Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Do Zero às Medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática

Ronei Lima Badaró

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2015

Do Zero às Medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática

Ronei Lima Badaró

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tertuliano F. S. Franco.

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2015

Do Zero às Medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática

Ronei Lima Badaró

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, aprovada em 06 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tertuliano Franco Santos Franco (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro
UFBA

Prof. Msc. Samuel Barbosa Feitosa
UFBA

A Deus, à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha esposa por me apoiar nos dias em que tive que abrir mão da sua companhia para dedicar-me ao curso e ao trabalho de conclusão do mesmo e por, nestes dias, sempre preparar o café necessário para me manter acordado. Cada gole incluía uma dose extra de carinho e amor.
Aos colegas de curso, em destaque a Tiago e Cleber pela ajuda com material referente às competições de matemática e ao meu orientador Tertuliano, o "Tertu", pelas conversas sobre o tema, por compartilhar suas experiências com a OBM, pelas orientações, recomendações, revisões e pela paciência.

"O professor só pode ensinar quando está disposto a aprender".
Janoí Mamedes

Resumo

Neste material, apresentamos aos professores que irão preparar alunos para a OBM, um material de apoio para a tarefa. No primeiro capítulo, à guisa de introdução, apresentamos o objetivo e a justificativa do trabalho. No segundo capítulo construímos a ligação histórica das competições desse tipo até a OBM e OBMEP. O terceiro capítulo apresenta uma lista de competições acessíveis aos nossos alunos. No quarto capítulo, trazemos orientações burocráticas e sugestão de livros para o estudo dos professores. Os capítulos seguintes (do quinto ao oitavo) são propostas de planos de aula para que os professores se preparem para o curso.
Palavras chaves: OBM, curso preparatório, orientações aos professores.

Abstract

In this material we present to teachers that will prepare students for the OBM a support material for the task. In the first chapter, by way of introduction, we present the purpose and the reason for this study . In the second chapter we build the historical connection of that sort of competition to the OBM and OBMEP. The third chapter presents a list of accessible competitions to our students . In the fourth chapter we bring bureaucratic guidelines and a hint of books for the study of teachers. The following chapters (the fifth to eighth) are proposed lesson plans for teachers to prepare for the course.
Key words: OBM, preparatory course, guidance to teachers.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) são duas das chamadas olimpíadas do conhecimento, que existem em diversas áreas do saber como Química, Física, Astronomia, Biologia, dentre outras [1]. Essas competições têm conquistado espaço entre as escolas de ensino básico por serem um meio de divulgação da mesma quando têm seus alunos premiados.

A OBM, e também a OBMEP, porém, não têm como objetivo servir de propaganda às escolas e sim *"interferir decisivamente na melhoria do ensino de Matemática em nosso país estimulando alunos e professores a um desenvolvimento maior (...)"* [2].

Em 2011, o Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE), que é uma organização social supervisionada pelo Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) publicou o documento intitulado Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)[3] mostrando resultados positivos em relação ao que se propõe a competição.

> "(...) existem interesse e motivação de alunos e de professores pela matemática e também o estímulo ao desenvolvimento e a melhoria do desempenho do aluno nessa disciplina. (...) tanto alunos como professores destacaram a formação de grupos e melhoria das relações alunos-professor e alunos-alunos como um aspecto positivo das Olimpíadas. (...)
>
> É possível que haja, nesses momentos, o estreitamento dos vínculos socioeducacionais entre eles, formando e fortalecendo laços de solidariedade, premiação e reconhecimento de alunos e professores; valorização (relacionada a autoestima) do aluno vencedor ou premiado; e o fortalecimento das relações entre a matemática e outras disciplinas, notadamente, português (...)
>
> Em relação aos gestores educacionais, esses comentaram várias alterações observadas no comportamento de alunos e professores como algo positivo (...)"

Segundo Jacob Palis, pesquisador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) na introdução do livro de Moreira (2003)[4]:

> "As Olimpíadas de Matemática são hoje reconhecidamente um poderoso instrumento não só para a descoberta de talentos, mas também para difusão desta área fundamental do conhecimento, a que são expostas nossas crianças desde bem cedo. De fato, quando organizadas em várias etapas ou fases para o mesmo grupo de crianças ou jovens, pode-se ir desde testes amigáveis e atraentes até a etapa mais seletiva da descoberta de talentos, muitos deles tornando-se mais tarde excelentes cientistas ou profissionais em geral".

Corroborando com essa ideia, temos o caso de Artur Ávila, o primeiro brasileiro laureado com a Medalha Fields.

> "...o calculista coleciona medalhas desde os 13 anos, quando ganhou um bronze na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) de 1992. De lá até receber a sonhada Fields, Ávila conquistou alguns ouros em outras edições da olimpíada e concluiu seu doutorado no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), em 2001, aos 21 anos."[5]

O uso de jogos na educação trás diversos benefícios ao aluno conforme cita Roger Caillois em sua obra de 1990 intitulada Os jogos e os homens:

> "Cada jogo reforça e estimula qualquer capacidade física ou intelectual. Através do prazer e da obstinação, torna fácil que inicialmente era difícil ou extenuante". (in Alves, 2006, p 15)[6]

Ainda em Alves (2006)[6] é citado:

> "Spencer (1820 – 1903) elege o jogo como elemento que propicia o desenvolvimento da atividade intelectual em todos os aspectos, pois produz uma excitação mental agradável e, ainda, as crianças que com ele se envolvem denotam interesse e alegria".

Estendendo o conceito de jogo às competições como a OBM e OBMEP e juntando-se a isso os resultados estatísticos da OBMEP [1], ficam claros os benefícios da participação das escolas nestes eventos.

Neste trabalho, apresento informações que ajudem ao professor e aos gestores escolares a organizarem um curso preparatório para alunos que desejam participar dessas competições [2]. A proposta apresentada é resultado da experiência adquirida nos anos trabalhando com cursos preparatórios para a OBM em uma escola da rede particular de ensino de Salvador, onde pude experimentar formatos distintos e chegar a este que, sendo aplicado parcialmente no ano de 2014 (somente para níveis 1 e 2), nos rendeu 19 alunos premiados na Fase Regional Bahia da OBM (18 medalhas e uma menção honrosa) e uma aluna premiada com Prata na OBM, além de alunos mais preparados nas aulas "normais".

No primeiro capítulo, será apresentado um histórico das olimpíadas numa linha cronológica que liga da *Eötvös* na Hungria em 1894 até a realização da OBMEP no Brasil em 2005. No capítulo seguinte, listo as olimpíadas das quais os nossos alunos

[1] [3], p. 23 e 24

[2] O foco principal do trabalho é a OBM, mas acredito que as informações aqui presentes serão úteis para a OBMEP também

podem participar, com uma breve descrição das mesmas e do caminho necessário para participar delas. Seguem-se orientações de ordem burocrática aos gestores e professores responsáveis pela realização da OBM na escola. Essas informações são baseadas na minha experiência como professor responsável pela OBM numa escola particular de ensino básico em Salvador, na qual trabalho desde 2006.

A parte seguinte é o ponto principal do trabalho. Após analisar as questões das provas da OBM dos anos de 2010 a 2013, sugerimos uma relação de assuntos a serem abordados em sala de aula e, a partir destes, desenvolvemos um roteiro de estudos para o professor se preparar para o curso com: plano de aula, lista de exercícios (trata-se de um compilação de questões por tema) e indicação bibliográfica.

A quantidade de encontros sugerida (10 encontros na preparação para a primeira fase e 8 para a preparação para as demais fases) foi baseada novamente na minha experiência e em conversa com o orientador. Sabemos que quanto mais aulas forem ministradas, melhor preparados os alunos estarão. Escolhi porém, algo que seja real e não cause muitos transtornos nem seja muito cansativo para professores e alunos.

Capítulo 2

Breve histórico

São diversas as Olimpíadas de Matemática que acontecem no Brasil e no mundo e seria inviável abordar o aspecto histórico de todas. Assim, a seguir, é traçada uma linha cronológica que leva da *Eötvös* à criação da OBM e OBMEP, passando pela *International Mathematics Olympiad (IMO)* e pela primeira competição desse tipo no Brasil, a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM).

Hungria - 1894

A primeira competição desse tipo foi a *Eötvös* que ocorreu em 1894 na Hungria e consistia de um teste com três questões (sendo disponíveis quatro horas para a resolução) voltado para alunos que concluíram o equivalente ao ensino médio [7]. Essa competição, criada pela *Sociedade Húngara de Matemática e Física* no ano em que o *Barão Roland Eötvös* - fundador da citada sociedade - foi convidado a ser ministro da educação [8], tinha como objetivos identificar estudantes matematicamente talentosos e estimular a criatividade no ensino da matemática [9]. O fato de que os alunos melhor colocados tinham acesso direto à universidade [1], foi um dos motivos para o respeito obtido pela competição que, após a Segunda Grande Guerra, teve seu nome mudado para Kürschák.[2]

As questões que formaram a primeira competição foram:

> 1. Sejam x e y inteiros. Prove que uma das expressões $2x + 3y$ e $9x + 5y$ é divisível por 17 se, e somente se, a outra também for.
>
> 2. Dados um círculo e dois pontos P e Q, construa um triângulo retângulo inscrito no círculo de tal modo que os seus dois catetos passem pelos pontos P e Q respectivamente. Para quais posições de P e Q esta construção é impossível?
>
> 3.Os comprimentos dos lados de um triângulo de área t formam uma progressão aritmética com razão d. Encontre os lados e ângulos desse triângulo. Especificamente, resolva o problema para $d = 1$ e $t = 6$. [10] [a]
>
> [a] Uma solução está disponível em [11]

Segundo Stockton, 2012 [9]:

[1] Os alunos respondiam também a questões de Física, o que também garantia vaga na universidade aos mais bem colocados nessa disciplina

[2] Mais informações biográficas sobre *József Kürschák* podem ser obtidas em [8]

> "No entanto, a competição foi projetada para testar a capacidade de resolução de problemas e criatividade matemática mais do que recordação factual. Como um vencedor do prêmio, explicou: "os problemas são selecionados, no entanto, de tal forma que praticamente nada, exceto seus próprios cérebros, pode ser de alguma ajuda ... o prêmio não se destina para o bom menino, é destinado para o futuro matemático criativo"

Há uma menção em Alves (2010) [12] sobre uma competição do tipo mais remota:

> "Berinde (2004) ressalta porém que as competições matemáticas escolares - que não eram designadas como olimpíadas - já aconteciam em 1885, na cidade de Bucareste, na Romênia. Cerca de setenta estudantes de uma escola primária disputavam onze prêmios, atribuído a nove meninos e duas meninas."

Apesar dessa citação, a *Eötvös* é tida como a primeira Olimpíada de Matemática por ter uma abrangência nacional, pelo formato das questões e é citada como um dos motivos para a Hungria ser berço de grandes nomes nas ciências [14]. Além disso, a *Eötvös* é tida como precursora da *IMO - International Mathematics Olympiad*, sobre a qual discorreremos agora. [3]

IMO - 1959

A primeira edição da *IMO - International Mathematics Olympiad*, ocorreu em 1959 na Romênia. Neste primeiro ano, apenas alguns países do Leste Europeu (sete no total [4]) participaram da competição, num total de 52 pessoas [13]. Com o passar dos anos, tanto o número de países como o número de participantes cresceu. Na edição de 2014, realizada na África do Sul, foram 560 participantes de um total de 106 países.

A competição é voltada para alunos com idade inferior a 20 anos que não tenham vínculo com o nível superior. Segundo o regulamento da IMO, os países convidados a participar da competição devem enviar uma equipe composta por até 6 alunos e dois líderes, além de observadores. Cada país tem autonomia para decidir como formará a sua equipe [16]. No Brasil, essa seleção é feita a partir de três pontos: o resultado na OBM ou OBMEP, provas de seleção e listas de treinamento [17, 18].

O Brasil iniciou a participação na IMO no ano de 1979, tendo participado ao todo 35 vezes obtendo 9 medalhas de ouro, 33 de prata, 68 de bronze além de 29 menções honrosas (até 2014). Dentre os alunos participantes, podemos citar Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, medalhista de ouro em 1990, que hoje está envolvido com o ensino da matemática no país, sendo professor titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e membro da Comissão Brasileira de Olimpíadas de Matemática, estando em 2014 no cargo de coordenador geral.

As questões da primeira edição foram:

> 1. Prove que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para todo número natural n.

[3] Sobre a *Eötvös*, vale a pena citar a *KöMal*. Trata-se de uma publicação lançada juntamente com a competição e voltada para os estudantes. Dentre as seções, havia a de problemas que, conforme [14], foi o primeiro contato de diversos grandes nomes da matemática com problemas desafiadores

[4] Bulgária, Tchecoslováquia, GDR - Alemanhã Oriental, Hungria, Polônia, Romênia e URSS. [13]

2. Para quais valores reais de x temos,

$$\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})}+\sqrt{(x-\sqrt{2x-1})}=A$$

dados (a) $A=\sqrt{2}$, (b) $A=1$, (c) $A=2$, onde somente números reais não negativos são admitidos para raiz quadrada?

3. Sejam a, b, c números reais. Considere a equação quadrática em $\cos x$:

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

Usando os números a, b, c, forme uma equação quadrática em $\cos 2x$, cujas raízes são as mesmas da equação original. Compare as equações em $\cos x$ e $\cos 2x$ para $a=4,\ b=2,\ c=-1$.

4. Construa um triângulo retângulo dados a hipotenusa c tal que a mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica dos dois catetos do triângulo.

5. Um ponto arbitrário M é escolhido no interior do segmento AB. Os quadrados $AMCD$ e $MBEF$ são construídos do mesmo lado de AB, com os segmentos AM e MB como suas respectivas bases. Os círculos circunscritos a esses quadrados, com centros P e Q, se intersectam em M e também em um outro ponto N. Seja N' o ponto de intersecção das retas AF e BC.
(a) Prove que os pontos N e N' coincidem.
(b) Prove que a linha reta MN passa por um ponto fixo S independente da escolha de M.
(c) Encontre o lugar geométrico dos pontos médios do segmento PQ quando M varia entre A e B.

6. Dois planos, P e Q, se intersectam ao longo da linha p. O ponto A é dado no plano P; e o ponto C no plano Q; nenhum desses pontos está sobre a linha reta p. Construa um trapézio isósceles $ABCD$ (com AB paralelo a CD) no qual um círculo pode ser inscrito, e com os vértices B e D sobre os planos P e Q respectivamente.

A prova foi dividida em dois dias, sendo três questões por dia, e esse modelo ainda é seguido até hoje.

Um dos atrativos da competição é que os alunos medalhistas na IMO tem a entrada facilitada em universidades conceituadas do mundo com a possibilidade de obter bolsas de estudo nas mesmas.

Olimpíada Paulista de Matemática - 1977

No Brasil, a primeira competição de matemática no formato de olimpíada aconteceu em 1977 com a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM), organizada pela Academia Paulista de Ciências [19].

A OPM é dividida em três níveis α (para os alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental), β (para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental) e γ (para alunos dos 1° e 2° anos do ensino médio) e é voltada para alunos matriculados em escolas do Estado de São Paulo. Segundo o regulamento da OPM de 2013 *"Poderão ser aceitos como participantes, a critério da comissão organizadora, alunos de escolas de outros estados e países"* [20].

A OPM consiste em duas etapas: a primeira etapa é realizada nas escolas participantes, onde são aplicadas as provas elaboradas pela comissão organizadora do evento. De cada nível, são selecionados no máximo 5 alunos (desde que obtenham a pontuação mínima) para a fase final que é realizada em local determinado pela comissão organizadora que elabora, aplica e corrige as provas. A premiação ocorre no mesmo dia.

Alunos premiados na OPM são convidados a fazer parte da equipe que disputará a Olimpíada de Matemática Rioplatense representando o estado de São Paulo. As provas dos últimos anos da OPM estão disponíveis no site da competição [21]

OBM - 1979

Em 1979 surge a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A OBM teve diversas alterações em seu formato da primeira competição até hoje [22]. Atualmente é disputada em quatro diferentes níveis de acordo com a série que o aluno cursa, sendo: Nível 01 para alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental, Nível 02 para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental, Nível 03 para alunos do ensino médio *ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM* [23], e Nível Universitário para estudantes de graduação de qualquer curso.

O formato atual começou a ser forjado em 1998 quando a competição foi dividida nos três níveis supracitados e em três fases. A criação do Nível Universitário só ocorreu em 2001. No primeiro ano porém, a competição consistia de uma única prova com cinco questões, que foram:

> 01. Sejam a,b reais tais que $0 \leq 2a \leq \pi$ e $0 \leq 2b \leq \pi$. Se $a < b$ prove que $a - \operatorname{sen} a < b - \operatorname{sen} b$. A última desigualdade continua válida se $a < b$ mas $2\pi \leq a \leq 3\pi$ e $2\pi \leq b \leq 3\pi$?
>
> 02. Seja $R(x) = mx + n$ o resto da divisão de um certo polinômio $P(x)$ por $T(x) = x^2 - (a+b)x + ab$ com a e b constantes distintas.
> (i)Determine m e n em funçao de a e b;
> (ii)Determine m e n com $P(x) = x^{200}, a = -1, b = 2$;
> (iii)Prove que no caso (ii) m e n sao inteiros.
>
> 03. Um triângulo ABC tem a base AB fixa sobre a reta r e o vértice C desloca-se ao longo de uma reta s paralela a r e a distância h de r. Determine a curva descrita pelo ponto de encontro das alturas de ABC enquanto C percorre s.

04. Prove que o número de soluções inteiras positivas de

$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 + ... + 1000x_{10} = 3025 \text{ (*)}$$

é igual ao número de soluções inteiras não negativas de

$$y_1 + 8y_2 + 27y_3 + ... + 1000y_{10} = 0$$

Usando este fato, conclua que a equação (*) tem apenas uma solução e determine-a.

05. (i) $ABCD$ é um quadrado unitário, M é ponto médio de AB, N é médio de BC e I o ponto comum a DN e CM. Calcule a área do triângulo NIC.
(ii) Seja um paralelogramo $ABCD$ e sejam M, N, P, Q médios de AB, BC, CD, DA respectivamente. Prove que a área do octógono estrelado $ANDMCQBP$ é 60% da área do paralelogramo.
(iii) Considere um triângulo isósceles ABC e sejam AM, BN, CP suas medianas e G seu centroide. Prove que a área de $AGBC$ é $2/3$ da área de ABC.
(iv) a propriedade demonstrada em (ii) é válida para outros quadriláteros ou apenas para o paralelogramo? [24]

Em 1998, além do novo formato da OBM, foi lançada a revista Eureka! que serve, até hoje, como material de preparação para as provas da OBM. O lançamento da revista fez parte de uma reestruturação do projeto da OBM tornando-a mais abrangente e com o objetivo de não só descobrir jovens talentos, mas também melhorar o ensino de matemática no país [26].

Também em 1998, foi criada a Semana Olímpica *destinada a reunir os alunos premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática, estes alunos participam de um treinamento intensivo junto a uma equipe de professores de diversas partes do país, cuja finalidade é dar início ao processo de seleção das equipes que irão representar o Brasil nas diversas competições internacionais de Matemática.* [25]

OBMEP - 2005

A primeira edição da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) ocorreu no ano de 2005 com 10.520.831 alunos inscritos de 31.031 escolas com 93,5% dos municípios brasileiros participando da primeira fase da competição que é realizada pelo IMPA com o apoio da SBM [27, 28]. Em 2014, esses números subiram para 18.192.526 alunos de 46.711 escolas representando 99,41% dos municípios brasileiros, o que tornam a OBMEP a maior Olimpíada de matemática do mundo [29].

Os alunos que participam da OBMEP que, necessariamente, são alunos matriculados em escolas públicas (municipais, estaduais ou federais), são divididos em três níveis que são: Nível 01 para alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental, Nível 02 para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental, Nível 03 para alunos do ensino médio.

Na primeira fase, os alunos respondem a 20 questões de multipla escolha (sendo disponíveis 2 horas e 30 minutos para a resolução) e na segunda e última fase, os alunos tem 3 horas para responder às 6 questões discursivas. As provas e resoluções, bem como material de apoio aos estudos, estão disponíveis no site da competição [30].

Como forma de preparação, há ainda o programa POTI (Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo) destinados a alunos dos níveis 2 e 3 que participaram da OBMEP ou OBM. Para assistir às aulas presenciais [5], é necessário fazer a inscrição no site do programa [31], que também disponibiliza de forma aberta vídeos e material didático.

Aos alunos medalhistas da OBMEP são oferecidas participação no Programa de Iniciação Científica Jr (PIC), no Programa de Iniciação Científica – Mestrado (PICME) e na Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI). Essas ações contemplam dois dos objetivos da competição que são *"identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas"* e também *"contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas"*.

[5] Até 2014, disponíveis nas cidades de Salvador, Maceió, Fortaleza, João Pessoa, Maringá, Ponta Grossa, Lajeado, Porto Alegre, Rio de Janeiro, São Paulo, São José dos Campos e São Bernardo do Campo

Capítulo 3

Olimpíadas acessíveis a nossos alunos

Há uma variada gama de competições abertas aos nossos alunos. A seguir, será apresentada uma breve descrição de cada uma delas e os meios de acesso às mesmas.

Nacionais

Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM: Como já descrito no capítulo anterior, a OBM é aberta a estudantes das escolas de ensino básico e a estudantes universitários. Para participar, a escola deverá fazer o cadastro no site da competição (`www.obm.org.br`) entre os meses de março e abril. Serão necessários os dados da escola para efetuar a inscrição, dentre esses, o código do INEP, que pode ser obtido no site `http://www.dataescolabrasil.inep.gov.br/dataEscolaBrasil/`. Nos capítulos seguintes, serão abordados outros aspectos da participação das escolas nesta competição.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP: A OBMEP é destinada exclusivamente a alunos matriculados em escolas públicas. Para participar da competição, a escola deverá fazer a inscrição no site `www.obmep.org.br`. As inscrições acontecem nos meses de março e abril. Como descrito no capítulo anterior, há no site acesso às provas dos anos anteriores além de outros materiais para a preparação dos alunos. Um grupo de alunos do ProfMAT no Pará [1], orientados pelo prof. João Pablo Pinheiro da Silva, elaborou como trabalho de conclusão de curso um material multimídia onde é apresentada a resolução de questões de geometria da OBMEP dos três níveis da competição. A versão escrita está disponível em [34, 35, 36].

Canguru de Matemática Brasil: A competição que surgiu na França em 1991, já acontece em mais de 50 países e tem a característica de ser aberta a todos os estudantes do terceiro ano do ensino fundamental ao terceiro ano do ensino médio, divididos em seis categorias de acordo com a fase escolar, e busca *"...atrair tantos estudantes quanto for possível, com a finalidade de mostrar-lhes que a Matemática pode ser interessante, útil e mesmo divertida".* [32]. As provas são compostas por questões de múltipla escolha (de 24 a 30 questões) consideradas fáceis. As inscrições são feitas em novembro e a competição ocorre em março do ano seguinte. No site da competição podem ser encontradas as provas dos anos anteriores

[1] Augusto Lacerda Lopes de Carvalho Júnior, Mário Henrique da Silva e Ronildo Lopes Pontes

Regionais

Diversos estados realizam, em paralelo à OBM, competições voltadas aos alunos da sua região, como exemplo, Pará, Rio Grande do Norte, Goiás, Espírito Santo, Minas Gerais, Paraíba, Rio de Janeiro, São Paulo, Bahia e Santa Catarina. No site da OBM [2] há a relação de algumas delas com o link para maiores informações. Algumas cidades também realizam competições deste tipo a exemplo de Porto Alegre, Rio Preto, Campinas e Jundiaí. Pesquise sobre as competições na sua região. Dentre as competições regionais, destaco duas que são abertas a alunos de outros estados.

Olimpíada Paulista de Matemática - OPM: Para fazer a inscrição na OPM, que já foi citada como sendo a primeira competição do tipo no Brasil, acesse o site `www.opm.mat.br`. As inscrições ocorrem, em geral, no mês de junho e as provas ocorrem em duas fases: a primeira a ser realizada na própria escola e a segunda a ser realizada em São Paulo. Verifique a possibilidade de enviar os alunos para a realização da segunda prova já que podem haver custos de passagens e hospedagem caso sua escola não seja na capital paulista. No histórico foi descrita a divisão dos alunos nos níveis α, β e γ. Observe que a OPM é para alunos do 6° ano do ensino fundamental ao 2° ano do ensino médio. Há no site provas de anos anteriores que podem ser usados como material de preparação dos alunos.

Olimpíada de Matemática da Unicamp - OMU: A OMU é uma competição aberta a alunos de escolas públicas e privadas de todo o país e é dividida em dois níveis: α para alunos de 8° e 9° anos do ensino fundamental e β para alunos do ensino médio. As inscrições são feitas entre março e abril no site `http://www.ime.unicamp.br/~olimpiada/`, onde são disponibilizados simulados e provas de anos anteriores. As provas da primeira fase são realizadas nas escolas participantes e as provas da segunda e terceira fase são realizadas na Unicamp (só há terceira fase para o nível β). Os alunos que se classificam para a última fase e professores das escolas participantes podem participar de oficinas que são oferecidas na Unicamp. Há uma taxa de inscrição cobrada por aluno.

Internacionais

Os alunos premiados na OBM e OBMEP com medalha de ouro, prata, bronze ou com menção honrosa podem fazer parte da selação para as competições internacionais. A escolha dos alunos que representarão o Brasil nas competições internacionais envolve, além da nota na OBM ou OBMEP, resultados em provas de seleção e listas de treinamento. A comissão encarregada elabora a lista com as equipes e envia à Comissão de Olimpíadas [33]. Segue uma breve descrição de cada uma, conforme disponível no site da OBM.

International Mathematical Olympiad - IMO: A IMO é realizada a cada ano em um país diferente e em 2017 o Brasil sediará a competição. A equipe que representa o país nessa competição é formada por 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente na data da realização das provas, o que se dá, em geral, no mês de julho. Outras informações já foram dadas no histórico e podem ser obtidas pelo site `www.imo-official.org`.

[2]http://www.obm.org.br/opencms/competicoes/regionais/

Olimpíada Ibero-Americada de Matemática - OIM: Participam da OIM os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à olimpíada e que não tenham participado anteriormente em duas OIM.

Olimpíada de Matemática do Cone Sul: Destinada a estudantes que não tenham feito 16 anos de idade até o final do ano imediatamente anterior à competição, da qual, cada país participante é representado por uma equipe composta de 4 estudantes.

Olimpíada de Maio: É uma competição realizada na Argentina entre os alunos de países da América Latina, Espanha e Portugal, disputada em dois níveis: Nível 1 para alunos até 13 anos e Nível 2 para alunos de até 15 anos.

Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária - OIMU: Para participar da OIMU, o competidor deve estar matriculado em uma universidade como estudante de graduação não deve possuir título universitário de graduação ou equivalente.

Internacional Mathematics Competition For University Students - IMC: O evento, voltado para alunos universitários, é realizado no mês de julho e conta com a participação de algumas das principais instituições de ensino do mundo como por exemplo: Cambridge, École Polytechnique, Instituto Max Planck, Instituto Technion, MIT, Oxford, Universidade Complutense de Madri e Universidade de Moscou e as brasileiras UFBA, UNICAMP, ITA, IME, dentre outras.

Romanian Master in Mathematics: Essa competição é voltada apenas para os melhores países do mundo em competições internacionais do gênero. A Romanian Master in Mathematics (RMM) é organizada desde 2007 pela Escola Nacional de Informática "Tudor Vianu"em colaboração com a Sociedade Científica Romena de Matemática e o Ministério de Educação Investigação e Juventude. Participam dela alunos secundaristas ou que ainda não tenham vínculo com universidades ou equivalentes.

Competição Ibero-Americana Interuniversitária de Matemática: Todos os países Iberoamericanos podem participar enviando uma equipe por universidade ou por país. As equipes são formadas por, no máximo, 4 estudantes e um líder. Os participantes não devem possuir título universitário de graduação (ou equivalente) e devem estar matriculados em uma universidade como estudante de graduação.

Asian Pacific Mathematics Olympiad - APMO: Realizada em diversos países asiáticos e da América, a APMO é dedicada a estudantes do Ensino Médio. No Brasil, a olimpíada APMO é aplicada apenas aos alunos que tenham sido premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). As provas dos alunos selecionados são enviadas para a comissão organizadora no Japão onde é dada a classificação final.

Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa: A primeira competição ocorreu em 2011 e envolve jovens dos oito países de língua portuguesa: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor Leste. Cada país participante pode ser representado por uma equipe de quatro estudantes de até 18 anos.

Capítulo 4

Orientações à Direção da Escola

Equipe de professores: Cabe à direção da escola fazer a escolha da equipe que ministrará as aulas do curso preparatório para a olimpíada. Para essa escolha, é interessante ficar atento a alguns fatores como:

a) Empatia com o aluno – O professor que tem boa aceitação junto ao corpo discente tem mais facilidade de manter a turma motivada, capta mais alunos para o curso e facilita a aceitação para os alunos que não foram aprovados, evitando a desmotivação (já pensando no ano seguinte).

b) Conhecimento da matéria – Espera-se que o professor que está em sala de aula tenha domínio do conteúdo que está transmitindo e que esteja sempre em busca de aperfeiçoar os seus conhecimentos. Pelo fato das questões das olimpíadas terem, em geral, um nível mais elevado que as questões trabalhadas na escola e explorarem bastante o raciocínio, é importante que o professor que está à frente da turma esteja disposto a se dedicar ainda mais, estudando e resolvendo questões de olimpíadas ou que tenham o perfil.

O ideal é que se tenha um professor por nível da OBM e que ele seja professor das séries correspondentes, pois além de já está familiarizado com os assuntos, facilita a captação de alunos. Claro que, de acordo com a quantidade de professores disponíveis na escola, um mesmo professor pode ser responsável por mais de um nível ou também ter mais que um professor por nível.

Há um trabalho de Emanuel Carneiro (professor no IMPA) intitulado *Olimpíada de Matemática - Uma porta para o futuro* [1] onde são apresentados alguns argumentos tanto para a implantação do curso como para refutar possíveis oposições à ideia. Essa leitura é recomendada caso haja alguma dificuldade dessa natureza.

Professor responsável: Dentre o grupo de docentes selecionado, um deve ser escolhido como professor responsável. Caberá a ele fazer a inscrição no site da OBM, receber e encaminhar as provas, contactar a equipe do curso, organizar junto com os gestores as turmas, manter os coordenadores e dirigentes informados e demais demandas que possam ocorrer.

O professor responsável terá um papel de "coordenador da olimpíada". É importante deixar claro ao mesmo que ele é o responsável pelo bom andamento do curso e por providenciar junto aos setores da escola tudo o que for necessário para que o mesmo ocorra. Essa escolha é importante e deve levar em consideração o compromisso, o cumprimento de prazos, a capacidade de liderança e o bom relacionamento com os colegas.

[1] Disponível em `http://poti.impa.br/upload/extra/bienal2004.pdf`

Inscrição: A escola deve inscrever-se para participar da OBM no site `www.obm.org.br`. Para isso, deve-se ter o código do INEP referente à escola além de outros dados como endereço, telefone de contato e também os dados do professor responsável. É essencial ter muito cuidado no preenchimento destes dados já que a prova a ser aplicada será enviada ao endereço cadastrado no momento da inscrição. É necessário aguardar o período para o cadastramento observando periodicamente o site. Em geral, o processo inicia-se no final do mês de março e vai até o final do mês de abril.

Comunicados: Antes do início do curso, é necessário elaborar um comunicado para ser dado a cada aluno com uma explicação básica do que é a OBM e sobre o curso. O ideal é que a divulgação seja feita pelos professores de matemática da própria turma em seu horário de aula. Para isso, o professor responsável deverá disponibilizar aos demais colegas todas as informações sobre a OBM e sobre o curso preparatório.

Outro comunicado que vale ser feito é o referente à realização da prova. Mesmo que já tenha sido avisado sobre o dia, horário e local (as provas da primeira e segunda fase são realizadas na própria escola), pode haver um esvaziamento do grupo no dia da prova por esquecimento.

Quando a prova já tiver sido corrigida e a nota de corte divulgada, deve ser elaborado mais um comunicado para os alunos aprovados (com a nota e as informações sobre o curso para a segunda fase) e outra para os alunos não aprovados (agradecendo pela participação e contando com a inscrição no ano seguinte), o mesmo se repetindo para a terceira fase.

Provas e gabaritos: As provas da primeira e segunda fases, que são aplicadas e corrigidas na escola (a terceira fase é aplicada em local indicado pela comissão organizadora, que fica responsável pela correção), serão entregues pelos Correios no endereço cadastrado no ato da inscrição da escola. Cabe à escola fazer as cópias das provas e gabaritos para os alunos participantes. Além disso, a escola deverá disponibilizar folhas de papel branco para os alunos utilizarem como rascunho. Para a realização da avaliação, os alunos deverão portar apenas lápis, caneta e borracha. Nós permitimos que os alunos levem água e algum alimento (que não tenha cheiro forte ou que faça barulho) para o dia de prova.

Assuntos por aula: Nos próximos capítulos serão apresentados os assuntos separados por nível, fase e aula. São sugestões dadas a partir da análise das provas dos últimos anos e podem ser modificados a critério do professor. O plano de aula contém a síntese dos tópicos a serem abordados em cada aula, exercícios e bibliografia recomendada. Como a escolha dos tópicos a serem trabalhados foi baseada principalmente nas provas dos anos de 2010 a 2013, foram incluídas prioritariamente as questões desses anos nas listas de exercícios.

Sugestão de livros: Em cada lista de exercício dos capítulos 5 a 8 há uma bibliografia recomendada. Estes livros indicados são uma proposta de biblioteca que o professor (ou a escola) pode montar para ter sempre a mão material de qualidade para a preparação das aulas. Segue uma compilação das leituras indicadas:

Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM. Rio de Janeiro, 2012

Carmo, Manfredo Perdigão do. *Trigonometria / Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Fomin, Dmitri; Gekin, Sergey; Itenberg, Ilia. *Círculos Matemáticos: a experiência russa*. IMPA. Rio de Janeiro, 2012

Hefez, Abramo. *Indução Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. SBM. Rio de Janeiro, 2011

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio , v.1 a 4*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas*. SBM. Rio de Janeiro, 2010

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Morgado, Augusto César. Análise Combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar, v.1 a 6*. SBM. Rio de Janeiro, 2012

Oliveira, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Santos, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

Shine, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

TAO, Terence. *Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal*. SBM. Rio de Janeiro, 2013

Além desses livros, há diversos outros disponíveis no site da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (www.sbm.org.br). Dou um destaque especial para as seguintes coleções: Coleção do Professor de Matemática, Coleção PROFMAT e Coleção Olimpíadas de Matemática.

Relembro que no site da OBM e da OBMEP há também material de estudo como a Revista Eureka!, Banco de Questões da OBMEP, as apostilas do POTI e o arcevo de provas já aplicadas.

Capítulo 5

Aulas do Nível 01 - Fase 01

Para o Nível 01 os tópicos escolhidos para as dez aulas de preparação para a primeira fase, separados por aula, foram:

Aula 01 - Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Aula 02 - Números inteiros e operações, múltiplos e divisores.

Aula 03 - Números primos e decomposição em fatores primos.

Aula 04 - Porcentagem, frações e operações com frações.

Aula 05 - Razão e proporção.

Aula 06 - Números decimais e potenciação.

Aula 07 - Média aritmética e resolução de problemas.

Aula 08 - Equação do primeiro grau e sistemas.

Aula 09 - Área de alguns polígonos e volume de paralelepípedo e cubo.

Aula 10 - Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Como dito anteriormente, a escolha desses assuntos se deu pela análise das provas dos anos de 2010 a 2013. O quadro a seguir mostra a quantidade de questões envolvendo cada um desses assuntos nesses anos.

Tema	2013	2012	2011	2010
Aula 01	6	5	4	6
Aula 02	4	2	1	2
Aula 03	1	1	1	1
Aula 04	3	3	1	1
Aula 05	0	1	1	2
Aula 06	2	2	2	2
Aula 07	0	0	1	0
Aula 08	0	3	3	2
Aula 09	2	1	2	2

Pode-se observar que média aritmética aparece diretamente em apenas uma questão nesses anos. Trata-se porém, de uma ferramenta importante na resolução de diversas questões e por isso preferimos incluí-la dentre os temas selecionados.

