

CURSO DE MESTRADO EM ECONOMIA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. (CME)

Nº 08

"CONTRIBUIÇÕES DE SISTEMAS LINEARES  
A ANÁLISE MACROECONÔMICA"

JOÃO DAMÁSIO O. FILHO

Janeiro/1992

João Damásio  
CME/UFBA

"The Way in which we see things  
can Hardly be distinguished from  
the way we wish to see things"

Schumpeter (1954)

## 1. INTRODUÇÃO

Como sabemos todos, a macroeconomia surge como perspectiva teórica e analítica, em distinção à microeconomia, depois que Keynes contrapõe a sua Teoria Geral a todos os que os precederam, ao chamá-los de "clássicos", misturando marginalistas e a tradição britânica do século XIX. Assim, a resposta à "revolução keynesiana" cristaliza-se na síntese neoclássica (Hicks e Samuelson à vanguarda) que, se de um lado resgata as contribuições de Jevons, J. B. Clark, Marshall, Walras e Pareto -- além de providencial intervenção de Pigou -- na forma de "microeconomia", por outro transmuda o legado de Keynes em "macroeconomia". Os temas foram disciplinarizados e ensinados paralelamente por décadas nos cursos de economia de todo o mundo. Na década de 70, Friedman proclamava "hoje somos todos keynesianos", et pour cause. Hoje, nem tanto !

A simbiose, estimulada desde os tempos da síntese neoclássica, percorreu os caminhos do estabelecimento dos "fundamentos microeconômicos da macroeconomia", desaguando em um universo de expectativas racionais, gerações justapostas, mercados incompletos, informações assimétricas e outros conceitos contemporâneos. O Keynes da Teoria Geral é cada vez mais lembrado apenas como o pai da noção de incerteza. Os novos clássicos constituem a "mainstream" do pensamento macroeconômico do estado-da-arte, confrontados aqui e ali pelos novos keynesianos.

Bem, e o que têm sistemas lineares a haver com isso ? Embora um pouco distanciados do calor daquele debate -- e muitas vezes ausentes dos currículos de cursos de economia -- os modelos lineares de produção vêm dando contribuições ao entendimento da dinâmica macroeconômica. Essas contribuições são multifacéticas e nem sempre consistentes entre si, o que às vezes também faz esquentar as discussões. Longe de pretender ser uma resenha, procura-se aqui tão-somente apresentar brevemente alguns panoramas dessas contribuições apesar do tom algo crítico de algumas perspectivas. Limitamos, entretanto a bibliografia, por questão de espaço, deixando de incluir referências mais óbvias, ou particularmente não-correlatas.

## 2. ISOQUANTAS QUADRADAS ?

Um certo número de macroeconomistas parece tratar sistemas lineares de produção tão-somente como casos extremos de não-substituição entre insumos, levando ao "curiosum" da produção em proporções fixas, com coeficientes tecnológicos constantes. Para a tradição macroeconômica formada nos ecos da "síntese neoclássica", descontinuidades no processo de produção geralmente são tratadas como isoquantas "quadradas". Por outro lado, dentro da ótica da "activity analysis" um sistema linear de tecnologia fixa parece tornar inevitável a adoção da indesejável hipótese de retornos constantes à escala em todos os setores. Sob estas qualificações, e nesta perspectiva, não é surpreendente que os modelos agregados -- tanto macrostáticos como macrodinâmicos -- fossem apresentados como "mais gerais" e viessem a dominar os currículos de macroeconomia, enquanto disciplina. Além disso, modelos lineares multissetoriais costumam ser grandes, instáveis e mal-comportados -- inclusive matematicamente -- e sua deselegância discreta costuma não ser tão atraente para a maioria da profissão: no limite são descartados como rudimentares e simplistas. Os esforços teóricos e analíticos que visam a compreensão do comportamento macrodinâmico através de formulações lineares são, não raro, classificados de vãos ou inglórios.

Entretanto, nos últimos 40 anos -- e de forma paralela, mas nem sempre independente, à tradição "mainstream" keynesiana -- muito se avançou na análise multissetorial da dinâmica da economia capitalista, com o desenvolvimento de novas perspectivas e a reavaliação de velhas perspectivas (particularmente as dos economistas britânicos do século XIX). Vinte anos atrás, A. Brody (1970:8) já percebia que as questões econômicas mais profundas "[...] tinham muito em comum em qualquer lugar. Esta unidade foi obscurecida por um longo tempo porque as diferentes escolas econômicas utilizaram abordagens diferentes e diferente terminologia ao buscar respondê-las. Até bem recentemente essas diferenças pareciam ser irreconciliáveis. No entanto, pausada e laboriosamente nós estamos descobrindo que perspectivas amplamente diferenciadas podem ser cristalizadas em modelos matemáticos semelhantes; que transformações matemáticas podem transportar um método de análise para outro que a princípio lhe parecia incontrastável." [...] "É possível provar a estrita equivalência matemática de toda uma família de teorias e modelos: a teoria do valor-trabalho; a teoria dos jogos; sistemas de Leontief abertos e fechados, estáticos ou dinâmicos; programação linear; a teoria matemática dos processos de otimização e outros modelos de equilíbrio geral." [...] "Os modelos de valor e reprodução são semelhantes a uma família de modelos, já bem conhecidos na análise econômica teórica e aplicada, através do globo. Suas raízes intelectuais são traçadas a Leontief, Von Neumann, Walras, e mesmo Quesnay. Em geral não se reconhece que muitos dos conceitos centrais são originados por K. Marx" -- (op cit: 12).

