UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

LUCIA DE FÁTIMA CARNEIRO FERREIRA LESSA

CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA CONSIDERANDO AS ANÁLISES DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ACERCA DO OBJETO MATEMÁTICO ÁREA

Salvador
2017

LUCIA DE FÁTIMA CARNEIRO FERREIRA LESSA

CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA CONSIDERANDO AS ANÁLISES DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ACERCA DO OBJETO MATEMÁTICO ÁREA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências, da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências.

Orientador: Professor Dr. Luiz Márcio Santos Farias.

Salvador
2017

LUCIA DE FÁTIMA CARNEIRO FERREIRA LESSA

CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA CONSIDERANDO AS ANÁLISES DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ACERCA DO OBJETO MATEMÁTICO ÁREA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino Filosofia e História das Ciências. Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências.

Salvador
28 de março de 2017.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias – Orientador
Universidade Federal da Bahia

____

Profa. Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Federal da Bahia

____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Dedico este trabalho
Ao meu esposo, Roberto,
Aos meus filhos, Vanessa e Rafael,
por fazerem parte da minha vida.
À minha mãe, Waldelice e
Ao meu pai, Adalberto (*in memoriam*),
por me proporcionarem um dos bens
mais preciosos, a Educação.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, pela sua onipresença.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias, pelo entusiasmo como abraça as questões da educação; a minha gratidão, pelo acolhimento, pela atenção e pelas orientações, transformando-as em momentos de aprendizagem.

À banca de qualificação, composta pela Profa. Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira e pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pelas importantes contribuições.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, das disciplinas que cursei, de maneira especial, ao professor Prof. Dr. Jonei Barbosa pelas contribuições metodológicas, às Profas. Doutoras Rosiléia Oliveira de Almeida e Ana Paula Guimarães, pelos comentários dedicados à dissertação.

Aos professores visitantes, Profa Dra. Annie Bessot, e Prof. Dr. Gilson de Jesus, agradeço pelos momentos de discussões teóricas.

À Profa. Dra. Catarina Lucas, pelo carinho e apoio nas questões teóricas.

Aos professores doutores, Luc Trouche, Sadoo Almouloud, Paula Baltar e Vera Machado, meus sinceros agradecimentos pelos comentários valiosos sobre o trabalho.

Aos companheiros do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologia – NIPEDICMT, especialmente a Edmo e Eliane, pelas contribuições nos seminários internos, a Roger pela recomendação ao colégio 2.

Aos colegas do curso, pelas trocas de informações acadêmicas, de maneira especial, a Fernando Carneiro, Marcia Azevedo, Rita Cinéia, Rosileia Santana, Sandra Pita, Sueli Prazeres, pela convivência saudável e proveitosa. À Rita Cinéia, meus agradecimentos pelos laços de amizade firmados.

À Anderson Silva, do grupo Pró-Grandezas – PE, agradeço a generosidade em disponibilizar materiais para a pesquisa.

À gestão e coordenação pedagógica dos colégios participantes, meus sinceros agradecimentos pela maneira como fui recebida.

Aos professores, Carlos e João, pela participação e por terem permitido a observação nas suas aulas.

À colega Cecília Carames, parceira de tantos trabalhos, pelo convite em desenvolver a pesquisa no colégio 1.

À minha família, em especial à minha mãe, Waldelice, pelo período que precisei afastar-me do convívio em um momento tão difícil. À minha irmã Virginia, pelo carinho dedicado.

Ao meu esposo, Roberto, e filhos, Vanessa e Rafael, pelo apoio, paciência e compreensão nas minhas ausências.

Por fim, a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente, para a realização desta pesquisa.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo contribuir com o processo de formação docente a partir da construção de um Modelo Epistemológico de Referência, que considera as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático Área e procura integrar elementos deste modelo na bagagem praxeológica de professores de matemática do 6° ano do ensino fundamental. Nosso aporte teórico se alicerça na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e na Teoria das Situações Didáticas. Constituímos a questão de pesquisa, a saber: "como integrar às praxeologias dos professores elementos de um modelo que sirva de referência para o ensino e aprendizagem do objeto matemático Área, no 6° ano do ensino fundamental?" Debruçamo-nos nesta temática sob a ótica dos estudos desenvolvidos na abordagem de Área como grandeza. As pesquisas fundamentadas na TAD surgem das lacunas observadas nas atividades matemáticas desenvolvidas nas instituições em pauta, que inevitavelmente, estão atreladas aos Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) estabelecidos nestas instituições. A investigação se constituiu uma pesquisa de campo, com base em uma abordagem de natureza qualitativa, alicerçada na Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa. O cenário de investigação consiste em duas escolas do município de Salvador, Bahia, com a participação de dois professores do 6º ano do ensino fundamental. Os procedimentos adotados para a produção dos dados foram a análise documental, observação naturalista e entrevista; os registros foram feitos por meio de gravação em áudio e diário de campo. As produções foram complementadas com um questionário. No MED, interrogamos o que está posto; para tanto, analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular do Estado da Bahia, os livros didáticos das escolas participantes e os cadernos dos estudantes. Além disso, observamos as praxeologias dos professores no momento da aula. A constatação de uma incompletude institucional no sistema de ensino analisado, suscitou a necessidade de estudarmos um Modelo Epistemológico de Referência (MER). Nesta perspectiva, desenvolvemos uma revisão de literatura do estudo de Área como grandeza. O MER vem apoiar a proposta de um Modelo Didático de Referência (MDR), concretizado mediante uma engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). No PEP, construiu-se uma Sequência Didática com base nas organizações matemáticas debatidas na revisão de literatura seguida. A investigação permitiu identificar possibilidades de mudanças nas praxeologias matemáticas e didáticas dos docentes no que se refere às escolhas das tarefas e técnicas tomadas para a sequência didática, o que sugere que propostas como esta podem contribuir para a formação de professores. Compreendemos que o resultado deste trabalho responde as questões da pesquisa e completa o estudo a ser institucionalizado para o ensino de Área no 6° ano.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático. Incompletude Institucional. Modelo Epistemológico de Referência. Praxeologias. Área.

ABSTRACT

This research's main goal is to contribute with the process of teacher training through the construction of an Epistemological Model of Reference that considers the incompleteness of institutional work regarding mathematics' object of Area and seeks to integrate elements from this model into the praxeology baggage of teachers of mathematics in the 6th grade of elementary school. Our theoretical approach is based on the Anthropological Theory of Didactic (ATD) and on the Theory of Didactic Situations. We build the research question, namely: how to integrate into the teachers' praxeologies the elements from a model that serves as reference to the teaching and learning of the mathematics' object of Area in the 6th grade of elementary school? We dive into this matter under the optics of the studies developed on Area as largeness. The researches based on ATD appear on the gaps observed in mathematics activities developed in the institutions aforementioned, which are inevitably linked to the Dominant Epistemological Models (DEM) stablished in those institutions. The investigation presented is a field research, based on an approach of qualitative nature, and grounded on the engineering of the Study and Research Path. The investigation scenario consists in two schools located at the city of Salvador, state of Bahia, with the participation of two elementary teachers of the 6th grade. The proceedings chosen to collect data were documental analysis, naturalist observation, and interview. The data was recorded in audio and in a field journal. A survey was used to add material to the data. In DEM, we interrogate what is laid; for that purpose, we analyzed the Brazilian national Curriculum Parameters, the Curriculum Proposition of the state of Bahia, the didactic books of the participating schools and their students' notebooks. Besides that, we observed the praxeologies of the participating teachers in their classrooms. The finding of an institutional incompleteness in the analyzed teaching system raised the need for us to also study an Epistemological Model of Reference (EMR). In this perspective, we developed a literature review of the study of Area as largeness. The EMR enters our work to support a proposal of a Didactic Model of Reference (DMR), developed accordingly to the engineering of the Study and Research Path (SRP). Using the SRP, we built a Didactic Sequence based on the mathematical organizations discussed in the literature review. The investigation allowed us to identify the possibilities for changes in the mathematics and didactic praxeologies of docents regarding the choices of assignments and techniques used in their didactic sequence, which further suggests that proposals as the one aforementioned may contribute for the teachers training. We comprehend that the findings of this work properly respond to the research questions and add to study to be institutionalized for the teaching of Area in the 6th grade.

Keywords: Anthropological Theory of Didactic. Institutional incompleteness. Epistemological Model of Reference. Praxeologies. Area.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O processo da transposição didática.. 24
Figura 2 – Escala dos níveis de co-determinação didática. 30
Figura 3 – Critérios de análise dos documentos institucionais..43
Figura 4 – Quadratura de um círculo. 51
Figura 5– Parte do papiro Rhind (XVII a.C.), exposto no Museu Britânico, em Londres 52
Figura 6 – Decomposição do triângulo isósceles e composição de retângulo.........................52
Figura 7 – Decomposição do trapézio e composição de retângulo...53
Figura 8 – Paralelogramo e triângulos com áreas iguais...54
Figura 9 – Problema da quadratura do círculo desenvolvido algebricamente.........................56
Figuras 10 – Propriedades para caracterizar a grandeza área - Positividade...........................61
Figuras 11 – Propriedades para caracterizar a grandeza área - Aditividade............................61
Figuras 12 – Propriedades para caracterizar a grandeza área – Invariância por isometrias......61
Figura 13 – Articulação entre os quadros..62
Figuras 14 – Topológico – superfície..65
Figuras 15 – Topológico contorno...65
Figuras 16 – Dimensional – superfície..65
Figuras 17 – Dimensional – contorno..65
Figuras 18 – Computacional..66
Figuras 19 – Variacional – Área. 66
Figuras 20 – Variacional – Perímetro..66
Figura 21 – Cálculo da medida de área e perímetro..75
Figura 22 – Cálculo da medida de área e perímetro pela composição e decomposição...........76
Figura 23 – Cálculo da medida de área pela composição e decomposição............................77
Figura 24 – Foto referente ao material didático da atividade 1...78
Figura 25 – Exercício: Identificação de formas de figuras e de áreas diferentes em figuras de mesma forma...78
Figura 26 – Exercício: Compreensão quanto à forma e ao uso de sobreposição....................79
Figura 27 – Exercício: Área enquanto grandeza unidimensional...80
Figura 28 – Figura com formas circulares..81
Figura 29 – Construção do conceito de área através do Cabri II..81
Figura 30 – Construção do conceito de área do retângulo (Imagem 1)..................................82
Figura 31 – Construção do conceito de área do retângulo (Imagem 2)..................................82

Figura 32 – Construção do conceito de área do triângulo..83
Figura 33 – Tarefa para ser analisada...83
Figura 34 – Pentágono irregular...84
Figuras 35 – Pentágono irregular 1..85
Figuras 36 – Pentágono irregular 2..85
Figura 37 – Situação de medida e de comparação utilizando-se material...............................86
Figura 38 – Situação de Produção de superfície...87
Figura 39 – Retângulos construídos no *GeoGebra*. 88
Figura 40 – Quadro com dados das modificações...88
Figura 41 – Retângulos construídos no *GeoGebra*...89
Figura 42 – Quadro com dados das modificações...89
Figura 43 – Medida de área do losango utilizando a malha...89
Figura 44 – Jogo do “Dominó de área de figuras planas”.. 90
Figura 45 – Jogo da “Trilha das formas”...90
Figura 46 – Competências e Habilidades para área de figuras planas – eixo 1......................100
Figura 47 – Competências e Habilidades para área de figuras planas – eixo 3......................100
Figura 48 – A contextualização das Grandezas e das Medidas – Competências e Habilidades para área de figuras planas – eixo 4... 101
Figura 49 – Competências e Habilidades para área de figuras planas..................................101
Figura 50 – Tarefa do LD1: Calcular medidas de área da uma região plana........................107
Figura 51 – Grandeza Superfície..111
Figura 52 – Múltiplos e submúltiplos do m²...111
Figura 53 – Medida de uma superfície: área de uma região plana...112
Figura 54 – O momento do trabalho da técnica...113
Figura 55 – Medida da Área de uma região retangular...114
Figura 56 – Medida da Área de uma região quadrada...114
Figura 57 – Medida da Área de uma região limitada por um paralelogramo 115
Figura 58 – Medida da Área da região triangular..116
Figura 59 – Medida da Área da região limitada por um trapézio..116
Figura 60 – Medida da Área da região limitada por um losango..117
Figura 61 – Esquema desenvolvido pelo professor..129
Figura 62 – Modelo de superfícies diferentes que apresentam a mesma medida de Área.....148
Figura 63 – Exemplos de possíveis composição e decomposição de figuras com dois triângulos grandes do Tangram..152

Figura 64 – Exemplos de composição e decomposição de figuras com 3 peças do Tangram e algumas possíveis posições...154
Figura 65 – Exemplos de Situação de Produção e Comparação de Superfície elaborada por dois estudantes da turma em que foi aplicada a sequência didática 163
Figura 66 – Exemplos de produção de superfícies, medidas e comparação de áreas elaborada por dois estudantes da turma em que foi aplicada a sequência didática 167

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Categorização e critérios de análise da Organização Didática..............................44
Quadro 2 – Estrutura organizacional regional dos livros didáticos LD1 e LD2....................104
Quadro 3 – Tarefas contempladas nos livros analisados...106
Quadro 4 – Organização Matemática do exemplo adotado pelo LD1.................................107
Quadro 5 – Organização Matemática do exemplo adotado pelo LD2.................................108
Quadro 6 – Tarefa 1 do professor 1...119
Quadro 7 – Tarefa 2 do professor 1...121
Quadro 8 – Tarefa 3 do professor 1...122
Quadro 9 – Tarefa 4 do professor 1...122
Quadro 10 – Tarefa 5 do professor 1...123
Quadro 11 – Tarefa 6 do professor 1...124
Quadro 12 – Tarefa 7 do professor 1...124
Quadro 13 – Tarefa 8 do professor 1...126
Quadro 14 – Tarefa 9 do professor 1...126
Quadro 15 – Tarefa 1 do professor 2...129
Quadro 16 – Tarefa 2 do professor 2...130
Quadro 17 – Tarefa 3 do professor 2...131
Quadro 18 – Tarefa 4 do professor 2...132
Quadro 19 – Tarefa 5 do professor 2...133
Quadro 20 – Tarefa 6 do professor 2...134
Quadro 21 – Tarefa 7 do professor 2...134
Quadro 22 – Tarefa 8 do professor 2...135
Quadro 23 – Tarefa 9 do professor 2...135
Quadro 24 – Tarefa do Estudante 1...138
Quadro 25 – Tarefa do Estudante 2...138
Quadro 26 – Tarefa do Estudante 3...139
Quadro 27 – Tarefa do Estudante 4...139
Quadro 28 – Tarefa do Estudante 5...140
Quadro 29 – Medidas das áreas das figuras da tarefa 4...161

LISTA DE SIGLAS

LD - Livro Didático

MDR - Modelo Didático de Referência

MED - Modelo Epistemológico Dominante

MER - Modelo Epistemológico de Referência

OD - Organização Didática

OM - Organização Matemática

OMG - Organização Matemática Global

OML - Organização Matemática Local

OMLRC - Organização Matemática Local Relativamente Completa

OMP - Organização Matemática Pontual

OMR - Organização Matemática Regional

PC - Proposta Curricular do Estado da Bahia

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PEP - Percurso de Estudo e Investigação

PEP - Percurso de Estudo e Pesquisa

P1 - Professor 1

P2 - Professor 2

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

PISA - Programme for International Student Assessment

PPP - Projeto Político Pedagógico

TAD - Teoria Antropológica do Didático

TSD - Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..16
1.1 QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS..16
1.1.1 Objetivo Geral 17
1.1.1.1 Objetivos Específicos..17
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO 21
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS...23
2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)..23
2.1.1 As relações institucionais na TAD..24
2.1.2 Noção de praxeologia...25
2.1.3 Organização matemática.. 26
2.1.4 Organização didática... 28
2.1.5 Níveis de co-determinação..30
2.1.6 Objetos ostensivos e não-ostensivos..31
2.2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD) 31
2.2.1 Situação didática e situação adidática...32
2.3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO VERSUS TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS...34
2.4 ARTICULAÇÃO ENTRE OS CONSTRUTOS TEÓRICOS E OS OBJETIVOS DA PESQUISA..37
2.5 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS...........39
2.5.1 Caracterização da pesquisa: campo, sujeito e produção de dados...........................40
2.5.1.1 Análise preliminar dos documentos...42
2.5.1.2 Análise preliminar da observação naturalista...45
2.5.2 Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) 46
3 CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA.........49
3.1 ESTUDO DA GÊNESE PARA ÁREA...49
3.2 UMA POSSÍVEL “RAZÃO DE SER” DO SABER DE REFERÊNCIA, ÁREA.............59
3.3 ÁREA COMO GRANDEZA...60
3.3.1 Contribuições para o Estudo de Área como Grandeza..61
3.3.2 Situações que dão Sentido ao Conceito de Área..63
3.3.3 Outras Contribuições Referentes ao Estudo de Área...67
3.3.3.1 Padrões de Tarefas Propostas pelos(as) Pesquisadores (as)..75

3.4 CONCLUSÃO E APORTES SOBRE A CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA 91
4 **ANÁLISE INSTITUCIONAL**....93
4.1 ANÁLISE INSTITUCIONAL DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS....93
4.2 ANÁLISE INSTITUCIONAL DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DA BAHIA....98
4.3 ANÁLISE INSTITUCIONAL DE LIVROS DIDÁTICOS....103
4.3.1 Análise Praxeológica da Organização Matemática dos Livros Didáticos....106
4.3.2 Análise Praxeológica da Organização Didática do Livro Didático Aprovado pelo PNLD/2013....110
4.4 PRAXEOLOGIAS DOS PROFESSORES....118
4.4.1 Praxeologias Empregadas pelos professores 119
4.4.1.1 Praxeologias Empregadas pelo Professor da Escola 1....119
4.4.1.2 Praxeologias Empregadas pelo Professor da Escola 2....128
4.5 PRAXEOLOGIAS DOS ESTUDANTES....137
4.6 PRINCIPAIS RESULTADOS DESTE ESTUDO E SEUS APORTES PARA A IDENTIFICAÇÃO E/OU CONSTRUÇÃO DOS DIFERENTES MODELOS....141
5 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA....146
5.1 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA / MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA....146
5.2 A EXPERIMENTAÇÃO....147
5.2.1 As Sessões de Estudo....147
5.3 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA....149
5.3.1 Análise a Priori da Atividade 1....150
5.3.2 Análise a Priori da Atividade 2.... 155
5.3.3 Análise a Priori da Atividade 3....157
5.3.4 Análise a Priori da Atividade 4....160
5.3.5 Análise a Priori da Atividade 5....162
5.3.6 Análise a Priori da Atividade 6....164
5.3.7 Análise a Priori da Atividade 7....166
5.3.8 Análise a Priori da Atividade 8....167

5.4 ANÁLISE COMPARATIVA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA, COM O MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE 169
5.5 ANÁLISE COMPARATIVA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA COM O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA / MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA..171
5.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA FASE EXPERIMENTAL....................................173
5.6.1 Uma síntese da nossa análise sobre a fase experimental dos professores...............174
6 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS DE FUTURAS PESQUISAS......................176
6.1 A IMPORTÂNCIA DOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS ADOTADOS..176
6.2 O PAPEL DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA..............................178
6.3 PRINCIPAIS RESULTADOS DA PESQUISA..180
6.3.1 Implicações e Limitações..183
6.4 PERSPECTIVAS FUTURAS 184
REFERÊNCIAS..185
APÊNDICES..190
APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO..................190
APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES..191
APÊNDICE C - TRANSCRIÇÃO DAS AULAS DOS PROFESSORES.............................192
APÊNDICE D - TRANSCRIÇÕES DA ENTREVISTA...206
APÊNDICE E - TRECHOS DA TRANSCRIÇÃO DAS SESSÕES DE ESTUDO..............207
ANEXOS..209
ANEXO A - SOLICITAÇÃO DE VISITA E DE OBSERVAÇÕES.....................................209
ANEXO B - SEQUÊNCIA DIDÁTICA..210

1 INTRODUÇÃO

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)[1], que analisa o desempenho dos estudantes na disciplina matemática, coloca o Brasil nas últimas posições num ranking mundial entre os países participantes. Também o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)[2], por intermédio da Prova Brasil, não tem tido resultados[3] positivamente expressivos nas avaliações de matemática. O documento oficial nacional (BRASIL/INEP, 2011) sobre o desempenho dos estudantes brasileiros, no que concerne ao tema área, detectou baixos resultados. Esse fato indica que o ensino e a aprendizagem do tema são elementos institucionais, mas os resultados avaliativos evidenciam que existem entraves ao ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Uma característica importante do tema é a relevância social, sobretudo por se fazer presente nas situações relacionadas a outros campos do conhecimento (BRASIL, 1998). Entretanto, os resultados avaliativos ratificam o que diversas pesquisas têm demonstrado, que os processos de ensino e de aprendizagem do tema área é permeado por contradições e dificuldades (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; BALTAR, 1996; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; PESSOA, 2010; CARVALHO, 2012).

É possível que os problemas ocasionados nas avaliações de larga escala estejam relacionados à maneira como esse tema tem sido proposto ou abordado nas instituições escolares. As questões elencadas, motivaram a escolha de adotar área como objeto de estudo desta investigação.

1.1 QUESTÕES DE PESQUISA E OBJETIVOS

Constituímos a questão de pesquisa, a saber: Como integrar às praxeologias dos professores elementos de um modelo que sirva de referência para o ensino e aprendizagem do objeto matemático área, no 6° ano do ensino fundamental?

---

[1] O PISA é um programa de avaliação internacional padronizada aplicado a alunos de 15 anos. Essa avaliação explora, além do domínio curricular, conhecimentos relevantes necessários à vida adulta. Fonte: *<http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>. Acesso em: 12 jun. 2014.*

[2] O SAEB (Aneb/Anresc) é uma avaliação nacional aplicada a estudantes do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, com o foco em resolução de problemas. Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc>. Acesso em: 12 jun. 2014.

[3] Dados obtidos através do Índice e Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), correspondentes à última avaliação (2013). Fonte: <http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=799516>. Acesso em: 15 fev. 2015.

Debruçar-se sobre essa problemática é querer encontrar respostas às questões que geram as dificuldades de ensino e de aprendizagem do objeto matemático área, no 6° ano.

Nesse sentido, apresentamos os seguintes Objetivos:

1.1.1 Objetivo Geral

Contribuir com o processo de formação docente a partir da construção de um Modelo Epistemológico de Referência, que considera as incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático área e procura integrar elementos deste modelo na bagagem praxeológica de professores de matemática do 6° ano do ensino fundamental.

1.1.1.1 Objetivos Específicos

- Analisar os documentos institucionais para o ensino de área no 6° ano do ensino fundamental;
- Analisar o processo de institucionalização do objeto matemático área em diferentes instituições, mais especificamente no 6º ano do ensino fundamental;
- Observar as praxeologias dos professores participantes no que diz respeito ao tema área, no 6° ano do ensino fundamental;
- Construir praxeologias com os professores participantes em torno do objeto matemático área.

Na sequência, trazemos uma breve explanação dos fundamentos teóricos e metodológicos que sustentam o estudo realizado nesta pesquisa, para melhor esclarecer os propósitos deste trabalho ao leitor.

Nesta investigação, nosso estudo se debruça sobre a ótica das pesquisas embasadas na Didática da Matemática, acolhendo as conjecturas de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Facco (2003) e Ferreira (2010), entre outros, que apresentam uma abordagem de área como grandeza, indicando a construção das relações entre os aspectos geométricos e numéricos. As pesquisas em questão apontam que as concepções sobre as grandezas geométricas são fundamentadas nas organizações conceituais de três quadros: geométricos, numéricos e das grandezas. Nas suas pesquisas, Douady e Perrin-Glorian (1989) adotam a mudança de quadro como o meio de obter formulações diferentes para um problema no ato da elaboração da tarefa. As autoras consideram importante que escolhas apropriadas sejam feitas para cada tipo de situação, seja no campo geométrico, numérico ou das grandezas, de tal modo que as visões dos estudantes sobre o tema se ampliem, não dando chance para concepções equivocadas.

A pesquisa se fundamenta na Teoria Antropológica do Didático (TAD), idealizada por Yves Chevallard (1999), pelo viés da Teoria das Situações Didáticas (TSD) concebida por Brousseau (1986). A TSD teoria tem como objeto central as interações didáticas estabelecidas entre o professor, o estudante e o saber (ALMOULOUD, 2007), enquanto a TAD (CHEVALLARD, 1999) situa-se no âmbito da antropologia do conhecimento, tendo interesse pelas condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, ampliando seu olhar no sujeito, instituição e saber, constituindo-se um instrumento importante para a análise das práticas docentes. As teorias adotadas dialogam entre si e compactuam com a ideia de que os fenômenos do ensino da matemática podem ter sua gênese em problemas institucionais (ALMOULOUD, 2007).

O construto teórico fundamental da Teoria Antropológica do Didático (TAD) é a praxeologia – palavra composta por dois termos: *práxis* (prática) e *logos* (razão), descritas por meio de quatro noções: tipo de tarefa (T); as técnicas (τ) para resolver as tarefas, descritas e justificadas através da tecnologia (θ), que, por sua vez, é justificada por uma teoria (Θ). Essas noções permitem modelar as práticas sociais e as atividades matemáticas, considerando que "toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas" (ALMOULOUD, 2007, p. 114). Conforme Chevallard (1999), para que uma técnica possa existir em uma instituição, deve ser compreensível, legível e justificada; essa justificativa é denominada pelo autor de tecnologia da técnica. Nesse segmento, toda tecnologia necessita ser justificada. Fenômeno designado de teoria da técnica (ALMOULOUD, 2007).

Segundo Almouloud (2007), "a relação institucional que se estabelece entre uma instituição (I) e um objeto (O) depende das posições que estes ocupam nessa instituição e do conjunto de tarefas que essas pessoas devem cumprir usando determinadas técnicas" (CHEVALLARD, 1992 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 114). Chevallard (1999) concebe uma relação institucional, quando um objeto (O) existe para pelo menos uma instituição (I); já a relação pessoal, quando um objeto (O) existe para pelo menos uma pessoa (X). Podemos alegar que há distintas relações de pessoas (professores / estudantes) com o objeto (área) que fazem parte das diferentes instituições (Parâmetros Curriculares Nacionais, Proposta Curricular da Bahia, livro didático, aula do professor, caderno dos estudantes). Assim, nesta pesquisa, focamos o nosso olhar nas relações institucionais envolvidas nas instituições analisadas e na institucionalização[4] do objeto matemático área, sob o ponto de vista de Chevallard (1999).

As praxeologias integradas a um saber matemático, são do tipo[5]: organização matemática (OM) e organização didática (OD). A OM estuda a situação identificada nas tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, enquanto a OD observa a maneira como estas situações foram constituídas, por intermédio de momentos de estudo. A noção de “momento” foi concebida por Chevallard (1999) para delinear uma OD, sendo estruturada em seis etapas[6].

A TAD também idealiza as propostas de estudo integradas às atividades sociais e às deliberações das instituições, o que constitui uma reprodução dos níveis de representação curricular nos processos de ensino e aprendizagem. Estas questões nos transportam à escala dos níveis de co-determinação didática (civilizações, sociedade, escola, pedagogia, disciplina, domínio, setor, tema e assunto) (CHACÓN, 2008). No âmbito das civilizações, ressaltam-se as questões globais sobre o objeto matemático e o paradigma dominante desse objeto. No campo da sociedade, consideram-se as políticas públicas e os programas de ensino; no nível escolar, avaliam-se as políticas de gestão; no nível da pedagogia, observam-se as questões metodológicas referentes ao ensino e à aprendizagem; no nível da disciplina, revelam-se os conteúdos praxeológicos a serem ensinados. Ao passo que domínio, setor, tema e assunto, compõem o estudo específico da disciplina. Esses níveis fazem parte das nossas análises.

Para obter ferramentas com vistas a uma apreciação institucional, Chevallard (1999) e Lucas et al (2014), classificam as praxeologias, de acordo com o grau de complexidade dos seus componentes: Organização Matemática Pontual (OMP), é considerado apenas um tipo de tarefa; Organização Matemática Local (OML), deriva da integração de várias praxeologias pontuais que atendem a mesma tecnologia; Organização Matemática Regional (OMR), é obtida com a articulação de praxeologias locais referentes à mesma teoria matemática; e Organização Matemática Global (OMG) surge da junção de diferentes praxeologias regionais, a partir da integração de diversas teorias. Fazendo uma analogia com os níveis de co-determinação, identificamos que estes componentes se adéquam aos níveis da disciplina (domínio, setor, tema e assunto).

---

[4] Posteriormente, traremos uma explanação sobre este termo.
[5] Em alguns trechos utilizaremos as siglas OM e OD, para nos referirmos aos termos.
[6] Trataremos desses momentos no decorrer da pesquisa.

As pesquisas sob o viés da TAD não se constituem por si só, nascem das lacunas observadas nas atividades matemáticas em determinadas instituições, que, inevitavelmente, estão atreladas aos Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) estabelecidos nessas instituições (BOSCH; GASCÓN, 2010). Bosch e Gascón (2010) expõem que, para transformar um problema didático em um problema de pesquisa no campo da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar o Modelo Epistemológico Dominante (MED) (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013), que coloca o objeto em jogo. Neste modelo, questionamos o que está posto, e, para tanto, analisamos documentos que são referência para o fazer didático como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a Proposta Curricular do Estado da Bahia (BAHIA, 2013) o livro didático e cadernos dos estudantes. O MED possibilita a observação nas escolas pesquisadas, uma vez que, as práticas didáticas são norteadas pelos documentos supracitados.

Nessa perspectiva, consideramos um Modelo Epistemológico de Referência (MER) (FARRAS, BOSCH; GASCÓN, 2013), por intermédio de uma revisão de literatura do objeto matemático área, para sustentar o Modelo Didático de Referência (MDR); este se materializa por meio de uma engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) (BOSCH; GASCÓN, 2009) para examinar a forma como as instituições envolvidas na problemática didática interpretam o saber matemático em jogo, e como será desenvolvido um novo modelo de praxeologias matemáticas.

O trabalho se constitui através de uma pesquisa de campo com base em uma abordagem de natureza qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Os sujeitos envolvidos na investigação são dois professores de matemática de duas escolas do município de Salvador, no estado da Bahia. Empregamos como procedimento de coleta de dados a análise documental; a entrevista, para conhecer a concepção dos educadores sobre o tema; e a observação naturalista[7] das aulas dos professores.

O Percurso de Estudo e Pesquisa concebido busca responder questões no contexto de um sistema didático S (X, Y, Q) (CHEVALLARD, 2009b), em que (X) são dois professores participantes da pesquisa, (Y) é a pessoa responsável por auxiliar o estudo, ou seja, a pesquisadora, e (Q) a questão geratriz, a saber: “o que tenho que ‘ensinar’ sobre área aos alunos do 6º ano do ensino fundamental?”.

O Percurso de Estudo e Pesquisa envolve etapas que se formam a partir de sessões de estudo com os professores participantes da pesquisa. Neste percurso, a proposta é construir

[7] Neste tipo de observação, o pesquisador não participa nem interfere na aula, para não comprometer a produção dos dados.

uma Sequência Didática (SD) com os docentes mencionados, com base nas organizações matemáticas tratadas no MER.

As sessões de estudo foram distribuídas em cinco momentos, relacionados a seguir:

- Na primeira sessão de estudo, apresentamos a proposta da investigação ao grupo de professores, além de um breve histórico da origem do tema.
- Na segunda sessão de estudo, foi feita a exploração dos tipos de tarefas com as respectivas técnicas de resolução.
- Na terceira sessão de estudo ocorreu a constituição do ambiente tecnológico teórico para validar as técnicas (CHEVALLARD, 1999), em que se discutiu sobre o Modelo Epistemológico de Referência adotado na pesquisa.
- A quarta sessão de estudo é composta de um trabalho com a técnica considerando o MER discutido.
- Na quinta sessão de estudo, foi empreendida a seleção de tarefas desenvolvidas nas sessões anteriores e a organização da sequência didática. Em seguida, foi feito o refinamento das tarefas pelos professores e pela pesquisadora.

Esta etapa da pesquisa foi concluída com a aplicação[8] da Sequência Didática adotada.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Estruturamos o texto em seis capítulos, brevemente apresentados neste subtópico.

No primeiro capítulo, intitulado de Introdução, buscamos dar uma noção geral do trabalho, expondo elementos que justificassem a escolha do tema. Apresentamos também as questões problemáticas e os objetivos da pesquisa, além de uma breve explanação sobre os fundamentos teóricos e metodológicos; expomos, ainda, a estrutura da dissertação.

No segundo capítulo, cujo título é Fundamentos Teóricos e Metodológicos, apresentamos o referencial teórico da investigação. Neste capítulo, destacamos os construtos teóricos fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa, tratando, sobretudo, da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1999), e da Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986), com vistas a atender os objetivos propostos na pesquisa, assim como para dar suporte aos procedimentos metodológicos adotados na investigação.

[8] A aplicação foi feita por um dos professores participantes da pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos a Construção de um Modelo Epistemológico de Referência para analisar as pesquisas desenvolvidas sobre o conceito de área. Neste tópico, elaboramos um mapeamento dos elementos pautados no contexto histórico e epistemológico do objeto matemático área, na tentativa de conhecer sua gênese e a evolução do tema ao longo dos tempos, sem pretensões de contemplar a vasta literatura. Também consideramos o processo de ensino do conceito de área sob o ponto de vista de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002), alguns dos pilares conceituais desta dissertação.

No quarto capítulo, denominado de Análise Institucional, desenvolvemos uma apreciação documental dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), da Proposta Curricular do Estado da Bahia (BAHIA, 2013), de dois livros didáticos e de cadernos dos estudantes à luz da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), e do enfoque do conceito de Área adotado na investigação. Além disso, apresentamos uma análise das praxeologias dos professores de matemática das escolas pesquisadas. Encerramos o capítulo com uma síntese deste estudo e dos seus aportes, para identificação e/ou construção dos diferentes modelos (Modelo Epistemológico de Referência, Modelo Epistemológico Dominante e Modelo Didático de Referência).

O quinto capítulo versa sobre o Modelo Epistemológico de Referência / Modelo Didático de Referência consolidado por intermédio de um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. Nesta parte, discorremos a respeito do Percurso de Estudo da Pesquisa, notadamente sobre a construção e análise de um Modelo Epistemológico de Referência como resposta às restrições identificadas nas instituições analisadas. Nesta fase da investigação, ocorreu a experimentação com sessões de estudo, momento em que se deu a construção e refinamento das tarefas desenvolvidas para compor a sequência didática. Ademais, empreendemos uma análise a priori das tarefas e uma análise comparativa da sequência didática proposta com os referidos modelos (MED, MER/MDR).

No sexto e último capítulo, apresentamos as considerações finais, nas quais explicitamos a respeito da importância dos fundamentos teóricos e metodológicos adotados, abordamos sobre o papel do Modelo Epistemológico de Referência e os principais resultados da pesquisa e tecemos sugestões quanto às perspectivas de futuras pesquisas.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Apresentamos como aporte teórico desta pesquisa duas teorias: a Teoria Antropológica do Didático[9] (TAD), proposta por Chevallard (1999), e a Teoria das Situações Didáticas (TSD), idealizada por Brousseau (1986), com vistas ao atendimento dos objetivos propostos na pesquisa, assim como para dar suporte aos procedimentos metodológicos adotados na investigação. Neste capítulo abordamos as teorias que fundamentam a pesquisa, delineando a metodologia empregada e as ferramentas metodológicas.

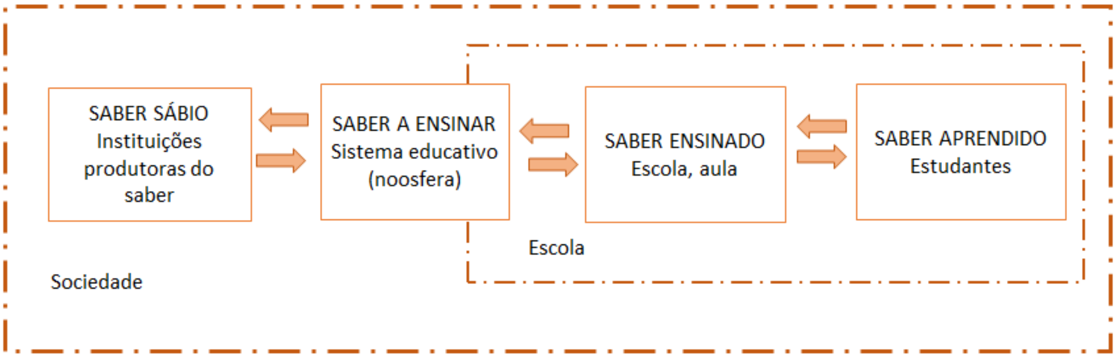
A didática da matemática é um campo de estudo e pesquisa que tem por pretensão a exploração das relações entre o ensino e a aprendizagem dos diversos domínios[10] matemáticos pelos estudantes. A exploração dessas relações e as referências teóricas exercem papel importante, pois permitem interpretar, compreender e fundamentar os fenômenos que emergem dos processos de ensino e aprendizagem.

2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) situa-se no âmbito da antropologia do conhecimento, apresentando interesse pelas condições de possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, com o olhar no sujeito, instituição e saber (CHEVALLARD, 1999). A TAD foi articulada a partir da Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991), que cita a importância de identificar o saber científico produzido pelos matemáticos e pesquisadores da área, o saber matemático a ensinar identificado nos programas e documentos oficiais e nos livros didáticos, o saber matemático ensinado pelos professores e o saber aprendido pelos estudantes. Esses saberes são ilustrados na figura a seguir.

[9] Doravante, denominamos de TAD.
[10] Nesta pesquisa nos referimos aos domínios: numéricos, geométricos e o das grandezas.

Figura 1 – O processo da transposição didática (CHEVALLARD, 1991).



Fonte: (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 16) Adaptado pela pesquisadora (2017).

Chevallard (1999) e Almouloud (2007) expõem que os diferentes saberes estão no centro da problematização didática. Segundo os autores, os saberes (sábio, a ensinar, ensinado e aprendido) tornam-se objeto a partir do momento em que os objetos se tornam conhecidos pelas instituições (PCN, Livro didático, sala de aula, dentre outros). Chacón (2008) acrescenta que esses saberes não são independentes das instituições nas quais existem.

2.1.1 As relações institucionais na TAD

Do ponto de vista da TAD (CHEVALLARD, 1999), todo conhecimento nasce em certo momento, em uma dada sociedade, ancorado em uma determinada instituição. Na TAD, o termo instituição tem um sentido amplo: pode ser mencionado como um dispositivo social que impõe aos sujeitos formas de fazer e de pensar, próprias de cada instituição (CHEVALLARD, 1999). A estrutura de uma instituição não é construída de maneira homogênea, mas heterogênea, por existirem distintas relações de pessoas (X) com o objeto (O) que fazem parte da instituição (I).

Realizar uma análise institucional incide em estudar as práticas que ocorrem na instituição (I) em torno de um objeto (O) e das relações institucionais (I). Chevallard (1999) considera que a relação pessoal de um objeto (O) do saber existe, quando uma pessoa (X), entra na instituição (I), onde existe esse objeto (O), ou uma instituição (I) o reconhece como existente. Conforme Chevallard (1999), um objeto (O) existe para uma pessoa (X) se existe uma relação pessoal, composta pela relação da pessoa (X) com o objeto (O), representado por R (X, O). Assim como uma relação institucional de (I) com (O) é representado por R (I, O).

Nesta pesquisa, consideramos as pessoas (X) os professores participantes, o objeto (O) adotado é área e a instituição (I) é representada por: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Propostas Curriculares do Estado da Bahia (BAHIA, 2007), os livros didáticos, a aula do professor e os cadernos dos estudantes, isto é, elementos que fazem parte do contexto escolar.

Certas relações entre objeto, sujeito e instituição são permeadas por intencionalidades variadas, do sujeito e das instituições com o objeto, por exemplo: na sala de aula podemos identificar vários fenômenos didáticos provenientes dessas intenções, mediante as relações do professor com a instituição ou com o objeto. Para que um tema matemático, como área, por exemplo, possa ser ensinado ou aprendido, é prudente que se busque estratégias para amenizar as dificuldades que podem surgir nos processos de ensino e aprendizagem.

A TAD fornece suporte a indagações que apoiam uma investigação no sentido de reconhecer "as condições que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada instituição e as restrições que dificultam, entorpeçam ou, inclusivamente, impedem que se pratiquem essas atividades" (LUCAS et al, 2014, p. 3). De maneira geral, podemos afirmar que a superação de dificuldades compreendendo as relações institucionais, integram, pelo menos, os três componentes supracitados: pessoa (X), objeto (O) e instituição (I). Assim sendo, Chevallard (1999) considera que o estudo das relações institucionais R (I, O) é apresentado por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição, e concebe que toda atividade matemática institucional pode ser analisada com base em praxeologias[11].

2.1.2 Noção de praxeologia

Chevallard (1999) afirma que qualquer ação humana pode ser analisada num sistema de praxeologia ou organização praxeológica descrita em termos de quatro noções: tipo de tarefa (T), tipo de técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) (CHEVALLARD, 1999). Essas noções conformam uma organização praxeológica completa [T/τ/θ/Θ], decomposta nos dois blocos: o do saber fazer, *praxe* [T/τ], e o do saber, *logos* [θ/Θ].

[11] Este postulado deve ser completado adiante, com outro que afirma que "toda atividade matemática institucional pode analisar-se em termos de praxeologias matemáticas de complexidades crescente". (BOSCH, M; FONSECA, C; GASCÓN, J. 2004, p. 8-9).

A TAD leva em conta dois aspectos complementares da atividade humana, o aspecto estrutural, que é descrito em termos de praxeologias, e o aspecto funcional, que pode ser analisado por meio dos momentos didáticos. As praxeologias integradas a um saber matemático são do tipo matemáticas e didáticas.

2.1.3 Organização matemática

A organização praxeológica relativa às atividades matemáticas é denominada de organização matemática. Esta se constituiu a partir da junção dos dois níveis de atividades (*práxis* + *logos*). A organização matemática (OM) estuda os tipos de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Compreendemos por tarefa (T), os exercícios, ou os problemas propostos; técnica (τ), a maneira de fazer a tarefa; tecnologia (θ), os discursos que descrevem, explicam e justificam as técnicas usadas; e uma teoria (Θ), o que justifica a tecnologia.

Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 8) afirmam que "toda atividade matemática institucional pode analisar-se em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente". Chevallard (1999), Bosch, Fonseca e Gascón (2004), Almouloud (2007) e Lucas et al (2014), classificam as praxeologias de acordo com o seguinte grau de complexidade:

- Organização Matemática Pontual (OMP), quando são formadas por apenas um tipo de tarefa;
- Organização Matemática Local [12] (OML), decorre da integração de várias praxeologias pontuais;
- Organização Matemática Regional (OMR), é obtida com a articulação de praxeologias locais referentes à mesma teoria matemática;
- Organização Matemática Global (OMG), surge da junção de diferentes praxeologias regionais a partir da integração de diversas teorias (CHEVALLARD, 1999).

As OM Pontuais são as tarefas consideradas mais elementares; quando uma OM se obtém por integração de um certo conjunto de OMP, tal que todas elas aceitam um único discurso tecnológico, diremos que temos uma OM Local caracterizada por tal tecnologia (LUCAS, et al 2014).

Bosch, Fonseca e Gascón (2004) compreendem que uma organização matemática Local deve possibilitar a resolução de problemas (ou, pelo menos, respondê-los), que uma

[12] Nesta pesquisa focamos nosso olhar, sobretudo, nas OMP e OML.

OMP não resolveria com propriedade. Bosch, Fonseca e Gascón (2004) advertem que a organização matemática Local (OML) que aparece explicitamente nas instituições escolares, tem se estabelecido a partir de uma integração incompleta, e, como consequência, as “OML que vivem nas instituições escolares apresentam múltiplas incompletudes” (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 11).

Conforme os autores, as incompletudes

> só podem mostrar suas características e experimentar a possibilidade de realização de um processo de estudo nas mesmas, se for realizado um trabalho prévio de engenharia matemática que permita reconstruir uma organização matemática relativamente completa (OMLRC) [...] Paradoxalmente, o que ocorre é que em determinadas instituições matemáticas, incide o seguinte fenômeno: à medida que as OMP se integram para constituir organizacionais mais complexas (organizações matemáticas locais, regionais ou globais), a relação entre as perguntas e as respostas tende a inverter-se a tal ponto, que a “razão de ser” da OML tende a desaparecer (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p. 8-11, tradução nossa).

Para explicar o fenômeno, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) indica que uma OML pode dar respostas satisfatórias a um conjunto de questões problemáticas que não se pode resolver completamente em qualquer uma das OMP; pode-se apresentar diferentes representações, ou articular diferentes respostas, resultando em uma Organização Matemática Relativamente Completa (OMLRC). Diante disso, os autores sugerem a construção de uma OMLRC.

Conforme Andrade e Guerra (2014), a OMLRC é a ferramenta didática desenvolvida para enfrentar a questão da incompletude das organizações matemáticas nas instituições escolares. Para que uma OML seja relativamente completa, deve considerar os seguintes indicadores:

> (1) Integração dos diferentes tipos de tarefas; (2) Existência de diferentes técnicas para realizar um mesmo tipo de tarefas e possibilidade de escolher entre elas; (3) Independência (relativa) entre as técnicas matemáticas e os ostensivos que se utilizam para descrever e implementá-las; (4) Possibilidade de inverter as técnicas para realizar as tarefas “inversas”; (5) Existência das tarefas consistentes em interpretar o resultado de aplicar as técnicas; (6) Existência de tarefas matemáticas “abertas” (7) Incidência dos elementos tecnológicos sobre a prática matemática. (BOSCH, FONSECA, C; GASCÓN, J. 2004, p. 15, tradução nossa).

Sob o ponto de vista de Bosch, Fonseca e Gascón (2004), a noção de completude de uma OML é relativa, segundo ele não existem OML “completas” ou “incompletas”. Trata-se, portanto, de uma questão de grau, ou seja, existem OML mais ou menos “completas” que outras em função do grau em que seus componentes cumprem tais condições.

A partir das citações mencionadas, concebemos que, para que uma OM seja relativamente completa, deve contemplar alguns dos indicadores apontados por Bosch, Fonseca e Gascón (2004), como, por exemplo, utilizar diferentes técnicas para realizar um mesmo tipo de tarefa.

2.1.4 Organização didática

Uma organização didática (OD), também denominada de praxeologias didáticas, surge na intenção de colocar em prática uma organização matemática.

Andrade e Guerra (2014) definem uma OD como

> uma organização para o ensino, que pode então ser traduzida por meio de articulações e integrações de praxeologias que permitam facilitar a compreensão dos temas estudados no currículo de matemática de modo a dar razão a atividade matemática, e isto quer dizer, é claro, do quê e do por que se faz o estudo de uma dada praxeologia matemática (ANDRADE; GUERRA, 2014, p. 1203).

Se considerarmos as atividades docentes, partimos da compreensão de que as praxeologias matemáticas e didáticas são "um sistema de tarefas organizado para atender uma intenção didática do professor” (ANDRADE; GUERRA, 2014, p. 1204), e, portanto, cabe ao professor organizar tarefas de forma a fornecer uma complexidade crescente, iniciando por questões simples para as mais complexas.

A OD observa a maneira como uma situação foi construída e é desenvolvida por meio de seis momentos didáticos[13] (CHEVALLARD, 1999). Conforme o teórico, o momento inicial de estudo é aquele do primeiro encontro com a organização matemática (OM) ou o momento em que se principia o assunto.

O segundo momento é o da exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica para resolver a tarefa.

O terceiro momento é o da constituição do ambiente tecnológico teórico referente à técnica e ao tipo de tarefa proposta. Este começa a se construir desde o primeiro encontro com o tipo de tarefa, se considerarmos que, ao se escolher uma técnica, esta estará atrelada ao bloco tecnológico-teórico, para que possa ser explicada e justificada.

[13] Os momentos didáticos, são primeiramente uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica (CHEVALLARD, 1999).

O quarto momento é o do trabalho com a técnica em diferentes tarefas. Nesse momento, deve-se ter em prática a técnica, visando aperfeiçoá-la para que se torne mais eficaz e confiável de maneira quantitativa e/ou qualitativa (CHEVALLARD, 1999).

O quinto momento, o da institucionalização[14], é o momento em que a organização matemática que está em jogo, é oficializada.

Chevallard (1999 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 125) aponta que nesse momento

> elementos que fizeram parte do estudo em fases anteriores podem ser descartados e outros integrados definitivamente a partir da explicitação oficial pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura, da instituição ou da classe. Ou seja, novos elementos podem ser introduzidos pela modificação da relação institucional vigente ou pela criação de uma nova relação institucional com esses elementos.

Conforme Chevallard (1999) e Almouloud (2007), o momento da institucionalização tem a finalidade de definir o que é, precisamente, a OM criada; é também a fase em que se verifica o que permanece de fato na OM em questão, e o que pode ser descartado. Chevallard (1999) compreende que o momento de institucionalização renova o estudo, proporcionando esgotar as possibilidades das OM vigentes. Na TAD, a institucionalização converge para as relações do conhecimento, do saber e as relações institucionais. Assim sendo, na institucionalização as organizações praxeológicas que concernem à cultura institucional de ensino, vão sendo transformadas, aprimoradas, simplificadas ou retiradas, a cada processo de estudo. Chevallard (1999, p. 244) entende como o momento que vai separar o que é “matematicamente necessário” do que é “matematicamente contingente”, ou seja, o que permanecerá e o que será esquecido na instituição.

O sexto momento, o da avaliação, tem como finalidade avaliar o que foi aprendido com a OM em jogo. Além disso, avalia a razão de ser da(s) tarefa(s) proposta(s), a(s) técnica(s) e tecnologia(s) que justifique(m) a(s) técnica(s). Essa etapa, não deve ser atendida somente pelo viés da avaliação escolar.

Segundo Chevallard (2002b *apud* CARVALHO, 2012), as OM e as OD se relacionam através de uma escala hierárquica determinada por níveis de co-determinação didática.

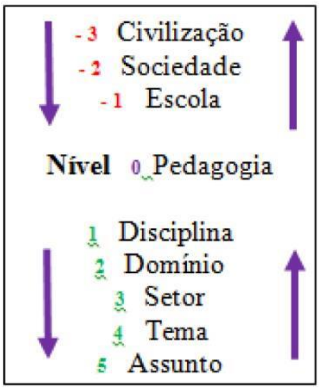
---

[14] Ainda neste capítulo, discutiremos sobre o termo.

2.1.5 Níveis de co-determinação

A TAD concebe as propostas de estudo integradas às atividades sociais, as deliberações das instituições, o que constitui uma reprodução dos níveis de representação curricular no processo de ensino e de aprendizagem; essa questão nos transporta à escala dos níveis de co-determinação didática (fig. 2) discutida por Chacón (2008 *apud* CARVALHO; BELLEMAIN, 2015, p. 126).

Figura 2 – Escala dos níveis de co-determinação didática



Fonte: CHACÓN[15] (2008 *apud* CARVALHO; BELLEMAIN, 2015, p. 126).

Conforme Chacón (2008 *apud* CARVALHO; BELLEMAIN, 2015), existe uma correlação entre as praxeologias matemáticas ou OM e os elementos que contemplam os níveis de co-determinação didática. Na parte superior do nível "Disciplina", situam-se as políticas públicas atuais. Ou seja, no âmbito das civilizações, ressaltam-se as questões globais sobre o objeto matemático e o paradigma dominante desse objeto; no campo da sociedade, consideram-se as políticas públicas (PCN e PC-BA); no nível escolar, avaliam-se as políticas de gestão; no nível da pedagogia, observam-se as questões metodológicas referentes ao ensino e aprendizagem; e no nível da disciplina, revelam-se o conteúdo praxeológico a ser ensinado.

A parte inferior do nível "Disciplina" (domínio, setor, tema e assunto) compõe o estudo específico da mesma. Ao fazer uma analogia dos níveis de co-determinação com as organizações matemáticas supracitadas neste texto, identificamos que o domínio está associado à OMG, o setor à OMR, o tema satisfaz a OML e o assunto atende à OMP.

[15] Chacón (2008) apresenta um esquema da escala dos níveis de co-determinação didática proposta por Chevallard (2002).

2.1.6 Objetos ostensivos e não-ostensivos

Ampliando o quadro teórico, adentramos nas noções de objetos ostensivos e não ostensivos.

Conforme Bosch e Chevallard (1999), para colocar em prática uma determinada praxeologia, são necessários dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não-ostensivos.

Para Almouloud (2007), o termo "ostensivo" vem do grego e significa *ostendere*, isto é, mostrar, apresentar com insistência. Esses são objetos que têm uma certa materialidade e que, por isso, adquirem para uma pessoa uma realidade perceptível: palavras, grafismos, gestos.

Enquanto os objetos não-ostensivos são todos aqueles que existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos, por exemplo, as ideias, as intuições e os conceitos (ALMOULOUD, 2007). Eles só podem ser recordados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados (uma palavra, um grafismo, um gesto ou todo um discurso). Por exemplo, para desenvolver o conceito de área, ao escrever a fórmula que calcula a medida da área do retângulo (A= b x h), podemos alegar que fazemos uma simples manipulação de objetos ostensivos, esse cálculo, contudo, não poderia ser efetuado intencionalmente, sem a intervenção de certos objetos não-ostensivos específicos, tal como a noção de Área.

Segundo Bosch e Chevallard (1999), para manipular as técnicas, utilizamos os objetos ostensivos, que correspondem às representações externas, e para justificar o trabalho que está sendo desenvolvido, assumimos os não-ostensivos, ou as representações mentais. Com isso podemos perceber a evidência da dialética entre ostensivos e não-ostensivos.

2.2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (1986), busca encontrar um modelo de interação entre o aluno, o saber, e o "*milieu*[16]" (meio) pelo qual a aprendizagem possa se desenvolver (BROUSSEAU, 1986). O objeto central dessa teoria é a situação didática na qual são identificadas as relações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

---

[16] O Milieu tem um significado amplo, "é onde ocorre à interação do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age" (FREITAS, 2012, p. 79) e (BROUSSEAU, 2008).

Trata-se de um referencial que busca desenvolver os conhecimentos mobilizados pelos estudantes e seu envolvimento na construção do saber matemático e valorizar o trabalho do professor. O papel deste consiste, principalmente, em criar condições para que o estudante se aproprie de conteúdos matemáticos específicos. Almouloud (2007) considera que uma situação didática é caracterizada pelo *milieu*, e este é estruturado mediante a escolha das variáveis didáticas; estas "são aquelas para as quais as mudanças de valores provocam modificações nas estratégias ótimas, o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem segundo a teoria das situações" (ALMOULOUD, 2007, p. 36).

Ao organizar o *milieu*, o professor cria expectativas no que diz respeito à participação dos estudantes, que, por sua vez, observam o trabalho do professor para compreenderem as regras e direcionarem suas ações. Segundo Freitas (2012, p. 79), "Num dado *milieu*, em cada momento, as situações didáticas são regidas por um conjunto de obrigações recíprocas, explícitas ou implícitas, envolvendo aluno, professor e o conteúdo em jogo". A esse conceito, denominamos de contrato didático (BROUSSEAU, 1986).

Portanto, Brousseau (1986) define contrato didático como uma relação que determina "explicitamente em pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, aquilo que cada parceiro, professor e aluno têm a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro" (BROUSSEAU, 1986, p. 51). Ou seja, o contrato didático definido como o conjunto de procedimentos do professor (esperado pelos estudantes) e o conjunto de procedimentos do estudante (esperado pelo professor). Essa noção, pressupõe uma escola como instituição social, em que cabe ao professor propor situações acessíveis ao estudante, além da responsabilidade de buscar maneiras de instigar o educando para o acesso ao saber escolar. Ao estudante, cabe corresponder às orientações recomendadas pelo professor, respondendo as tarefas propostas.

A ideia apresentada, a priori, parece simples, mas não é tarefa fácil de ser colocada em prática pelo professor. Somente faz sentido se ocorrerem escolhas de situações apropriadas, se levarmos em consideração a situação didática adequada e compatível com os estudantes.

2.2.1 Situação didática e situação adidática

Brousseau (2008, p. 21) denomina de situação "o modelo de interação de um sujeito com um meio determinado. [...] O recurso de que esse sujeito dispõe para alcançar ou conservar um estado favorável desse meio é um leque de decisões que dependem do emprego de um conhecimento preciso”.

No início dos seus estudos, o termo situação didática foi definido como

> um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos (BROUSSEAU, 1986, p. 8).