As listas de exercícios apresentam uma compilação de questões (principalmente da OBM e da OBMEP) por tema. Apenas uma questão em cada uma das listas de exercício apresenta resolução ou comentário sobre a mesma. A escolha de não apresentar as demais resoluções se deu pelos seguintes motivos: as questões da OBM e OBMEP já apresentam resolução nos sites das competições, as demais questões são consideradas de simples resolução e ainda, o trabalho teria muito mais páginas do que já tem.

Em escolas onde o professor julgar que não há possibilidade de participação na OBM ou OBMEP, essas questões selecionadas podem ser usadas para desenvolver uma competição interna com os seus alunos.

Fase 01 - Aula 01

Tema da aula: Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer o funcionamento básico da OBM como a divisão em níveis e fases, o formato da prova e do curso preparatório e a forma de classificação para a segunda fase. Além disso, deverá saber os caminhos para resolver questões com os temas propostos (visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos).

Síntese dos assuntos:

Sobre a OBM: A OBM surgiu em 1979, sendo organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Atualmente é disputada em quatro diferentes níveis de acordo com a série que o aluno cursa, sendo: Nível 01 para alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental, Nível 02 para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental, Nível 03 para alunos do ensino médio *ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM.* e Nível Universitário para estudantes de graduação de qualquer curso.

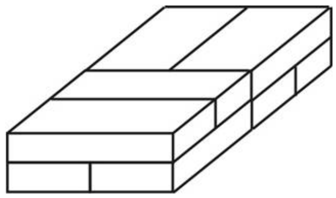
Após a correção das provas da primeira fase (que são de múltipla escolha com 20 questões), é estabelecida e divulgada no site da OBM a nota mínima para que o aluno seja classificado para a prova da segunda fase. Esta tem um formato diferente, sendo dividida em Parte A - 6 questões a serem resolvidas e apresentado apenas o resultado e Parte B - 3 problemas onde a resolução é levada em consideração (não é necessário estender o debate sobre a segunda fase, deixando isso para as aulas destinadas a esta fase).

Sobre o curso: O curso preparatório para a prova da primeira fase terá 10 aulas que serão ministradas segundo dias e horários divulgados na carta já entregue. O curso, apesar de não ser obrigatório, tem em si um dos objetivos da OBM que é estimular o estudo da matemática e é de grande ajuda por proporcionar o contato dos alunos com os assuntos e questões já cobrados na OBM. É comum que alguns alunos façam a inscrição para o curso mas percebam que não é conveniente para eles continuar e é importante deixar claro que eles podem deixar de frequentar as aulas nestes casos.

Sobre as questões: Resolver as questões selecionadas, fazendo os alunos perceberem as estratégias escolhidas e até mesmo, estimular que eles proponham outras. Selecionar questões que foram aplicadas em edições recentes da OBM. Distribuir lista de exercícios com problemas desse tipo.

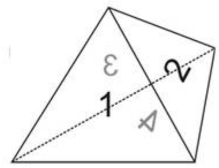
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2010) Carlos tem 2010 blocos iguais de 10 cm de largura por 20 cm de comprimento e 1,5 cm de espessura e resolveu empilhá-los formando uma coluna de 20 cm de largura por 40 cm de comprimento, como na figura. Qual dos valores a seguir, em metros, é o mais próximo da altura dessa coluna?



A) 7 B) 7,5 C) 8 D) 8,5 E) 9

Questão 02 (OBM 2010) As quatro faces de um dado são triângulos equiláteros, numerados de 1 a 4, como no desenho. Colando-se dois dados iguais, fazemos coincidir duas faces, com o mesmo número ou não. Qual dos números a seguir não pode ser a soma dos números das faces visíveis?



A) 12 B) 14 C) 17 D) 18 E) 19

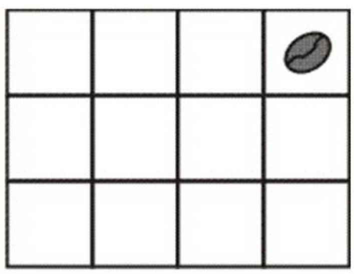
Questão 03 (OBM 2010) Um jornal publicou a tabela de um campeonato de futebol formado por quatro times, apresentando os gols marcados e os gols sofridos por cada time. Por uma falha de impressão, a tabela saiu com dois números borrados, conforme reprodução a seguir.

	Gols marcados	Gols sofridos
Craques do Momento	8	4
Independentes	1	6
EC Boleiros	4	***
Esmeralda FC	5	***

Sabe-se que o time Esmeralda FC sofreu dois gols a mais que o time EC Boleiros. Quantos gols sofreu o time Esmeralda FC?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 04 (OBM 2010) A figura representa uma barra de chocolate que tem um amendoim apenas num pedaço. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Então combinam dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?



A) Escolher a primeira coluna à esquerda.
B) Escolher as duas primeiras colunas à esquerda.
C) Escolher a terceira linha, de cima para baixo.
D) Escolher as duas últimas linhas, de cima para baixo.
E) Qualquer uma, já que Fábio forçosamente ficará com o amendoim.

Questão 05 (OBM 2010) Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:

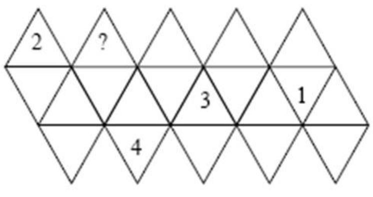
Arnaldo: "Eu tenho quatro cartas com o mesmo número."
Bernaldo: "Eu tenho as cinco cartas vermelhas."
Cernaldo: "As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V."
Dernaldo: "Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número."

Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

A) Arnaldo B) Bernaldo C) Cernaldo D) Dernaldo E) Não é possível definir.

Solução Neste tipo de questão, costumamos fazer a suposição de que uma das afirmações é verdadeira e analisamos as implicações dessa suposição sobre as outras afirmações. Suponha que a afirmação de Arnaldo é verdadeira, ou seja, ele tem quatro cartas com o mesmo número. Isso significa que cada uma das cartas é de uma cor diferente já que não há cartas iguais. Vamos supor que essas cartas são as que têm o número 1, ou seja: 1 azul, 1 amarelo, 1 verde, 1 vermelho. Essa suposição implica que Bernaldo está mentindo pois uma das cartas vermelhas está com Arnaldo (1 vermelho). Cernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 2 verde,4 verde, 5 verde, 2 vermelho e 3 vermelho. Dernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 3 azul, 3 amarelo, 3 verde, 4 azul e 4 amarelo. Assim, temos uma situação onde somente Bernaldo faz uma afirmação falsa.

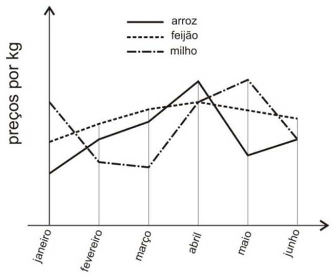
Questão 06 (OBM 2010) A figura a seguir foi recortada em cartolina e depois dobrada para formar um icosaedro. As faces em branco foram numeradas de modo que ao redor de cada vértice (pontas do sólido) apareçam os números de 1 a 5. Qual número está na face com a interrogação?



ICOSAEDRO

Questão 07 (OBM 2011) Esmeralda rasgou uma folha de papel em n pedaços e, em seguida, pegou uma dessas partes e rasgou-a também em n pedaços. Não satisfeita, pegou uma destas últimas partes e também a rasgou em n partes. Qual dos números a seguir poderia ser a quantidade total de pedaços obtida por Esmeralda?
A) 15 B) 18 C) 24 D) 26 E) 28

Questão 08 (OBM 2011) O gráfico mostra a variação dos preços de alguns produtos alimentícios no primeiro semestre em uma certa região. Com base no gráfico é possível afirmar com certeza que:



A) o milho sempre foi mais barato que o arroz e o feijão
B) o preço do arroz foi o mais estável no período
C) o feijão sempre custou mais caro que o milho
D) nunca houve dois produtos com o mesmo preço
E) o produto com menor variação de preços foi o feijão

Questão 09 (OBM 2011) No desenho, três cubos iguais apoiados sobre uma mesa têm suas faces pintadas com os números 0, 1, 3, 4, 5 e 9. Qual é a soma dos números de todas as faces em contacto com a mesa?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Questão 10 (OBM 2011) Esmeralda tem 11 notas de dois reais, Rosa tem 7 notas de cinco reais e Nelly tem 3 notas de dez reais. Qual é o menor número possível do total de notas que devem mudar de mãos de forma que todas as moças fiquem com a mesma quantia?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

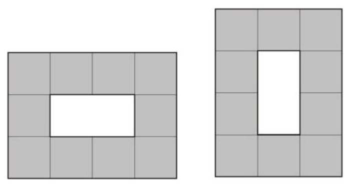
Questão 11 (OBM 2011) Numa classe de 36 alunos, todos têm alturas diferentes. O mais baixo dos meninos é mais alto do que cinco meninas, o segundo menino mais baixo é mais alto do que seis meninas, o terceiro menino mais baixo é mais alto do que sete meninas e assim por diante, observando-se que o mais alto dos meninos é mais alto do que todas as meninas. Quantas meninas há nessa classe?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Questão 12 (OBM 2012) Laurinha tinha em sua carteira somente notas de 10 reais e moedas de 10 centavos. Ela pagou uma conta de 23 reais com a menor quantidade possível de moedas. Quantas moedas ela usou?

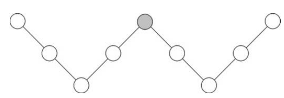
A) 3 B) 6 C) 10 D) 23 E) 30

Questão 13 (OBM 2012) Numa sala de aula, a professora resolveu arrumar as mesinhas de modo a formar uma mesa maior, com um buraco no meio. O exemplo ao lado mostra duas mesas iguais em que 10 alunos podem sentar-se, um em cada mesinha. De quantas maneiras diferentes a professora pode arrumar as 30 mesinhas da sala de forma que os 30 alunos possam sentar-se, um em cada mesinha?



A) 3 B) 6 C) 7 D) 8 E) 15

Questão 14 (OBM 2012) Na figura, cada um dos 4 segmentos contém três círculos. Os círculos devem ser numerados de 1 a 9, de modo que a soma dos números nos três círculos de cada segmento seja igual para todos os segmentos. Qual é o menor número que pode ser escrito no círculo cinza?

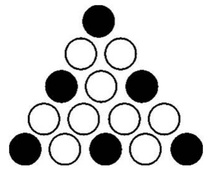


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 15 (OBM 2013) Rita escreve a sequência formada por números de três algarismos não nulos a seguir: 123, 234, 345, ... , 789, 891, 912, 123, 234, ... Qual é o 2013º termo dessa sequência?

A) 345 B) 456 C) 567 D) 678 E) 789

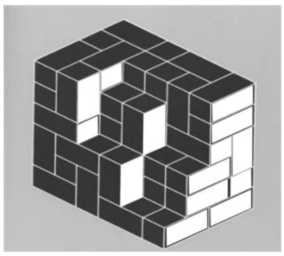
Questão 16 (OBM 2013) Círculos brancos e pretos são usados para construir triângulos como na figura. Começamos com um círculo preto na primeira linha. A partir daí, as linhas pares são formadas apenas por círculos brancos e a linhas ímpares por círculos de cores alternadas, começando com círculo preto na ponta. Se um triângulo como esse tem exatamente 30 círculos brancos, quantos círculos pretos ele tem?



A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 30

Questão 17 (OBM 2013) Esmeralda está construindo um paralelepípedo usando blocos menores iguais. Para terminar sua tarefa, quantos blocos Esmeralda ainda deve colocar?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20



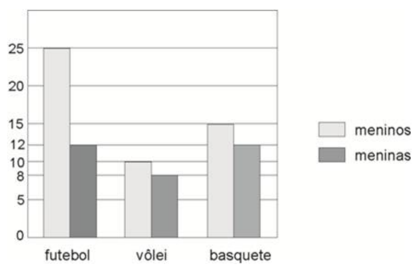
Questão 18 (OBM 2013) A professora Marli propôs uma eleição para representante da sala do sexto ano. Cinco alunos se apresentaram como candidatos. Todos os alunos votaram e quem venceu foi Pedrinho, com 10 votos. Os outros quatro candidatos tiveram diferentes números de votos cada um. No mínimo, quantos são os alunos dessa sala?

A) 16 B) 30 C) 34 D) 36 E) 40

Questão 19 (OBM 2013) As amigas Ana, Beatriz, Cristina e Dalva nasceram no mesmo ano e no mesmo dia, porém em meses diferentes. Dalva é dois meses mais nova do que Ana e quatro meses mais velha do que Cristina. Beatriz é oito meses mais nova do que Dalva. Qual delas nasceu em março?

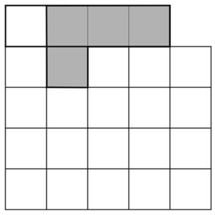
A) Ana B) Beatriz C) Cristina D) Dalva E) Nenhuma delas

Questão 20 (OBM 2013) O gráfico ao lado refere-se à prática esportiva dos alunos do 6º ano de uma escola. Nenhum dos meninos que jogam futebol ou vôlei joga basquete e nenhuma menina que joga basquete ou vôlei joga futebol. Há cinco meninos e três meninas que não praticam nenhum dos três esportes. Pelo menos quantos alunos há no 6º ano?



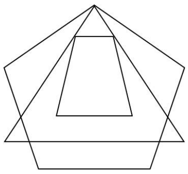
A) 37 B) 45 C) 50 D) 64 E) 72

Questão 21 (OBM 2013) Luísa tem seis peças iguais formadas por 4 quadradinhos de área 1. Ela quer encaixar todas essas peças no quadriculado formado por 24 quadradinhos de área 1 e já colocou uma dessas peças, em destaque na figura ao lado, e as peças podem ser colocadas em qualquer orientação. De quantas maneiras diferentes ela pode terminar seu trabalho?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 22 (OBM 2013) Quantos triângulos há na figura a seguir?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



Questão 23 (Fomin 2012) Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois, cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo, todas as bactérias se dividem novamente em duas e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Questão 24 (Fomin 2012) Ana, João e Alex fizeram uma excursão de ônibus pela Disneilândia. Cada um deles tem que pagar pelo passeio com moedas de plástico com valor 5, mas eles só têm moedas com os valores 10, 15 e 20 (cada um tem uma quantidade ilimitada de cada um desses tipos de moeda). Como eles podem pagar pela excursão?

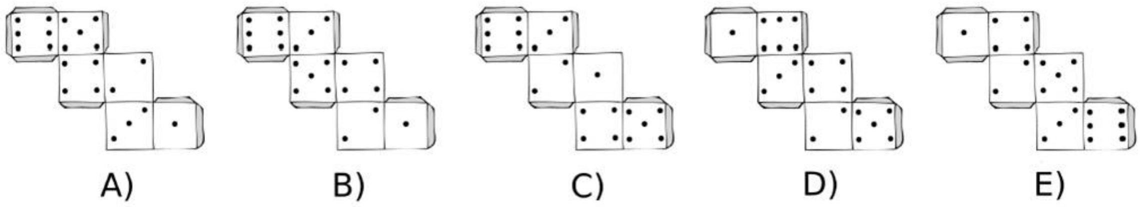
Questão 25 (Fomin 2012) Pedro disse: " Anteontem eu tinha 10 anos, mas vou fazer 13 anos no ano que vem". Isto é possível?

Questão 26 (Fomin 2012) O filho do pai de uma pessoa está falando com com o pai do filho desta pessoa e esta pessoa não está participando da conversa. Isto é possível?

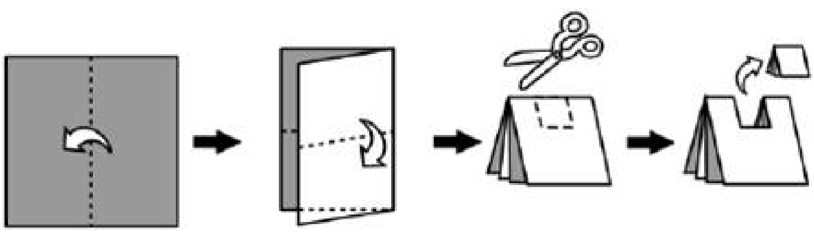
Questão 27 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

Questão 28 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Numa quitanda, há três caixas. Uma contém apenas laranjas, outra contém apenas goiabas, e a terceira contém laranjas e goiabas. Ives, que trabalha nesta quitanda, escreveu em uma caixa "Laranjas", em outra "Goiabas" e em outra "Laranjas e Goiabas", de maneira que cada nome estivesse na caixa errada. Pedindo a Ives que retire e mostre apenas uma fruta de apenas uma caixa, é possível saber como reescrever todos os nomes nas caixas de maneira correta. Explique como!

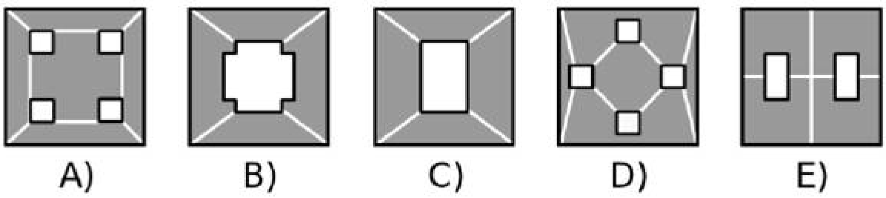
Questão 29 (Banco de Questões da OBMEP 2012) Num dado comum, a soma dos pontos de duas faces opostas é sempre 7. É possível construir um dado comum dobrando e colando uma das peças de papelão a seguir. Que peça é essa?



Questão 30 (Banco de Questões da OBMEP 2012) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.



Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

TAO, Terence. *Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal.* SBM. Rio de Janeiro, 2013

Fomin, Dmitri; Gekin, Sergey; Itenberg, Ilia. *Círculos Matemáticos: a experiência russa.* IMPA. Rio de Janeiro, 2012

Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* SBM. Rio de Janeiro, 2011

Fase 01 - Aula 02

Tema da aula: Números inteiros e operações entre inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação), múltiplos e divisores.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer os números inteiros não negativos e saber fazer as quatro operações fundamentais, além de potenciação e radiciação com esses números. Deverá também entender o conceito de múltiplos e divisores e saber resolver problemas envolvendo esses conceitos.

Atividade em sala:

Números Inteiros Nessa parte, apresentar os números inteiros sem ênfase nos negativos. Trabalhar as operações com atenção para os algoritmos utilizados e as chamadas "provas reais". Apresentar as principais propriedades da potenciação e em radiciação somente a raiz quadrada.

Múltiplos e Divisores Apresentar o conceito de múltiplos e divisores e resolver questões da lista que envolvem este tópico. Deixar para determinar quantos e quais os divisores de um número pela fatoração que será trabalhada na aula seguinte.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2010) Qual dos números a seguir não é múltiplo de 15?
A) 135 B) 315 C) 555 D) 785 E) 915

Questão 02 (OBM 2010) Qual é o maior número de fichas que podemos colocar em um tabuleiro, no máximo uma em cada casa, de modo que o número de fichas em cada linha e cada coluna seja múltiplo de 3?
A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 24

Questão 03 (OBM 2010) Dividindo-se o número $4^{(4^2)}$ por 4^4 obtemos o número:
A) 2 B) 4^3 C) 4^4 D) 4^8 E) 4^{12}

Questão 04 (OBM 2011) Uma data curiosa neste ano é o dia 11/11/11, pois o dia, mês e dois últimos dígitos do ano são iguais. No ano passado, esse padrão aconteceu em 10/10/10. Quantos dias há desde 10/10/10 até 11/11/11, incluindo o dia 10 e o dia 11?
A) 396 B) 398 C) 400 D) 402 E) 404

Questão 05 (OBM 2011) Quantos números inteiros positivos menores do que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Questão 06 (OBM 2011) Representamos por n! o produto de todos os inteiros positivos de 1 a n. Por exemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Calculando a soma $1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2010! + 2011!$, qual é o algarismo das unidades do resultado obtido?
A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

Questão 07 (OBM 2012) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) infinitos

Questão 08 (OBM 2012) Ricardo toma um comprimido às segundas, quartas e sextas-feiras, toda semana. O comprimido é vendido em caixas de 20 unidades cada. Pelo menos quantas caixas desse remédio ele deverá comprar num ano?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Questão 09 (OBM 2012) Esmeralda está caminhando numa pista ao redor de um lago. Faltam 300 metros para chegar à metade do comprimento da pista e 200 metros atrás ela havia andado um terço do comprimento da pista. Cada volta nessa pista corresponde a quantos quilômetros?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

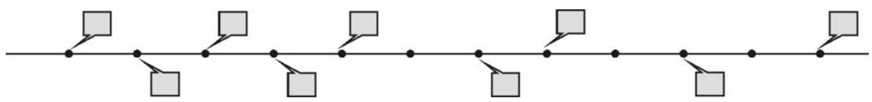
Questão 10 (OBM 2012) Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra?

A) 200 g B) 208 g C) 256 g D) 272 g E) 280 g

Questão 11 (OBM 2012) Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera atraentes : 1, 3, 13 e 31. Qualquer outro número será quase atraente somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, $1 + 3 + 3 + 3 + 13 + 31 = 54$ é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrarmos que 2012 é um número quase atraente?

A) 68 B) 70 C) 72 D) 100 E) 2012

Questão 12 (OBM 2012) Na reta numerada abaixo, os pontos indicados com balõezinhos representam números inteiros maiores do que 93 e menores do que 112. Exatamente três dos números marcados são múltiplos de 4.



Qual é o maior dos números indicados? A) 100 B) 102 C) 104 D) 106 E) 108

Questão 13 (OBM 2013) Quanto é o dobro de 24 mais o triplo de 13 menos o quádruplo de 15?

A) 17 B) 26 C) 27 D) 37 E) 38

Questão 14 (OBM 2013) Entre os números naturais de 1 até n, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 15 (OBM 2013) Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de 1 a 2013, sendo um número para cada quadrado. Ela começa do canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna, de cima para baixo e continua, da mesma forma, preenchendo a terceira coluna, a quarta, etc. até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número 50 está na segunda coluna, em qual coluna estará escrito o número 1000?

A) 23 B) 31 C) 33 D) 39 E) 61

Questão 16 (OBM 2009) Se a = 2^{40}, b = 3^{20} e c = 7^{10}, então:

A) $c < b < a$ B) $a < c < b$ C) $b < a < c$ D) $b < c < a$ E) $c < a < b$

Solução Como não podemos igualar as bases dessas potências, vamos igualar os expoentes. Um divisor comum de 40, 20 e 10 é 10. Assim, temos:

a $= 2^{40} = 2^{4\cdot 10} = 2^{4^{10}} = 16^{10}$,
b $= 3^{20} = 3^{2\cdot 10} = 3^{2^{10}} = 9^{10}$
c $= 7^{10}$
Logo, $c < b < a$

Questão 17 (OBM 2008) O quociente e o resto na divisão de 26097 por 25 são, respectivamente:

A) 1043 e 22 B) 1044 e 3 C) 143 e 22 D) 1044 e 22 E) 144 e 3

Questão 18 (OBM 2008) Numa reunião da comunidade do bairro, cada uma das 125 pessoas presentes recebeu um número diferente, a partir do número 1 até o 125. Em dado momento, foi feita uma lista das pessoas com número par e das pessoas com número múltiplo de 3, que deveriam participar de um projeto. Algumas pessoas reclamaram, dizendo que o seu nome aparecia duas vezes na lista. Quantas pessoas apareceram duas vezes na lista?

A) 2 B) 6 C) 20 D) 41 E) 62

Questão 19 (OBM 2008) Qual é o maior número de algarismos que devem ser apagados do número de 1000 algarismos 20082008. . . 2008, de modo que a soma dos algarismos restantes seja 2008?

A) 130 B) 260 C) 510 D) 746 E) 1020

Questão 20 (OBM 2007) Quantos números inteiros positivos de três algarismos têm a soma de seus algarismos igual a 4? Observação: lembre-se de que zeros à esquerda não devem ser contados como algarismos; por exemplo, o número 031 tem dois algarismos.

A) 4 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

Questão 21 (OBM 2006) Quantos números de três algarismos ímpares distintos são divisíveis por 3?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 36 E) 48

Questão 22 (OBM 2006) Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 95 por 95 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura a seguir.

4	8	12	16	20	...	376	380
760	756	752	748	744	...	388	384
764	→	→	→	→	...	→	→
←	←	←	←	←	...	←	←
							U

O número que Sara escreveu onde se encontra a letra U é:

A) 35192 B) 35196 C) 36100 D) 36104 E) 36108

Questão 23 (OBM 2006) Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 24 (OBM 2005) Sabendo-se que $9.174.532x13 = 119.268.916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:

A) 119 268 903 B) 119 268 907 C) 119 268 911 D) 119 268 913 E) 119 268 923

Questão 25 (OBM 2005) Numa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2005. Qual é o sexto termo?

A) 3 002 B) 3 008 C) 3 010 D) 4 002 E) 5 004

Questão 26 (OBM 2005) Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?

A) 100 B) 150 C) 250 D) 300 E) 430

Questão 27 (OBM 2004) O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99$ é:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Questão 28 (OBM 2004) Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeralda encontrou um número de 4 algarismos: 2 0 0 *. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Este algarismo só pode ser:

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 9

Questão 29 (OBM 2003) Considere a sequência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ... O 2003^o termo desta sequência é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 30 (OBM 2003) A sequência "22" descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2. Analogamente, a sequência "31 12 33 15" descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes sequências não descreve a si mesma?

A) 21 32 23 16 B) 31 12 33 18 C) 31 22 33 17 19 D) 21 32 33 24 15 E) 41 32 23 24 15 16 18

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar, v.5.* SBM. Rio de Janeiro, 2012

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio , v.1.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 03

Tema da aula: Números primos e decomposição em fatores primos.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer a definição de números primos (em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$), saber fazer a decomposição em fatores primos e usar a mesma para encontrar os divisores de um número.

Atividade em sala: Definir números primos em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$, mostrar a decomposição pelo dispositivo da árvore e pelo dispositivo prático. Mostrar o uso para o cálculo do MMC, MDC e para determinar os divisores de um número inteiro.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2010) Qual das alternativas apresenta um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
A) 42 B) 45 C) 52 D) 85 E) 105

Questão 02 (OBM 2010) Quantos divisores positivos de 120 são múltiplos de 6?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

Questão 03 (OBM 2011) O produto de três números naturais é 105 e a sua soma é a maior possível. Qual é essa soma?
A) 15 B) 23 C) 27 D) 39 E) 107

Questão 04 (OBM 2013) Todo número primo é um número inteiro que tem exatamente dois divisores positivos: o número 1 e o próprio número. Por exemplo, 2 e 5 são primos, mas 1 (tem somente o 1 como divisor positivo) e 4 (veja que 1, 2 e 4 são os seus divisores positivos) não são primos. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?
A) A soma de quaisquer dois primos é um primo.
B) A soma dos quadrados de quaisquer dois números primos é um número primo.
C) O produto de dois números naturais consecutivos pode ser um número primo.
D) A soma de três primos quaisquer nunca é um número primo.
E) O produto de dois primos quaisquer pode ser um número primo.

Questão 05 (OBM 1997) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:
A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

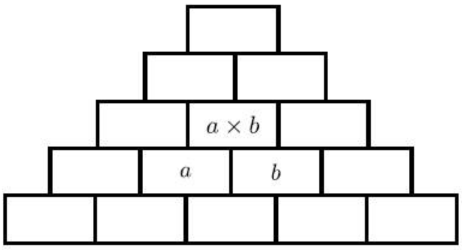
Questão 06 (OBM 2007) Preenchemos as casas vazias da tabela ao lado com o produto dos números que estão sombreados na mesma linha e na mesma coluna da casa vazia a ser preenchida. Quantas dessas casas conterão números primos?
A) 6 B) 7 C) 12 D) 14 E) 26

x	1	2	3	5	7	11	13
1							
2							
3							
5							
7							
11							
13							

Questão 07 (OBM 2006) Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?
A) 712 B) 548 C) 1026 D) 1456 E) 1680

Questão 08 (OBM 2003) Considere um número inteiro x e faça com ele as seguintes operações sucessivas: multiplique por 2, some 1, multiplique por 3 e subtraia 5. Se o resultado for 220, o valor de x é:
A) um número primo.
B) um número par.
C) um número entre 40 e 50.
D) um número múltiplo de 3.
E) um número cuja soma dos algarismos é 9.

Questão 09 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Aline gosta de brincar com números naturais. Em uma de suas brincadeiras, ela coloca um número natural em cada um dos blocos da pirâmide ilustrada abaixo. Além disso os números são colocados de modo que o produto dos números em dois blocos vizinhos do mesmo nível coincida com o número colocado no bloco acima desses. Por exemplo, na figura abaixo, caso Aline coloque os números a e b nos blocos vizinhos indicados então ela deverá colocar o número axb naquele bloco que se localiza acima desses.



Encontre uma maneira na qual Aline possa colocar os números de modo que os 5 números colocados na base da pirâmide sejam distintos e o número colocado no bloco do topo seja o 140026320.

Questão 10 (Banco de Questões da OBMEP 2013) O número natural preferido por Vladas possui uma quantidade ímpar de divisores. Mostre que esse número é um quadrado perfeito.

Questão 11 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Aureliano escreve uma lista contendo cinco números, sendo o primeiro deles o 6 e o último deles o 8. O produto dos três primeiros números é 648, o produto dos três centrais é 432, e o produto dos três últimos é 288. Qual é a lista de Aureliano?

Questão 12 (Banco de Questões da OBMEP 2012) Um algarismo é afilhado de um número natural se ele é o algarismo das unidades de algum divisor desse número. Por exemplo, os divisores de 56 são 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 e 56, logo os afilhados de 56 são 1, 2, 4, 6, 7 e 8.

a) Quais são os afilhados de 57? b) Ache um número que tenha 7 e 9 como afilhados, mas não 3. Quais são os afilhados desse número? c) Explique porque 2 e 5 são afilhados de qualquer número que tenha 0 entre seus afilhados. d) Explique porque 8 é afilhado de qualquer número que tenha 0 e 9 entre seus afilhados.

Questão 13 (Banco de Questões da OBMEP 2011)
(a) A soma de quatro inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

(b) A soma de três inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

Questão 14 (Banco de Questões da OBMEP 2011)
(a) Prove que o número 3999991 não é primo.
(b) Prove que o número 1000343 não é primo.

Questão 15 (OBM 2012) No tabuleiro 2x3 ao lado escrevemos um número inteiro positivo em cada casa vazia de modo que o produto desses números seja igual ao número já escrito na sexta casa. Sendo os números todos diferentes, de quantas maneiras isto pode ser feito?

		210

A) 6 B) 12 C) 20 D) 60 E) 120

Questão 16 (OBM 2010) Alguns números inteiros positivos, não necessariamente distintos, estão escritos na lousa. A soma deles é 83 e o produto é 1024. O menor número é igual a:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

Solução Como 1024 é uma potência de 2 (2^{10}), significa que cada um dos números escritos no quadro é também uma potência de 2. Isso significa que, com exceção do 1 (2^0), todos são pares. Como a soma deu 83, que é ímpar, obrigatoriamente 1 é uma das parcelas e é o menor dos números escritos.

Questão 17 (OBM 2006) No planeta POT o número de horas por dia é igual a número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?

A) 8 B) 12 C) 64 D) 128 E) 256

Questão 18 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível?

Questão 19 (OBM 2002) O produto de um milhão de números naturais, não necessariamente distintos, é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

A) 1 000 000 B) 1 250 002 C) 1 501 999 D) 1 999 999 E) 13 999 432

Questão 20 (OBM 2001) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5 ?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) mais de 4

Questão 21 (OBM 2000) O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos: $10 = 5 + 5$ e $10 = 7 + 3$. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?

A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) nenhuma

Questão 22 (OBM 1999) Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito ?

A) 2 B) nenhum C) 1 D) 3 E) 6

Questão 23 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

Questão 24 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Se a, b e c são números inteiros positivos tais que 3a = 4b = 7c, qual é o menor valor possível de a + b + c?

Questão 25 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Um número é um quadrado perfeito se é igual a um número inteiro elevado ao quadrado. Por exemplo, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$ e $125 = 25^2$ são quadrados perfeitos. Qual é o menor número pelo qual devemos multiplicar 120 para obter um quadrado perfeito?
(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 30 (e) 35

Questão 26 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Seja N o menor número que tem 378 divisores e é da forma $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. Quanto vale cada um desses expoentes?

Questão 27 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Denotemos por P(n) o produto dos algarismos do número n. Por exemplo, $P(58) = 5 \times 8 = 40$ e $P(319) = 3 \times 1 \times 9 = 27$.
(a) Dentre os números de 1 a 999, quais são os que têm produto dos algarismos igual a 12, isto é, quais são os inteiros n tais que $1 \leq n < 1000$ e $P(n) = 12$?
(b) Quantos números inteiros existem entre 0 e 200 cujo produto dos algarismos seja igual a 0, isto é, quantos inteiros n existem tais que $1 \leq n < 200$ e $P(n) = 0$?
(c) Quais são os números inteiros $1 \leq n < 200$ tais que $37 < P(n) < 45$?
(d) Dentre todos os inteiros de 1 a 250, qual é o número cujo produto dos algarismos é o maior possível?

Questão 28 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Decomponha 96 em dois fatores inteiros positivos cuja soma dos quadrados seja 208.

Questão 29 (Banco de Dados da OBMEP 2010) O produto de dois números de dois algarismos cada é 1 728. Se o máximo divisor comum (MDC) deles é 12, quais são esses números?

Questão 30 (Banco de Dados da OBMEP 2010) A soma de três números é 100, dois são primos e um é a soma dos outros dois.
(a) Qual é o maior dos três números?
(b) Dê um exemplo de tais três números.
(c) Quantas soluções existem para esse problema

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar, v.5.* SBM. Rio de Janeiro, 2012

Fase 01 - Aula 04

Tema da aula: Porcentagem, frações e operações com frações.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber calcular determinada porcentagem de um dado valor e trabalhar com os fatores de aumento e desconto. Da mesma forma, deve saber realizar as quatro operações fundamentais com as frações, cancelamento, calcular determinada fração de um todo dado e resolver problemas com as mesmas.

Atividade em sala: Apresentar a porcentagem na forma fracionária e decimal. Trabalhar com os fatores de aumento e desconto. Resolver problemas onde figuram as quatro operações fundamentais com as frações e o cancelamento. Resolver alguns problemas da lista.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e quando Tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual parte da superfície do sofá está ocupada por Tica?

A)$\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

Questão 02 (OBM 2013) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

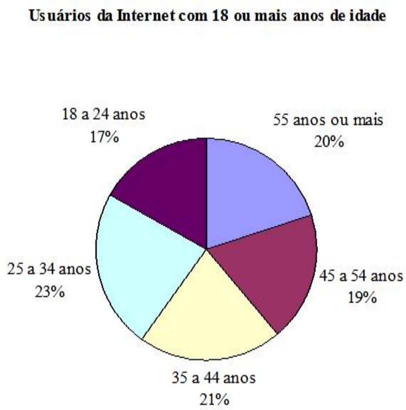
A) Nada, pois pagará a mesma quantia.
B) Ela perderá 100 reais.
C) Ela ganhará 105 reais.
D) Ela perderá 95 reais.
E) Ela perderá 105 reais.

Comentário Alunos do nível 01 geralmente respondem que não haverá diferença do valor pois houve aumento e desconto de 5% do valor, de forma que um anula o outro. Faça exemplos simples como aumento e desconto de 10% sobre um valor inicial 100 para que eles percebam que, como a porcentagem foi calculada sobre valores diferentes, o aumento é distinto do desconto.

Questão 03 (OBM 2012) Usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais foram entrevistados sobre a utilização de 4 redes sociais. Eles foram divididos em grupos de faixa etária e a porcentagem de utilização de cada rede social dentro de cada grupo pode ser vista na tabela a seguir:

Serviço / Faixa etária	Facebook	Twitter	Linkedin	Google+	Não usam essa redes
55 anos ou mais	20%	12%	32%	16%	20%
54 anos	19%	17%	25%	17%	22%
44 anos	21%	19%	17%	20%	23%
34 anos	23%	22%	13%	19%	23%
24 anos	17%	30%	13%	28%	12%

Sabe-se ainda que as porcentagens de usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais estão divididas conforme o gráfico abaixo:



Entre os usuários da Internet com 18 anos de idade ou mais, qual é a porcentagem daqueles que têm 55 anos ou mais e que usam o Linkedin?

