

André Luiz Andrade Simões
Harry Edmar Schulz
Rodrigo de Melo Porto

Métodos Computacionais em Hidráulica



***Métodos
Computacionais
em Hidráulica***

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Reitor

João Carlos Salles Pires da Silva

Vice-reitor

Paulo Cesar Miguez de Oliveira

Assessor do reitor

Paulo Costa Lima



E D U F B A

EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Diretora

Flávia Goulart Mota Garcia Rosa

Conselho Editorial

Alberto Brum Novaes

Angelo Szaniecki Perret Serpa

Caiuby Alves da Costa

Charbel Ninõ El-Hani

Cleise Furtado Mendes

Evelina de Carvalho Sá Hoisel

José Teixeira Cavalcante Filho

Maria do Carmo Soares de Freitas

Maria Vidal de Negreiros Camargo

Métodos Computacionais em Hidráulica

André Luiz Andrade Simões
Harry Edmar Schulz
Rodrigo de Melo Porto

Salvador
EDUFBA
2017

2017, autores.
Direitos para esta edição cedidos à EDUFBA.
Feito o Depósito Legal.
Grafia atualizada conforme o Acordo Ortográfico da
Língua Portuguesa de 1990, em vigor no Brasil desde 2009.

Projeto Gráfico e Editoração

Autores

Capa e Editoração

Matheus Chastinet

Normalização e Revisão

Sistema de Bibliotecas - UFBA

S593 Simões, André Luiz Andrade.
Métodos computacionais em hidráulica / André Luiz Andrade Simões,
Harry Edmar Schulz, Rodrigo de Melo Porto. - Salvador: Edufba, 2017
p. 236.
Inclui referências.

ISBN 978-85-232-1602-3

1. Hidráulica. 2. Engenharia hidráulica. 3. Reservatórios. 4. Hidráulica –
métodos. I. Harry Edmar Schulz. II. Rodrigo de Melo Porto.

CDU - 556.546

Editora filiada a:



EDUFBA
Rua Barão de Jeremoabo,
s/n, Campus de Ondina,
40170-115, Salvador-Ba, Brasil
Tel/fax: (71) 3283-6164
www.edufba.ufba.br
edufba@ufba.br

DEDICATÓRIA

Aos nossos alunos.

AGRADECIMENTO

À Pró-Reitoria de Pesquisa, Criação e Inovação e a Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação da Universidade Federal da Bahia.

EPÍGRAFE

Nem é o método ou natureza da comunicação importante somente para o uso do conhecimento, como o é igualmente para o *progresso* deste: pois, como o esforço e a vida de um homem só não bastam para alcançar a perfeição do conhecimento, é a sabedoria da Comunicação que inspira o acerto na continuação e no avanço. (Bacon, 2006 p. 209).

Francis Bacon (1561-1626): Bacon, F. (1605) O Progresso do Conhecimento, Livro segundo sobre a proficiência e o progresso do conhecimento divino e humano, 403-XVII-2, Tradutor: Raul Fiker, Editora UNESP, 2006, p.209).

SUMÁRIO

PREFÁCIO | 17

CAPÍTULO I

CONDUTOS FORÇADOS:
ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL
E EM REGIME PERMANENTE | 19

Equações e conceitos básicos | 20

Problema 1 | 26
Dois reservatórios interligados
por uma tubulação

Problema 1.1 | 26
Modelo Matemático

Problema 1.2 | 27
Cálculo da vazão

Uso do solver | 28

Problema 1.3 | 39
Método iterativo simplificado

Problema 1.4 | 30
Discussão

Problema 1.5 | 31
Cálculo da vazão para diferentes diâmetros:
Solução simultânea

Problema 1.6 | 33
Envelhecimento do conduto

Problema 1.7 | 33
Cálculo do diâmetro

Considerações finais | 34

Lista de símbolos | 34

CAPÍTULO II

CONDUTOS FORÇADOS:
REDES MALHADAS | 36

Introdução | 37

Método de Hardy Cross | 37

Problema 2		39
Cálculo de redes com diferentes métodos		
Problema 2.1		39
Rede com dois anéis		
Primeira solução:		40
Uso do algoritmo de Hardy Cross		
Segunda solução:		42
Uso do solver		
Terceira solução:		43
Uso do software EPANET 2.0		
Problema 2.2		45
Dimensionamento econômico de redes		
Considerações finais		49

CAPÍTULO III

ESCOAMENTO VARIÁVEL EM CONDUTOS FORÇADOS		52
Introdução		53
Problema 3		54
Soluções numéricas das equações do modelo rígido e do modelo elástico		
Problema 3.1		54
Chaminé de equilíbrio em aproveitamento hidrelétrico		
Problema 3.2		59
Modelo Elástico: Análise e solução numérica das equações		
Um pouco de matemática aplicada		60
Natureza do sistema de equações		55
Métodos numéricos		56
Método das características		57
Imposição das condições de contorno com auxílio das características		61
Métodos de volumes finitos		63
Forma conservativa das equações		63
Método de Lax-Friedrichs		65
Método de MacCormack		66
Código para solução das equações		67
Considerações finais		81

CAPÍTULO IV

ESCOAMENTO EM SUPERFÍCIE LIVRE: REGIME PERMANENTE		82
Introdução: Equações de resistência		83
Equações de resistência e seções transversais		84
Equacionamentos para diferentes seções transversais		85
Problema 4		93
Escoamento uniforme em canais		
Problema 4.1		93
Planilha para cálculo de h em função de b: Trapézio		
Problema 4.2		96
Escoamento uniforme: Seção circular		
Problema 4.3		98
Escoamento uniforme: Seção parabólica		
Problema 4.4		99
Ressalto hidráulico em tubulações		
Problema 4.5		100
Escoamento gradualmente variado: Canal com contração		
Problema 4.6		104
Cálculo da linha d'água com Runge-Kutta de 4ª ordem.		
Considerações finais		108

CAPÍTULO V

ESCOAMENTO EM SUPERFÍCIE LIVRE: ESCOAMENTO VARIÁVEL		110
Introdução		111
Equações de Saint-Venant		111
Solução numérica do sistema de equações		112
Método de MacCormack (1969)		113
Viscosidade artificial		114

Condições iniciais e de contorno	115
Problema 5.1	116
Escoamento variável em um canal: Propagação de uma onda de cheia.	
Problema 5.2	125
Propagação de ondas decorrentes do fechamento de comportas	
Problema 5.3	127
Propagação de ondas decorrentes da abertura de comportas	
Problema 5.4	128
Identificação de um ressalto hidráulico	
Problema 5.5	138
Ruptura de barragem	
Considerações finais	141
CAPÍTULO VI	
HIDRÁULICA DE MEIOS POROSOS	143
Introdução	144
Lei de Darcy (1856)	145
Condutividade hidráulica e permeabilidade intrínseca do meio poroso	151
Meios estratificados	152
EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONTINUIDADE	154
Primeira dedução	154
Segunda dedução	155
Formas simplificadas da equação diferencial	157
Adaptação para aquíferos: Deformações ao longo de z.	159
Drenância ou “leakage”	162
Aquíferos não confinados	163
Escoamento em regime permanente	164
Aquífero confinado e escoamento em direção a canais	164
Aquífero não confinado ou freático	165
Inclusão da taxa de recarga ou evaporação	166

Escoamentos com influência de poços		167
Aquífero confinado (Regime permanente)		168
Aquífero não confinado (Regime permanente)		169
Regime variável – Solução de Theis para aquífero confinado		171
SOLUÇÕES NUMÉRICAS		172
Equação diferencial: Forma original e forma discreta.		172
Códigos		173
Problema 6.1 Escoamento em direção a um poço		178
Problema 6.2 Poço inserido em um escoamento		179
Problema 6.3 Divisor de águas e ponto de estagnação		184
Problema 6.4 Fonte e sumidouro		185
CAPÍTULO VII		
PROBLEMAS ESPECIAIS		192
Introdução		193
Problema 7.1 Esvaziamento de um reservatório		193
Problema 7.2 Código para análise de bacias de detenção		200
Solução numérica da EDO		203
Problema 7.3 Escoamento em um canal de um sistema extravasor		210
Problema 7.4 Escoamento completamente desenvolvido em conduto forçado: Uma introdução à Mecânica dos Fluidos Computacional		216
REFERÊNCIAS		227

PREFÁCIO

Fluidos em escoamento têm sido descritos com a Física Matemática há séculos, ainda que esta definição seja recente. Independentemente das definições, a história faz-se pelas ações, e essas se utilizaram do que se denomina agora como Física Matemática. Assim, quando veio à existência, este livro também se tornou parte de tal história. Em uma apresentação menos ampla, trata-se de uma obra que congrega Mecânica dos Fluidos, Hidráulica e Cálculo Numérico com um elo que produziu o seu título, a saber, o computador. Nesta acepção, o substantivo não inclui régua de cálculo, calculadoras, ábacos ou gráficos, na sua representação física tradicional, por exemplo. Os métodos computacionais reunidos aqui à Hidráulica são planilhas eletrônicas e códigos interpretados e processados em computadores eletrônicos modernos.

Os escoamentos têm sido descritos com o rigor matemático e da física newtoniana desde os trabalhos de Newton, Bernoulli, Euler, Lagrange, Navier, Cauchy, Saint-Venant, Poisson, Stokes e outros nomes vivos na memória do engenheiro moderno que voltou os seus olhos para as páginas de obras de Mecânica do Contínuo, Mecânica dos Fluidos, Fenômenos de Transporte e Hidráulica. O emprego dos recursos computacionais “clássicos” ou “tradicionais” já mencionados, como os ábacos, régua de cálculo, gráficos, tabelas, entre outros, foram indispensáveis devido à natureza das equações que modelam escoamentos. É muito ilustrativa, por exemplo, a existência de um vertedor de parede delgada cuja área de descarga possui uma forma que implica em uma lei de descarga linear, conhecido como vertedor Sutro. Trata-se, portanto, de um vertedor de fácil uso para a realização de previsões naqueles tempos mais remotos, quando as calculadoras não estavam à mão e as medições de vazão eram, como ainda são, urgentes. Parte dos recursos de cálculo citados está em desuso, tendo sido sobrepujados por computadores com capacidade de armazenamento e processamento que se pode adjetivar de “incomparáveis” aos anteriores. Nesse contexto atual, as máquinas realizam os cálculos através de *softwares* adequados, gratuitos ou não, em diferentes níveis de complexidade e formas apresentados aos usuários. Este livro, entretanto, não tem o objetivo de ensinar sobre o uso de *softwares* gratuitos ou pagos, embora o leitor tangencie esse universo ao estudar alguns exercícios aqui propostos. Note-se que nesta obra não são colocados códigos ou planilhas em anexos; ao contrário, eles constituem parte do texto como órgãos vitais ao bom entendimento do tema. Esta ideia foi engendrada para que o estudante não os utilize como itens secundários. Trata-se de uma obra que expõe as linhas de comando e planilhas ao longo de sua estrutura, junto à teoria do problema proposto e a conversas descomplicadas que conduzem ao aprendizado. Quem lê é chamado a percorrer uma “estrada” pavimentada com o que se denomina ensino, sendo então conduzido a “paradas” de tempos em tempos (exercícios ou convites à reflexão) para que se experimente o aprendizado. O livro foi escrito para os nossos alunos e para todos os que desejam aprender. Há aqui o convite para a solução computacional de problemas com a leitura de códigos elaborados pelos autores. Entretanto, espera-se também que a visão crítica do leitor seja capaz de modificar e aperfeiçoar os códigos e as planilhas apresentados, crescendo ele próprio com a evolução da leitura e assumindo um aprendizado livre de antolhos, às vezes colocados pela repetição literária. A partir do texto propor-se a ir além dele, engenhar soluções para problemas além da presente abordagem, este seria o ideal do processo ensino/aprendizado

aqui seguido. Esse ponto de vista também expõe uma das partes essenciais da atividade à qual o leitor se sujeita, que é o cálculo em si, efetuado com linguagem de alto nível interpretada por compiladores. Espera-se que a leitura do presente texto abra as janelas, desconstrua os botões e formas amigáveis que devem funcionar corretamente nas interfaces homem-máquina, mas que privam o estudante da anatomia dos programas. Essa ideia nos parece boa. Sim; queremos crer que esta seja uma conjectura verossímil: que o estudo deste livro produzirá mudanças substanciais em estudantes de engenharia, matemática, física e áreas relacionadas, eliminando o salto em direção a programas prontos (no sentido desses programas serem usados sem serem entendidos). Pragmatismo e positivismo integram estes prolegômenos. Hidráulica é um ramo científico que estuda o comportamento da água. Atualmente a água tem sido reconhecida como um bem efêmero ou escasso, sendo que o seu uso otimizado passa pelo conhecimento dos cálculos para a sua correta distribuição e armazenamento. A Engenharia está ligada à Hidráulica nas seguintes disciplinas e aplicações: (1) Instalações prediais para o transporte de água fria, água quente, esgoto sanitário e águas pluviais; (2) Sistemas hidráulicos urbanos para abastecer prédios e indústrias com água potável, para coletar as águas servidas (o esgoto doméstico e o esgoto industrial), para escoar as águas da chuva de forma adequada ao meio ambiente e ao funcionamento da cidade; (3) Construção de barragens, onde são necessárias estruturas hidráulicas para o aproveitamento hidroelétrico, e estruturas de condução e dissipação de energia para que os excessos de água sejam devolvidos sem provocar erosões; (4) Sistemas de irrigação para agricultura, com o dimensionamento de aspersores, gotejadores, canais para irrigação por sulcos e faixas, entre outros. Esses são apenas alguns exemplos que ajudam a localizar o assunto do livro, no contexto geral da importância da água nas atividades atuais da civilização humana. Como já mencionado, essa característica “atual” também envolve a ferramenta de cálculo dos escoamentos: o computador. Assim, o assunto do livro é resumido com a apresentação do título. Enfatizando de uma última forma mais resumida, pode-se dizer que o estudo aplicado da Hidráulica relaciona-se com matérias mais conceituais das ciências, como a “Mecânica dos Fluidos”, os “Fenômenos de Transporte” e a “Matemática”. A solução de problemas leva a equações de diferentes tipos (algébricas, diferenciais ordinárias, diferenciais parciais e/ou sistemas de equações com essas características), sendo as soluções ditas numéricas aquelas mais requisitadas. Justamente essas soluções fazem uso do computador, sendo exaustivamente exploradas aqui.

André Luiz Andrade Simões

Harry Edmar Schulz

Rodrigo de Melo Porto

Salvador, 12/8/2016

CAPÍTULO 1

CONDUTOS FORÇADOS: ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL E EM RE- GIME PERMANENTE

die wir in der Folge Reibungs-
setzen: $h_1 = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, und
Reibungszahl, die wir den Reibungs-

Trecho do livro do professor Julius Weisbach (WEISBACH, 1845, p.529). Observe que a letra grega zeta (ζ) é o fator de cisalhamento de Darcy-Weisbach (fator de “atrito”), hoje representado por “ f ”; l/d é o adimensional comprimento do conduto sobre diâmetro interno; o termo restante é a carga cinética.

Esta é a equação de Darcy e Weisbach.

Equações e conceitos básicos

Os escoamentos em condutos forçados ou sob pressão são caracterizados por preencherem plenamente a seção transversal do conduto e por ocorrerem submetidos a pressões diferentes da pressão atmosférica. Em geral, tais pressões são maiores que a atmosférica. Em pontos altos de adutoras e outros sistemas, as pressões podem assumir valores iguais ou menores que a pressão atmosférica. Em oposição, o escoamento em superfície livre é aquele que possui uma superfície em contato com um gás, normalmente o ar, estando, desse modo, livre para sofrer deformações. A maior parte dos problemas de hidráulica envolve a superfície livre em contato com a pressão atmosférica, como em escoamentos nos canais abertos, rios, condutos para transporte de esgoto sanitário e águas pluviais. A representação física-matemática dos escoamentos em condutos forçados é realizada com equações originadas das leis físicas básicas e equações e dados de origem experimental. A hipótese de incompressibilidade representa adequadamente a maior parte dos problemas. Nesse contexto, os princípios básicos da física necessários à construção de modelos matemáticos para a solução de escoamentos em condutos forçados, são: Conservação de Massa; 1ª Lei da Termodinâmica; 2ª Lei de Newton. A análise dimensional também participa da história das equações fundamentais da hidráulica de condutos sob pressão, resultando em uma relevante formulação matemática para o cálculo da energia dissipada ou “perda de carga”. Finalmente, equações constitutivas, a experiência e a Mecânica dos Fluidos estatística fornecem conclusões necessárias ao fechamento do sistema de equações.

O princípio de conservação de massa em sua forma integral, quando aplicado a um volume de controle com uma entrada e uma saída, para condição de escoamento incompressível, permite concluir que a vazão afluyente deve ser igual à vazão efluente. Se o volume de controle possuir “Ne” entradas e “Ns” saídas, a conclusão será semelhante, isto é, a soma das vazões de entrada será igual à soma das vazões de saída. Matematicamente, escreve-se:

$$\sum_{i=1}^{N_e} Q_i = \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \quad (1)$$

A 1ª Lei da Termodinâmica, quando aplicada a um volume de controle com uma entrada e uma saída, com ou sem máquina hidráulica (bomba ou turbina), para regime permanente e escoamento incompressível, resulta na conhecida equação da energia. Esse modelo matemático, apresentado a seguir como equação, 2, possui alguns termos semelhantes aos que compõem a equação de Bernoulli (Daniel Bernoulli). Por essa razão, às vezes é chamada de equação de Bernoulli (equação 3). Entretanto, deve-se notar que a equação de Bernoulli é deduzida com a

2ª Lei de Newton e não possibilita modelar a existência de uma bomba ou turbina, assim como a energia dissipada ou perda de carga.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H \quad (2)$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3)$$

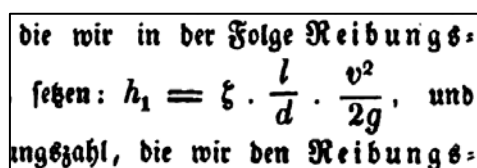
Se o escoamento for uniforme ao longo do conduto, os coeficientes de Coriolis serão iguais, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (os símbolos empregados têm as suas definições na lista apresentada ao final deste capítulo). Sendo assim, a 2ª lei de Newton aplicada a um volume de controle com uma entrada e uma saída permite concluir sobre a existência de uma relação linear entre perda de carga e comprimento do conduto, L. A relação obtida é vista na equação 4a ou 4b.

$$h_f = \frac{\tau_o}{\gamma} \frac{L}{R_h} \quad (4a)$$

$$h_f = \frac{4\tau_o}{\gamma} \frac{L}{D} \quad (4b)$$

Prosseguindo com esta breve introdução sobre os modelos matemáticos essenciais para condutos forçados, o leitor deve recordar o conhecido equacionamento de Darcy e Weisbach (equação 5) para a perda de carga distribuída. Essa importante equação é deduzida com o teorema de Vaschy-Buckingham ou teorema dos Π s, teorema básico da análise dimensional. Em certo estágio de sua dedução, a relação linear entre a perda de carga e L/D é necessária, o que revela de modo interessante a útil contribuição da 2ª Lei de Newton representada pelo resultado acima, isto é, a equação 4.

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5)$$



die wir in der Folge Reibungs-
setzen: $h_1 = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, und
angszahl, die wir den Reibungs-

Figura 1 – Trecho do livro do Professor Julius Weisbach.
Fonte: Weisbach (1845, p. 529)

Um fenômeno físico descrito com auxílio de grandezas dimensionais pode ser descrito com números adimensionais (números puros). Como consequências da substituição de variá-

veis dimensionais por números puros, observa-se que: O número de graus de liberdade é reduzido; os resultados expressos em termos adimensionais independem de sistemas de unidades. Com esses dois aspectos positivos, menciona-se também que a análise dimensional não resolve plenamente o problema do cálculo da perda de carga, restando a função “fator de cisalhamento” ou “fator de atrito” a ser determinada. Como indicado na equação 6, o fator de cisalhamento, para o caso mais geral, pode depender da rugosidade relativa e do número de Reynolds.

$$f = f(Re, \varepsilon/D) \quad (6)$$

A relação entre tensão e deformação para um fluido newtoniano, como a água, em conjunto com a 2ª lei de Newton escrita em sua forma conhecida como equação de Cauchy, tem como resultado a equação de Navier-Stokes. Uma solução particular dessa equação, válida para escoamento laminar, permanente e plenamente desenvolvido, em tubos, tem como resultado a equação 7. Empregando a Lei de Newton da viscosidade e a 2ª Lei de Newton ao mesmo problema, o leitor também deduzirá a equação 7. Esse segundo caminho é equivalente ao primeiro porque a Lei de Newton da viscosidade é parte da relação entre tensão e deformação para um fluido newtoniano.

$$f = \frac{64}{Re} \quad (7)$$

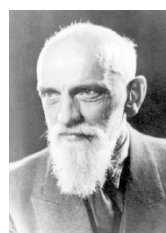
A equação 7 é válida para escoamento com estrutura interna laminar, condição identificada com auxílio do número de Reynolds, sendo $Re \leq 2300$ um valor prático empregado em Mecânica dos Fluidos e Hidráulica. Destaca-se também que o número 64 está vinculado à seção transversal circular do tubo. Para Re entre 2300 e 4000 (valores de referência) ocorre a transição à turbulência e o fator de cisalhamento não é caracterizado. Se $Re \geq 4000$, o escoamento passa a ser turbulento. Esta condição exige resultados de estudos experimentais para o cálculo de f e, ao longo da história, destacam-se os trabalhos de Ludwig Prandtl e de seus alunos, Blasius, Kàrmàn e Nikkuradse (Figura 2).



Ludwig Prandtl (1875-1953), em 1937. Engenheiro alemão. Fonte: DLR-Archiv Göttingen.



Theodore von Kàrmàn (1881-1963). Físico húngaro. Fonte: California Institute of Technology, Pasadena.



Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970), em 1962. Engenheiro alemão. Fonte: Hager (2003).



Nikuradse, em torno de 1925, Göttingen. Engenheiro e físico alemão. Fonte: Hager e Liiv (2008).

Figura 2 – Prandtl e seus alunos

No interior da camada limite turbulenta, nas proximidades da parede, um “número de Reynolds local” pode não ser muito elevado já que as velocidades ali são baixas (vale recordar o princípio da aderência). Sendo assim, se essa região com baixo número de Reynolds apresentar espessura superior à altura dos elementos que compõem a rugosidade da superfície haverá uma subcamada laminar, isto é, uma região de escoamento laminar no interior da camada limite turbulenta. Sugere-se que o leitor veja uma fotografia da referida região laminar no livro de Van Dyke (1982, p. 93). A existência da subcamada laminar caracteriza escoamentos conhecidos como hidraulicamente lisos, para os quais $f = f(Re)$, apenas. Para uma mesma superfície rugosa, o aumento no número de Reynolds implica redução da espessura da subcamada laminar. Como consequência, para elevados números de Reynolds, o escoamento será plenamente turbulento e $f = f(\varepsilon/D)$, apenas. Os estudos dos cientistas da Figura 2 contêm formulações para o fator de resistência, válidas para essas duas condições. O trabalho de Nikuradse também expôs a existência de uma condição intermediária e, como pode ser visto na Figura 3, tal condição é aquela em que $f = f(Re, \varepsilon/D)$. Em 1938 Colebrook reuniu os equacionamentos desses autores em uma formulação (equação 8) que ficou conhecida como equação de Colebrook e que pode ser reduzida às fórmulas originais para as condições limite $Re \rightarrow \infty$ e $\varepsilon/D \rightarrow 0$.

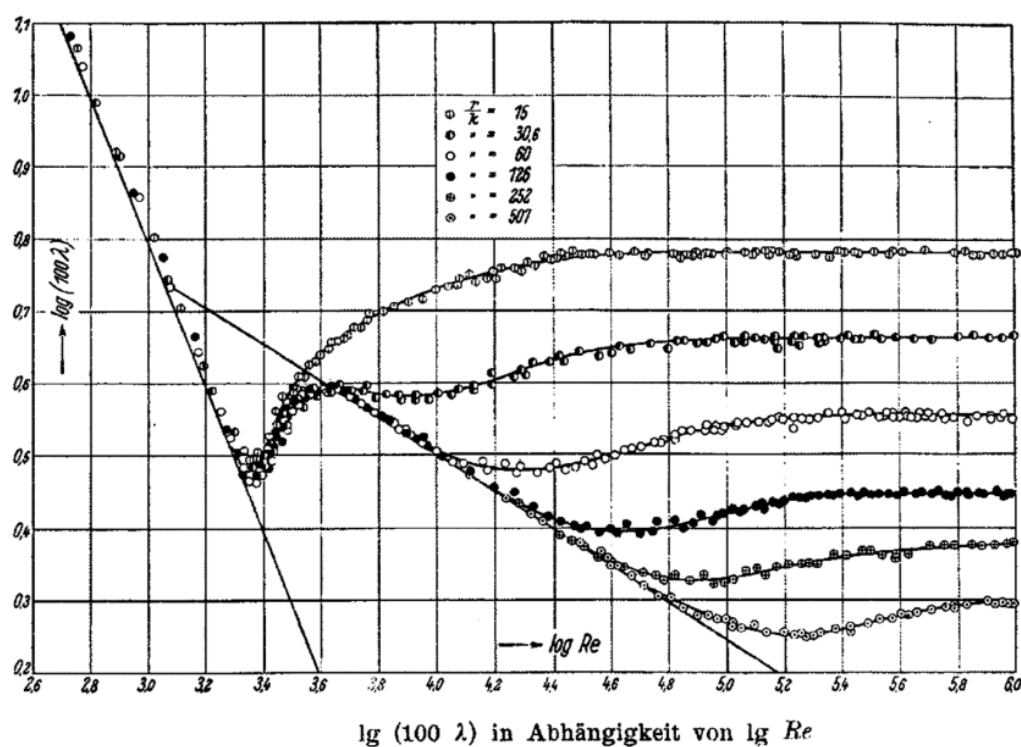


Figura 3 - “Harpa de Nikuradse” (Porto, 2006, p. 37). Nesta figura, $\lambda = f$, $\varepsilon = k$ e $r=D/2$.
Fonte: Nikuradse (1933)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (8)$$

A forma da equação de Colebrook, implícita para o cálculo de f , requer o uso de métodos numéricos iterativos. Essa dificuldade motivou o desenvolvimento de ábacos, tabelas e formulações explícitas. O Professor Hunter Rouse (1943) propôs um interessante gráfico para a solução de problemas. A sua forma lembra o de Nikuradse (Figura 3). Em 1944, Lewis F. Moody (1944) publicou também um gráfico comparável ao de Nikuradse. A construção dos diagramas de Rouse e Moody envolve as equações 7 ($f = 64/Re$) e a equação de Colebrook. Entre as equações propostas após a publicação de Colebrook, pode-se encontrar modelos válidos escoamentos turbulentos limitados a intervalos de Re e ε/D , e modelos que representam o escoamento laminar e o escoamento turbulento sem as mesmas restrições. As equações 9 a 14 ilustram parte dessa história, seguindo a cronologia das publicações. As equações, 10, 12, 13 e 14 representam o diagrama de Moody, incluindo o escoamento laminar. Formulações com essa característica geral são interessantes também para elaboração de códigos computacionais. Neste livro, a equação adotada para a solução dos problemas é a equação 14. Ela possui uma forma mais simples em relação às demais equações gerais e precisão razoável quando comparada à equação de Colebrook, como ilustrado na Figura 4.

Swamee e Jain (1976):

$$f = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}, \text{ validade } \begin{cases} 10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 10^{-2} \\ 5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^8 \end{cases} \quad (9)$$

Churchill (1977):

$$f = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A+B)^{3/2}} \right]^{1/12} \quad (10)$$

$$A = \left\{ 2,457 \ln \left[\frac{1}{\left(\frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)} \right] \right\}^{16}, \quad B = \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

Haaland (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right] \quad (11)$$

Chue (1984):

$$f = \left\{ -2 \log(1 - \varphi)^{-(\sqrt{\text{Re}}/16)} + \varphi \left[(7/\text{Re})^{0,9} + \varepsilon/(3,7D) \right] \right\}^{-2}$$

$$\varphi = \left[1 + \exp\left(-\frac{\text{Re} - 3057,2516}{227,52765}\right) \right]^{-1}$$
(12)

Pereira e Almeida (1986):

$$f = \left\{ -2 \log(1 - \varphi)^{-(\sqrt{\text{Re}}/16)} + \varphi \left[6,9/\text{Re} + [\varepsilon/(3,7D)]^{1,11} \right]^{0,9} \right\}^{-2}$$

$$\varphi = \left[1 + \exp\left(-\frac{\text{Re} - 3060,6974}{250,9080}\right) \right]^{-1}$$
(13)

Swamee (1993):

$$f = \left\{ \left(\frac{64}{\text{Re}} \right)^8 + 9,5 \left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) - \left(\frac{2500}{\text{Re}} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0,125}$$
(14)

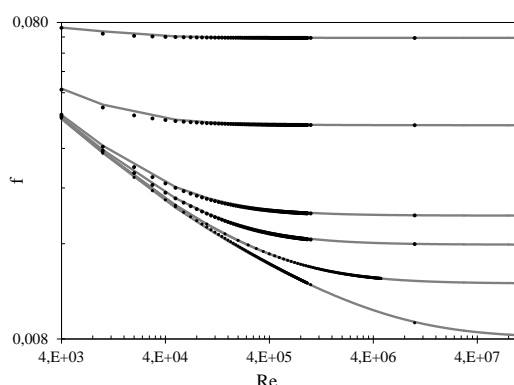


Figura 4 – Equação de Swamee (linha) e de Colebrook (ponto)
($\varepsilon/D = 0,00001, 0,0001, 0,0004, 0,001, 0,01$ e $0,05$)

O problema de determinação da perda de carga distribuída está resolvido para escoamentos em tubos, como exposto na síntese anterior. Nesse contexto, resta formular a dissipação de energia que ocorre devido à mudança de forma do conduto com uso de acessórios (curvas, válvulas, etc.). Essa dissipação de energia ocorre em trechos relativamente curtos, sendo denominada “perda de carga localizada”. O uso da análise dimensional, neste caso, conduz à equação 15. O fator K é, para o caso mais geral, uma função do número de Reynolds e da forma do conduto ou do acessório (curvas de 90° , 45° , válvulas em diferentes condições de abertura, por exemplo). Os valores constantes de K para cada acessório devem corresponder a elevados números de Reynolds, condição que leva à independência entre K e Re (PORTO, 2006, p. 71; WHITE, 2002).

$$h_L = K \frac{V^2}{2g}$$
(15)

Problema 1. Dois reservatórios interligados por uma tubulação

Imagine, com auxílio da Figura 5, dois reservatórios com níveis constantes interligados por uma tubulação de diâmetro interno D e comprimento total L . O material da tubulação é ferro fundido e possui rugosidade ε que pode mudar com o envelhecimento do conduto. Se há um desnível entre as superfícies livres da água nos reservatórios, isto é, $z_1 - z_2 > 0$, então acontecerá escoamento no conduto. Considere também os seguintes acessórios: (1) Passagem de reservatório para tubulação, $K = 0,8$; (2) Duas curvas de 90° , $K = 0,9$; (3) Duas curvas de 45° , $K = 0,2$; (4) Duas válvulas abertas, $K = 5,0$; (5) Saída da tubulação, $K = 1,0$. Com essas informações, o objetivo deste problema é realizar as análises propostas a seguir.



Figura 5 – Desenho esquemático do problema 1

Problema 1.1 – Modelo Matemático.

Simplifique a equação da energia para este problema e escreva o sistema de equações que representa este problema.

Solução

Observe que o problema não contém bombas ou turbinas. Sendo assim, o líquido não recebe ou cede trabalho ou potência através de uma máquina, isto é, $W_s = 0$. Escolhendo um volume de controle com extremidades nas superfícies livres, escreve-se: $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$ e $V_1 = V_2 = 0$. Com essas considerações, conclui-se que a equação 2, reescrita a seguir,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H,$$

assume a seguinte forma:

$z_1 = z_2 + \Delta H$. Empregando a equação de Darcy-Weisbach e a equação que modela as perdas localizadas, a energia dissipada ou perda de carga total, ΔH , será calculada com a soma de todas as partes dessa dissipação total.

$$z_1 = z_2 + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \left(\sum K \right) \frac{V^2}{2g}$$

Finalmente, com a equação 14 e a definição do número de Reynolds, pode-se escrever o sistema de equações fechado.

$$f = \left\{ \left(\frac{64}{\text{Re}} \right)^8 + 9,5 \left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) - \left(\frac{2500}{\text{Re}} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0,125},$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu}.$$

Para pensar.

A relação linear entre a perda de carga distribuída, h_f , e L/D existe para a condição de escoamento completamente desenvolvido. Essa condição de equilíbrio deve ocorrer para todo o comprimento do conduto, L do conduto entre os dois reservatórios?

Problema 1.2 – Cálculo da vazão.

Com os dados apresentados a seguir, calcule a vazão empregando o *software* Excel® e o recurso numérico “Solver”.

Tabela 1 – Dados do problema 1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z_1	z_2	L	ε	D	g	ν	K_e	K_s	K_v	K_{90°	K_{45°
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m/s ²]	[m ² /s]	entrada	saída	2 válvulas	2 curvas	2 curvas
60	45	1200	0,00025	0,1	9,8	1,0E-06	0,8	1	5	0,9	0,2

Solução

O problema proposto estabelece o *software* a ser empregado assim como o método computacional, o solver. Trata-se de uma planilha eletrônica amplamente empregada para realização de cálculos em diversas áreas, dentre as quais estão a Hidráulica e a Mecânica dos Fluidos. Com o intuito de utilizar esse recurso, deve-se identificar uma “função objetivo”. Esta função, apresentada a seguir, é obtida com o equacionamento do problema anterior:

$$F(V) = z_1 - z_2 - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} - \left(\sum K \right) \frac{V^2}{2g} = 0.$$

Observe que a equação da energia simplificada para este problema foi reescrita para identificar $F(V) = 0$, que é a função objetivo. A Tabela 2 é uma possível forma de organizar a solução do problema. Por razões didáticas, as colunas foram numeradas de 1 a 12. A Tabela 3 apresenta comentários sobre esta forma de resolver o problema.

Tabela 2 – Solução do problema 1.2

SOLUÇÃO											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V [m/s]	Re	ε/D	f	ΣK	L/D	$V^2/(2g)$ [m]	h_f [m]	h_L [m]	F(V) = 0	Q [m ³ /s]	Q [L/s]
0,938	9,4E+04	0,0025	0,02666	14	12000	0,04492	14,37	0,6288	0,0000	0,00737	7,37

Tabela 3 – Comentários sobre a solução apresentada na Tabela 2 e planilha deste problema

Co-luna	Comentário
1	A velocidade média, V, é inicialmente desconhecida. Observe que $Q = VA$, portanto, ao calcular V, a vazão poderá ser calculada facilmente. Uma semente para V é necessária. Sugere-se um valor entre 0,5 e 3,0 m/s, valores usuais em hidráulica.
2	Com o valor de V, calcula-se o número de Reynolds. V foi digitado inicialmente como uma semente, isto é, um valor inicial necessário para que os cálculos sejam realizados. Portanto, todos os cálculos realizados com esse número estarão provavelmente incorretos antes do uso do solver.
3	De um ponto de vista prático pensando-se na elaboração da planilha, o cálculo da rugosidade relativa simplifica a digitação da fórmula para o fator de cisalhamento.
4	Com os valores de Re e ε/D , pode-se calcular f (foi empregada a equação 14).
5	Ao calcular o somatório dos valores de K, observe o número de acessórios.
6	L/D simplifica a escrita de h_f e é um bom indicador da influência relativa das perdas de carga localizadas.
7	O cálculo da carga cinética também simplifica a digitação das equações para as perdas de carga.
8	Nesta célula é calculada a perda de carga distribuída, com a equação 5.
9	É empregada a equação 15, modelo para as perdas localizadas.
10	Nesta célula é digitada a função objetivo, $F(V)=0$, descrita anteriormente. Não é necessário escrever nesta célula as funções originais. São empregadas as células anteriores que contêm tais funções (para f, h_f e h_L). Com $V = 1,0$ m/s, $F(V) = -1,9811$, indicando que a solução ainda não foi encontrada. É neste estágio que o solver passa a ser necessário.
11	Cálculo realizado com a definição de vazão, $Q = VA$, sendo $A = \pi D^2/4$.
12	Apresentação do resultado em litros por segundo, L/s.

Uso do solver

Caro leitor: Estou utilizando agora o Excel[®] 2010. Outras versões também possuem o solver, mas a descrição do procedimento de uso pode ser um pouco diferente. Verifique se o solver está disponível entre as ferramentas de Análise em Dados (Figura 6a). Se não, clique em Arquivo (primeira opção na parte superior, provavelmente), em seguida, em Opções, Suplementos e Ir... (botão localizado na parte inferior da janela). Essas ações deverão ativar uma janela. Marque a opção Solver e OK. Em máquinas atuais, a instalação deve acontecer em poucos segundos.

Com o solver instalado, clique novamente em Dados e procure o Solver em Análise. A aparência deve ser semelhante à da Figura 1a. Parte da janela do solver é apresentada na Figura 1b. Definir objetivo é a primeira ação necessária. Escolha a célula que contém $F(V)$ e em seguida clique em “Valor de”. Com isso você estabelece que $F(V)$ deve ser igual a 0. Abaixo, escolha a única célula variável deste problema, a que contém a velocidade. Finalmente, sem alterar as configurações padrão, clique em resolver. Uma mensagem como “O solver encontrou uma solução...” indica que o cálculo numérico foi realizado de forma adequada, isto é, que o processo iterativo convergiu para uma raiz de $F(V)=0$. Algumas verificações simples devem ser realizadas, como somar as perdas de carga e conferir com o valor vinculado ao problema ($z_1 - z_2$); observar se $F(V)$ resultou em um valor realmente baixo (às vezes há a exibição de 0,000 ou de números muito pequenos); se o valor de f é consistente com o esperado, isto é, um número da ordem de 10^{-2} . Recomenda-se também resolver o problema com outro método numérico, objetivo do problema 1.2.

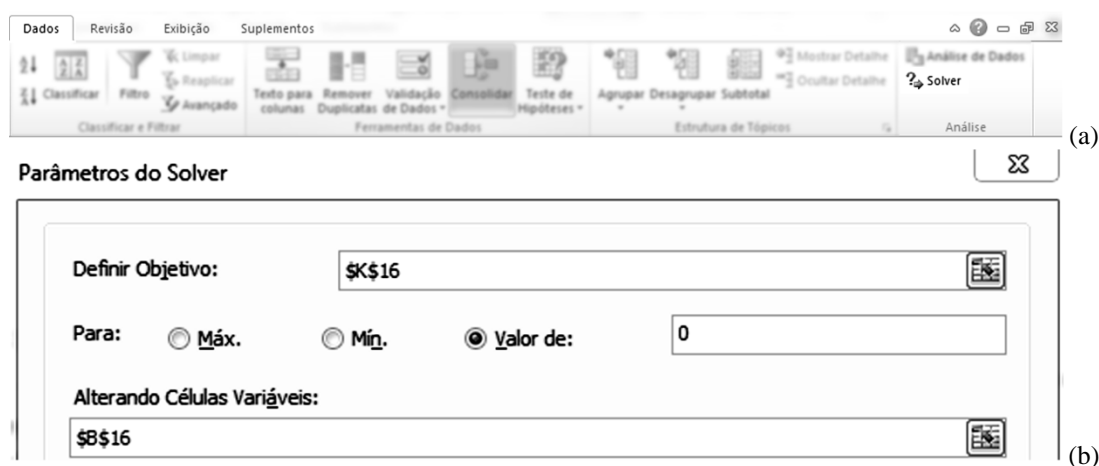


Figura 6 – Uso do solver para solução do problema 1

Problema 1.3 – Método iterativo simplificado

Resolva o problema anterior com o método iterativo simplificado descrito a seguir: (1) Isole no primeiro membro da equação da energia a velocidade média presente no cálculo das perdas de carga; (2) utilize a equação obtida desta forma como equação para as iterações, em que V será V_{i+1} e f , que é função de V , será calculado na iteração i . Deste modo, temos um esquema numérico explícito.

Solução

Com pouca dificuldade algébrica, a equação da energia pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$z_1 = z_2 + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \left(\sum K \right) \frac{V^2}{2g} = z_2 + \frac{V^2}{2g} \left(f \frac{L}{D} + \sum K \right) \therefore V = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{f \frac{L}{D} + \sum K}}$$

Seguindo o descrito anteriormente, escreve-se: $V_{i+1} = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{f_i \frac{L}{D} + \sum K}}$.

Parte da solução encontrada na planilha deste problema é apresentada a seguir. Observe que a célula 4 contém os números das iterações. A célula 5, para iteração 1, o “chute”; as células 6 e 7 os valores de Re e f calculados com o “chute”; a célula 8 contém a equação anterior e a célula 9 o erro relativo. Em seguida, escreve-se o valor da célula 8 (para i=1) na célula 5 (para i=2). A partir deste ponto, as células podem ser preenchidas automaticamente. Verifique o funcionamento do método para outras sementes, como 0,5 m/s, 3,0 m/s ou até mesmo estimativas distantes da realidade prática, como 50 m/s (apenas para avaliar a sua capacidade de convergência em função de “chutes” muito diferentes). Felizmente, a função que define o fator de cisalhamento é pouco sensível a esse número, conduzindo os cálculos rapidamente a valores mais próximos da realidade. O leitor também deve escolher um critério de parada, o que pode ser feito com o erro relativo ou com a simples observação dos resultados para V. Observe que a solução é encontrada com três iterações.

Tabela 4 – Parte da planilha desenvolvida para solução do Problema 1.3

4	5	6	7	8	9
i	V _i [m/s]	Re _i	f _i	V _{i+1} [m/s]	Erro relat. [%]
1	1,000	1,0E+05	0,026569	0,93986	6,4E+00
2	0,93986	9,4E+04	0,02666	0,93832	1,6E-01
3	0,93832	9,4E+04	0,026663	0,93828	4,4E-03
4	0,93828	9,4E+04	0,026663	0,93827	1,2E-04
5	0,93827	9,4E+04	0,026663	0,93827	3,3E-06

Problema 1.4 – Discussão

Empregando um dos métodos computacionais descritos anteriormente, calcule a vazão para um diâmetro duas vezes maior, isto é, D = 200 mm. Discuta a solução obtida.

Solução

Com a planilha desenvolvida, o cálculo da nova vazão para $D = 0,2$ m não deve demorar mais que alguns segundos e o valor encontrado é $Q = 44,8$ L/s, aproximadamente 6,1 vezes o resultado anterior. Observe que as equações para o cálculo das perdas de carga podem ser escritas em termos da vazão, com $V = Q/A$, como apresentado a seguir:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{Q^2}{2g\pi^2 D^4 / 16} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4}, \text{ portanto, } h_f = \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \text{ e } h_L = \frac{8KQ^2}{g\pi^2 D^4}.$$

Aumentar o diâmetro implica aumentar a vazão, uma vez que a perda de carga total é $z_1 - z_2$. A relação entre Q e D envolve potências muito altas, condição que justifica o resultado encontrado.

Problema 1.5 – Cálculo da vazão para diferentes diâmetros: Solução simultânea

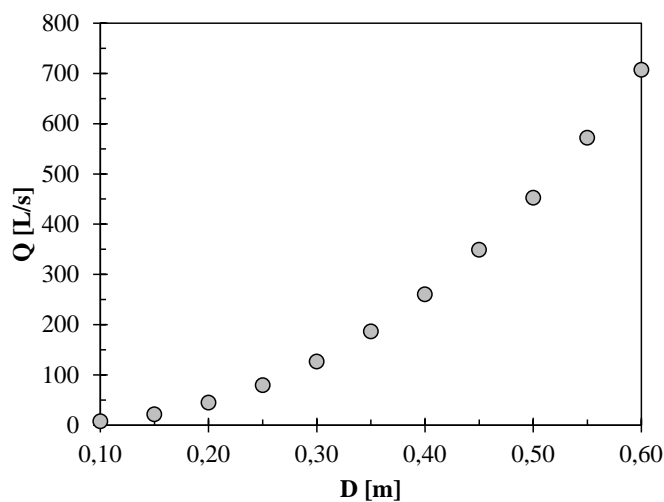
Desenvolva uma planilha capaz de resolver simultaneamente o problema de cálculo da vazão para diferentes diâmetros, empregando o recurso solver. Apresente, em um gráfico, a relação entre Q [L/s] e D [m].

Solução

O emprego do solver para a solução deste problema segue o que foi descrito no problema 1.2. As diferenças principais são: (1) O diâmetro agora não é apenas um número, mas uma lista de valores, como pode ser visto na Tabela 5; (2) As grandezas calculadas com o diâmetro devem ser calculadas para cada diâmetro (ver Tabela 5); (3) A função objetivo continua sendo $F(V) = 0$ e apenas uma célula deve ser inserida em “Definir Objetivo”, na janela do solver. Pode-se utilizar a célula do primeiro diâmetro, por exemplo. A solução simultânea será possível com o uso de restrições disponíveis no solver. Observe, na Figura 7a, o espaço abaixo da expressão “Sujeito às Restrições”. Inicialmente ele deve estar em branco. Clique em Adicionar e será exibida uma janela como a da Figura 7b. Em Referência de Célula, adicione todas as células que contêm $F(V) = 0$ (coluna 11 da Tabela 5). Ao lado, mude o \leq para $=$. Em seguida, digite 0 (zero) na opção Restrição. A aparência final deverá ser aquela da Figura 7c. Clique em OK e a restrição será exibida como na Figura 7a. Finalmente, clicando em Resolver o solver deverá solucionar o problema em poucos segundos. Possíveis problemas poderão ser resolvidos com “chutes” adequados. Neste caso foram empregados valores de V iguais a 1,0 m/s em todas as células.

Tabela 5 – Solução do problema 1.5: Organização da planilha para uso do solver

SOLUÇÃO												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
V [m/s]	D [m]	Re	ε/D	f	ΣK	L/D	$V^2/(2g)$ [m]	h_f [m]	h_L [m]	F(V) = 0	Q [m ³ /s]	Q [L/s]
0,938	0,10	9,4E+04	0,0025	0,02666	14	12000,0	0,04492	14,37	0,6288	0,0000	0,00737	7,37
1,204	0,15	1,8E+05	0,00167	0,0236	14	8000,0	0,07396	13,96	1,0355	0,0000	0,02128	21,28
1,426	0,20	2,9E+05	0,00125	0,02176	14	6000,0	0,10376	13,55	1,4526	0,0000	0,0448	44,80
1,618	0,25	4,0E+05	0,001	0,02049	14	4800,0	0,13350	13,13	1,8691	0,0000	0,0794	79,40
1,786	0,30	5,4E+05	0,00083	0,01954	14	4000,0	0,16276	12,72	2,2787	0,0000	0,12625	126,25
1,936	0,35	6,8E+05	0,00071	0,01879	14	3428,6	0,19127	12,32	2,6777	0,0000	0,18628	186,28
2,071	0,40	8,3E+05	0,00063	0,01818	14	3000,0	0,21886	11,94	3,0641	0,0000	0,26027	260,27
2,193	0,45	9,9E+05	0,00056	0,01767	14	2666,7	0,24547	11,56	3,4366	0,0000	0,34885	348,85
2,305	0,50	1,2E+06	0,0005	0,01723	14	2400,0	0,27105	11,21	3,7947	0,0000	0,45256	452,56
2,407	0,55	1,3E+06	0,00045	0,01684	14	2181,8	0,29558	10,86	4,1381	0,0000	0,57185	571,85
2,501	0,60	1,5E+06	0,00042	0,01651	14	2000,0	0,31908	10,53	4,4671	0,0000	0,70708	707,08



(d)

Figura 7 – Solução do problema 1.5: Relação entre Q e D

Problema 1.6 – Envelhecimento do conduto

Calcule a relação entre a vazão e a rugosidade relativa, para valores de ε entre 0,25 mm (ferro fundido novo) e 5 mm (ferro fundido velho). Realize a análise para $D = 100$ mm e $D = 600$ mm e apresente gráficos relacionando Q/Q_{\max} e ε/D , em que Q_{\max} = vazão máxima para um determinado diâmetro.

Solução

Duas planilhas foram elaboradas para solução deste problema. A primeira corresponde a $D = 100$ mm e a segunda a $D = 600$ mm. O leitor encontrará essas planilhas no arquivo principal do problema 1. Mais uma vez, o uso da restrição para $F(V) = 0$ deve ser empregada com o objetivo de resolver todas as equações ao mesmo tempo. Note que uma coluna foi criada para os diferentes valores de rugosidade absoluta equivalente e outra para o adimensional Q/Q_{\max} . O gráfico a seguir resume os resultados e mostra que a alteração da rugosidade do material reduz a vazão a valores próximos de 62% da vazão original (Q_{\max}), para $D = 100$ mm, e para 74% quando considerado $D = 600$ mm. Sobre o tema envelhecimento dos condutos, sugere-se a leitura de Lencastre (1983, p.123-125).

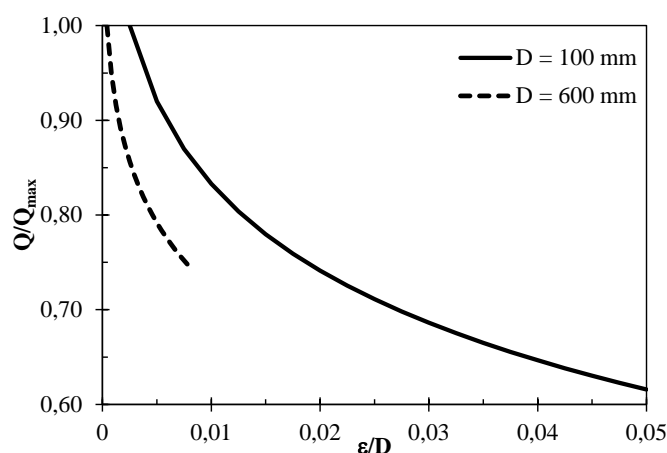


Figura 8 – Solução do problema 1.6

Problema 1.7 – Cálculo do diâmetro

A função objetivo apresentada anteriormente foi escrita em termos da velocidade média, isto é, $F(V) = 0$ indica que a variável a ser determinada para atender à restrição do equacionamento é V . Com o estudo dos problemas anteriores, não haverá dificuldade para a determinação do diâmetro, ou da rugosidade ou de qualquer outra grandeza presente na formulação. Sob um ponto de vista mais geral, a função objetivo pode ser expressa em termos de V , D ou ε . Considerando o cálculo do diâmetro, escreve-se:

$$F(D) = z_1 - z_2 - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} - \left(\sum K \right) \frac{V^2}{2g} = 0.$$

Calcule D para que o sistema hidráulico seja capaz de transportar uma vazão de 90 L/s, com $\varepsilon = 0,50$ mm e os demais dados do problema 1.2.

Solução

Seguindo procedimentos semelhantes aos descritos anteriormente, foi construída a planilha correspondente a este problema (ver arquivo do Problema 1). O uso do solver deve considerar o diâmetro como célula variável. Após os cálculos, o resultado obtido foi $D = 270$ mm. Cabe comentar que os cálculos consideram que D é o diâmetro interno, isto é, o diâmetro externo menos duas vezes a espessura da parede do conduto (e duas vezes a espessura do revestimento, se existir).

Considerações finais

As bases dos modelos matemáticos resolvidos neste capítulo foram sintetizadas com a exposição feita inicialmente. O objetivo principal desta parte do livro foi resolver problemas importantes de hidráulica com auxílio de recursos computacionais. Sendo assim, detalhes encontrados apenas com as deduções dos modelos expostos não foram evidenciados. Isso não significa que eles são menos importantes. As deduções mostram as possibilidades de usos e limitações das equações. Sugere-se ao leitor referências como Porto (2006) e Schulz (2003), para um exame minucioso das formulações utilizadas. A leitura das páginas seguintes mostrará construções semelhantes, mas com certa brevidade em tópicos já tratados aqui.

Lista de símbolos

(com indicação de unidades de acordo com o Sistema Internacional).

Maiúsculas

A = Área da seção transversal do escoamento, $A = \pi D^2/4$, [m²].

D = diâmetro interno do tubo, [m].

K = fator da perda de carga localizada. Adimensional.

L = Comprimento de um conduto com diâmetro uniforme, [m].

Q = vazão, [m³/s].

Re = Número de Reynolds, VD/v . Adimensional.

R_h = Raio hidráulico, [m].

\dot{W}_s = Potência mecânica associada a um eixo (bomba ou turbina), [J/s].

V = Velocidade média (média calculada na seção transversal), [m/s].

Minúsculas

h_L = perda de carga localizada.

h_f = perda de carga distribuída.

f = fator de cisalhamento, fator de resistência ou fator de “atrito” de Darcy-Weisbach. Adimensional.

g = aceleração devido à gravidade, [m/s²].

\dot{m} = Descarga (vazão em massa), [kg/s].

p = pressão, [Pa].

v = velocidade em um ponto do escoamento, [m/s].

z = energia potencial gravitacional por unidade de peso de fluido, em relação a um plano de referência. Cota. Carga de posição. [m].

Alfabeto grego

α = fator de correção da energia cinética ou coeficiente de Coriolis. Adimensional. (Alfa).

ε = Rugosidade absoluta equivalente, [m]. (Épsilon).

ν = Viscosidade cinemática, [m²/s]. Valor prático em hidráulica: 10⁻⁶ m²/s. (ni, nu ou niú).

τ_o = tensão média de cisalhamento sobre o perímetro molhado, [Pa]. (tau).

γ = peso específico, [N/m³]. (gama).

CAPÍTULO 2

CONDUTOS FORÇADOS: REDES MALHADAS



Instabilidades em um jato que escoia através de uma torneira residencial. Todos os dias, ao usar esse acessório, são formadas estruturas tão interessantes quanto essa. Em geral, elas não são notadas. A água foi conduzida através de uma rede de tubulações, que também não é observada na maior parte do tempo.

Fonte: Elaboração de André Luiz Simões .

Introdução

Redes de distribuição de água constituem sistemas hidráulicos de tubulações mais complexos em relação ao problema abordado no capítulo anterior. Este capítulo possui dois objetivos principais: (1) Explorar o *software* EPANET 2.0 e (2) empregar o *software* Excel® com o recurso solver para dimensionamento e verificação de redes. Recomenda-se a leitura prévia do capítulo 6 de Porto (2006), para que o leitor se familiarize com conceitos básicos dos sistemas de abastecimento de água, especialmente das redes de distribuição de água.

A formulação física-matemática para a solução de problemas com redes de distribuição de água é semelhante à do capítulo 1, sendo constituída por: (1) Equação da Energia, (2) Equação de Darcy-Weisbach e (3) Equação para o cálculo do fator de resistência. Uma rede malhada é formada por anéis ou malhas. Cada anel possui trechos e nós, como indicado no desenho da Figura 1. Observe que o somatório das vazões em um nó deve ser igual a zero. A mesma imagem indica a linha de energia do escoamento no circuito. Se for atribuído sinal positivo para a perda de carga em um trecho com escoamento no sentido horário e sinal negativo para a perda de carga em um trecho com escoamento no sentido anti-horário, a soma das perdas de carga em um anel deve ser igual a zero. Essas condições básicas ligadas à hidráulica serão empregadas a seguir.

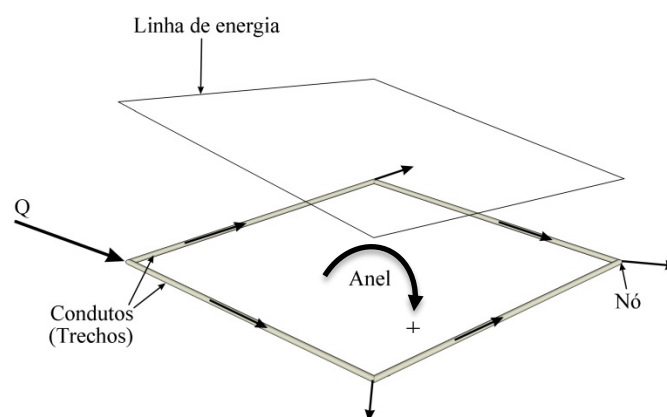


Figura 1 – Anel de uma rede malhada: Definições básicas

Método de Hardy Cross

Neste item é descrito um dos mais conhecidos métodos iterativos para a solução de redes malhadas, o método de Hardy Cross, que foi professor de engenharia estrutural na universidade de Illinois entre 1921 e 1937, localizada em Urbana-Champaign [3].¹

¹ Ver em :< <http://cee.illinois.edu/about/history/cross>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

Objetivo: Determinar a distribuição correta das vazões nos trechos que compõem a rede.

Condições relacionadas à Hidráulica:

- 1) A soma das vazões em cada nó da rede deve ser igual a zero.
- 2) Em qualquer circuito, a soma das perdas de carga deve ser igual a zero. Neste caso, como convenção, é adotado um valor positivo para a perda de carga no trecho com escoamento em sentido horário. Para o sentido anti-horário é adotado sinal negativo.

A distribuição de vazões no início dos cálculos é estabelecida de tal maneira que a primeira condição anterior seja satisfeita. Em seguida, deve-se verificar a condição (2), que provavelmente não será atendida. Deste modo, uma correção ΔQ deverá ser adicionada à vazão da primeira iteração, Q_a , isto é:

$$Q = Q_a + \Delta Q. \quad (1)$$

A perda de carga pode ser expressa por

$$\Delta H = KQ^n, \quad (2)$$

Identificar os valores de K e n é um exercício que será deixado para o leitor (compare a equação 2 com as equações de Darcy-Weisbach e Hazen-Williams). Lembrando que a soma das perdas de carga deve ser igual a zero, empregando a vazão “corrigida”, escreve-se:

$$\sum \Delta H = \sum KQ^n = \sum K(Q_a + \Delta Q)^n = \sum KQ_a^n \left(1 + \frac{\Delta Q}{Q_a}\right)^n = 0. \quad (3)$$

Empregando o binômio de Newton (expandido com a série infinita), obtém-se:

$$\sum KQ_a^n \left(1 + \frac{\Delta Q}{Q_a}\right)^n = \sum KQ_a^n \left[1 + n \frac{\Delta Q}{Q_a} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta Q}{Q_a}\right)^2 + \dots\right] = 0.$$

Os termos da série empregados são os dois primeiros, i.e., o truncamento é feito a partir do termo quadrático. Com algumas manipulações algébricas, escritas abaixo, resolve-se a equação para o termo de correção da vazão, ΔQ :

$$\sum KQ_a^n \left(1 + n \frac{\Delta Q}{Q_a}\right) = 0 \Rightarrow \sum \left(KQ_a^n + KQ_a^n n \frac{\Delta Q}{Q_a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum KQ_a^n = -n \sum KQ_a^n \frac{\Delta Q}{Q_a} \Rightarrow \Delta Q = -\frac{\sum KQ_a^n}{n \sum \frac{KQ_a^n}{Q_a}}$$

$$\Delta Q = -\frac{\sum \Delta H_a}{n \sum \frac{\Delta H_a}{Q_a}} \quad (4)$$

Ao programar, observe atentamente o fator “n” existente no denominador. Observe também que o índice “a” representa o valor da primeira iteração, caracterizando o método como explícito. É claro que na iteração seguinte os valores empregados serão aqueles calculados como resultados da iteração anterior, sendo necessário um “chute” apenas no início do processo. Deste modo, a vazão “Q_a” da segunda iteração será a vazão Q_a + ΔQ. Redes com mais de um anel possuem trechos compartilhados por mais de um anel. O cálculo da correção, para esse caso, será ilustrado com a solução dos problemas a seguir.

Problema 2. Cálculo de redes com diferentes métodos

Problema 2.1 – Rede com dois anéis

Uma rede é formada por dois anéis com tubulações de P.V.C. rígido classe 20 e $\epsilon = 0,0015$ mm. Com os dados fornecidos no desenho a seguir, calcule a distribuição de vazões ao longo da rede, nos anéis. Observe que o nó número um corresponde ao início da rede, com vazão afluyente de 72 L/s, que é distribuída ao longo dos dois anéis. No desenho as setas apresentadas nos nós 2 a 7 indicam superfícies de controle de saída. O nó 8 é um reservatório de nível constante.

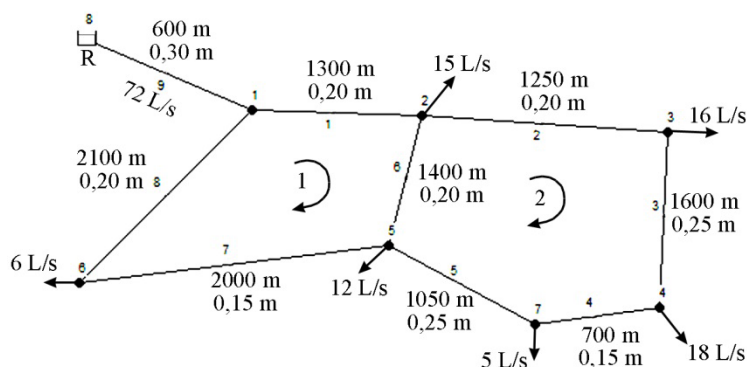


Figura 2 – Rede do problema 2.1.

Solução.