Mais recentemente, R. Goodwin (1987) destaca Schumpeter, Walras, Von Neumann, Sraffa, Marx e Kalecki, além de Keynes, como autores particularmente importantes para a compreensão da dinâmica macroeconômica: "todos esses autores focalizam a dificuldade central da economia, que deriva do alto grau de interdependência das partes do sistema. [...] Basicamente existe apenas um problema: macrodinâmica, sendo a macrostática apenas um aspecto de suas soluções estacionárias. [...] Quantidades-agregadas, como PNB ou investimento, são frequentemente empregadas, apesar delas próprias nada controlarem e serem construções meramente estatísticas feitas a partir de uma massa amorfa de elementos díspares. No outro extremo estão as descrições atomísticas de milhões de agentes e firmas, juntamente com suas interconexões, constituindo um modelo empiricamente intratável. A análise multissetorial é um tipo de nível intermediário entre esses dois extremos insatisfatórios". (op.cit: xi)

Goodwin vai mais longe e questiona a presente dicotomia do estudo/ensino de economia. "A economia é tão complexa que qualquer análise completamente satisfatória é inalcançável. Há duas abordagens frequentes. A microeconomia, a análise em detalhe do funcionamento de firmas ou famílias. E a macroeconomia, o estudo do todo, usualmente na forma de agregações de quantidades heterogêneas são dessemelhantes e portanto não se comportam de uma forma simples; o grande número, além das complexidades das firmas e das famílias, são tais que a análise de seu comportamento em uma economia unitária é praticamente inatingível." Goodwin propõe a análise multissetorial como um compromisso entre as duas abordagens, pois "[...] isto permitiria levar em consideração as diversas estruturas produtivas, e mesmo assim, analisar suas interações e portanto o comportamento do todo. Assim, perdemos a simplicidade dos modelos agregados e o realismo de firmas e famílias individualizadas. Para compensar as perdas, no entanto, há ganhos substanciais" (op. cit: 5). São alguns desses ganhos que vamos buscar sumarizar neste breve texto.

Quanto às isoquantas quadradas, Pasinetti (1977:198) foi insistente: não há absolutamente qualquer justificativa para a confusão entre a hipótese de "coeficientes fixos" e o caso especial de tecnologia única. Desde Sraffa (1960) pode-se considerar a existência de múltiplas técnicas alternativas, representadas por mudanças discretas nos coeficientes, ao contrário das infinitesimais que precisam ser pressupostas pela análise marginalista. Assim, um dado estado da técnica funciona como um dos fotogramas de uma cena de um filme, aonde o que se segue depende do que ali está representado, mas não é completamente determinado por ele. Nesta perspectiva, a linearização é uma técnica analítica do estado "local", e mostra-se muito útil quando um grande número de funções não-lineares deve ser levado em consideração (cf. Funzo, 1987:164-5). "Este é precisamente o caso quando o modelo do sistema é altamente desagregado [...] Esta interpretação da tecnologia linear como uma descrição local [instantânea] das relações produtivas é consistente com Leontief e com Walras (quando este pressupõe "coefficients de fabrication" fixos), mas contrasta com a abordagem usual ("activity analysis") dos modelos lineares.

### 3. MACRODINÂMICA AGREGADA: VALOR OU QUANTIDADE ?

Sabemos que a análise macrodinâmica agregada foi principalmente inspirada nos trabalhos de F. Harrod e E. Domar nos anos 40. Esses modelos foram formulados com uma moldura essencialmente Keynesiana. A modificação desses modelos e a incorporação de uma perspectiva metodológica neoclássica foram tarefas de Solow e Swan nos anos 50. Alguns dos aspectos mais interessantes das análises macrodinâmicas agregadas surgiram nos anos 60 após a formulação da "regra dourada da acumulação" por Phelps e das "eras de acumulação do capital" de J. Robinson. Outras referências importantes desta vertente são Samuelson, Pearce, Modigliani, Kaldor e Pasinetti.

Entretanto, por mais interesse que as conclusões alcançadas dentro deste quadro analítico tenham sido, elas foram em geral bastante prejudicadas pela natureza severamente agregativa desses exercícios que, por exemplo, impedem o analista de se pronunciar objetivamente sobre as limitações e/ou viabilidade do crescimento nacional como decorrência da desconhecida composição do perfil da renda nacional agregada. (cf. Pasinetti, 1977:217) Ademais, como discutido por Hahn (1981), a existência de bens de capital heterogêneos, em geral, não permite ao modelo apresentar a convergência para a trajetória de crescimento em estado estacionário, apresentada por Solow em sua análise unissetorial, como uma propriedade neoclássica desejável.

Deve-se mostrar que "em geral, a introdução de um número de bens de consumo, ou de bens intermediários de uso simples não chega a ser um problema, mas a multiplicidade de bens de capital introduz importantes problemas de equilíbrio e estabilidade." (cf. sen, 1970:30)

Além disso, uma vez que os modelos agregativos de um-setor, um-produto, "livram-se de todas as diferenças entre relações físicas e de valor" (Blaug, 1975:35), informação importante é perdida no processo de agregação. É claro que a possibilidade de discernir entre diferentes composições do produto bruto, que no entanto levem ao mesmo valor agregado via preços, adiciona uma dimensão atraente à análise do comportamento macrodinâmico.

A generalização do mecanismo multiplicador na determinação dos níveis do produto permite uma nitidez analítica que é perdida em modelos agregados: como traçar setorialmente o efeito multiplicador deferencial sobre a renda de cada segmento produtivo? Como sublimar as diferenças e tratar como idênticos os investimentos no setor de Fumo e no setor de Siderurgia? A gasolina é mesmo um bem final, cujo preço pode ser aumentado sem repasses intersetoriais importantes? Quais são os efeitos sobre a malha intersetorial de uma política tarifária, p. ex. para bens importados? Questões como estas permanecem puramente retóricas em um arcabouço analítico agregativo: não há aonde, nem como buscar respostas...

#### 4. NÃO - SUBSTITUIÇÃO E "ACTIVITY ANALYSIS"

A teoria neoclássica mantém que a escolha da técnica depende da quantidade de recursos disponíveis e da composição da demanda. Um deslocamento de demanda ocasionará "substituição dos fatores de produção" e levará a diferentes preços de equilíbrio.

Os teoremas originais da "não-substituição" foram formulados há 40 anos por Georgescu-Roegen (1951), Samuelson (1951) e Koopmans (1951 b). Uma versão dinâmica do teorema da "não-substituição" foi elaborada por Mirrlees (1969). De forma abreviada, esses teoremas declaram que, sob certos pressupostos, se uma técnica minimiza os custos de produção de um dado conjunto de mercadorias, também minimiza os custos de produção de qualquer uma dessas mercadorias. Assim, se essa técnica estiver sendo utilizada, não há necessidade de "substituição dos fatores de produção" quando a composição da demanda final mudar.