A) $32\% + 20\%$ B) $32\% - 20\%$ C) $32\% \times 20\%$ D) $32\% \div 20\%$ E) $\frac{32\%+20\%}{2}$

Questão 04 (OBM 2012) Na expressão $\frac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

A) 38 B) 96 C) 108 D) 576 E) 648

Questão 05 (OBM 2012) Em Cajumirim, 20% das famílias que têm gatos (pelo menos um) também têm cachorros e 25% das famílias que têm cachorros também têm gatos. Como 20% das famílias não têm nem gato nem cachorro, qual é o percentual de famílias que possuem as duas espécies de bichos de estimação?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 50

Questão 06 (OBM 2011) Por conta de uma erupção de um vulcão, 10% dos voos de um aeroporto foram cancelados. Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva. Que porcentagem do total de voos deste aeroporto foram cancelados?

A) 28% B) 30% C) 35% D) 38% E) 70%

Questão 07 (OBM 2010) Aumentando 2% o valor um número inteiro positivo, obtemos o seu sucessor. Qual é a soma desses dois números?

A) 43 B) 53 C) 97 D) 101 E) 115

Questão 08 (OBM 2010) Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido $\frac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{2}{3}$

Questão 09 (OBM 2010) Numa sala do 6º ano, todos gostam de pelo menos uma das duas matérias: Matemática ou Português. Sabe-se que $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{5}{7}$ dos alunos gostam de Português. A sala tem 56 alunos. Quantos alunos gostam dessas duas matérias ao mesmo tempo?

A) 4 B) 8 C) 13 D) 24 E) 26

Questão 10 (OBM 2009) Se $\frac{1}{8}$ de um número é $\frac{1}{5}$ quanto vale $\frac{5}{8}$ desse número?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 1 D) $\frac{8}{5}$ E) 2

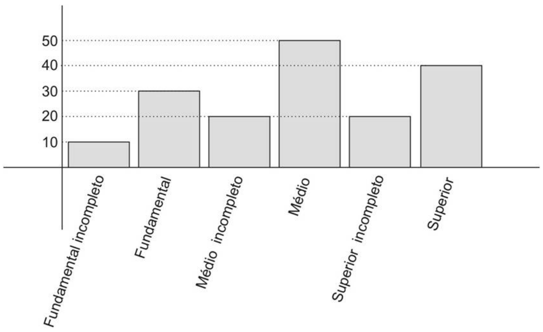
Questão 11 (OBM 2009) Numa festa, o número de pessoas que dançam é igual a 25% do número de pessoas que não dançam. Qual é a porcentagem do total de pessoas na festa que não dançam?

A) 50% B) 60% C) 75% D) 80% E) 84%

Questão 12 (OBM 2009) Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, o peso da barra, em gramas, é:

A) 160 B) 200 C) 240 D) 280 E) 400

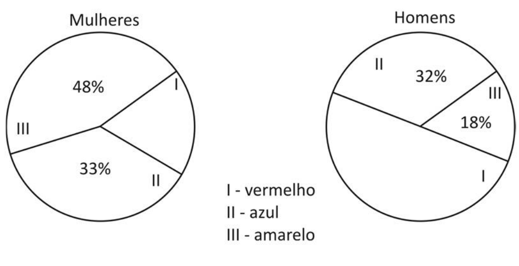
Questão 13 (OBM 2009) Numa pesquisa sobre o grau de escolaridade, obtiveram-se os resultados expressos no gráfico abaixo:



Que fração do total de entrevistados representa o total de pessoas que terminaram pelo menos o Ensino Fundamental?

A) $\frac{1}{17}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{5}{16}$ D) $\frac{11}{13}$ E)$\frac{16}{17}$

Questão 14 (OBM 2008) Uma pesquisa foi feita entre pessoas de ambos os sexos, em igual número, com a seguinte pergunta: Entre as cores azul, vermelho e amarelo, qual é a cor que você prefere? Cada pessoa apresentou a sua preferência por uma, e só uma, dessas cores. E o resultado da pesquisa aparece nos gráficos abaixo:



Podemos concluir que, em relação ao total de pessoas pesquisadas, a ordem de preferência das cores é:

A) I, II, III B) I, III, II C) II, I, III D) II, III, I E) III, II, I

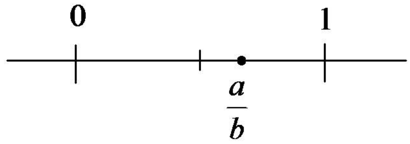
Questão 15 (OBM 2008) Uma classe tem 22 alunos e 18 alunas. Durante as férias, 60% de todos os alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Questão 16 (OBM 2008) Sabe-se que $\frac{2}{9}$ do conteúdo de uma garrafa enchem $\frac{5}{6}$ de um copo. Para encher 15 copos iguais a esse, quantas garrafas deverão ser usadas?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 17 (OBM 2007) A fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos, representa um número entre 0 e 1, na posição indicada no desenho ao lado. Qual é um possível valor para a soma $a+b$?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 18 (OBM 2007) Em uma prova de olimpíada, 15% dos estudantes não resolveram nenhum problema, 25% resolveram pelo menos um problema, mas cometeram algum erro, e os restantes, 156 estudantes, resolveram todos os problemas corretamente. O número de estudantes que participaram da olimpíada foi:

A) 200 B) 260 C) 93 D) 223 E) 300

Questão 19 (OBM 2007) Uma loja de CD's realizará uma liquidação e, para isso, o gerente pediu para Anderlaine multiplicar todos os preços dos CD's por 0,68. Nessa liquidação, a loja está oferecendo um desconto de:

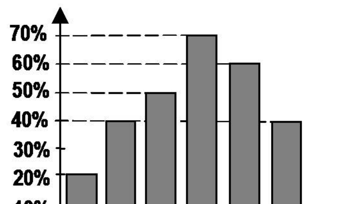
A) 68% B) 6,8% C) 0,68% D) 3,2% E) 32%

Questão 20 (OBM 2007) O conteúdo de uma garrafa de refrigerantes enche três copos grandes iguais e mais meio copo pequeno ou 5 desses copos pequenos iguais mais a metade de um daqueles grandes. Qual é a razão entre o volume de um copo pequeno e o de um grande?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{3}{5}$

Questão 21 (OBM 2007) O gráfico ao lado mostra o percentual de acertos numa prova de 60 testes de seis candidatos finalistas de um concurso. Qual foi o número médio de questões erradas por esses candidatos nessa prova?

A) 14 B) 24 C) 30 D) 32 E) 40



Questão 22 (OBM 2005) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final é polpa?

A) 5% B) 7% C) 8% D) 20% E) 60%

Questão 23 (OBM 2005) Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou mas a população de Tucupira cresceu 50%. Atualmente, as duas cidades somam 9000 habitantes. Há três anos, qual era a soma das duas populações?

A) 3 600 B) 4 500 C) 5 000 D) 6 000 E) 7 500

Questão 24 (OBM 2005) Películas de insulfilm são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Colocando-se uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, obtém-se uma redução de radiação solar igual a:

A) 3% B) 37% C) 40% D) 63% E) 160%

Questão 25 (OBM 2004) Simplificando a fração $\frac{2004+2004}{2004+2004+2004}$, obtemos:
A) 2004 B) $\frac{113}{355}$ C) $\frac{1}{2004}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

Questão 26 (OBM 2003) O valor da soma $\frac{2^{2003}.9^{1001}}{4^{1001}.3^{2003}} + \frac{2^{2002}.9^{1001}}{4^{1001}.3^{2003}}$ é:
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

Questão 27 (OBM 2003) O maior inteiro que não supera $\frac{3^{2003}+2^{2003}}{3^{2001}+2^{2001}}$ é igual a:
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Questão 28 (OBM 2002) Toda a produção mensal de latas de refrigerante de uma certa fábrica foi vendida a três lojas. Para a loja A, foi vendida metade da produção; para a loja B, foram vendidos $\frac{2}{5}$ da produção e para a loja C, foram vendidas 2500 unidades. Qual foi a produção mensal dessa fábrica?

A) 4166 latas B) 10000 latas C) 20000 latas D) 25000 latas E) 30000 latas

Questão 29 (OBM 2002) Durante sua viagem ao país das Maravilhas a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma: primeiro ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa"; logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra torta na qual estava escrito:"prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, podemos afirmar que ela:

A) ficou 1% mais baixa
B) ficou 1% mais alta
C) ficou 5% mais baixa
D) ficou 5% mais alta
E) ficou 10% mais alta

Questão 30 (OBM 2001) Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).

A) 15 litros B) 45 litros C) 75 litros D) 80 litros E) 30 litros

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages. *Temas e Problemas Elementares*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 05

Tema da aula: Razão e proporção.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber o que é uma razão, a diferença desta para fração, o que é uma proporção, o Princípio Fundamental da Proporção (PFP) e saber resolver problemas com regra de três simples.

Atividade em sala: Definir fração e, após isso, apresentar uma razão que não seja fração. Desenvolver problemas com proporção para que se entenda a igualdade entre as razões. Apresentar o PFP e a sua aplicação nos problemas com regra de três simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

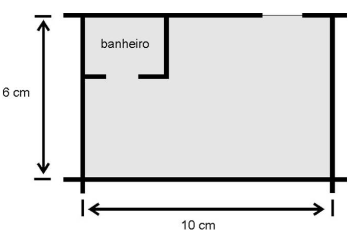
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Um mercado vende laranjas apenas em sacos com 5 kg cada. De cada quilo de laranja, 55% é suco. Além disso, 1 kg de suco corresponde a 900 ml de suco. Sendo assim, quantos litros de suco podemos extrair de dois sacos de laranja?

A) 4,5 B) 4,8 C) 4,95 D) 5 E) 5,1

Questão 02 (OBM 2013) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?

A) 12,15 m2 B) 15,5 m2 C) 27 m2 D) 32 m2 E) 60 m2



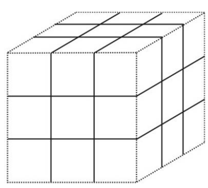
Questão 03 (OBM 2012) Paulinho e sua irmã saem ao mesmo tempo de casa para a escola. Paulinho vai de bicicleta, a uma velocidade média de 18 quilômetros por hora e sua irmã vai com uma moto. Ela chega 20 minutos antes de Paulinho. Neste momento, quantos quilômetros ainda faltam para Paulinho chegar?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 15 E) 18

Questão 04 (OBM 2011) Numa padaria, uma lata de 200g de achocolatado em pó CHOCOBM custa R$3,00, uma lata de 400g custa R$5,00 e a de 800g custa R$9,00. Lara precisa de 1,2kg de CHOCOBM para fazer um enorme bolo. Qual das opções a seguir é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBM nessa padaria?

A) 6 latas de 200g
B) 1 lata de 400g e 1 lata de 800g
C) 4 latas de 200g e 1 lata de 400g
D) 2 latas de 200g e 1 lata de 800g
E) 2 latas de 200g e 2 latas de 400g

Questão 05 (OBM 2011) Um cubo de madeira, pintado de vermelho, foi serrado em 27 cubos menores iguais e as faces desses cubos ainda não pintadas o foram de branco. Qual é a razão entre a área da superfície total



pintada em vermelho e a área da superfície total pintada de
branco?

A) 1:2 B) 1:1 C) 2:1 D) 1:3 E) 2:3

Questão 06 (OBM 2007) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é $2:3$ e entre o número de mulheres e crianças é $8:1$. A razão entre o número de adultos e crianças é:

A) $5:1$ B) $16:1$ C) $12:1$ D) $40:3$ E) $13:1$

Solução Como a quantidade de mulheres é representada em uma razão pelo consequente 3 e em outra pelo antecedente 8, tomando o mmc(3,8)=24 e reescrevendo as razões com este valor para representar a quantidade de mulheres, temos:

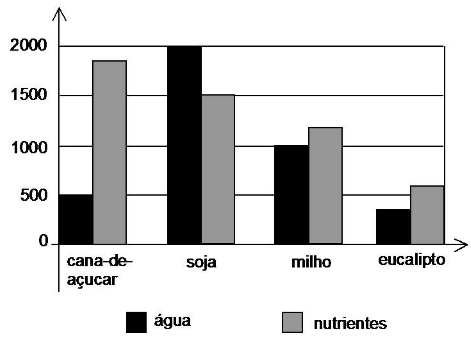
$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ e $\frac{8}{1}=\frac{24}{3}$

Assim, há $16+24=40$ adultos para cada 3 crianças.

Questão 07 (OBM 2007) Anita imaginou que levaria 12 minutos para terminar a sua viagem, enquanto dirigia à velocidade constante de 80 km/h, numa certa rodovia. Para sua surpresa, levou 15 minutos. Com qual velocidade constante essa previsão teria se realizado?

A) 90 km/h B) 95 km/h C) 100 km/h D) 110 km/h E) 120 km/h

Questão 08 (OBM 2006) O gráfico a seguir apresenta informações sobre o impacto causado por 4 tipos de monocultura ao solo. Para cada tipo de monocultura, o gráfico mostra a quantidade de água, em litros, e a de nutrientes (nitrogênio, fósforo e potássio), em quilogramas, consumidos por hectare para a produção de 1kg de grãos de soja ou 1kg de milho ou 1kg de açúcar ou 1kg de madeira de eucalipto. Sobre essas monoculturas, pode-se afirmar que:



A) O eucalipto precisa de cerca de 1/3 da massa de nutrientes necessários de que a cana-de-açúcar precisa para se desenvolver.

B) O eucalipto é a que mais seca e empobrece o solo, causando desequilíbrio ambiental.

C) A soja é cultura que mais precisa de nutrientes.

D) O milho precisa do dobro do volume de água de que precisa a soja.

E) A cana-de-açúcar é a que necessita do ambiente mais úmido para crescer.

Questão 09 (OBM 2006) Ao redor de um grande lago existe uma ciclovia de 45 quilômetros de comprimento, na qual sempre se retorna ao ponto de partida se for percorrida num único sentido. Dois amigos partem de um mesmo ponto com velocidades constantes de 20 km por hora e 25 km por hora, respectivamente, em sentidos opostos. Quando se encontram pela primeira vez, o que estava correndo a 20 km por hora aumenta para 25 km por hora e o que estava a 25 km por hora diminui para 20 km por hora. Quanto tempo o amigo que chegar primeiro ao ponto de partida deverá esperar pelo outro?

A) nada B) 10 min C) 12 min D) 15 min E) 18 min

Questão 10 (OBM 2005) Um galão de mel fornece energia suficiente para uma abelha voar 7 milhões de quilômetros. Quantas abelhas iguais a ela conseguiriam voar mil quilômetros se houvesse 10 galões de mel para serem compartilhados entre elas?

A) 7 000 B) 70 000 C) 700 000 D) 7 000 000 E) 70 000 000

Questão 11 (OBM 2005) Um agricultor esperava receber cerca de 100 mil reais pela venda de sua safra. Entretanto, a falta de chuva provocou uma perda da safra avaliada entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ do total previsto. Qual dos valores a seguir pode representar a perda do agricultor?

A) R$ 21.987,53 B) R$ 34.900,00 C) R$ 44.999,99 D) R$ 51.987,53 E) R$ 60.000,00

Questão 12 (OBM 2002) Uma usina comprou 2000 litros de leite puro e então retirou certo volume V desse leite para produção de iogurte e substituiu esse volume por água. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume V da mistura e novamente substituiu por água. Na mistura final existem 1125 litros de leite. O volume V é:

A) 500 litros B) 600 litros C) 700 litros D) 800 litros E) 900 litros

Questão 13 (OBM 2002) Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos. Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a persegui-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?

A) 90 passos B) 120 passos C) 150 passos D) 180 passos E) 200 passos

Questão 14 (OBM 1999) Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

Questão 15 (OBM 1998) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em 30 segundos, enquanto que Paulinho leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Carlinhos completar a volta número 80, Paulinho estará completando a volta número:

A) 79 B) 78 C) 76 D) 77 E) 75

Questão 16 (Banco de questões da OBMEP 2007) Num teste com 84 questões se você acerta 58/84 das questões, então qual é o seu percentual de acertos?

Questão 17 (Banco de questões da OBMEP 2007) A biblioteca de uma escola comprou 140 novos livros, ficando com $\frac{27}{25}$ de livros. O número de livros antes da compra, é:

A) 1750 B) 2500 C) 2780 D) 2140 E) 1140

Questão 18 (Banco de questões da OBMEP 2007) Em meu vôo para Recife, quando fui receber a medalha de ouro que conquistei na OBMEP, as seguintes informações apareceram na tela da cabine de passageiros:

Velocidade média: 864km/h

Distância do local de partida: 1 222km

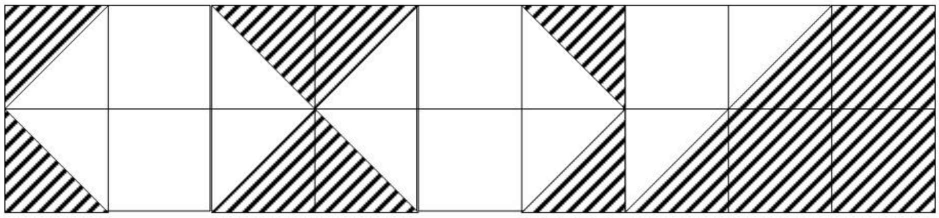
Tempo de chegada a Recife: 1 h 20 min

Se o avião manteve a mesma velocidade, então qual é, aproximadamente, a distância de Recife à cidade onde tomei esse vôo?

(a) 2 300km (b) 2 400km (c) 2 500km (d) 2 600km (e) 2 700km

Questão 19 (OBM 2006) Em um tanque há 4000 bolinhas de pingue-pongue. Um menino começou a retirar as bolinhas, uma por uma, com velocidade constante, quando eram 10h. Após 6 horas, havia no tanque 3520 bolinhas. Se o menino continuasse no mesmo ritmo, quando o tanque ficaria com 2000 bolinhas?
A) às 11h do dia seguinte
B) às 23h do mesmo dia
C) às 4h do dia seguinte
D) às 7h do dia seguinte
E) às 9h do dia seguinte

Questão 20 (OBM 2004) Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura. Qual fração da área total é sombreada?



A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{1}{2}$

Questão 21 (OBM 2002) Marcelo leva exatamente 20 minutos para ir de sua casa até a escola. Uma certa vez, durante o caminho, percebeu que esquecera em casa a revista Eureka! que ia mostrar para a classe; ele sabia que se continuasse a andar, chegaria à escola 8 minutos antes do sinal, mas se voltasse para pegar a revista, no mesmo passo, chegaria atrasado 10 minutos. Que fração do caminho já tinha percorrido neste ponto?
A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{9}{20}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{9}{10}$

Questão 22 (OBM 2002) Se você tiver uma mesa de bilhar retangular cuja razão entre a largura e o comprimento seja 5/7 e bater em uma bola que está em um canto, de modo que ela saia na direção da bissetriz do ângulo desse canto, quantas vezes ela baterá nos lados antes de bater em um dos cantos?
A) 10 vezes B) 12 vezes C) 13 vezes D) 14 vezes E) 15 vezes

Questão 23 (OBM 1999) Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Em anos, a soma das idades dos três é:
A) 48 B) 72 C) 58 D) 60 E) 34

Questão 24 (Banco de questões da OBMEP 2013) Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

Questão 25 (Banco de questões da OBMEP 2010) Uma florista colheu 49 kg de flores do campo. O quilograma das flores pode ser vendido imediatamente a R$ 1,25 ou, mais tarde, com as flores desidratadas, a R$ 3,25. O processo de desidratação faz as flores perderem 5/7 de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para a florista?

Questão 26 (Banco de questões da OBMEP 2010) Se você acerta 58/84 das 84 questões de um teste, qual é o seu percentual de acertos?

Questão 27 (Banco de questões da OBMEP 2010) Numa escola, um quarto dos alunos joga somente vôlei, um terço joga somente futebol, 300 praticam os dois esportes e 1/12 nenhum desses dois esportes.
(a) Quantos alunos tem a escola?
(b) Quantos alunos jogam somente futebol?
(c) Quantos alunos jogam futebol?
(d) Quantos alunos praticam pelo menos um dos dois esportes?

Questão 28 (Banco de questões da OBMEP 2010) Para ganhar uma corrida, Ana precisa completar os últimos cinco quilômetros em menos de 20 minutos. Qual deve ser sua velocidade mínima, em km/h?

Questão 29 (Banco de questões da OBMEP 2010) Na liquidação da loja SUPER-SUPER todos os produtos estão 50% mais baratos e, aos sábados, existe ainda um desconto adicional de 20%. Carla comprou uma calça antes da liquidação, e agora ela se lamenta: No sábado eu teria economizado R$ 50,40 na calça. Qual era o preço da calça antes da liquidação?

Questão 30 (Banco de questões da OBMEP 2010) Uma certa máquina é capaz de produzir oito réguas por minuto. Quantas réguas essa máquina consegue produzir em 15 minutos?
(a) 104 (b) 110 (c) 112 (d) 128 (e) 120

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 06

Tema da aula: Números decimais e potenciação.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: O alunos deverá, ao final da aula, conhecer os números decimais e saber efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Reapresentar as principais propriedades da potenciação, envolvendo também as frações e os números decimais.

Atividade em sala: Apresentar os números decimais a partir da divisão não exata entre inteiros. Trabalhar a forma fracionária, as operações acima elencadas e reforçar as propriedades da potenciação com a resolução de problemas da lista.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Os preços para a entrada num estádio de futebol são de R\$7,50 para os adultos e R\$2,50 para as crianças. No último jogo de domingo, o estádio arrecadou R\$3.000,00 para um público de menos de 600 pagantes. Pelo menos quantos adultos pagantes havia no estádio?

A) 299 B) 301 C) 310 D) 361 E) 450

Questão 02 (OBM 2013) Na adição de termos iguais $2013^{2013} + 2013^{2013} + \cdots + 2013^{2013} = 2013^{2014}$, escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição $(+)$. Quantos foram escritos?

A) 1006 B) 2009 C) 2012 D) 2014 E) 4026

Questão 03 (OBM 2012) Podemos afirmar que $0,1^2 + 0,2^2$ é igual a

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Questão 04 (OBM 2011) Em maio, o valor total da conta de telefone celular de Esmeralda foi R\$119,76, sem os impostos. Esse valor corresponde aos itens: chamadas, acesso à internet, envio de mensagens. Se ela gastou R\$29,90 com acesso à Internet e R\$15,50 com o serviço de envio de mensagens, quanto foi que ela gastou com chamadas?

A) R\$74,36 B) R\$74,46 C) R\$84,36 D) R\$89,86 E) R\$104,26

Questão 05 (OBM 2011) Luca comprou uma revista por R\$9,63 e deu uma nota de R\$10,00 para pagar. De quantas maneiras ele pode receber o troco de 37 centavos em moedas, se as moedas disponíveis no caixa são as de 1, 5, 10 e 25 centavos? Suponha que há muitas moedas de cada tipo.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 24 E) 30

Questão 06 (OBM 2008) Esmeralda compra cinco latas de azeite a quatro reais e setenta centavos a lata, cinco latas de leite em pó a três reais e doze centavos cada e três caixas de iogurte com seis iogurtes cada caixa ao preço de oitenta centavos por iogurte. Paga com uma nota de cinquenta reais e quer saber quanto irá receber de troco. Qual das expressões aritméticas a seguir representa a solução para este problema?

A)$50 - 5 \times (4,70 + 3,12) + 18 \times 0,80$

B)$-[5 \times (4,70 + 3,12) + 3 \times 6 \times 0,80] + 50$

C)$50 - [5 \times (4,70 + 3,12) + 6 \times 0,80]$

D)$5 \times 4,70 + 5 \times 3,12 + 3 \times 6 \times 0,80 – 50$

E) $50 – [5 \times (4,70 + 3,12) + 3 \times 6 + 0,80]$

Questão 07 (OBM 2006) Uma empresa de telefonia celular oferece planos mensais de 60 minutos a um custo mensal de R\$ 52,00, ou seja, você pode falar durante 60 minutos no seu telefone celular e paga por isso exatamente R\$ 52,00. Para o excedente, é cobrada uma tarifa de R\$ 1,20 cada minuto. A mesma tarifa por minuto excedente é cobrada no plano de 100 minutos, oferecido a um custo mensal de R\$ 87,00. Um usuário optou pelo plano de 60 minutos e no primeiro mês ele falou durante 140 minutos. Se ele tivesse optado pelo plano de 100 minutos, quantos reais ele teria economizado?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Questão 08 (OBM 2004) O preço de uma corrida de táxi é igual a R\$2,50 ("bandeirada"), mais R\$0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R\$10,00 no bolso. Logo tenho dinheiro para uma corrida de até:

A) 2,5 km B) 5,0 km C) 7,5 km D) 10,0 km E) 12,5 km

Questão 09 (OBM 2004) Entre 1986 e 1989, época em que vocês ainda não tinham nascido, a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é: 1 real = 2.750.000.000 cruzados. Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem 1,5 cm de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:
A) 26,4 km B) 264 km C) 26 400 km D) 264 000 km E) 2 640 000 km

Questão 10 (OBM 2002) Patrícia mora em São Paulo e quer visitar o Rio de Janeiro num feriado prolongado. A viagem de ida e volta, de ônibus, custa 80 reais, mas Patrícia está querendo ir com seu carro, que faz, em média, 12 quilômetros com um litro de gasolina. O litro da gasolina custa, em média, R$1,60 e Patrícia calcula que terá de rodar cerca de 900 quilômetros com seu carro e pagar 48 reais de pedágio. Ela irá de carro e para reduzir suas despesas, chama duas amigas, que irão repartir com ela todos os gastos. Dessa forma, não levando em conta o desgaste do carro e outras despesas inesperadas, Patrícia irá:
A) economizar R$20,00.
B) gastar apenas R$2,00 a mais.
C) economizar R$24,00.
D) gastar o mesmo que se fosse de ônibus.
E) gastar R$14,00 a mais.

Questão 11 (OBM 2000) 1 litro de álcool custa R$0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?
A) 54 B) 72 C) 50 D) 52 E) 45

Questão 12 (OBM 1999) Numa certa cidade, o metrô tem todas suas 12 estações em linha reta. A distância entre duas estações vizinhas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta estações é igual a 3 300 metros. Qual é o comprimento dessa linha?
A) 8,4 km B) 12,1 km C) 9,9 km D) 13,2 km E) 9,075 km

Comentário É comum o aluno fazer 12×1.100 para encontrar a resposta. Mostre a ele, que se forem duas estações, a distância seria de 1.100m, ou seja, há 12 estações mas apenas 11 trechos de 1.100m. Trabalhe a ideia de fazer exemplos pequenos para saber que técnica usar antes de ir para uma conta maior.

Questão 13 (OBM 1998) Qual dos números a seguir é o maior?
A) 3^{45} B) 9^{20} C) 27^{14} D) 243^{9} E) 81^{12}

Questão 14 (OBM 1998) Um estacionamento para carros cobra 1 real pela primeira hora e 75 centavos a cada hora ou fração de hora seguinte. André estacionou seu carro às 11h 20min e saiu às 15h 40min. Quantos reais ele deve pagar pelo estacionamento?
A) 2,50 B) 4,00 C) 5,00 D) 4,75 E) 3,75

Questão 15 (Banco de questões da OBMEP 2013) Qual o algarismo das unidades do número $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^{2013}$?

Questão 16 (Banco de questões da OBMEP 2011) Uma loja em Quixajuba só vende artigos com preços de R\$ 0,99; R\$ 1,99; R\$ 2,99, e assim sucessivamente. Tio Mané realizou uma compra no valor total de R\$ 125; 74. Quantos artigos ele pode ter comprado?

Questão 17 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o valor de $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 4^2 (e) 4^4

Questão 18 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é a metade do número $2^{12} + 3 \times 2^{10}$?

A) $2^6 + 3 \times 2^5$ B) $2^6 + 3 \times 2^{10}$ C) $2^{11} + 3 \times 2^5$ D) $2^{11} \times 7$ E) $2^9 \times 7$

Questão 19 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o maior dos números dados?
A) $1000 + 0,01$
B) $1000 \times 0,01$
C) $1000 \div 0,01$
D) $0,01 \div 1000$
E) $1000 - 0,01$

Questão 20 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o valor da soma $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$?

A) 9^{20} B) 3^{66} C) 9^{23} D) 3^{41} E) 3^{23}

Questão 21 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o menor número natural n para o qual $10^n - 1$ é um múltiplo de 37?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Questão 22 (Banco de questões da OBMEP 2010) Se m é um número natural tal que $3^m = 81$, quanto vale m^3?

A) 81^3 B) 3^{81} C) 64 D) 24 E) 48

Questão 23 (Banco de questões da OBMEP 2010) Considere as igualdades a seguir.
(i) $3 \times 10^6 + 5 \times 10^2 = 8 \times 10^8$
(ii) $2^3 + 2^{-3} = 2^0$
(iii) $5 \times 8 + 7 = 75$
(iv) $5 + 5 \div 5 = 2$
Qual delas está correta?

A) (i) B) (ii) C) (iii) D) (iv) E) Nenhuma

Questão 24 (Banco de questões da OBMEP 2010) Uma florista colheu 49 kg de flores do campo. O quilograma das flores pode ser vendido imediatamente a R\$ 1,25 ou, mais tarde, com as flores desidratadas, a R\$ 3,25. O processo de desidratação faz as flores perderem 5/7 de seu peso. Qual é o tipo de venda mais lucrativo para a florista?

Questão 25 (Banco de questões da OBMEP 2010) Davi vai a um armazém que vende uma garrafa de suco de laranja por R\$ 2,80 e uma caixa com seis dessas garrafas por R\$ 15,00. Ele precisa comprar 22 garrafas para seu aniversário. Quanto ele gastará, no mínimo?

Questão 26 (Banco de questões da OBMEP 2010) Escreva em ordem crescente os números $\sqrt{121}$, $\sqrt[3]{729}$ e $\sqrt[4]{38.416}$

Questão 27 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o algarismo da unidade do produto $(5+1)(5^3+1)(5^6+1)(5^{1}2+1)$?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 6

Questão 28 (Banco de questões da OBMEP 2010) Efetue a divisão $\frac{(0{,}2)^3+1}{0{,}2+1}$.

Questão 29 (Banco de questões da OBMEP 2010) Qual é o valor de $\square$ em $\frac{6.400.000}{400} = 1,6 \times \square$?

Questão 30 (Banco de questões da OBMEP 2010) Maria está olhando a tabela seguinte.

Salgados	Bebidas	Doces
Empada: R$ 3,90	Refrigerante: R$ 1,90	Sorvete: R$ 1,00
Sanduíche: R$ 2,20	Suco: R$ 1,20	Bombom: R$ 0,50
Pastel: R$ 2,00	Refresco: R$ 1,00	Cocada: R$ 0,40

Maria possui 5 moedas de 50 centavos, 7 moedas de 25 centavos, 4 moedas de 10 centavos e 5 moedas de 5 centavos.
A) Quantos reais Maria possui?
B) Se Maria precisa guardar 90 centavos para a passagem de ônibus, quais os possíveis lanches que incluam um salgado, uma bebida e um doce ela poderá pedir?

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio, v.1.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 07

Tema da aula: Média aritmética e resolução de problemas.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber calcular a média aritmética entre números inteiros e decimais. Deverá também, ter resolvido alguns problemas da lista.

Atividade em sala: Apresentar a média aritmética entre números inteiros e decimais. Resolver problemas com médias, incluindo os que tenha tabelas e gráficos. Resolver com os alunos problemas da lista.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2011) Esmeralda escolheu quatro números e, ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, achou os números 60, 64, 68 e 72. Qual é a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 66

Questão 02 (OBM 2003) Na tabela a seguir vemos o consumo mensal de água de uma família durante os 5 primeiros meses de 2003.

Meses	***Consumo (m^3)***
Janeiro	12,5
Fevereiro	13,8
Março	13,7
Abril	11,4
Maio	12,1

O consumo mensal médio dessa família durante os 5 meses foi:

A) 11,3 m^3 B) 11,7 m^3 C) 12,7 m^3 D) 63,5 m^3 E) 317,5 m^3

Questão 03 (Banco de questões da OBMEP 2011) Paulinho escreveu um número no quadro e depois inventou a seguinte brincadeira: escolhe dois algarismos do número que sejam ambos pares ou ambos ímpares e troca cada um deles pela sua média aritmética. Ele repete este processo quantas vezes quiser, desde que o número disponha de dois algarismos com a mesma paridade. Por exemplo, ele escreveu o número 1368 e obteve a sequência na qual foram destacados os algarismos que serão trocados no passo seguinte.

$$1\ 3\ 6\ 8 \longrightarrow 1\ 3\ 7\ 7 \longrightarrow 4\ 3\ 4\ 7 \longrightarrow 4\ 5\ 4\ 5$$

A) Com esta brincadeira, é possível obter o número 434434 a partir do número 324561?

B) Paulinho escreveu o número 123456789 no quadro. Mostrar que com este processo, selecionando os números adequadamente, ele pode obter um número maior que 800000000.

Comentário Na resolução do item (A), usamos a ideia de invariantes, que será abordada no capítulo destinado à preparação para as fases 2 e 3. Recomendo a a leitura do material para que se compreenda a resolução desta questão.

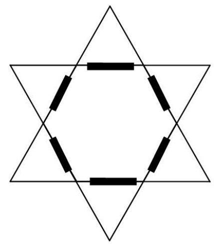
Questão 04 (OBM,2012) Suzana fez um bolo na forma de um retângulo e o repartiu em pedaços menores, fazendo 7 cortes retos paralelos aos lados do retângulo. Somente depois dos cortes ela separou os pedaços, um para ela e um para cada um de seus amigos. No máximo, quantos amigos ganharam um pedaço do bolo?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 17 E) 19

Questão 05 (OBM 2013) Rosinha ganhou vários morangos e jabuticabas, pelo menos 5 de cada tipo. Ela quer comer 5 dessas frutas, uma de cada vez, sem comer duas jabuticabas seguidamente. Ela forma uma fileira com as frutas, antes de comê-las. Quantas fileiras diferentes ela pode fazer?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 20

Questão 06 (OBM 2011) Luana colou com fita adesiva 6 triângulos equiláteros nos lados de um hexágono, conforme a figura, obtendo um polígono de 12 lados. Se ela trocar 3 triângulos por 2 quadrados e 1 pentágono regular, todos com lado de mesmo tamanho do lado do hexágono, ela vai obter um polígono com quantos lados?

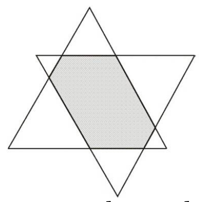


A) 14 B) 16 C) 17 D) 18 E) 25

Questão 07 (OBM 2011) Numa corrida com 2011 participantes, Dido chegou à frente do quádruplo do número de pessoas que chegaram à sua frente. Em que lugar chegou o Dido?

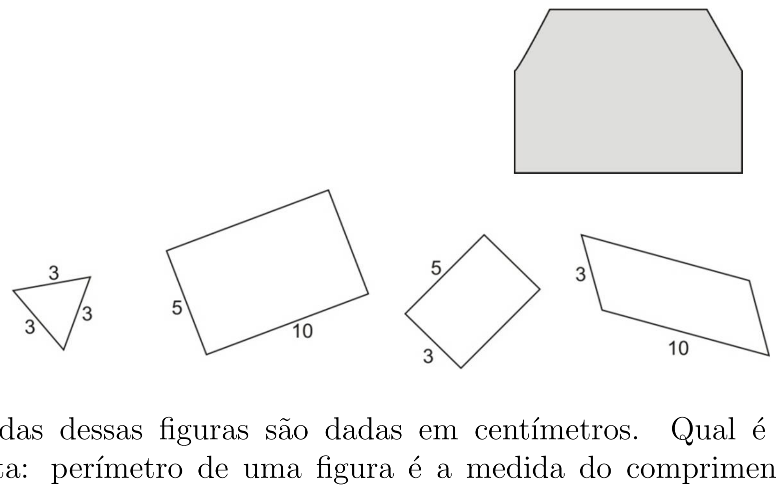
A) 20º B) 42º C) 105º D) 403º E) 1005º

Questão 08 (OBM 2011) Dois triângulos equiláteros de perímetro 36 cm cada um são sobrepostos de modo que sua interseção forme um hexágono com pares de lados paralelos, conforme ilustrado no desenho. Qual é o perímetro desse hexágono?



A) 12 cm B) 16 cm C) 18 cm D) 24 cm E) 36 cm

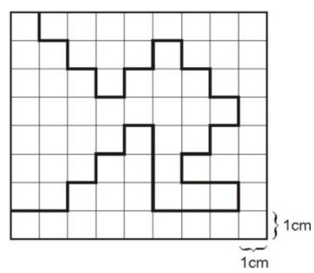
Questão 09 (OBM 2012) Carla recortou o hexágono representado ao lado nas quatro partes abaixo: um triângulo, dois retângulos e um paralelogramo.