Em uma segunda acepção desse termo, Brousseau (2008, p. 53) alega que situação didática pode ser vista no sentido de “entorno do aluno, que inclui tudo o que especificamente colabora no comportamento matemático de sua formação”. Conforme o autor, uma interação é considerada didática se um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimento do outro (meios de decisões, formas de argumentação, entre outros). Assim, a situação didática é o elemento central dessa teoria, caracterizada, sobretudo, por uma intenção do professor de possibilitar ao estudante a aprendizagem de um dado conteúdo.

Nessa teoria, ainda se discute sobre a situação adidática (está inserida na situação didática*)*. Na situação adidática,[17] o trabalho do professor é planejado de maneira a gerar a apropriação do saber, sem que o professor revele ao estudante a sua intenção. Nessa situação, o professor “escolhe, propõe, organiza e gerencia as situações” (ALMOULOUD, 2007, p. 41) e tem o controle sobre a condução da situação, mas não tem o controle sobre o saber. Diante disso, as atividades devem ser bem escolhidas em razão do conhecimento do estudante.

Brousseau (1986) compreende que, em uma situação de ensino, o aluno é responsável pela sua aprendizagem. Sob esse ponto de vista, o aluno institui o conhecimento somente se ele se interessa para aprender um determinado assunto. Assim, a situação adidática representa um momento importante, uma vez que, cabe ao estudante, por seu próprio mérito, a apropriação do saber (BROUSSEAU, 1986).

Brousseau (1986) ainda expõe que, a TSD deve considerar os procedimentos adotados dentro das situações de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

Para o autor mencionado logo acima, uma situação é considerada de devolução, se o educando assume a responsabilidade de resolver um problema aceitando o desafio de resolvê-lo, adotando o problema como seu, e não apenas por que o professor quer que ele o resolva. Com a devolução, a situação proposta se converte no problema do aluno.

---

[17] Esta não pode ser confundida com a situação não didática (situações que não foram planejadas visando à aprendizagem).

A situação de ação, é o momento em que o problema é colocado para o estudante que se encontra empenhado em resolvê-lo; para isso, realiza ações. Esse conhecimento pode ser explicitado por meio da descrição dos procedimentos utilizados.

Na formulação, o estudante busca explicação para suas ações. Nessa fase, ocorre a troca de informação entre o aluno e o meio através da utilização de uma linguagem não formalizada.

Nas situações de validação, o aluno emprega a linguagem matemática para formalizar as suas ideias; é o momento da "prova". Esse processo se caracteriza na explicação e um esclarecimento teórico ou uma validação de uma dada proposição matemática.

Nas fases anteriores, é responsabilidade do estudante conduzir o processo, ou seja, o educando desenvolve a ação, a formula e valida.

Na próxima fase, a da institucionalização, o professor retoma o controle da situação, é a fase em que "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 40) e novos conhecimentos se agregam aos costumes da classe. Esse é o momento em que o saber torna-se oficial, pela ação do professor mediante uma sistematização feita por meio de definições, propriedades e teoremas em linguagem matemática mais formalizada.

2.3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO VERSUS TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Neste tópico, propomos um estudo comparativo das teorias que embasam a pesquisa, confrontando as informações de maneira a reconhecer as semelhanças e diferenças e descobrir as suas relações.

Conforme Almouloud (2007), a TAD se apropria das ideias sobre os sistemas didáticos e contrato didático (BROUSSEAU, 1986), inserindo o conceito de relação institucional (CHEVALLARD, 1999). Chevallard (1999) acrescenta, ainda, que existe uma coerência entre ambas e que essas se completam.

A Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) estuda o homem (sujeito) diante do saber matemático nas instituições. Para conceber essa teoria, Chevallard (1999) amplia o quadro da Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991). Nesta, expõe-se a necessidade de analisar as variações entre a matemática empregada pelos pesquisadores e a matemática a ser ensinada na escola. Sobretudo, a TAD se enquadra na vertente do estudo das instituições em que vivem os saberes fundamentados na psicologia, ecologia e em um método que consiste na apreciação das exigências institucionais e nas condições de vida do saber em uma instituição (ALMOULOUD, 2007). Já a TSD, parte do princípio de que o conhecimento ocorre em função da efetivação de propostas de ensino adequadas, em que a participação do aluno é fundamental. Foi desenvolvida no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, pelo estudo das interações do aluno com o *milieu*, organizado por intermédio de uma situação adidática. A TSD analisa os saberes e as situações que os envolvem, foi fundamentada na epistemologia da matemática e em uma metodologia apoiada nos princípios da Engenharia Didática[18]. Além disso, busca identificar as condições que devem ser consideradas no desenvolvimento de situações (didática e adidática) para proporcionar aprendizagem. A TSD também tem uma conexão com a Transposição Didática, quando a utiliza como ferramenta geradora de situações adidáticas adequadas que explicam a maneira pela qual o saber deverá ser apresentado ao aluno. A TSD apresenta similaridades com o construtivismo piagetiano, e sobretudo enquadra-se no modelo teórico do construtivismo didático[19].

As duas teorias têm seu foco no objeto matemático a ensinar: a TAD com o olhar no saber e como ele percorre as instituições, focando "as relações instituição-aluno-saber, o processo de ensino e aprendizagem no sistema escolar e concebe o saber como certa forma de organização do conhecimento" (ALMOULOUD, 2007, p. 199); e a TSD idealizando o processo de ensino e aprendizagem representado pela tríade, professor-aluno-saber, focando-se na interação do professor com o estudante (essa interação é caracterizada e descrita através do contrato didático). Brousseau (1986) idealiza "contrato didático como a ferramenta que regula as ações do professor e do aluno nas situações didáticas" (ALMOULOUD, 2007, p. 191). Portanto, consideramos que os acordos que estabelecem a base das relações entre o professor e o estudante, constitui o contrato didático.

Para realizar a modelagem do saber, a TAD utiliza os seis momentos didáticos. Nessa teoria, o processo de ensino e aprendizagem se completa na institucionalização. Esta poderá ser feita pelo professor e/ou estudante; o momento da avaliação é considerado um momento à parte, mas está ligado à institucionalização. Enquanto a TSD utiliza a dialética da devolução aliada à ação, formulação, validação e institucionalização. Essas fases descrevem o processo

[18] Ver Engenharia Didática em Artigle (1998).
[19] Introduz uma mudança no desenvolvimento do sujeito epistêmico. "O sujeito é analisado como aluno em uma classe e a aquisição do conhecimento é estudada considerando a organização do ensino, proposta pelo professor" (ALMOULOUD, 2007, p. 25).

de aprendizagem do indivíduo; nessa teoria, a institucionalização é colocada como fechamento do processo que é desenvolvido pelo professor.

Na TAD, o 1º momento busca marcar o período com certa neutralidade, enquanto na TSD a 1ª fase é caracterizada pela ação do estudante, essa etapa é livre e está relacionada a conhecimentos já incorporados pelo aluno.

No 3º momento (CHEVALLARD, 1999), ocorre a constituição do ambiente tecnológico teórico para explicar a técnica. Esse momento tem uma certa similaridade com as 2ª e 3ª fases da TSD (formulação e validação). Nessas fases, a intervenção do professor dá-se por meio de incentivo para com os estudantes, de maneira a explicar suas estratégias de resolução.

As duas teorias consideram a etapa de institucionalização. Isso mostra a valorização dos teóricos a essa fase. Na TAD de Chevallard (1999), a institucionalização é o momento em que ocorre "a integração dos elementos que entrarão de maneira definitiva na organização matemática visada" (ALMOULOUD, 2007, p. 200). Nessa teoria a avaliação é integrada ao momento da institucionalização. Enquanto na institucionalização de Brousseau (1986), o papel do professor é o de intervir no sentido de validar, ou não, as estratégias utilizadas pelos estudantes, nessa teoria a ação do professor está explícita nas fases de devolução e institucionalização.

Ambas consideram o conhecimento segundo um princípio de funcionalidade. Chevallard (1999) considera que a diferença entre as teorias está no plano das teorizações, e expõe que a TSD centra-se nas condições e funcionamento adequado dos sistemas didáticos, enquanto a TAD se coloca vigilante com tais condições e funcionamento adequado, mas numa perspectiva ecológica[20].

Desse modo, as duas teorias se entrelaçam e se complementam, uma estudando as relações aluno, professor e saber, e a outra dissecando o saber a partir de sua entrada em várias instituições, incluindo a instituição escolar.

[20] "Consideram-se as condições de 'sobrevivência' do saber e do saber fazer em analogia a um estudo ecológico: Qual habitat? Qual nicho? Qual o papel desse saber ou saber fazer na cadeia alimentar? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia" (ALMOULOUD, 2007, p. 123).

2.4 ARTICULAÇÃO ENTRE OS CONSTRUTOS TEÓRICOS E O(S) OBJETIVO(S) DA PESQUISA

Neste item, apresentamos uma articulação entre os construtos teóricos fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa e os objetivos da referida investigação.

Para Chevallard (1999), há a possibilidade da existência de diferentes relações institucionais e pessoais para um mesmo objeto do saber, o que permite analisar como as instituições envolvidas na problemática didática interpreta o saber matemático em jogo.

Considerando que as teorias têm seu foco no objeto matemático a ensinar, fixamos o nosso olhar nos elementos da TSD, especialmente nas: situações didáticas, noções de meio (*milieu*) e de contrato didático (BROUSSEAU, 1986). Posteriormente, ampliamos o foco para uma apreciação dos elementos da TAD, sobretudo das relações institucionais, praxeologias matemáticas e didáticas (organização matemática e organização didática), objetos ostensivos e não-ostensivos e níveis de co-determinação didática (CHEVALLARD, 1999).

Se analisarmos que o objeto matemático área, quando trabalhado no seio de uma instituição, traz, para esta pesquisa, elementos que terminam por ampliar o olhar nas contribuições da TSD (BROUSSEAU, 1986), esses elementos fazem com que passemos a considerar o objeto matemático área, em uma dimensão institucional, visto que, Chevallard (1999), pondera que a relação pessoal do objeto do saber existe, quando uma pessoa entra na instituição onde há esse objeto ou uma instituição o reconhece como existente.

O objeto matemático área, está alicerçado no saber de referência: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), Proposta Curricular do Estado da Bahia (BAHIA, 2013) e livros didáticos. Quando transcorrem sobre a transposição didática, faz-se necessário uma certa vigilância, sobretudo no que se refere às escolhas das situações didáticas a serem propostas. Essa vigilância faz com que nos questionemos sobre o que de fato os estudantes devem aprender acerca de área; em outras palavras, necessitamos compreender como e quais são os assuntos que comporão o “ensino” de área em turmas do 6º ano na educação básica.

Brousseau (1986) afirma que ocorre uma situação didática toda vez que ficar caracterizada uma intenção do professor de organizar o *milieu* (onde acontece a interação), com expectativas no que tange à participação dos professores e/ou alunos. Reportamo-nos a essa teoria no momento da elaboração da sequência didática desenvolvida pelos professores participantes e nas sessões de estudo, em que delineamos implicitamente os acordos do contrato didático[21].

Chevallard (1999) introduz a noção de organização matemáticas, afirmando que toda atividade humana pode ser decomposta por diferentes tipos de tarefas, o que, por sua vez, exige uma técnica de resolução, que deve ser descrita, explicada e justificada, conduzindo a definir tecnologia ou o discurso sobre a técnica e a teoria. Chevallard (1999) ainda pondera que uma praxeologia associada a um saber matemático deve estar colocada em escalas hierárquicas (civilização, sociedade, escola e pedagogia, disciplina, domínio, setor, tema e questão), as quais o autor define como níveis de co-determinação didática. Nesta pesquisa, estabelecemos relação entre esses elementos e as organizações matemáticas. Essa correlação é considerada importante para avaliar as condições e restrições que regulam a escolaridade do objeto matemático área. Outra questão a ser destacada é que, a realização de toda tarefa matemática envolve necessariamente a manipulação dos objetos ostensivos regulados pelos não-ostensivos (ALMOULOUD, 2007).

Chevallard (1999) considera pertinente uma apreciação das praxeologias didáticas ou (OD) por intermédio dos seis momentos didáticos[22] (CHEVALLARD, 1999), que, nesta pesquisa, foram levados em consideração nas análises praxeológicas e nas sessões de estudo.

A análise das praxeologias matemática e didática das instituições estudadas nos permite identificar o alcance do objeto matemático área, seja nos documentos oficiais, livros didáticos, cadernos dos estudantes, ou aula dos professores. Podemos verificar se fica no nível do saber-fazer, de reprodução ou se alcança o nível tecnológico-teórico.

Considerando que tanto Brousseau (1986) quanto Chevallard (1999) avaliam a fase de institucionalização como um momento importante, fica evidente, portanto, a valorização dos teóricos a essas(es) fases/momentos consideradas(os) pelas teorias TSD/TAD. Apesar da relevância discutida pelos autores, nesta pesquisa adotamos o termo institucionalização, sob a perspectiva de Chevallard (1999). Neste trabalho, o conceito de institucionalização é ressaltado por acreditarmos que tal noção é responsável pelo momento em que "a organização matemática é definida, [...] a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno" (ALMOULOUD, 2007, p. 125).

---

[21] Estabeleceremos adiante.

[22] Momento do 1º encontro do estudante com as tarefas; 2º momento, que representa a exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica; 3º momento, o da constituição do ambiente tecnológico-teórico; 4º momento, o do trabalho com a técnica; 5º momento, o da institucionalização; e 6º momento, que se refere à avaliação (CHEVALLARD, 1999).

Na TAD, Chevallard (1999) também propõe um modelo de momentos de estudo e enfatiza a importância da elaboração de uma organização didática que tem por desígnio o ensino e aprendizagem de uma organização matemática.

Fazendo uma alusão à nossa pesquisa, ao aplicar a sequência didática com seus alunos, o professor emprega alguns fundamentos da TSD (BROUSSEAU, 1986). Para Brousseau (1986), esse é um momento relevante na teoria, visto que é o momento em que o professor busca validar saberes, bem como a correção de possíveis ambiguidades (conceitos equivocados, resoluções incorretas, entre outros).

Salientamos que o estudo realizado permite relacionar a abordagem teórica proposta por Chevallard (1999) com os estudos de Brousseau (1986) sobre as situações didáticas.

É importante ressalvar que neste trecho do trabalho não tivemos a pretensão de discorrer demasiadamente sobre as teorias TSD e TAD, ou, ainda, a respeito de alguns de seus conceitos que fundamentam as análises. Buscamos, principalmente, apresentar ao leitor as ideias teóricas fundamentais que nortearam as discussões que estamos propondo acerca dos diferentes registros ao se estudar área no 6º ano do ensino fundamental.

2.5 METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A investigação baseou-se na Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa **(**PEP), alicerçado pela Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), com elementos da Engenharia Didática (ARTIGLE, 1998). Caracteriza-se por ser do tipo experimental, equiparado ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos, isto é, "na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino" (ALMOULOUD; SILVA 2012, p. 26).

Constitui-se uma pesquisa de campo com base em uma abordagem de natureza qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Uma pesquisa de campo é considerada como "aquela na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece" (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 106). Para isso, o pesquisador vai a campo buscando compreender o fato em estudo, considerando as questões relevantes da pesquisa. A pesquisa qualitativa tem importância no estudo das relações sociais (LUDKE; ANDRÉ 1986) e satisfaz o ambiente natural como fonte de dados, entre outras características.

Esta pesquisa amparou-se nos estudos preliminares sobre o Modelo Epistemológico Dominante (MED), mediante análise documental, observação naturalista[23] e entrevistas com os professores participantes, e no Modelo Epistemológico de Referência (MER), adotado nesta investigação no que concerne ao saber de referência área, como grandeza.

Ressaltamos que esta investigação possui a estrutura de uma microengenharia (ALMOULOUD, 2007), uma vez que é desenvolvida com pequena quantidade de dados em um período reduzido de tempo (ARAÚJO; IGLIORI, 2012). Assim, a microengenharia que desenvolvemos é um dispositivo experimental planejado para professores, que propõe a construção de tarefas em torno do tema área, por intermédio de sequências didáticas. Destacamos que esta averiguação não tem o caráter formal de uma formação, mas as nossas ações têm atributos de uma formação continuada de professores.

2.5.1 Caracterização da pesquisa: campo, sujeito e produção de dados

O estudo foi desenvolvido em dois colégios do município de Salvador, estado da Bahia, que atuam no ensino fundamental. Os colégios são de grande porte e possuem infraestrutura adequada, com espaços para esportes, lazer, laboratório de informática, biblioteca, auditório, quadras esportivas, entre outros.

O colégio 1 é da rede pública, situado na rua Guillard Muniz, no bairro da Pituba; atualmente recebe estudantes oriundos de vários bairros da capital baiana, com grande variação socioeconômica. O colégio disponibiliza turmas do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e Ensino Médio. Nessa escola, o planejamento pedagógico é organizado por unidades.

Aproximamo-nos dessa instituição escolar ainda no segundo semestre do ano de 2015. Neste período, fizemos uma visita ao colégio e agendamos com os professores de matemática e a coordenação pedagógica a nossa participação na condição de ouvinte, do momento da elaboração do planejamento escolar da disciplina matemática para o 6º ano em 2016, período denominado de Jornada Pedagógica[24].

[23] A observação naturalista é um modo de observação em que o observador não interfere no campo observado. (ESTRELA, 1986).

[24] Trata-se de um planejamento anual entre os educadores da rede estadual de ensino, visando estabelecer ações, metas e estratégias para a melhoria da qualidade da educação no ano letivo vigente. Nesse período, focou-se na "valorização das práticas educativas exitosas das unidades escolares e o incentivo à leitura a partir de ações específicas" (BAHIA, 2016) Disponível em: <http://www.ba.gov.br/2016/01/130235,14/Secretaria-estadual-da-Educacao-promove-Jornada-Pedagogica-2016.html>. Acesso em: 13 out. 2016.

Com o aceite do grupo, iniciamos o nosso trabalho no colégio 1 em fevereiro de 2016, período destinado ao planejamento pedagógico da instituição escolar. Consideramos que esse período foi propício para convidar um dos professores do 6º ano para participar da investigação. Nessa ocasião, também tivemos acesso ao planejamento escolar, livro didático adotado, dentre outros documentos pedagógicos. Em março do ano de 2016, solicitamos à direção da escola, através de um ofício, a permissão para desenvolver a pesquisa na instituição em pauta.

O colégio 2 é da rede privada, está localizado na Rua Silveira Martins, nº 1, no bairro do Cabula, *c*om turmas da Educação Infantil, Ensino Fundamental I e II (1º ao 9º ano) e Ensino Médio. Esta instituição tem o seu planejamento anual organizado por trimestre.

A preferência por essas escolas, a princípio, se deu pelo fato do tema área ter sido programado para ser trabalhado na segunda unidade (colégio 1) e segundo trimestre (colégio 2) do ano letivo de 2016. Além desse fator, o acolhimento disponibilizado pelas instituições escolares e professores participantes colaborou para a escolha. Esse episódio contribuiu para que a pesquisa fosse desenvolvida conforme as nossas aspirações (análise documental, observação naturalista, entrevistas, intervenção didática por intermédio do PEP, construção, refinamento e aplicação de uma sequência didática).

Elegemos investigar o 6º ano por se constituir uma nova etapa da educação básica. Considerada pelo PCN (BRASIL, 1998) como uma fase de transição, visto que nos primeiros ciclos, apenas se dá um enfoque à ideia intuitiva de área, enquanto no terceiro ciclo se espera que os estudantes desenvolvam competências básicas[25] referentes ao tema.

Tomamos como sujeitos participantes desta pesquisa, dois professores de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, sendo um de cada escola. A observação foi desenvolvida na unidade / trimestre em que o conteúdo área foi trabalhado nas escolas. Para tanto, foi escolhida apenas uma turma de cada professor para a observação. *A* priori, não revelamos o objeto de observação da pesquisa, para que o professor não se sentisse obrigado a modificar os procedimentos idealizados para o momento da institucionalização do objeto matemático área.

Com o objetivo de complementar as informações, inicialmente, elaboramos um questionário (Apêndice B), com a intenção de traçar o perfil dos professores. Para tal, solicitamos dados profissionais como: tempo de magistério, formação profissional, instituição onde obteve a graduação, tempo que trabalha em sala de aula, dentre outras perguntas. De

[25] Explicitado nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado da Bahia (BAHIA, 2013). Comentaremos no momento da análise desse documento.

posse dos dados, identificamos que um dos educadores possui 33 anos de magistério, é bacharel em Economia, tendo feito uma complementação e se licenciado em Matemática. Também detectamos que o professor gosta de lecionar em turmas do 6° ano, entretanto ao longo da sua jornada profissional não fez nenhum curso de formação continuada que abordasse sobre o tema área. O segundo professor possui 14 anos de magistério, é licenciado em Matemática, prefere lecionar em turmas do 9° ano por considerar "os assuntos abordados mais interessantes" (JOÃO, 2016), esse já fez curso de formação continuada sobre o tema área.

Ao serem consultados sobre o pseudônimo a ser utilizado na pesquisa, os professores sugeriram Carlos e João, nesta ordem.

Os procedimentos da produção dos dados deu-se por intermédio da análise documental, observação naturalista (*in loco*) das aulas dos professores e entrevista com os educadores. Os procedimentos citados ocorreram por etapas, mas não aconteceram de maneira linear, visto que algumas ações foram feitas concomitantemente ou retomadas posteriormente.

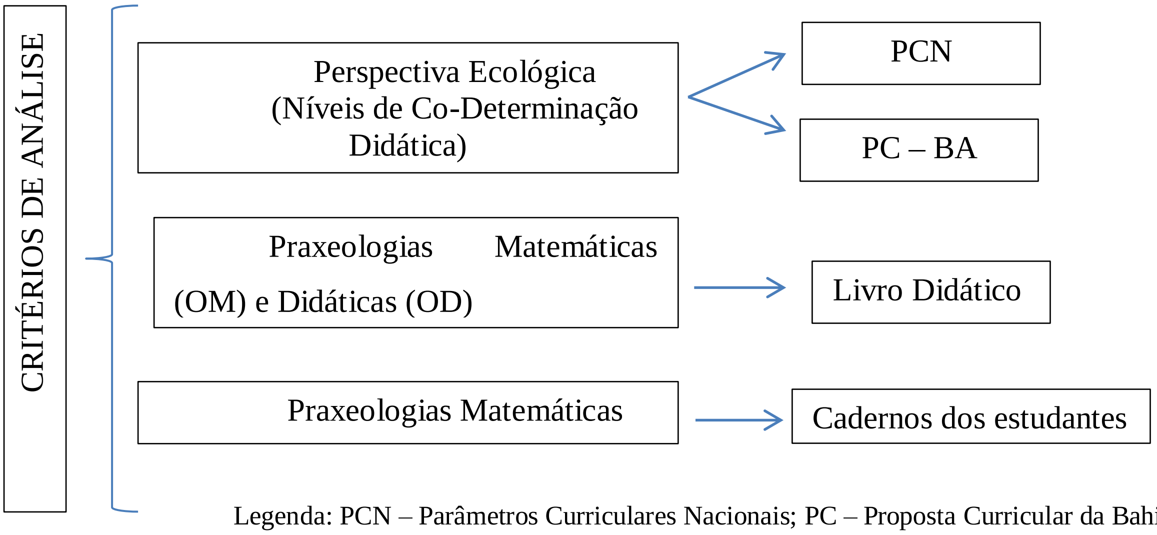
2.5.1.1 Análise preliminar dos documentos

Nesta etapa, empreendemos uma análise preliminar, fazendo uma apreciação de documentos institucionais, analisando as condições e restrições identificadas nas instituições adotadas. Sobretudo, desenvolvemos uma análise documental dos: elementos históricos e epistemológicos do tema área, dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), das Propostas Curriculares do Estado da Bahia – PC (BAHIA, 2013), dos livros didáticos adotados pelas escolas participantes e dos cadernos dos estudantes nas turmas observadas. Elegemos estes documentos, por considerá-los relevantes para a investigação, visto que, oferecem subsídios para o trabalho do professor.

Avaliamos que este é um momento pertinente nesta pesquisa, uma vez que, de posse dos dados, pudemos escolher a metodologia adotada e eleger os caminhos a serem trilhados no decorrer da investigação.

Para as análises, utilizamos critérios distintos, ilustrados conforme a figura a seguir:

Figura 3 – Critérios de análise dos documentos institucionais



Legenda: PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais; PC – Proposta Curricular da Bahia.
Fonte: a pesquisadora (2017).

Optamos por analisar os PCN (BRASIL, 1998) e a PC (BAHIA, 2013), pela perspectiva ecológica[26], por compreender que esses documentos situam-se no campo das políticas públicas e localizam-se nas escalas superiores dos níveis de co-determinação didática (sociedade, escola e pedagogia), que são impostos aos níveis hierarquicamente inferiores. Ao questionar a ecologia das propostas, buscamos identificar em cada nível as condições e restrições estabelecidas pelos documentos (CHEVALLARD, 1999 *apud* LUCAS et al, 2014). Consideramos a relevância de uma análise desses documentos por essa vertente, uma vez que o currículo sofre influência da civilização, sociedade e da escola do qual faz parte.

Para a análise dos livros didáticos (doravante, LD), utilizamos a noção de organização praxeológica (CHEVALLARD, 1999), sem perder de vista os níveis de co-determinação didática. Inicialmente, buscamos compreender como os autores organizaram seus livros, estabelecendo uma visão geral dos exemplares. Portanto, decidimos conhecer as resenhas das coleções dos Guias de Livro Didático produzidas nos PNLD/2014 e fazer uma sintética apreciação dessas obras (estrutura organizacional geral). A partir daí, buscamos conhecer os capítulos específicos de cada exemplar (estrutura organizacional regional), analisamos as seções que discutem a respeito do objeto matemático área (estrutura organizacional local) e ponderamos sobre os tipos de tarefas acerca de área (estrutura organizacional pontual). Sobretudo, focalizamos nosso olhar nos elementos que se encontram na escala inferior dos níveis de co-determinação (tema e assunto).

[26] A perspectiva ecológica, nesse sentido, "refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que produzem, utilizam ou transpõem" (CHEVALLARD, 1999 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 123).

Procuramos identificar as organizações matemáticas, ou seja, o que está sendo proposto nos livros didáticos, e as organizações didáticas, a maneira como as situações foram postas. Na organização matemática, consideramos o quarteto praxeológico composto pela tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), e nas organizações didáticas, observamos os momentos didáticos, isto é, os caminhos utilizados pelo autor do LD para organizar o estudo do tema. Tomamos a análise com o olhar nos momentos elencados por Chevallard (1999), conforme os critérios especificados no quadro 1. Por esse viés, buscamos revelar como o ensino de área desenvolve-se na dada obra.

Quadro 1 – Categorização e critérios de análise da Organização Didática.

Categorização (momentos de estudo)	**Critérios**
1º momento (1º encontro com as tarefas)	Como se inicia a abordagem do tema?
2º momento (exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica)	Qual o tipo de tarefa? Como se dá a técnica
3º momento (constituição do ambiente tecnológico-teórico)	Como é justificada a técnica?
4º momento (trabalho com a técnica)	Como conduzir o estudo exploratório de um tipo de tarefa?
5º momento (institucionalização)	Como ocorre a institucionalização?
6º momento (avaliação)	Como é realizada a avaliação?

Fonte: Almouloud (2007), adaptada pela pesquisadora (2017).

Elegemos desenvolver a apreciação da OD de um livro aprovado pelo Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD), isto é, escolhemos um livro que passou pelo crivo do PNLD 2014, referente ao ano de 2013. Dos exemplares analisados, apenas o LD1 foi submetido e aprovado pelo processo de avaliação pedagógica designado pelo Edital do PNLD (2014).

Na análise dos cadernos dos estudantes, identificamos apenas as organizações matemáticas, visto que, nos cadernos observados, não percebemos anotações, nem apontamentos que justificassem fazermos uma apreciação da organização didática.

Esses critérios permitem a observação nas instituições, estabelecendo inter-relações hierárquicas que possibilitam a visualização das estruturas ecológicas relativas ao objeto matemático, área.

2.5.1.2 Análise preliminar da observação naturalista

A TAD que emanou da transposição didática traz um olhar sobre os caminhos que o professor deve trilhar para chegar ao ensino de um conceito matemático, nesse caso, o conceito de área. Ao estudar essa teoria, percebemos que existem escolhas a serem feitas que são determinantes para que o “saber ensinado” se torne adequado à aquisição do “saber aprendido”; esse saber deve ser obtido por meio de um percurso que o docente necessita adotar até chegar à compreensão do estudante sobre o tema.

A observação naturalista ocorreu no desdobramento das atividades desenvolvidas em classe na unidade/trimestre em que foi trabalhado o tema área. Nesta fase da pesquisa, procuramos observar as Organizações Matemáticas e as Organizações Didáticas das praxeologias de cada professor, por intermédio dos momentos didáticos discutidos por Chevallard (1999) (*vide* quadro 1). Precisamente, procuramos analisar as organizações matemáticas (OM) empregadas pelos professores, com a intenção de conhecer as tarefas, técnicas e os elementos tecnológicos teóricos adotados e mobilizados por eles no decorrer das aulas. Além disso, buscamos identificar as organizações didáticas (OD) tomadas, com o propósito de compreender como foi conduzida a organização matemática posta em prática.

Para isso, realizamos um levantamento das tarefas propostas, identificadas na observação naturalista e gravação de áudios.

Consideramos que este tipo de observação pode nos fornecer informações relevantes, ocorridas, sobretudo, no momento da institucionalização, para compreender as escolhas feitas pelo professor. Com esse procedimento, endossamos as ideias de Ludke e André (1986), quando apontam que na pesquisa qualitativa é imprescindível o contato direto do pesquisador com a situação que está sendo investigada.

As observações das aulas do professor Carlos ocorreram no período de abril a julho do ano de 2016, com um pequeno intervalo de recesso junino (20 de junho a 03 de julho); as do professor João, ocorreram no período de maio a agosto do ano de 2016.

Os dois professores trabalharam com o tema área, em 4 (quatro) aulas. As aulas do professor Carlos aconteceram nos dias 18, 20 e 23 de maio; nesse dia o tema foi explorado em duas aulas. As aulas do professor João ocorreram nos dias 1º de junho (duas aulas) e 8 de junho (duas aulas). Para tanto, foram feitas anotações no diário de campo[27]; além disso, gravamos as aulas em áudio e as transcrevemos posteriormente (Apêndice C).

[27] O Diário de campo é o instrumento em que o pesquisador registra as observações feitas no decorrer do episódio (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

Ao mesmo tempo, desenvolvemos uma entrevista semiestruturada[28] (Apêndice D) para conhecer a concepção dos professores sobre o tema área.

De posse dos resultados identificados nas análises, decidimos então propor um modelo para servir de referência como resposta às dificuldades encontradas nas instituições. Com isso, fizemos um levantamento do Modelo Epistemológico de Referência (MER) adotado nesta pesquisa, no que concerne ao saber de referência área, como grandeza.

Nosso próximo passo foi, então, apresentar um plano de trabalho com uma proposta de intervenção didática a ser desenvolvido com os professores, que ocorreu em consenso com os educadores, por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa[29], desenvolvido mediante sessões de estudo[30] em uma das escolas participantes.

Em seguida, definimos as situações a serem abordadas nas sessões. Essas foram desenvolvidas com base no levantamento obtido a partir do Modelo Epistemológico de Referência. Assim, escolhemos tarefas para serem discutidas que explorassem as organizações conceituais utilizando os três quadros (geométricos, numéricos e das grandezas) (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), sugerindo, sobretudo, situações que dão sentido ao conceito de área (BALTAR, 1996; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010).

Para organizar as sessões de estudo, levamos em consideração as ideias articuladas por Chevallard (1999), quando este avalia a teoria dos momentos didáticos como fatores básicos para o desenvolvimento da atividade matemática institucionalizada. Chevallard (1999) considera esses momentos como um instrumento privilegiado da TAD, uma vez que, possibilitam a dinâmica das organizações didáticas. Ressalvamos que nesta pesquisa, tal fase se refere às situações de aprendizagem para os professores. Deste modo, planejamos as sessões de estudo em seis etapas.

2.5.2 Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

A engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa (CHEVALLARD, 2009b) é um dispositivo cujo objetivo é a produção de recursos para a formação de alunos ou professores, desenvolvido como subsídio ao estudo de um tema em resposta a uma questão geradora; é

[28] Neste tipo de entrevista, o pesquisador organiza um roteiro a ser contemplado, podendo alterar a ordem do mesmo, ou formular questões novas (LUDKE; ANDRÉ, 1986).
[29] O desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP será discutido no capítulo V.
[30]Explanaremos sobre esse item no capítulo posterior.

flexível e vem com a proposta de auxiliar na superação das restrições que dificultam o desenvolvimento de uma determinada atividade didática nas instituições escolares.

Optamos por esse caminho, sobretudo por compreender que tal procedimento metodológico possibilita autonomia aos professores participantes, e oportuniza o uso de técnicas diferenciadas no momento em que tentam responder a(s) questão(ões), em vez de impor uma técnica única e específica. Consideramos pertinente a escolha por essa metodologia, uma vez que o tema área foi desenvolvido anteriormente em sala de aula pelos professores participantes.

Para o desenvolvimento do PEP houve um contrato didático (CHEVALLARD, 1999) preestabelecido entre os professores participantes (sujeitos) e a pesquisadora, em que ficaram delimitadas as etapas da pesquisa.

Firmamos um acordo, deixando claro qual seria o papel dos participantes, ou seja, dos professores e da pesquisadora. Chegamos a um consenso, que o estudo teria a colaboração da pesquisadora com a participação nas sessões de estudo e refinamento das tarefas selecionadas e utilizaria como ponto de apoio algumas pesquisas desenvolvidas no âmbito da didática da matemática, sobretudo, das pesquisas que contemplam as organizações conceituais dos quadros geométricos, numéricos e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), levando em consideração as situações que dão sentido ao conceito de área, articuladas por Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002), Facco (2003) e Ferreira (2010).

Após conversa com os professores participantes e a coordenação pedagógica, chegamos a um consenso: realizar as sessões de estudo nos dias das atividades complementares (AC)[31]. Consideramos que essas atividades se constituem um momento importante para o diálogo, a reflexão e a socialização de práticas pedagógicas e, sobretudo, como um momento favorável para desenvolver praxeologias com base nas pesquisas supracitadas acerca do tema área.

Outras questões que entraram em pauta foram os ambientes que seriam desenvolvidos as tarefas, os materiais didáticos a serem usados e a aplicação da sequência didática. Ficou decidido que as tarefas seriam feitas em sala de aula, ou seja, não se utilizaria o laboratório de informática, com o argumento de que seria necessário um período para a iniciação dos estudantes no ambiente informatizado, outro para a aplicação das tarefas nesse ambiente e outro para a aplicação das tarefas em classe, o que inviabilizava o planejamento anual

[31] Atividade complementar (AC) se constitui um espaço essencial ao trabalho pedagógico do(a) professor(a) destinado ao planejamento e organização de suas atividades, a serem realizadas de forma individual ou coletiva. Além disso, se constitui um momento propício para a formação continuada de professores. Disponível em: <http://educadores.educacao.ba.gov.br/atividadecomplementar>. Acesso em: 05 out. 2016.

desenvolvido pelas instituições escolares. Como não tínhamos a pretensão de mudar o planejamento estruturado pelos colégios, deixamos a critério dos professores decidirem qual o ambiente que seria empregado à sequência didática e foi determinado pelos participantes que a aplicação da SD, aconteceria no ambiente da sala de aula.

Nesta etapa do trabalho, também consideramos a possibilidade de explorar algumas variáveis (posição das figuras, tipo de papel, malha quadrangular, malha triangular, tamanho da figura, mudança de unidade, tipo de figura, formato da figura, material manipulável – tangram). Quanto à sequência didática, esta seria realizada em duplas.

As sessões de estudo ocorreram no colégio 1, em cinco momentos e foram encerradas com a aplicação da sequência didática (6° momento). Essa foi desenvolvida por um dos professores participantes (colégio 1), na turma observada. Esses encontros aconteceram no período de setembro a outubro do ano de 2016. As sessões, geralmente, eram agendadas previamente com a coordenação pedagógica do colégio 1.

As cinco primeiras etapas (momentos) se constituíram das discussões sobre o tema área (Apêndice E), elaboração de tarefas e a composição da SD. A última, consistiu na aplicação (avaliação) da SD.

A sequência didática foi feita com 29 estudantes, agrupados em duplas; apenas um dos grupos ficaram com três alunos. Ressalvamos que somente no colégio 1 foi possível aplicar a sequência didática.

Advertimos que nesta investigação adotamos uma postura ética, utilizando protocolo para a realização da pesquisa, que foi concretizada apenas com o consentimento dos professores, pais ou responsáveis pelos alunos participantes, ou seja, dos envolvidos na investigação, que não tiveram prejuízos de qualquer espécie.

Realizamos uma microengenharia atendendo as especificidades dos participantes desta pesquisa (professores), entretanto, ponderamos que as tarefas por eles produzidas devem esquivar-se de uma padronização, ou seja, os professores devem tentar diversificar as situações, além de utilizar diferentes formas de representações e recursos; desse modo, as possibilidades de atender aos anseios dos estudantes tornam-se mais prováveis.

3 CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

3.1 ESTUDO DA GÊNESE PARA ÁREA

Neste capítulo, faremos um mapeamento dos elementos pautados no contexto histórico e epistemológico do objeto matemático área, na tentativa de apresentar um panorama sobre esse objeto, a fim de conhecermos a sua origem e a evolução do tema ao longo dos tempos. Com este estudo, não temos pretensões de contemplar a vasta literatura sobre o assunto, uma vez que não somos historiadores; tampouco almejamos esgotar a epistemologia de área. Objetivamos apenas apresentar elementos que julgamos relevantes à compreensão da gênese do objeto referido.

Como todo saber humano, o objeto matemático área nasce das necessidades socioeconômicas e culturais. As primeiras manifestações de interesse pela geometria foram vistas pelas civilizações que viviam próximas dos grandes rios, embora haja evidências de que outras civilizações, como a grega, chinesa, hindu, mesopotâmica e egípcia, desenvolveram interesse por/e conhecimentos geométricos (BOYER, 1974). Provavelmente, a origem do surgimento do tema em questão está atrelada ao problema de medições da terra em antigas civilizações (BOYER; MERZBACH, 2012). Nesse período, as questões do saber geométrico já envolviam o conhecimento de área.

Conforme Eves (2004), no período de 2000 a.C. a 1600 a.C., muitos exemplos concretos inferem que a geometria dos babilônios se apresenta relacionada com a mensuração prática, e evidenciam uma familiarização com as "regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área do triângulo genérico) da área do trapézio retângulo" (EVES, 2004, p. 60), entre outros. Os babilônios que viveram próximos dos rios Tigres e Eufrates usavam o próprio corpo, mão, pés, polegadas e os passos, para medições, de acordo com as suas necessidades, e utilizavam fórmulas para o cálculo de áreas de figuras geométricas simples e área de triângulos. Segundo Boyer (1974), no solo desses povos, em Susa, foi desenterrada uma tábua[32] que compara as Áreas de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. Porém, é importante ressaltar que o foco dos

---

[32] Muitas tábuas escritas em cuneiforme (antigas escritas dos Assírios, persas e medos) encontram-se em diversos museus, a sua designação depende da coleção a que pertencem. A tábua da coleção AO (Antiquités Orientale) AO 6484 data do período Seléucida (311 a.C. a 64 a.C.). Essa tábua contém 17 problemas, entre eles, quatro de áreas de campos e figuras geométricas planas. Fonte: <http://www.acervosaber.com.br/trabalhos/historia_matematica1/historia_da_matematica_17.php>.

babilônios não era tanto o contexto geométrico, mas as aproximações numéricas que usavam na mensuração (BOYER, 1974).

Os egípcios, habitantes das proximidades do rio Nilo, desenvolveram o conhecimento geométrico devido às grandes cheias; entre esses conhecimentos, o cálculo de área, uma vez que as inundações alteravam a demarcação das terras e seus povos dependiam das margens do rio para a subsistência. As medições, utilizadas pelos egípcios, fizeram com que surgisse através dos “mensuradores” a noção de figuras geométricas como retângulo, quadrado e triângulo (BOYER, 1974). Conforme Boyer (1974), Heródoto (485 a C – 425 a C) historiou que: os egípcios conheciam as fórmulas usuais do cálculo de Áreas dos polígonos; além disso, a maioria dos problemas de geometria desta época fazia referência aos problemas de Área.

Na China antiga (2000 a.C. a 600 a.C.) foi desenvolvida a obra *Nove Capítulos sobre Arte Matemática*, contendo problemas sobre agricultura, engenharia, mensuração de terras e propriedades de triângulos. Nesse documento, o tema área de figuras planas é explorado utilizando da manipulação de peças; algo similar ao Tangam[33], essas peças exibem relações importantes entre as áreas de figuras planas. Na manipulação das peças, obtêm-se polígonos de formatos diferentes, mas com a mesma área.

Segundo Boyer (1974), na obra chinesa, assim como nas egípcias, são empregadas regras certas para as áreas de triângulos e trapézios, contudo não foram exibidas demonstrações. Essas foram desenvolvidas pela civilização grega, sendo essa cultura a responsável pela denominação, concebida a partir do desmembramento da palavra *geo* (terra) e *metria* (medida), e pelo desenvolvimento do processo de demonstração. Diferentemente dos egípcios, os gregos concebiam o conhecimento por intermédio de um embasamento lógico e não por procedimentos empíricos (PAVANELLO, 1989).

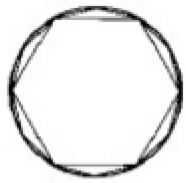
Na Babilônia, a medida da Área (A) era calculada do Perímetro (P) de um círculo por meio de um procedimento equivalente à fórmula:

$$A = \frac{P^2}{12}.$$

Os gregos utilizavam um método para medição de áreas, denominado de “quadratura”, sem recorrer aos números para o cálculo de medidas de áreas. Este procedimento consistia em construir um quadrado com área igual à de um círculo, usando régua e compasso.

[33] O Tangram é um jogo originário da China, contendo 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). A sua origem é incerta, uma vez que não se tem conhecimento do período em que surgiu nem de seu inventor, mas existem lendas a respeito da sua procedência (BOYER, 1974).

Figura 4 – Quadratura de um círculo



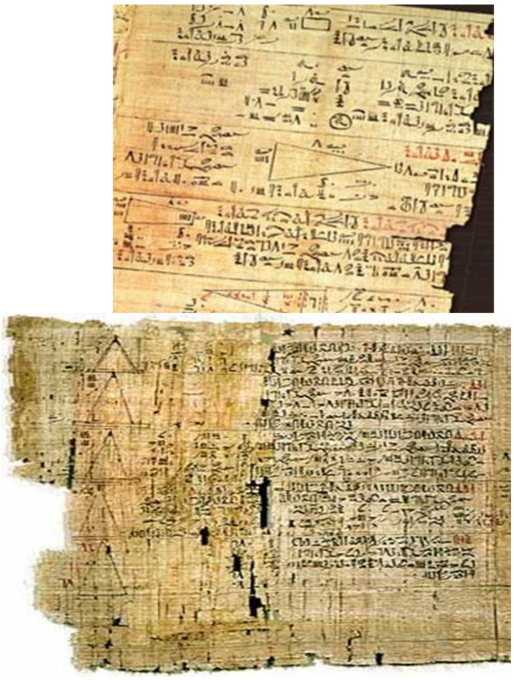
Fonte: BOYER, 1974, p. 68.

Portanto, não se tem conhecimento meticuloso sobre a origem da geometria, uma vez que existe uma série de versões para a sua gênese, visto que "os primórdios no assunto são mais antigos que a arte de escrever" (BOYER, 1974, p. 4). Mas, tem-se conhecimento que desde o homem pré-histórico já se via desenhos e figuras geométricas, que, em essência, são parte da geometria elementar, e de que os problemas com área de figuras planas constituem um tema milenar (BOYER, 1974). Enquanto o historiador grego Heródoto (485-425 a.C.) atribuiu a origem do conceito de área aos problemas de medição da terra, o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) admitia que foi o lazer sacerdotal que originou o estudo da geometria.

Conforme Eves (2004, p. 70), em aproximadamente 1650 a.C., no Egito, o então "egiptólogo escocês A. Henry Rhind" adquiriu o papiro Rhind[34] contendo oitenta e cinco (85) problemas copiados do escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Conforme Boyer e Merzbach (2012), também no papiro Rhind, foram encontrados problemas geométricos que tratavam de área. O papiro Rhind é composto por exercícios com suas respectivas soluções, em que se destina vinte deles à área dos campos e volume de celeiros (BOYER, 1974). Nesse papiro identificou-se que o cálculo de área de um retângulo pode ser desenvolvido multiplicando-se a base pela altura. Ainda segundo Boyer (1974), nesse documento foram encontrados problemas de geometria que utilizam a composição e decomposição de figuras.

[34] Documento adquirido em 1858 a. C. em uma cidade à beira do rio Nilo por um antiquário escocês chamado Henry Rhind. O papiro Rhind foi copiado pelo escriba Ahmes em 1650 a. C. de um trabalho mais antigo (BOYER, 1974). Traremos mais informações do papiro mais adiante, ao discutir sobre as questões que envolvem área de figuras planas.

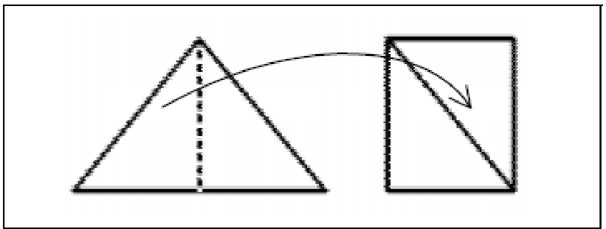
Figura 5 – Parte do papiro Rhind (XVII a.C.) exposto no Museu Britânico, em Londres.



Fonte: http: //www.acervosaber.com.br/trabalhos/historia_matematical/historia+da_matemática_17.php Acesso em: 10 set. 2015.

Além disso, no papiro Rhind, foi encontrado o problema de número 51 da obra *Os Elementos*, de Euclides (300 a.C.), que expõe: "a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura" (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 33). No papiro citado, encontra-se a justificativa de que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, em que, deslocando-se um deles, forma-se um retângulo, como mostra a figura a seguir; essa suposição, posteriormente, é vista na obra *Os Elementos*, de Euclides.

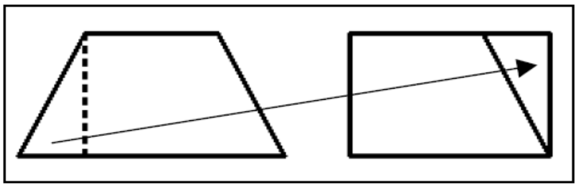
Figura 6 – Decomposição do triângulo isósceles e composição de retângulo



Fonte: *Os Elementos*, de Euclides (*apud* FACCO, 2003, p. 20).

O papiro Rhind também apresenta o mesmo tipo de raciocínio para o trapézio isósceles (problema 52 de Euclides), isto é, o trapézio isósceles foi decomposto e transformado em um retângulo.

Figura 7 – Decomposição do trapézio e composição do retângulo



Fonte: Os Elementos, de Euclides (*apud FACCO, 2003, p. 20).*

Nessas variações em que os "triângulos e trapézios isósceles foram transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruência e da ideia de demonstração em geometria, mas não há evidências de que esses povos foram além" (BOYER; MARZBACH, 2012, p. 33), tanto nos escritos babilônios quanto nos egípcios.

Segundo o historiador Boyer (1974), até então, a geometria usada pelos babilônios e egípcios era de natureza empírica, pois os povos utilizavam-na objetivando a resolução de problemas postos pelas necessidades de ordem prática.

Já a matemática grega inicia com "Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a. C.), perpassa por Pitágoras[35] e culmina com os notáveis elementos de Euclides (por volta dos 300 a. C.)" (EVES, 2004. p. 129). Conforme Moreira (2010), o conceito de Área tem uma íntima relação com o Teorema de Pitágoras $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Eves (2004), todavia, considera que essa proposição já era conhecida pelos povos antigos, muito antes do matemático Pitágoras de Samos (570-496 a.C.) apresentá-la.

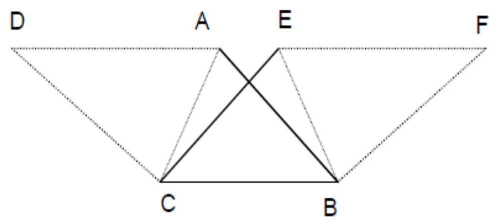
O clássico "*Os Elementos"*, surgiu no período de, aproximadamente, 300 a.C., e foi uma das obras mais discutidas pelos matemáticos, deixando um dos mais respeitáveis frutos da história da humanidade, sobretudo para os assuntos da geometria. Esse documento compõe de modo sistematizado as principais descobertas geométricas de todos os conhecimentos acumulados pelos seus antecessores sobre os documentos fundamentais. A referida obra, composta por 13 volumes, com 465 proposições, reuniu os principais frutos da geometria dedutiva, sendo que seis desses volumes são sobre geometria plana elementar (BOYER, 1974). No seu documento, Euclides "constrói seu modelo axiomático a partir de algumas

[35] Não se tem registros escritos das descobertas de Pitágoras, uma vez que os ensinamentos da escola eram orais e na época era costume de a irmandade atribuir todas as descobertas ao fundador, o próprio Pitágoras (BOYER, 1974).

definições, postulados e noções comuns, princípios aceitos sem demonstração” (MOREIRA, 2010, p. 23).

Segundo Moreira (2010), o conceito de área na obra *Os Elementos*, de Euclides, é trabalhado a partir de duas abordagens complementares: a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira, mas com o mesmo conteúdo). Nessa obra, a noção de área nasce a partir da igualdade entre dois paralelogramos, mencionada na proposição n. 36. Euclides apresenta que, se duas figuras quaisquer possuem a mesma base e a mesma altura, suas áreas são iguais (congruentes). Conforme Lima (1991), Euclides mostra que o paralelogramo ABCD e ECBF e os triângulos ABC e ECB possuem a mesma área, como mostra a figura a seguir:

Figura 8 – Paralelogramo e triângulos com áreas iguais



Fonte: Elementos, de Euclides (*apud* CHIUMMO, 1998, p. 23).

Conforme Moreira (2010, p. 23-24):

> Euclides não define formalmente o conceito de área, mas utiliza-se, no decorrer de sua exposição, a noção de que área é a superfície (conteúdo) de uma figura. Área é uma grandeza, é um atributo geométrico da figura. [...] Não há fórmulas para cálculo de áreas, nem a preocupação de atribuir valores numéricos a qualquer medida.

Ao fazer uma análise da obra de Euclides, Lima (1991, p. 24) apresenta a seguinte conjetura:

> duas figuras são chamadas iguais quando têm o mesmo comprimento, se forem segmentos, e a mesma área, se são figuras planas [...] Para Euclides a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. (Com efeito, o axioma quatro (4) dos elementos diz: duas figuras que coincidem por superposição são iguais). Para Euclides, o significado da palavra “iguais” é de que a figura em questão tem a mesma área.

Sobre esse assunto, Lima (1991) comenta que dois triângulos ou dois paralelogramos podem ter bases e alturas iguais sem serem congruentes. Concordamos com o argumento apresentado, uma vez que, podemos encontrar figuras planas com mesma área que não são congruentes. Também se têm conhecimento de que nos escritos de Euclides, emprega-se a composição e decomposição de figuras geométricas para a resolução dos seus problemas (BOYER, 1974).

No que se refere à área do círculo, nos *Elementos*, Euclides apenas provou no livro XII que:

> a área de dois círculos estão entre si como os quadrados do seu diâmetro, ou, o que é o mesmo dos seus raios. Indicando com A(r) a área de um círculo de raio r, isso significa que A(r) é diretamente proporcional a r^2, ou seja, que $A(r) = c \cdot r^2$, onde c independe do raio r. Euclides sabia também que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é uma constante d, independente da circunferência tomada, mas, não tratou nos Elementos de estimar os valores c e d (LIMA, 1991, p. 54).

Segundo Lima (1991), partiu de Arquimedes (287 a. C. – 212 a.C.) provar que tais números são as mesmas constantes; a essa constante, Euler chamou de π a partir do ano de 1737. Arquimedes estimou o valor de π um número entre $3\,\frac{10}{71}$ e $3\,\frac{10}{70}$ com algarismos decimais exatos até centésimos. O método de Arquimedes consistia em “inscrever um polígono regular num círculo de raio um (1) e ir dobrando o número de lados” (LIMA, 1991, p. 55). Todas as discussões por volta desse assunto levaram Arquimedes a calcular o lado (l) de um polígono de 96 lados (era uma aproximação para o comprimento da circunferência 2π) e 48 lados (era uma aproximação para o valor de π). Foram as contribuições, sobretudo de Arquimedes, que deram origem à fórmula de área de um círculo[36].

Por um bom período, a matemática grega ficou em evidência, indo aproximadamente de 600 a.C. a 600 d.C.; perpassou da Jônia até a Itália, Atenas, Alexandria, entre outras regiões – mas não só desses povos temos conhecimento de descobertas geométricas (BOYER, 1974). Por exemplo, no mundo árabe muçulmano, Al-Khawarizmi (aproximadamente, 780 d.C.), em seu resumo do cálculo por restauração e comparação, analisa e resolve as equações do segundo grau por considerações geométricas de áreas de um quadrado; com base na sua obra, criaram-se novos procedimentos para determinar área e volume.

Eves (2004), também expõe que no período do século V até o século XI “a civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos: o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu” (EVES, 2004, p. 289) e muitas das descobertas do mundo antigo foram esquecidas. Enquanto Boyer (1974) atribui ao período que vai dos séculos XII a XV pouco conhecimento sobre feitos na geometria; entre as raras produções, o autor cita a obra de Fibonacci, em 1220, com o título *Practica Geometriae*. O documento

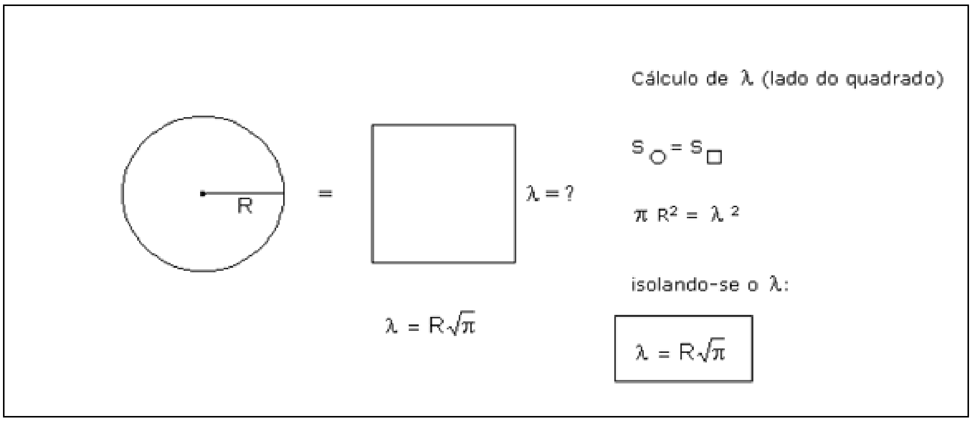
[36] Mais adiante, apresentamos a fórmula de área de um círculo definida por Lima (1991).

consiste em uma coletânea de materiais sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil com um enfoque no rigor euclidiano (EVES, 2004).

No século XVI outros matemáticos, como Christopher Clavius (1537-1612) e Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), publicaram uma edição de *Os Elementos*, de Euclides, além de outras publicações (EVES, 2004). No final do século XVI e início do século XVII, muitos comerciantes, cientistas e incentivadores da matemática perceberam que existia a necessidade de simplificar cálculos aritméticos e medidas geométricas, para que um maior número de pessoas tomasse parte das transações comerciais ocorridas na época, o que determinou um olhar apurado dos matemáticos para as questões da geometria (BOYER, 1974).

Ainda no século XVII, ressurgem as suposições sobre o conceito de área e os problemas de quadraturas; esses problemas comparavam duas figuras planas cuja área de uma delas era hipoteticamente conhecida. Posteriormente, esse problema é retomado com um olhar distinto do utilizado pelos gregos. Nesse período, buscou-se comparar as áreas de figuras, sabendo-se que a área de uma das figuras é conhecida. Atualmente, esse problema pode ser facilmente resolvido pelo campo da álgebra:

Figura 9 – Problema da quadratura do círculo desenvolvido algebricamente



Fonte: https://docs.ufpr.br/~jcvb/online/geo-1.pdf. Acesso em: 09 set. 2015.