Primeira solução: Uso do algoritmo de Hardy Cross

O algoritmo desenvolvido pelo professor Hardy Cross, descrito anteriormente, pode ser empregado em uma planilha eletrônica, como o Excel[®], por exemplo, com certa facilidade. A planilha da Figura 3 ilustra o processo de solução e pode ser encontrada nos arquivos do Problema 2. Os dados e cálculos foram organizados para cada anel. As colunas de 1 a 4 contêm dados de entrada e não precisam de maiores explicações. A coluna 5 (Figura 3a) contém as sementes, valores escolhidos de tal maneira que o somatório das vazões nos nós seja igual a zero. A coluna seguinte converte as vazões para m³/s e as colunas 7 a 10 permitem o cálculo das perdas de carga distribuídas (únicas consideradas aqui), que é efetuado na coluna 11. Note que o sinal corresponde ao sinal da vazão (ou de V). Para preservar esse sinal, no lugar de V², escreve-se V||V|| ou V*ABS(V). Relembrando a formulação obtida para a correção da vazão, ΔQ, percebe-se a necessidade da coluna 12. Finalmente, na coluna 13, são determinados os valores das correções, que serão diferentes apenas entre anéis e para o trecho compartilhado, que segue a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{Anel1, trecho 6}} &= \Delta Q_{\text{anel1}} - \Delta Q_{\text{anel2}} \\ \Delta Q_{\text{Anel2, trecho 6}} &= \Delta Q_{\text{anel2}} - \Delta Q_{\text{anel1}} \end{aligned} \quad (5)$$

As imagens seguintes, de (b) a (e), ilustram o processo iterativo e a evolução dos valores de ΔQ e das somas das perdas de carga nos anéis. Sugere-se, como exercício, que o leitor utilize outra semente e avalie a convergência do método de Cross. É interessante também calcular erros em função da iteração para visualizar a convergência. Sobre esse tema, a NBR 12218/1994 estabelece que os resíduos máximos de vazão e de “carga piezométrica” devem ser 0,1 L/s e 0,5 kPa. Em outros termos, pode-se usar o critério de parada: ΔQ ≤ 0,1 L/s e Σh_f ≤ 0,05 mH₂O (erro de fechamento da linha piezométrica). Com recursos computacionais, esses limites são alcançados sem muito esforço.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ANEL	Trecho	L [m]	D [m]	Q _a [L/s]	Q _a [m ³ /s]	V [m/s]	Re [-]	ε/D [-]	f [-]	h _f [m]	h _f /Q _a [s/m ²]	ΔQ [m ³ /s]
1	1-2	1300	0,2	62,47	0,06247	1,99	4,0E+05	7,5E-06	0,0137	18,0223	288,495	-0,0133
	2-5	1400	0,2	11,94	0,01194	0,38	7,6E+04	7,5E-06	0,0190	0,97835	81,939	-0,0044
	5-6	2000	0,15	-3,53	-0,0035	-0,20	3,0E+04	0,00001	0,0234	-0,6353	179,959	-0,0133
	6-1	2100	0,2	-9,53	-0,0095	-0,30	6,1E+04	7,5E-06	0,0199	-0,9816	103,002	-0,0133
2	2-3	1250	0,2	35,53	0,03553	1,13	2,3E+05	7,5E-06	0,0152	6,21388	174,891	-0,0089
	3-4	1600	0,25	19,53	0,01953	0,40	9,9E+04	6E-06	0,0179	0,92588	47,4083	-0,0089
	4-7	700	0,15	1,53	0,00153	0,09	1,3E+04	0,00001	0,0289	0,05152	33,6764	-0,0089
	7-5	1050	0,25	-3,47	-0,0035	-0,07	1,8E+04	6E-06	0,0266	-0,0285	8,22085	-0,0089
	5-2	1400	0,2	-11,94	-0,0119	-0,38	7,6E+04	7,5E-06	0,0190	-0,9784	81,939	0,00437
			Restrição (trechos)						Anel 1	Soma	17,3837	653,395
			2-5/5-2						Anel 2	Soma	6,18441	346,135

(a)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f	h _f /Q _a	ΔQ	
	[m]	[m]	[L/s]	[m³/s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]	[s/m²]	[m³/s]	
1-2	1300	0,2	49,17	0,04917	1,57	3,1E+05	7,5E-06	0,0143	11,6531	237,009	0,0013	
2-5	1400	0,2	7,57	0,00757	0,24	4,8E+04	7,5E-06	0,0210	0,43466	57,412	0,00474	
5-6	2000	0,15	-16,83	-0,0168	-0,95	1,4E+05	0,00001	0,0167	-10,29	611,311	0,0013	
6-1	2100	0,2	-22,83	-0,0228	-0,73	1,5E+05	7,5E-06	0,0166	-4,6962	205,678	0,0013	
2-3	1250	0,2	26,60	0,0266	0,85	1,7E+05	7,5E-06	0,0161	3,68079	138,394	-0,0034	
3-4	1600	0,25	10,60	0,0106	0,22	5,4E+04	6E-06	0,0204	0,31082	29,3322	-0,0034	
4-7	700	0,15	-7,40	-0,0074	-0,42	6,3E+04	0,00001	0,0198	-0,8263	111,604	-0,0034	
7-5	1050	0,25	-12,40	-0,0124	-0,25	6,3E+04	6E-06	0,0197	-0,2699	21,7635	-0,0034	
5-2	1400	0,2	-7,57	-0,0076	-0,24	4,8E+04	7,5E-06	0,0210	-0,4347	57,412	-0,0047	
			Restrição (trechos)				Anel 1		Soma	-2,8984	1111,41	
			2-5/5-2				Anel 2		Soma	2,46074	358,505	

(b)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f	h _f /Q _a	ΔQ	
	[m]	[m]	[L/s]	[m³/s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]	[s/m²]	[m³/s]	
1-2	1300	0,2	50,47	0,05047	1,61	3,2E+05	7,5E-06	0,0143	12,2212	242,143	-6E-05	
2-5	1400	0,2	12,31	0,01231	0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0188	1,0327	83,913	-0,0001	
5-6	2000	0,15	-15,53	-0,0155	-0,88	1,3E+05	0,00001	0,0169	-8,899	573,068	-6E-05	
6-1	2100	0,2	-21,53	-0,0215	-0,69	1,4E+05	7,5E-06	0,0168	-4,2243	196,215	-6E-05	
2-3	1250	0,2	23,16	0,02316	0,74	1,5E+05	7,5E-06	0,0165	2,86899	123,853	7,1E-05	
3-4	1600	0,25	7,16	0,00716	0,15	3,6E+04	6E-06	0,0223	0,15532	21,6792	7,1E-05	
4-7	700	0,15	-10,84	-0,0108	-0,61	9,2E+04	0,00001	0,0182	-1,632	150,613	7,1E-05	
7-5	1050	0,25	-15,84	-0,0158	-0,32	8,1E+04	6E-06	0,0187	-0,4174	26,3614	7,1E-05	
5-2	1400	0,2	-12,31	-0,0123	-0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0188	-1,0327	83,913	0,00013	
			Restrição (trechos)				Anel 1		Soma	0,13066	1095,34	
			2-5/5-2				Anel 2		Soma	-0,0578	406,419	

(c)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f	h _f /Q _a	ΔQ	
	[m]	[m]	[L/s]	[m³/s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]	[s/m²]	[m³/s]	
1-2	1300	0,2	50,41	0,05041	1,60	3,2E+05	7,5E-06	0,0143	12,195	241,908	-1E-06	
2-5	1400	0,2	12,18	0,01218	0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	1,01317	83,2105	2,5E-06	
5-6	2000	0,15	-15,59	-0,0156	-0,88	1,3E+05	0,00001	0,0169	-8,9606	574,829	-1E-06	
6-1	2100	0,2	-21,59	-0,0216	-0,69	1,4E+05	7,5E-06	0,0168	-4,2454	196,65	-1E-06	
2-3	1250	0,2	23,24	0,02324	0,74	1,5E+05	7,5E-06	0,0165	2,88488	124,157	-3E-06	
3-4	1600	0,25	7,24	0,00724	0,15	3,7E+04	6E-06	0,0223	0,15806	21,8441	-3E-06	
4-7	700	0,15	-10,76	-0,0108	-0,61	9,1E+04	0,00001	0,0183	-1,6128	149,83	-3E-06	
7-5	1050	0,25	-15,76	-0,0158	-0,32	8,0E+04	6E-06	0,0187	-0,4141	26,2681	-3E-06	
5-2	1400	0,2	-12,18	-0,0122	-0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	-1,0132	83,2105	-3E-06	
			Restrição (trechos)				Anel 1		Soma	0,00216	1096,6	
			2-5/5-2				Anel 2		Soma	0,00284	405,31	

(d)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f	h _f /Q _a	ΔQ	
	[m]	[m]	[L/s]	[m³/s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]	[s/m²]	[m³/s]	
1-2	1300	0,2	50,41	0,05041	1,60	3,2E+05	7,5E-06	0,0143	12,1946	241,904	-3E-07	
2-5	1400	0,2	12,18	0,01218	0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	1,01354	83,224	2,1E-07	
5-6	2000	0,15	-15,59	-0,0156	-0,88	1,3E+05	0,00001	0,0169	-8,9617	574,858	-3E-07	
6-1	2100	0,2	-21,59	-0,0216	-0,69	1,4E+05	7,5E-06	0,0168	-4,2457	196,658	-3E-07	
2-3	1250	0,2	23,23	0,02323	0,74	1,5E+05	7,5E-06	0,0165	2,88409	124,142	-5E-07	
3-4	1600	0,25	7,23	0,00723	0,15	3,7E+04	6E-06	0,0223	0,15792	21,836	-5E-07	
4-7	700	0,15	-10,77	-0,0108	-0,61	9,1E+04	0,00001	0,0183	-1,6138	149,869	-5E-07	
7-5	1050	0,25	-15,77	-0,0158	-0,32	8,0E+04	6E-06	0,0187	-0,4143	26,2727	-5E-07	
5-2	1400	0,2	-12,18	-0,0122	-0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	-1,0135	83,224	-2E-07	
			Restrição (trechos)				Anel 1		Soma	0,00073	1096,64	
			2-5/5-2				Anel 2		Soma	0,00044	405,344	

(e)

Figura 3 – Solução com o método de Hardy Cross

Segunda solução: Uso do solver.

A solução anterior ilustra o uso de um método numérico relativamente robusto e com bases física e matemática bem definidas, como demonstrado em sua dedução. O método computacional empregado nesta parte da solução utiliza o solver e também foi elaborado com atenção especial às condições hidráulicas. A sua descrição é exposta nas linhas subsequentes, com auxílio das imagens da Figura 4.

A coluna 5, antes do uso do solver, deve conter as sementes para as vazões nos trechos. É evidente que a distribuição apresentada, apenas com valores unitários, não corresponde à solução do problema. Tal distribuição nem mesmo garante que a soma das vazões nos nós seja igual a zero. Apesar dessa estimativa aparentemente inadequada para uso do algoritmo, o leitor poderá verificar que o solver é capaz de calcular a solução correta a partir dessa semente. A coluna 6 faz a conversão da vazão para o S.I..

As colunas 7 a 10 têm como objetivo principal permitir os cálculos das perdas de carga, que é realizado na coluna 11. Observe que as duas últimas células da coluna 11 calculam as somas das perdas de carga de cada anel. Essas somas devem ser anuladas para a solução correta do problema. Durante a construção da planilha, tenha o cuidado de escrever o número de Reynolds com o módulo de V (vale lembrar que as vazões podem assumir valores negativos durante a solução, de acordo com a convenção adotada para o somatório de vazões nos nós). Escreva também uma coluna atrelada aos nós da rede para realizar o somatório das vazões. Para cada nó, o somatório das vazões deverá ser igual a zero, com vazões positivas para entradas e negativas para as saídas. Sugere-se seguir a convenção empregada para os anéis ao criar esta parte da planilha. Tomando como exemplo o nó 2, escreve-se: $\Sigma Q|_2 = 0 = -15 + Q_{1-2} - Q_{2-3} - Q_{2-5}$.

O uso de restrições é necessário para solução com o solver. A soma das vazões no trecho comum aos anéis deve ser igual a zero (elas possuem mesmo módulo e sinais opostos de acordo com a convenção adotada para o sentido do escoamento nos anéis). As somas das vazões nos nós devem ser nulas também (essa condição deve ser inserida no solver). Finalmente, as somas das perdas de carga nos anéis devem ser iguais a zero, sendo esta mais uma restrição a ser digitada no solver.

Com a solução do problema, apresentada na Figura 5b, as restrições descritas foram atendidas, isto é, as somas das vazões nos “nós” respeitam a incompressibilidade, as somas das perdas de carga nos anéis resultaram próximas de zero e o resultado para o trecho **2-5** está consistente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ANEL	Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f
		[m]	[m]	[L/s]	[m ³ /s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]
1	1-2	1300	0,2	1,00	0,001	0,03	6,4E+03	7,5E-06	0,0352	0,01182
	2-5	1400	0,2	1,00	0,001	0,03	6,4E+03	7,5E-06	0,0352	0,01273
	5-6	2000	0,15	1,00	0,001	0,06	8,5E+03	0,00001	0,0324	0,07061
	6-1	2100	0,2	1,00	0,001	0,03	6,4E+03	7,5E-06	0,0352	0,01909
2	2-3	1250	0,2	1,00	0,001	0,03	6,4E+03	7,5E-06	0,0352	0,01136
	3-4	1600	0,25	1,00	0,001	0,02	5,1E+03	6E-06	0,0375	0,00508
	4-7	700	0,15	1,00	0,001	0,06	8,5E+03	0,00001	0,0324	0,02472
	7-5	1050	0,25	1,00	0,001	0,02	5,1E+03	6E-06	0,0375	0,00333
	5-2	1400	0,2	1,00	0,001	0,03	6,4E+03	7,5E-06	0,0352	0,01273
		Restrição (trechos)						Anel 1	Soma	0,11425
		2-5/5-2						Anel 2	Soma	0,05721

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ANEL	Trecho	L	D	Q _a	Q _a	V	Re	ε/D	f	h _f
		[m]	[m]	[L/s]	[m ³ /s]	[m/s]	[-]	[-]	[-]	[m]
1	1-2	1300	0,2	50,41	0,05041	1,60	3,2E+05	7,5E-06	0,0143	12,1944
	2-5	1400	0,2	12,18	0,01218	0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	1,01359
	5-6	2000	0,15	-15,59	-0,0156	-0,88	1,3E+05	0,00001	0,0169	-8,9621
	6-1	2100	0,2	-21,59	-0,0216	-0,69	1,4E+05	7,5E-06	0,0168	-4,2459
2	2-3	1250	0,2	23,23	0,02323	0,74	1,5E+05	7,5E-06	0,0165	2,88394
	3-4	1600	0,25	7,23	0,00723	0,15	3,7E+04	6E-06	0,0223	0,15789
	4-7	700	0,15	-10,77	-0,0108	-0,61	9,1E+04	0,00001	0,0183	-1,614
	7-5	1050	0,25	-15,77	-0,0158	-0,32	8,0E+04	6E-06	0,0187	-0,4143
	5-2	1400	0,2	-12,18	-0,0122	-0,39	7,8E+04	7,5E-06	0,0189	-1,0136
		Restrição (trechos)						Anel 1	Soma	-6E-10
		2-5/5-2						Anel 2	Soma	1,7E-08

(b)

Figura 4 – Parte da planilha para solução com o solver: (a) Antes da solução; (b) solução

Terceira solução: Uso do software EPANET 2.0

Na vanguarda da solução de problemas de Hidráulica envolvendo redes de distribuição estão os *softwares* que empregam códigos robustos, capazes de resolver escoamentos em regime permanente, regime quase permanente e regime transitório (com as equações do modelo elástico). Entre eles está o CTran, desenvolvido pela Fundação Centro Tecnológico de Hidráulica, e o EPANET 2.0, *software* gratuito elaborado pela *Environment Protection Agency*, dos Estados Unidos. Embora não contenha códigos para solução de transitórios hidráulicos em sua versão citada, o EPANET 2.0 foi escolhido para as discussões expostas aqui por ser gratuito, de código aberto e por resolver problemas de interesse prático em sistemas operacionais de acesso amplamente difundido, como o Windows 7, por exemplo.

Inicialmente, faça o *download* no site indicado como referência [2]² ao final deste capítulo. Cabe citar que leitor também encontrará versões traduzidas para o português em outras fontes. Após a instalação, recomenda-se a leitura do manual. De outro modo, ao seguir a descrição da Tabela 1 também será possível solucionar o problema e analisar os resultados.

² Ver em: <<http://www.epa.gov/nrmrl/wswrd/dw/epanet.html>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

Tabela 1 – Resolvendo o problema com o EPANET 2.0

Ação	Descrição
1	Escolha o botão <i>Add Junction</i> presente na barra superior de ferramentas. É um botão com um círculo. Seguindo a numeração indicada na Figura 3, clique sobre a área branca (<i>Network Map</i>) para desenhar os nós.
2	À direita do botão citado, clique no botão <i>Add Reservoir</i> . Insira o reservatório na posição indicada no enunciado, mas não é preciso reproduzir exatamente a imagem (trata-se de um esboço sem escala).
3	Escolha o botão <i>Add Pipe</i> e desenhe os trechos da rede. Para isso, clique uma vez sobre um nó e em seguida sobre o nó seguinte que é a outra extremidade do trecho.
4	Organização, apenas: Agora a rede deve estar desenhada. Em <i>View</i> → <i>Options</i> → <i>Notation</i> , clique nos quadrados brancos para exibir os números dos nós e trechos.
5	Clique duas vezes sobre o reservatório e informe a cota da superfície livre (<i>Total Head</i>). Isso será necessário para realizar os cálculos, embora não faça parte da solução deste problema.
6	Abra a aba <i>Project</i> e clique em <i>Defaults...</i> Em <i>Hydraulics</i> , escolha: LPS para <i>Flow Units</i> e D-W para <i>Headloss Formula</i> . Dessa forma, a unidade de vazão será L/s e a equação de resistência utilizada será a de Darcy-Weisbach.
7	Clique duas vezes sobre o nó número 1. Neste nó, <i>Base Demand</i> deve ser igual a zero. A elevação também pode ser escolhida igual a zero, mas isso não modificará o cálculo das vazões nos trechos.
8	Clique duas vezes sobre o nó número 2 e indique a elevação igual a zero e a demanda, que é igual a 15 L/s (digite apenas o número 15 e a unidade será aquela escolhida, LPS=Litro por segundo). Faça o mesmo para todos os nós, digitando as respectivas vazões.
9	Clique no trecho 1 e digite: 1300 em <i>Length</i> (comprimento do trecho, em metros); 200 em <i>diameter</i> (diâmetro, em mm); 0.0015 em <i>roughness</i> (rugosidade absoluta equivalente, em mm). Faça o mesmo para os demais trechos, com os valores correspondentes.
10	Clique em <i>Run</i> , um botão com um desenho de um raio amarelo. A mensagem deve ser “ <i>Run was successful</i> ”.
11	Agora é possível ver os resultados com diferentes recursos. Clique duas vezes sobre um elemento da rede e você notará que as células amarelas foram preenchidas com as soluções. Na janela <i>Browser</i> , ao lado de <i>Network Map</i> , clique em <i>Map</i> e escolha o que visualizar nos nós (<i>nodes</i>) e trechos (<i>links</i>). A solução é exposta a seguir.

Com os cálculos realizados e os resultados exibidos convenientemente, pode-se exportar a imagem da rede, como na Figura 6a. Compare as soluções com aquelas obtidas através do método computacional elaborado no item anterior (Figura 6b). Na opção *View* e em *Options* é possível ajustar a forma e tamanho das setas (que indicam o sentido do escoamento nos trechos), assim como o tamanho da fonte dos números.

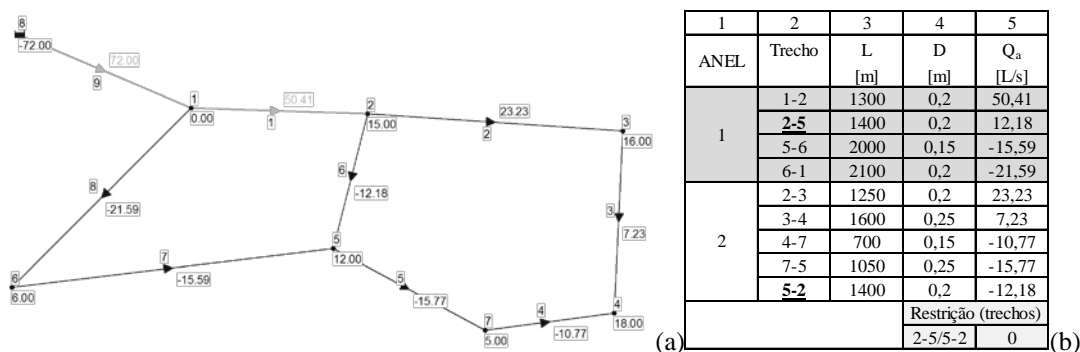


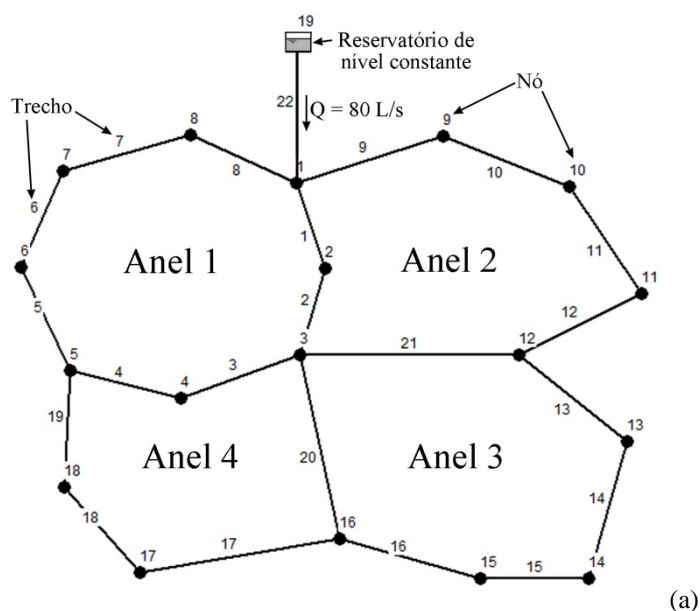
Figura 5 – Solução obtida com o EPANET 2.0

Os tópicos tratados até aqui incluem métodos computacionais para resolver sistemas hidráulicos com níveis de complexidades mais elevados, como redes de distribuição de água de

idades e sistemas de irrigação, por exemplo. Ter mais de um recurso computacional à disposição pode representar algo positivo, sobretudo para verificações dos resultados, que sempre deverão ser efetuadas. Com o próximo problema, produziremos um método computacional capaz de dimensionar redes seguindo critérios hidráulicos e econômicos.

Problema 2.2 – Dimensionamento econômico de redes

Com os dados fornecidos a seguir, dimensione e analise a rede de distribuição de água esboçada na Figura 7. Adote 15 mH₂O como carga de pressão mínima e velocidade máxima dada pela formulação empírica $V_{\max}[\text{m/s}] = 0,60 + 1,5D[\text{m}]$ ou $V_{\max} \leq 2,0 \text{ m/s}$. (PORTO, 2006, p. 172) O diâmetro mínimo deve ser igual a 100 mm e a rugosidade absoluta equivalente do material dos condutos, $\varepsilon = 0,15 \text{ mm}$. Calcule o nível d'água no reservatório.



Nó	Demanda [L/s]	z [m]	ANEL	Trecho	L [m]
1	6,00	270	1	1-2	408
2	2,00	265		2-3	390
3	4,10	245		3-4	410
4	5,00	253		4-5	390
5	3,10	266		5-6	405
6	3,50	269		6-7	395
7	1,50	270		7-8	400
8	2,00	271		8-1	408
9	3,50	265	2	1-9	450
10	5,50	255		9-10	500
11	8,60	260		10-11	455
12	7,80	240		11-12	435
13	3,30	260		12-3	700
14	9,80	262		3-2	390
15	5,40	264	3	2-1	408
16	6,00	260		3-12	700
17	2,90	258		12-13	390
18	5,00	257		13-14	505
				14-15	280
				15-16	370
				16-3	800
				3-16	800
			4	16-17	650
				17-18	525
				18-5	500
				5-4	390
				4-3	410

Figura 6 – Problema 2.2: Esboço da rede (a) e dados (b)

Solução

A primeira fase da solução consiste em organizar uma planilha com as informações da rede. Com o auxílio da Figura 8 ou do arquivo deste problema, pode-se acompanhar a descrição do método que, por razões didáticas, foi apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 – Comentários sobre as colunas do trecho da planilha apresentado na Figura 8

Coluna	Descrição
1	Identifica os anéis da rede.
2	Os trechos foram organizados em grupos que formam os anéis.
3	Comprimentos dos trechos (dado do problema).
4	Diâmetro interno do conduto, calculado como parte da solução. Não é necessariamente um valor comercial. Diâmetros internos comerciais deverão ser escolhidos posteriormente, com valores próximos aos determinados com a planilha. Esta fase do projeto não faz parte do escopo deste problema. [Solver]
5	Vazões nos trechos, calculadas como parte da solução. O cálculo é realizado ao mesmo tempo em que os diâmetros econômicos são calculados. [Solver]
6	Vazão em m ³ /s.
7	Velocidade média, calculada com a definição de vazão, $V = Q/A$.
8	Número de Reynolds.
9	Rugosidade relativa.
10	Fator de cisalhamento (fator de “atrito”). Calculado com a equação de Swamee.
11	Perda de carga distribuída. O cálculo deve ser realizado com $V^2 = V V $ para preservar o sinal, que é empregado no somatório das perdas de carga, por anel.
12	Relação presente no cálculo de ΔQ , empregada apenas como mais um meio para verificação dos cálculos.
13	Correção da vazão presente no método de Hardy Cross. Não é necessária para solução do problema, mas ilustra a convergência obtida por meio de valores baixos.
14	A velocidade máxima, em m/s, é calculada por $\max(V) = 0,60 + 1,5D[m]$. Observe que esse adimensional deve ser maior que 1. Cabe mencionar também que a NBR 12218 estabelece 0,60 m/s e 3,5

- 4) Diâmetros dos trechos comuns com valores iguais.
- 5) Soma das perdas de carga nos anéis, com os sinais convencionados, menor ou igual a 0,05 mH₂O (erro no fechamento da linha piezométrica).
- 6) Velocidade máxima sobre a velocidade média maior ou igual a unidade.
- 7) Soma das vazões nos nós iguais a zero.
- 8) Finalmente, clique no botão “Opções” e escolha “Usar Escala Automática” para casos com dificuldades de convergência.

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Mín. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$AH\$34 >= 15
 \$J\$5:\$J\$31 >= 0,1
 \$K\$38:\$K\$43 = 0
 \$L\$38:\$L\$43 = 0
 \$Q\$32:\$Q\$35 <= 0,05
 \$T\$5:\$T\$31 >= 1
 \$Y\$5:\$Y\$22 = 0

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução
 Seleccione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Seleccione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleccione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Figura 8 – Janela do solver para solução do problema 2.2

Algumas considerações finais sobre o método computacional descrito são necessárias. Os diâmetros calculados não são necessariamente diâmetros internos existentes. Sendo assim, a solução aponta para uma possível alternativa economicamente ótima. A imposição de uma velocidade mínima, 0,60 m/s, por exemplo, como prevê a NBR 12218/1994, em geral faz com que o método não encontre uma solução. A mesma norma estabelece 3,5 m/s como velocidade máxima, valor superior ao limite sugerido anteriormente. Deste modo, podem ser feitas tentativas com os limites da norma também. A carga de pressão mínima adotada na solução, 15 mH₂O, é a favor da segurança em relação à exigência da norma, igual a 100 kPa (10,2 mH₂O).

Os cálculos realizados para as cargas de pressão são explícitos para cada iteração, tendo como ponto de partida o nó mais alto da rede. Com essa alternativa, a determinação do diâmetro do trecho entre o reservatório e o primeiro nó é realizada posteriormente com um dos métodos do capítulo 1. Vale lembrar que a carga de pressão máxima deve ser atendida. Outras soluções

podem ser aventadas, como a definição da cota da superfície livre da água no reservatório a partir do desnível máximo e da carga de pressão máxima igual a 50 mH₂O. Isso levaria a um problema com duas incógnitas e uma equação. As incógnitas são: Diâmetro do trecho entre o reservatório e o nó número 1 e a cota piezométrica do nó número 1. Deste modo, sugere-se adotar a relação apresentada anteriormente para o cálculo do diâmetro, $\max(V) = 0,60 + 1,5D[m]$, e $Q=VA$, lembrando que a vazão neste trecho (R-1) é conhecida. A equação disponível é a da energia com a formulação para a perda de carga. Calculado o diâmetro, calcula-se a cota piezométrica no primeiro nó.

Os resultados podem ser verificados com o *software* EPANET 2.0 (ver arquivo do problema). Como pode ser visto na Figura 10, que resume a solução, pequenas diferenças entre os resultados devem ser esperadas devido às aproximações dos métodos numéricos de solução (ver erro adotado para fechamento da linha piezométrica, por exemplo). Tais diferenças, de um ponto de vista prático, não excedem a precisão exigida.

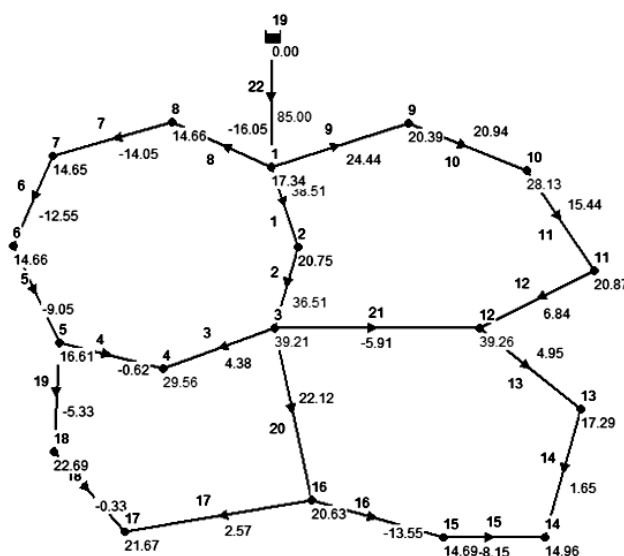


Figura 9 – Solução calculada com o EPANET 2.0

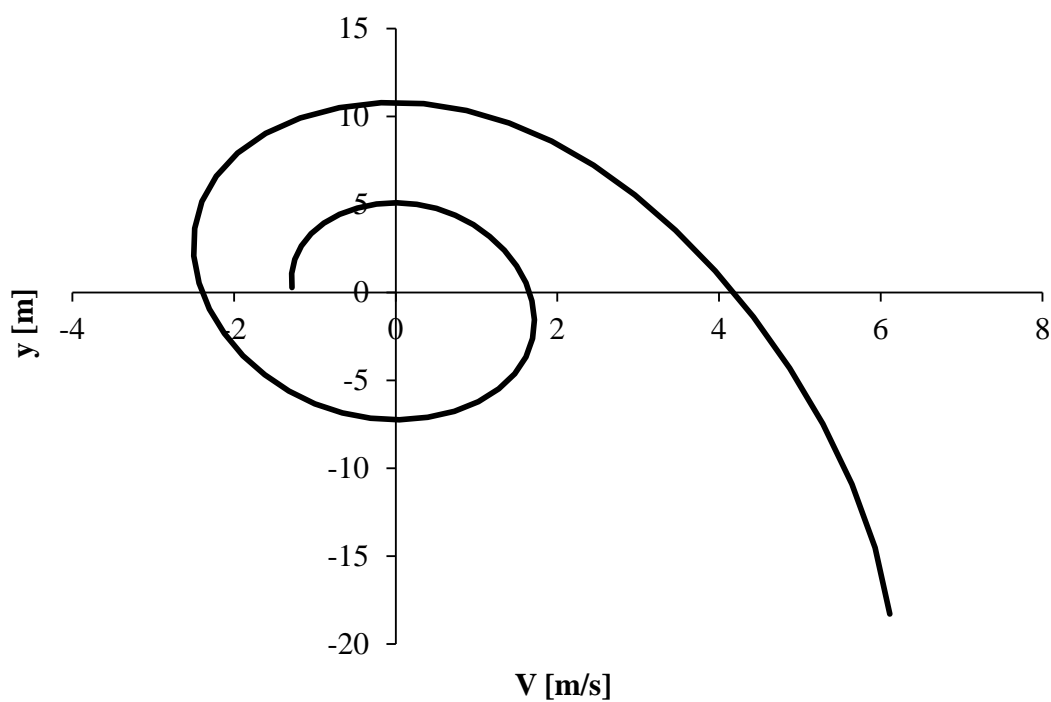
Considerações finais

Este capítulo aborda a hidráulica de redes malhadas, isto é, sistemas de tubulações formados por circuitos. Trata-se de um problema que, na prática da engenharia, não dispensa o uso dos computadores para obtenção de soluções. Inicialmente foram expostos métodos de solução para o cálculo correto da distribuição de vazões nos trechos. O método de Cross foi deduzido, destacando-se aspectos físicos relevantes que devem estar presentes no processo numé-

rico. Em seguida, métodos computacionais com *softwares* de amplo acesso também foram explorados, de forma objetiva e prática. Finalmente, abordou-se o problema de dimensionamento de uma rede. Neste caso o problema é dos mais avançados em regime permanente porque exige a solução simultânea para a distribuição de vazões e dimensionamento econômico dos condutos.

CAPÍTULO 3

ESCOAMENTO VARIÁVEL EM CONDUTOS FORÇADOS



A curva acima não é apenas matemática. Ela representa o comportamento real de um fenômeno oscilatório estudado neste capítulo.

Introdução

A solução de problemas para a condição de regime permanente constitui grande parte da Hidráulica e Mecânica dos Fluidos. O dimensionamento de adutoras, redes de distribuição de água, condutos forçados em aproveitamentos hidrelétricos e sistemas elevatórios são exemplos de problemas resolvidos para a condição de regime permanente. Nestas aplicações, entretanto, apenas a análise de escoamentos independentes do tempo pode não ser suficiente. Manobras em válvulas presentes nas adutoras e redes, por exemplo, iniciam a ocorrência de um escoamento variável (dependente do tempo). O mesmo regime acontece quando há parada ou partida de máquinas hidráulicas. Durante o regime transitório as pressões podem alcançar valores muito maiores em relação à pressão máxima do regime permanente. Desse modo, estudar o escoamento variável passa a ser indispensável para a compreensão dos fenômenos presentes em sistemas hidráulicos de tubulações. É com base em tal entendimento que são dimensionados os dispositivos de proteção capazes de evitar a ocorrência de vazamentos resultantes de pressões excessivas ou até mesmo a ruptura ou esmagamento dos condutos.

Há em Hidráulica e Mecânica dos Fluidos Computacional quatro conjuntos de equações para abordagem do problema em questão: (1) Modelo algébrico; (2) Modelo rígido; (3) Modelo elástico e (4) Equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds (RANS), conservação de massa e modelos de turbulência e multifásicos. A primeira opção corresponde a equacionamentos mais simples, sendo em geral limitados a problemas não muito complexos e ao cálculo de sobrepensões e subpensões sem a inclusão da energia dissipada. O modelo rígido é formado por equações diferenciais ordinárias e o modelo elástico por um sistema de equações diferenciais parciais. No modelo rígido, a elasticidade do conduto e a compressibilidade do fluido não são consideradas, o que justifica o título. Quando a natureza do material dos condutos e a compressibilidade do fluido são levadas em consideração, o modelo resultante passa a ser conhecido como modelo elástico. Seguindo o escopo deste livro, serão abordados problemas práticos relacionados aos modelos citados, com a elaboração de métodos computacionais para a solução desses sistemas de equações. Referências que abordam aspectos teóricos e práticos são os livros de Parmakian (1955), Streeter e Wylie (1967), Jaeger (1977), Chaudhry (1979, 2013), Almeida (1982) e Porto (1992). O uso das equações de Navier-Stokes e modelos de turbulência não é comum nessa área, mas representa uma forma interessante para abordagem do problema sob um ponto de vista científico. Com essa modelagem, não é necessário o uso de equações de resistência, como a de Darcy-Weisbach, desaparecendo a dificuldade de cálculo do fator de resistência em regime variável. Essa vantagem, entretanto, emerge acompanhada por obstáculos à aplicação do modelo aos problemas geralmente tratados com os modelos rígido e elástico,

a exemplo do elevado custo computacional, que inclui custo com a programação, tempo de simulação, etc.

Problema 3 – Soluções numéricas das equações do modelo rígido e do modelo elástico

Problema 3.1 – Chaminé de equilíbrio em aproveitamento hidrelétrico

Os efeitos danosos do golpe de aríete podem ser evitados com alguns dispositivos, dentre os quais se destaca a chaminé de equilíbrio, estrutura que está entre as mais seguras, que requer pouca manutenção na maior parte dos casos e que atua na fase positiva e na fase negativa do fenômeno. Em obras hidrelétricas, uma brusca variação no regulador da turbina produz um movimento variável no conduto forçado (conhecido como *penstock*) e a depressão ou sobrepressão se propaga para montante. Ao chegar à chaminé, a onda é dividida em uma parte que entra na chaminé e é refletida na superfície livre. A outra viaja pela galeria de chegada. A chaminé absorve praticamente toda onda de pressão por possuir seção útil muito maior que a da galeria, em geral. Considere as seguintes definições (ver Figura 1):

H = carga total.

H_0 = carga disponível na chaminé, em regime permanente.

H_a = com $z = 0$ na base da chaminé, carga hidráulica para condição estática.

A = área da galeria de chegada.

A_c = área da seção reta da chaminé.

A_p = área da seção transversal do conduto forçado (*penstock*).

V = velocidade média na galeria, positiva no sentido do reservatório para a chaminé.

V_0 = velocidade média na galeria, em regime permanente.

Q = vazão instantânea requerida pelas turbinas.

L = comprimento da galeria de chegada.

y = altura d'água na chaminé, acima do nível do reservatório.

u = velocidade vertical da água na chaminé, positiva para cima, $u = dy/dt$.

g = aceleração devido à gravidade.

T = período da oscilação da massa, desprezando as perdas de carga.

K = coeficiente de perda de carga localizada da transição entre conduto e chaminé.

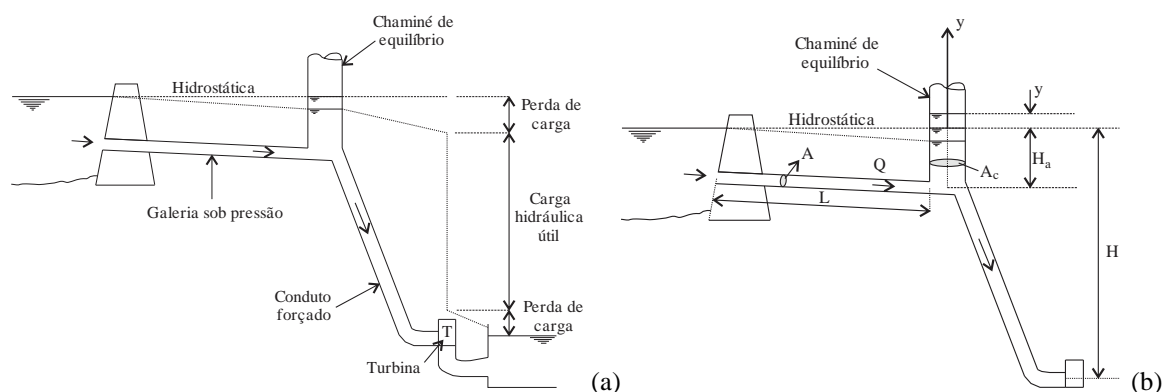


Figura 1 – Chaminé de equilíbrio em aproveitamento hidrelétrico

Fonte: Adaptado de Porto (1986, p.55).

O princípio de conservação de massa em sua forma integral e para um volume de controle pode ser escrito com a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{Vol} \rho dVol + \iint_{SC} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0. \quad (1)$$

Quando aplicado a escoamentos incompressíveis e a um volume de controle rígido, obtém-se:

$$\iint_{SC} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (2)$$

Por meio de palavras, o somatório das vazões de entrada deve ser igual à soma das vazões de saída, sendo este resultado válido para o regime não permanente e escoamento incompressível.

Portanto,

$$VA = uA_c + Q \therefore$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{VA - Q}{A_c}. \quad (3)$$

A 2ª Lei de Newton aplicada ao mesmo volume de controle tem como resultado:³

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \right) = \Delta H_{12} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}. \quad (4)$$

Considerando o reservatório da extremidade inicial como um reservatório de nível constante, a carga hidráulica total é reduzida ao valor de z_1 . O ponto dois foi escolhido na base da chaminé, onde a carga de pressão, p/γ , pode assumir os valores $H_a + y$ ou $H_a - y$. Observe também que $z_1 - z_2 = H_a$. A energia cinética é desprezada na seção 2 e a perda de carga total entre 1 e 2 é composta por perdas distribuídas e perdas localizadas, principalmente se a chaminé possuir estrangulamento em sua base. Com tais considerações, escreve-se:

$$H_a - (H_a + y) = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K \frac{u^2}{2g} \therefore$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{L} y - f \frac{V|V|}{2D} - \frac{K}{2L} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2. \quad (5)$$

As equações anteriores formam um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser resolvido analiticamente, para casos especiais, ou com métodos numéricos. Deste modo, considere os dados descritos a seguir. Uma galeria de concreto com $D = 2,5$ m, $f = 0,012$ e $L =$

³ Veja a dedução em Porto, 2006, p.8-9.

2000 m, conduz água em um aproveitamento hidrelétrico protegido com uma chaminé de equilíbrio com diâmetro igual a 10 m e estrangulamento na base com $K = 315$. Escreva um código ou planilha e calcule $y(t)$, $V(t)$ e $u(t)$ para uma manobra instantânea de fechamento total dos reguladores das turbinas quando a vazão inicial for $30 \text{ m}^3/\text{s}$. Sugestão: Utilize o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, $\Delta t = 10 \text{ s}$ e $T = 600 \text{ s}$.

Solução

O sistema a ser resolvido é formado pelas equações 3 e 5. As derivadas de V e y presentes nestas equações possibilitam definir as funções F_1 e F_2 , como escrito a seguir:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{g}{L}y - f \frac{V|V|}{2D} - \frac{K}{2L} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = F_1$$

$$F_1 = -\frac{g}{L}y - f \frac{V|V|}{2D} - \frac{K}{2L} \left(\frac{VA - Q}{A_c} \right)^2 \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{VA - Q}{A_c} = F_2. \quad (7)$$

Com o método de Runge-Kutta aplicado a um sistema de equações, as variáveis V e y são calculadas no instante $k+1$ com as seguintes formulações:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{6} (\psi_{1,1} + 2\psi_{2,1} + 2\psi_{3,1} + \psi_{4,1}) \\ V_{k+1} = V_k + \frac{\Delta t}{6} (\psi_{1,2} + 2\psi_{2,2} + 2\psi_{3,2} + \psi_{4,2}) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} \psi_{1,j} = F_j(t_k, V_k, y_k) \\ \psi_{2,j} = F_j(t_k + 0,5\Delta t, V_k + 0,5\psi_{1,1}\Delta t, y_k + 0,5\psi_{1,2}\Delta t) \\ \psi_{3,j} = F_j(t_k + 0,5\Delta t, V_k + 0,5\psi_{2,1}\Delta t, y_k + 0,5\psi_{2,2}\Delta t) \\ \psi_{4,j} = F_j(t_k + \Delta t, V_k + \psi_{3,1}\Delta t, y_k + \psi_{3,2}\Delta t) \end{cases} \quad (8b)$$

O primeiro subscrito em $\psi_{i,j}$, i , varia de 1 a 4 para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. O segundo subscrito, j , varia de 1 a 2, sendo 2 o número de incógnitas do sistema de equações. Para organizar um código ou planilha, recomenda-se que sejam calculados os valores de V e y à parte para posteriormente serem calculadas as funções F_1 e F_2 , como descrito a seguir. A coluna 1 (ver Figura 2) contém os valores da variável independente t (tempo), calculados a partir do zero e com incrementos iguais a Δt . As colunas de 2 a 5 contêm os valores de $\psi_{i,1}$, isto é, para $j=1$, valores vinculados à função F_1 , que é dV/dt . As colunas 6 a 9 calculam $\psi_{i,2}$ ($j=2$, para dy/dt ou F_2). Durante os cálculos são necessários valores em k , $k+1/2$ e $k+1$ (ver equação 8b). As colunas 10 e 11 realizam os cálculos para k . A coluna 12 calcula $u(t)$ com V_k e a coluna

13 contém a vazão, que no instante inicial é 30 m³/s e no instante seguinte igual a zero (ver enunciado). Em seguida, nas colunas 14 e 17 são efetuados os cálculos em $k+1/2$ com base nas derivadas obtidas com valores em k . Nas colunas 15 e 18 os cálculos para $k+1/2$ são feitos novamente, mas com base nas derivadas em $k+1/2$ obtidas anteriormente (ver equação 8b). As colunas 16 e 19 empregam as derivadas (3,1) e (3,2) para calcular V e y em $k+1$. Observe atentamente que esse valor calculado em $k+1$ ainda não é o resultado do método para o instante $k+1$, mas sim uma avaliação parcial que deverá ser empregada para o cálculo de mais uma derivada que finalmente permite o uso da equação 8a. A equação 8a deve ser escrita nas colunas 10 e 11, a partir da segunda linha após os valores iniciais. Com isto realizado, prossegue-se de forma similar, sendo necessário apenas repetir as fórmulas de modo automático com o recurso da planilha denominado “arrastar”.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem realiza a integração numérica com base em quatro valores das derivadas F_1 e F_2 , diferente do método de Euler, por exemplo, que emprega apenas uma derivada para calcular o próximo valor. Essa característica confere ao método uma ordem de precisão elevada em relação à solução analítica, sendo tal ordem a potência da relação entre o erro e o espaçamento da malha.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tempo	$\Psi_{i,j}$				$\Psi_{i,j}$													
t	1,1	2,1	3,1	4,1	1,2	2,2	3,2	4,2	V_k	y_k	$u(t)$	Q	$V_{k+1/2}$	$V_{k+1/2}$	V_{k+1}	$y_{k+1/2}$	$y_{k+1/2}$	y_{k+1}
[s]	V				y				[m]	[m/s]	[m/s]	[m ³ /s]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
0	4,16E-17	4,16E-17	4,2E-17	4,2E-17	0	0	0	0	6,112	-18,294	0	30	6,11	6,11	6,11	-18,29	-18,29	-18,29
10	-0,01149	-0,01896	-0,0176	-0,02416	0,38197	0,37838	0,37605	0,37094	6,112	-18,294	0,38197	0	6,05	6,02	5,94	-16,38	-16,40	-14,53

Figura 2 – Planilha elaborada para solução do sistema de EDOs. Observe que i representa a ordem de convergência do método ($i = 4$) e j representa o número de EDOs ($j = 2$)

Observações sobre os resultados obtidos (Figura 3):

- 1) Observa-se que $y(t)$ assume valor máximo igual a 10,8 m e mínimo correspondente ao regime permanente. Estas são informações importantes para o projeto da chaminé. Se K for considerado nulo, o valor máximo de $y(t)$ passa a ser 11,7 m.
- 2) A oscilação em massa na chaminé pode levar vários minutos. Para $t = 1000$ s (16,7 min), o valor de y ainda alcança 3,3 m.
- 3) O máximo observado pode ser modificado em função do refinamento da malha, isto é, em função do valor de Δt escolhido para solução do problema.
- 4) Como ilustrado na Figura 4, os máximos e mínimos de $y(t)$, que ocorrem para $dy/dt=0$ (Figura 3c), coincidem com valores nulos de $V(t)$. Isso pode ser compreendido examinando-se a equação de conservação de massa, que para este problema, com $Q(t>0) = 0$, $uA_c = VA$. Com A e A_c diferentes de zero, se $u = dy/dt = 0$, então, $V=0$.
- 5) A relação entre $y(t)$ e $V(t)$ não é biunívoca em todo o domínio (Figura 3d).

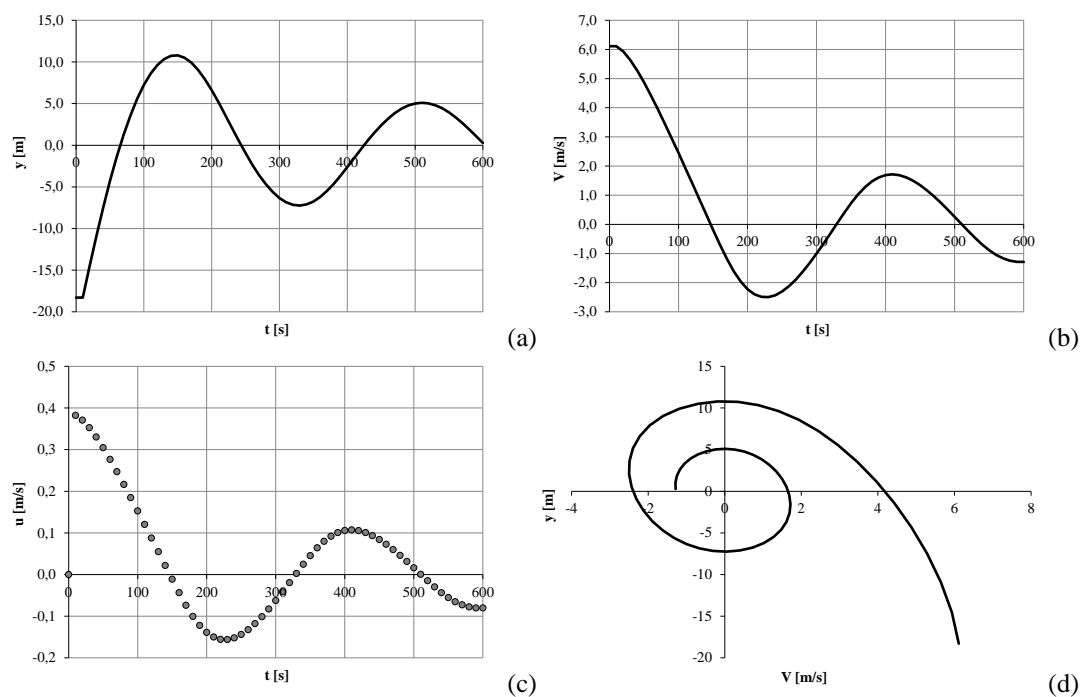


Figura 3 – Solução do Exemplo 3

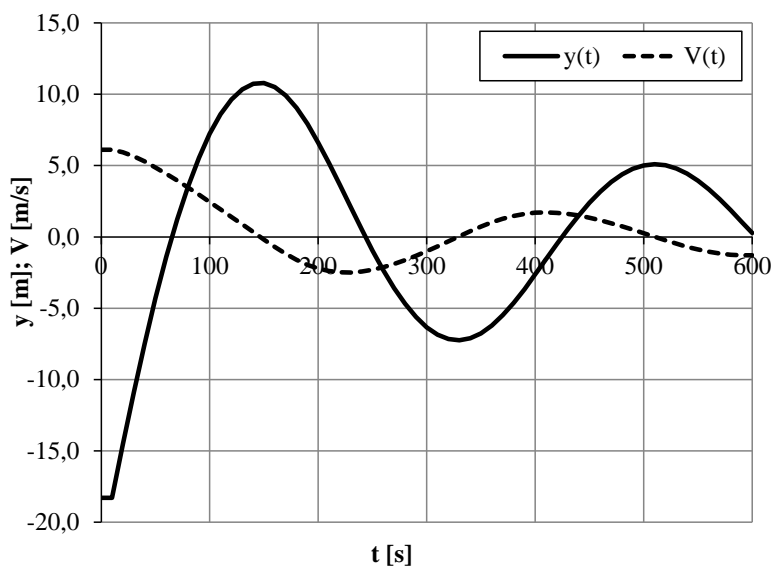


Figura 4 – Solução do Exemplo 3

Para pensar

Considere um decaimento linear para vazão Q a partir do valor inicial $Q_0 = 30 \text{ m}^3/\text{s}$, seguindo a lei $Q = Q_0 - at$, em que $a =$ coeficiente angular, $a = (Q_f - Q_0)/t_f$, sendo t_f o instante correspondente a Q_f , que é a vazão final após a realização da manobra. Faça a adaptação necessária na planilha proposta para resolver o problema 3.1. Dica: Observe com atenção o método de Runge-Kutta (equação 8) e os cálculos intermediários. Agora, Q é função do tempo e esse fato deve ser considerado na determinação das derivadas.

Problema 3.2 – Modelo Elástico: Análise e solução numérica das equações

Prosseguindo com os estudos sobre escoamentos transitórios em condutos forçados, o leitor encontrará um próximo nível, que é composto por equações diferenciais parciais não lineares e de primeira ordem, com características hiperbólicas. Esse sistema de equações é conhecido como modelo elástico, tendo origem nos trabalhos de Allievi (1925). A dedução do modelo elástico emprega-se a conservação de massa e a 2ª Lei de Newton como leis básicas da física. Adicionalmente, como o comportamento do material do conduto é considerado na formulação, utiliza-se a lei constitutiva denominada lei de Hooke para relacionar tensão e deformação. Não é necessário mencionar que percorrer as deduções dessas equações constitui pré-requisito essencial para avançar nos estudos. Neste livro, entretanto, apenas a solução numérica – computacional das equações será explorada. Sugere-se a leitura de Streeter e Wylie (1978), Parmakian (1955) e Simões, Schulz e Porto (2014) para estudo da dedução. Isto posto, coloca-se como problema inicial estudar o modelo elástico (modelo formado pelas equações citadas), o método das características, a imposição correta das condições de contorno e iniciais e os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack.

Conservação de massa

A equação diferencial parcial obtida com esse princípio e com as leis complementares possui a forma final exposta a seguir:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen} \alpha \right) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Definições:

H = Carga piezométrica, $H = z + p/\gamma$. H(x,t).

t = Tempo (variável independente).

V = Velocidade média, V(x,t).

x = abscissa paralela ao eixo do tubo.

α = ângulo entre x e a horizontal.

g = Aceleração devido à gravidade.

a = celeridade (velocidade) das ondas de pressão, definida como:

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + \frac{KD}{Ee}k}}. \text{ Formulação que é descoberta ao longo da dedução da equação 9.}$$

K = Módulo de elasticidade do fluido.

ρ = Massa específica do fluido.

D = Diâmetro interno do conduto.

E = Módulo de elasticidade do material do conduto.

e = Espessura da parede da tubulação.

k = Coeficiente que é função das condições de ancoragem do conduto. Trata-se de uma função do coeficiente de Poisson, denotado aqui por μ , assim como ocorre na maior parte da literatura sobre o tema (não confundir com a viscosidade dinâmica). A Tabela 1 resume os seus valores. Valores do coeficiente de Poisson podem ser encontrados nos arquivos deste capítulo, na planilha, assim como valores de E e K .

Tabela 1 – Valores de k para diferentes condições de deformação do conduto

Configuração do conduto	k
Extremidade de montante fixa	$5/4 - \mu$
Sem movimentação axial	$1 - \mu^2$
Juntas de expansão nas extremidades do conduto	1
Condutos rígidos	0

Equação da quantidade de movimento (2ª Lei de Newton)

Com forças de contato (pressão e cisalhamento) e a força peso, a 2ª Lei de Newton aplicada a um volume de controle com uma entrada e uma saída conduz ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0. \quad (10)$$

Nesta equação, além de grandezas já definidas para a equação 9, há o fator de cisalhamento (fator de “atrito”) de Darcy-Weisbach. Em regime transitório, o fator de cisalhamento não apresenta o mesmo comportamento observado em regime permanente. Apesar disto, para avaliações preliminares e estudos exploratórios realizados aqui, calcula-se f com as equações do regime permanente. Sobre este tema, sugere-se a leitura de Lima (2006, p. 11-40).

Um pouco de matemática aplicada

A solução do sistema formado pelas equações 9 e 10 requer a imposição adequada das condições de contorno e condição inicial. Além disso, soluções analíticas são conhecidas apenas para casos particulares e simplificados, sendo necessário o uso de algum esquema numérico. Este é um tema que não será abordado aqui em todos os seus detalhes. Apenas alguns pontos indispensáveis serão mencionados.

Natureza do sistema de equações

Sabendo que $H = z + p/\gamma$, as equações 9 e 10 podem ser escritas com as formas a seguir:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \alpha - \frac{fV|V|}{2D} = F, \quad (12)$$

em que, p = pressão e F foi utilizado apenas para simplificar a escrita do termo fonte da equação 12, isto é, $-g \sin \alpha - \frac{fV|V|}{2D} = F$. Empregando as matrizes

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} p \\ V \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} V & \rho a^2 \\ 1/\rho & V \end{pmatrix} \text{ e } \underline{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix},$$

o sistema de equações pode ser organizado em uma única equação vetorial:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{S} \quad (13)$$

A matriz \underline{A} é denominada matriz convectiva e seus autovalores podem ser calculados como apresentado abaixo (δ_{ij} é o delta de Kronecker, se $i=j$, $\delta_{ij} = 1$, se não, $\delta_{ij} = 0$):

$$\det(\underline{A} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} V - \lambda & \rho a^2 \\ 1/\rho & V - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (V - \lambda)^2 - a^2 = 0. \therefore$$

$$\begin{cases} \lambda^1 = V + a \\ \lambda^2 = V - a \end{cases} \quad (14)$$

Com esta análise, conclui-se que o sistema de equações é hiperbólico, pois os autovalores possuem valores reais e diferentes entre si. Os autovalores da matriz convectiva correspondem às velocidades absolutas das ondas.

Métodos numéricos

O método clássico que talvez seja o mais conhecido para a solução de escoamentos transitórios em condutos forçados é o método das características, desenvolvido por Monge (1789). Com este método, as equações diferenciais parciais são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias. A integração dessas equações pode ser realizada analiticamente para casos especiais ou com alguma aproximação para situações mais gerais. Deste modo, ele é classificado como método analítico ou numérico. Esquemas numéricos de volumes finitos também podem ser adotados, como o de Lax-Friedrichs e MacCormack. O estudo do método das características é muito relevante para a solução numérica de problemas envolvendo transitórios em condutos forçados e condutos livres. Isto porque a imposição correta das condições de contorno requer a compreensão do conceito de curvas características. O próprio método também conduz

a bons resultados quando utilizado corretamente para integração das equações para condutos forçados, mesmo sendo de primeira ordem.

Método das características

Caro leitor, neste item há um pouco de matemática (pouco mesmo!). Se a compreensão for prejudicada pela escolha da ordem de apresentação do conteúdo, sugiro uma primeira leitura do “problema prático” desenvolvido após essa exposição inicial dos fundamentos e do código.

Vamos escrever aqui as equações 11 e 12 mais uma vez:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F. \quad (12)$$

Seja ϕ um fator diferente de zero inicialmente desconhecido. Se este fator for multiplicado à equação de conservação de massa e a mesma somada à equação de quantidade de movimento, escreve-se:

$$\phi \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F. \quad (15)$$

Observe que a equação anterior pode ser escrita com a seguinte forma:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (V + \phi \rho a^2) \right] + \phi \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \left(V + \frac{1}{\rho \phi} \right) \right] = F. \quad (16)$$

Lembremos agora que $V=V(x,t)$ e $p=p(x,t)$. O cálculo de suas derivadas (materiais) com a regra da cadeia resulta em:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Comparando estes resultados aos termos matematicamente semelhantes da equação 16, pode-se determinar dx/dt e os valores de ϕ :

$$\frac{dx}{dt} = V + \phi \rho a^2 = V + \frac{1}{\rho \phi} \therefore \begin{cases} \phi = +\frac{1}{\rho a} \\ \phi = -\frac{1}{\rho a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = V + a \\ \frac{dx}{dt} = V - a \end{cases} \quad (17)$$

Observe que dx/dt tem a mesma forma dos autovalores da matriz convectiva. Substituindo os valores de ϕ na equação 16, pode-se transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, como exposto a seguir:

$$C^+ : \begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = F \\ \frac{dx}{dt} = V + a \end{cases} \quad (17a)$$

$$C^- : \begin{cases} \frac{dV}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = F \\ \frac{dx}{dt} = V - a \end{cases} \quad (17b)$$

Retornando às EDPs, vale lembrar que a sua solução é $V(x,t)$ e $p(x,t)$, isto é, a velocidade média e a pressão no plano espaço-tempo. Um problema como este possui condições iniciais, que são aquelas correspondentes ao tempo $t = 0$, determinadas em geral para o regime permanente. Há também as condições de contorno, que são V e p nas extremidades inicial e final do domínio computacional (em $x = 0$ e em $x = L$, sendo L o comprimento total do conduto, por exemplo). Uma condição de contorno que provoque uma perturbação do problema, o que pode ser exemplificado com o fechamento de uma válvula, produzirá alterações no escoamento. Essas alterações evoluem no espaço e no tempo. As EDOs 17a,b estão escritas em termos de derivadas materiais e é possível notar que com esta forma de escrever as equações, V e p são calculadas ao longo do tempo. Por isso se diz que essas equações são válidas ao longo de curvas características (Figura 5), curvas que separam a região que ainda preserva características dadas pelas condições iniciais da região perturbada. O problema original possui solução tem solução no espaço tempo. Então, como identificar a dependência com o espaço? Veja que dx/dt também faz parte do sistema de EDOs. Deste modo, não se pode abandonar a dependência com o espaço. Isto será considerado na integração das equações, subscrevendo adequadamente índices que representam a posição considerada nos cálculos. Veja, mais uma vez com auxílio da Figura 5, que no tempo t_n V ou p são calculadas em A ou B e que em t_{n+1} V e p são calculadas em P, ponto em uma posição x diferente daquela dos pontos A e B.

