}^s(\infty) + \begin{bmatrix} \tau \mathbf{B}^{in} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\infty + \begin{bmatrix} (\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) & \mathbf{B}^s \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_\infty,
\end{aligned}$$

substituindo,

$$\begin{aligned}
J'_{2,\infty} &= [\mathbf{x}^s(\infty) + [(\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}] \Delta \mathbf{u}_\infty - \mathbf{y}_{sp,k}]^\top \mathbf{Q}_y [\mathbf{x}^s(\infty) + [(\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}] \Delta \mathbf{u}_\infty - \mathbf{y}_{sp,k}] \\
&\quad + [\mathbf{x}^s(\infty) + [\tau \mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}] \Delta \mathbf{u}_\infty + [(\tau \mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s] \Delta \mathbf{u}_\infty - \mathbf{y}_{sp,k}]^\top \mathbf{Q}_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{x}^s(\infty) + [\boldsymbol{\tau}\mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty + [(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty - \mathbf{y}_{sp,k}] \\
& + [\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty]^\top \bar{\mathbf{R}}[\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty],
\end{aligned} \tag{3.32}$$

uma vez que $\boldsymbol{\delta}'_{y,\infty} = \mathbf{0}$, isola-se $\mathbf{y}_{sp,k}$ da Equação (3.24) e obtém-se: $\mathbf{y}_{sp,k} = \mathbf{x}^s(\infty) + (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty$. Substituindo na expressão anterior conclui-se que:

$$\begin{aligned}
J'_{2,\infty} &= ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty)^\top \mathbf{Q}_y ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty) \\
&+ ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty + [\boldsymbol{\tau}\mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty)^\top \mathbf{Q}_y \\
&\quad ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty + [\boldsymbol{\tau}\mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty) \\
&+ (\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty)^\top \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

que pode ser reescrita como:

$$J'_{2,\infty} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty^\top [\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \bar{\mathbf{R}}]\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_\infty, \tag{3.34}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 &= ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}] - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}))^\top \mathbf{Q}_y ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{0}] - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})) \\
\mathbf{G}_2 &= ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s] + [\boldsymbol{\tau}\mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}] - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}))^\top \mathbf{Q}_y ([(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P}) \ \mathbf{B}^s] + [\boldsymbol{\tau}\mathbf{B}^{in} \ \mathbf{0}] - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})) \\
\bar{\mathbf{R}} &= \text{diag} \left(\underbrace{\mathbf{R} \ \dots \ \mathbf{R}}_m \right).
\end{aligned}$$

Portanto, se

$$[\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \bar{\mathbf{R}}] < [(\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})^\top \mathbf{S}_y (\boldsymbol{\tau}\mathbf{N} + \mathbf{P})], \tag{3.35}$$

a solução proposta para o Problema (2) resultará em um valor de função objetivo inferior a $J_{2,\infty}$, isto é, $J'_{2,\infty} < J_{2,\infty}$ e o estado estacionário em que $\boldsymbol{\delta}_{y,\infty} \neq \mathbf{0}$ não é o ótimo. Desta forma, satisfazer a condição (3.35) implica que as variáveis de folga $\boldsymbol{\delta}_{y,k}$ serão forçadas a convergir para zero.

3.3 Segunda Extensão do controlador IHMPC

As variáveis de folga apresentadas na seção (3.2) suavizam a restrição terminal referente à predição do controlador. Todavia, a restrição concernente aos estados integradores apresenta-se como um possível obstáculo para a viabilidade do problema de otimização. Nesse contexto, surge a necessidade de suavizar esta restrição e, através de um conjunto de variáveis semelhantes, ampliar o domínio de atração do controlador proposto.

Essa segunda extensão foi apresentada por Carrapiço (2004) para um controlador aplicável a sistemas com estados integradores. Martins e Odloak (2016) apresenta a mesma extensão para estados instáveis em malha aberta. Nesta seção será apresentada uma formulação com garantia de factibilidade do controlador para estados integradores repetidos. A principal modificação em relação às formulações anteriores, é a adequação do termo da função objetivo que inclui as variáveis de decisão para o caso de polos integradores repetidos, pois esta inclusão deve preservar as propriedades de uma função de Lyapunov.

É necessário destacar que, de modo semelhante à primeira extensão, são incluídos dois termos na função objetivo. O primeiro deles no termo da predição dos estados e o segundo adicionado diretamente na função objetivo na forma quadrática e ponderado por uma matriz de pesos.

O novo controlador possuirá a mesma estrutura do apresentado no **Problema 2**, porém serão adicionadas ni novas variáveis de decisão $\delta_{in,k}$. A função objetivo, sob a ótica dessa concepção, torna-se:

$$J_{3,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} - \tau \mathbf{\Gamma}_{(j-m)} \delta_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\delta_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \|\delta_{in,k}\|_{\mathbf{S}_{in}}^2. \quad (3.36)$$

As novas variáveis de decisão aumentam o conjunto de soluções iniciais viáveis e, isto é, o domínio de atração do controlador. Junto com elas, está a respectiva matriz positiva definida de supressão \mathbf{S}_{in} que irá ponderar o uso de tais variáveis. Todavia, para limitar o custo é necessário substituir a restrição da Equação (3.6)

por uma que contemple as variáveis de decisão, tal qual:

$$\mathbf{x}^{in}(k + m|k) - \boldsymbol{\delta}_{in,k} = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Introduz-se, portanto, o seguinte problema de otimização:

Problema 3:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\delta}_{y,k}, \boldsymbol{\delta}_{in,k}} J_{3,k},$$

sujeito a (3.7), (3.8), (3.16) e (3.37).

A formalização do Problema 3 é estabelecida através do seguinte teorema:

Teorema 3. Seja um sistema com polos integradores repetidos com um par de matrizes de estados estabilizáveis (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . A solução do **Problema 3** no instante k produz uma solução na qual as variáveis associadas aos estados integradores são zeradas. Então, as ações obtidas a partir da solução do **Problema 3** nos instantes de amostragem sucessivos, levam o sistema assintoticamente para a referência desejada (estado estacionário desejado), se este for realizável.

Prova 3. Uma vez que as restrições (3.7), (3.16) e (3.37) são satisfeitas e os estados integradores são zerados $\mathbf{x}^{in}(k + m|k) = \mathbf{0}$, as variáveis de folga referente a estes estados também são levadas a zero $\boldsymbol{\delta}_{in,k} = \mathbf{0}$. Sob essas condições, o **Problema 3** reduz-se ao **Problema 2** e, portanto, é monotonicamente estável. \square

Observação 4. Através do modelo, Equações (2.50) e (2.51), é possível verificar que o sistema não chegará à um estado estacionário se os estados integradores \mathbf{x}^{in} não forem iguais a zero. Até que \mathbf{x}^{in} e $\boldsymbol{\delta}_{in,k}$ sejam zerados, os estados integradores artificiais \mathbf{x}^s crescerão de modo ilimitado e, como consequência direta, a saída \mathbf{y}_k será ilimitada. Desde que a matriz \mathbf{S}_{in} seja positivo-definida, a convergência dos estados integradores e das variáveis de folga ($\mathbf{x}^{in}(\infty) = \boldsymbol{\delta}_{in,\infty}$) não dependerá do valor numérico adotado tal qual $\boldsymbol{\delta}_{y,k}$.

A adição das variáveis de folga para os estados integradores não interfere em $\boldsymbol{\delta}_{y,k}$, que continuará correspondendo ao erro de predição no estado estacionário. Entretanto, minimizar $J_{3,k}$ sujeito as restrições (3.16), (3.7) e (3.37) não produz uma lei de controle que força o custo a decrescer monotonicamente enquanto as

variáveis de folga não forem zeradas. O motivo principal é a impossibilidade de provar a viabilidade recursiva, uma vez que, a solução herdada $\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}$ (Equação (3.9)) e $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{in,k+1}$ pode não satisfazer (3.37).

A estratégia corrente consiste em construir um controlador em duas camadas de otimização. Para tanto, adiciona-se uma camada ao Problema (2) que fará a contração das variáveis de folga, e o problema de otimização resultante é:

Problema 4a:

$$\min_{\Delta\mathbf{u}_{a,k}, \boldsymbol{\delta}_{in,k}} \|\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{S}_{in}}^2$$

sujeito a (3.7) e:

$$\Delta\mathbf{u}_a(k+j|k) \in \mathbb{U}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{x}_a^{in}(k+m|k) - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{in,k} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

em que $\Delta\mathbf{u}_a = [\Delta\mathbf{u}_a^\top(k|k) \ \Delta\mathbf{u}_a^\top(k+1|k) \ \dots \ \Delta\mathbf{u}_a^\top(k+m-1|k)]^\top$.

Os estados são, então, impostos como restrição ao segundo problema de otimização que é resolvido no mesmo instante de amostragem e formalizado da seguinte forma:

Problema 4b:

$$\min_{\Delta\mathbf{u}_{b,k}, \boldsymbol{\delta}_{y,k}} J_{4,k}$$

sujeito a (3.16) e

$$\Delta\mathbf{u}_b(k+j|k) \in \mathbb{U}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{x}_b^{in}(k+m|k) = \mathbf{x}_a^{in}(k+m|k). \quad (3.41)$$

em que,

$$J_{4,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2. \quad (3.42)$$

Os Problemas 4a e 4b produzem uma lei de controle monotonicamente estável em malha fechada que é formalizado através do seguinte teorema:

Teorema 4. Seja um sistema com polos integradores repetidos com um par de matrizes de estados estabilizáveis (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . A solução, no instante k , dos **Problemas 4a - 4b** produz uma solução na qual as variáveis associadas aos estados integradores sejam zeradas. E, as ações obtidas nos instantes de amostragem sucessivos leva os estados integradores do sistema para zero e a saída para a referência desejada (estado estacionário desejado), se este for realizável, em um número finito de passos.

Prova 4. O Problema 4a possui solução trivial zero, visto que \mathbf{S}_{in} é positiva definida e, nessa condição, os estados integradores convergem, obrigatoriamente, para zero. Por sua vez, o Problema 4b é idêntico ao Problema 2 e, portanto, é assintoticamente decrescente. \square

3.4 Controlador IHMPC para sistemas estáveis e integradores repetidos

Esta seção irá apresentar a terceira expansão do controlador IHMPC para sistemas com estados estáveis distintos e integradores repetidos.

A função que considera a existência de estados estáveis e integradores repetidos é idêntica a do **Problema 3**:

$$J_{3,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_{(j-m)} \boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{S}_{in}}^2, \quad (3.43)$$

ao separar o termo de somatório infinito, e escrever os estados a partir do modelo proposto nas Equações (2.50) e (2.51), tem-se:

$$\mathbf{y}(k+m+1|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+m+1|k) = \mathbf{x}^s(k+m+1|k) + \boldsymbol{\Psi}^{st} \mathbf{x}^{st}(k+m+1|k)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+m+1|k) &= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \mathbf{\Psi}^{st} \mathbf{F}^{st} \mathbf{x}^{st}(k+m|k) + \boldsymbol{\tau} \mathbf{x}^{in}(k+m|k) \\
\mathbf{y}(k+m+2|k) &= \mathbf{x}^s(k+m+2|k) + \mathbf{x}^{st}(k+m+2|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m+1|k) + \mathbf{\Psi}^{st} \mathbf{F}^{st} \mathbf{x}^{st}(k+m+1|k) + \boldsymbol{\tau} \mathbf{x}^{in}(k+m+1|k) \\
&= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \mathbf{\Psi}^{st} (\mathbf{F}^{st})^2 \mathbf{x}^{st}(k+m|k) + \boldsymbol{\tau} \mathbf{x}^{in}(k+m|k) + \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{in} \mathbf{x}^{in}(k+m|k) \\
&\vdots \\
\mathbf{y}(k+m+j|k) &= \mathbf{x}^s(k+m|k) + \mathbf{\Psi}^{st} (\mathbf{F}^{st})^j \mathbf{x}^{st}(k+m|k) + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{x}^{in}(k+m|k).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Substituindo (3.44) em (3.43):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_{(j-m)} \boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \\
\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{x}^s(k+m|k) + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_j \mathbf{x}^{in}(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_j \boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 &+ \\
\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{\Psi}^{st} (\mathbf{F}^{st})^j \mathbf{x}^{st}(k+m|k)\|_{\mathbf{Q}_y}^2. &
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Portanto, limita-se o custo infinito de (3.43) através da imposição, na Equação (3.45), das restrições (3.37) e (3.16).