Os estudos desenvolvidos ao longo dos tempos sobre área de figuras planas também contribuíram para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, no final do século XVII.

Boyer (1974) considera que a geometria voltou a ser esquecida pelos matemáticos, especialmente no século XVIII. Enquanto Miorim (1998) considera que esse século, pode ser considerado como aquele que se preocupou com a relação teórico-prática. Em referência ao desenvolvimento da Matemática, a autora evidencia a importância desse século, pois, segundo ela, foi o período em que "sucedeu o século em que a Matemática grega havia sido superada" e "precedeu o século do desenvolvimento da geometria e do rigor matemático" (MIORIM, 1998, p. 42). Além disso, nesse período se deu o aparecimento do cálculo diferencial e integral, com contribuições relevantes para o tema área.

No início do século XIX, as redescobertas geométricas foram retomadas a todo vapor; esse foi um período considerado por alguns historiadores como a idade de ouro da matemática (BOYER, 1074). Nessa ocasião, Teodoro Olivier (1793-1853) idealizou modelos geométricos para desenvolver conceitos da geometria, que, por sua vez, foram explorados por Felix Klein (1849-1925)[37]. Um destaque ocorrido nesse século foi o desenvolvimento da Teoria da Medida. Conforme Cabral (2016, p. 1):

> Uma medida num conjunto X é uma função que atribui um número real não negativo para subconjuntos de X. Pode ser interpretada como contagem, área, tamanho, massa, volume, capacidade térmica ou qualquer propriedade aditiva, i.e., uma propriedade tal que a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual a soma de suas medidas. [...] podemos enxergar a origem do conceito de medida no conceito de contagem, que pode ser generalizada de dois modos: (a) como cardinalidade (número de elementos), ou (b) como medida (comprimento, área, volume).

Nessa época, os postulados de Euclides foram retomados pelos matemáticos dos séculos XIX-XX, entre eles, Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943) e George David Birkhoff (1884-1944). Estes estudiosos perceberam que os dados propostos nos postulados eram insuficientes para provar os teoremas. Desses matemáticos, uma das grandes contribuições para a geometria foi dada pelo alemão David Hilbert. Hilbert analisou os postulados e expôs a concepção de que "os elementos de Euclides tinha uma estrutura dedutiva, certamente, mas estavam cheias de hipóteses ocultas, definições sem sentido e falhas lógicas" (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 410). Segundo Moreira (2010), Hilbert publicou uma obra em que desenvolve uma nova axiomática para a geometria a partir das inconsistências lógicas presentes na Geometria Euclidiana. Conforme Moreira (2010), Hilbert apresenta na sua obra uma teoria de área rigorosa, formalizando a noção de medida de área como:

> "igual conteúdo" usado sem definição por Euclides. O modelo de Hilbert estabelece uma correspondência entre a noção geométrica de "igual conteúdo" com a noção aritmética de "medida de área". A noção de igualdade de figuras proposta por Euclides, corresponderá a noção de igualdade de área (igual conteúdo) em Hilbert. Hilbert associa a cada figura, um número a medida de sua área (função área) [...]. Os axiomas do plano de Hilbert formam a base para as geometrias euclidiana e não-euclidiana sendo chamado de geometria neutra [...] (MOREIRA, 2010, p. 27).

[37] Klein (1909) defendia que as Transformações Geométricas são uma generalização da simples noção de função. (KLEIN, 1909 *apud* SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 312).

A influência das inúmeras civilizações e a interação crescente dos matemáticos nas distintas culturas, vieram para encerrar o final do século XIX e caracterizar o século XX (BOYER; MERZBACH, 2012). Nesse século, na década de 90 (noventa), o matemático Lima (1991) apresenta uma definição formal de área que deu origem às fórmulas de área de quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio. O autor mostra que se pode associar a cada polígono (P) um número real não negativo, denominando a área de P, com as seguintes propriedades:

> 1ª) Polígonos congruentes têm áreas iguais. 2ª) Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de P = 1. 3ª) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos P1,..., Pn tais que dois quaisquer deles tem em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos Pi. Segue-se de 3) que se o polígono P está contido no polígono Q, então a área de P é menor do que a área de Q (LIMA, 1991, p. 21).

Lima (1991) também retoma os estudos sobre área de um círculo apresentando que: se dois círculos com raios iguais são congruentes, possuem a mesma área, considerando que a área de um círculo de raio r é uma função desse raio. Se um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1 (um) sendo r a razão de semelhança. O que implica que a área de um círculo de raio r é r^2 multiplicada pela área de um círculo de raio 1(um). Como π é a área de um círculo de raio 1, a medida da área (A) de um círculo de raio (r) é dada pela fórmula $A = \pi \times r^2$.

Ainda na década de 1990 (noventa), o Brasil consolida uma das mais importantes leis da educação, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), em que regulamenta o ensino básico com uma base nacional comum, a ser completada pelas instituições escolares. Nessa década, o Brasil constitui os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) como um modelo a ser seguido pelas escolas, gerando mudanças educacionais; entre estas, a distribuição dos temas matemáticos. Estes foram distribuídos em quatro blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Foi a partir dessa composição que, no Brasil, as questões sobre área de figuras planas passaram a compor o bloco de conteúdos Grandezas e Medidas, até então, tratados no campo da geometria. Nesse período, Baltar (1996) endossa a concepção de Perrin-Glorian e Douady (1989), ao considerar área como grandeza[38], com a intenção de dar sentido ao conceito de área de figuras planas. A partir daí, pesquisadores, sobretudo da área de Educação Matemática e Didática da Matemática, se empenham nas discussões de propostas que sustentem um ensino de área com o foco nas dificuldades apontadas nas pesquisas sobre o tema em questão.

---

[38] Posteriormente no tópico 3.3, traremos as razões didáticas que justificam essa escolha.

Compreendemos a importância de uma abordagem sobre o tema área, do ponto de vista histórico e epistemológico, uma vez que, uma análise da sua origem e uma apreciação da evolução dos conceitos e do desenvolvimento dos fatos poderão motivar os professores a fazer reflexões didáticas que os façam criar situações que levem o estudante a uma possível aprendizagem.

Embora reconheçamos a importância desses estudos para a construção do significado do conceito de área, ponderamos que as questões geradas ao longo da História da civilização, podem ser analisadas sob o ponto de vista de estudos contemporâneos que justifiquem uma possível "razão de ser" do saber de referência área.

3.2 UMA POSSÍVEL "RAZÃO DE SER" DO SABER DE REFERÊNCIA, ÁREA

Uma das questões relevantes que merece ser retomada é o motivo que gerou a origem do tema área. Esse tema surgiu, sobretudo a partir de uma situação problemática, a da necessidade de medição de terras em antigas civilizações. Entretanto, tem-se conhecimento de que o foco desses povos não era o contexto geométrico, mas as aproximações numéricas que usavam na mensuração dos campos (BOYER, 1974).

Os problemas de comparação de área e de produção de superfície encontram-se presentes na História da Matemática, porém em contextos diferentes dos apresentados atualmente. Por exemplo, na proposição de n. 36 do Livro I de Euclides, constam que "os paralelogramos construídos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais entre si" (BELLEMAIN; BITTAR, 2002, p. 6); na linguagem contemporânea, essa proposição não trata de problema de medida, mas de comparação entre as áreas dos paralelogramos.

Ainda na formalização da noção de medida de área, Hilbert (1862-1943) estabelece uma equivalência entre a noção geométrica de "igual conteúdo" e a noção aritmética de "medida de área". Posteriormente, Douady e Perrin-Glorian (1989) consideram que as dificuldades referentes ao tema área emanam das diferentes concepções que esse tema oferece.

Existe uma persistência na busca por maneiras de solucionar problemas variados acerca do assunto, uma vez que, na contemporaneidade, esse tópico se faz presente em muitas situações. Por exemplo, quando se quer estabelecer a quantidade de terra a ser beneficiada para plantar uma determinada quantidade de grãos a serem consumidos; ou quando é necessário calcular o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU) aplicado para construções e/ou terrenos em função da área destinada àquela construção ou terreno (esse cálculo leva em consideração a área, entre outros dados); as obras empreendidas no campo da engenharia e arquitetura necessitam constantemente desse conhecimento para desenvolver seus cálculos e estimativas (metragem de uma planta baixa de um apartamento para assoalhar ou fazer assentamentos de pisos, ladrilhamentos, tamanho da área a ser pintada, entre outros); determinação da capacidade mínima em BTU/h de um aparelho de ar condicionado em ambientes sem exposição ao sol por metros quadrados (m²), entre outras situações.

3.3 ÁREA COMO GRANDEZA

Entender o conceito de área como grandeza é compreender certos princípios matemáticos referentes ao tema.

Uma situação a ser considerada, é a estrutura matemática do conceito de área de superfície planas definida por Douady e Perrin-Glorian (1989) e adotada por outros pesquisadores, entre eles Bellemain e Lima (2000), em que se levantou a hipótese de: construir área como grandeza autônoma, em que se busca distinguir área de superfície e área de número, com o intuito de se definir uma função medida que associe superfície a números reais positivos.

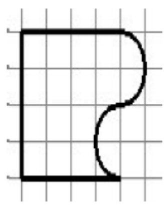
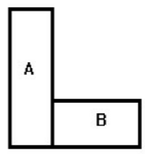
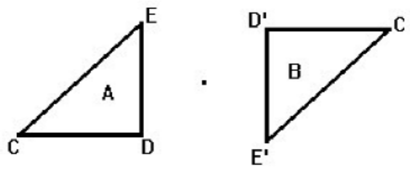
Bellemain e Lima (2000 *apud* SANTOS, 2011) apresentam o argumento de que a constituição do conceito de Área e o procedimento de medir área têm como ponto de partida "a definição de uma função f - dita função área - num conjunto S de superfícies, assumindo valores no conjunto dos números reais não negativos" (BELLEMAIN; LIMA, 2000 *apud* SANTOS, 2011, p. 18).

Os autores distinguem três propriedades para caracterizar a grandeza área, são elas:

> **Positividade** uma figura que possua interior não vazio tem área positiva; **Aditividade** se duas figuras A e B têm em comum pontos de suas fronteiras, então a área da figura AUB (A união de B) é a soma da área A com a área B; **Invariância por isometrias** se uma figura plana A é transformada em outra B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterado em B, então A e B têm a mesma área (BELLEMAIN; LIMA, 2000 *apud* SANTOS, 2011, p. 28, grifos do autor).

A figura a seguir ilustra as propriedades citadas:

Figuras 10, 11 e 12 – Propriedades para caracterizar a grandeza Área.

Positividade	Aditividade	Invariância por isometrias
	 	

Fonte: (BELLEMAIN; LIMA, 2000 *apud* SANTOS, 2011, p. 28).

Bellemain e Lima (2000), advertem que essas propriedades necessitam da caracterização do domínio (S) da função (f), o que significa identificar as superfícies mensuráveis pela função área, e, para isso, deve-se limitar a parte do plano ocupada por uma figura plana.

3.3.1 Contribuições para o Estudo de Área como Grandeza

Na década de oitenta, as pesquisadoras francesas Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) desenvolveram uma pesquisa motivadas pelos resultados obtidos a partir dos erros sobre áreas de superfícies planas nas avaliações de estudantes franceses e dos escritos provenientes de pesquisas no campo de Educação Matemática. O estudo foi realizado com estudantes de 9 (nove) a 12 (doze) anos, utilizando-se o quadro teórico dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros[39] para explorar área de superfície plana.

Nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), foram identificadas limitações por parte dos estudantes no que se refere à concepção de área de figuras planas. Entre os erros cometidos, destacam-se as compreensões sobre as concepções geométricas e as concepções numéricas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). O que conduziu Douady e Perrin-Glorian (1989) a afirmar que nessas situações, deve-se levar em conta que os erros cometidos

[39] Do ponto de vista epistemológico, a *dialética ferramenta-objeto* e o *jogo de quadros*, são instrumentos importantes para a análise de fenômenos de ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo matemático. Esse instrumento visa contribuir com o trabalho do professor em sala de aula. Segundo Douady (1986 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 62), a *dialética ferramenta-objeto* pode ser compreendida da seguinte maneira: "um conceito tem o estatuto de *ferramenta* quando interfere na resolução de um problema, e de *objeto* quando é identificado como conteúdo de aprendizagem" (DOUADY, 1986 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 62). Enquanto os *Jogos de quadros* são compreendidos como as mudanças utilizadas pelos professores quando escolhem problemas adequados no ato da elaboração das tarefas.

pelos alunos decorreram da dificuldade dos mesmos em distinguir: área de superfície e área de números.

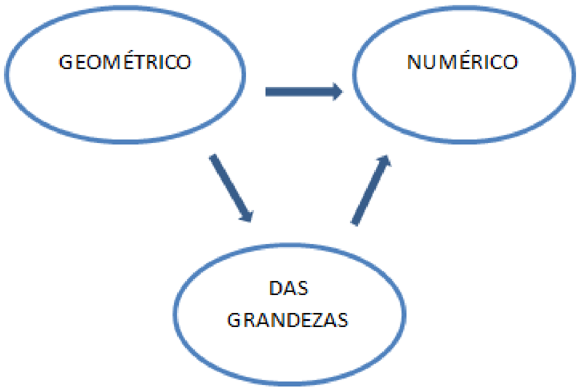
As autoras levantaram a seguinte hipótese: “o desenvolvimento, no ensino, do conceito de área como grandeza autônoma favorece o estabelecimento de relações entre os quadros geométricos e numéricos” (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 396); segundo as pesquisadoras, uma identificação precoce entre as grandezas e os números, leva os alunos a se confundirem sobre comprimento e área.

A partir das análises, as autoras citadas distinguem dois tipos de concepções, as geométricas e as numéricas:

> As dificuldades com os problemas que envolvem área, isto é, os erros e as lacunas decorrem da “concepção forma” e “concepção número”. Segundo as autoras, são duas concepções disjuntas, sem o devido estabelecimento de relações entre o campo geométrico e numérico (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 395).

Deste modo, as pesquisadoras Douady e Perrin-Glorian (1989) apontam concepções sobre as grandezas geométricas fundamentadas nas organizações conceituais de três quadros: o geométrico, o numérico e o das grandezas.

Figura 13 – Articulação entre os quadros.



Fonte: (BELLEMAIN; LIMA, 2002) adaptado pela pesquisadora (2017).

Na organização conceitual (fig. 13) desenvolvida, as autoras identificam o quadro geométrico composto pelas superfícies planas (retângulo, triângulo, figuras irregulares); o quadro numérico, composto pelas medidas das superfícies planas (números positivos); e o quadro das grandezas, composto por classes de equivalência de superfícies de mesma área.

Douady (1986 *apud* ALMOULOUD, 2007) argumenta que o emprego da mudança de quadro e do jogo de quadro é uma importante ferramenta quando se necessita explorar a capacidade de traduzir um problema de um campo para outro com a “finalidade específica de mobilizar outras ferramentas na resolução que não são as inicialmente encaminhadas” (ALMOULOUD, 2007, p. 64).

Deste modo, Douady e Perrin-Glorian (1989) inferem que os jogos entre os quadros geométricos e numéricos ampliam o conhecimento dos estudantes sobre áreas, medidas e números, e expõem que a relação de equivalência permite a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas; segundo elas, construir área como grandezas, impõe saber distinguir área de superfície e área de número. O argumento apresentado pelas pesquisadoras é de que essa compreensão faz com que o estudante aprenda a dissociar área e perímetro, e, assim, evita possíveis equívocos entre esses temas. Para Douady e Perrin-Glorian (1989), os erros emanam da concepção forma e da concepção número; portanto, são duas visões disjuntas, sem se estabelecer relações entre o campo geométrico e o numérico.

Para explorar tarefas localizadas no quadro geométrico, Douady e Perrin-Glorian (1989) propõem que se desenvolva a comparação com algumas superfícies, por deslocamento ou recorte e colagem. No quadro numérico, as autoras indicam que se trabalhe em busca do conhecimento de números inteiros e suas operações, que se procure fazer com que o estudante saiba associar um número a certas superfícies pelo cálculo do ladrilhamento de uma superfície de forma variada, e que se estabeleça também as semelhanças e diferenças entre área e perímetro. Legitimando as ideias de Douady e Perrin-Glorian (1989), os pesquisadores Lima e Bellemain (2010), mostram que é possível fazer comparações de grandezas sem usar medições, e avaliam esse procedimento como uma estratégia expressiva na aprendizagem inicial do conceito de área.

3.3.2 Situações que dão Sentido ao Conceito de Área

Iniciamos esta discussão a partir da pesquisa de Baltar (1996), para trazer elementos que justifiquem o que levou a autora a eleger as situações que dão sentido ao conceito de área.

Baltar (1996) apoiou-se na hipótese de que:

> o desenvolvimento do ensino do conceito de área visto como grandeza, permite aos alunos estabelecer relações necessárias entre dois quadros (geométricos e numéricos) e uma identificação precoce entre grandezas e números favorece a

> amálgama das diferentes grandezas (comprimento e área) (BALTAR, 1996, p. 52, tradução nossa).

A pesquisadora expõe que "a construção da noção de área como grandeza autônoma consiste em dissociar área de forma e distinguir área de números" (BALTAR, 1996, p. 52), uma vez que, superfícies de formas diferentes podem ter a mesma área e uma mesma área pode satisfazer a números diferentes se ocorrer a mudança da unidade de área. Conforme Baltar (1996), comparar as áreas de duas superfícies subentende determinar se elas pertencem à mesma classe de equivalência. A autora compreende classe de equivalência como Área como grandeza.

Na sua tese, foram reafirmados os erros encontrados por meio da pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989) e identificado o uso inapropriado das unidades de medidas e da aplicação da fórmula. Por exemplo, os estudantes utilizavam o centímetro (cm) para representar área, e centímetros quadrados (cm²) para representar perímetro; na aplicação das fórmulas, cometiam equívocos do tipo: Área = 2 vezes o perímetro ou Área = soma dos lados.

O argumento utilizado por Baltar (1996), no que se refere ao ensino de área e perímetro, é que entre essas variáveis são mobilizados muitos conceitos em jogo, entre eles, o conceito de área, de grandeza, de medida, de número, de perímetro, entre outros, e assegura que, em torno dos teoremas-em-ação sobre a definição de área, é possível fazer reagrupamentos que permitem mobilizar o conhecimento dos estudantes sobre a temática.

Na sua pesquisa, a autora expõe uma lista de teoremas em ação com a proposta de apresentar situações que dão sentido ao conceito de área[40]. Vejamos:

> TC1- a área é um espaço ocupado por uma superfície; TC2 - a área é o número de ladrilhos necessários para recobrir uma superfície; TC3 - a área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula; TC4 - a área é uma propriedade da superfície invariante por certas operações (uma grandeza) (BALTAR, 1996, p. 94).

Além desses, Baltar (1996) apresenta os teoremas-em-ação para todos os tipos de superfícies, teoremas-em-ação para superfícies usuais e teoremas-em-ação para a deformação do paralelismo[41] (BALTAR, 1996).

De acordo com Baltar (1996), o entendimento adequado das variáveis perímetro e área, é indispensável para a concepção dos conceitos enquanto grandezas. Na tentativa de dissociar área de perímetro, a autora procurou respostas a algumas indagações, entre elas:

---

[40] Discutiremos sobre essas situações no tópico 3.3.2.

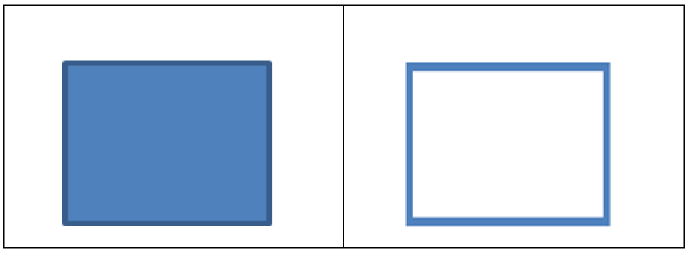
[41] Ver: BALTAR, P. M. *Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surfasse plane*: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au cóllege. 1996. p. 94-96. Tese (Doutorado em Didática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, França.

“quais as fontes de dificuldades dos alunos em relação à dissociação entre área e perímetro? Para os diferentes tipos de superfícies as dificuldades de aprendizagem são as mesmas? Há diferença?” (BALTAR, 1996, p. 64). As respostas a esses questionamentos oferecem elementos para “explorar” problemas sobre essas variáveis com o pressuposto de que é importante que se planeje um trabalho com o foco na compreensão desses conceitos.

Para justificar a confusão que os estudantes fazem entre os conceitos de área e perímetro, Baltar (1996) utilizou interpretações variadas, ou seja, considerou a diferença entre essas variáveis na perspectiva topológica, dimensional, computacional e variacional.

Baltar (1996) considera que, do ponto de vista topológico, os conceitos de área e perímetro são distintos, uma vez que a área é representada pela superfície e o perímetro pelo contorno, como mostra a figura a seguir:

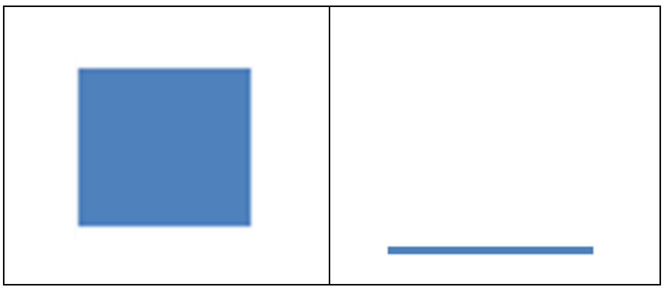
Figuras 14 e 15 – Topológico.



Fonte: Baltar 1996, *apud* SANTOS, 2011, p. 19

Na perspectiva dimensional, uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas diferentes (fig. 14 e 15).

Figuras 16 e 17 – Dimensional.

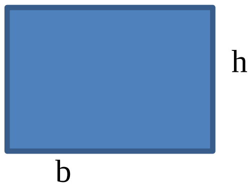


Fonte: Baltar 1996, *apud* SANTOS, 2011, p. 20

Nessas figuras, temos a representação de área, através da figura bidimensional (fig. 16) e a representação do perímetro através da figura unidimensional (fig. 17).

Na perspectiva computacional, a autora faz referência à aquisição das fórmulas de medida de área e perímetro de figuras usuais (fig. 18).

Figura 18 – Computacional.

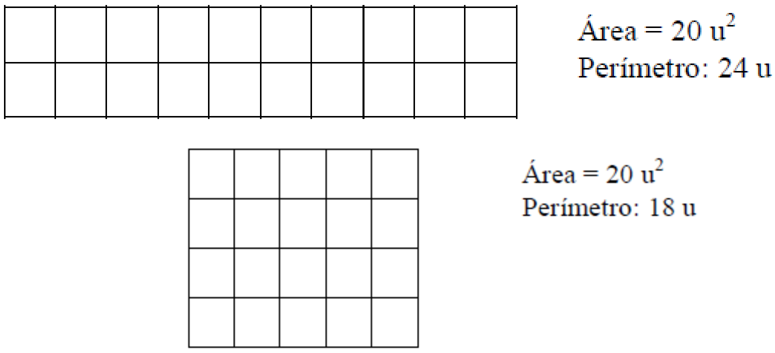


Fonte: Baltar, 1996 *apud* SANTOS, 2011, p. 20

Em que: **Área** = b . h e **Perímetro** = b + b+ h+ h = 2b +2h

Pelo ponto de vista variacional, incide sobre a compreensão de que área e perímetro podem variar diferentemente, o que significa afirmar que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.

Figuras 19 e 20 – Variacional.



Fonte: Baltar, 1996 *apud* SANTOS, 2011, p. 20

Nos exemplos dados (fig. 19 e 20), (u²) representa a área da superfície unitária, (unidade de área), estas podem ser empregadas por superfícies unitárias diferentes. Lima e Bellemain (2000) expõem que essa situação tem o propósito de fazer com que os estudantes identifiquem que a área de uma superfície plana é um objeto matemático diferente, uma vez que, superfícies diferentes podem ter a mesma área, como mostram as figuras. Deste modo, surgem evidências da importância de se articular os elementos geométrico e numérico para a construção do conceito de área.

Nos seus escritos, Baltar (1996) propõe três classes de situações que dão sentido ao conceito de área. São as situações de comparação, de medidas e de produção de superfícies. Nos seus estudos, Ferreira (2010) acrescenta as de mudança e de unidades.

Conforme Baltar (1996), as situações de comparação se estabelecem no quadro das grandezas; as situações de medidas estão situadas no quadro numérico e na mudança da grandeza ao número através da escolha da unidade de medida; e as situações de produção se sobressaem no campo geométrico. Essas situações são diferentes das anteriores por permitir encontrar respostas distintas para a mesma situação.

3.3.3 Outras Contribuições Referentes ao Estudo de Área

Grande parte dos trabalhos analisados alicerçados nas suas teorias, utilizaram como embasamento teórico os estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), entre eles: Chiummo (1998), Bellemain e Bittar (2002), Facco (2003), Baldini (2004), Magina et al (2006), Santos (2008), Pessoa (2010), Ferreira (2010), Lima e Bellemain (2010), Bento (2010), Silva (2011), Santos (2011), Paula (2011), Carvalho (2012).

Dentre estes estudos, algumas investigações desenvolveram uma Sequência Didática para ser aplicada com estudantes ou com professores, a exemplo de: Douady e Perrin-Glorian (1989), Chiummo (1998), Facco (2003), Baldini (2004), Magina et al (2006), Santos (2008), Pessoa (2010), Ferreira (2010), Bento (2010), Santos (2011). Outras realizaram uma análise de documentos, como Santos (2008), Ferreira (2010), Paula (2011), Carvalho (2012). Outras utilizaram jogos (PAULA, 2011) ou desenvolveram estudos usando o ambiente da geometria dinâmica – Baldini (2004) e Bento (2010). Nesse contexto, a seguir apresentamos um panorama dessas pesquisas.

Chiummo (1998) empreendeu um estudo da Transposição Didática (BROUSSEAU, 1986) do conceito de área, em que buscou compreender se esse conceito era trabalhado adequadamente. A autora apresenta a ideia de obstáculos didáticos e identifica que os obstáculos encontrados para o cálculo de área são de natureza epistemológica e didática, sendo isso atribuído ao escasso conhecimento dos professores.

Para desenvolver seu trabalho, Chiummo (1998) organizou uma sequência didática com professores, como proposta para o ensino-aprendizagem. O argumento utilizado pela pesquisadora para a escolha da sequência é que “reconhecer um obstáculo é reformular o contrato didático que os professores fazem com a classe” (CHIUMMO, 1998, p. 12). Nos seus estudos, a pesquisadora em questão notou que a abordagem proposta pelos professores do ensino fundamental não desenvolve nos alunos uma concepção do conceito de área que permita relacionar área de figuras planas e suas diferentes representações numéricas. Além disso, constatou que grande parte dos professores utiliza apenas as fórmulas para resolver as tarefas propostas em classe e não trabalham com a mudança de quadro de maneira adequada, já que os mesmos não levam os estudantes à construção de conceitos de área e perímetro.

Chiummo (1998) alega que, no momento em que o professor apresenta o conceito de área utilizando a fórmula, os estudantes compreendem bem; uma vez questionados sobre outro tipo de situação, não usam o conhecimento para uma nova situação, ou seja, não conseguem fazer a mudança de quadro. Portanto:

> um ensino e aprendizagem que não leva em consideração o jogo de quadros (numérico e geométrico), bem como o processo que facilita a aquisição do conceito de área poderá causar um obstáculo que intervém no processo de conhecimento dos alunos (CHIUMMO, 1998, p. 31).

Com seu estudo, Chiummo (1998) compreende ser possível reconhecer conhecimentos equivocados que se revelarão como obstáculo no desenvolvimento da compreensão do conceito.

Conforme Lima e Bellemain (2010, p. 187):

> as fórmulas têm um papel importante na resolução de problemas matemáticos, mas, para que cumpram esse papel a contento, é preciso que os alunos sejam capazes de utilizá-las com compreensão. Nesse caso, a compreensão das fórmulas exige que possamos entender a relação complexa existente entre comprimento e área. Além disso, há muitos problemas que envolvem a área de figuras geométricas planas e nos quais não é necessário utilizar fórmulas.

Nesse trecho, fica claro que Lima e Bellemain (2010) não discutem sobre a importância do uso da fórmula, mas indicam que, para que seja utilizada corretamente, é necessário que os estudantes compreendam o porquê do seu uso.

Facco (2003), que se fundamentou na dialética ferramenta-objeto de Régine Douady (1986 *apud* FACCO, 2003) e na Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1985 *apud* FACCO, 2003), buscou estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e aprendizagem, ao utilizar a composição e decomposição das figuras geométricas planas. Facco (2003), propõe um ensino do conceito de área como grandeza, como estratégia de trabalho, sob o argumento de subsidiar a escolha didática do professor, e indica atividades em que os estudantes estabeleçam a diferença entre perímetro e área, objetivando aprofundar os conceitos dessas variáveis. Para isso, utilizou a perspectiva de Douady e Perrin-Glorian (1989), quando explana que, para se chegar ao conceito de área, "é necessário saber que a área pode ser definida como classe de equivalência a partir de uma função medida, reconhecendo que se tem a mesma área a partir de recorte-colagens ou das medidas" (FACCO, 2003, p. 35). Na sua pesquisa, Facco (2003) planejou uma proposta de ensino para professores e alunos do 5º ao 8º ano (6º ao 9º ano), através de uma sequência didática. Entre as tarefas desenvolvidas, foram propostas várias sequências de atividades (tarefas) com o intuito de investigar se o estudante reconhecia formas e se sabia conceituar área. Foram exploradas tarefas de Área e suas grandezas unidimensionais, bidimensionais e feita a distinção entre perímetro e Área.

Ainda em Facco (2003), foram observados os avanços dos estudantes quanto à diferenciação entre perímetro e área e quanto à execução de cálculo de medida de área, após o desenvolvimento das atividades[42]. Na atividade em que explorou reconhecimento e conceito de área, Facco (2003) optou por utilizar materiais manipulativos[43] que representassem as figuras analisadas. Para essa escolha, a autora utiliza o argumento de Duval (1995 *apud* FACCO, 2003), ao afirmar "não ser possível estudar os fenômenos relativo aos conhecimentos sem recorrer à representação" (FACCO, 2003, p. 46). Também na sua pesquisa, a autora identificou certa confusão dos estudantes em dissociar área de perímetro, pois, segundo ela, essa dificuldade é um problema localizado no quadro geométrico e numérico, corroborando com as pesquisas desenvolvidas pelas autoras Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996). Além disso, Facco (2003) apresenta a ideia de que "os professores de matemática, apoiados em livros didáticos, introduzem o conceito de área como um número, associado a uma superfície e rapidamente passam ao cálculo da área, utilizando fórmulas" (FACCO, 2003, p. 31). Diante das análises referentes às atividades escolhidas para a sequência didática, a pesquisadora constatou que uma proposta de ensino e aprendizagem do conteúdo área enquanto grandeza serve de subsídio para o professor, como estratégia de ensino do tema área de figuras planas e/ou conteúdos que se relacionam à área.

A pesquisa desenvolvida por Baldini (2004) fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1986). Como metodologia, foi usada a Engenharia Didática de Artigue (1988 *apud* BALDINI, 2004) com o objetivo de "investigar se uma sequência didática utilizando o software Cabri-Géomètre II pode contribuir para a construção dos conceitos de área e perímetro" (BALDINI, 2004, p. 33). Os participantes da pesquisa foram 21 (vinte e um) estudantes na faixa etária de 15 (quinze) a 17 (dezessete) anos. O critério de escolha dos alunos foi de acordo com os resultados do pré-teste (alunos que não acertaram nenhuma questão, ou acertaram apenas 1 (uma) questão). Para essa investigação, a autora estabeleceu a seguinte hipótese: "um software de geometria dinâmica, mais especificamente o Cabri-Géomètre II, contribui para a construção dos conceitos de área e perímetro" (BALDINI, 2004, p. 53). Conforme Baldini (2004), o Cabri-Géomètre II é um software didático que possibilita o estudo da geometria elementar numa perspectiva próxima à

[42] Termo utilizado pela autora nas tarefas desenvolvidas na sequência didática.
[43] Termo utilizado pela autora para se referir aos materiais utilizados.

do papel-e-lápis (BALDINI, 2004). Segundo a pesquisadora, o software citado “oportuniza a investigação e exploração das propriedades das figuras geométricas por meio de sua característica dinâmica” (BALDINI, 2004, p. 29).

Na pesquisa, Baldini (2004) explorou atividades por meio de sequência didática relacionadas às construções e às medidas de área e perímetro. As análises das produções dos estudantes comprovam que o enfoque computacional por intermédio do software Cabri-Géomètre II pode ser uma escolha para a realização do ensino de área e perímetro, uma vez que contribui para a construção desses conceitos. De acordo com a autora, ao desenvolver uma sequência didática com o software Cabri-Géomètre II para explorar área e perímetro, foi verificado que possíveis dificuldades dos alunos sobre o tema podem estar relacionadas com a ausência de metodologias adequadas (BALDINI, 2004).

Na pesquisa desenvolvida por Magina et al (2006), fez-se um estudo diagnóstico com vistas à identificação de competências referentes aos conteúdos área e perímetro incididas por alunos do ensino fundamental e médio, tomando como referência a Teoria dos Campos Conceituais constituída por Vergnaud (1990 *apud* MAGINA et al, 2006). Os autores buscaram averiguar a compreensão dos alunos em relação a problemas de área e perímetro, identificando as possíveis dificuldades vivenciadas por professores de Matemática no ensino desses conteúdos, e compreender como estes analisam as produções e os erros dos alunos. A investigação foi aplicada com 460 (quatrocentos e sessenta) estudantes, em 6 (seis) instituições públicas estaduais, localizadas em São Paulo; desses educandos, 98 (noventa e oito) eram do 6º ano. Nas questões que solicitavam o cálculo de área de figuras planas, <u>todos</u> (grifo nosso) os estudantes do 6º e do 7º ano não souberam respondê-las. Segundo Magina et al (2006), esses dados identificam um fraco desempenho dos alunos pesquisados, ratificando que o assunto em pauta pode se tornar um empecilho para o ensino e aprendizagem do conteúdo em estudo.

Nos estudos de Santos (2008), analisou-se como as noções de área e perímetro são recomendadas nos documentos curriculares oficiais e nos livros didáticos. Nesse sentido, foi apresentada uma discussão sobre as Teorias da Didática da Matemática, sobretudo, a teoria de Robert (1997 *apud* SANTOS, 2008) a respeito dos níveis de conhecimentos esperados pelos educandos; de Duval (1993 *apud* SANTOS, 2008) e suas representações semióticas; de Douady (1992 *apud* SANTOS, 2008), sobre a mudança de quadro; e de Ausubel (1980 *apud* SANTOS, 2008), no trato dos aspectos de aprendizagem significativa. Além disso, foram analisados os conhecimentos de um grupo de sete (7) professores para ensinar essas noções, “contemplando as três vertentes do conhecimento consideradas por Shulman (2005 *apud*

SANTOS, 2008), que consistem em conhecimentos curriculares, didáticos e matemáticos do conteúdo a ser ensinado" (SANTOS, 2008, p. 7).

Na sua investigação, Santos (2008) verificou que os professores pesquisados possuem conhecimento matemático sobre o tema, entretanto, carecem de conhecimentos didáticos e curriculares que lhes possibilitem lançar mão de boas situações de aprendizagem. Nesse campo, a autora argumenta que o PCN oferece poucas referências no eixo das Grandezas e Medidas que favoreçam ao professor um trabalho eficiente sobre noções de área e perímetro em sala de aula.

Pessoa (2010) buscou diagnosticar os procedimentos empregados pelos estudantes do 6º ano do ensino fundamental na resolução de questões sobre o cálculo de áreas de figuras planas em malhas quadriculadas. Para desenvolver a investigação, adotou a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), especialmente no que se refere à noção de variáveis didáticas. O trabalho foi desenvolvido com 100 (cem) estudantes do 6º ano, distribuídos em 5 (cinco) escolas. Na investigação, Pessoa (2010) utiliza a "malha quadrangular numa perspectiva de auxiliar no processo de medição posto que a área é obtida ao comparar a unidade (geralmente o quadradinho) com a superfície a ser medida" (PESSOA, 2010, p. 24). Como técnica de resolução, emprega a composição e decomposição de figuras.

Com base na pesquisa realizada, a autora constata que um estudo efetivado com malha quadriculada favorece o ensino do tema área de figuras planas. Essa constatação se confirma nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), quando expõem que o uso do papel quadriculado auxilia na comparação de superfície, além de mobilizar uma concepção de área por meio da medida, obtida pela contagem dos quadradinhos.

Lima e Bellemain (2010) confirmam a importância desse material para o estudo do conceito de área, e advertem: "esse trabalho pode ser bem mais diversificado do que usualmente é, em sala de aula, se incluir malhas não só quadradas, mas também retangulares, triangulares ou com outras células básicas" (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 189).

Nos estudos de Ferreira (2010), propõe-se investigar a construção do conceito de área por educandos do 3º ciclo (6º e 7º ano) do ensino fundamental; para isso, foi realizada uma apreciação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de Livros Didáticos e aplicou-se uma sequência didática com estudantes. A pesquisa foi conduzida na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais[44] de Vergnaud (1990). Para desenvolver a investigação, Ferreira (2010)

[44] "A Teoria dos Campos Conceituais se propõe a discutir o comportamento cognitivo do sujeito diante de situações de aprendizagem, buscando compreender quais ações são desenvolvidas por ele, e de que forma são organizadas" (FERREIRA, 2010, p. 25).

empreendeu estudos para analisar procedimentos e o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem no dia a dia (teorema-em-ação). Para isso, buscou compreender as representações que os estudantes do 3º ciclo mobilizavam na abordagem do conceito de área como grandeza, com situações de comparação, medida, e produção (BALTAR, 1996) e mudança de unidade (FERREIRA, 2010).

Segundo Ferreira (2010), os resultados obtidos a partir das análises indicam que os PCN e os Livros didáticos apresentam situações em que predominam o quadro numérico com figuras poligonais. Além disso, Ferreira (2010) constata que há limitações na aprendizagem de área e perímetro, sobretudo no que se refere à dissociação entre as grandezas e situações que não contemplam a representação simbólica de figuras, entre outros problemas, ratificando a necessidade de novas pesquisas apontando situações que contribuam para a compreensão desses conceitos.

Bento (2010) buscou desenvolver sequências didáticas para explorar as potencialidades do software *GeoGebra* como instrumento mediador no processo de ensino e aprendizagem para compreensão de propriedades e conceitos de áreas, principalmente do retângulo e triângulo. Ademais, apresenta na pesquisa algumas considerações sobre o livro didático e sequências didáticas. Para isso, aplicou atividades com 8 (oito) estudantes de escolas públicas do Distrito Federal e com 2 (dois) professores. Ao final das atividades, os estudantes foram submetidos a uma avaliação, e foi constatado que, a partir do estudo, os alunos mostraram entendimento das propriedades e dos conceitos estudados.

A pesquisa de Santos (2011) propôs identificar problemas de ensino e aprendizagem relacionados às grandezas geométricas área e perímetro, cujo objetivo foi verificar "o entendimento dos alunos em relação a problemas de perímetro e área; identificar as possíveis dificuldades vivenciadas por professores de Matemática no ensino desses conceitos, e compreender como estes analisam as produções e os erros dos alunos" (SANTOS, 2011, p. 6). A pesquisa foi desenvolvida com 85 (oitenta e cinco) estudantes do 8º ano que responderam duas questões retiradas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) do ano de 2007 e do ano de 2008. Após a coleta dos dados, constatou-se que: apenas 21% dos estudantes acertaram a primeira questão e 16% dos alunos acertaram a segunda questão. Nessa pesquisa, foram entrevistados 13 (treze) alunos e observados 3 (três) professores de Matemática (SANTOS, 2011). Nas falas dos estudantes foram identificados problemas de ensino, visto que, os estudantes não compreendem os conceitos. Conforme Santos (2011), os professores revelam uma formação docente aquém do esperado, com práticas de ensino tradicionais, limitadas à memorização de conceitos com repetição de exercícios e oferecendo tarefas pouco significativas (SANTOS, 2011).

Ao analisar as produções dos alunos, Santos (2011) comprova que os conceitos de área e perímetro “não estão bem compreendidos por eles. Afinal, uma grande parcela confunde perímetro e área, [...], além de utilizarem, de maneira errônea, as fórmulas” (SANTOS, 2011, p. 78). Para Santos (2011), “o fazer docente do professor consiste fundamentalmente em transmitir um conteúdo pronto, onde o que se valoriza é o acúmulo de conhecimentos e a memorização, mesmo que temporária, de algoritmos e definições” (SANTOS, 2011, p. 87). Ao ponderar sobre as entrevistas feitas com os professores e estudantes, a autora verificou um jogo entre ambos. O professor atribui ao estudante indiferença e desinteresse pelo estudo, e o aluno atribui ao professor a responsabilidade dele não ter compreendido o conteúdo. Santos (2011) conclui seu trabalho alegando que é compreensível que um ensino pautado na transmissão e recepção passiva de informações não tem significado para os estudantes, não contribuindo, assim, para o desenvolvimento dos conceitos. Segundo a autora, essa prática de ensino voltada para a transmissão de informações de forma acabada é questionável, é destituída de significado (SANTOS, 2011).

Na pesquisa desenvolvida por Paula (2011), avaliou-se as potencialidades do ensino de área de figuras planas por meio de 6 (seis) atividades e 3 (três) jogos em duas turmas do 9º ano do ensino fundamental, embasados na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008). O autor adotou como suporte metodológico a Engenharia Didática de Artigue (1988), que o levou a fazer algumas inferências na perspectiva do professor e dos estudantes, tais como, levantar verificações empíricas, destacar as concepções dos professores e dos alunos para compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. Conforme Paula (2011), a escolha pelo jogo se deu por entender que este “possibilita aos alunos uma aprendizagem diferenciada que valoriza a imaginação a capacidade de pensar e raciocinar, levando-os a abstração de conhecimento matemático de forma espontânea, uma vez que, estes estão inerentes a essência do jogo” (PAULA, 2011, p. 37).

Para conhecer o ponto de vista do estudante, Paula (2011) procurou os alunos do 1º ano do ensino médio, por considerar que estes já estudaram o conteúdo área de figuras planas na série anterior; na investigação, buscou-se conhecer como se deu o ensino de área de figuras planas no 9º ano do ensino fundamental. O questionamento se reportou à metodologia utilizada pelo professor em relação às resoluções de situações problemas do cotidiano. Na pesquisa, o autor desenvolveu uma sondagem para tentar identificar as dificuldades encontradas pelos estudantes em relação ao conteúdo área. No seu estudo, Paula (2011) constatou que grande parte dos estudantes investigados não consegue resolver problemas voltados para o cálculo de área de figuras planas. Além disso, foi averiguado que os professores possuem formação inicial adequada para ensinar esse tema, porém ainda consideram que o ensino de área de figuras planas está apenas no campo da geometria. O pesquisador também identifica que o ensino continua apoiado na técnica, isto é, na repetição, visto que 34% (trinta e quatro por cento) dos professores utilizam o mesmo procedimento, ou seja, iniciam a sua aula pela definição, seguida de exemplos e exercícios. Na pesquisa, o investigador adverte que, mesmo com todas as discussões disponibilizadas através dos documentos oficiais, como os PCN (BRASIL, 1998), Programas Curriculares Estaduais e livros didáticos, foi verificados que temos professores que não abordam sobre o tema. Nesse estudo, também foi mostrado que o tema área de figuras planas se coloca distante do cotidiano dos estudantes, visto que os professores não apresentam as situações dentro do contexto social, o que contribui para que os educandos não resolvam esse tipo de questões, mesmo que estejam no 1º (primeiro) ano do ensino médio, já que apenas 10% (dez por cento) desses alunos declararam saber resolvê-las.

Carvalho (2012), apoiou-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD), idealizada por Chevallard (1999), para investigar como é abordado o conteúdo área de figuras planas no Guia de Estudo do aluno do Programa Projovem Urbano, com intenção de identificar as relações entre os princípios que regem o referido programa e a abordagem da área neste material, além disso, o pesquisador discutiu o abandono do assunto, que se fazia presente no Programa. O argumento usado pelo autor para desenvolver tal investigação é que, ao longo do seu trabalho na condição de docente, foram identificadas várias dificuldades dos estudantes; entre essas, a mudança de unidade de medidas e a dificuldade para compreender as unidades de área (m^2, cm^2, km^2). Na análise, o pesquisador observa que a palavra "área" aparece com múltiplos sentidos[45] no Guia de estudo, concluindo que esse fato "pode trazer consequências sobre a aprendizagem do sentido que se deseja atribuir na matemática escolar" (CARVALHO, 2012, p. 64).

Sobre esse assunto, Bellemain e Lima (2010) expõem que:

> A palavra área é usada na vida cotidiana com múltiplos sentidos, em expressões como: vende-se esta área; área de serviço; grande área de um campo de futebol etc. Alguns desses usos ajudam a dar sentido à área na matemática escolar, outros podem gerar entraves (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 187).

[45] "Você deve ler textos de outras áreas", "Quem não é da área que não dê palpite", "Calcule a área de cada um dos cômodos", "Existem políticas na área de educação", (CARVALHO, 2012, p. 59), ainda podemos citar outros significados.

Ao refletir sobre as pesquisas referidas, observamos que, em boa parte destas, foi identificado que os estudantes aplicavam indevidamente as fórmulas e utilizavam de modo equivocado as unidades de medidas, e, além disso, confundiam-se nas questões básicas sobre área, o que, muitas vezes, foi provocado pelas dissociações entre os conceitos de área e perímetro. Estes indicadores apontam que os estudantes apresentam dificuldades conceituais que comprometem o seu desempenho para o saber efetivo de questões sobre área de figuras planas.

3.3.3.1 Padrões de Tarefas Propostas pelos(as) Pesquisadores

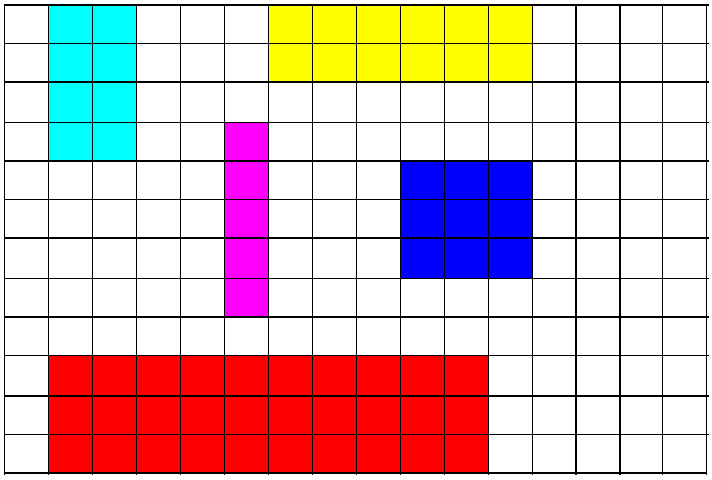
Nesse trecho, selecionamos tarefas propostas pelos pesquisadores referenciados para tentar ilustrar algumas possibilidades de institucionalização sobre o saber de referência AFP a serem desenvolvidas no 6° (sexto) ano do ensino fundamental.

Chiummo (1998) escolheu tarefas (T), denominadas de atividades com o professor, para serem desenvolvidas com os estudantes, em que explorou o jogo de quadros. Entre as tarefas consideradas para esse estudo, a autora optou por fazer com que o professor leve o aluno a sentir a necessidade de estabelecer uma relação entre os seus lados, além disso, trabalhar as propriedades associativa e comutativa.

Vejamos a seguir:

Figura 21 – Cálculo da medida de área e perímetro.

1) Temos abaixo cinco figuras geométricas planas.
   Calcule separadamente a área e o perímetro de cada figura.
2) Como você explicaria este tipo de exercício?
3) Você poderia criar alguma operação para o cálculo da área, e para o cálculo d perímetro para não ter que ficar contando quadradinhos todas as vezes que fc pedido para se calcular a área destas figuras?
4) Quais as vantagens em nível conceitual e didático de se abordar os conceito de área e perímetro a partir deste tipo de situação?



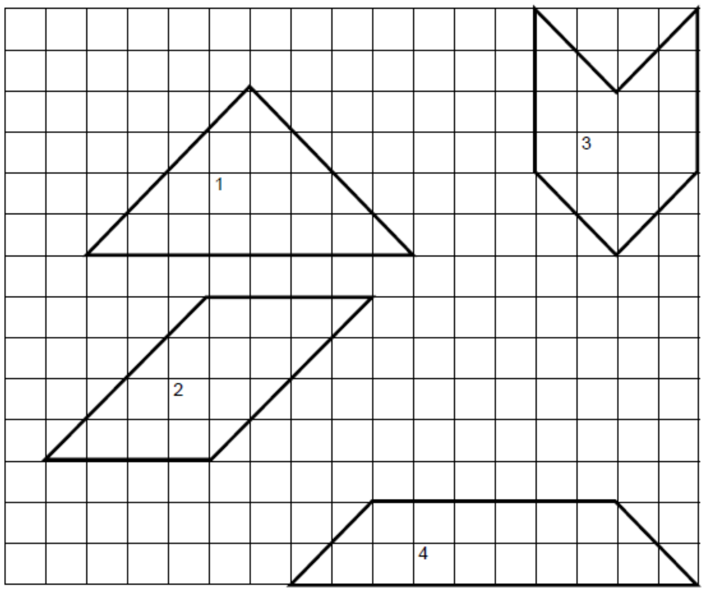
Fonte: CHIUMMO, 1998, p. 76.

Nessa tarefa, a institucionalização poderá ser feita com o professor solicitando ao estudante que calcule a medida da área e o perímetro de cada figura (a princípio, espera-se que os estudantes façam a contagem dos quadradinhos). O professor, entretanto, poderá instigá-lo a encontrar outras técnicas de resolução (b . h ou x . y, para medida da área; e 2b + 2h ou 2x + 2y, para perímetro), além de explorar as propriedades associativa e comutativa, como sugere a pesquisadora.

Na tarefa a seguir, buscou-se explorar a técnica da composição e decomposição e a passagem do quadro geométrico para o numérico.

Figura 22 – Cálculo da medida da área e perímetro pela composição e decomposição.

Observe as figuras geométricas que estão no quadriculado.

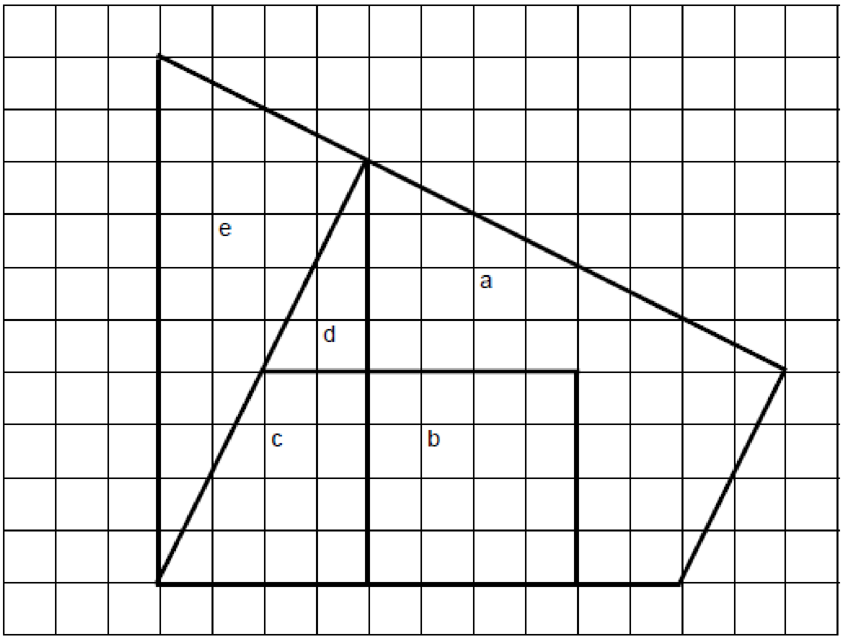


Fonte: CHIUMMO, 1998, p. 78.

Com esse tipo de tarefa, a autora sugere ao professor que use a composição e decomposição para transformar cada uma das figuras em retângulo/quadrado (CHIUMMO, 1998, p. 79). No tocante à tarefa referida (figura 23), a institucionalização pode ser feita com o professor solicitando que os estudantes componham e decomponham figuras a partir das figuras dadas. Nesse caso, o professor poderá estimular os educandos a perceberem que todas as figuras possuem a mesma área, questionando se os perímetros também são iguais, instigando-os a estabelecerem outras relações entre as figuras.

A seguir, a pesquisadora sugere um jogo de montagem de peças com o objetivo de que o professor explore a criatividade do aluno.

Figura 23 – Cálculo da medida da área pela composição e decomposição.

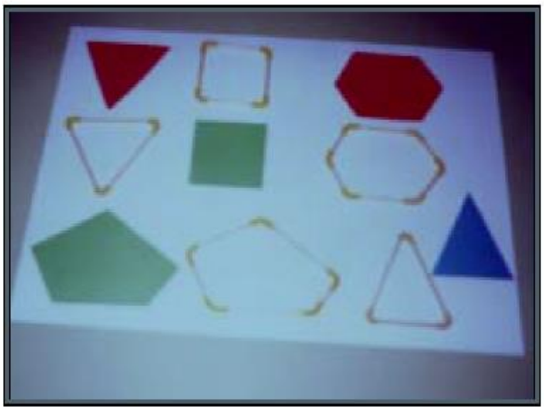


Fonte: CHIUMMO, 1998, p. 79.

Com as montagens das figuras, Chiummo (1998) explana que a tendência é chegar a uma figura retangular e à fórmula dessa figura (retângulo). Nesse caso, a institucionalização pode ser feita com o professor sugerindo que os alunos recortem as peças e montem e desmontem (composição e decomposição) figuras, para encontrar a área. Nessas tarefas, buscou-se o cálculo da medida da área, sem emprego da fórmula.

Nas tarefas propostas por Facco (2003), a autora objetiva trabalhar a compreensão dos alunos sobre área. Na tarefa a seguir, a finalidade foi identificar a diferença entre contorno e região interna de uma figura plana.

Figura 24 – Foto referente ao material didático da atividade 1.

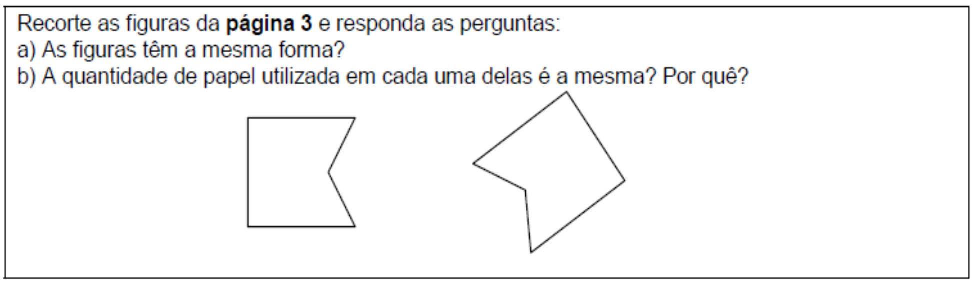


Fonte: FACCO, 2003, p. 48.

Com essa tarefa, a pesquisadora também observou três formas de processo cognitivo, analisado por Duval (1995), visualização, construção e raciocínio (DUVAL, 1995 *apud* FACCO, 2003). Após a aplicação, Facco (2003) concluiu que diversos estudantes afirmaram que “a figura possuía a mesma forma e alguns denominaram de triângulo, quadrado e retângulo, [...], o restante dos alunos, ou escreveu o próprio enunciado: um é de vareta e o outro de cartolina, ou não respondeu a questão” (FACCO, 2003, p. 48). Com essa resposta, foi constatado que os alunos possuem ideias equivocadas sobre o conceito de área e não estabelecem a diferença entre área e perímetro. Nessa tarefa, no momento da institucionalização, cabe ao professor buscar estabelecer a diferença entre esses elementos.

Facco (2003) ainda sugere uma atividade que busque identificar formas de figuras por meio de classes de figuras poligonais, e áreas diferentes em figuras de mesma forma, como mostra o exemplo a seguir:

Figura 25 – Exercício: Identificação de formas de figuras e de áreas diferentes em figuras de mesma forma.