A partir do estabelecimento dos teoremas de não-substituição torna-se possível buscar a formulação de modelos neoclássicos multissetoriais. De forma geral esses modelos são consistentes com uma função de produção neoclássica peculiar, apresentam demanda com alta elasticidade-preço e são envolvidos em um sistema de equilíbrio geral de sabor Walrasiano que endogeneiza preços e quantidades. Entretanto o fechamento desses modelos apresentou sérios problemas de estabilidade e convergência. (Ver Jorgenson, Siebert, Stephensen, Eisner, Nadiri, Hall, Klein, Gould, Nickell entre outros)

Paralelamente, no caminho de uma análise macroeconômica menos agregativa, Dorfman, Samuelson e Solow (1958) resgatam a contribuição seminal de Koopmans (1951a) -- mas também Kantorovich e Dantzig -- e utilizam as técnicas de Programação Linear para representar processos econômicos otimizados numa moldura quase-Walrasiana. Os autores argumentaram que "programação linear é análise marginalista apropriadamente ajustada para o caso de um número finito de atividades. A análise marginalista 'tradicional' é apropriada para o caso de funções de produção diferenciáveis" (op.cit:33). Solow (1959:32) argumentava que o modelo dinâmico de insumo-produto originalmente proposto por Leontief "poderia ser melhorado" através da introdução de um "processo de valoração competitivo". Depois de criticar Hawkins (1948), que como Zarnowitz (1955), formulou um sistema de preços não-Walrasianos para o modelo de Leontief ("qualquer economista iria achar esta teoria de preços inaceitável"), Solow "justificou a introdução da escolha otimizada como inescapável" concluindo que "a grande síntese Walrasiana virá por partes e pedaços". (loc.cit.)

Seguindo estas abordagens, tornou-se possível obter trajetórias dinâmicas de crescimento (chamadas de trajetórias DOSSO por Morishima, 1969), onde o problema dinâmico se reduz à alocação eficiente de "recursos escassos" em cada período; com o objetivo de obter um plano otimizado no "horizonte temporal" (Veja resenha em

Blitzer et al. 1975, e em particular Taylor, 1975). Subjacente está a busca de convergência para o ótimo de Pareto (ou talvez "Second Bests") sob condições de preços de equilíbrio competitivo.

Dada a popularidade obtida por esta vertente analítica, cabem os seguintes comentários: a) Nessas análises os multiplicadores de Lagrange são interpretados convencionalmente como "preços-sombra", considerados preços ótimos; b) Esses "preços-sombra" dependem crucialmente da função objetivo do problema de otimização, assim como dos recursos disponíveis. Embora Taylor (1975:36) haja reconhecido que "a interpretação Walrasiana dos 'preços-sombra' não pode ser mantida em um sentido estrito", durante algum tempo espalhou-se o sentimento de que a programação linear não era outra coisa senão a versão moderna da análise Walrasiana.

Antes de mais nada é necessário lembrar que a técnica de programação linear foi originalmente formulada visando estudar a viabilidade técnica de projetos de engenharia, em pesquisa operacional, no contexto de economias planificadas (Ver Kantorovich, Nemchinov, Kornai, Veinshtein). A vestimenta Walrasiana aplicada sobre esta técnica matemática permitiu que os problemas de otimização fossem formulados de forma a enfatizar o requerimento de conceitos como recursos disponíveis e "escassez", como fez Walres. Entretanto, sobressaem-se diferenças importantes entre PL e a análise marginalista, como a imperfeita correspondência entre "preços-sombra" e o conceito de "produtividade marginal", quando nem sempre a função objetivo a ser marginalizada é a receita total ou equivalente (cf. Pasinetti, 1977:188). Além do mais, os "preços-sombra" não têm nada a haver com custos de produção [...] Eles simplesmente emergem de um processo lógico de imputação inerente à [...] solução do problema dual" (op.cit: 185)

Para lá da questão da consistência com o arcabouço Walrasiano, deve-se estar atento para o fato de que os multiplicadores de Lagrange podem se comportar de uma maneira surpreendente. Brody (1965:58) advertia: "Há uma suspeita teoricamente bem fundamentada de que o sistema de preços-sombra, sendo uma função descontínua e não-analítica dos dados [matriciais], irá se comportar de uma maneira razoavelmente errática. Isto é, após a realização de pequenos ajustes de senso comum na função objetivo e dos dados subjacentes, o sistema de preços-sombra pode responder com saltos de ordem imprevisível" Em contexto semelhante, Kornai (1975:25) adicionava: "Eu deveria resaltar aqui, em princípio que o sistema de preços-sombra é, em si, instrumental por natureza, utilizável em análises custo-benefício de projetos de investimento; porém, seu uso deve ser feito apenas com grande circunspeção, cuidado e muita reserva. [...] Como resultado, eu não posso concordar com o ponto de vista razoavelmente difundido de que o sistema de preços-sombra deve ser o principal ou mesmo o único resultado instrumental desses modelos".

É inquestionável que a programação linear, vista em seus próprios méritos, é uma técnica muito poderosa para o planejamento industrial de curto prazo. Porém, a legitimidade de sua utilização como se ela tipificasse um quadro Walrasiano consistente, no qual

## 6. DINÂMICA MULTISSETORIAL: TRAJETÓRIAS DE VON NEUMANN E CORRELATAS

Na sua forma original, o modelo macroeconômico dinâmico de Leontief (1941, 1953, 1966) referia-se apenas a quantidades físicas e, neste sentido, poderia ser interpretado como um modelo Harrod-Domar multissetorial. Apenas após a elaboração do dual de preços de seu modelo (Morishima 1964; mas também Solow e Stiglitz) foi que ele evoluiu para o chamado modelo generalizado de Leontief. Entretanto, como já observado, a moldura Walrasiana do processo de valoração, adotado por esses autores nesta construção, castigou o modelo generalizado de Leontief (especialmente em sua forma fechada) com problemas duais de instabilidade (veja Sargan e Jorgenson). Além disso, como notado por Morishima (1969), tinha a restrição de pressupor a perfeita maleabilidade e transferibilidade de bens de capital entre ramos, de forma a resolver o problema de acumulação do "tipo certo" de bem de capital e desacumulação do "tipo errado".