O termo referente aos estados estáveis na Equação (3.45), forma uma série convergente que possui valor limitado e é calculado através da solução da equação de Lyapunov para estes estados da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{\Psi}^{st} (\mathbf{F}^{st})^j \mathbf{x}^{st}(k+m|k)\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \|\mathbf{x}^{st}(k+m|k)\|_{\overline{\mathbf{Q}}_y}^2, \tag{3.46}$$

em que $\overline{\mathbf{Q}}_y$ é a matriz de peso terminal obtida pela solução da equação de Lyapunov do sistema, qual seja:

$$\overline{\mathbf{Q}}_y = (\mathbf{F}^{st})^\top (\mathbf{\Psi}^{st})^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{F}^{st} \mathbf{\Psi}^{st} + (\mathbf{F}^{st})^\top \overline{\mathbf{Q}}_y \mathbf{F}^{st}. \tag{3.47}$$

Portanto, a lei de controle resume-se a resolver o seguinte problema de otimização:

Problema 5:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{y,k}, \delta_{in,k}} J_{3,k}, \quad (3.48)$$

sujeito à (3.7), (3.8), (3.37) e (3.16).

A garantia da estabilidade em malha fechada da lei de controle produzida por meio da solução sequencial do **Problema 5** é formalizada através do seguinte teorema:

Teorema 5. Seja um sistema com estados estáveis distintos e integradores repetidos com um par de matrizes de estados estabilizáveis (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . A solução do **Problema 5** no instante k produz uma solução na qual as variáveis associadas aos estados integradores são zeradas. Então, as ações obtidas a partir da solução do **Problema 5** nos instantes de amostragem sucessivos, levam o sistema assintoticamente para a referência desejada (estado estacionário desejado), se este for realizável.

Prova 5. A prova do **Teorema 5** é a mesma apresentada para o **Teorema 3**, pois os estados estáveis são autolimitados e possui valor conhecido no fim do horizonte de controle. Uma vez que os estados integradores e suas respectivas variáveis de folga são zeradas, a função $J_{4,k}$ será assintoticamente decrescente. \square

Capítulo 4

Resultados de simulação dos controladores

Este capítulo destina-se a apresentar os resultados encontrados ao longo do desenvolvimento deste trabalho. É dividido em duas seções, a primeira apresenta os resultados referentes ao sistema Barra e Bola (APKARIAN JACOB; LÉVIS, 2011). A segunda seção, apresenta o sistema Prato e Bola (QUANSER, 2013) e suas respectivas aplicações. Em ambos os casos, o modelo nominal será construído a partir das funções de transferência linearizadas, e nos cenários de desassociação de modelo do controlador e modelo da planta, equações diferenciais ordinárias não lineares do sistema representarão a planta.

4.1 Sistema Barra e Bola

O sistema Barra e Bola, Figura (4.1), é um kit educacional utilizado para demonstração de controle em cascata. É composto por um servomotor ligado fisicamente a uma barra que equilibra uma esfera metálica. O objetivo do sistema é manipular a tensão aplicada ao motor para controlar o ângulo de inclinação da barra (relacionado ao ângulo de giro do servomotor) e, conseqüentemente, a posição da bola. Portanto, este é um sistema subatuado e a estrutura de controle indicada é a cascata.



Figura 4.1: Sistema Barra e Bola.

Fonte: Apkarian Jacob; Lévis (2011).

4.1.1 Modelagem

A modelagem do sistema consiste, inicialmente, em escrever as equações diferenciais que relacionam as forças que agem sobre o sistema, linearizar e aplicar a transformada de Laplace nas equações, de modo a obter as funções de transferência. Por fim, aplica-se o procedimento de construção das matrizes do espaço de estados proposto no Capítulo (2).

Modelo Barra e Bola

Na Figura (4.2) estão representadas as forças atuantes no sistema, considerando apenas a dimensão de movimento da esfera. Na Figura (4.2), α é o ângulo de

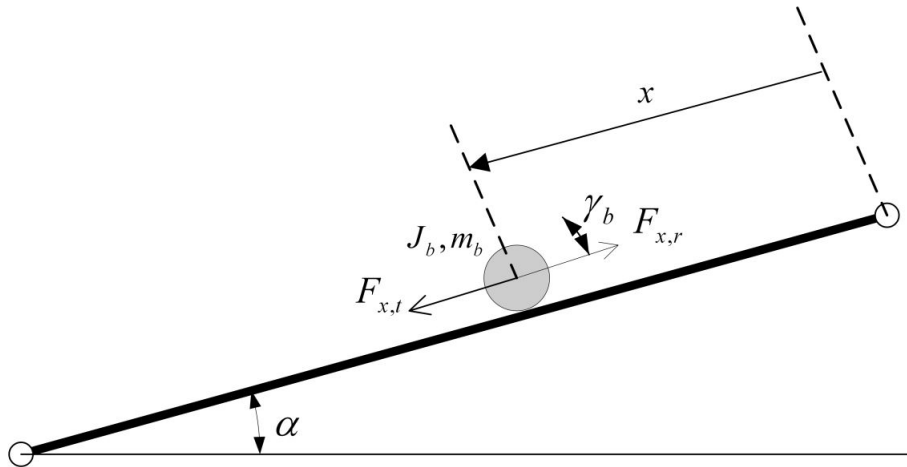


Figura 4.2: Diagrama de corpo livre do sistema barra e bola.

Fonte: Apkarian Jacob; Lévis (2011).

inclinação da barra, $F_{x,t}$ e $F_{x,r}$ são as componentes das forças gravitacional e inercial respectivamente. J_b é o momento de inércia da bola cuja massa é m_b . γ_b é o ângulo da bola em relação à barra e x é a posição em relação à extremidade direita da barra. A Lei de Newton da Conservação do Momento, aplicada na esfera, fornece

a resultante das forças que agem sobre a esfera, tal qual:

$$m_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = \sum F_i. \quad (4.1)$$

Desconsiderando as perdas por atrito e dissipação viscosa, restam apenas a força translacional gerada pela gravidade $F_{x,t}$ e a força de inércia da bola $F_{x,r}$, portanto:

$$m_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = F_{x,t} - F_{x,r}. \quad (4.2)$$

O diagrama de corpo livre completo, Figura (4.3), mostra a projeção de cada uma das forças e suas respectivas componentes em cada direção efetiva de movimento. Assim, as forças são escritas em função das variáveis importantes do sistema, quais sejam: Posição da bola $x(t)$ e Inclinação da barra $\alpha(t)$.

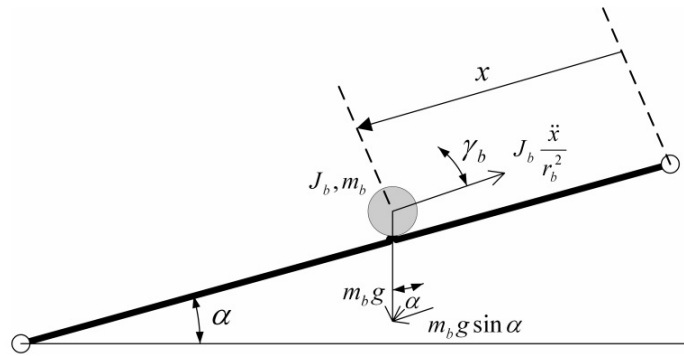


Figura 4.3: Diagrama de corpo livre completo.

Fonte: Apkarian Jacob; Lévis (2011).

Em termos matemáticos, escreve-se:

$$F_{x,t} = m_b \cdot \text{sen}(\alpha(t)). \quad (4.3)$$

A força $F_{x,r}$ é escrita considerando que existe um torque τ_b aplicado na superfície da esfera r_b , portanto:

$$F_{x,r} = \frac{\tau_b}{r_b}. \quad (4.4)$$

Por sua vez, o torque é escrito como produto da aceleração angular e do momento

de inércia da bola, logo:

$$\tau_b = J_b \left(\frac{d^2}{dt^2} \gamma_b(t) \right). \quad (4.5)$$

Após converter o deslocamento angular em linear usando $x(t) = \gamma_b(t)r_b$, obtém-se a expressão da força agindo na bola na direção x :

$$F_{x,r} = \frac{J_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right)}{r_b^2}. \quad (4.6)$$

Substituindo as Equações (4.3) (4.6) em (4.2) a expressão final torna-se:

$$m_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = m_b \cdot \text{sen}(\alpha(t)) - \frac{J_b \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right)}{r_b^2}, \quad (4.7)$$

resolvendo para a aceleração linear obtém-se:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_b \cdot g \cdot (\text{sen} \alpha(t)) \cdot r_b^2}{m_b \cdot r_b^2 + J_b}. \quad (4.8)$$

O ângulo da barra ($\alpha(t)$) não é uma variável medida, portanto relacioná-la com o ângulo do servo θ_l é a forma de utilizar um valor conhecido. Apkarian Jacob; Lévis (2011), utilizando semelhança de triângulos, fornece as seguintes relações:

$$\text{sen}(\alpha(t)) = \frac{h}{L_{beam}}, \quad (4.9)$$

$$\text{sen}(\theta_l(t)) = \frac{h}{r_{arm}}, \quad (4.10)$$

em que h é o deslocamento vertical da extremidade da barra, L_{beam} é o comprimento da barra e r_{arm} é a distância entre o eixo do motor e o encaixe da barra, de forma que

$$\text{sen}(\alpha(t)) = \frac{\text{sen}(\theta_l(t)) \cdot r_{arm}}{L_{beam}}, \quad (4.11)$$

ao combinar as equações (4.8) e (4.11) tem-se:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_b \cdot g \cdot \text{sen}(\theta_l(t)) \cdot r_{arm} r_b^2}{L_{beam} (m_b \cdot r_b^2 + J_b)}, \quad (4.12)$$

que de forma simplificada torna-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K_{bb} \cdot \text{sen}(\theta_l(t)), \quad (4.13)$$

em que $K_{bb} = \frac{m_b \cdot g \cdot r_{arm} \cdot r_b^2}{L_{beam} \cdot (m_b \cdot r_b^2 + J_b)}$ é o ganho da função de transferência entre o ângulo do servo e a posição da bola.

Para linearizar a Equação (4.13), é necessário estabelecer a hipótese de ângulos suficientemente pequenos, isto é $\text{sen}(\theta_l) \approx \theta_l$. Desta forma, função de transferência que relaciona o ângulo do motor com a posição da esfera na barra, é:

$$P_{bb} = \frac{X(s)}{\Theta_l(s)} = \frac{K_{bb}}{s^2}. \quad (4.14)$$

Servomotor

O servomotor é responsável por realizar os movimentos do sistema e transforma a tensão (V_m) aplicada ao motor em uma variação de ângulo θ_l . O diagrama da Figura (4.4) mostra os sentidos de movimento de cada engrenagem.

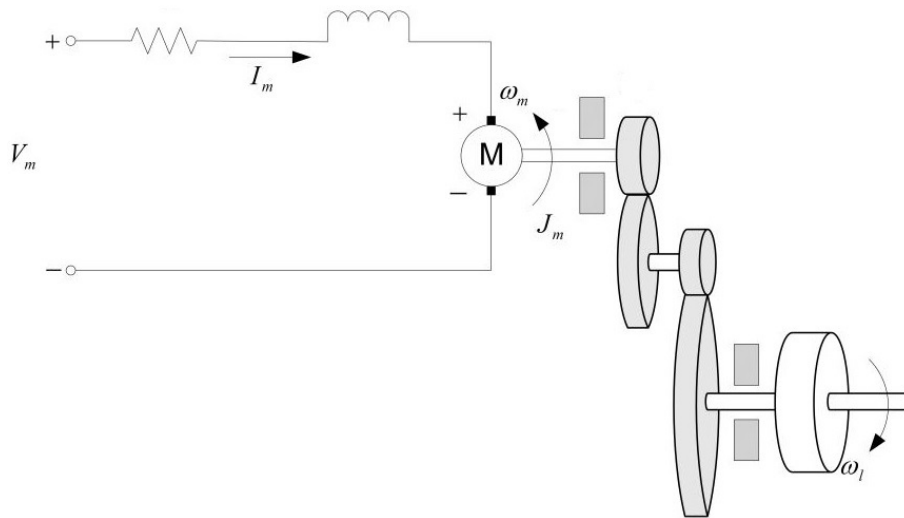


Figura 4.4: Diagrama de corpo livre do servomotor.

Fonte: Apkarian Jacob; Lévis (2011).