As medidas dessas figuras são dadas em centímetros. Qual é o perímetro do hexágono? Nota: perímetro de uma figura é a medida do comprimento da linha que contorna a figura.

A) 15 cm B) 18 cm C) 26 cm D) 39 cm E) 81 cm

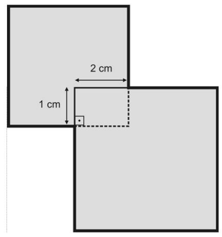
Questão 10 (OBM 2012) Juliana cortou a folha quadriculada, representada ao lado, ao longo da linha mais grossa. Ela obteve dois pedaços com diferentes perímetros. Qual é a diferença entre esses perímetros?



A) 8 cm B) 9 cm C) 18 cm D) 34 cm E) 36 cm

Questão 11 (OBM 2010) O desenho mostra dois quadrados de papel sobrepostos, um de lado 5 cm e outro de lado 6 cm. Qual é o perímetro da figura formada (linha grossa no contorno do desenho), em centímetros?

A) 31 B) 34 C) 36 D) 38 E) 41



Questão 12 (OBM 2009) De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 24

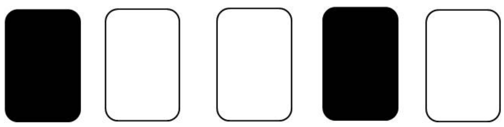
Questão 13 (OBM 2009) Esmeralda lançou um dado dez vezes e obteve 57 como soma de todos os pontos obtidos nesses lançamentos. No mínimo, quantas vezes saíram 6 pontos?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Questão 14 (OBM 2010) O horário indicado pelo relógio ao lado está correto. A partir desse momento, porém, o relógio começa a atrasar exatamente 5 minutos a cada hora real. Depois de quantos dias o relógio voltará a apresentar um horário correto?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 12

Questão 15 (OBM 2009) Cinco cartas iguais têm um lado branco e um lado preto. Elas se encontram em fila com a face branca para cima. Um movimento consiste em escolher um único par de cartas vizinhas e virá-las. No mínimo, quantos movimentos são necessários para que as cartas fiquem como na figura ao lado?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Não é possível obter a configuração acima.

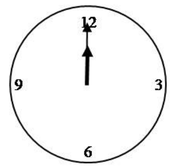
Questão 16 (OBM 2009) Numa fila para compra de ingressos para um jogo da seleção brasileira, havia 49 pessoas: 25 corintianos, 14 flamenguistas e 10 gremistas. Sabendo que cada pessoa da fila torce para um único time, dois torcedores do mesmo time não estão em posições consecutivas, podemos concluir que:

A) tal fila não existe.
B) algum dos torcedores das extremidades da fila é gremista.
C) algum dos torcedores das extremidades da fila é flamenguista.
D) algum flamenguista é vizinho de um gremista.
E) algum gremista é vizinho de dois corintianos.

Questão 17 (OBM 2009) Um número natural A de três algarismos detona um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois 1 ¡ 2. Quantos números de três algarismos detonam 314?

A) 120 B) 240 C) 360 D) 480 E) 600

Questão 18 (OBM 2009) O relógio de parede indica inicialmente meio-dia. Os ponteiros das horas e dos minutos irão formar um ângulo de 90 graus pela primeira vez:



A) entre 12h e 12h10min.
B) entre 12h10min e 12h15min.
C) entre 12h15min e 12h20min.
D) entre 12h20min e 12h25min.
E) após as 12h25min.

Questão 19 (OBM 2009) Eduardo escreveu todos os números de 1 a 2009 numa folha de papel. Com os amigos, combinou o seguinte: cada um deles poderia apagar quantos números quisesse e escrever, no fim da lista, o algarismo das unidades da soma dos números apagados. Por exemplo, se alguém apagasse os números 28, 3, 6, deveria escrever no fim da lista o número 7, pois $28 + 3 + 6 = 37$. Após algum tempo, sobraram somente dois números. Se um deles era 2000, qual dos números a seguir poderia ser o outro?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

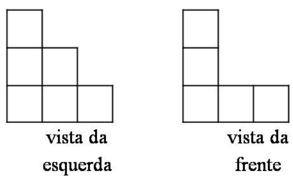
Questão 20 (OBM 2009) O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

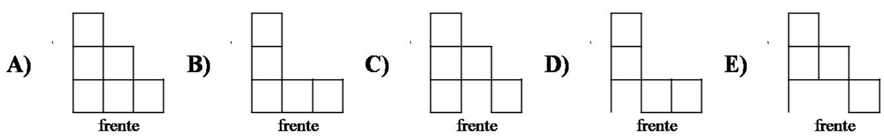
Questões→ Estudantes↓	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0

Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade m de acertos. Qual é o valor de m?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

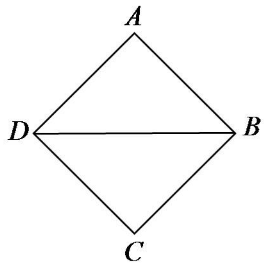
Questão 21 (OBM 2009) Alguns cubos foram empilhados formando um bloco. As figuras ao lado representam a vista da esquerda e da frente desse bloco. Olhando o bloco de cima, qual das figuras a seguir não pode ser vista?



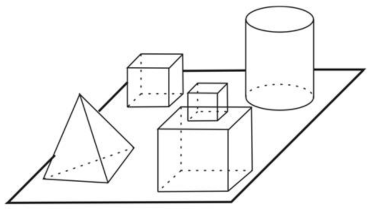


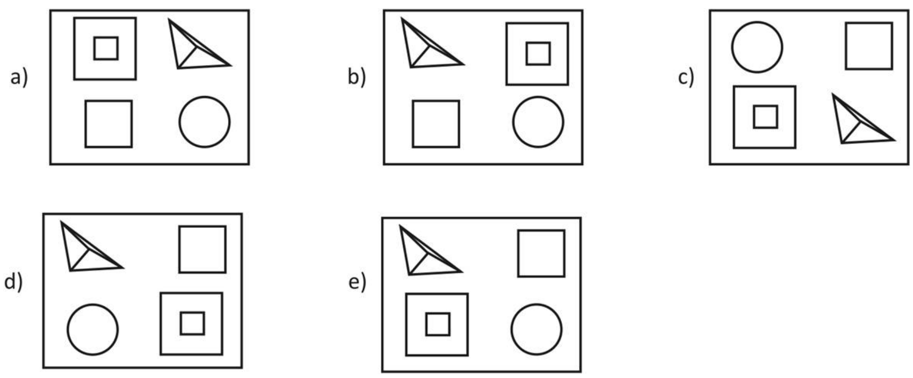
Questão 22 (OBM 2009) A figura ao lado é o mapa de um bairro: os pontos A, B, C e D são as casas e os segmentos são as ruas. De quantas casas é possível fazer um caminho que passa exatamente uma vez por cada uma das ruas? É permitido passar mais de uma vez por uma mesma casa.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



Questão 23 (OBM 2008) Sobre uma mesa retangular de uma sala foram colocados quatro sólidos, mostrados no desenho. Uma câmera no teto da sala, bem acima da mesa, fotografou o conjunto. Qual dos esboços a seguir representa melhor essa fotografia?





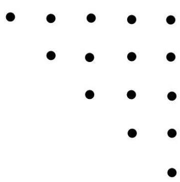
Questão 24 (OBM 2008) Uma urna contém 2008 cartões. Cada cartão recebeu um número diferente, a partir do número 1 até o 2008. Retiram-se dois cartões ao acaso e somam-se os números dos cartões. Quantos números ímpares diferentes podem ser obtidos dessa maneira?

A) 1004 B) 1005 C) 2007 D) 2008 E) 4016

Questão 25 (OBM 2008) Quantos números pares de três algarismos têm dois algarismos ímpares?

A) 20 B) 48 C) 100 D) 125 E) 225

Questão 26 (OBM 2008) Quantos quadrados têm como vértices os pontos do reticulado ao lado?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Questão 27 (OBM 2008) A primeira fase da OBM se realiza no dia 14 de junho, um sábado do ano bissexto 2008. Daqui a quantos anos o dia 14 de junho será novamente no sábado?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 28 (OBM 2008) Na multiplicação ao lado, alguns algarismos, não necessariamente iguais, foram substituídos pelo sinal *. Qual é a soma dos valores desses algarismos?

A) 17 B) 27 C) 37 D) 47 E) 57

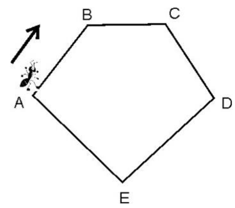
$$\begin{array}{r} *\,*\,* \\ \times\ *\,7 \\ \hline *\,*\,* \\ *\,*\,*\ \ \\ \hline 6\,1\,5\,7 \end{array}$$

Questão 29 (OBM 2011) O número $n = 9999\cdots99$ tem 2011 algarismos e todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2 ?

A) nenhum B) 11 C) 2010 D) 2011 E) 4022

Questão 30 (OBM 2013) No pentágono $ABCDE$ ao lado, $AB = BC = CD = 2$ metros e $DE = EA = 3$ metros. Uma formiguinha parte do vértice A e caminha com velocidade constante de um metro por segundo ao longo de seus lados, sempre no mesmo sentido. Em que ponto estará no 2013º segundo?

A) A B) B C) C D) D E) E



Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio, v.2.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 08

Tema da aula: Equação do primeiro grau e sistemas

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber revolver equações do primeiro grau com uma variável, encontrar possíveis soluções inteiras para equações com duas variáveis e resolver sistemas simples.

Atividade em sala: Apresentar a equação do primeiro grau com uma variável através de um problema, apresentar as equações com duas variáveis também por problemas e finalizar com os sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis pelo método da substituição.

Citar que podem haver mais variáveis e que há outras formas de resolver o sistema.

Lista de exercícios:

Questão 01 Resolva cada uma das equações a seguir:
A) $x + 12 = 19$
B) $3x - 6 = 24$
C) $\frac{2x+5}{3} = 5$
D) $\frac{x}{2} + 8 = 13$

Questão 02 Escreva a equação correspondente em cada caso:
A) O dobro de um número somado a dois é igual ao número menos 5.
B) A metade da soma entre um número e 7 excede o próprio número em uma unidade.
C) O triplo de um número somado ao seu dobro é igual ao seu quádruplo somado a 4.
D) A metade de um número somado à sua terça parte é igual ao próprio número.

Questão 03 Resolva cada um dos sistemas a seguir:

A)$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$

B)$\begin{cases} 3x = 2y \\ x + y = 9 \end{cases}$

C)$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

D)$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Questão 04 (OBM 2006) Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solução Sendo n o referido número, temos:

$n = 15a + 7 = 3 \cdot 5a + 3 \cdot 2 + 1 = 3(5a + 2) + 1$

Logo, o resto da divisão por 3 é 1. Da mesma forma, temos:

$n = 15a + 7 = 5 \cdot 3a + 5 + 2 = 5(3a + 1) + 2$

Logo, o resto da divisão por 5 é 2 e a soma dos restos é 3.

Questão 05 (OBM 2003) Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, o valor de x é:
A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

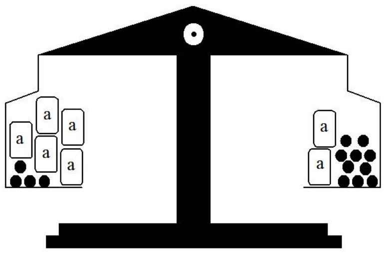
1	14	x
26		13

Questão 06 (OBM 2003) João disse para Maria: "Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar". Maria acrescentou: "E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho". Juntos, os dois possuem:
A) 80 reais B) 90 reais C) 100 reais D) 120 reais E) 130 reais

Questão 07 (OBM 2003) Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por $2x + 1$. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por $3x$–1. Se no visor está o número 5, apertando alguma sequência das teclas A e B, o maior número de dois algarismos que se pode obter é:

A) 85 B) 87 C) 92 D) 95 E) 96

Questão 08 (OBM 2002) Na balança a seguir temos pesadas bolas de chumbo, todas iguais, e leves saquinhos de plástico, todos com a mesma quantidade de bolinhas, iguais às que estão fora dos mesmos. Quantas bolinhas há em cada saquinho?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

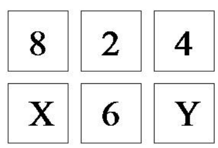
Questão 09 (OBM 2000) Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

A) 72 anos e 36 anos. B) 36 anos e 18 anos. C) 40 anos e 20 anos. D) 50 anos e 25 anos. E) 38 anos e 19 anos

Questão 10 (OBM 1999) Ronaldo, sempre que pode, guarda moedas de 50 centavos ou 1 real. Atualmente, ele tem 100 moedas, num total de 76 reais. Quantas moedas de um valor ele tem a mais do que a de outro valor ?

A) 48 B) 4 C) 8 D) 52 E) 96

Questão 11 (OBM 1999) 6 cartões com números somente numa das faces são colocados sobre uma mesa conforme a ilustração. Os cartões X e Y estão com a face numerada voltada para baixo. A média aritmética dos números de todos os cartões é 5. A média aritmética dos números do cartão Y e seus três vizinhos é 3. Qual é o número escrito no cartão X ?



A) – 4 B) 12 C) 0 D) 15 E) 10

Questão 12 (OBM 1999) Marcos quer pesar três maças numa balança de dois pratos, mas ele dispõe de apenas um bloco de 200 gramas. Observando o equilíbrio na balança, ele observa que a maçã maior tem o mesmo peso que as outras duas maçãs juntas; o bloco e a maçã menor pesam tanto quanto as outras duas maçãs juntas; a maçã maior junto com a menor pesam tanto quanto bloco. O peso total das três maçãs é:

A) 250 g B) 300 g C) 350 g D) 400 g E) 450 g

Questão 13 (OBM 1998) Renata digitou um número em sua calculadora, multiplicou-o por 3, somou 12, dividiu o resultado por 7 e obteve o número 15. O número digitado foi:

A) 31 B) 7 C) 39 D) 279 E) 27

Questão 14 (OBM 1998) Elevei um número positivo ao quadrado, subtrai do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual:
A) Ao próprio número
B) Ao dobro do número
C) Ao número mais 1
D) À raiz quadrada do número
E) Ao número menos 1

Questão 15 (OBM 1998) João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas. Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto x bolinhas, ao segundo $x + 1$ bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas. Sendo x o número que deixa João com o menor resto possível, x é igual a:

A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 E) 98

Questão 16 (OBM 1998) No planeta Z todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então podemos afirmar:
A) É possível que existam 19 carros nessa cidade
B) Existem no máximo 16 carros nessa cidade
C) Essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros
D) Essa cidade possui no máximo 17 carros
E) Nessa cidade existem mais carros do que pessoas

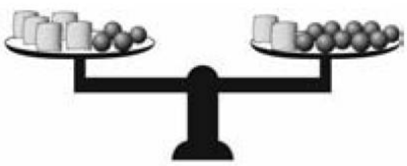
Questão 17 (OBM 1998) Num código secreto, as 10 primeiras letras do nosso alfabeto representam os algarismos de 0 a 9, sendo que a cada letra corresponde um único algarismo e vice-versa. Sabe-se que $d + d = f, d.d = f, c + c = d, c + d = aea–a = b$. Podemos concluir que $a + b + c + d$ é igual a:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Questão 18 (Banco de questões da OBMEP 2012) Um fazendeiro perguntou ao seu filho: Quantos pés eu posso contar quando eu estou tirando leite de uma vaca? O menino respondeu: São 6, sendo 4 da vaca e 2 seus. O pai então disse: Na verdade são 9, porque você esqueceu de contar os 3 do banquinho em que eu fico sentado. A seguir, o pai propôs outro problema ao seu filho: Num curral há algumas pessoas, vacas e banquinhos, pelo menos um de cada. O número total de pés é 22 e o de cabeças é 5. Quantas vacas há no curral? O menino resolveu o problema corretamente. Qual foi sua resposta?

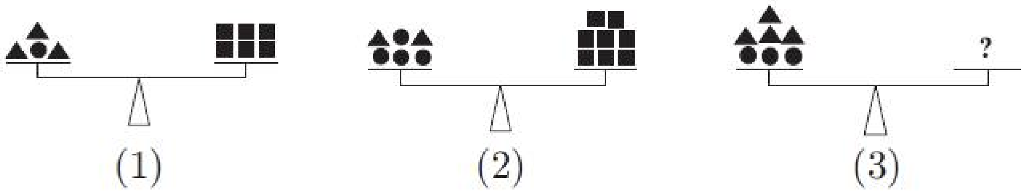
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 19 (Banco de questões da OBMEP 2010) A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de seus pratos. As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Questão 20 (Banco de questões da OBMEP 2010) As balanças (1) e (2) da figura dada estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso, bem como todos os quadrados e também todos os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Questão 21 (Banco de questões da OBMEP 2010) Se $a-1 = b+2 = c-3 = d+4$, qual é o maior dentre os números a, b, c e d?
A) a B) b C) c D) d E) São todos iguais

Questão 22 (Banco de questões da OBMEP 2010) Se a, b e c são números inteiros positivos tais que 3a = 4b = 7c, qual é o menor valor possível de a + b + c?
A) 84 B) 36 C) 61 D) 56 E) 42

Questão 23 (Banco de questões da OBMEP 2009) Quantos pares de inteiros positivos (x, y) são soluções da equação 3x + 5y = 501?

Questão 24 (Banco de questões da OBMEP 2009) Maria está planejando participar do Triatlon-Brasil que começa ás 24 horas de domingo e consta de 800 m a nado, seguido de 20 km de bicicleta e finalmente 4 km de corrida. Maria corre a uma velocidade constante e que é o triplo da velocidade que nada, e pedala 2,5 vezes mais rápido do que corre. Para terminar a prova em no máximo 1 hora e 20 minutos, quanto tempo ela deve gastar em cada uma das 3 etapas?

Questão 25 (Banco de questões da OBMEP 2009) O diretor da escola decidiu tirar uma foto dos formandos de 2 008. Ele colocou os alunos em filas paralelas, todas com o mesmo número de alunos, mas essa disposição era muito larga para o campo de visão de sua máquina fotográfica. Para resolver esse problema, o diretor reparou que bastava tirar um aluno por fila e colocá-los numa nova fila. Essa disposição não agradou o diretor porque a nova fila tinha 4 alunos a menos que as outras. Ele decide então tirar mais 1 aluno por fila colocando-os na nova fila que ele criou, e constata que assim todas as filas ficam com o mesmo número de alunos, e finalmente tira a foto. Quantos alunos apareceram na foto?

Questão 26 (Banco de questões da OBMEP 2007) Uma panela pesa 645 g e outra 237 g. José divide 1 kg de carne entre as duas panelas, de modo que as duas com seus conteúdos ficam com o mesmo peso. Quanto ele colocou de carne em cada panela?

Questão 27 (Banco de questões da OBMEP 2007) Se $\frac{x}{y} = 2$, então $\frac{x-y}{x}$ é igual a:
A) - 1 B) - 1/2 C) 1/2 D) 1 E) 2

Questão 28 (OBM 2006) Ana, Esmeralda e Lúcia têm, juntas, 33 reais. Ana e Esmeralda, juntas, têm 19 reais e Esmeralda e Lúcia, juntas, têm 21 reais. Quantos reais tem Esmeralda?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 12 E) 14

Questão 29 (OBM 2006) Um time de futebol ganhou 8 jogos mais do que perdeu e empatou 3 jogos menos do que ganhou, em 31 partidas jogadas. Quantas partidas o time venceu?

A) 11 B) 14 C) 15 D) 17 E) 23

Questão 30 (OBM 2006) No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2006?

A) 55 B) 56 C) 60 D) 62 E) 108

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 09

Tema da aula: Área de alguns polígonos e volume de paralelepípedos e cubos

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer o conceito de área e volume e saber calcular a área de alguns polígonos (retângulo, quadrado, paralelogrago, triângulo e trapézio) e o volume do paralelepípedo retângulo e do cubo.

Atividade em sala: Apresentar o conceito de área (com base inicialmente em medidas inteiras e depois expandir) bem como de volume. Mostrar como chegar às fórmulas das áreas e volumes desejados. Resolver exemplos.

Lista de exercícios:

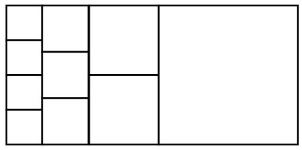
Questão 01 (OBM 2013) Um quadrado de área $144cm^2$ pode ser decomposto em seis quadrados de lados inteiros, não todos iguais. Qual é a soma dos perímetros de todos os seis quadrados?

A) 36 cm B) 84 cm C) 96 cm D) 112 cm E) 164 cm

Questão 02 (OBM 2009) Eliana tem 27 cubos iguais em tamanho, mas 4 são brancos e os demais, pretos. Com esses 27 cubos, ela monta um cubo maior. No máximo, quantas faces inteiramente pretas ela poderá obter?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 03 (OBM 2011) O retângulo da figura abaixo está dividido em 10 quadrados. As medidas dos lados de todos os quadrados são números inteiros positivos e são os menores valores possíveis.

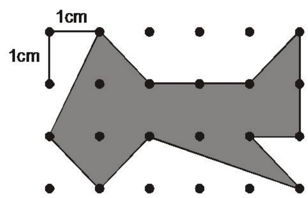


A área desse retângulo é:

A) 180 B) 240 C) 300 D) 360 E) 450

Solução Chamando o lado do quadrado menor de a, do segundo menor de b, do segundo maior de c e do maior de d, temos, pela figura, que $4a = 3b = 2c = d$. Assim, o valor de d deve ser um número divisível por 2,3 e 4. O menor valor possível para d é $mmc(2,3,4) = 12$. Assim, temos $a = 3$, $b = 4$ e $c = 6$. A área do retângulo será $(a+b+c+d)d = (3+4+6+12)12 = 300$

Questão 04 (OBM 2010) No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância.



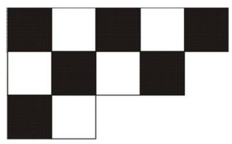
Qual é a área da região sombreada?

A) 7 B) 8 C) 8,5 D) 9 E) 9,5

Questão 05 (OBM 2008) Com segmentos de 1 cm de comprimento podemos formar triângulos. Por exemplo, com nove desses segmentos podemos formar um triângulo equilátero de lado 3 cm. Com qual número de segmentos a seguir é impossível formar um triângulo?

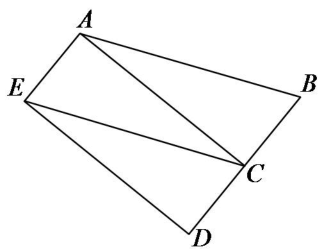
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 06 (OBM 2010) O desenho representa um canto de um tabuleiro retangular convencional, formado por quadradinhos de lado 1 cm. Nesse tabuleiro, 17 quadradinhos são brancos. Qual é a área do tabuleiro, em centímetros quadrados?



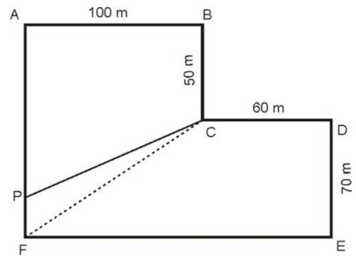
A) 29 B) 34 C) 35 D) 40 E) 150

Questão 07 (OBM 2009) Na figura, C é um ponto do segmento BD tal que $ACDE$ é um retângulo e $ABCE$ é um paralelogramo de área $22cm^2$. Qual é a área de $ABDE$, em cm^2?



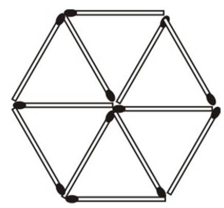
A) 28 B) 33 C) 36 D) 42 E) 44

Questão 08 (OBM 2012) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono $ABCDEF$. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 20

Questão 09 (OBM 2009) Usando palitos de fósforos, podemos construir um hexágono regular, formado por seis triângulos equiláteros unitários, como mostra a figura. Juntando mais palitos a esse hexágono, queremos obter outro hexágono regular com o quádruplo da área, também formado por triângulos equiláteros unitários. Quantos palitos deverão ser acrescentados?

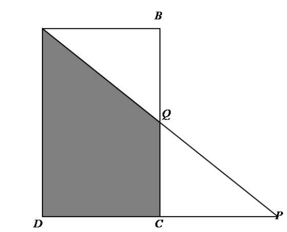


A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

Questão 10 (OBM 2009) Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?

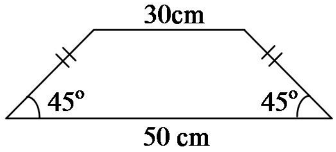
A) 144 cm2 B) 288 cm2 C) 364 cm2 D) 442 cm2 E) 524 cm2

Questão 11 (OBM 2009) Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP. Se $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?



A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm D) 4 cm E) 5 cm

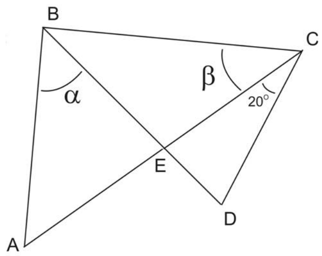
Questão 12 (OBM 2008) Juntando quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm, como o da figura ao lado, podemos formar um quadrado de área $2500cm^2$, com um "buraco" quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio, em cm^2?



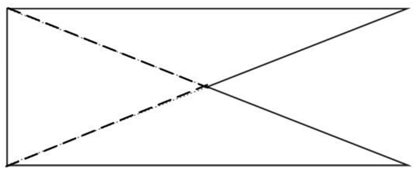
A) 200 B) 250 C) 300 D) 350 E) 400

Questão 13 (OBM 2008) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

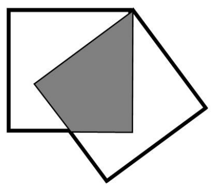


Questão 14 (OBM 2008) Dois cartões iguais têm a forma de um triângulo retângulo de lados 5 cm, 12 cm e 13 cm. Esmeralda juntou os dois cartões sobre uma folha de papel e, contornando as beiradas com um lápis, obteve uma figura como a ao lado, que está fora de escala. Qual é o perímetro dessa figura?



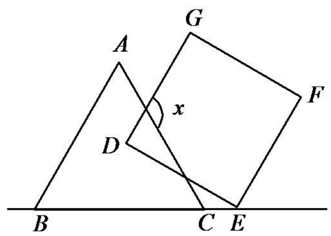
A) 28 cm B) 35 cm C) 42 cm D) 43 cm E) 60 cm

Questão 15 (OBM 2007) A figura ao lado é formada por dois quadrados de área $100cm^2$ cada um, parcialmente sobrepostos, de modo que o perímetro da figura (linha mais grossa) é igual 50 cm. Qual é a área da região comum aos dois quadrados, em cm^2?



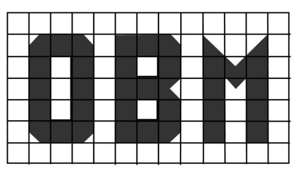
A) 20 B) 25 C) 30 D) 40 E) 50

Questão 16 (OBM 2007) Na figura, o lado $\overline{AB}$ do triângulo equilátero ABC é paralelo ao lado $\overline{DG}$ do quadrado $DEFG$. Qual é o valor do ângulo x?



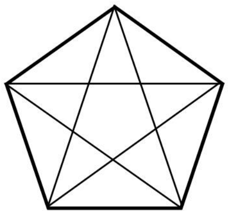
A) 80^o B) 90^o C) 100^o D) 110^o E) 120^o

Questão 17 (OBM 2007) No quadriculado ao lado, cada quadradinho tem $1cm^2$. Os segmentos inclinados ligam pontos médios dos lados dos quadradinhos ou um vértice ao centro de um quadradinho. Qual é a área ocupada pela sigla OBM, em cm^2?



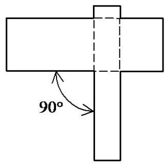
A) 28 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

Questão 18 (OBM 2006) Quantos triângulos isósceles têm como vértices os vértices do pentágono regular desenhado ao lado?



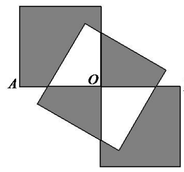
A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Questão 19 (OBM 2006) São dadas duas tiras retangulares de papel com 20 cm de comprimento, uma com 5 cm de largura e outra com 11 cm de largura. Uma delas foi colada sobre a outra, perpendicularmente, de modo a formar a figura ilustrada ao lado. Qual é o perímetro dessa figura, em centímetros?



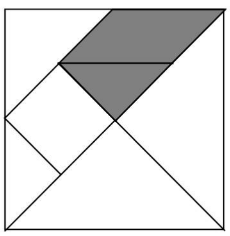
A) 50 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

Questão 20 (OBM 2006) O desenho à direita representa dois quadrados menores congruentes de lado 20 e um quadrado maior. O vértice O é o único ponto comum aos dois quadrados menores e é o centro do quadrado maior. Os vértices A, O e B estão alinhados e a área da região do quadrado maior não pintada é igual a 36% da área de toda a região pintada. Qual é a área do quadrado maior?



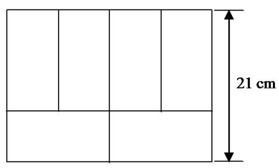
A) 420 B) 496 C) 576 D) 640 E) 900

Questão 21 (OBM 2006) A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é $64cm^2$, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



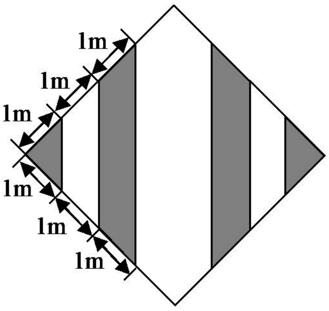
A) 7,6 B) 8 C) 10,6 D) 12 E) 21,3

Questão 22 (OBM 2005) Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?



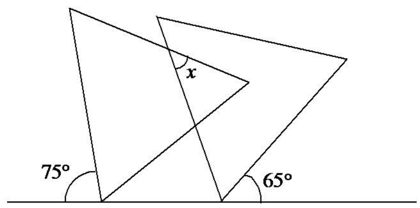
A) $210cm^2$ B) $280cm^2$ C) $430cm^2$ D) $504cm^2$ E) $588cm^2$

Questão 23 (OBM 2005) Uma placa decorativa consiste num quadrado de 4 metros de lado, pintada de forma simétrica com algumas faixas, conforme indicações no desenho ao lado. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?



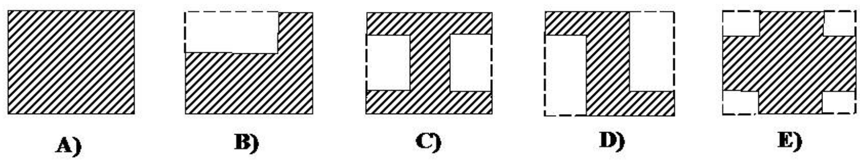
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{11}$

Questão 24 (OBM 2005) Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?

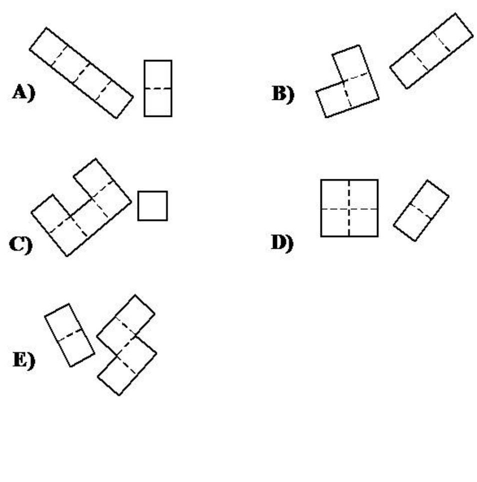


A) 30^o B) 40^o C) 50^o D) 60^o E) 70^o

Questão 25 (OBM 2004) Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo da construção da cerca será maior?

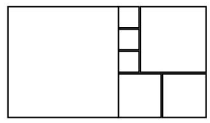


Questão 26 (OBM 2004) Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:

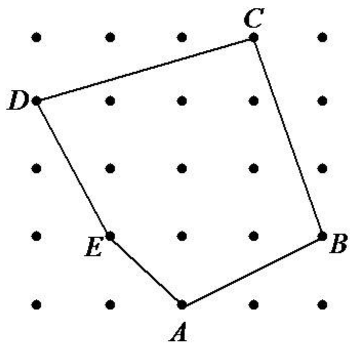


Questão 27 (OBM 2003) O retângulo da figura a seguir está dividido em 7 quadrados. Se a área do menor quadrado é igual a 1, a área do retângulo é igual a:

A) 42 B) 44 C) 45 D) 48 E) 49



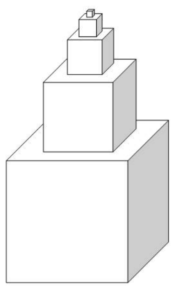
Questão 28 (OBM 2003) Na organização retangular de pontos da figura abaixo, a distância entre pontos vizinhos em uma mesma linha ou coluna é igual a 1 cm.



A área do pentágono $ABCDE$ é, em cm^2, é igual a:

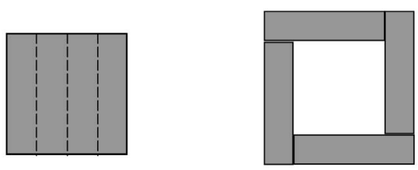
A) 9 B) $\frac{19}{2}$ C) 10 D) E) 11

Questão 29 (OBM 2003) Um troféu formado por cinco recipientes cúbicos foi construído da seguinte maneira: sob o cubo de lado 10 cm foi soldado o cubo de lado 20 cm, sob este foi soldado o cubo de lado 30 cm, e assim por diante. Toda a superfície externa desse troféu deverá ser coberta com um certo tipo de revestimento. Quantos metros quadrados desse revestimento serão necessários?



A) 1,5 B) 2,5 C) 2,7 D) 2,75 E) 3

Questão 30 (OBM 2002) Um quadrado de área 1 foi dividido em 4 retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita.



A)$\frac{1}{2}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{16}{25}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas.* SBM. Rio de Janeiro, 2010

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio, v. 2.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar, v. 2.* SBM. Rio de Janeiro, 2012

Fase 01 - Aula 10

Tema da aula: Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Duração: 60 minutos.

Atividade em sala: Após analisar a prova que será aplicada, selecionar questões de olimpíadas de anos anteriores para resolver em sala. O grifo em **anos anteriores** é para chamar a atenção da necessidade de manter a lisura do processo, evitando elaborar questões similares para resolver com os alunos.

Aproveitar o momento para dar as últimas orientações quanto ao momento da realização da prova e transmitir tranquilidade aos alunos.

Para este tópico, não apresentamos lista de exercícios mas recomendamos o uso das questões disponíveis nos sites da OBM e da OBMEP.

Capítulo 6

Aulas do Nível 02 - Fase 01

Para o Nível 02 os tópicos escolhidos para as dez aulas de preparação para a primeira fase, separados por aula, foram:

Aula 01 - Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Aula 02 - Resolução de exercícios de revisão de tópicos das séries anteriores.

Aula 03 - Triângulos (ângulos, propriedades e desigualdade triangular).

Aula 04 - Polígonos (elementos, propriedades e cálculo de áreas).

Aula 05 - Equações e sistema de equações.

Aula 06 - Produtos notáveis.

Aula 07 - Fatoração.

Aula 08 - Trigonometria no triângulo retângulo.

Aula 09 - Introdução à análise combinatória.

Aula 10 - Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Como dito anteriormente, a escolha desses assuntos se deu pela análise das provas dos anos de 2010 a 2013. O quadro a seguir mostra a quantidade de questões envolvendo cada um desses assuntos nesses anos.

Tema	2013	2012	2011	2010
Aula 01	5	1	5	3
Aula 02	7	4	4	5
Aula 03	1	1	2	1
Aula 04	0	2	2	1
Aula 05	1	0	1	1
Aula 06	1	2	0	0
Aula 07	0	2	1	1
Aula 08	0	1	1	0
Aula 09	1	2	1	1

As listas de exercícios apresentam uma compilação de questões (principalmente da OBM e da OBMEP) por tema. Apenas uma questão em cada uma das listas de exercício apresenta resolução ou comentário sobre a mesma. A escolha de não apresentar as demais resoluções se deu pelos seguintes motivos: as questões da OBM e OBMEP já apresentam resolução nos sites das competições, as demais questões são consideradas de simples resolução e ainda, o trabalho teria muito mais páginas do que já tem.