Por seu lado, a análise de Von Neumann surge a partir da necessidade de se encontrar uma prova rigorosa de existência de uma solução única para a dinâmica de um conjunto de atividades produtivas. Von Neumann (1945) estava interessado em processos de crescimento balanceados e desenvolveu tanto o aspecto primal, como o dual de seu modelo. Kemeny, Morgenstern & Thompson (1956) demonstraram que o modelo dinâmico de Leontief era um caso particular do modelo de Von Neumann de uma economia em expansão e, do casamento de ambos, evoluiu-se para o modelo generalizado de Leontief - Von Neumann. (Cf. Brody, 1970:50ss; Morishima, 1969, 1973).

Um pressuposto comumente introduzido negligenciava o consumo dos empresários, assim como a poupança dos trabalhadores. Desta forma, obviamente superestimava-se a taxa de crescimento, mas era considerado útil fazê-lo para que fosse estabelecida uma relação simples entre a taxa de lucros de equilíbrio no longo prazo e a taxa de crescimento balanceado. Através desses pressupostos foi possível desenvolver o conceito de uma trajetória "dourada", aquela de mais rápido crescimento balanceado, também conhecido como TURNPIKE.

Seguiu-se um debate sobre diversas concepções de Turnpike, onde contribuíram Gale, Radner, Morishima, McKenzie, Nikaido e Tsukui, além de Hicks (1961:78) que notou que o problema de maximização do produto, apresentado por Von Neumann, e o problema de maximização de valor de DOSO eram questões diferentes e que o último não seria equivalente ao anterior como "modelo sequencial do tipo de Von Neumann". Esta conjectura foi discutida por Morishima (1961:89) que argumentou que a prova apresentada por Radner "apenas era aplicável para o caso em que o conjunto de possibilidades de produção fosse estritamente convexo, mas inaplicável ao caso de Von Neumann, no qual ele é um cone poliédrico".



Feita a separação dos processos de Von Neumann e os demais, um novo surto de versões de modelos multissetoriais de crescimento balanceado surgiu na literatura (Weil, Bromek, Miyazawa). Morishima (1969) em particular desenvolve o interessante conceito de Turnpike do Consumo, baseando-se em um "segundo teorema da Turnpike", e argumentando ser esta mais realística do que a tradicional trajetória dourada. Este problema, como apresentado por ele traz reminiscência de Ramsey, e Morishima nota que "uma trajetória balanceada dourada não pode ser uma trajetória ótima de Ramsey, e que a Turnpike do Consumo não obedece a Regra de Ouro da Acumulação. (op.cit: 230). Além disso, Morishima prosegue definindo "Estados Prateados de Crescimento" como sendo aqueles aonde é observado o crescimento balanceado de todos os produtos, junto com o pleno emprego de trabalho, mostrando que a Turnpike do Consumo é ótima em relação a todas as possíveis trajetórias prateadas.

Outros conceitos de Turnpike do Consumo foram apresentados por Bromek (1972), Fujimoto (1975) e o próprio Morishima (1974, 1976), onde esta trajetória apresentava crescimento balanceado de todos os produtos setoriais à mais alta taxa compatível com um dado nível de consumo dos trabalhadores. Bromek provou que "para toda taxa viável de crescimento balanceado existe um e apenas um nível físico de consumo ao qual a dada taxa de crescimento é a taxa de equilíbrio, e que o valor de equilíbrio do consumo total é positivo". Morishima (1976:269) demonstrou que "com o salário real dado, o equilíbrio de Von Neumann com o consumo positivo é, no máximo, único em relação à taxa de lucro e à taxa de crescimento", mas não à trajetória efetivamente descrita. Um interessante conceito surgido nesta discussão foi o de Fronteira Consumo-Investimento, como pode ser visto em Bruno (1969), Burmeister e Kuga (1970) e Morishima (1976).

A introdução de mudanças na técnica traz interessantes questões para a análise multissetorial, uma vez que a existência de múltiplas técnicas de produção implicam em trajetórias de Von Neumann alternativas - (Ver Carter, 1963; Morishima, 1964; e Bruno, 1970).

Assim, uma boa parte dos estudos sobre crescimento de sistemas econômicos multissetoriais utilizou-se de processos balanceados, proporcionais, de crescimento. Se por um lado esta escolha simplifica a questão, que de outra forma seria dificilmente tratável, por outro ela não pode ser seriamente considerada como representativa da estrutura dinâmica de sistemas econômicos reais e observáveis. Parece que economias reais só irão convergir para qualquer Turnpike apenas por acidente, ainda mais se esta convergência não for condicionada por um conjunto de (nem sempre possíveis) medidas racionais de planejamento estrutural. De fato, o processo desigual de crescimento parece ser a regra e não a exceção em economias capitalistas reais.

Pode entretanto ser argumentado que a identificação das propriedades de equilíbrio dessas trajetórias pseudo ou quase-dinâmicas de crescimento possibilita jogar alguma luz sobre o problema, revelando alguns dos determinantes do crescimento. Isolando e analisando os fatores necessários para a manutenção e controle dos estados estacionários de crescimento multissetorial pode-se ao menos obter alguns "insights" sobre o porque economia reais não seguem trajetórias de crescimento balanceado. Em outras palavras, sem critério de ordem, não há sequer como qualificar a desordem...

## 7. SISTEMA LINEARES E O RETORNO AOS CLÁSSICOS

Resta-nos comentar brevemente o retorno aos economistas clássicos britânicos do século XIX, ensejado pela utilização da linguagem e representação de sistemas lineares. Como fica mais claro em Sraffa (1960), recupera-se o conceito clássico da atividade econômica como um processo circular que reproduz todas as mercadorias consumidas, além da produção de um excedente físico -- o "produit net" dos fisiocratas -- de forma que a atividade possa ser retomada no período seguinte. (Cf. Pasinetti, 1977, 1981; Dobb, 1973; Meek, 1977; Bose, 1975; Garegnani, 1984; Blaug, 1975; Abraham-Frois & Berreti, 1979; Bharadwaj, 1989, como referências relevantes).

Nesses sistemas procuram-se estabelecer relações que possam ser encontradas em economias isoladas e fechadas, e que sejam independentes de quaisquer pressupostos em relação à constância dos retornos à escala ou de variações marginais nas variáveis. "A investigação é centrada exclusivamente naquelas propriedades de um sistema econômico que não dependem de alterações na escala de produção ou na proporção dos fatores". Sraffa, op.cit: V).