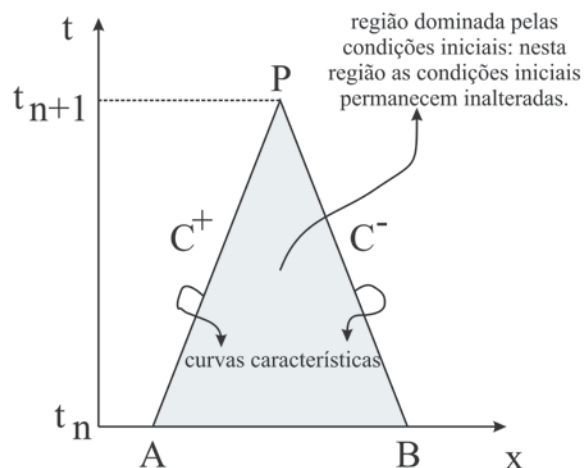


Figura 5 – Curvas características: Note que C^+ é a característica positiva, com derivada positiva. C^- possui derivada negativa (considerando que $V < a$). Observe também que em A e B as grandezas V e p são avaliadas no instante t_n (n indica o tempo). Em P essas grandezas são calculadas em t_{n+1} , isto é, após um intervalo Δt que é igual a $t_{n+1} - t_n$. Se o ponto P for identificado em uma posição i sobre o eixo x , A pode ser identificado como um ponto em $i-1$ e B em $i+1$, para o mesmo Δx entre A e P e P e B (o que ocorre se $a \gg V$, veja as EDOs)

Neste ponto da apresentação, vamos integrar as EDOs 17a e 17b, ao longo de AP e BP, respectivamente:

$$C^+ : \int_{V_A}^{V_P} dV + \frac{1}{\rho a} \int_{p_A}^{p_P} dp = \int_{t_A}^{t_P} F dt, \quad (18a)$$

$$C^- : \int_{V_B}^{V_P} dV - \frac{1}{\rho a} \int_{p_B}^{p_P} dp = \int_{t_B}^{t_P} F dt. \quad (18b)$$

A integral de dV pode ser realizada sem dificuldades, assim como a integral de dp . Observe, com a formulação da celeridade apresentada anteriormente, que a é independente de V e p , diferente do que ocorre em escoamentos com superfície livre, para os quais a celeridade é função de uma das variáveis dependentes. No segundo membro, a integral de $F dt$ requer alguma aproximação porque F é função de V . Como aproximação, assume-se que F em A e F em B sejam independentes do tempo ao longo das características, sendo possível realizar os cálculos, como exposto a seguir:

$$C^+ : V_P - V_A + \frac{1}{\rho a} (p_P - p_A) = F_A (t_P - t_A), \quad (19a)$$

$$C^- : V_P - V_B - \frac{1}{\rho a} (p_P - p_B) = F_B (t_P - t_B). \quad (19b)$$

Uma observação prática deve ser dada agora: Nestas equações, os índices A e B representam grandezas conhecidas no instante t_n e as incógnitas são identificadas com o índice P. Os intervalos $t_p - t_A$ e $t_p - t_B$ devem ser especificados como um intervalo de tempo Δt . Deste modo, para obtenção de um esquema numérico explícito e simples, vamos resolver o sistema formado pelas equações 19a e 19b de modo conveniente (você pode experimentar “somar” e “subtrair” as equações ou seguir o procedimento a seguir):

$$C^+ : \frac{1}{\rho a} p_P = F_A \Delta t - (V_P - V_A) + \frac{1}{\rho a} p_A, \text{ substituindo em } C^-, \text{ vem:}$$

$$C^- : V_P - V_B - F_A \Delta t + (V_P - V_A) - \frac{1}{\rho a} p_A + \frac{1}{\rho a} p_B = F_B \Delta t. \text{ Resolvendo para } V_P,$$

$$V_P = \frac{V_A + V_B}{2} + \frac{\Delta t}{2} (F_A + F_B) + \frac{1}{2\rho a} (p_A - p_B). \quad (20)$$

Resolvendo o sistema (equações 19a e 19b) para p_P , escreve-se:

$$C^- : V_P = F_B \Delta t + V_B + \frac{1}{\rho a} (p_P - p_B), \text{ que pode ser substituída em 19a:}$$

$$p_P = \frac{\rho a}{2} (V_A - V_B) + \frac{\rho a \Delta t}{2} (F_A - F_B) + \frac{p_A + p_B}{2}. \quad (21)$$

Neste texto, como foi considerado que $\Delta x = a\Delta t$, A, B e P serão substituídos por $i-1$, $i+1$ e n , respectivamente (ver Figura 5). Neste caso, i representa a posição em x e n representa o instante no eixo t . Isto resulta nas equações 22 e 23, equações utilizadas no código elaborado no próximo problema:

$$V_i^{n+1} = \frac{V_{i-1}^n + V_{i+1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{2} (F_{i-1}^n + F_{i+1}^n) + \frac{1}{2\rho a} (p_{i-1}^n - p_{i+1}^n). \quad (22)$$

$$p_i^{n+1} = \frac{\rho a}{2} (V_{i-1}^n - V_{i+1}^n) + \frac{\rho a \Delta t}{2} (F_{i-1}^n - F_{i+1}^n) + \frac{p_{i-1}^n + p_{i+1}^n}{2}. \quad (23)$$

Lembrando que devem ser satisfeitas as equações:

$$C^+ : \frac{dx}{dt} = V + a \Rightarrow \Delta x_{AP} = \int_{t_A}^{t_P} V dt + a\Delta t \cong a\Delta t$$

$$C^- : \frac{dx}{dt} = V - a \Rightarrow -\Delta x_{BP} = \int_{t_B}^{t_P} V dt - a\Delta t \cong -a\Delta t$$

Se a resistência for negligenciada e o conduto for horizontal, $F = 0$ (veja a definição de F). Com essa simplificação, o equacionamento anterior representa uma solução analítica das EDOs, escrita com a seguinte forma:

$$V_i^{n+1} = \frac{V_{i-1}^n + V_{i+1}^n}{2} + \frac{1}{2\rho a} (p_{i-1}^n - p_{i+1}^n). \quad (24)$$

$$p_i^{n+1} = \frac{\rho a}{2} (V_{i-1}^n - V_{i+1}^n) + \frac{p_{i-1}^n + p_{i+1}^n}{2}. \quad (25)$$

Como comentário final deste trecho, destaca-se que para o caso mais geral, $t_P - t_A$ e $t_P - t_B$ podem ser diferentes, assim como $x_P - x_A$ e $x_P - x_B$, sendo necessária a solução simultânea de quatro equações. Vale lembrar que as EDOs são válidas apenas ao longo das curvas características, enquanto as EDPs são válidas para todo do domínio $x-t$.

Imposição das condições de contorno com auxílio das características

O que ocorre na fronteira de um domínio computacional em problemas de hidráulica pode depender apenas das condições de escoamento ou das condições de escoamento e de interferências externas. Os sinais dos autovalores da matriz convectiva determina a imposição correta das condições de contorno. Em outras palavras, estamos falando da declividade (positiva ou negativa) da curva característica nas fronteiras do domínio. Para o problema tratado aqui, os autovalores possuirão sinais opostos (em escoamentos em superfície livre, os sinais podem ser iguais se o escoamento for supercrítico). Deste modo, na entrada uma curva característica apontará para dentro do domínio computacional e a outra para fora do domínio computacional. Este fato indica que uma variável deve ser fixada no contorno com base em informações externas (o nível d'água em um reservatório, como na Figura 6) e a outra variável deve ser calculada com base no que ocorre dentro do domínio computacional. Esse modo de impor as condições de contorno está de acordo com as curvas características, já que as perturbações se propagam ao longo delas. Para a extremidade de jusante do mesmo sistema (Figura 6), a presença de uma válvula deve ser representada no sistema de equações com um modelo matemático para válvula. A outra variável será calculada com base em informações do domínio, com o uso da curva característica positiva.

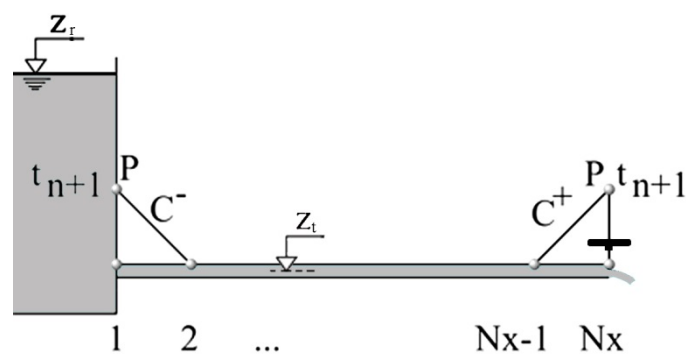


Figura 6 – Reservatório-conduto-válvula: Condições de contorno

Para o sistema hidráulico da Figura 6, que será explorado numericamente neste exemplo, as equações para os contornos são:

1) Montante (Reservatório): Desprezando perda localizada e carga cinética.

1.1) Informação externa ao domínio (Reservatório):

$$p_P = \gamma(z_r - z_t) \quad (26)$$

1.2) Informação do domínio (equação 19b):

$$C^- : V_P = V_B + F_B \Delta t + \frac{1}{\rho a} (p_P - p_B) . \quad (27)$$

2) Jusante (Válvula):

2.1) Informação externa ao domínio (Válvula):

Para o caso de ocorrência do regime permanente, sabe-se que a vazão escoada por uma válvula pode ser modelada por:

$$Q_0 = (C_d A_v)_0 \sqrt{2gh_0} . \quad (28)$$

Nesta equação C_d =coeficiente de descarga da válvula, A_v =área da seção aberta da válvula, h_0 =carga de pressão a montante da válvula. Em todas as variáveis o índice 0 indica regime permanente. Uma forma de modelar o escoamento variável consiste em assumir como válida uma equação semelhante para calcular a vazão:

$$Q_P = (C_d A_v) \sqrt{2gh_P} . \quad (29)$$

2.2) Informação interna (curva característica positiva):

$$C^+ : V_P - V_A + \frac{1}{\rho a} (p_P - p_A) = F_A \Delta t . \quad (30)$$

Substituindo a velocidade pela vazão ($V_P = Q_P/A$, em que A =área do tubo), vem

$$C^+ : Q_P - Q_A + \frac{A}{\rho a} (p_P - p_A) = AF_A \Delta t . \quad (31)$$

Combinando as equações 29 e 31 é possível escrever a seguinte equação:

$$p_P = \gamma h_P = \gamma \frac{Q_P^2}{(C_d A_v)^2 2g} \Rightarrow \frac{A}{2a(C_d A_v)^2} Q_P^2 + Q_P - \left(Q_A + \frac{A}{\rho a} p_A + AF_A \Delta t \right) = 0$$

Resolvendo para Q_P , escreve-se:

$$Q_P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A}{2a(C_d A_v)^2} \left(Q_A + \frac{A}{\rho a} p_A + AF_A \Delta t \right)}}{2 \frac{A}{2a(C_d A_v)^2}} = \dots$$

$$Q_P = C_d A_v \left[\sqrt{\frac{a^2}{A^2} (C_d A_v)^2 + 2a \left(V_A + \frac{p_A}{\rho a} + F_A \Delta t \right)} - \frac{a C_d A_v}{A} \right]. \quad (32)$$

Apenas para simplificar a escrita, define-se C_+ :

$$Q_P = C_d A_v \left[\sqrt{\frac{a^2}{A^2} (C_d A_v)^2 + 2a C_+} - \frac{a C_d A_v}{A} \right], \quad (33)$$

em que $C_+ = V_A + \frac{p_A}{\rho a} + F_A \Delta t$.

O produto $C_d A_v$ é uma informação externa dependente do tempo e que pode ser dada por valores tabelados ou ajustados por meio de uma expressão algébrica. A equação 32 foi obtida com o auxílio da característica positiva (que contém informações sobre o nó adjacente ao contorno) e uma informação externa, correspondente à equação da válvula. Observe que a equação 32 é explícita para o cálculo de Q_P . Para calcular h_P , uma vez calculada a vazão Q_P , utiliza-se a equação da característica positiva. Outros tipos de condições de contorno podem ser encontrados nas referências citadas.

Métodos de volumes finitos

O método das características descrito anteriormente não pode ser aplicado a escoamentos em superfície livre com soluções descontínuas (com ressalto hidráulico ou pororoca, por exemplo), sendo necessário o uso de um esquema numérico capaz de capturar ondas de choque, que são as soluções descontínuas, no sentido fraco. O desenvolvimento e análise desses métodos é um tema importante da Matemática Aplicada (LEVEQUE, 2007, aborda diferentes métodos

de volumes finitos para sistemas hiperbólicos). Neste capítulo, introduziremos os métodos de Lax-Friedrichs e de MacCormack, que também serão utilizados para escoamentos em superfície livre. Para o uso desses métodos, as EDPs foram reescritas na “forma conservativa”, apresentada a seguir:

Forma conservativa das equações

A equação obtida com a 2ª Lei de Newton (equação 12) é facilmente reescrita:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial x}}_{V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F \Rightarrow, (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = F \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + gh \right) = F, \quad (34)$$

em que $h=p/\gamma$.

EXERCÍCIO: Prove que a equação 34 é a forma conservativa da equação 12.

Solução

O primeiro termo do primeiro membro da equação 12 e o termo fonte (segundo membro) são idênticos aos respectivos termos da equação 34. O restante pode ser avaliado como exposto a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial(p/\rho)}{\partial x} = \frac{1}{2} 2V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \text{ Sendo assim,}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial x}}_{V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F \Rightarrow. \text{ Aqui termina a prova. } \square$$

Uma maneira de escrever a equação da continuidade com a forma conservativa consiste em isolar h_x na equação da quantidade de movimento e utilizar este resultado na equação da continuidade (h_x = derivada de “h” em relação a “x”). O resultado obtido com a equação 12, multiplicando-a por V/g , é:

$$V \frac{\partial h}{\partial x} = V \frac{F}{g} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x}. \text{ Substituindo na equação 11 escrita em termos de h,}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \text{ vem}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = -V \frac{F}{g}.$$

Pode-se verificar que: $\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2g} \frac{\partial V^2}{\partial t}$ e $\frac{V^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3g} \frac{\partial V^3}{\partial x}$. Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h - \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2}{g} V - \frac{V^3}{3g} \right) = -V \frac{F}{g}. \quad (35)$$

Empregando a forma vetorial conservativa para as equações 34 e 35, escreve-se:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{f}(\underline{q})}{\partial x} = \underline{s}, \quad (36)$$

em que \underline{s} é o vetor com os termos fonte e: $\underline{q} = \begin{pmatrix} h - \frac{V^2}{2g} \\ V \end{pmatrix}$, $\underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 V}{g} - \frac{V^3}{3g} \\ V^2/2 + gh \end{pmatrix}$, $\underline{s} = \frac{F}{g} \begin{pmatrix} -V \\ g \end{pmatrix}$.

Até aqui, observe que foram utilizadas as grandezas H (carga piezométrica), p (pressão) e h = p/γ (carga de pressão). As equações diferenciais parciais escritas com essas diferentes grandezas podem ser encontradas na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Equações escritas com H, p e h

Descrição	Conservação de Massa	2ª Lei de Newton
H = carga piezométrica [m] Equações 9 e 10.	$\frac{\partial H}{\partial t} + V \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen} \alpha \right) + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV V }{2D} = 0$
p = pressão [N/m ²] Equações 11 e 12.	$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F$
h = carga de pressão. Equações	$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = F$
Forma conservativa.	$\frac{\partial}{\partial t} \left(h - \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2}{g} V - \frac{V^3}{3g} \right) = -V \frac{F}{g}$	$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + gh \right) = F$

Notas: $F = -g \text{sen} \alpha - fV|V|/(2D)$. As equações também podem ser escritas em termos da vazão, com $V=Q/A$.

Método de Lax-Friedrichs

O método de Lax-Friedrichs, que recebe esse nome em homenagem aos seus autores, pode ser escrito para a equação vetorial conservativa (equação 36) como apresentado a seguir:

$$\underline{q}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\underline{q}_{i+1}^n + \underline{q}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\underline{f}(\underline{q}_{i+1}^n) - \underline{f}(\underline{q}_{i-1}^n)] + \Delta t \frac{s_{i+1}^n + s_{i-1}^n}{2}. \quad (37)$$

Observe que o método é explícito, isto é, a incógnita (em n+1) pode ser calculada diretamente. Uma média é utilizada para o cálculo do termo fonte. Como critério de estabilidade, o número de Courant deve ser menor ou igual à unidade:

$$C = \Delta t \frac{|V| \pm a}{\Delta x}. \quad (38)$$

Assumindo que V/a tenda a zero, o espaçamento da malha temporal pode ser estimado com base no valor do espaçamento da malha espacial e da celeridade das ondas de pressão sem a necessidade de verificar, a cada instante, o número de Courant no domínio computacional. Sendo assim, adotando $C=1$, tem-se:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a}. \quad (39)$$

Método de MacCormack

O esquema numérico de MacCormack (1969) é um método do tipo previsor-corretor de dois passos e de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. O algoritmo deste código é relativamente simples, como exposto a seguir:

- 1) **Passo previsor:** Adota-se uma aproximação avançada para a derivada espacial para calcular a derivada temporal no instante n e, em seguida, utiliza-se esta derivada para calcular q em $t+\Delta t$. O resultado obtido desta forma é identificado com uma barra superior.

$$\left(\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}\right)^n = -\frac{\underline{f}(\underline{q})_{i+1}^n - \underline{f}(\underline{q})_i^n}{\Delta x} + \underline{s}_i^n, \quad (40)$$

$$\overline{\underline{q}}_i^{n+1} = \underline{q}_i^n + \left(\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}\right)^n \Delta t. \quad (41)$$

- 2) **Passo corretor:** O valor predito calculado com a equação 41 é utilizado para calcular a derivada temporal de q em $n+1$. Para tanto, adota-se uma discretização atrasada para a derivada espacial. Esta alternância entre derivadas avançadas e atrasadas produz um método de segunda ordem. Com este resultado, efetua-se uma média entre as derivadas temporais calculadas em n e $n+1$ para que seja efetuado o cálculo final de q , em $n+1$.

$$\left(\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}\right)^{n+1} = -\frac{\overline{\underline{f}}_i^{n+1} - \overline{\underline{f}}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \overline{\underline{s}}_i^{n+1}, \quad (42)$$

$$\underline{q}_i^{n+1} = \underline{q}_i^n + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}\right)^n + \left(\frac{\partial \underline{q}}{\partial t}\right)^{n+1} \right] \Delta t. \quad (43)$$

O mesmo critério de estabilidade pode ser empregado. Sobre as condições de contorno, aquelas desenvolvidas anteriormente são de primeira ordem, o que pode afetar a ordem de precisão do método nos contornos. Entretanto, de acordo com a experiência, Chaudhry (2008) afirma que esta prática não implica propagar a ordem de precisão inferior para os nós internos. Deste modo, as equações características podem se empregadas nos contornos em conjunto com os métodos de volumes finitos descritos. Outra estratégia consiste em usar extrapolações de primeira ordem ou de segunda ordem.

Código para solução das equações

Solucionar problemas em regime variável com o uso de uma planilha pode não ser viável devido às dificuldades com a construção da planilha, interpretação dos dados e excessivo uso de memória do computador. Um código em linguagem FORTRAN, C, Octave, Matlab® ou outra linguagem, entretanto, permite com certa facilidade visualizar a evolução de V e p (ou H , h), gerar envoltórias com mínimos e máximos, entre outras opções. Adotamos uma linguagem que pode ser adaptada para Octave (*software* gratuito parecido com o Matlab), Scilab e Matlab®. A seguir é apresentado o código e comentários elucidativos. Note-se que neste código foram inseridos os três métodos apresentados anteriormente. Foram inseridos também dados do Exemplo 3.1 de Wylie e Streeter (1978, p.38-41) para que o leitor possa comparar a solução obtida com a solução desses autores.

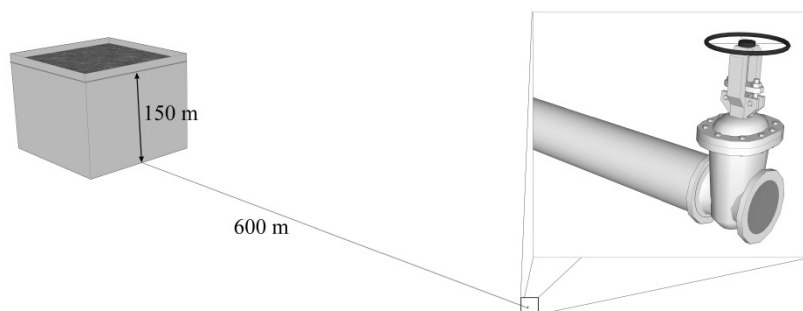


Figura 7 – Reservatório-conduto-válvula (em escala): $z_r - z_1 = 150$ m, $L=600$ m, $D = 0,50$ m

1) Contornos:

1.1) Montante. Reservatório com nível constante e $z_r - z_1 = 150$ m.

1.2) Jusante. Válvula com fechamento de acordo com

$$\tau = \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{1,5}, \quad (44)$$

em que t_f = tempo de fechamento, igual a 2,1 s para esta lei de fechamento. Tau é definido a seguir e possibilita calcular a evolução temporal do produto entre o coeficiente de vazão e a área da válvula.

$$\begin{cases} \tau = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0} \Rightarrow (C_d A_v) = (C_d A_v)_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{1,5}, & \text{para } 0 \leq t \leq 2,1 \text{ s} \\ \text{Se } t > 2,1 \text{ s então } (C_d A_v) = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Tabela 3 - Código para solução das EDPs com os três métodos estudados

```
clear

%MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM HIDRÁULICA.
%AUTORES: André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo
Porto
%Código para o cálculo de H(x,t) e Q(x,t) para um sistema do tipo
%reservatório-conduto-válvula. Métodos numéricos:
%Lax-Friedrichs, Características, MacCormack.

L=600;%Comprimento do tubo
Nx=600;%Número de nós no tubo
dx=L/(Nx-1);%Espaçamento entre nós do eixo x

tt=5;%Tempo total de simulação
Nt=6001;%Número de nós no eixo temporal
dt=tt/(Nt-1);%Espaçamento entre nós do eixo temporal

Io=0.0;%Parte de F, que representa a declividade do conduto.
g=9.8;%Aceleração da gravidade
E=200e9;%Módulo de elasticidade do material do tubo
K=1.75e9;%Módulo de elasticidade do fluido
D=0.50;%Diâmetro do tubo
A=pi*0.25*D^2;%Área da seção transversal do conduto
f=0.018;%0.02%Fator de resistência de Darcy-Weisbach
r=1000;%Massa específica do líquido
k=1;%Coeficiente que depende da relação de Poisson
esp=0.02;%Espessura da parede do tubo

%Para escolha de um dos três métodos:
opmet=0;

opmet = menu('Escolha o método', 'Lax-Friedrichs', ...
            'Características', 'MacCormack');

%Cálculo de a (celeridade das ondas de pressão):

a=sqrt((K/r)/(1+K*D*k/(E*esp)))
dxa=dx/a
dt
Courant=dt*a/dx
if dt>dxa
    fprintf('Critério de estabilidade violado')
end

%Declarações de vetores e matrizes:

x=zeros(1,Nx);
```

```

%Variáveis primitivas:

Q=zeros(Nx,Nt);%Matriz com Nx linhas e Nt colunas e elementos iguais a
zero
H=zeros(Nx,Nt);

if opmet==1

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%--MÉTODO DE LAX-FRIEDRICHS--%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%componentes dos vetores:

q1=zeros(Nx,Nt);
q2=zeros(Nx,Nt);
f1=zeros(Nx,1);
f2=zeros(Nx,1);
s1=zeros(Nx,1);
s2=zeros(Nx,1);

%Condições Iniciais:

%Vazão em regime permanente:

zr=150; %Cota do nível d'água no reservatório em relação ao eixo do tubo,
isto é, com z1 = 0 (ver desenho).
CdA0=0.009; %Produto entre o coeficiente de vazão e a área para t=0;

Q0=(zr*2*g/(f*L/(D*A^2)+1/(CdA0^2)))^0.5; %Vazão calculada para t=0;
H0=Q0^2/(CdA0^2*2*g);%H(x=L,t=0)

n=1;%n=1 corresponde ao tempo t=0 (condição inicial).
for i=1:Nx

    x(i)=(i-1)*dx;
    Q(i,n)=Q0;
    H(i,n)=zr-((Q0^2)/(2*g*A^2))*(f*x(i)/D);

    q1(i,n)=H(i,n)-Q0^2/(2*g*A^2);
    q2(i,n)=Q0/A;

    f1(i,1)=(a^2/g)*q2(i,n)-(q2(i,n)^3)/(3*g);
    f2(i,1)=q2(i,n)^2+g*q1(i,n);

    s1(i,1)=-q2(i,n)*(Io-f*q2(i,n)^2/(2*g*D));
    s2(i,1)=g*(Io-f*q2(i,n)^2/(2*g*D));

end

%Visualização da condição inicial H(0,x):
plot(x,H(:,1))
pause()
T=0;%Tempo, necessária para o laço a seguir**.

```

```

H(1,:)=zr;%H em x=1 e para todos os instantes (o nível d'áfua no reserva-
tório é constante).

for t=dt:dt:tt

    n=n+1
    T=T+dt;%Tempo**.

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %CONDIÇÕES DE CONTORNO:
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %ESQUERDO (ENTRADA-RESERVATÓRIO):
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %Característica negativa:

    Cmenos=Q(2,n-1)/A+g*(Io-f*Q(2,n-1)*abs(Q(2,n-1))/(2*g*D*A^2))*dt-
(g/a)*H(2,n-1);

    Q(1,n)=A*(Cmenos+g*zr/a);

    %Uma vez calculados Q e H, deve-se calcular as componentes dos veto-
res:

    q2(1,n)=Q(1,n-1)/A;
    q1(1,n)=H(1,n-1)-q2(1,n-1)*(q2(1,n-1))/(2*g);

    f1(1,1)=(a^2/g)*q2(1,n-1)-(q2(1,n-1)^3)/(3*g);
    f2(1,1)=q2(1,n-1)*(q2(1,n-1))+g*q1(1,n-1);

    s1(1,1)=-q2(1,n-1)*(Io-f*q2(1,n-1)*abs(q2(1,n-1))/(2*g*D));
    s2(1,1)=g*(Io-f*q2(1,n-1)*abs(q2(1,n-1))/(2*g*D));

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %DIREITO (SAÍDA-VÁLVULA):
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    if T<=2.1

        CdA=CdA0*(1-T/2.1).^1.5;

        Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);

        Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
        H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

    else

        CdA=0;

        Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);
        Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
        H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

    end

```

```

q2(Nx,n)=Q(Nx,n-1)/A;
q1(Nx,n)=H(Nx,n-1)-q2(Nx,n-1)*(q2(Nx,n-1))/(2*g);

f1(Nx,1)=(a^2/g)*q2(Nx,n-1)-(q2(Nx,n-1)^3)/(3*g);
f2(Nx,1)=q2(Nx,n-1)*(q2(Nx,n-1))+g*q1(Nx,n-1);

s1(Nx,1)=-q2(Nx,n-1)*(Io-f*q2(Nx,n-1)*abs(q2(Nx,n-1)))/(2*g*D);
s2(Nx,1)=g*(Io-f*q2(Nx,n-1)*abs(q2(Nx,n-1)))/(2*g*D);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%SOLUÇÃO PARA OS NÓS INTERNOS:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=2:Nx-1

    q1(i,n)=0.5*(q1(i+1,n-1)+q1(i-1,n-1))-(0.5*dt/dx)*(f1(i+1,1)-
f1(i-1,1))+0.5*dt*(s1(i+1,1)+s1(i-1,1));

    q2(i,n)=0.5*(q2(i+1,n-1)+q2(i-1,n-1))-(0.5*dt/dx)*(f2(i+1,1)-
f2(i-1,1))+0.5*dt*(s2(i+1,1)+s2(i-1,1));

end

for i=2:Nx-1

f1(i,1)=(a^2/g)*q2(i,n)-(q2(i,n)^3)/(3*g);
f2(i,1)=q2(i,n)*(q2(i,n))+g*q1(i,n);

s1(i,1)=-q2(i,n)*(Io-f*q2(i,n)*abs(q2(i,n)))/(2*g*D);
s2(i,1)=g*(Io-f*q2(i,n)*abs(q2(i,n)))/(2*g*D);

Q(i,n)=A*q2(i,n);
H(i,n)=q1(i,n)+(q2(i,n)*(q2(i,n)))/(2*g);

end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

else if opmet==2

%Condições Iniciais:

%Vazão em regime permanente:

zr=150; %Cota do nível d'água no reservatório em relação ao eixo do tubo
CdA0=0.009; %Produto entre o coeficiente de vazão e a área para t=0;

Q0=(zr*2*g/(f*L/(D*A^2)+1/(CdA0^2)))^0.5; %Vazão calculada para t=0;
H0=Q0^2/(CdA0^2*2*g); %H(x=L,t=0)

```

```

n=1;
for i=1:Nx

    x(i)=(i-1)*dx;
    Q(i,n)=Q0;
    H(i,n)=zr-((Q0^2)/(2*g*A^2))*(f*x(i)/D);

end

plot(x,H(:,1))
pause()
T=0;

H(1,:)=zr;%H em x=1 e para todos os instantes

for t=dt:dt:tt

    n=n+1
    T=T+dt;%Tempo

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %CONDIÇÕES DE CONTORNO:
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %ESQUERDO (ENTRADA-RESERVATÓRIO):
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %Característica negativa:

    %Q(1,n)=Q(2,n-1)+(zr-H(2,n-1)-(f*dx/(2*g*D*A^2))*Q(2,n-1)*abs(Q(2,n-
1)))/(a/(g*A));

    Cmenos=Q(2,n-1)/A+g*(Io-f*Q(2,n-1)*abs(Q(2,n-1))/(2*g*D*A^2))*dt-
(g/a)*H(2,n-1);

    Q(1,n)=A*(Cmenos+g*zr/a);

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %DIREITO (SAÍDA-VÁLVULA):
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    if T<=2.1

        CdA=CdA0*(1-T/2.1).^1.5;

        Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1)))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);

        Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
        H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

    else

        CdA=0;

        Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1)))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);

```



```

Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

end

%SOLUÇÃO PARA OS NÓS INTERNOS:

for i=2:Nx-1

    Q(i,n)=0.5*(Q(i-1,n-1)+Q(i+1,n-1))+0.5*dt*g*A*(Io-f*Q(i-1,n-1)*abs(Q(i-1,n-1))/(2*g*D*A^2)...
    +Io-f*Q(i+1,n-1)*abs(Q(i+1,n-1))/(2*g*D*A^2)))+(g*A/(2*a))*(H(i-1,n-1)-H(i+1,n-1));

    H(i,n)=0.5*(H(i-1,n-1)+H(i+1,n-1))+0.5*a*dt*(Io-f*Q(i-1,n-1)*abs(Q(i-1,n-1))/(2*g*D*A^2)...
    -Io+f*Q(i+1,n-1)*abs(Q(i+1,n-1))/(2*g*D*A^2)))+(a/(2*g*A))*(Q(i-1,n-1)-Q(i+1,n-1));

end
end

else if opmet==3

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%

%componentes dos vetores:

q1=zeros(Nx,Nt);
q2=zeros(Nx,Nt);
f1=zeros(Nx,1);
f2=zeros(Nx,1);
s1=zeros(Nx,1);
s2=zeros(Nx,1);

%Derivadas:

dq1=zeros(Nx,1);
dq2=zeros(Nx,1);

dqp1=zeros(Nx,1);
dqp2=zeros(Nx,1);

%Condições Iniciais:

%Vazão em regime permanente:

zr=150; %Cota do nível d'água no reservatório em relação ao eixo do tubo
CdA0=0.009; %Produto entre o coeficiente de vazão e a área para t=0;

Q0=(zr*2*g/(f*L/(D*A^2)+1/(CdA0^2)))^0.5; %Vazão calculada para t=0;
H0=Q0^2/(CdA0^2*2*g); %H(x=L,t=0)

n=1;

```



```

if T<=2.1

CdA=CdA0*(1-T/2.1).^1.5;

Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1)))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);
Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

else

CdA=0;

Cmais=Q(Nx-1,n-1)/A+g*(Io-f*Q(Nx-1,n-1)*abs(Q(Nx-1,n-
1)))/(2*g*D*A^2))*dt+(g/a)*H(Nx-1,n-1);
Q(Nx,n)=CdA*(sqrt((a^2)*(CdA^2)/(A^2)+2*a*Cmais)-a*CdA/A);
H(Nx,n)=(a/g)*(Cmais-Q(Nx,n)/A);

end

q2(Nx,n)=Q(Nx,n)/A;
q1(Nx,n)=H(Nx,n)-q2(Nx,n)*(q2(Nx,n))/(2*g);

f1(Nx)=(a^2/g)*q2(Nx,n)-(q2(Nx,n)^3)/(3*g);
f2(Nx)=q2(Nx,n)*(q2(Nx,n))+g*q1(Nx,n);

s1(Nx)=-q2(Nx,n)*(Io-f*q2(Nx,n)*abs(q2(Nx,n))/(2*g*D));
s2(Nx)=g*(Io-f*q2(Nx,n)*abs(q2(Nx,n))/(2*g*D));

%FIM DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

%SOLUÇÃO PARA OS NÓS INTERNOS:

%Passo predictor:

for i=2:Nx-1

dq1(i,1)=-(f1(i+1)-f1(i))/dx+s1(i);
dq2(i,1)=-(f2(i+1)-f2(i))/dx+s2(i);

q1(i,n)=q1(i,n-1)+dq1(i,1)*dt;
q2(i,n)=q2(i,n-1)+dq2(i,1)*dt;

end

f1(2:Nx-1)=(a^2/g)*q2(2:Nx-1,n)-(q2(2:Nx-1,n).^3)/(3*g);
f2(2:Nx-1)=q2(2:Nx-1,n).*(q2(2:Nx-1,n))+g*q1(2:Nx-1,n);

s1(2:Nx-1)=-q2(2:Nx-1,n).*(Io-f*q2(2:Nx-1,n).*abs(q2(2:Nx-
1,n))/(2*g*D));
s2(2:Nx-1)=g*(Io-f*q2(2:Nx-1,n).*abs(q2(2:Nx-1,n))/(2*g*D));

Q(2:Nx-1,n)=A.*q2(2:Nx-1,n);
H(2:Nx-1,n)=q1(2:Nx-1,n)+(q2(2:Nx-1,n).*(q2(2:Nx-1,n)))/(2*g);

%Passo corretor:

for i=2:Nx-1

```

```

dqp1(i,1)=-(f1(i)-f1(i-1))/dx+s1(i);
dqp2(i,1)=-(f2(i)-f2(i-1))/dx+s2(i);

end

for i=2:Nx-1

q1(i,n)=q1(i,n-1)+0.5*(dq1(i,1)+dqp1(i,1))*dt;
q2(i,n)=q2(i,n-1)+0.5*(dq2(i,1)+dqp2(i,1))*dt;

end

f1(2:Nx-1)=(a^2/g)*q2(2:Nx-1,n)-(q2(2:Nx-1,n).^3)/(3*g);
f2(2:Nx-1)=q2(2:Nx-1,n).*(q2(2:Nx-1,n))+g*q1(2:Nx-1,n);

s1(2:Nx-1)=-q2(2:Nx-1,n).*(Io-f*q2(2:Nx-1,n).*abs(q2(2:Nx-
1,n)))/(2*g*D);
s2(2:Nx-1)=g*(Io-f*q2(2:Nx-1,n).*abs(q2(2:Nx-1,n)))/(2*g*D);

Q(2:Nx-1,n)=A.*q2(2:Nx-1,n);
H(2:Nx-1,n)=q1(2:Nx-1,n)+(q2(2:Nx-1,n).*(q2(2:Nx-1,n)))/(2*g);

end

    end
end

result=0;

while result~=6

%RESULTADOS:

result=menu('Vizualização dos resultados:', 'Animação de H(x,t)', ...
'Animação de H(x,t)/max(H) e Q(x,t)/max(Q)', 'H(L,t)', ...
'Envoltória de valores máximos', 'Envoltória de valores mínimos', ...
'Sair');

if result==1

for n=1:1:Nt

plot(0:dx:L,H(:,n))
xlabel('x');
ylabel('H');
xlim([min(min(0)) L])
ylim([min(min(H)) max(max(H))])
grid on
Mo=getframe;
end

else if result==2

for n=1:11:Nt

plot(0:dx:L,H(:,n)/max(max(H)),0:dx:L,Q(:,n)/max(max(Q)))
xlabel('x');
ylabel('H/Hmáx e Q/Qmáx');

```


A Figura 8 contém resultados calculados com o método das características e com o código de Wylie e Streeter (1978) e os resultados obtidos com o código elaborado aqui, calculados com os três métodos estudados. Observe a excelente concordância entre as soluções. Tendo como referência o método de segunda ordem, MacCormack, foram calculados erros relativos máximos, que resultaram em valores menores que 2,5% para $H(t,L)$. As vazões calculadas com os diferentes métodos também apresentaram excelente sobreposição, como pode ser visto na Figura 7b, para a extremidade inicial do conduto. Cabe mencionar também que o número de Courant deve ser próximo da unidade. Para $\text{Courant} > 1$, as instabilidades numéricas podem impedir os cálculos. Para $\text{Courant} < 1$, o método das características apresentado não resultará na solução correta.

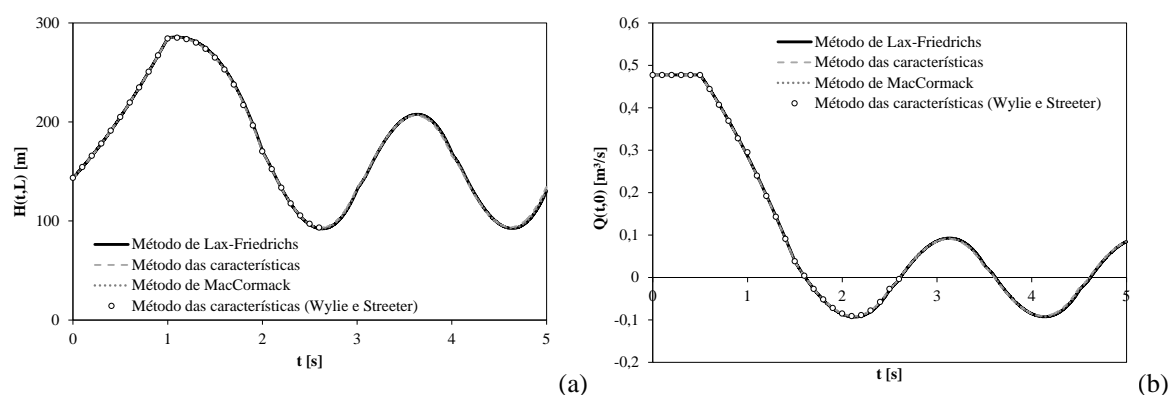
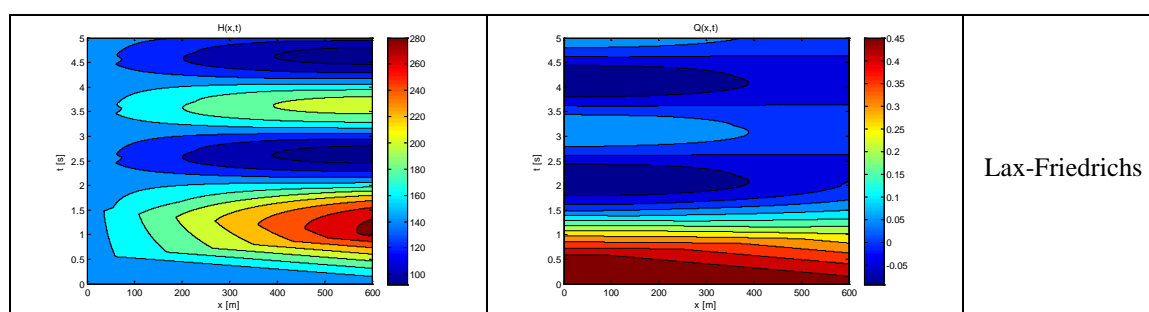


Figura 8 – Comparação entre os resultados obtidos com os três métodos descritos e resultados calculados com o código de Wylie e Streeter (1978): (a) Carga piezométrica em $x = L$ (posição da válvula) e (b) vazão em $x = 0$

Sugere-se explorar, com o Matlab[®], os outros meios de visualização de resultados, como envoltórias com valores mínimos e máximos e a animação dos resultados, Q e H , em função do tempo e do espaço. Essas opções estão programadas no código elaborado. A Figura 9 permite ver as variáveis H e Q no plano espaço-tempo. Observa-se mais uma vez que os métodos apresentaram soluções próximas. Veja também a consistência dos resultados por meio desses gráficos, com H constante em $x = 0$, sua oscilação ocasionada pelo fechamento da válvula, a vazão, Q , decrescente em $x = L$ e a sua oscilação devido à reflexão no reservatório de nível constante.



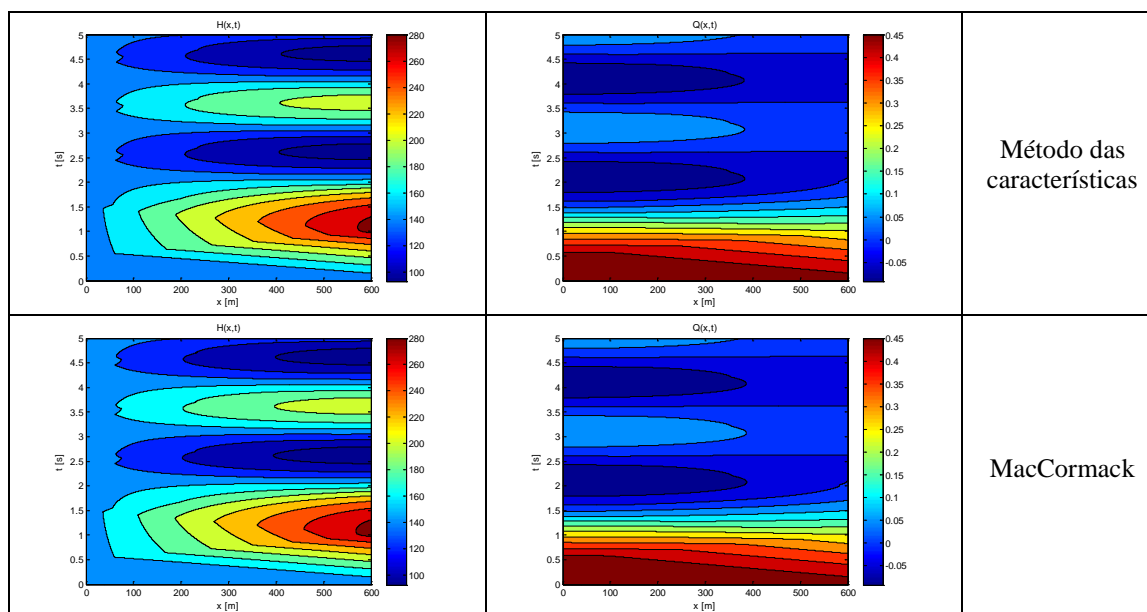


Figura 9 – Faixas de nível para H e Q calculadas com os três métodos

H alcançou valores quase duas vezes iguais ao valor hidrostático. Pressões tão elevadas podem provocar vazamentos e até mesmo o rompimento do conduto. Para que isto não ocorra, o tempo de fechamento da válvula deve ser maior ou algum dispositivo de proteção deve ser especificado. Pensando sobre esse problema, cabe destacar um princípio básico associado aos meios de proteção, a saber: Deve-se aumentar o tempo de anulação da vazão para reduzir as amplitudes das pressões.

Para estudar esse comportamento, escolha um dos métodos numéricos (ou os três) e modifique o tempo de fechamento da válvula de 2,1 s para 1,5 s. A solução com o método de Lax-Friedrichs, para $H(t, L)$, pode ser vista na Figura 10a. Observe valores de H maiores que 350 m e valores negativos. Se estes assumirem valores iguais à pressão de vapor do líquido, ocorrerá a mudança de fase para o estado vaporoso. Para visualizar esse fenômeno, acesse a referência [1]⁴ e assista ao vídeo “*Effects of Fluid Compressibility*”, que apresenta a mudança de fase e uma separação entre partes do escoamento denominada como “ruptura da veia líquida”. Você encontrará esse trecho do vídeo após 4 min e 30 s a partir do início do vídeo.

Para ilustrar o comportamento de H junto à válvula para um fechamento instantâneo, foi realizada uma simulação com $C_d A = 0$ para $t > 0$. O resultado pode ser visto na Figura 10b. H máximo alcançou três vezes a carga hidrostática de 150 m. As pressões negativas excederam o

⁴ Ver em: <<http://www.iuhr.uiowa.edu/research/publications-and-media/films-by-hunter-rouse/>>. Acesso em 25 fev. 2016.

limite fisicamente correto, com $-141 \text{ mH}_2\text{O}$ (lembre que neste exemplo $H=h$). É interessante observar também H e Q no plano espaço tempo, como nas Figuras 10c e d.

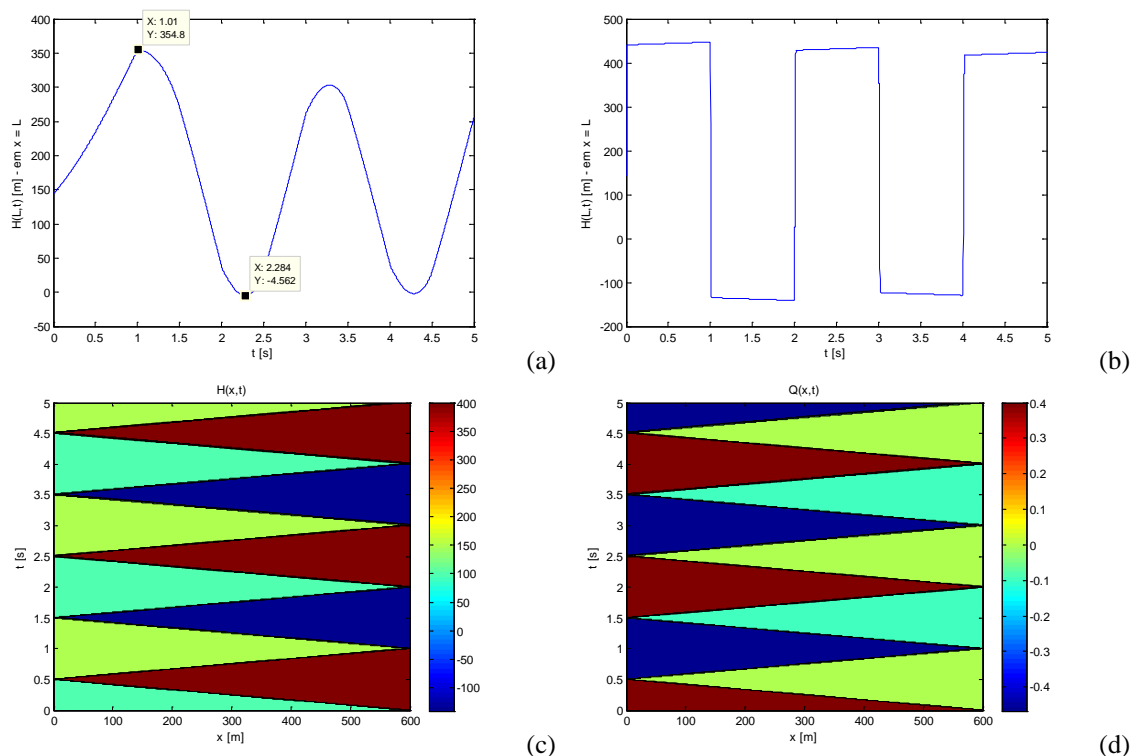
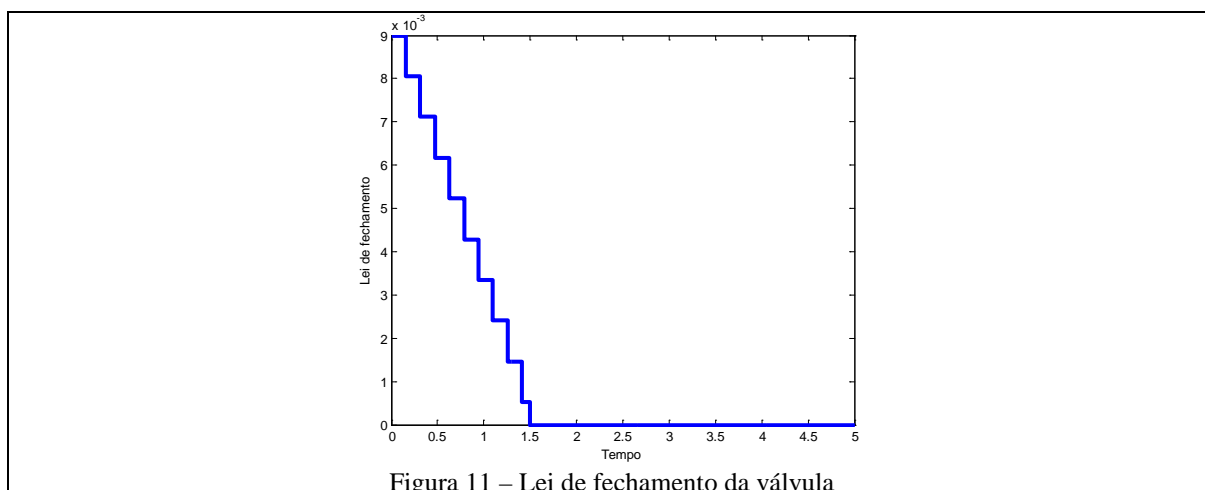


Figura 10 – Solução para um tempo de fechamento igual a 1,5 s (a) e fechamento instantâneo (b). Faixas de nível para H e Q , simuladas para o fechamento instantâneo (c e d)

Para pensar, discutir e fazer

Foi mencionado anteriormente que o princípio básico de proteção dos sistemas hidráulicos contra o golpe de aríete está atrelado ao tempo de anulação da vazão. Resolva novamente o problema anterior (reservatório-conduto-válvula-saída livre) especificando uma lei de fechamento escalonada, i.e., uma lei que feche a válvula com sucessivos degraus, como na Figura a seguir. Observe o comportamento das pequenas ondas produzidas com esse fechamento. Se o tempo de fechamento total da válvula for inferior a $2L/a$, que é o tempo de ida e retorno da onda, a manobra é classificada como manobra rápida. Neste caso, a onda refletida pelo reservatório chegará à válvula após o seu fechamento completo. Se o tempo de fechamento total da válvula for maior que $2L/a$, a onda refletida pelo reservatório regressará à válvula antes do seu fechamento completo, produzindo, desse modo, um alívio na pressão máxima em relação ao fechamento rápido. Essa é classificação para o fechamento lento. Em sistemas hidráulicos de grande porte, deve ser evitado o uso de certas válvulas que tenham mecanismo de operação capaz de permitir o fechamento rápido. O emprego de válvulas de gaveta, por exemplo, pode ser adequado porque essas válvulas não podem ser rapidamente fechadas.

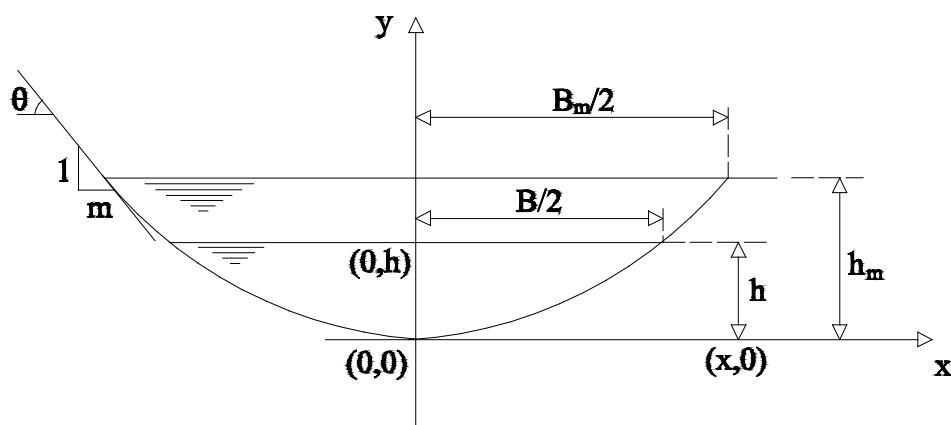


Considerações finais

Com a conclusão deste capítulo e considerando o escopo do livro, encerramos os estudos sobre métodos computacionais aplicados aos escoamentos em condutos forçados. Dois problemas introdutórios sobre escoamento variável foram resolvidos com diferentes métodos numéricos e recursos computacionais, explorando, deste modo, o modelo rígido e o modelo elástico. Nas próximas páginas estudaremos aplicações aos escoamentos em superfície livre.

CAPÍTULO 4

ESCOAMENTO EM SUPERFÍCIE LIVRE: REGIME PERMANENTE



A seção transversal parabólica pode ser uma aproximação útil para canais naturais.

Introdução: Equações de resistência

Em condutos forçados a seção transversal do escoamento mostra que a interface existente é aquela entre fluido e sólido (as paredes do conduto). Escoamentos em superfície livre em canais apresentam seção transversal com interface entre líquido e estrutura (fundo e paredes do canal) e entre líquido e gás (água e ar, por exemplo). Esta interação, entre líquido e gás, é facilmente deformável, condição que sugere o termo superfície livre (“livre para sofrer deformações”). Nesses casos, os escoamentos podem ocorrer em canais artificiais, que possuem as mais variadas formas, e canais naturais, em geral com formas ainda mais complexas. As leis físicas básicas escritas para volumes de controle continuam sendo válidas para estudos de escoamentos em canais e o cálculo da energia dissipada pode ser realizado com a equação de Darcy-Weisbach, desde que o diâmetro seja substituído pelo diâmetro hidráulico e as restrições de sua dedução sejam atendidas. Apesar disso, é provável que a dificuldade em identificar adequadamente valores para a rugosidade absoluta equivalente das superfícies de canais não faça dessa equação a mais empregada. De outro modo, a equação de Manning ou Manning-Strickler possui um coeficiente de resistência que foi vinculado ao longo dos anos a diversos tipos de coberturas encontradas na prática, sendo uma das equações mais utilizadas para escoamentos e canais. Esse modelo, entretanto, deve ser visto com atenção, sobretudo porque o referido coeficiente não é adimensional e, em geral, é apresentado como um coeficiente de resistência dependente apenas da aspereza da superfície, independente da estrutura interna do escoamento (lembre que o fator de atrito de Darcy-Weisbach é adimensional e uma função da rugosidade relativa e do número de Reynolds).

Além do escoamento uniforme em canais, são observados mais frequentemente escoamentos com variações graduais da altura de escoamento ao longo do espaço. Outra forma possível é a ocorrência de bruscas mudanças no espaço, como o ressalto hidráulico. Nos dois casos, a modelagem matemática clássica assume a independência com o tempo, empregando valores médios para as grandezas de interesse. Uma condição mais avançada, do ponto de vista físico e matemático, é a de escoamento variado e variável. Esses são assuntos abordados nos capítulos da segunda parte do livro. Os escoamentos estudados neste capítulo ocorrem em regime permanente. São desenvolvidos métodos computacionais para resolver a equação de Manning aplicada a canais com diferentes seções transversais, assim como a equação da quantidade de movimento linear, para o ressalto hidráulico em condutos de seção circular. Incluiremos também soluções da equação de Darcy-Weisbach para o regime uniforme. Mais uma vez, recomenda-se a leitura de textos com os conceitos fundamentais sobre o tema, como Porto (2006).

Equações de resistência e seções transversais

Antoine de Chezy (1718-1798), engenheiro e matemático nascido na França, foi provavelmente o primeiro a propor uma equação de resistência para escoamentos em canais. A sua equação é:

$$V = C\sqrt{R_h I_o} \quad \text{ou} \quad Q = AC\sqrt{R_h I_o} . \quad (1)$$

Nesta equação, V é a velocidade média, R_h o raio hidráulico, I_o a declividade de fundo, Q a vazão e C o coeficiente de Chezy. A equação de Darcy-Weisbach pode ser escrita com a seguinte forma para escoamentos em canais ou condutos com seções não circulares:

$$I_f = f \frac{V^2}{4R_h 2g} = f \frac{Q^2}{8A^3 g} P , \quad (2)$$

em que I_f = perda de carga unitária, igual a I_o para condição de escoamento uniforme. Comparando as equações 1 e 2, torna-se possível interpretar o coeficiente C de Chezy:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} . \quad (3)$$

Deve-se observar com atenção que: (1) O coeficiente C não é adimensional. (2) Assim como f , C é função do número de Reynolds e da rugosidade relativa. A conhecida fórmula de Manning, citada anteriormente, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{I_o} . \quad (4)$$

Comparando-a com a fórmula de Chezy, conclui-se que:

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{I_o} = C\sqrt{R_h I_o} \therefore n = \frac{R_h^{1/6}}{C} . \quad (5)$$

Considerando a equação 4 e os valores práticos do coeficiente n de Manning, conclui-se que a mesma só pode ser aplicada aos escoamentos turbulentos hidraulicamente rugosos, para os quais C não é função do número de Reynolds. Nota-se também que n não é adimensional,

exigindo certa atenção quanto ao uso da equação de Manning e o sistema de unidades adotado para expressar os valores de n . A equação de Darcy-Weisbach não possui tais restrições.

Equacionamentos para diferentes seções transversais

As equações anteriores contêm as seguintes grandezas vinculadas à forma da seção transversal: Área molhada, A , e o raio hidráulico, R_h , que é definido como o resultado da divisão da área molhada pelo perímetro molhado, P . Deste modo, torna-se necessário escrever as formulações para as diferentes formas dos canais, como exposto neste item. Considere a seção transversal trapezoidal da Figura 1.

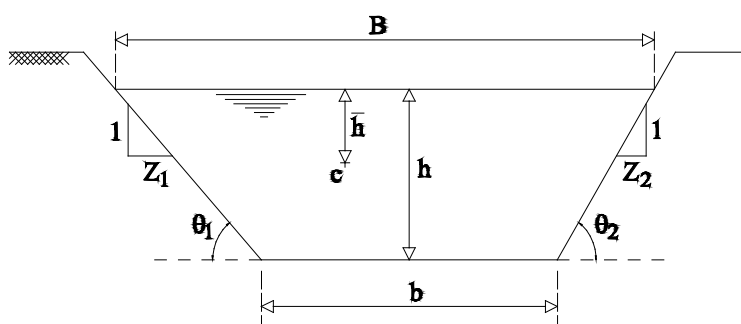


Figura 1 – Seção trapezoidal assimétrica

A área molhada, A , é escrita inicialmente com a seguinte forma:

$$A = (B + b) \frac{h}{2} = (b + x_1 + x_2 + b) \frac{h}{2}, \text{ com } B = b + x_1 + x_2.$$

Observe que $\text{tg}\theta_1 = \frac{h}{x_1} = \frac{1}{Z_1}$, portanto, $x_1 = \frac{h}{\text{tg}\theta_1} = Z_1 h$. Sendo assim,

$$A = [2b + h(Z_1 + Z_2)] \frac{h}{2}, \tag{6}$$

em que, h é a altura de escoamento e b a largura de fundo.

O cálculo do perímetro molhado pode ser desenvolvido como exposto a seguir:

$$P = b + L_1 + L_2 = b + \sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2} = b + \sqrt{h^2 + h^2 Z_1^2} + \sqrt{h^2 + h^2 Z_2^2} =$$

Lembre que o perímetro molhado corresponde ao contato entre líquido e sólido, não incluindo a superfície livre. L_1 e L_2 são as hipotenusas definidas nas paredes laterais do canal. Para esta dedução foi necessário o teorema de Pitágoras. Simplificando a escrita, obtém-se:

$$P = b + h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right). \quad (7)$$

O raio hidráulico é igual a A/P , portanto:

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{[2b + h(Z_1 + Z_2)] \frac{h}{2}}{b + h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right)}. \quad (8)$$

O regime de escoamento (supercrítico ou subcrítico) pode ser determinado com o número de Froude (equação 9), que requer o conhecimento da largura de topo, B (equação 10).

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gH_m}}, \quad (9)$$

em que H_m é a altura média, definida como $H_m = A/B$.

$$B = b + h(Z_1 + Z_2). \quad (10)$$

Outras formulações podem ser escritas, como a altura de escoamento como solução da equação para a área molhada (equação 11) e a profundidade do centroide (equação 12). Esses equacionamentos são relevantes para elaboração dos códigos do regime não permanente.

$$h = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 2(Z_1 + Z_2)A}}{Z_1 + Z_2}. \quad (11)$$

$$\bar{h} = \frac{h^2}{6A} [h(Z_1 + Z_2) + 3b]. \quad (12)$$

A seção transversal circular também é relevante e encontra aplicações, entre outros casos, em sistemas de transporte de águas pluviais e esgoto sanitário. Com base na Figura 2, as formulações para as grandezas geométricas são apresentadas a seguir.

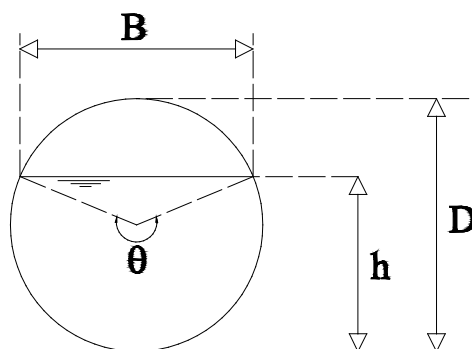


Figura 2 – Seção circular

A área molhada é igual à soma:

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{círculo}} - \overbrace{(A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}})}^{\text{área do segmento}} = \dots \\ \dots &= \pi R^2 - \left(\frac{2\pi - \theta}{2} \right) R^2 + \left(-\frac{R^2 \text{sen}\theta}{2} \right) = \pi R^2 - \pi R^2 + \frac{\theta R^2}{2} - \frac{R^2 \text{sen}\theta}{2} = \frac{R^2}{2} (\theta - \text{sen}\theta) \end{aligned}$$

Isto é, a área molhada é igual à área do círculo menos a área do setor circular mais a área do triângulo ou, a área do círculo menos a área do segmento circular de uma base.

$$A = \frac{D^2}{8} (\theta - \text{sen}\theta). \quad (13)$$

Observe que θ é adimensional (rad). Atenção ao utilizar a calculadora. Alguns modelos seguem a seguinte simbologia: gra = grado ou deg = grau.

O perímetro molhado é a medida do arco maior, isto é,

$$P = \frac{\theta D}{2}. \quad (14)$$

Altura de escoamento pode ser escrita com a seguinte forma:

$$h = \frac{D}{2}[1 - \cos(\theta/2)]. \quad (15a)$$

Desta equação, conclui-se que:

$$\theta = 2 \arccos(1 - 2h/D). \quad (15b)$$

A largura de topo é igual à corda, $R \cos(\theta/2 - \pi/2) = B/2 \Rightarrow$

$$B = D \cos(\theta/2 - \pi/2) = D[\cos(\theta/2)\cos(\pi/2) + \sin(\theta/2)\sin(\pi/2)] = D \sin(\theta/2).$$

$$B = D \sin(\theta/2). \quad (16)$$

Altura da superfície livre até o centroide é calculada como exposto a seguir.

$$\text{A média ponderada dos valores de } y \text{ é: } \langle y \rangle = \int_{-R \sin(\theta/2)}^{R \sin(\theta/2)} \int_{R \cos(\theta/2)}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy dx = \frac{2}{3} R^3 \sin^3(\theta/2).$$

A altura desde o centro do círculo até o centroide do segmento:

$$\bar{y} = \frac{\langle y \rangle}{A} = \frac{4R \sin^3(\theta/2)}{3(\theta - \sin\theta)}. \text{ Sendo assim,}$$

$$\bar{h} = h - \frac{D}{2} + \frac{2D \sin^3(\theta/2)}{3(\theta - \sin\theta)} = h - D \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \sin^3(\theta/2)}{3(\theta - \sin\theta)} \right) = D \left\{ \frac{1 - \cos(\theta/2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2 \sin^3(\theta/2)}{3(\theta - \sin\theta)} \right\}$$

Portanto,

$$\frac{\bar{h}}{D} = -\frac{\cos(\theta/2)}{2} + \frac{2 \sin^3(\theta/2)}{3(\theta - \sin\theta)}. \quad (17)$$

Em alguns casos, as seções transversais de rios e canais não revestidos assumem formas que se aproximam de parábolas. Para uma seção desse tipo, como na Figura 3, são apresentadas as equações para área molhada A, perímetro molhado P, largura de topo B e altura da superfície livre até o centroide.