A partir do diagrama, Apkarian Jacob; Lévis (2011) mostra a dedução detalhada da Equação (4.15) que relaciona velocidade de rotação do ângulo do servomotor à tensão aplicada ao motor, desconsiderando, todavia, a indutância do circuito de

armadura.

$$J_{eq} \frac{d\omega_l(t)}{dt} + B_{eq,\nu} \cdot \omega_l(t) = A_m \cdot V_m(t), \quad (4.15)$$

em que, $\omega_l(t)$ é a velocidade de angular do servo, V_m tensão aplicada ao motor, Θ_l é o ângulo de inclinação do servo. As constantes J_{eq} , $B_{eq,\nu}$, A_m e K_{bb} são escritas em função das especificações do sistema e carregam informações tais quais momentos de inércia, gravidade, massa da bola, tamanho da haste, entre outros.

Para transformar as equações diferenciais (4.13) e (4.15) em funções de transferência, é necessário convertê-las para o domínio da frequência através da transformada de Laplace, porém, especificamente no caso da Equação (4.15), é necessário uma adequação. A cinemática vetorial fornece a relação entre a posição Θ_l e a velocidade angular ω_l da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \Theta_l(t) = \omega_l(t), \quad (4.16)$$

substituindo (4.16) em (4.15):

$$J_{eq} \frac{d^2 \Theta_l(t)}{dt^2} + B_{eq,\nu} \frac{d}{dt} \Theta_l(t) = A_m \cdot V_m(t), \quad (4.17)$$

aplicando a transformada de Laplace em (4.17) obtém-se a função de transferência que relaciona o ângulo Θ_l à tensão V_m :

$$P_s(s) = \frac{\Theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{s(\tau s + 1)}, \quad (4.18)$$

em que, K é a constante de proporcionalidade entre o ângulo e a tensão aplicada no servomotor.

As Equações (4.14) e (4.18) podem ser acopladas para formar uma função de transferência que relacione a posição da bola e a tensão aplicada ao servomotor. Portanto,

$$P(s) = \frac{X(s)}{V_m(s)} = \frac{K_{bb}K}{s^3(\tau s + 1)}. \quad (4.19)$$

Os valores das constantes do sistema, tais quais ganhos e constante de tempo serão apresentadas oportunamente nos estudos de caso.

4.1.2 Controladores IHMPC

Ao substituir um sistema de controle em cascata por uma abordagem de controle preditivo, duas configurações são possíveis. A primeira delas é substituir o controlador Mestre por um MPC. Neste esquema, o controlador MPC será responsável por estabelecer a referência para o controlador PID escravo. A segunda possibilidade é substituir toda a malha de controle por um único controlador MPC. Especificamente para este formato de controle, é necessário construir um modelo em espaço de estados que possua as duas saídas de forma explícita para que seja possível inserir um valor de referência para ambas.

Os controladores apresentados no Capítulo (3) aceitam restrições as necessárias, portanto a limitação é apenas a necessidade de um modelo que possua as duas saídas explícitas. A flexibilidade dos modelos em espaço de estados apresentado no Capítulo (2) permite a construção de tal modelo.

IHMPC em substituição ao controlador mestre

A malha de controle original, apresentada na Figura (4.5), possui dois controladores em cascata, o Mestre C_{bb} é um controlador PV - “*Proportional velocity*” e o Escravo C_s é um controlador PD - “*Proportional derivative*”. Através da medição da posição da bola $X(s)$, o controlador $C_{bb}(s)$ calcula a inclinação do servomotor $\theta_r(s)$ que levará a saída até a posição de referência $X_r(s)$. A malha interna, medirá o ângulo de inclinação do servomotor $\theta_l(s)$, calculará a tensão necessária $V_m(s)$ para levar o ângulo para sua referência $\theta_r(s)$. A malha de controle utilizando o controlador IHMPC será construída substituindo o controlador Mestre do diagrama de controle, pelo controlador IHMPC apresentado no **Problema 1** na Seção (3.1). A configuração final é apresentada na Figura (4.6) e o modelo de predição utilizado pelo controlador IHMPC será construído com base no procedimento apresentado no Capítulo (2) e, ao substituir as constantes de proporcionalidade do sistema nas Equações (2.27) e (2.28), considerando $\Delta t = 1s$ e $K_{bb} = 0,4183m/(s^2rad)$ tomará os seguintes valores:

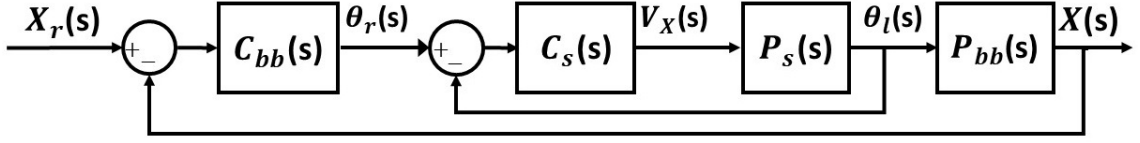


Figura 4.5: Diagrama de controle sistema Barra e Bola.

Fonte: Apkarian Jacob; Lévis (2011).

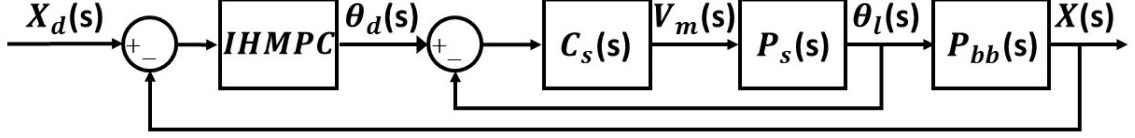


Figura 4.6: Diagrama de controle em cascata com IHMPC.

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{k+1} &= \mathbf{A}[\mathbf{x}]_k + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}_k, \\ [\mathbf{y}]_k &= \mathbf{C}[\mathbf{x}]_k, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\text{em que: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 \\ 0 & 1 & 2\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_0 + d_1^{in} \Delta t + d_2^{in} \Delta t^2 \\ d_1^{in} \Delta t + 2d_2^{in} \Delta t^2 \\ d_2^{in} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \boldsymbol{\tau} = [1 \ 1], \mathbf{F}^{in} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^s = [0.2092], \mathbf{B}^{in} = \begin{bmatrix} 0.4183 \\ 0.2092 \end{bmatrix}.$$

Observação 5. Aplicando o teste de Popov-Belevitch-Hautus, enunciado no Capítulo (2) utilizando $\lambda = 2$, para o modelo anterior tem-se:

$$[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \ \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0,2092 \\ 0 & -1 & 2 & 0,4183 \\ 0 & 0 & -1 & 0,2092 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

reduzindo à forma escalonada o posto será:

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,2551 \\ 0 & 1 & 0 & -0,8367 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2092 \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3, \quad (4.23)$$

portanto o sistema representado pelas matrizes de estado anteriores é controlável e estabilizável.

Ao utilizar a formulação primordial do controlador (Problema (1)), o cenário simulado não deve ser restritivo e atender aos requisitos do Teorema (1). As entradas são limitadas nos mesmos moldes do sistema físico, quais sejam: $\mathbf{u}_{\min} = [-45^\circ]$, $\mathbf{u}_{\max} = [45^\circ]$ e $\Delta \mathbf{u}_{\max} = [45^\circ]$. Um fator decisivo para a viabilidade do controlador é o horizonte de controle e o Teorema (1) o amarra ao número de estados integradores reais existentes no sistema, de forma que, o valor mínimo para o sistema Barra e Bola é $m = 2$, pois a função de transferência (4.14) possui dois polos integradores que, através da parametrização transforma-se em estados integradores e este é o valor assumido neste teste.

O sistema parte da origem onde todos os estados são zero e, conseqüentemente, a posição da bola na barra e também o ângulo de inclinação do servomotor. O teste inicia com uma mudança de referência para a saída do sistema igual a $y_{sp} = 0.1m$, portanto o controlador irá buscar minimizar essa distância. Na metade da simulação, a referência retorna à origem $y_{sp} = 0.0m$ e no instante 80s entra um distúrbio não medido do tipo impulso na entrada do sistema $d_u = 0.01^\circ$. Este distúrbio, apesar de ser do tipo impulso na entrada, produz efeito de degrau na saída do sistema devido a forma incremental das entradas. As matrizes de supressão foram definidas como: $\mathbf{Q} = 1 \cdot \mathbf{I}_{(ny,ny)}$, $\mathbf{R} = 1 \cdot \mathbf{I}_{(nu,nu)}$, $\mathbf{S}_y = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{(ny,ny)}$ e $\mathbf{S}_{in} = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{(ni,ni)}$. Esses parâmetros podem ser calculados com base em algum método *offline* (TRIERWEILER; FARINA, 2003) ou *on-line* (FONTES; MARTINS; KALID, 2015) para modificar o desempenho do controlador. Por não fazer parte do escopo do trabalho, esses parâmetros foram mantidos constantes em todas as análises como forma de reduzir eventuais interferências.

A Figura (4.7) mostra que, com a sintonia utilizada, o controlador é efetivo ao buscar a referência para a posição da bola na barra (saída do sistema). As restrições de movimento suaves permitem que o controlador utilize de forma mais agressiva a entrada, porém a entrada não pode ser saturada, pois, caso isso aconteça, a solução será inviável. A Figura (4.8) mostra o valor da entrada do sistema e o comportamento calculado pelo controlador, é possível observar que, apesar de agressivo, o controlador não produz uma solução que ative as restrições das entradas e o otimizador encontra uma solução viável.

O Teorema (1) enuncia que a função objetivo do controlador será monotonicamente decrescente ao longo de toda a solução do sistema e este comportamento é visto na Figura (4.9) imediatamente após as mudanças de referência ou entrada do distúrbio. É necessário salientar que, além de o controlador ser capaz de trazer o sistema à nova referência, também é eficiente ao atenuar distúrbios não medidos compensando na entrada o respectivo valor do distúrbio [cf. Figura (4.8)]. É necessário pontuar que o controlador fornece valores para a entrada distantes do máximo e mínimo admissível.

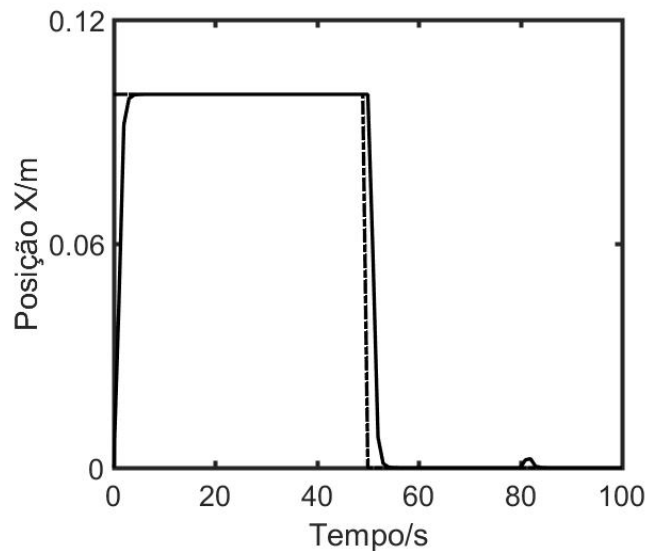


Figura 4.7: Saída do sistema Barra e Bola.

IHMPC convencional *versus* IHMPC estendido

A extensão do controlador IHMPC apresentado pelo **Problema 2** na Seção (3.3) proporciona, principalmente, a factibilidade mesmo em situações extremamente res-

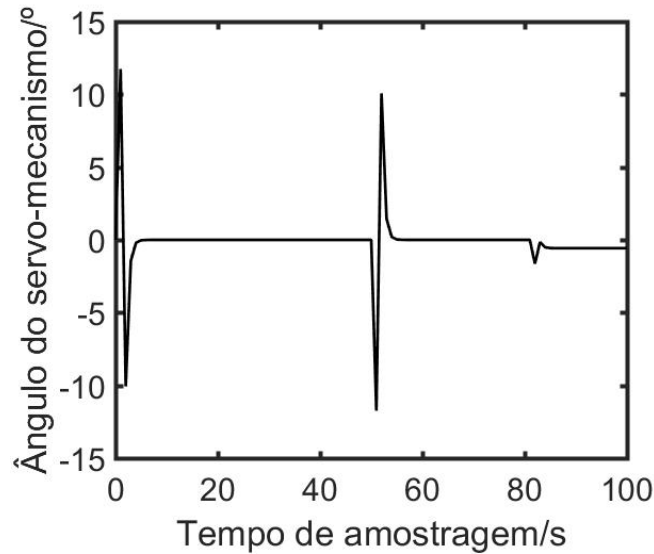


Figura 4.8: Entrada do sistema Barra e Bola.