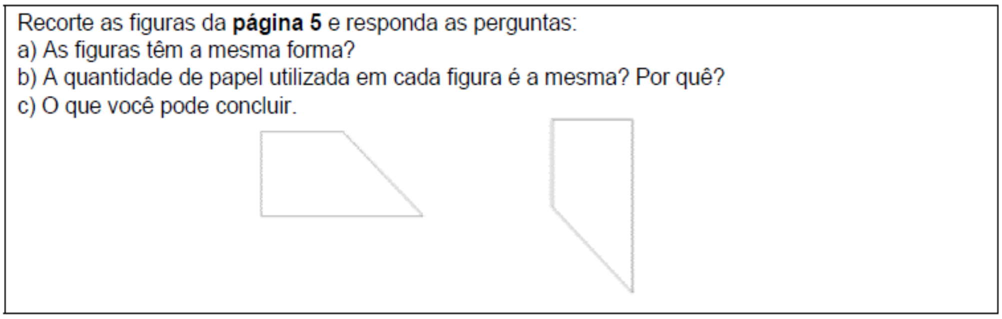
Recorte as figuras da **página 3** e responda as perguntas:
a) As figuras têm a mesma forma?
b) A quantidade de papel utilizada em cada uma delas é a mesma? Por quê?

Fonte: FACCO, 2003, p. 51.

Com a atividade, buscou-se, a princípio, que os estudantes respondessem que a figura possui a mesma forma, de acordo com o "processo de visualização, apresentado por Duval (1994)" (FACCO, 2003, p. 52). Com a análise dos resultados, constatou-se uma unanimidade no erro, uma vez que, todos os estudantes afirmaram que as figuras possuíam a mesma forma e a mesma área pelo fato de as figuras possuírem o mesmo formato e serem visivelmente próximas da mesma quantidade de papel[46]. Após o professor instigar os estudantes a recortarem as figuras para a constatação da resposta, 81% desses estudantes chegaram à conclusão de que as áreas eram diferentes. Consideramos essa, uma maneira eficiente de estimular os estudantes a verificar o resultado.

Na atividade seguinte, Facco (2003, p. 58) apresenta duas figuras que contêm a mesma forma e a mesma área.

Figura 26 – Exercício: Compreensão quanto à forma e ao uso de sobreposição.



Fonte: FACCO, 2003, p. 58.

Para resolver a tarefa, a estratégia utilizada pelos estudantes foi recortar as figuras para comprovar se as áreas eram iguais ou diferentes, ou seja, não "arriscaram" uma resposta imediata, como feito na tarefa anterior, uma vez que tiveram uma percepção visual equivocada; portanto, é aceitável que eles utilizem essa estratégia para confirmarem a percepção inicial, o que resultou em cem por cento (100%) de acertos. Nesse caso, podemos concluir que os estudantes se apropriaram da superposição da figura na tentativa de comprovar que as áreas são iguais. Com essa experiência, a autora ratifica que a comparação das figuras é um processo acertado para se identificar área de figuras planas. Para as duas tarefas anteriores, no momento da institucionalização, o professor poderá questionar os estudantes sobre as observações feitas para se chegar à conclusão de que podem existir figuras

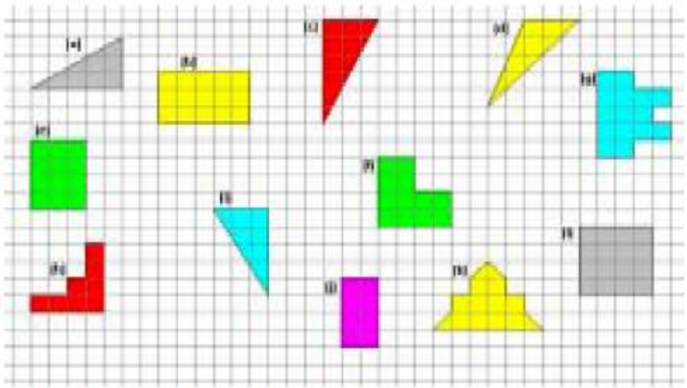
[46] Termo utilizado no início da atividade para representar o preenchimento da área da figura. Foi utilizado para representar a área da figura.

de mesma forma com áreas iguais ou figuras de mesma forma com áreas diferentes. Além disso, na sua fala, o professor pode substituir o termo “quantidade de papel” pelo termo área da figura.

Facco (2003) ainda propõe questões de área enquanto grandeza unidimensional, em que utiliza a comparação de figuras e a contagem de medidas de área para explorar a mudança entre o quadro geométrico e o numérico. A autora recomendou vários tipos de tarefas, algumas com malhas quadriculadas, outras com malhas triangulares, em que se emprega a contagem das unidades (aferição de área) que compõem a figura, para que os estudantes percebam que o espaço ocupado pela figura representa a sua área. Ver figura a seguir:

Figura 27 – Exercício: Área enquanto grandeza unidimensional.

Observe as figuras abaixo.



a) Identifique aquelas que têm a mesma forma.

b) Identifique as que têm a mesma quantidade de papel.

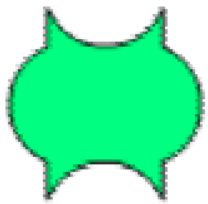
c) A área depende da forma da figura? Dê um exemplo.

Fonte: FACCO, 2003, p. 61.

O argumento utilizado pela autora para esse tipo de tarefa foi de que: a verificação de área de figuras planas usando a contagem dos quadradinhos preenchidos, possibilita o reconhecimento de que existem figuras com formas diferentes que possuem a mesma área, e que, figuras com a mesma forma, podem ter áreas iguais ou diferentes, fazendo com que o estudante presuma que o espaço ocupado pela figura representa a sua área. A tarefa citada envolve muitos elementos a serem analisados, e, portanto, o processo de institucionalização desse tipo de tarefa exige cautela, uma vez que o professor deve estimular os estudantes a perceberem que existem figuras de mesma forma com áreas diferentes, figuras de formas diferentes com áreas iguais, além de observar os quadradinhos incompletos e as várias categorias de figuras. Também pode-se utilizar esse tipo de tarefa para explorar a dissociação entre área e perímetro, ou usar a sobreposição de figuras, pela razão que, nesse ano de escolaridade, é conveniente essa técnica de resolução.

Facco (2003) também explorou figuras com formatos curvilíneos. Para resolver, o estudante utilizou a técnica da decomposição e recomposição de figuras planas.

Figura 28 – Figura com formas circulares.

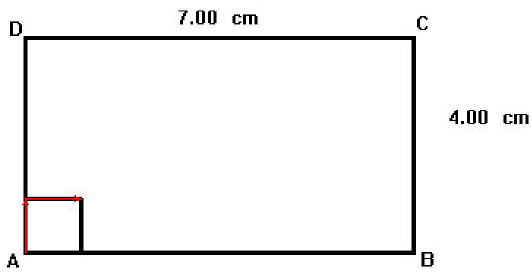


Fonte: FACCO, 2003, p. 130.

Conforme Facco (2003), com essa tarefa objetivou-se fazer com que os estudantes percebessem "que qualquer figura geométrica plana pode ser decomposta ou composta em várias subfiguras, para possibilitar o cálculo de medida de área" (FACCO, 2003, p. 130). Para esse tipo de tarefa, o professor pode incentivar os estudantes a fazerem tracejados internos ou externos, de modo a transformar as imagens em figuras familiares. Nesse tipo de tarefa, o professor pode instigar ainda a técnica da decomposição e composição de figuras planas.

Em Baldini (2004), elegemos mostrar 3 (três) tarefas propostas para explorar os conceitos de área e perímetro. A primeira tarefa consiste em construir um retângulo de 7 (sete) cm de comprimento por 4 cm de largura e completar com quadrinhos de um centímetro de lado (1cm x 1cm) a região interna do retângulo (BALDINI, 2004).

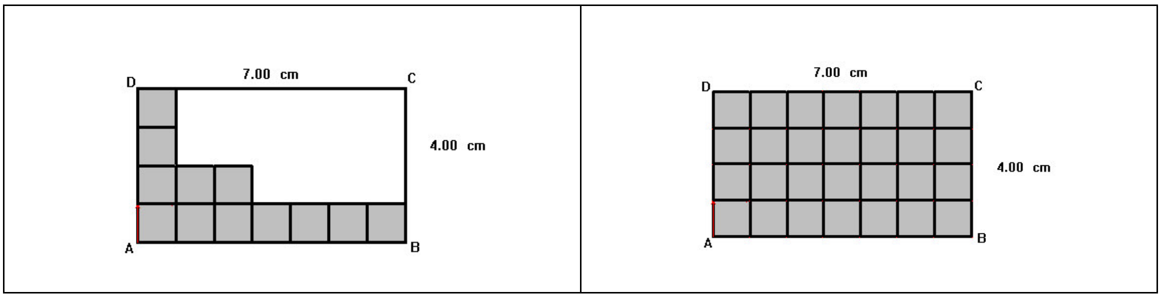
Figura 29 – Construção do conceito de área através do Cabri II.



Fonte: BALDINI, 2004, p. 112.

Esses quadradinhos foram tomados como unidade de área. O desafio inicial foi fazer uma estimativa de quantos quadradinhos tomados são necessários para cobrir o retângulo maior.

Figuras 30 e 31 – Construção do conceito de área do retângulo.



Fonte: BALDINI, 2004, p. 113.

Em seguida, é proposto a validação dessa estimativa por meio das ferramentas adequadas do Cabri II, isto é, o preenchimento do retângulo utilizando-se um quadradinho de cada vez (formulação).

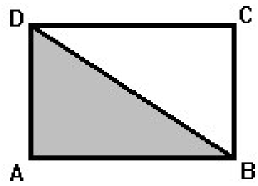
Na representação gráfica foi possível institucionalizar que a medida da área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura, ou seja, A = base x altura. Na concepção de Baldini (2004), ao criar outras medidas para os lados do retângulo, os alunos estarão validando a fórmula e aplicando esses conhecimentos na mídia lápis-e-papel.

Segundo a autora, essa tarefa oferece condições do estudante construir o conceito de área no campo geométrico, no campo numérico e no campo das grandezas, oportunizando o cálculo de área de uma figura por meio da comparação com a área de outra.

A segunda tarefa consiste na “construção da fórmula utilizada para calcular a medida da área do quadrado e exploração da ideia de que a área de uma superfície é expressa por um número que depende da unidade. Definição de área” (BALDINI, 2004, p. 114). Para desenvolver a tarefa foi sugerido o mesmo procedimento de resolução da questão anterior. Esta teve o objetivo de fazer com que os estudantes percebessem que a medida da área de uma mesma superfície pode corresponder a números diferentes. Portanto, a pesquisadora propôs que os educandos fizessem a mesma tarefa, adotando 1 cm (um centímetro) e 2 cm (dois centímetros) como unidade de área.

A terceira tarefa consiste em comparar a área do retângulo com a área de um triângulo a partir da construção da figura ABCD.

Figura 32 – Construção do conceito de área do triângulo.



Fonte: BALDINI, 2004, p. 113.

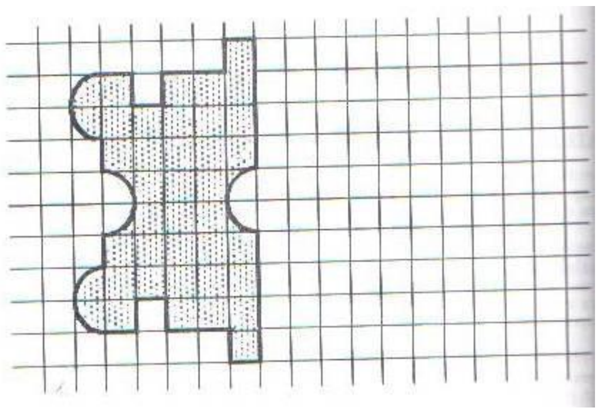
Nessa tarefa, a autora busca fazer com que o estudante compreenda a relação existente entre as medidas das áreas do retângulo e do triângulo, ou seja, procura mostrar que os triângulos (ABD) e (BCD) possuem base e alturas equivalentes ao retângulo (ABCD), estabelecendo uma relação entre a base e a altura dessas duas figuras (triângulos e retângulo), para, a partir daí, concluir que a área do triângulo corresponde à metade da área do retângulo, identificado pelos estudantes, "através da movimentação dos vértices, é possível perceber que essa relação permanece constante" (BALDINI, 2004, p. 118).

Da pesquisa de Santos (2008), elegemos mostrar uma tarefa selecionada pela autora, sobretudo, para conhecer a análise desenvolvida na perspectiva da teoria escolhida[47].

Figura 33 – Tarefa para ser analisada.

Construir um quadrilátero com a mesma área que a superfície hachurada.

O quadrilátero que você construiu tem o mesmo perímetro que a figura do problema? Justifique sua resposta.



Fonte: Combes et.al. 1996 apud SANTOS, 2008, p. 89.

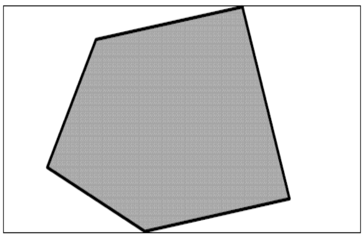
[47] Essa tarefa foi analisada mediante os Estudos de Robert sobre os Níveis de Conhecimento Esperados dos Educandos (SANTOS, 2008).

Santos (2008), considera que a tarefa proposta tem como enunciado o registro discursivo e o registro figural (SANTOS, 2008); portanto, é necessário para sua solução, a construção de um desenho que envolva o conhecimento conceitual de área e perímetro. Para a autora, "essa tarefa está associada ao nível mobilizável e depende de uma reconfiguração e de conceitos que para o educando não é simples, se as noções de área e perímetro forem sistematizadas em aula por meio de fórmulas" (SANTOS, 2008, p. 89).

Para essa tarefa, a autora alega que solicitar uma justificativa dos estudantes acerca dos resultados, acrescenta à tarefa certa complexidade. Compreendemos que nessa tarefa a institucionalização pode ser desenvolvida pela decomposição da figura e compensação das partes circulares. Além disso, o professor pode estimular os estudantes a justificarem oralmente e transcreverem a justificativa exposta.

Na pesquisa de Pessoa (2010), é mostrada a figura de um pentágono irregular e solicitada a sua área. A proposta é obter a área de uma figura não usual, mesmo sem conhecer as medidas (lado, altura etc.).

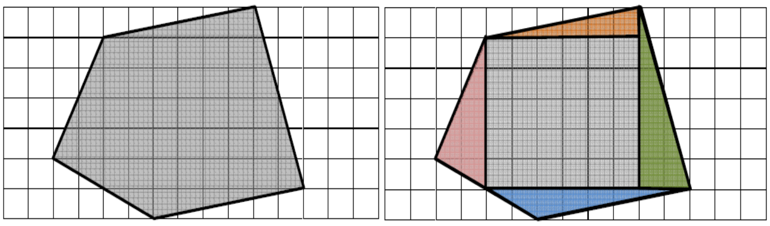
Figura 34 – Pentágono irregular.



Fonte: PESSOA, 2010, p. 31.

Para resolver a tarefa, a autora recomenda uma estratégia de enquadramento da figura plana na malha quadrangular. Pessoa (2010) apresenta o argumento de que "dependendo da disposição da figura, sem a malha, não seria possível determinar a medida de sua área, como é o caso daquelas que não possuem lados apoiados na linha da malha" (PESSOA, 2010, p. 32). Segundo Pessoa (2010), fica difícil calcular a área, visto que, não foi dada nenhuma medida.

Figuras 35 e 36 – Pentágonos irregulares.



Fonte: PESSOA, 2010, p. 32.

Pessoa (2010) argumenta que ao colocar a figura na malha quadrangular, o desenho passa a ter os valores das medidas, com o papel quadriculado separado por figuras conhecidas; sendo assim, a autora considera que existe a possibilidade de fazer o cálculo da medida da área da figura original subdividindo-a por partes. A figura foi subdividida em quatro triângulos e um retângulo, com medidas conhecidas, logo, a área da figura original é a soma das áreas do retângulo e dos triângulos.

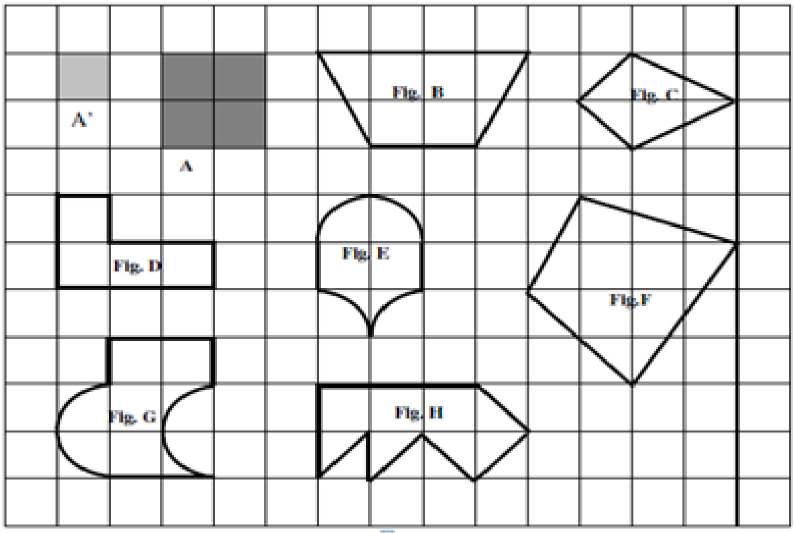
Conforme Pessoa (2010), os resultados constataram que o "uso da malha quadriculada propicia a operação da medida de área através de contagem de quadradinhos [...], nesse processo estamos realizando duas operações distintas, uma geométrica e outra numérica" (PESSOA, 2010, p. 106). Pessoa (2010) pondera que, nessa tarefa, a operação geométrica corresponde a cobrir a figura (ladrilhar), e a operação numérica constitui a contagem da quantidade de superfície unitária que couber na figura. Portanto, podemos conjecturar que um processo de institucionalização com o uso de malha, favorece a compreensão da operação geométrica e da numérica.

Na sequência didática desenvolvida por Ferreira (2010), selecionamos 3 (três) exemplos, apresentados pela autora como tarefas que consideram situações que dão sentido ao conceito de áreas (BALTAR, 1996). Na primeira tarefa, foi entregue um envelope contendo quatro figuras distintas em que foi solicitado para o estudante: observar as figuras e verificar se entre elas existem figuras de áreas iguais. Posteriormente, ordenar as figuras, daquelas que têm menor área às que têm maior área (FERREIRA, 2010). De acordo com a autora, esse tipo de tarefa é uma típica situação de "comparação de área de superfícies quaisquer, na qual privilegiam-se a articulação entre o quadro geométrico e o quadro das grandezas" (FERREIRA, 2010, p. 89).

Na concepção de Douady e Perrin-Glorian (1989), quando um estudante compreende a área enquanto um atributo da figura, sem o emprego do quadro numérico, ocorre com facilidade a compreensão do conceito de área enquanto grandeza autônoma. Conforme Ferreira (2010), a não disponibilidade de material facilita a comparação de superfície duas a duas por superposição e a ordenação entre as figuras. Para a autora, nessa tarefa os estudantes mobilizam os conceitos de área, de superfície e de contornos.

A segunda tarefa consiste em observar as superfícies desenhadas sobre a malha quadriculada e responder as questões:

Figura 37 – Situação de medida e de comparação utilizando-se material.



a) Entre as superfícies, quais as que possuem área menor que a de A? Justifique sua resposta.
b) Entre as superfícies, quais as que possuem área maior que a de A? Justifique sua resposta.
c) Entre as superfícies, quais as que possuem mesma área que a de A? Justifique sua resposta.
d) Se a medida da área do quadrado A é 1cm², qual a medida de área do quadrado A' em cm²? Justifique sua resposta.

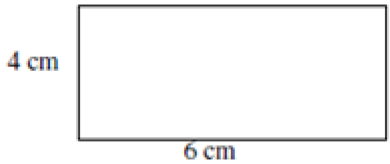
Fonte: FERREIRA, 2010, p. 92.

Conforme Ferreira (2010), na tarefa se constitui uma situação de comparação e de medidas a partir da figura A com as outras figuras, com o intuito de averiguar "a disponibilidade dos procedimentos de pavimentação, decomposição e composição, adição e subtração de áreas para a medida das áreas das figuras e a disponibilidade de procedimentos numéricos da comparação de áreas" (FERREIRA, 2010, p. 92).

Julgamos essa tarefa de grande relevância, visto que, numa única tarefa utilizam-se técnicas variadas, por exemplo: contagem dos quadradinhos explorando o quadro numérico; técnica da composição e decomposição quadro geométrico) e identificação da unidade de medida (item d). Na técnica da contagem, a institucionalização pode ser através da compreensão de quantas unidades de medida de área cabem na figura. Assim, a institucionalização para esse tipo de tarefa pode ocorrer de diferentes maneiras, por intermédio da técnica de contagem e composição e decomposição.

Na terceira tarefa é dado um retângulo com lados medindo 4 cm e 6 cm, e solicitadas as questões a seguir:

Figura 38 – Situação de Produção de superfície.



a) Desenhe uma superfície de mesma área que a de A. Justifique sua resposta.
b) Desenhe uma superfície com área menor que a de A e o perímetro maior que o de A. Justifique sua resposta.
c) Desenhe um retângulo com área menor que a de A. Justifique sua resposta.
d) Desenhe um retângulo com mesma área que A e de perímetro maior que o de A. Justifique sua resposta.
e) Desenhe um retângulo com mesmo perímetro que o de A e de área menor que a de A. Justifique sua resposta.
f) Desenhe um retângulo com área menor que a de A e de perímetro maior que o de A. Justifique sua resposta.

Fonte: FERREIRA, 2010, p. 95.

A tarefa se refere a uma situação de produção a partir de uma superfície dada; segundo Ferreira (2010), esse tipo de tarefa gera a dissociação entre área e perímetro, em razão de utilizar-se a medida em centímetros quadrados (cm²) para representar a área, e em centímetros (cm) para representar o perímetro.

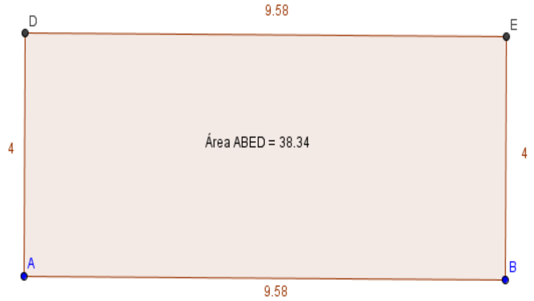
Para resolver a tarefa, o educando necessita calcular a medida de área e o perímetro do retângulo dado, para, a partir daí, desenhar as figuras geométricas de acordo com as condições impostas pela questão. Esse procedimento admite a articulação entre os três quadros: geométricos, numéricos e das grandezas. Nessa tarefa, são identificadas as técnicas da utilização da fórmula e a técnica da comparação.

A institucionalização para esse tipo de tarefa pode ser eficaz, se o professor solicitar ao estudante que desenvolva a questão, transcreva e justifique oralmente a estratégia utilizada.

Na pesquisa de Bento (2010), foi investigado a respeito da área de retângulo e triângulo por meio da manipulação do software GeoGebra, entre outras atividades. Nesse contexto de estudo, utilizamos uma tarefa que consiste em construir um retângulo no software e verificar suas propriedades.

De acordo com o autor, nessa tarefa o objetivo é desenvolver habilidades de compreensão de área de um retângulo e de um triângulo usando-se a estratégia de alterar as figuras planas.

Figura 39 – Retângulos construídos no *GeoGebra*.



Fonte: BENTO, 2010, p. 60.

Após a construção do retângulo, foi solicitado que os estudantes modificassem três vezes a figura (figura 39) e anotassem os resultados no quadro (figura 40).

Figura 40– Quadro com dados das modificações[48].

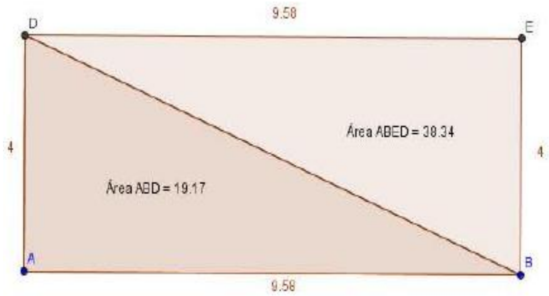
ED	**EB**	**ED x EB**	**Área ABED (no computador)**

Fonte: BENTO, 2010, p. 60.

Na segunda parte da aula, foi solicitado que os estudantes construíssem um retângulo e traçassem a diagonal para verificar que existem dois triângulos dentro do retângulo. Após esse processo, foi requerido que os estudantes modificassem a figura e anotassem no quadro (fig. 42).

[48] Onde se lê "Área ABED", leia-se "Medida da Área ABED".

Figura 41 – Retângulos construídos no *GeoGebra*.



Fonte: BENTO, 2010, p. 61.

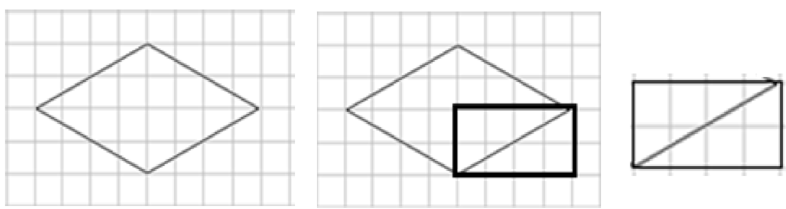
Figura 42 – Quadro com dados das modificações[49].

AB	AD	$\frac{AB \times AD}{2}$	Área ABD (no computador)

Fonte: BENTO, 2010, p. 61.

Na tarefa proposta por Paula (2011), foi entregue uma folha com a figura do losango e solicitados os seguintes procedimentos:

Figura 43 – Medida de área do losango utilizando a malha.



Procedimentos

- Considere o lado de um quadradinho do quadriculado como unidade de comprimento;
- Considere um quadradinho do papel quadriculado como unidade de área;
- Determine a medida da diagonal menor de cada losango da folha de losangos;
- Determine a medida da diagonal maior de cada losango da folha de losangos;
- Determine a medida da área de cada losango da folha de losangos

Fonte: PAULA, 2011, p. 101.

[49] Onde se lê "Área ABD", leia-se "Medida da Área ABD"

Segundo Paula (2011), nessa atividade os estudantes deverão decompor o losango em outras figuras; como os losangos possuem um sistema de simetria, basta que o educando some as medidas de áreas quatro vezes, ou simplesmente multiplique sua medida de área por quatro. Como se vê, esse tipo de atividade induz à elaboração de estratégias didáticas, o que admite o surgimento de situações didáticas, sugeridas por Brousseau (2008), que permearão a resolução da atividade.

Para uma efetiva institucionalização, essa tarefa pode ser desenvolvida por meio da decomposição da figura, para que os estudantes percebam que a medida da área da região determinada pelo losango corresponde à metade da medida da área de uma região retangular.

Paula (2011) também indicou três jogos, que nomeou de: “Dominó de área de figuras planas”, “Bingo das figuras planas” e “Trilha das formas”; estes têm como objetivo “auxiliar na aprendizagem do cálculo da medida de área de figuras planas, e fixar o conteúdo” (PAULA, 2011, p. 107-108).

Figura 44 – Jogo do “Dominó de área de figuras planas”; Figura 45 – Jogo da “Trilha das formas”.

Fonte: PAULA, 2011, p. 107-108.

Conforme o pesquisador, as atividades com jogos geraram maior motivação por parte dos estudantes.

O terceiro jogo consiste em um jogo do bingo, composto por situações-problema, o que ocasionou algumas dificuldades de resolução.

Ao conhecermos a proposta dos jogos, identificamos que boa parte das abordagens consiste na “fixação” das fórmulas, uma vez que, os jogos fornecem figuras com suas respectivas dimensões e solicitam a medida da área, corroborando com o objetivo das tarefas propostas: calcular a medida da área de figuras planas, e fixar o conteúdo (PAULA, 2011).

Entendemos que a institucionalização desse tipo de tarefa pode ser feita pelo próprio estudante, quando este calcular a medida da área das figuras e confirmar o resultado.

Em vista do que foi observado, compreendemos que as situações didáticas sugeridas pelos pesquisadores acima mencionados, são relevantes, pois se caracterizam como técnicas favoráveis para responder questões problemáticas sobre área e para realizar tarefas matemáticas que geram, respectivamente, organizações matemáticas distintas sobre o objeto matemático área. Entendemos também que essas situações podem justificar a "razão de ser" do objeto matemático em pauta.

Nesta pesquisa, assim como na de Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996) e na dos pesquisadores referenciados, adotamos a ideia de área como grandeza, e, sobretudo, desenvolvemos um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP (CHEVALLARD, 1999) com os professores participantes da investigação embasado em um Modelo Epistemológico de Referência do objeto matemático área no 6° ano do Ensino Fundamental. O PEP se consolidou com a construção, refinamento e aplicação[50] de uma sequência didática em conformidade com as pesquisas discutidas neste trabalho.

3.4 CONCLUSÃO E APORTES SOBRE A CONSTRUÇÃO DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Empreendendo uma análise acerca das discussões teóricas expostas neste capítulo, notamos que as contribuições das inúmeras civilizações, e a interação crescente dos matemáticos, adquiridas ao longo dos tempos sobre o objeto matemático área, foram relevantes. Entretanto não podemos deixar de ressaltar que, ao longo desses tempos, ocorreram alguns obstáculos de origem epistemológica[51]. Por exemplo, o método de comparação de área encontrada nos "Elementos", de Euclides, e as inconsistências lógicas apresentadas na sua obra.

Também na China antiga, vê-se o uso de manipulação de peças similares ao Tangram para exploração das relações entre as áreas de figuras planas. Nessa obra, assim como nas egípcias e babilônicas, são empregadas regras apropriadas para obter-se as medidas de áreas de figuras planas; no entanto não foram exibidas as demonstrações. Outras abordagens da

---

[50] A sequência didática foi aplicada na classe de um dos professores participantes.

[51] Conforme Almouloud (2007, p. 139), "os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontram, na história, para a utilização e compreensão desses conceitos".

História da Matemática que merecem evidência são o uso da composição e da decomposição de figuras geométricas planas. Esses elementos são destacados por Bellemain e Lima (2002) como dispositivos didáticos que dão subsídios à compreensão da fórmula que permite calcular a medida de área de superfícies planas.

Não podemos deixar de recordar o problema clássico da quadratura de um círculo, que incidia em encontrar um quadrado cuja área fosse igual à área de um círculo dado. Na contemporaneidade, esse tipo de problema é apontado como uma situação de produção de superfície de mesma área que uma superfície dada. Esse conceito tem sido usado por alguns documentos, entre esses, livros didáticos na parte de introdução do tópico.

Acreditamos que um ensino que não leva em conta a articulação entre os diferentes quadros – geométrico, numérico e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) – e que não atende aos procedimentos que facilitam a aquisição do conceito de área, alguns deles mostrados ao longo deste capítulo, poderá dificultar o processo de conhecimento dos estudantes no que se refere ao tema.

No próximo capítulo, tentaremos revelar o Modelo Epistemológico Dominante (MED) declarado pela instituição de referência (documentos oficiais, livros didáticos, aula dos professores, cadernos dos estudantes). Este estudo se dará por intermédio de uma análise institucional.

4 ANÁLISE INSTITUCIONAL

No âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), muitas pesquisas têm evidenciado lacunas referentes às atividades matemáticas, no contexto das instituições de ensino, atreladas ao Modelo Epistemológico Dominante (MED)[52]. Nessa conjuntura, buscamos adentrar nas instituições de referência para desenvolver uma análise institucional com intenções de revelar o Modelo Epistemológico Dominante (MED) colocado em prática pelas instituições em questão.

Entendemos por análise institucional o estudo desenvolvido em torno de elementos institucionais. Esses elementos permitem identificar as condições e restrições que determinam as relações institucionais e pessoais a objetos que intervêm nos processos de ensino e aprendizagem. Nesta pesquisa, a análise institucional perpassa, nesse sentido, pelo estudo dos documentos institucionais, livros didáticos, estudo das práticas que são desenvolvidas nas instituições em pauta em torno de objetos da aprendizagem área e nas relações institucionais e pessoais referentes a esses objetos (CHEVALLARD, 1999).

Para obter maior visibilidade das relações institucionais com o objeto matemático área, decidimos empreender uma análise de documentos que auxiliam o trabalho do professor, nos aspectos que envolvem o tema em questão, indicados para o 6º ano do ensino fundamental. Além disso, buscamos estudar as práticas dos professores e os cadernos dos estudantes desse mesmo ano.

4.1 ANÁLISE INSTITUCIONAL DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1989) são diretrizes no contexto educacional de todo o país, elaborados pelo Governo Federal “com a intenção de ampliar e aprofundar um debate educacional que envolva escolas, país, governos e sociedade e dê origem a uma transformação positiva no sistema educativo brasileiro” (BRASIL, 1989, p. 5). A apreciação desse documento visa analisar as condições e restrições que incidem sobre o saber de referência área a ser ensinado no 6º ano do ensino fundamental.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1989) para o ensino fundamental, a Matemática é organizada em quatro blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e

---

[52] É a forma de interpretar e descrever um objeto matemático que é predominante em uma instituição escolar (CHEVALLARD, 1999; FARRAS; BOSCH; CHACÓN, 2013).

Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento de Informações. Dentre os blocos de conteúdos apresentados pelos PCN (BRASIL, 1989), focamos nossa discussão nas Grandezas e Medidas, sobretudo no estudo de área. Esse estudo nos leva a compreender a instituição de referência PCN (BRASIL, 1989) no 3º ciclo, para o sexto (6º) ano do ensino fundamental.

O tema referido se sustenta pelas necessidades das civilizações, especialmente por se fazer presente nas atividades humanas, uma vez que, diferentes povos desenvolveram maneiras de comparar áreas. Diante disso, o "estudo das estratégias de medida usadas por diferentes civilizações pode auxiliar o aluno na compreensão do significado de medida" (BRASIL, 1998, p. 129).

No âmbito da sociedade, esse tema:

> caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas, estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano (BRASIL, 1998, p. 51-52).

Um olhar atento para a sociedade mostra que o trabalho com medidas deve centrar-se na análise de situações práticas que levem o aluno a aperfeiçoar o real significado das medidas. Além disso, é relevante destacar que o estudo deste objeto matemático (área) e da sua utilização no contexto social geralmente desperta o interesse dos alunos (BRASIL, 1998). Citamos como exemplo, a construção de uma horta na escola, o que impõe um planejamento prévio dos canteiros, a obtenção das medidas para a elaboração da horta, entre outros.

Sendo a escola parte da sociedade, os PCN (BRASIL, 1998) manifestam a importância da "participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo" (BRASIL, 1998, p. 10). Ademais, o material em pauta deixa claro "que a apropriação dos conhecimentos socialmente elaborados é base para a construção da cidadania e da identidade dos estudantes" (BRASIL, 1998, p. 21). Também a participação da comunidade na escola possibilita a inserção de projetos educativos, os quais não podem perder de vista o papel da matemática para a construção da cidadania.

Um dentre os desafios que se apresentam para a escola, é identificar, dentro de cada um destes campos, como explorar o tema área de maneira que o torne socialmente relevante para o ensino, visto que, a mudança de ciclo (passagem do 2º para o 3º ciclo) estabelece um aumento de exigências, marcando o convívio do aluno com uma organização escolar e curricular diferente da vivenciada anteriormente pelo estudante. Podemos citar, nesse contexto, as variadas matérias e diferentes professores, os níveis de exigências quanto aos procedimentos em sala de aula, a organização do trabalho escolar e as diversas situações que dificultam uma relação cordial entre os estudantes e a escola, ou entre os estudantes e o professor.

No domínio da pedagogia, os PCN (BRASIL, 1998) expõem que muitas atividades, em que as grandezas e as medidas são trabalhadas, envolvem conceitos relativos a outros blocos de conteúdos, estabelecendo conexões com os temas transversais[53] e com diferentes campos do conhecimento. Além disso, afirmam que:

> as atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica (BRASIL, 1998, p. 52).

Como vemos, os PCN (BRASIL, 1998) indicam um enfoque de tarefas nos três campos, numéricos, geométricos e das grandezas, e incentiva uma abordagem sob o ponto de vista histórico, com o argumento de que, desde a antiguidade, as civilizações dedicaram-se à comparação de grandezas, considerando, portanto, que um estudo com esse enfoque pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem do conceito de área.

Conforme os PCN (BRASIL, 1998), o saber de referência área tem grande importância no currículo de matemática da educação básica, sobretudo pela possibilidade de conexão com outros campos do conhecimento (BRASIL, 1998). Podemos citar práticas profissionais que necessitam do conhecimento de área como, por exemplo, quando se determina a área de uma parede a ser ladrilhada ou a ser pintada, quando se faz estimativas de áreas de terrenos para a compra ou a venda, ou quando se planeja uma planta baixa de uma residência, entre outros. Além disso, o tema mencionado possibilita a articulação com outros conceitos matemáticos, como o Teorema de Pitágoras, fração, porcentagem, produtos notáveis, entre outros. Todavia, muitos professores têm dado ênfase insuficiente às questões que envolvem grandezas e medidas, apesar de reconhecerem a sua importância (BRASIL, 1998).

No que se refere aos conceitos e procedimentos para o ensino de área no sexto (6º) ano, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem a "compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras" (BRASIL, 1998, p. 74); também indicam trabalhos que desenvolvam a comparação e a contagem. No entanto, ao calcular a medida da área de uma superfície plana, o estudante terá

---

[53] O PCN estabelece como Temas Transversais às questões de urgência social, por exemplo, Ética, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo (BRASIL, 1998).

contato com uma dimensão da medida que não é obtida por uma comparação direta, e sim pelo produto de medidas lineares, ou seja, seus lados (BRASIL, 1998), essa particularidade pode dificultar a aprendizagem. Outra questão a considerar, é que “nem todas as grandezas são medidas por comparação direta com uma unidade da mesma espécie do atributo que se deseja medir” (BRASIL, 1998, p. 130). Ademais, essa questão impõe lembrar que para medir a área de uma superfície, é necessário compreender duas operações: uma geométrica e outra numérica.

Outro ponto apresentado pelo documento é que o tema área oferece condições de desenvolver situações práticas envolvendo estimativas que levem o aluno a aperfeiçoar o significado das medidas, favorecendo a compreensão sobre o processo de medida e sobre as unidades padronizadas das grandezas envolvidas. Mas, deve-se levar em consideração que, para desenvolver essa habilidade, o estudante terá de constituir comparações em situações reais, podendo ampliar seu entendimento a respeito do processo de medida, e seu conhecimento sobre as unidades padronizadas das grandezas envolvidas (BRASIL, 1998).

O documento recomenda utilizar procedimentos que propiciem a concepção das noções envolvidas, como obter a área de figuras conhecidas por intermédio de recortes e sobreposição ou utilizar estratégias de contagem usando o papel quadriculado ou, ainda, o ladrilhamento, e indicam o uso de tarefas por meio de estimativas por aproximações (BRASIL, 1998). O documento também considera que o uso desse procedimento possibilita identificar grandezas mensuráveis, convencionais ou não convencionais, que ocorrem no cotidiano. Além disso, os PCN (BRASIL, 1998) discutem sobre a importância de fazer a inserção de questões do cotidiano nas aulas de matemática e sugere a utilização de embalagens, planificação, construção, ampliação e redução de figuras (BRASIL, 1998). Entretanto, é possível que o professor não possa dispor das ferramentas necessárias para colocar em prática algumas dessas sugestões, por questões adversas.

O documento indica também que o professor desenvolva situações que explorem a construção de um quadrado de papel com um (1) metro de lado para verificar quantas vezes esse quadrado cabe em uma determinada superfície. Pode parecer elementar levar o estudante a essa compreensão, porém não é simples, uma vez que compreender quantas vezes uma unidade previamente escolhida cabe no papel, perpassa por duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade na superfície a ser medida) e uma numérica (contagem de quantas unidades cabem no plano), o que pode gerar equívocos na percepção da tarefa. Os exemplos propostos oferecem indicações de como o professor pode organizar suas aulas sobre área.

Os PCN (BRASIL, 1998) ainda sugerem que sejam exploradas tarefas envolvendo as grandezas área e perímetro. Nesse caso, podem-se organizar atividades de comparação e contagem, como foi apontado anteriormente. Para tentar explicar uma possível restrição, o documento sinaliza que não é comum os professores explorarem situações em que as noções de área e perímetro estejam presentes.

No mesmo documento, explana-se que se deve observar equívocos com a utilização de fórmulas, alegando-se que muitos estudantes aprendem-nas de maneira mecânica, e, concomitantemente, costumam empregá-las de modo automático, obtendo resultados errados, ou, muitas vezes, esquecendo as fórmulas. É frequente os estudantes estabelecerem relações equivocadas entre essas grandezas; por exemplo, quando comparam dois polígonos concluem que "a figura de maior área, tem necessariamente maior perímetro e vice-versa" (BRASIL, 1998, p. 130).

A análise da instituição de referência PCN (BRASIL, 1998) sobre o estudo em questão, mostra que o documento apresenta expectativas de que o professor desenvolva um trabalho de acordo com as orientações curriculares para que o estudante seja capaz de construir seu conhecimento.

Ao desenvolver uma análise dos PCN (BRASIL, 1998) baseado nos níveis de co-determinação didática, podemos considerar o documento centrado no olhar do que a civilização trouxe de contribuição para o saber de referência área, ou perceber o quanto é importante uma avaliação de como explorar os assuntos de maneira que os tornem socialmente necessários para o ensino, ou, até mesmo, conhecer o que é discutido sobre área no currículo de matemática. E, ainda, considerar as ponderações do documento sobre procedimentos a serem adotados pelo professor a fim de evitar entraves na aprendizagem, gerando um bloqueio na construção do conhecimento do estudante. A análise por essa vertente, também nos permite identificar as relações que existem entre os PCN (BRASIL, 1998) e os LD, e entender as relações desses documentos com as escolhas pedagógicas feitas pelos professores no momento da aula.

4.2 ANÁLISE INSTITUCIONAL DA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DA BAHIA

A Proposta Curricular[54] (PC) do Estado da Bahia, da disciplina matemática para o 6º ano do ensino fundamental, atende à política da Secretaria de Educação do Estado da Bahia e é respaldada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para Educação Básica e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de Nove Anos. Esse documento, composto a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apresenta uma organização curricular que contempla uma base nacional comum e uma parte diversificada, e objetiva orientar o trabalho docente. Apresenta como critério de seleção de conteúdos a relevância social e a contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Assim como nos PCN (BRASIL, 1998), na PC (BAHIA, 2013) buscamos revelar as condições e restrições que incidem sobre a abordagem do tema área para o sexto (6º) ano do ensino fundamental.

No âmbito da civilização, o documento faz referência ao conhecimento matemático construído ao longo da história da humanidade sob o imperativo das necessidades cotidianas dos indivíduos. A PC, como os PCN (BRASIL, 1998), considera que as antigas civilizações trouxeram grande contribuição para esse saber de referência, e propõe ao professor perpassar por esse ambiente de aprendizagem nas suas aulas, utilizando o argumento de que a História da Matemática oportuniza "pesquisas históricas, contextos de aplicação e construção de instrumentos que os validem" (BAHIA, 2013, p. 129).

No campo da sociedade, faz alusão à riqueza cultural da Bahia instituída pelas contribuições das diferentes raças, etnias, gêneros e classes sociais, que também estão atreladas à vida social e à história de diversas culturas oriundas de outras sociedades (BAHIA, 2013). Entretanto, a PC reconhece que, no decorrer do tempo, problemas de naturezas variadas têm colocado o estudante em situações de vulnerabilidade, uma vez que, um grande percentual dos estudantes baianos que frequentam as escolas públicas convive com vários problemas, entre esses, baixa renda familiar, precária qualidade de vida, saneamento básico inadequado e situação de risco no seu cotidiano (BAHIA, 2013).

Diante desses fatores, o documento intenciona oferecer informações para a organização do trabalho pedagógico, orientar os educadores no sentido da construção de uma *escola* voltada para a formação de cidadãos em um ambiente contemporâneo de progressos

[54] Em alguns trechos do texto, adotamos a sigla PC para nos referirmos à Proposta Curricular do Estado da Bahia.

científicos e avanços tecnológicos que priorize atividades contextualizadas e significativas, dentre outras exigências. A PC (BAHIA, 2013, p. 19) “convida a escola a se reinventar cotidianamente, [...] considerando as questões que envolvem o olhar interdisciplinar”.

A PC (BAHIA, 2013) propõe a construção do Projeto Político Pedagógico, apoiado nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação e do Plano Nacional de Educação (BRASIL, 1996), respeitando a diversidade da sua comunidade no contexto social. Para a construção, o documento oferece livre-arbítrio, mas o que notamos é o uso de um currículo único adotado em grande parte das escolas baianas.

A PC (BAHIA, 2013) recomenda a reorganização da parte diversificada em cinco eixos temáticos[55] e concebe o currículo por Competências[56] e Habilidades[57], cabendo, portanto, à escola definir os focos referentes a cada eixo.

Para cada competência proposta, são sugeridas algumas habilidades nos respectivos níveis do ensino. Além disso, o documento apresenta “possibilidades metodológicas e conteúdos referenciais para o ensino fundamental, [...] tendo em vista seu desenvolvimento por área de conhecimento” (BRASIL, 2013, p. 13). Para os 3º e 4º ciclos, viabiliza a produção de conhecimento dos estudantes que se encontram na faixa etária entre 11 e 14 anos. Esse documento discute ainda sobre a possibilidade de articulação entre o eixo das grandezas e das medidas, com os números e as operações e as grandezas geométricas.

Porém, na instituição escola, algumas restrições se fazem presentes, restrições essas que precisam ser superadas para que seja possível o desenvolvimento das atividades matemáticas adotadas pela instituição. Exemplo disso é a escassa condição de infraestrutura encontrada em grande parte das escolas públicas baianas, além de problemas ocasionados por questões alheias às escolas.

Identificamos que o saber de referência, área de superfície plana, é discutido no eixo 4, cujo tópico se intitula: “A Contextualização das Grandezas e das Medidas”; no eixo 1: “Os Números e as Operações como Ferramentas Humanas”; e no eixo 3: “O Pensamento Geométrico em Construção” (BAHIA, 2013). Também identificamos orientações que contemplam o objeto de nossa investigação, AFP, conforme os esquemas a seguir:

---

[55] Conjunto de competências e habilidades adotadas para serem trabalhadas nos anos finais (6º ao 9º ano) do ensino fundamental (BAHIA, 2013).

[56] As competências são definidas, neste documento, como “a capacidade do sujeito de mobilizar saberes, conhecimentos, habilidades e atitudes para resolver problemas e tomar decisões adequadas” (ZABALA, 1998 *apud* BAHIA, 2013, p. 31).

[57] As habilidades “estão relacionadas ao saber fazer, em uma dimensão mais técnica, e são necessárias para a consolidação de uma competência” (ZABALA, 1998 *apud* BAHIA, 2013, p. 32).

Figura 46 – Competências e Habilidades para área de figuras planas: eixo 1.

EIXO 1.1 – OS NÚMEROS E AS OPERAÇÕES COMO FERRAMENTAS HUMANAS				
COMPETÊNCIAS/HABILIDADES	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
Ampliar e construir novos significados para os números (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) a partir de sua utilização no contexto social.	I/TS	TS	TS	C
✓ Compreender o sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que caracterizam esse sistema para a efetivação da leitura, escrita e representação dos números. ✓ Reconhecer os significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de". ✓ Constatar que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais. ✓ Localizar na reta numérica os números, naturais, racionais, irracionais e reais.				

Legenda: (I) iniciar; (TS) trabalhar sistematicamente; (C) consolidar.

Fonte: BAHIA, 2013, p. 126.

No eixo 1 (Figura n. 46), o documento explana que é importante que se adquira a habilidade de verificar que existem situações- problema atreladas à geometria e às medidas, cujas soluções não são obtidas por números racionais (BAHIA, 2013).

Figura 47 – Competências e Habilidades para área de figuras planas: eixo 3.

Eixo 3 - O Pensamento Geométrico em Construção

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES	6º	7º	8º	9º
Interpretar, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas	**I/TS**	**TS**	**TS**	**C**
• Descrever, por meio de desenhos, a localização ou movimentação de uma pessoa ou um objeto no espaço • Compor e decompor figuras planas • Construir a noção de ângulo associada à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas • Representar e interpretar o deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado				

Fonte: BAHIA, 2013, p. 126.

No eixo 3 (figura 47), inferimos que o documento apresenta a habilidade "compor e decompor figuras planas" (BAHIA, 2013, p. 128). Essa habilidade está conectada com o bloco de conteúdo grandezas e medidas, notadamente, no que concerne ao estudante saber resolver tarefas utilizando a técnica da comparação pela composição e decomposição de figuras.

Conforme a PC (BAHIA, 2013), o eixo aludido deve priorizar a presença de instrumentos que permitam a articulação das estruturas geométricas, "evitando uma geometria baseada apenas em figuras desenhadas na folha de papel" (BAHIA, 2013, p. 129). Nessa perspectiva, o documento incentiva a exploração de softwares geométricos, o desenvolvimento de tarefas que mobilizem situações de transformações e a utilização de materiais diversos (origami, tangram, geoplano), entre outros dispositivos didáticos.

Figura 48 – A Contextualização das Grandezas e das Medidas – Competências e Habilidades para área de figuras planas: eixo 4.

COMPETÊNCIAS/HABILIDADES	6º	7º	8º	9º
Resolver situações-problema do contexto social e de outras áreas do conhecimento que possibilitem a comparação de grandezas de mesma natureza	I/TS	TS	TS	C
• Aplicar as grandezas e medidas em situações que envolvem conceitos relativos ao espaço e às formas, os significados dos números, das operações e da ideia de proporcionalidade • Mobilizar ideias referentes ao contexto histórico das grandezas e medidas • Julgar situações cotidianas que mensuram o valor das mercadorias • Analisar a interdependência entre grandezas • Expressar a interdependência entre grandezas algebricamente • Resolver problemas envolvendo fatores de escala com razão e proporção				

Fonte: BAHIA, 2013, p. 130.

Na Proposta Curricular (BAHIA, 2013), evidencia-se um incentivo à articulação das grandezas e medidas com o espaço e formas e com os números e suas operações. Essa articulação permite que o professor desenvolva um trabalho integrado aos três eixos, possibilitando, assim, a compreensão da interdependência entre as grandezas.

O documento ainda propõe um enfoque num ambiente interdisciplinar e um trabalho voltado à História da Matemática. Esse tipo de abordagem pode vir a justificar a origem do saber de referência área de figuras planas, através das várias maneiras de medidas na história das civilizações e das profissões. No eixo quatro (4), o documento também recomenda:

Figura 49 – Competências e Habilidades para área de figuras planas.

Compreender os atributos mensuráveis dos objetos e as unidades, os sistemas e os processos de mensuração	I/TS	TS	TS	C
• Converter uma unidade a outra dentro do mesmo sistema • Identificar a unidade de tamanho e tipo apropriados (para medir ângulos, perímetros, áreas, áreas superficiais e volumes) • Identificar a relevância das unidades convencionais no processo da comunicação				
Aplicar técnicas, instrumentos e fórmulas apropriadas para determinar medidas	I/TS	TS	TS	C
• Calcular a área de figuras planas, bem como o volume de blocos retangulares • Resolver áreas de superfícies de sólidos geométricos • Decompor figuras geométricas planas • Resolver situações-problema, envolvendo cálculos de porcentagens e aplicação da regra de três • Analisar relações entre perímetros e áreas de figuras geométricas planas				

Fonte: BAHIA, 2013, p. 130.

Para essas indicações, o documento sugere a conversão de unidades padrões (km², hm², dam², m², dm², cm², mm²) e unidades agrárias empregadas na cultura baiana (alqueire, tarefas, légua, hectare, milhas terrestres); esse estudo, permite a articulação da matemática com questões do cotidiano.

O documento também recomenda a valorização de propostas de situações que permitam ao estudante a descoberta das relações não lineares, como "construir e usar o metro quadrado, compará-lo com o decímetro quadrado (por meio do material dourado)" (BAHIA, 2013, p. 131).

Pela PC (BAHIA, 2013), todas as habilidades identificadas nos três eixos devem ser iniciadas e trabalhadas sistematicamente a partir do 6º ano do ensino fundamental, o que impõe um cuidado peculiar por parte do professor, sobretudo porque é nesse ano que se concentra o maior índice de repetência (BAHIA, 2013).

No decorrer da análise, constatamos que é dada ênfase ao desenvolvimento de competências, o que proporciona possibilidades da preparação de organizações didáticas interdisciplinares, a partir da definição do conteúdo com os temas transversais.

Assim como na instituição PCN (BRASIL, 1998), a PC (BAHIA, 2013) se inquieta com a maneira como os conteúdos são abordados, visto que, no enfoque do tema área, é provável que uma quantidade expressiva de professores não vincule os eixos das grandezas e das medidas com os números e as operações e com o eixo da geometria, como orienta a proposta.

Tanto quanto nos PCN (BRASIL, 1998), as PC (BAHIA, 2013) buscam a excelência no ensino. Esse documento enfatiza o desenvolvimento de competências e habilidades, apresenta sugestões de um trabalho interdisciplinar contextualizado e distribui seus conteúdos em eixos temáticos. Além disso, o documento referido convida as escolas a se "reinventar" (BAHIA, 2013) considerando temas ligados às questões sociais, dentre outras exigências, mas não apresenta exemplos de como fazer essas articulações.

Ao realizarmos uma análise sob o ponto de vista dos níveis de co-determinação, consideramos o saber de referência área, imbricado aos níveis da escala superior (civilizações, sociedade, escola e pedagogia) e inferior (domínio, setor, tema e questão). Esta metodologia focou o nosso olhar para: as contribuições oriundas das civilizações, as propostas das políticas públicas, os programas de ensino, as políticas de gestão e as questões metodológicas referentes ao ensino e aprendizagem de área, contribuindo, assim, para um estudo aprofundado do tema.

4.3 ANÁLISE INSTITUCIONAL DE LIVROS DIDÁTICOS

Para realizar a análise da instituição livro didático, optamos por escolher dois exemplares do 6º ano, adotados pelas escolas participantes da pesquisa (ver tabela 1).

Tabela 1 – Livros de matemática analisados na pesquisa.

Livros didáticos analisados[58]	**Referência do livro Autor(es), título, ano, edição, local, editora e data de publicação.**
Livro 1 (LD1)	DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris*: Matemática, 6º ano. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2013.
Livro 2 (LD2)	SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. *Matemática*: compreensão e prática, 6º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

Fonte: DANTE, 2013; SILVEIRA E MARQUES, 2013.

Identificamos que os exemplares iniciam as abordagens dos conteúdos com situações-problema e vêm acompanhados de uma significativa diversidade de problemas. Nos exemplares, o manual do professor vem com apresentação da obra, conteúdos e objetivos, proporcionando uma efetiva contribuição ao docente; apresenta ainda orientações teóricas e metodológicas e discute a respeito dos recursos didáticos auxiliares, com sugestões expressivas para o trabalho do professor.

O LD1 possui 304 páginas no total, excluindo o manual do professor, distribuídos em nove (9) capítulos, enquanto que o LD2 possui 344 páginas, com doze (12) capítulos. No LD1, todos os capítulos apresentam as seções: Ponto de partida, Ponto de chegada, Tratamento de informação, Outros contextos e Revisão cumulativa. Ao longo de cada capítulo, o exemplar apresenta exercícios propostos, com seções: Bate papo, Curiosidades matemáticas, Desafios, Oficina de matemática e Glossário.

No exemplar LD2, todos os capítulos iniciam-se com imagens e textos explicativos sobre os temas explorados, com as seções: É hora de observar e discutir e Trocando ideias; ao longo de cada capítulo, o exemplar apresenta Exercícios, Curiosidades, Trabalhando em equipe e Trabalhando os conhecimentos adquiridos.

Na avaliação da estrutura organizacional regional (capítulo) que contempla o objeto em questão, selecionamos os itens e subitens de cada capítulo, apresentados no quadro a seguir:

[58] Para a análise, adotaremos as siglas LD1, em referência ao Livro Didático 1, e LD2, em referência ao Livro Didático 2.

Quadro 2 – Estrutura organizacional regional dos livros didáticos LD1 e LD2.

LD1 Capítulo 8	**Título da seção Explorando a ideia de medida**	**LD2 Capítulo 11**	**Título da seção Medidas de superfície e de volume**
8.1	Introdução	11.1	Metro quadrado
8.2	Grandezas, unidades de medidas e instrumentos de medidas	11.2	Leitura das medidas de superfície
8.3	A ideia de medidas e várias grandezas: grandeza superfície	11.3	Transformação das unidades de medidas de superfície
8.4	Medida de tempo	11.4	Medidas agrárias
8.5	Unidades padronizadas de medida: unidade de medida de superfície	11.5	Áreas das principais figuras planas
8.6	Trabalhando com vários tipos de grandezas e medidas	11.6	Metro cúbico
LD1 Capítulo 9	**Perímetros, área e volume**	11.7	Leitura de medidas de volume
9.1	Introdução	11.8	Transformação das unidades de medidas de volume
9.2	Perímetro	11.9	Medidas de volume do paralelepípedo retângulo e do cubo
9.3	Medidas de uma superfície: área de uma região plana		
9.4	Outras situações envolvendo perímetros e áreas		
9.5	Volume		

Fonte: dados extraídos de Dante (2013) e Silveira; Marques (2013). Autoria da pesquisadora (2017).