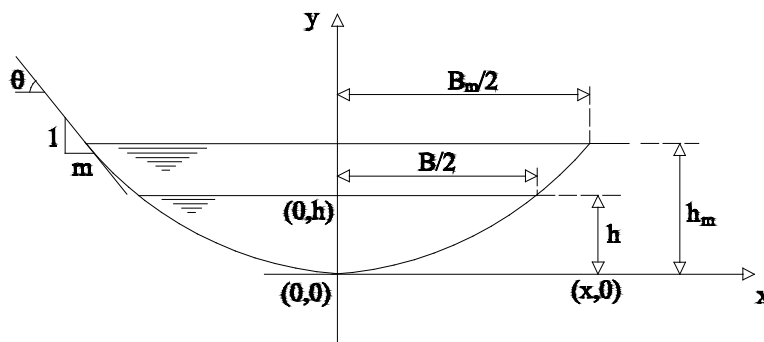


Figura 3 – Seção parabólica

A parábola considerada é definida por $y = ax^2$. Deste modo, a metade da área molhada é calculada como a área de um retângulo menos a área entre a curva e o eixo x:

$$A/2 = xy - \int_0^x y dx = ax^3 - a \int_0^x x^2 dx = ax^3 - a \frac{x^3}{3} = \frac{2a}{3} x^3 = \frac{2}{3} ax^2 x = \frac{2}{3\sqrt{a}} y^{3/2} \Rightarrow$$

$$A(h) = \frac{4}{3\sqrt{a}} h^{3/2}, \quad (18)$$

com $y = h$. A inclinação da reta tangente à parábola varia linearmente com x. A cotangente “m” indicada no desenho é

$$m^{-1} = \frac{dy}{dx} = 2ax \Rightarrow m = \frac{1}{2ax} = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{y}} \text{ ou } \sqrt{a} = \frac{1}{2m\sqrt{h}}. \text{ Assim, pode-se escrever:}$$

$$A(h) = \frac{4}{3 \frac{1}{2m\sqrt{h}}} h^{3/2} = \frac{8}{3} mh^2. \quad (19)$$

Sendo $x = B_m/2$ a metade da largura de topo máxima vinculada ao valor de m (que pode ser relacionado à estabilidade do canal) e h_m a altura de escoamento máxima correspondente a esta largura,

$m = \frac{1}{aB_m} = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{h_m}} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{2\sqrt{h_m}}{B_m}$. Com esta formulação, a área molhada passa a ser escrita

como

$$A(h) = \frac{2B_m}{3\sqrt{h_m}} h^{3/2}. \quad (20)$$

Largura de Topo:

$$B = \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{a}}. \quad (21)$$

Pode-se escrever B em função de A também. Seja $\sqrt{a} = \frac{4}{3A} h^{3/2}$, então,

$$B = \frac{3A}{2h}. \quad (22)$$

O cálculo do perímetro molhado é, entre todos aqui apresentados, o mais elaborado matematicamente, embora simples. Com o teorema de Pitágoras, escreve-se dP (elemento infinitesimal de P) da seguinte maneira:

$$dP = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \text{ Integrando (lembre que integrar é o mesmo que somar):}$$

$$P/2 = \int_0^x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = \frac{2ax\sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \sinh^{-1}(2ax)}{4a}. \quad (23)$$

Você pode encontrar a solução desta integral em tabelas de integrações ou códigos como o Mathematica[®] (no *software* completo ou até mesmo no “*online integrator*”, uma versão simplificada e gratuita). Vejamos algumas formas de representar o perímetro molhado:

$$P = \frac{2ax\sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \sinh^{-1}(2ax)}{2a} = x\sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \frac{\ln(2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2})}{2a} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 + 4ah} + \frac{\ln(2\sqrt{a}\sqrt{h} + \sqrt{1 + 4ah})}{2a}$$

$$P(h) = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 + 4ah} + \frac{\ln(2\sqrt{a}\sqrt{h} + \sqrt{1 + 4ah})}{2a}, \text{ ou, } P(h) = \frac{B}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4^2 h^2}{B^2}} + \frac{B}{4h} \ln\left(4\frac{h}{B} + \sqrt{1 + \frac{4^2 h^2}{B^2}}\right) \right].$$

Em termos de m:

$$\frac{P}{h} = 2\Phi \therefore \Phi = \left\{ \sqrt{1+m^2} + m^2 \ln \left[\frac{1}{m} (1 + \sqrt{1+m^2}) \right] \right\}. \quad (24)$$

Com a definição de raio hidráulico, sem dificuldades, escreve-se:

$$\frac{R_h}{h} = \frac{4}{3\Phi}. \quad (25)$$

A profundidade do centroide é:

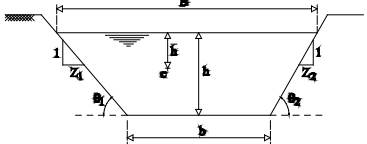
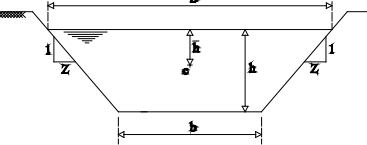
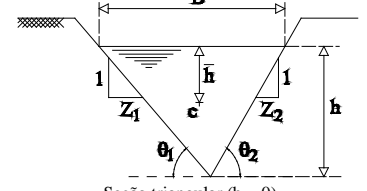
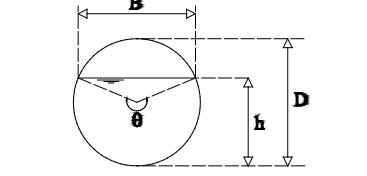
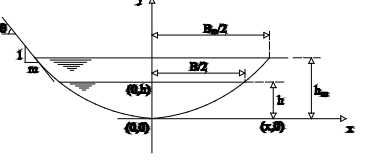
$$\bar{y} = \bar{h} = \frac{2}{5}h \quad (26)$$

O seu produto com a área molhada pode ser relevante em balanços de quantidade de movimento e forças, portanto, escreve-se:

$$A\bar{h} = \frac{4B_m}{15\sqrt{h_m}} h^{5/2}. \quad (27)$$

A Tabela 1 contém parte das formulações apresentadas e seções que podem ser obtidas a partir da seção trapezoidal assimétrica.

Tabela 1 – Resumo com informações geométricas

Forma da seção transversal	Área molhada	Perímetro molhado	Raio hidráulico	Largura de topo	Altura da superfície livre ao centroide
 <p>Trapézio assimétrico</p>	$A = [2b + h(Z_1 + Z_2)] \frac{h}{2}$ <p>Altura de escoamento, $h = h(A)$:</p> $h = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 2(Z_1 + Z_2)A}}{Z_1 + Z_2}$	$P = b + h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right)$	$R_h = \frac{[2b + h(Z_1 + Z_2)](h/2)}{b + h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right)}$	$B = b + h(Z_1 + Z_2)$	$\bar{h} = \frac{h^2}{6A} [h(Z_1 + Z_2) + 3b]$
 <p>Trapézio isósceles ($Z_1 = Z_2 = Z$)</p>	$A = (b + hZ)h$ <p>Altura de escoamento, $h = h(A)$:</p> $h = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ZA}}{2Z}$	$P = b + 2h\sqrt{1 + Z^2}$	$R_h = \frac{(b + hZ)h}{b + 2h\sqrt{1 + Z^2}}$	$B = b + 2hZ$	$\bar{h} = \frac{h^2}{6A} (2hZ + 3b)$
 <p>Seção triangular ($b = 0$)</p>	$A = (Z_1 + Z_2) \frac{h^2}{2}$ <p>Altura de escoamento, $h = h(A)$:</p> $h = \sqrt{\frac{2A}{Z_1 + Z_2}}$	$P = h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right)$	$R_h = \frac{(Z_1 + Z_2)(h^2/2)}{h \left(\sqrt{1 + Z_1^2} + \sqrt{1 + Z_2^2} \right)}$	$B = h(Z_1 + Z_2)$	$\bar{h} = \frac{h^2}{6A} [h(Z_1 + Z_2)]$
 <p>Seção circular</p>	$A = \frac{D^2}{8} (\theta - \text{sen}\theta)$	$P = \frac{\theta D}{2}$	$R_h = \frac{D}{4} \left(1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \right)$	$B = D \text{sen}(\theta/2)$	$\frac{\bar{h}}{D} = -\frac{\cos(\theta/2)}{2} + \frac{2\text{sen}^3(\theta/2)}{3(\theta - \text{sen}\theta)}$
 <p>Seção parabólica ($y = ax^2$)</p>	$A = \frac{4h^{3/2}}{3\sqrt{a}} \text{ ou } A = \frac{2}{3} Bh$	$P = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 + 4ah} + \dots$ $\dots + \frac{\ln(2\sqrt{a}\sqrt{h} + \sqrt{1 + 4ah})}{2a}$	$R_h = \frac{A}{P}$	$B = \frac{3}{2} \frac{A}{h}$	$\bar{h} = \frac{2}{5} h$

Problema 4 – escoamento uniforme em canais

Problema 4.1 – Planilha para cálculo de h em função de b : Trapézio

O objetivo deste problema é desenvolver uma planilha capaz de calcular a altura de escoamento ou a largura de fundo para condição de escoamento uniforme e em regime permanente. A planilha deve resolver problemas envolvendo canais com seções trapezoidais utilizando a equação de Manning e a equação de Darcy-Weisbach. Deve calcular também valores de h para diferentes larguras de fundo, b , simultaneamente. Para ilustrar o uso da planilha, adote b entre 1,0 m e 6,0 m e os dados a da Tabela 2.

Tabela 2 – Dados para os cálculos do problema 4.1

Z_1	Z_2	n	I_o	Q	g	ε	ν
[-]	[-]	[$\text{sm}^{-1/3}$]	[m/m]	[m^3/s]	[m/s^2]	[m]	[m^2/s]
1,5	1,5	0,014	0,0001	10	9,8	0,001	0,000001

Nota: O valor de ε adotado representa uma superfície de concreto com acabamento normal. Esse número pode variar de 1 mm a 3 mm de acordo com Porto (2006). O mesmo autor apresenta também valores de n , com $n = 0,014$ para revestimento de concreto em boas condições.

Solução

Inicialmente, as equações de Manning e Darcy-Weisbach foram reescritas com o intuito de definir funções-objetivo:

$$F_M = \frac{nQ}{\sqrt{I_o}} P^{2/3} - A^{5/3} = 0 \text{ (Equação de Manning).}$$

$$F_{DW} = \sqrt{\frac{f}{8g}} \frac{Q}{\sqrt{I_o}} \sqrt{P} - \sqrt{A^3} = 0 \text{ (Equação de Darcy-Weisbach).}$$

O cálculo do fator de resistência de Darcy-Weisbach é realizado com a equação de Swamee, apresentada no capítulo 1. Nesta equação, deve-se empregar:

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\nu P} \text{ e } \frac{\varepsilon}{4R_h}.$$

O trecho da planilha eu emprega a equação de Manning é apresentado na Figura 4a. A coluna 1 contém o cálculo do termo que não mudará em função de h ou b. A coluna 2 contém os valores de h. As diferentes larguras de fundo foram inseridas nas células da coluna 3. Com os dados anteriores e essas informações é possível calcular a área molhada (coluna 4), o perímetro molhado (coluna 5), a largura de topo (coluna 7), a altura média (coluna 8), a velocidade média (coluna 9) e o número de Froude (coluna 10). Os seus valores, entretanto, estarão incorretos até que o solver resolva o problema de acordo com a função objetivo, que foi digitada na coluna 6. A planilha apresentada na Figura 4b realiza os cálculos com a equação de Darcy-Weisbach. Sobre esta planilha, deve-se observar que: O número de Reynolds está na coluna 5 e a rugosidade relativa na coluna 7. Com essas informações é possível calcular o fator de cisalhamento, o que é realizado na coluna 8. A coluna 14 contém o adimensional capaz de avaliar se o escoamento é hidraulicamente liso, de transição ou rugoso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$nQ/I_o^{1/2}$	h	b	A	P	$F_M = 0$	B	H_m	V	Fr
	[m]	[m]	[m ²]	[m]		[m]	[m]	[m/s]	[-]
14,00	2,55	1,0	12,34	10,21	0	8,66	1,42	0,81	0,22
	2,41	1,5	12,33	10,19	0	8,73	1,41	0,81	0,22
	2,28	2,0	12,34	10,21	0	8,83	1,40	0,81	0,22
	2,16	2,5	12,37	10,28	0	8,97	1,38	0,81	0,22
	2,05	3,0	12,42	10,38	0	9,14	1,36	0,81	0,22
	1,95	3,5	12,48	10,51	0	9,34	1,34	0,80	0,22
	1,85	4,0	12,56	10,68	0	9,56	1,31	0,80	0,22
	1,77	4,5	12,66	10,88	0	9,81	1,29	0,79	0,22
	1,69	5,0	12,76	11,10	0	10,08	1,27	0,78	0,22
	1,62	5,5	12,87	11,35	0	10,37	1,24	0,78	0,22
	1,56	6,0	12,99	11,62	0	10,68	1,22	0,77	0,22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
h	b	A	P	Re	R_h	$\varepsilon/(4R_h)$	f	F_{Dw}	B	H_m	V	Fr	$f^{1/2} Re \varepsilon / D_h$
[m]	[m]	[m ²]	[m]	[-]	[m]	[-]	[-]		[m]	[m]	[m/s]	[-]	
2,54	1,0	12,24	10,17	3,93E+06	1,20	2,08E-04	0,0142	0	8,63	1,42	0,82	0,22	97,16
2,40	1,5	12,24	10,15	3,94E+06	1,21	2,07E-04	0,0141	0	8,70	1,41	0,82	0,22	97,21
2,27	2,0	12,25	10,18	3,93E+06	1,20	2,08E-04	0,0142	0	8,80	1,39	0,82	0,22	97,14
2,15	2,5	12,28	10,24	3,91E+06	1,20	2,09E-04	0,0142	0	8,94	1,37	0,81	0,22	96,95
2,04	3,0	12,32	10,34	3,87E+06	1,19	2,10E-04	0,0142	0	9,11	1,35	0,81	0,22	96,66
1,93	3,5	12,38	10,47	3,82E+06	1,18	2,11E-04	0,0142	0	9,30	1,33	0,81	0,22	96,27
1,84	4,0	12,46	10,64	3,76E+06	1,17	2,14E-04	0,0142	0	9,53	1,31	0,80	0,22	95,80
1,76	4,5	12,54	10,84	3,69E+06	1,16	2,16E-04	0,0143	0	9,77	1,28	0,80	0,22	95,26
1,68	5,0	12,64	11,06	3,62E+06	1,14	2,19E-04	0,0143	0	10,04	1,26	0,79	0,23	94,66
1,61	5,5	12,75	11,31	3,54E+06	1,13	2,22E-04	0,0144	-2E-12	10,33	1,23	0,78	0,23	94,01
1,55	6,0	12,86	11,57	3,46E+06	1,11	2,25E-04	0,0144	-1E-06	10,64	1,21	0,78	0,23	93,33

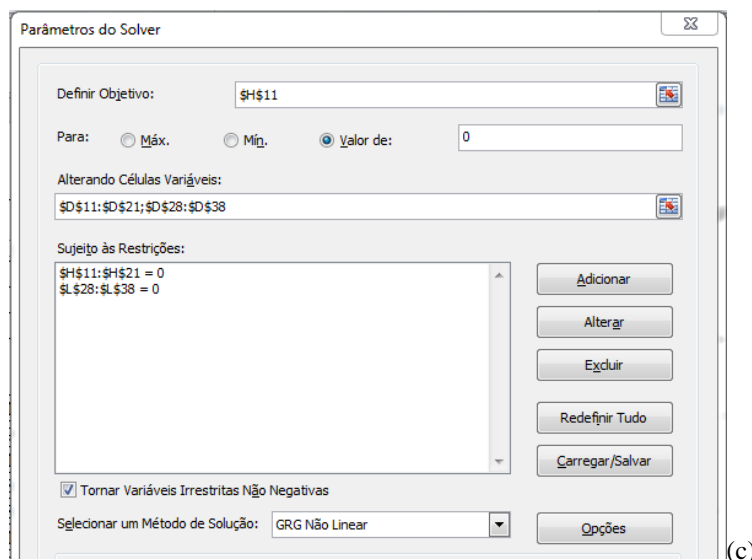


Figura 4 – Solução do problema: (a) Equação de Manning. (b) Equação de Darcy-Weisbach. (c) Solver

A configuração do solver é ilustrada na Figura 4c. O uso de restrições permite zerar as células que contêm as funções objetivo. Neste caso, devido à organização da planilha, as células variáveis (colunas com valores de h) podem ser adicionadas como indicado, utilizando-se o ponto e vírgula para separar colunas com células variáveis. Vale lembrar que apenas uma célula pode ser digitada no primeiro campo, denominado “Definir Objetivo”.

A análise dos resultados, auxiliada com a Figura 5, mostra que para as condições adotadas as formulações não resultam em diferenças significativas para os valores de h em função de b . Os resultados da coluna 14 da Figura 4b indicam a ocorrência de um escoamento em transição para plena turbulência, mas as variações em f foram pequenas (ver capítulo 2 de PORTO, 2006).

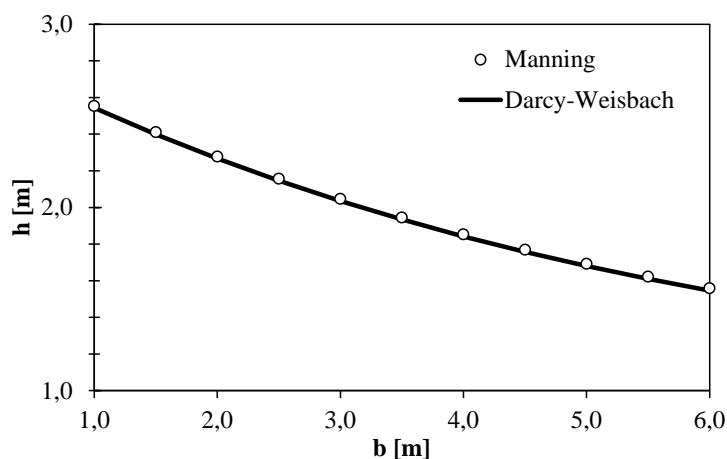


Figura 5 – Comparação entre os resultados obtidos com as diferentes formulações

Problema 4.2 – escoamento uniforme: Seção circular

Elabore uma tabela semelhante à Tabela 8.1 do livro Hidráulica Básica, de Porto (2006, p.253), com intervalos de 0,005 entre os valores de h/D. Apresente também os resultados sob a forma de um gráfico que relacione h/D em função de K_1 (coeficiente de forma). Com os dados apresentados a seguir, calcule a altura de escoamento, h, empregando a tabela proposta e o recurso solver do Excel®.

Dados				
n	I_o	g	Q	D
$[\text{m}^{-1/3}\text{s}]$	$[\text{m}/\text{m}]$	$[\text{m}/\text{s}^2]$	$[\text{m}^3/\text{s}]$	$[\text{m}]$
0,013	0,005	9,8	0,65	0,900

Solução

Observe que para valores de M e D conhecidos, calcula-se K_1 com a forma reduzida da equação de Manning, isto é, $K_1 = M/D$. A tabela mencionada e o valor do coeficiente de forma (K_1) possibilitam calcular h/D, sendo esta a sua principal aplicação. Para a construção da tabela, é empregado o seguinte procedimento: Com os valores de h/D, que variam de 0,005 a 0,995 para os resultados apresentados aqui, é possível calcular os valores de θ e K_1 correspondentes. Os resultados podem ser vistos na Tabela 3 e Figura 6.

*Definições:*⁵

$$M = \left(\frac{nQ}{\sqrt{I_o}} \right)^{3/8},$$

$$K_1 = \left[\left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{8} \right) \left(\frac{1 - \text{sen}\theta/\theta}{4} \right)^{2/3} \right]^{3/8} \text{ (Coeficiente de forma).}$$

⁵ Ver inferência em Porto, 2006.

Tabela 3 – Solução do Problema 4.2

h/D	K ₁	h/D	K ₁	h/D	K ₁	h/D	K ₁	h/D	K ₁	h/D	K ₁	h/D	K ₁
0,005	0,014	0,155	0,213	0,305	0,355	0,455	0,468	0,605	0,559	0,755	0,626	0,905	0,662
0,010	0,024	0,160	0,218	0,310	0,359	0,460	0,472	0,610	0,562	0,760	0,627	0,910	0,662
0,015	0,033	0,165	0,224	0,315	0,363	0,465	0,475	0,615	0,564	0,765	0,629	0,915	0,663
0,020	0,042	0,170	0,229	0,320	0,367	0,470	0,479	0,620	0,567	0,770	0,631	0,920	0,663
0,025	0,050	0,175	0,234	0,325	0,371	0,475	0,482	0,625	0,569	0,775	0,633	0,925	0,663
0,030	0,058	0,180	0,239	0,330	0,375	0,480	0,485	0,630	0,572	0,780	0,634	0,930	0,664
0,035	0,066	0,185	0,244	0,335	0,379	0,485	0,488	0,635	0,574	0,785	0,636	0,935	0,664
0,040	0,073	0,190	0,249	0,340	0,383	0,490	0,492	0,640	0,577	0,790	0,637	0,940	0,664
0,045	0,080	0,195	0,254	0,345	0,387	0,495	0,495	0,645	0,579	0,795	0,639	0,945	0,664
0,050	0,087	0,200	0,259	0,350	0,391	0,500	0,498	0,650	0,582	0,800	0,640	0,950	0,664
0,055	0,094	0,205	0,264	0,355	0,395	0,505	0,501	0,655	0,584	0,805	0,642	0,955	0,663
0,060	0,101	0,210	0,269	0,360	0,399	0,510	0,504	0,660	0,586	0,810	0,643	0,960	0,663
0,065	0,108	0,215	0,274	0,365	0,403	0,515	0,507	0,665	0,589	0,815	0,645	0,965	0,662
0,070	0,114	0,220	0,279	0,370	0,407	0,520	0,511	0,670	0,591	0,820	0,646	0,970	0,661
0,075	0,121	0,225	0,283	0,375	0,411	0,525	0,514	0,675	0,593	0,825	0,647	0,975	0,661
0,080	0,127	0,230	0,288	0,380	0,415	0,530	0,517	0,680	0,596	0,830	0,649	0,980	0,659
0,085	0,133	0,235	0,293	0,385	0,418	0,535	0,520	0,685	0,598	0,835	0,650	0,985	0,658
0,090	0,139	0,240	0,297	0,390	0,422	0,540	0,523	0,690	0,600	0,840	0,651	0,990	0,656
0,095	0,145	0,245	0,302	0,395	0,426	0,545	0,526	0,695	0,602	0,845	0,652	0,995	0,653
0,100	0,151	0,250	0,306	0,400	0,430	0,550	0,528	0,700	0,604	0,850	0,653		
0,105	0,157	0,255	0,311	0,405	0,433	0,555	0,531	0,705	0,606	0,855	0,654		
0,110	0,163	0,260	0,316	0,410	0,437	0,560	0,534	0,710	0,608	0,860	0,655		
0,115	0,169	0,265	0,320	0,415	0,440	0,565	0,537	0,715	0,610	0,865	0,656		
0,120	0,175	0,270	0,324	0,420	0,444	0,570	0,540	0,720	0,612	0,870	0,657		
0,125	0,180	0,275	0,329	0,425	0,448	0,575	0,543	0,725	0,614	0,875	0,658		
0,130	0,186	0,280	0,333	0,430	0,451	0,580	0,546	0,730	0,616	0,880	0,659		
0,135	0,191	0,285	0,338	0,435	0,455	0,585	0,548	0,735	0,618	0,885	0,660		
0,140	0,197	0,290	0,342	0,440	0,458	0,590	0,551	0,740	0,620	0,890	0,660		
0,145	0,202	0,295	0,346	0,445	0,462	0,595	0,554	0,745	0,622	0,895	0,661		
0,150	0,208	0,300	0,350	0,450	0,465	0,600	0,556	0,750	0,624	0,900	0,661		

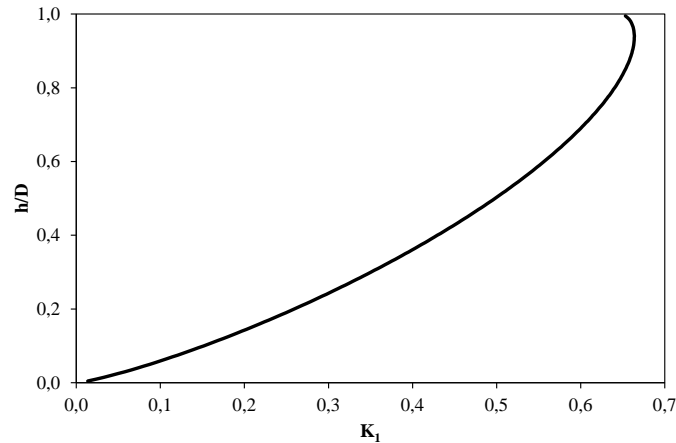


Figura 6 – h/D em função de K_1

A segunda parte do problema proposto consiste em calcular a altura de escoamento com dois métodos. Inicialmente, calcula-se M . Com M , K_1 pode ser calculado e a Tabela 3 fornecerá o valor da relação h/D . O resumo dos resultados é apresentado a seguir:

Solução com tabela ou gráfico			
M	K_1	$\sim h/D$	h
[m]	[-]	[-]	[m]
0,451	0,501	0,505	0,45

A planilha para uso do solver empregará os dados do problema e deve conter uma função objetivo, semelhante à empregada anteriormente, mas com equações para A e P compatíveis com a geometria do conduto. O trecho apresentado a seguir ilustra a planilha desenvolvida e o resultado obtido numericamente.

Solução com o solver do Excel					
$nQ/I_0^{1/2}$	$F(\theta) = 0$	θ	h	A	P
		[rad]	[m]	[m ²]	[m]
0,1195	2,14E-08	3,1599	0,454	0,32	1,42

Problema 4.3 – Escoamento uniforme: Seção parabólica

Seções transversais parabólicas, quando se aproximam de seções naturais, podem simplificar sobremaneira os cálculos para o regime permanente e principalmente para escoamentos transitórios. Além disso, somente no vértice da parábola, que é o fundo da seção, ocorre a tensão de cisalhamento máxima. Apenas dois pontos da seção transversal possuem máxima declividade de talude e canais não muito profundos podem ser construídos para drenagem e irrigação, por exemplo, sendo escavados com lâminas fabricadas com perfis parabólicos (SOUZA, 1985).

Empregando os dados a seguir e as formulações desenvolvidas para seção parabólica, calcule a altura de escoamento com o solver. Utilize a equação de Darcy-Weisbach. Calcule também o número de Froude.

Dados					
a	I_o [m/m]	Q [m ³ /s]	g [m/s ²]	ε [m]	v [m ² /s]
0,15987	0,001	1	9,8	0,09	0,000001

Fonte: Adaptado de Souza (1985)

Solução

Seguindo procedimentos semelhantes aos descritos anteriormente para elaboração de planilhas, foi desenvolvida a planilha que o leitor encontrará nos arquivos deste capítulo. A solução do problema é exposta a seguir. Inicialmente, h é desconhecido e todas as grandezas dependentes de h são calculadas com uma semente. Após o uso do solver, que tem h como célula variável, as grandezas calculadas com h são atualizadas assumindo valores corretos. O leitor pode verificar que m resulta próximo de 1,6, o que corresponde de forma aproximada a um pequeno canal escavado em argila firme, com $m=1,5$, segundo Chow (1959).

Solução											
h [m]	A [m ²]	P [m]	R_h [m]	$\varepsilon/(4R_h)$ [-]	Re [-]	f [-]	F_{DW}	B [m]	H_m [m]	V [m/s]	Fr [-]
0,613	1,599	4,158	0,385	0,0585	9,62E+05	0,077	4E-07	3,92	0,40842	0,625	0,313

Problema 4.4 – Ressalto hidráulico em tubulações

A aplicação da 2^a lei de Newton em sua forma integral ao ressalto hidráulico em um canal horizontal e de seção retangular resulta na conhecida equação de Bélanger. O mesmo balanço (de forças e quantidade de movimento linear) realizado para uma seção trapezoidal não conduz a um equacionamento tão simples. Tal dificuldade é encontrada para seções circulares também. Neste problema, considere um ressalto hidráulico estabelecido em um canal com seção transversal circular, isto é, em um tubo e desenvolva um gráfico que relacione os adimensionais h_2/h_1 , h_1/D e $Q^2/(gD^5)$, tendo como objetivo o cálculo das alturas conjugadas, h_1 e h_2 .

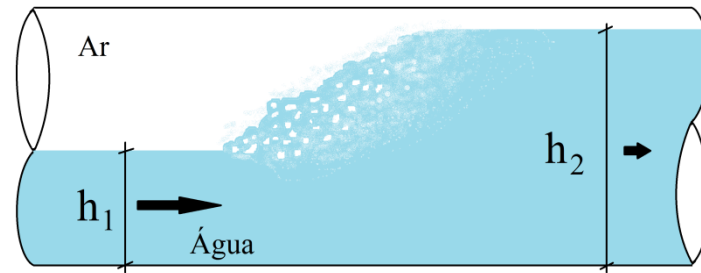


Figura 7 – Ressalto hidráulico: Definições

Solução

O produto entre área molhada e profundidade do centroide pode ser escrito como:

$$A\bar{h} = \left[\frac{3}{2} \text{sen}\theta \cos(\theta/2) + 2\text{sen}^3(\theta/2) - 3(\theta/2)\cos(\theta/2) \right] \frac{D^3}{24} = \dots$$

$$\dots = \left[3\text{sen}(\theta/2) - \text{sen}^3(\theta/2) - 3(\theta/2)\cos(\theta/2) \right] \frac{D^3}{24}$$

Substituindo na definição de força específica, $F(h)$,

$$F(h) = \frac{Q^2}{gA} + \bar{h}A = D^3 \frac{1}{24} \left\{ \frac{192}{(\theta - \text{sen}\theta)} \frac{Q^2}{gD^5} + [3\text{sen}(\theta/2) - \text{sen}^3(\theta/2) - 3(\theta/2)\cos(\theta/2)] \right\}.$$

Dividindo por D^3 ,

$$\frac{F(h)}{D^3} = \frac{1}{24} \left\{ \frac{192}{(\theta - \text{sen}\theta)} \frac{Q^2}{gD^5} + [3\text{sen}(\theta/2) - \text{sen}^3(\theta/2) - 3(\theta/2)\cos(\theta/2)] \right\}.$$

$$\text{Finalmente, } \left(\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{h}_1 A_1 \right) D^{-3} = \left(\frac{Q^2}{gA_2} + \bar{h}_2 A_2 \right) D^{-3}$$

$$\frac{8}{(\theta_1 - \text{sen}\theta_1)} \frac{Q^2}{gD^5} + [3\text{sen}(\theta_1/2) - \text{sen}^3(\theta_1/2) - 3(\theta_1/2)\cos(\theta_1/2)]/24 =$$

$$= \frac{8}{(\theta_2 - \text{sen}\theta_2)} \frac{Q^2}{gD^5} + [3\text{sen}(\theta_2/2) - \text{sen}^3(\theta_2/2) - 3(\theta_2/2)\cos(\theta_2/2)]/24$$

$$\frac{Q^2}{gD^5} = \frac{\left[3\text{sen}(\frac{\theta_2}{2}) - \text{sen}^3(\frac{\theta_2}{2}) - 3(\frac{\theta_2}{2})\cos(\frac{\theta_2}{2}) \right] - \left[3\text{sen}(\frac{\theta_1}{2}) - \text{sen}^3(\frac{\theta_1}{2}) - 3(\frac{\theta_1}{2})\cos(\frac{\theta_1}{2}) \right]}{192 \left[\frac{1}{(\theta_1 - \text{sen}\theta_1)} - \frac{1}{(\theta_2 - \text{sen}\theta_2)} \right]}.$$

A equação anterior foi empregada para produzir as curvas da Figura 8.

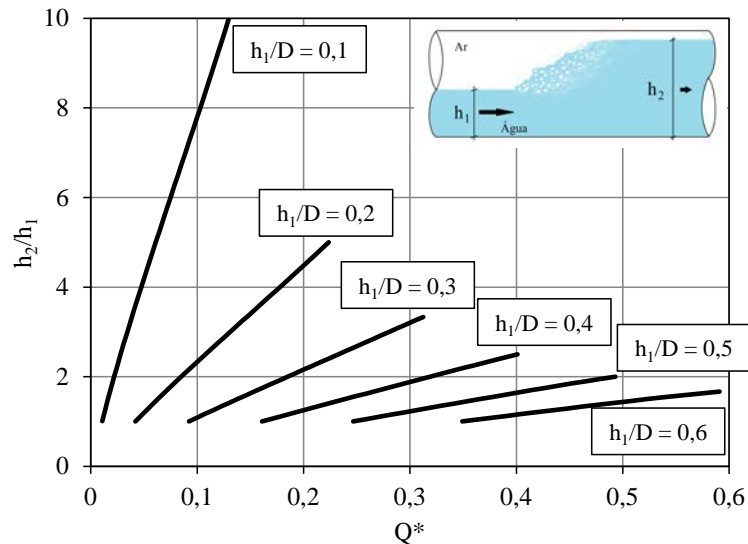


Figura 8 – Alturas conjugadas para um ressalto hidráulico em um tubo. $Q^* = Q/(gD^5)^{1/2}$. Curvas semelhantes foram calculadas por Thiruvengadam (1961), citado por Sturm (2001)

Problema 4.5 – escoamento gradualmente variado: Canal com contração

Conhecer a distribuição espacial das alturas de escoamento, $h=h(x)$, é relevante para análises de escoamentos em regime permanente, como aqueles que ocorrem em canais de sistemas extravasores e a montante de barragens. É importante também para o estabelecimento correto de condições iniciais empregadas em simulações de escoamentos variáveis. Este problema tem como objetivo apresentar a equação diferencial ordinária do escoamento permanente gradualmente variado, com diferentes formas (para canais prismáticos, canal com largura variada e canal elevação de fundo), e desenvolver métodos computacionais para solução da referida equação.

Inicialmente, considere um canal não prismático, isto é, as seções transversais a longo de x possuem formas diferentes (como em um canal retangular, por exemplo, com redução de largura ao longo de x). Mostre que:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_0 - I_f + (\alpha Fr^2 / B) A_x}{\cos \theta - \alpha Fr^2}, \text{ em que } H_m = A/B, Fr^2 = V^2/(gH_m), A_x = \partial A / \partial x.$$

Solução

A carga hidráulica total em uma seção localizada em x é

$$H = z + h \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \text{ ou } H = z + h \cos \theta + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2}, \text{ utilizando a definição de vazão, } Q = VA.$$

A derivada de H em relação a x conduz à solução procurada, como exposto a seguir:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \cos\theta \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \right).$$

A vazão é independente da posição ao longo do canal (regime permanente), assim como $2g$. O coeficiente de Coriolis para um escoamento que não é completamente desenvolvido é normalmente função da posição ao longo do canal, uma vez que a forma do perfil de velocidades é função de x. Essa variação será desprezada neste problema. Deste modo, escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \right) &= \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} (A^{-2}) = \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dA} (A^{-2}) \frac{dA}{dx} = \dots \\ \dots &= -2\alpha \frac{Q^2}{2gA^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dx} \right) = -\alpha \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} B \frac{dh}{dx} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado obtido na equação anterior, escreve-se:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \cos\theta \frac{dh}{dx} - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} B \frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} \left(\cos\theta - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} B \right) - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Resolvendo para dh/dx ,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{dH}{dx} - \frac{dz}{dx} + \alpha \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{\cos\theta - \alpha \frac{Q^2}{gA^3} B} = \frac{I_o - I_f + \alpha \frac{V^2}{gAB/B} \frac{\partial A}{\partial x}}{\cos\theta - \alpha \frac{V^2}{gA/B}} = \frac{I_o - I_f + \alpha \frac{V^2}{gH_m B} \frac{\partial A}{\partial x}}{\cos\theta - \alpha \frac{V^2}{gH_m}}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f + (\alpha Fr^2 / B) A_x}{\cos\theta - \alpha Fr^2},$$

em que $dH/dx = -I_f$ e $dz/dx = -I_o$. Aqui termina a demonstração.

Tabela 4 – Resumo das EDOs para o escoamento gradualmente variado.

$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f + (\alpha Fr^2 / B) A_x}{\cos\theta - \alpha Fr^2}$	Canal íngreme de declividade constante e seção variada.
$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f + \alpha(Q^2 / gA^3) h \frac{db}{dx}}{\cos\theta - \alpha Q^2 b / (gA^3)}$	Canal íngreme com largura variada: $A=b(x)h(x)$.

$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f}{\cos\theta - \alpha Fr^2}$	Canal prismático de grande declividade, com $p/\gamma = h \cos\theta$.
$\frac{dh}{dx} = \frac{I_o - I_f}{1 - \alpha Fr^2}$	Canal prismático de fraca declividade, com $p/\gamma = h$.

Como primeiro problema numérico, considera-se um canal retangular que possui um trecho com largura variada ao longo de x de acordo com a seguinte equação: $b(x) = b(0) - k[\sin(x - \pi/2) + 1]$, com $b(0) = 3,0$ m e $k = 0,3$ m. Outros dados são fornecidos a seguir. Desprezando a dissipação de energia na transição e sabendo que o fundo é horizontal, desenvolva um código ou planilha para resolver a equação deduzida, empregando os dados deste problema. Apresente $h=h(x)$ também para a condição limite sem alteração nas condições de escoamento a montante (escoamento crítico na seção de mínima largura sem modificação das condições de montante), o que pode ser avaliado por meio de modificações nos valores de k ou por meio do cálculo do seu valor crítico (como exposto na solução).

Dados							
α [-]	I_o [m/m]	g [m/s ²]	Q [m ³ /s]	$h(0)$ [m]	$b(0)$ [m]	k [m]	b_2 [m]
1	0	9,8	6	1,26	3	0,3	2,4

Com o intuito de visualizar a variação de b ao longo de x , foi produzida a imagem da Figura 9, que representa uma vista em planta baixa do canal, indicando as suas paredes laterais e a contração existente.

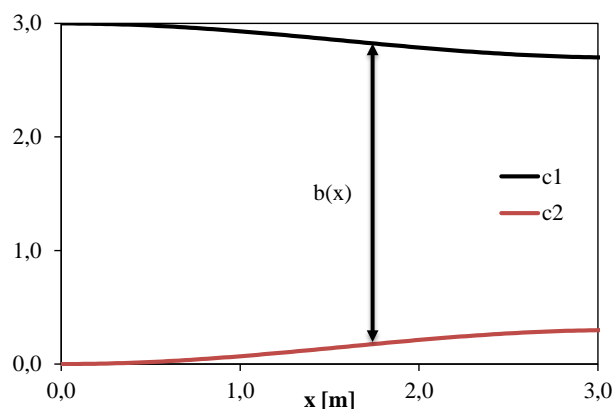


Figura 9 – Canal estudado inicialmente.

Solução

A solução deste problema foi elaborada com o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem. O uso da equação diferencial requer o cálculo de db/dx , apresentado a seguir:

$$\frac{db}{dx} = \frac{d}{dx} \{b(0) - k[\sin(x - \pi/2) + 1]\} = -k \cos(x - \pi/2)$$

Para auxiliar a análise, escreve-se a equação de Bernoulli entre as seções 1 e 2, o que resulta

$$\text{em } h_2^3 - h_2^2 \left[\frac{Q^2}{2gb_2^2} \left(\frac{b_2}{b_1 h_1} \right)^2 + h_1 \right] + \frac{Q^2}{2gb_2^2} = 0. \text{ Essa equação possui duas soluções positivas, uma para}$$

o regime subcrítico e outra para o escoamento supercrítico.

Equação de Bernoulli:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}. \text{ Com } V_1 h_1 b_1 = V_2 h_2 b_2, V_1 = V_2 \frac{b_2 h_2}{b_1 h_1} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{b_2 h_2}{b_1 h_1} \right)^2$$

$$h_1 + \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{b_2 h_2}{b_1 h_1} \right)^2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}. \text{ Com } V_2 = Q/(b_2 h_2)$$

$$h_1 + \frac{Q^2}{2g(b_2 h_2)^2} \left(\frac{b_2 h_2}{b_1 h_1} \right)^2 = h_2 + \frac{Q^2}{2g(b_2 h_2)^2} \Rightarrow F(h_2) = h_2^3 - h_2^2 \left[\frac{Q^2}{2gb_2^2} \left(\frac{b_2}{b_1 h_1} \right)^2 + h_1 \right] + \frac{Q^2}{2gb_2^2} = 0$$

A solução da EDO na extremidade de jusante da contração deve coincidir com a solução desta equação algébrica, para o regime de escoamento correspondente. Para os dados deste problema, $h_2 = 1,146$ m. A Figura 10a contém parte da solução calculada com Runge-Kutta (ver planilha dos arquivos deste capítulo). Observe que o escoamento é subcrítico ao longo da extensão do canal, com número de Froude crescente (consequência do aumento da velocidade média ao longo de x). Veja também que para a condição de escoamento subcrítico, a redução da largura resulta em diminuição de h ao longo de x . As curvas da Figura 10b mostram a situação limite sem alterações do escoamento a montante, em $x=0$.

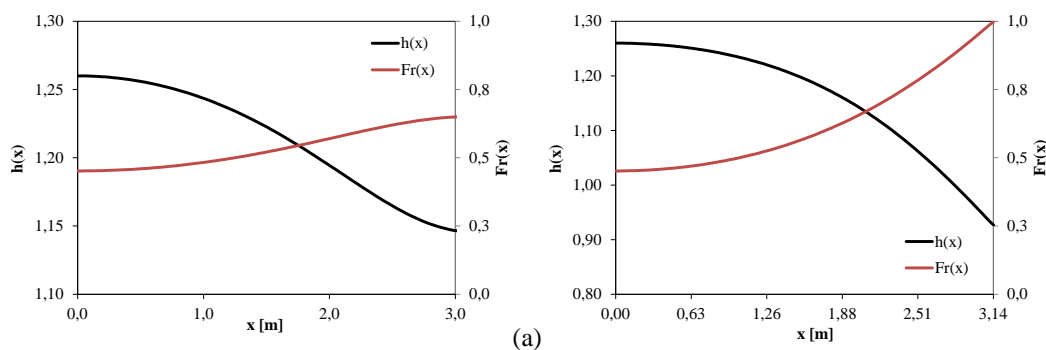


Figura 10 – Solução da EDO com Runge-Kutta de 4ª ordem em uma planilha: (a) Dados do enunciado. (b) Condição crítica na seção 2 (saída)

O comportamento do perfil da superfície livre, $h(x)$, para um escoamento supercrítico também pode ser estudado. Com a Figura 11, observe que $h(x)$ cresce com a redução da largura, para $Fr > 1$.

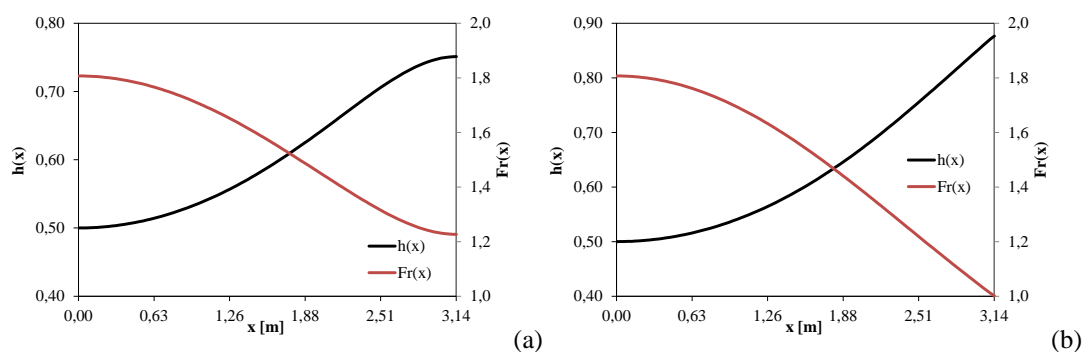


Figura 11 – Análise do escoamento supercrítico

Problema 4.6 – Cálculo da linha d'água com Runge-Kutta de 4ª ordem.

Considere um canal trapezoidal, com $b = 2,5$ m, $Z_1 = 1,5$, $Z_2 = 1,0$, $I_0 = 0,02$. Esse canal transporta uma vazão de $5,7$ m³/s. Uma comporta de fundo plana e vertical instalada em uma determinada seção produz uma altura de escoamento igual a $2,4$ m a montante da comporta. O escoamento no canal é uniforme a montante da influência da comporta. Com base nesses dados e sabendo que o canal possui revestimento de concreto em condições más, calcule a rugosidade absoluta equivalente com a equação $n = 0,039\varepsilon^{1/6}$ apresentada em Porto (2006, p.246), com unidade segundo o S.I.. Utilize a equação de Darcy-Weisbach e a equação de Swamee para o cálculo do fator de resistência e , com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, desenvolva uma planilha para cálculo da linha d'água.

Solução

Este problema foi proposto com base no Exemplo 13.6 de Porto (2006). Deste modo, a elaboração da planilha segue a solução apresentada pelo referido autor. Inicialmente, os dados foram organizados na parte superior da planilha (veja o arquivo na pasta deste capítulo), como apresentado a seguir. O cálculo da rugosidade absoluta equivalente com a formulação citada resultou em aproximadamente $0,01$ m.

Dados								
Z_1	Z_2	n	I_0	Q	g	θ	ε	v
[-]	[-]	[sm ^{-1/3}]	[m/m]	[m ³ /s]	[m/s ²]	[rad]	[m]	[m ² /s]
1,5	1	0,018	0,02	5,7	9,8	0,02	0,01	0,000001

Cálculo da altura de escoamento em regime uniforme:

Empregando o método computacional descrito anteriormente, que utiliza o solver, foi determinada a altura de escoamento para condição uniforme, que resultou em 0,46 m. Outras grandezas relevantes do escoamento uniforme também são apresentadas a seguir. Observa-se que o número de Froude resultou maior que a unidade, indicando a ocorrência de um escoamento supercrítico neste canal para a condição uniforme.

Escoamento uniforme												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
h	b	A	P	Re	R _h	$\varepsilon/(4R_h)$	f	F _{DW} = 0	B	H _m	V	Fr
[m]	[m]	[m ²]	[m]	[-]	[m]	[-]	[-]		[m]	[m]	[m/s]	[-]
0,46	2,5	1,41	3,97	5,74E+06	0,35	7,06E-03	0,0338	-1,01E-09	3,64	0,39	4,05	2,08

Cálculo da altura crítica de escoamento em canal trapezoidal assimétrico:

O escoamento crítico ocorre para $Fr = 1$, portanto, pode-se escrever uma função objetivo $F(h_c) = 0$ para o cálculo da altura crítica, como exposto a seguir:

$$Fr = 1 = \frac{Q}{\sqrt{gA^3/B}} \therefore F(h_c) = Q - \sqrt{gA^3/B} = 0.$$

O trecho da planilha responsável por realizar estes cálculos é apresentado com grandezas escritas com o índice c (crítico):

Escoamento crítico (Fr = 1)			
1	2	3	4
h _c	A _c	B _c	F(h _c)=0
[m]	[m ²]	[m]	
0,714	2,42	4,28	0

Observe que $h_c > h_{\text{uniforme}}$, portanto, o canal é de *forte declividade* e apenas curvas do tipo S podem ocorrer (S₁, S₂ e S₃). Como a altura de escoamento a montante da comporta é igual a 2,40 m, dos estudos básicos sobre as curvas de remanso, conclui-se que ocorrerá uma curva do tipo S₁ porque $2,40 \text{ m} > h_c > h_{\text{uniforme}}$. Esta curva corresponde ao escoamento subcrítico, portanto, um ressalto hidráulico será estabelecido na transição do escoamento uniforme ($Fr > 1$) para o escoamento gradualmente variado ($Fr < 1$).

Cálculo da altura conjugada de ressalto em canal trapezoidal assimétrico:

Seja $h_{\text{uniforme}} = h_1$ (conjugado supercrítico do ressalto) e h_2 o conjugado subcrítico. Como h_1 é conhecido, o cálculo de h_2 pode ser realizado. Para tanto, como o canal é trapezoidal assimétrico, utiliza-se a igualdade das forças específicas, $F(h)$, com as formulações da geometria trapezoidal assimétrica apresentadas anteriormente. Empregando o solver com o objetivo de resolver $F(h_1) - F(h_2) = 0$, escreve-se:

Ressalto hidráulico no canal trapezoidal ($F(h_1)-F(h_2)=0$)								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_1 [m]	A_1 [m]	\bar{h}_1 [m]	$F(h_1)$	h_2 [m]	A_2 [m]	\bar{h}_2 [m]	$F(h_2)$	$F(h_1)-F(h_2)=0$
0,458	1,41	0,21	2,66	1,0397	3,95	0,46	2,66	-5,48E-09

Nota: Nesta parte da planilha, $F(h_i)$, com $i=1,2$, representa força específica

Até aqui concluímos os cálculos que antecedem a determinação do perfil da superfície livre do escoamento permanente gradualmente variado. A curva S_1 deve ser computada desde $h = 2,40$ m (seção de controle localizada a jusante porque o escoamento é subcrítico) até $h = h_2 = 1,04$ m, que é o conjugado subcrítico do ressalto hidráulico.

Cálculo da linha d'água (perfil da superfície livre):

O emprego do algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem não apresenta dificuldades de implementação em uma planilha eletrônica, como aquela elaborada para este problema, desde que sejam observados alguns detalhes relativos a organização. Os cálculos com este método exigem determinações de valores de h intermediários e, conseqüentemente, valores de A , P , R_h , etc. correspondentes. Sendo assim, para facilitar a organização e identificação de possíveis erros decorrentes da digitação de equações muito extensas, sugere-se que sejam criadas colunas auxiliares. A organização das informações e inserção das equações foi realizada da seguinte forma:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δx [m]	x [m]	h_k [m]	$h_{k+1/2}$ [1]	$h_{k+1/2}$ [2]	h_{k+1} [2]	k_1	k_2	k_3	k_4
-0,1	0	2,40	2,39884	2,39884	2,397671	0,02328	0,02329	0,0233	0,0232899
	-0,1	2,39767	2,39651	2,39651	2,395342	0,02329	0,02329	0,0233	0,0232976 (...)
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A (k)	P (k)	R_h (k)	B (k)	Fr (k)	ε/D_h (k)	Re (k)	f (k)	I_f (k)	A (k+1/2)
10,5764	9,13	1,158725	7,40682	0,14407	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5677
10,5591	9,12	1,157786	7,401	0,14437	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5505 (...)
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
P (k+1/2)	R_h (k+1/2)	B (k+1/2)	Fr (k+1/2)	ε/D_h (k+1/2)	Re (k+1/2)	f (k+1/2)	I_f (k+1/2)	A (k+1/2)	P (k+1/2)
9,12	1,15826	7,40391	0,14422	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5677	9,12
9,12	1,15732	7,39809	0,14451	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5505	9,12 (...)

30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
R_h	B	Fr	ε/D_h	Re	f	I_f	A	P	R_h
(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1/2)	(k+1)	(k+1)	(k+1)
1,15826	7,40391	0,14422	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5591	9,12	1,15779
1,15732	7,39809	0,14451	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001	10,5419	9,11	1,15685

(...)

40	41	42	43	44	45
B	Fr	ε/D_h	Re	f	I_f
(k+1)	(k+1)	(k+1)	(k+1)	(k+1)	(k+1)
7,401	0,14437	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001
7,39518	0,14466	0,00216	2,50E+06	0,0240	0,0001

Figura 12 – Planilha para solução com Runge-Kutta de 4ª ordem

O valor negativo de Δx garante o cálculo correto da linha d'água subcrítica a partir de $h = 2,40$ m (a jusante). A Figura 13 contém o resultado obtido e uma representação da solução que inclui o escoamento uniforme e o ressalto hidráulico também. Com a planilha e todos os resultados calculados, o leitor pode verificar que o fator de resistência varou de 0,024 a 0,029. Neste caso, deve-se notar que a rugosidade relativa não é uma constante, pois envolve o diâmetro hidráulico, isto é, ε/D_h .

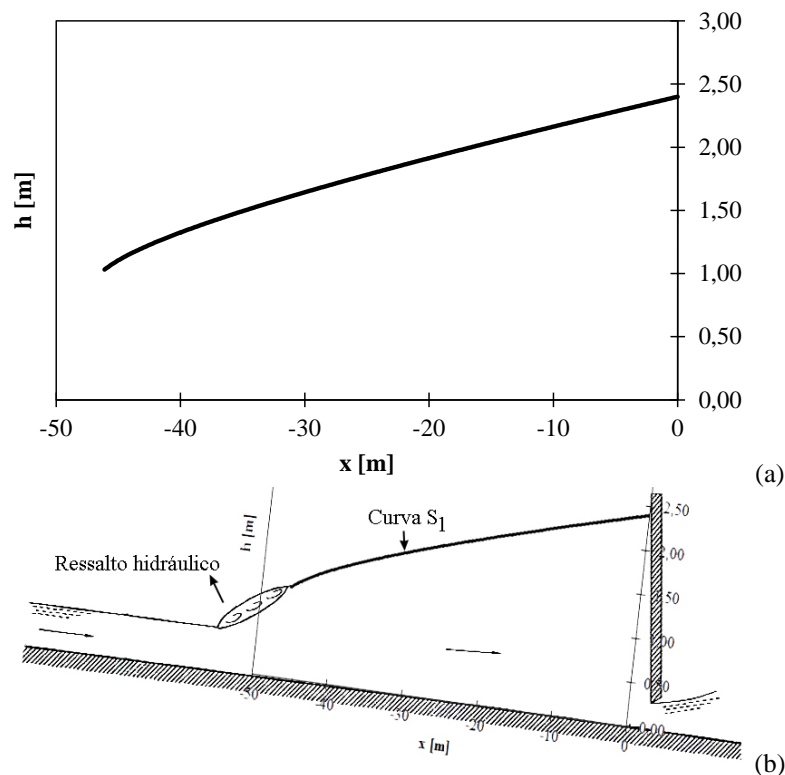


Figura 13 – Linha d'água (a) e a sua sobreposição à imagem que representa o escoamento uniforme supercrítico, seguido do ressalto, curva S_1 e comporta (b)

Fonte: Adaptado de Porto (2006, p.439).

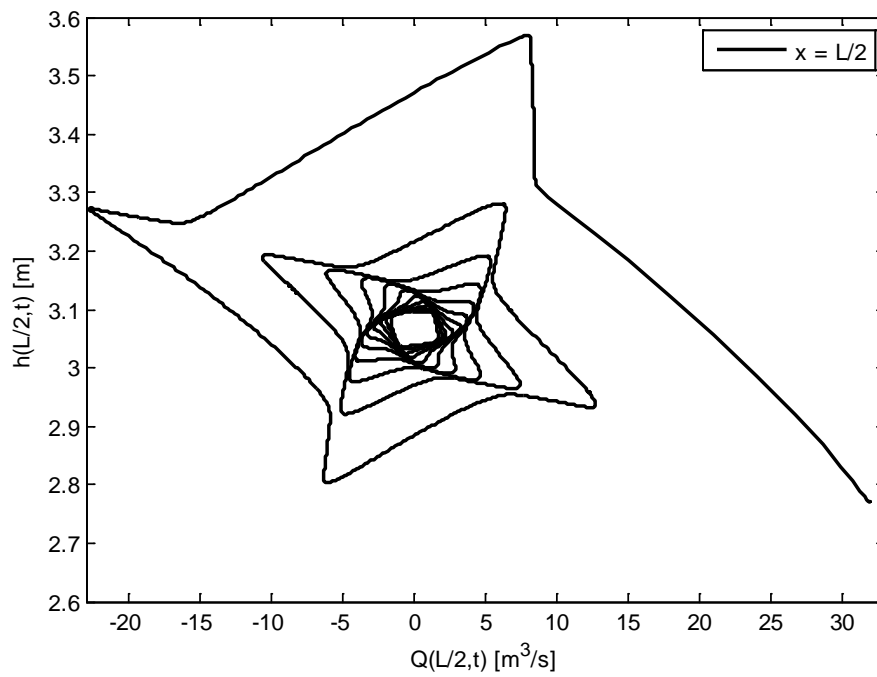
Considerações finais

O regime permanente foi explorado com os exercícios deste capítulo. Essa aproximação para o escoamento encontra muitas aplicações em engenharia, como no projeto de canais para irrigação, canais para drenagem urbana, drenagem em condomínios ou casas, como aqueles em

tenhados e lajes; aplicações aos escoamentos em sistemas extravasores de barragens; canais empregados para medição de vazão, mistura de componentes químicos em estações de tratamento de água, entre outros casos. Além disso, em um próximo nível, está o escoamento variado e variável, tema estudado no capítulo seguinte. A formulação matemática do problema não permanente requer a imposição de condições iniciais, condições estas que podem ser calculadas com os métodos do presente capítulo.

CAPÍTULO 5

ESCOAMENTO EM SUPERFÍCIE LIVRE: ESCOAMENTO VARIÁVEL



Novamente, uma interessante curva de um fenômeno oscilatório.

Introdução

Escoamentos variáveis dependem do tempo e escoamentos variados possuem grandezas que são funções do espaço. Este capítulo é dedicado aos escoamentos com características simultâneas de não uniformidade (escoamentos variados) e não permanência (escoamentos variáveis). Estudar um tema como esse possibilita analisar passagens de ondas de cheia em canais, o efeito da maré sobre o escoamento em um canal, a propagação de ondas originadas com a abertura ou fechamento de comportas em canais, a propagação de ondas resultantes da ruptura de barragens, entre outros casos. Tais estudos podem ser desenvolvidos essencialmente com dois tipos de modelagem: (1) Com a construção de modelos físicos – Modelagem Física; (2) Com o uso das leis básicas da física, relações constitutivas, métodos numéricos e equacionamentos complementares – Modelagem Matemática.

Seguindo o escopo deste livro, estudaremos as leis físicas básicas escritas inicialmente para a simplificação unidimensional, o que resulta em equações diferenciais parciais não lineares, quase análogas às do golpe de aríete estudadas anteriormente. Essas equações, muito semelhantes ao sistema deduzido por Saint-Venant, recebem o seu nome em homenagem à importante contribuição de seus estudos. De outro modo, poderiam ser utilizadas as equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds, a equação de conservação de massa e modelos de turbulência. A complexidade matemática e computacional, entretanto, ainda nos faz considerar as equações de Saint-Venant como um sistema adequado aos casos práticos que, em geral, devem ser avaliados com certa rapidez e aproximação compatível com as necessidades da engenharia.

Equações de Saint-Venant

Saint-Venant (1871) deduziu a equação 1, que possui como origem o princípio de conservação de massa, reduzido, neste caso, à conservação de volume:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(uA)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

em que, A = área molhada, u = velocidade média.

A aplicação da 2ª lei de Newton a um volume de controle selecionado em um canal, com uma entrada e uma saída, com paredes fixas e superfície livre deformável, resulta na equação 2. A sua dedução inclui as seguintes forças (componentes em x): peso, cisalhamento ao longo das paredes e fundo, forças sobre as superfícies planas submersas (entrada e saída), calculadas com distribuições hidrostáticas para canais de grande declividade (PORTO, 2006, capítulo 7).

$$\frac{\partial(uA)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta u A u + g A \bar{h} \cos \alpha) = g A (I_o - I_f). \quad (2)$$

Nesta equação, β é o coeficiente de Boussinesq, g é a aceleração devido à gravidade, \bar{h} é a profundidade do centro de gravidade da seção transversal, α é o ângulo entre o fundo do canal e a horizontal, $I_o = -dz/dx$ (z =cota do fundo) e I_f é a declividade da linha de energia. O uso das equações de Saint-Venant com $I_f \neq 0$ normalmente é realizado com equações de resistência desenvolvidas para o regime permanente, como as equações de Darcy-Weisbach e Manning:

$$I_f = f \frac{u |u|}{8gR_h} \quad (\text{Darcy-Weisbach}) \quad (3)$$

$$I_f = n^2 \frac{u |u|}{R_h^{4/3}} \quad (\text{Manning}) \quad (4)$$

em que f é o fator de resistência de Darcy-Weisbach, R_h é o raio hidráulico e n é o coeficiente de rugosidade de Manning.

Adh mar Jean Claude Barr  de Saint-Venant (1797-1886) deduziu a equa o 1 e uma equa o semelhante   equa o 2, publicando-as em 1871. As dedu oes destas equa oes podem ser encontradas em Chaudhry (1979, 2008) e Porto (2006). Por esse motivo, elas s o conhecidas como equa oes de Saint-Venant.

Solu o num rica do sistema de equa oes

A solu o do sistema de equa oes apresentado   $A(x,t)$ e $Q(x,t)$. Grandezas derivadas a partir destas principais, como a altura de escoamento, $h(x,t)$, a velocidade m dia, $u(x,t)$, entre outras, podem ser obtidas ap s a solu o. A forma empregada para a escrita das equa oes 1 e 2, que representam meios cont nuos,   denominada forma conservativa, e o uso de m todos num ricos de volumes finitos, como o m todo de Lax-Friedrichs e o de MacCormack, possibilitam a captura de discontinuidades ou choques, que s o solu oes matem ticas no sentido fraco.

Soluções para geometrias complexas não podem ser calculadas atualmente com métodos analíticos, sendo necessário o uso de esquemas numéricos para transformação das equações originais em formas discretas, assim como estudado anteriormente (ver problema do golpe de aríete, por exemplo). Neste item será exposta uma síntese com o conteúdo necessário à solução de problemas práticos de engenharia, como a simulação de ondas de cheia, simulação de ondas originadas com o fechamento e abertura de comportas em canais, entre outros casos. O método de Lax é semelhante ao descrito no Capítulo 3. O método de MacCormack, entretanto, pode exigir a introdução de uma viscosidade artificial para atenuar oscilações numéricas. Por esse motivo, ele é descrito neste capítulo.

Antes da apresentação dos métodos numéricos, observe que as equações de Saint-Venant podem ser escritas com uma única equação vetorial, cuja forma é:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = \underline{s}, \quad (5)$$

em que, $\underline{q} = \begin{pmatrix} A \\ uA \end{pmatrix}$, denominado vetor das quantidades conservadas,

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} uA \\ \beta uAu + gAh \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ \beta \frac{q_2^2}{q_1} + g \cos \alpha \phi(q_1) \end{pmatrix}, \text{ denominado vetor fluxo e } \underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ gAI_o - gAI_f \end{pmatrix}, \text{ que é o}$$

vetor com termos fonte. A função $\phi(q_1)$ depende da forma da seção transversal.

Método de MacCormack (1969)

O esquema de MacCormack (1969) é um método do tipo “previsor e corretor” de dois passos que possui acurácia de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. Este método é capaz de capturar ondas de choque e faz parte do conjunto de métodos de volumes finitos. Entre as aplicações relacionadas à hidráulica computacional, estão problemas com escoamentos compressíveis de aerodinâmica, escoamentos em condutos forçados e escoamentos em superfície livre em canais, com o cálculo de choques que representam o ressalto hidráulico, por exemplo. Além do seu uso para identificar a ocorrência de ressaltos hidráulicos, o trabalho de Anderson (1995) também apresentam aplicações ligadas à simulação de ondas de choque normais em bocais convergente-divergentes, ondas de expansão (leque de rarefação) e ondas de choque bidimensionais em placa plana. O desenvolvimento do código é relativamente simples e segue os seguintes passos:

1) Previsor. Adota-se uma aproximação avançada para a derivada espacial para calcular a derivada temporal no instante n e, em seguida, utiliza-se esta derivada para calcular q em $t+\Delta t$. O resultado obtido desta forma é identificado com uma barra superior.