Vale ressaltar que ao contrário, por exemplo, de Brody (1970), Sraffa trata como dados tanto o estado tecnológico da produção como os níveis de atividade do sistema, como se estivessem sendo observados, e não com perfil adequados às proporções pré-definidas. Isto não lhe permite chegar imediatamente a expressões perfeitamente duais de preços e quantidades. Mas esta dualidade é plenamente restabelecida com o artifício da construção do Sistema Padrão, que apresenta tais proporções entre as quantidades físicas que asseguram a estrita existência da dualidade, a que só por acidente existiria no sistema original. Hoje é reconhecida, através da simples utilização dos teoremas de Ferron-Frobenius, que as proporções do Sistema Padrão de Sraffa são as mesmas do raio de Von Neumann para a trajetória balanceada de mais rápido crescimento multissetorial. Em geral isto é ignorado pelo fato de Sraffa ter apresentado o seu problema na forma de um problema de "número índice", que tradicionalmente é resolvido em macroeconomia através das aproximações dos índices de Laspeyres (Ver Morishima, 1969). Não

é entretanto, difícil demonstrar que Sraffa lida com um "problema do ponto fixo" que pode ser solucionado como uma extensão do teorema de Brouwer. Em suma, o sistema padrão é tal que sua composição estrutural produtiva leva a um perfil da produção nas mesmas proporções do autovetor dominante à direita da matriz tecnológica. (Cf. Goodwin 1987)

Após Sraffa, o agrupamento dos produtos nas categorias básicos e não-básicos não apenas se ligou à questão técnica da reducibilidade do sistema produtivo, mas guarda extrema semelhança com a distinção feita pelos economistas clássicos entre "necessidades" e "bens de luxo". Em Ricardo e Smith esta terminologia foi introduzida com o objetivo de isolar aquelas mercadorias que influenciariam o sistema de preços relativos e a distribuição do produto líquido (caso suas condições de produção fossem alteradas) daquelas que não teriam qualquer influência.

Do ponto de vista técnico, esta diferenciação permite a sequencial bloco-triangularização da matriz tecnológica até que se chegue a um bloco irreduzível, permitindo assim a solução de sistemas produtivos que apresentem matrizes tecnológicas redutíveis (e mesmo singulares).

Por outro lado, deve-se notar que os preços dos sistemas produtivos originados em Sraffa -- e reutilizados em uma nova vertente neo-ricardiana ou pós-keynesiana -- não devem ser confundidas com preços de mercado. Neste sentido eles devem ocupar um lugar semelhante aos preços de produção de Marx e paralelo aos preços naturais de Smith e Ricardo e até mesmo dos preços necessários dos fisiocratas. Em uma interpretação anti-equilibrista, na medida em que a equalização das taxas de lucro entre os setores de uma economia capitalista é não-verificada em nenhum instante, os preços de Sraffa podem ser interpretados como centros de gravitação ao redor dos quais seriam observados os preços efetivos de mercado. Nesta ótica, ao contrário de fornecer preços que seriam efetivamente observados no mercado, sistemas do tipo Sraffiano, nos levariam a um conjunto de preços que permitiria um estado ideal de reprodução balanceada, com reinvestimento total dos lucros.

Este estado não seria sustentado por nenhum outro conjunto de preços positivos para uma dada taxa de lucros. (Neste sentido estes preços sustentam o crescimento de Von Neumann, com um critério não-Walrasiano de valoração).

Finalmente, pode-se dizer que as análises Sraffianas são formalmente paralelas àquelas que surgiram a partir dos trabalhos originais de Leontief (1941, 1953) e que são geralmente incorporados às análises de equilíbrio geral de sabor Walrasiano. Entretanto parece-nos adequado chamar atenção para três pontos:

Primeiro: apesar de ser possível encontrar afinidades entre os sistemas originais de Walras e de Leontief, eles diferem bastante em termos das variáveis econômicas que são dadas. Enquanto em Walras o nível de atividade depende das quantidades existentes de "recursos prévios", em Leontief ele depende do nível de demanda final

existente. "Em Walras, o que é dado logicamente pertence ao princípio do processo produtivo; em Leontief o que é dado logicamente pertence ao fim do processo produtivo". (Napoleoni: 1960). Assim, ao contrário de Walras, Leontief inclui as quantidades de fatores produtivos entre as incógnitas do sistema e elas não são nada mais do que o resultado do processo produtivo dos períodos precedentes.

Segundo: existe uma importante diferença metodológica entre os sistemas de Leontief e de Sraffa. Enquanto no primeiro o produto total é uma incógnita, determinada pelo usos finais do produtos no consumo e no investimento, no último ele é dado (como se observado) a um específico nível de atividade. Em outras palavras nos modelos Sraffianos, a determinação da quantidade total produzida não é um problema a ser resolvido analiticamente como é nos modelos de Leontief. Um sistema de Leontief irá determinar as proporções nas quais os vários produtos são produzidos, mas não o nível nos quais eles serão de fato produzidos. A determinação deste nível é obtida através do valor da demanda final. Ao contrário, em sistemas do tipo Sraffa, tanto a estrutura da produção como a escala da operação são especificadas, enquanto consumo e investimento são variáveis, de acordo com a distribuição do produto líquido e considerações de outra natureza.

Assim, as similaridades matemáticas que podem ser estabelecidas entre sistemas Sraffianos e de Leontief não devem obscurecer as interpretações econômicas substancialmente diferentes que os separam.

Terceira: como já foi dito anteriormente, um grande número de modelos macroeconômicos de crescimento multissetorial são concebidos em um contexto de equilíbrio geral Walrasiano. As abordagens que buscam uma generalização dinâmica Sraffa-Von Neumann estão hoje principalmente ocupadas em se afastar do arcabouço Walrasiano na direção da reabilitação da valoração clássica. (Goodwin, 1982, 1983 e 1987; Schefold, 1980; Punzo, 1980, 1987; Blatt, 1983; Lichtenstein, 1983). Nas palavras de Nell (1967:23-4): "alguns dos problemas aparentemente intratáveis de frontados pela moderna teoria do crescimento, de fato, não têm qualquer conexão próxima a crescimento, mas surgem a partir de tensões internas à teoria de valoração que normalmente se presume subjacente aos modelos de crescimento", argumentando que se esta teoria de valoração fosse substituída por outra de sabor clássico, "esses problemas iriam desaparecer ou se tornar mais amenos".