Nos dois exemplares, o objeto área de superfícies planas é localizado nos últimos capítulos; no LD1, oitavo e nono (8º e 9º) capítulos, e no LD2, no décimo primeiro (11º) capítulo. Se considerarmos que muitos professores adotam a ordem que os livros apresentam para a abordagem do tema, esse conteúdo pode não ser oferecido por muitos educadores ou considerado um conteúdo de pouca relevância.

Alguns conteúdos matemáticos possuem conexão com o tema área de figuras planas, e, portanto, é provável que esse tópico tenha sido discutido em outros capítulos. Nossa intenção, porém, é averiguar a ênfase dada ao tema como objeto de estudo, uma vez que, nosso foco de análise é na estrutura organizacional local (área de superfície plana) e pontual (tipo de tarefa).

Na apreciação da estrutura organizacional local, subitens que contemplam o objeto matemático área de superfície plana, o LD1 emprega o termo grandezas para tratar da “grandeza superfície” (DANTE, 2013), e o LD2 utiliza-o no decorrer do texto, quando explica que: “superfície é uma grandeza com duas dimensões, enquanto área é a medida dessa grandeza, portanto um número” (SILVEIRA; MARQUES, 2013, p. 272).

Nas duas obras, encontramos as fórmulas para o cálculo da medida da área de figuras planas clássicas (retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango); além dessas, o LD2 explora o círculo.

Dos subitens realçados nos capítulos, analisamos todas as tarefas propostas de cada uma das questões. Consideramos cada questionamento como uma questão; por exemplo, nas tarefas que constam (a, b, c, d), computamos quatro tarefas. Das tarefas consideradas, elencamos as que dependem do conhecimento de área para serem resolvidas.

No LD1 identificamos 124 tarefas que abordam o tema, porém 18 destas não necessitam do conhecimento de área para serem resolvidas. Desse modo, estas não foram categorizadas como um tipo de tarefa de Área; portanto, nesse exemplar, foram analisadas 106. No LD2, foram identificadas 85 tarefas, todas consideradas na apreciação.

Na análise, categorizamos oito tipos de tarefas de cada LD, sendo algumas contempladas nos dois exemplares, outras em apenas uma das obras, totalizando, assim, doze tipos de tarefas, relacionadas a seguir:

(T1) Estabelecer a diferença entre as unidades de medidas (m e m^2);

(T2) Calcular medidas de área de uma região plana;

(T3) Transformar unidade de medida de área de superfícies planas;

(T4) Operar com outras unidades de área: unidades agrárias;

(T5) Comparar medidas de áreas de superfícies planas;

(T6) Estabelecer a diferença entre área e superfície;

(T7) Construir figuras planas com mesma área (produzir superfícies);

(T8) Conhecer múltiplos e submúltiplos do m^2;

(T9) Resolver questões envolvendo medidas de área e perímetro;

(T10) Definir m^2;

(T11) Estimar e calcular área de superfície plana;

(T12) Escrever como se leem as medidas.

No quadro que segue, apresentamos o percentual das tarefas contempladas por cada LD analisado.

Quadro 3 – Tarefas contempladas nos livros analisados.

Tarefas	Livro Didático 1 (%)	Livro Didático 2 (%)
T1	2,8	1,2
T2	50,0	23,5
T3	5,7	48,2
T4	6,6	12,9
T5	9,4	
T6		1,2
T7	1,0	
T8		2,4
T9	19,8	
T10		1,2
T11	4,7	
T12		9,4
TOTAL	100 %	100 %

Fonte: a pesquisadora (2017).

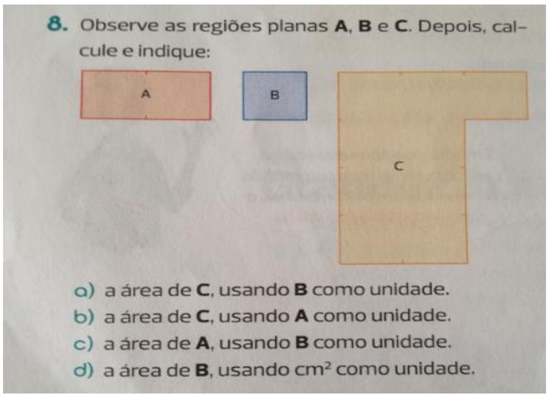
O maior percentual das tarefas adotadas no LD1 foi: "Calcular medidas de área de uma região plana", usando técnicas (τ) variadas de resolução, composição e decomposição, ladrilhamento e/ou contagem, e utilização da fórmula. Para esse tipo de tarefa, ponderamos todas as perguntas que levassem ao cálculo da medida da área.

No LD2, a maior ênfase da tarefa foi: "Transformar unidade de medida de área da superfície plana" por meio da técnica (τ) de multiplicar ou dividir por 100, 10.000, 1.000.000.

4.3.1 Análise Praxeológica da Organização Matemática dos Livros Didáticos

Optamos por fazer a análise praxeológica da organização matemática de uma tarefa em cada LD, e, principalmente, selecionamos as tarefas de maior ênfase adotadas pelos autores, pela quantidade expressiva dessas tarefas pontuada em cada obra.

Figura 50 – Tarefa do LD1: Calcular medidas de área de uma região plana.



Fonte: DANTE, 2013, p. 228.

No quadro 4, revelamos a Organização Matemática identificada na tarefa. Para efeito de esclarecimento, discutiremos apenas os itens a e b da questão.

Quadro 4 – Organização Matemática do exemplo adotado pelo LD1.

Tarefa	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
(T1) Observe as regiões planas A, B e C. Depois calcule e indique: a) A área de C, usando B como unidade.	(τ1) Calcular a medida da área da região C. Consiste em calcular a medida da área das regiões planas C pela técnica da comparação, utilizando a figura B como unidade padrão. (τ2) Calcular a medida da área da região C pela técnica da contagem, utilizando a figura B como unidade.	Medida de uma superfície plana (conceito de área)
(T1) Observe as regiões planas A, B e C. Depois calcule e indique: b) A área de C, usando A como	(τ1) Calcular a medida da área da região C. Consiste em calcular a medida da área das regiões planas C pela técnica da comparação, utilizando a figura A como	Medida de uma superfície plana (conceito de área).

unidade.	unidade não padrão. (τ2) Calcular a medida da área da região C pela técnica da contagem, utilizando a figura A como unidade.	

Fonte: DANTE, 2013, p. 228.

Com a tarefa proposta, busca-se desenvolver a técnica (τ) calcular a quantidade de superfícies unitárias necessárias para recobrir as áreas das figuras A e C, através da comparação, ou seja, com a unidade de área (região plana B) pode-se encontrar outras áreas (região plana A e C), e com a unidade de área (região plana A) pode-se encontrar a área da região plana C.

Ponderamos que o enunciado da tarefa não corresponde a uma concepção de área como grandeza, uma vez que, é solicitado para calcular "A área de C, usando B como unidade" e a "A área de C, usando A como unidade" (DANTE, 2013, p. 228), quando deveria ser requerido calcular: a medida da área da superfície C, usando a medida da área da superfície B como unidade, e a medida da área da superfície C, usando a medida da área da superfíce A como unidade.

Tarefa no LD2: Transformar unidade de medida de área da superfície plana.

Transforme:

a) 5 m² em decímetro quadrado.
b) 6,8 cm² em metros quadrados.

Quadro 5 – Organização Matemática do exemplo adotado pelo LD2.

Tarefa	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
(T1) Transforme: 5 m² em decímetros quadrados	(τ1) Multiplicar o valor 5 x 100 = 500 dm². Consiste em identificar a posição do dm² em relação ao m² (unidade padrão) para efetuar a multiplicação pela	Transformação da unidade de medida de superfície com grandeza submúltiplo do m² (propriedades dos multiplos e

	unidade imediatamente inferior. (τ2) Utilizar a técnica do deslocamento para a direita acrescentando dois zeros: 	submúltiplos do m²).
(T2) Transforme: 6,8 cm² em m²	(τ1) Dividir 6,8 : 10 000 = 0,00068 m². Consiste em identificar a posição do cm² em relação ao m² (unidade padrão) para efetuar a divisão pela unidade imediatamente superior. (τ2) Usar a técnica do deslocamento para a esquerda acrescentando quatro zeros: 	Transformação da unidade de medida de superfície com grandeza submúltiplo do m² (propriedades dos multiplos e submúltiplos do m²).

Fonte: SILVEIRA; MARQUES, 2013, p. 275.

Nessas tarefas (T), foram utilizadas as técnicas (τ) de multiplicar ou dividir por 100, 10.000, 1.000.000, considerando os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado. Nesse exemplar, grande parte das tarefas de transformação oferta um foco excessivo à transformação de unidades.

Ressaltamos que no LD1, é dada maior ênfase às tarefas "calcular a área[59] da figura plana" o LD2 dá um destaque ao treino das transformações de unidades de medidas convencionais. Com essa observação, constatamos que os dois exemplares dão maior notoriedade às situações de medidas, levando a uma concepção de área como número. Essas situações em evidência, podem valorizar o aspecto numérico do conceito de área, o que contribui para que o aprendiz associe superfície a um número, mas esse tipo de vinculação pode gerar dificuldade na aprendizagem do tema em pauta. Também foi possível verificar que quase não se deu relevância ao tipo de tarefa (T6): "Estabelecer diferença entre área e

[59] Na concepção de área que adotamos, calcula-se a medida de área.

superfície", nem ao (T7): "Construir figuras planas com mesma área", ou seja, produzir superfície.

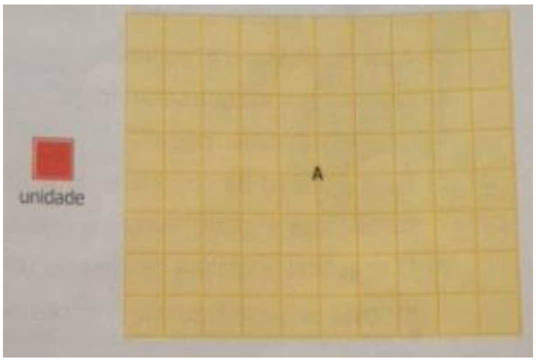
Em face da conclusão dessa etapa da análise, reconhecemos a escolha de tarefas significativas. Entretanto, o estudo das organizações matemáticas concentra-se principalmente no bloco do *saber fazer* (práxis), enquanto que no bloco *tecnológico-teórico* (*logos*), identificamos escassez na justificativa explícita do como fazer, embora este se faça necessário.

4.3.2 Análise Praxeológica da Organização Didática do Livro Didático Aprovado pelo PNLD/2013

O livro analisado inicia o primeiro encontro com as praxeologias explorando a ideia de medidas com um exemplo de ladrilhamento de uma cozinha. Dá início à explicação utilizando a superfície de uma lajota como unidade de medida, isto é, emprega unidades de medidas não padronizadas em uma situação do cotidiano, possivelmente, para articular essa situação com o conceito a ser trabalhado. Conclui a ideia com uma ressalva: "a medida da superfície do piso da cozinha é a área dessa superfície" (DANTE, 2013, p. 227). Com esse desfecho, identificamos uma abordagem inicial pela constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ), pois, ao mesmo tempo em que é dado um exemplo de uma situação do dia a dia, o autor faz uma menção ao entendimento do conceito de área de superfície plana.

O segundo momento, o da exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica, foi iniciado com a tarefa anunciada acima (figura 51), ou seja, o desenho do piso da cozinha de Maria, com os seguintes questionamentos: "a) Qual é a grandeza a ser medida? b) Qual é a unidade usada? c) Qual é a área da superfície do piso considerando essa unidade? d) Que outras unidades de área ou unidades de medidas de superfície você conhece?" (DANTE, 2013, p. 228).

Figura 51 – Grandeza Superfície.

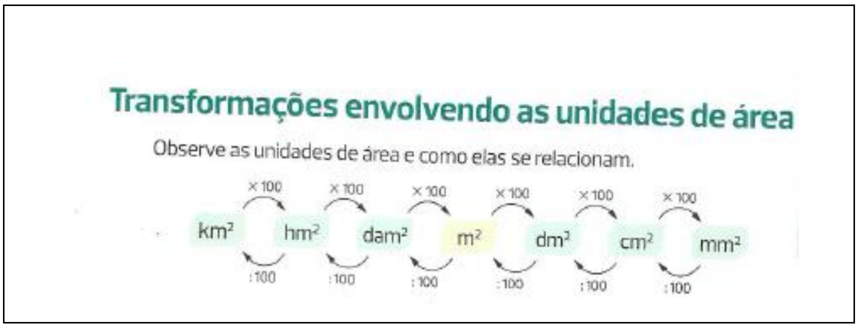


Fonte: DANTE, 2013, p. 227.

Com essa proposta, o autor procura introduzir o conceito de área, por intermédio de uma unidade de medida não padronizada com uma situação de comparação entre as áreas, em que se faz a contagem das unidades (lajota) para obtenção da área da figura maior (piso). A seguir, o LD retoma o cálculo da medida de áreas de figuras planas, usando unidades de medidas não padronizadas (figura 51). Com esse tipo de atividade, busca-se desenvolver a técnica (τ) de comparar a quantidade de superfícies unitárias (unidade de área) necessária para recobrir áreas maiores.

Na sequência, o exemplar apresenta o metro quadrado (m²) como unidade padrão e ilustra um quadro contendo os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado (m²).

Figura 52 – Múltiplos e submúltiplos do m².



Fonte: DANTE, 2013, p. 242.

Nesse trecho, vê-se uma explicitação oficial sobre o tema, quando se discute que "cada unidade de área é igual a 100 vezes a unidade imediatamente inferior [...] ou cada unidade de área é igual a um centésimo de unidade imediatamente superior" (DANTE, 2013, p. 242).

Com essa abordagem, identificamos a constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ), ao mesmo tempo em que ocorre a institucionalização, uma vez que, é dado o conceito. Para conduzir o estudo das tarefas (T) com a transformação de unidades de medidas, o LD emprega a multiplicação ou divisão por 100, apresentando uma proposta de cinco exercícios e problemas[60] que envolvem transformação de unidades, incluindo unidades agrárias; com este tipo de abordagem identificamos o quarto momento de estudo, ou seja, o do trabalho com a técnica.

O autor começa o nono capítulo retomando a ideia iniciada no capítulo anterior, com uma situação do cotidiano. Com esse exemplo, o autor busca explorar a medida de uma superfície: área de uma região plana. Nesse campo, introduz o capítulo com a abordagem seguinte:

> Calcular a área de uma figura plana é medir a região ou a porção do plano ocupada por essa figura. Isso é feito comparando-se a figura plana com uma unidade de área. O resultado é um número que exprime quantas vezes a figura plana contém a unidade de área considerada. Veja a seguinte situação: para cobrir o tampo de uma mesa com folhas de papel sulfite, Valdemar precisou de 10 folhas. Isso significa que: a superfície do tampo da mesa tem área de 10 unidades, considerando a superfície de uma folha como unidade (DANTE, 2013, p. 255, grifos nossos).

Figura 53 – Medida de uma superfície: área de uma região plana.

Fonte: DANTE, 2013, p. 255.

Com esse exemplo, a formalização do conceito de área se dá por intermédio da medida da área associada a um número, por intermédio da comparação de uma unidade de área (papel), com a superfície plana (mesa). Nesse exemplo, também se utilizou uma unidade de medida não convencional para introdução do conceito de área, com uma situação de comparação entre as áreas, usando-se a técnica da contagem dos papéis para obtenção da medida da área da mesa. Com essa abordagem, inferimos a constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ) (3º momento), que tem uma similaridade com a institucionalização

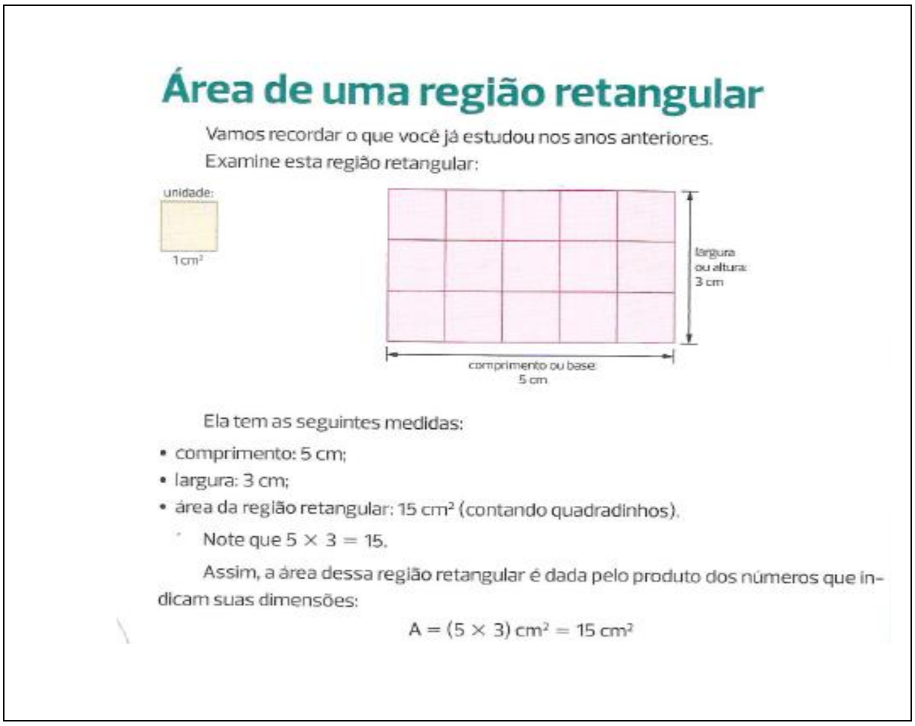
[60] Alguns dos “exercícios e problemas” utilizados no quarto momento têm mais de uma pergunta (nesse trecho, foram identificados quatorze itens).

(5º momento), uma vez que, é dado o exemplo e simultaneamente ocorre a definição do conceito de área de superfície plana.

Na sequência, o LD apresenta um exemplo em que se comparam duas figuras planas, sendo que uma foi adotada como unidade de área (situação semelhante ao exemplo anterior), revelando o segundo momento da praxeologia. O quarto (4º) momento (trabalho com a técnica), foi identificado por intermédio de uma sequência de sete (7) “exercícios e problemas” (DANTE, 2013), com trinta e dois (32) itens.

Para introduzir o conceito de área de uma região retangular, o autor recorreu a uma ilustração na malha quadrangular, como mostra o exemplo a seguir:

Figura 54 – O momento do trabalho da técnica.



Área de uma região retangular

Vamos recordar o que você já estudou nos anos anteriores.
Examine esta região retangular:

unidade:
$1\ cm^2$

largura ou altura: 3 cm

comprimento ou base: 5 cm

Ela tem as seguintes medidas:

- comprimento: 5 cm;
- largura: 3 cm;
- área da região retangular: $15\ cm^2$ (contando quadradinhos).

Note que $5 \times 3 = 15$.

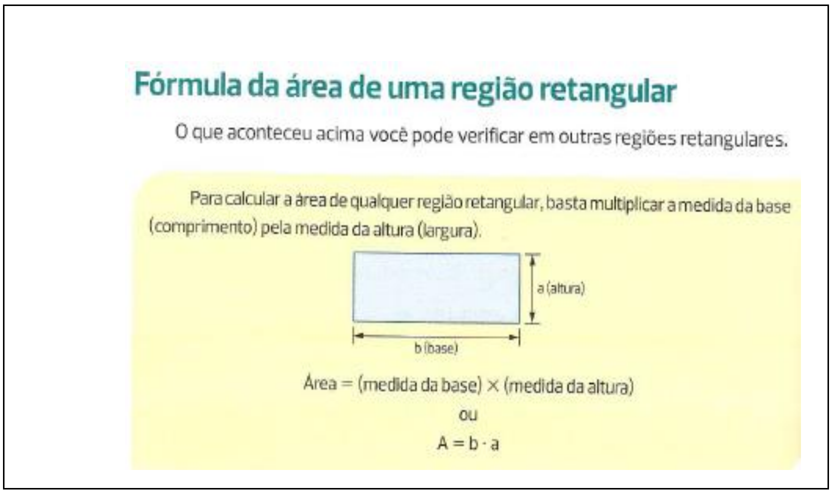
Assim, a área dessa região retangular é dada pelo produto dos números que indicam suas dimensões:

$$A = (5 \times 3)\ cm^2 = 15\ cm^2$$

Fonte: DANTE, 2013, p. 258.

No exemplo apresentado, o autor explora a técnica da contagem e dá início a uma nova técnica, com a multiplicação da base (comprimento) vezes a altura (largura), para posteriormente justificar a definição e a fórmula da medida da área de uma região retangular. Compreendemos que a escolha pela técnica mais simples (contagem), leva ao entendimento da generalização da fórmula explicitada na figura.

Figura 55 – Medida da Área de uma região retangular.



Fórmula da área de uma região retangular

O que aconteceu acima você pode verificar em outras regiões retangulares.

Para calcular a área de qualquer região retangular, basta multiplicar a medida da base (comprimento) pela medida da altura (largura).

a (altura)

b (base)

Área = (medida da base) × (medida da altura)

ou

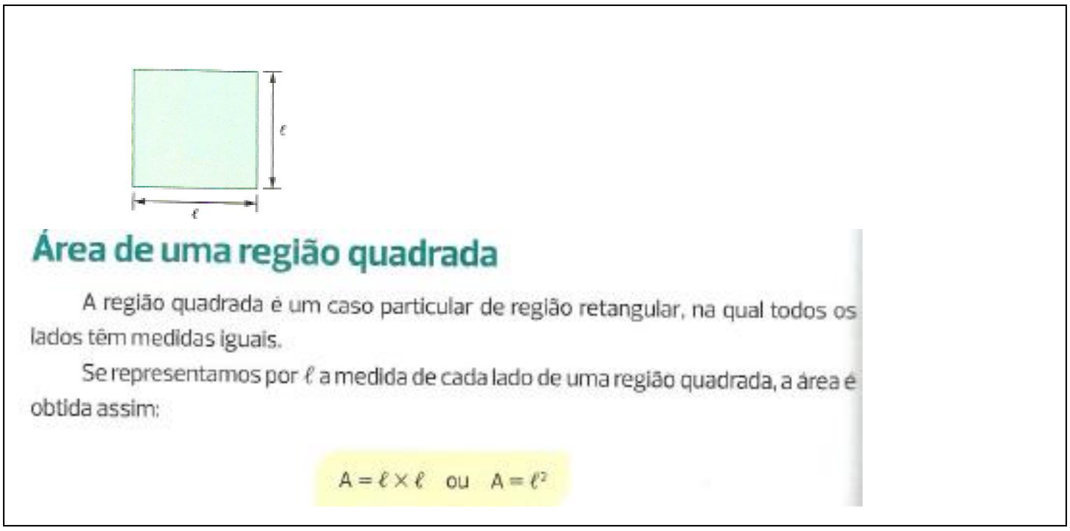
$A = b \cdot a$

Fonte: DANTE, 2013, p. 258.

A figura nos revela características do terceiro momento, o da constituição do entorno tecnológico-teórico [θ/Θ], e do quinto (institucionalização), com a explanação da fórmula. Ao utilizar a técnica (τ) da multiplicação da base vezes a altura, percebemos uma intenção implícita do autor de introduzir uma nova técnica (utilização da fórmula), uma vez que, áreas de grandes proporções impossibilitarão a contagem dos quadradinhos. Com essa abordagem, o ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ) previamente estabelecido, é justificado e definido.

Na figura a seguir, o LD apresenta a área de uma região quadrada (caso especial de uma região retangular).

Figura 56 – Medida da Área de uma região quadrada.



ℓ

ℓ

Área de uma região quadrada

A região quadrada é um caso particular de região retangular, na qual todos os lados têm medidas iguais.

Se representamos por ℓ a medida de cada lado de uma região quadrada, a área é obtida assim:

$A = \ell \times \ell$ ou $A = \ell^2$

Fonte: DANTE, 2013, p. 258.

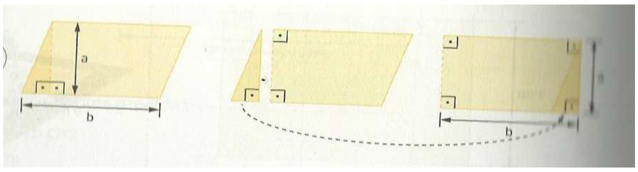
Neste exemplo, também observamos dois momentos, o da constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ) e o da institucionalização, com a explicitação de que esse é um caso particular da região retangular e a generalização da fórmula da medida da área do quadrado.

Nesse trecho do livro, o autor propõe uma série de tarefas, ou seja, explora o trabalho com a técnica (τ) cujo foco é "determinar a área da região retangular" ou "calcular a área da região retangular" (DANTE, 2013, p. 259), dada às medidas da base e da altura ou do lado de um quadrado.

Na abordagem de outras figuras planas, como o paralelogramo, triângulo, trapézio e losango, o autor buscou empregar a composição de figuras para ilustrar cada situação e aproximar-se dos respectivos conceitos das regiões limitadas pelas referidas áreas.

O paralelogramo foi obtido através da composição de um retângulo:

Figura 57 – Medida da Área de uma região limitada por um paralelogramo.

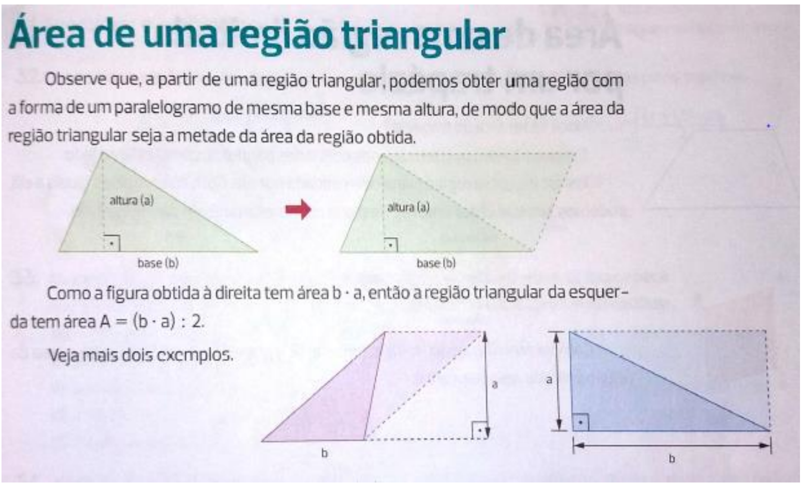


Fonte: DANTE, 2013, p. 260.

Segundo o autor do LD, para determinar a fórmula que expressa a área de uma região plana limitada por um paralelogramo, "transladamos a parte em destaque da região limitada pelo paralelogramo e obtemos uma região retangular com área equivalente, com base de medida **b** e altura de medida **a**" (DANTE, 2013, p. 260). Logo, a área da figura é equivalente à de um retângulo, e, portanto, a medida da área do paralelogramo é: A= b . a.

As fórmulas para o cálculo de uma região limitada por um triângulo e por um trapézio são justificadas no LD por uma duplicação das respectivas figuras, formando um paralelogramo. Obtêm-se, assim, suas medidas das áreas na devida ordem: $A = \frac{b\,.\,a}{2}$ e $A = \frac{(B + b)\,.\,a}{2}$.

Figura 58 – Medida da Área da região triangular.



Área de uma região triangular

Observe que, a partir de uma região triangular, podemos obter uma região com a forma de um paralelogramo de mesma base e mesma altura, de modo que a área da região triangular seja a metade da área da região obtida.

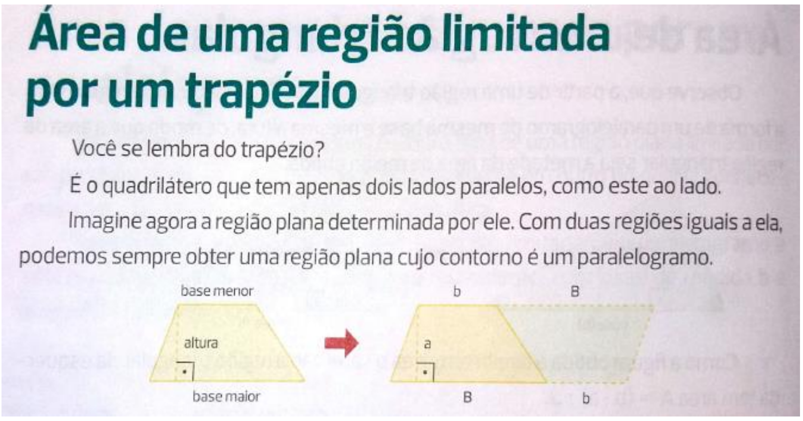
Como a figura obtida à direita tem área b · a, então a região triangular da esquerda tem área A = (b · a) : 2.

Veja mais dois exemplos.

Fonte: DANTE, 2013, p. 261.

Logo, a medida da área de uma região triangular é dada por A $= \frac{b\ .\ \mathrm{a}}{2}$ (medida da base, vezes a medida da altura dividido por 2).

Figura 59 – Medida da Área da região limitada por um trapézio.



Área de uma região limitada por um trapézio

Você se lembra do trapézio?

É o quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos, como este ao lado.

Imagine agora a região plana determinada por ele. Com duas regiões iguais a ela, podemos sempre obter uma região plana cujo contorno é um paralelogramo.

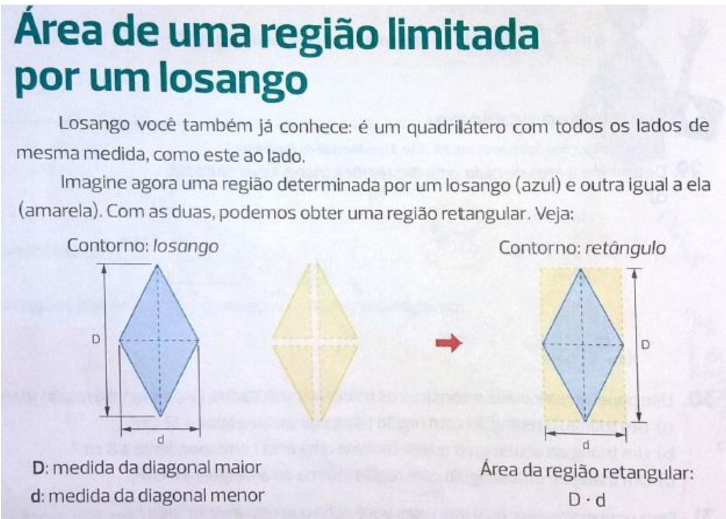
Fonte: DANTE, 2013, p. 262.

Como a medida da área da região limitada pelo paralelogramo é (base maior + base menor) vezes a altura, então a medida da área da região limitada pelo trapézio é: $A = \frac{(\mathrm{B}+b)\ .\ a}{2}$.

Para o cálculo da região limitada por um losango, o autor desenvolve a justificativa através da duplicação da figura e decomposição da parte duplicada, transformando-a na forma de um retângulo. Após essa etapa, divide a medida da área dessa figura por dois, obtendo dessa maneira a sua fórmula:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}\,.\,\mathrm{d}}{2}.$$

Figura 60 – Medida da Área da região limitada por um losango.



Área de uma região limitada por um losango

Losango você também já conhece: é um quadrilátero com todos os lados de mesma medida, como este ao lado.

Imagine agora uma região determinada por um losango (azul) e outra igual a ela (amarela). Com as duas, podemos obter uma região retangular. Veja:

D: medida da diagonal maior
d: medida da diagonal menor

Área da região retangular:
D · d

Fonte: DANTE, 2013, p. 262.

Conforme o autor, a figura de número 60 mostra que a medida da área da região determinada pelo losango de diagonal maior (**D)** e de diagonal menor (**d)**, corresponde à metade da medida da área de uma região retangular de comprimento **D** e largura **d**. Logo, a medida da área da região limitada pelo losango é: $A = \frac{\mathrm{D}\,.\,\mathrm{d}}{2}$.

Nos quatro casos especificados (paralelogramo, triângulo, trapézio e losango), identificamos a institucionalização ocorrendo simultaneamente com o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico na justificativa da técnica (τ). Ressaltamos que nesse trecho do livro, foram encontradas oito (8) tarefas com vinte e três (23) itens para explorar a técnica (τ), algumas utilizando a composição e a decomposição de figuras planas para justificar a técnica (τ).

O momento da avaliação não foi esclarecido, mas a obra apresenta atividades propostas como forma de revisão nos itens “outros contextos” e “revisão cumulativa”; esse tipo de enfoque pode ser utilizado pelo professor como referência para o momento da avaliação.

O livro apresenta argumentos matematicamente oportunos, ao longo de todos os capítulos analisados. A obra emprega áreas padronizadas e não padronizadas nos seus dois capítulos. Na nossa percepção, esse tipo de abordagem pode contribuir para a compreensão de que a medida da área pode variar de acordo com a unidade de medida escolhida. Também identificamos a técnica (τ) da composição e decomposição empregada por intermédio da malha quadriculada, tangram e placas, e a composição das principais figuras planas para justificar as fórmulas. Esse tipo de abordagem pode vir a contribuir para a construção dos conceitos trabalhados nos capítulos analisados.

Nos capítulos analisados, encontramos situações significativas desde a introdução do conceito até a conclusão do capítulo. O bloco tecnológico-teórico (θ/Θ) inicia as justificativas de forma clara, partindo de um único tipo de tarefa OMP, para posteriormente apresentar situações que integram duas ou mais OMP em torno de um discurso tecnológico comum. A institucionalização dos conceitos é feita através das fórmulas.

Em conclusão dessa etapa da análise, identificamos tarefas pontuais e locais. Entretanto, o estudo das organizações matemáticas se concentra principalmente no bloco do saber fazer (*práxis*), enquanto que no bloco tecnológico-teórico (*logos*) é insuficiente a justificativa explícita do fazer, embora se faça necessário. Também constatamos uma grande quantidade de tarefas com ênfase nos aspectos numéricos.

4.4 PRAXEOLOGIAS DOS PROFESSORES

Na escola, uma das atribuições do professor é preparar suas aulas e colocá-las em prática para que o estudante aprenda. Portanto, algumas das suas demandas devem ser: como organizar bem suas aulas, de maneira que as torne de fácil compreensão? Quais os tipos de tarefas escolher para um ensino efetivo? Como conduzir essas tarefas? Como institucionalizar? E como avaliar? Esses questionamentos precisam fazer parte do cotidiano do professor, e estar atento a essas ações, faz-se necessário.

A TAD que emanou da transposição didática traz um olhar nos caminhos que o professor deve trilhar para chegar ao ensino de um conceito matemático, neste caso, o conceito de área de figuras planas. Ao estudar essa teoria, percebemos que existem escolhas a serem feitas que são determinantes para que o “saber ensinado” se torne adequado para a aquisição do “saber aprendido” – esse saber, deve ser obtido por meio de um percurso que o docente necessita traçar até chegar à compreensão do estudante.

Nesta pesquisa, procuramos conhecer os tipos de tarefas que o professor aplica para conduzir suas aulas, as técnicas empregadas, identificando, sobretudo, se são bem elaboradas e de fácil utilização. Também buscamos verificar se as justificativas são cientificamente válidas. Para isso, realizamos um levantamento das tarefas propostas pelos docentes, identificadas por meio de observação naturalista e gravação de áudios. Precisamente, analisamos as organizações matemáticas (OM) empregadas pelos professores, com o intuito de conhecermos as tarefas, técnicas e os elementos tecnológicos teóricos adotados e mobilizados por eles no decorrer das aulas. Além disso, buscamos identificar as organizações didáticas (OD) tomadas, com o propósito de perceber como foram conduzidas as organizações matemáticas postas em prática.

4.4.1 Praxeologias Empregadas pelos professores

4.4.1.1 Praxeologias Empregadas pelo Professor da Escola 1

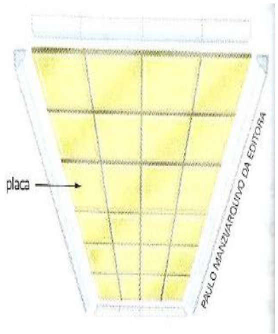
A primeira aula do professor Carlos acerca do saber de referência área, ocorreu no dia dezoito (18) de maio de dois mil e dezesseis (2016).

Nas aulas, foi constatado que as praxeologias empregadas foram realizadas mediante escolha de nove (9) questões, resolvidas na lousa. Dessas questões, apenas a tarefa (T5) não foi citada pelo LD.

O professor deu início ao primeiro encontro do trabalho com área de figuras planas solicitando aos estudantes a utilização dos cadernos e do LD, a fim de empreender uma leitura das questões propostas no livro. Após isso, o professor fez a leitura do exemplo do livro adotado (quadro 6). Vejamos:

Quadro 6 –Tarefa 1 do professor 1.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T1: Observe ao lado a figura do teto de uma sala e responda: Qual a área da superfície do	Contagem das placas com os estudantes: “1,	($\tau1$) Utilizar a contagem dos quadrados = 24	Conceito de área do retângulo

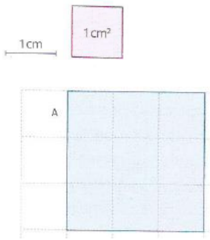
teto, considerando a superfície da placa como unidade? 	2, 3,..., 24”. 4 x 6 = 24 unidades.	unidades. (τ2) Efetuar a multiplicação: 6 x 4 = 24 unidades. (τ3) Cálculo da área usando a fórmula convencional. A = bxh onde b é o comprimento de um lado tomado como base e h é o comprimento de outro lado tomado como altura. A = b x a =6x4= 24 Unidades.	

Fonte: DANTE, 2013, T. 9, p. 256.

Nesse exemplo, utiliza-se uma unidade de área não padronizada para encontrar a medida da área de uma superfície por meio da comparação. Com essa abordagem, o professor emprega a ideia do autor do LD para introduzir a noção de área com a frase: “calcular a área de uma figura plana é medir a região ou a porção do plano ocupada por essa figura” (DANTE, 2013, p. 255). Além disso, conduz o estudante a realizar a técnica da contagem e utilizar a multiplicação. Relembrando os momentos de Chevallard (1999), esse constitui o início da primeira etapa do estudo e o terceiro momento de estudo, ou seja, o primeiro encontro com a tarefa e a constituição do ambiente tecnológico-teórico (θ/Θ) com a justificativa da técnica.

Depois, o professor solicita que os estudantes leiam a tarefa (T2) a seguir:

Quadro 7 –Tarefa 2 do professor 1.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnica**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T2: Calcule a área em centímetros quadrados (cm²) e o perímetro em centímetros (cm) da figura dada abaixo. 	Contagem dos quadros: 1, 2, ..., 9 $A = 3x\ 3 = 9\ cm^2$ e contagem dos lados da figura:1, 2, ..., 12. P = 12 cm.	(τ1) Utilizar a contagem dos quadrados Resp. $A = 9\ cm^2$ P = 12 cm. (τ2) Efetuar a multiplicação $3x\ 3 = 9\ cm^2$ e a soma das unidades. P= 3+3+3+3= 12 cm. (τ3) Aplicar a fórmula $A = l^2 = 3x3 = 9\ cm^2$ P = Soma dos lados = 3+3+3+3 =12 cm.	Conceito de área do quadrado

Fonte: DANTE, 2013, T. 13, item a, p. 257.

Com essa atividade, compreendemos que o professor utilizou a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, o que consiste no segundo momento de Chevallard (1999). Esta foi desenvolvida através da contagem dos quadrinhos (área) e da contagem dos lados da figura. Mas o professor não explora a comparação das medidas, área e perímetro, indicada pela tarefa.

Dando continuidade à aula, o professor propõe a tarefa 3 (T3):

Quadro 8 –Tarefa 3 do professor 1.

Tarefa	Resolução do professor	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
T3: Se uma região retangular tem 26 cm de comprimento por 18 cm de largura, qual é a sua área em centímetros quadrados?	A= b x a A = 26 x 18 A = 468 cm².	(τ1) Utilizar a multiplicação: 26 x 18 = 468 cm² (τ2) Aplicar a fórmula A = b x a = 26 x 18 = 468 cm².	Conceito de área do retângulo

Fonte: DANTE, 2013, T. 17, p. 259.

Com a escolha dessa atividade, o professor inicia o terceiro momento da OD, isto é, o da constituição do ambiente tecnológico-teórico identificado com a resolução da tarefa na qual se utiliza a técnica de aplicação da fórmula. Com essa maneira de abordagem, o momento referido coincide com o da institucionalização, visto que, o professor introduz o conceito de área e usa a fórmula para calcular área da região retangular.

O professor principia a leitura da tarefa 4 (quatro).

Quadro 9 –Tarefa 4 do professor 1.

Tarefa	Resolução do professor	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
T4: Se uma região retangular tem 12 cm de comprimento e 96 cm² de área, quantos centímetros tem sua largura?	L = 96 : 12 L = 8 cm	(τ1) Encontrar um valor que multiplicado por 12, resulta 96. **?** x 12 = 96 (τ2) Aplicar a fórmula: A = b x h 96 = 12 x h	Conceito de área do retângulo

		96: 12 = h h = 8 cm (τ3) Efetuar a divisão de 96 por 12. 96 : 12 = 8 cm.	

Fonte: DANTE, 2013, T. 25, p. 259.

O tipo de tarefa em pauta não é constituído apenas da aplicação da fórmula, ou seja, o estudante necessita compreender que a questão não solicita a área, e, sim, um dos lados; mas, no momento da resolução, o professor desenvolve a divisão (96:12), não sendo questionado pelos educandos a respeito do motivo de uso da estratégia aludida.

Com essa atividade, foi identificada a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, denominada por Chevallard (1999) de segundo momento na teoria.

Após a resolução, o professor faz a leitura da tarefa 5 (cinco).

Quadro 10 –Tarefa 5 do professor 1.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnica**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T5: Calcular a área de um quadrado com cada lado medindo cinco centímetros.	Se cada lado tem 5 cm então a área é: 5 x 5 = 25.	(τ1) Multiplicar os lados 5 x 5 = 25. (τ2) Aplicar a fórmula A = l x l A = 5 x 5 =25.	Conceito de área do quadrado

Fonte: professor participante (2016).

Com essa tarefa, verificamos o terceiro momento, o da constituição do ambiente tecnológico-teórico, e o quinto, o da institucionalização, uma vez que, o professor expõe o conceito de área e aplica a fórmula da área do quadrado dizendo: “Para calcular a área do quadrado, utilizamos a fórmula A = l x l (l é o lado)” (CARLOS, 2016). Após essa tarefa, o professor finaliza sua aula solicitando que os estudantes resolvam algumas questões em casa.

No dia dezenove (19) de maio de dois mil e dezesseis (2016), o professor introduz a segunda e a terceira aula relembrando aos alunos as questões que ele havia solicitado na aula anterior. Depois, recorda aos estudantes a fórmula para calcular a área de um retângulo, apresentando a do paralelogramo, dando início à leitura da tarefa 6 (seis).

Quadro 11 –Tarefa 6 do professor 1.

Tarefa	Resolução do professor	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
T6: Se um piso em forma de paralelogramo tem base de 2,1 m e altura de 1,3 m, qual é a sua área?	A = 2,1 x 1,3. $\begin{array}{r} 2{,}1 \\ \times\ 1{,}3 \\ \hline 6\,3 \\ +\ 2\,1 \\ \hline 2{,}\,7\,3\ \text{m}^2 \end{array}$	(τ1) Desenvolver a conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula. A = b x a = 2,1 . 1,3 = 2,73 m².	Conceito de área do paralelogramo

Fonte: DANTE, 2013, T. 27, item c, p. 260.

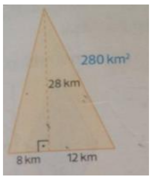
Com essa tarefa, foram utilizadas técnicas já trabalhadas anteriormente, portanto, foi percebida a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, configurando o que Chevallard (1999) designou de segundo momento. Também verificamos o momento da institucionalização com a consolidação da fórmula do paralelogramo.

Na resolução da tarefa, não foi justificado pelo professor o motivo de a fórmula do paralelogramo ser equivalente à do retângulo e foi resolvido por meio da aplicação da fórmula do retângulo.

O professor prosseguiu com a leitura da tarefa 7 (sete).

Quadro 12 –Tarefa 7 do professor 1.

Tarefa	Resolução do professor	Técnica	Bloco Tecnológico-teórico
T7: Determine a área de cada uma das regiões triangulares pintadas.	$A = \frac{b.\ a}{2}$ $A = \frac{20\ .\ 28}{2} =$	(τ1) Desenvolver a conta armada:	Conceito de área de um triângulo

	A = 280 Km².	28 x 20 560 | 2 16 280 00 (τ2) Aplicar a fórmula: A = $\frac{b.\ a}{2}$ A = $\frac{20\ .\ 28}{2}$ = 280 Km².	

Fonte: DANTE, 2013, T. 29, item a, p. 261.

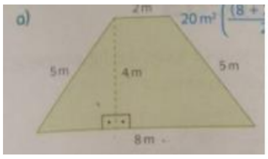
No momento da resolução, o professor pede a um aluno para ler um trecho do livro que trata da área da região triangular. A seguir, discorre: "Vejam que a fórmula do triângulo é diferente, é base vezes altura sobre dois" (CARLOS, 2016). Com esse enfoque, é identificada a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, o equivalente ao segundo momento de Chevallard (1999). Além disso, com a exposição da fórmula para o cálculo da área, é mostrado como se deu a institucionalização de figuras de superfícies triangulares.

Após esse momento, o professor finaliza as aulas propondo a resolução das tarefas no próximo encontro.

Foi dado início à quarta aula, no dia vinte e três (23) de maio de dois mil e dezesseis (2016), que se constitui com o professor relembrando as fórmulas aplicadas nas aulas anteriores e discorrendo: "hoje vamos falar sobre a área da região limitada por um trapézio" (CARLOS, 2016). Em seguida, faz o desenho na lousa e afirma: "é um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos. Temos a base menor (b), a base maior (B), e a altura (a)" (CARLOS, 2016). Nessa ocasião, o professor escreve a fórmula da medida da área do trapézio $A = \frac{(B + b)\ .\ a}{2}$ e propõe a resolução da tarefa oito (8).

Vejamos:

Quadro 13 –Tarefa 8 do professor 1.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnica**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T8: Use o valor indicado nas figuras abaixo e calcule a área da região determinada pelo trapézio. 	$A = \frac{(B+b)\ .\ a}{2}$ $A = \frac{(\ 8+2)\ .\ 4}{2}$ $A = \frac{40}{2} = 20\ m^2$.	(τ1) Desenvolver a conta armada (τ2) Aplicar a fórmula $A = \frac{(B+b)\ .\ a}{2}$ $A = \frac{(\ 8+2)\ .\ 4}{2}$ $A = \frac{40}{2} = 20\ m^2$.	Conceito de área de um trapézio

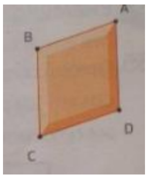
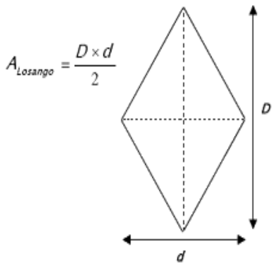
Fonte: DANTE, 2013, T. 32, item a, p. 263.

Com a resolução da tarefa referida, foi identificado o segundo momento, ou seja, a exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica. Essa abordagem coincide com o momento da institucionalização, visto que, o professor introduz o conceito de área e explana a fórmula referente à questão apresentada. O que evidencia que a institucionalização desse tipo de atividade deu-se pela aplicação da fórmula.

Dando prosseguimento à aula, o professor solicita que os estudantes resolvam a tarefa 9 (nove).

Quadro 14 –Tarefa 9 do professor 1.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnica**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T9: Alexandre vai azulejar a parede do seu banheiro. A figura ao lado representa o tipo de peça que ele vai usar.		(τ1) Desenvolver a conta armada (τ2) Aplicar a fórmula	Conceito de área do losango

Assim, o contorno de cada azulejo é um losango com estas medidas: AB = 13 cm, AC = 24 cm, BD = 10 cm. d) Determine a área de cada azulejo em centímetros quadrados. 	 A = $\frac{24 \text{ x } 10}{2}$ A = $\frac{240}{2}$ A = 120 cm².	A = $\frac{(D\ .\ d)}{2}$ A= $\frac{24 \text{ x } 10}{2}$ A = $\frac{240}{2}$ A = 120 cm².	

Fonte: DANTE, 2013, T. 33, item d, p. 263.

Para resolver o item, o professor apresenta a fórmula da medida da área do losango. Nessa tarefa, também foi identificada a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica. Com a abordagem mencionada, esse momento coincide com o da institucionalização, visto que, o professor introduz o conceito de área e expõe a fórmula referente à questão apresentada.

Percebeu-se que o quarto momento (CHEVALLARD, 1999), o do trabalho com a técnica, ocorreu através da resolução dos exercícios propostos para casa. O sexto momento (CHEVALLARD, 1999), ocorreu por meio de uma avaliação desenvolvida na unidade escolar com questões sobre área de figuras planas.

Para resolver as tarefas, o professor utilizou duas técnicas: a da contagem dos quadrados e a da aplicação de fórmulas. Ao utilizar a fórmula, o professor não apresentou uma justificativa explícita sobre os motivos que o levaram a usar tal técnica. Além disso, foi observado que o professor trabalhou nas suas aulas de maneira tradicional, sem a utilização de recursos didáticos auxiliares.

Na análise, verificamos que no desenvolvimento das tarefas, foi dada maior ênfase ao tipo de tarefa, calcular área de figuras planas, e não foi explorada a transformação de unidades.

Durante a observação, percebemos uma acentuada presença do LD, utilizado para as escolhas das tarefas propostas em classe. O professor admite essa afirmação na entrevista, ao ser questionado como as aulas foram planejadas. O professor afirma: “meu planejamento é baseado no LD e quando eu tenho alguma dúvida, utilizo a internet. Basicamente, eu utilizo o LD” (CARLOS, 2016).

Ao ser indagado acerca da razão que o levou a fazer as escolhas das tarefas, o professor respondeu:

> Para cada conteúdo do LD, tem uma série de questões, eu escolhi aquelas que mais se aproximava do entendimento deles, e as que não explorei, pedi que eles fizessem um questionário e corrigi em sala de aula. Percebi que quando eu mostrava a figura, eles se identificavam melhor. Com base nisso, eu elaborei o teste e a prova (CARLOS, 2016).

Embora a LDB n. 9394/96, em seu artigo 4º, inciso VII, faça alusão aos programas de apoio ao LD, este não deve ser o único meio de conhecimento disponível, uma vez que, existem materiais alternativos para assessorar o trabalho do professor.

Nas aulas, em alguns momentos da fala do professor, foi percebido que o mesmo demonstrava uma inquietação para concluir o assunto, alegando a quantidade de conteúdos a serem abordados no decorrer do ano letivo. O que pode justificar a exclusão do assunto “transformação de unidades” (DANTE, 2003), sem que seja notada a importância desse tipo de abordagem para que o estudante compreenda que uma medida da área pode variar de acordo com a unidade escolhida.

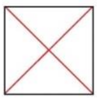
4.4.1.2 Praxeologias Empregadas pelo Professor da Escola 2

As duas primeiras aulas do professor João sobre área de figuras planas, ocorreram no dia primeiro (1º) de junho de dois mil e dezesseis (2016). As praxeologias empregadas nas aulas foram realizadas mediante a escolha de tarefas resolvidas na lousa.

A primeira aula, ou o momento do primeiro encontro com a praxeologia, foi principiada com um breve diálogo a respeito da necessidade de se realizar medidas de superfícies para resolver questões do cotidiano, com exemplos de atividades do dia a dia que necessitam desses cálculos, como: “calcular a área da superfície de uma casa, azulejar uma cozinha, colocar piso em um apartamento e encontrar a medida da superfície da sala de aula” (JOÃO, 2016). Em seguida, o professor explica que: “superfície é uma grandeza que apresenta duas dimensões, e área, é a medida dessa grandeza, portanto um número" (JOÃO, 2016). Com essa conversação, o professor busca estabelecer a diferença entre área e superfície.

A seguir, o professor coloca na lousa a tarefa T1 e a resolve. Vejamos:

Quadro 15 –Tarefa 1 do professor 2.

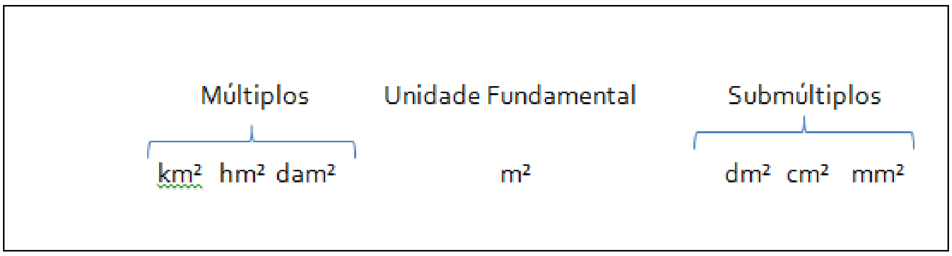
Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T1: Determine as medidas de cada figura abaixo, dado a área do triângulo igual a 3cm². 	Como temos 4 triângulos de área 3, então: 3x 4 = 12 cm².	(τ1) Identificar o valor equivalente à área de cada triângulo e somar: 3+3+3+3 =12 cm² (τ2) Multiplicar o valor da área pela quantidade de triângulos: 3. 4 =12 cm².	Concepção de área

Fonte: professor participante (2016).

Na tarefa, o professor busca explorar a ideia de superfície de figuras planas, sem se preocupar com a aplicação de fórmulas.

Posteriormente, o professor apresenta o seguinte esquema:

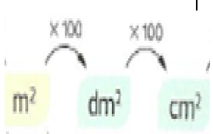
Figura 61 – Esquema desenvolvido pelo professor.

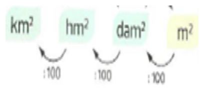


Fonte: professor participante (2016).

Na sua fala, o professor apresenta o metro quadrado (m²) como unidade fundamental de medida da superfície. Em seguida, esclarece que os múltiplos são unidades que servem para medir superfícies de grandes dimensões e os submúltiplos são unidades usadas para medir pequenas dimensões. Depois, o professor põe na lousa a tarefa 2 (dois) sobre transformações de unidades e a resolve, utilizando a técnica apresentada no quadro a seguir:

Quadro 16 –Tarefa 2 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T2: Transforme em m² as sentenças abaixo: a) 1250 cm² b) 0,003 km².	a) Devemos dividir por 10000 Resp: 0,1250 m² b) Devemos multiplicar por 1000000 = 3000 m².	a) (τ1) Dividir 1250 por 10000 = 0,1250 m² Consiste em identificar a posição do cm² em relação ao m² (unidade padrão) para efetuar a divisão. a) (τ2) Utilizar o deslocamento para a direita multiplicando:  b) (τ1) Multiplicar por 1000000 = 3000 m². Consiste em identificar a posição do Km² em relação ao m² (unidade padrão) para efetuar a multiplicação. (τ2) Utilizar o	Transformação da unidade de medida de superfície com submúltiplos e múltiplos do m² (propriedades dos multiplos e submúltiplos do m²).

		deslocamento para a esquerda dividindo: 	

Fonte: professor participante (2016).

Podemos considerar que o momento em que o professor apresenta o esquema para explicar aos alunos situações em que se exige a transformação de unidades, ocorre a constituição do ambiente tecnológico-teórico, com a justificativa da técnica aplicada. Esse momento, também se confunde com o da institucionalização.

Após este procedimento, o professor propõe a tarefa que segue:

Quadro 17 – Tarefa 3 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T3: Um piso de forma retangular apresenta uma área de 3500 cm². Estabeleça essa medida em m².	0,3500 ou 0,35 m².	(τ1) Dividir 3500 : 10.000 = 0,35 m² Consiste em identificar a posição do cm² em relação ao m² (unidade padrão) para efetuar a divisão pela unidade imediatamente superior. (τ2) Utilizar a técnica do deslocamento para a esquerda.	Transformação da unidade de medida de superfície com submúltiplo do m². (propriedades dos multiplos e submúltiplos do m²).

Fonte: professor participante (2016).