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^n = -\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + s_i^n, \quad (6)$$

$$\overline{q}_i^{n+1} = q_i^n + \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^n \Delta t. \quad (7)$$

2) Corretor. O valor predito calculado com a equação 7 é utilizado para calcular a derivada temporal de q em $n+1$. Para tanto, adota-se uma discretização atrasada para a derivada espacial. Esta alternância entre derivadas avançadas e atrasadas produz um método de segunda ordem. Com este resultado, efetua-se uma média entre as derivadas temporais calculadas em n e $n+1$ para que seja realizado o cálculo final de q em $n+1$.

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^{n+1} = -\frac{\overline{f}_i^{n+1} - \overline{f}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \overline{s}_i^{n+1}, \quad (8)$$

$$\overline{q}_i^{n+1} = q_i^n + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^n + \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^{n+1} \right] \Delta t. \quad (9)$$

Viscosidade artificial

A solução obtida por um esquema de diferenças finitas contém erros dissipativos se o termo principal do erro local de truncamento possuir ordem par. Se neste erro existir um termo principal com ordem ímpar, então o esquema passa a ter erros dispersivos. Os erros dispersivos normalmente produzem oscilações nos resultados junto a ondas íngremes, o que pode provocar instabilidade numérica. Com o intuito de corrigir esta falha, utiliza-se normalmente uma viscosidade artificial, que neste texto é calculada pela seguinte equação, encontrada em Anderson (1995, p. 363):

$$S_i^n = \frac{C_x |h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n|}{h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n} (q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n). \quad (10)$$

em que C_x é um parâmetro arbitrário adimensional. Valores típicos para C_x estão compreendidos no intervalo 0,01 a 0,3, como explica Anderson (1995, p. 238) para o caso de escoamento

supersônico em bocais. Existem diferentes formulações para a viscosidade artificial. Esta escolha foi feita com base na experiência obtida com a solução do problema de localização de uma onda de choque normal no interior de um bocal convergente-divergente. De acordo com LeVeque (2004, p. 72), os primeiros a propor essa técnica foram Neumann e Richtmyer. O uso da viscosidade artificial altera o método de MacCormack para a seguinte forma:

1) Previsor. Deve-se somar a viscosidade calculada no tempo n quando for calculado q no passo previsor. Para o cálculo de cada componente q em $n+1$, deve-se somar a componente S correspondente (nota-se que há consistência dimensional nesta soma):

$$\overline{q}_i^{n+1} = \underline{q}_i^n + \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^n \Delta t + S_i^n. \quad (11)$$

2) Corretor. Deve-se somar a viscosidade calculada com base nos valores obtidos no passo previsor.

$$\underline{q}_i^{n+1} = \underline{q}_i^n + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^n + \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^{n+1} \right] \Delta t + \overline{S}_i^n. \quad (12)$$

Condições iniciais e de contorno

Se o trecho do canal a ser estudado estiver promovendo um escoamento uniforme, em $t = 0$, deve-se estabelecer ao longo de todo o domínio valores das grandezas relevantes calculadas para condição uniforme. Se o escoamento for gradualmente variado, a equação diferencial ordinária que modela o escoamento permanente gradualmente variado deverá ser resolvida para imposição adequada das condições iniciais. É possível também simular um escoamento variável a partir de uma condição de repouso, com $Q(x,0) = 0$.

O sistema de equações descrito possui característica hiperbólica, assim como as equações do modelo elástico que modelam o golpe de aríete. Desta forma, em função dos sinais dos autovalores da matriz convectiva, as condições de contorno devem ser fixadas ou calculadas. Para um escoamento supercrítico junto à entrada, como aquele da Figura 1, as curvas características estarão direcionadas para o domínio e as condições de contorno devem ser fixadas com base em informações externas (dadas pelo usuário, com base em informações do problema que está sendo resolvido). Se o escoamento for supercrítico na saída, as curvas características estarão direcionadas para fora do domínio (como a seção indicada na Figura 1 localizada entre a comporta e o ressalto), condição que não permite a imposição de valores fixos como condições de contorno que contenham informações externas, sendo necessário o cálculo com base no que

ocorre nas vizinhanças internas do contorno. Isso pode ser realizado com as equações características ou com extrapolações, como apresentado nas soluções dos problemas deste capítulo. Se o escoamento for subcrítico, na entrada ou na saída, as curvas características apresentarão declividades opostas e apenas uma condição de contorno deverá ser fixada com base em informações externas. A outra será calculada com dados do nó adjacente ao contorno. Finalmente, a ocorrência do escoamento crítico faz com que um autovalor seja nulo (porque $V - c = c - c = 0$) e o outro positivo, porque $V + c = c + c = 2c$. Se a seção for de saída, a curva positiva exigirá o cálculo de uma variável com informações do domínio (realizando extrapolação ou o uso de uma equação característica positiva). A segunda, para declividade da característica igual a 0, será fixada com base no escoamento crítico. Se a seção for uma entrada, as duas informações serão externas.

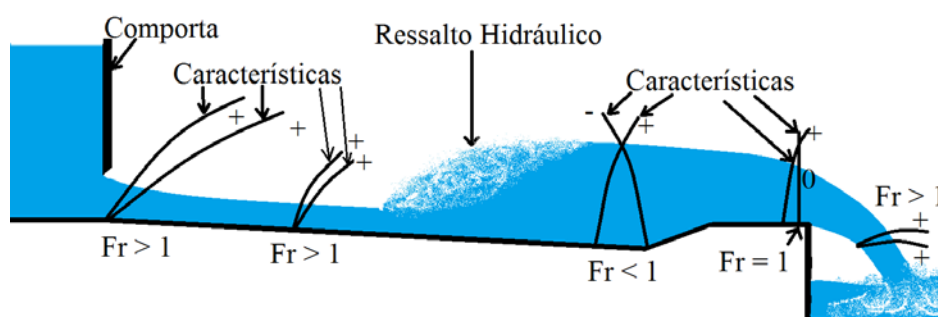


Figura 1 – Alguns possíveis domínios e seus contornos

A seguir são resolvidos alguns problemas com o intuito de evidenciar características básicas de escoamentos variáveis. Em todos os casos, os dados compõem experimentos numéricos que não estão necessariamente vinculados a estruturas projetadas ou construídas. Os códigos propostos podem ser adaptados com certa facilidade a situações reais com a inclusão dos dados relativos ao canal e condições iniciais e de contorno apropriadas.

Problema 5.1 – Escoamento variável em um canal: Propagação de uma onda de cheia.

Considere um trecho de um canal trapezoidal assimétrico com $L = 3000$ m, $I_0 = 0,0012$ m/m, $n = 0,020$, $b = 5$ m, $Z_1 = Z_2 = 1,5$. Para condições normais de operação, o escoamento observado pode ser assumido como permanente e uniforme. Calcule, com as equações de Saint-Venant em 1D, as grandezas do escoamento transitório provocado pela variação de vazão, $Q(0,t)$ na entrada do canal (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Hidrograma do Problema 5.1.

$Q(0,t)$ [m ³ /s]	8	10	16	28	48	34	23	16	8	8
t [s]	0	600	900	1800	2700	3600	4800	5400	6600	12000

Solução

O código possui três partes fundamentais: (1) pré-processamento; (2) processamento; (3) pós-processamento. O pré-processamento consiste em escrever os dados básicos relacionados ao canal e ao escoamento, como, por exemplo, o comprimento do canal e a largura de fundo. Informações como o hidrograma afluente, o tempo total de simulação, o espaçamento dos eixos temporal e espacial também devem ser inseridas. Nesse estágio, ainda como pré-processamento, alguns cálculos são realizados, como a interpolação do hidrograma, para que o número de pontos corresponda ao refinamento da malha temporal. A imposição das condições iniciais também pode exigir a solução de equações, como a solução da EDO do escoamento permanente gradualmente variado ou a solução de uma equação de resistência para o cálculo da altura do escoamento uniforme, como empregado neste exemplo. Para auxiliar esta etapa, foram criadas funções auxiliares que resolvem as equações (Manning e Darcy-Weisbach) com o método de Newton-Raphson. Tais funções, escritas em arquivos próprios, devem fazer parte da mesma “pasta” do código principal. Na etapa seguinte, um laço (“for”) principal percorre o eixo temporal e, dentro deste laço, um segundo “for” se encarrega de realizar os cálculos ao longo do eixo espacial. O pós-processamento consiste em exibir os resultados para que sejam realizadas as análises. Após esta síntese, são descritos abaixo alguns detalhes encontrados no programa apresentado na Tabela 2. Observe também que o símbolo % antes de uma frase transforma o que está escrito em texto que não será compilado.

Para imposição das condições de contorno, avalie o regime de escoamento ou os sinais dos autovalores da matriz convectiva. Você irá verificar que $Fr < 1$ para a entrada. Deste modo, o hidrograma da Tabela 1 deve ser fixado, sendo esta a “informação externa”. A área molhada não pode ser fixada, isto é, ela deve ser calculada com base no que ocorre nas proximidades do domínio. Uma solução possível para essa parte da condição de contorno consiste em empregar uma extrapolação explícita de ordem zero, que é $q_1(1,n) = q_1(2,n-1)$, em que 1 representa o primeiro nó do eixo x (entrada), 2 representa o nó vizinho à entrada (dentro do domínio) e n representa o instante atual e n-1 o instante anterior. As demais grandezas podem ser determinadas após o cálculo de $q_1(0,t)$, como ilustrado no código elaborado.

Para o contorno direito, a área novamente deve ser extrapolada. Com o seu valor calculado, determina-se $h(L,t)$ (altura de escoamento no contorno direito ou saída) e, em seguida, o raio hidráulico. Empregando a equação de Manning ou de Darcy-Weisbach, calcula-se a velocidade média, u , e a vazão $q_2 = uA$. O cálculo de h a partir da área pode ser feito de forma

simples para a seção retangular, com $h = A/b$. Para a seção trapezoidal assimétrica ($Z_1 \neq Z_2$, com $Z_1 > 0$ e $Z_2 > 0$ ou $Z_1 > 0$ e $Z_2 = 0$, por exemplo), deve ser utilizada a equação 11 do capítulo anterior, reescrita a seguir. Esta equação também é válida para seção simétrica, que corresponde a $Z_1 = Z_2 = Z$, e para seções triangulares, isto é, com $b = 0$.

Tabela 2 – Código para solução das equações de Saint-Venant

```
clear all
%MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM HIDRÁULICA
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo Porto

%Solução das equações de Saint-Venant para seções trapezoidais não-simétricas, simétricas, retangulares e triangulares com o método numérico de Lax-Friedrichs.

%Dados:

Qe1 = [8; 10; 16; 28; 48; 34; 23; 16; 8; 8];

tempo=[0.00; 10*60; 15*60; 30*60; 45*60; 60*60; ...
      80*60; 90*60; 110*60; 12000];

[a1,a2] = size(tempo);

tt = tempo(a1,1); %Tempo total em [s]
Nt = 12000;      %Número de nós da malha temporal
dt = tt/(Nt-1)

tint=linspace(0,tt,Nt); %É gerada uma malha com número de nós igual a Nt e de 0 a tt, tint.
Qelint=interp1(tempo,Qe1(:,1),tint,'pchip'); %Não utilizar spline; pchip, que corresponde ao Hermite cúbico, é uma opção preferível.
Qelint=Qelint';

L=3000;
Nx=450;
dx=L/(Nx-1);

g=9.806; %g = aceleração devido à gravidade [m/s^2]

f=0.0; %Fator de cisalhamento de Darcy-Weisbach
nm=0.02;

%Declarações:

x=0:dx:L;
x=x';

%Matrizes:

h=zeros(Nx,Nt);

q1=zeros(Nx,Nt);
q2=zeros(Nx,Nt);
f1=zeros(Nx,Nt);
```

```

f2=zeros(Nx,Nt);
J2=zeros(Nx,Nt);
%Fr=zeros(Nx,Nt);

Cn=zeros(Nx,Nt);

%Geometria do canal:

b=5;      %Largura de fundo do canal
Z1 = 1.5; %Co-tangente do ângulo do talude em relação à horizontal (lado
esquerdo)
Z2 = 1.5; %Co-tangente (lado direito)
Io = 0.0012; %Declividade de fundo

%CÁLCULO DA CONDIÇÃO INICIAL (h):

Q0=Qe1(1,1);

if f==0

h0=uniformeM(nm, Q0, b, Z1, Z2, Io) %Profundidade do escoamento uniforme
(Manning)

else

h0=uniformeDW(f, Q0, b, Z1, Z2, Io, g) %Profundidade do escoamento uni-
forme (Darcy-Weisbach)

end

pause()

%Valores iniciais:

A0 = b*h0+0.5*(h0.^2)*(Z1+Z2);
u0 = Q0/A0;
P0 = b+h0*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5);
Rh0=A0/P0;

h(:,1)=h0;
q1(:,1)=A0;
q2(:,1)=Q0;

f1(:,1)=q2(:,1);
f2(:,1)=q2(:,1).*q2(:,1)./q1(:,1)+(g/6)*(3*b+h(:,1).*(Z1+Z2)).*h(:,1).^2;

J2(:,1)=g*q1(:,1).*(Io-
nm^2*q2(:,1).*abs(q2(:,1))./((q1(:,1).^2).*Rh0^(4/3))-...
f*q2(:,1).*abs(q2(:,1))./((q1(:,1).^2)*8*g*Rh0));

%Fr(:,1)=abs(q2(:,1)./q1(:,1))./((g*q1(:,1)./(b+h(:,1).*(Z1+Z2))).^0.5);%
Número
%de Froude
Cn(:,1)=(abs(q2(:,1)./q1(:,1))+g*q1(:,1)./(b+h(:,1).*(Z1+Z2))).^0.5)./(dx
/dt);%Número de Courant

%AQUI TERMINA A IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

```



```

%GRÁFICO COM O HIDROGRAMA DE ENTRADA
plot(tint/60,Qelint, tempo/60, Qe1, 'o')
xlabel('t [min]');
ylabel('Q = uA [m^3/s]');
Leg=legend('H_2(0,t) - Interpolado', 'H_2(0,t) - Tabela 1');
ylim([min(min(0)) max(max(1.3*Qe1))])
pause()

%GRÁFICO COM O AS PROFUNDIDADES EM t=0
plot(x,h(:,1))
xlabel('x [m]');
ylabel('h(x,0) [m]');
ylim([min(min(0)) max(max(1.1*h))])
pause()

n=1;
for t=dt:dt:tt

    n=n+1

    %CONDIÇÕES DE CONTORNO:

    %1) ESQUERDO:

    q1(1,n)=q1(2,n-1);
    q2(1,n)=Qelint(n,1);

    if Z1>0 || Z2>0
        h(1,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(1,n))^0.5)/(Z1+Z2); %Seção trapezoidal (assimétrica, simétrica e triangular).
    else
        h(1,n)=q1(1,n)/b; %Seção retangular
    end

    f1(1,n)=q2(1,n);
f2(1,n)=q2(1,n).*q2(1,n)./q1(1,n)+(g/6)*(3*b+h(1,n)*(Z1+Z2)).*h(1,n).^2;

    Rh = q1(1,n)/(b+h(1,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

    J2(1,n)=g*q1(1,n).*(Io-
nm^2*q2(1,n).*abs(q2(1,n))./((q1(1,n)^2).*Rh^(4/3))-...
f*q2(1,n).*abs(q2(1,n))./((q1(1,n).^2)*8*g*Rh));

    %Fr(1,n)=abs(q2(1,n)/q1(1,n))/((g*q1(1,n)/(b+h(1,n).*(Z1+Z2))).^0.5);
Cn(1,n)=(abs(q2(1,n)/q1(1,n))+g*q1(1,n)/(b+h(1,n)*(Z1+Z2)))^0.5/(dx/dt)
;

    %2) DIREITO:

    q1(Nx,n)=q1(Nx-1,n-1);

    if Z1>0 || Z2>0
        h(Nx,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(Nx,n))^0.5)/(Z1+Z2);
    else

```

```

    h(Nx,n)=q1(Nx,n)/b;
end

Rh = q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

if f==0
u=(1/nm)*(Rh^(2/3))*(Io^0.5);
end
if nm==0
u=sqrt(8*g*Rh*Io/f);
end

% q2(Nx,n)=0;%q1(Nx,n)*u;
q2(Nx,n)=q1(Nx,n)*u;

f1(Nx,n)=q2(Nx,n);

f2(Nx,n)=q2(Nx,n).*q2(Nx,n)./q1(Nx,n)+(g/6)*(3*b+h(Nx,n)*(Z1+Z2)).*h(Nx,n)
).^2;

J2(Nx,n)=g*q1(Nx,n).*(Io-
nm^2*q2(Nx,n).*abs(q2(Nx,n))./((q1(Nx,n)^2).*Rh^(4/3))-...
f*q2(Nx,n).*abs(q2(Nx,n))./((q1(Nx,n)^2)*8*g*Rh));

%Fr(Nx,n)=abs(q2(Nx,n)/q1(Nx,n))/((g*q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n)*(Z1+Z2)))^0.5);
Cn(Nx,n)=(abs(q2(Nx,n)/q1(Nx,n))+g*q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n)*(Z1+Z2)))^0.5/(d
x/dt);

%MÉTODO DE LAX-FRIEDRICHS:

for i=2:Nx-1

    q1(i,n)=0.5*(q1(i+1,n-1)+q1(i-1,n-1))-(0.5*dt/dx)*(f1(i+1,n-1)-
f1(i-1,n-1));

    q2(i,n)=0.5*(q2(i+1,n-1)+q2(i-1,n-1))-(0.5*dt/dx)*...
(f2(i+1,n-1)-f2(i-1,n-1))+dt*0.5*(J2(i-1,n-1)+J2(i+1,n-1));

    if z1>0 || z2>0
        h(i,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(i,n))^0.5)/(Z1+Z2);
    else
        h(i,n)=q1(i,n)/b;
    end

    Rh = q1(i,n)/(b+h(i,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

    f1(i,n)=q2(i,n);

f2(i,n)=q2(i,n).*q2(i,n)./q1(i,n)+(g/6)*(3*b+h(i,n)*(Z1+Z2)).*h(i,n).^2;

    J2(i,n)=g*q1(i,n).*(Io-
(nm^2)*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2).*Rh^(4/3))-...
f*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2)*8*g*Rh));

    %Fr(i,n)=abs(q2(i,n)/q1(i,n))/((g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5);

```

```

Cn(i,n)=(abs(q2(i,n)/q1(i,n))+(g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5)/(dx/dt)
;

    end

end

B2=(b+h.*(Z1+Z2))./2;

for n=1:50:Nt
    t=(n-1)*dt;
plot(x,B2(:,n),x,-B2(:,n),'k','LineWidth',2);
xlabel('x [m]');
ylabel('B [m]');
ylim([min(min(-1.1*B2)) max(max(1.1*B2))])
grid on
%legend('y(x,t)',2)
title(['t = ',num2str(t),' [s]'])
Mo=getframe;
%mov=addframe(mov,Mo); %Para gravar o vídeo, não comentar (excluir %)
end

plot(tint/60, h(1,:), tint/60, h(Nx/2,:), tint/60, h(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('h [m]');
Leg=legend('h(0,t)', 'h(L/2,t)', 'h(L,t)');
pause()

plot(tint/60, q2(1,:), tint/60, q2(Nx/2,:), tint/60, q2(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('Q [m^3/s]');
Leg=legend('Q(0,t)', 'Q(L/2,t)', 'Q(L,t)');
pause()

plot(tint/60, q2(1,:)./q1(1,:), tint/60, q2(Nx/2,:)./q1(Nx/2,:),...
    tint/60, q2(Nx,:)./q1(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('u [m/s]');
Leg=legend('u(0,t)', 'u(L/2,t)', 'u(L,t)');
pause()

%%Equação de Manning para o regime uniforme e as vazões calculadas%%

for nn=1:Nt
    Q0=q2(Nx/2,nn);
    h0=uniformeM(nm, Q0, b, Z1, Z2, Io);
    hh(nn)=h0;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

plot(q2(Nx/2,:), h(Nx/2,:),q2(Nx/2,:), hh)
xlabel('Q(L/2,t) [m^3/s]');
ylabel('h(L/2,t) [m]');
Leg=legend('Laço para x = L/2', 'Regime uniforme')
pause()

```

```

l=1;
%mov=avifile('teste_f.avi')%Não comentar se quiser gravar o vídeo
if l==1

    for n=1:50:Nt
        t=(n-1)*dt;
%plot(x,h(:,n),'k','LineWidth',2);
%'k' escolhe a cor preta para a linha e 'LineWidth', 2 escolhe a espes-
sura da linha igual a 2 pontos
area(x,h(:,n));
xlabel('x [m]');
ylabel('h [m]');
ylim([min(min(0)) max(max(1.1*h))])
grid on
%legend('y(x,t)',2)
title(['t = ',num2str(t/60),' [min]'])
Mo=getframe;
%mov=addframe(mov,Mo); %Não comentar se quiser gravar o vídeo
    end
    end

    %mov=close(mov);%Não comentar se quiser gravar o vídeo

    for n=1:50:Nt
        t=(n-1)*dt;
plot(x,q2(:,n),'k','LineWidth',2);
xlabel('x [m]');
ylabel('Q [m^3/s]');
ylim([min(min(q2)) max(max(q2))])
grid on
title(['t = ',num2str(t/60),' [min]'])
Mo=getframe;
    end

contourf(x,tint,h')
xlabel('x');
ylabel('t');
% axis equal tight
%Envoltória com valores máximos:

for jj=1:Nx

Q1LF(jj,1)=max(q1(jj,:));
Q2LF(jj,1)=max(q2(jj,:));
Q3LF(jj,1)=max(h(jj,:));
Q4LF(jj,1)=min(h(jj,:));
end

plot(x,Q1LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(A)')
pause()

plot(x,Q2LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(uA)')
pause()

plot(x,Q3LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(h)')

```

```

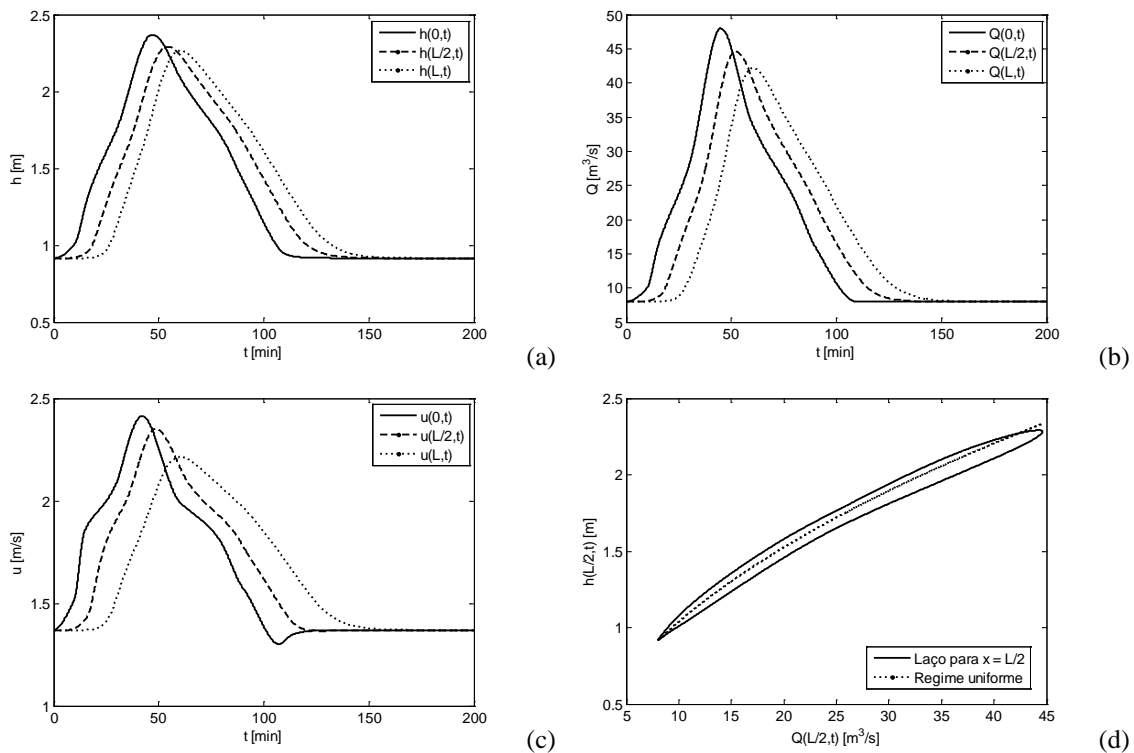
pause()

plot(x,Q4LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('min(h)')
pause()

```

Com a solução do problema foram obtidos os gráficos da Figura 2. As variações de “h”, “Q” e “u” com o tempo são ilustradas nas Figuras 2a, 2b e 2c com os resultados calculados para três seções transversais. Observa-se que a atenuação nos valores máximos das alturas de escoamento é maior entre as seções 0 e L/2 quando comparada à atenuação entre as seções L/2 e L. Este resultado indica a predominância do efeito difusivo da cheia no primeiro trecho. O segundo trecho possui característica cinemática preponderante.

A Figura 2c mostra um valor mínimo de velocidade seguido de um crescimento que alcança o nível uniforme. Observando os resultados com o auxílio do *software*, nota-se que em 107,4 min (instante em que ocorre a velocidade mínima) os valores de Q e A são maiores que os valores do escoamento uniforme, condição que justifica a ocorrência desta solução se a área molhada for grande o suficiente em relação à vazão para que $u = Q/A < u_{\text{uniforme}}$. Prosseguindo com a observação, percebe-se que a vazão assume o valor do escoamento uniforme antes da área molhada, que continua a decrescer, estando esse efeito inercial presente nas equações de Saint-Venant. Deste modo, o crescimento de u é esperado, uma vez que $u = Q/A$.



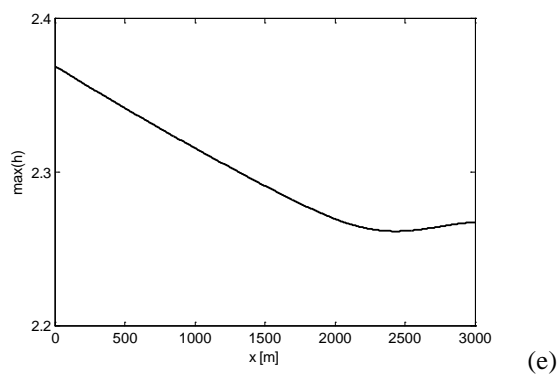


Figura 2 – Solução do problema 5.1
Unidades de acordo com o S.I.. Número de Courant máximo igual a 0,963.

Outros resultados também são ilustrados na Figura 2, como a relação em forma de laço entre Q e h para a seção em $L/2$ e a envoltória de valores máximos de h ao longo de x . Com auxílio da Figura 2d, nota-se que uma vazão Q está associada a ocorrência de duas alturas de escoamento, sendo uma para a fase de subida da onda e a outra para a fase de descida. Nota-se também que a máxima vazão não coincide com a máxima altura de escoamento. Finalmente, sobre a mesma figura, a largura do laço corresponde aos termos de inércia e pressão na equação da quantidade de movimento de Saint-Venant. A envoltória ilustrada na Figura 2d mostra as profundidades máximas, informação que pode ser útil para a determinação das características geométricas de um canal em fase de projeto ou para a análise da capacidade de um canal existente submetido à passagem de uma onda de cheia.

Para pensar: Como seria a relação entre Q e h se o hidrograma afluente apresentasse dois ou mais pontos de máximo?

Problema 5.2 – Propagação de ondas decorrentes do fechamento de comportas

Considere um canal construído para aduzir a água de um grande reservatório (formado pela construção de uma barragem) às turbinas situadas na extremidade de jusante do sistema, como ilustrado na Figura 3. A montante dos condutos forçados que ligam o canal às turbinas, uma comporta possibilita o controle do escoamento. Imagine um cenário no qual a comporta é bruscamente fechada a partir de uma condição de escoamento permanente e uniforme no canal. Qual o comportamento da linha d'água resultante desse fechamento “instantâneo”? Para responder a esta questão, utilize as equações de Saint-Venant e apresente os resultados para os dados fornecidos a seguir. Dados: $b = 3,5$ m; $Z_1 = Z_2 = 1,5$; $Q = 32$ m³/s; $n = 0,020$; $I_0 = 0,0005$ m/m; $L = 1200$ m; tempo total do escoamento transitório simulado igual a 12000 s.

Solução

Assume-se a ocorrência do escoamento uniforme como condição inicial; a área molhada foi fixada na extremidade de montante (lago) com valor correspondente ao regime uniforme e a vazão calculada por extrapolação de ordem zero; na extremidade de jusante, no instante $t = \Delta t$, $u = 0$, o que representa o fechamento instantâneo da comporta. Na mesma posição, a área molhada foi calculada com a extrapolação de ordem zero. Estas considerações iniciais permitem simular o efeito do fechamento das comportas de forma aproximada com o código desenvolvido. Para $Nt = 24.000$, a escolha de $Nx = 420$ implica número de Courant máximo próximo de um, conclusão que pode ser obtida após algumas tentativas. Como exercício, sugere-se a realização de simulações com número de Courant menores que um para que o leitor note a ocorrência do efeito numérico difusivo, que é indesejável.

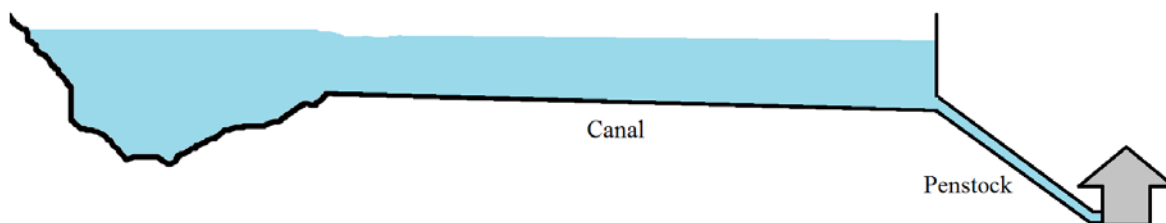


Figura 3 – Reservatório seguido de canal de adução e conduto forçado

Ao analisar os resultados apresentados na Figura 4, observa-se que h permanece constante na seção inicial, sendo este o resultado esperado porque deriva da condição de contorno descrita. O comportamento oscilatório de h nas demais seções é ilustrado com $h(L/2,t)$ e $h(L,t)$. Ao final do período transitório, a água permanecerá parada no canal (a comporta foi fechada). Como a cota de fundo decresce de montante para jusante e a superfície livre final será um plano horizontal, $h(L) > h(L/2)$. É claro que o projeto do canal deve prever muros com alturas suficientes para conter a água em condição estática. Adicionalmente, com o evento transitório simulado, observa-se uma flutuação acima do valor estático, que para este problema resultou aproximadamente igual a 65 cm em $x = L$. Os resultados para $uA = Q$ e u podem ser vistos nas Figuras 4b e 4c. Destaca-se também que a relação entre Q e h , apresentada na Figura 4d, não é semelhante à encontrada para as condições de uma cheia (ver problema anterior), mas apresenta comportamento análogo ao encontrado com o problema da chaminé de equilíbrio.

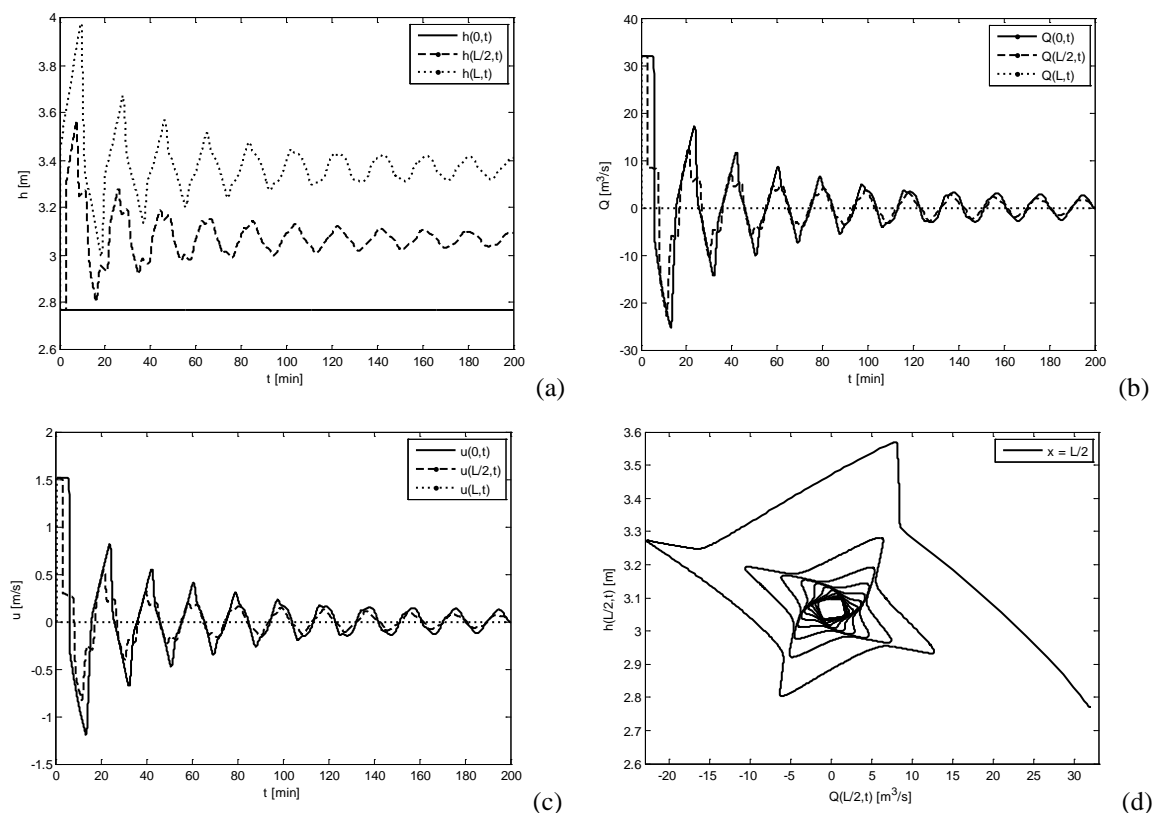


Figura 4 – Solução do problema: Fechamento instantâneo

A segunda parte do problema consiste em analisar a altura de escoamento nas proximidades das comportas para a condição de abertura instantânea. Esta manobra produz abaixamento da superfície livre e a sua avaliação pode indicar se há possibilidade de formação de vórtices e entrada de ar em função da coluna d'água disponível sobre seção transversal na interface entre canal e conduto forçado. Em outros termos, o início do funcionamento das turbinas produz uma onda negativa de jusante. Para esta onda, a altura de escoamento atrás da onda é menor que o nível não perturbado (por isso o termo onda negativa) e a onda é originada a jusante.

Problema 5.3 – Propagação de ondas decorrentes da abertura de comportas

Como extensão do caso abordado no problema anterior, os resultados apresentados na Figura 5 foram calculados para a abertura instantânea da comporta, abertura que é representada matematicamente pela passagem da vazão de um valor nulo em $t = 0$ para $Q = 32 \text{ m}^3/\text{s}$ em $t = \Delta t$. Adicionalmente, o uso de uma distribuição para as profundidades em $t = 0$ igual a $2,77 + I_0 x$ reproduz a superfície livre horizontal em $t = 0$. Como pode ser observado, em $x = L$ a altura de escoamento assume valor mínimo de 1,3 m (Figura 5a) e a vazão passa de zero a $32 \text{ m}^3/\text{s}$ em $t = \Delta t$, na extremidade e a jusante do canal (Figura 5b). As demais soluções da Figura 5a mos-

tram que os pontos de mínimo aumentam em direção ao lago. Uma estrutura hidráulica conhecida como câmara de carga pode solucionar possíveis problemas com baixas profundidades. Trata-se de um trecho de canal que pode ser retangular e localizado na extremidade de jusante. A sua maior largura e profundidade adicional em relação ao fundo do canal de adução têm como consequência um rebaixamento da superfície livre menor em relação ao canal sem a câmara de carga. Outros resultados podem ser vistos com o uso do código correspondente a este problema.

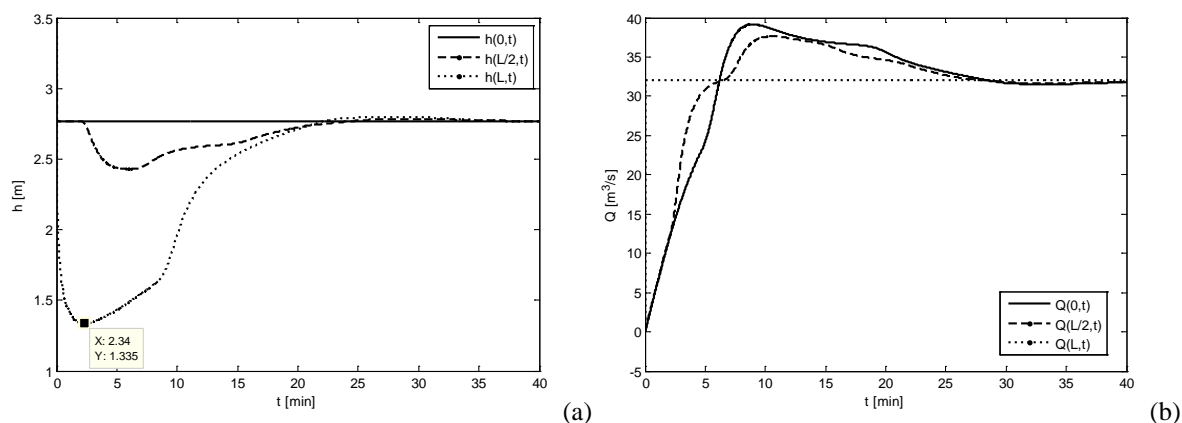


Figura 5 – Resultados obtidos para condição de abertura da comporta

Problema 5.4 – Identificação de um ressalto hidráulico

O ressalto hidráulico como parte da solução das equações de Saint-Venant escritas na forma conservativa é identificado como uma descontinuidade. Isso é possível principalmente quando são obtidas soluções analíticas. Em soluções numéricas calculadas com métodos de ordem ímpar, como o de Lax-Friedrichs, essa descontinuidade nem sempre é calculada devido ao efeito difusivo do esquema numérico. Tal efeito transforma a descontinuidade em uma “curva suave”, isto é, com pontos entre os patamares que definiriam a descontinuidade. Tal observação não inviabiliza o uso de Lax-Friedrichs, mas requer cuidado na interpretação do resultado. A solução carregada de difusividade numérica curiosamente pode coincidir bem com o perfil médio do ressalto hidráulico, como demonstrado em Simões, Schulz e Porto (2010), mas essa boa sobreposição não representa uma solução correta porque a solução correta do sistema de equações diferenciais parciais é a solução analítica descontínua.

Por outro lado, o método de MacCormack, por ser de segunda ordem introduz na solução pequenas ondas amortecidas ao longo de trechos próximos à descontinuidade. Essas oscilações são classificadas como dispersão numérica e representam um efeito indesejado por não representarem a solução analítica. Em outros termos, elas aparecem porque as componentes de Fourier viajam com velocidades diferentes quando há o efeito dispersivo. Apesar disto, com o uso

da viscosidade artificial, o método de MacCormack também representa uma opção relevante para a solução numérica do sistema de equações por ser explícito, de fácil programação e por apresentar resultados utilizáveis, como exposto neste problema.

Considere os dados do Problema 4.6: $b = 2,5$ m; $I_0 = 0,02$ m/m; $Z_1 = 1,5$; $Z_2 = 1,0$; $Q = 5,7$ m³/s; $g = 9,8$ m/s²; $n = 0,018$; $h(L,t) = 2,40$ m. Considere também $L = 70$ m e um tempo total de simulação igual a 600 s, a partir de uma condição inicial com escoamento uniforme no canal. Empregando os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack, calcule $h(x,t)$ e identifique o ressalto hidráulico na solução. Observe que para $t \rightarrow \infty$, $h=h(x)$, que é a linha d'água para o regime permanente.

Solução

O código desenvolvido anteriormente com Lax-Friedrichs pode ser empregado para resolver este problema com pequenas adaptações, como pode ser visto no arquivo deste capítulo. O uso do método de MacCormack exige a programação de seu algoritmo, com o cálculo dos termos pertencentes aos dois passos. Para ilustrar uma possível forma de programação deste método, foi elaborado o programa apresentado na Tabela 3.

As soluções numéricas calculadas com os dois métodos mencionados são apresentadas na Figura 6. Observa-se nas duas imagens iniciais a formação do ressalto hidráulico pela brusca mudança da altura de escoamento (note que a linha inferior representa o fundo do canal e a linha superior o perfil da superfície livre ou linha d'água). Por comparação visual entre as imagens (a) e (b), conclui-se que a solução por MacCormack para o ressalto é mais próxima de uma descontinuidade. Como consequência, o ressalto tem como posição de início em $x = 5$ m e posição final próxima de $x = 5,5$ m. Já o ressalto calculado com o método de Lax-Friedrichs e a malha adotada se estende por aproximadamente 4 m devido ao efeito difusivo. Para o restante do domínio não há diferenças expressivas. As Figuras 6c e 6d mostram ampliações da solução capazes de revelar claramente os dois efeitos numéricos supracitados, isto é, o difusivo (em 6c) e o dispersivo (em 6d).

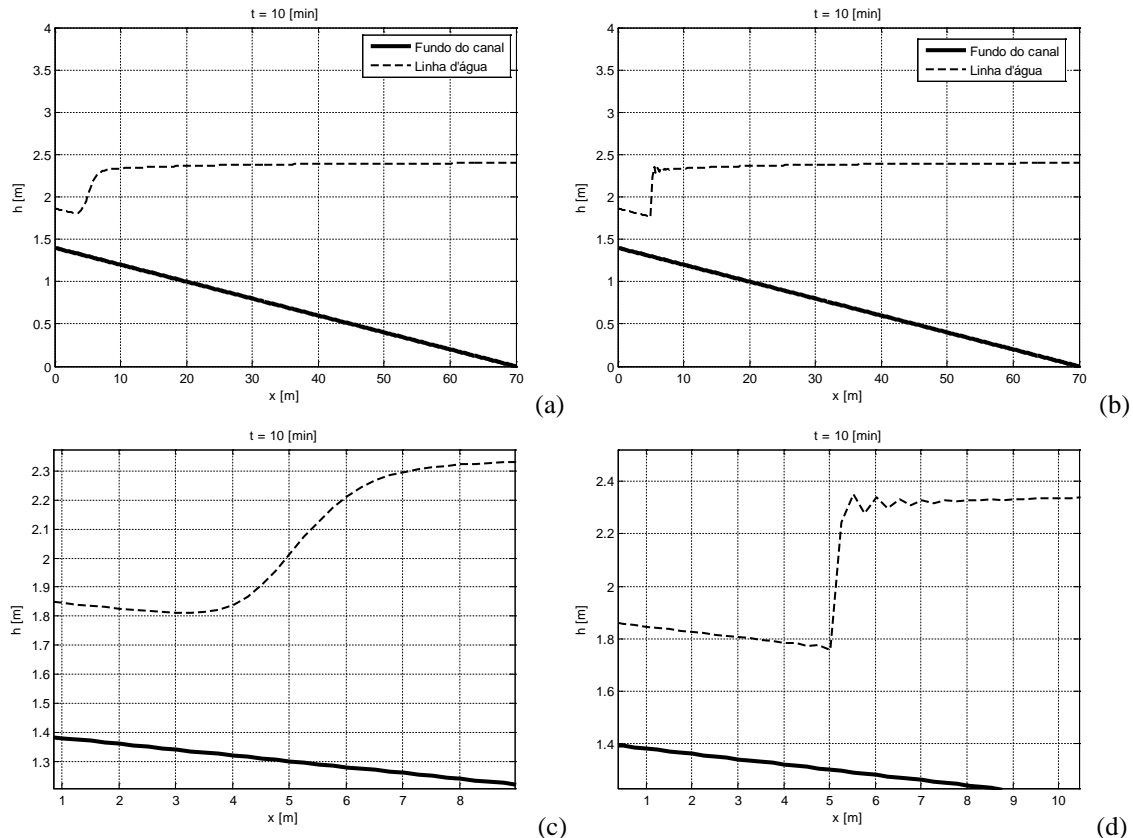


Figura 6 – Soluções calculadas com Lax-Friedrichs, com $\max(Cn) = 0,9643$ (a e c), e MacCormack, com $\max(Cn) = 0,9317$ e $Cx = 0,04$ (b e d). Efeitos numéricos difusivo (c) e dispersivo (d)

Tabela 3 – Código para solução do problema 5.4 com MacCormack

```
clear all

%MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM HIDRÁULICA
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo Porto
%Solução das equações de Saint-Venant para seções trapezoidais assimétricas,
%retangulares e triangulares com o método de MacCormack.
%Método de MacCormack com ou sem (Cx=0) viscosidade artificial.

%Dados:

Qel = [5.7; 0];

tempo=[0.00; 600];
%Instantes correspondentes às vazões Q

[a1,a2] = size(tempo);

tt = tempo(a1,1);
%Tempo total em [s]
Nt = 25000;
%Número de nós da malha temporal
dt = tt/(Nt-1);

tint=linspace(0,tt,Nt);
%É gerada uma malha com número de nós igual a Nt e de 0 a tt, tint.
Qelint=interp1(tempo,Qel(:,1),tint,'pchip');
%spline (não é adequado), pchip (Hermite cúbico é uma opção preferível)
Qelint=Qelint';
```

```

L=70;
Nx=280;
dx=L/(Nx-1);

g=9.8;
%Aceleração devido à gravidade [m/s^2]

f=0.0;
nm=0.018;

%Declarações:

x=0:dx:L;
x=x';

%Matrizes:

h=zeros(Nx,Nt);

q1=zeros(Nx,Nt);
q2=zeros(Nx,Nt);
f1=zeros(Nx,Nt);
f2=zeros(Nx,Nt);
J2=zeros(Nx,Nt);
% Fr=zeros(Nx,Nt);

Cn=zeros(Nx,Nt);

S1=zeros(Nx,Nt);
S2=zeros(Nx,Nt);
Cx=0.04;%Parâmetro para ponderar viscosidade artificial

%Derivadas:

dq1=zeros(Nx,Nt);
dq2=zeros(Nx,Nt);

%Geometria do canal:

b = 2.5;
%Largura de fundo do canal
Z1 = 1.5; %Co-tangente do ângulo do talude em relação à horizontal (lado
esquerdo)
Z2 = 1.0; %Co-tangente (lado direito)
Io = 0.02;
%Declividade do fundo

%Condição Inicial:

Q0=Qe1(1,1);

if f==0

h0=uniformeM(nm, Q0, b, Z1, Z2, Io)
%Profundidade do escoamento uniforme

else

```

```

h0=uniformeDW(f, Q0, b, Z1, Z2, Io, g)

end

pause()

A0 = b*h0+0.5*(h0.^2)*(Z1+Z2);
u0 = Q0/A0;
P0 = b+h0*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5);
Rh0=A0/P0;

h(:,1)=h0;
q1(:,1)=A0;
q2(:,1)=Q0;
pause()

f1(:,1)=q2(:,1);
f2(:,1)=q2(:,1).*q2(:,1)./q1(:,1)+(g/6)*(3*b+h(:,1).*(Z1+Z2)).*h(:,1).^2;

J2(:,1)=g*q1(:,1).*(Io-
nm^2*q2(:,1).*abs(q2(:,1))./((q1(:,1).^2).*Rh0^(4/3))-...
    f*q2(:,1).*abs(q2(:,1))./((q1(:,1).^2)*8*g*Rh0));

%Fr(:,1)=abs(q2(:,1)./q1(:,1))./((g*q1(:,1)./(b+h(:,1).*(Z1+Z2))).^0.5);%
Número
%de Froude
Cn(:,1)=(abs(q2(:,1)./q1(:,1))+g*q1(:,1)./(b+h(:,1).*(Z1+Z2))).^0.5)/(dx
/dt);

%FIM DAS CONDIÇÕES INICIAIS

%GRÁFICO COM O HIDROGRAMA DE ENTRADA
plot(tint/60,Qelint, tempo/60, Qe1, 'o')
xlabel('t [min]');
ylabel('uA [m^3/s]');
leg=legend('H_2(0,t) - Interpolado', 'H_2(0,t) - Tabela 1');
ylim([min(min(0)) max(max(Qe1))])
pause()

%GRÁFICO COM O AS PROFUNDIDADE EM t=0
plot(x,h(:,1))
xlabel('x [m]');
ylabel('h(x,0) [m]');
ylim([min(min(0)) max(max(1.1*h))])
pause()

n=1;
for t=dt:dt:tt

    n=n+1

    if max(max(Cn))>1
        pause()
    end

    %Contornos:

    %Esquerdo:

```

```

    q1(1,n) = A0; %b*3.4+0.5*(3.4.^2)*(Z1+Z2); %q1(2,n-1);    %Área em x
= 0, calculada com h(0,t) = 60,50 - 57,10 = 3,40 m
    q2(1,n) = Qe1(1,1);%q2(2,n-1);%Qelint(n,1);

    if Z1>0 || Z2>0
        h(1,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(1,n))^0.5)/(Z1+Z2);
    else
        h(1,n)=q1(1,n)/b;
    end

    f1(1,n)=q2(1,n);

f2(1,n)=q2(1,n).*q2(1,n)./q1(1,n)+(g/6)*(3*b+h(1,n)*(Z1+Z2)).*h(1,n).^2;

    Rh = q1(1,n)/(b+h(1,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

    J2(1,n)=g*q1(1,n).*(Io-
nm^2*q2(1,n).*abs(q2(1,n))./((q1(1,n)^2).*Rh^(4/3))-...
    f*q2(1,n).*abs(q2(1,n))./((q1(1,n).^2)*8*g*Rh));

    %Fr(1,n)=abs(q2(1,n)/q1(1,n))/((g*q1(1,n)/(b+h(1,n).*(Z1+Z2))).^0.5);
Cn(1,n)=(abs(q2(1,n)/q1(1,n))+((g*q1(1,n)/(b+h(1,n).*(Z1+Z2)))^0.5)/(dx/dt)
;

    %Direito:

    h(Nx,n) = 2.4;
    q1(Nx,n)=b*h(Nx,n)+0.5*(h(Nx,n).^2)*(Z1+Z2);

    q2(Nx,n)=q2(Nx-1,n-1);
    u=q2(Nx,n)./q1(Nx,n);

%    q1(Nx,n)=q1(Nx-1,n-1);

%    if Z1>0 || Z2>0
%        h(Nx,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(Nx,n))^0.5)/(Z1+Z2);
%    else
%        h(Nx,n)=q1(Nx,n)/b;
%    end

    Rh = q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

%    if f==0
%        u=(1/nm)*(Rh^(2/3))*(Io^0.5);
%    end
%    if nm==0
%        u=sqrt(8*g*Rh*Io/f);
%    end

%    q2(Nx,n)=q1(Nx,n)*u;

    f1(Nx,n)=q2(Nx,n);

f2(Nx,n)=q2(Nx,n).*q2(Nx,n)./q1(Nx,n)+(g/6)*(3*b+h(Nx,n)*(Z1+Z2)).*h(Nx,n)
).^2;

```

```

J2(Nx,n)=g*q1(Nx,n).*(Io-
nm^2*q2(Nx,n).*abs(q2(Nx,n))./((q1(Nx,n)^2).*Rh^(4/3))-...
f*q2(Nx,n).*abs(q2(Nx,n))./((q1(Nx,n).^2)*8*g*Rh));

%Fr(Nx,n)=abs(q2(Nx,n)/q1(Nx,n))./((g*q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n).*(Z1+Z2)))^0.5);

Cn(Nx,n)=(abs(q2(Nx,n)/q1(Nx,n)).+(g*q1(Nx,n)/(b+h(Nx,n).*(Z1+Z2)))^0.5)/(d
x/dt);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%MÉTODO DE MACCORMACK:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%PASSO PREDITOR:

for i=2:Nx-1

dq1(i,n-1)=-(f1(i+1,n-1)-f1(i,n-1))/dx;
dq2(i,n-1)=-(f2(i+1,n-1)-f2(i,n-1))/dx+J2(i,n-1);

%Viscosidade artificial:

S1(i,n-1)=Cx*abs((h(i+1,n-1)-2*h(i,n-1)+h(i-1,n-1)))*(q1(i+1,n-1)-
2*q1(i,n-1)+q1(i-1,n-1))/(h(i+1,n-1)+2*h(i,n-1)+h(i-1,n-1)));
S2(i,n-1)=Cx*abs((h(i+1,n-1)-2*h(i,n-1)+h(i-1,n-1)))*(q2(i+1,n-1)-
2*q2(i,n-1)+q2(i-1,n-1))/(h(i+1,n-1)+2*h(i,n-1)+h(i-1,n-1)));

%Valor predito de q1 e q2:

q1(i,n)=q1(i,n-1)+dq1(i,n-1)*dt+S1(i,n-1);
q2(i,n)=q2(i,n-1)+dq2(i,n-1)*dt+S2(i,n-1);

%Cálculo das variáveis primitivas (preditas) em n+1:

if Z1>0 || Z2>0
h(i,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(i,n))^0.5)/(Z1+Z2);
else
h(i,n)=q1(i,n)/b;
end

end

%Cálculo dos vetores:

for i=2:Nx-1

Rh = q1(i,n)/(b+h(i,n).*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

f1(i,n)=q2(i,n);

f2(i,n)=q2(i,n).*q2(i,n)./q1(i,n)+(g/6)*(3*b+h(i,n).*(Z1+Z2)).*h(i,n).^2;

J2(i,n)=g*q1(i,n).*(Io-
(nm^2)*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2).*Rh^(4/3))-...

```

```

f*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2)*8*g*Rh));

%Fr(i,n)=abs(q2(i,n)/q1(i,n))/((g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5);
Cn(i,n)=(abs(q2(i,n)/q1(i,n))+(g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5)/(dx/dt)
;

%Cálculo da viscosidade artificial com base nos valores preditos:

S1(i,n)=Cx*abs((h(i+1,n)-2*h(i,n)+h(i-1,n)))*(q1(i+1,n)-
2*q1(i,n)+q1(i-1,n))/(h(i+1,n)+2*h(i,n)+h(i-1,n)));
S2(i,n)=Cx*abs((h(i+1,n)-2*h(i,n)+h(i-1,n)))*(q2(i+1,n)-
2*q2(i,n)+q2(i-1,n))/(h(i+1,n)+2*h(i,n)+h(i-1,n)));

end

for i=2:Nx-1

%Com estes resultados é possível calcular dq1 em n+1 (predito) para
%então atualizar qi:

dq1(i,n)=-(f1(i,n)-f1(i-1,n))/dx;
dq2(i,n)=-(f2(i,n)-f2(i-1,n))/dx+J2(i,n);

q1(i,n)=q1(i,n-1)+0.5*(dq1(i,n-1)+dq1(i,n))*dt+S1(i,n);
q2(i,n)=q2(i,n-1)+0.5*(dq2(i,n-1)+dq2(i,n))*dt+S2(i,n);

%Atualização das variáveis primitivas (esta etapa substitui os valo-
res
%preditos pelos valores corrigidos nas matrizes correspondentes):

if Z1>0 || Z2>0
    h(i,n)=(-b+(b^2+2*(Z1+Z2)*q1(i,n))^0.5)/(Z1+Z2);
else
    h(i,n)=q1(i,n)/b;
end

end

%Atualização dos vetores:

for i=2:Nx-1

Rh = q1(i,n)/(b+h(i,n)*((1+Z1^2)^0.5+(1+Z2^2)^0.5));

f1(i,n)=q2(i,n);

f2(i,n)=q2(i,n).*q2(i,n)./q1(i,n)+(g/6)*(3*b+h(i,n)*(Z1+Z2)).*h(i,n).^2;

J2(i,n)=g*q1(i,n).*(Io-
(nm^2)*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2).*Rh^(4/3))-...
f*q2(i,n).*abs(q2(i,n))./((q1(i,n)^2)*8*g*Rh));

%Fr(i,n)=abs(q2(i,n)/q1(i,n))/((g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5);
Cn(i,n)=(abs(q2(i,n)/q1(i,n))+(g*q1(i,n)/(b+h(i,n)*(Z1+Z2)))^0.5)/(dx/dt)
;

```



```

end

end

%Final do laço para o tempo

B2=(b+h.*(Z1+Z2))./2;

for n=1:100:Nt
    t=(n-1)*dt;
plot(x,B2(:,n),x,-B2(:,n),'k','LineWidth',2);
xlabel('x [m]');
ylabel('B [m]');
ylim([min(min(-1.1*B2)) max(max(1.1*B2))])
grid on
%legend('y(x,t)',2)
title(['t = ',num2str(t),' [s]'])
Mo=getframe;
%mov=addframe(mov,Mo); %Não comentar se quiser gravar o vídeo
end

plot(tint/60, h(1,:), tint/60, h(Nx/2,:), tint/60, h(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('h [m]');
Leg=legend('h(0,t)', 'h(L/2,t)', 'h(L,t)');
pause()

plot(tint/60, q2(1,:), tint/60, q2(Nx/2,:), tint/60, q2(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('Q [m^3/s]');
Leg=legend('Q(0,t)', 'Q(L/2,t)', 'Q(L,t)');
pause()

plot(tint/60, q2(1,:)./q1(1,:), tint/60, q2(Nx/2,:)./q1(Nx/2,:),...
    tint/60, q2(Nx,:)./q1(Nx,:))
xlabel('t [min]');
ylabel('u [m/s]');
Leg=legend('u(0,t)', 'u(L/2,t)', 'u(L,t)');
pause()

%%Equação de Manning para o regime uniforme e as vazões calculadas%%

% for nn=1:Nt
%     Q0=q2(Nx/2,nn);
%     h0=uniformeM(nm, Q0, b, Z1, Z2, Io);
%     hh(nn)=h0;
% end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% plot(q2(Nx/2,:), h(Nx/2,:),q2(Nx/2,:), hh)
plot(q2(Nx/2,:), h(Nx/2,:))
xlabel('Q(L/2,t) [m^3/s]');
ylabel('h(L/2,t) [m]');
Leg=legend('x = L/2')
pause()

```

```

l=2;
%mov=avifile('teste_f.avi')%Não comentar se quiser gravar o vídeo
if l==1

    for n=1:50:Nt
        t=(n-1)*dt;
plot(x,h(:,n), 'k', 'LineWidth',2);
%'k' escolhe a cor preta para a linha e 'LineWidth', 2 escolhe a espes-
sura da linha igual a 2 pontos
%area(x,h(:,n));
xlabel('x [m]');
ylabel('h [m]');
ylim([min(min(0)) max(max(1.1*h))])
grid on
%legend('y(x,t)',2)
title(['t = ',num2str(t/60),' [min]'])
Mo=getframe;
%mov=addframe(mov,Mo); %Não comentar se quiser gravar o vídeo
    end
    end

    %mov=close(mov);%Não comentar se quiser gravar o vídeo

    for n=1:50:Nt
        t=(n-1)*dt;
plot(x,Io*x(Nx)-Io*x,x,h(:,n)+Io*(x(Nx)-x), 'k', 'LineWidth',2)
xlabel('x [m]');
ylabel('h [m]');
ylim([min(min(0)) max(max(4))])
grid on
title(['t = ',num2str(t/60),' [min]'])
Mo=getframe;
%mov=addframe(mov,Mo); %Não comentar se quiser gravar o vídeo
    end

    for n=1:50:Nt
        t=(n-1)*dt;
plot(x,q2(:,n), 'k', 'LineWidth',2);
xlabel('x [m]');
ylabel('Q [m^3/s]');
ylim([min(min(q2)) max(max(q2))])
grid on
title(['t = ',num2str(t/60),' [min]'])
Mo=getframe;
    end

contourf(x,tint,h')
xlabel('x');
ylabel('t');
% axis equal tight

%Envoltória com valores máximos:

for jj=1:Nx
Q1LF(jj,1)=max(q1(jj,:));
Q2LF(jj,1)=max(q2(jj,:));

```

```

Q3LF(jj,1)=max(h(jj,:));
Q4LF(jj,1)=min(h(jj,:));
end

plot(x,Q1LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(A)')
pause()

plot(x,Q2LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(uA)')
pause()

plot(x,Q3LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('max(h)')
pause()

plot(x,Q4LF)
xlabel('x [m]')
ylabel('min(h)')
pause()

```

Problema 5.5 – Ruptura de barragem

A probabilidade de ocorrência da ruptura de uma barragem não é nula, embora todos os esforços da engenharia concorram para evitar tal desastre nas fases de projeto, construção, enchimento do reservatório e ao longo da existência da barragem. Interessa ao engenheiro simular possíveis escoamentos resultantes da ruptura de barragens, para que, com os resultados obtidos, torne-se possível avaliar, ainda que de forma aproximada, as consequências da ruptura. Tais consequências podem incluir a perda de vidas humanas, perdas materiais, danos ao meio ambiente e prejuízos à infraestrutura da região.

Não é possível prever exatamente como a ruptura acontecerá. Esta dúvida conduz à criação de cenários fundamentados principalmente em informações históricas. As diferentes causas de rupturas incluem (ELETROBRÁS, 2003):

- 1) Rompimento do talude de montante;
- 2) Rompimento do talude de jusante;
- 3) Ruptura da fundação com deslizamento de camadas ou fratura de rocha, por exemplo;
- 4) Galgamento devido a evento hidrológico extremo;
- 5) Erosão interna ou entubamento (*piping*) devido a falhas no corpo da barragem;
- 6) Ações em períodos de guerra e vandalismo.

Em grande parte dos casos, sobretudo em barragens de terra, a ruptura é caracterizada pela formação de uma brecha. Essa fenda provocada pela ruptura evolui ao longo do tempo e a previsão de sua forma (não permanente) e da vazão efluente é essencial para elaboração de cenários de ruptura. Sobre este tema, destaca-se o trabalho de Fread (1977) e outros desenvolvimentos do mesmo autor. Como resultado da análise da evolução da brecha, procura-se estabelecer um hidrograma efluente que produzirá a cheia no rio a jusante da barragem. Em um caso mais extremo, pode-se pensar no galgamento simultâneo ou escoamento sobre os vertedores.

As barragens de concreto em arco também podem romper com a formação de brechas, mas a sua formação é relativamente mais rápida quando comparada às de terra. Além desse exemplo, cita-se que o uso de explosivos também pode resultar em rupturas rápidas. Tendo essas duas possibilidades em conta, surge a hipótese de ruptura instantânea. Matematicamente, a ruptura instantânea exclui a barragem do domínio computacional no instante $t = \Delta t$. A condição inicial pode ser estabelecida com velocidade nula ao longo do domínio, uma coluna d'água a montante da barragem, h_m , e uma coluna d'água a jusante da barragem, h_j , como ilustrado na Figura 7. Sugere-se que as condições de contorno a montante a jusante sejam do tipo absorvente, calculadas com extrapolações de ordem zero. Fisicamente, esses contornos devem permitir as passagens das ondas sem reflexões nos contornos.