"Certamente alguns escritores neoclássicos, como Solow, usaram sistemas de equações formalmente semelhantes aos Sraffianos. Mas a interpretação substantiva dessas equações -- que é o que transforma matemática em economia -- geralmente não foi a mesma". Nell (1976:99). A dificuldade parece residir no papel da determinação de preços que é atribuído à demanda por consumo dentro de um arcabouço neoclássico, de forma que a demanda faz com que os preços se ajustem de tal forma a que se obtenham os resultados do equilíbrio competitivo. Na teoria clássica, a demanda por consumo joga apenas um papel secundário na determinação de preços de

mercado, e mesmo assim simplesmente como explicação para suas flutuações de curto-prazo ao redor de seus preços de produção. A demanda por consumo provocaria o deslocamento do capital entre diferentes ramos de produção apenas no longo prazo. Neste sentido, é possível estabelecer paralelos entre o "problema da realização" de Marx e o "problema de demanda efetiva" de Keynes e de seus "ajustes quantidades" como contrapostos aos "ajustes-preços" Marshalliano.

É interessante notar que a perspectiva anti-equilibrista, incorporada a um modelo generalizado do tipo Sraffa - Von Neumann recupera um conjunto de conceitos analíticos de sabor clássico, ao mesmo tempo em que abre perspectivas estimulantes para o estudo de situações mais realistas, que incluam crescimento desbalanceado, crises de reprodução e outros fenômenos, cíclicos ou não, que costumam perturbar a dinâmica multissetorial.

## 8. CONCLUSÃO

Nesta rápida e despretenciosa apresentação sobre as contribuições de sistemas lineares à análise macroeconômica, buscamos evidenciar a riqueza de interpretações econômicas -- frequentemente divergentes e incompatíveis entre si -- surgidas na literatura, que se utilizam de expressões matemáticas estruturalmente idênticas. Como a realidade econômica que todos nós, macroeconomistas, procuramos interpretar e descrever é objetivamente a mesma, é visível o benefício adicional que as perspectivas analíticas derivadas da utilização das formulações ensejadas por modelos lineares nos abrem. Isto é dito sob o pressuposto de que sem um mínimo de ecletismo -- proporcionado pelo debate vigoroso e permanente -- não existe opção teórica crítica.

Goodwin (1987: 139-55), por exemplo, considera que é indispensável a avaliação não preconceituosa de Marx, Keynes, Schumpeter, Von Neumann e Sraffa para que lancemos luzes claras sobre a dinâmica de uma economia capitalista. A qualidade oscilatória, desigual e não perfeitamente periódica desta dinâmica é complexa: "para entendermos a natureza flutuante do crescimento, é necessário [considerar] não apenas o crescimento da produtividade, mas também a transmissão da demanda efetiva tanto para os setores estagnados, quanto para os setores evolutivos da economia" (op.cit.: 145). A incorporação à análise macroeconômica de matrizes de coeficientes técnicos atualizáveis e sequenciais; as interpretações das dinâmicas de desequilíbrio, inclusive à luz dos clássicos; e principalmente as recentes caracterizações de estado e potencial (Cf. Goettinger, 1983; Punzo, 1987) abrem perspectivas estimulantes nessa direção.

Finalmente o caos ! A nova matemática do caos, desenvolvida desde os trabalhos seminais de Lorenz proporciona um amplo campo para agendas de pesquisa que questionem os limites da linearidade: "o caos simplesmente adiciona uma explicação possível a mais, mas uma explicação de grande interesse teórico, uma vez que ela é de um tipo diferente: um gerador endógeno de irregularidades"

(Goodwin, op.cit: 125). Seja na perspectiva de análises do caos obtido a partir de sistemas determinísticos não-lineares, seja através da busca de regularidades do aparentemente caótico movimento de miríades de agentes econômicos, o leque de possibilidades de avanço analítico é instigante, sugerindo direções de possíveis desdobramentos nesta e na próxima década.

Resta-nos justificar a ausência neste texto de qualquer referência aos modelos de equilíbrio geral do tipo Arrow-Debreu. Embora, de fato, sejam legítimos usuários de modelos matemáticos lineares, convencionou-se que suas contribuições seriam pertinentes à microeconomia, fugindo do âmbito deste trabalho. Deve-se, no entanto, salientar que a discussão desses modelos permite comparações interessantes com alguns dos resultados aqui mencionados..

Uma outra ausência se destaca: a utilização de sistemas lineares no planejamento de economias planificadas. Ora, mas não deu certo, dirão alguns ! Pois é, fica para depois...

## BIBLIOGRAFIA

- ABHAMAM-FROIS, G & BERRETI, E. (1979) " Theory of Value, Prices and Distribution" Cambridge University Press.
- BACHARACH, M. (1970). " Proportional Matrices & Input-Output Change" - Cambridge University Press.
- BARNA, T. (ed). (1963) - " Structural Interdependence & Economic Development" - Macmillan, London.
- BELL, D. & KRISTOL, I. (eds) (1981) " The Crisis in Economic Theory" - NY - Basic Books.
- BHARADWAJ, K. (1989) - " Themes in Value and Distribution: Classical Theory Reappraised" - Unwin Hyman -
- BLACKBORBY, C. & SCHWORM, W. (1980) - " Intertemporal Technologies and the Existence of an Aggregate Investment Function" - Discussion Paper - 80-18 - Univ. British Columbia.
- BLACKBORBY, C & SCHWORM, W. (1982) " Aggregate Investment and Consistent Intertemporal Technologies" - in Review of Economic Studies. (49) - pp.595-614.
- BLACKBORBY, C & SCHWORM, W. (1983) " Aggregating Heterogeneous Capital Goods in Adjustment Cost Technologies" in Scandinavian Journal of Economics (85) pp. 207-222.
- BLAUG, M. (1975) - " The Cambridge Revolution: Success or Failure" ? The Institute of Economic Affairs.
- BLATT, J. M. (1983) - " Dynamic Economic Systems: A Post-Keynesian Approach" - Sharpe - NY.
- BLITZER, C. ; CLARK, P. & TAYLOR, L. (eds) (1975) " Economy-Wide Models and Development Planning" Oxford University Press.
- BOSE, A. (1975) - " Marxian and Post Marxian Political Economy. Penguin Books.
- G
- BRITTO, R. (1973). " Some recent developments in the Theory of Economic Growth: An Interpretation" - Journal of Economic Literature - Dec - pp. 1343 - 1366.
- BRODY, A. (1965) - " Three Types of Price Systems" - Economics of Planning (5).
- BRODY, A. (1970) - " Proportions, Prices & Planning" North Holland.
- BROMEK, T. (1974) - " Consumption-Investment Frontier in Von Neumann Models" in LOS & LOS (eds) (1974) pp. 47-58.