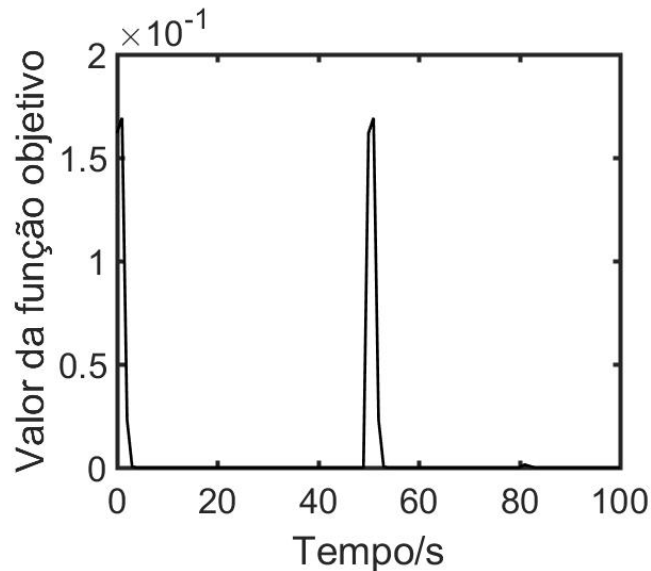


Figura 4.9: Função objetivo do controlador.

tritas tais quais pequenos horizontes de controle e grandes restrições de movimento. De modo secundário, aumenta a flexibilidade ao sintonizar o controlador.

Com finalidade de apresentar as modificações inseridas pela inserção das variáveis de folga, utiliza-se um cenário restritivo com os seguintes valores admissíveis para as ações de controle: $\mathbf{u}_{\min} = [-2,25^\circ]$, $\mathbf{u}_{\max} = [2,25^\circ]$ e $\Delta\mathbf{u}_{\max} = [0,01^\circ]$.

A presença de tal cenário restringe o domínio de atração do controlador e exige a ampliação do horizonte para tornar a solução do problema de otimização viável. Desta forma, a formulação padrão do controlador reivindica um horizonte de controle $m = 5$. Por outro lado, na formulação estendida o uso das variáveis de folga permite

o uso de um horizonte de controle pequeno, tal qual $m = 1$.

Sob essas circunstâncias, a Figura (4.10) compara as saídas do sistema. Vê-se, portanto, que o desempenho de ambos são equivalentes, mesmo ao utilizar horizontes de controle distintos. A Figura (4.11), por sua vez, mostra que as ações de controle são ligeiramente díspares. A primeira formulação, ao saturar a entrada, inviabiliza o problema de otimização, e exigirá que se amplie o horizonte de controle para tornar a solução factível. Por outro lado, na região mais restrita, o controlador estendido faz uso das variáveis de folga e satura o valor da entrada, porém, após o sistema responder, as ações são suavizadas e retornam à origem quando as saídas atingem o estado estacionário.

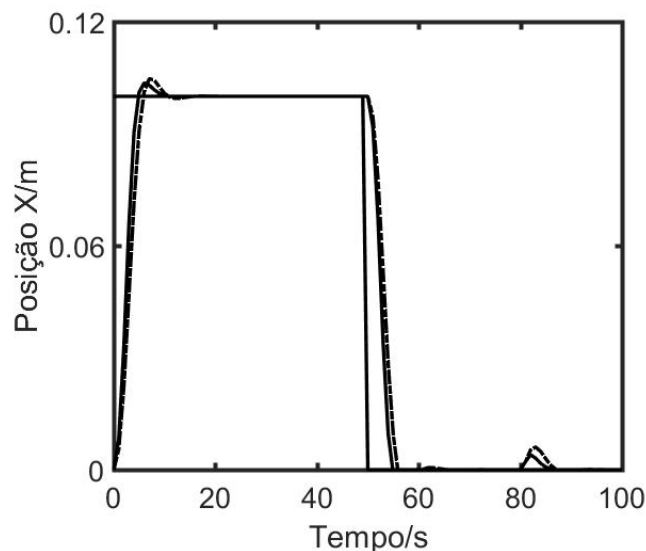


Figura 4.10: Saídas do sistema barra bola.

(—) Controlador convencional, (— · — ·) Controlador estendido.

IHMPC estendido substituindo a malha de controle completa

Outra possibilidade é substituir os controladores PID e PV por um único controlador MPC. Com esta abordagem, serão realimentadas as duas saídas do sistema (posição da bola e ângulo do servomotor) e o controlador irá calcular as ações de controle relacionadas à tensão do servomotor. Especificamente no caso do ângulo de inclinação do servomotor, o controlador precisará trabalhar na forma de um regulador, pois o estado estacionário do ângulo é obrigatoriamente a origem. De modo adicional, o sistema físico possui limitação no valor admissível para o ângulo de inclinação,

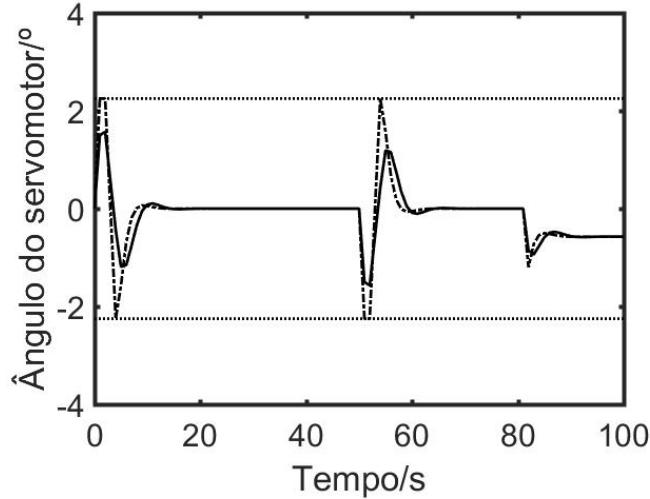


Figura 4.11: Entrada do sistema barra bola.

(—) Controlador convencional, (— · — ·) Controlador estendido, (···) Limites admissíveis.

portanto, é necessário incluir uma restrição nas saídas do controlador de forma que o valor calculado para o ângulo não extrapole os valores máximo e mínimo.

Observação 6. De forma equivalente a Rawlings e Muske (1993), o uso de restrições nas saídas (estados), dentro do horizonte de controle, não altera as propriedades estabilizantes do controlador proposto. É necessário ponderar, entretanto, que o valor da referência passada ao controlador, obrigatoriamente, deverá pertencer ao intervalo das restrições. Caso seja escolhido fora dos limites da restrição, o problema de otimização pode se tornar inviável. Portanto, essas restrições devem ser utilizadas, unicamente, a fim de evitar sobrevalores das variáveis de saída.

O modelo em espaço de estados será construído de forma que a posição da bola e o ângulo do servomotor no sistema Barra e Bola estejam explícitos e a matriz de funções de transferência que apresenta essa condição é:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{bb}K}{s^3(\tau s + 1)} \\ \frac{K}{s(\tau s + 1)} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

A primeira função de transferência é a Equação (4.19) que relaciona a posição da bola com a tensão aplicada ao motor. A segunda, é a Equação (4.18) que relaciona o ângulo com a tensão aplicada ao motor. As saídas serão, respectivamente, posição da bola na barra e ângulo de inclinação do servomotor.

O procedimento do Capítulo (2) aplicado na Equação (4.24) com $K = 1,5286rad/(sV)$, $K_{bb} = 0,4183m/(s^2rad)$ $\tau = 0,0248s$ e $\Delta t = 1s$ produz o modelo:

$$\mathbf{F}_{(2,2)}^{st} = \begin{bmatrix} 3,083 \times 10^{-18} & 0 \\ 0 & 3,083 \times 10^{-18} \end{bmatrix}, \mathbf{F}^{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Psi}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0,3043 \\ 1,5286 \\ 0,3118 \\ 0,1066 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} 0,0990 \\ 1,4907 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{st} = \begin{bmatrix} 3,0077 \times 10^{-23} \\ 1,1689 \times 10^{-19} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{in} = \begin{bmatrix} 0,3043 \\ 1,5286 \\ 0,3118 \\ 0,1066 \end{bmatrix}.$$

As equações diferenciais (4.13) e (4.17) são utilizadas em substituição à planta linear em substituição ao modelo em espaços de estados, com o objetivo de avaliar a robustez do controlador, em virtude do modelo desta natureza se aproximar de uma condição mais realista do sistema. Dentro desta conjuntura, o controlador IHMPC precisa gerenciar bem os graus de liberdade, uma vez que o sistema é subatuado (duas variáveis controladas e uma manipulada) e priorizar a saída mais importante. As equações do sistema, considerando a dinâmica do servomotor são resolvidas a cada instante de amostragem com a inserção das ações de controle calculadas pelo controlador proposto no **Problema 3**.

Os parâmetros de sintonia são utilizados para adequar o desempenho do sistema. Com a sintonia adequada, é possível obter uma resposta sem sobressinal e oscilações. Os parâmetros escolhidos no teste realizado foram: $m = 3$, $\mathbf{Q}_y = [1, 1]$, $\mathbf{R} = [1, 1]$, $\mathbf{S}_y = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{(ny,ny)}$ e $\mathbf{S}_{in} = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{(ni,ni)}$.

Ao substituir a malha de controle em cascata por um controlador IHMPC com uma planta não-linear é necessário adicionar um filtro para atualizar os estados antes da realimentação ao controlador. Então, o diagrama de controle resultante, contemplando todos esses elementos, é apresentado na Figura (4.12).

Atenção especial deve ser dada ainda no projeto desse filtro. Utilizou-se, portanto, um filtro estático seguindo a construção matemática apresentada por Jazwinski (2007), cujo ganho é calculado a partir das equações de estado do sistema e, nos estudos apresentados, prioriza os valores dos estados fornecidos pela planta como forma de inserir no controlador mais informações sobre o sistema não-linear. A matriz de ganhos de Kalman, representado no diagrama da Figura (4.12) como Kf ,

possui dimensão $\{ny \times (ns + nst + ni)\}$ e seus valores são:

$$\mathbf{Kf} = \begin{bmatrix} 0,9006 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,3638 \\ 0,0010 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0063 \\ 0,9518 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0773 \\ 0,3004 & 0,0000 \\ 0,0313 & 0,0000 \end{bmatrix}$$

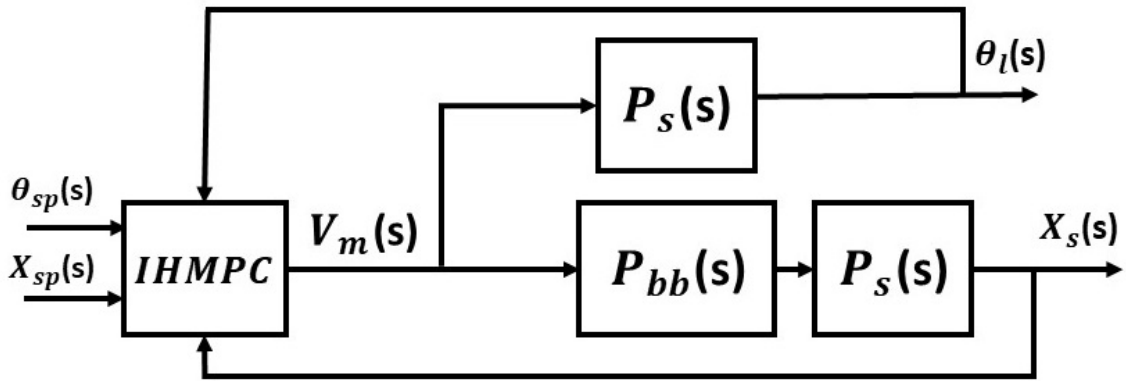


Figura 4.12: Diagrama de controle sistema Barra e Bola não linear com um único IHMPC.

O teste realizado compreende variação de estado estacionário partindo da origem para $y_{1,sp} = 0,1m$ e retornando após o instante de amostragem $k = 50s$ e, também, a inserção de um distúrbio não medido no instante $k = 80s$.