Na tarefa, verificamos a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica (2º momento), uma vez que, a técnica utilizada já foi aplicada anteriormente.

Em seguida, o professor conclui a aula solicitando que os estudantes resolvam em casa doze (12) tarefas do LD. Compreendemos que nessa etapa, estamos diante do trabalho com a técnica, ou seja, o quarto momento discutido por Chevallard (1999).

No dia oito (8) de junho, foi dado início à terceira e à quarta aula do professor João. Este, começou seu trabalho com a explanação da fórmula de área de quadrado, A = lado vezes lado, ou seja, $A = l \cdot l = l^2$.

Na sequência, o professor resolve a seguinte tarefa:

Quadro 18 – Tarefa 4 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T4: Determine a área do quadrado de lado 7,5 cm.	$A = l \cdot l = l^2$ 7,5 x 7,5 375 + 525 56,25 Resp:56,25 cm²	(τ1) Efetuar a multiplicação através da conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula $A = l \times l =$ $7{,}5 \times 7{,}5 =$ $A = 56{,}25\ cm^2$.	Conceito de área do quadrado

Fonte: professor participante (2016).

Com esse enfoque, o professor explora um tipo de tarefa e elabora uma técnica, (2º momento), ou seja, utiliza a fórmula e a conta armada para resolver a tarefa, ao mesmo tempo em que desenvolve a institucionalização para esse tipo de tarefa.

Depois, o professor apresenta a fórmula da medida da área do retângulo, A = Comprimento vezes a Largura, expondo a fórmula: A= C . L, e resolve a atividade. Vejamos:

Quadro 19 – Tarefa 5 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T5: Determine a largura de um retângulo, cuja área mede 144 cm² e o comprimento mede 24 cm.	144 | 24 0 6 Resp. 6 cm.	($\tau 1$) Aplicar a multiplicação, utilizando a conta armada. ($\tau 2$) Aplicar a fórmula, substituindo os valores da área para encontrar a largura. A = b . a 144 = b . 24 b = 144: 24 b = 6 cm	Conceito de área do retângulo

Fonte: professor participante (2016).

Como na questão anterior, foi aplicada a fórmula da área do retângulo, isto é, foi explorada um tipo de tarefa e elaborada uma técnica, considerada por Chevallard (1999) como o segundo momento didático. Concomitantemente, o professor desenvolve a institucionalização para esse tipo de tarefa, uma vez que, na resolução, o mesmo deixa claro que se deve utilizar a fórmula da área do retângulo para encontrar um dos lados da figura. Em seguida, efetua a divisão através da conta armada.

Na sequência, o professor desenha um paralelogramo e diz que essa figura possui área igual à do retângulo. Em seguida, apresenta a fórmula da área do triângulo e resolve a tarefa subsequente.

Quadro 20 – Tarefa 6 do professor 2.

Tarefa	Resolução do professor	Técnicas	Bloco Tecnológico-teórico
T6: Qual é a área de um retângulo que apresenta comprimento medindo 8,5 cm e largura medindo 2,4 cm?	8,5 x 2,5 4 2 5 + 1 7 0 2 1,2 5 Resp. 21,25 cm^2.	(τ1) Aplicar a multiplicação, utilizando a conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula: A = b . a A = 8,5 . 2,5 A = 21, 25 cm^2.	Conceito de área do retângulo

Fonte: professor participante (2016).

Após a resolução, o professor propõe a tarefa a seguir:

Quadro 21 – Tarefa 7 do professor 2.

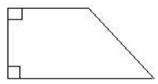
Tarefa	Resolução do professor	Técnicas	Bloco Tecnológico-teórico
T7: Qual é a área de um triângulo cuja base mede 2,4 cm e altura 1,5 cm?	$A = \frac{b.\ h}{2}$ $A = \frac{2,4\ .\ 1,5}{2} =$ 2,4 1,5 1 2 0 + 2 4 3, 6 0 Resp. 3,6 cm^2.	(τ1) Aplicar a fórmula (τ2) Multiplicar, utilizando a conta armada.	Conceito de área de um triângulo

Fonte: professor participante (2016).

Na resolução dessas questões (T6 e T7), é explorado o *trabalho com a técnica*, quarto momento didático (CHEVALLARD, 1999), com um diferencial: em T6, o professor multiplica o comprimento pela largura, deixando implícita a utilização da fórmula, e em T7 o professor aplica a fórmula, demonstrando como foi feita a *institucionalização* (quinto momento) para esse tipo de tarefa.

Dando seguimento, o professor desenha na lousa um trapézio e expõe a sua fórmula, sugerindo a resolução da questão a seguir.

Quadro 22 – Tarefa 8 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T8: Determine a área do trapézio: Dado: Base maior = 10 cm, base menor = 6 cm, altura= 3cm.	 A = $\frac{(B+b)\ .\ a}{2}$ A = $\frac{(\ 10+6)\ .\ 3}{2}$ A= $\frac{16\ .\ 3}{2}$ A = 24 m².	(τ1) Aplicar a fórmula (τ2) Desenvolver a conta armada e resolver.	Conceito de área do trapézio

Fonte: professor participante (2016).

Na resolução, identificamos a *exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica* no instante em que o professor apresenta a fórmula e a aplica. Nesse momento, também verificamos como se deu a *institucionalização.*

O mesmo ocorreu com a tarefa 9, ou seja, foi feito o esboço de um losango na lousa e apresentada a sua fórmula, e em seguida o professor desenvolveu a resolução.

Quadro 23 – Tarefa 9 do professor 2.

Tarefa	**Resolução do professor**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T9: Qual a medida da área de um losango cuja	A = $\frac{(D\ .\ d)}{2}$	(τ1) Desenvolver a conta armada	Conceito de área do losango

medida da diagonal maior é 18 cm, a diagonal menor equivale a 1/6 da diagonal menor.	18 x 3 54 | 2 27 R. 27 cm².	(τ2) Aplicar a fórmula. Consiste em calcular 1/6 de 18 cm para encontrar a medida da diagonal menor, antes de resolver a questão. d = $\frac{1}{6}$. 18 = 3 cm A = $\frac{(D\ .\ d)}{2}$ A = $\frac{(18\ .\ 3)}{2}$ A = $\frac{54}{2}$ A = 27 cm².	

Fonte: professor participante (2016).

Nesse caso, também percebemos que foi feita a exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, no momento em que o professor apresenta a fórmula e a aplica. Com essa abordagem, podemos compreender como foi institucionalizado esse tipo de tarefa.

Posteriormente, o professor seleciona algumas questões do livro didático para que os estudantes as resolvam em casa e encerra a sua aula.

Com esse procedimento, compreendemos que o professor busca ampliar o conhecimento do estudante através do trabalho com a técnica (quarto momento didático).

Foi observado, no decorrer das aulas, o momento da avaliação (sexto momento) com correção das questões propostas para casa e com a aplicação de dois (2) testes e uma prova ao final da unidade.

Nestas aulas, foi constatada uma clareza na intencionalidade do professor em oferecer uma ampla visão das tarefas sobre área e utilizar técnicas de resolução sugeridas para cada tipo de tarefa. No entanto, não foram observadas técnicas variadas para explorar as tarefas propostas, uma vez que, foi utilizada apenas uma técnica para cada tipo de tarefa. Além disso, não foi identificado, mesmo que implicitamente, justificativas para fundamentar as técnicas aplicadas.

Em linhas gerais, observamos que os professores trabalharam nas suas aulas de maneira tradicional, dando ênfase ao saber-fazer (tarefas e técnicas). Esses elementos, ainda que sejam imprescindíveis, não constituem o saber. As técnicas empregadas constituem-se, essencialmente, na aplicação de fórmulas, sem uma justificativa clara dos motivos que os levaram a desenvolver tal técnica. Essa escolha pode acentuar a valorização do aspecto numérico e, possivelmente, dificultar a compreensão do conceito de área, como grandeza.

Portanto, no processo transpositivo (CHEVALLARD, 1991) o professor precisa estar atento às alterações e adequações que ele possa realizar em sala de aula, ao planejar seu trabalho, ou seja, deve eleger critérios para facilitar o acesso ao saber (saber aprendido). Por exemplo, o professor pode se inspirar nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), Lima e Bellemain (2010), entre outros, no que se refere ao conceito de área enquanto grandeza, sob o ponto de vista de que o conceito de área como grandeza permite que os estudantes estabeleçam relações entre os domínios geométricos e numéricos (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Consideramos que fazer escolhas e adaptações se faz necessário, mas impõe uma vigilância epistemológica para garantir que se alcance o saber pretendido. Este fato demanda do professor atenção para transitar por dois campos distintos: as pesquisas desenvolvidas sobre o tema e a sala de aula.

4.5 PRAXEOLOGIAS DOS ESTUDANTES

Optamos por integrar na pesquisa, a análise dos cadernos dos estudantes, a fim de constituir um dispositivo completo da transposição didática. Consideramos que uma apreciação crítica das tarefas desenvolvidas pelos educandos, pode nos levar a compreender como se estabelece a institucionalização do saber de referência área de figuras planas, visto que, pode vir a oferecer dados que dão indícios do “saber aprendido”. Ademais, ponderamos que no contexto escolar os cadernos dos estudantes são avaliados como uma rica fonte de pesquisa.

Para o estudo, selecionamos cadernos de cinco estudantes de maneira aleatória; desses, escolhemos cinco tarefas resolvidas em classe pelos alunos. A entrega desses cadernos ocorreu espontaneamente, e em comum acordo com os estudantes. Posteriormente, fotografamos os cadernos para, a partir daí, desenvolver a análise.

Conforme Vinão (2008), o caderno é um documento que permite delinear aspectos importantes na instituição de referência, também considerado como um apontamento da cultura escolar e um espaço de interação entre professor e aluno. Também Chevallard, Bosch e Gascón (2001), consideram o caderno como um relevante dispositivo didático a ser analisado. Diante disso, decidimos considerar as praxeologias dos estudantes, sobretudo as organizações matemáticas das tarefas referentes ao estudo de área de figuras planas, com a ideia de encontrar elementos que indiquem as técnicas, tecnologia e/ou teorias empregadas pelos alunos.

A seguir, apresentamos um recorte das tarefas analisadas.

Quadro 24 – Tarefa do Estudante 1.

Tarefa	**Resolução do estudante**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T1: Transforme 3,1416 m² em centímetros quadrados.	3,1416 x 10000 = 31.416 cm².	(τ1) Consiste em multiplicar 3,1416 por 10000 (τ2) Deslocar a vírgula quatro casas para a direita.	Transformação da unidade de medida de superfície com submúltiplo do m².

Fonte: Caderno do estudante 1 (2016).

Quadro 25 – Tarefa do Estudante 2.

Tarefa	**Resolução do estudante**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T2: Uma página desse livro é um exemplo de uma região retangular cujas dimensões são: 27,5 cm de comprimento e 20 cm de largura. Qual é a área desta página?	20,0 x 27,5 1000 1400 400 550,00 Resp. 550 cm²	(τ1) Utilizar a conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula A = b . h A = 27,5 . 20 A = 550,00 cm².	Conceito de área do retângulo.

Fonte: Caderno do estudante 2 (2016).

Quadro 26 – Tarefa do Estudante 3.

Tarefa	Resolução do estudante	Técnicas	Bloco Tecnológico-teórico
T3: Determine a medida da área do trapézio da figura de base menor = 3cm, base maior = 8,4 cm e altura = 2cm.	8,4 + 3,0 11,4 x 2 22,8 | 2 11, 4 R: 11,4 cm².	(τ1) Utilizar a conta armada (τ2) Aplicar a fórmula $\frac{(B+b)\,.\,h}{2}$ $\frac{(8{,}4+3)\,.\,2}{2}$ 22,4 /2 = 11,4 cm².	Conceito de área do trapézio.

Fonte: Caderno do estudante 3 (2016).

Quadro 27 – Tarefa do Estudante 4.

Tarefa	Resolução do estudante	Técnicas	Bloco Tecnológico-teórico
T4: Qual é a área de um campo de futebol cuja medida do comprimento equivale a 105 m e a largura corresponde a 1/3 da medida do comprimento.	1 0 5 x 3 5 5 2 5 3 1 5 3 6 7 5 R= 3.675 m².	(τ1) Utilizar a conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula.	Conceito de área do retângulo.

Fonte: Caderno do estudante 4 (2016).

Quadro 28 – Tarefa do Estudante 5.

Tarefa	**Resolução do estudante**	**Técnicas**	**Bloco Tecnológico-teórico**
T5: Um losango cuja medida da diagonal maior mede 25cm e a diagonal menor mede 1/5 da maior. Qual a área da figura?	25 x 5 125 ⌊ 2 05 62,5 10 0 Resp. 62,5 cm^2.	(τ1) Utilizar a conta armada. (τ2) Aplicar a fórmula.	Conceito de área do losango.

Fonte: Caderno do estudante 5 (2016).

A organização matemática observada em torno do tipo de tarefa que prevaleceu nos cadernos selecionados foi enfatizada nas tarefas “transformar unidade de medidas” e “calcular a área da figura plana”, com o predomínio das técnicas “transformar as medidas por meio da multiplicação ou divisão” e calcular a área da região poligonal através da fórmula.

Percebemos que os estudantes utilizaram o mesmo procedimento do professor, desenvolvendo os cálculos mediante uma conta armada, sem expor a fórmula, deixando implícita sua aplicação. Além disso, não identificamos estratégias de resolução que se diferenciassem das tarefas desenvolvidas em classe pelos professores. Embora não tenhamos verificado certa independência por parte dos alunos, é admissível o estudante reproduzir o que o professor faz em classe, uma vez que, existe a intenção da parte do aluno de acertar a tarefa. Nesse contexto, leva-se em conta também a faixa etária dos educandos em questão e a fase de transição em que se encontram.

Além disso, Viñao (2008) adverte que não podemos lançar mão desses elementos para ajuizar o trabalho do professor, uma vez que esta instituição (caderno), designado ao registro da produção escrita, não comprova o tempo aplicado em cada atividade, tampouco o trabalho desenvolvido pelo professor, além de não identificar as intervenções orais e gestuais vivenciadas em sala de aula.

4.6 PRINCIPAIS RESULTADOS DESTE ESTUDO E SEUS APORTES PARA A IDENTIFICAÇÃO E/OU CONSTRUÇÃO DOS DIFERENTES MODELOS[61]

Nesta parte do trabalho, realizamos um breve retrospecto do capítulo a fim de apresentar os principais resultados das análises institucionais e conduzir o estudo para a identificação do Modelo Epistemológico Dominante (MED) e construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para alicerçar o Modelo Didático de Referência (MDR), consolidado por intermédio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), amparado na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999b). Esses modelos serão explicitados em seguida.

Nesta pesquisa, pudemos analisar o Modelo Epistemológico Dominante (MED)[62] adotado pelas instituições (PCN, PC, LD, aulas dos professores, cadernos dos estudantes), bem como identificar as condições e restrições que determinam as relações institucionais e pessoais com o objeto matemático área e interferem direta ou indiretamente nos processos de ensino e aprendizagem do tema em questão. Para conhecer o Modelo Epistemológico Dominante (MED), principiamos empreendendo um estudo da gênese de área, e, posteriormente, analisamos o objeto matemático referido nos documentos acima mencionados.

Nesse sentido, para fins de elucidação, apresentamos a seguir uma brevíssima síntese deste estudo, conforme indicado mais acima.

As razões históricas que motivaram a construção de praxeologias matemáticas do objeto (Área) estão vinculadas aos problemas de medições da terra em antigas civilizações (BOYER; MERZBACH, 2012). Nesse período, já se conjeturava sobre o tema, entretanto baseava-se em conhecimentos empíricos, uma vez que não se tinha conhecimento de demonstrações matemáticas.

Nos PCN (BRASIL, 1998) identificamos que o tema é considerado de grande relevância, sobretudo pela conexão com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998). O documento distribui seus conteúdos em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O tema área é estudado no bloco das Grandezas e Medidas e pode ser articulado entre os blocos: Números e Operações e Espaço e Forma; este, desenvolvido por meio das noções geométricas.

[61] *Modelo Epistemológico Dominante* (MED), *Modelo Epistemológico de Referência* (MER), *Modelo Didático de Referência* (MDR).
[62] MED – É a forma de interpretar e descrever um objeto matemático que é predominante em uma instituição escolar (FARRAS; BOSCH; CHACÓN, 2013).

A PC (BAHIA, 2013) se respalda no documento mencionado, estruturando seus conteúdos em uma base nacional comum e numa parte diversificada. Como nos PCN (BRASIL, 1998), nosso objeto de estudo se insere no eixo das Grandezas e Medidas, com possibilidade de conexão com os Números e Operações e Espaço e Forma. O documento em pauta também destaca a relevância social como uma das questões ressaltantes do tema. Verificamos que os dois documentos se inquietam no tocante ao ensino tecnicista adotado por um grande percentual de professores da educação básica.

Na análise dos livros didáticos, constatamos que o LD1 utiliza o recurso da malha para introduzir o assunto, aborda transformações de unidades e outras unidades agrárias, explora medida de uma superfície com unidades não padronizadas, avança nos conceitos de medida de área através de fórmulas e apresenta situações envolvendo perímetro e área. Já o LD2, começa seu capítulo versando sobre múltiplos e submúltiplos do metro, leitura das medidas de superfície, transformação das unidades de medidas, medidas agrárias e discute sobre a área das principais figuras planas.

Nos exemplares analisados, identificamos a predominância das situações de medidas, quando se recomenda uma abordagem direcionada à concepção do conceito de área como grandeza, adotada por Douady e Perrin-Glorian (1989); Baltar (1996); Bellemain e Lima (2002); e Ferreira (2010), entre outros. Além disso, consideramos insuficiente o enfoque dado às situações de produção de superfícies e de comparação, conforme a classificação de Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002) e Ferreira (2010), entre outros.

Tanto quanto no PCN (BRASIL, 1998), a PC (BAHIA, 2013) e os Livros didáticos analisados demandam a habilidade calcular a área das figuras planas, o que indica, portanto, que os documentos utilizam uma visão distinta da adotada nesta pesquisa (área como grandeza). Conforme o nosso estudo, calcula-se a <u>medida da área</u> da figura (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; BALTAR, 1996; MAGINA et al 2006; LIMA; BELLEMAIN, 2010, grifo nosso).

Nas praxeologias dos professores, observamos que estes atuam influenciados por uma abordagem tecnicista[63], que consiste essencialmente na aplicação de fórmulas, sem justificativas explícitas dos motivos que os levaram a desenvolver tal técnica. Essa constatação corrobora com as inquietações apresentadas nos PCN (BRASIL, 1998) e na PC (BAHIA, 2013) sobre esse tipo de enfoque.

---

[63] A perspectiva tecnicista impõe uma conduta por meio do emprego de técnicas e recursos metodológicos específicos (LUKESI, C. *Filosofia da Educação*. São Paulo: Cortez, 2003).

Nas análises dos cadernos dos estudantes, verificamos uma reprodução do trabalho do professor. Viñao (2008) aponta que o caderno reflete o trabalho desenvolvido em classe, ressaltando, porém, que não podemos apreciar as reproduções das tarefas como uma limitação dos estudantes, visto que, é necessário compreender que uma tarefa trabalhada em classe possui especificidades que podem gerar verdadeiras regras de contrato didático, na maioria das vezes implícitas e presentes no ato da resolução da tarefa pelo professor.

A partir das análises institucionais, do Modelo Epistemológico Dominante (MED) posto, constatamos que as restrições que incidem sobre as atividades matemáticas escolares comprovam que as OM ensinadas e/ou aprendidas na educação básica, são pontuais, pouco articuladas entre si e com escassa justificativa das técnicas utilizadas, o que leva à incompletude[64] das organizações matemáticas.

Presumimos que a incompletude observada, pode estar associada a diversos fenômenos, entre eles, a desarticulação do objeto matemático (área) identificado na educação básica, motivada pela epistemologia dominante nas instituições escolares (CHEVALLARD, 1991); a "epistemologia espontânea do professor"[65] (BROUSSEAU, 1998) o vazio didático (FARIAS, 2010), causado pela ausência de alicerces para ancorar a prática docente, e a dissociação entre o trabalho da técnica e o tecnológico-teórico, uma vez que, Bosch, Fonseca e Gascón (2004) entendem que as atividades institucionais somente se completam quando se integra o trabalho da técnica com o tecnológico-teórico.

A constatação de uma incompletude no sistema de ensino suscita a necessidade de estudar um Modelo Epistemológico de Referência para apoiar a proposta de um Modelo Didático de Referência. Este é considerado uma extensão do Modelo Epistemológico de Referência (BOSCH; GASCÓN, 2010).

Conforme Bosch e Gascón (2010, p. 61, tradução nossa):

> uma das funções essenciais da utilização desses modelos é fornecer para a pesquisa em didática e para a própria disciplina, um instrumento de emancipação a respeito das diferentes instituições que forma, parte de um objeto de estudo. Em particular, deve servir para questionar, analisar e avaliar (em vez de aceitar acriticamente) os modelos dominantes nessas instituições.

[64] Utilizamos o termo incompletude inspirado em Bosch, Fonseca e Gascón (2004).
[65] Uma praxeologia excessivamente centrada no professor impede que se alcance o nível institucional, deixando, portanto, a praxeologia didática da instituição fora da sua abrangência. Nesse sentido "um professor que não domina os meios materiais (por exemplo, computador) necessários para implementar uma técnica de ensino particular, ele não vai usar normalmente, independentemente de como interpretar e avaliar a técnica." (BOSCH; GASCÓN, 2004, p. 3).

Segundo Chevallard (1991 *apud* FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013), o Modelo Epistemológico de Referência permite questionar a forma como as instituições envolvidas na problemática didática interpretam o saber matemático. Portanto, este modelo abarca a proposta de auxiliar no que se refere às limitações do Modelo Epistemológico Dominante instaurado nas instituições de ensino, uma vez que, avalia as restrições que o modelo apresenta para o desenvolvimento de novas propostas de praxeologias. É importante salientar que o MER discutido neste trabalho tem um caráter provisório, passível de sofrer modificações, tendo em vista a alegação de Chevallard (1991) quando afirma que não existe um sistema de ensino diferenciado e absoluto.

Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), no domínio da TAD, o problema de investigação surge de um problema inicial, que denominamos de problema docente. No âmbito desta pesquisa, o problema docente é: o que temos que "ensinar" aos alunos do 6º ano do ensino fundamental sobre área? Os pesquisadores supracitados compreendem que para transformar um problema docente em um problema de investigação em didática, no âmbito da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar o Modelo Epistemológico Dominante, não somente nas instituições escolares, mas também na noosfera[66]. Pelo qual denominamos de problema didático, estando associados aos fenômenos anunciados anteriormente. Os problemas didáticos têm características que compõem três dimensões: epistemológica, econômica e ecológica.

Na dimensão epistemológica, procuramos descrever e interpretar o modelo epistemológico do âmbito matemático que está em pauta. Para considerar essa dimensão, questionamos: qual a "razão de ser" alternativa para o ensino de área, se considerarmos um Modelo Epistemológico de Referência compatível com a proposta da TAD?

Na dimensão econômica, buscamos revelar o que está "posto" nas instituições de referência, como são apresentadas as tarefas nos sistemas de ensino e qual o papel que o objeto matemático (área) desempenha nas instituições analisadas. Para contemplar essa dimensão, perguntamos: como incide o Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre a forma de organizar o estudo de área nas instituições?

E na dimensão ecológica, buscamos verificar se foram feitos avanços na compreensão das condições necessárias para o estudo desse objeto (área) e se foram elucidadas a origem e natureza das restrições que atualmente impedem que o objeto matemático referido exista. Para

[66] A noção de noosfera de um sistema de ensino foi idealizada para designar a esfera onde se acredita que ocorre o funcionamento do sistema didático. A noosfera relaciona as instituições produtoras do saber (programas oficiais, livros didáticos, recomendações para professores, materiais didáticos etc.) com a Escola (CHEVALLARD, 1991).

esta dimensão, indagamos: qual o possível Modelo Didático de Referência (MDR) a ser institucionalizado para o ensino de Área, no 6° ano do ensino fundamental?

A articulação destas três dimensões, epistemológica, econômica e ecológica, conduziu nosso olhar, no que se refere ao problema didático, para a construção de um MER/MDR. Por sua vez, o Modelo Didático de Referência (MDR) concebido a partir do Modelo Epistemológico de Referência (MER) levou nossa investigação para a construção de praxeologias matemáticas, por intermédio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

5 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA

5.1 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA / MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA PARA UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA

Neste capítulo, vamos expor a construção e análise de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), desenvolvido com os professores participantes, como resposta às restrições identificadas nas instituições analisadas. Nesta fase da investigação, apoiamos a construção de uma sequência didática, considerando o Modelo Epistemológico de Referência (MER) discutido na pesquisa.

Como exposto anteriormente, o Modelo Epistemológico de Referência (MER), traz em seu bojo a proposta de sustentar o Modelo Didático de Referência (MDR); conforme a Teoria Antropológica do Didático, este modelo se consolida mediante um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). O percurso da presente investigação trata da construção de uma sequência didática em consonância com o MER supracitado.

O PEP concebido busca responder questões no contexto de um sistema didático S (X, Y, Q) (CHEVALLARD, 2009b), em que (X) são dois professores participantes da pesquisa, (Y) é a pessoa responsável por auxiliar o estudo, ou seja, a pesquisadora, e (Q) a questão geratriz: “o que tenho que ‘ensinar’ sobre área aos alunos do 6º ano do ensino fundamental?”.

Com o PEP, pretende-se que o trabalho produzido pelos professores participantes (X) possa construir tarefas OMP sobre área e compor uma sequência didática (SD). Além disso, espera-se que o resultado do trabalho produzido, sob a mediação e refinamento da pesquisadora (Y), possa reconstruir uma Organização Matemática Local Relativamente Completa – OMLRC (BOSCH et al, 2004), considerando os diferentes tipos de tarefas e as diferentes técnicas. Esperamos também que as OM construídas apresentem tarefas que gerem situações que dão sentido ao conceito de área (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010), de maneira a buscar responder a questão geratriz.

Para a investigação, consideramos pertinente mostrar a “razão de ser” do estudo de área para o 6° ano do ensino fundamental, a fim de que se compreenda a importância do estudo desse conteúdo na escola.

Argumentamos que o tema possui legitimidade matemática, por se tratar de uma atividade humana que surgiu a partir das necessidades de uma civilização em um período histórico. Este, portanto, pode ser um forte argumento a ser utilizado pelos professores no momento em que forem trabalhar com área. Consideramos que o tópico possui relevância social, haja vista ser recomendado por documentos curriculares, entre eles: PCN (BRASIL, 1998) e PC (BAHIA, 2013), e acatado pelos LDs do 6° ano do ensino fundamental. Abrange, ainda, a legitimidade funcional, uma vez que, existe a necessidade de que se construam tarefas com um forte poder gerador, ou seja, OM articuladas com uma justificativa das técnicas utilizadas (CHEVALLARD, 1999). Também aproveitamos os argumentos da legitimidade didática, isto é, observamos a necessidade de nos colocarmos atentos às restrições que dificultam o processo de ensino do objeto área e às condições que facilitam o trabalho do professor para o ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Nesta pesquisa, começamos com a questão geratriz apresentada anteriormente. No decorrer do PEP, foram suscitadas outras questões. Os questionamentos motivaram os professores na busca por respostas em algumas pesquisas referenciadas nesta investigação.

A próxima etapa foi desenvolvida a partir da construção de uma OM; esta deve levar em conta as diversas técnicas que se possa utilizar para responder a questão geratriz, ou articular possíveis respostas.

5.2 A EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação ocorreu por intermédio das sessões de estudo, distribuídas em cinco momentos e concluídas com a aplicação da sequência didática.

5.2.1 As Sessões de Estudo

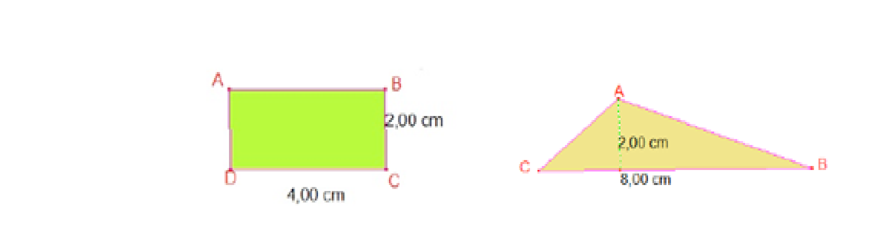
Na 1ª sessão de estudo, foi exibida a proposta da pesquisa, justificando-se os motivos que nos levaram a escolher o tema área, e apresentado um breve histórico da origem do assunto. Além disso, fizemos alguns questionamentos[67] na tentativa de compreender a percepção dos professores sobre o objeto matemático área e estimular o diálogo entre o grupo (APÊNDICE E). A sessão durou aproximadamente 3 horas.

[67] Os questionamentos ocorreram em forma de diálogo no decorrer das sessões (APÊNDICE E), sem perder de vista, os objetivos da pesquisa.

Na sessão, também foi falado a respeito da concepção de área, sobre as possíveis dificuldades dos alunos para a compreensão do conteúdo, sobre as lacunas identificadas no sistema de ensino e sobre a diferença entre área e superfície.

Ao falar sobre as dificuldades verificadas, um dos professores deixou clara a sua preocupação com o domínio das operações matemáticas, demonstrando uma inquietação no que se refere ao campo numérico. No que diz respeito à diferenciação entre área e superfície, julgamos conveniente instigar as discussões e mostramos exemplos de superfícies diferentes com a mesma área (ver figura a seguir).

Figura 62 – Modelo de superfícies diferentes que apresentam a mesma medida de Área.



Fonte: SANTOS, 2015, p. 81.

Na 2ª sessão, buscamos explorar alguns tipos de tarefas e o desenvolvimento de algumas técnicas. Iniciamos esta sessão com os seguintes questionamentos: (Q1) Quais tipos de tarefas devemos propor para os estudantes do 6º ano do ensino fundamental?; (Q2) Quais técnicas podem ser utilizadas para resolver as tarefas?

Solicitamos, na ocasião, que os professores oferecessem exemplos de tarefas e empregassem, se possível, técnicas variadas de resolução.

Na 3ª sessão de estudo, apresentamos um panorama das pesquisas sobre o tema área como grandeza, com uma breve explanação das discussões desenvolvidas no Modelo Epistemológico de Referência (MER). Principalmente, foi discutido sobre as ideias de Douady e Perrin-Glorian (1989) referentes às organizações conceituais, nos quadros geométricos, numéricos e das grandezas, e às mudanças de quadros, no que se refere às escolhas feitas pelos professores no ato da preparação das tarefas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Depois, foi debatido sobre tarefas que apresentam situações que conferem sentido ao conceito de área (comparação, medida e produção de superfície), sob o ponto de vista de Baltar (1996), e mudança de unidade, na visão de Ferreira (2010). Encerramos a sessão solicitando que os professores idealizassem tarefas OMP que contemplassem as referidas situações. Posteriormente, encaminhamos para os professores alguns trabalhos desenvolvidos pelos pesquisadores referenciados nesta investigação.

Na 4ª sessão, foi sugerido que os educadores preparassem tarefas que considerassem as situações debatidas no encontro anterior. Nesta sessão, perguntamos: (Q3) Como propor tarefas, de maneira a utilizar técnicas variadas?; (Q4) É possível realizar tarefas "abertas"? Também instigamos uma discussão a respeito da influência de algumas variáveis das situações propostas.

Na 5ª sessão, propomos uma seleção de algumas tarefas feitas na sessão anterior, isto é, escolhemos a organização matemática a ser aplicada. As tarefas propostas foram refinadas pelos professores e pela pesquisadora. A partir daí, compomos a Sequência Didática sugerida no início da experimentação.

Nas sessões de estudo, tentamos nos colocar na função de mediadores, sem a pretensão de constituir uma ocasião de "treinamento" para professores. Assim, conduzimos as sessões de maneira informal, trazendo questionamentos que suscitassem debates e reflexões. Os encontros foram proveitosos, nos fazendo perceber que o tema área, a depender da maneira como é abordado, pode gerar possíveis incompreensões conceituais por parte dos estudantes.

O 6° momento, o da aplicação da Sequência Didática, se constituiu como o momento da avaliação. Para esta ocasião, foram destinadas quatro aulas. A primeira parte da sequência foi aplicada no dia 28 de novembro de 2016, a segunda no dia 30 de novembro de 2016 e a terceira parte, foi aplicada em duas aulas no dia 02 de dezembro de 2016.

Compreendemos que os referidos momentos, possibilitaram aos professores uma aproximação com o modelo epistemológico de referência supracitado, favorecendo a elaboração da SD proposta.

5.3 CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste trecho, apresentamos as análises a priori das atividades que compõem a sequência didática. Nas atividades, foram consideradas situações de comparação, medidas, produção de superfície (BALTAR, 1996; BELLEMAIN, 2000) e mudança de unidade (FERREIRA, 2010). A SD analisada é formada por 8 atividades, cada uma com tarefas organizadas em 3 partes: na primeira parte, explorou-se situações com o tangram; na segunda, situações em que se utilizavam medições com a régua; e na terceira parte, usou-se a malha triangular e a quadrangular.

As atividades foram inspiradas no Modelo Epistemológico de Referência. Consideramos pertinente fazer uma análise a priori das atividades desenvolvidas, visto que este procedimento nos permite identificar se ocorreram mudanças no processo de "intervenção", e, sobretudo, identificar se as atividades satisfazem às propostas observadas no MER/MDR.

5.3.1 Análise a Priori da Atividade 1

Parte I – Atividade com o Tangram

Atividade 1[68] – Situação de Medida de Área e Comparação de Superfície.

Caro estudante!

1.1 Você está recebendo um envelope contendo 7 peças (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Trata-se de um jogo milenar denominado de Tangram.

a) Com as 7 peças, forme um quadrado (Tangram). Qual a medida da área do tangram?

b) Com os 2 triângulos grandes, forme figuras diferentes, obedecendo as seguintes condições:

- Não sobreponha as peças
- Um lado de uma peça deve apoiar-se no lado da outra peça

Agora, desenhe as figuras formadas no quadro abaixo, e responda:

Qual a medida de área de cada figura?

[68] Para cada atividade, existe um conjunto de tarefas que as compõem. Essas atividades foram construídas pelos professores participantes (sujeitos da pesquisa).

c) Observe as formas das figuras e as áreas encontradas, o que você percebeu?

1.2 Agora forme figuras com 3 peças, usando 2 triângulos pequenos e 1 triângulo médio.

a) Desenhe as figuras formadas, e responda:

Qual a medida de área de cada figura?

c) Observe as formas das figuras e as áreas encontradas, o que você percebeu?

Fonte: (FACCO, 2003, p. 102). Adaptado pelos professores participantes e pela pesquisadora (2017).

Nesta atividade, objetiva-se calcular a medida da área de figuras planas, além disso, aspira-se que o estudante estabeleça a diferença entre área e superfície, reconhecendo, sobretudo, que superfícies diferentes podem ter a mesma área.

Os materiais recebidos foram: um envelope contendo as sete peças do Tangram confeccionadas em papel duplex e recortadas; régua para efetuar medições dos lados das figuras formadas; e o material impresso com as orientações para a resolução.

Consideramos que esta atividade representa uma situação de medidas que emprega a comparação para estabelecer a diferença entre área e superfície (BALTAR, 1996; BELLEMAIN, 2000; FACCO, 2003).

A tarefa 1a solicita que os estudantes formem um quadrado a partir das 7 peças do Tangram. Em seguida, é requerida a medida da sua área. Espera-se que os estudantes reconheçam que a construção de um quadrado necessita do conhecimento de que todos os lados devem ter a mesma medida[69] (quadrilátero regular com 4 lados congruentes).

A resposta esperada é a montagem do quebra-cabeça recorrendo-se à técnica da composição e da multiplicação dos seus lados. Este procedimento resulta em valores

[69] Espera-se que no 6º ano o educando já tenha este conhecimento.

aproximados entre 225 cm² e 256 cm² e se apoia no argumento de que a "área é um espaço ocupado por uma superfície" (BALTAR, 1996, p. 94).

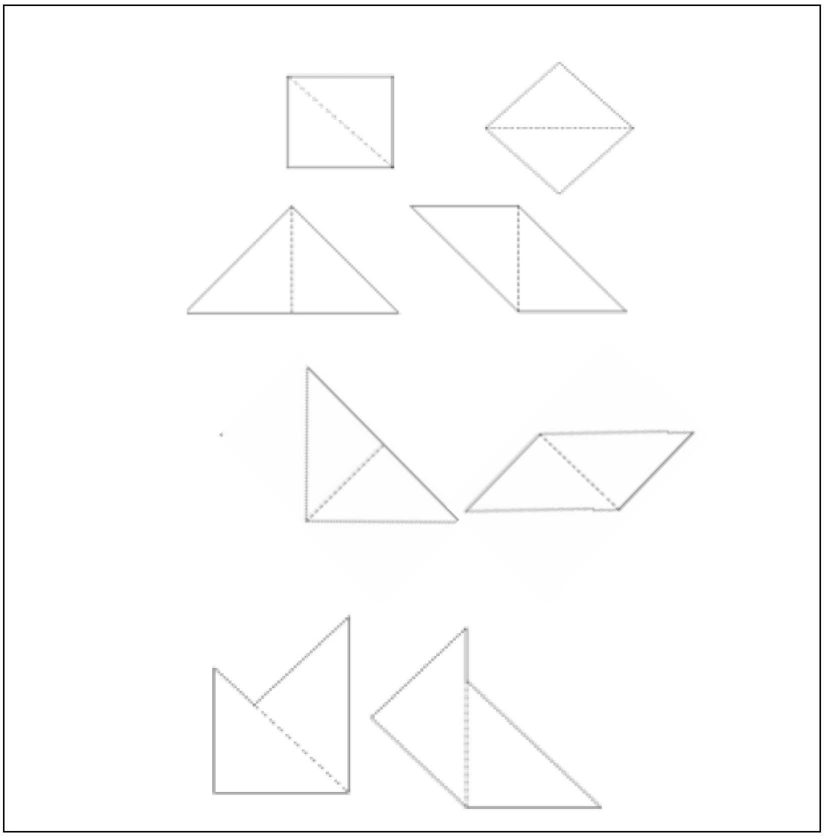
A variável didática é a posição das peças e seus formatos, portanto, pode ocorrer do estudante não conseguir juntar as peças de maneira a construir o tangram, e, consequentemente, não obter a medida da área.

Na tarefa 1b, foi solicitado que se forme figuras planas a partir da junção dos dois triângulos grandes.

Para resolver essa tarefa, utiliza-se a técnica da composição e decomposição de figuras, sem superposição de peças, de modo que um lado de uma peça fique apoiado no lado da outra peça. Posteriormente, deve-se contornar as figuras compostas no quadro. Este tipo de procedimento leva em consideração o quadro das grandezas e o quadro geométrico; a conexão entre os quadros faz desenvolver a ideia de área como grandeza.

Para esta tarefa, é possível que os estudantes iniciem a montagem com quadrados, em posições distintas, e, em seguida, construam figuras de formatos variados, como mostra o esboço a seguir:

Figura 63 – Exemplos de possíveis composição e decomposição de figuras com dois triângulos grandes do Tangram.



Fonte: (FACCO, 2003, p. 104). Adaptado pela pesquisadora (2017).

A construção do formato quadrado facilita o cálculo da medida da área de todas as figuras construídas. Após desenharem as figuras, o aluno pode perceber que o valor das medidas das figuras construídas é semelhante, independentemente do formato da figura. Pode ocorrer do educando não se dar conta de que, ao compor figuras com as mesmas peças, obtém-se medidas de áreas iguais. Ademais, é provável que o estudante utilize a propriedade da aditividade[70] (BELLEMAIN; LIMA, 2000) para encontrar o valor da medida da área das peças formadas. Apesar dessa estratégia não ser a mais indicada, por demandar um tempo maior para a elaboração da tarefa, é um procedimento que leva o estudante à resposta correta.

Para o cálculo da medida da área da tarefa 1b, esperamos que os estudantes encontrem valores compreendidos entre 127,69 cm² e 132,25 cm². Por se tratar de números decimais[71], pode ocorrer de o educando errar a conta, e, em consequência, não encontrar o valor correto da medida da área.

Neste item, a variável didática também é a posição das peças e o formato das peças. Deste modo, é possível que o estudante não identifique que se trata de uma mesma figura devido à mudança das posições.

A tarefa 1c questiona o estudante sobre as formas compostas e as respectivas áreas encontradas. Como no item anterior, para resolver a tarefa, o estudante deve utilizar a técnica da composição e decomposição de figuras. Para essa questão, espera-se que o educando reconheça que todas as figuras construídas possuem a mesma medida de área, distinguindo que figuras de superfícies diferentes podem ter a mesma medida de área, independentemente da forma.

Estas situações poderão ser ressaltadas pelo professor no momento da institucionalização, de maneira a estabelecer a diferença entre a medida de área e a de superfície. Nesse caso, o professor deve instigar os estudantes a fazer a(s) medição(ões) e determinar a(s) medidas da(s) área(s). Na resolução, é possível que o estudante reconheça que basta calcular a medida da área de uma figura usual, por exemplo, o quadrado ou retângulo, para encontrar a resposta correta. Mas, pode ocorrer de o aluno fazer o cálculo da medida de área de todas as figuras formadas. Também pode acontecer de algum estudante não calcular a medida da área, e, portanto, não chegar à conclusão alguma.

---

[70] Se duas figuras A e B têm em comum pontos de suas fronteiras, então a área da figura AUB (A união de B) é a soma da área A com a área B (BELLEMAIN; LIMA, 2000).

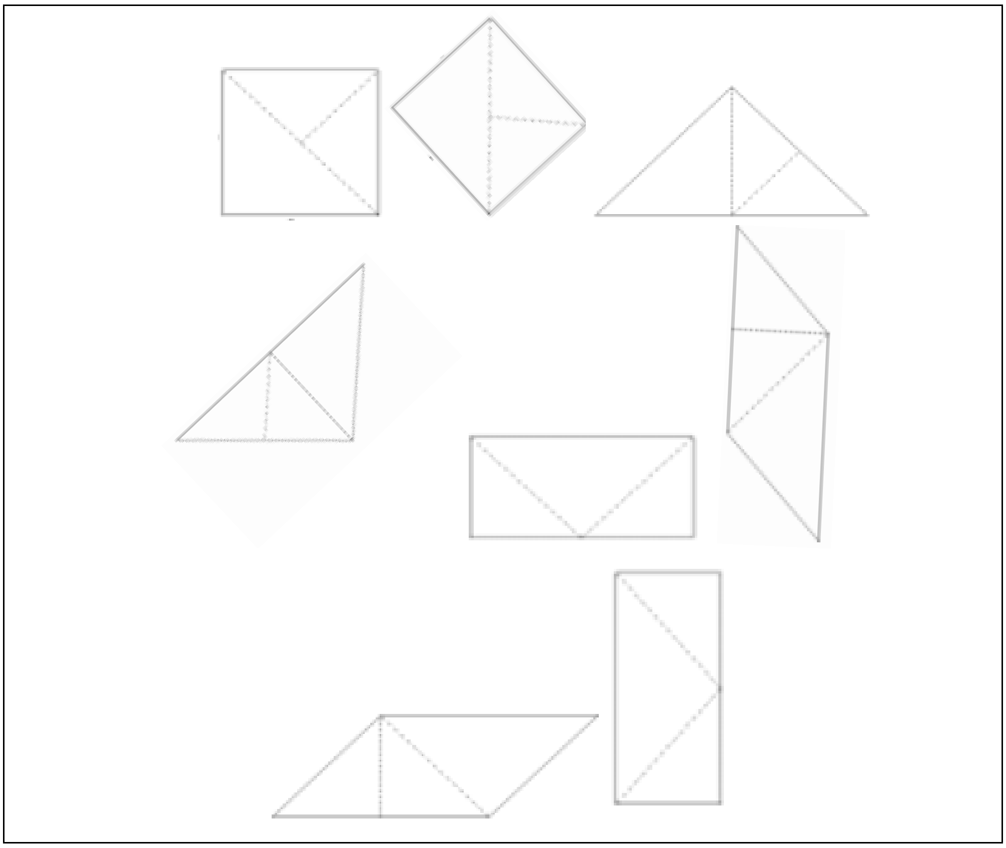
[71] Os PCN reconhecem que os estudantes apresentam dificuldade em realizar operações com números decimais (BRASIL, 1998).

Consideramos que a preferência pela composição de figuras, aproveitando-se apenas duas peças do Tangram, é uma escolha didática, pois utilizar o mínimo de peças pode favorecer o desenvolvimento da tarefa.

No item 1.2, em que foi proposta a montagem de figuras com 3 peças (2 TP e 1 TM), buscou-se reforçar as considerações apresentadas no item anterior, isto é, desenvolver o conhecimento do estudante no que se refere à distinção entre área e superfície e fazer o aluno perceber que o resultado da medida da área das figuras é o mesmo, independentemente da combinação das peças. Neste item, também se deve levar em consideração as variáveis didáticas (posição das figuras).

Nesta tarefa, do mesmo modo, emprega-se a técnica da composição e decomposição. Acreditamos que, para compor as peças, os estudantes utilizem algumas das situações elencadas a seguir, entre outras.

Figura 64 – Exemplos de composição e decomposição de figuras com 3 peças do Tangram e algumas possíveis posições.



Fonte: (FACCO, 2003, p. 108) adaptado pela pesquisadora (2017).

Destacamos que a construção das diferentes figuras, por meio da manipulação das peças do tangram (objetos ostensivos), favorece a dissociação entre área e figura.

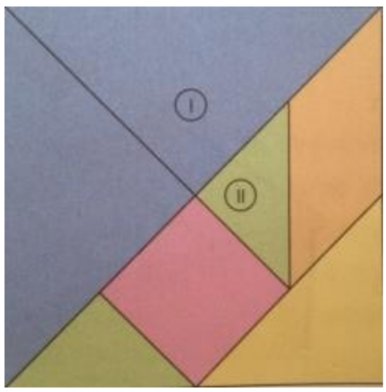
Neste tipo de tarefa, a manipulação das peças (objetos ostensivos) facilita a percepção da diferença entre área e superfície, mas não está dissociado dos objetos não-ostensivos (conceitos de área de figuras planas). Assim, pode acontecer de o estudante estabelecer a dissociação, mas errar o valor da medida da área da(s) figura(s) plana(s) por desconhecer a(s) fórmula(s).

Nesta tarefa, a institucionalização pode ser feita com o professor instigando o estudante a entender a diferença entre área e superfície, além de reconhecer que superfícies diferentes podem ter a mesma área. Consideramos pertinente esse tipo de abordagem, visto que, Douady e Perrin-Glorian (1989) afirmam que no referido tipo de situações, os erros decorreram da dificuldade dos alunos em distinguir: superfície de área e área de números.

5.3.2 Análise a Priori da Atividades 2

Atividades 2 – Mudança de Unidade e Situação de Medida de Área.

2) Considere o Tangram:



2.1 Se considerarmos o triângulo grande (I) como uma unidade de área, qual é a medida da área do tangram?

2.2 Se considerarmos o triângulo pequeno (II) como uma unidade de área:

a) Qual é a medida da área do triângulo grande?

b) Qual é a medida da área do quadrado pequeno?

c) Qual é a medida da área do paralelogramo?

d) Qual é a medida da área do triângulo médio?

e) Qual é a medida da área do tangram?

Fonte: (DANTE, 2013). Adaptado pelos professores participantes e pela pesquisadora (2017).

A atividade objetiva determinar a medida da área de figuras planas, com uma unidade de medida não padronizada, e desenvolver a mudança de unidade.

Essa situação intenta passar do quadro das grandezas para o quadro numérico, e tem o propósito de fazer com que se reconheça que a unidade de área adotada determina o valor da medida da área. Ou seja, essa situação incide na representação de uma mesma área com unidades de medidas diferentes.

Para desenvolver a atividade em pauta, o estudante poderá utilizar a técnica do ladrilhamento, em que se usam diferentes tamanhos de ladrilhos para construir a noção de área como grandeza. Buscamos uma justificativa da técnica em Baltar (1996), quando este expõe que a medida da área é o número de ladrilhos necessários para preencher a superfície (BALTAR, 1996).

A atividade contribui para que o estudante distinga área de número, na qual a medida da área de uma mesma figura poderá corresponder a números diferentes, uma vez que a área não muda, e sim a unidade de medida escolhida, ratificando a hipótese levantada por Douady e Perrin-Glorian (1989), quando afirmam que o desenvolvimento do conceito de área como grandeza autônoma favorece a compreensão de relações entre os quadros geométricos e numéricos.

Para responder a tarefa 2.1, o estudante deve imaginar quantos triângulos grandes cabem no tangram, obtendo como resposta 4 I. Para resolver a tarefa 2.2, o educando deverá identificar quantos triângulos pequenos (II) cabem em cada uma das figuras solicitadas. Portanto, a medida da área do triângulo grande resulta em 4 II, a medida da área do quadrado pequeno é 2 II, a medida da área do paralelogramo é 2 II, a medida da área do triângulo médio é 2 II e a medida da área do tangram é 16 II. Baltar (1996) considera que a medida da área pode ser expressa por um número seguido de uma unidade de medida.

Nestas tarefas, a variável didática é a medida da área, tomando os triângulos (I e II) como superfície unitária. É provável que neste tipo de tarefa, os estudantes tenham um bom desempenho, uma vez que a abordagem do conceito de área utilizando unidade de medidas não convencionais é empregada em séries anteriores ao 6° ano.

Com estas tarefas, a institucionalização pode ser realizada com o professor fazendo com que o estudante perceba que a mudança de unidade modifica o valor da área, mas o tamanho da figura continua o mesmo.

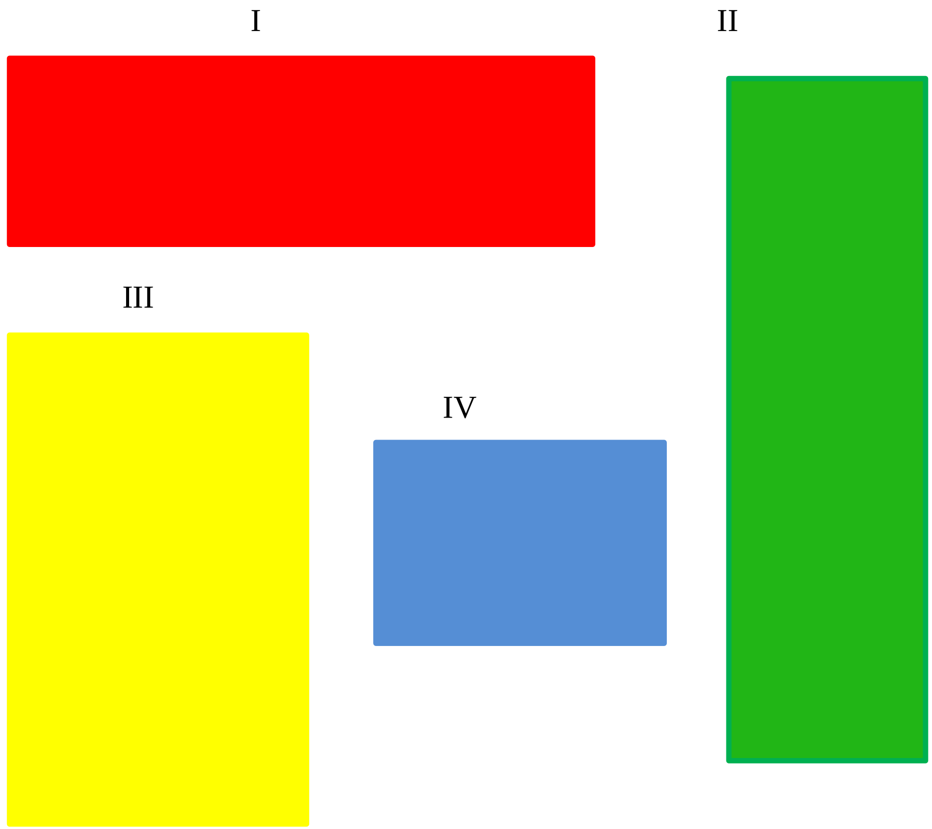
Conforme Douady e Perrin-Glorian (1989), esse tipo de situação favorece a articulação entre os quadros geométricos, numéricos e das grandezas.

5.3.3 Análise a Priori da Atividade 3

Parte II – Atividades usando medições (régua)

Atividade 3 – Situação de Medida de Área, Comparação de Superfície, Produção de Superfície.

3.1 Utilize a régua, meça os lados dos retângulos abaixo e calcule a medida da área de cada figura:



Responda:

a) Qual deles possui a maior medida de área?

b) Qual deles possui a menor medida de área?

c) Quais deles possuem medidas de áreas iguais?

d) Qual a medida do comprimento de cada figura?

3.2 Desenhe figuras com a mesma medida de área de cada figura (I, II, III e IV).

Fonte: desenvolvido pelos professores participantes e pela pesquisadora (2017).

A atividade 3 representa a classe de situações de medidas, comparação de área e produção de superfície.

Com a tarefa 3.1, identificamos a possibilidade de articulação entre o quadro das grandezas e o quadro numérico, uma vez que, os estudantes terão a possibilidade de fazer as medições dos lados dos retângulos, para comparar as medidas de áreas das figuras representadas na tarefa. O objetivo dessa tarefa é calcular a medida das áreas, comparar e calcular o perímetro referente a cada figura. A tarefa consiste em utilizar medições com régua para encontrar o valor correspondente a cada lado, depois, calcular a medida das respectivas áreas e dos perímetros. Com o valor referente a cada medida de área, o estudante deverá desenvolver as comparações (maior, menor ou igual).

Para resolver a tarefa, o estudante, inicialmente, deve fazer as medições, em seguida calcular a medida da área e a medida do comprimento de cada figura, comparar qual a figura de maior, menor ou igual área.

Espera-se que o estudante obtenha como resultado da medida da área dos retângulos: A(I) = 12 cm^2; A(II) = 14 cm^2, A(III) = 15 cm^2; A(IV) = 6 cm^2. Assim poderá identificar a figura de maior área (amarela), e a de menor área (azul), não tendo medidas iguais.

Para calcular a medida da área de cada figura, o aluno poderá utilizar a técnica da multiplicação, ou da aplicação da fórmula do retângulo (a medida da Área = medida da base vezes a medida da altura). Esse procedimento se apoia no teorema em ação, quando afirma que “a área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula” (BALTAR, 1996, p. 94).

Para calcular a medida do comprimento das figuras, o estudante deverá utilizar a técnica de somar as medidas dos lados ou da aplicação da fórmula do perímetro. Neste item, acredita-se que o estudante alcance a resposta correta obtendo como resultado do perímetro das figuras: P(I) = 16 cm; P(II) = 18 cm; P(III) = 16 cm; P(IV) = 10 cm.

Na perspectiva computacional, Lima e Bellemain (2000) fazem referência à aquisição das fórmulas de medida da área e do perímetro de figuras usuais. Pelo ponto de vista variacional, a medida da área e o perímetro podem modificar diferentemente, o que significa afirmar que superfícies de mesma medida da área podem ter perímetros distintos e vice-versa (LIMA; BELLEMAIN, 2000).

Nesta tarefa, pode ocorrer dos estudantes utilizarem a fórmula equivocadamente, ou usar inapropriadamente as unidades de medidas, gerando erros. Escrever a fórmula da medida da Área = b . h e Perímetro = 2.b + 2h de um retângulo, pode ser visto como uma “manipulação” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) de objetos ostensivos. Entretanto, esse cálculo não pode ser realizado sem a influência de objetos não-ostensivos, tal como a noção de área e perímetro de um retângulo. Além disso, a tarefa mobiliza alguns conhecimentos, como, por exemplo, a noção de superfície, de medida de área, perímetro e unidades de medidas, o que pode provocar desacertos.

A tarefa 3.2 solicita que se desenhem figuras com a mesma medida da área que as figuras I, II, III e IV. A finalidade da tarefa é produzir superfícies de área equivalentes às figuras desenhadas. Este item representa a classe de situação de produção de superfície e possibilita diferentes respostas, todas corretas.

Neste caso, o procedimento aguardado é a produção de quatro figuras com medidas da áreas equivalentes às ilustradas no desenho. Para responder a tarefa, o estudante poderá construir figuras com a mesma forma das figuras desenhadas (retângulos), ou com formatos diferentes, mas com a mesma medida de área que a indicada nas figuras iniciais.

Consideramos que é possível os estudantes sentirem dificuldades para responder esta tarefa, visto que, é necessário que o educando produza figuras planas com medidas da áreas semelhantes a 12 cm^2, 14 cm^2, 15 cm^2 e 6 cm^2, ou seja, mobilize o conhecimento sobre a fórmula da medida da área do retângulo, associando-o aos valores das respectivas medidas.