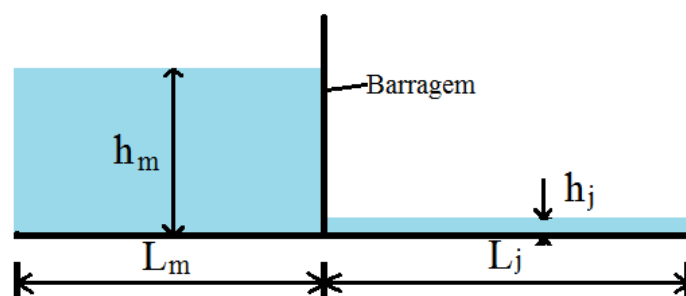


Figura 7 – Condição inicial para simulação da ruptura instantânea. Problema 5.5

Propõe-se neste problema a simulação da ruptura instantânea de uma barragem com os seguintes dados: $h(x,0) = h_m = 60$ m; $h(x,0) = h_j = 2,0$ m; $u(x,0) = 0$; $L_m = 2900$ m; $L_j = 9500$ m. Na ausência de informações sobre a forma do lago e do rio, para uma análise preliminar, considere um canal trapezoidal assimétrico com $Z_1 = 2,1$, $Z_2 = 2,1$, $b = 50$ m, $I_0 = 0,0$ e $n = 0$ (em problemas reais, uma visita ao local ou fotografias aéreas podem auxiliar a escolha dos valores para o coeficiente de Manning). A extremidade de montante é uma parede, portanto,

com vazão nula e altura de escoamento que deve ser calculada com extrapolação de ordem zero. A extremidade de jusante possui características desconhecidas, sendo necessário o emprego de condições absorventes (com extrapolações para q_1 e q_2).

Solução

Empregando o método de Lax-Friedrichs e o código desenvolvido, o uso das condições iniciais e de contorno mencionadas conduz aos resultados apresentados na Figura 8. Nestas imagens é ilustrada a evolução de $h(x,t)$ que, com o código, pode ser vista como uma animação dos resultados. A primeira imagem mostra a condição inicial para h . Em seguida, no instante indicado, observa-se a formação de uma onda contínua que viaja para a esquerda e uma onda descontínua que se desloca para a direita. Entre as ondas é estabelecido um patamar horizontal devido ao fato de ter sido desprezada a perda de carga.

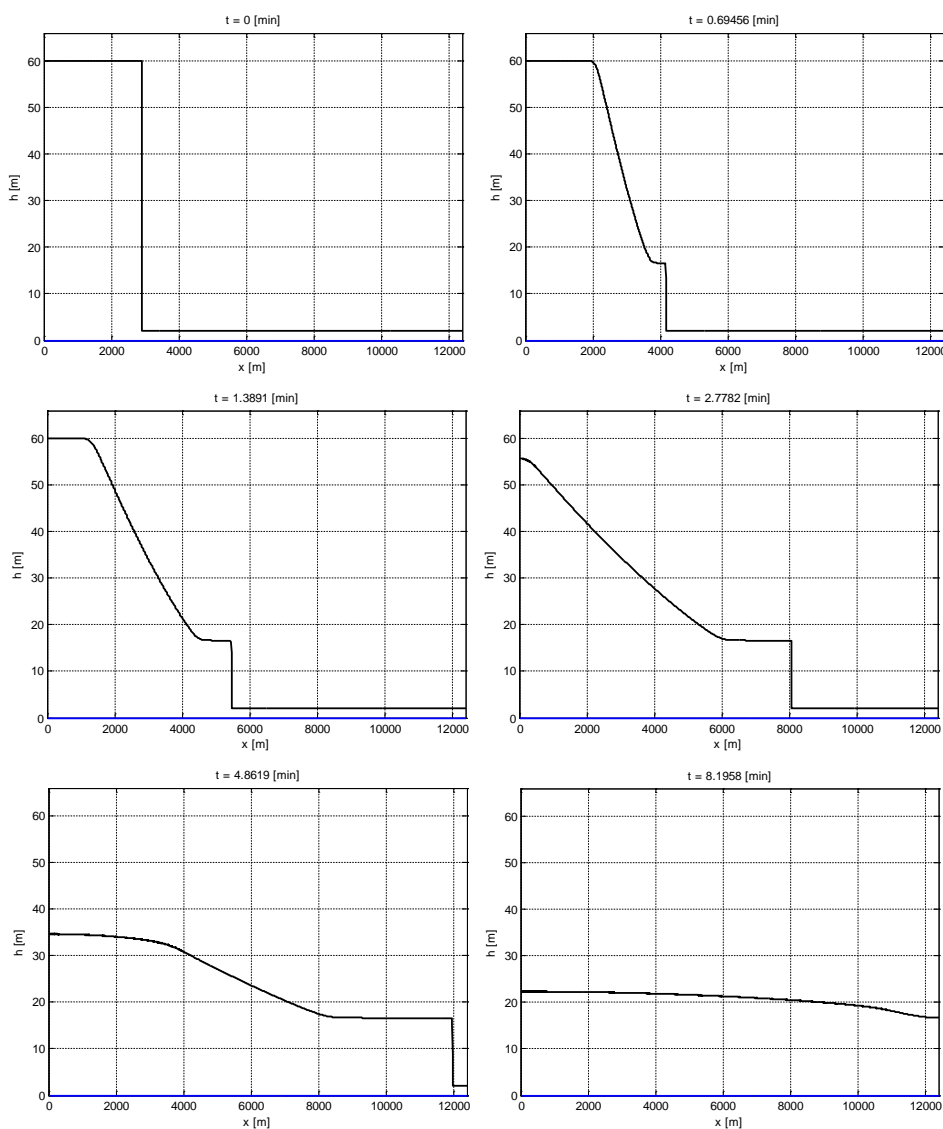


Figura 8 – Ruptura de barragem: evolução de $h(x,t)$. $\max(Cn) = 0,9583$

O método proposto também possibilita o cálculo da largura de topo, $B(x,t)$, que indica a área de inundação em planta baixa para a seção trapezoidal adotada como primeira aproximação para o canal real que conduzirá a onda decorrente da ruptura. Alguns resultados para $B(x,t)$ podem ser vistos na Figura 9.

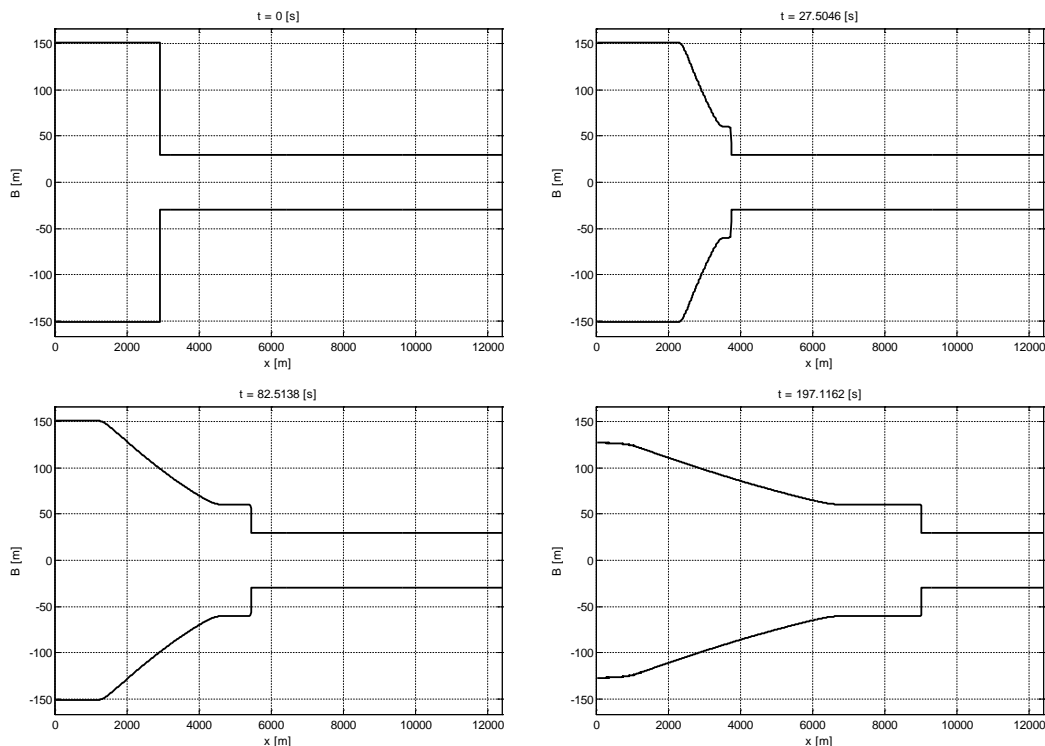


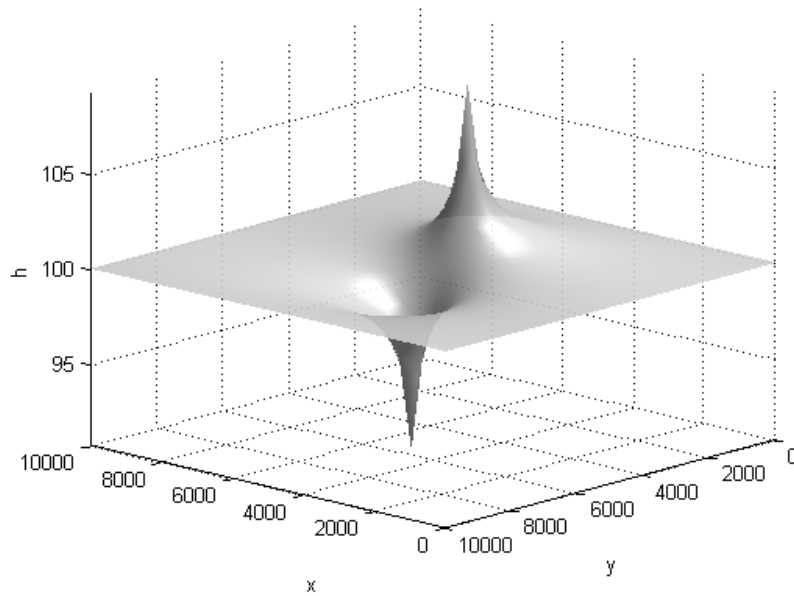
Figura 9 – Ruptura de barragem: evolução de $B(x,t)$. $\max(Cn) = 0,9583$

Considerações finais

Ao longo deste capítulo foram estudados problemas em regime variável com as equações de conservação de massa e a 2ª Lei de Newton escritas para o caso unidimensional, sistema de equações diferenciais parciais conhecido como equações de Saint-Venant. Ao final dos estudos dos problemas propostos, o estudante deve ser capaz de resolver as equações de Saint-Venant com os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack. Essas soluções podem ser contínuas, como no estudo da propagação da onda de cheia em um canal, ou descontínuas, como nos problemas finais que envolvem o ressalto hidráulico e a ruptura de barragem. Em todos os casos, é indispensável a leitura dos códigos propostos porque os cálculos são viáveis (considerando o espaço e o tempo) apenas com recursos computacionais. Em outros termos, seria necessário muito tempo para obtenção de resultados semelhantes efetuando-se os cálculos manualmente com auxílio de uma calculadora.

CAPÍTULO 6

HIDRÁULICA DE MEIOS POROSOS



Solução obtida com termo fonte positivo (fonte) e negativo (sumidouro).

Introdução

Os meios porosos podem ser constituídos por material granuloso ou rochas compactas fissuradas. Naturalmente, a forma e disposição das partículas não propiciam a formação de um meio sem espaços entre elas. Sendo assim, há entre partículas regiões preenchidas com ar. Tais regiões são interconectadas como uma complexa rede e possibilitam a movimentação de fluidos, como a água que escoar no solo. Dessa forma, para o caso mais geral, um meio poroso pode ser visto como uma mistura de três fases, a saber: sólida, líquida e gasosa. O principal modelo matemático apresentado neste capítulo é obtido pela combinação da equação de conservação de massa com uma equação constitutiva denominada Lei de Darcy, análoga às leis de Fick e de Fourier, por exemplo, leis conhecidas dos estudos básicos de Fenômenos de Transporte e Hidráulica. Seguindo o escopo do livro, este capítulo tem como objetivo explorar introdutoriamente algumas soluções com o uso de recursos computacionais. Antes, entretanto, optou-se pela apresentação sintética de temas essenciais ligados ao assunto principal. Para a leitura dos conceitos básicos e de aprofundamentos, recomenda-se Todd (1959), Bear (1988, 2007), Lencastre (1996), Fetter (2001) e Wendland (2003), referências empregadas para elaboração de parte deste texto.

A Engenharia mantém estreita relação com os escoamentos em meios porosos, como aqueles que ocorrem nas proximidades de poços freáticos e artesianos, barragens de terra e enrocamento, em filtros de estações de tratamento de água, além da infiltração, escoamento subsuperficial e recarga de aquíferos, drenagem de terrenos, etc. A complexidade das redes existentes em meios porosos naturais conduz a abordagens que não incluem os detalhes do escoamento de forma pontual, em análises envolvendo a simulação dos campos de velocidades e pressões nos estreitos e sinuosos condutos. De outro modo, o que se faz em geral é representar o problema de forma simplificada, como será estudado neste capítulo.

Antes do início dos estudos sobre a modelação matemática dos escoamentos em meios porosos, considera-se relevante expor as definições a seguir.

- 1) **Porosidade (ϕ)**. É o resultado da divisão do volume de vazios de uma amostra de solo pelo seu volume total, isto é, $\phi = \text{Vol}_p/\text{Vol}$.
- 2) **Velocidade de filtração (V)**. É calculada com a divisão da vazão, Q , pela área da seção transversal do meio poroso, A . $V = Q/A$.

- 3) **Velocidade média efetiva (V_p)**. É calculada com a definição de vazão e a parte de A que é permeável à massa, A_p . Em outros termos, sendo $\phi = A_p dx / (A dx) = A_p / A$, $V_p = Q / A_p = Q / (\phi A) = V / \phi$.
- 4) **Tortuosidade (T)**. Representa a relação entre a distância real, L_r , percorrida pelo fluido no meio poroso e o comprimento retilíneo que conecta a entrada e a saída do conduto real existente, L . $T = (L_r / L)^2$.

A ilustração apresentada na Figura 1 representa o ciclo hidrológico, a distribuição das águas subterrâneas e os tipos de aquíferos. Com o auxílio dessa imagem, observa-se que a água em escoamento no meio poroso pode ocorrer em uma camada menos profunda, denominada zona de aeração (zona não saturada), e em um meio saturado, que é a zona de saturação. Nota-se também a relação existente com a chuva, escoamentos superficiais, volumes de água contidos em reservatórios, rios, oceanos, transpiração e evaporação.

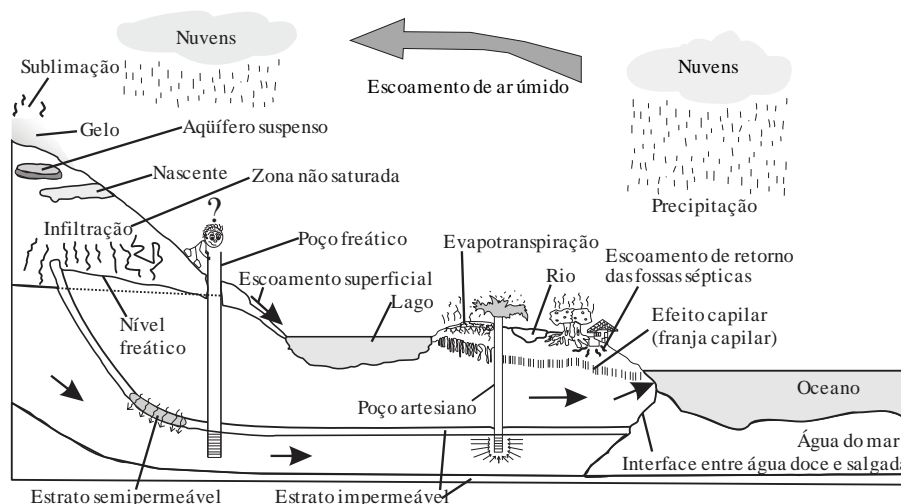


Figura 1 – Ciclo hidrológico, distribuição das águas subterrâneas e tipos de aquíferos.

Lei de Darcy (1856)

A Lei de Darcy, assim denominada em homenagem ao engenheiro francês Henry-Philibert-Gaspard Darcy (1803-1858), é válida para escoamentos em meios porosos e foi apresentada por ele em seu livro *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, na página 594. Trata-se de uma equação importante para estudos de escoamentos em meios porosos, sendo um modelo matemático análogo à Lei de Fick, à Lei de Fourier, Coulomb e Newton. A seguir é apresentada uma reflexão sobre esse equacionamento.

Considere o desenho da Figura 2a, que representa um tubo através do qual água é admitida pela abertura superior e extraída pela abertura inferior, em escoamento com vazão Q , em regime permanente e incompressível. Na região central há um material poroso com área transversal A . O plano horizontal de referência passa pela abertura inferior ($z=0$) e h corresponde à carga piezométrica, isto é, $h = p/\gamma + z$, o que implica $h_2 = p_2/\gamma + z_2$ e $h_1 = p_1/\gamma + z_1$. Destaca-se também que as cargas cinéticas são muito menores que os demais termos da carga hidráulica total $H = z + p/\gamma + V^2/(2g)$.

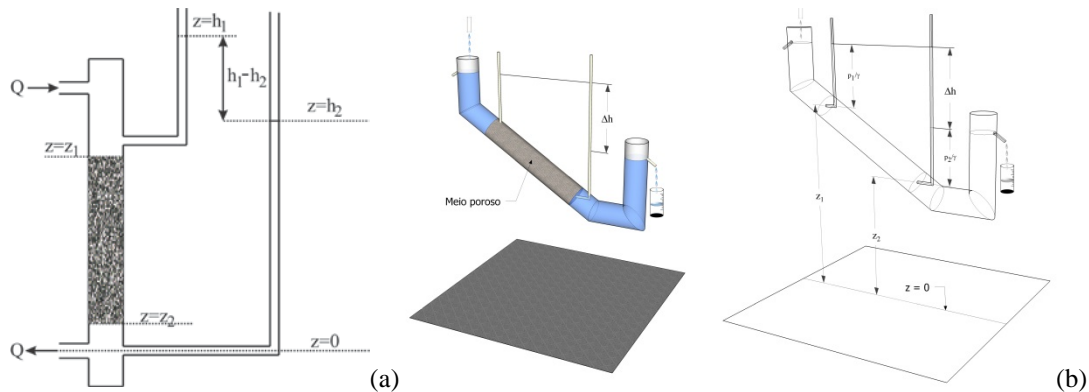


Figura 2 – Esboço do experimento de Darcy (a) e um filtro inclinado (b)
Fonte: adaptado de Bear (1972, p. 120).

Utilizando o desenho da Figura 2a ou 2b, o objetivo agora é modelar a perda de carga ao longo do trecho preenchido com material poroso, que pode ser areia, por exemplo. A equação de Darcy-Weisbach, com $f = C/Re$, sendo Re o número de Reynolds escrito com uma velocidade característica V e um diâmetro característico d , é:

$$I_f = f \frac{V^2}{d2g} = \frac{C}{Re} \frac{V^2}{d2g} = \frac{C}{\frac{Vd}{\nu}} \frac{V^2}{d2g} = \frac{C\nu}{2gd^2} V. \quad (1)$$

A equação da energia escrita para o volume de controle entre as seções 1 e 2 assume a seguinte forma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H, \quad (2)$$

em que ΔH é a perda de carga entre as seções 1 e 2, praticamente a perda de carga no trecho poroso porque as tomadas 1 e 2 estão muito próximas das extremidades do meio poroso (Figura 2a) ou junto à entrada e à saída (Figura 2b). Com a equação da energia, assumindo que os coeficientes de Coriolis são iguais, pode-se escrever:

$$\Delta H = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_1 - h_2. \quad (3)$$

A declividade da linha de energia é obtida dividindo-se a equação 3 pelo comprimento do trecho poroso, Δx :

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{h_1 - h_2}{\Delta x} = I_f. \quad (4)$$

A hipótese de escoamento plenamente desenvolvido faz com que a declividade da linha de energia seja independente de x . Sendo assim, ou, assumindo que $\Delta x \rightarrow 0$, escreve-se I_f como uma derivada que é parte do gradiente de h , isto é,

$$I_f = -\frac{\partial h}{\partial x}. \quad (5)$$

Observe que o sinal negativo é necessário porque a derivada é negativa. Se o escoamento é unidimensional (por aproximação), a derivada parcial é desnecessária. Entretanto, para o caso mais geral, o escoamento é tridimensional e essa derivada é parte do gradiente de h , $\text{grad}(h)$. Combinando as equações 1 e 5 e resolvendo para a velocidade média, escreve-se:

$$V = -\frac{2gd^2}{C_v} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6)$$

Nesta equação V é chamada de velocidade aparente ou vazão específica e corresponde a Q/A . O diâmetro “ d ” utilizado é um diâmetro característico resultante da forma dos grãos e da sua disposição, o que não é uma definição muito precisa. Para terrenos fissurados, pode-se utilizar, por exemplo, $d = 2e$, em que e = largura da fissura e , de um modo geral, $d = d_{50}$ da curva granulométrica, como apresentado por Lencastre (1996), ou $d = d_{10}$, como sugerido por Bear (1979, p.65). A partir da equação anterior, define-se a condutividade hidráulica K :

$$K = \frac{2gd^2}{C_v}. \quad (7)$$

Se o meio poroso é anisotrópico e não homogêneo, a Lei de Darcy é chamada de Lei de Darcy generalizada e possui a seguinte forma:

$$\vec{V} = -\underline{K}\nabla h. \quad (8)$$

A variável \underline{K} é o tensor de condutividade hidráulica, um tensor simétrico e de segunda ordem. Em um sistema de eixos ortogonais é verdade que $K_{ij}=0$ para $i \neq j$. Para um meio isotrópico o tensor é reduzido a um escalar, pois $K_{11}=K_{22}=K_{33}=K$. Sob esta restrição, as componentes da equação 8 são:

$$V_1 = -K \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad V_2 = -K \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad V_3 = -K \frac{\partial h}{\partial x_3}.$$

Experimentalmente, Darcy observou que a vazão, Q , é proporcional à área da seção transversal do meio poroso, A . Ele verificou também que Q é proporcional a $h_1 - h_2$ e inversamente proporcional à distância entre os piezômetros. Sendo assim:

$$Q \propto A \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2}.$$

Seguindo o clássico procedimento para construção de modelos com a introdução da igualdade é necessário escrever uma constante de proporcionalidade:

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} \quad \text{ou} \quad V = -K \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (9)$$

As relações lineares podem ser justificadas com a evidência experimental ou com a teoria exposta anteriormente, relativa ao escoamento laminar. A definição da validade da Lei de Darcy com o número de Reynolds pode ser realizada, mas com alguma incerteza. Segundo Bear (1979, p.126), a Lei de Darcy é válida para um número de Reynolds não exceda algum valor entre 1 e 10. Para Re muito baixo, o mesmo autor destaca a provável ocorrência de efeitos não-newtonianos devido à interação entre argila e água. Para tais condições a Lei de Darcy não é válida. (BEAR, 1988, p. 128) Esse limite não é bem conhecido, mas Fand *et al.* (1986) mencionam que os dados de Darcy sugerem Re igual a 10^{-5} como limite. A Figura 3 ilustra a relação entre $4f$ (fator de resistência de Fanning) e Re .

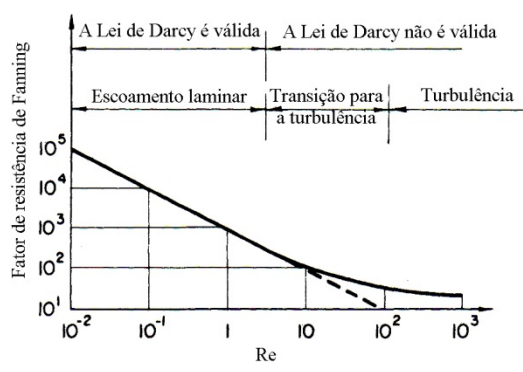


Figura 3 – Regimes de escoamento e validade da Lei de Darcy: Classificação de Bear (1988).

Os escoamentos de transição e turbulentos não podem ser representados pela Lei de Darcy. Forchheimer (1901), como comentado por Bear (1988, p. 177), foi provavelmente o primeiro a propor uma relação não linear entre I_f e V para elevados números de Reynolds. O seu equacionamento para escoamento unidimensional (equação 10) é parecido com a Lei apresentada por Darcy (1857, p. 4) para escoamentos em tubulações.

$$I_f = WV + bV^2, \text{ em que } W \text{ e } b \text{ são constantes.} \quad (10)$$

Neste estágio dos nossos estudos introdutórios sobre meios porosos, antes de iniciarmos a uso de métodos computacionais, serão apresentados alguns exemplos mais simples, porém de grande relevância para o iniciante nesta disciplina da Hidráulica. Os leitores familiarizados com o tema podem avançar sem prejuízos.

EXEMPLO 1: O aparato experimental apresentado na Figura 4 ilustra o experimento de Darcy e foi empregado para realização de experimentos que originaram os dados expostos na Tabela 1. Utilizando esses dados, calcule a condutividade hidráulica, K .

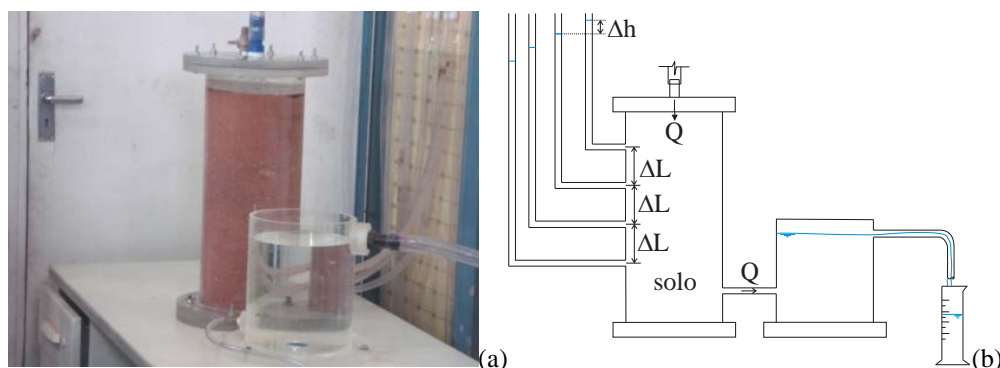


Figura 4 – Experimento de Darcy.

Fonte: Simões (2007). Laboratório de Hidráulica da EESC-USP.

Tabela 1 – Dados obtidos com a realização dos experimentos

Experimento Nº	Vol [m³]	t [s]	Δh [m]
1	5,0E-04	256	0,426
	5,0E-04	258	0,495
	5,0E-04	257	0,492

Solução

Observa-se que o volume estabelecido para medição de vazão é igual a 500 ml. O tempo médio encontrado é $t = 257$ s. Com esse resultado é possível realizar o cálculo da vazão e velocidade aparente ou velocidade de filtração (vazão por unidade de área):

$$Q = 5 \cdot 10^{-4} / 257 = 1,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$V = Q/A = 7,01 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$$

Cálculo do gradiente hidráulico ou declividade da linha de energia, I_f , e K :

$$\Delta h = 0,471 \text{ m (valor médio)}.$$

$$I_f = \Delta h / \Delta L = 4,71 \text{ m/m}.$$

$$K = V / I_f = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$$

Observações: O experimento realizado utiliza um equipamento conhecido como permeâmetro de carga constante e é praticamente uma repetição do experimento realizado por Darcy. A velocidade V é a velocidade aparente e não uma velocidade localizada no interior do meio poroso. A área permeável do meio poroso através da qual ocorre escoamento, A_p , deve ser menor que A (área da seção transversal interna do tubo). Deste modo, a velocidade definida com A_p será maior que a velocidade aparente, conclusão obtida com a equação da continuidade: $Q = VA = V_p A_p$, portanto, $V_p = V(A/A_p)$.

EXEMPLO 2: Condutividades hidráulicas muito baixas não podem ser mensuradas com precisão razoável utilizando-se o permeâmetro de carga constante. O permeâmetro de carga constante é recomendado para solos granulares que contenham no máximo 10%, em massa, de material que passa na peneira de 0,075 mm. (NBR 13292, 1995) Para condições diferentes, com $K < 10^{-5}$, utiliza-se o permeâmetro de carga variável (NBR 14545, 2000). Esse permeâmetro é um reservatório de nível variável e que funciona sendo esvaziado, conforme desenho da Figura 5. Identifique as grandezas presentes na equação a seguir e apresente a sua dedução.

$$K = \frac{aH}{A\Delta t} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right).$$

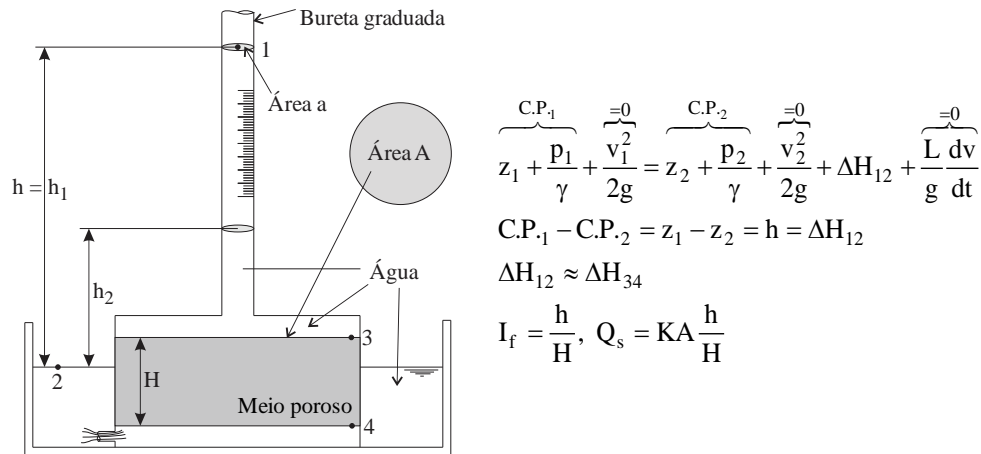


Figura 5 – Esboço de um permeâmetro de carga variável

Solução

Seja H o comprimento do trecho poroso; h_1 a cota piezométrica no instante inicial, t_1 ; h_2 cota piezométrica no instante final t_2 ; a = área da seção transversal da bureta; A = área da seção transversal do meio poroso e $\Delta t = t_2 - t_1$, conforme desenho apresentado. A equação de conservação de massa para o reservatório formado pela bureta e cilindro de base maior é:

$-Q_s = a \frac{dh}{dt}$, para $h > x$. A vazão de saída segue a Lei de Darcy, $Q_s = KA \frac{h}{H}$ e h/H é o gradiente hidráulico porque as acelerações locais são desprezíveis e porque as perdas de carga nos trechos curtos não preenchidos com solo são muito menores que as perdas no meio poroso. Combinando as equações é obtida uma EDO de variáveis separáveis:

$$-KA \frac{h}{H} = a \frac{dh}{dt} \Rightarrow -\frac{A}{a} \frac{K}{H} \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} \Rightarrow \frac{A}{a} \frac{K}{H} \Delta t = \ln h_1 - \ln h_2 = \ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \therefore K = \frac{a}{A} \frac{H}{\Delta t} \ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right).$$

Condutividade hidráulica e permeabilidade intrínseca do meio poroso

Com a equação 7, repetida abaixo, observa-se que a condutividade hidráulica, K , depende das características do meio poroso. Tal dependência é observada na relação com o diâmetro característico, d , e com o coeficiente C , relacionado às formas das seções dos estreitos canais através dos quais ocorre o escoamento no meio poroso. Nota-se também a relação entre K e o líquido, representado pela viscosidade cinemática.

$$K = \frac{2gd^2}{Cv}. \quad (7)$$

Identificando apenas a relação com o meio poroso, define-se a permeabilidade intrínseca, k (BEAR, 1979, p. 67):

$$k = \frac{d^2}{C}. \quad (11)$$

Cabe mencionar que algumas formulações foram propostas para o cálculo de k .⁶

A unidade da condutividade hidráulica de acordo com o S.I. é m/s e a unidade usual é m/dia. k é expresso em m^2 uma vez que C é adimensional. Pode-se usar também $1 \text{ Darcy} = 10^{-12} m^2$. Voltando ao número de Reynolds, Collins (1961) sugere que o diâmetro d seja modelado como $d = (k/\phi)^{1/2}$, em que ϕ = porosidade. Ward (1964), citado por Bear (1979), empregou $d = k^{1/2}$. A Tabela 2 ilustra alguns valores de K .

Tabela 2 – Condutividade hidráulica, K , para solos típicos e água a 20°C

Solo	K	
	[m/s]	[m/dia]
Argila	$\leq 10^{-8}$	$\leq 10^{-3}$
Silte	10^{-7} a $5 \cdot 10^{-6}$	10^{-2} a 0,5
Areia siltosa	10^{-6} a $2 \cdot 10^{-5}$	0,1 a 2
Areia fina	10^{-5} a $5 \cdot 10^{-4}$	1 a 50
Areia (mistura)	$5 \cdot 10^{-5}$ a 10^{-4}	5 a 10
Areia grossa	10^{-4} a 10^{-2}	10 a 10^3
Burgau* limpo	$\geq 10^{-2}$	$\geq 10^3$

*cascalho de seixos e pedras miúdas, misturados com areia.

Fonte: Lencastre (1996, p. 590).

Meios estratificados

Para meios heterogêneos, isto é, solos com valores de K diferentes, pode-se estabelecer formulações para um valor de K equivalente. Para camadas em série (Figura 6a), o K equivalente será uma condutividade hidráulica “vertical”, K_v , calculada com

$$K_v = \frac{b}{\sum b_i / K_i}, \quad (12)$$

⁶ Veja, por exemplo, LENCASTRE, 1996, p. 261.

em que b é a soma dos valores b_i que correspondem às espessuras das diferentes camadas, sendo $i = 1, 2, \dots, n$ e n o número de camadas. A dedução da equação 12 considera o fato de que a perda de carga total ao longo das camadas diferentes é igual à soma das perdas de carga individuais das camadas porque elas estão em série. Deste modo, K_v é um valor equivalente aplicável à camada heterogênea com espessura b .

$$\Delta h_i = V \frac{b_i}{K_i}, \quad \sum_i \Delta h_i = V \frac{b_1}{K_1} + V \frac{b_2}{K_2} + \dots + V \frac{b_n}{K_n} = V \sum_i \frac{b_i}{K_i}.$$

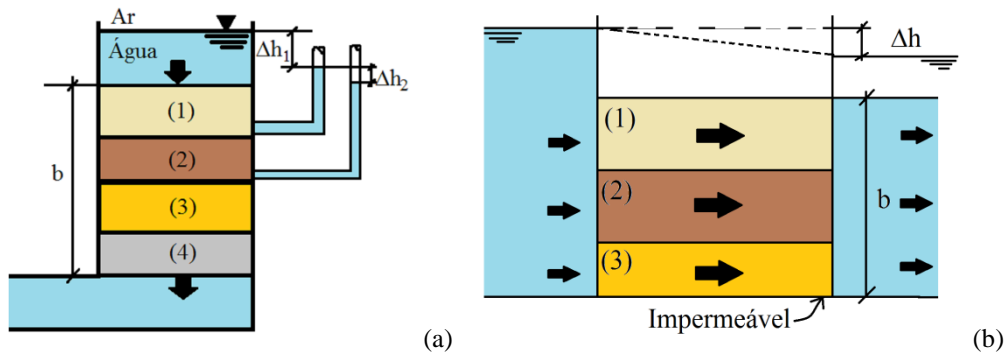


Figura 6 – Meios heterogêneos: (a) Camadas em série e (b) camadas em paralelo.

Para camadas paralelas, ou seja, quando o escoamento é horizontal (Figura 6b), se define a condutividade hidráulica horizontal K_H . Através de cada camada escoam uma vazão por unidade de área V_i . A vazão total por unidade de área, V , é a soma das vazões das camadas, portanto, escreve-se:

$$V = \sum_i V_i = \sum_i b_i K_i \Delta h / L \stackrel{\text{equivalência}}{=} b K_H \Delta h / L \therefore K_H = \frac{1}{b} \sum_i b_i K_i. \quad (13)$$

Veja a Figura 6b para definições das grandezas encontradas nas equações 12 e 13. Essas formulações podem ser encontradas também em Lencastre (1996, p. 262-263).

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA CONTINUIDADE

Primeira dedução

Neste item é deduzida a forma diferencial da equação de conservação de massa para um meio poroso. Inicialmente, define-se a porosidade (ϕ) do meio:

$$\phi = dV_f/dVol, \quad (14)$$

em que dV_f = volume de fluido contido em um elemento poroso com volume $dVol$. O volume $dVol$ inclui sólidos e vazios (ou líquido). Desse modo, a massa de fluido no interior de $dVol$ é igual a $\rho dV_f = \rho\phi dVol$. Utilizando $dVol$ como volume de controle, a integral tripla do produto $\rho\phi dVol$ é igual à massa total de fluido contida em um volume macroscópico. Matematicamente, escreve-se:

$$m_{Vol} = \iiint_{Vol} \rho\phi dVol. \quad (15)$$

O fluido pode escoar através das seções transversais do volume de controle elementar $dVol$, que deve ser interpretado com cuidado, pois, além da hipótese do contínuo, assume-se que nessa escala há um volume poroso válido para a dedução. Através de cada seção, o fluido pode escoar de tal maneira que o fluxo correspondente venha a ser avaliado com a Lei de Darcy. Sendo assim, a equação de conservação de massa em sua forma integral é escrita com a seguinte forma:

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{Vol} \rho\phi dVol + \oiint_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA. \quad (16)$$

Utilizando o teorema de Gauss, a integral ao longo da superfície de controle é substituída por:

$$\oiint_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \iiint_{Vol} \text{div}(\rho \vec{V}) dVol. \quad (17)$$

Combinando as equações 16 e 17, tem-se:

$$0 = \iiint_{Vol} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] dVol. \quad (18)$$

Supõe-se agora que, através de uma dada superfície permeável do domínio, possa existir uma extração ou injeção de massa do volume a uma taxa conhecida. Esse termo fonte faz parte do balanço de massa e é escrito como massa por unidade de tempo uma vez que o balanço é efetuado por unidade de tempo. Tal definição implica definir a descarga

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho Q^* dVol \Rightarrow \dot{m} = \iiint_{vol} \rho Q^* dVol . \quad (19)$$

Na equação anterior, Q^* é a vazão injetada ou extraída por unidade de volume. Para levar em conta essa possibilidade, soma-se a equação 19 à equação 18:

$$0 = \iiint_{Vol} \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) + \rho Q^* \right] dVol . \quad (20)$$

Uma vez que $dVol$ é diferente de zero o integrando deve ser nulo (teorema da localização). Como resultado, obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) + \rho Q^* = 0 . \quad (21)$$

A equação anterior pode ser combinada com a equação de Darcy (equação 8) produzindo o seguinte resultado:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \underline{K} \nabla h) + \rho Q^* = 0 . \quad (22)$$

O sinal de ρQ^* é positivo quando há injeção de massa no volume de controle e negativo quando algum sistema de bombeamento, por exemplo, extrai água do meio subterrâneo.

Segunda dedução

A dedução apresentada neste item conduz à mesma equação obtida anteriormente. Ela é iniciada com o enunciado do princípio de conservação de massa para um volume de controle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Massa que entra por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Massa que sai por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{massa gerada ou} \\ \text{consumida por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{variação de massa no interior} \\ \text{do volume de controle por} \\ \text{unidade de tempo} \end{array} \right\}$$

Considere o desenho apresentado na Figura 7.

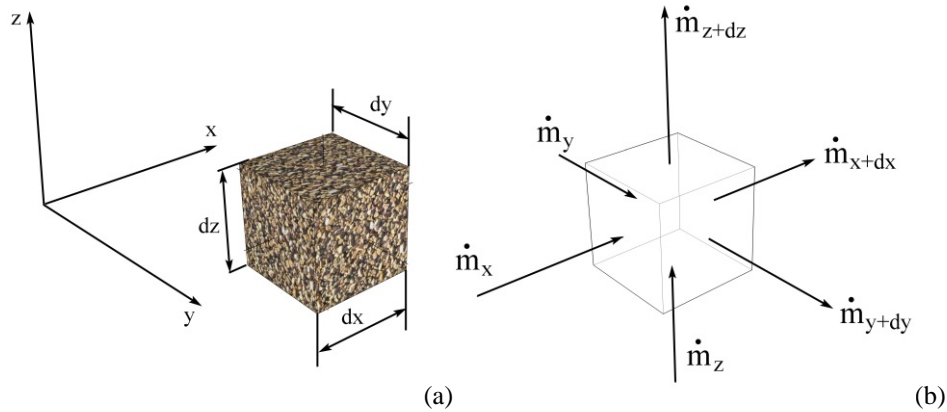


Figura 7 – Volume de controle infinitesimal (a) e balanço de massa (b)

O balanço de massa pode ser realizado com as noções básicas empregadas para a construção de modelos da física-matemática (série de Taylor, equação da reta em distâncias pequenas). O quadro a seguir resume o balanço com a apresentação das descargas em cada seção da Figura 7.

Quadro 1 – Descargas junto às superfícies permeáveis do volume de controle

	Entradas, em x, y e z	Saídas, em x+dx, y+dy e z+dz	Soma
Em x	\dot{m}_x	$\dot{m}_{x+dx} = -\left(\dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx\right)$	$\dot{m}_x - \dot{m}_{x+dx} = -\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx$
Em y	\dot{m}_y	$\dot{m}_{y+dy} = -\left(\dot{m}_y + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy\right)$	$\dot{m}_y - \dot{m}_{y+dy} = -\frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy$
Em z	\dot{m}_z	$\dot{m}_{z+dz} = -\left(\dot{m}_z + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz\right)$	$\dot{m}_z - \dot{m}_{z+dz} = -\frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz$

Somando as contribuições de todas as superfícies, escreve-se:

$$\sum \dot{m}_i = -\left(\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz\right). \quad (23)$$

Escrevendo a descarga em termos da velocidade aparente, V ,

$$\dot{m}_i = \rho V_i A_i, \text{ em que } i = x, y, z.$$

$$\begin{aligned} \sum \dot{m}_i &= - \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} dy dz + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} dx dz + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} dx dy \right) = \dots \\ \dots &= - \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right) dVol \end{aligned} \quad (24)$$

A equação 24 representa o somatório de descargas (massas que entram e saem do volume de controle por unidade de tempo). O termo fonte também é representado como massa por unidade de tempo na soma original e é modelado da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{G}. \quad (25)$$

A variação de massa por unidade de tempo dentro do volume de controle é:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dVol. \quad (26)$$

Somando todos os termos e dividindo-os por dVol, escreve-se:

$$\dot{g} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z}, \quad (27)$$

em que $\dot{g} = \dot{G} / dVol$. Identificando o divergente e utilizando a Lei de Darcy generalizada:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) - \nabla \cdot (\rho \underline{K} \nabla h) - \dot{g} = 0, \quad (28)$$

que é a equação obtida anteriormente, com a primeira dedução.

Formas simplificadas da equação diferencial

Com a massa específica constante, obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{K} \nabla h) - \frac{\dot{g}}{\rho} = 0. \quad (29)$$

A ausência de termos fonte resulta em:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{K} \nabla h) = 0. \quad (30)$$

Em meios porosos isotrópicos a condutividade hidráulica passa a ser independente da orientação do escoamento e se o meio for homogêneo ela não dependerá da posição ao longo do volume, sendo um escalar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - K \nabla^2 h = 0. \quad (31)$$

Para condição de regime permanente, a equação é reduzida à forma:

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0, \quad (32)$$

que é a equação de Laplace, uma equação elíptica (recorde as equações do golpe de aríete e de Saint-Venant, que são equações hiperbólicas).

Considerando as simplificações que levaram à equação de Laplace, exceto a exclusão do termo fonte, é obtida a equação a seguir, que é uma equação de Poisson, também uma equação elíptica.

$$\nabla^2 h = -\frac{\dot{g}}{K\rho}. \quad (33)$$

A equação elíptica é caracterizada por possuir soluções $h(x,y,z)$ que são válidas para diferentes instantes, mas esses tempos não estão ligados entre si (regime permanente). A equação parabólica contém a taxa de variação temporal, derivada que une os instantes, de tal maneira que $h=h(x,y,z,t)$, sendo este o regime não permanente. Essas são as interpretações físicas. Os termos “elíptica”, “parabólica” e “hiperbólica” foram definidos com a analogia às curvas cônicas tridimensionais.

Adaptação para aquíferos: Deformações ao longo de z.

A variação de massa dentro do volume de controle foi modelada com a equação 26, que agora é reescrita com a possibilidade de variação em dVol,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi dVol) . \quad (26)$$

Para aplicações em aquíferos, será necessário o uso da compressibilidade, β , do fluido (água, por exemplo):

$$\beta dp = \frac{d\rho}{\rho} . \quad (34)$$

O aquífero pode sofrer uma variação em seu volume quando há uma variação de pressão. Assumindo que há apenas variações ao longo da profundidade, a compressibilidade do aquífero é dada por:

$$\alpha dp = \frac{d(dz)}{dz} . \quad (35)$$

Com a definição de porosidade, pode-se escrever:

$$\phi = \frac{Vol_{Fluido}}{Vol_{Fluido} + Vol_s} . \text{ A fração de sólidos é}$$

$$1 - \phi = 1 - \frac{Vol_{Fluido}}{Vol_{Fluido} + Vol_s} = \frac{Vol_{Fluido} + Vol_s - Vol_{Fluido}}{Vol_{Fluido} + Vol_s} = \frac{Vol_s}{Vol_{Fluido} + Vol_s} = \frac{Vol_s}{Vol} \dots$$

$$Vol_s = (1 - \phi)dVol \Rightarrow \frac{dVol_s}{d[(1 - \phi)dVol]} = 1 \Rightarrow dVol_s = d[(1 - \phi)dVol] .$$

A porosidade do aquífero é modificada quando há compressão ou expansão, mas o volume de sólidos, Vol_s , permanece inalterado. Sendo assim, como não há variação no volume de sólidos,

$$dVol_s = 0 = d[(1-\phi)dxdydz]. \quad (36)$$

Assumindo que não ocorram deformações no plano horizontal,

$$d[(1-\phi)dz] = 0. \quad (37)$$

A equação 37 pode ser desenvolvida da seguinte forma

$$d[(1-\phi)dz] = (1-\phi)d(dz) + dz(-d\phi) = 0 \therefore \\ dzd\phi = (1-\phi)d(dz)$$

$$d\phi = \frac{(1-\phi)d(dz)}{dz}. \quad (38)$$

A hipótese de variação de pressões hidrostática em um aquífero é razoável. Sendo assim, pode-se escrever a componente vertical da equação básica da estática:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g. \quad (39)$$

As compressibilidades definidas permitem escrever:

$$d\rho = \beta\rho dp = \beta\rho g dh, \quad (40)$$

$$d(dz) = \alpha dp dz = \alpha\rho g dh dz. \quad (41)$$

Substituindo a equação 41 na equação 38, vem

$$d\phi = (1-\phi)\alpha\rho g dh. \quad (42)$$

A equação 26, apresentada inicialmente, agora é empregada, recordando-se que $dxdy = \text{constante}$.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi dVol) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi dz)dxdy = \left[\rho\phi \frac{\partial(dz)}{\partial t} + \rho dz \frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi dz \frac{\partial\rho}{\partial t} \right] dxdy. \quad (43)$$

Neste estágio da dedução, deve-se substituir as equações 40 a 42 na equação 43:

$$\begin{aligned}
 & \left[\rho\phi \frac{\partial(dz)}{\partial t} + \rho dz \frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi dz \frac{\partial\rho}{\partial t} \right] dx dy = \dots \\
 & \dots = \left[\rho\phi dz \alpha \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \rho dz (1-\phi) \alpha \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \phi dz \beta \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \right] dx dy = \dots \\
 & \dots = [\phi \alpha \rho g + (1-\phi) \alpha \rho g + \phi \beta \rho g] \rho dz dx dy \frac{\partial h}{\partial t} = \dots \\
 & \dots = [\phi \alpha \rho g - \phi \alpha \rho g + \alpha \rho g + \phi \beta \rho g] \rho dz dx dy \frac{\partial h}{\partial t} = \dots \\
 & \dots = (\alpha \rho g + \phi \beta \rho g) \rho dz dx dy \frac{\partial h}{\partial t} .
 \end{aligned} \tag{44}$$

Com a equação 44, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi dVol) = (\alpha \rho g + \phi \beta \rho g) \rho dVol \frac{\partial h}{\partial t} . \tag{45}$$

A seguir é apresentado o balanço de massa por unidade de tempo, que utiliza informações das deduções realizadas anteriormente.

$$(\alpha \rho g + \phi \beta \rho g) \rho dVol \frac{\partial h}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right) dVol + \dot{G} . \tag{46}$$

O uso da Lei de Darcy e a divisão por $dVol$ conduzem ao seguinte resultado:

$$(\alpha \rho g + \phi \beta \rho g) \rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \dot{g} = \nabla \cdot (\rho \underline{K} \nabla h) + \dot{g} . \tag{47}$$

Para um aquífero homogêneo e isotrópico e com escoamento incompressível ($\rho =$ constante), o resultado obtido é:

$$(\alpha \rho g + \phi \beta \rho g) \frac{\partial h}{\partial t} = K \nabla^2 h + \frac{\dot{g}}{\rho} . \tag{48}$$

Nesta equação é possível identificar o armazenamento específico, definido como (JACOB, 1940, 1950; COOPER, 1966):

$$S_s = \rho g(\alpha + \phi\beta). \quad (49)$$

Também conhecido como coeficiente de armazenamento elástico, o armazenamento específico, S_s , representa a quantidade de água por unidade de volume de uma formação saturada que é armazenada ou expelida devido à compressibilidade do meio bifásico (sólido-água), por unidade de carga. (FETTER, 2001, p. 101) O adimensional S_{sb} é definido como armazenamento, S , de um aquífero confinado com espessura b .

Em um aquífero de espessura b e largura L , a vazão pode ser calculada com a Lei de Darcy, resultando em:

$Q = KbLI_f$. Define-se como transmissividade, T , a seguinte igualdade:

$$\frac{Q}{LI_f} = Kb = T. \text{ Sendo assim, a transmissividade representa a vazão por unidade de largura e carga}$$

hidráulica do escoamento horizontal ao longo de uma espessura saturada de aquífero.

Substituindo essas três definições na equação 48 reescrita para o caso bidimensional sem componentes verticais, o resultado obtido é

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (50)$$

Drenância ou “leakage”

Em um aquífero pode ocorrer transferência de massa (de água) através de camadas semi-permeáveis que limitam o aquífero. Nesse caso, o aquífero é chamado de semiconfinado, sendo tal fenômeno conhecido como *leakage* (veja a Figura 1), palavra que pode ser traduzida como *drenância* como utilizado pelo professor Lencastre (1996, p. 257). Assumindo que o escoamento ocorra na horizontal, sendo “ e ” a taxa de drenância, a equação diferencial de conservação de massa assume a seguinte forma (FETTER, 2001, p. 128):

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{e}{T}. \quad (51)$$

Aquíferos não confinados

A equação para aquíferos com superfície livre foi deduzida por Boussinesq (1904) e pode ser vista a seguir:⁷

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{S_y}{K} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (52)$$

Se o rebaixamento da superfície livre do aquífero é pequeno quando comparado à espessura média do aquífero, a carga hidráulica h pode ser substituída por b (espessura média). Essa aproximação lineariza a equação de Boussinesq, resultando em:

$$\frac{S_y}{Kb} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}. \quad (53)$$

Um escoamento com superfície livre, com altura h , cota piezométrica $\varphi = z + p/\gamma$, ocorre com vazão ao longo de x calculada por:

$$\int_0^h V_x dy dz = -K dy \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz. \quad (54)$$

Definindo q_x como a vazão por unidade de largura,

$$q_x = -K \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz. \quad (55)$$

Como o volume de controle possui superfície deformável devido à superfície livre, utiliza-se a regra de Leibniz para avaliar a integral anterior, o que resulta em:

$$\begin{aligned} q_x &= -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \varphi dz - \varphi(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \varphi dz - h \frac{\partial h}{\partial x} \right] = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \varphi dz - \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \right] = \dots \\ &\dots = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h \varphi dz - \frac{h^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

⁷ Ver dedução ilação em Bear, 1979, p. 112-113

Definindo $I(x, y) = \int_0^h \phi dz - \frac{h^2}{2}$, a equação 56 é reescrita como:

$$q_x = -K \frac{\partial I}{\partial x}. \quad (57)$$

Procedimento semelhante conduz ao resultado para y

$$q_y = -K \frac{\partial I}{\partial y}. \quad (58)$$

A equação de conservação de massa deduzida anteriormente, com restrições agora facilmente identificáveis, é

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -K \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (59)$$

A dedução anterior pode ser encontrada em Lencastre (1996, p. 264-265) e é atribuída a Tcharnyi, segundo o mesmo autor.

Escoamento em regime permanente

Aquífero confinado e escoamento em direção a canais

Considere a Figura 8, que ilustra um aquífero confinado, horizontal, com espessura b (vertical), homogêneo e isotrópico, com escoamento em regime permanente e incompressível. Empregando a Lei de Darcy, a vazão calculada que escoar em direção ao canal será:

$$Q = KbL \frac{h(0) - h(X)}{X}, \quad (60)$$

em que bL = área da seção transversal ao escoamento, L =largura.

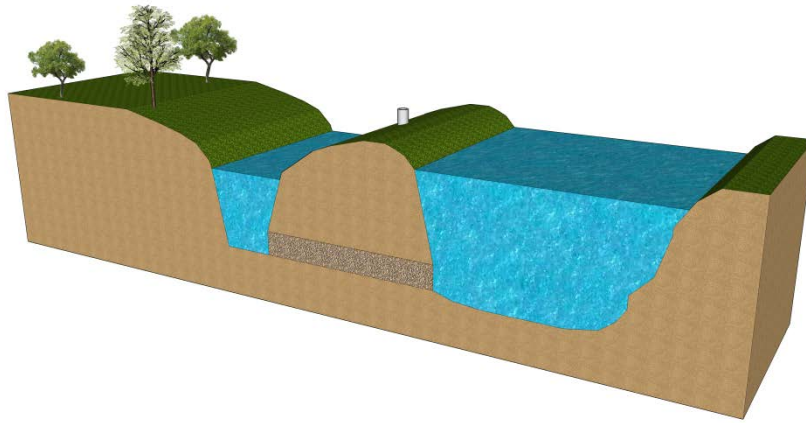


Figura 8 – Aquífero entre lago e canal. Trecho confinado de um meio poroso. Esboço sem escala

A posição da superfície livre em $x = X$ pode ser calculada com:

$$h(X) = h(0) - \frac{Q}{KbL} X. \quad (61)$$

Aquífero não confinado ou freático

Em um aquífero freático a posição da superfície livre faz parte da solução de um determinado problema. Neste caso, o gradiente hidráulico é função da posição ao longo do escoamento, como ilustrado na Figura 9.

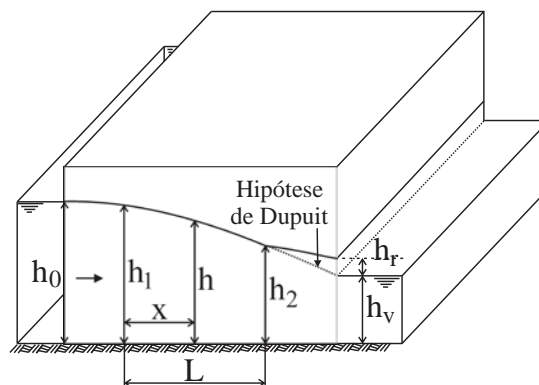


Figura 9 – Aquífero livre

A solução apresentada para este problema é conhecida como solução de Dupuit (1863) e possui as seguintes hipóteses:

- (a) O gradiente hidráulico é igual à declividade da linha d'água;
- (b) Para superfície livre com pequena inclinação, as linhas de corrente são horizontais e as equipotenciais são verticais.

A Lei de Darcy pode ser escrita com a seguinte forma:

$$q = -Kh \frac{dh}{dx}, \quad (62)$$

em que h é a altura da camada saturada do aquífero, q é a vazão por unidade de largura. Integrando a equação anterior, escreve-se:

$$q \int_0^L dx = -K \int_{h_1}^{h_2} h dh \Rightarrow qL = -K \left(\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right) \therefore ,$$

$$q = K \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} \right). \quad (63)$$

Integração semelhante conduz a uma função $h=h(x)$, definida a seguir:

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2q}{K}x} \quad \text{ou} \quad h = \sqrt{h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{L}x} \quad (64)$$

Quando o escoamento freático ocorre para fora do meio poroso, como na Figura 9, é estabelecida a altura de ressurgência, h_r (em barragens de terra, valas, poços). A determinação de h_r pode ser feita com a fórmula empírica de Vibert (citado por Lencastre, 1996):

$$h_r = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}\sqrt{X^2 + 4(h_0 - h_v)^2}, \quad (65)$$

X é a distância entre h_0 e h_v .

Inclusão da taxa de recarga ou evaporação

Se há possibilidade de infiltração ou evaporação, com a Lei de Darcy, pode-se demonstrar a seguinte equação.⁸

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{L}x + \frac{w}{K}(L-x)x}, \quad (66)$$

em que w é a taxa de recarga, $[L]/[T]$, por exemplo, em m/dia, ft/dia ou m/s (veja a simbologia desta equação na Figura 10). L é a distância entre h_1 e h_2 , x é um eixo coordenado com origem na posição de h_1 .

⁸ Veja a indução em Fetter, 2001, p. 141-143.

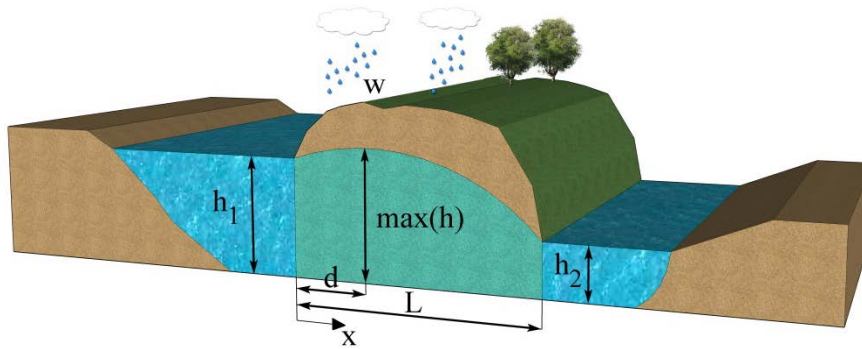


Figura 10 – Escoamento não-confinado com infiltração (w positivo) ou evapotranspiração (w negativo)

A vazão por unidade de largura é calculada com a derivação da equação anterior, que resulta em uma função que relaciona q_x e a posição x :

$$q_x = K \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2L} - w \left(\frac{L}{2} - x \right), \quad (67)$$

em que q_x = vazão por unidade de largura, $[L^2]/[T]$. A distância, d , desde a origem até a posição em que ocorre a divisão, para $q_x = 0$, é:

$$d = \frac{L}{2} - \frac{K}{w} \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2L}. \quad (68)$$

Se $x = d$, $h = \max(h)$:

$$\max(h) = \sqrt{h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{L}d + \frac{w}{K}(L-d)d}. \quad (69)$$

Escoamentos com influência de poços

Quando a água presente em um poço é bombeada para fora do meio poroso, há um abaixamento do nível de água (aquífero livre) ou superfície piezométrica (aquífero confinado). Como consequência, é estabelecido um cone de depressão cujo limite exterior define a área de influência do poço.

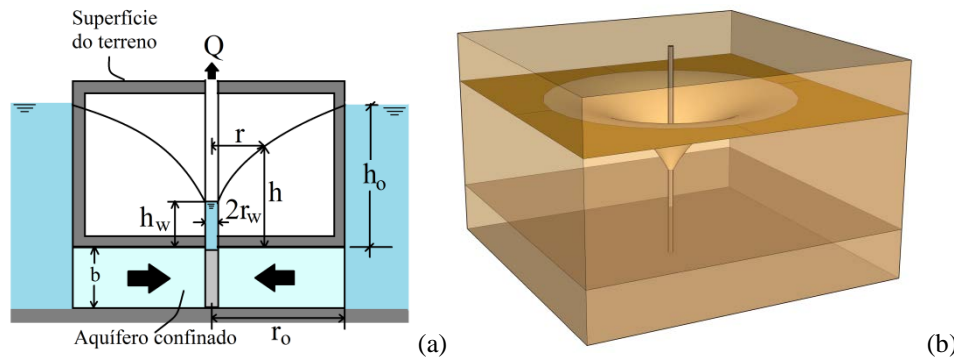


Figura 11 – Escoamento radial em regime permanente para um poço inserido em um aquífero confinado. (a) Definições das grandezas empregadas. (b) Ilustração do cone de depressão
 Fonte: Imagem (a), adaptação de Todd (1959, p.78).

Aquífero confinado (Regime permanente)

São consideradas inicialmente as seguintes restrições:

1. Escoamento radial, permanente e incompressível.
2. O poço penetra completamente no aquífero confinado.
3. Aquífero homogêneo e isotrópico.
4. Escoamento bidimensional e horizontal (aplicam-se as hipóteses de Dupuit).
5. Escoamento laminar, com validade da Lei de Darcy.

A Figura 11a é empregada como referência para definição das grandezas utilizadas e dedução da equação apresentada a seguir. A vazão Q do poço a qualquer distância r é calculada com a Lei de Darcy com a seguinte forma:

$$Q = Av = 2\pi rbK \frac{dh}{dr}. \quad (70)$$

A equação anterior é uma EDO de variáveis separáveis:

$$\int_{r_w}^r \frac{dr}{r} = \frac{2\pi bK}{Q} \int_{h_w}^h dh \Rightarrow \ln r - \ln r_w = \ln(r/r_w) = \frac{2\pi bK}{Q} (h - h_w).$$

$$Q = \frac{2\pi bK}{\ln(r/r_w)} (h - h_w). \quad (71)$$

A equação anterior é conhecida como equação de Thiem ou equação de equilíbrio. Se o poço está no centro de uma ilha, $h = h_0$ em $r = r_0$, que é a borda da ilha:

$$Q = \frac{2\pi bK}{\ln(r_0/r_w)}(h_0 - h_w). \quad (72)$$

A determinação da condutividade hidráulica de um aquífero pode ser realizada de forma aproximada com a equação de Thiem:

$$K = Q \frac{\ln(r/r_w)}{2\pi b(h - h_w)}. \quad (73)$$

Considere um poço bombeado e dois poços de observação a distâncias r_1 e r_2 do poço bombeado. Se $h(r_1) = h_1$ e $h(r_2) = h_2$, então o cálculo de K pode ser feito com:

$$K = Q \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi b(h_2 - h_1)}. \quad (74)$$

A aplicação da equação anterior deve ser feita para condição de regime permanente, o que pode ser alcançado na prática de forma aproximada quando a variação no rebaixamento dos poços com o tempo for desprezível.