Em escolas onde o professor julgar que não há possibilidade de participação na OBM ou OBMEP, essas questões selecionadas podem ser usadas para desenvolver uma competição interna com os seus alunos.

Fase 01 - Aula 01

Tema da aula: Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Duração:60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer o funcionamento básico da OBM como a divisão em níveis e fases, o formato da prova e do curso preparatório e a forma de classificação para a segunda fase. Além disso, deverá saber os caminhos para resolver questões com os temas propostos (visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos).

Síntese dos assuntos:

Sobre a OBM: A OBM surgiu em 1979, sendo organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Atualmente é disputada em quatro diferentes níveis de acordo com a série que o aluno cursa, sendo: Nível 01 para alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental, Nível 02 para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental, Nível 03 para alunos do ensino médio *ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM.* e Nível Universitário para estudantes de graduação de qualquer curso.

Após a correção das provas da primeira fase (que são de múltipla escolha com 25 questões), é estabelecida e divulgada no site da OBM a nota mínima para que o aluno seja classificado para a prova da segunda fase. Esta tem um formato diferente, sendo dividida em Parte A - 5 questões a serem resolvidas e apresentado apenas o resultado e Parte B - 4 problemas onde a resolução é levada em consideração (não é necessário estender o debate sobre a segunda fase, deixando isso para as aulas destinadas a esta fase).

Sobre o curso: O curso preparatório para a prova da primeira fase terá 10 aulas que serão ministradas segundo dias e horários divulgados na carta já entregue. O curso, apesar de não ser obrigatório, tem em si um dos objetivos da OBM que é estimular o estudo da matemática e é de grande ajuda por proporcionar o contato dos alunos com os assuntos e questões já cobrados na OBM. É comum que alguns alunos façam a inscrição para o curso mas percebam que não é conveniente para eles continuar e é importante deixar claro que eles podem deixar de frequentar as aulas nestes casos.

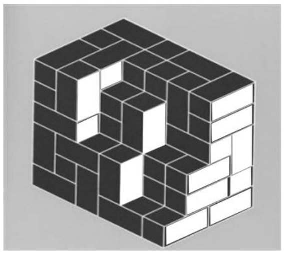
Sobre as questões: Resolver as questões selecionadas, fazendo os alunos perceberem as estratégias escolhidas e até mesmo, estimular que eles proponham outras.

Selecionar questões que foram aplicadas em edições recentes da OBM. Distribuir lista de exercícios com problemas desse tipo.

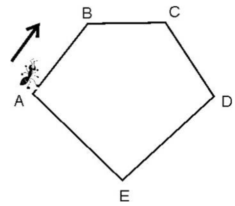
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Esmeralda está construindo um paralelepípedo usando blocos menores iguais. Para terminar sua tarefa, quantos blocos Esmeralda ainda deve colocar?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20



Questão 02 (OBM 2013) No pentágono $ABCDE$ ao lado, $AB = BC = CD = 2$ metros e $DE = EA = 3$ metros. Uma formiguinha parte do vértice A e caminha com velocidade constante de um metro por segundo ao longo de seus lados, sempre no mesmo sentido. Em que ponto estará no 2013º segundo?



A) A B) B C) C D) D E) E

Questão 03 (OBM 2013) Dalvenilson (ops, aluno D) procurou um amigo para aprender qual era o jeito ensinado pelo professor para verificar se um número é múltiplo de 7 sem realizar a divisão. O método ensinado é tomar o dígito das unidades apagá-lo e subtrair o seu dobro no número que sobrou. Por exemplo, para 1001 teremos: $100-2\bullet 1 = 98$ e repetindo, teremos $9 - 2 \bullet 8 = -7$, que é um múltiplo de 7. Então, 98 e 1001 são múltiplos de 7. Sabendo disso, qual dos números a seguir é um múltiplo de 7?

A) 102112 B) 270280 C) 831821 D) 925925 E) 923823

Questão 04 (OBM 2013) O programa "Quem não quer o bode?" ficou muito famoso nos Estados Unidos. O programa era como a seguir: o participante deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas, há um carro e atrás de cada uma das outras duas, há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta escolhida. Entretanto, os organizadores do programa perceberam, com o passar do tempo, que aproximadamente dois em cada três participantes ganhavam o carro e, com isso, decidiram mudar o programa. Agora, cada uma das três portas teriam números de 1 a 3 e haveria um porteiro identificado com o número da porta. Cada porteiro faz uma afirmação que pode ser verdade ou mentira. Em seguida, o participante escolhe a porta na qual acredita que o carro está. Em um dos programas, foram ditas as seguintes afirmações pelos porteiros:

• Porteiro 1: O carro não está atrás da porta 3. • Porteiro 2: O carro está atrás da minha porta. • Porteiro 3: O carro não está atrás da minha porta.

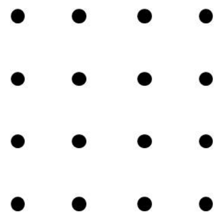
Sabe-se que pelo menos uma das afirmações é verdade e que pelo menos uma é mentira. Atrás de qual porta está o carro?

A) porta 1 B) porta 2 C) porta 3 D) não é possível identificar. E) não é possível que esteja em nenhuma delas.

Questão 05 (OBM 2012) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.

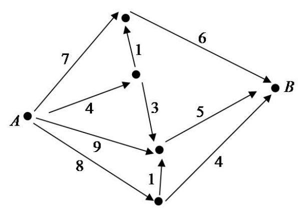
A) Seis B) Cinco C) Quatro D) Três E) Duas

Questão 06 (OBM 2012) Quantas são as possíveis distâncias entre dois pontos distintos do reticulado 4×4 a seguir? Os pontinhos estão distribuídos em linhas e colunas igualmente espaçadas entre si por uma unidade.



A) 4 B) 6 C) 9 D) 11 E) 16

Questão 07 (OBM 2011) A figura ao lado representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade A e chega na cidade B?



A) 11 B) 14 C) 12 D) 10 E) 15

Questão 08 (OBM 2011) No desenho ao lado, três cubos iguais estão apoiados sobre uma mesa. Cada cubo tem as faces numeradas por 0, 1, 3, 4, 5, 9, onde cada número aparece exatamente uma vez. Qual é a soma dos números das faces em contato com a mesa?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Questão 09 (OBM 2011) Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)

A) Vinte e quatro. B) Trinta e seis. C) Quarenta e dois. D) Quarenta e oito. E) Cinquenta e seis.

Questão 10 (OBM 2011) Topázio desenhou cada figura a seguir, exceto uma, tirando o lápis do papel exatamente uma vez e nunca passando pela mesma linha duas vezes. Qual das figuras abaixo ela não desenhou?

Questão 11 (OBM 2011) No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade

quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

X: "Hoje está chovendo." Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo." Z: "Hoje não está chovendo." W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds." Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

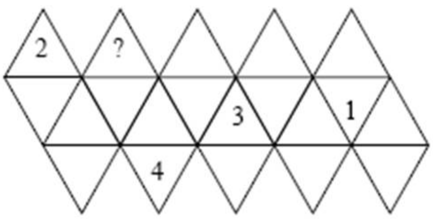
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

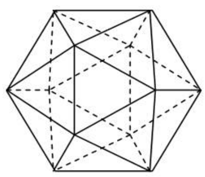
Questão 12 (OBM 2010) Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:
Arnaldo: “Eu tenho quatro cartas com o mesmo número.”
Bernaldo: “Eu tenho as cinco cartas vermelhas.”
Cernaldo: “As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V.”
Dernaldo: “Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número.”
Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

A) Arnaldo B) Bernaldo C) Cernaldo D) Dernaldo E) Não é possível definir.

Solução Neste tipo de questão, costumamos fazer a suposição de que uma das afirmações é verdadeira e analisamos as implicações dessa suposição sobre as outras afirmações. Suponha que a afirmação de Arnaldo é verdadeira, ou seja, ele tem quatro cartas com o mesmo número. Isso significa que cada uma das cartas é de uma cor diferente já que não há cartas iguais. Vamos supor que essas cartas são as que têm o número 1, ou seja: 1 azul, 1 amarelo, 1 verde, 1 vermelho. Essa suposição implica que Bernaldo está mentindo pois uma das cartas vermelhas está com Arnaldo (1 vermelho). Cernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 2 verde,4 verde, 5 verde, 2 vermelho e 3 vermelho. Dernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 3 azul, 3 amarelo, 3 verde, 4 azul e 4 amarelo. Assim, temos uma situação onde somente Bernaldo faz uma afirmação falsa.

Questão 13 (OBM 2010) A figura a seguir foi recortada em cartolina e depois dobrada para formar um icosaedro. As faces em branco foram numeradas de modo que ao redor de cada vértice (pontas do sólido) apareçam os números de 1 a 5. Qual número está na face com a interrogação?

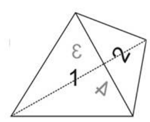




ICOSAEDRO

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 13 (OBM 2010) Um dado especial tem como faces triângulos equiláteros, numerados de 1 a 4, como no desenho. Colando dois dados, fazemos coincidir duas faces, com o mesmo número ou não. Qual dos números a seguir não pode ser a soma dos números das faces visíveis?



A) 12 B) 14 C) 17 D) 18 E) 19

Questão 14 (Fomin 2012) Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois, cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo, todas as bactérias se dividem novamente em duas e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Questão 15 (Fomin 2012) Ana, João e Alex fizeram uma excursão de ônibus pela Disneilândia. Cada um deles tem que pagar pelo passeio com moedas de plástico com valor 5, mas eles só têm moedas com os valores 10, 15 e 20 (cada um tem uma quantidade ilimitada de cada um desses tipos de moeda). Como eles podem pagar pela excursão?

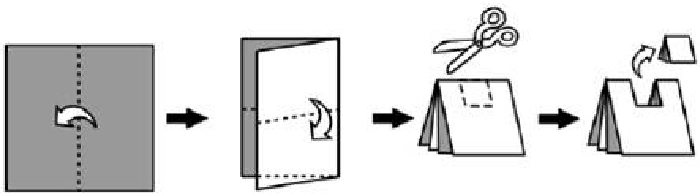
Questão 16 (Fomin 2012) Pedro disse: " Anteontem eu tinha 10 anos, mas vou fazer 13 anos no ano que vem". Isto é possível?

Questão 17 (Fomin 2012) O filho do pai de uma pessoa está falando com com o pai do filho desta pessoa e esta pessoa não está participando da conversa. Isto é possível?

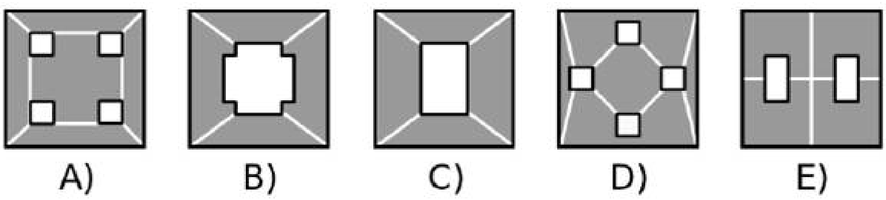
Questão 18 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

Questão 19 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Numa quitanda, há três caixas. Uma contém apenas laranjas, outra contém apenas goiabas, e a terceira contém laranjas e goiabas. Ives, que trabalha nesta quitanda, escreveu em uma caixa "Laranjas", em outra "Goiabas" e em outra "Laranjas e Goiabas", de maneira que cada nome estivesse na caixa errada. Pedindo a Ives que retire e mostre apenas uma fruta de apenas uma caixa, é possível saber como reescrever todos os nomes nas caixas de maneira correta. Explique como!

Questão 20 (Banco de Questões da OBMEP 2012) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.



Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

TAO, Terence. *Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal.* SBM. Rio de Janeiro, 2013

Fomin, Dmitri; Gekin, Sergey; Itenberg, Ilia. *Círculos Matemáticos: a experiência russa.* IMPA. Rio de Janeiro, 2012

Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* SBM. Rio de Janeiro, 2011

Fase 01 - Aula 02

Tema da aula: Resolução de exercícios de revisão de tópicos das séries anteriores (porcentagem, proporção, operações entre frações, potenciação e suas propriedades, múltiplos e divisores).

Duração: 60 minutos.

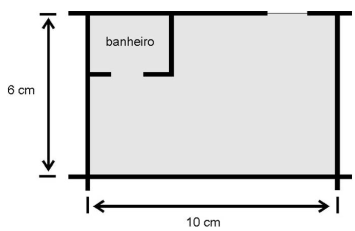
Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá ter revisto e relembrado os tópicos trabalhados que são de séries anteriores. Deverá poder resolver a lista de exercícios apresentada.

Atividade em sala: Revisar os tópicos através da resolução de exercícios.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?
A) Nada, pois pagará a mesma quantia.
B) Ela perderá 100 reais.
C) Ela ganhará 105 reais.
D) Ela perderá 95 reais.
E) Ela perderá 105 reais.

Questão 02 (OBM 2013) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?



A) 12,15 m^2 B) 15,5 m^2 C) 27 m^2 D) 32 m^2 E) 60 m^2

Questão 03 (OBM 2013) O Aluno D (usaremos este codinome para proteger a identidade do aluno) não prestou atenção na aula e não aprendeu como verificar, sem realizar a divisão, se um número é múltiplo de 7 ou não. Por isso, D decidiu usar a regra do 3, ou seja, ele vai somar os dígitos e verificar se o resultado é um múltiplo de 7. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto indicará que um número é múltiplo de 7, sendo o número realmente múltiplo de 7?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Questão 04 (OBM 2013) Entre os números naturais de 1 até n, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 05 (OBM 2013) Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente, como por exemplo 12 chocolates. Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?

A) 25 B) 13 C) 11 D) 31 E) 53

Questão 06 (OBM 2013) Determine o maior divisor comum de todos os números de 9 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A) 3 B) 9 C) 18 D) 27 E) 123456789

Questão 07 (OBM 2013) João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

A) 8 B) 12 C) 4 D) 16 E) 2

Questão 08 (OBM 2013) Qual dos seguintes números é o mais próximo da quantidade de algarismos de 3^{400}?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 240 E) 300

Questão 09 (OBM 2012) Na fase final da OBM, participaram 600 alunos de todo o Brasil. Seguindo a tradição das olimpíadas internacionais, na premiação são distribuidas medalhas de ouro, prata e bronze na proporção 1:2:3, respectivamente. Sabe-se que 60% do total de estudantes ganhou alguma das 3 medalhas. Quantos alunos ganharam medalha de prata?

A) 60 B)120 C)180 D) 240 E) 300

Questão 10 (OBM 2012) Na expressão $\frac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

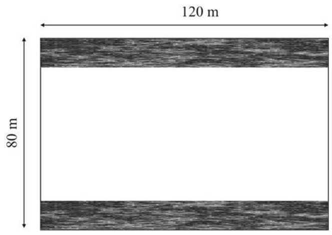
A) 38 B) 96 C) 108 D) 576 E) 648

Questão 11 (OBM 2012) Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número? A) 1875 B) 405 C) 390 D) 330 E) 105

Questão 12 (OBM 2012) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número? A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) infinitos

Questão 13 (OBM 2012) Esmeralda está organizando sua festa de aniversário e por um erro na distribuição dos convites, ela não sabe se a festa terá 4 ou 6 pessoas. Entretanto, ela planeja já deixar o bolo cortado em alguns pedaços não necessariamente iguais de tal forma que se vierem 4 ou 6 pessoas, cada delas receberá a mesma quantidade de bolo(o bolo inteiro deve ser distribuido em qualquer uma das duas situações). Qual o número mínimo de pedaços para ela atingir esse objetivo? A) 24 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

Questão 14 (OBM 2012) O pai de Esmeralda comprou um terreno retangular de 120 metros de comprimento por 80 metros de largura. Devido a leis ambientais, ele deve plantar árvores em 20% do terreno. Ele faz isso plantando-as em duas faixas de mesma largura nas laterais do terreno, conforme mostra a figura. Qual é essa largura?
A) 6m B) 8m C) 10m D) 16m E) 24m



Questão 15 (OBM 2011) Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Questão 16 (OBM 2011) Se multiplicarmos todos os inteiros positivos menores que 2011 que não são múltiplos de 5, qual será o algarismo das unidades do número obtido?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 17 (OBM 2010) Qual das alternativas apresenta um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
A) 42 B) 45 C) 52 D) 85 E) 105

Questão 18 (OBM 2010) Aumentando em 2% o valor do menor de dois números consecutivos, obtém-se o maior deles. Qual é a soma desses números?
A) 43 B) 53 C) 97 D) 101 E) 115

Solução Sejam x e $x+1$ os números. Aumentar em 2% um número pode ser traduzido por uma multiplicação por 1,02. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 1,02x &= x+1 \\ 1,02x - x &= 1 \\ 0,02x &= 1 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Assim, a soma dos números é $50 + 51 = 101$

Questão 19 (OBM 2010) Dividindo-se o número $4^{(4^4)}$ por 4^4 obtemos o número:
A) 2 B) 4^3 C) 4^4 D) 4^8 E) 4^{12}

Questão 20 (OBM 2010) Sônia calculou a média aritmética de dois diferentes números de dois dígitos e obteve 98. Qual é a diferença entre esses números?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) um número maior que 4

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas.* SBM. Rio de Janeiro, 2010

Fase 01 - Aula 03

Tema da aula: Triângulos (ângulos, propriedades e desigualdade triangular) e Teorema de Pitágoras.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber encontrar num problema com triângulos qual ferramenta utilizar para a sua resolução dentre as propriedades.

Atividade em sala: Revisar os tópicos através da resolução de exercícios.

Lista de exercícios:

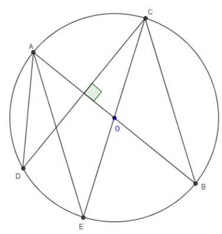
Questão 01 (OBM 2013) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{3}$

Comentário Em questões envolvendo figuras, um bom desenho pode favorecer muito a resolução da mesma. Óbvio que um triângulo é um triângulo em qualquer posição que ele seja desenhado. Mas a visualização de que caminho seguir, pode ser facilitada pela forma que a figura foi traçada. Treine com os alunos de que maneira identificar elementos do enunciado para desenhar uma figura que facilite o caminho para a solução. Neste exemplo, como se trata de um triângulo retângulo, debata com o aluno se a figura deve ser desenhada com a hipotenusa na horizontal ou se deve ser desenhada com um dos catetos na horizontal.

Questão 02 (OBM 2013) Na figura ao lado o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $B\hat{C}E = 35^o$, o valor em graus do ângulo $D\hat{A}E$ é:

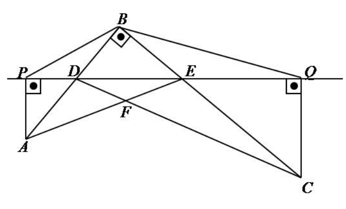
A) 35^o B) 10^o C) 20^o D) 30^o E) 55^o

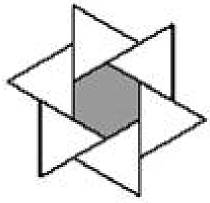


Questão 03 (OBM 2012) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

Questão 04 (OBM 2012) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta r corta os segmentos AB e BC em D e E, respectivamente; as retas CD e AE se cortam





em F; P e Q são as projeções ortogonais de A e C sobre a reta r, respectivamente.

Sendo o ângulo entre as retas CD e AE igual a $m(A\hat{F}D) = 40^o$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é:

A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 160

Questão 05 (OBM 2011) Em um triângulo ABC com $m(A\hat{B}C) - m(B\hat{A}C) = 50^o$, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $m(C\hat{D}E) = 90^o$. A medida do ângulo $A\hat{D}E$ é:

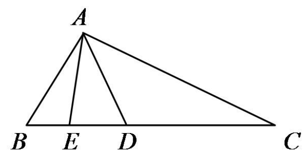
A) 25^o B) 30^o C) 40^o D) 45^o E) 50^o

Questão 06 (OBM 2011) Seja XOY um triângulo retângulo com $X\hat{O}Y = 90^o$. Sejam M e N os pontos médios de OX e OY, respectivamente. Dado que $XN = 19$ e $YM = 22$, determine a medida do segmento XY.

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

Questão 07 (OBM 2011) No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $m(D\hat{A}E) = 40^o$, quanto mede, em graus, o ângulo $B\hat{A}C$?

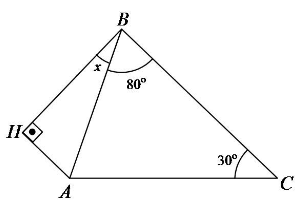
A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120



Questão 08 (OBM 2010) No triângulo ABC, $m(B\hat{A}C) = 140^o$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo $N\hat{M}P$?

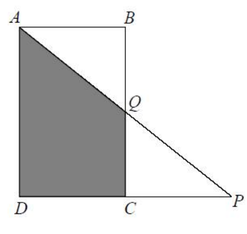
A) 40^o B) 50^o C) 70^o D) 90^o E) 100^o

Questão 09 (OBM 2010) Na figura, $BC = 2BH$. Determine x.



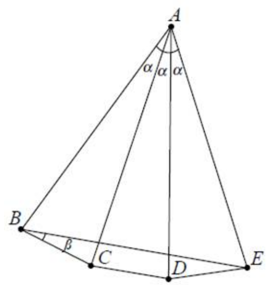
A) 10^o B) 15^o C) 16^o D) 20^o E) 25^o

Questão 10 (OBM 2009) Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP. Se $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?



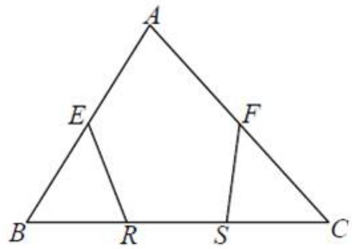
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm D) 4 cm E) 5 cm

Questão 11 (OBM 2009) Na figura abaixo, $\alpha = 18^o$ e $AB = AC = AD = AE$. O valor do ângulo β é:



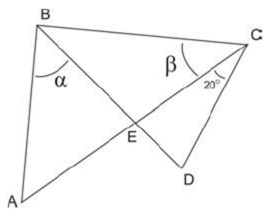
A) 18^o B) 36^o C) 15^o D) 20^o E) 30^o

Questão 12 (OBM 2009) Na figura ao lado, E é o ponto médio de AB, F é o ponto médio de AC e $BR = RS = SC$. Se a área do triângulo ABC é 252, qual é a área do pentágono $AERSF$?



A) 168 B) 189 C) 200 D) 210 E) 220

Questão 13 (OBM 2008) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

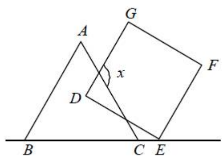
Questão 14 (OBM 2008) Em um triângulo ABC foi traçada a altura AH. Sejam M e N pontos sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que HM é perpendicular a AB e HN é perpendicular a AC. Achar MN, sabendo que o perímetro do triângulo órtico do triângulo ABC é igual a 10. Observação: o triângulo órtico de um triângulo é aquele cujos vértices são as interseções das alturas do triângulo com os respectivos lados. Pode-se demonstrar que o incentro (encontro das bissetrizes) do triângulo órtico é sempre igual ao ortocentro (encontro das alturas) do triângulo original.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Questão 15 (OBM 2008) Em um triângulo ABC, $\hat{A} = 20^o$ e $\hat{B} = 110^o$. Se I é o incentro (centro da circunferência inscrita) e O o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) do triângulo ABC, qual a medida do ângulo $I\hat{A}O$?

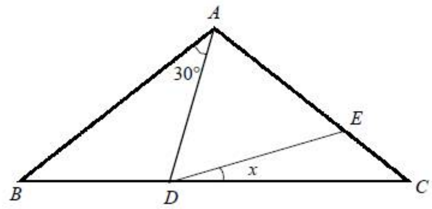
A) 20^o B) 25^o C) 30^o D) 40^o E) 35^o

Questão 16 (OBM 2007) Na figura, o lado AB do triângulo equilátero ABC é paralelo ao lado DG do quadrado $DEFG$. Qual é o valor do ângulo x?



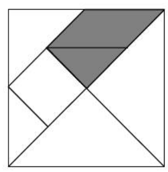
A) 80^o B) 90^o C) 100^o D) 110^o E) 120^o

Questão 17 (OBM 2006) Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $B\hat{A}D$ mede 30^o. Então o ângulo x mede:



A)10^o B) 20^o C) 15^o D) 30^o E) 5^o

Questão 18 (OBM 2006) A figura a seguir representa um Tangram, quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sabendo que a área do Tangram a seguir é 64 cm^2, qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



A) 7,6 B) 8 C) 10,6 D) 12 E) 21,3

Questão 19 (OBM 2006) Sejam a, b e c números reais positivos cuja soma é 1. Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, podemos concluir que:

A) $0 < |a-b| < \frac{1}{2}$ e $0 < |b-c| < \frac{1}{2}$ e $0 < |c-a| < \frac{1}{2}$

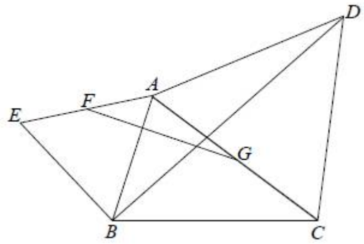
B) $a < \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$ e $c < \frac{1}{2}$

C) $a+b < \frac{1}{2}$ e $b+c < \frac{1}{2}$ e $c+a < \frac{1}{2}$

D) $a \leq \frac{1}{3}$ e $b \leq \frac{1}{3}$ e $c \leq \frac{1}{3}$

E) $a \geq \frac{1}{3}$ e $b \geq \frac{1}{3}$ e $c \geq \frac{1}{3}$

Questão 20 (OBM 2006) Na figura a seguir, ABC é um triângulo qualquer e ACD e AEB são triângulos equiláteros. Se F e G são os pontos médios de EA e AC, respectivamente, a razão $\frac{BD}{FG}$ é:



A) $\frac{1}{2}$ B)1 C)$\frac{3}{2}$ D) 2 E) Depende das medidas dos lados de ABC.

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* SBM. Rio de Janeiro, 2011

Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* SBM. Rio de Janeiro, 2012

Fase 01 - Aula 04

Tema da aula: Polígonos (elementos, propriedades e cálculo de área).

Duração: 60 minutos.

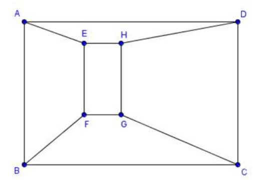
Objetivos da aula: O aluno deverá, ao final da aula, conhecer os elementos de um polígono, saber calcular o números de diagonais, a soma das medidas dos ângulos internos e externos e calcular a área do polígono.

Atividade em sala: Abordar os tópicos em aula expositiva e resolver exercícios em sala.

Lista de exercícios:

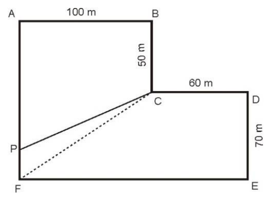
Questão 01 (OBM 2013) Na figura ao lado, os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ têm os lados paralelos. Sabendo que $AE = 3$, $BF = 4$ e $DH = 5$, qual a medida de CG?

A) 6 B)$\sqrt{32}$ C) 7 D) $\sqrt{40}$ E) $\sqrt{60}$

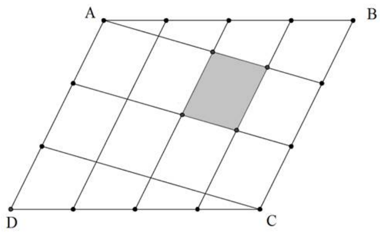


Questão 02 (OBM 2012) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono $ABCDEF$. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 20



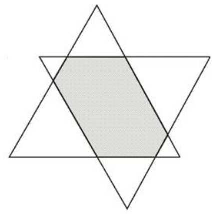
Questão 03 (OBM 2012) Os lados AB e DC do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.



A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E)12

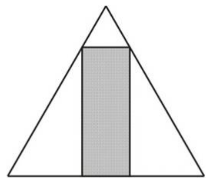
Questão 04 (OBM 2011) Dois triângulos equiláteros de perímetro 36 cm cada são sobrepostos de modo que a região comum dos triângulos seja um hexágono com pares de lados paralelos, conforme a figura ao lado. Qual é o perímetro desse hexágono?

A) 12cm B) 16cm C) 18cm D) 24cm E) 36 cm

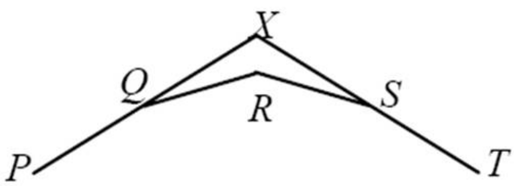


Questão 05 (OBM 2010) No desenho, o retângulo cinza tem seus vértices sobre os lados do triângulo equilátero de área $40cm^2$. O menor lado do retângulo é um quarto do lado do triângulo. A área do retângulo em cm^2 é:

A) 5 B) 10 C) 15 D) 18 E) 22



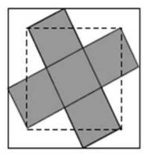
Questão 06 (OBM 2010) Os pontos P, Q, R, S e T são vértices de um polígono regular. Os lados PQ e TS são prolongados até se encontrarem em X, como mostra a figura, e $Q\hat{X}S$ mede 140^o. Quantos lados o polígono tem?



A) 9 B) 18 C) 24 D) 27 E) 40

Questão 07 (OBM 2010) Uma figura no formato de cruz, formada por quadrados de lado 1, está inscrita em um quadrado maior, cujos lados são paralelos aos lados do quadrado tracejado, cujos vértices são vértices da cruz. Qual é a área do quadrado maior?

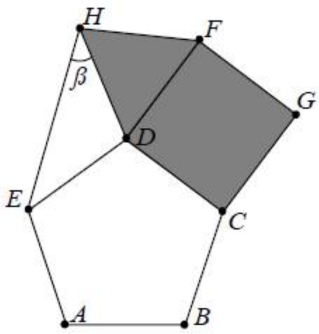
A) 9 B) $\frac{49}{5}$ C) 10 D) $\frac{81}{8}$ E) $\frac{32}{3}$



Questão 08 (OBM 2009) Usando palitos de fósforos, podemos construir um hexágono regular, formado por seis triângulos equiláteros unitários, como mostra a figura. Juntando mais palitos a esse hexágono, queremos obter outro hexágono regular com o quádruplo da área, também formado por triângulos equiláteros unitários. Quantos palitos deverão ser acrescentados?

A) 12 B) 24 C) 30 D) 36 E) 48

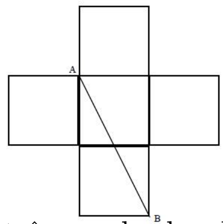
Questão 09 (OBM 2009)
Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular, $CDFG$ é um quadrado e DFH é um triângulo equilátero. O valor do ângulo β é:



A) 30^o B) 36^o C) 39^o D) 45^o E) 60^o

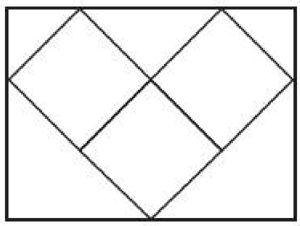
Questão 10 (OBM 2009) Uma folha de caderno de Carlos é um retângulo com dois lados (bordas) amarelos de 24 cm e dois lados (bordas) vermelhos de 36 cm. Carlos pinta cada ponto do retângulo na mesma cor do lado mais próximo desse ponto. Qual é a área da região pintada de amarelo?
A) 144 cm^2 B) 288 cm^2 C) 364 cm^2 D) 442 cm^2 E) 524 cm^2

Questão 11 (OBM 2007) O jardim da casa de Maria é formado por cinco quadrados de igual área e tem a forma da figura abaixo. Se AB = 10 m, então a área do jardim em metros quadrados é:



A) 200 B) $10\sqrt{5}$ C) 100 D) $\frac{500}{3}$ E) $\frac{100}{3}$

Questão 12 (OBM 2007) A figura abaixo é formada por três quadrados de lado 1 e um retângulo que os contorna.

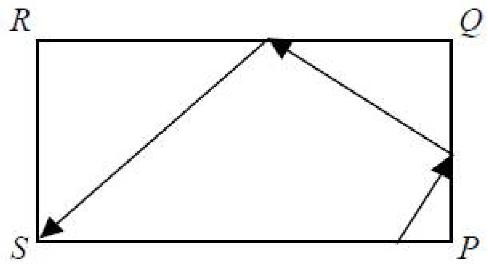


A área do retângulo é:
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{2}$ E) 8

Questão 13 (OBM 2007) A figura abaixo mostra um retângulo, um pentágono, um triângulo e um círculo, com áreas respectivamente 121, 81, 49 e 25 centímetros quadrados. A diferença entre a área preta e a área cinza, em centímetros quadrados, é:

A) 25 B) 36 C) 49 D) 64 E) 81

Questão 14 (OBM 2007) Uma mesa de bilhar tem dimensões de 3 metros por 6 metros e tem caçapas nos seus quatro cantos P, Q, R e S. Quando uma bola bate na borda da mesa, sua trajetória forma um ângulo igual ao que a trajetória anterior formava.

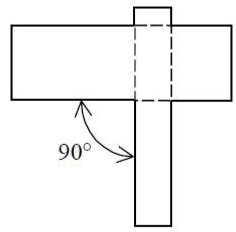


Uma bola, inicialmente a 1 metro da caçapa P, é batida do lado SP em direção ao lado PQ, como mostra a figura. A quantos metros de P a bola acerta o lado PQ se a bola cai na caçapa S após duas batidas na borda da mesa?

A) 1 B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E)$\frac{3}{5}$

Questão 15 (OBM 2006) São dadas duas tiras retangulares de papel com 20 cm de comprimento, uma com 5 cm de largura e outra com 11 cm de largura. Uma delas foi colada sobre a outra, perpendicularmente, de modo a formar a figura ilustrada ao lado. O perímetro dessa figura, em centímetros é:

A) 50 B) 60 C) 80 D) 100 E) 120

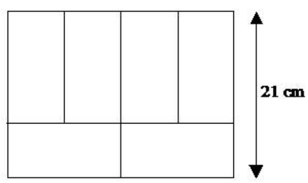


Questão 16 (OBM 2006) Um triângulo equilátero e um hexágono regular tem o mesmo perímetro. A razão entre a área do triângulo e a área do hexágono é:

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

Comentário Uma boa solução pode surgir do uso da figura da questão 08 acima.

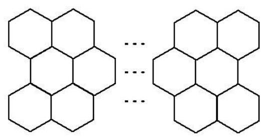
Questão 17 (OBM 2005) Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?



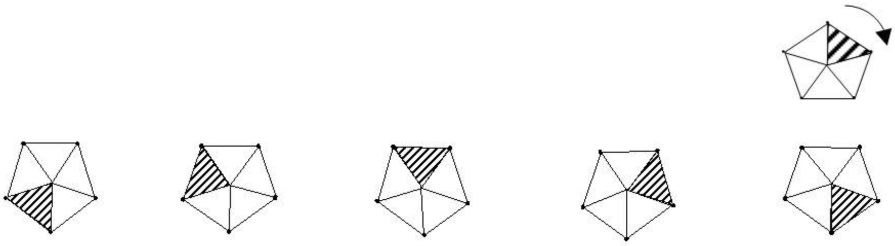
A) 210 cm^2 B) 280 cm^2 C) 430 cm^2 D) 504 cm^2 E) 588 cm^2

Questão 18 (OBM 2004) O arranjo a seguir, composto por 32 hexágonos, foi montado com varetas, todas com comprimento igual ao lado do hexágono. Quantas varetas, no mínimo, são necessárias para montar o arranjo?

A) 113 B) 123 C) 122 D) 132 E) 152

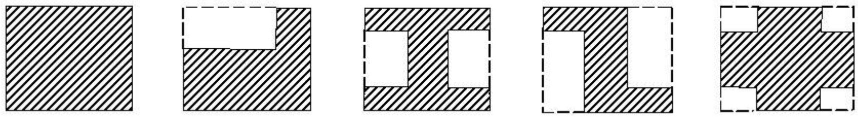


Questão 19 (OBM 2004) Se girarmos o pentágono regular, ao lado, de um ângulo de 252^o, em torno do seu centro, no sentido horário, qual figura será obtida?



A) B) C) D) E)

Questão 20 (OBM 2005) Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo da construção da cerca será maior?



A) B) C) D) E)

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas.* SBM. Rio de Janeiro, 2010

Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio, v. 2.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Neto, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar, v. 2.* SBM. Rio de Janeiro, 2012

Fase 01 - Aula 05

Tema da aula: Equação e sistemas

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber revolver equações do primeiro e segundo grau com uma variável e resolver sistemas simples.