As restrições na saída do controlador foram determinadas de modo que a variável principal, posição (y_1), esteja entre os limites físicos do sistema $x_r = [-0,2 \ 0,2]m$. Por outro lado, para a segunda variável controlada do sistema, ângulo de inclinação da barra (y_2), estabeleceu-se uma restrição de $\theta_r = [-2,25 \ 2,25]^\circ$ além da referência constante na origem $y_{2,sp} = 0$. Essas imposições visam evitar duas situações: i) crescimento indefinido do ângulo; ii) sustentação da barra com ângulo de repouso fora da origem. As ações de controle foram limitadas em $\mathbf{u}_{\min} = -5V$, $\mathbf{u}_{\max} = 5V$ e $\Delta\mathbf{u}_{\max} = \pm 1V$.

No que se refere as saídas do sistema, a Figura (4.13) mostra que o controlador é efetivo ao buscar a nova referência para y_1 . Do mesmo modo, o ângulo de inclinação da barra, y_2 Figura (4.14), manteve-se dentro dos limites estabelecidos e permaneceu saturado de modo que a posição da bola fosse para o ponto adequado e retornou à origem após y_1 atingir a referência especificada. As ações de controle, Figura (4.15), mostram que os valores de tensão aplicados no sistema são distantes dos limites estabelecidos. O valor absoluto da tensão está diretamente relacionado com a velocidade de variação do ângulo do motor, desta forma, os valores calculados pelo controlador são ações de controle suaves, porém efetivas. Nas Figuras (4.13), (4.14) e (4.15) também é possível observar a resposta e as ações do controlador quando um distúrbio persistente não medido, $d = 0,01V$, é inserido no sistema no instante de amostragem $k = 80s$. Como seria esperado, a perturbação produz um deslocamento da variável manipulada de valor contrário ao do distúrbio inserido.

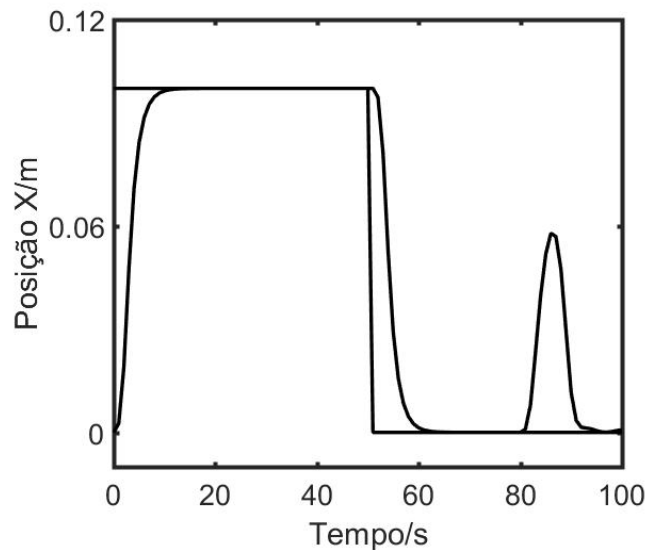


Figura 4.13: Posição da bola - 1ª Saída do sistema.

Um dos pré-requisitos para a garantia de estabilidade de um controlador é o comportamento da função objetivo ser monotonicamente decrescente, tal qual uma função de Lyapunov. Respeitadas as **Observações 1 e 2** da Seção (3.3), em conjunto com o uso da planta linear, o controlador proposto no **Problema P4** possuirá tal característica. Todavia, a comparação das Figuras (4.16) e (4.17) mostra que, conforme as variáveis de folga são zeradas, a função custo caminha monotonicamente para a origem mesmo com o uso de uma planta não linear.

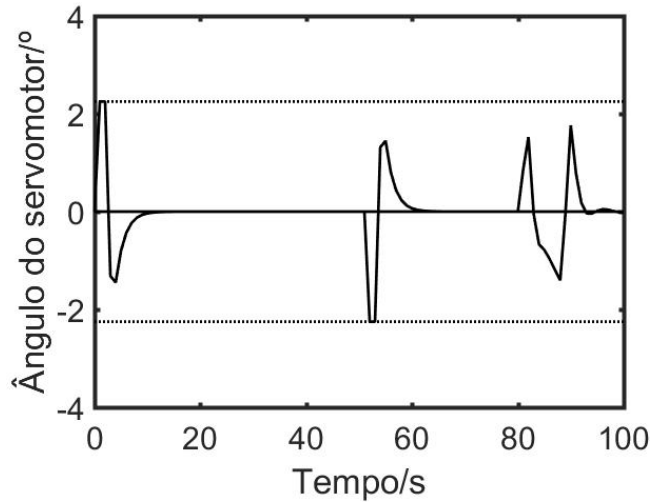


Figura 4.14: Ângulo do servomotor - 2° Saída do sistema.

(—) Ângulo do servomotor, (···) Limites admissíveis.

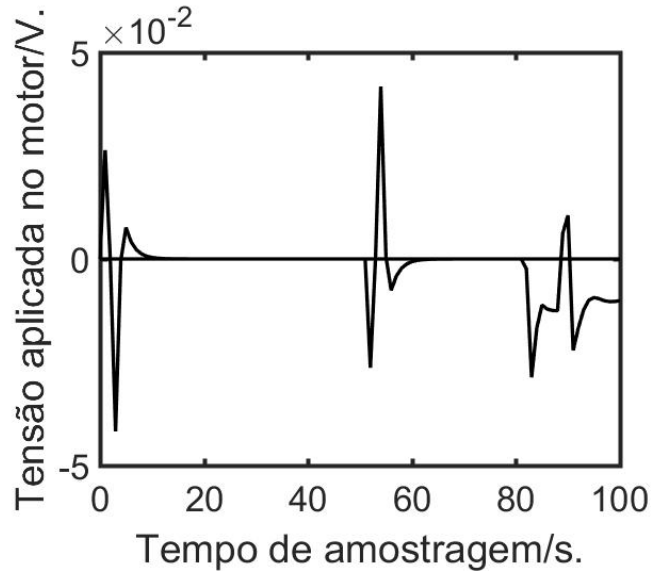


Figura 4.15: Entrada do sistema.

4.2 Sistema Prato e Bola

O objetivo do sistema Prato e Bola da Figura (4.18) é controlar a posição X-Y da bola manipulando a inclinação do prato através de dois servomotores. Possui modelagem matemática semelhante ao Barra e Bola, porém é necessário pontuar algumas diferenças. O diagrama de corpo livre da Figura (4.19) mostra uma das duas dimensões do sistema e, desenvolvendo a equação para este caso, chega-se à mesma Equação (4.13), que relaciona a posição da bola em uma barra. É importante notar, que a constante K_{bb} sofrerá alterações, uma vez que tanto os materiais quanto os referenciais utilizados são diferentes.

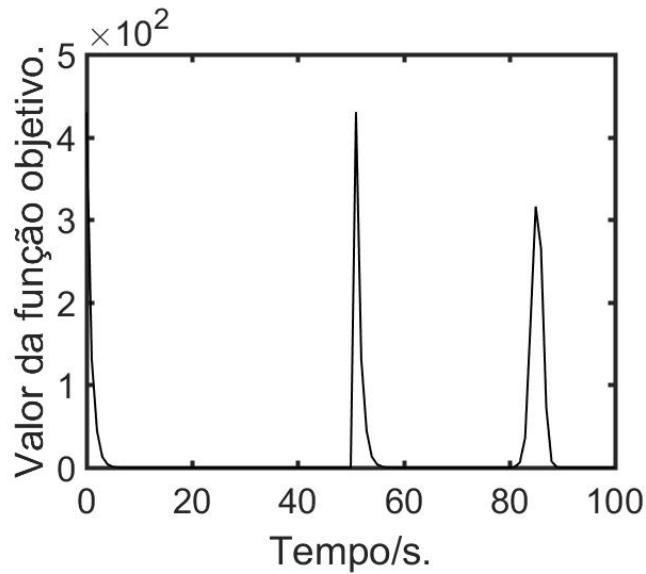


Figura 4.16: Função objetivo do Controlador.

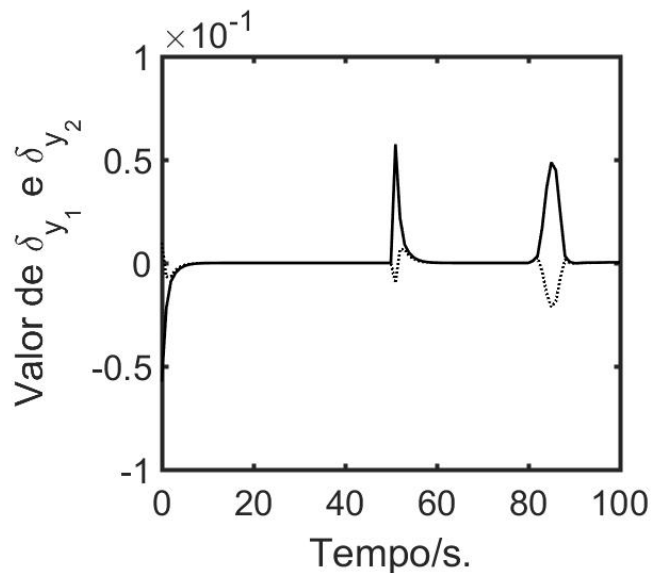


Figura 4.17: Variáveis de folga do Controlador.

O diagrama de controle deste sistema é mostrado na Figura (4.20) e trata-se de um sistema desacoplado, com dois servomotores e duas malhas de controle PID em cascata idênticas e em paralelo com controladores PID. Cada um dos servomotores será responsável por movimentar o prato em uma direção e a combinação dos movimentos produz as ações desejadas. A estrutura é idêntica a utilizada no sistema Barra e Bola no qual os controladores $C_{bb,X}(s)$ e $C_{bb,Y}(s)$ são os controladores mestres responsáveis por definir a referência para os ângulos de inclinação $\Theta_{d,X}(s)$ e $\Theta_{d,Y}(s)$. O controle da tensão aplicada ao servomotor é realizada pelos controladores $C_{s,X}(s)$ e $C_{s,Y}(s)$.

Neste cenário, um único controlador IHMPC é capaz de substituir ambos os controladores mestres, pois utilizando um modelo MIMO, cada uma das malhas de controle será uma dimensão do controlador IHMPC. A estrutura de controle final é apresentada na Figura (4.21).



Figura 4.18: Sistema prato e bola.

Fonte: (APKARIAN JACOB; LÉVIS, 2011).

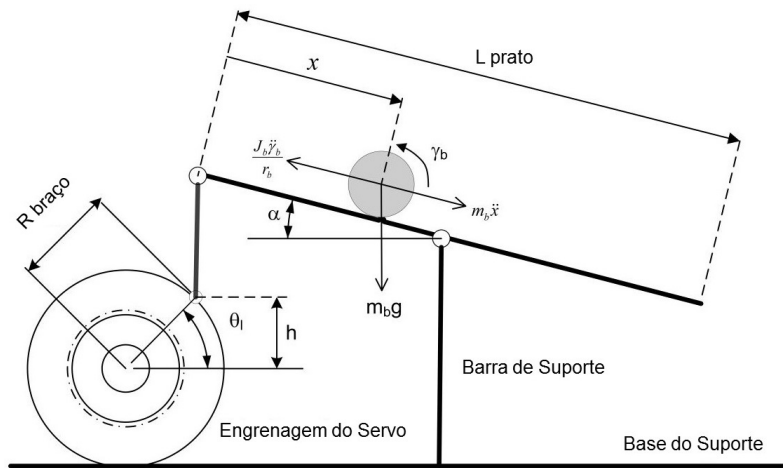


Figura 4.19: Diagrama de corpo livre para uma dimensão do Prato e Bola.

Fonte: (APKARIAN JACOB; LÉVIS, 2011).

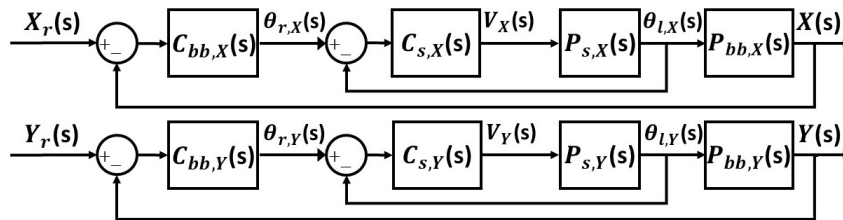


Figura 4.20: Diagrama de controle sistema Prato e Bola.

Fonte: (APKARIAN JACOB; LÉVIS, 2011).