- PASINETTI, L. (1977) - "Lectures on the Theory of Production"  
Columbia University Press.
- PASINETTI, L. (1981) - "Structural Change and Economic Growth".  
Cambridge University Press.
- POWELL, A. (1980) - "The Major Streams of Economy - Wide Modelling:  
is Rapprochement Possible?" in Kwenta & Ramsey (1980).
- PUNZO, L.F. (1980) - "Economic Applications of a Generalized Perron-  
Frobenius Problem" - Economic Notes - (9).
- PUNZO, L.F. (1987) - "Modelling the Structure of a Capitalist  
Economy" - in Goodwin & Punzo (1987).
- PYATT, G. & THORBECKE, E. (1976) - "Planning Techniques for a Better  
Future" - Geneve - I.L.O.
- RAMOS, R. (1987) "Capacity Utilization and Trade Policy in a  
Computable General Equilibrium Model for a Small Open Economy" -  
Ph.D. Dissertation - Boston University.
- ROBINSON, J. (1962) "Essays on the Theory of Economic Growth" -  
St.Martin Press.
- SAMUELSON, P. (1951) "Abstract of a Theorem Concerning Substitution  
in Open Leontief Models" - in Koopmans (1951a).
- SCARF, H. & SHOVEN, J.B. (eds.) (1984) "Applied General Equilibrium  
Analysis" Cambridge University Press.
- SCHEFOLD, B. (1980) - "Von Neumann and Sraffa: Mathematical  
Equivalence and Conceptual Difference" Economic Journal (90).
- SCHWARTZ, J. (ed.) (1977) - "The Subtle Anatomy of Capitalism" -  
Sta Monica - California.
- SEN, A. (ed.) (1970). "Growth Economics" Pequin - London.
- SHOVEN, J.B. & WHALLEY, J. (1984) "Applied General Equilibrium  
Models of Taxation and International Trade: An Introduction and  
Survey" in Journal of Economic Literature - (22) pp. 1007-51.
- SKOLKA, J. (ed.) (1982) - "Compilation of Input-Output Tables" -  
Berlim - Spring - Verlag.
- SOLOW, R. (1959) - "Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output  
System" - Econometrica (27) - pp. 30-53.
- SRAFFA, P. (1960) - "Production of Commodities by Means of  
Commodities". Cambridge University Press.
- TAYLOR, L. (1975) "Theoretical Foundations and Practical  
Implications" - in Blitzer et al. (1975).



- LOS, J. & LOS, M. (1974) (eds). "Mathematical Models in Economics - North Holland.
- LOS, J. (1976) "Extended Von Neumann Models and Game Theory" in LOS & LOS (1976).
- LOS, J. & LOS M. (1976) - "Computing Equilibria: How and Why ? - North Holland.
- LYSY, F. & TAYLOR, L. (1980) "Formal Statement of General Equilibrium Model" in TAYLOR et al. (eds) (1980).
- MANDEL, E. & FREEMAN, A. (eds.) (1984) - "Ricardo, Marx, Sraffa" - Verso-London.
- MANSUR, A. & WHALLEY, J. (1984) - "Numerical Specification of Applied General Equilibrium Models: Estimation, Calibration and Data" - in Scarf and Shoven (eds.) (1984).
- MIRRELEES, J. A. (1969) - "The Dynamic Non-Substitution Theorem" - Review of Economic Studies (36).
- MORGENSTERN, O. (1972) - "Thirteen Critical Points in Contemporary Economic Theory: An Interpretation" - Journal of Economic Literature - (10) Dec.
- MORGENSTERN, O. & THOMPSON, G. L. (1976) - "Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economics" - Heath Lexington Books -
- MORISHIMA, M. (1961) "Prices and the Turnpike (II) Proof of a Theorem: The 'No Joint Production' Case" Review of Economic Studies (28) pp. 89-97.
- MORISHIMA, M. (1964) - "Equilibrium, Stability and Growth: A Multisectorial Analysis" Clarendon Press - Oxford.
- MORISHIMA, M. (1969) - "Theory of Economic Growth" - Oxford University Press.
- MORISHIMA, M. (1973) - "Marx Economics: A Dual Theory of Value & Growth. - Cambridge University university Press.
- MORISHIMA, M. (1974) - "Marx in the Light of Modern Economic Theory" - Econometrica - (42).
- MORISHIMA, M. (1976) - "Marx from a Von Neumann Viewpoint" - in Brown et al. eds. (1976).
- MEEK, R. (1977) " Smith, Marx and After: Two Essays on the Development of Economic Thought" - Wiley - NY.
- NEEL, E. (1967) - "Theories of Growth & Theories of Value" - Economic Development & Cultural Change (16) - pp. 15-26.

- GOODWIN, K. M. & FUNZU, L.F. (1987) - The Dynamics of a Capitalist Economy: A Multi-Sectoral Approach - Polity Press - Cambridge -
- HAHN, F. (1981) - "General Equilibrium Theoru" - in Bell & Kristal (eds) (1981).
- HAWKINS, D. (1948) - "Some Conditions of Macroeconomic Stability" - Econometrica (16) - p. 309.
- HICKS, J. (1961). "Prices and the Turnpike, (I) The Story of a Mare's Nest" - Review of Economic Studies (28) - pp. 77-88.
- HICKS, J. (1985) - Methods of Dynamic Economics Oxford Univ Press.
- KEMENY, J.; MORGENSTERN, O. & THOMPSON, G. (1956) "A Generalization of the Von Neumann Model of an Expanding Economy" - Econometrica (24) pp. 115-35.
- KMENTA, J. & RAMSEY, J.R. (Eds) (1980)- "Large Scale Econometrica Models: Theory and Practice" North Holland.
- KOOPMANS, T.C. (1951a) "Activity Analysis of Production & Allocation" Cowles Foundation Monographs - n. 13 - NY - John Wiley.
- KOOPMANS, T.C. (1951b) "Alternative Proof of the Non-Substitution Theorem for Leontief Models in the case of Three Industries" in Koopmans (1951a).
- KORNAI, J. (1967) - "Mathematical Planning of Structural Decisions" - North Holland.
- KORNAI, J. (1975) - "Models and Policy: The Dialogue Between Model Builder and Planner" - in Elitzer et al. (eds) (1975).
- LEIJONHUFVUD, A. (1968) "On Keynesian Economics and the Economics of Keynes" Oxford University Press.
- LEONTIEF, W. (1941) - "The Structure of the American Economy - 1919-1939" - NY - Oxford University Press -
- LEONTIEF, W. et al. (1953). "Studies in the Structure of the American Economy" - Oxford University Press -
- LEONTIEF, W. (1966) - "Input-Output Economics" - NY - Oxford University Press.
- LEONTIEF, W. et al. (1977). "The Future of the World Economy" - Oxford University Press.
- LICHTENSTEIN, P.M. (1983). "An Introduction to Post-Keynesian and Marxian Theories of Value and Price". Sharpe - NY.