Atividade em sala: Apresentar a equação do primeiro grau com uma variável através de um problema, apresentar as equações com duas variáveis também por problemas, resolver equações do segundo grau e finalizar com os sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis pelo método da substituição e adição. Citar que podem haver mais variáveis e que há outras formas de resolver o sistema.

Lista de exercícios:

Questão 01 Resolva cada um dos sistemas a seguir:

A) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 3x = 2y \\ x + y = 9 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Questão 02 (OBM 2006) Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 03 (OBM 2003) Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, o valor de x é:

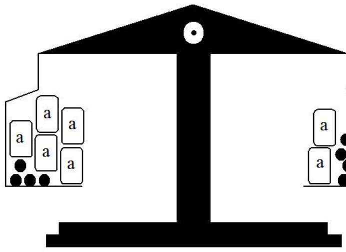
1	14	**x**
26		13

A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

Questão 04 (OBM 2003) João disse para Maria: "Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar". Maria acrescentou: "E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho". Juntos, os dois possuem:
A) 80 reais B) 90 reais C) 100 reais D) 120 reais E) 130 reais

Questão 05 (OBM 2003) Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por 2x + 1. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por 3x – 1. Se no visor está o número 5, apertando alguma sequência das teclas A e B, o maior número de dois algarismos que se pode obter é:
A) 85 B) 87 C) 92 D) 95 E) 96

Questão 06 (OBM 2002) Na balança a seguir temos pesadas bolas de chumbo, todas iguais, e leves saquinhos de plástico, todos com a mesma quantidade de bolinhas, iguais às que estão fora dos mesmos. Quantas bolinhas há em cada saquinho?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

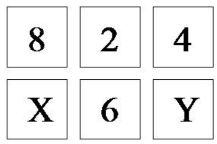
Questão 07 (OBM 2000) Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

A) 72 anos e 36 anos. B) 36 anos e 18 anos. C) 40 anos e 20 anos. D) 50 anos e 25 anos. E) 38 anos e 19 anos

Questão 08 (OBM 1999) Ronaldo, sempre que pode, guarda moedas de 50 centavos ou 1 real. Atualmente, ele tem 100 moedas, num total de 76 reais. Quantas moedas de um valor ele tem a mais do que a de outro valor ?

A) 48 B) 4 C) 8 D) 52 E) 96

Questão 09 (OBM 1999) 6 cartões com números somente numa das faces são colocados sobre uma mesa conforme a ilustração. Os cartões X e Y estão com a face numerada voltada para baixo. A média aritmética dos números de todos os cartões é 5. A média aritmética dos números do cartão Y e seus três vizinhos é 3. Qual é o número escrito no cartão X ?



A) – 4 B) 12 C) 0 D) 15 E) 10

Questão 10 (OBM 1999) Marcos quer pesar três maças numa balança de dois pratos, mas ele dispõe de apenas um bloco de 200 gramas. Observando o equilíbrio na balança, ele observa que a maçã maior tem o mesmo peso que as outras duas maçãs juntas; o bloco e a maçã menor pesam tanto quanto as outras duas maçãs juntas; a maçã maior junto com a menor pesam tanto quanto bloco. O peso total das três maçãs é:

A) 250 g B) 300 g C) 350 g D) 400 g E) 450 g

Questão 11 (OBM 1998) Renata digitou um número em sua calculadora, multiplicou-o por 3, somou 12, dividiu o resultado por 7 e obteve o número 15. O número digitado foi:

A) 31 B) 7 C) 39 D) 279 E) 27

Questão 12 (OBM 1998) Elevei um número positivo ao quadrado, subtrai do resultado o mesmo número e o que restou dividi ainda pelo mesmo número. O resultado que achei foi igual:

A) Ao próprio número
B) Ao dobro do número
C) Ao número mais 1
D) À raiz quadrada do número
E) Ao número menos 1

Questão 13 (OBM 1998) João quer desfazer-se de sua coleção de 1.000 bolinhas.

Para tanto escolhe dez garotos da rua onde mora. Dá ao primeiro garoto x bolinhas, ao segundo x + 1 bolinhas. Assim faz até chegar ao décimo garoto. Sempre dá uma bolinha a mais para o próximo garoto. No final, João ainda fica com um resto de bolinhas. Sendo x o número que deixa João com o menor resto possível, x é igual a:

A) 94 B) 95 C) 96 D) 97 E) 98

Questão 14 (OBM 1998) No planeta Z todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então podemos afirmar:
A) É possível que existam 19 carros nessa cidade
B) Existem no máximo 16 carros nessa cidade
C) Essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros
D) Essa cidade possui no máximo 17 carros
E) Nessa cidade existem mais carros do que pessoas

Questão 15 (OBM 1998) Num código secreto, as 10 primeiras letras do nosso alfabeto representam os algarismos de 0 a 9, sendo que a cada letra corresponde um único algarismo e vice-versa. Sabe-se que $d + d = f, d.d = f, c + c = d, c + d = aea–a = b$. Podemos concluir que $a + b + c + d$ é igual a:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

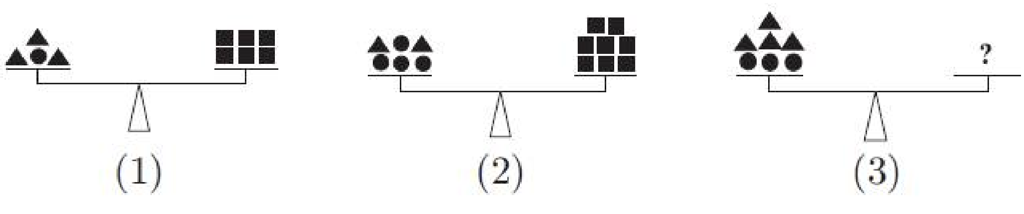
Questão 16 (Banco de questões da OBMEP 2012) Um fazendeiro perguntou ao seu filho: Quantos pés eu posso contar quando eu estou tirando leite de uma vaca? O menino respondeu: São 6, sendo 4 da vaca e 2 seus. O pai então disse: Na verdade são 9, porque você esqueceu de contar os 3 do banquinho em que eu fico sentado. A seguir, o pai propôs outro problema ao seu filho: Num curral há algumas pessoas, vacas e banquinhos, pelo menos um de cada. O número total de pés é 22 e o de cabeças é 5. Quantas vacas há no curral? O menino resolveu o problema corretamente. Qual foi sua resposta?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 17 (OBM 2010) Os números x e y são distintos e satisfazem $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. Então xy é igual a:

A) 4 B) 1 C) –1 D) –4 E) é preciso de mais dados

Questão 18 (Banco de questões da OBMEP 2010) As balanças (1) e (2) da figura dada estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso, bem como todos os quadrados e também todos os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Questão 19 (OBM 2012) Ao calcular as raízes da equação do segundo grau , Samuca percebeu que elas eram os catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 5. A soma dos possíveis valores de m é: A) 2 B) 12 C) 7 D) 10 E) 8

Questão 20 (OBMEP 2012) As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90kg, 92kg, 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg e 101kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

A) 52kg B) 51kg C) 49kg D) 48kg E) 46kg

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Fase 01 - Aula 06

Tema da aula: Produtos notáveis

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá reconhecer e aplicar os produtos notáveis para resolver problemas de Olimpíadas.

Atividade em sala: Apresentar os produtos notáveis usuais: quadrado da soma e da diferença de dois termos,cubo da soma e da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos e o produto da forma $(x+a)(x+b)$. Mostrar o triângulo de Pascal e a relação com os coeficientes dos binômios.

Lista de exercícios:

Questão 01 Desenvolva os quadrados da soma ou diferença de dois termos a seguir.
a) $(x+2)^2$
b) $(3x-2)^2$
c) $(2x^2+y)^2$
d) $(\frac{2x}{y}+5y)^2$

Questão 02 Desenvolva os cubos da soma ou diferença de dois termos a seguir.
a) $(a+3)^3$
b) $(2a-3)^3$
c) $(3a^2+2b)^3$
d) $(\frac{3a}{5}-b^4)^3$

Questão 03 Desenvolva os produtos notáveis a seguir.
a) $(5+y)(5-y)$
b) $(7x+8y)(7x-8y)$
c) $(xy+3)(xy-3)$
d) $(\frac{y}{3}-5x)(\frac{y}{3}+5x)$

Questão 04 Desenvolva os produtos notáveis a seguir.
a) $(a + 3)(a + 4)$
b) $(b - 5)(b + 1)$
c) $(a - 12)(a - 5)$
d) $(b + 2)(b - 3)$

Questão 05 Simplifique as expressões a seguir.
a) $(a + 3)^2 - (a - 4)^2 + (a - 3)(a + 3)$
b) $(2b + 5)^3 - (2b - 5)^3$
c) $(3a - 4)(3a + 4) - (4a - 1)^2$
d) $((a + 1)(a - 1))^2$

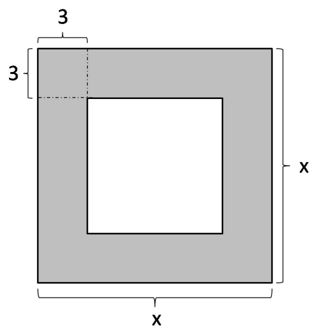
Questão 06 Determine a expressão que representa a área de um quadrado de lado medindo $2x - 4$.

Questão 07 Determine a expressão que representa o volume de um cubo cuja aresta mede $a + b$.

Questão 08 Considere um retângulo cujos lados medem a e b. Se $(a + b)^{121}$ e $a^2 + b^2 = 85$, qual a área desse quadrado?

Questão 09 Sendo a diferença entre dois números x e y igual a 5, determine o valor de $x^2 - 2xy + y^2$.

Questão 10 Determine a expressão que representa a área sombreada entre os dois quadrados da figura a seguir:



Questão 11 Sendo x = 10, determine a área da figura da questão anterior de duas maneiras distintas: substituindo o valor na figura e calculando a diferença entre as áreas dos dois quadrados e também substituíndo o valor na expressão encontrada.

Questão 12 (OBM 2013) Determine $x + y$, onde x e y são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Questão 13 (OBM 2012) Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de xy.

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) –1

Questão 14 (OBM 2011) Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?

A)2×20112007^2 B) 2×20112003^2 C)2×20112007 D) 2×20112003 E) 2×20112011^2

Questão 15 (OBM 2010) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2 – y^2 = 2^2010$?
A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) 1004

Questão 16 (OBM 2008) Observe que:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \; 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2 \; 3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$$

Qual o menor valor possível da soma $x + y$ com x, y inteiros positivos tais que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2?$$

A) 289 B) 250 C) 425 D) 795 E) 103

Questão 17 (OBM 2004) Se $x+y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2+6xy+y^2$?
A) 64 B) 109 C) 120 D) 124 E) 154

Questão 18 (Banco de Questões da OBMEP 2011)
(a) Mostre que a identidade abaixo é sempre verdadeira:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

(b) Sejam a e b números reais tais que a + b = 1 e ab = -1. Mostre que o número $a^{10} + b^{10}$ é inteiro, calculando seu valor.

Comentário Em provas da segunda e terceira fase, podem aparecer questões como esta onde a resolução do segundo item usa o resultado do primeiro item. Vale ressaltar ao aluno que, mesmo não conseguindo fazer a primeira parte, pode usar o resultado para fazer a segunda parte.

Questão 19 (Banco de Questões da OBMEP 2011)
(a) Verifique a identidade

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

(b)Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

Questão 20 (Banco de Questões da OBMEP 2011)
Determine a, b e c tais que a igualdade

$$(n + 2)^2 = a(n + 1)^2 + bn^2 + c(n - 1)^2$$

seja verdadeira qualquer que seja o número n.

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Muniz Neto, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Fase 01 - Aula 07

Tema da aula: Fatoração

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá saber fazer a fatoração por: fator comum, agrupamento, diferença entre dois quadrados, trinômio quadrado perfeito e trinômio do segundo grau.

Atividade em sala: Apresentar as fatorações e sua relação com os produtos notáveis. Resolver questões em sala como exemplo.

Lista de exercícios:

Questão 01 Escreva a forma fatorada de cada expressão a seguir:

a) $2a + 2b$

b) $xyz + 3xy$

c) $25x + 50y–75z$

d) $3a–3b–3c$

e) $15xy–20xz + 35xyz$

Questão 02 Fatore os polinômios a seguir. Faça uso da fatoração por agrupamento.

a) $ax + ay + 5x + 5y$

b) $7a + 7b + 7c + xa + xb + xc$

c) $5x–5 + 7x^2–7x + ax–a$

d) $a^2 + a^3 + b + ba$

e) $7ab + 14b + 5a + 10$

Questão 03 Fatore os seguintes binômios:

a) $4x^2–y^2$

b) $a^2b^2–100$

c) $49x^2–144$

d) $x^4 - \frac{1}{y^2}$

e) $a^2 - \frac{9b^2}{16}$

Questão 04 Fatore as seguintes expressões:
a) $(x+5)^2–49$

b) $(2a+3)^2–a^2$

c. $a^2–(b–1)^2$

d. $9x^2–(2x+2)^2$

Questão 05 O valor da expressão $599^2–598^2$ é:
a) 358.801 b) 357.604 c) 1.917 d) 1.297 e) 1.197

Questão 06 Fatore cada trinômio a seguir. Caso não seja um quadrado perfeito, escreva que não se trata de um trinômio quadrado perfeito.
a) $16x^2–16x+1$

b) $a^2x^2+2ax+1$

c) $a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}$

d) $9x^2+12x+16$

Questão 07 Escreva cada trinômio do 2º grau a seguir em sua forma fatorada.
a) y^2+7y+6

b) $x^2+11x+10$

c) $x^2+13x+36$

d) $a^2–3a–28$

Questão 08 Simplifique a expressão a seguir e,depois, fatore-a.
$x^3–x\cdot(x+7)+x\cdot(9+x)$

Questão 09 Fatore a seguinte expressão:

$$5ax^2–5ay^2+10x^2–10y^2$$

Questão 10 Fatore a expressão:

$$ay^2+by^2–4a–4b$$

Questão 11 (OBM 2000) Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?
A) xy B)x^2+y^2 C) $(x+y)^2$ D) $x^2+y(x+y)$ E) $\frac{x^3+y^3}{x+y}$

Questão 12 (OBM 2002) Se $xy=2$ e $x^2+y^2=5$, então $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$ vale:
A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{25}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Questão 13 (OBM 2003) Os números a, b, e c são naturais consecutivos em ordem crescente. Então, o valor de c^2-ab é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2a + b D) 2a + c E) 2b + c

Questão 14 (OBM 2003) Seja $n = 9867$. Se você calculasse n^3–n^2 você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

Questão 15 (OBM 2003) A maior raiz da equação $(x–37)^2–169 = 0$ é:
A) 39 B) 43 C) 47 D) 50 E) 53

Solução

$(x–37)^2–169 = (x - 37)^2 - 13^2 = (x - 37 + 13)(x - 37 - 13) = (x - 26)(x - 50) = 0$

logo, $x = 26$ ou $x = 50$.

Questão 16 (OBM 2005) Sendo a, b e c números reais, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, é verdade que $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$. A distributiva da adição em relação à multiplicação $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ não é sempre verdadeira, mas ocorre se, e somente se,
A) $a = b = c = \frac{1}{3}$ ou $a = 0$

B) $a = b = c$

C) A igualdade nunca ocorre

D) $a + b + c = 1$ ou $a = 0$

E) $a = b = c = 0$

Questão 17 (OBM 2006) Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x + y + z = 0$. O valor de

$$(x^2y^2z^2)(\tfrac{1}{x^3y^3} + \tfrac{1}{x^3z^3} + \tfrac{1}{y^3z^3}) \text{ é}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Questão 18 (OBM 2006)
O número de soluções inteiras e positivas do sistema abaixo é:

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ a + b + c = 30 \end{cases}$$

A) 45 B) 23 C) 24 D) 25 E) 72

Questão 19 (OBM 2006) A soma de três números naturais consecutivos é igual ao produto desses três números. A soma dos quadrados desses números é:
A) 14 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

Questão 20 (OBM 2007) Se x é real positivo e $1 + (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) = 181^2$, então o valor de $x(x + 3$ é: A) 180 B) 150 C) 120 D) 182 E) 75

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Muniz Neto, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Fase 01 - Aula 08

Tema da aula: Trigonometria no triângulo retângulo.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: O aluno deverá conhecer e saber calcular o seno, cosseno e tangente de um ângulo em um

Atividade em sala: Apresentar o triângulo retângulo e as razões trigonométricas. Resolver questões do tópico com os alunos.

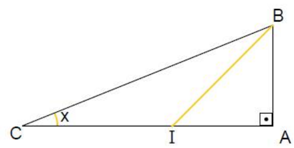
Lista de exercícios:

Questão 01 Dado um triângulo ABC retângulo em A com $AB = 4$ e $AC = 3$, determine o seno, cosseno e tangente dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Questão 02 Dado um triângulo ABC retângulo em A com $AB = 7$ e sendo o $\operatorname{sen} B = \frac{2}{3}$, determine as medidas dos demais lados do triângulo.

Questão 03 O topo de um prédio é visto de um ponto a 13 metros da base do mesmo sob um ângulo de 60^o. Qual a altura do prédio?

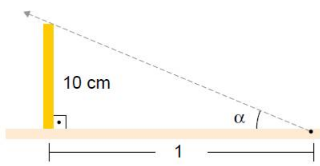
Questão 04 Na figura, tem-se: $B\hat{A}C = 90^o; B\hat{I}A = 45^o; AB = 2cm; CI = 3cm.$



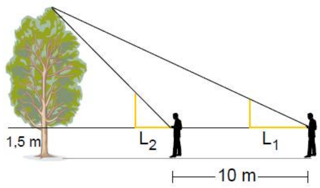
Determine $\operatorname{tg} x$.

Questão 05 (Vunesp) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m. Use a aproximação $\operatorname{sen} 3^o = 0,05$ e responda o tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa.

Questão 06 Um aparelho é construído para medir alturas e consiste em um esquadro com uma régua de 10 cm e outra régua deslizante que permite medir tangentes do ângulo de visada α, conforme o esquema a seguir:



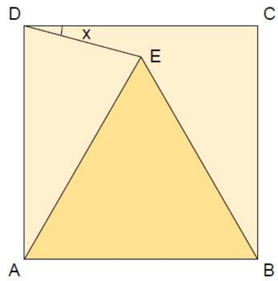
Uma pessoa, utilizando o aparelho a 1,5 m do solo, toma duas medidas, com distância entre elas de 10 metros, conforme esquema:



Sendo $L_1 = 30cm$ e $L_2 = 20cm$, calcule a altura da árvore.

Questão 07 Num triângulo ABC retângulo em B temos que $\operatorname{sen} \hat{A} = 2 \cos \hat{A}$. Determine a medida da hipotenusa sabendo que o cateto AB mede 5 cm.

Questão 08 Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado unitário (medida igual a 1) e o triângulo ABE é equilátero.



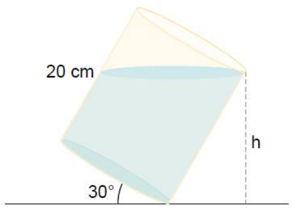
Prove que $x = 15^o$ e obtenha $\operatorname{tg} 15^o$.

Comentário A principal dificuldade do aluno nessa questão é atentar para o fato que o lado do quadrado e do triângulo têm a mesma medida. Após a descoberta desse fato, a solução é obtida, em geral, sem maiores dificuldades.

Questão 09 Uma escada medindo 2,4 m está apoiada em um muro, formando um ângulo de 60^o com a horizontal. Se uma das extremidades da escada está apoiada no topo do muro, qual é o comprimento do muro?

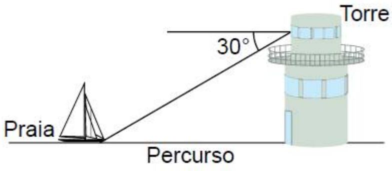
Questão 10 Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é 100 m, seguindo uma direção que forma um ângulo de 30^o com uma das margens. Determine a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio.

Questão 11 Um recipiente com forma de um cilindro circular reto de altura 20 cm é tombado, como mostra a figura. Determine a altura aproximada h do nível da água em relação ao solo.

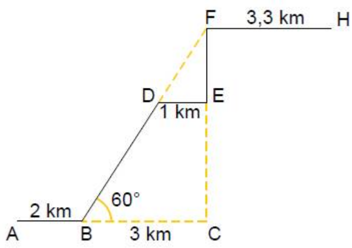


Questão 12 (FGV-SP) Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 e o ângulo $A\hat{B}C$ mede $60°$. A soma das medidas dos catetos vale:

Questão 13 Do alto de uma torre de 60 m de altura,localizada numa ilha, avista-se a praia sob um ângulo de 30° em relação à horizontal. Para transportar material da praia até a torre, um barqueiro cobra R$ 5,00 por metro percorrido. Nessas condições, quanto ele recebe em cada transporte que faz? (Considere 3 = 1,73)

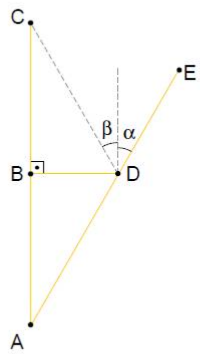


Questão 14 (Vunesp) Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos AB, BD, DE, EF e FH, está esboçado na figura, em que o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60^o e DE é paralelo a BC.



Assumindo o valor $\sqrt{3} = 1,7$, e sabendo-se que $AB = 2km$, $BC = 3km$, $DE = 1km$ e $FH = 3,3km$, determine:
a) as medidas dos segmentos BD e EF em quilômetros;
b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0,8x$, sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais.

Questão 15 (UFV-MG) Durante uma tempestade, um pequeno avião saiu da cidade A com destino à cidade C, distante 945 km. Quando o avião estava no ponto D, distante 700 km do ponto de partida, o piloto detectou que o avião se desviara do seu curso seguindo a trajetória AE, conforme ilustra a figura a seguir. Sendo $\alpha = 30^o$ o ângulo para um curso paralelo a AC, e β o ângulo tal que $\alpha + \beta$ é o ângulo de correção para que o avião chegue à cidade C, calcule: (Considere $\sqrt{3} = 1,7$)

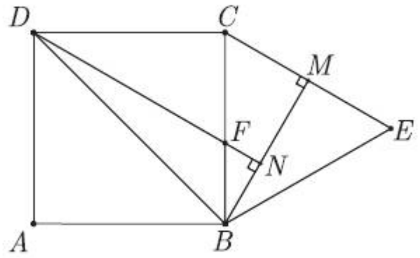


a) a distância entre B e D;
b)o ângulo de correção.

Questão 16 (UEM-PR) Uma escada rolante liga dois níveis de um shopping, fazendo um ângulo de 30^o com a horizontal e movendo-se com uma velocidade constante de 1,0 m/s. Sabendo-se que o tempo necessário para transportar um passageiro de um nível para outro é de 20 s, qual é a altura entre os níveis?

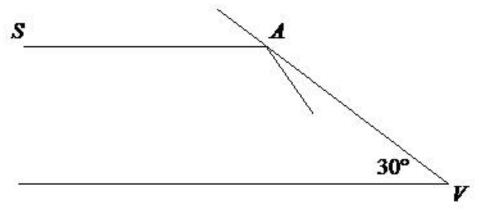
Questão 17 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Seja $ABCD$ um trapézio retângulo de bases AB e CD, com ângulos retos em A e D. Dado que a diagonal menor BD é perpendicular ao lado BC, determine o menor valor possível para a razão CD/AD.

Questão 18 (Banco de Dados da OBMEP 2010) Os ângulos 15^o e 75^o – Na figura dada, $ABCD$ é um quadrado com uma unidade de lado e o triângulo $\triangle BCE$ é equilátero. O ponto M é o ponto médio do segmento CE, o segmento DN é perpendicular a BM e o segmento BM é perpendicular a CE.



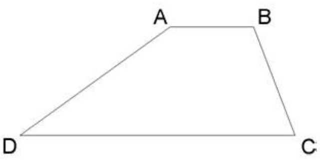
(a) Calcule os comprimentos dos lados do triângulo $\triangle DBN$.
(b) Use o item (a) para calcular o cosseno, o seno e a tangente dos ângulos de 15^o e 75^o.

Questão 19 (OBM 2004) Dois espelhos formam um ângulo de 30^o no ponto V. Um raio de luz, vindo de uma fonte S, é emitido paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto A, como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a S. Se AS e AV têm 1 metro de comprimento, a distância percorrida pelo raio de luz, em metros, é:



A) 2 B) $2+\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ E)$5\sqrt{3}$

Questão 20 (OBM 1998) No trapézio abaixo, têm-se: AB paralelo a CD, $AD = 10cm$ e $CD = 15cm$. O ângulo C mede 75º e o ângulo D, 30º . Quanto mede o lado AB, em centímetros?
A) 5 B) 7,5 C) 10 D) 12,5 E) $5\sqrt{3}$



Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas*. SBM. Rio de Janeiro, 2010

Fase 01 - Aula 09

Tema da aula: Introdução à análise combinatória

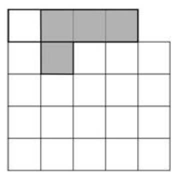
Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: O aluno deve saber resolver questões básicas de análise combinatória.

Atividade em sala: Apresentar o princípio fundamental da contagem e com ele resolver questões de exemplo.

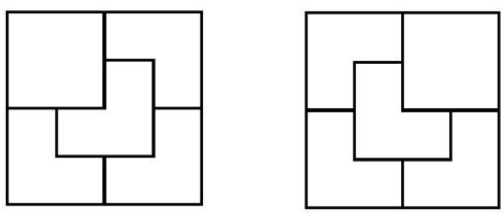
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Luísa tem seis peças iguais formadas por quatro quadradinhos de área 1. Ela quer encaixar todas essas peças no quadriculado formado por 24 quadradinhos de área 1 e já colocou uma dessas peças, em destaque na figura ao lado. De quantas maneiras diferentes ela pode terminar de cobrir o quadriculado?



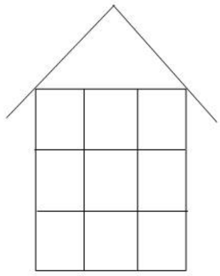
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 02 (OBM 2012) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4×4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



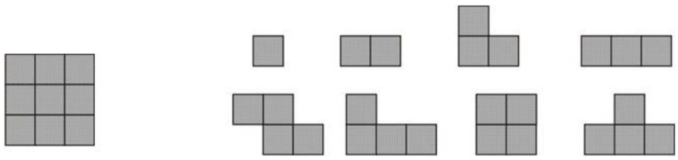
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Questão 03 (OBM 2011) Renan quer pintar os quadradinhos da figura ao lado, usando até três cores diferentes, de modo que quadradinhos que compartilham um lado em comum possuam cores diferentes. Quantas pinturas distintas Renan poderá fazer?



A) B) 246 C) 178 D) 150 E) 120

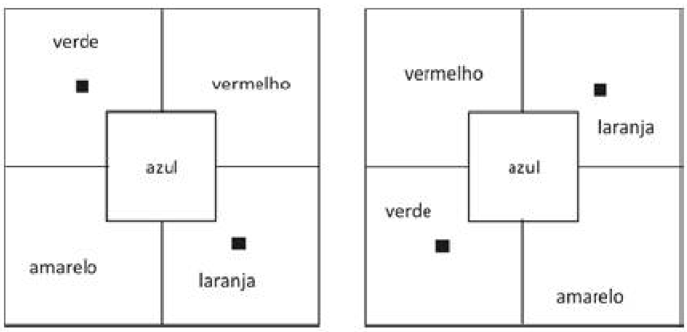
Questão 04 (OBM 2010) Cecília pegou uma cartolina e recortou as 8 peças à direita, formadas por quadradinhos de mesmo tamanho. De quantas maneiras diferentes ela pode escolher 3 dessas peças para montar o quadrado à esquerda?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Questão 05 (OBM 2009) De quantas maneiras dois casais podem sentar-se em quatro cadeiras em fila se marido e mulher devem sentar-se em cadeiras vizinhas?
A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 24

Questão 06 (OBM 2008) Soninha tem muitos cartões, todos com o mesmo desenho em uma das faces. Ela vai usar cinco cores diferentes (verde, amarelo, azul, vermelho e laranja) para pintar cada uma das cinco partes do desenho, cada parte com uma cor diferente, de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Na figura abaixo, por exemplo, os cartões são iguais, pois um deles pode ser girado para se obter o outro. Quantos cartões diferentes Soninha conseguirá produzir?



A) 16 B) 25 C) 30 D) 60 E) 120

Questão 07 (OBM 2007) Doze pontos estão sobre um círculo. Quantos polígonos convexos podemos formar com vértices nesses 12 pontos?

A) 4017 B) 220 C) 4095 D) 66 E) 3572

Questão 08 (Banco de Dados da OBMEP 2012) Uma caixa contém 105 bolas pretas, 89 bolas cinzentas e 5 bolas brancas. Fora da caixa há bolas brancas em quantidade suficiente para efetuar repetidamente o seguinte procedimento, até que sobrem duas bolas na caixa:
retiram-se, sem olhar, duas bolas da caixa;
se as bolas retiradas forem de cores diferentes, a de cor mais escura é devolvida para a caixa;
caso contrário, descartam-se as bolas retiradas e coloca-se na caixa uma bola branca.

Sobre as cores das duas bolas que sobram, pode-se garantir que:

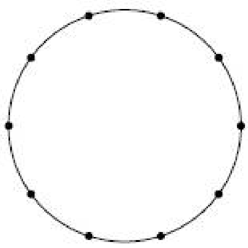
A) as duas serão brancas. B) as duas serão cinzentas. C) as duas serão pretas. D) exatamente uma será preta. E) exatamente uma será cinzenta.

Questão 09 (Banco de Dados da OBMEP 2011) De quantas formas é possível colorir as 6 faces de um cubo de preto ou branco? Duas colorações são iguais se é possível obter uma a partir da outra por uma rotação.

Questão 10 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Um professor e seus 30 alunos escreveram, cada um, os números de 1 a 30 em uma ordem qualquer. A seguir, o professor comparou as sequências. Um aluno ganha um ponto cada vez que um número aparece na mesma posição na sua sequência e na do professor. Ao final, observou-se que todos os alunos obtiveram quantidades diferentes de pontos. Mostre que a sequência de um aluno coincidiu com a sequência do professor.

Comentário A resolução desta questão utiliza o princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas que será abordado no material de preparação para as demais fases. Sugiro a leitura do mesmo.

Questão 11 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Dez pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.



(a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)
(b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

Questão 12 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Cada uma das placas das bicicletas de Quixajuba contém três letras. A primeira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $A = \{G; H; L; P; R\}$, a segunda letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $B = \{M; I; O\}$ e a terceira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $C = \{D; U; N; T\}$. Devido ao aumento no número de bicicletas da cidade, teve-se que expandir a quantidade de possibilidades de placas. Ficou determinado acrescentar duas novas letras a apenas um dos conjuntos ou uma letra nova a dois dos conjuntos. Qual o maior número de novas placas que podem ser feitos, quando se acrescentam as duas novas letras?

Questão 13 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Num torneio de tênis cada jogador passa para a rodada seguinte somente em caso de vitória. Se não for possível que sempre passe para a rodada seguinte um número par de jogadores, a organização do torneio decide quais rodadas determinados jogadores devem jogar. Por exemplo, um cabeça de chave pode, a critério dos organizadores, entrar na segunda rodada, ou passar da primeira para a terceira, de modo que o total de jogadores que participem de cada rodada seja par. (a) Considere um torneio de tênis com 64 jogadores. Quantas partidas são disputadas? (b) E em um torneio com 2011 jogadores?

Questão 14 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000?

Questão 15 (Banco de Dados da OBMEP 2011) João possui um baralho com 52 cartas numeradas de 1 até 52. Um conjunto de três cartas é chamado sortudo se a soma dos algarismos em cada carta é a mesma. Qual é o número mínimo de cartas que João tem de pegar do baralho, sem olhar, de tal forma que entre as cartas que ele pegou necessariamente existam três cartas que formam um conjunto de cartas sortudo?

Questão 16 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Possuímos 32 pedras, todas com pesos diferentes. Descreva um processo para mostrar que podemos encontrar as duas pedras mais pesadas com 35 pesagens em uma balança de pratos.

Questão 17 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Num tabuleiro 123×123, cada casa é pintada de roxo ou azul de acordo com as seguintes condições:
Cada casa pintada de roxo que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 5 casas azuis dentre suas 8 vizinhas.
Cada casa pintada de azul que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 4 casas roxas dentre suas 8 vizinhas. Nota: Duas casas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum.
(a) Considere um tabuleiro 3×3 dentro do tabuleiro 123×123. Quantas casas de cada cor pode haver neste tabuleiro 3×3?
(b) Calcule o número de casas pintadas de roxo no tabuleiro 123×123.

Questão 18 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:
(a) 4 pessoas do grupo?
(b) 3 pessoas do grupo? (Admita que se A conhece B então B conhece A.)

Questão 19 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Em uma circunferência foram marcados 15 pontos brancos e 1 ponto preto. Consideremos todos os possíveis polígonos (convexos) com seus vértices nestes pontos. Vamos separá-los em dois tipos:
Tipo 1: os que possuem somente vértices brancos.
Tipo 2: os que possuem o ponto preto como um dos vértices.
Existem mais polígonos do tipo 1 ou do tipo 2? Quantos existem a mais?

Questão 20 (Banco de Dados da OBMEP 2011) Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Morgado, Augusto César. Análise Combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Fase 01 - Aula 10

Tema da aula: Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Duração: 60 minutos.

Atividade em sala: Após analisar a prova que será aplicada, selecionar questões de olimpíadas de **anos anteriores** para resolver em sala. O grifo em **anos anteriores** é para chamar a atenção da necessidade de manter a lisura do processo, evitando elaborar questões similares para resolver com os alunos.

Aproveitar o momento para dar as últimas orientações quanto ao momento da realização da prova e transmitir tranquilidade aos alunos.

Para este tópico, não apresentamos lista de exercícios mas recomendamos o uso das questões disponíveis nos sites da OBM e da OBMEP.

Capítulo 7

Aulas do Nível 03 - Fase 01

Para o Nível 03 os tópicos escolhidos para as dez aulas de preparação para a primeira fase, separados por aula, foram:

Aula 01 - Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Aula 02 - Resolução de exercícios de revisão de tópicos das séries anteriores (porcentagem, proporção, operações entre frações, potenciação e suas propriedades, múltiplos e divisores).

Aula 03 - Geometria I.

Aula 04 - Geometria II.

Aula 05 - Função e Álgebra I

Aula 06 - Função e Álgebra II

Aula 07 - Trigonometria I

Aula 08 - Trigonometria II.

Aula 09 - Introdução à análise combinatória.

Aula 10 - Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Como dito anteriormente, a escolha desses assuntos se deu pela análise das provas dos anos de 2010 a 2013. O quadro a seguir mostra a quantidade de questões envolvendo cada um desses assuntos nesses anos.

Tema	2013	2012	2011	2010
Aula 01	2	1	6	4
Aula 02	3	4	5	5
Aula 03 e 04	5	1	3	4
Aula 05 e 06	1	0	2	5
Aula 07 e 08	1	2	1	0
Aula 09	4	2	2	2

As listas de exercícios apresentam uma compilação de questões (principalmente da OBM e da OBMEP) por tema. Apenas uma questão em cada uma das listas de exercício apresenta resolução ou comentário sobre a mesma. A escolha de não apresentar as demais resoluções se deu pelos seguintes motivos: as questões da OBM e OBMEP já apresentam resolução nos sites das competições, as demais questões são consideradas de simples resolução e ainda, o trabalho teria muito mais páginas do que já tem.

Em escolas onde o professor julgar que não há possibilidade de participação na OBM ou OBMEP, essas questões selecionadas podem ser usadas para desenvolver uma competição interna com os seus alunos.

Fase 01 - Aula 01

Tema da aula: Apresentação da OBM e do curso preparatório, resolução de questões que não dependem de pré-requisitos como as que envolvem visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá conhecer o funcionamento básico da OBM como a divisão em níveis e fases, o formato da prova e do curso preparatório e a forma de classificação para a segunda fase. Além disso, deverá saber os caminhos para resolver questões com os temas propostos (visão espacial, periodicidade, lógica e leitura de gráficos).

Síntese dos assuntos:

Sobre a OBM: A OBM surgiu em 1979, sendo organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Atualmente é disputada em quatro diferentes níveis de acordo com a série que o aluno cursa, sendo: Nível 01 para alunos dos 6° e 7° anos do ensino fundamental, Nível 02 para alunos dos 8° e 9° anos do ensino fundamental, Nível 03 para alunos do ensino médio *ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da primeira fase da OBM.* e Nível Universitário para estudantes de graduação de qualquer curso.