O mesmo procedimento do Capítulo (2) aplicado ao um sistema MIMO composto pelas funções de transferência $P_{bb,X}(s) = P_{bb,Y}(s) = \frac{K_{bb}}{s^2}$ considerando, $K_{bb} = 1,0873m/(s^2rad)$ e $\Delta t = 1s$ resulta em:

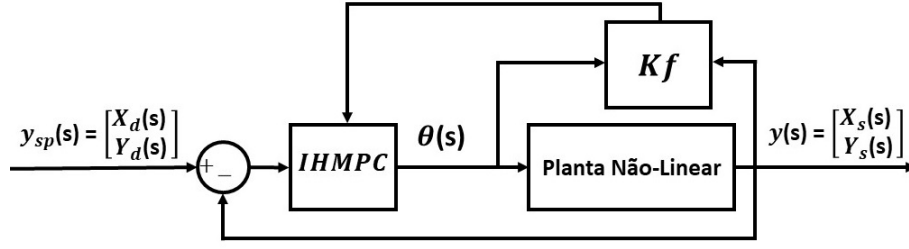


Figura 4.21: Diagrama de controle sistema Prato e Bola utilizando controlador IHMPC.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_{ny} & \boldsymbol{\tau} \\ 0 & \mathbf{F}^{in} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^{in} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} I_{ny} & \mathbf{0}_{nu.ni} \end{bmatrix},$$

$$\text{em que, } \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}^{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} 0,5437 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5437 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{in} = \begin{bmatrix} 1,0873 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0873 \\ 0,5437 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5437 \end{bmatrix}.$$

O vetor de estados desse sistema será composto por seis estados, dois deles são os integradores artificiais inseridos pela resposta ao degrau e estão relacionados às saídas do sistemas. Os outros quatro são os estados integradores reais do sistema.

Um sistema multivariado, tal qual o Prato e Bola, possui um apelo geométrico, e a relação entre as duas variáveis de saída pode ser interpretada como uma figura geométrica ou uma trajetória $T(X,Y)$. De modo sistemático os trabalhos direcionados ao controle de sistemas Prato e Bola utilizam uma trajetória como mecanismo de fornecer confirmações da efetividade dos controladores propostos (MORENO-ARMENDÁRIZ et al., 2010; WU; HIROGAKI; AOYAMA, 2012; LIN; HUANG, 2012; HO; RIZAL; CHU, 2013; ORAVEC; JADLOVSKA, 2015).

Seguindo a prática comum, será utilizada uma trajetória circular para avaliar o desempenho do controlador no sentido de factibilidade, presença de restrições de movimento apertadas, distúrbio do tipo impulso e desassociação entre a planta e o modelo de predição. Com este intuito, considera-se que a referência é uma trajetória circular variante no tempo de raio igual a 0.1m e partindo da origem.

As restrições foram fixadas em: $\mathbf{u}_{\min} = \begin{bmatrix} -2,5^\circ & -2,5^\circ \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} 2,5^\circ & 2,5^\circ \end{bmatrix}$ e $\Delta\mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} 0,01^\circ & 0,01^\circ \end{bmatrix}$. Adicionalmente, no instante $k=50s$, um distúrbio não medido do tipo impulso de magnitude $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0,5^\circ & 0,5^\circ \end{bmatrix}$ é inserido no sistema.

Neste caso serão comparados o desempenho dos controladores do **Problema 1** (controlador 1) e do **Problema 3** (controlador 2). O valor mínimo para o horizonte de controle que torna viável a solução do controlador do **Problema 1** é $m = 6$, enquanto que no segundo caso pode ser assumido $m = 1$. Por sua vez, os demais parâmetros de sintonia são: $\mathbf{Q} = 1 \cdot \mathbf{I}_{ny,ny}$, $\mathbf{R} = 1 \cdot \mathbf{I}_{nu,nu}$, $\mathbf{S}_y = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{ny,ny}$ e $\mathbf{S}_{in} = 10^5 \cdot \mathbf{I}_{ni,ni}$. Neste caso, a planta será assumida diferente do modelo de predição e será composta pelas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = K_{bb} \cdot \text{sen}(\Theta_{l,X}(t)) \quad (4.25)$$

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = K_{bb} \cdot \text{sen}(\Theta_{l,Y}(t)) \quad (4.26)$$

Em se tratando de um sistema desassociado do modelo utilizado para a predição, é fundamental o uso de um filtro para atualização dos estados, portanto a matriz de ganhos do filtro de Kalman, priorizando os estados fornecidos pela planta não-linear, é:

$$\mathbf{Kf} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}.$$

As trajetórias X-Y da malha fechada do sistema para ambos os controladores são mostradas na Figura (4.22). É possível observar que o comportamento do controlador 2 é mais agressivo e alcança a referência variante mais rápido que o controlador 1. A resposta mais lenta do controlador 1 já era esperada, pois o horizonte de controle necessário para tornar o problema viável é longo; por sua vez, o controlador 2, possui um desempenho razoável mesmo utilizando um horizonte de controle mínimo. Adicionalmente, é possível observar que ambos os controladores são capazes

de garantir um desempenho satisfatório mesmo na presença de um cenário próximo à realidade, tal qual a planta não-linear.

A factibilidade do controlador MPC proposto é alcançada através da inclusão das variáveis de folga no **Problema 3**. A Figura (4.23) mostra o comportamento das variáveis de folga relacionadas às saídas do sistema. Nota-se que como o controlador utiliza as variáveis de folga para atenuar as perturbações da malha fechada (referência variante no tempo ou atenuação de distúrbios). No início da perturbação o controlador utiliza as variáveis de folga e, quando o sistema aproxima-se da referência, elas sistematicamente convergem para zero.

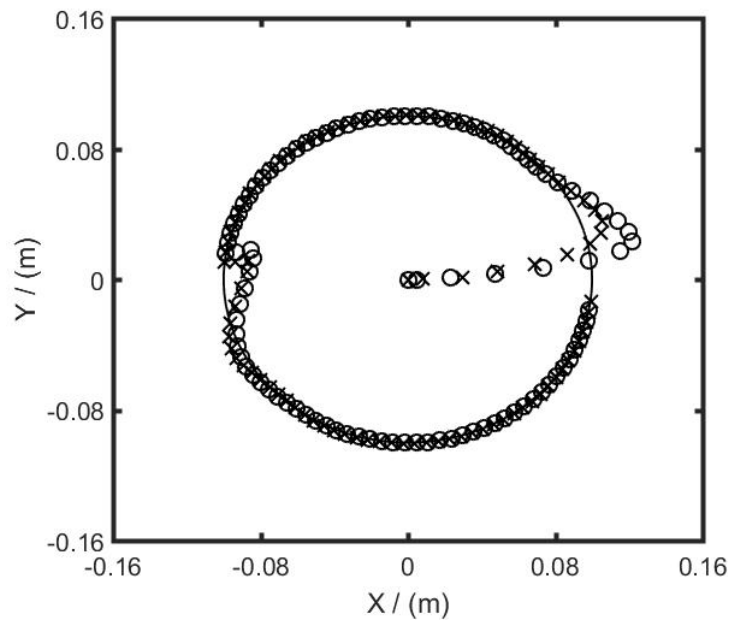


Figura 4.22: Diagrama X-Y com controlador IHMPC.

(o) Referência, (x) Trajetória.

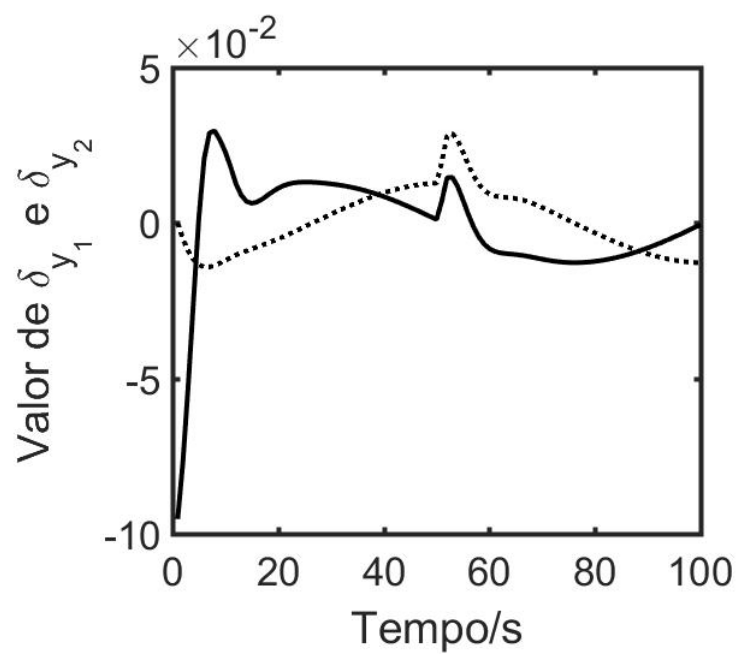


Figura 4.23: Variáveis de folga controlador IHMPC.

($\cdot \cdot \cdot$) Variável de folga de X, ($-$) Variável de folga de Y.

Capítulo 5

Conclusões e considerações finais

Este capítulo compreende as conclusões mais relevantes encontradas durante a construção da presente dissertação, pontuando-as e direcionando para o aprofundamento em estudos futuros.

5.1 Conclusões

Essa dissertação apresentou, principalmente, a síntese de um controlador MPC com garantia da estabilidade nominal para sistemas com polos integradores repetidos. De forma secundária, também é apresentado uma extensão do controlador proposto, de tal forma que abarque as características de sistemas constituído de polos estáveis. Do ponto de vista da aplicação em tempo real, o controlador proposto possui algumas vantagens quando comparado à abordagem convencional, a saber:

- Livre de erro de regime tanto para o caso servo quanto para atenuação de distúrbios. Considera um sistema em espaço de estados de ordem mínima com a entrada na forma incremental que é baseado na resposta ao degrau analítico do sistema;
- Problema de controle realizado em uma etapa de otimização que dispensa camada adicional para manipulação dos estados estacionários desejados;
- Estabilidade em malha fechada é garantida através da inserção de uma série de variáveis de folga nas restrições terminais, que ampliam o domínio de atração do controlador e tornam o problema de otimização sempre viável.

O controlador proposto mostrou-se efetivo para os mais variados cenários, quais sejam: caso servo, atenuação de distúrbios e desassociação entre o modelo e a planta (uso da planta não-linear).

Portanto, do ponto de vista da aplicação em tempo real, o controlador proposto pode ser considerado como uma opção atrativa e efetiva para controlar sistemas integradores com polos repetidos.

5.2 Trabalhos futuros

Durante o desenvolvimento da presente dissertação surgiram algumas lacunas que necessitam de estudos aprofundados e são deixadas aqui como sugestão para trabalhos futuros, as principais são:

- Aplicação dos controladores em tempo real, utilizando os sistemas mecânicos. A principal barreira a ser vencida neste intuito é a comunicação entre o otimizador e o sistema físico. De modo geral, os fabricantes fornecem *softwares* de comunicação e bibliotecas com os quais é possível aplicar controladores, predominantemente, do tipo PID. Ao utilizar um controlador MPC, o uso de um otimizador impede que a rota tradicional utilizando softwares comerciais, tais quais o Simulink®, seja utilizada, pois não possuem blocos ou algoritmos de otimização incorporados. A abordagem sugerida aqui é contornar o software do fabricante e acessar diretamente a placa de aquisição e modificar as entradas e obter as saídas;
- Construção dos modelos e das respectivas leis de controle que abarquem todas as dinâmicas dos sistemas (estáveis, instáveis, integradores e com tempos mortos), suas possíveis combinações e a possibilidade de repetição dos polos. Essa formalização disponibilizará uma abordagem de controle baseada na expressão analítica da resposta ao degrau o mais generalista possível e permitirá a construção de algoritmos generalizados para esses controladores. Em termos práticos, o controlador generalizado poderá ser aplicado em colunas de destilação, pois estas apresentam polos estáveis repetidos (MARTIN; ODLOAK; KASSAB, 2013);

- Um outro viés explorável é a utilização de controladores IHMPC em sistemas embarcados. A classe de IHMPC na qual se insere os propostos nesta dissertação, podem ser resolvidos como um problema quadrático (QP), em que as restrições terminais e as variáveis de folga são transferidas para dentro da função objetivo como forma de reduzir o número de restrições. Essas alterações reduzem o esforço computacional necessário para encontrar as soluções e permitem utilizar esses algoritmos de inteligência embarcada.

Referências

AFRAM, A.; JANABI-SHARIFI, F. Theory and applications of HVAC control systems - A review of model predictive control (MPC). *Building and Environment*, v. 72, p. 343–355, 2014. ISSN 03601323.