Esse tipo de situação deve ser considerado, uma vez que, gera a dissociação e articulação entre o quadro das grandezas e o geométrico, no momento em que o estudante é levado a produzir superfícies. Ao produzir superfícies maiores ou menores, a partir de uma superfície encontrada, estamos diante de um procedimento geométrico e numérico. Os geométricos estão relacionados à construção de superfície, e os numéricos ao cálculo da medida de área. Se considerarmos que área é uma função positiva, uma superfície que está contida em outra possui área menor, e uma superfície que contém a outra possui área maior.

Nesta tarefa a variável didática é o tipo de figura usual em que pode ser utilizada uma fórmula. É possível que o aluno responda a questão sem fazer as medições ou calcular a medida das respectivas áreas; esse procedimento poderá fazer com que o estudante erre a tarefa.

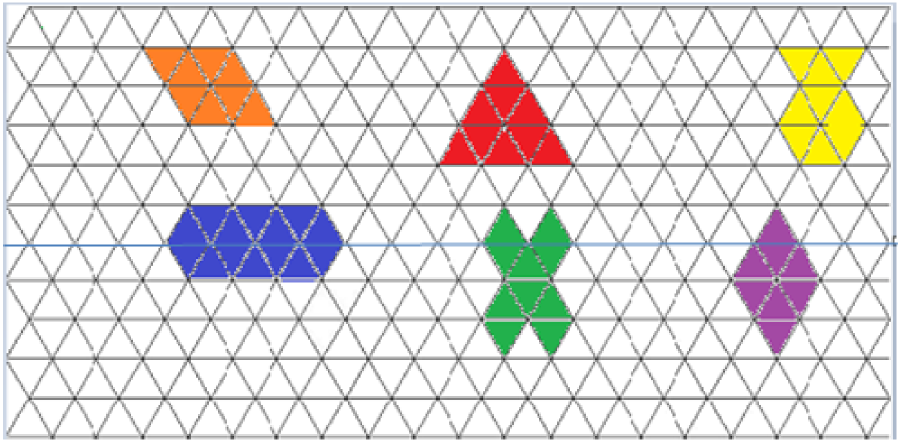
A institucionalização poderá ser feita com o incentivo do professor para que o estudante faça as devidas medições utilizando a régua, a fim de, posteriormente, calcular a medida da área. Com os resultados, o educador deve estimular o aluno a comparar as figuras, além de produzir novas figuras. Isso sem perder de vista, que a resposta indicada para representar a medida de cada área deverá ser escrita em centímetros quadrados (cm^2), e para a medida do perímetro, em centímetros (cm).

5.3.4 Análise a Priori da Atividade 4

Parte III – Atividades com malhas

Atividade 4 – Situação de Medida de Área.

4) Calcule a medida da área de cada figura plana, considerando cada triângulo pequeno como uma unidade de medida de área.



A seguir, preencha a tabela:

Figuras	Figura laranja	Figura vermelha	Figura amarela	Figura azul	Figura verde	Figura roxa
Medida da Área da figura						

a) Explique como você fez para resolver a tarefa.

Fonte: desenvolvido pelos professores participantes e pela pesquisadora (2017).

A atividade é composta de figuras de formatos variados, e solicita a medida da área de cada figura colorida. O objetivo desta atividade é determinar a medida da área das figuras planas, com uma unidade de medida não padronizada (triângulos pequenos), ou seja, busca passar do quadro das grandezas para o quadro numérico.

O material empregado para desenvolver a atividade foi a malha triangular, que funciona como estratégia didática para introduzir o conceito de área sem a utilização de fórmulas.

Para resolver a atividade, o estudante poderá fazer a contagem dos triângulos pequenos (unidade de área) a fim de obter o valor da medida das áreas.

A escolha da malha possibilita a contagem dos triângulos adotados como unidade de área para obter a medida da área das figuras coloridas. Esse procedimento levará o estudante a entender que o espaço ocupado pela figura representa a medida da área.

Uma provável explicação para uma possível resposta do estudante é a contagem dos triângulos (unidade de área).

O quadro a seguir indica a medida das áreas de cada figura:

Quadro 29 – Medidas das áreas das figuras da tarefa 4.

Figuras	Figura laranja	Figura vermelha	Figura amarela	Figura azul	Figura verde	Figura roxa
Medida da Área da figura	8 Δ	9 Δ	9 Δ	14 Δ	10 Δ	8 Δ

Fonte: elaborado pelos professores e pela pesquisadora (2017).

Nesta atividade a variável didática encontrada foi o tipo de malha (triangular) com escassa presença nos livros didáticos. Apesar disso, cremos que os estudantes não encontrarão dificuldades em resolver a atividade, já que, para resolvê-la corretamente, necessitam apenas realizar a contagem dos triângulos utilizados como unidade de área.

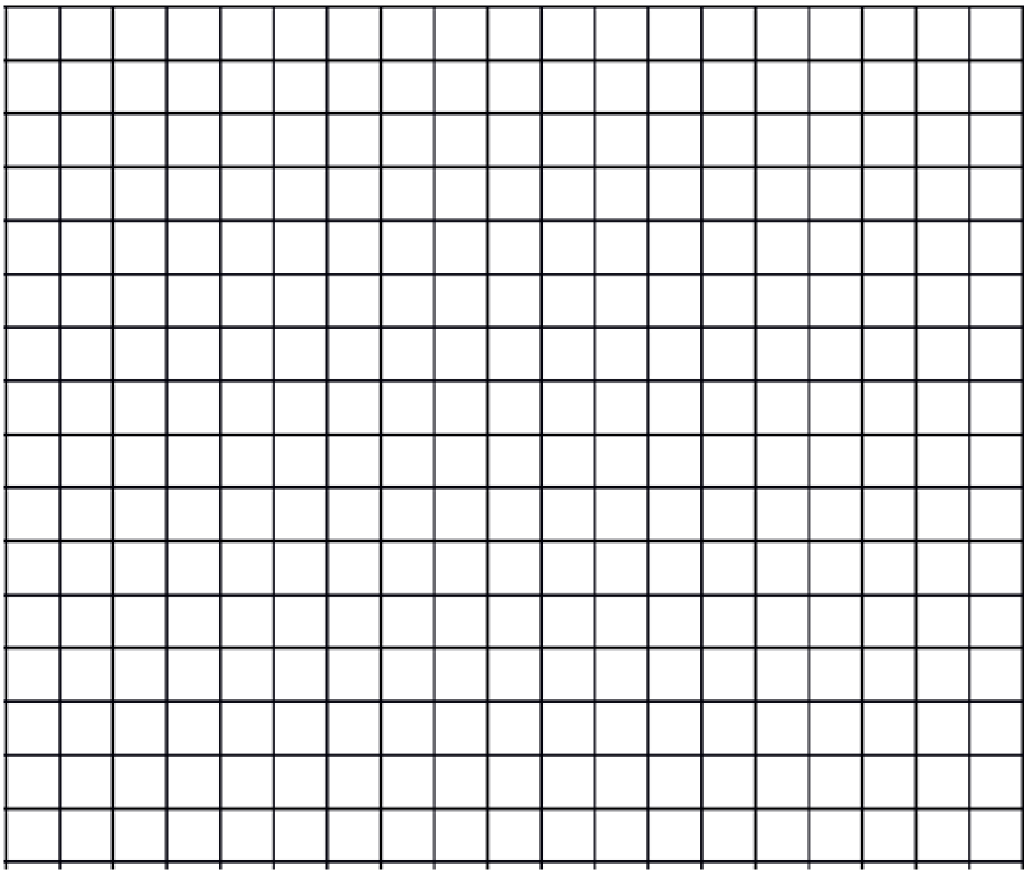
A atividade proposta poderá ser institucionalizada com o professor provocando uma reflexão sobre a unidade de área não padronizada (Δ). Além disso, é interessante o docente fazer o estudante perceber que existem figuras de formatos diferentes (superfícies diferentes) com a mesma medida de área, e, de modo recíproco, figuras com o mesmo formato que podem possuir, ou não, a mesma medida de área.

5.3.5 Análise a Priori da Atividade 5

Atividade 5 – Situação de Produção e Comparação de Superfície.

5) Na malha quadrangular, considere cada quadrinho como uma unidade de área, e, para cada item, desenhe duas figuras obedecendo as seguintes condições:

a) Formas diferentes e mesma medida de área;
b) Formas iguais e medidas de áreas diferentes;
c) Mesma medida de área e perímetros diferentes;
d) Medidas de áreas diferentes e perímetros iguais.



Fonte: professores participantes da pesquisa.

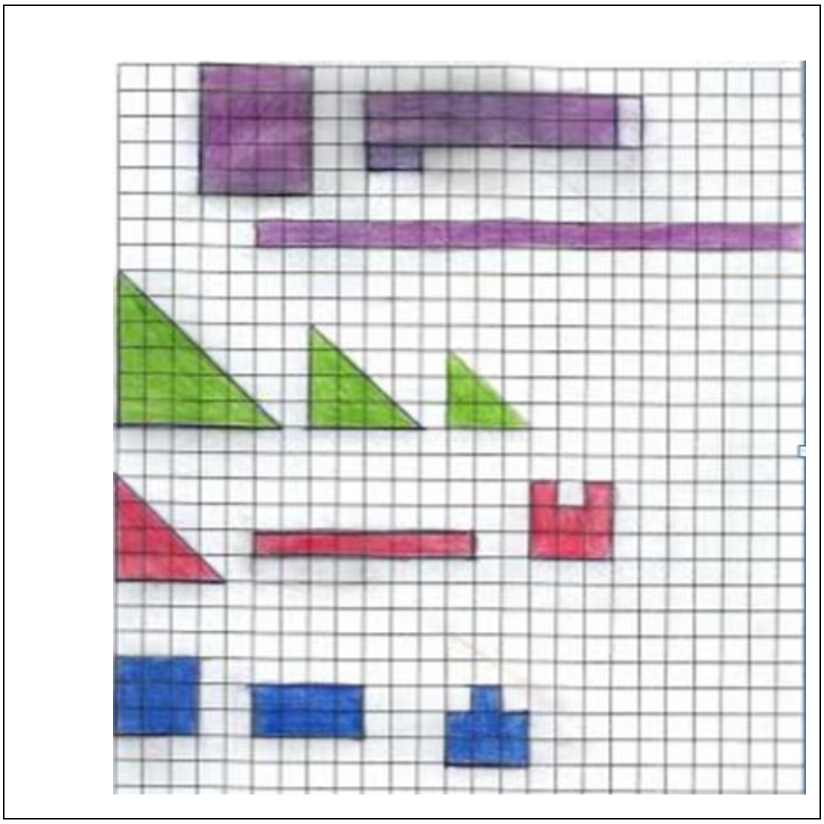
A quinta atividade tem como objetivo construir figuras planas com unidade de medida não padronizada (malha quadrangular) obedecendo algumas condições. Por exemplo, a noção de diferença e semelhança entre área, perímetros e formatos. Para cada item, é solicitado que se desenhe figuras obedecendo os seguintes critérios: a) formas diferentes e mesma medida de área; b) formas iguais e medidas de áreas diferentes; c) mesma medida de área e perímetros diferentes; d) medidas de áreas diferentes e perímetros iguais.

A atividade utiliza a malha quadrangular e representa a classe de situação de produção de superfície para desenvolver a comparação entre as grandezas área e perímetro.

Para responder a tarefa 5a, o estudante deverá idealizar figuras de formas diferentes com a mesma quantidade de quadrinhos; na tarefa 5b, formas semelhantes com a quantidade de quadrinhos diferentes; na 5c, o estudante deverá construir figuras com a mesma quantidade de quadrinhos (áreas iguais) e medida distinta do comprimento do contorno da figura (perímetros diferentes); e na tarefa 5d, o estudante deverá construir figuras com a quantidade de quadrinhos diferentes (áreas diferentes) e medida do comprimento do contorno da figura iguais (perímetros iguais).

A seguir, exemplificamos as situações requeridas na atividade, como uma possível solução:

Figura 65 – Exemplos de Situação de Produção e Comparação de Superfície elaborada por dois estudantes da turma em que foi aplicada a sequência didática.



Fonte: estudantes de uma das turmas observadas.

Concluímos que na atividade discutida, a malha quadriculada é uma variável didática que favorece a compreensão do estudante no momento da produção das superfícies e da comparação entre as figuras idealizadas. Porém, pode ocorrer do educando cometer confusões de origem topológica (LIMA; BELLEMAIN, 2000), ou seja, confundir a grandeza área com a grandeza perímetro.

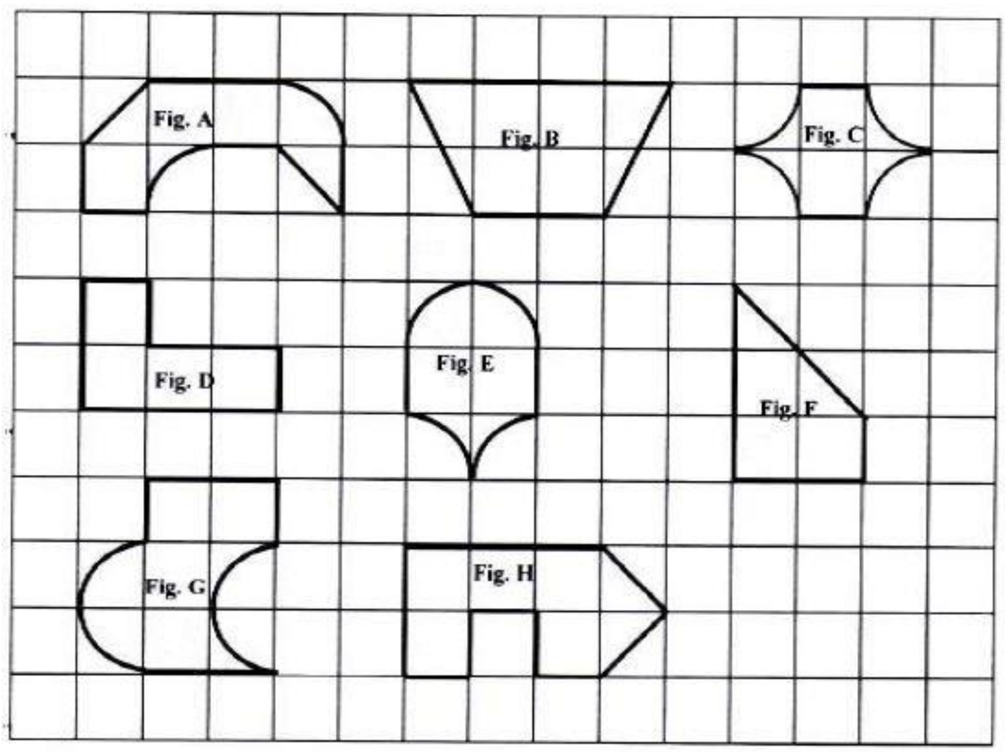
Consideramos também, que a maneira como a atividade é proposta possibilita que os educandos cometam erros no momento da construção. Visto que, são muitos conceitos envolvidos para a mesma atividade; por exemplo, concepção de medidas de área, concepção de medida de comprimento, de contornos, de superfície e de formas.

Para esse tipo de atividade, o professor deverá desenvolver a institucionalização, levando o estudante a compreender que o espaço ocupado pela figura representa a sua área e que o contorno da figura representa o perímetro. Ademais, o docente pode incentivar os estudantes a socializarem os resultados com o grupo, uma vez que, as tarefas (5a, 5b, 5c e 5d) possibilitam respostas variadas, ou seja, respostas abertas.

5.3.6 Análise a Priori da Atividade 6

Atividade 6 – Situação de Medida de Área e Comparação de superfícies.

6) Observe as figuras na malha e considere cada quadradinho como uma unidade de área:



Responda:

a) Qual a medida da área de cada figura?
b) Entre os desenhos, há figuras de mesma medida da área? Quais são elas?

c) Explique como você fez para responder as perguntas.

Fonte: (FERREIRA, 2010, p. 82). Adaptado pelos professores e pela pesquisadora (2017).

A sexta atividade tem o objetivo de determinar a medida da área e comparar as figuras, considerando as que têm a mesma área. A representatividade desta atividade consiste em situações de medidas e de comparação de superfícies.

Para resolver a atividade corretamente, o estudante poderá utilizar a técnica da decomposição e recomposição das figuras (A, B, E, F, G e H) de modo a possibilitar a contagem dos quadrinhos e encontrar a medida da área. Para obter a medida da área da figura D, o estudante necessita apenas contar os quadrinhos; e da figura C, deve utilizar a decomposição e recomposição das figuras, além de fazer a aproximação, uma vez que, a recomposição não preenche totalmente o desenho (FERREIRA, 2010). Assim, podemos afirmar que: a figura A possui medida de área igual a 5 quadrinhos; as figuras B, G e H possuem medidas de área igual a 6 quadrinhos; a figura C, possui medida de área aproximadamente igual a 4 quadrinhos; as figuras D, E e F possuem medida de áreas iguais a 4 quadrinhos. Portanto, a tarefa possui figuras de mesma medida de área. O grupo de figuras B, G e H possui medida de área igual a 6 quadrinhos, e D, E e F, com medidas de área igual a 4 quadrinhos.

A variável didática a ser considerada é o tipo de figura com contornos arredondados, visto que, não é comum nos livros didáticos tarefas contendo figuras com formatos parecidos.

Pode ocorrer de o educando não se dar conta de observar que existe a possibilidade de empregar o método da decomposição e recomposição, e afirmar que as medidas das área são diferentes apenas pela observação do formato do desenho – este é um procedimento que pode levar o estudante a cometer erros.

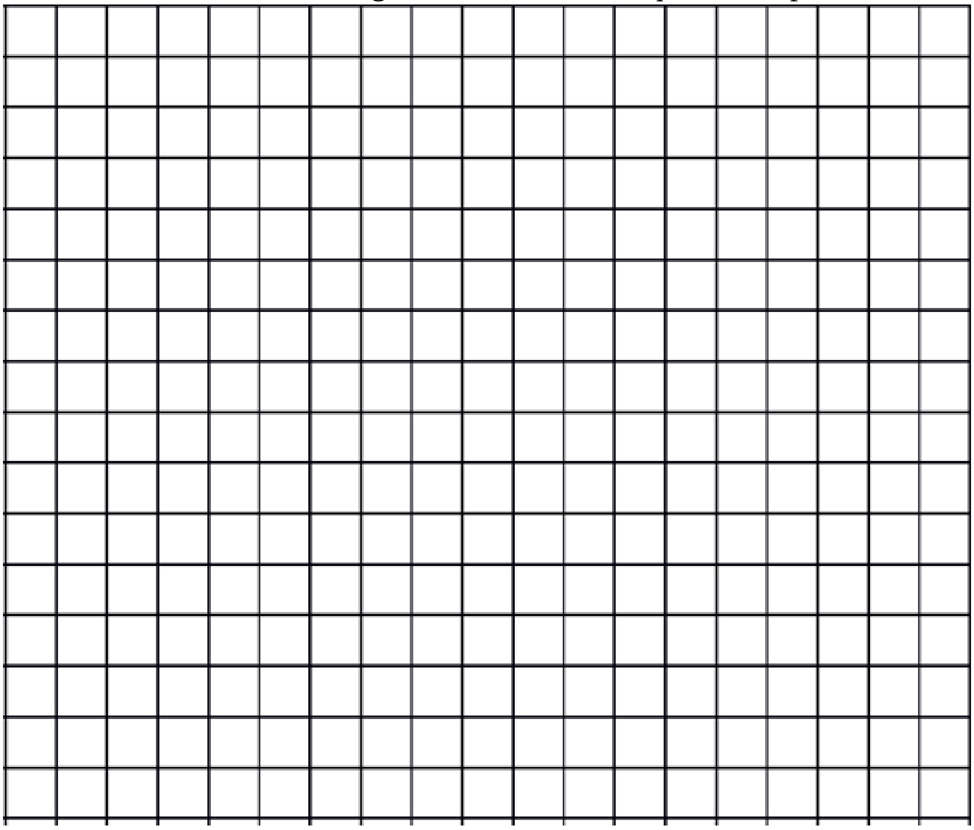
A institucionalização dessa atividade poderá ser realizada com o professor fazendo o estudante perceber que é possível medir área de figura utilizando estratégias de composição e recomposição e aproximação dos dados encontrados.

5.3.7 Análise a Priori da Atividade 7

Atividade 7 – Produção de Superfícies, Medidas de Áreas e Comparação.

7) Desenhe na malha quadrangular, quatro figuras geométricas planas obedecendo as seguintes condições:

   a) A figura I possui maior quantidade de papel que as figuras II e III.
   b) A figura II possui maior quantidade de papel que a figura III.
   c) A figura III possui a mesma quantidade de papel que a figura IV.
   d) Qual a área das figuras I, II, III, e IV? Qual(is) dessa(s) figura(s) são maiores, menores ou iguais entre si? Justifique sua resposta.



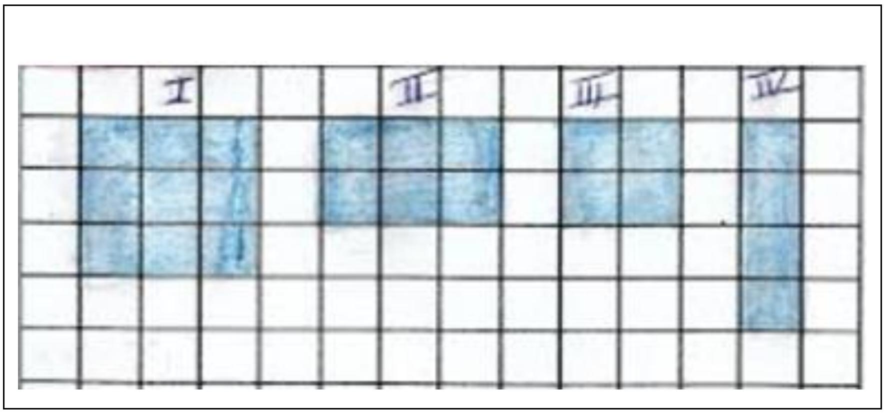
Fonte: professores participantes da pesquisa (2016).

A atividade (7) objetiva construir figuras planas com unidade de medida não padronizada (malha quadrangular) para determinar a medida de área e estabelecer a comparação entre as respectivas medidas.

A atividade representa uma situação de produção de superfícies, medidas (com a contagem dos quadrinhos) e comparação de áreas. Este procedimento serve para identificar as figuras de maior, menor ou igual medida de área. Como abordado anteriormente, este tipo de atividade possibilita variadas respostas corretas. Para desenvolver as tarefas o estudante deverá produzir quatro figuras que contemplem as condições, mostradas a seguir: a figura I é maior que a figura II, e esta é maior que a figura III; a figura III é igual à figura IV. Logo, a representação simbólica desta situação é: as figuras I > II > III. A figura III = IV. As figuras I > II > IV.

Vejamos na figura a seguir, um exemplo que representa as situações requeridas:

Figura 66 – Exemplos de produção de superfícies, medidas e comparação de áreas elaborados por dois estudantes da turma em que foi aplicada a sequência didática



Fonte: Estudantes de uma das turmas observadas (2016).

Nesta atividade, a variável didática é a medida da área, em que é adotado o quadradinho como unidade de superfície.

É possível que o estudante do 6° ano encontre dificuldade para resolver este tipo de atividade, uma vez que é necessário compreender a relação de inclusão que existe entre as figuras, considerando as condições impostas na tarefa.

A institucionalização pode ser feita com o professor instigando o estudante a relacionar as figuras e substituir o termo “quantidade de papel” por medida da área.

5.3.8 Análise a Priori da Atividade 8

Atividade 8 – Mudança de Unidade e Medidas de Áreas.

8) Na malha abaixo, considere cada quadrinho como uma unidade de área.

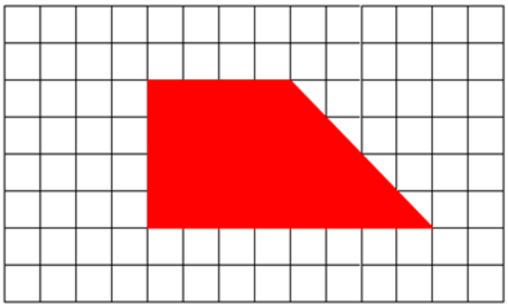


Figura 1

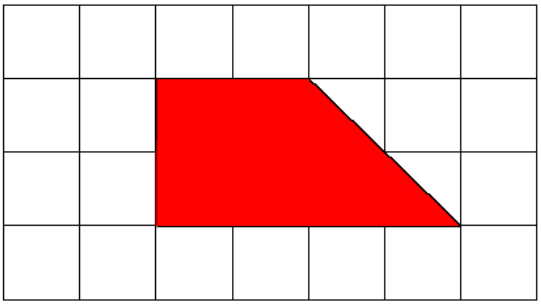


Figura 2

Se as figuras utilizam o mesmo espaço:

a) Qual a medida da área da figura 1?

b) Qual a medida da área da figura 2?

c) Explique como você fez para responder essa tarefa.

d) Que conclusão você pode tirar observando a figura 1 e 2?

Fonte: os professores participantes e a pesquisadora (2017).

O objetivo da atividade referida é fazer com que o estudante reconheça que superfícies semelhantes podem possuir medidas de áreas diferentes, se modificada a unidade de medida.

Para promover a compreensão do estudante, pensou-se em utilizar a malha quadriculada, considerando-se que esse dispositivo didático pode proporcionar a compreensão do aluno no que se refere à mudança de unidade não padronizada.

Uma estratégia a ser considerada para responder a atividade corretamente, é traçar a malha sobre a figura e utilizar a técnica da contagem dos quadrinhos – esse procedimento facilita a percepção da medida da área.

Compreendemos que nesta atividade a variável didática é o tamanho da malha, pois a sua utilização possibilita que o estudante identifique que se trata da mesma figura.

Caso o educando não trace a malha sobre a figura, é possível que ele erre a questão, pois, sem o delineado, fica difícil mensurar a medida da área da figura 1.

Consideramos pertinente a maneira como foi idealizada a atividade (8). Para que o estudante compreenda a institucionalização, esta pode ser feita com o educando percebendo que a superfície ocupada pela figura é a mesma, e a medida da área depende da unidade de área adotada.

5.4 ANÁLISE COMPARATIVA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA, COM O MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE

Ao fazer uma análise comparativa da sequência didática sugerida com o Modelo Epistemológico Dominante, identificamos avanços significativos, especialmente no que se refere às tarefas selecionadas pelos professores no momento da aula na abordagem sobre o tema.

Nas tarefas contempladas na primeira parte da SD, isto é, atividades com o Tangram, identificamos uma aproximação com a proposta sugerida nos PCN (BRASIL, 1998) e nas PC (BAHIA, 2013). Estes documentos sugerem obter a área utilizando composição, decomposição e ladrilhamento de figuras (BRASIL, 1998).

Na atividade 1, foi solicitado calcular a medida da área de figuras planas. Para isto, utilizou-se a técnica (τ) da composição e decomposição. Este procedimento possibilita estabelecer a diferença entre a medida da área e superfície.

No que diz respeito ao campo das figuras geométricas e de metodologias de trabalho a ser empregadas pelos professores em sala de aula, os PCN (BRASIL, 1998) argumentam que o conceito de semelhança passa a ser favorável para que se estabeleçam conexões com outros conteúdos matemáticos. Esse também foi usado na SD desenvolvida.

Na segunda parte da SD, foram propostas tarefas com a utilização da régua para fazer medições no intuito de comparar as figuras poligonais; também percebemos uma correspondência com os PCN (BRASIL, 1998) na indicação do desenvolvimento de tarefas explorando-se equivalências de figuras. Além disso, este documento incentiva a aquisição de atividades cujos resultados de medições utilizem “[...] as principais unidades padronizadas de medida de superfície” (BRASIL, 1998, p. 77), com intenções de oferecer para o estudante uma proposta que empregue unidades de medida padronizadas. O documento também incentiva que sejam desenvolvidas tarefas utilizando-se instrumentos de medida como a régua, de maneira que se empregue a unidade de medida apropriada, em função da situação-problema.

Conforme os PCN (BRASIL, 1998), outro aspecto que merece ser salientado diz respeito às relações entre área e perímetro; uma tarefa que explora estas grandezas, tende a favorecer a compreensão desses temas, principalmente porque:

> a experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas, costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados

> sobre os quais não se têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente (BRASIL, 1998, p. 131).

Uma das possíveis explicações apresentadas pelo documento (BRASIL, 1998), é de que, raramente, os alunos são colocados diante de situações em que as noções de área e perímetro estejam presentes. Portanto, recomenda que se desenvolvam situações que proponham "comparar figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes ou que tenham áreas iguais e perímetros diferentes [...] e que solicite aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas" (BRASIL, 1998, p. 131). Conforme o documento, este tipo de situação possibilita melhor entendimento dos conceitos destas grandezas. Observamos que a atividade 3 atende a essa recomendação.

Os PCN (BRASIL, 1998) ainda asseguram que é frequente os alunos confundirem noções de área e de perímetro ou estabelecerem relações equivocadas entre as grandezas, por exemplo, "quando comparam dois polígonos concluem que a figura de maior área tem necessariamente maior perímetro e vice-versa" (BRASIL, 1998, p. 130).

Os PCN (BRASIL, 1998) ainda incentivam ampliar o conhecimento dessas noções, para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais. Essas solicitações também são contempladas na SD.

Nos tipos de tarefas encontradas na terceira parte da SD (tarefas com malha), também percebemos um afinamento com os PCN, visto que esse documento estimula o trabalho com áreas apoiado em metodologias que favoreçam a compreensão das noções envolvidas utilizando-se procedimentos de contagem dos quadrinhos em papéis quadriculados (BRASIL, 1998).

Na proposta curricular da Bahia (BAHIA, 2013), também foi indicado o material didático (tangram) como uma maneira de intervenção didática no que se refere à possibilidade de abordagem dos eixos geométricos e das medidas.

Nas tarefas em que se explora as medições, ainda são discutidas na PC (BAHIA, 2013), que argumenta: "um ensino que possibilite a compreensão do processo de medição envolve a comparação entre uma unidade (convencionada, arbitrária) e aquilo que se pretende medir" (BAHIA, 2013, p. 74). Compreendemos como unidade convencionada, as unidades padronizadas, como, por exemplo, os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado (km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2), e as arbitrárias, as que utilizam unidades não padronizadas, como as malhas; estas foram exploradas na terceira parte da SD elaborada.

No LD1, localizamos uma tarefa com tangram que foi utilizada pelos professores na SD. No exemplar, a atividade objetivava encontrar a área usando como unidade de área figuras do tangram; a ideia foi aproveitada na SD seguida com algumas adaptações. Nesta obra, ainda encontramos tarefas com malha quadrangular para explorar situações de medidas que envolvem a contagem dos quadrinhos. Na SD construída, esse tipo de tarefa foi ampliada de maneira a explorar a comparação e a produção de superfície.

Quanto ao LD2, não identificamos tarefas análogas às utilizadas na SD adotada.

No que se refere às aulas dos professores, não observamos tarefas comparáveis com as exploradas na SD, portanto, não identificamos similaridades do trabalho desenvolvido pelos professores com a SD elaborada pelos mesmos. O que confirma que ocorreram modificações no que diz respeito à escolha das tarefas para a SD.

5.5 ANÁLISE COMPARATIVA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA COM O MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA / MODELO DIDÁTICO DE REFERÊNCIA

Ao fazermos uma apreciação da sequência didática adotada com os MER/MDR, buscamos considerar, sobretudo, se as tarefas contemplam aspectos envolvidos nas organizações conceituais dos quadros geométricos, numéricos e das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989), e se consideram as situações que dão sentido ao conceito de área, ou seja, as situações de medida, de comparação, de produção de superfície (BALTAR, 1996) e de mudança de unidades não padronizadas (FERREIRA, 2010).

Nas tarefas consideradas na primeira parte da SD, tarefas com o tangram, verificamos que a proposta (SD) atende as concepções geométricas e as concepções numéricas, defendidas por Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Bellemain (2000), Facco (2003), Ferreira (2010), entre outros. Esta indicação pode vir a favorecer as articulações entre os quadros geométricos e numéricos, contribuindo para amenizar possíveis dificuldades no que se refere às situações supracitadas.

Na sua pesquisa, Facco (2003) utilizou o tangram para recorrer à representação da figura. Compreendemos que a escolha do tangram favorece a comparação de superfícies, por deslocamento, por meio da técnica da composição, decomposição e ladrilhamento (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Na segunda parte da SD, são exploradas situações de medidas, de comparação de superfície e de produção de superfície, possibilitando a articulação entre os quadros das grandezas e os quadros numéricos, uma vez que, os estudantes terão a possibilidade de recorrer à medida para comparar as áreas das figuras representadas na tarefa (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Estes tipos de tarefas fazem o estudante se aproximar do exercício da medição e do cálculo numérico, possibilitando que o aluno desenvolva a compreensão do conceito de área e de perímetro, e, sobretudo, que compreenda que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa (LIMA; BELLEMAIN, 2000).

Na terceira parte da SD, identificamos que foi possível utilizar a malha para contemplar as situações de medida, comparação, produção de superfície e mudança de unidade não padronizada.

Muitas pesquisas enfatizam o uso da malha para promover a compreensão do tema. Desde os estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), que a malha é destacada como um material didático útil ao entendimento do assunto em questão. Na sua pesquisa, Facco (2003) propõe uma série de tarefas utilizando a malha quadrangular e a triangular em que se emprega a técnica da composição e decomposição. Além da pesquisadora supracitada, Pessoa (2010) desenvolveu uma pesquisa com 100 estudantes do 6º ano, constatando que o uso das malhas quadriculadas faz avançar a concepção dos alunos na compreensão da área enquanto grandeza. A pesquisadora considera que o uso da malha quadriculada propicia a operação da medida de área através da contagem dos quadrinhos, ocasionando duas operações diferentes, a geométrica e a numérica. Na SD proposta, também identificamos a utilização da malha para explorar situações de comparação. Conforme Bellemain e Lima (2002), as situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas.

Na atividade 5, foi solicitado que se desenhassem duas figuras de “mesma medida de área e perímetros diferentes” (PROFESSORES, 2016). Também consideramos pertinente este tipo de situação, uma vez que, foi verificado que estas grandezas, área e perímetros, ainda são causa de incompreensões por parte dos estudantes, “afinal, uma grande parcela confunde perímetro e área, [...], além de utilizarem, de maneira errônea, as fórmulas” (SANTOS, 2011, p. 78).

Outra questão considerada relevante, são as situações de produção de superfície, identificadas nas atividades 5 e 7 da SD; estas, permitem que o estudante desenvolva tarefas com várias respostas corretas, possibilitando-se que sejam realizadas tarefas abertas.

Foram verificadas na atividade 8, situações de mudança de unidade, com unidades não padronizadas. Este tipo de situação ganha destaque no teorema “a área é o número de ladrilhos necessários para recobrir a superfície” (BALTAR, 1996, p. 94). Esta situação é valorizada nos registros de Douady e Perrin-Glorian (1989), ao discorrerem que os estudos deste tipo de situação, concentravam-se na mudança de unidades de medidas padronizadas que envolvem múltiplos e submúltiplos; dessa forma, o foco estava voltado basicamente aos quadros numéricos, não existindo um trabalho voltado à área como grandeza geométrica, no qual fosse possível a articulação dos quadros supracitados.

Para concluir, consideramos que a SD desenvolvida apresenta um conjunto de tarefas que representa as situações de medida de área, comparação de superfície e mudança de unidade, amparadas nas pesquisas de Baltar (1996), Bellemain (2000) e Ferreira (2010).

5.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA FASE EXPERIMENTAL

Neste estudo, visamos identificar os objetivos das tarefas, a representatividade de cada situação mobilizada na resolução, possíveis soluções para resolvê-las e analisamos as prováveis dificuldades que os alunos podem enfrentar no ato da resolução das tarefas; além disso, consideramos as variáveis necessárias para o estudo, e tentamos, ainda, descrever possíveis maneiras para a institucionalização das tarefas e apresentamos uma reflexão sobre a fase experimental dos professores.

Iniciamos nossa reflexão a partir da questão geratriz: o que tenho que “ensinar” sobre área aos alunos do 6º ano do ensino fundamental? Este questionamento gerou outro: (Q1) Quais tipos de tarefas devemos propor para os estudantes do 6º ano do ensino fundamental?

A partir destes questionamentos, foram construídas oito atividades [72] (OM) para o estudo de área.

Nas atividades 1 e 2, foi utilizado o tangram. Na atividade 1 foi solicitado o cálculo da medida da área de figuras planas, e para isto utilizou-se a técnica (τ) da composição e decomposição. Este procedimento possibilita estabelecer a diferença entre área e superfície. A atividade 2 solicitou o cálculo da medida da área de figuras planas, utilizando uma unidade de medida não padronizada (peças do tangram). Este estudo permite reconhecer que superfícies semelhantes podem ter áreas distintas, uma vez que, depende da unidade de medida considerada. A técnica (τ) adotada foi o ladrilhamento.

Na atividade 3 foi utilizado a régua para efetuar as medidas. A atividade propõe calcular a medida da área por meio da técnica (τ) aplicar a fórmula da área do retângulo, conduzindo o estudo à comparação das medidas das áreas, para, posteriormente, produzir

[72] Cada atividade é composta por tarefas.

superfície. Este tipo de tarefa favorece várias respostas corretas, as quais podemos denominar de respostas abertas.

As demais atividades foram desenvolvidas com malhas. A atividade 4 propõe calcular a medida da área, utilizando a técnica (τ) contar os triângulos pequenos (unidade de área).

A atividade 5 tem a finalidade de produzir superfície, conduzindo o estudante a construir figuras planas em malhas quadrangulares. Para este tipo de tarefa, o aluno utilizou a técnica (τ) contar quadrinhos. Para a construção da atividade, o educando necessita saber identificar formas e conhecer o conceito de área e perímetro.

A atividade 6 tem o objetivo de comparar as medidas das áreas; para alcançar o objetivo, a atividade leva o estudante a desenvolver a técnica (τ) da decomposição e recomposição, mesmo que de maneira intuitiva, de modo a encontrar a medida da área de figuras conhecidas.

Enquanto a atividade 7, conduz o estudante a produzir superfícies para comparar as respectivas áreas pela técnica (τ) da contagem de quadrinhos (unidades não padronizadas).

E a atividade 8, por fim, conduz à técnica (τ) da contagem dos quadrinhos para determinar a medida da área das figuras 1 e 2. Com essa abordagem, o estudante pode vir a reconhecer que superfícies semelhantes podem possuir medidas de áreas diferentes, se mudar a unidade de medida.

Ao retomar os questionamentos feitos no momento da experimentação, verificamos que foram utilizadas várias técnicas, em que se empregou materiais diversos, respondendo a indagação: (Q3) Como propor tarefas, de maneira a utilizar técnicas variadas? Além disso, foram reconhecidas que dentre as tarefas adotadas, encontramos tarefas que favoreciam a obtenção de várias respostas corretas, respostas abertas portanto, respondendo ao questionamento: (Q4) É possível realizar tarefas “abertas”?

5.6.1 Uma síntese da nossa análise sobre a fase experimental dos professores

Ao refletir sobre os questionamentos dos docentes na etapa da experimentação, bem como após a aplicação da sequência didática, percebemos que o envolvimento dos professores participantes e o resultado do trabalho desenvolvido foi importante para a formação dos educadores. Ponderamos que a fase experimental satisfez os anseios dos professores, especialmente nas etapas de construção das tarefas que fizeram parte da sequência didática, e, além disso, acrescentou um olhar diferenciado sobre o objeto matemático área.

Na análise do desempenho dos docentes frente às atividades desenvolvidas, compreendemos que houve evolução na proposta das tarefas que compuseram a sequência didática construída, uma vez que, foram empregados diferentes materiais didáticos nas atividades propostas. Esta constatação foi ratificada no relato de um dos professores participantes, quando o mesmo revelou que: “em momento algum da sua prática ao longo dos anos trabalhados, utilizou materiais manipuláveis nas aulas sobre área de figuras planas” (CARLOS, 2016), e argumentou que foi bom trabalhar com o tangram, além de papéis quadriculados e triangulares. Ademais, o mesmo admitiu ter percebido maior motivação por parte dos estudantes em classe, no momento da aplicação da sequência didática.

Um ponto que consideramos relevante ressaltar é que a fase de experimentação dispôs de requisitos de uma formação continuada, sem constituir-se numa imposição por parte da pesquisadora. Esta era uma das inquietações no tocante à pesquisa, principalmente no momento em que um dos educadores participantes alegou que alguns investigadores costumam se comportar como os “donos da verdade”, impondo suas concepções. Conforme o professor declarante, muitos pesquisadores desenvolvem suas pesquisas nas escolas e se vão, sem ao menos comunicar aos envolvidos os resultados do trabalho. Esse depoimento nos fez refletir sobre a postura a ser seguida nas sessões de estudo. Assim, resolvemos intervir somente nos momentos previamente planejados pelos professores e pela pesquisadora, como por exemplo, na seleção e refinamento das atividades.

Podemos incluir o Percurso de Estudo e Pesquisa como uma ferramenta que possibilitou aos professores participantes um estudo mais aprofundado sobre área como grandeza e resultou na construção de uma sequência didática para o ensino de área de figuras planas no 6° ano do Ensino Fundamental. Esta SD foi alicerçada pelo Modelo Epistemológico de Referência adotado na pesquisa, contribuindo, assim, para o processo da formação docente.

6 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS DE FUTURAS PESQUISAS

As discussões proferidas nos capítulos anteriores nos possibilitaram construir considerações que julgamos pertinentes para o desfecho desta pesquisa.

Neste item, discorreremos sobre aspectos relevantes para a investigação, tais como: a importância dos fundamentos teóricos e metodológicos adotados, o papel do Modelo Epistemológico de Referência (MER), os principais resultados da pesquisa, suas implicações e limitações; por fim, ponderamos sobre as perspectivas de futuras pesquisas, com o intuito de que as reflexões desenvolvidas possam oferecer subsídio a trabalhos posteriores.

6.1 A IMPORTÂNCIA DOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS ADOTADOS

Adotamos como quadro teórico, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999).

Consideramos que foi uma escolha apropriada, uma vez que as teorias têm seu foco no objeto matemático a ensinar. Nesta pesquisa, focamos no objeto matemático área. A Teoria das Situações Didáticas nos forneceu fundamentos especialmente nas situações didáticas e na noção de contrato didático (BROUSSEAU, 1986), enquanto a Teoria Antropológica do Didático nos norteou sobretudo nas discussões referentes às relações institucionais que envolvem o professor, o aluno e o saber matemático, nas praxeologias matemáticas e didáticas e nos níveis de co-determinação didática (CHEVALLARD, 1999).

A Teoria Antropológica do Didático foi essencial para a pesquisa, visto que, embasou a metodologia adotada na investigação. O referencial teórico que alicerçou a metodologia da pesquisa foi relevante, pois nos possibilitou desenvolver as análises institucionais e nos oportunizou empregar a Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

A pesquisa foi desenvolvida em dois colégios do município de Salvador, estado da Bahia, que atuam no ensino fundamental. Os sujeitos da nossa pesquisa foram dois professores de matemática do 6º ano do ensino fundamental, sendo um de cada escola.

Nas análises institucionais, os estudos preliminares do Modelo Epistemológico Dominante sobre o objeto matemático área no 6º ano do Ensino Fundamental, foram significativos para a pesquisa. Com o estudo, foi possível desenvolver uma análise documental, a observação naturalista das aulas dos professores participantes e entrevistas semiestruturadas, estas serviram para avaliar as concepções dos professores sobre o objeto matemático área; além disso, complementamos os dados com um questionário, elaborado para traçar o perfil dos docentes, tanto do ponto de vista profissional, quanto de situações ligadas ao objeto matemático área.

Entre os documentos analisados, consideramos os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), a Proposta Curricular do Estado da Bahia - PC (BAHIA, 2013), os livros didáticos adotados pelas escolas participantes e os cadernos dos alunos.

A análise do PCN (BRASIL, 1998) e da PC (BAHIA, 2013), desenvolvida sob a perspectiva ecológica, nos permitiu identificar em cada nível de co-determinação didática (civilização, sociedade, escola e pedagogia) as condições e restrições estabelecidas pelos documentos supracitados, que são impostos aos níveis hierarquicamente inferiores (disciplina, domínio, setor, tema e questão). Ponderamos que uma análise institucional no campo das políticas públicas foi relevante, considerando que o currículo sofre influências da civilização, sociedade e da escola.

Também entendemos que foi significativo para a pesquisa realizar as análises dos livros didáticos adotados pelas escolas participantes. As análises sob o ponto de vista da TAD (CHEVALLARD, 1999), no que se refere às organizações praxeológicas (CHEVALLARD, 1999), evidenciaram aspectos da abordagem dos conceitos associados à área de figuras planas. O bloco prático -técnico (T,τ) do saber fazer, ou seja, as tarefas propostas pelos livros e as técnicas associadas a cada tarefa, e o bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), ofereceram um panorama dos livros, o que favoreceu a identificação das organizações matemáticas usadas e das organizações didáticas adotadas pelos autores dos livros.

A análise dos cadernos dos estudantes, que foi desenvolvida sob o ponto de vista das praxeologias matemáticas, apresentou dados que deram indícios do "saber aprendido" (CHEVALLARD, 1991). Diante disso, consideramos que foi adequada uma apreciação crítica das tarefas desenvolvidas pelos educandos, ainda que não tenhamos identificado estratégias de resolução que se diferenciassem das usadas nas tarefas resolvidas em classe pelos professores.

Também foi importante integrar à pesquisa a observação naturalista; esta foi desenvolvida por meio de acompanhamentos das aulas dos professores participantes, em que foram feitas as anotações e gravação de áudios - esses procedimentos nos forneceram informações relevantes para a pesquisa. Ao observar as organizações praxeológicas adotadas pelos professores, pudemos identificar as tarefas, técnicas e os elementos tecnológicos teóricos seguidos e mobilizados pelos docentes, no decorrer das aulas. Com este estudo, conseguimos compreender como foi conduzido o trabalho dos professores em sala de aula e como ocorreu a institucionalização do objeto matemático área.

As análises desenvolvidas foram necessárias e confirmaram a importância da construção de um Modelo Epistemológico de Referência para alicerçar a proposta de um Modelo Didático de Referência, consolidado por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), como proposta metodológica teve um papel importante, visto que, envolveu os professores participantes na pesquisa, trazendo mudanças praxeológicas dos docentes. O PEP concebido partiu de uma questão problemática denominada de questão geratriz[73], e, no decorrer do percurso, foram levantadas outras questões que motivaram os professores na busca por respostas, obtendo resultados satisfatórios para a pesquisa.

A experimentação ocorreu mediante sessões de estudo, distribuídas em cinco momentos e consolidadas com a aplicação da sequência didática. Esses momentos ocorreram nos encontros destinados às atividades complementares (AC) de uma das escolas participantes.

Incluímos que o PEP proporcionou a autonomia dos professores no momento em que os mesmos construíram tarefas e exploraram técnicas variadas sobre o objeto matemático área. A partir das tarefas elaboradas pelos professores e selecionadas por estes e pela pesquisadora a sequência didática foi composta.

Diante disso, consideramos que o PEP veio intervir positivamente nos processos de ensino e aprendizagem, oportunizando aos docentes uma formação continuada, mesmo que de maneira implícita. Podemos afirmar que a escolha da metodologia da Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa veio integrar ao equipamento praxeológico de professores a completude das organizações matemáticas e didáticas do objeto matemático área, contribuindo para a formação dos docentes participantes da pesquisa.

6.2 O PAPEL DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

O Modelo Epistemológico de Referência tem o papel de auxiliar na desconstrução e reconstrução das praxeologias matemáticas (BOSCH; GASCÓN, 2010). Para isso, procuramos conhecer e interpretar o modelo epistemológico do objeto matemático área, que o

[73] O que tenho que ‘ensinar’ sobre área aos alunos do 6º ano do ensino fundamental?

apoia, o que reforçou a necessidade de buscar uma “razão de ser” para o ensino e aprendizagem de área. Podemos afirmar que a construção de um Modelo Epistemológico de Referência veio justificar uma possível “razão de ser” do saber de referência área. Além do mais, o Modelo Epistemológico de Referência contribuiu para fundamentar o estudo do objeto matemático área, diante da constatação de uma incompletude no sistema de ensino, identificado nas análises institucionais desenvolvidas nesta pesquisa.

As análises institucionais desenvolvidas e suas interpretações à luz da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), no que se refere às tarefas matemáticas sobre área, apontaram que o modelo epistemológico a ser tomado como referência deve se constituir em uma Organização Matemática Local Relativamente Completa (OMLRC).

Uma breve apreciação do contexto histórico e epistemológico do objeto matemático área, possibilitou-nos conhecer as circunstâncias que originaram os problemas e compreender a estrutura matemática do conceito de área, sob o ponto de vista epistemológico. O estudo da dimensão epistemológica permitiu-nos também o acesso às investigações já realizadas sobre os processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático em questão.

A partir do Modelo Epistemológico de Referência considerado, deparamo-nos com estudos como os de Douady e Perrin-Glorian (1989), que identificaram limitações por parte dos estudantes no que se refere à concepção de área. Nos deparamos também com estudos de outros pesquisadores, como: Baltar (1996), Chiummo (1998), Facco (2003), Baldini (2004), Magina et al (2006), Santos (2008), Ferreira (2010), Paula (2011) e Carvalho (2012), que ratificaram que os problemas identificados por Douady e Perrin-Glorian (1989) se faziam presentes nas suas investigações.

Nesta pesquisa, foram levados em consideração os quadros geométrico, numérico e das grandezas, ponderando que a abordagem de área como grandeza, favorece uma articulação entre os quadros geométricos e numéricos, e contribui para amenizar as dificuldades sobre o objeto matemático área. Ademais, foram acatadas as indicações de Baltar (1996) e de Ferreira (2010), no que diz respeito às classes de situações que dão sentido ao conceito de área.

Por intermédio do Modelo Epistemológico de Referência, pudemos conhecer as ideias de Chiummo (1998), quando adverte que os obstáculos encontrados para o cálculo de área são de natureza epistemológica e didática, atribuindo o problema ao escasso conhecimento dos professores. Também foi possível conhecer as ideias de Magina et al (2006), ao constatar que o baixo desempenho dos estudantes pode se tornar um impedimento para o ensino e, consequentemente, aprendizagem de área. Além disso, as pesquisas mostraram que o uso de diferentes dispositivos didáticos, pode auxiliar o trabalho dos professores, a exemplo do tangram (FACCO, 2003) e das malhas triangulares ou quadriculadas (PESSOA, 2010).

O Modelo Epistemológico de Referência deu sustentação à nossa pesquisa para adoção do conceito de área como grandeza e exploração das classes de situações que dão sentido ao conceito de área. Podemos afirmar que o MER veio alicerçar a proposta de um Modelo Didático de Referência intermediado por um Percurso de Estudo e Pesquisa. Em outras palavras, o Modelo Epistemológico de Referência adotado, serviu para fundamentar o nosso trabalho e favorecer a construção de uma sequência didática em resposta aos problemas identificados no decorrer da investigação.

6.3 PRINCIPAIS RESULTADOS DA PESQUISA

Os objetivos específicos nos conduziram para uma análise dos documentos institucionais para o ensino de área no 6° ano do ensino fundamental, uma análise do processo de institucionalização do objeto matemático área nas diferentes instituições no 6º ano do ensino fundamental, a observação das praxeologias dos professores participantes nas aulas sobre área e a construção de praxeologias com os professores em torno do objeto matemático área.

Na análise dos PCN (BRASIL, 1998) e da PC (BAHIA, 2013) verificamos que estes documentos apresentam o objeto matemático área inserido no bloco de conteúdos Grandezas e Medidas e sugerem uma articulação entre outros blocos de conteúdos.

No que se refere aos conceitos e procedimentos para o ensino de área no 6º ano, os documentos recomendam um estudo voltado à História da matemática e discorrem sobre algumas estratégias a serem empregadas, entre estas, a composição e decomposição, e incentivam o uso de materiais didáticos. Tanto os PCN (BRASIL, 1998) quanto a PC (BAHIA, 2013) ressaltam o caráter numérico da medida. Compreendemos que estes documentos buscam a excelência no ensino, e se inquietam com a educação tecnicista adotada por um grande percentual de professores da educação básica. A PC (BAHIA, 2013) “convida a escola a se reinventar cotidianamente, [...] considerando as questões que envolvem o olhar interdisciplinar” (BAHIA, 2013, p. 19), mas não apresenta sugestões de como fazê-lo.

Incluímos que estes documentos propõem uma adequação dos conteúdos matemáticos à realidade da cada instituição escolar, sem se darem conta de que estes assuntos não são considerados na formação inicial, nem nas formações continuadas, exigindo do docente um esforço extremo, muitas vezes difícil de desempenhar.

Nos livros didáticos, identificamos tarefas pontuais e locais. Entretanto, o estudo das organizações matemáticas se concentra principalmente no bloco do saber fazer (*práxis*), enquanto que no bloco tecnológico-teórico (*logos*) comprovamos escassa justificativa da técnica, embora se faça necessário. Também verificamos uma ampla quantidade de tarefas com ênfase nos aspectos numéricos, além da carência de atividades que contemplem a produção de superfície. A institucionalização dos conceitos é feita, notadamente, por meio das fórmulas.

Ao observar as praxeologias dos professores participantes, foi notada a utilização de uma única técnica para esclarecer as tarefas propostas. Além disso, não foram identificadas, mesmo que implicitamente, justificativas para fundamentar as técnicas aplicadas. Em linhas gerais, constatamos que os professores adotam nas suas aulas um comportamento tecnicista, dando evidência ao saber-fazer (tarefas e técnicas); esses elementos, ainda que sejam imprescindíveis, não instituem o saber. As técnicas empregadas constituem-se, essencialmente na aplicação de fórmulas, sem uma justificativa explícita dos motivos que os levaram a desenvolver tal técnica. Essa escolha pode acentuar a valorização do aspecto numérico e, possivelmente, dificultar o entendimento do conceito de área como grandeza. Assim como nos LD, a institucionalização dos conceitos de área é feita por meio de aplicação de fórmulas. Entretanto, pudemos identificar que o isolamento entre os saberes: sábio, a ensinar, ensinado e aprendido, (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013), que compõem o saber ensinado (escola, aula), pode dificultar o trabalho a ser desenvolvido pelo professor.

Nos cadernos dos estudantes, identificamos estratégias de resolução das tarefas semelhantes às usadas em classe pelos professores.

A partir dos principais resultados desta pesquisa, foi verificado que o Modelo Epistemológico Dominante (MED) apresentou restrições no âmbito dos saberes escolares, quanto à concepção dos conceitos de área nas diferentes instituições analisadas. Podemos afirmar que esta constatação não se confirmaria, caso não considerássemos o problema didático na esfera da dimensão econômica (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013).

Com este estudo, foi constatada a existência de incompletudes das atividades institucionais no sistema de ensino, o que justificou a busca por um modelo para servir de referência como resposta às dificuldades encontradas nas instituições analisadas. A constatação de incompletude das relações institucionais analisadas, admitiu a necessidade de se adotar um Modelo Epistemológico de Referência.

Para isto, procuramos conhecer e interpretar o modelo epistemológico que está em jogo, em busca de uma "razão de ser" para o ensino de área. A "razão de ser" vem responder o Modelo Epistemológico de Referência (MER). O estudo dessa dimensão serviu para alicerçar a proposta de um Modelo Didático de Referência (MDR) (dimensão ecológica) intermediado por um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Quanto ao objetivo geral, podemos afirmar que contribuiu com o processo de formação docente, a partir do momento que foi construído um Modelo Epistemológico de Referência, com o olhar nas incompletudes do trabalho institucional relativo ao objeto matemático Área, no 6° ano do ensino fundamental.

Para responder a nossa questão da pesquisa, "como integrar no equipamento praxeológico dos professores um modelo que sirva de referência para o ensino e aprendizagem do objeto matemático área, no 6° ano do ensino fundamental?", nos apoiamos no Modelo Epistemológico de Referência adotado para o estudo do objeto matemático área, como grandeza. Podemos inferir que nossa investigação pôde responder este questionamento, ainda que parcialmente. Isso porque, foram desenvolvidas tarefas que envolveram diferentes técnicas, identificando-se justificativas das técnicas utilizadas, além da existência de tarefas matemáticas "abertas", apontando alguns indicadores de completude (BOSCH et al, 2004).