Após a correção das provas da primeira fase (que são de múltipla escolha com 25 questões), é estabelecida e divulgada no site da OBM a nota mínima para que o aluno seja classificado para a prova da segunda fase. Esta tem um formato diferente, sendo dividida em Parte A - 5 questões a serem resolvidas e apresentado apenas o resultado e Parte B - 4 problemas onde a resolução é levada em consideração (não é necessário estender o debate sobre a segunda fase, deixando isso para as aulas destinadas a esta fase).

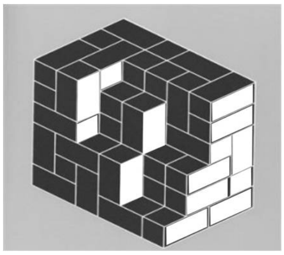
Sobre o curso: O curso preparatório para a prova da primeira fase terá 10 aulas que serão ministradas segundo dias e horários divulgados na carta já entregue. O curso, apesar de não ser obrigatório, tem em si um dos objetivos da OBM que é estimular o estudo da matemática e é de grande ajuda por proporcionar o contato dos alunos com os assuntos e questões já cobrados na OBM. É comum que alguns alunos façam a inscrição para o curso mas percebam que não é conveniente para eles continuar e é importante deixar claro que eles podem deixar de frequentar as aulas nestes casos.

Sobre as questões: Resolver as questões selecionadas, fazendo os alunos perceberem as estratégias escolhidas e até mesmo, estimular que eles proponham outras. Selecionar questões que foram aplicadas em edições recentes da OBM. Distribuir lista de exercícios com problemas desse tipo.

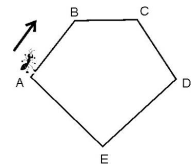
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Esmeralda está construindo um paralelepípedo usando blocos menores iguais. Para terminar sua tarefa, quantos blocos Esmeralda ainda deve colocar?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20



Questão 02 (OBM 2013) No pentágono $ABCDE$ ao lado, $AB = BC = CD = 2$ metros e $DE = EA = 3$ metros. Uma formiguinha parte do vértice A e caminha com velocidade constante de um metro por segundo ao longo de seus lados, sempre no mesmo sentido. Em que ponto estará no 2013º segundo?



A) A B) B C) C D) D E) E

Questão 03 (OBM 2013) Dalvenilson (ops, aluno D) procurou um amigo para aprender qual era o jeito ensinado pelo professor para verificar se um número é múltiplo de 7 sem realizar a divisão. O método ensinado é tomar o dígito das unidades apagá-lo e subtrair o seu dobro no número que sobrou. Por exemplo, para 1001 teremos: $100 - 2 \bullet 1 = 98$ e repetindo, teremos $9 - 2 \bullet 8 = -7$, que é um múltiplo de 7. Então, 98 e 1001 são múltiplos de 7. Sabendo disso, qual dos números a seguir é um múltiplo de 7?

A) 102112 B) 270280 C) 831821 D) 925925 E) 923823

Questão 04 (OBM 2013) O programa "Quem não quer o bode?" ficou muito famoso nos Estados Unidos. O programa era como a seguir: o participante deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas, há um carro e atrás de cada uma das outras duas, há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta escolhida. Entretanto, os organizadores do programa perceberam, com o passar do tempo, que aproximadamente dois em cada três participantes ganhavam o carro e, com isso, decidiram mudar o programa. Agora, cada uma das três portas teriam números de 1 a 3 e haveria um porteiro identificado com o número da porta. Cada porteiro faz uma afirmação que pode ser verdade ou mentira. Em seguida, o participante escolhe a porta na qual acredita que o carro está. Em um dos programas, foram ditas as seguintes afirmações pelos porteiros:

- Porteiro 1: O carro não está atrás da porta 3.
- Porteiro 2: O carro está atrás da minha porta.
- Porteiro 3: O carro não está atrás da minha porta.

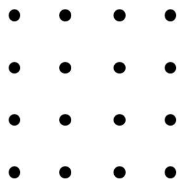
Sabe-se que pelo menos uma das afirmações é verdade e que pelo menos uma é mentira. Atrás de qual porta está o carro?

A) porta 1 B) porta 2 C) porta 3 D) não é possível identificar. E) não é possível que esteja em nenhuma delas.

Questão 05 (OBM 2012) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.

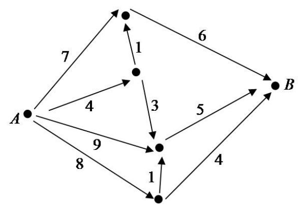
A) Seis B) Cinco C) Quatro D) Três E) Duas

Questão 06 (OBM 2012) Quantas são as possíveis distâncias entre dois pontos distintos do reticulado 4×4 a seguir? Os pontinhos estão distribuídos em linhas e colunas igualmente espaçadas entre si por uma unidade.



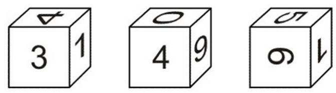
A) 4 B) 6 C) 9 D) 11 E) 16

Questão 07 (OBM 2011) A figura ao lado representa um mapa de estradas. Os números escritos nas setas indicam quanto de pedágio um viajante deve pagar ao passar pela estrada. Todas as estradas são de mão única, como indicam as setas. Qual o valor mínimo de pedágio pago por um viajante que sai da cidade A e chega na cidade B?



A) 11 B) 14 C) 12 D) 10 E) 15

Questão 08 (OBM 2011) No desenho ao lado, três cubos iguais estão apoiados sobre uma mesa. Cada cubo tem as faces numeradas por 0, 1, 3, 4, 5, 9, onde cada número aparece exatamente uma vez. Qual é a soma dos números das faces em contato com a mesa?

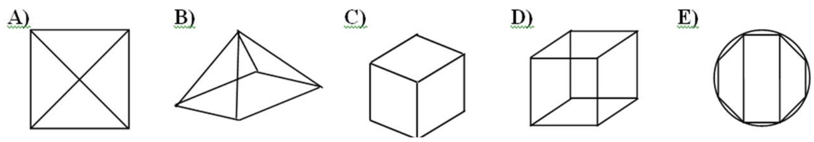


A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Questão 09 (OBM 2011) Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)

A) Vinte e quatro. B) Trinta e seis. C) Quarenta e dois. D) Quarenta e oito. E) Cinquenta e seis.

Questão 10 (OBM 2011) Topázio desenhou cada figura a seguir, exceto uma, tirando o lápis do papel exatamente uma vez e nunca passando pela mesma linha duas vezes. Qual das figuras abaixo ela não desenhou?



Questão 11 (OBM 2011) No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

X: "Hoje está chovendo."Y: "O nerd que acabou de falar está mentindo."Z: "Hoje não está chovendo."W: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerds."Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

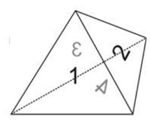
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Questão 12 (OBM 2010) Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:
Arnaldo: "Eu tenho quatro cartas com o mesmo número."
Bernaldo: "Eu tenho as cinco cartas vermelhas."
Cernaldo: "As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V."
Dernaldo: "Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número."
Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

A) Arnaldo B) Bernaldo C) Cernaldo D) Dernaldo E) Não é possível definir.

Solução Neste tipo de questão, costumamos fazer a suposição de que uma das afirmações é verdadeira e analisamos as implicações dessa suposição sobre as outras afirmações. Suponha que a afirmação de Arnaldo é verdadeira, ou seja, ele tem quatro cartas com o mesmo número. Isso significa que cada uma das cartas é de uma cor diferente já que não há cartas iguais. Vamos supor que essas cartas são as que têm o número 1, ou seja: 1 azul, 1 amarelo, 1 verde, 1 vermelho. Essa suposição implica que Bernaldo está mentindo pois uma das cartas vermelhas está com Arnaldo (1 vermelho). Cernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 2 verde,4 verde, 5 verde, 2 vermelho e 3 vermelho. Dernaldo poderia ter, por exemplo, as cartas 3 azul, 3 amarelo, 3 verde, 4 azul e 4 amarelo. Assim, temos uma situação onde somente Bernaldo faz uma afirmação falsa.

Questão 13 (OBM 2010) Um dado especial tem como faces triângulos equiláteros, numerados de 1 a 4, como no desenho. Colando dois dados, fazemos coincidir duas faces, com o mesmo número ou não. Qual dos números a seguir não pode ser a soma dos números das faces visíveis?



A) 12 B) 14 C) 17 D) 18 E) 19

Questão 14 (Fomin 2012) Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois, cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo, todas as bactérias se dividem novamente em duas e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Questão 15 (Fomin 2012) Ana, João e Alex fizeram uma excursão de ônibus pela Disneilândia. Cada um deles tem que pagar pelo passeio com moedas de plástico com valor 5, mas eles só têm moedas com os valores 10, 15 e 20 (cada um tem uma quantidade ilimitada de cada um desses tipos de moeda). Como eles podem pagar pela excursão?

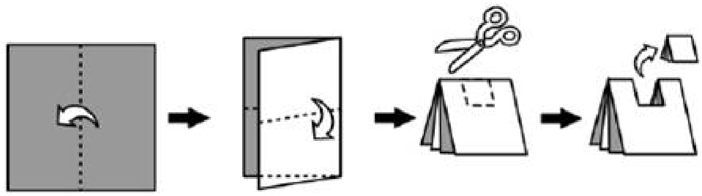
Questão 16 (Fomin 2012) Pedro disse: " Anteontem eu tinha 10 anos, mas vou fazer 13 anos no ano que vem". Isto é possível?

Questão 17 (Fomin 2012) O filho do pai de uma pessoa está falando com com o pai do filho desta pessoa e esta pessoa não está participando da conversa. Isto é possível?

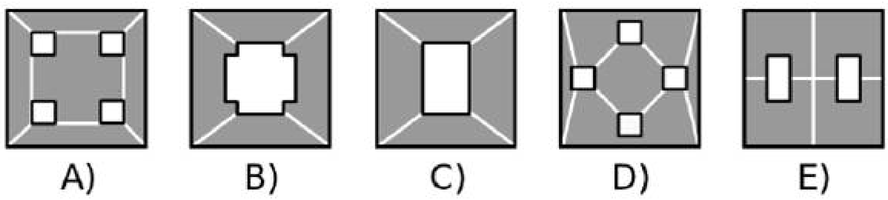
Questão 18 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

Questão 19 (Banco de Questões da OBMEP 2013) Numa quitanda, há três caixas. Uma contém apenas laranjas, outra contém apenas goiabas, e a terceira contém laranjas e goiabas. Ives, que trabalha nesta quitanda, escreveu em uma caixa "Laranjas", em outra "Goiabas" e em outra "Laranjas e Goiabas", de maneira que cada nome estivesse na caixa errada. Pedindo a Ives que retire e mostre apenas uma fruta de apenas uma caixa, é possível saber como reescrever todos os nomes nas caixas de maneira correta. Explique como!

Questão 20 (Banco de Questões da OBMEP 2012) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.



Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

TAO, Terence. *Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal.* SBM. Rio de Janeiro, 2013

Fomin, Dmitri; Gekin, Sergey; Itenberg, Ilia. *Círculos Matemáticos: a experiência russa.* IMPA. Rio de Janeiro, 2012

Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* SBM. Rio de Janeiro, 2011

Fase 01 - Aula 02

Tema da aula: Resolução de exercícios de revisão de tópicos das séries anteriores (porcentagem, proporção, operações entre frações, potenciação e suas propriedades, múltiplos e divisores).

Duração: 60 minutos.

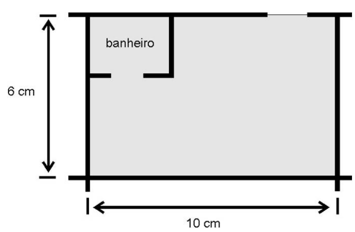
Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá ter revisto e relembrado os tópicos trabalhados que são de séries anteriores. Deverá poder resolver a lista de exercícios apresentada.

Atividade em sala: Revisar os tópicos através da resolução de exercícios.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) Se Joana comprar hoje um computador de 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?
A) Nada, pois pagará a mesma quantia.
B) Ela perderá 100 reais.
C) Ela ganhará 105 reais.
D) Ela perderá 95 reais.
E) Ela perderá 105 reais.

Questão 02 (OBM 2013) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?



A) 12,15 m^2 B) 15,5 m^2 C) 27 m^2 D) 32 m^2 E) 60 m^2

Questão 03 (OBM 2013) O Aluno D (usaremos este codinome para proteger a identidade do aluno) não prestou atenção na aula e não aprendeu como verificar, sem realizar a divisão, se um número é múltiplo de 7 ou não. Por isso, D decidiu usar a regra do 3, ou seja, ele vai somar os dígitos e verificar se o resultado é um múltiplo de 7. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto indicará que um número é múltiplo de 7, sendo o número realmente múltiplo de 7?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Questão 04 (OBM 2013) Entre os números naturais de 1 até n, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 05 (OBM 2013) Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente, como por exemplo 12 chocolates. Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?
A) 25 B) 13 C) 11 D) 31 E) 53

Questão 06 (OBM 2013) Determine o maior divisor comum de todos os números de 9 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A) 3 B) 9 C) 18 D) 27 E) 123456789

Questão 07 (OBM 2013) João escreveu todos os números de 4 dígitos contendo cada um dos algarismos de 1 até 4 exatamente uma vez. Em quantos desses números a soma dos dois últimos dígitos é maior que a soma dos dois primeiros?

A) 8 B) 12 C) 4 D) 16 E) 2

Questão 08 (OBM 2013) Qual dos seguintes números é o mais próximo da quantidade de algarismos de 3^{400}?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 240 E) 300

Questão 09 (OBM 2012) Na fase final da OBM, participaram 600 alunos de todo o Brasil. Seguindo a tradição das olimpíadas internacionais, na premiação são distribuidas medalhas de ouro, prata e bronze na proporção 1:2:3, respectivamente. Sabe-se que 60% do total de estudantes ganhou alguma das 3 medalhas. Quantos alunos ganharam medalha de prata?

A) 60 B)120 C)180 D) 240 E) 300

Questão 10 (OBM 2012) Na expressão $\frac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

A) 38 B) 96 C) 108 D) 576 E) 648

Questão 11 (OBM 2012) Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número?

A) 1875 B) 405 C) 390 D) 330 E) 105

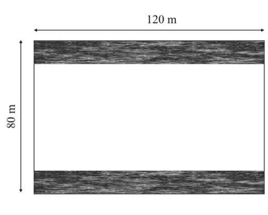
Questão 12 (OBM 2012) Quantos números inteiros positivos têm o número 9 como seu maior divisor, diferente do próprio número?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) infinitos

Questão 13 (OBM 2012) Esmeralda está organizando sua festa de aniversário e por um erro na distribuição dos convites, ela não sabe se a festa terá 4 ou 6 pessoas. Entretanto, ela planeja já deixar o bolo cortado em alguns pedaços não necessariamente iguais de tal forma que se vierem 4 ou 6 pessoas, cada delas receberá a mesma quantidade de bolo(o bolo inteiro deve ser distribuido em qualquer uma das duas situações). Qual o número mínimo de pedaços para ela atingir esse objetivo?

A) 24 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

Questão 14 (OBM 2012) O pai de Esmeralda comprou um terreno retangular de 120 metros de comprimento por 80 metros de largura. Devido a leis ambientais, ele deve plantar árvores em 20% do terreno. Ele faz isso plantando-as em duas faixas de mesma largura nas laterais do terreno, conforme mostra a figura. Qual é essa largura?



A) 6m B) 8m C) 10m D) 16m E) 24m

Questão 15 (OBM 2011) Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Questão 16 (OBM 2011) Se multiplicarmos todos os inteiros positivos menores que 2011 que não são múltiplos de 5, qual será o algarismo das unidades do número obtido?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Questão 17 (OBM 2010) Qual das alternativas apresenta um divisor de $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
A) 42 B) 45 C) 52 D) 85 E) 105

Questão 18 (OBM 2010) Aumentando em 2% o valor do menor de dois números consecutivos, obtém-se o maior deles. Qual é a soma desses números?
A) 43 B) 53 C) 97 D) 101 E) 115

Solução Sejam x e $x+1$ os números. Aumentar em 2% um número pode ser traduzido por uma multiplicação por 1,02. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 1,02x &= x+1 \\ 1,02x - x &= 1 \\ 0,02x &= 1 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Assim, a soma dos números é $50 + 51 = 101$

Questão 19 (OBM 2010) Dividindo-se o número $4^{(4^4)}$ por 4^4 obtemos o número:
A) 2 B) 4^3 C) 4^4 D) 4^8 E) 4^{12}

Questão 20 (OBM 2010) Sônia calculou a média aritmética de dois diferentes números de dois dígitos e obteve 98. Qual é a diferença entre esses números?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) um número maior que 4

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares*. SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas*. SBM. Rio de Janeiro, 2010

Fase 01 - Aulas 03 e 04

Tema da aula: Geometria I e II

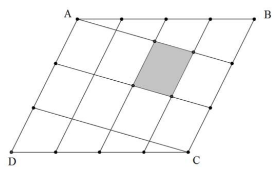
Duração: Dois encontros de 60 minutos cada.

Objetivos da aula: Ao final da aula, o aluno deverá ter revisto as principais propriedades das figuras geométricas planas, dentre elas, as que envolvem ângulos na circunferência.

Atividade em sala: Resolver questões na sala de aula a título de revisão dos tópicos trabalhados em anos anteriores. Apresentar os tópicos ainda não trabalhados e resolver questões da lista a título de exemplo.

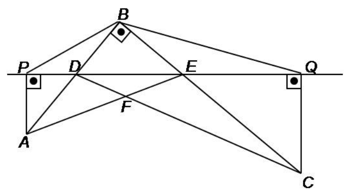
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2012) Os lados AB e DC do paralelogramo ABCD foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de ABCD é 84, determine a área sombreada.



A) B) 3 C) 4 D) 7 E) 12

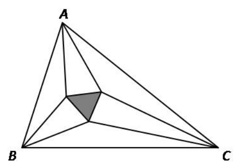
Questão 02 (OBM 2012) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta r corta os segmentos AB e BC em D e E, respectivamente; as retas CD e AE se cortam em F; P e Q são as projeções ortogonais de A e C sobre a reta r, respectivamente.



Sendo o ângulo entre as retas CD e AE igual a $m(A\hat{F}D = 40^o$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é:

A) 110 B) 120 C) 130 D) 140 E) 160

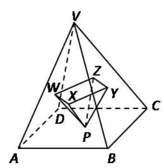
Questão 03 (OBM 2012) O teorema de Morley diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado triângulo de Morley de ABC, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}-2$ D) $2-\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Questão 04 (OBM 2012) Considere uma pirâmide VABCD de base quadrada. Seja P o centro da base ABCD e X, Y, Z e W pontos sobre as faces laterais tais que PXYWZ é uma pirâmide semelhante a VABCD, com as diagonais da base XZ e YW paralelos a BC e CD, respectivamente.



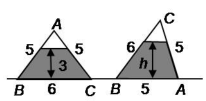
A razão de semelhança entre as duas pirâmides é:

A) $1:(\sqrt{2}+1)$ B) 1:3 C) 1:2 D) $1:\sqrt{2}$ E) $1:(2\sqrt{2}+3)$

Questão 05 (OBM 2011) Em um triângulo ABC com $m(A\hat{B}C)-m(B\hat{A}C)=50°$, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $m(C\hat{D}E)=90°$. A medida do ângulo $A\hat{D}E$ é:

A) 25° B) 30° C) 40° D) 45° E) 50°

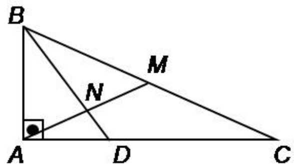
Questão 06 (OBM 2011) Um peso de papel tem a forma de um triângulo de lados BC = 6 cm e AB = AC = 5 cm e está parcialmente preenchido com água. Quando o peso de papel se apoia sobre o lado BC, a água tem uma altura de 3 cm. Qual é a altura da água, em cm, quando o



peso de papel se apoia sobre o lado AB?

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{18}{5}$ E) $\frac{24}{5}$

Questão 07 (OBM 2011) Seja ABC um triângulo retângulo em A. O ponto D pertence ao lado AC e é tal que BD = CD. Sejam M o ponto médio de BC e N a interseção de AM e BD. Sendo N o ponto médio de AM, qual a medida, em graus, do ângulo $B\hat{C}A$?



A) 15 B) 22,5 C) 30 D) 37,5 E) 45

Questão 08 (OBM 2011) Três polígonos regulares, de 8, 12 e 18 lados respectivamente, estão inscritos em uma mesma circunferência e têm um vértice em comum. Os vértices dos três polígonos são marcados na circunferência. Quantos vértices distintos foram marcados?

A) 20 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

Questão 09 (OBM 2011) Seja ABCD um quadrilátero inscritível (ou seja, cujos vértices pertencem a uma circunferência) com AB = 4, BC = $8\sqrt{3}$, AC = $4\sqrt{13}$ e AD = $2\sqrt{3}$. Sendo E a interseção das diagonais AC e BD, o comprimento do segmento BE é:

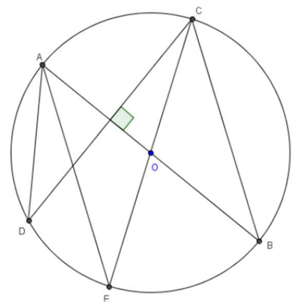
A) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ B) $\frac{13\sqrt{3}}{7}$ C) $2\sqrt{13}$ D) $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{16\sqrt{3}}{7}$

Questão 10 (OBM 2013) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que BD = 3DC e que AC = 2, a hipotenusa do triângulo é:

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{3}$

Comentário Em questões envolvendo figuras, um bom desenho pode favorecer muito a resolução da mesma. Óbvio que um triângulo é um triângulo em qualquer posição que ele seja desenhado. Mas a visualização de que caminho seguir, pode ser facilitada pela forma que a figura foi traçada. Treine com os alunos de que maneira identificar elementos do enunciado para desenhar uma figura que facilite o caminho para a solução. Neste exemplo, como se trata de um triângulo retângulo, debata com o aluno se a figura deve ser desenhada com a hipotenusa na horizontal ou se deve ser desenhada com um dos catetos na horizontal.

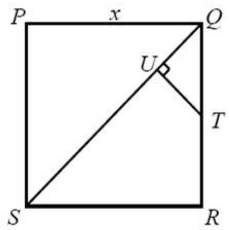
Questão 11 (OBM 2013) Na figura abaixo o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35^o$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:



Questão 12 (OBM 2013) No trapézio ABCD, com AB paralelo a CD, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 82^o e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 74^o. Suponha que exista um ponto P sobre o lado CD tal que $AD + DP = PC + CB = AB$. Quanto mede o ângulo $A\hat{P}B$?

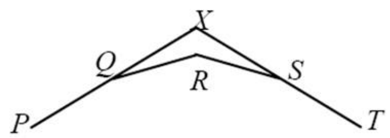
A) 76^o B) 77^o C) 78^o D) 79^o E) 80^o

Questão 13 (OBM 2010) Um quadrado PQRS tem lados medindo x. T é o ponto médio de QR e U é o pé da perpendicular a QS que passa por T. Qual é a medida de TU?



A) $\frac{x}{2}$ B) $\frac{x}{3}$ C) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ E) $\frac{x}{4}$

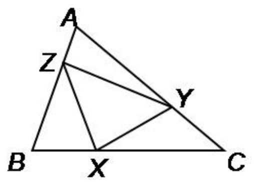
Questão 14 (OBM 2010) Os pontos P, Q, R, S e T são vértices de um polígono regular. Os lados PQ e TS são prolongados até se encontrarem em X, como mostra a figura, e $Q\hat{x}S$ mede 140^o. Quantos lados o polígono tem?



A) 9 B) 18 C) 24 D) 27 E) 40

Questão 15 (OBM 2010) No triângulo ABC, $m(B\hat{A}C) = 140^o$. Sendo M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AB e P o ponto sobre o lado AC tal que MP é perpendicular a AC, qual é a medida do ângulo $N\hat{M}P$?
A) 40^o B) 50^o C) 70^o D) 90^o E) 100^o

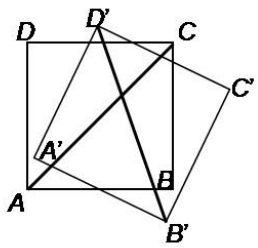
Questão 16 (OBM 2010) Seja ABC um triângulo e X, Y e Z pontos sobre os lados BC, CA, AB tais que $\frac{CX}{XB} = \frac{AY}{YC} = \frac{BZ}{ZA} = 2$.



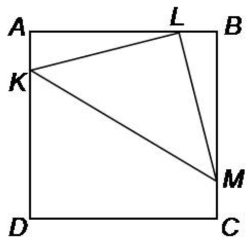
A razão entre as áreas do triângulo XYZ e do triângulo cujos lados são congruentes às medianas de ABC é:
Obs.: as medianas de um triângulo são os segmentos que ligam os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados opostos.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{9}$ D)$\frac{1}{3}$ E)$\frac{1}{4}$

Questão 17 (OBM 2009) Na figura, o quadrado A'B'C'D' foi obtido a partir de uma rotação no sentido horário do quadrado ABCD de 25 graus em torno do ponto médio de AB. Qual é o ângulo agudo, em graus, entre as retas AC e B'D'?
A) 5 B) 25 C) 45 D) 65 E) 85

Questão 18 (OBM 2009) Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado 4, K pertence ao lado AD, L pertence ao lado AB, M pertence ao lado BC e KLM é um

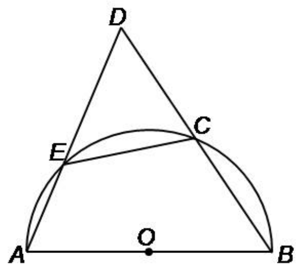


triângulo retângulo isósceles, sendo L o ângulo reto. Então a área do quadrilátero CDKM é igual a:



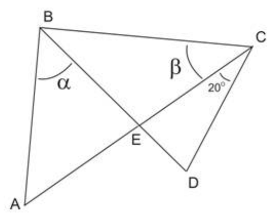
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

Questão 19 (OBM 2009) Na figura, $CD = BC$, $\angle BAD = 72^o$, AB é o diâmetro e O o centro do semicírculo. Determine a medida do ângulo $\angle DEC$



A) 36^o B) 42^o C) 54^o D) 63^o E) 18^o

Questão 20 (OBM 2009) No desenho temos $AE = BE = CE = CD$. Além disso, α e β são medidas de ângulos. Qual é o valor da razão $\frac{\alpha}{\beta}$?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* SBM. Rio de Janeiro, 2006

Lima, Elon Lages et al. *Temas e Problemas.* SBM. Rio de Janeiro, 2010

Fase 01 - Aulas 05 e 06

Tema da aula: Função e Álgebra

Duração: Dois encontros de 60 minutos.

Objetivos da aula: Espera-se que o aluno do ensino médio já tenha tido contato com as funções, assim, a aula tem como objetivo aprofundar o assunto e trabalhar questões com maior nível de dificuldade. Quanto à parte de álgebra, o aluno deve ter contato com estratégias diferentes de resolução de questões.

Atividade em sala: Reintroduzir função e relembrar os produtos notáveis. resolver questões em sala.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2012) Seja $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \ldots$ e considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0 e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:
i) $f(3n) = 3f(n) + 1$;
ii) $f(3n + 1) = 3f(n) + 2$;
iii) $f(3n + 2) = 3f(n)$;
Então f(2012) é igual a:
A) 101 B) 102 C) 103 D) 104 E) 105

Questão 02 (OBM 2012) Se $x^2 = 2x + 4$, então $(x + 1)^{-1}$ é igual a
A) $x + 2$ B) x–3 C) x–1 D) $2x + 5$ E) $3x + 5$

Questão 03 (OBM 2012) Quantas soluções reais têm o sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{z^2} \\ y + z = \frac{1}{x^2} \\ z + x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) infinitas

Questão 04 (OBM 2011) Sendo a e b reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\frac{ab}{a+b}$ pode assumir é
A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Questão 05 (OBM 2011) Se a, b e c são inteiros positivos tais que $a \leq b \leq c$ e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2011}$, qual é o menor valor possível de a?
A) 2011 B) 2012 C) 2013 D) 2014 E) $2011 \cdot 2012$

Questão 06 (OBM 2010) Os números x e y satisfazem $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. Então xy é igual a

A) 4 B) 1 C) –1 D) –4 E) é preciso de mais dados

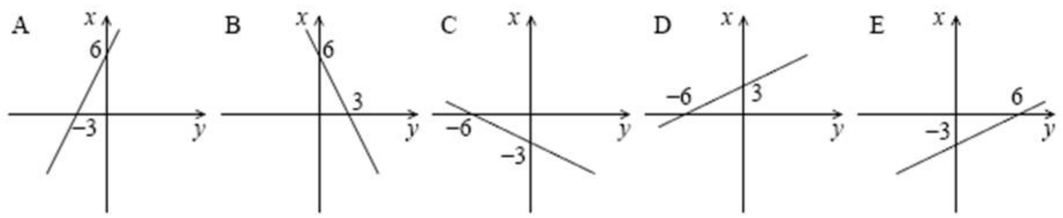
Solução Multiplicando por y os dois membros da igualdade, temos:

$$xy - \frac{y}{x} = y^2 - 1$$

Multiplicando por x os dois membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} x^2y - y &= y^2x - x \\ x^2y - y^2x &= y - x \\ xy(x-y) &= y - x \\ xy &= \frac{y-x}{x-y} \\ xy &= -1 \end{aligned}$$

Questão 07 (OBM 2010) Esmeralda ia desenhar o gráfico de $y = 2x + 6$ mas trocou os eixos de lugar. Como fica o desenho dessa relação com os eixos trocados de lugar?



Questão 08 (OBM 2010) Os números a e b são reais não negativos tais que $a^3 + a < b–b^3$. Então

A) $b < a < 1$

B) $a = b = 1$

C) $a < 1 < b$

D) $a < b < 1$

E) $1 < a < b$

Questão 09 (OBM 2010) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $x^2–y^2 = 2^{2010}$?

A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) 1004

Questão 10 (OBM 2010) Qual é o maior valor de xy^2 se x e y são reais positivos cuja soma é 3?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Questão 11 (OBM 2010) Qual é o menor valor positivo de $21m^2–n^2$ para m e n inteiros positivos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Questão 12 (OBM 2009) Se $x^2 = x + 3$ então x^3 é igual a:

A) x^2+3 B) $x+4$ C) 2^x+2 D) 4^x+3 E) $x^2–2$

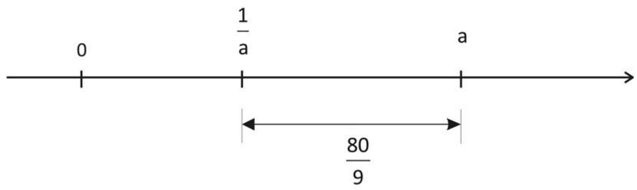
Questão 13 (OBM 2009) Seja $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma função tal que $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$ e $f(x+12)=f(x+21)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{N}$. Então $f(2009)$ é:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 2009

Questão 14 (OBM 2009) Sabe-se que $2x^2–12xy+ky^2\geq 0$ para todos x, y reais. O menor valor real de k é

A) 9 B) 16 C) 18 D) 27 E) 36

Questão 15 (OBM 2008) O número inteiro positivo a e o número $\frac{1}{a}$ localizam-se na reta da seguinte maneira:



Qual é a soma desses dois números?

A) $\frac{9}{81}$ B) $\frac{9}{80}$ C) $\frac{81}{9}$ D) $\frac{82}{9}$ E) 9

Questão 16 (OBM 2008) Sendo $x=10^{-2008}$, assinale a alternativa que apresenta o maior valor.

A) $\frac{1}{x}$ B) $\frac{1}{x(x+1)}$ C) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ D) x E) $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$

Questão 17 (OBM 2008) Considere a função f, definida no conjunto dos números reais e satisfazendo $f(x)=\frac{cx}{2x+3}$, para todo $x\neq -3/2$. Determine o número de tais funções f para as quais $f(f(x))=x$, para todo x tal que $f(f(x))$ está bem definida.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) infinitas.

Questão 18 (OBM 2008) Cinco inteiros positivos a,b,c,d,e maiores que um satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned}a(b+c+d+e)&=128\\ b(a+c+d+e)&=144\\ c(a+b+d+e)&=203\\ d(a+b+c+e)&=243\\ e(a+b+c+d)&=275\end{aligned}$$

Quanto vale a soma $a+b+c+d+e$?

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

Questão 19 (OBM 2007) Se x é real positivo e $1+(x^2+x)(x^2+5x+6)=181^2$, então o valor de $x(x+3)$ é:

A) 180 B) 150 C) 120 D) 182 E) 75

Questão 20 (OBM 2007) Qual dos inteiros positivos abaixo satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{4}{n^4}+\frac{5}{n^4}+\frac{6}{n^4}+\cdots+\frac{n^4-6}{n^4}+\frac{n^4-5}{n^4}+\frac{n^4-4}{n^4}=309$$

A) 2007 B) 309 C) 155 D) 25 E) 5

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006

Fase 01 - Aulas 07 e 08

Tema da aula: Trigonometria

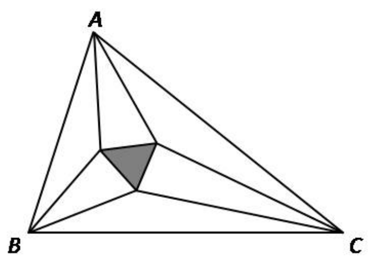
Duração: Dois encontros de 60 minutos cada.

Objetivos da aula: O aluno deverá rever as razões trigonométricas e aprender algumas das relações trigonométricas, as necessárias para a resolução das questões da lista.

Atividade em sala: Apresentar as razões trigonométricas e relações entre elas. Mostrar como se chegou às relações para que o aluno seja capaz de seguir o caminho para encontrar novas relações. Resolver questões em sala.

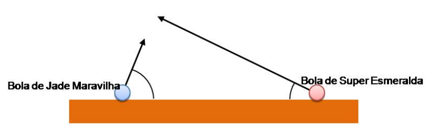
Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2012) O teorema de Morley diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado triângulo de Morley de ABC, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?
A)$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}-2$ D)$2-\sqrt{3}$ E)$2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

Questão 02 (OBM 2013) Super Esmeralda e Jade Maravilha estão jogando bilhar. Super Esmeralda dá uma tacada em uma bola com velocidade de km/h, com um ângulo de com uma das tabelas. Jade Maravilha deve acertar a bola de Super Esmeralda com outra bola. As duas bolas partem da tabela da mesa simultaneamente, e estão a uma distância de 50



cm. Jade Maravilha pode escolher qualquer ângulo
para dar a sua tacada.

Qual é a velocidade mínima com que Jade Maravilha pode dar sua tacada?

A) 15 km/h B) 30 km/h C) $30\sqrt{2}$ km/h D)$30\sqrt{3}$ km/h E) 60 km/h

Questão 03 (OBM 2005) Traçando as quatro retas perpendiculares aos lados de um paralelogramo não retângulo pelos seus pontos médios, obtém-se uma região do plano limitada por essas quatro retas. Podemos afirmar que a área dessa região é igual à área do paralelogramo se um dos ângulos do paralelogramo for igual a:

A) 30^o B) 45^o C) 60^o D) 75^o E) 90^o

Questão 04 (Carmo 2005) Mostre que $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$

Comentário Não é comum em parte das escolas, trabalhar com os alunos as demonstrações de fórmulas e teoremas. Essas questões são importantes para já trabalhar com os alunos a necessidade de saber escrever matemática, habilidade útil na realização das provas das demais fases.

Questão 05 (Carmo 2005) Mostre que $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$

Questão 06 (Carmo 2005) Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

Questão 07 (Carmo 2005) Calcule $\frac{\cos 765^o - \operatorname{sen} 1395^o}{\operatorname{tg} 1410^o}$

Questão 08 (Carmo 2005) Determine para quais valores de x a função $y = 5 - \cos(x + \frac{\phi}{5})$ assume seu valor máximo.

Questão 09 (Carmo 2005) Calcule k de modo que as raízes da equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$ sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

Questão 10 (Carmo 2005) Prove que, em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual à dos quadrados das diagonais.

Questão 11 (Carmo 2005) Dois círculos são tangentes entre sí e aos lados de um ângulo dado $2x$. Conhecendo o raio R do círculo maior, calcular o raio de círculo menor.