ALVAREZ, L. A.; FRANCISCHINELLI, E. M.; SANTORO, B. F.; ODLOAK, D. Stable Model Predictive Control for Integrating Systems with Optimizing Targets. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 20, p. 9141–9150, oct 2009. ISSN 0888-5885. Disponível em: <<http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie900400j>>.

APKARIAN JACOB; LÉVIS, M. G. H. *STUDENT WORKBOOK - Ball and Beam Experiment for MATLAB/Simulink Users*. Markham, Ontario: Quanser INC., 2011. 31 p.

BROSILOW, C.; JOSEPH, B. *Techniques of Model-based Control*. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. (Prentice-Hall international series in the physical and chemical engineering sciences). ISBN 9780130280787.

CANO, R. A. R.; ODLOAK, D. Robust model predictive control of integrating processes. *Journal of Process Control*, v. 13, n. 2, p. 101–114, mar 2003. ISSN 09591524.

CARRAPIÇO, O. L. *Controle Preditivo de Horizonte Infinito Para Processos Integradores Com Tempo Morto*. 102 p. Tese (Master Thesis) — Universidade de São Paulo, 2004.

CARRAPIÇO, O. L.; ODLOAK, D. A stable model predictive control for integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, v. 29, n. 5, p. 1089–1099, 2005. ISSN 00981354.

CERVANTES, J. M.; DÍAZ, R. V.; RIVERA, V. J. Implementación y control del sistema bola en placa. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, v. 4, n. 7, p. 18, 2017.

CHAGRA, W.; DEGACHI, H.; KSOURI, M. Nonlinear model predictive control based on Nelder Mead optimization method. *Nonlinear Dynamics*, Springer Netherlands, may 2017. ISSN 0924-090X.

CORRIPIO, A.; SMITH, C. *Princípios e prática do controle automático de processos*. [S.l.]: LTC, 2008. ISBN 9788521615859.

- DODDS, S.; VITTEK, J. Spacecraft attitude control using an induction motor actuated reaction wheel with sensorless forced dynamic drive. In: *IEE Colloquium on All Electric Aircraft*. [S.l.]: IEE, 1998. v. 1998, p. 9–9.
- FILHO, J. L.; FORTALEZ, E. L. F. Control of the Ball and Beam Using Kalman Filter - a Flatness Based Approach. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automação 2014*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 2601–2606.
- FONTES, R. M.; MARTINS, M. A. F.; KALID, R. A. Abordagem fuzzy para sintonia on-line de um MPC de horizonte infinito. In: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Natal: [s.n.], 2015.
- GARRIGA, J. L.; SOROUGH, M. Model predictive control tuning methods: A review. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 49, p. 3505–3515, 2010. ISSN 0888-5885. Disponível em: <<http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie900323c>>.
- GOH, T.; LI, Z.; CHEN, B.; LEE, T. H.; HUANG, T. Design and implementation of a hard disk drive servo system using robust and perfect tracking approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 9, n. 2, p. 221–233, mar 2001. ISSN 10636536.
- GONZÁLEZ, a. H.; ADAM, E. J.; MARCOVECCHIO, M. G.; ODLOAK, D. Application of an extended IHMPC to an unstable reactor system: Study of feasibility and performance. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 10, p. 1493–1503, 2011. ISSN 09591524.
- GONZÁLEZ, A. H.; ODLOAK, D. Enlarging the domain of attraction of stable MPC controllers, maintaining the output performance. *Automatica*, Elsevier Ltd, v. 45, n. 4, p. 1080–1085, 2009. ISSN 00051098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2008.11.015>>.
- HARA, N.; TAKAHASHI, M.; KONISHI, K. Experimental evaluation of model predictive control of ball and beam systems. *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, n. 4, p. 1130–1132, 2011. ISSN 0743-1619.
- HESPANHA, J. *Linear Systems Theory*. Princeton, New Jersey: Princeton Press, 2009. 280 p. ISSN 1098-6596. ISBN 9780691140216.
- HO, M.-T.; RIZAL, Y.; CHU, L.-M. Visual Servoing Tracking Control of a Ball and Plate System: Design, Implementation and Experimental Validation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, p. 1, 2013. ISSN 1729-8806.
- HUNG, B. M.; YOU, S. S.; KIM, H. S.; LIM, T. W. Embedded controller building for ball and beam system using optimal control synthesis. *Engineering Science and Technology*, v. 12, n. 6, p. 1460–1474, 2017.
- JAZWINSKI, A. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2007. (Dover Books on Electrical Engineering Series). ISBN 9780486462745.
- LIN, C. E.; HUANG, W. C. Dynamic ball and plate control verification on magnetic suspension platform using enforced fuzzy logic control. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, v. 40, n. 4, p. 259–281, 2012. ISSN 13835416.

- MARTIN, P. A.; ODLOAK, D.; KASSAB, F. Robust model predictive control of a pilot plant distillation column. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 21, n. 3, p. 231–241, 2013. ISSN 09670661. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.10.004>>.
- MARTINS, M. A. F. *Robust model predictive control of integrating processes and unstable time delay process*. 121 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- MARTINS, M. A. F.; ODLOAK, D. A robustly stabilizing model predictive control strategy of stable and unstable processes. *Automatica*, v. 67, p. 132–143, may 2016. ISSN 00051098.
- MAYNE, D. Q. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, Elsevier Ltd, v. 50, n. 12, p. 2967–2986, dec 2014. ISSN 00051098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.128><http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109814005160>>.
- MICHALSKA, H.; MAYNE, D. Robust receding horizon control of constrained non-linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 11, p. 1623–1633, 1993. ISSN 00189286. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/262032/>>.
- MORENO-ARMENDÁRIZ, M. A.; PÉREZ-OLVERA, C. A.; RODRÍGUEZ, F. O.; RUBIO, E. Indirect hierarchical FCMAC control for the ball and plate system. *Neurocomputing*, v. 73, n. 13-15, p. 2454–2463, aug 2010. ISSN 09252312.
- MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, v. 39, n. 2, p. 262–287, feb 1993. ISSN 0001-1541.
- NAGRATH, D.; PRASAD, V.; BEQUETTE, B. W. A model predictive formulation for control of open-loop unstable cascade. *Chemical Engineering Science*, v. 57, n. 3, p. 365–378, 2002. ISSN 00092509.
- ODLOAK, D. Extended robust model predictive control. *AIChE Journal*, v. 50, n. 8, p. 1824–1836, aug 2004. ISSN 00011541.
- OLFATI-SABER, R. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. 282 p. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute Of Technology, 2001.
- ORAVEC, M.; JADLOVSKA, A. Model Predictive Control of a Ball and Plate laboratory model. In: *2015 IEEE 13th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII)*. [S.l.]: IEEE, 2015. p. 165–170. ISBN 978-1-4799-8221-9.
- QUANSER. *2 DOF Ball Balancer Student Workbook*. Markham, Ontario: Quanser INC., 2013. 26 p.
- RAWLINGS, J. B.; MUSKE, K. R. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 10, p. 1512–1516, 1993. ISSN 00189286.

RODRIGUES, M. a.; ODLOAK, D. An infinite horizon model predictive control for stable and integrating processes. *Computers and Chemical Engineering*, v. 27, n. 8-9, p. 1113–1128, 2003. ISSN 00981354.

ROSSITER, J. A. *Model-based predictive control: a practical approach*. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2003. 344 p. ISBN 0203503961, 9780203503966.

SCHREIER, M. Modeling and adaptive control of a quadrotor. In: *2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. [S.l.]: IEEE, 2012. p. 383–390. ISBN 978-1-4673-1278-3.

SINAGA, E. F.; MANURUNG, E. B.; CHEE, V. A.; DJAJADI, A. Building and controlling a ball and plate system. *Communications in Computer and Information Science*, v. 142 CCIS, p. 600–608, 2011. ISSN 18650929.

SIRA-RAMIREZ, H. On the control of the "ball and beam" system: a trajectory planning approach. In: IEEE (Ed.). *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.00CH37187)*. Sydney, Australia: IEEE, 2000. v. 4, p. 4042–4047. ISBN 0-7803-6638-7.

SOUZA, W. A. D.; OLIVEIRA, D. R. D.; TEIXEIRA, M. C. M.; Luciano de Souza da Costa e Silva; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto E Implementação De Um Controlador Robusto Chaveado Utilizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. *Congresso Brasileiro de Automática*, p. 2238–2245, 2014.

TRIERWEILER, J. O.; FARINA, L. a. RPN tuning strategy for model predictive control. *Journal of Process Control*, v. 13, n. 7, p. 591–598, 2003. ISSN 09591524.

Tvrzská de Gouvêa, M.; ODLOAK, D. ROSSMPC: A New Way of Representing and Analysing Predictive Controllers. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 75, n. 7, p. 693–708, oct 1997. ISSN 02638762. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263876297715934>>.

WU, W.; HIROGAKI, T.; AOYAMA, E. Investigation and Improving Method of Two Axes Synchronous Accuracy of Plate Pivot Control with a Dual Arm Robot by Estimating Ball Rolling Motion on the Plate. *Transactions Of The Japan Society Of Mechanical Engineers Series C*, v. 78, n. 785, p. 292–304, 2012. ISSN 1884-8354.

ZHIYU, X.; TIM, H. Ball and beam system - Nonlinear MPC using hammerstein model. *ICIEA 2007: 2007 Second IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, p. 2294–2298, 2007.

Apêndice A

Programação quadrática

Este apêndice tem como objetivo apresentar a transformação dos problemas de otimização apresentados no Capítulo (3) no formato padrão de uma Programação Quadrática - QP. Trata-se da manipulação matemática necessária para transformar um somatório em produto matricial e, conseqüentemente, adequar um problema de otimização ao seguinte formato:

$$\min_{\mathbf{X}} \mathbf{X}^\top \mathbf{H} \mathbf{X} + 2\mathbf{f}^\top \mathbf{X} + c \quad (\text{A.1})$$

Sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{des} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_{des}, \\ \mathbf{A}_{ig} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}_{ig}, \\ \mathbf{lb} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{ub}. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Nessa composição, \mathbf{H} é a matriz hessiana do sistema, \mathbf{X} é o vetor de variáveis de decisão, \mathbf{f} é o gradiente do sistema, c é o termo constante da QP, \mathbf{A}_{des} é o termo linear das restrições de desigualdade, \mathbf{b}_{des} é o termo constante das restrições de desigualdade, \mathbf{A}_{ig} é o termo linear das restrições de igualdade, \mathbf{b}_{ig} é o termo constantes das restrições de igualdade, \mathbf{lb} é o valor mínimo que as variáveis de decisão podem assumir, \mathbf{ub} é o valor máximo que as variáveis de decisão podem assumir.

Como forma de apresentar o caso mais geral possível, será apresentado o procedimento para o **Problema 5**, os demais casos são obtidos como simples retirada de

variáveis de decisão.

A Equação (3.43) fornece:

$$\begin{aligned}
J_{4,k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Gamma}_{(j-m)}\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{S}_{in}}^2.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

A partir da inclusão das restrições (Equações (3.16) e (3.37)):

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{x}^{in}(k+m|k) - \boldsymbol{\delta}_{in,k} = \mathbf{0} \tag{3.37}$$

a função objetivo torna-se limitada e é escrita como:

$$\begin{aligned}
J_k &= \sum_{j=1}^m \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp,k} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Gamma}_{(j-m)}\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} \|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{in,k}\|_{\mathbf{S}_{in}}^2 + \|\mathbf{x}^{st}(k+m|k)\|_{\mathbf{Q}_y}^2.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A Equação (A.3) pode então ser transformada num produto matricial através do seguinte procedimento:

1. Escreve-se todos os termos da predição $\mathbf{y}(k+j|k)$ do $j = 1$ até $j = m$:

$$\mathbf{y}(k+1|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k|k)]$$

$$\mathbf{y}(k+1|k) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k|k)$$

$$\mathbf{y}(k+2|k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k|k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k+1|k)$$

\vdots

$$\mathbf{y}(k+m|k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^m\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k|k) + \dots$$

$$\dots + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k+m-2|k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}u(k+m-1|k) \tag{A.4}$$

2. Organiza a Equação (A.4) em formato matricial \mathbf{Y} , separando os termos que dependem dos estados $\mathbf{x}(k|k)$ dos que multiplicam as ações de controle que são empilhadas em $\Delta\mathbf{u}_k$, portanto:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\chi}\mathbf{x}(k|k) + \Theta\Delta\mathbf{u}, \quad (\text{A.5})$$

em que, $\boldsymbol{\chi}$ é:

$$\boldsymbol{\chi}_{(m \times ny)} = \left[\mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^m \right]^\top, \quad (\text{A.6})$$

e

$$\Theta_{(m \times m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{m-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{m-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CB} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta\mathbf{u}_k = \left[\Delta\mathbf{u}^\top(k|k) \quad \Delta\mathbf{u}^\top(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta\mathbf{u}^\top(k+m-1|k) \right]. \quad (\text{A.8})$$

3. A partir do modelo (Equações (2.50) e (2.51)), se escreve o custo terminal como função das variáveis de decisão:

$$\mathbf{x}^{st}(k+m|k) = (\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + \Lambda\Delta\mathbf{u}_k, \quad (\text{A.9})$$

em que: $\Lambda = \left[(\mathbf{F}^{st})^{(m-1)}\mathbf{B}^{st} \quad (\mathbf{F}^{st})^{(m-2)}\mathbf{B}^{st} \quad \dots \quad \mathbf{F}^{st}\mathbf{B}^{st} \quad \mathbf{B}^{st} \right]$.