Aquífero não confinado (Regime permanente)

Considere o desenho esquemático da Figura 12 (TODD, 1959) e as seguintes simplificações:

1. Escoamento radial, permanente e incompressível.
2. O poço penetra completamente no aquífero.
3. Aquífero homogêneo e isotrópico.
4. Escoamento bidimensional e horizontal (aplicam-se as hipóteses de Dupuit).
5. Escoamento laminar, com validade da Lei de Darcy.

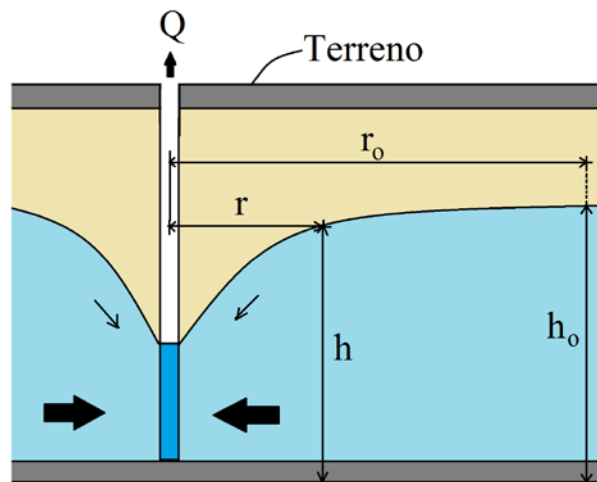


Figura 12 – escoamento radial para um poço em aquífero não confinado

A vazão, calculada com a Lei de Darcy, é:

$$Q = Av = 2\pi rhK \frac{dh}{dr} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi K} \frac{dr}{r} = h dh \Rightarrow \frac{Q}{2\pi K} \int_{r_w}^r \frac{dr}{r} = \int_{h_w}^h h dh \dots$$

$$Q = \pi K \left[\frac{h^2 - h_w^2}{\ln(r/r_w)} \right]. \quad (75)$$

Considerações práticas:

1. A equação 75 fornece boas estimativas para Q .
2. A equação 75 não prevê a curva de rebaixamento perto do poço devido às componentes verticais do escoamento.
3. Todd (1959, p. 81) sugere r_0 entre 500 e 1000 pés como aproximação para aplicação prática da equação 75.
4. Lencastre (1996, p. 275) recomenda $\partial h/\partial r = 0,2$ como limite para fórmula de Dupuit (eq. 75).
5. Na prática o poço deve ser explorado com valores do rebaixamento entre $0,5h_0$ e $0,75h_0$, em que $h_0 - h_w = \text{rebaixamento}$.
6. Nas proximidades do poço há um rebaixamento brusco que pode ser avaliado com fórmulas empíricas (LENCASTRE, 1996, p. 277).
7. Usa-se mão livre para traçar a superfície entre $\partial h/\partial r = 0,2$ e a ressurgência.

Regime variável – Solução de Theis para aquífero confinado

A equação diferencial parcial que modela o escoamento sob essas condições é:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{T}{rS} \frac{\partial h}{\partial r} . \quad (76)$$

Empregando um sumidouro matemático de resistência constante para representar um poço de bombeamento, Theis desenvolveu a seguinte solução:

$$h = h_0 - \frac{Q}{4\pi T} \int_{r^2 S / (4Tt)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du , \quad (77)$$

em que $u = r^2 S / (4Tt)$ e Q é a vazão do poço. A equação anterior é conhecida como a equação de desequilíbrio ou equação de Theis.

SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Esta parte do texto é dedicada ao uso de métodos computacionais e numéricos para a solução de problemas em duas dimensões e em regime variável. Trata-se de uma introdução ao tema, restrita ao emprego de diferenças finitas. Esse assunto pode ser amplamente discutido e desenvolvido com elementos finitos, método dos elementos analíticos, entre outros.

Equação diferencial: Forma original e forma discreta.

A equação 50 deduzida anteriormente é aplicável aos escoamentos variáveis em aquíferos confinados, para condição de isotropia, homogeneidade, escoamento bidimensional. O termo fonte presente nesta equação é útil para representar a vazão em escoamento através de um poço, sendo negativo para extração de água do aquífero e positivo para simulação de recarga.

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (50a)$$

ou

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{g}}{\rho K} \frac{T}{S}. \quad (50b)$$

Lembrando que S é adimensional, $T = Kb$ e $dm = \rho dVol$,

$$\dot{g} = \frac{\dot{G}}{dVol} = \frac{\rho Q}{dVol}, \text{ é possível escrever } \frac{\dot{g}}{\rho K} \frac{T}{S} = \frac{\rho Q}{dVol} \frac{Kb}{\rho K S} = \frac{Q}{dVol} \frac{b}{S} = \frac{Q}{SdA}.$$

Deste modo, em uma malha estruturada com Δx e Δy , pode-se escrever o termo fonte como

$$\frac{\dot{g}}{\rho K} \frac{T}{S} = \frac{Q}{S \Delta x \Delta y}.$$

O esquema numérico utilizado nos exemplos expostos a seguir utiliza diferença finita progressiva para a derivada temporal e diferenças finitas centradas para os termos difusivos

(derivadas de segunda ordem em relação aos eixos x e y). Trata-se de um esquema numérico explícito, em que n denota o tempo, i e j o espaço, como escrito a seguir.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}. \quad (79)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}. \quad (80)$$

A análise de estabilidade deste esquema numérico para o caso de duas dimensões e sem o termo fonte mostra que Δt deve satisfazer:⁹

$$\Delta t \leq \frac{S}{8T} (\Delta x^2 + \Delta y^2). \quad (81)$$

Substituindo as equações 78 a 80 na equação 50b, vem

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{T}{S} \left(\frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{Q}{S\Delta x\Delta y}. \quad (82)$$

Para elaboração do algoritmo é conveniente isolar $h_{i,j}^{n+1}$:

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{T}{S} \left(\frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \Delta t + \frac{Q}{S\Delta x\Delta y} \Delta t + h_{i,j}^n. \quad (83)$$

Códigos

O código desenvolvido pode ser utilizado em Matlab ou, com poucas adaptações, no *software* gratuito Octave. A sua simplicidade não exige grande esforço para compreensão, mas por

⁹ Veja, por exemplo, Chapra e Canale (2008, p. 732).

razões didáticas, a apresentação a seguir segue a divisão padrão, com pré-processamento, processamento e pós-processamento. Os dados que aparecem nesse exemplo da Tabela 1 serão utilizados posteriormente.

Tabela 1 – Código para solução da equação 83. Regime variável, 2D, com termo fonte

1) PRÉ-PROCESSAMENTO:

```
clear all
close all

%Modelo 2D para difusão de h em um aquífero confinado.
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo
Porto. Última atualização: 22/4/2014.

%Dados:

Lx = 10000; %[m] Comprimento do domínio em x
Ly = 10000; %[m] Comprimento do domínio em y

Nx=40; %Número de divisões do eixo x.
Ny=40; %Número de divisões do eixo y.

dx=Lx/(Nx-1);%espaçamento da malha em x (leia delta x e não dx)
dy=Ly/(Ny-1);%espaçamento da malha em y (leia delta y e não dy)

S=0.000198;%Adimensional
Q=0.03155; %SI, m³/s
T=0.015;

tt=14400;%tt é o tempo total considerado para a simulação. %240;
Nt=6900;%é o número de divisões no eixo temporal.

dt=tt/(Nt-1)
D=T/S;
dtest=(1/8)*(dx^2+dy^2)/D
Ntest = tt/dtest+1
pause()

x=(0:dx:Lx)';
y=(0:dy:Ly)';

h0=100;
h = h0*ones(Nx,Ny);
ht = h0*ones(Nx,Ny,Nt);

%Termo fonte:

F = 0;

%Condição inicial:

%   for i=1:Nx
%
%       for j=1:Ny
%
%
%
```

```

%           if i>=(Nx+1)/2-2 && i<=(Nx+1)/2+2 && j>=(Ny+1)/2-2 &&
j<=(Ny+1)/2+2
%
%           h(i,j) = h0;
%
%           end
%       end
%   end

hh = h;
ht(:, :, 1) = h;

[X, Y] = meshgrid(linspace(0,Lx,Nx),linspace(0,Ly,Ny));
mesh(X',Y',h,'FaceColor','blue','EdgeColor','none')
camlight left; lighting phong
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')
pause()

```

2) PROCESSAMENTO

```

n=1;

for t=dt:dt:tt
    n=n+1
    %Condições de Contorno:

%     h(1,:) = h(2,:);
%     h(Nx,:) = h(Nx-1,:);
%     h(:,1) = h(:,2);
%     h(:,Ny) = h(:,Ny-1);
%
%     hh(1,:) = h(2,:);
%     hh(Nx,:) = h(Nx-1,:);
%     hh(:,1) = h(:,2);
%     hh(:,Ny) = h(:,Ny-1);

    for i=2:Nx-1
        x(i,1)=(i-1)*dx;
        for j=2:Ny-1
            y(j,1)=(j-1)*dy;

%Os "ifs" a seguir possibilitam localizar o termo fonte no domínio
computacional discreto.

                %if i>=(Nx+1)/2-4 && i<=(Nx+1)/2+4 && j>=(Ny+1)/2-4 &&
j<=(Ny+1)/2+4
                    if i == 9 && j==9

                        F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%
%                       hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%                       h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
%                       2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;
%
%                       else if i==19 && j==9

                            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%
%                       hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...

```

```

%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==9 && j==19

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==20 && j==20

            F=-Q/(S*dx*dy);

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==9 && j==29

            F=0;%Q/(S*dx*dy);

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==19 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==29 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else

            F=0;

%          hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%          h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

            end
            end
            end
            end
            end

        end
end

```



```

                hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
                h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

                end
            end

            h=hh;
            ht(:, :, n) = h; %ht é um conjunto de n matrizes com i linhas e j.
            Pode ser interpretada como uma "matriz 3D", com i linhas, j colunas e
            n matrizes 2D.
        end

```

3) PÓS-PROCESSAMENTO

```

for n=1:11:Nt
    t=(n-1)*dt;
    contourf(X',Y',ht(:, :, n));
    colorbar
    xlim([0 Lx])
    ylim([0 Ly])
    title(['t = ', num2str(t./86400), 'dia'])
    axis equal
    M=getframe;
end

```

Problema 6.1 – Escoamento em direção a um poço

A extração de água de um aquífero confinado é realizada por meio de um poço completamente imerso no aquífero. A vazão de 28,9 L/s pode ser considerada constante (após um breve período transitório inicial) e produz um rebaixamento na carga piezométrica que deve ser avaliado. Com esses dados e sabendo que $T = 0,01285 \text{ m}^2/\text{s}$ e $S = 0,000206$ (adimensional), simule o cone de depressão para um tempo total de 240 min, $L_x = L_y = 800 \text{ m}$ e $N_x=N_y=50$.

Solução

O código anterior foi escrito com as informações necessárias para a solução deste problema, restando apenas a modificação dos dados. Após alguns minutos, a conclusão dos cálculos conduz aos resultados apresentados a seguir. As condições de contorno empregadas foram $h = h_0$ em todo o contorno. Esse valor fixo corresponde à condição de contorno de Dirichlet. Com pode ser visto na Figura 13, é estabelecido o cone de depressão esperado. Com o trecho final do código apresentado é possível visualizar a evolução temporal do rebaixamento.

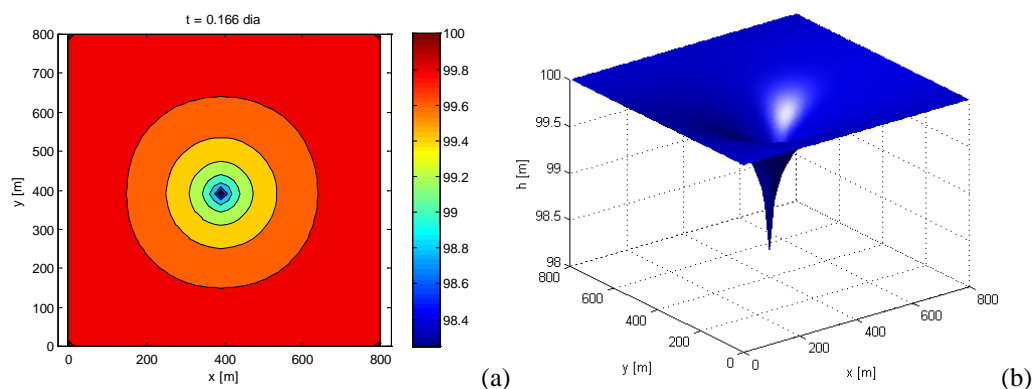


Figura 13 – Solução numérica para $h(x,y)$ e $t = 0,166$ dia. As cores indicam valores de h , em metros e ilustram o cone de depressão com as linhas equipotenciais. A Figura (b) é o cone de depressão

Problema 6.2 – Poço inserido em um escoamento

Simule o escoamento em um aquífero confinado com superfície piezométrica que varia linearmente de 120 m a 100 m nas laterais e com um poço no centro do domínio computacional, que possui $L_x = L_y = 4200$ m. Apresente as soluções indicando a distorção em relação ao problema anterior, que não possui superfície piezométrica com inclinação nas laterais. Dados: $S = 0,0002$; $T = 0,001$ m²/s; $Q = 0,02$ m³/s, $N_x=N_y = 40$ e tempo total de 60 dias.

Solução

Os resultados a seguir ilustram a interação entre poço e superfície piezométrica inclinada. Nota-se que na posição onde foi realizado o bombeamento, o rebaixamento cresce até um máximo e em seguida decresce alcançando assintoticamente o nível permanente. A Figura 14a também ilustra o campo de velocidades aparentes para K unitário. O leitor pode observar outros detalhes com o código deste exemplo.

Para pensar

Se as condições iniciais fossem impostas assim como foi feito para as laterais do domínio (condição de contorno) com uma superfície piezométrica plana e inclinada, a Figura 16d seria igual?

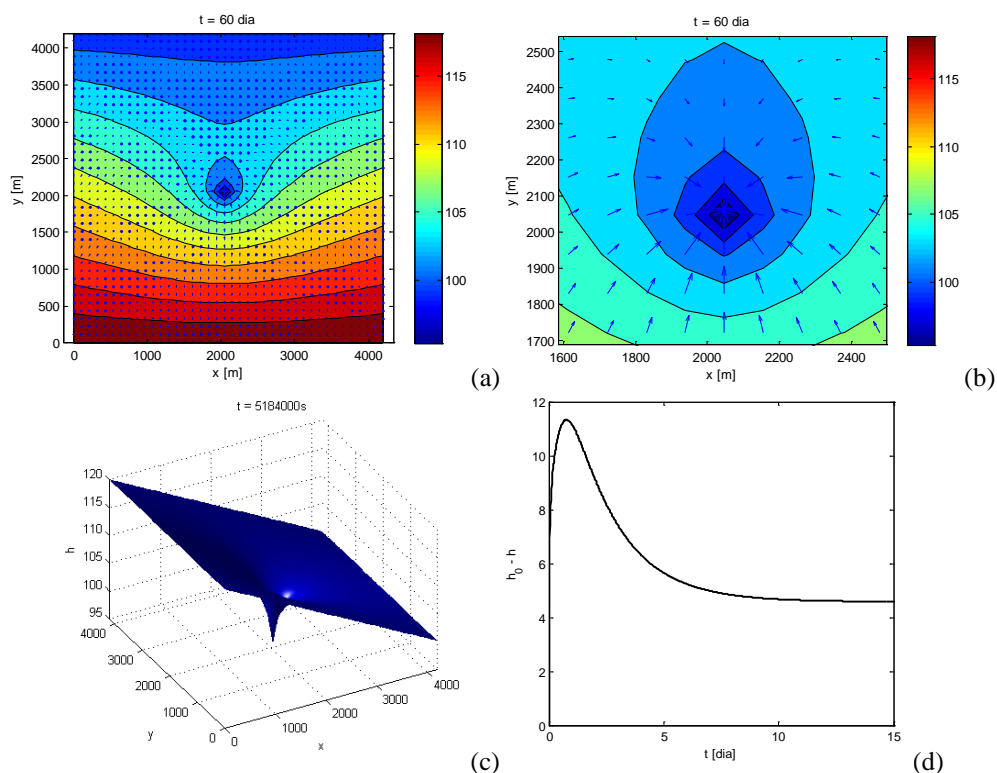


Figura 14 – Solução numérica para $h(x,y)$ e $t = 60$ d (a,b,c)

Em (d) é apresentado o rebaixamento na posição do poço.

CÓDIGO DO PROBLEMA 6.2

```

clear all
close all

%Modelo 2D para difusão de h em um aquífero confinado.
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo
Porto. 22/4/2014.
%Dados:

Lx = 4200; %[m] Comprimento do domínio em x
Ly = 4200; %[m] Comprimento do domínio em y

Nx=40; %Número de divisões do eixo x.
Ny=40; %Número de divisões do eixo y.

dx=Lx/(Nx-1);%espaçamento da malha em x (leia delta x e não dx)
dy=Ly/(Ny-1);%espaçamento da malha em y (leia delta y e não dy)

S=0.0002;%Adimensional
Q=0.02; %SI, m³/s
T=0.001;%Kb, m²/s

tt=60*86400;%tt é o tempo total considerado para a simulação (60
dias);
Nt=9000;%é o número de divisões no eixo temporal.

dt=tt/(Nt-1)
D=T/S;
dtest=(1/8)*(dx^2+dy^2)/D
Ntest = tt/dtest+1
pause()

x=(0:dx:Lx)';
y=(0:dy:Ly)';

h0=100;
h = h0*ones(Nx,Ny);
ht = h0*ones(Nx,Ny,Nt);

%Termo fonte:

F = 0;

%Condição inicial:

%   for i=1:Nx
%       for j=1:Ny
%           if i>=(Nx+1)/2-2 && i<=(Nx+1)/2+2 && j>=(Ny+1)/2-2 &&
j<=(Ny+1)/2+2
%               h(i,j) = h0;
%           end
%       end
%   end

hh = h;

```

```

ht(:,:,1) = h;

[X, Y] = meshgrid(linspace(0,Lx,Nx),linspace(0,Ly,Ny));
%U = reshape(x, NJ, NI);

mesh(X',Y',h,'FaceColor','blue','EdgeColor','none')
camlight left; lighting phong
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')
pause()

n=1;

for t=dt:dt:tt
    n=n+1
    %Condições de Contorno:

    h(1,:) = 120;%h(2,:);
    h(Nx,:) = 100;%h(Nx-1,:);
    h(:,1) = 120+x.*(100-120)/Lx;%h(:,2);
    h(:,Ny) = 120+x.*(100-120)/Lx;%h(:,Nz-1);

    hh(1,:) = 120;%hh(2,:);
    hh(Nx,:) = 100;%hh(Nx-1,:);
    hh(:,1) = 120+x.*(100-120)/Lx;%hh(:,2);
    hh(:,Ny) = 120+x.*(100-120)/Lx;%hh(:,Nz-1);

    for i=2:Nx-1
        x(i,1)=(i-1)*dx;
        for j=2:Ny-1
            y(j,1)=(j-1)*dy;

            %if i>=(Nx+1)/2-4 && i<=(Nx+1)/2+4 && j>=(Ny+1)/2-4 &&
j<=(Ny+1)/2+4
                if i == 9 && j==9

                    F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%                    hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%                    h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;
%
                    else if i==19 && j==9

                        F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%                        hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%                        h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

                    else if i==9 && j==19

                        F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%                        hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%                        h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

                    else if i==20 && j==20

                        F=-Q/(S*dx*dy);

```

```

%             hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%             h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==9 && j==29

            F=0;%Q/(S*dx*dy);

%             hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%             h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==19 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%             hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%             h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==29 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%             hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%             h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else

            F=0;

%             hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%             h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

            end
            end
            end
            end
            end
            end

        end

        hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
        h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        end

    end

    h=hh;
    ht(:, :, n) = h;
end

K=1;
for n=1:10:Nt

```

```

        t=(n-1)*dt;
        [DX,DY]=gradient(ht(:,:,n),dx,dy);
        contourf(X,Y,ht(:,:,n));
        colorbar
        hold on
        quiver(X,Y,-K*DX,-K*DY)
        xlim([0 Lx])
        ylim([0 Ly])
        title(['t = ',num2str(t./86400),'dia'])
        axis equal
        %pause()
        M=getframe;
        end

        op1=0;
        op2=0;

        if op1==1
            mesh(X',Y',h,'FaceColor','blue','EdgeColor','none')
            camlight left; lighting phong
            xlabel('x')
            ylabel('y')
            zlabel('h')
            xlim([0 Lx])
            ylim([0 Ly])
            %zlim([0 100])
            title(['t = ',num2str(t),'s'])
            %pause()
            %axis equal
            M=getframe;
            end

        if op2==1
            %[DX,DY]=gradient(T,dx,dy);
            contourf(0:dx:Lx,0:dy:Ly,h);
            colorbar
            %hold on
            %quiver(0:dx:Lx,0:dy:Ly,-a*DX,-a*DY,20)
            xlim([0 Lx])
            ylim([0 Ly])
            title(['t = ',num2str(t),'s'])
            %pause()
            %axis equal
            M=getframe;
            end

        for ii=1:Nt
            HHn(1,ii)=ht(20,20,ii);
            end

        plot(0:dt:tt,h0-HHn)

```

Problema 6.3 – Divisor de águas e ponto de estagnação

Utilize o código anterior com cota piezométrica a montante igual a 140 m ao invés de 120 m e posicione o poço centralizado e mais a montante, a 1/4 do comprimento. Identifique o divisor de águas subterrâneas, o ponto de estagnação e o limite das águas que entram no poço (a montante em relação ao poço, no domínio).

Solução

As linhas equipotenciais são geradas pelo código e as linhas de corrente podem ser desenhadas com o auxílio do campo de velocidades. O divisor de águas delimita a região do campo de velocidades que converge para o poço. Em outras palavras, delimita a região que produz escoamento para dentro do poço. O ponto de estagnação é aquele ponto a jusante do poço que corresponde à mudança de sentido do escoamento (no espaço). O limite das águas que entram no poço está indicado no desenho.

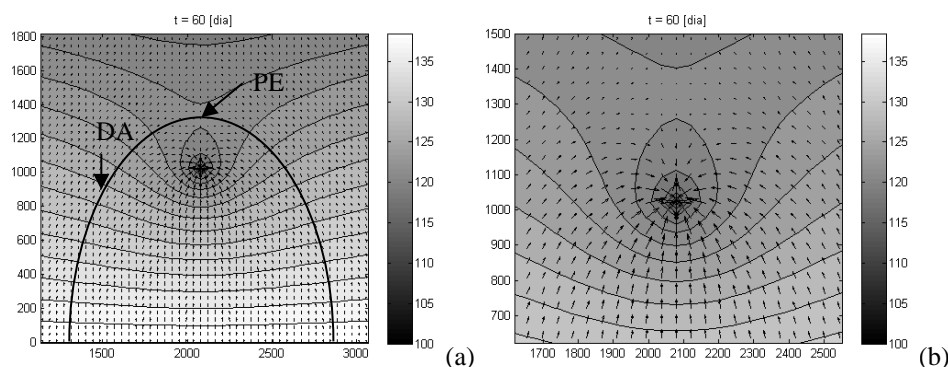


Figura 15 – Solução do item (a). Unidades e acordo com o S.I.
DA = divisor de águas subterrâneas. PE = Ponto de estagnação

Para pensar

Modifique o código para que ele tenha como condição inicial $h(x,y,0)$ uma função linear como aquela empregada para parte dos contornos. Essa seria uma situação mais próxima da realidade?

Problema 6.4 – Fonte e sumidouro

Faça uma adaptação no código anterior e simule um poço de descarga (sumidouro) e um poço de reabastecimento (fonte). Apresente linhas equipotenciais e linhas de corrente.

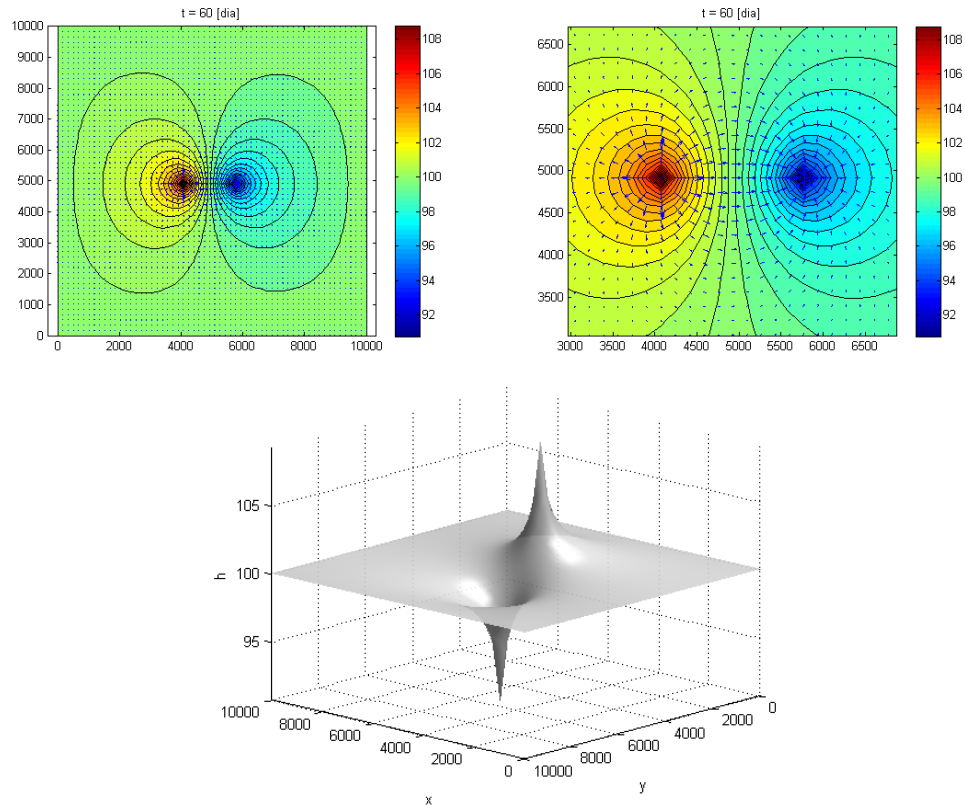


Figura 16 – Rede de escoamento para domínio com fonte e sumidouro

O código desenvolvido para esta aplicação pode ser visto a seguir.

Problema 6.4

```
clear all
close all

%Modelo 2D para difusão de h em um aquífero confinado.
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo
Porto. 26/4/2014.
%Dados:

Lx = 10000; %[m] Comprimento do domínio em x
Ly = 10000; %[m] Comprimento do domínio em y

Nx=60; %Número de divisões do eixo x.
Ny=60; %Número de divisões do eixo y.

dx=Lx/(Nx-1); %espaçamento da malha em x (leia delta x e não dx)
dy=Ly/(Ny-1); %espaçamento da malha em y (leia delta y e não dy)

S=0.0002; %Adimensional
Q=0.015; %SI, m³/s
T=0.001; %Kb, m²/s
```

```

tt=60*86400;%tt é o tempo total considerado para a simulação (60
dias);
Nt=3700;%é o número de divisões no eixo temporal.

dt=tt/(Nt-1)
D=T/S;
dtest=(1/8)*(dx^2+dy^2)/D
Ntest = tt/dtest+1
pause()

x=(0:dx:Lx)';
y=(0:dy:Ly)';

h0=100;
h = h0*ones(Nx,Ny);
ht = h0*ones(Nx,Ny,Nt);

%Termo fonte:

F = 0;

%Condição inicial:

%   for i=1:Nx
%   %
%       for j=1:Ny
%   %
%   %           %if i>=(Nx+1)/2-2 && i<=(Nx+1)/2+2 && j>=(Ny+1)/2-2 &&
j<=(Ny+1)/2+2
%   %
%   %           h(i,j) = 140+x(i,1).*(100-140)/Lx;%h0;
%   %
%   %           %end
%   %       end
%   %   end

hh = h;
ht(:,:,1) = h;

[X, Y] = meshgrid(linspace(0,Lx,Nx),linspace(0,Ly,Ny));
%U = reshape(x, NJ, NI);

mesh(X',Y',h,'FaceColor','blue','EdgeColor','none')
camlight left; lighting phong
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')
pause()

n=1;

for t=dt:dt:tt
n=n+1
%Condições de Contorno:

%   h(1,:) = 140;%h(2,:);
%   h(Nx,:) = 100;%h(Nx-1,:);
%   h(:,1) = 140+x.*(100-140)/Lx;%h(:,2);
%   h(:,Ny) = 140+x.*(100-140)/Lx;%h(:,Nz-1);
%
%   hh(1,:) = 140;%hh(2,:);

```

```

%      hh(Nx,:) = 100;%hh(Nx-1,:);
%      hh(:,1) = 140+x.*(100-140)/Lx;%hh(:,2);
%      hh(:,Ny) = 140+x.*(100-140)/Lx;%hh(:,Nz-1);

for i=2:Nx-1
    x(i,1)=(i-1)*dx;
    for j=2:Ny-1
        y(j,1)=(j-1)*dy;

        %if i>=(Nx+1)/2-4 && i<=(Nx+1)/2+4 && j>=(Ny+1)/2-4 &&
j<=(Ny+1)/2+4
        if i == 9 && j==9

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;
%
        else if i==19 && j==9

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==30 && j==35

            F=-Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==30 && j==25

            F=+Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==9 && j==29

            F=0;%Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

        else if i==19 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

```

```

        else if i==29 && j==29

            F=0;%-Q/(S*dx*dy);

%            hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%            h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

            else

                F=0;

%                hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
%                h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

                    end
                    end
                    end
                    end
                    end
                    end

            end

                hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+...
                h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-
2*h(i,j)+h(i,j+1))/(dy^2))+F*dt;

                    end
                    end

            h=hh;
            ht(:, :, n) = h;
end

K=1;
for n=1:10:Nt
    t=(n-1)*dt;
    [DX,DY]=gradient(ht(:, :, n),dx,dy);
    contourf(X,Y,ht(:, :, n));
    colorbar
    hold on
    quiver(X,Y,-K*DX,-K*DY)
    xlim([0 Lx])
    ylim([0 Ly])
    title(['t = ',num2str(t./86400), 'dia'])
    axis equal
    %pause()
    M=getframe;
end

op1=0;
op2=0;

if op1==1

hmax=max(max(max(ht)));
hmin=min(min(min(ht)));
    % mov=avifile('teste_f.avi')
    for n=1:100:Nt
        t=(n-1)*dt;

```

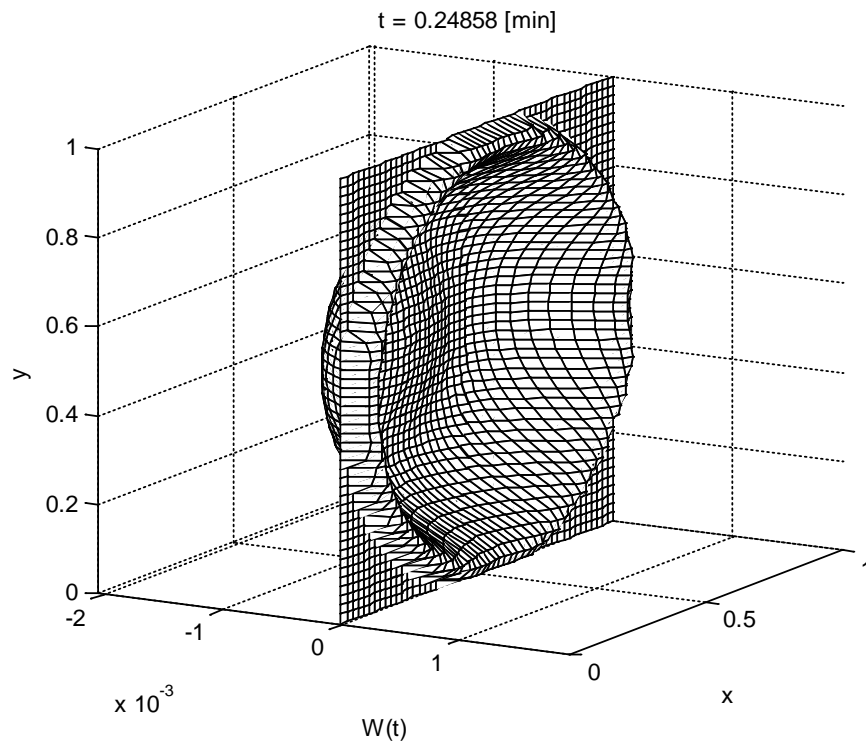
```
mesh(X',Y',ht(:,:,n),'FaceColor','blue','EdgeColor','none')
camlight left; lighting phong
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')

zlim([hmin hmax])
xlim([0 Lx])
ylim([0 Ly])

view(-50,25)
alpha(.9)
%zlim([0 100])
title(['t = ',num2str(t)/86400,'dia'])
pause()
%axis equal
M=getframe;
%mov=addframe(mov, M);
end
%   mov=close(mov);
end
```


CAPÍTULO 7

PROBLEMAS ESPECIAIS



Perfil de velocidades em escoamento transitório.

Introdução

Exercícios em diferentes níveis foram selecionados e discutidos neste capítulo. Eles representam avanços nos estudos, em um primeiro contato, pela introdução a temas de interesse prático imediato, como os projetos de bacias de detenção, bacias de detenção e canais de sistemas extravasores; em seguida, uma introdução à mecânica dos fluidos computacional explora perfis de velocidades completamente desenvolvidos (sem efeitos advectivos) em regime permanente e não permanente. Com esse exercício são analisados detalhes de escoamentos variáveis não vistos com a formulação unidimensional do capítulo 3.

Problema 7.1 – Esvaziamento de um reservatório

O problema de esvaziamento de um reservatório pode ser modelado com as leis físicas básicas escritas para volumes de controle e com as equações para o cálculo de perdas de carga distribuídas e localizadas. Pode-se incluir também modelos resultantes da aplicação da equação de Bernoulli com correções experimentais para representar escoamentos através de orifícios e vertedores, estruturas empregadas como saídas de alguns reservatórios. Em um ponto de vista didático, este problema permite ao estudante trabalhar com fundamentos simples de métodos numéricos no ambiente hidráulico. Adiciona-se à análise numérica a realização de experimentos de execução relativamente simples, permitindo ao aluno percorrer grande parte do ciclo do método científico, reunindo teoria e experimentação.

Modelar matematicamente o esvaziamento de um reservatório também interessa à prática da Engenharia Hidráulica em algumas aplicações, como, por exemplo: (1) Esvaziamento de um reservatório de instalação predial ou industrial para realização de manutenção ou limpeza, por exemplo; (2) esvaziamento de um reservatório formado pela construção de uma barragem. Neste caso, deve-se observar que o enchimento do reservatório deve ocorrer acompanhado de inspeções que podem demorar semanas. A identificação de qualquer falha que exija o esvaziamento parcial colocará em operação a descarga de fundo para realização desta tarefa, ilustrando assim mais uma aplicação do problema básico de esvaziamento de reservatórios; (3) entre possíveis medidas estruturais para combate às enchentes, está a bacia de detenção. Durante a passagem de uma onda de cheia, um grande reservatório construído no curso da onda, a referida bacia, deve ser capaz de reduzir a vazão máxima a um valor compatível com a capacidade do canal localizado a jusante. A bacia de detenção possui estruturas hidráulicas de saída, como

orifícios, tubulações e vertedores, sendo, portanto, mais um reservatório que requer a análise de esvaziamento.

Uma breve revisão dos fundamentos relacionados à conservação de massa.

A forma integral da equação de conservação de massa aplicada a um volume de controle, equação 12, é parte do conjunto de equações necessário para modelar o problema de esvaziamento de um reservatório.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\text{Vol}} \rho d\text{Vol} + \oiint_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0, \quad (1)$$

em que, t = tempo, ρ = massa específica, Vol = volume de controle, \vec{V} é a velocidade (absoluta) do fluido em escoamento através da superfície de controle, \vec{n} é o vetor unitário sobre a superfície de controle e orientado para fora do volume de controle e A é a superfície de controle. Em palavras, esta equação representa: a taxa de variação temporal da massa de fluido dentro do volume de controle somada à taxa resultante da passagem de massa através de toda a superfície de controle é igual a zero.

Para um volume de controle fixo e indeformável, a condição de escoamento incompressível simplifica a equação 1 para a seguinte forma:

$$\oiint_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2)$$

Para $\frac{d}{dt} \iiint_{\text{Vol}} \rho d\text{Vol} = \rho \frac{d}{dt} \iiint_{\text{Vol}} d\text{Vol} = 0$

A velocidade absoluta deve ser substituída pela velocidade relativa, como apresentado a seguir, para que a formulação seja válida para um volume de controle móvel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \iiint_{\text{Vol}} \rho d\text{Vol} + \oiint_A \rho \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = 0 \\ \vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_A \end{array} \right. \quad (3)$$

Nesta equação, “r” indica que a velocidade é relativa e o subscrito “A” denota a velocidade com a qual se move a superfície de controle. Quando o volume de controle sofre deformações, como quando a superfície livre desce em um esvaziamento de reservatório, a massa específica da água

permanece constante para a maior parte dos problemas, caracterizando assim a incompressibilidade. Este caso particular é escrito matematicamente como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \iiint_{\text{Vol}} d\text{Vol} + \iint_A \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = 0 \\ \vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_A \end{cases} . \quad (4)$$

Observe agora a Figura 1. Para um volume de controle que corresponda ao volume de água no interior do reservatório, a única superfície deformável é a superfície livre. Sendo assim, a equação 4 pode ser simplificada para o seguinte modelo (observando-se que a integral de $d\text{Vol}$ é igual ao volume, Vol):

$$\begin{cases} \vec{V}_{\text{superfície}} = \vec{V} - \vec{V}_{\text{superfície}} = 0 \\ \vec{V}_{\text{saída}} = \vec{V} - \vec{V}_{\text{superfície}} = \vec{V} \end{cases}$$

$$\frac{d\text{Vol}}{dt} + \iint_A \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = \frac{d\text{Vol}}{dt} + 0 + \iint_{A_{\text{saída}}} V_s \cos 0^\circ dA = 0 . .$$

$$\frac{d\text{Vol}}{dt} = -Q_s , \quad (5)$$

em que, $Q_s = \iint_{A_{\text{saída}}} V_s dA$, isto é, a vazão efluente.

A solução numérica proposta neste problema é para um reservatório prismático, ou seja, um reservatório com $\text{Vol} = A_R h$, sendo A_R a área da superfície livre, considerada uniforme e $h = z_1 - z_2$. Com essa restrição, a equação 5 assume a seguinte forma:

$$A_R \frac{dh}{dt} = -Q_s . \quad (6)$$

Resta calcular a vazão Q_s .

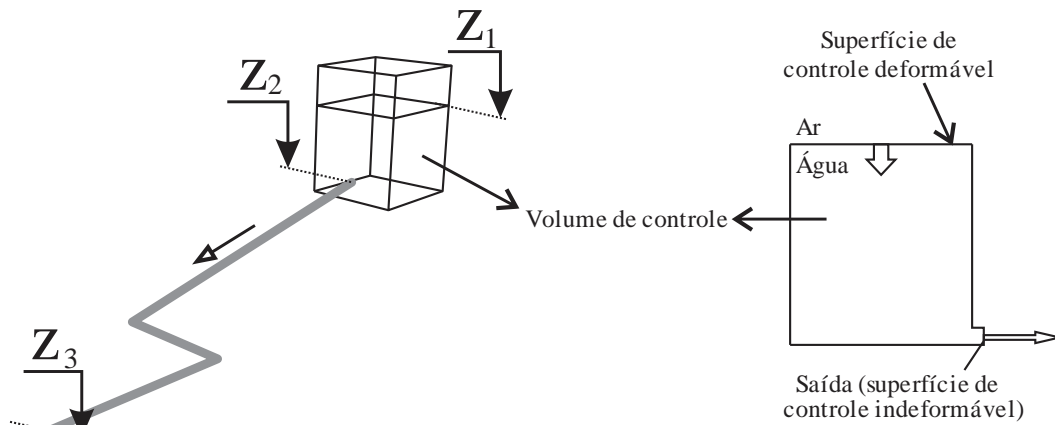


Figura 1 – Reservatório de nível variável

Como calcular Q_s

O reservatório apresentado na Figura 1 possui uma tubulação conectada a ele. Essa tubulação tem a sua extremidade final com saída livre em uma cota z_3 diferente da cota z_2 , como indicado no esboço. Sobre a superfície livre da água no reservatório e no interior do jato imediatamente fora do conduto atua a pressão atmosférica. Desprezando a aceleração local, a formulação “semelhante” à equação da energia pertencente ao modelo rígido apresentado no capítulo 3 pode ser aplicada ao volume de controle entre as seções 1 e 3:

$$z_1 - \left(z_3 + \frac{V_3^2}{2g} \right) = \Delta H_{13}. \quad (7)$$

Empregando a equação de Darcy-Weisbach e o modelo clássico para perda de carga localizada, com n singularidades, a equação 7 pode ser reescrita com a seguinte forma (em termos da vazão):

$$z_1 - z_3 = \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K \right) + \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5}. \quad (8)$$

Ao tentar resolver a equação 8 para a vazão, considerando o escoamento turbulento, o leitor encontrará o número de Reynolds (que é função da vazão) em um logaritmo, condição matemática que dificulta a obtenção de uma formulação explícita. Em uma situação mais geral em relação aos problemas frequentes da hidráulica, o coeficiente K de perda localizada pode ser função do número de Reynolds também. Deste modo, visando o desenvolvimento de um método que inclua a função fator de “atrito” válida para o escoamento laminar e turbulento,

percebe-se a necessidade de uso de um esquema numérico para a solução do problema de esvaziamento. O uso de um f constante ou avaliado com o f inicial e final, ou até mesmo o uso de uma equação de resistência mais simples, como a de Hazen-Williams, pode resultar em valores aceitáveis para alguns propósitos práticos da engenharia. Entretanto, uma observação cuidadosa do problema revela que o escoamento submetido a elevada carga hidráulica certamente será turbulento. Em seguida, quando há diminuição expressiva no valor da velocidade, ele assumirá características internas de um escoamento laminar (tendo passado pelo estado de transição à turbulência). Finalmente, a depender da configuração da tomada d'água feita no reservatório, pode-se observar um escoamento que ocorre com a formação de gotas.

Métodos numéricos

Para desenvolvimento do algoritmo, escreve-se, a partir da equação 8,

$$Q = Q_s = \sqrt{\frac{h + z_2 - z_3}{\frac{8}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K + \frac{fL}{D} \right)}}. \quad (9)$$

Substituindo a equação 9 na equação 6, é obtida uma EDO de primeira ordem e não linear (equação 10).

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{A_R} \sqrt{\frac{h + z_2 - z_3}{\frac{8}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K + \frac{fL}{D} \right)}}. \quad (10)$$

O método de Euler ou método de Runge-Kutta de primeira ordem transforma a equação 10 na equação 11, uma forma discreta que é resolvida numericamente com a planilha elaborada para este problema.

$$h_{i+1} = h_i - \frac{\Delta t}{A_R} \sqrt{\frac{h_i + z_2 - z_3}{\frac{8}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K + \frac{f_i L}{D} \right)}}. \quad (11)$$

Com base nos dados a seguir, resolva a equação diferencial 11 e a equação algébrica 8, necessária para solução do problema implícito. Calcule o tempo de esvaziamento e discuta a solução com apresentação gráfica das relações entre variáveis relevantes do fenômeno físico.

Dados									
A_R	$z_1(0)$	z_2	z_3	D	L	g	ν	ε	ΣK
[m ²]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m/s ²]	[m ² /s]	[m]	[-]
9	15	6	5,95	0,0278	600	9,8	0,000001	0,00015	2,5

Solução

Como exposto anteriormente, o modelo matemático para o problema é:

$$z_1 - z_3 = \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K \right) + \frac{8fLQ^2}{g\pi^2 D^5} \quad (8)$$

$$h_{i+1} = h_i - \frac{\Delta t}{A_R} \sqrt{\frac{h_i + z_2 - z_3}{\frac{8}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K + \frac{f_i L}{D} \right)}} \quad (11)$$

Conhecidos os valores iniciais, pode-se calcular a vazão com a solução numérica da equação 8. Foi adotada a equação de Swamee válida para escoamento laminar e turbulento, equação apresentada no capítulo 1. Com o cálculo da vazão, calcula-se o fator de cisalhamento e h_{i+1} (com a equação 11) para o Δt escolhido. Esse procedimento, se realizado à mão, será lento e impreciso, sobretudo porque o método de Euler é de primeira ordem e exige Δt relativamente pequeno para obtenção de resultados razoáveis. Deste modo, foi elaborada uma planilha que resolve o problema com auxílio do solver. A Figura 2 contém um trecho desta planilha elaborada. A primeira coluna contém o contador i , a segunda o tempo t e a terceira a profundidade h . Para $i = 1$, $t = 0$, ou seja, temos a condição inicial fornecida. As demais colunas da planilha foram organizadas para o cálculo da vazão vinculado a h_i . Este cálculo requer o uso do solver. Quando concluído o processo iterativo, $F(Q)$ deve ser suficientemente pequeno, como indicado. Apenas após a referida conclusão é que h_{i+1} poderá ser avaliado.

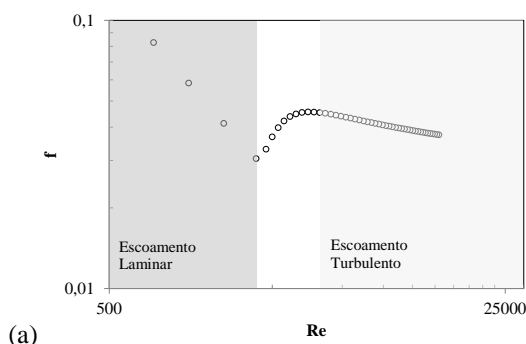
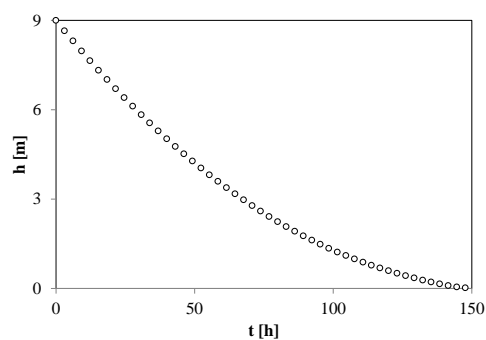
Solução numérica										
i	t	h_i	Q_{si}	V_{si}	Re_i	f_i	$V^2/(2g)$	h_{fi}	h_{Li}	F(Q)=0
[-]	[s]	[m]	[m ³ /s]	[m/s]			[m]	[m]	[m]	
1	0	9	0,00028	0,46789	13007,2	0,03738	0,011169	9,01091	0,02792	3,8E-15
2	11074,7	8,65053	0,00028	0,45812	12735,8	0,03749	0,010708	8,66305	0,02677	1,7E-11
3	22149,3	8,30836	0,00027	0,44838	12464,8	0,03759	0,010257	8,32246	0,02564	3E-11

Figura 2 – Trecho da planilha desenvolvida

Para tornar os cálculos mais rápidos, pode-se fazer uso de restrições, resolvendo o sistema não linear ao invés de apenas uma equação algébrica por vez. Nesta solução, propõe-se o seguinte método computacional:

- 1) Em “Definir objetivo”, escolha a primeira célula com $F(Q) = 0$;
- 2) As demais células com $F(Q)=0$ devem fazer parte do conjunto de restrições;
- 3) A segunda restrição garante que os valores de h serão maiores ou iguais a zero;
- 4) Deve-se pensar agora em Δt e no último valor de h . Para tanto, Δt passou a fazer parte das células variáveis, junto às vazões e o último valor de h passou a fazer parte das restrições, com $h(T) = 0$, sendo T o tempo de esvaziamento. Deste modo, o cálculo é realizado para o número de células escolhido (número de nós do eixo temporal).

Os resultados sob a forma de gráficos podem ser vistos na Figura 3. Nota-se que h assume um valor muito próximo de zero em $t = 150$ h (aproximadamente 6,3 dias). A Figura 3b ilustra a relação entre f e Re para o domínio desta solução. Percebe-se claramente a ocorrência dos escoamentos laminar e turbulento (note que a escala é log-log nesta figura). Os resultados ilustrados na Figura 3c indicam os valores de Re próximos daqueles relativos às mudanças de regimes (normalmente adotados para o regime permanente). Com auxílio da planilha, observe que a perda de carga localizada para as condições estudadas é muito menor que a perda de carga distribuída. Além disto, deve-se destacar que para baixos números de Reynolds, os valores de K passam a depender desse adimensional.



(a)

(b)

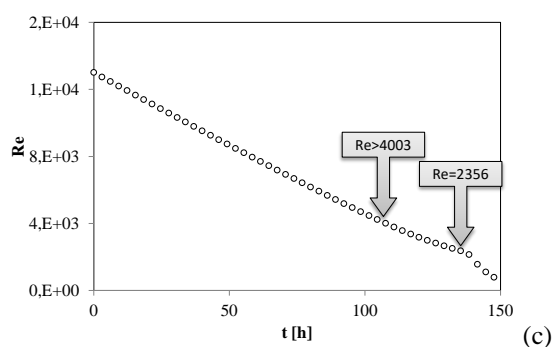


Figura 3 – Solução do problema 7.1

Para pensar.

Como resolver o problema anterior com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem? Veja a resposta na pasta deste capítulo, na planilha do problema 7. Observe que o algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem é:

$$k_1 = F(t_i, h_i)$$

$$k_2 = F\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, h_i + \frac{k_1 \Delta t}{2}\right)$$

$$k_3 = F\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, h_i + \frac{k_2 \Delta t}{2}\right)$$

$$k_4 = F(t_i + \Delta t, h_i + k_3 \Delta t)$$

$$\text{, em que } F(t, h) = -\frac{1}{A_R} \sqrt{\frac{h + z_2 - z_3}{\frac{8}{g\pi^2 D^4} \left(1 + \sum_{i=1}^n K + \frac{fL}{D}\right)}}$$

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

A Figura 4 ilustra uma comparação entre os métodos.

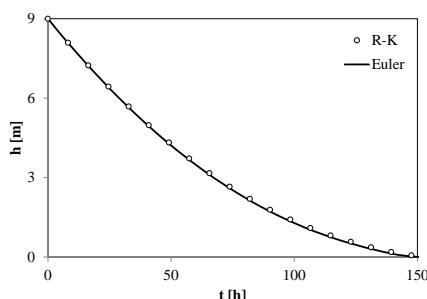


Figura 4 – Comparação entre os resultados calculados com Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem

Problema 7.2 – Código para análise de bacias de detenção

O crescimento de áreas impermeáveis em meios urbanos reduz a infiltração e tem o potencial de aumentar as vazões que escoam superficialmente. Uma consequência de tal elevação é a ocorrência de inundações e seus efeitos (como: danos à rede pública de abastecimento de água e coleta de esgoto; danos aos imóveis; prejuízos ao transporte; aumento da disseminação de doenças). Nesse contexto, duas intervenções estruturais podem ser citadas: (1) Canalização; (2) Contenção. A primeira opção tem como resultado o afastamento rápido das vazões máximas devido ao aumento da velocidade de escoamento e causa significativa interferência no meio

urbano. A construção de reservatórios para detenção tem interferência relativamente localizada e reduz a vazão máxima.

O reservatório pode ser construído no curso principal do sistema de drenagem ou situado ao lado. Considerando ainda possíveis classificações, Welsh (1989) e ASCE (1989) definiram as bacias de detenção, as bacias de retenção e as bacias de sedimentação. As primeiras permanecem vazias na estiagem. As bacias de retenção são reservatórios com volume permanente de água para fins paisagísticos e de recreação. As bacias de sedimentação devem reter detritos e/ou absorver poluentes incorporados aos escoamentos superficiais.

Este problema tem como objetivo elaborar um método computacional para o cálculo de características relevantes de uma bacia de detenção, como o seu volume, a sua altura e o hidrograma efluente. Considere um reservatório com entradas e saídas, como aquele da Figura 5. A superfície livre da água é a única superfície de controle deformável. Sendo assim, seguindo a análise realizada no problema anterior, a partir da equação 4, demonstra-se que:

$$\frac{dVol}{dt} = Q_e - Q_s, \quad (12)$$

em que Q_e = soma das vazões através das entradas do volume de controle; Q_s = soma das vazões através das saídas do volume de controle.

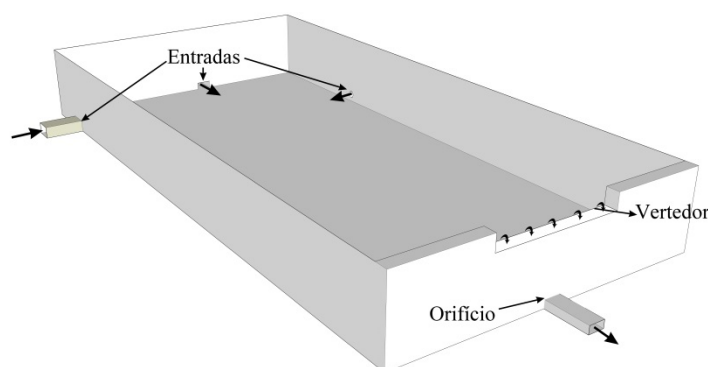


Figura 5 – Esboço de um reservatório de detenção com entradas e saídas

A Figura 5 ilustra uma bacia de detenção com um orifício localizado junto ao fundo e um vertedor retangular de parede delgada na mesma parede. A variação da vazão ao longo da altura do orifício pode ocorrer, condição que origina a teoria dos grandes orifícios. Desprezando esse efeito, a formulação matemática empregada aqui é aquela correspondente aos orifícios de pequenas dimensões:

$$\begin{cases} Q_o = 0, & \text{se } h < a, \\ Q_o = C_{do} A_o \sqrt{2g(h - a/2)}, & \text{se } h \geq a, \end{cases} \quad (13)$$

em que, Q_o é a vazão através do orifício, h a altura de escoamento na bacia de detenção, a = altura do orifício retangular (ver Figura 6), C_{do} é o coeficiente de vazão do orifício, A_o = área da seção do orifício e g a aceleração devido à gravidade.

O vertedor retangular de parede delgada é modelado com a seguinte formulação:

$$\begin{cases} Q_v = \frac{2}{3} C_{dv} \sqrt{2g} L_v h_v^{3/2}, & \text{se } h \geq P, \\ Q_v = 0, & \text{se } h < P. \end{cases} \quad (14)$$

Nesta equação, Q_v é a vazão escoada pelo vertedor, C_{dv} é o coeficiente de vazão do vertedor (adimensional), L_v é a largura da soleira, $h_v = h - P$ é a carga hidráulica sobre a soleira e P = altura do vertedor (ver Figura 6).

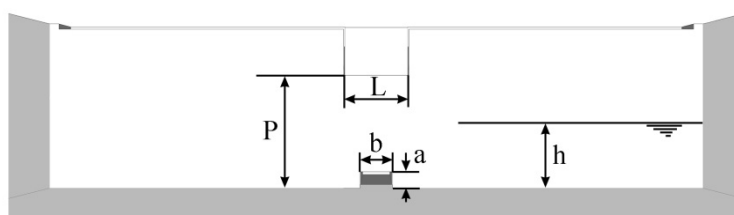


Figura 6 – Definições

As deduções das equações 13 e 14 podem ser vistas em Porto (2006). Observe que a carga hidráulica sobre o orifício é definida como a profundidade desde a superfície livre ao centroide do orifício. Deste modo, embora o escoamento através do orifício seja iniciado para $h < a$, a formulação matemática deve ser empregada para a condição indicada na equação 13. Destaca-se também que o orifício junto ao fundo deve ter o seu coeficiente de vazão corrigido. Os coeficientes de vazão do orifício e do vertedor são funções de adimensionais que envolvem as cargas hidráulicas e as dimensões da estrutura. Neste exemplo, essas grandezas serão consideradas como constantes.

Neste estágio, resta definir o hidrograma afluente, tarefa que pode ser realizada com o uso de tabelas ou funções aproximadas. A utilização do hidrograma no código pode ser feita

com o uso de interpolação linear para compatibilização com o espaçamento adotado para o eixo temporal. Para solução deste problema, foi empregado o seguinte hidrograma:

Tabela 1 – Vazão afluente: Problema 7.2

Q_e [m ³ /s]	0,00	1,40	4,00	20,07	22,90	43,00	32,55	27,51	20,04
	12,69	11,14	8,65	6,78	5,62	3,96	2,48	1,71	1,16
t [s]	0,00	971,09	1199,25	1786,35	2086,60	2760,00	3420,06	3758,32	4209,82
	4805,74	5043,19	5406,04	5781,63	6012,24	6604,44	7209,66	7807,80	8392,68

Fonte: Adaptado de Canholi (1995).

Os dados da Tabela 1 correspondem ao reservatório localizado na Praça Charles Miller, em São Paulo. Para solução deste problema, considere também os seguintes dados: $a = 0,5$ m, $b = 1,0$ m, $C_{do} = 0,65$; $L_v = 2,0$ m, $C_{dv} = 0,728$, $P = 4,65$ m; a bacia de detenção é prismática e com área em planta igual a 12.250 m².

Solução numérica da EDO

Propõe-se aqui resolver a equação 12 com o método de Runge-Kutta de quinta ordem de Butcher (1964, 2003, p. 92), também apresentado em Chapra e Canale (2006, p.709). Trata-se de um esquema numérico com seis estágios com a forma apresentada a seguir (equação 15). Para o problema da bacia de detenção, a função $F(t,h)$ é dada pela equação 16 (deduzida da equação 12 para um reservatório prismático).

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{k+1} = h_k + \frac{\Delta t}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \\ k_1 = F(t_k, h_k) \\ k_2 = F\left(t_k + \frac{1}{4}\Delta t, h_k + \frac{1}{4}k_1\Delta t\right) \\ k_3 = F\left(t_k + \frac{1}{4}\Delta t, h_k + \frac{1}{8}k_1\Delta t + \frac{1}{8}k_2\Delta t\right) \\ k_4 = F\left(t_k + \frac{1}{2}\Delta t, h_k - \frac{1}{2}k_2\Delta t + k_3\Delta t\right) \\ k_5 = F\left(t_k + \frac{3}{4}\Delta t, h_k + \frac{3}{16}k_1\Delta t + \frac{9}{16}k_4\Delta t\right) \\ k_6 = F\left(t_k + \Delta t, h_k - \frac{3}{7}k_1\Delta t + \frac{2}{7}k_2\Delta t + \frac{12}{7}k_3\Delta t - \frac{12}{7}k_4\Delta t + \frac{8}{7}k_5\Delta t\right) \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\frac{dh}{dt} = F(t, h) = \frac{Q_e - Q_s}{A_R} \quad (16)$$

Com base na discussão exposta e nos dados fornecidos, escreva um código para calcular $h(t)$ e as grandezas vinculadas a $h(t)$, como as vazões e o volume do reservatório. O código deve resolver a EDO com o método de Runge-Kutta de 5ª ordem e com o método de Euler (Runge-Kutta de 1ª ordem).

Solução

A solução deste problema é apresentada na Tabela 2, que contém o código escrito para resolver a EDO com os métodos numéricos propostos. Os comentários sobre os trechos do programa foram escritos ao longo de sua estrutura, após o símbolo %, como nos capítulos anteriores.

Como pode ser observado na Figura 7a, o método de interpolação adotado produz excelente aproximação para o hidrograma afluente, sem a introdução de mínimos ou máximos espúrios entre os pontos originais. Os resultados entre os métodos numéricos apresentam diferenças visíveis, como ilustrado nas demais figuras, com diferença de 14 cm para o valor máximo de h (Figura 7b), diferença igual a 1,13 m³/s entre vazões máximas efluentes com tempos de pico diferentes também (Figura 7c). A Figura 7d mostra a variação do volume em função do tempo, também com resultados ligeiramente diferentes, percentualmente igual à encontrada para os máximos de h uma vez que $\text{Volume} = h \cdot A_R$.

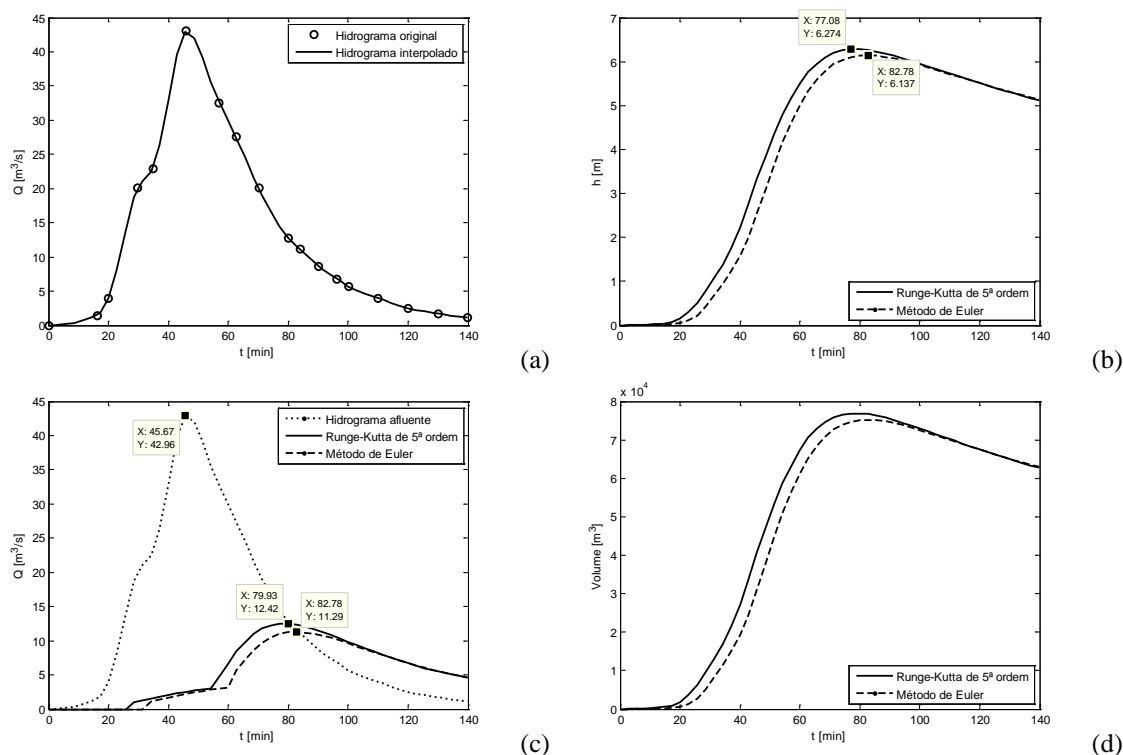


Figura 7 – Cálculos realizados para $Nt = 50$ ($\Delta t = 171,2792$ s): (a) Esta imagem ilustra o resultado da interpolação; (b) h em função do tempo; (c) Hidrograma afluente e hidrograma efluentes calculados com os dois métodos indicados; (d) variação do volume com o tempo

Os resultados da Figura 7 foram obtidos com $\Delta t = 171,2792$ s, com $Nt = 50$. O refinamento da malha para $Nt = 1000$ ($\Delta t = 8,4011$ s) não representa aumento importante no custo computacional e produz uma redução expressiva nas diferenças entre os valores máximos calculados com os dois métodos. Como exemplos, menciona-se que os máximos valores de h passam a se distanciar em apenas 7 mm e as vazões máximas em $0,0593$ m³/s. Adicionalmente, cabe ressaltar que esse refinamento não modifica de forma significativa o resultados anterior calculado com o método de Runge-Kutta de 5ª ordem devido à sua elevada ordem de convergência. A vazão máxima efluente, por exemplo, passa de $12,42$ m³/s para $12,43$ m³/s, uma diferença simplesmente numérica.