Questão 12 (Carmo 2005) Um retângulo está inscrito em um semi-círculo de raio 1 tendo um de seus lados (base) sobre o diâmetro. Calcular a razão entre a altura e a base desse retângulo nas duas situações seguintes:

a) a área do triângulo é máxima,

b) o perímetro do triângulo é máximo.

Questão 13 (ITA 2010) Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximisam a soma $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$, então α é igual a:

Questão 14 (ITA 2009) A expressão $\frac{2[\operatorname{sen}(x+\frac{11}{2}\pi)+\cot^2 x]\dot{\operatorname{tg}}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ é equivalente a:

Questão 15 (ITA 2009) Sabendo que $\operatorname{tg}^2(x + \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, determine $\operatorname{sen} x$.

Questão 16 (ITA 2008) A soma de todas as soluções distintas da equação $cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é igual a:

Questão 17 (ITA 2007) Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Determine o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) - \sqrt{3}(cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2})\sec(x) \geq 0$

Questão 18 (ITA 2006) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\operatorname{sen}[5(x + \frac{\pi}{6})]$ e seja B o conjunto dado por $B = x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, \infty)$, então m+n é igual a:

Questão 19 (ITA 2006) O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(1 - \cot^2 x) = 4$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, é:

Questão 20 (ITA 2005) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a:

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Carmo, Manfredo Perdigão do. *Trigonometria / Números Complexos.* Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Fase 01 - Aula 09

Tema da aula: Introdução a análise combinatória.

Duração: 60 minutos.

Objetivos da aula: O aluno deverá conhecer o princípio fundamental da contagem (PFC)e resolver questões de análise combinatória com e sem as fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

Atividade em sala: Introduzir o tópico com a resolução de questões simples sendo resolvidas pela árvore de possibilidades para introduzir o PFC. Apresentar as questões que são resolvidas por arranjo e combinação e resolver com e sem as fórmulas. resolver questões da lista.

Lista de exercícios:

Questão 01 (OBM 2013) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?
A) 330 B) 348 C) 512 D) 676 E) 900

Questão 02 (OBM 2012) Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser sim ou não, para cada uma das perguntas.

Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas responderam igualmente a todas as perguntas?

A) 16 B) 17 C) 9 D) 5 E) 33

Solução

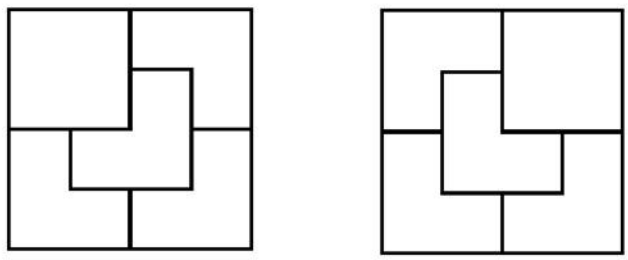
Para cada uma das quatro perguntas há duas possíveis respostas o que nos dá:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ possíveis maneiras de responder.

Supondo que as 16 primeiras pessoas deram respostas diferentes, para haver duas respostas iguais, é necessário que tenhamos a 17^a pessoa.

Por trás dessa resolução, está o princípio das gavetas ou princípio da casa dos pombos, assunto que será abordado na preparação para as demais fases. Recomendamos a leitura do tema.

Questão 03 (OBM 2012) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4×4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

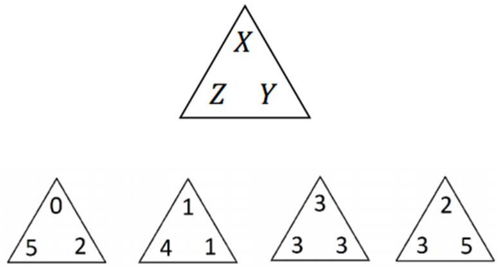
Questão 04 (OBM 2014) Cada uma de 2014 bolas é pintada de azul, verde ou amarelo e é colocada aleatoriamente em uma de três urnas, uma azul, outra verde e a terceira amarela. Qual é a probabilidade de que cada urna contenha exatamente as bolas com a sua respectiva cor?

A) $\frac{1}{3^{2014}}$
B) $\frac{1}{3^{2013}}$
C) $\frac{1}{9^{2014}}$
D) $\frac{1}{3^{4017}}$
E) $\frac{1}{9^{2013}}$

Questão 05 (OBM 2014) O jogo de *triminó simplificado* é composto por peças na forma de triângulo em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \leq Y \leq Z$.

Por exemplo, das quatro peças a seguir, três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.

Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?



A) 216 B) 125 C) 120 D) 56 E) 30

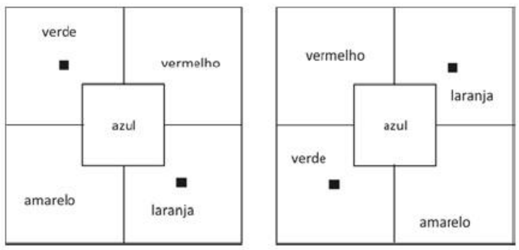
Questão 06 (OBM 2009) Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 34 E) 45

Questão 07 (OBM 2008) Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: “Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas.” Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

A) $\frac{39!}{26!52!}$ B)$\frac{26!}{13!39!}$ C)$\frac{39!39!}{26!52!}$ D) $\frac{26!26!}{13!39!}$ E) $\frac{39!13!}{52!}$

Questão 08 (OBM 2008) Soninha tem muitos cartões, todos com o mesmo desenho em uma das faces. Ela vai usar cinco cores diferentes (verde, amarelo, azul, vermelho e laranja) para pintar cada uma das cinco partes do desenho, cada parte com uma cor diferente, de modo que não haja dois cartões pintados da mesma forma. Na figura abaixo, por exemplo, os cartões são iguais, pois um deles pode ser girado para se obter o outro. Quantos cartões diferentes Soninha conseguirá produzir?



A) 16 B) 25 C) 30 D) 60 E) 120

Questão 09 (OBM 2008) Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila?

A) 256 B) 768 C) 1260 D) 512 E) 2560

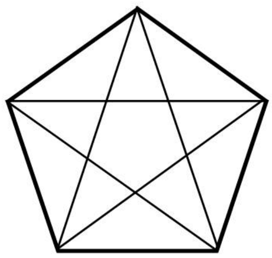
Questão 10 (OBM 2007) Um código de barras é formado por barras verticais pretas de três larguras diferentes. Duas barras pretas sempre são separadas por uma barra branca, também com três larguras diferentes. O código começa e termina com uma barra preta, como no exemplo ao lado. Considere um código S, formado por uma barra preta fina, duas médias e uma grossa, separadas por barras brancas finas. Quantos códigos S diferentes podem ser assim formados?

A) 4 B) 6 C) 12 D) 24 E) 36

Questão 11 (OBM 2006) Quantos números de três algarismos ímpares distintos são divisíveis por 3?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 36 E) 48

Questão 12 (OBM 2006) Quantos triângulos isósceles têm como vértices os vértices do pentágono regular desenhado ao lado?



A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Questão 13 (OBM 2006) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

A) 60 B) 90 C) 105 D) 180 E) 240

Questão 14 (OBM 2006) As permutações da palavra BRASIL foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de seis letras em um dicionário. A 361ª palavra nessa lista é:

A) BRISAL B) SIRBAL C) RASBIL D) SABRIL E) LABIRS

Questão 15 (OBM 2006) Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todo dia, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, não importando sua idade ou cor. Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

A) $\frac{1}{2^{2006}}$ B) $\frac{1}{2006}$ C) $\frac{1}{2007}$ D) $\frac{1}{2006 \cdot 2007}$ E) $\frac{2006}{2007}$

Questão 16 (OBM 2006) De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\_\_ > \_\_ > \_\_$$

A) 100 B) 120 C) 240 D) 480 E) 720

Questão 17 (OBM 2007) Um número de quatro dígitos é dito peroba se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números perobas existem?

A) 8999 B) 8874 C) 7875 D) 8000 E) 7750

Questão 18 (OBM 2004) Para n inteiro positivo, definimos n! (lê-se "n fatorial") o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Por exemplo, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$.

Se $n! = 215 \times 36 \times 53 \times 72 \times 11 \times 13$, então n é igual a

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Questão 19 (PROFMAT 2011) O número 2.568 possui dígitos em ordem crescente. Os números 5.667 e 3.769 não possuem dígitos em ordem crescente. Quantos são os números naturais entre 1.000 e 9.999 que possuem seus dígitos em ordem crescente?

A) 126 B) 144 C) 186 D) 210 E) 252

Questão 20 (PROFMAT 2011) Em uma festa há 13 casais. Cada homem cumprimenta com um aperto de mão os outros convidados, exceto a sua própria esposa. As mulheres recebem aperto de mão, mas não procuram ninguém para cumprimentar. Quantos apertos de mão são dados pelos 26 participantes?

A) 234 B) 235 C) 236 D) 237 E) 238

Bibliografia recomendada:

Todas as questões da OBM colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Todas as questões da OBMEP colocadas aqui e as respectivas soluções estão disponíveis no site da competição.

Lima, Elon Lages et al. Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Morgado, Augusto César. Análise Combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Fase 01 - Aula 10

Tema da aula: Resolução de exercícios de revisão para a prova.

Duração: 60 minutos.

Atividade em sala: Após analisar a prova que será aplicada, selecionar questões de olimpíadas de **anos anteriores** para resolver em sala. O grifo em **anos anteriores** é para chamar a atenção da necessidade de manter a lisura do processo, evitando elaborar questões similares para resolver com os alunos. Aproveitar o momento para dar as últimas orientações quanto ao momento da realização da prova e transmitir tranquilidade aos alunos. Para este tópico, não apresentamos lista de exercícios mas recomendamos o uso das questões disponíveis nos sites da OBM e da OBMEP.

Capítulo 8

Aulas para as fases 2 e 3

Neste capítulo final, são apresentados 7 tópicos a serem trabalhados em todos os níveis e questões respeitando o nível de dificuldade para cada faixa. Devido ao curto tempo entre o resultado da segunda fase e a realização da prova da terceira fase (12 dias em 2014), recomenda-se usar a segunda etapa do curso para preparar os alunos para as duas provas.

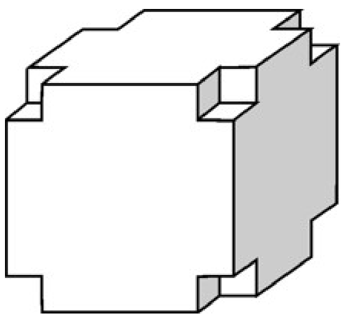
A prova da segunda fase é composta por duas partes. Na parte A, o aluno deverá resolver a questão e apresentar o resultado como sendo um número de 0 a 9.999 (não serão analisados os cálculos, somente a resposta). A parte B da prova é composta por questões discursivas. Já a prova da terceira fase é composta apenas por questões discursivas.

Em relação às segunda e terceira fase, tão importante quanto abordar tais tópicos,é mostrar aos alunos a necessidade de apresentar o raciocínio utilizado na resolução das questões discursivas. Os critérios de correção, disponibilizados no site da OBM, atribuem pontos a cada etapa da resolução. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo de problema e solução de questão da OBM - Fase 2

Problema 2 (OBM 2013 - Nível 01 - Fase 02)

O ourives Carlos tem um cubo de madeira de arestas de 10 centímetros. Ele retira cubos de 2 centímetros de aresta de cada vértice do cubo e cola sobre toda a superfície do sólido resultante uma folha fina de ouro ao preço de 8 reais por centímetro quadrado. Sem desperdícios, qual é o custo em reais dessa cobertura?



Resolução e critérios disponíveis no site da OBM

O corte dos cubinhos em cada vértice do cubo não muda a superfície total do cubo (é como retirar e aumentar três faces de cada cubinho), igual a $6 \times 10^2 = 600cm^2$. Logo o preço do revestimento é $8 \times R\$600 = R\$4.800,00$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
• Argumentou que a área retirada de cada cubinho é igual à área que fica exposta **[4 pontos]**
• Encontrou a área do cubo, que é igual à área do sólido **[+ 4 pontos]**
• Concluiu com o valor correto **[+ 2 pontos]**

• Erros de conta: **[–1 ponto]**
Caso o aluno cometa mais de um erro, mas manter raciocínio correto, descontar apenas uma vez.

Solução Alternativa (não acumulativo com as pontuações da solução anterior)
• Encontrou a área das faces grandes da figura final ($10 \cdot 10 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 84$) **[2 pontos]**
• Encontrou a área das faces pequenas ($2 \cdot 2 = 4$) **[+ 2 pontos]**
• Contou corretamente o número de faces pequenas (24 faces) **[+ 2 pontos]**
• Encontrou a área do sólido ($6 \cdot 84 + 24 \cdot 4 = 600$) **[+ 2 pontos]**
• Concluiu com o valor correto **[+ 2 pontos]**

• Erros de conta: **[–1 ponto]**
Caso o aluno cometa mais de um erro, mas manter raciocínio correto, descontar apenas uma vez.

Para cada tópico foram selecionadas três questões com níveis de dificuldade variado, além das questões, apresento uma solução para cada uma delas. É interessante reservar um oitavo encontro para uma revisão antes da prova da segunda fase.

Os tópicos selecionados são:

Jogos

Indução

Princípio da Casa dos Pombos

Invariantes

Desigualdade Triangular

Congruência

Pequeno Teorema de Fermat

Fases 02 e 03 - Aula 01

Tema da aula: Jogos.

Enunciado Vamos separar as questões envolvendo jogos em dois grupos. Os que usam *simetria* para a resolução e os que usam *posições vencedoras*. Há ainda outros jogos mas que não podem ser colocados em um grupo a parte por apresentarem caminhos diversos de resolução.

Simetria Em geral, as questões que evolvem simetria são aquelas onde no enunciado afirma que o jogador que colocar ou tirar a última peça vencerá. Ele deve então forçar o aparecimento da simetria e a usar para que sempre tenha a mesma jogada que o adversário (Questões Resolvidas 01 e 02).

Posição Vencedora Outros tipos de jogos só serão vencidos se determinada situação ocorrer no final de algumas rodadas. Para vencer esses jogos, é necessário assumir uma posição vencedora, ou seja, manter jogadas que sempre deixem o oponente sem possibilidade de vitória (Questão Resolvida 03).

Atenção É importante ressaltar que nesses jogos sempre considera-se que os jogadores são inteligentes, sabem como vencer e não cometem erros. Não é dado espaço para jogadas erradas ou "esperar cometer um erro".

Questões Resolvidas

Questão 01 (Eureka! nº 37, 2013)

Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 15 e outra com 16 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

Resolução O primeiro jogador pode vencer se retirar uma pedra da pilha com 16 pedras e, a partir daí, retirar a mesma quantidade de pedras que o segundo jogador retirar, mas da outra pilha.

Questão 02 (OBM 2002)

São dados um tabuleiro de xadrez (8×8) e palitinhos do tamanho do lado das casas do tabuleiro. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada rodada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma das casas do tabuleiro, sendo proibido sobrepor os palitinhos. Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum dos jogadores cometa erros, qual dos dois tem estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

Resolução Usando a simetria em relação ao centro do tabuleiro, o segundo jogador ganhará pois em determinado momento todos os quadrados estarão com dois lados preenchidos e será a vez do primeiro jogador. ele irá colocar o terceiro lado de um dos quadrados e o segundo jogador coloca o quarto lado e ganha.

Questão 03 (Eureka! nº 37, 2013)

Sobre uma mesa existem 2006 pedras. Em um jogo, cada jogador pode, em sua vez, retirar de 1 a 10 pedras (mas sempre retirando pelo menos uma pedra). Ganha o jogador que retirar a última pedra. Qual dos jogadores possui a estratégia vencedora?

Resolução Se na penúltima rodada houver 11 pedras, o jogador da última rodada ganhará. Assim, o primeiro jogador pode ganhar se puder deixar 11 pedras para o segundo jogador na penúltima rodada. Para isso, como $2006 = 4 + 11 \times 182$, ele deve retirar 4 pedras na primeira rodada e, a partir daí, retirar sempre a quantidade de pedras a, junto com as retiradas pelo primeiro jogador, formar 11.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Eureka! nº 37. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

Fases 02 e 03 - Aula 02

Tema da aula: Indução.

Enunciado Imagine uma fila de um espetáculo onde sabe-se que:
(a) o primeiro da fila tem o ingresso;
(b) se uma pessoa qualquer na fila tem o ingresso, a que está após ela também tem o ingresso.

Qual a conclusão podemos tirar disso? Todos na fila têm o ingresso!

Essa é uma ilustração do que é o Princípio da Indução Finita que, em Oliveira (2010) é enunciado assim:

Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $p(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:
(a) $p(n_0)$ é verdadeira;
(b) se $p(n)$ é verdadeira, então $p(n+1)$ também é verdadeira para todo $n \geq n_0$

Em outras palavras:
(a) prove que a propriedade é válida para o primeiro número inteiro não negativo da sequência
(b) suponha que a propriedade vale para um n qualquer e use isso (que é chamado de hipótese de indução) para provar que vale para $n+1$. Ao conseguir isso, pelo Princípio da Indução Finita que a propriedade é válida para qualquer número inteiro da sequência dada.

Questões Resolvidas

Questão 01 (Fomin 2012)

Prove que, para qualquer número natural n, $2^n > n$
(Obs: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

Resolução Vamos provar que a propriedade é válida para $n = 1$. De fato, para $n = 1$, temos que $2^1 = 2 > 1$.

Supondo que $2^n > n$ (hipótese de indução), vamos mostrar que a propriedade é válida para $n+1$, i.e., que $2^{n+1} > n+1$. Multiplicando os dois lados da desigualdade por 2, temos $2^{n+1} > 2n$ Mas $2n = n + n$ e como $n \geq 1$, temos $2n = n + n \geq n + 1$. Logo, $2^{n+1} > n + 1$. Assim, a propriedade é valida para qualquer natural.

Questão 02 (Fomin 2012)

Prove que, para qualquer número natural $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9.
(Obs: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Resolução Vamos provar que a propriedade é válida para $n = 1$. De fato, para $n = 1$, temos que $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \times 4$.

Supondo que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9 (hipótese de indução), vamos mostrar que a propriedade é válida para $n + 1$, i.e., que $(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3$ é divisível por 9.

Desenvolvendo $(n+3)^3$, obtemos $n^3+9n^2+27n+27 = n^3+9(n^2+3n+3)$. Assim, temos que $(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3 = (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + n^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$ $= [n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3] + 9(n^2 + 3n + 3)$. Pela hipótese de indução, a parcela

$[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$ é divisível por 9, logo, a soma é divisível por 9 e a propriedade é valida para qualquer natural.

Questão 03 (Fomin 2012)

Prove que, para qualquer número natural $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, n = 2, 3, \ldots$

Resolução Vamos provar que a propriedade é válida para $n = 2$. De fato, para $n = 2$, temos que:

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{14}$$

Supondo que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \text{ (hipótese de indução)}$$

vamos mostrar que a propriedade é válida para $n+1$, i.e., que:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}$$

De fato:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = [\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}] + [\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}].$$

Como a primeira parcela, pela hipótese de indução é maior que $\frac{13}{24}$, basta mostrar que a segunda parcela não é negativa. Temos:

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

e a propriedade é valida para qualquer natural.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Hefez, Abramo. *Indução Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

Oliveira, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Fases 02 e 03 - Aula 03

Tema da aula: Princípio da casa dos pombos.

Enunciado Imagine que você tem $n+1$ objetos para colocar em n gavetas. O que acontecerá? Ao menos uma gaveta terá mais que um objeto. Da mesma forma, podemos apresentar o Princípio como tendo $n+1$ pombos para n casas. Pelo menos uma casa terá mais que um pombo. Observe um exemplo do uso do PCP na resolução de um problema.

Exemplo (Fomin 2012)
Mostre que, em qualquer grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo.

Resolução Cada pessoas pode conhecer de 0 a 4 pessoas no grupo. Observe que se uma pessoa conhece as outras quatro pessoas, não pode haver alguém que não conheça ninguém. Assim, os valores 0 e 4 não podem ocorrer ao mesmo tempo. Logo, o número de conhecidos no grupo é $(0, 1, 2, 3)$ ou $(1, 2, 3, 4)$. Considerando que essas quantidades são as casas e as pessoas na festa são os pombos, há 4 casas para 5 pombos, assim, pelo **PCP**, pelo menos uma casa terá mais que um pombo, ou seja, pelo menos duas pessoas têm o mesmo número de conhecidos.

Questões Resolvidas

Questão 01 (OBM 2009)

Um campeonato de xadrez de 7 rodadas, com 4 jogos por rodada, tem 8 participantes, cujas pontuações por jogo são as usuais: um ponto por vitória, meio ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Cada par de jogadores se enfrenta exatamente uma vez.

a) Ao término da terceira rodada, é possível que todos os jogadores tenham pontuações distintas?

Resolução Após três rodadas, um jogador pode ter no máximo 3 pontos e no mínimo 0. As possíveis pontuações de 0 a 3 são: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$. São 7 pontuações e 8 jogadores. Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos, sendo os pontos as casas e os jogadores os pombos, dois jogadores deverão ter a mesma pontuação.

Questão 02 (Oliveira 2010)

Em uma reunião há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.

Resolução Cada pessoa pode conhecer $0, 1, 2, \ldots, n-1$ das outras pessoas. Observe que não é possível que uma pessoa conheça 0 e outra conheça $n-1$ pessoas ao mesmo tempo. Assim, há n pessoas (pombos) para $n-1$ número de conhecidos (casas). Logo, pelo Princípio da casa dos Pombos, duas pessoas têm o mesmo número de conhecidos.

Questão 03 (Fomin 2012)

Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Resolução O resto da divisão por 11 pode assumir 11 valores (de 0 a 10). Desta forma, como há 12 números (pombos) e 11 possíveis restos da divisão por 11 (casas), pelo Princípio da Casa dos Pombos, dois números deixam o mesmo resto na divisão por 11 e a diferença entre eles é divisível por 11.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Oliveira, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Fases 02 e 03 - Aula 04

Tema da aula: Invariantes

Enunciado Invariantes são coisas que não mudam, não variam. Por exemplo, a paridade da soma de certa quantidade de números ou o algarismo das unidades em determinadas potências. Perceber na questão algo que seja invariante é a chave para a resolução das mesmas. Veja os exemplos das questões resolvidas:

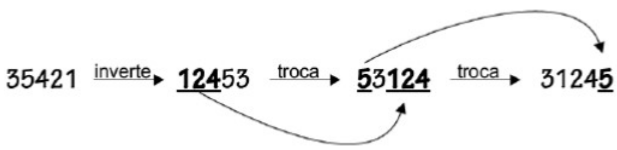
Questões Resolvidas

Questão 01 (Banco de Questões da OBMEP 2012)

O troca-inverte é uma brincadeira com números em que há dois tipos de movimentos:

troca: separar o número em dois grupos e trocar a ordem desses grupos; inverte: escrever o número na ordem inversa.

Por exemplo, começando com 35421 podemos obter 31245, como mostrado abaixo.



Por que, no troca-inverte, começando com 123456 é impossível obter 243156?

Resolução Os movimentos de troca e inverte têm a seguinte característica: as extremidades continuam sendo extremidades ou terminam vizinhas. Observe que o movimento inverte apenas troca a posição das extremidades entre direita e esquerda. Já o movimento troca, irá unir as extremidades tornando-ás vizinhas. Um novo movimento de troca, ou manterá os números vizinhos ou os tornará extremidades. No caso, como 1 e 6 são inicialmente extremidades e terminam como números que não são extremidades nem vizinhos, começando com 123456 é impossível obter 243156.

Questão 02 (Banco de Questões da OBMEP 2011)

Paulinho escreveu um número no quadro e depois inventou a seguinte brincadeira: escolhe dois algarismos do número que sejam ambos pares ou ambos ímpares e troca cada um deles pela sua média aritmética. Ele repete este processo quantas vezes quiser, desde que o número disponha de dois algarismos com a mesma paridade. Por exemplo, ele escreveu o número 1368 e obteve a sequência na qual foram destacados os algarismos que serão trocados no passo seguinte.

$$1\ 3\ 6\ 8 \longrightarrow 1\ 3\ 7\ 7 \longrightarrow 4\ 3\ 4\ 7 \longrightarrow 4\ 5\ 4\ 5$$

Com esta brincadeira, é possível obter o número 434434 a partir do número 324561?

Resolução Observe que calcular a média aritmética entre dois números não altera a soma dos mesmos. Assim, a soma dos algarismos do número inicial deve ser a mesma do número final. No caso, $4+3+4+4+3+4 = 22$ e $3+2+4+5+6+1 = 21$. Logo, não é possível obter o número 434434 a partir do número 324561.

Questão 03 (Fomin 2012)

Os números $1, 2, 3, \ldots, 1989$ estão escritos em um quadro negro. pode-se apagar dois números quaisquer e substituí-los pela sua diferença. esta operação pode ser usada para se obter uma situação onde todos os números no quadro são zeros?

Resolução Como há 995 números ímpares no quadro, somando todos esses números, obteremos um total ímpar. As possíveis diferenças são entre dois números com mesma paridade (par - par ou ímpar - ímpar), resultando em um número par ou entre dois números com paridades distintas (par - ímpar ou ímpar - par), resultando em um número ímpar. Desta forma, a quantidade de números ímpares continua ímpar e a soma final será ímpar. Logo, esta operação não pode ser usada para se obter uma situação onde todos os números no quadro são zeros já que a soma seria par.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Fases 02 e 03 - Aula 05

Tema da aula: Desigualdade Triangular

Enunciado Dado um triângulo ABC, qualquer dos lados é menor que a soma dos outros dois. Através de símbolos, temos:

$$AB < AC + BC$$
$$AC < AB + BC$$
$$BC < AC + AB$$

Veja os exemplos das questões resolvidas:

Questões Resolvidas

Questão 01 (Oliveira 2010)

Duas torres de alturas h_1 e h_2 respectivamente, estão separadas a uma distância d. as torres são amarradas por uma corda APB que vai do topo A da primeira torre para um ponto P no chão entre as torres, e então até o topo B da segunda torre. Qual a posição do ponto P que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

Resolução Considere o reflexo da segunda torre em relação ao chão, sendo o topo neste reflexo representado pelo segmento B'. Ao unir A a B', obtemos o ponto P na intersecção de AB' com o chão. De fato, este é o ponto onde a corda é a menor possível pois, supondo que há um ponto P' no chão onde é menor a corda, temos formado o triângulo $AP'B'$ e pela desigualdade triangular, $AP' + P'B' > AB'$. Mas como $AB' = AB$ e $P'B' = P'B$, temos $AP' + P'B > AB$

Questão 02 (Fomin 2012)

Prove que o comprimento de qualquer lado de um triângulo não é maior do que a metade de seu perímetro.

Resolução Considere o triângulo ABC e o seu lado AB. Pela desigualdade triangular, temos que: $AB < BC + AC$. Somando AB aos dois membros da desigualdade, temos: $2AB < AB + BC + AC$. Multiplicando os dois membro da desigualdade por $\frac{1}{2}$, temos: $AB < \frac{AB+AC+BC}{2}$.

Questão 03 (Fomin 2012)

Prove que a soma das diagonais de um quadrilátero convexo é menor que seu perímetro, mas maior do que a metade de seu perímetro.

Resolução Sejam A, B, C, D os vértices do quadrilátero e E o ponto de intersecção entre as diagonais AC e BD.

Pela desigualdade triangular, temos que $AC < AB + BC$ e $AC < AD + CD$, o que nos dá $2AC < AB + BC + CD + AD$. Da mesma forma, temos que $BD < AB + AD$ e $BD < BC + CD$, o que nos dá $2BD < AB + BC + CD + AD$. A soma das duas desigualdades membro a membro nos dá $2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA)$, i.e., $AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

Por outro lado, $AB < AE + EB$, $BC < BE + EC$, $CD < CE + ED$ e $AD < AE + ED$, o que nos dá $AB + BC + CD + DA < 2(AE + EC + BE + ED)$, ou seja, $\frac{AB+BC+CD+AD}{2} < AC + BD$

Logo, $\frac{AB+BC+CD+AD}{2} < AC + BD < AB + BC + CD + DA$

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Oliveira, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Fases 02 e 03 - Aula 06

Tema da aula: Congruência

Enunciado O estudo da congruência baseia-se no estudo do resto da divisão entre números. Por exemplo, 7 e 10 deixam o mesmo resto quando divididos por 3, assim, dizemos que 7 é congruente a 10 módulo 3. Em símbolos, temos:

$$7 \equiv 10 \pmod 3$$

Em geral, dizemos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m (com $m > 0$ e inteiro) se, e somente se, deixam o mesmo resto nas suas divisões por m

$$a \equiv b \pmod m$$

As propriedades a seguir, disponíveis em Shine (2009), são válidas, considerando que:

$a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$

P1) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

P2) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

P3) $na \equiv nb \pmod{m}$ para todo n natural

P4) $ac \equiv bd \pmod{m}$

P5) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo n natural

Há outras propriedades, para as quais, recomendo a bibliografia a seguir.

Questões Resolvidas

Questão 01 (OBM 2013)

Sobre uma mesa há três pilhas de moedas, uma com 19, outra com 13 e outra com 6 moedas. Ana, Beatriz e Clara resolvem disputar essas moedas fazendo o seguinte: na ordem alfabética de seus nomes, cada uma delas escolhe uma pilha qualquer e a divide em duas pilhas menores. Quem não puder fazer isto sai do jogo e a última a fazê-lo ganha todas as moedas.

a) Após a primeira jogada de Clara, quantas pilhas haverá sobre a mesa?

b) Quem irá ficar com todas as moedas?

Resolução

a) Ana, a primeira a jogar, deixará uma pilha a mais, isto é, quatro pilhas. Beatriz, a segunda, também deixará uma pilha a mais, isto é, cinco pilhas. Após a primeira jogada de Clara, ela deixará também, uma pilha a mais, isto é, seis pilhas.

b) Há no total 19 + 13 + 6 = 38 moedas. Logo, poderão ser feitas 38 pilhas e a pessoa que formar a última pilha, ficará com todas as moedas. Como já há 3 pilhas, resta saber como serão feitas as outras 35. Como a rodada é feita por três jogadoras e $35 \equiv 2 \pmod{3}$, isto significa que após algumas rodadas, ficarão duas pilhas a serem formadas: uma por Ana e outra por Beatriz, que vencerá.

Questão 02 (Shine 2009)

Encontre o resto da divisão de 5^{20} por 26.

Resolução $5^2 \equiv -1 \pmod{26}$ e como $5^{20} = (5^2)^{10}$, temos que $5^{20} \equiv (-1)^{10} \equiv 1 \pmod{26}$. Logo, o resto da divisão de 5^{20} por 26 é 1

Questão 03 (Shine 2009)

Mostre que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

Resolução Temos que $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$. Logo, $(2^6)^{11} \times 2^4 = 2^{70} \equiv (-1)^{11} \times 2^4 = -16 \equiv -3 \pmod{13}$

Por outro lado, $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$. Assim, $(3^3)^{23} \times 3 = 3^{70} \equiv 1^{23} \times 3 = 3 \pmod{13}$.

O que nos dá $2^{70} + 3^{70} \equiv -3 + 3 = 0 \pmod{13}$. Isto é, $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Shine, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

Santos, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

Fases 02 e 03 - Aula 07

Tema da aula: Pequeno Teorema de Fermat

Enunciado Seja p primo de forma que a não seja divisível por p. O Pequeno Teorema de Fermat diz que:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Questões Resolvidas

Questão 01 (Fomin 2012)
Encontre o resto da divisão de 8^{900} por 29.

Resolução Temos que 29 é primo e 8 não é divisível por 29. Assim, segundo o Pequeno Teorema de Fermat, $8^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ e $(8^{28})^{32} = 8^{896} \equiv 1 \pmod{29}$, o que nos dá $8^{896} \times 8^4 = 8^{900} \equiv 1 \times 8^4 = 4096 \equiv 7 \pmod{29}$. Logo, o resto da divisão de 8^{900} por 29 é 7.

Questão 02 (Fomin 2012)
Prove que o número $30^{239} + 239^{30}$ não é primo.

Resolução Vamos mostrar que esse número é divisível por 31. Primeiro, temos que $30 \equiv -1 \pmod{31}$ o que nos dá $30^{239} \equiv -1 \pmod{31}$. Por outro lado, como 31 é primo e 239 não é divisível por 31, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $239^30 \equiv 1 \pmod{31}$. Logo, temos que $30^{239} + 239^{30} \equiv 0 \pmod{31}$, i.e., o número, que não é 31, é divisível por 31 e portanto, não é primo.

Questão 03 (Fomin 2012)
Seja n um número natural não divisível por 17. Prove que $n^8 + 1$ ou $n^8 - 1$ é divisível por 17.

Resolução Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $n^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Mas isso é o mesmo que $n^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$. Ou seja, $n^{16} - 1$ é divisível por 17. Fatorando a expressão, temos $n^{16} - 1 = (n^8 + 1)(n^8 - 1)$ e como 17 é primo, ele divide um dos fatores.

Bibliografia recomendada:

Fomin, Dmitri et al. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Capítulo 9

Referências Bibliográficas

[1] Matéria publicada em http://oglobo.globo.com/educacao/olimpiadas-de-conhecimento-se-disseminam-pelo-pais-7811851

[2] http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/o_que_e/

[3] Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas – OBMEP 2010. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011, disponível em http://www.cgee.org.br/atividades/redirect/7255

[4] MOREIRA, Carlos; MOTTA, Edmilson; TENGAN, Eduardo; AMÂNCIO, Luiz, SALDANHA, Nicolau; RODRIGUES, Paulo. *OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE-MATEMÁTICA, 9 a 16 a.: problemas e resoluções.* SBM. Rio de Janeiro, 2003.

[5] Matéria publicada em http://oglobo.globo.com/sociedade/ciencia/brasileiro-ganha-nobel-da-matematica-13577813

[6] ALVES, E. M. S. (2006). *A ludicidade e o ensino de matemática.* Campinas, SP: Papirus, 2006.

[7] KENDEROV, Petar S. A Short History of the World Federation of National Mathematics Competitions. Mathematics Competitions, Vol22, No2, 2009

[8] http://www.batmath.it/matematica/raccolte_es/ek_competitions/ek_competitions.pdf

[9] STOCKTON, Julianna Connelly. Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a Tradition of Excellence & Creativity, disponível em http://www.math.umt.edu/tmme/vol9no1and2/3_tme_vol9nos1and2_pp37_58.pdf

[10] http://www.imomath.com/index.php?options=Hun&mod=23&ttn=Hungary

[11] Disponível em inglês no site http://www.math-olympiad.com/1st-international-mathematical-olympiad-1959-problems-solutions.htm

[12] ALVES, Washington José Santos. *O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública.* 2010 Dissertação - mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/washington_santos_alves.pdf

[13] http://www.imo-official.org/organizers.aspx

[14] HING, Ling Siu. *The Hungarian Phenomenon.* EduMath, 2002.

[15] Disponível em http://www.imo-official.org/problems.aspx

[16] Disponível em http://www.imo-official.org/documents/RegulationsIMO.pdf

[17] Disponível em http://www.obm.org.br/opencms/competicoes/internacionais/selecao_internacional.html

[18] Informações em http://www.obmep.org.br/noticias.do?id=140

[19] http://www.obmep.org.br/apresentacao.html

[20] http://www.opm.mat.br/opm2013/regulamento

[21] http://www.opm.mat.br/provas

[22] http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/breve_historico/

[23] http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/regulamento/

[24] http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/olimp/obm-l.200312/msg00022.html

[25] http://www.obm.org.br/opencms/semana_olimpica

[26] Revista Eureka!, número 1,p. 2 a 4.Rio de Janeiro, 1998. Disponível em http://www.mat.puc-rio.br/~nicolau/olimp/obm-l.200312/msg00022.html

[27] http://www.obmep.org.br/obmep_em_numeros.html

[28] http://www.obmep.org.br/regulamento.html

[29] http://www.obmep.org.br/apresentacao.html

[30] http://www.obmep.org.br/provas.htm

[31] http://www.poti.impa.br/

[32] http://www.cangurudematematicabrasil.com.br

[33] http://www.obm.org.br/opencms/competicoes/internacionais/selecao_internacional.html

[34] http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/483/2011_00375_AUGUSTO_LACERDA_LOPES_DE_CARVALHO_JUNIOR.pdf?sequence=1

[35] http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/511/2011_00406_MARIO_HENRIQUE_DA_SILVA.pdf?sequence=1

[36] http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/482/2011_00374_RONILDO_LOPES_PONTES.pdf?sequence=1