Então,

$$\|\mathbf{x}^{st}(k+m|k)\|_{\overline{\mathbf{Q}}_y}^2 = ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + \Lambda\Delta\mathbf{u}_k)^\top \overline{\mathbf{Q}}_y ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + \Lambda\Delta\mathbf{u}_k). \quad (\text{A.10})$$

4. Empilha a referência $\mathbf{y}_{sp,k}$ em um vetor da seguinte forma:

$$\mathbf{\Upsilon}_{m \cdot (ny,1)}^{set} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{set} & \mathbf{y}_{set} & \dots & \mathbf{y}_{set} \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.11})$$

5. As variáveis de folga precisam ser adequadas. Uma vez que é utilizada uma única variável para todo o horizonte, é necessário criar matrizes de adequação para as dimensões. Portanto, constrói-se as seguintes matrizes:

$$\mathbf{\Phi}_{m(ny,ny)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(ny,ny)} & \mathbf{I}_{(ny,ny)} & \dots & \mathbf{I}_{(ny,ny)} \end{bmatrix}^\top, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{T}_{(m,ni)} = \begin{bmatrix} \tau \mathbf{\Gamma}_{(1-m)} & \tau \mathbf{\Gamma}_{(2-m)} & \dots & \tau \mathbf{\Gamma}_{(m-1-m)} & \tau \mathbf{\Gamma}_{(m-m)} \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.13})$$

6. Constrói o somatório (A.3) como um produto matricial com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} J_k = & (\mathbf{Y} - \mathbf{\Upsilon}^{set} - \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - \mathbf{T} \delta_{in,k})^T \mathbf{Q}_y (\mathbf{Y} - \mathbf{\Upsilon}^{set} - \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - \mathbf{T} \delta_{in,k}) + \\ & \Delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k + \delta_{y,k}^T \mathbf{S}_y \delta_{y,k} + \delta_{in,k}^T \mathbf{S}_{in} \delta_{in,k} + \mathbf{x}^{st}(k+m|k)^\top \cdot \overline{\mathbf{Q}}_y \cdot \mathbf{x}^{st}(k+m|k). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

7. Substitui (A.5) e (A.10) em (A.14) e escreve-se:

$$\begin{aligned} J_k = & (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k) + \Theta \Delta \mathbf{u}_k - \mathbf{\Upsilon}^{set} - \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - \mathbf{T} \delta_{in,k})^T \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \\ & (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k) + \Theta \Delta \mathbf{u}_k - \mathbf{\Upsilon}^{set} - \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - \mathbf{T} \delta_{in,k}) + \\ & + \Delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k + \delta_{y,k}^T \mathbf{S}_y \delta_{y,k} + \delta_{in,k}^T \mathbf{S}_{in} \delta_{in,k} \\ & + ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + \Lambda \Delta \mathbf{u}_k)^\top \overline{\mathbf{Q}}_y ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + \Lambda \Delta \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

8. Distribui os termos do produto quadrático e obtém os 32 seguintes:

$$\begin{aligned} J_k = & (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Psi_{\mathbf{x}}(k|k) + (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Theta \Delta \mathbf{u}_k \\ & - (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{\Upsilon}^{set} - (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{T} \delta_{in,k} \\ & + (\Theta \Delta \mathbf{u}_k)^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Psi_{\mathbf{x}}(k|k) + (\Theta \Delta \mathbf{u}_k)^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Theta \Delta \mathbf{u}_k \\ & - (\Theta \Delta \mathbf{u}_k)^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{\Upsilon}^{set} - (\Theta \Delta \mathbf{u}_k)^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{\Phi} \delta_{y,k} - (\Theta \Delta \mathbf{u}_k)^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{T} \delta_{in,k} \\ & - (\mathbf{\Upsilon}^{set})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Psi_{\mathbf{x}}(k|k) - (\mathbf{\Upsilon}^{set})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Theta \Delta \mathbf{u}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\Upsilon^{set})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Upsilon^{set} + (\Upsilon^{set})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Phi \delta_{y,k} + (\Upsilon^{set})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{T} \delta_{in,k} \\
& -(\Phi \delta_{y,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Psi_{\mathbf{x}}(k|k) - (\Phi \delta_{y,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Theta \Delta \mathbf{u}_k \\
& +(\Phi \delta_{y,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Upsilon^{set} + (\Phi \delta_{y,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Phi \delta_{y,k} + (\Phi \delta_{y,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{T} \delta_{in,k} \\
& -(\mathbf{T} \delta_{in,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Psi_{\mathbf{x}}(k|k) - (\mathbf{T} \delta_{in,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Theta \Delta \mathbf{u}_k \\
& +(\mathbf{T} \delta_{in,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Upsilon^{set} + (\mathbf{T} \delta_{in,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \Phi \delta_{y,k} + (\mathbf{T} \delta_{in,k})^\top \cdot \mathbf{Q}_y \cdot \mathbf{T} \delta_{in,k} \\
& +\Delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k + \delta_{y,k}^\top \mathbf{S}_y \delta_{y,k} + \delta_{in,k}^\top \mathbf{S}_{in} \delta_{in,k} \\
& +((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k))^\top \overline{\mathbf{Q}}_y (\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k))^\top \overline{\mathbf{Q}}_y \Lambda \Delta \mathbf{u}_k \\
& +(\Lambda \Delta \mathbf{u}_k)^\top \overline{\mathbf{Q}}_y (\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) + ((\Lambda \Delta \mathbf{u}_k)^\top \overline{\mathbf{Q}}_y (\Lambda \Delta \mathbf{u}_k)).
\end{aligned}$$

9. Agrupam-se os termos quadráticos que relacionam as variáveis de decisão $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k & \delta_{y,k,k} & \delta_{in,k,k} \end{bmatrix}$ para formar a matriz Hessiana do problema quadrático, portanto:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Theta^\top \mathbf{Q}_y \Theta + \Lambda^\top \overline{\mathbf{Q}}_y \Lambda + \mathbf{R} & -\Theta^\top \mathbf{Q}_y \Phi & -\Theta^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{T} \\ -\Phi \mathbf{Q}_y \Theta & \Phi^\top \mathbf{Q}_y \Phi + \mathbf{S}_y & \Phi \mathbf{Q}_y \mathbf{T} \\ -\mathbf{T}^\top \mathbf{Q}_y \Theta & \mathbf{T}^\top \mathbf{Q}_y \Phi & \mathbf{T}^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{T} + \mathbf{S}_{in} \end{bmatrix}.$$

10. Os termos de primeira ordem comporão a matriz \mathbf{f} da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \mathbf{Q}_y \Theta - \Upsilon^{set \top} \mathbf{Q}_y \Theta + ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k))^\top \overline{\mathbf{Q}}_y \Lambda \\ -(\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \mathbf{Q}_y \Phi + \Upsilon^{set \top} \mathbf{Q}_y \Phi \\ -(\Psi_{\mathbf{x}}(k|k))^\top \mathbf{Q}_y \mathbf{T} + \Upsilon^{set \top} \mathbf{Q}_y \mathbf{T} \end{bmatrix}.$$

11. O termo constante é:

$$c = (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k) - \Upsilon^{set})^\top \mathbf{Q}_y (\Psi_{\mathbf{x}}(k|k) - \Upsilon^{set}) + ((\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k))^\top \overline{\mathbf{Q}}_y (\mathbf{F}^{st})^m \mathbf{x}^{st}(k|k) \quad (\text{A.16})$$

É necessário adequar também as restrições do problema de otimização à nova realidade, portanto são três os casos:

1. Restrições de máximos e mínimos:

$$\underbrace{-\Delta \mathbf{u}_{max}}_{lb} \leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \underbrace{\Delta \mathbf{u}_{max}}_{ub} \quad (\text{A.17})$$

2. Restrições de movimento:

$$-\mathbf{u}_{max} \leq \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}_{max} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{u}_{max} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{max} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{max} \end{bmatrix}_m \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{u}_{min} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{min} \\ \mathbf{u}_{min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{min} \end{bmatrix}_m \quad (\text{A.20})$$

Esta última precisa de uma adaptação, pois a variável de decisão, devido ao modo incremental, é $\Delta \mathbf{u}_k$, e a restrição deve ser em \mathbf{u}_k , assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k|k) &= \Delta \mathbf{u}(k|k) + \mathbf{u}(k-1|k) \\ \mathbf{u}(k+1|k) &= \Delta \mathbf{u}(k+1|k) + \mathbf{u}(k|k) \\ \mathbf{u}(k+1|k) &= \Delta \mathbf{u}(k|k) + \Delta \mathbf{u}(k+1|k) + \mathbf{u}(k-1|k) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}(k+1|k) &= \Delta \mathbf{u}(k|k) + \cdots + \Delta \mathbf{u}(k+m-1|k) + \mathbf{u}(k-1|k) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Em forma matricial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{k})_{(m.nu)} = \mathbf{I}_{(m.nu,nu)}u(k-1|k) + \mathbf{M}_{(m.nu,m.nu)}\Delta\mathbf{u}_k \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{I}_{(m.nu,nu)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(nu,nu)} \\ \mathbf{I}_{(nu,nu)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{(nu,nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{O}_{(m.nu,m.nu)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(nu,nu)} & \mathbf{0}_{nu,nu} & \cdots & \mathbf{0}_{nu,nu} \\ \mathbf{I}_{(nu,nu)} & \mathbf{I}_{(nu,nu)} & \cdots & \mathbf{0}_{nu,nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_{(nu,nu)} & \mathbf{I}_{(nu,nu)} & \cdots & \mathbf{I}_{(nu,nu)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

A partir das equações (A.22) e (A.24) escreve-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{(m.nu,nu)}u(k-1|k) + \mathbf{O}_{(m.nu,m.nu)}\Delta\mathbf{u}_k &\leq \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{I}_{(m.nu,nu)}u(k-1|k) + \mathbf{O}_{(m.nu,m.nu)}\Delta\mathbf{u}_k &\leq \mathbf{u}_{min} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{O} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{des}} \Delta\mathbf{u}_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} - \mathbf{I}_{(m.nu,nu)}u(k-1|k) \\ \mathbf{u}_{min} + \mathbf{I}_{(m.nu,nu)}u(k-1|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{des}}. \quad (\text{A.25})$$

3. Restrições terminais das Equações (3.16) e (3.37) são escritas com base nos estados no instante k e nas ações de controle, portanto são escritas como:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^s(k|k) + \tau\Gamma_{(j-m)}\mathbf{x}^{in}(k|k) + (\tau\mathbf{N} + \mathbf{P})\Delta\mathbf{u}_k - \mathbf{y}_{sp,k} - \delta_{y,k} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}^{in})^m\mathbf{x}^{in}(k|k) + \mathbf{M}\Delta\mathbf{u}_k - \delta_{in,k} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Em forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\tau\mathbf{N} + \mathbf{P}) & -\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{M} & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ig}} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_k \\ \delta_{y,k} \\ \delta_{in,k} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{sp,k} - \mathbf{x}^s(k|k) - \tau\mathbf{\Gamma}_{(j-m)}\mathbf{x}^{in}(k|k) \\ -(\mathbf{F}^{in})^m\mathbf{x}^{in}(k|k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{ig}}. \quad (\text{A.27})$$

UFBA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL - PEI

Rua Aristides Novis, 02, 6º andar, Federação, Salvador BA
CEP: 40.210-630
Telefone: (71) 3283-9800
E-mail: pei@ufba.br
Home page: <http://www.pei.ufba.br>