BROWN, M; SATO, K & ZAREMBKA, P. (eds) (1976) - ESSAYS IN MODELING Capital Theory North Holland.

BRUNO, M. (1969). "Fundamental Duality Relations in the Pure Theory of Capital" - Review of Economic Studies (36) pp. 39-54.

BURMEISTER, E & KUGA, K. (1970) "The Factor-Price Frontier, Duality and Joint Production" - Review of Economic Studies (37) pp. 11-19.

CARTER, A. (1963) - "Incremental Flow Coefficients for Dynamic I/O Models With Changing Technology" - in BARNA (ed) (1963).

DAMÁSIO, J. (1981) - "Studies on Sraffian Systems: Towards a Neo-Ricardian Dynamic Theory" - Ph.D. Dissertation - Boston University.

DE AZEVEDO, J. (1988) "Policy Simulation in Multisectoral Model With Price Rigidities and Exogeneous Investment: A Case Study of Brazil 1975-1979" - Ph.D. dissertation - Boston University.

DEBREU, G. (1959) - "Theory of Value" - Wiley. N.Y

DOBB, M. (1975). "Theories of Value and Distribution Since A. Smith" Cambridge University Press.

DORFMAN, R.; SAMUELSON, P.A.; SOLON, R. (1958) - "Linear Programming and Economic Analysis" - NY - Mc. Graw Hill.

FUJIKOTO, T. (1975)- "Duality and the Uniqueness of Growth Equilibrium" - International Economic Review" pp. 781-91.

GANTHACHER, F. P. (1959) "The Theory of Matrices" Chelsea Publishing Company - NY - 2 vol.

GAREGNANI, P. (1976) - "On a Change in the Notion of Equilibrium in Recent Work on Value and Distribution" - in Brow et alii (1976).

GAREGNANI, P. (1984) "Value and Distribution in the Classical Economists and Marx" -- Oxford Economic Papers (36) - pp. 291-325.

GEORGESCU-ROEGEN, N. (1951) - "Some Properties of a Generalized Leontief Model" in Koopmans (1951a).

GOETTINGER, H. W. (1983) "Coping With Complexity" - Dordrecht - D. Reidel.

GOODWIN, R. M. (1982). "Essays in Economic Dynamics" - London - Macmillan.

GOODWIN, R. M. (1983) - "Linear Economic Structures" - London - Macmillan

- LOS, J. & LOS, M. (1974) (eds). "Mathematical Models in Economics - North Holland.
- LOS, J. (1976) "Extended Von Neumann Models and Game Theory" in LOS & LOS (1976).
- LOS, J. & LOS M. (1976) - "Computing Equilibria: How and Why ? - North Holland.
- LYSY, F. & TAYLOR, L. (1980) "Formal Statement of General Equilibrium Model" in TAYLOR et al. (eds) (1980).
- MANDEL, E. & FREEMAN, A. (eds.) (1984) - "Ricardo, Marx, Sraffa" - Verso-London.
- MANSUR, A. & WHALLEY, J. (1984) - "Numerical Specification of Applied General Equilibrium Models: Estimation, Calibration and Data" - in Scarf and Shoven (eds.) (1984).
- MIRRELES, J. A. (1969) - "The Dynamic Non-Substitution Theorem" - Review of Economic Studies (36).
- MORGENSTERN, O. (1972) - "Thirteen Critical Points in Contemporary Economic Theory: An Interpretation" - Journal of Economic Literature - (10) Dec.
- MORGENSTERN, O. & THOMPSON, G. L. (1976) - "Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economics" - Heath Lexington Books -
- MORISHIMA, M. (1961) "Prices and the Turnpike (II) Proof of a Theorem: The 'No Joint Production' Case" Review of Economic Studies (28) pp. 89-97.
- MORISHIMA, M. (1964) - "Equilibrium, Stability and Growth: A Multisectorial Analysis" Clarendon Press - Oxford.
- MORISHIMA, M. (1969) - "Theory of Economic Growth" - Oxford University Press.
- MORISHIMA, M. (1973) - "Marx Economics: A Dual Theory of Value & Growth." - Cambridge University university Press.
- MORISHIMA, M. (1974) - "Marx in the Light of Modern Economic Theory" - Econometrica - (42).
- MORISHIMA, M. (1976) - "Marx from a Von Neumann Viewpoint" - in Brown et al. eds. (1976).
- MEEK, R. (1977) " Smith, Marx and After: Two Essays on the Development of Economic Thought" - Wiley - NY.
- NEEL, E. (1967) - "Theories of Growth & Theories of Value" - Economic Development & Cultural Change (16) - pp. 15-26.

TAYLOR, L. et.al. (eds) (1980) "Models of Growth and Distribution for Brazil" Oxford University Press.

TAYLOR, L. (1983) - "Structuralist Macroeconomics: Applicable Models for the Third World" - Basic Books - NY.

VON NEUMANN, J. (1937) - "A Model of General Economic Equilibrium and a Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" Erge Suisse Eines Mathematischen Kolloquiums - ed. K. Menger-Vieno - pp. 873-83.

VON NEUMANN, J. & Morgenstern (1944) "The Theory of Games and Economic Behavior" Princeton University Press.

VON NEUMANN, J. (1945) "A Model of General Economic Equilibrium". Review of Economic Studies (13) pp. 1-9.