Algumas observações sobre a interpretação dos resultados devem ser destacadas:

- 1) A vazão de entrada, Q_e , permanece maior que a vazão total de saída, Q_s , até o instante ($t_{ps} = 79,93$ min, considerando o método de Runge-Kutta) em que estas duas vazões são igualadas (veja a Figura 7c). Nesse intervalo temporal há o enchimento do reservatório (veja a Figura 7d).
- 2) Para $t > t_{ps}$, ocorre $Q_s > Q_e$, isto é, a vazão total de saída passa a ser maior que a vazão de entrada. O esvaziamento do reservatório acontece para $t > t_{ps}$.
- 3) Como consequência das observações 1 e 2, conclui-se que o volume máximo ocorrerá para $t = t_{ps}$. Matematicamente, se $Q_e = Q_s$, $dVol/dt = 0$, resultado que indica o ponto de máximo da função $Vol = Vol(t)$.
- 4) O cálculo do volume máximo pode ser realizado de forma simples com o gráfico da Figura 7d. De outro modo, empregando os hidrogramas, o cálculo do volume máximo pode ser feito com a seguinte integração (ver destaque na Figura 8):

$$\max(Vol) = \int_0^{t_{ps}} Q_e(t) dt - \int_0^{t_{ps}} Q_s(t) dt .$$
- 5) No código desenvolvido, a integração anterior foi realizada com o método dos trapézios e com o método dos retângulos. O erro entre os resultados obtidos com esses métodos diminui com o refinamento da malha.
- 6) Uma síntese das conclusões precedentes é obtida com a exibição simultânea das curvas de $Q_e(t)$, $Q_s(t)$ e $Vol(t)$, como na Figura 8.

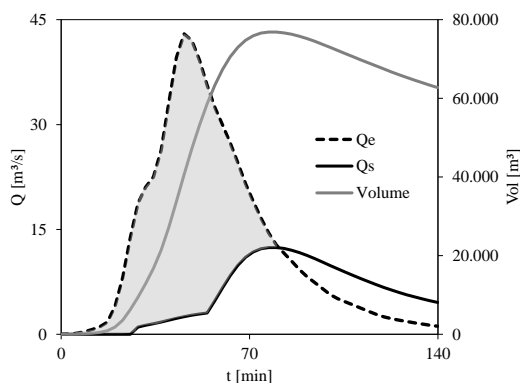


Figura 8 – Hidrograma de entrada, hidrograma de saída e relação com Vol(t)

Tabela 2 – Código para solução do problema 7.2 – Runge-Kutta de 5ª ordem

```
%Código para solução da equação de conservação de massa para uma bacia de
%detenção. Métodos numéricos: Runge-Kutta de 1ª (Euler) e 5ª ordens.

%MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM HIDRÁULICA
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz e Rodrigo de Melo Porto.
clear all

Qe1 = [0.00; 1.40; 4.00; 20.07; 22.90; 43.00; 32.55; 27.51;...
20.04; 12.69; 11.14; 8.65; 6.78; 5.62; 3.96; 2.48; 1.71; 1.16];
%Vazões do hidrograma de entrada 1 (dados de Canholi, A.P. (2005, p.209).

%Drenagem Urbana e Controle de Enchentes. Oficina de Textos. Referente
%ao projeto do Reservatório da Av. Pacaembu).

tempo=[0.00; 971.09; 1199.25; 1786.35; 2086.60; 2760.00;...
3420.06; 3758.32; 4209.82; 4805.74; 5043.19; 5406.04;...
5781.63; 6012.24; 6604.44; 7209.66; 7807.80; 8392.68];
%Instantes correspondentes às vazões Q

[a1,a2] = size(tempo);

tt = tempo(a1,1);
%Tempo total em [s]
Nt = 50;
%Número de nós da malha temporal
dt = tt/(Nt-1);

g=9.8;
h0 = 0.0;

%Para uso com R-K de 5ª ordem:
h = zeros(Nt,1);
%Vetor com as profundidades (bacia de detenção)
h(1,1) = h0;
%valor inicial
Qo = zeros(Nt,1);
Qv = zeros(Nt,1);

%Para uso com o método de Euler:
hEuler = zeros(Nt,1);
hEuler(1,1) = h0;
QoEuler = zeros(Nt,1);
```

```

QvEuler = zeros(Nt,1);

plot(tempo/60, Qe1) %Hidrograma original
xlabel('t [min]')
ylabel('Q [m^3/s]')
legend('Hidrograma original');
pause()

tint=linspace(0,tt,Nt);
%É gerada uma malha com número de nós igual a Nt e de 0 a tt, tint.
Qelint=interp1(tempo,Qe1(:,1),tint,'pchip');
%spline (não é adequado), pchip (Hermite cúbico é uma opção melhor).
Qelint=Qelint';%Cálculo da transposta.

%Novas interpolações para uso do método de Runge-Kutta de 5a ordem
%com as vazões de entrada armazenadas em um vetor. Observe que o método
%requer a realização de cálculos em t+(1/4)dt; t+(1/2)dt e t+(3/4)dt.

dt14=dt/4;
Nt14=tt/dt14+1;
tint14=linspace(0,tt,Nt14);
Qelint14=interp1(tint,Qelint(:,1),tint14,'pchip');
Qelint14=Qelint14';

dt12=dt/2;
Nt12=tt/dt12+1;
tint12=linspace(0,tt,Nt12);
Qelint12=interp1(tint,Qelint(:,1),tint12,'pchip');
Qelint12=Qelint12';

ni = 10000; %ni é um fator de redução para dt3 que pode melhorar
%a aproximação, para malhas pouco refinadas, para k5 cujo cálculo
%requer o cálculo da vazão em t+(3/4)dt

dt34=dt*(3/4)/ni;
Nt34=tt/dt34+1;
tint34=linspace(0,tt,Nt34);
Qelint34=interp1(tint,Qelint(:,1),tint34,'pchip');
Qelint34=Qelint34';

plot(tempo/60, Qe1, 'o', tint/60, Qelint, '-')
xlabel('t [min]')
ylabel('Q [m^3/s]')
legend('Hidrograma original', 'Hidrograma interpolado');
pause()

%%%%%%%%%%%% Estruturas Hidráulicas de saída %%%%%%%%%%%%%%

%Orifício retangular junto ao fundo:

a = 0.5;
b = 1.0;
Ao = a*b;
Cdo = 0.65;

%Vertedor de parede delgada:

Lv = 2.0;
Cdv = 0.728;
P = 4.65;

```

```

%%%%%%%%%%%% Geometria do reservatório %%%%%%%%%%%%%
Ar = 12250;
%Área do reservatório (em planta) [m²]

%PROCESSAMENTO:

k=1;
t14=0; t12=0; t34=0;
for t=dt:dt:tt

    %Decisão sobre os cálculos de Qo e Qv com base nas restrições
    %correspondentes:

    if (h(k,1))>a
        do=1;
    else
        do=0;
    end

    if h(k,1)>P
        dv = 1;
    else
        dv = 0;
    end

    %Cálculo da posição ("coordenadas") do elemento matricial de inte-
    resse na matriz de Q:
    t14=t+(1/4)*dt;
    teste14=abs(tint14-t14);
    [aa,n14]=min(teste14);

    t12=t+(1/2)*dt;
    teste12=abs(tint12-t12);
    [aa,n12]=min(teste12);

    %pause()

    t34=t+(3/4)*dt;
    teste34=abs(tint34-t34);
    [aa,n34]=min(teste34);

    %pause()

    k1 = (1/Ar)*(Qelint(k,1)-Qo(k,1)-Qv(k,1));

    %%%
    ho=do*((h(k,1)+(1/4)*k1*dt)-a/2);
    hv=dv*((h(k,1)+(1/4)*k1*dt)-P);

    k2 = (1/Ar)*(Qelint14(n14,1)-
    (Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5+(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2)));
    %%%
    %%%
    ho=do*((h(k,1)+(1/8)*k1*dt+(1/8)*k2*dt)-a/2);

```

```

hv=dv*((h(k,1)+(1/8)*k1*dt+(1/8)*k2*dt)-P);

k3 = (1/Ar)*(Qelint14(n14,1)-
(Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5+(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2)));
%%%
%%%
ho=do*((h(k,1)-(1/2)*k2*dt+k3*dt)-a/2);
hv=dv*((h(k,1)-(1/2)*k2*dt+k3*dt)-P);

k4 = (1/Ar)*(Qelint12(n12,1)-
(Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5+(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2)));
%%%
%%%
ho=do*((h(k,1)+(3/16)*k1*dt+(9/16)*k4*dt)-a/2);
hv=dv*((h(k,1)+(3/16)*k1*dt+(9/16)*k4*dt)-P);

k5 = (1/Ar)*(Qelint34(n34,1)-
(Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5+(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2)));
%%%
%%%
ho=do*((h(k,1)-(3/7)*k1*dt+(2/7)*k2*dt+(12/7)*k3*dt-
(12/7)*k4*dt+(8/7)*k5*dt)-a/2);
hv=dv*((h(k,1)-(3/7)*k1*dt+(2/7)*k2*dt+(12/7)*k3*dt-
(12/7)*k4*dt+(8/7)*k5*dt)-P);

k6 = (1/Ar)*(Qelint(k+1,1)-
(Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5+(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2)));
%%%
%%%

%Atualização (R-K 5ª ordem):

h(k+1,1)=h(k,1)+(dt/90)*(7*k1+32*k3+12*k4+32*k5+7*k6);

ho=do*(h(k+1,1)-a/2);
hv=dv*(h(k+1,1)-P);

Qo(k+1,1) = do*Cdo*Ao*(2*g*ho)^0.5;
Qv(k+1,1) = dv*(2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hv^(3/2);

%Método de Euler (Início):

if (hEuler(k,1))>a
    doEuler=1;
else
    doEuler=0;
end

if hEuler(k,1)>P
    dvEuler = 1;
else
    dvEuler = 0;
end

k1Euler = (1/Ar)*(Qelint(k,1)-QoEuler(k,1)-QvEuler(k,1));
hEuler(k+1,1)=hEuler(k,1)+dt*k1;

hoEuler=doEuler*(hEuler(k+1,1)-a/2);
hvEuler=dvEuler*(hEuler(k+1,1)-P);

QoEuler(k+1,1) = Cdo*Ao*(2*g*hoEuler)^0.5;
QvEuler(k+1,1) = (2/3)*Cdv*((2*g)^0.5)*Lv*hvEuler^(3/2);

```



```

    %Método de Euler (Fim).

    k=k+1

end

%PÓS-PROCESSAMENTO:

plot(tint/60,h,tint/60,hEuler)
xlabel('t [min]')
ylabel('h [m]')
legend('Runge-Kutta de 5ª ordem', 'Método de Euler',4);

pause()

Qt = Qo+Qv;
QtEuler=QoEuler+QvEuler;

[aa,bb]=max(Qt);

Volumel = trapz(tint(1,1:bb),Qelint(1:bb,1))-
trapz(tint(1,1:bb),Qt(1:bb,1))

Volume2 = dt*(sum(Qelint(1:bb,1))-sum(Qt(1:bb,1)))

%%Gráficos:
%1) Hidrogramas:

plot(tint/60, Qelint, tint/60, Qt, tint/60, QtEuler)
xlabel('t [min]')
ylabel('Q [m^3/s]')
legend('Hidrograma afluente', 'Runge-Kutta de 5ª ordem', 'Método de
Euler');
pause()

%Volume=f(t):

plot(tint/60, Ar.*h(:,1), tint/60, Ar.*hEuler(:,1))
xlabel('t [min]')
ylabel('Volume [m^3]')
legend('Runge-Kutta de 5ª ordem', 'Método de Euler',4);

```

Problema 7.3 – escoamento em um canal de um sistema extravasor

Os sistemas extravasores são empregados em estruturas hidráulicas de grande porte, como em reservatórios construídos para auxiliar o abastecimento de água em cidades e em barragens, sendo normalmente denominados, neste caso, como vertedores ou vertedouros. Reservatórios menores pertencentes a instalações prediais também possuem sistemas que possibilitem o escoamento seguro de eventuais excessos de água.

Tratando-se do sistema de uma barragem, que faz parte do escopo deste problema, devem ser destacadas as seguintes definições (ver Figura 9): O vertedor é um orifício de grandes dimensões sem a parte superior; o sistema extravasor pode ter um vertedor controlado por comportas ou um vertedor sem comportas (como ilustrado na Figura 9); a jusante do vertedor há um canal denominado “canal de queda” ou “rápido” ou simplesmente canal do sistema extravasor; o canal deve conduzir a água ao dissipador de energia, que pode ser uma bacia de dissipação por ressalto hidráulico ou uma concha de lançamento, por exemplo, como na Figura 9. Observe também que muros laterais são necessários ao longo da estrutura.

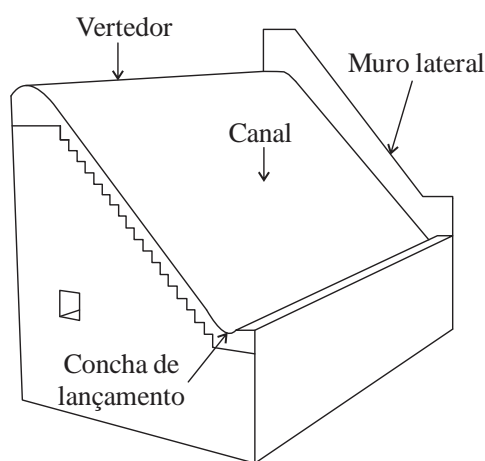


Figura 9 – Exemplo de um possível sistema extravasor

Este problema tem como objetivo calcular a altura de escoamento ao longo do vertedor e do canal do sistema extravasor. Admite-se que o escoamento ocorra em regime permanente, com distribuição de pressões hidrostática e como unidimensional. Essas simplificações podem conduzir a resultados aceitáveis para o cálculo da linha d’água, mas não representam o escoamento real, que é turbulento, tridimensional e com flutuações de pressão cujo conhecimento é importante para avaliar o risco de ocorrência de cavitação. Levando em conta as simplificações, o modelo matemático passa a ser a equação diferencial do escoamento permanente gradualmente variado, reescrita a seguir:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_0 - I_f}{\cos\theta - \alpha Fr^2} \quad (17)$$

Nesta equação, h é a altura de escoamento e x o eixo ao longo do canal; $I_0 = \text{sen}\theta$, sendo θ uma função de x para o trecho inicial, que é um vertedor de soleira espessa com uma forma definida a partir da linha d’água inferior de uma lâmina vertente através de um vertedor de parede delgada. (PORTO, 2006, cap. 12) Ao longo da história foram propostas algumas funções para o

cálculo da forma da estrutura, sendo possível encontrar propostas de Creager, Scimemi (mais conhecidas) e de outros autores. Empregando a equação de Scimemi, pode-se escrever a equação 18, com definições dadas na Figura 10.

$$Y = \frac{1}{2h_d^{0,85}} X^{1,85} = aX^n. \quad (18)$$

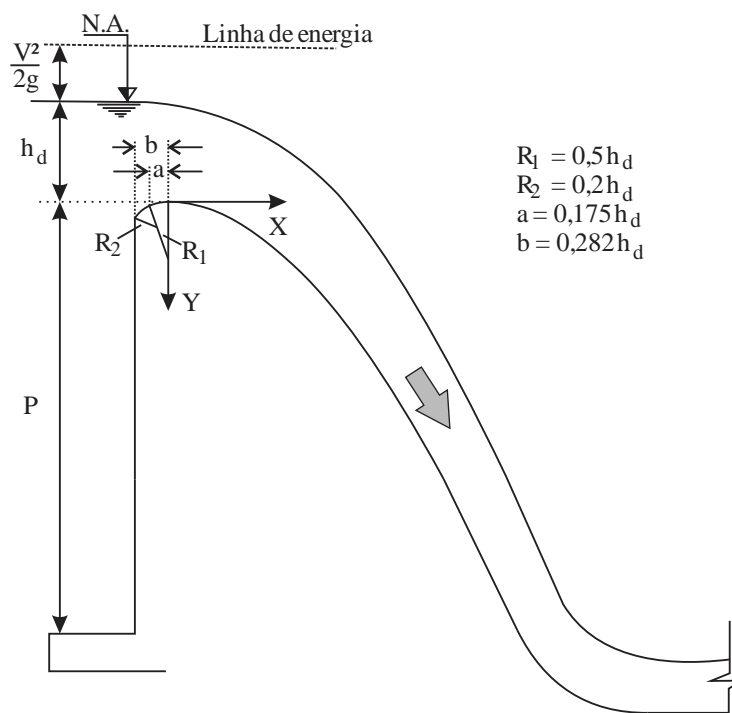


Figura 10 – Definições básicas

Fonte: Adaptado de U.S. Army Engineers Waterways Experiment Station.

A vazão específica de projeto (vazão por unidade de largura) está relacionada com a carga hidráulica a montante do vertedor por meio da seguinte equação

$$q_d = C_o H_o^{3/2}, \quad (19)$$

em que, $H_o = h_d + h_a$, h_d = carga de projeto, h_a = carga cinética de aproximação. C_o é o coeficiente de vazão, que pode ser calculado com a equação 20, resultado de um ajuste proposto por Simões (2012) aos dados publicados no conhecido livro *Design of Small Dams*. (ESTADOS UNIDOS, 1987, p. 370)

$$C_o = 1,661 + 0,509 \operatorname{tgh} \left[1,933 \left(\frac{P}{H_o} \right)^{0,639} \right], \text{ com unidades de acordo com o S.I.} \quad (20)$$

Combinando as equações 19 e 20:

$$q_d = \left\{ 1,661 + 0,509 \operatorname{tgh} \left[1,933 \left(\frac{P}{H_o} \right)^{0,639} \right] \right\} H_o^{3/2}. \quad (21)$$

A carga hidráulica total a montante pode ser escrita com a forma abaixo, lembrando que o canal de aproximação é retangular, com área molhada igual a $b(P+h_d)$.

$$H_o = h_d + h_a = h_d + \frac{Q^2}{2g[b(P+h_d)]^2} = h_d + \frac{h_c^3}{2(P+h_d)^2}. \quad (22)$$

Com a solução desse sistema de equações algébricas, determina-se h_d e, em seguida, o coeficiente “a” da equação 18 que permite o desenho do trecho de interesse do perfil do vertedor. Como “x” é um eixo intrínseco ao fundo do canal (segue o traçado do fundo, com origem no zero indicado na Figura 10), devem ser observadas as relações a seguir, que incluem o eixo horizontal “X” (definido na Figura 10).

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\theta = naX^{n-1} \therefore \theta = \operatorname{atg}(naX^{n-1}). \quad (23)$$

Note-se também que o cálculo de Δx é relacionado ao valor de ΔX por

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} \cong \cos \theta. \quad (24)$$

Com base no equacionamento apresentado e nos dados a seguir, desenvolva uma planilha para o cálculo de $h(x)$ com o método de Euler. Apresente os resultados em gráficos que ilustrem $h=h(x)$ e o fundo do canal com a linha d’água. Utilize a equação de Swamee para o cálculo do fator de cisalhamento e considere $\alpha = 1$.

Tabela 3 - Tabela com dados para o problema.

Q [m ³ /s]	b [m]	P [m]	g [m/s ²]	n	V:H [m/m]	θ_c [rad]	v [m ² /s]	ε [m]
400	40	30	9,8	1,85	1,25	0,89606	0,000001	0,0008

Nota: θ_c é o ângulo de fundo em relação a horizontal para o trecho com declividade constante.

Solução

O método de Euler aplicado à EDO deste problema transforma a equação original na seguinte forma discreta:

$$\begin{cases} h_{i+1} = h_i + \Delta x F(h_i) \\ F(h_i) = \left(\frac{I_o - I_f}{\cos \theta - \alpha Fr^2} \right)_i \end{cases} \quad (25)$$

Empregando as equações já estudadas (Darcy-Weisbach, Swamee e definição de Fr), pode-se elaborar a planilha sem dificuldades. Note que uma parte da planilha usará o solver para o cálculo de h_d , necessário para a determinação dos pontos do trecho do canal com fundo variado (perfil Scimemi). O leitor encontrará uma possível forma de elaborar a planilha na pasta de arquivos deste capítulo. O trecho abaixo contém os cálculos preliminares:

q [m ² /s]	h_c [m]	h_d [m]	h_a [m]	H_o [m]	$F(h_d) = 0$	V_a [m/s]	a	Δx [m]	α
10	2,17	2,76	0,00475	2,77	1,6E-06	0,31	0,21067	0,01	1

Com esses resultados iniciais, os pontos que definem o vertedor podem ser calculados, assim como as funções trigonométricas de interesse (veja o trecho a seguir).

X [m]	Y [m]	dY/dX= tg θ	θ [rad]	cos θ	sen θ
0	0	0	0	1	0
0,01	4,2E-05	0,00778	0,00778	0,99997	0,00778
0,02	0,00015	0,01402	0,01402	0,9999	0,01402

Neste estágio, devem ser calculadas (com base em h_i , para $i=1$) as seguintes grandezas: Área molhada, perímetro molhado e raio hidráulico; velocidade média, com $V = Q/A$; número de Reynolds e rugosidade relativa; fator de cisalhamento e declividade da linha de energia; número de Froude. Essas contas tornam possível o cálculo de $F(h_i)$ e, em seguida, de h_i , como exposto no seguinte trecho da planilha:

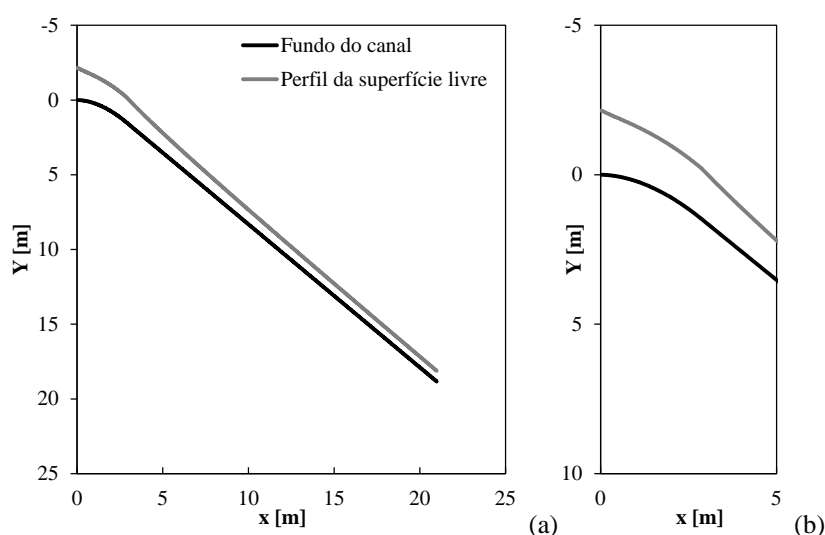
i	h_i [m]	$F(h_i)$	F_{ri}^2 [-]	I_{fi} [m/m]	A_i [m ²]	P_i [m]	R_{hi} [m]	V_i [m/s]	Re_i [-]	ε/D_{hi} [-]	f_i [-]	$z_{si}(x)$
1	2,147302	0,05648	1,03061	0,00173	85,8921	44,2946	1,93911	4,65701	3,6E+07	0,000103	0,01212	-2,1473
2	2,14787	-0,2028	1,029797	0,00173	85,9147	44,2957	1,93957	4,65578	3,6E+07	0,000103	0,01212	-2,1479
3	2,14584	-0,3743	1,03272	0,00173	85,8336	44,2917	1,93792	4,66018	3,6E+07	0,000103	0,01212	-2,1459

Como estratégia matemática, considere o valor inicial, $h_{i=1}$, como 99% da profundidade crítica. Se for considerada a profundidade crítica, com $\alpha = 1$, haverá divisão por zero em $F(h_i)$ e os cálculos seguintes tornam-se impossíveis. Observe que o ponto de máximo da forma de fundo corresponde à posição de ocorrência da altura crítica desprezando-se as perdas de carga. Deste modo, assumir um valor muito próximo da altura crítica na crista do vertedor é razoável e próximo à física do problema.

A posição da superfície livre no mesmo sistema de coordenadas da forma de fundo, isto é, (X, Y) , é calculada na última coluna com a seguinte equação:

$$z_{si}(x) = Y_i - \frac{h_i}{\cos\theta_i} \quad (26)$$

A Figura 11 resume os resultados, ilustrando o fundo do canal com a linha da superfície livre (Figura 11a e detalhe na Figura 11b). A Figura 11c mostra $h(x)$ com origem no nível crítico aproximadamente como comentado, e com valores decrescentes, caracterizando a curva S_2 esperada para esse tipo de problema.¹⁰



¹⁰ Ver descrição em Porto, 2006.

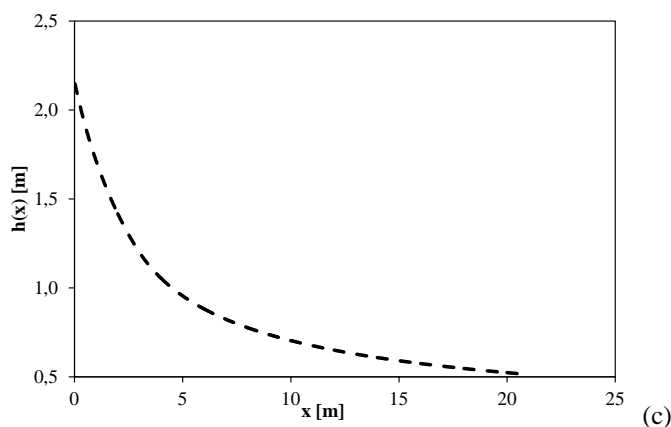


Figura 11 – Solução do problema

Para pensar

A posição $x = L_A$ é aquela onde a espessura da camada limite é igualada à altura de escoamento. Nessa posição a superfície livre se torna mais agitada e as estruturas turbulentas formadas provocam o “rompimento” da superfície com a formação de ondas, volumes de líquido dispersos que foram ejetados em direção ao ar e que, sob a ação da gravidade, são reinseridos na massa líquida. Esses fenômenos promovem a mistura da água com o ar. Pesquise uma formulação para o cálculo de L_A e verifique se haverá o início da aeração superficial descrita para as condições deste problema. Sugestão: Formulação de Wood *et al.* (1983), citado em Simões (2008, 2012).

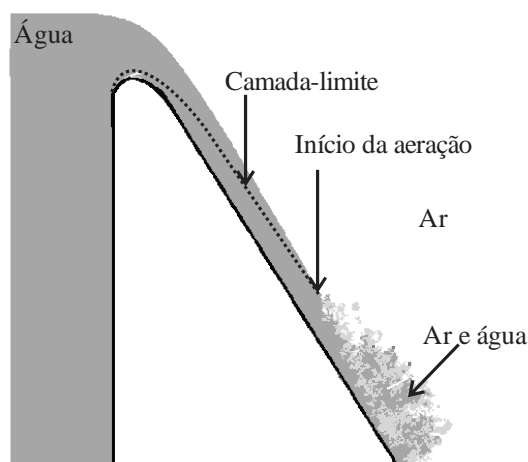


Figura 12 – Escoamento em um vertedor-extravador.

Problema 7.4 – Escoamento completamente desenvolvido em conduto forçado: Uma introdução à Mecânica dos Fluidos Computacional

O ser humano certamente precisou tratar de questões relacionadas à água e a outros fluidos desde o início. Registros históricos sobre esses tempos antigos são raros e não respondem a dúvidas sobre os primeiros mecanicistas dos fluidos. Apesar dessa condição de desconhecimento, há informações relevantes sobre feitos não tão recentes, como o trabalho de Arquimedes

(285-212 a.C.) sobre forças em corpos submersos; o trabalho de Leonardo da Vinci (1452-1519), que deduziu a equação de conservação de massa unidimensional e em regime permanente, além de ter sido capaz de visualizar e desenhar muitos escoamentos interessantes, como o escoamento sobre um degrau, escoamentos sobre escadarias, entre outros casos de escoamentos turbulentos. (RICHTER, 1883) Naturalmente, outros nomes surgem em uma observação dos registros (veja, por exemplo, o *Mathematics Genealogy Project*),¹¹ como Galileu (1564-1642) e suas ideias básicas com diversos desdobramentos, tendo sido, por exemplo, orientador do matemático e hidráulico Castelli (1578-1643). Castelli foi professor de Torricelli (1608-1647), conhecido estudioso de física e mecânica dos fluidos, provável criador do barômetro e aquele que deduziu a relação entre velocidade teórica e carga hidráulica para escoamento através de um orifício de pequenas dimensões (PORTO, 2006).

A estrutura científica ligada à física-matemática erguida com a publicação dos trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) foi o substrato para a construção da Mecânica dos Fluidos nos anos seguintes. Ainda no século XVIII Euler (1707-1783) deduziu, com base nas três leis de Newton, as equações diferenciais parciais hiperbólicas hoje conhecidas como equações de Euler, modelo que não inclui efeitos viscosos. Ele era camarada de Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johan Bernoulli (1667-1748), e foi o responsável pela dedução da equação conhecida como “equação de Bernoulli”, enunciada por Daniel Bernoulli por meio de palavras em seu livro *Hydrodynamics* (WHITE, 2002). Entre os desenvolvedores da Mecânica, merece destaque o francês Lagrange (1736-1813), aluno de Euler e orientador de Fourier (1768-1830) e Poisson (1781-1840). O estudo de ondas naturalmente recupera as contribuições de Fourier, professor de Gustav Dirichlet (1805-1859) e do engenheiro Navier (1785-1836). Neste estágio da gênese acadêmica brevemente esboçada nas linhas anteriores, surge a equação de Navier, em 1822, equação diferencial parcial com termos adicionais em relação à equação de Euler, termos esses que representam os efeitos viscosos. Contribuições analíticas de Cauchy (1789-1857) resultaram no conceito de tensão ou tensor das tensões e na equação de Cauchy, com dedução bem definida. Após vinte e três anos, em 1845, George Gabriel Stokes (1819-1903) publicou um artigo com a dedução completa da relação constitutiva entre tensão e deformação válida para fluidos newtonianos.¹²

¹¹ Disponível em <<http://www.genealogy.ams.org/>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

¹² Veja essa dedução em White, 2002; Simões, 2012.

A equação e conservação de massa escrita para um fluido em escoamento e a equação de Navier-Stokes (ou equações de Navier-Stokes, sendo o plural válido por se tratar de uma equação vetorial) estavam estabelecidas em 1845, mas a solução analítica desse sistema com quatro equações e quatro incógnitas, considerando aqui a incompressibilidade, ainda não é conhecida. Com o surgimento dos computadores modernos durante a segunda guerra mundial (1939-1945) e evolução dessas máquinas, incluindo aplicação da álgebra de Boole (1815-1864), o cálculo numérico pôde vislumbrar aplicações mais avançadas. Os avanços na mecânica quântica possibilitaram uma segunda geração de computadores baseada em transístores, com processamento mais rápido e menores dimensões em relação aos que empregavam válvulas. Esses avanços interessam muito quando se trata de Mecânica dos Fluidos Computacional uma vez que as equações diferenciais parciais são substituídas por aproximações algébricas que devem ser resolvidas em domínios discretos, *i.e.*, domínios com malhas formadas por posições específicas para solução das equações.

Em um sentido amplo, julga-se correto entender que Hidráulica e Mecânica dos Fluidos são termos com significados sinônimos. Avançando além das palavras, os conteúdos dos problemas resolvidos neste livro também revelaram tal similaridade. O presente problema tem como objetivo estudar uma forma simplificada das equações de Navier-Stokes. Tal forma é escrita para o escoamento completamente desenvolvido em condutos forçados e, matematicamente, é uma equação diferencial parcial com característica parabólica. Sendo assim, ela não representa uma formulação matemática nova exposta aqui, uma vez que o capítulo 6 resolveu numericamente esse tipo de equação diferencial parcial. Iremos mais além porque o problema e sua formulação física-matemática (equação de Navier-Stokes) surgem pela primeira vez neste livro.

Em um escoamento completamente desenvolvido, a forma da distribuição de velocidades na seção transversal do conduto não é dependente da posição ao longo do conduto. Em regime variável, em seções distantes das extremidades do conduto também podem ocorrer escoamentos completamente desenvolvidos. Nesse caso, a forma do perfil de velocidades muda com o tempo em uma dada seção transversal, mas não sofre alterações devido a efeitos convectivos. Como um subproblema, sugere-se ao leitor demonstrar a equação 27 para o escoamento completamente desenvolvido a partir das equações de Navier-Stokes escritas para escoamentos incompressíveis, que podem ser encontradas em Batchelor (2000) e Schulz (2003). Como solução, restará a aceleração local (primeiro membro da equação 27), termos difusivos (termos presentes

no segundo membro, vinculados à viscosidade) e parte do gradiente de pressão (função apenas do tempo).

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (27)$$

em que $w = w(x,y,t)$ é a função distribuição de velocidades, dependente do tempo e em uma seção transversal xy ; μ = viscosidade dinâmica, ρ = massa específica, $p = p(z,t)$, sendo o eixo z perpendicular ao plano xy .

O esquema numérico adotado para resolver a equação anterior é semelhante ao empregado no capítulo 6, reescrito a seguir para a velocidade:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (30)$$

em que W é a velocidade calculada numericamente, sendo uma aproximação para a solução analítica $w(x,y,t)$. É válido recordar que esse esquema numérico é condicionalmente estável. A estabilidade deverá ser garantida com o critério exposto no capítulo 6, escrito a seguir:

$$\Delta t \leq \frac{\mu}{8\rho} (\Delta x^2 + \Delta y^2). \quad (31)$$

Substituindo as aproximações para as derivadas, escreve-se:

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \Delta t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta t. \quad (32)$$

Neste estágio, resta desenvolver um algoritmo para solucionar a equação 32. Uma sugestão é apresentada a seguir, na Tabela 4. Seguindo o padrão adotado ao longo deste livro, mais uma vez o programa é apresentado com os comentários. Observe que no pré-processamento são definidos dados geométricos básicos do domínio computacional, como L_x e L_y , que representam base e altura do retângulo que define o domínio mencionado. A forma da seção transversal é definida no laço pertencente à etapa de processamento. Dois exemplos são fornecidos com o código da Tabela 4, a saber: (1) Uma seção com sólidos internos; (2) Uma seção circular. O gradiente de pressão também é inserido no processamento, representado pela letra G . Como condição inicial, considera-se o repouso. Sendo $G = \text{constante}$, o pós-processamento mostrará ao leitor o comportamento transitório do perfil de velocidades, que evolui para o estado estacionário. Empregando G definido com uma senoide, o leitor observará o escoamento variável enquanto durar a simulação numérica. Após a leitura do código, observe alguns gráficos que você deve obter com ele.

Tabela 4 – Código para solução do perfil de velocidades não permanente e plenamente desenvolvido

```
clear

%O comando anterior apaga os dados da memória toda vez que o código for
%ativado.

%Métodos Computacionais em Hidráulica
%André Luiz Andrade Simões, Harry Edmar Schulz, Rodrigo de Melo Porto

%PRÉ-PROCESSAMENTO:

%Dimensões do domínio retangular principal. O domínio é definido como
%sendo um retângulo. Dentro dele, é possível estabelecer contornos de tal
%maneira que a seção transversal assuma a forma desejada.
Lx=1; %Em metros.
Ly=1; %Em metros.
Raio = 0.5;%Para simulação em seção circular.

%Número de divisões nos eixos espaciais. Estes valores são empregados
%para
%o cálculo de dx e dy, que representam os espaçamentos entre os nós da
%malha.
Nx=50;
Ny=50;

dx=Lx/(Nx-1);
dy=Ly/(Ny-1);

tt=500;%tempo total, em segundos.
Nt=5700;%número de divisões no eixo temporal

dt=tt/(Nt-1);%espaçamento entre os nós do eixo temporal
m=1.5;%Viscosidade dinâmica
ro=1264;%Massa específica

dtest=(1/8)*(dx^2+dy^2)/(m/ro);%Estimativa do valor de dt vinculado
```

```

%ao critério de estabilidade

%Matrizes para armazenar x e y, posições nos eixos coordenados.
x=zeros(Nx,1);
y=zeros(Ny,1);

%"Matriz 3D" para armazenar os perfis calculados em diferentes instantes.
Wn=zeros(Nx,Ny,Nt);

%Condição inicial:

%Matrizes para armazenar as condições iniciais. Neste caso a condição
%inicial é o repouso.

W=zeros(Nx,Ny);
WW=zeros(Nx,Ny);

Wn(:, :, 1)=WW;

%PROCESSAMENTO:

n=1;%n=1 corresponde a t=0, n=2 a t=dt, ...

for t=dt:dt:tt %não é t=0:dt:tt porque em t=0 está a condição inicial.
    n=n+1

    %O gradiente de pressão é denotado por G:

    %G=cos(0.4*t);
    %G=-cos(0.4*t).*exp(-0.01*t);
    G=-m;
    for i=2:Nx-1
        x(i,1)=(i-1)*dx;
        for j=2:Ny-1
            y(j,1)=(j-1)*dy;
            %Aqui você deve definir a forma da seção transversal do con-
duto.

            %O if é usado para definir a geometria.

            %           if x(i,1)>=0.4 && y(j,1)>=0.4 && x(i,1)<=0.6 && y(j,1)<=0.9
            ||...
            %           x(i,1)>=0.3 && y(j,1)<=0.1 && x(i,1)<=0.7 ||...
            %           x(i,1)>=0.3 && y(j,1)>=0.9 && x(i,1)<=0.7 ||...
            %           y(j,1)>=0.3 && y(j,1)<=0.7 && x(i,1)<=0.1 ||...
            %           y(j,1)>=0.3 && y(j,1)<=0.7 && x(i,1)>=0.9

%Seção retangular:
            %if i==1 || j==1 || i==Nx || j==Ny

%Seção circular:
            if sqrt((x(i,1)-Lx/2)^2+(y(j,1)-Ly/2)^2)>=Raio

                %Se a condição em "if" é satisfeita, a velocidade WW é
igualada a zero, ou
                %seja, há um sólido interno e a equação discretizada não
é
                %resolvida ali. Matematicamente, impõe-se a condição de
não
                %deslizamento:

```

```

        WW(i,j)=0;

        else %Senão, então a equação é resolvida.

            WW(i,j)=W(i,j)+(m/ro)*dt*((W(i-1,j)-2*W(i,j)+...
                W(i+1,j))/(dx^2)+(W(i,j-1)-2*W(i,j)+W(i,j+1))/(dy^2))...
                -dt*G/ro;
            end
        end
    end
end
%Note que foram definidas duas matrizes para a velocidade: W e WW.
Para
%este programa é necessário usar WW para que durante a solução em um
dado instante não seja substituído o
%valor de W do instante passado por um valor do instante atual.
W=WW;

%O valor atual é então armazenado em Wn. Esta forma de programar faz
%com que o processamento seja mais rápido do que armazenar direto em
%Wn.

Wn(:, :, n)=W;
end

%PÓS-PROCESSAMENTO:

[X, Y] = meshgrid(linspace(0,Lx,Nx),linspace(0,Ly,Ny));

op=2;%Escolhe entre ver o perfil colorido ou um perfil
%com a forma de uma malha.

if op==1

for n=1:1:Nt
    mesh(Wn(:, :, n),Y,X, 'FaceColor', 'blue', 'EdgeColor', 'none')
    camlight right; lighting phong
    ylim([min(min(X)) max(max(X))])
    zlim([min(min(Y)) max(max(Y))])
    xlim([min(min(min(Wn))) max(max(max(Wn)))]])
    view(30,15);
    xlabel('W(t)')
    ylabel('x')
    ylabel('y')
    M=getframe;
end

end

if op==2

    %mov=avifile('Evol_w_v5.avi','compression','None');%Não comentar para
    gravar o vídeo
    for n=1:5:Nt
        t=(n-1)*dt;
        mesh(Wn(:, :, n),Y,X, 'EdgeColor', 'black')
        camlight left; lighting phong
        ylim([min(min(X)) max(max(X))])
        zlim([min(min(Y)) max(max(Y))])
        xlim([min(min(min(Wn))) max(max(max(Wn)))]])
        view(30,15);
        xlabel('W(t)')
    end
end

```

```

zlabel('y')
ylabel('x')
title(['t = ', num2str(t/60), ' [min]'])
M=getframe;
pause()
%mov=addframe(mov,M);%Não comentar p/ gravar o vídeo
end
end
%mov=close(mov);%Não comentar para gravar o vídeo

```

As imagens da Figura 13 foram calculadas para uma seção circular. Essas figuras ilustram a evolução do perfil de velocidades. O uso do código e observação da animação dos resultados mostra a sua tendência assintótica ao perfil permanente. Como sugestão para estudo do escoamento laminar plenamente desenvolvido com auxílio do método numérico e computacional proposto, considera-se interessante avaliar o refinamento da malha e a sua relação com o valor de uma velocidade de referência pertencente ao perfil permanente, como a velocidade máxima ou a velocidade média. Pode-se calcular também o valor de $C = fRe$, em que f = fator de cisalhamento de Darcy-Weisbach e Re = número de Reynolds, como foi feito neste exercício.

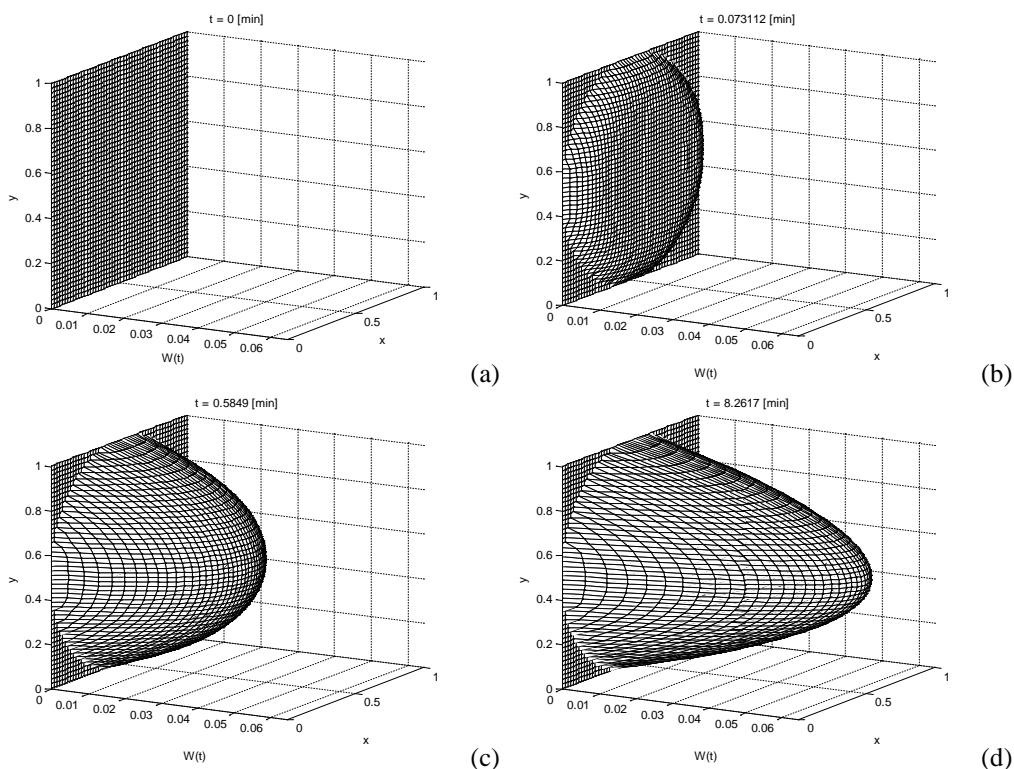


Figura 13 – Soluções para seção circular

O valor de C obtido numericamente deve ser próximo ao da solução analítica, que é 64 para seção circular, solução atribuída a Hagen e Poiseuille, e $C = 56,91$ para seção quadrada (WHITE, 2002). Verifique também a influência do ajuste da malha ao contorno da seção. Você deve concluir que a ordem de convergência do método é influenciada pelo ajuste da malha ao contorno. Em uma seção retangular, o ajuste ao contorno é exato. Para seções circulares, por exemplo, esse ajuste melhora com o refinamento da malha, mas não é convertido em um ajuste

perfeito porque a malha continua sendo estruturada e retangular. Os resultados obtidos para diferentes graus de refinamento são apresentados na Tabela 15 e a análise de convergência é auxiliada com a Figura 14. Note que o decaimento do erro $\|C_n - C\|$ com o refinamento da malha é proporcional a aproximadamente 1,1 para a malha ajustada ao círculo. Análise semelhante mostra um decaimento com expoente próximo a 2,5 para seção quadrada.

Tabela 15 – Soluções numéricas para seção circular e seção quadrada

Δt [s]	Nt	$N_x=N_y$	$\Delta x = \Delta y$ [m]	Seção circular: C_n	Seção quadrada: C_n
0,0877	5.700	50	0,0204	60,7982	56,9303
0,0605	8.263	60	0,0169	61,2539	56,9236
0,0442	11.301	70	0,0145	61,9047	56,9196
0,0338	14.814	80	0,0127	62,3600	56,9170
0,0266	18.801	90	0,0112	62,7015	56,9153
0,0215	23.263	100	0,0101	62,5854	56,9140
0,0177	28.200	110	0,00917	62,6102	56,9131
0,0149	33.611	120	0,00840	62,7285	56,9124
0,0127	39.497	130	0,00775	62,8339	56,9118

C_n = valor de C calculado com o método numérico.

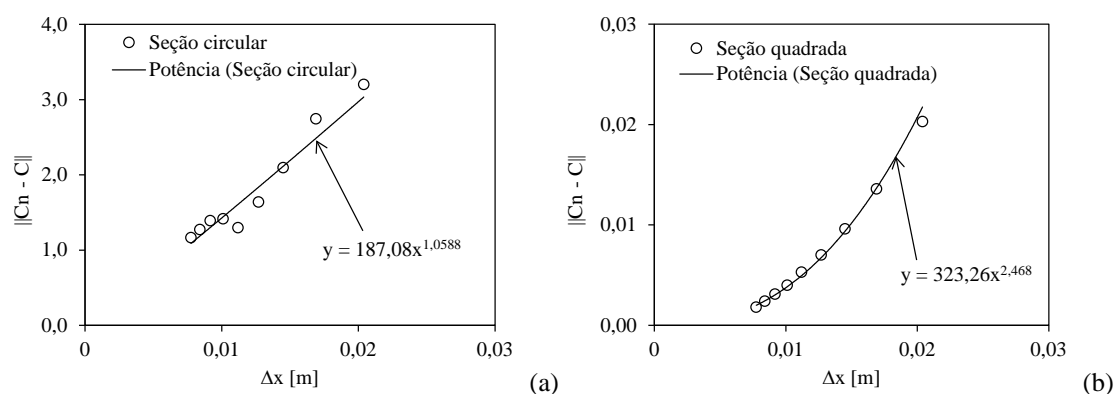


Figura 14 – Análise da ordem de convergência para a malha

Durante a oscilação da massa líquida entre o reservatório e a chaminé de equilíbrio, como no problema estudado no Capítulo 3, devido às dimensões do conduto e viscosidade da água, é esperada uma estrutura interna turbulenta em grande parte do tempo de ocorrência do fenômeno oscilatório. Com o intuito de estudar mais a fundo os detalhes desse tipo de oscilação, julga-se apropriado resolver um problema que também apresente oscilação amortecida, mas empregando o código desenvolvido neste exercício. Observe que o escoamento não é calculado como turbulento. O desafio de adaptar o programa para o caso turbulento é deixado como exercício para o leitor. Simule o perfil de velocidades transitório submetido ao gradiente de pressão $p_z = -\cos(0,4t)\exp(-0,01t)$. Os resultados devem ser semelhantes aos da Figura 15.

As três primeiras imagens da Figura 15 mostram uma evolução do perfil de velocidades com valores positivos de W . A quarta figura indica que a desaceleração e posterior inversão do

sentido (vista por meio do sinal de W na figura mencionada) não ao longo de toda a seção transversal no mesmo instante. O núcleo do escoamento demora mais a mudar de sentido uma vez que está animado a velocidades maiores que as velocidades do fluido próximo às paredes (em outras palavras, a sua inércia é maior). O mesmo é observado quando ocorre a segunda inversão no sentido, como ilustrado nas imagens seguintes.

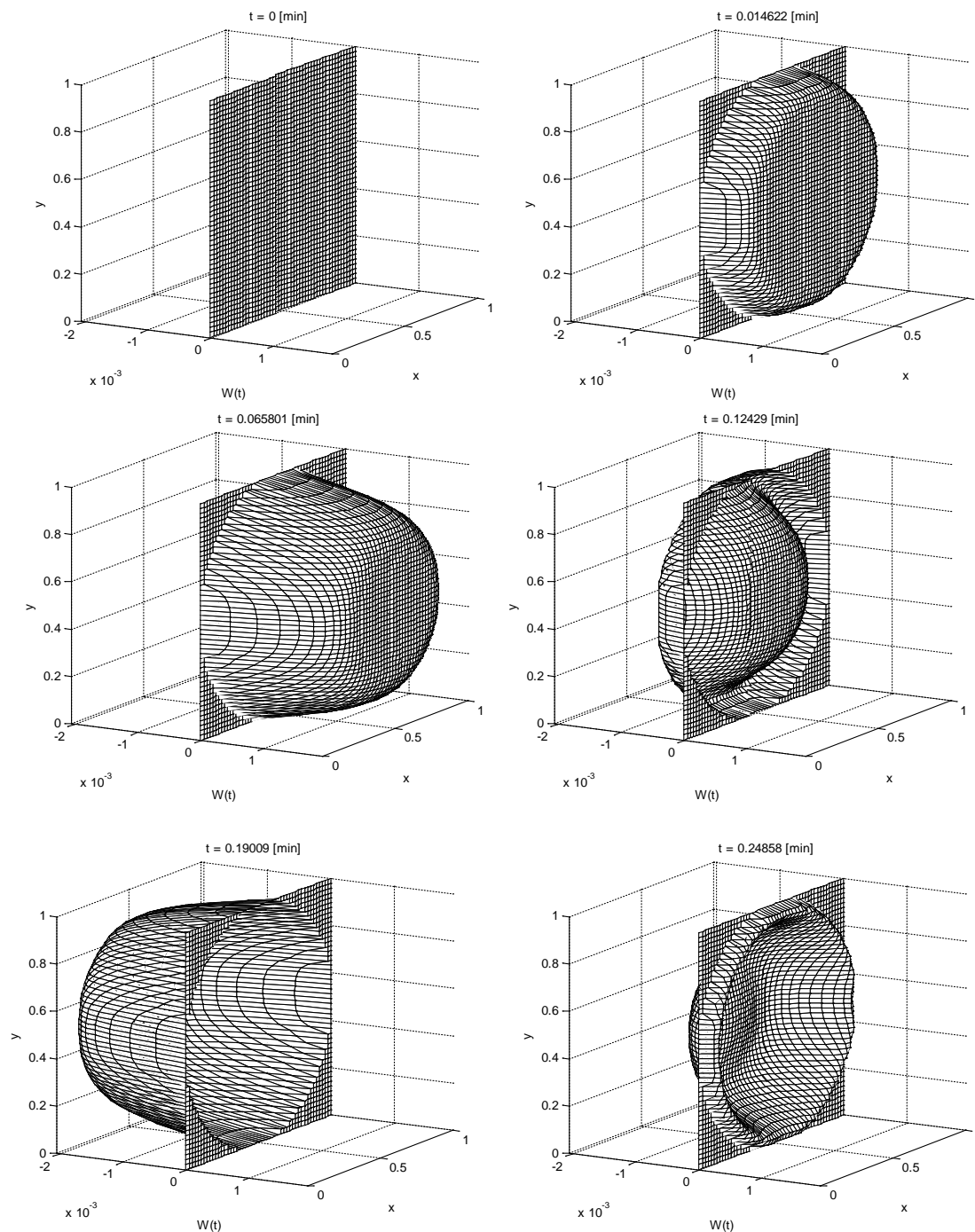


Figura 15 – Escoamento transitório submetido ao gradiente de pressão amortecido $p_z = -\cos(0,4t)\exp(-0,01t)$

Para pensar

O esquema θ , descrito em Dautray e Lions (2000), com $\theta = 1/2$, corresponde ao método numérico de Crank-Nicolson, sendo incondicionalmente estável para todos os valores de Δt . Trata-se de um esquema implícito, isto é, não é possível isolar no primeiro membro da equação a velocidade em $n+1$ no nó (i,j) . A equação em sua forma discreta é apresentada a seguir (SIMÕES *et al.*, 2010):

$$\frac{W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{W_{i+1,j}^{n+1} - 2W_{i,j}^{n+1} + W_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{W_{i,j+1}^{n+1} - 2W_{i,j}^{n+1} + W_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \quad (33)$$

Escreva um código em Matlab[®] ou linguagem de tua preferência para resolver novamente o problema, comparando os resultados obtidos com aqueles propostos neste exercício.

REFERÊNCIAS

- ALLIEVI, L. Theory of water-hammer. Rome: Typography Riccardo Garroni, 1925.
- ALMEIDA, A.B. Manual de proteção contra o golpe de aríete em condutas elevatórias., Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1982.
- ANDERSON-JR., J.D. Computational fluid dynamics: the basics with applications. New York: McGraw-Hill, 1995.
- ASCE. *Design and Construction of Urban Storm Water Management Systems*. New York, 1989. (Asce Manuals And Reports on Engineering Practice, n. 77).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS- ABNT. *NBR 12218*: Projeto de rede de distribuição de água para abastecimento público. Rio de Janeiro, 1994.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS- ABNT. *NBR 13292*: Solo – Determinação do coeficiente de permeabilidade de solos granulares à carga constante. Rio de Janeiro, abr. 1995.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 14545*: solo- determinação do coeficiente de permeabilidade de solos argilosos a carga variável. Rio de Janeiro, 2000. Disponível em: <<https://ecivilufes.files.wordpress.com/2012/03/nbr-14545.pdf>>. Acesso em: 3 ago. 2017.
- BEAR, J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York: American Elsevier Publishing Company: Dover edition, 1972
- BEAR, J. Hydraulics of Groundwater. New York: McGraw-Hill: Dover edition, 1979.
- BUTCHER, J.C. On Runge-Kutta methods of high order. Journal of the Australian Mathematical Society.[S.I.]. v. 4, p.179-194, 1964.
- BUTCHER, J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. Nova Jersey, EUA: J. Wiley & Sons, 2003. 482 p.
- CHAUDHRY, M.H. *Applied Hydraulic Transients*. 3. ed. New York: Springer. 2013
- CHAUDHRY, M. H. *Applied hydraulic transient*. New York: Litton Educational Publishing, Inc, 1979.
- CHAUDHRY, M.H. *Open-channel flow*. New York: Springer, 2008
- CHUE, S.H. A pipe skin friction Law of universal applicability. *Proceedings of the Institution Civil Engineers*. London, v. 77, par. 2, p. 43-84, Mar. 1984.
- CHURCHILL, S.W. Friction factor equation spans all fluid regimes. *Chemical Engineering journal*, Lausanne Suíça, v. 84, p. 91-92, 7 Nov 1977.
- CHOW, V. T. *Open channel hydraulics*. New York: McGraw-Hill, 1959,

COLEBROOK, C.F. Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, London, v. 11, , p. 133-156, 1938/1939

CROSS, H. Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors. *University of Illinois Bulletin*, n. 286, 13 Nov..1936.

CANHOLI, A.P. *Soluções estruturais não convencionais em drenagem urbana*, .1995. 185 p. Tese (Doutoramento) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R.P. *Numerical methods for engineers*. 5 ed. Boston: McGraw-Hill, 2006.

CREAGER, W. P.. *Engineering of Masonry dams*. New York: John Wiley & Sons, 1917.

COLLINS, R. E. *Flow of fluids through porous materials*. New York: Reinhold, 1961.

DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et app...* Paris: Dalmont, p. 674, 1856.

DAUTRAY, R.; LIONS, JACQUES-LOUIS. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Berlin: Springer, 2000.

ELETROBRÁS. *Critérios de projeto civil de usinas hidrelétricas*. Out. 2003.

ESTADOS UNIDOS. Bureau of Reclamation. Design of small dams: A Water Resources Technical Publication 3rd. Denver, CO, USA: United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 1987.

FAND, R.M. et al. Resistance to the Flow of Fluids Through Simple and Complex Porous Media Whose Matrices Are Composed of Randomly Packed Spheres. *Transactions of the ASME*, v. 109, 1987.

FETTER, C.W. *Applied hydrogeology*. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall. 2001

FREAD, D.L. The development and testing of a dam-break flood forecasting model. In: *Proceedings, Dam-Break Flood Modeling Workshop*. Washington, D.C: Water Resources Council, U.S, 1977. p. 164-19

HAGER, W.H. Blasius: A life in research and education. *Experiments in Fluids* Berlin, v. 34, May. 2003.

HAGER, W.H.; LIIV, U. Johann Nikuradse - Hydraulic experimenter. *Journal of Hydraulic Research, Delf, Holanda*, v. 46, n. 4 p. 435-444, 2008.

HAALAND, S.E. Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow. *Journal of Fluids Engineering*, New York, p. 89-90, Mar. 1983

JAEGER, C. *Fluid Transients in Hydro-electric Engineering Practice*. [S.l.]: Blackie & Son. 1977

LENCASTRE, A. *Hidráulica geral*. Lisboa: Hidroprojecto, 1983. Edição Luso-Brasileira.

- LENCASTRE, A. *Hidráulica geral*. 2. ed. Lisboa: Hidroprojecto, 1996.
- LEVEQUE, R. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. United Kingdom: Cambridge University Press. 2007.
- LIMA, L.F.M. *Termo de atrito em escoamento transitório para condutos forçados*. 2006. 150 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006
- MACCORMACK, R.W. *The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering*. New York: AIAA, 1969. p. 69-354.
- MOODY, L. F. *Friction Factors for Pipe Flow*. *Transactions of the ASME*, New York, v. 66, p. 671-684, Nov. 1944.
- NIKURADSE, J. *Strömungsgesetze in Rauhen Rohren*. Berlin: VDI Forschungsh, 1933. v. 361 (English translation in NACA Technical Memorandum, n.1292, 1950).
- PARMAKIAN, J.. *Waterhammer analysis*. New York: Dover Publications. Prentice-Hall. 1955
- PEREIRA, A.J.S.; ALMEIDA, A.B. Formulação explícita e universal da resistência em tubos. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE HIDRÁULICA, 12., 1986. São Paulo: Anais... São Paulo: Comitê, Regional Latino Americano da AIPH, 1986.
- PORTO, R.M. *Hidráulica básica*. Projeto Reenge, 4. ed. São Marcos: EESC-USP. 2006.
- PORTO, R. M. Exercícios de obras hidráulicas - São Carlos, EESC 1991. Apostila.
- ROUSE, H. *Elementary mechanics of fluids*. New York: Dover, 1946
- ROUSE, H. Hydraulics' Latest Golden Age. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Palo Alto, CA, v. 8, p. 1-13, Jan. 1976.
- SCHULZ, H.E. *O essencial em fenômenos de transporte*. São Carlos: EESC/USP, 2003.
- SCIMEMI, E. Sulla Forma delle Vene Tracimanti. *L'Energia Elettrica*, v. 7, n. 4, p. 293-305, 1930.
- SIMÕES, A.L.A. *Considerações sobre a hidráulica de vertedores em degraus: metodologias adimensionais para pré-dimensionamento*. 2008. 286 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. Escoamento laminar desenvolvido em seção genérica: simulação numérica e cálculo do fator de resistência. In: CONGRESSO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 24., 2010, Punta del Este, Uruguay.
- SIMÕES, A.L.A.. *Escoamentos turbulentos em canais com o fundo em degraus: resultados experimentais, soluções numéricas e proposições teóricas*. 2012, 528 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

- SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. Simulação numérica e verificação experimental da posição da superfície livre de um ressalto hidráulico em um canal retangular. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO DE HIDRÁULICA, 24., 2010, Punta del Este, Uruguay.
- SIMÕES, A.L.A.; SCHULZ, H.E.; PORTO, R.M. Equações e princípios básicos de Mecânica dos Fluidos e Hidráulica. Não publicado. 2014.
- SOUZA, P.A. Dimensionamento hidráulico de canal parabólico. *Revista Politécnica USP.*, São Paulo, n.190. 1985.
- STURM, T. W. *Open channel hydraulics*. Boston: McGraw-Hill. 2001
- SWAMEE, P.K. Design of a submarine pipeline. *Journal of the Transport Engineering Division*, Reston, v. 119, n. 1, p. 159-170, 1993.
- SWAMEE, P.K.; JAIN, A.K. *Explicit equations for pipe flow problems*. *Journal of Hydraulic Engineering*, New York, US, v. 102, n.5, p. 657-664, 1976.
- THIRUVENGADAM, A. Hydraulic Jump in Circular Channels. *Water Power*, p. 496-97, Dec. 1961.
- TODD, D.K. *Hidrologia de Águas Subterrâneas*. São Paulo: E. Blücher, 1959.
- TODD, D.K.; MAYS, L.W. *Groundwater Hydrology*. 3. Ed. New York: J. Wiley & Sons, 2005
- WALESH, S.G. *Urban surface water management*, New York: J. Wiley & Sons, 1989. 517 p.church
- WENDLAND, E.C. *Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas*. São Carlos, SP: SBMAC, 2001-2003.
- WEISBACH, J. *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. Braunschweig: Friedrich Vieweg. 1850.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill. 2002.
- VAN DYKE, M. *An album of fluid motion*. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1982.
- WYLIE, E.B.; STREETER, V.L. *Fluid Transients*. New York: McGraw-Hill. 1978.
- WOOD, I.R.; ACKERS, P.; LOVELESS, J. General method for critical point on spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, New York, USA, v. 109, n. 27, p. 308-312, 1983-1985.