No que se refere à fase experimental, as sessões de estudo aconteceram em cinco momentos e foram encerradas com a aplicação da sequência didática (avaliação). Consideramos pertinente a maneira como foram planejadas as sessões em que se utilizou fundamentos da TAD, sobretudo da estrutura dos momentos didáticos discutidos por Chevallard (1999), sem que os professores se percebessem. Além disso, as perguntas proferidas nas sessões de estudo iniciadas a partir da questão geratriz desencadearam outras perguntas que contribuíram para a elaboração de atividades, estas eram compostas por tarefas selecionadas pelos professores e a pesquisadora, para compor a sequência didática.

Podemos alegar que, buscar respostas coerentes com o Modelo Epistemológico de Referência adotado na pesquisa, constitui-se em uma Organização Matemática Local Relativamente Completa (OMLRC). Portanto, compreendemos que, direta ou indiretamente, as perguntas[74] feitas nas sessões de estudo foram respondidas.

Assim sendo, ponderamos que as tarefas elaboradas nas sessões de estudo, corresponderam satisfatoriamente ao que foi proposto no trabalho, uma vez que, foram

[74] (Q1) Quais tipos de tarefas devemos propor para os estudantes do 6º ano do ensino fundamental? (Q2) Quais técnicas podem ser utilizadas para resolver as tarefas? (Q3) Como propor tarefas, de maneira a utilizar técnicas variadas? (Q4) É possível realizar tarefas "abertas"?

consideradas tarefas que exploraram o conceito de área como grandeza, favorecendo uma articulação entre os quadros geométricos e numéricos. Além disso, a sequência didática construída também se afinou com as ideias de Baltar (1996) e Ferreira (2010), com as tarefas que exploraram situações que dão sentido ao conceito de área.

Se considerarmos as investigações correlatas discutidas, que abordaram questões sobre o objeto matemático área ou que utilizaram teorias no campo da Didática, identificamos que a metodologia aplicada foi o diferencial desta pesquisa. Visto que, a partir dos resultados obtidos nas análises documentais e na observação naturalista, foi suscitada uma proposta de intervenção didática, concretizada com o Percurso de Estudo e Pesquisa. Assim sendo, podemos afirmar que o Percurso de Estudo e Pesquisa, promoveu a autonomia dos professores participantes, no que diz respeito à construção de tarefas sobre o objeto matemático área como grandeza.

6.3.1 Implicações e Limitações

Os estudos preliminares do Modelo Epistemológico Dominante desenvolvido nas análises institucionais sobre o objeto matemático área no 6º ano do Ensino Fundamental, decorreram em implicações relevantes, na medida em que motivaram a construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), para embasar o Modelo Didático de Referência (MDR) - este concretizado com a proposta da Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

O acolhimento disponibilizado pelas direções escolares, coordenações pedagógicas e professores dos colégios participantes, foi de grande valia para o desenvolvimento desta investigação. Em um dos colégios, a coordenadora pedagógica concedeu um espaço para as sessões de estudo, que foram desenvolvidas em dias destinados às atividades complementares (AC). Contudo, a escolha do período proposto para as sessões de estudo, independia da disponibilidade dos envolvidos (professores e pesquisadora), uma vez que cada sessão foi agendada pela coordenação pedagógica da instituição escolar. Na escola em que aconteceram as sessões de estudo, alguns encontros tiveram que ser adiados, por conta de problemas advindos do contexto escolar, o que delongou o período destinado à experimentação.

A prorrogação do período agendado para as sessões de estudo, acarretou percalços que impediram o desenvolvimento de uma das ações idealizadas para esta pesquisa, a autoconfrontação com os professores participantes. Consideramos que a autoconfrontação, oportunizaria ao educador refletir sobre as suas escolhas didáticas.

Entretanto, consideramos que os resultados foram satisfatórios, pois possibilitaram aos docentes um estudo sobre área como grandeza, uma vez que, resultou na construção de uma sequência didática alicerçada nas dimensões epistemológica e ecológica, realizada por meio de um Percurso de Estudo e Pesquisa.

6.4 PERSPECTIVAS FUTURAS

Nossa pesquisa abre caminho para outras investigações no que tange ao objeto matemático área, integrado às teorias da didática, como por exemplo: compreender os princípios que regem o contrato didático firmado entre o professor e o estudante no momento da aula sobre área; elaborar e experimentar uma engenharia didática amparada por materiais didáticos que favoreçam a construção do conceito de área, como grandeza; desenvolver uma pesquisa utilizando-se os fundamentos da Engenharia de Percurso de Estudo e Pesquisa sobre o objeto matemático área, adotando outros aportes teóricos, a exemplo dos níveis de conhecimento esperados dos educandos (ROBERT, 1997), ou registros de representação semiótica (DUVAL, 1993) e da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990).

Por fim, concordamos com Perrin-Glorian (2016) quando expõe: "não se pode separar o didático do matemático, quando se trata de refletir sobre o ensino de matemática"[75], deste modo, as mudanças se fazem necessárias, sobretudo no que se refere a um trabalho voltado para a formação de professores alicerçado nas teorias da didática.

[75] Trecho proferido no 1º Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática ocorrido no período de 01 a 06 de novembro de 2016 em Bonito, Mato Grosso do Sul – MS.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. Ag; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade, **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ANDRADE, R. C. D; GUERRA, R. B. Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1201-1226, 2014.

ARAÚJO, P. C.; IGLIORI, S. B. C. O método na pesquisa em educação matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Petrópolis, Rio de Janeiro, **Anais**... Rio de Janeiro, 2012.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1998.

BAHIA. Secretaria da Educação e Cultura. Departamento de Ensino. Matemática: **Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental**, Salvador, 2013.

BALDINI, L. A. Ferreira. **Construção do conceito de área e perímetro**: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d’aire de surfaces planes**: une étude de l’acquisition des relations entre les longuers et les aires au collège. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.

BELLEMAIN, P.M.B. Estudo de situações-problema relativas ao conceito de área. In: X ENDIPE-Encontro de Didática e Prática de Ensino, 2000, Rio de Janeiro. Ensinar e aprender: sujeitos, saberes, tempos e espaços. **Anais...** Rio de Janeiro, 2000. CD- ROM.

BELLEMAIN, P. M. B.; BITTAR, M. O ensino da geometria e a teoria dos campos conceituais. In: 25ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Caxambu, 2002. **Anais**... Caxambu-MG, 2002. Disponível em: <http://docplayer.com.br/37604360-Anped-25a-reuniao-anual.html>. Acesso em: 18 maio 2016.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Análises prévias à concepção de uma engenharia de formação continuada para professores de matemática do ensino fundamental. In: 23ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Caxambu, 2000. **Anais**... Caxambu- MG, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B., LIMA, P. F**. Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

BENTO, H. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o *software***: Geogebra. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 24, p. 1-200, 2004.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problematique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage-éditions, v. 19, n. 1, p.77-124, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER***:* problèmes et avancées. UMRADEF. Toulouse, Canadá, 2009. Acesso em: 02 de fev. de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas:** de los "talleres de práticas matemáticas" a los "recorridos de estúdio e investigacion" IUFM Del ácadémie de Montepellier, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução Helena Castro. São Paulo. Editora Blucher, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto / SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** - Ensino Fundamental 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, Ministério de Educação/ Secretaria de Educação Básica. **Guia Nacional do Livro Didático (6º ao 9º ano)**. PNLD /2014. Brasília. 2013.

BRASIL. MEC/CNE. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**, 2010.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CARVALHO, D. G. **Uma Análise da Abordagem da Área de Figuras Planas no Guia de Estudo do Projovem Urbano sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático.** 2012. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco, 2012.

CARVALHO, D. G.; BELLEMAIN, P. M. B. Ensino de Área de Figuras Geométricas Planas no Currículo de Matemática do Projovem Urbano. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 123-142, abr. 2015.

CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica**. 2008. 361 f. THÈSE Du Doctorat (De L'université De Toulouse

Délivré par l'Université Toulouse III) – Paul Sabatier en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité: Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. in Margolinas et all.(org.) : En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, , v. 1, p. 81-108, 2009b.

CHEVALLARD. Y. **Organiser l'étude 3. Écologie & régulation**. Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques France: La Pensée Sauvage p. 41-56, 2002.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique** : du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensee Sauvage. 1991.

CHEVALLARD, Y. L' Analyse des pratiques enseignantes théorie anthropologique du didactique.. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas:** capacitação para professores do ensino fundamental. 1998. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática, 6º ano. São Paulo: Ática, 2013.

DOUADY, R.; PERRIN- GLORIAN, M. J. Un processus d' apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathématics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

ESTRELA, A. **Teoria e prática de observação de classe**: uma estratégia de formação de professores. 2. ed. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, 1986.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FACCO, S. R. **Conceito de área:** uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FARIAS, L. M. S. **Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dansl'enseignement des mathématiques ausecondaire:** Une analyse des pratiques enseignantesen classes de troisième et de seconde. 2010. 380 f. Thèse (Doctorat em Didactique des mathématiques) – Université de Montpellier 2, France, 2010.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental:** estudos sobre a ótica da teoria dos campos conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós -Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006, 226p.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A.; FRANCHI, A. (Org.). **Educação Matemática**: Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, p. 77-111, 2012.

LIMA. E. L. **Medidas e formas em geometria:** comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, P.; BELLEMAIN, P. Grandezas e Medidas. In CARVALHO, J. B. P. F. **Coleção Explorando o Ensino:** Matemática, v. 17. Brasília, MEC, 2010. p. 167- 200.

LUCAS, C. et al. Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. **Educ. Matem. Pesq.,** São Paulo, v. 16, n. 1, p. 1-24, 2014.

LUCAS, C. O. **Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ambito de la modelización funcional.** Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Vigo, Programa de Doctorado Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones, Vigo, 2015.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUKESI, C. C. **Filosofia da Educação**. São Paulo: Cortez, 2003.

MAGINA, S. *et al.* **A competência de alunos dos ensinos fundamental e médio em resolver problemas de áreas e perímetro**: um estudo diagnóstico. 2006. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao.../CC21753580463T.doc. Acesso em: 02 set. 2015.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o ensino de áreas**: uma proposta para as Licenciaturas. 2010. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

PAULA, A. P. M. **Ensino de área de figuras planas por atividades**. 2011. 232 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil**: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, SP, ano 1, n. 1, p. 7- 17. Acesso em mar. 2016.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, SP, 1989.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SANTOS, C. A. B. **Formação de professores de matemática**: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro. 2008. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008.

SANTOS, J. A. S. **Problema de ensino e de aprendizagem em perímetro e área**: um estudo de caso com professores de matemática e alunos da 7ª série do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, São Paulo, 2011.

SANTOS, M. R. dos. **A Transposição didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6° ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

SILVA, J. C. D.; PIETROPAOLO, R. C.Um estudo sobre as contribuições de Felix Klein para a introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, p. 299-336, 2014.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. **Matemática**: compreensão e prática. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

VENTURI, J. J. **A Geometria**: um mundo de infinita harmonia. Disponível em: <http://www.geometriaanalitica.com.br/artmain/art_088.html.>. Acesso em: 05 out. 2016.

VIÑAO, A. Os cadernos escolares como fonte histórica: aspectos metodológicos e historiográficos. In: MIGNOT, A. C. V. (Org.). **Cadernos à vista**: escola, memória e cultura escrita. Rio de Janeiro: Ed. UERJ, 2008.

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências

Mestrado e Doutorado

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu____

CPF______________RG_______________, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos e benefícios da pesquisa, bem como de estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, os pesquisadores prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias e prof.ª especialista, mestranda Lucia de Fátima Carneiro Ferreira Lessa, responsáveis pelo projeto de pesquisa de mestrado, intitulado CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA CONSIDERANDO AS ANÁLISES DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ACERCA DE ÁREA NO 6º ANO.

Na turma ________, do 6° ano, do Ensino Fundamental II, na escola____ sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo, libero a utilização das filmagens e/ou gravações de áudio para fins científicos e de estudos (relatório, livros, artigos, slides e apresentações), em favor dos pesquisadores da pesquisa acima especificados, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990), dos idosos (Estatuto do Idoso, Lei N.º 10.741/2003) e das pessoas com deficiência (Decreto Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004).

Salvador - BA, ____ de __________ de 2016

______________________________	______________________________
Professor Participante da pesquisa	Pesquisador responsável pelo projeto
Prof:	Lucia de Fátima Carneiro Ferreira Lessa

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES

Prezado professor,

Com objetivo de traçar o perfil dos professores participantes da pesquisa "CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA CONSIDERANDO AS ANÁLISES DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ACERCA DE ÁREA NO 6º ANO", organizamos este questionário. Procure responder a esta pesquisa individualmente e com fidedignidade.

Agradecemos a sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

QUESTIONÁRIO

01. Dados pessoais e profissionais

Idade ______ Sexo: F ( ) M ( ) Tempo de magistério _______É efetivo?

Sim ( ) Não ( )

2. Qual a sua formação profissional? _______________________________________

2.1. Instituição que fez a graduação: ____

2.2. Ano de término: ______________

3. Tempo que trabalha em sala de aula?______________________

4. Você já fez algum curso de formação continuada que abordasse sobre o tema Área de superfícies planas? Sim ( ) Não ( ) Quantos? ______________

4.1. Há quanto tempo?

Menos de 3 anos ( ) Entre 5 e 10 anos ( ) Mais de 10 anos ( )

4.2. Em qual(is) a(s) instituição(es)? ______________________________________

4.3. Quais tópicos foram abordados? _______________________________________

5. Com qual(is) ano(s) você trabalha?______________________________________

6. Com qual ano você mais gosta de trabalhar?______________________________

6.1. Por quê?____

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÃO DAS AULAS DOS PROFESSORES

TRANSCRIÇÃO DAS AULAS DO PROFESSOR - COLÉGIO 1

1ª Aula

Data: 18/05/2016

Comentário: O professor iniciou a sua aula pedindo a atenção dos estudantes e falou como eles deveriam proceder para resolver um questionário (exercícios propostos do livro).

Professor: - Vocês vão resolver os exercícios do questionário. Depois vamos trabalhar com ângulos. Vocês vão pegar as questões para fazer o questionário na parte de ângulo a mesma coisa, depois vem perímetro que é de 1 a 8, aí vocês vão pegar para fazer o questionário de 1 a 8, depois vem medida de área, esse assunto nós estamos começando a trabalhar. Entenderam direitinho?

Alunos: - SIM!

Professor: - Vocês vão colocar a pergunta e depois a resposta. Nada de lápis! Outro detalhe, essas questões podem ter figuras geométricas, se tiver coloquem do lado. se a questão tiver figuras geométricas vos vão colocar do lado. Entregar esse questionário ate o dia 25, pronto, entenderam direitinho?

Alunos: - Professor e quem não tem o livro?

Professor: - Toma emprestado do colega. Pronto? Peguem o livro na página 256 e 257. Esse assunto medida de área, estamos começando a trabalhar. Vocês vão fazer a pergunta e colocar a resposta para entregar isso para mim entenderam? Peguem os cadernos e os livros para começarem a fazer as questões. Perímetro nós já sabemos não é isso?

Alunos: - SIM!

Professor:- Vamos copiar a pergunta e colocar as respostas. Vamos resolver os problemas do livro?

Alunos: - VAMOS!

Professor: - Estávamos conversando sobre área, não foi?

Alunos: - FOI

Professor: - Vamos resolver a questão da figura do teto de uma sala? Vamos resolver a questão 9 das placas de um teto de uma sala. Cada placa tinha quantos centímetros? Se tivesse 24 placas, seriam quantos centímetros?

Aluno 1: - 12

Aluno 2: - 24

Professor: - Não são 24 placas?

Alunos 3: - Sim, são.

Professor: - Se cada placa tem um centímetro, que figura é essa?

Comentário: Neste momento os estudantes ficaram pensativos e não responderam.

Professor: - Qual é a área desta figura aí?

Alunos: - 24

Professor: - A questão 13 vai abranger melhor a parte de área. Qual é a área desse quadrado?

Alunos: - 9

Professor: - Nove, o quê?

Alunos: - Centímetros.

Professor: - Se foi dado em centímetros é 9 cm².

E qual é o perímetro dessa figura?

Comentário: Neste momento os estudantes não responderam.

Professor - O perímetro não é a soma dos lados? E qual é o perímetro?

Comentário: Os estudantes em coro começaram a contar os quadrinhos.

Alunos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Professor: - Vamos calcular a área de outra figura geométrica?

Alunos: - SIM

Comentário: O professor aponta para o item b.

Professor: - Nessa figura geométrica qual é a área dessa figura?

Alunos: - OITO

Professor: - E qual é o perímetro? Olha aqui.

Comentário: o professor começou a contar os quadrinhos.

Alunos: - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 9, 10, 11, 12,13, 14, 15, 16, 17, 18.

Professor: - Ok? Entenderam?

Alunos: SIM

Professor: - Vamos calcular a área de um retângulo. Um retângulo é a mesma coisa de um quadrado?

Alunos: - NÃO

Comentário: Nesse momento o professor aponta para o item c do livro.

Professor: - Qual é a área?

Alunos: CINCO

Professor: - E qual é o perímetro?

Comentári**o:** Neste momento os estudantes permaneceram calados.

Professor: - Perímetro não é a soma dos lados? Então como encontramos esse perímetro?

Comentário: O professor aponta para ao quadrinho e os estudantes começaram a contar.

Alunos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Professor: - Para calcular a área de um retangular, como fazemos?

Professor: Vamos estudar agora a área de um retângulo. O retângulo é igual a um quadrado?

Alunos: NÃO.

Professor: Nós temos aqui uma área. Eu quero calcular a área desse retângulo, qual será?

Comentário: Não houve respostas por parte dos estudantes.

Professor: - A base ou comprimento vezes a largura. Estão vendo como se calcula? Temos outra figura geométrica para calcular a área.

Professor: - Faça essa questão a seguir: Se uma região retangular (Pag. 259, q. 17)

Aluno 4: - Não sei fazer.

Comentário: Nesse momento o professor pediu para outro estudante vir fazer na lousa. O aluno resolveu a questão.

Professor:- Está dando para ver o que o colega de vocês fez?

Comentário: Os estudantes não responderam

Professor: - Ele encontrou a área de quanto?

Comentário: Os alunos em cora falaram

Alunos: - Quatrocentos e sessenta e oito centímetros quadrados (468 cm^2)

Professor: - Façam agora a questão 25 pag. 259.

Comentário: Após alguns minutos...

Aluno:- Professor, deu 8 centímetros quadrado.

Professor: - Fizemos o cálculo da área de um retângulo. Agora, faremos o cálculo da área de um quadrado. Tudo bem?

Alunos: - TUDO BEM!

Professor: Para calcular a área do quadrado a fórmula é: A = l x l *(*l é o lado) que é igual ao lado ao quadrado.(l^2) . Por exemplo, se fosse dado um quadrado de lado medindo cinco centímetros qual seria o resultado?

Comentário**: Os alunos não responderam, então o professor repetiu a pergunta.**

Professor: - Se eu dissesse para calcular a área de um quadrado com cada lado medindo cinco centímetros qual seria a resposta? Isso aqui é uma potência. Nesse tipo de questão, o lado ao quadrado é como se fosse uma potência, ou seja, lado ao quadrado (l^2).

Aluno 5: - E o que é L professor?

Professor: - L é o lado do quadrado. Entendeu?

Aluno 5: - Entendi!

Professor: - Para o dever de casa vocês devem fazer a questão treze (13) da página duzentos e cinquenta e sete (257), que falta fazer. Não esqueçam, quando vocês foram responder as questões que pedi para resolver do livro, vocês devem saber calcular a área do retângulo e a área do quadrado, pois as questões estão relacionadas com essas figuras. Por exemplo, na questão treze, que vocês vão calcular a área e o perímetro Vocês devem preencher a tabela na questão. Colocar tudo no caderno que eu vou olhar.

AULA 2 e AULA 3

Data: 20/05/2016

Comentário: O professor iniciou a aula relembrando aos alunos as questões que ele havia solicitado anteriormente para fazerem. Vamos relembrar as páginas Pag. 255, 256, 257, 258 e 259.

Professor: - Vamos relembrar a fórmula de área? Qual é a formula para calcular a área de um retângulo?

Aluno 6: - Base vezes a altura.

Professor:- A próxima figura é a área da região limitada por um paralelogramo. Vocês já conhecem essa figura.

Comentário: Os alunos permaneceram calados.

Professor: - Vamos fazer a leitura desse trecho?

Comentário: O professor solicitou ao aluno que fizesse a leitura do trecho do livro página 260.

Aluno: - “Para determinar a fórmula que expressa a área de uma região plana limitada por um paralelogramo, vamos transformar esse problema em outro do qual já conhecemos a solução. Isso é muito comum em matemática. Trasladamos a parte em destaque da região limitada pelo paralelogramo e obtemos uma região retangular com área equivalente, com base de medida **b** e altura de medida **a”** . (DANTE, 2013, P. 260)

Professor: - O que é um paralelogramo?

Comentário: Nesse momento um estudante fez a leitura do livro, e disse paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos”

Professor: - Estão vendo a figura no livro, vocês já sabem o que é base e altura. O livro apresenta que quando transladamos, ou seja, quando pegamos uma parte do paralelogramo e “cortamos”, o livro apresenta que quando transladamos uma parte do paralelogramo sua área não muda.

Aluno: - Ah sim!

Comentário: Nesse momento o professor mostra na figura a parte que corta.

Professor: - Quando tiramos essa parte, e colocamos aqui, então ficamos com um retângulo.

Aluno 7: - Agora entendi professor

Professor: - Aqui nos temos um ângulo reto não é mesmo?

Comentário: Nesse momento os estudantes permaneceram calados e o professor mostra o ângulo reto na figura.

Professor: - A questão de número 27 diz o seguinte: “calcule a área das regiões planas que tem como contorno um paralelogramo (DANTE, 2013, pag. 260, Q. 27, item a)

Professor: - Calcule a área das regiões planas que tem como contorno um paralelogramo. Como vamos calcular?

Alunos: - Base x altura

Professor: - Temos de base oito metros (8 m), temos de altura três metros (3m). Oito vezes três é igual a vinte e quatro metros quadrados. Como vamos calcular essa questão? Quantos metros quadrados têm de área?

Aluno 8: - Ah agora entendi. Professor eu pensei que cortava essa parte e ficava sem a parte.

Professor: - Não

Comentário: O professor deu continuidade à resolução da questão e propõe resolver a questão 27 (DANTE, P. 260,Q. 27, p. 260, letra b)

Comentário: Foi dado uma pausa.

Professor: - Qual é a área da letra b?

Comentário: Os alunos permaneceram calados. O professor fala:

Professor: - Eu tenho um paralelogramo onde tem 1,5 e 4 centímetros de lados. Qual é a fórmula? Área é igual a quatro vezes um vírgula cinco. A= 4x 1,5 = 6 cm^2 Agora façam a letra **c** todos.

Comentário: o professor faz uma observação.

Professor: - Observem que o livro esta dando o resultado em decímetro e o resultado fica em...

Alunos:- Em decímetros quadrados

Professor: - Qual a base, e a altura?

Alunos: - Cinco e quatro

Professor: - Qual é a área? Se a base é cinco decímetros (5 dm) e a altura é quatro decímetro (4 dm) então fica 20 decímetros quadrados. Então para calcular a área do paralelogramo, a solução é como se fosse calcular a área do retângulo, como na aula anterior.

Comentário: O professor fez a leitura de outra questão do livro.

Professor: - Se uma sala quadrada tem uma área de trinta e seis metros quadrados ($36m^2$) qual é o seu perímetro? Primeiro deve encontrar a raiz quadrada, quem sabe calcular a raiz quadrada?

Alunos:- Seis

O professor aproveitou para relembrar como se resolve uma raiz quadrada

Professor: - Qual é a raiz quadrada de 100? É 10, porque 10 x 10 é 100. Qual é a raiz quadrada de 9? Qual é a raiz quadrada de 25?

Alunos: 5

Professor: - A raiz quadrada de 36 é quanto?

Alunos: - seis

Professor: - A raiz quadrada é o resultado do número multiplicado por ele mesmo

Professor: - Quando ele diz uma sala quadrada é formada por quantos lados?

Alunos: - Quatro

Professor: - Se a área é 36 metros quadrados, ele quer saber o perímetro, perímetro não é a soma dos lados?

Alunos: - Sim

Professor: - Vamos dizer que na casa de vocês a mãe de vocês diz assim: meu filho eu queria que vocês colocassem um piso. Se um piso em forma de paralelogramo tem base de 2,1 metros e uma altura de 1,3 metros, qual é essa área?

Comentário: Nesse momento uma aluna respondeu.

Aluna 9: - É 27, 3

Professor: - Olha só! Lembra da aula de multiplicar por números decimais, na hora do deslocamento da vírgula, conta-se quantas casas decimais tem e desloca a vírgula para a esquerda. Por isso, a senhora errou. Então qual é a resposta?

Aluno 10: - Dois vírgula um, vezes um vírgula três é igual a dois vírgula setenta e três (2,1 x 1,3 = 2,73)

Comentário: O professor não se deu conta da resposta do estudante, e fala.

Professor: - Quem fez o questionário errado, corrigir agora. Vamos fazer outra questão de perímetro. Encontramos a raiz quadrada para descobrir o lado e multiplicou 6 x 4 = 24 área tem 36 metros quadrados, qual é o perímetro?

Comentário. Os alunos ficaram calados. Então, o professor fez a leitura.

Professor: - Se um salão de forma retangular tem a área de 36 m² e comprimento de 9 metros, qual é o seu perímetro?

Professor: - Nesse caso não é calculo de área. Se for área a fórmula é diferente.

Alunos 11: - 26

Professor: - Ah 26. Venha fazer aqui no quadro.

Comentário: Nesse momento o estudante foi ao quadro, mas não desenvolveu o cálculo corretamente.

Professor: - Alguém encontrou esse valor? Vou dar uma dica a resposta é 26.

Aluno 12: - Ah sim.

Professor: - Primeiro você divide. A área não é 36 m²? A área toda que é 36,

então dividimos 36 por 9. E agora?
Alunos: - Dá quatro
Professor: - O que é o perímetro, não é a soma dos lados do retângulo?
Alunos: - Sim
Professor: - Soma tudo agora. O que é o perímetro, não é a som ados lados do retângulo?
Alunos: - É.
Professor: - Hoje fizemos o cálculo do paralelogramo. Vamos começar devagar agora para ver a área de uma região triangular. Quando falo triangular estamos nos referindo a que figura?
Alunos: - Triângulo.
Professor: - Me digam a fórmula da área. A fórmula para calcular a área do triângulo?
Comentário: Nesse momento o professor pediu a um aluno para ler o livro no trecho que trata da região triangular. O aluno fez a leitura.
Aluno 11: “Observe que, a partir de uma região triangular, podemos obter uma região coma forma de um paralelogramo de mesma base e mesma altura, de modo que a área da região triangular seja a metade a área da região obtid” . (DANTE, 2013, p. 261)
Professor: - Vocês estão vendo o triângulo? Estão vendo a base? Estão vendo a altura? Estão vendo o ângulo reto?
Alunos: - Sim
Professor: - Vejam que a fórmula do triângulo é diferente. É base vezes altura sobre dois. Observe que nós já temos duas fórmulas. A do retângulo, que é a mesma do paralelogramo e a do triângulo.
Professor: - Vamos lá? Vamos calcular a área do triângulo? Vou fazer a letra a.
O professor fez a leitura da questão de n° 29 letra a.
Professor: - Determine a área de cada uma das regiões triangulares pintadas. Nós temos altura 28 km, base, 8 km e 12 km.
Alunos: - Quarenta e oito, professor.
Professor: - Eu tenho base 8km e 12 km e altura tem 28. Qual é a fórmula?
Alunos: - Base vezes altura sobre dois
Professor: - Qual é a área? Qual é a base? A base não é 12 mais 8?

Comentário: Nesse momento o professor mostrou que a base é a soma dos valores

Professor: - Eu tenho um triângulo uma parte da base do triângulo tem 12 e a outra parte tem 8. Então é só somar 12 mais 8 e dividir por 2.

Alunos 12: - Dá 280 professor.

Comentário: A aula foi encerada

AULA 4

Data: 23 de maio de 2016

O professor iniciou a aula relembrando as fórmulas trabalhadas nas aulas anteriores.

Professor: - Vamos lá! Vocês lembram quando eu falei de área do quadrado, tinha uma formulazinha?

Comentário: Os alunos ficaram calados

Professor: - Quem lembra da formulazinha para achar a área do retângulo?

Apenas um aluno falou.

Aluno: - É base vezes a altura.

Professor: - Só você lembrou! Hoje vamos falar sobre a área da região limitada por um trapézio. Vou fazer o desenho. É um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos. Temos a base menor (b), a base maior (B), e a altura (a). Leiam o que está escrito no livro. Essa demonstração vai formar a nossa fórmula, que é área do trapézio. A= $\frac{(B+b)}{2}$.a

Professor: - Vou dar um exemplo.

Nesse momento o professor recorreu ao livro e apontou para a questão n. 32, item a.

Se eu tivesse um trapézio com esses dados: base maior 8, base menor 2 e altura igual 4. 8+2 quanto é?

Alunos: - 10

Professor: - Quanto é a altura?

Alunos: - 4

Professor: - Então a área do trapézio é 20m². Base maior +base menor vezes altura sobre dois. REPITAM!

Comentário: Os alunos em cora falaram:

Alunos:- BASE MAIOR+BASE MENOR VEZES ALTURA SOBRE DOIS.

Professor: - Vamos calcular a área do losango? Losango vocês também já conhece não é?

Comentário: Então o professor fez a leitura do livro.

Professor: - "Losango é um quadrilátero com todos os lados com a mesma medida como essa ao lado" (DANTE, 2013, p. 262). Temos uma diagonal. Vocês conhecem uma diagonal?

Comentário: Os alunos ficaram calados.

Professor: - Vocês viram que o livro diz que o losango é um quadrilátero com todos os lados de mesma medida. Ele diz que: a sequência da figura mostra que a área da região determinada pelo losango de diagonal maior e diagonal menor é a metade da área de uma região retangular.

Comentário: O professor retoma a pergunta.

Professor:- O que estudamos de área?

Alunos:- área do retângulo, área do quadrado, área do quadrado, área do trapézio e área losango.

Comentário: O professor finalizou a aula

Professor: - Então encerramos esse assunto.

TRANSCRIÇÃO DA AULA DO PROFESSOR (COLÉGIO 2)

Aula 1 e Aula 2

Data: 1/06/2016

Comentário: O professor iniciou sua aula anotando na lousa:

> “Medida de Superfície:
>
> Superfície é uma grandeza que apresenta duas dimensões”.
>
> Área é a medida dessa grandeza, portanto um número.
>
> Unidade fundamental: m² (metro quadrado).
>
> Os múltiplos de metro quadrado são utilizados com uma conversa informal com os estudantes, sobre as diferença entre o metro e o metro quadrado”. (JOÃO, 2017)

Professor: - Muitas vezes no nosso dia a dia existem alguns questionamentos que nós realizamos. Por exemplo: Qual é a superfície da minha casa? Quantos metros de azulejo eu vou precisar para colocar na cozinha. Ou na piscina que está sendo construída. Qual a medida da superfície de um apartamento? Ou do ambiente que nós estamos? Esses questionamentos são colocados no nosso dia a dia, se não fizermos outras pessoas farão. Para isso, desenvolvemos medidas de superfície para desenvolver uma solução para esse problema. Mas antes, vamos ver o que significa uma superfície. Superfície pessoal é uma grandeza que apresenta apenas duas dimensões. Certo? A área nada mais é do que a medida dessa grandeza, ou seja, um número. A área é a medida da superfície. Por exemplo: a superfície é a sala, mas para determinar quanto metros quadrados têm a sala, nós estabelecemos a medida da área.

Aluno 1: - Mas precisamos medir para saber a área não é professor?

Professor: - Com certeza e daí é que nós utilizamos vários procedimentos de medidas. Podemos medir com régua, fita métrica, podemos medir com trena (um equipamento utilizado por engenheiros civis, e também por pessoas que trabalham em edificações).

Aluno 2: - Arquiteto professor.

Professor: - Arquitetos também utilizam. Existem vários instrumentos de medições. Ok?

Alunos: - OK

Professor: - Saímos da definição e partimos para falar de unidade de medida de superfície. Assim como comprimento e o tempo, a medida de superfície apresenta uma unidade fundamental que é aquela unidade baseada para que determinemos medidas maiores ou medidas menores, unidades maiores ou unidades menores. Que medida é essa? O metro quadrado. Como a superfície é apresentada em duas dimensões, o metro quadrado é estabelecido da sequente forma. Vamos dizer que aqui seja uma superfície de duas dimensões, ou seja, comprimento e largura. Vamos dizer que esse comprimento esta sendo estabelecido em metros e a largura também é dada em metros, então para determinar a área dessa figura temos que multiplicar o comprimento pela largura, ou seja, a unidade trabalhada em metros pela outra unidade trabalhada em metros. Metro por metro dá o que?

Aluno 3: - Metro quadrado.

Professor: - Muito bem. É o que vocês aprenderam em potência, não é isso?

Alunos: - Sim

Professor: - Aprenderam em potência não foi? Multiplicação de potência de mesma base, conserva a base e soma os expoentes. Baseado nesta medida desta área é que nós estabelecemos o metro quadrado (m^2). O metro quadrado é a unidade fundamental da medida de superfície. O metro quadrado (m^2) apresenta múltiplos e submúltiplos. Os múltiplos são unidades que servem para medir superfícies de grandes dimensões, que são: o quilômetro quadrado, o hectômetro quadrado e o decâmetro quadrado e os submúltiplos são unidades para medir pequenas dimensões que são: o milímetro quadrado, o centímetro quadrado e decímetro quadrado.

Alguma dúvida?

Alunos: - Não

Professor:- Vamos fazer alguns exercícios?

Alunos: - Vamos!

Professor:- Observe. Se essa sala tem três metros de comprimento por dois metros de largura. Quero saber a área da sala. Basta você multiplicar o comprimento vezes a largura, ou seja, $A = 3 \times 2 = 6\ m^2$. Pois metro vezes x metro (propriedade de potência) representa metro quadrado (m²).

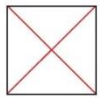
Comentário: Pausa

Professor: Para determinar a medida de uma superfície estabelecemos a área e como se encontra a área? Multiplicando comprimento pela largura.

Comentário: O professor colocou alguns exercícios na lousa para os estudantes resolverem. Os estudantes copiaram a lousa.

Professor: - Determine a medidas de cada figura abaixo, dado a área do triângulo igual a 3cm².

Comentário: O professor desenhou a figura a seguir:



Professor: - Observe. Quantos triângulos têm a figura?

Aluno 4: - Quatro

Professor: - Cada triângulo apresenta a área de quantos centímetros?

Alunos 5: - Três centímetros

Professor: - Quantos triângulos têm aí?

Alunos: - QUATRO

Professor: - Dá quanto a área?

Aluno 6: - 12 centímetros quadrados, professor.

Professor: - Pessoal, sabemos que 1250 é um número natural, a vírgula está localizada, após o último algarismo do número. O último algarismo é o zero, logo a vírgula está localizada após o zero. Ok?

Alunos: - Ok professor.

Professor: - Vamos transformar 1250 cm² em m². Para transformar de cm² em m², a vírgula vai se deslocar duas casas decimais.

Aluno 9: - Entendi.

Professor: - Na medida de superfície a vírgula se desloca de duas em duas casas decimais, é diferente do deslocamento da medida de comprimento que é de uma em uma unidade.

Professor: - Vai se deslocar duas casas decimais, depois mais duas. Logo minha vírgula se deslocará quatro casas decimais.

Aluno 7: - Ah é fácil!

Professor: - Nesse caso, a vírgula vai se deslocar quatro casas decimais para a direita. Portanto 1250 cm^2 correspondem a 0,1250 m^2.
Professor: - Agora vamos transformar 35, 2 hectômetro quadrado (hm^2) para metro quadrado (m^2) . Quantas casas decimais vão ser deslocadas?
Aluno: - Quatro
Professor: - Logo temos 352.000 hm^2.
Professor: - E de km para metro quantas unidades?
Alunos: 3
Professor: - Cada unidade se desloca quantas casas?
Aluno: - Seis.
Professor: - Vamos passar de milímetro quadrado (mm^2) para metro quadrado (m^2).
Aluno 8: - Professor ainda não entendi.
Comentário: O professor se aproximou do estudante e explicou.
Professor: - A passagem de milímetro quadrado (mm^2) para metros quadrados (m^2). Nesse caso a vírgula vai se deslocar quantas casas?
Alunos: - Seis
Professor: - de km para m quantas unidade?
Aluno: - 3
Professor: - Logo a vírgula vai se deslocar quantas casas decimais?
Alunos: - Seis
Professor: - Para a direita ou para a esquerda?
Alunos: - Para a direita
Professor: - Pronto! Agora façam os exercícios da página 275, sétima e oitava questão.
Comentário: Na sequência de exercícios o professor passou 2 questões com 12 itens, todos de transformação de unidades. Os estudantes ficaram resolvendo, logo após foi finalizado a aula.

OBERVAÇÃO: As aulas 3 e 4 do professor do colégio 2, ocorreram no dia 08/06/2016. As aulas observadas foram gravadas, mas, a gravação ficou com bastante barulho, não sendo possível fazer a transcrição.

APÊNDICE D – TRANSCRIÇÕES DA ENTREVISTA

ENTREVISTA COM OS PROFESSORES

Pesquisador: - Qual a importância que você dá ao tema área de figuras planas?

Professor 1: Na verdade essa parte do assunto para o sexto ano, damos a introdução que sirva para o dia a dia dos estudantes. Não extrapolo muito com esse assunto, pois sei que eles sentem dificuldade. Eu introduzo mostrando a ideia de ponto, reta, plano, mostro também a importância do tema, mostro as figuras na lousa. Nas aulas, esse deve ser dado anterior, mas eles não têm uma base do 4º e 5º ano sobre medidas, então eu tenho que mostrar a eles essa parte. Mas sei da necessidade de se trabalhar muito esse assunto com eles. Mas eu noto que eles não têm uma base sobre medidas, então tenho eu tento dar a base. É importante pelo dia a dia deles.

Professor 2: - Eu dou importância por ser um assunto necessário para os estudantes, fazemos coisas que necessitam desse tema.

Pesquisador: - Como você esquematiza suas aulas sobre o tema área de figuras planas?

Professor 1: - Meu planejamento é baseado no livro didático. Os estudantes tem o livro, entendeu? Através do LD vou esquematizando, mostrando as figuras geométricas, formatos iguais ou diferentes, com base no LD e outros livros. Utilizo também a internet.

Professor 2: - Eu planejo conforme o plano de curso disponibilizado pela coordenação.

Pesquisador: - Quais foram os motivos das escolhas?

Professor 1: - As questões foram escolhidas considerando as que mais aproximava do entendimento dos estudantes, as que possivelmente possa contribuir para o desenvolvimento deles, considerei as que eram mais importante para os estudantes. As que eles se identificavam melhor. Percebi que quando são apresentado figuras, eles tem maior facilidade de compreender, então escolhi essas, considerando as que melhor eles se identificavam. Com base nisso elaborei meu teste e minha avaliação com figuras.

Professor 2: Cumprir o planejamento escolar, procuro dar tudo que é solicitado pela instituição.

APÊNDICE E - TRECHOS DA TRANSCRIÇÃO DAS SESSÕES DE ESTUDO (QUESTIONAMENTOS)

Pesquisador: - Qual a sua concepção de área de figuras planas?

Professor 1: - Eu acho que é para fazer o aluno perceber o espaço que ele ocupa. É fazer o aluno perceber que onde ele está, ele está ocupando um espaço, ou seja, ele ocupa um espaço sentado aqui, ele ocupa um espaço em um ônibus......

Professor 2: - A própria sala de aula, é um espaço não é? Pra mim a ideia de área é fazer o aluno saber quanto cabe dentro de um espaço.

Pesquisador: - De acordo com sua experiência em sala de aula, quais as possíveis dificuldades dos alunos para a compreensão do conteúdo área de figuras planas no 6° ano?

Professor 1: - A grande dificuldade está no entendimento, na hora de fazer a figura plana e encontrar o comprimento e a altura, eles não sabem identificar. Os alunos não multiplicam, essa é a grande dificuldade deles.

Professor 2: - Você esta dizendo que a área é o produto das duas medidas e os alunos não compreendem, não é isso?

Professor 1: - É sim.

Comentário: Por um instante ocorreram trocas de informações, incidindo na nossa intenção, gerar o diálogo entre os professores, deixando-os livres para a troca de ideias, sem a interferência do pesquisador, sobretudo nessa primeira seção.

Pesquisador: - Na fala de vocês percebe-se que vocês identificam limitações no que se refere à aprendizagem. O que pode ser feito para amenizar essas lacunas?

Professor 1: - Na minha aula eu tomei como exemplo a própria sala de aula, mostrando comprimento, largura. Eu comecei mostrando a eles como se calcula uma área, e eles ainda tiveram dificuldades. Os alunos chegam aqui sem saber esse assunto.

Professor 2: - Em um curso que fiz no estado com professor Antonio, eu me lembro que o professor pretendia nos dá a ideia de concepção de área, e o professor fazia um quadrado e um círculo, nos mostrou o espaço e perguntou: “quantas pessoas cabem no espaço?”. Ele estava dando a ideia de área.

Professor 1: - Mas quando agente chega na sala de aula para que o aluno entenda melhor ele precisa dominar as operações, entender o que significa a multiplicação, [...], isso não acontece.

Pesquisador: - Vocês poderiam expor a diferença entre área e superfície?

Professor 2: - Por exemplo, a superfície é uma casa, um jardim e a área seria a medida. Melhor dizendo, a superfície é a parte plana de uma casa ou de um jardim, e a área, a medida dessa superfície.

ANEXO A - SOLICITAÇÃO DE VISITA E DE OBSERVAÇÕES

Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências

Mestrado e Doutorado

Salvador, ______________________

Pesquisadora: Prof.ª Lucia de Fátima Carneiro Ferreira Lessa
À direção ____
Assunto: Solicitação de Visita e de Observações

Prezado Senhor(a) Diretor(a),

Visando elaborar uma pesquisa de cunho científico a ser apresentada como dissertação para o Programa Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia, vimos por meio desta, solicitar à direção da Escola, permissão para a visita e observações de aulas de matemática, em turmas do 6° ano, do Ensino Fundamental II, turma:___ nas aulas da prof.___________________________________. Gostaríamos de salientar que garantimos a privacidade dos participantes envolvidos nessa investigação.

Cabe também explicitar que, após sua conclusão, o resultado da pesquisa será disponibilizado para a escola.

Agradecemos desde já a atenção dispensada, cordiais saudações,

____

Prof. Dr. Luiz Márcio Santos Farias
E-mail:lmsfarias@ufba.br
Tel.: (71) 3283-6606

ANEXO B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Escola:____
Série/ Ano:________________ Município:_____________________ UF ___________
Aluno1 (a): ____
Aluno 2 (a): ____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

PARTE I

Atividade 1

Caro estudante!

1.1. Você esta recebendo um envelope contendo 7 peças (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Trata-se de um jogo milenar denominado de Tangram.

a) Com as 7 peças, forme um quadrado (Tangram). Qual a medida da área do tangram?

b) Com os 2 triângulos grandes, forme figuras diferentes, obedecendo as seguintes condições:

- Não sobreponha às peças
- Um lado de uma peça deve apoiar-se no lado da outra peça

Agora, desenhe as figuras formadas no quadro abaixo, e responda:

Qual a medida de área de cada figura?

c) Observe as formas das figuras e as áreas encontradas, o que você percebeu?

1.2.) Agora forme figuras com 3 peças, usando 2 triângulos pequenos e 1 triângulo médio.

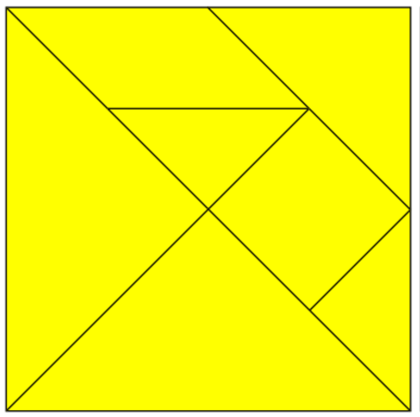
a) Desenhe as figuras formadas, e responda:

Qual a medida de área de cada figura?

b) Observe as formas das figuras e as áreas encontradas, o que você percebeu?

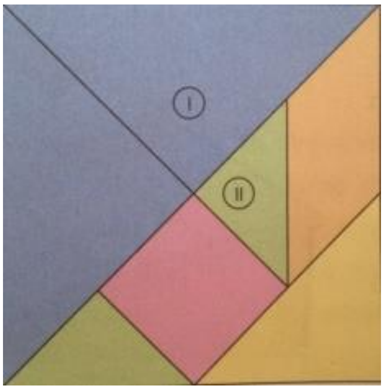
Fonte: Facco (2003, p. 102). Adaptado pelos professores participantes e a pesquisadora (2017).

Tarefa 1: Material entregue aos estudantes
OBS: As peças foram entregues separadas em um envelope



Atividade 2

2) Considere o Tangram:



2.1. Se considerarmos o triângulo grande (I) como uma unidade de área, qual é medida da área do tangram?

2.2. Se considerarmos o triângulo pequeno (II) como uma unidade de área:

a) Qual é a medida da área do triângulo grande?

b) Qual é a medida da área do quadrado pequeno?

c) Qual é a medida da área do paralelogramo?

d) qual é a medida da área do triângulo médio?

e) Qual é a medida da área do tangram?

Fonte: (Dante, 2013). Adaptado pelos professores participantes e pesquisadora(2017)

Bom trabalho!

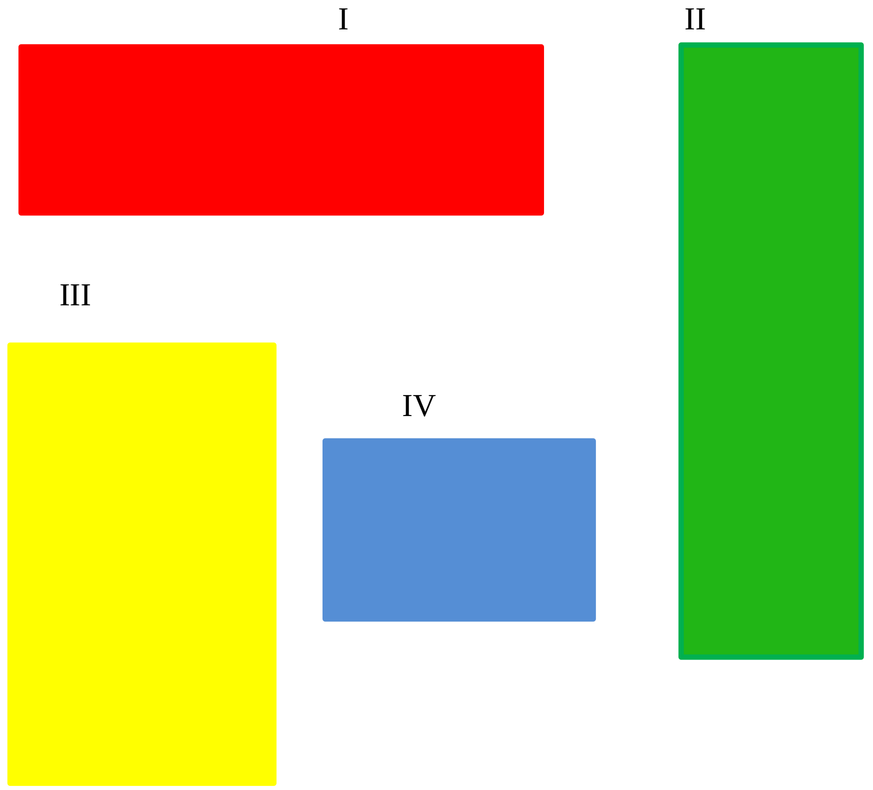
Escola:____
Série/ Ano:______________ Município:___________________ UF _______________
Aluno 1 (a): ____
Aluno 2 (a): ____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

PARTE II

Atividade 3

3.1.) Utilize a régua, meça os lados dos retângulos abaixo e calcule a medida da área de cada figura:



Responda:

a) Qual deles possui a maior medida de área?

b) Qual deles possui a menor medida de área?

c) Quais deles possuem medidas de áreas iguais?

d) Qual a medida do comprimento de cada figura?

3.2.) Desenhe figuras com a mesma medida de área de cada figura acima.

Fonte: Desenvolvido pelos professores participantes e pesquisadora (2017)

Bom trabalho!

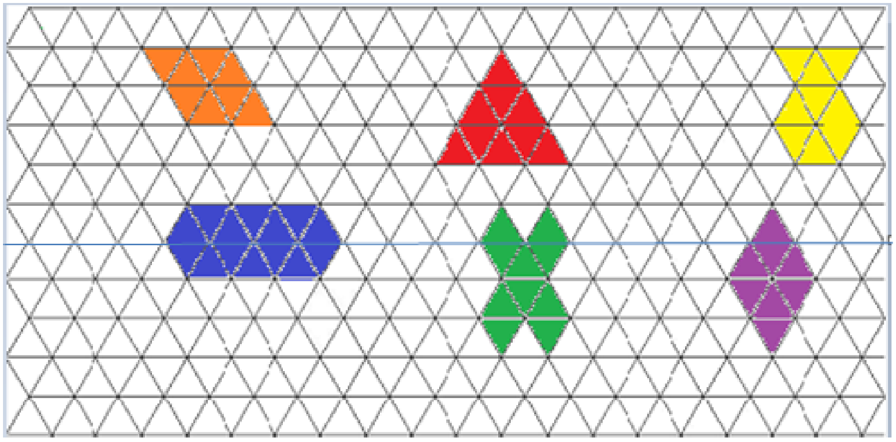
Escola:____
Série/ Ano:________________ Município:______________________ UF _________________
Aluno1 (a): ____
Aluno 2 (a): ____

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

PARTE III

Atividade 4

4) Calcule a medida da área de cada figura plana, considerando cada triângulo pequeno como uma unidade de medida de área.



A seguir, preencha a tabela:

Figuras	Figura laranja	Figura vermelha	Figura amarela	Figura azul	Figura verde	Figura roxa
Medidas de Área da figura						

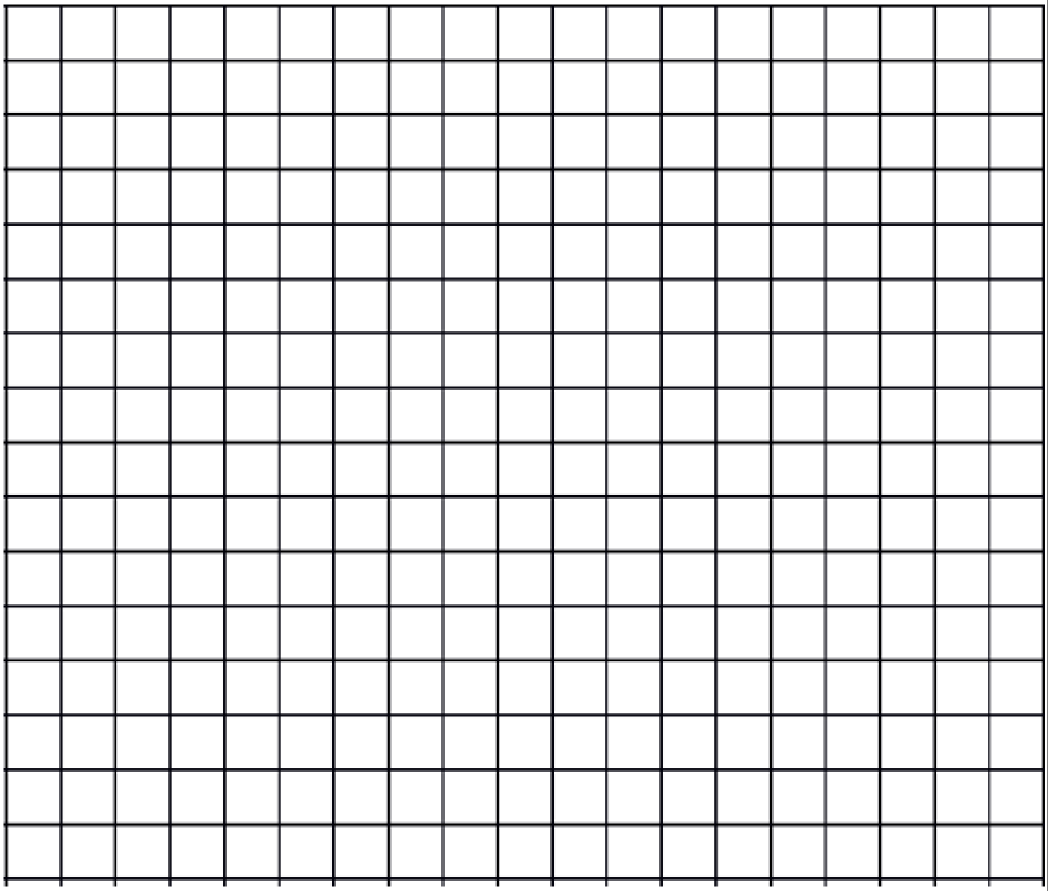
a) Explique como você fez para resolver a tarefa?

Fonte: Desenvolvido pelos professores participantes e a pesquisadora (2017)

Atividade 5

5) Na malha quadrangular, considere cada quadrinho como uma unidade de área, e para cada item, desenhe três figuras obedecendo as seguintes condições:

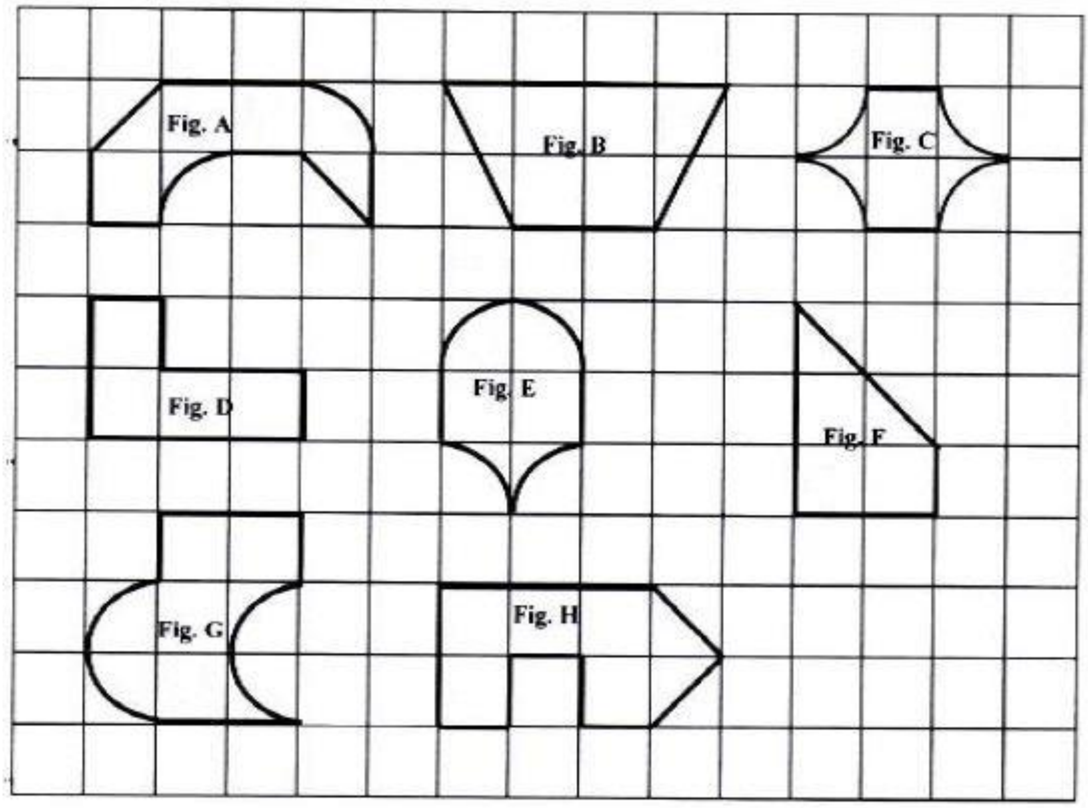
a) Formas diferentes e mesma medida de área;
b) Formas iguais e medidas de áreas diferentes;
c) Mesma medida de área e perímetros diferentes;
d) Medidas de áreas diferentes e perímetros iguais.



Fonte: professores participantes da pesquisa

Atividade 6

6) Observe as figuras na malha e considere cada quadradinho como uma unidade de área:



Responda:

a) Qual a medida da área de cada figura?
b) Entre os desenhos, tem figuras de mesma medida da área? Quais são elas?
c) Explique como você fez para responder as perguntas?

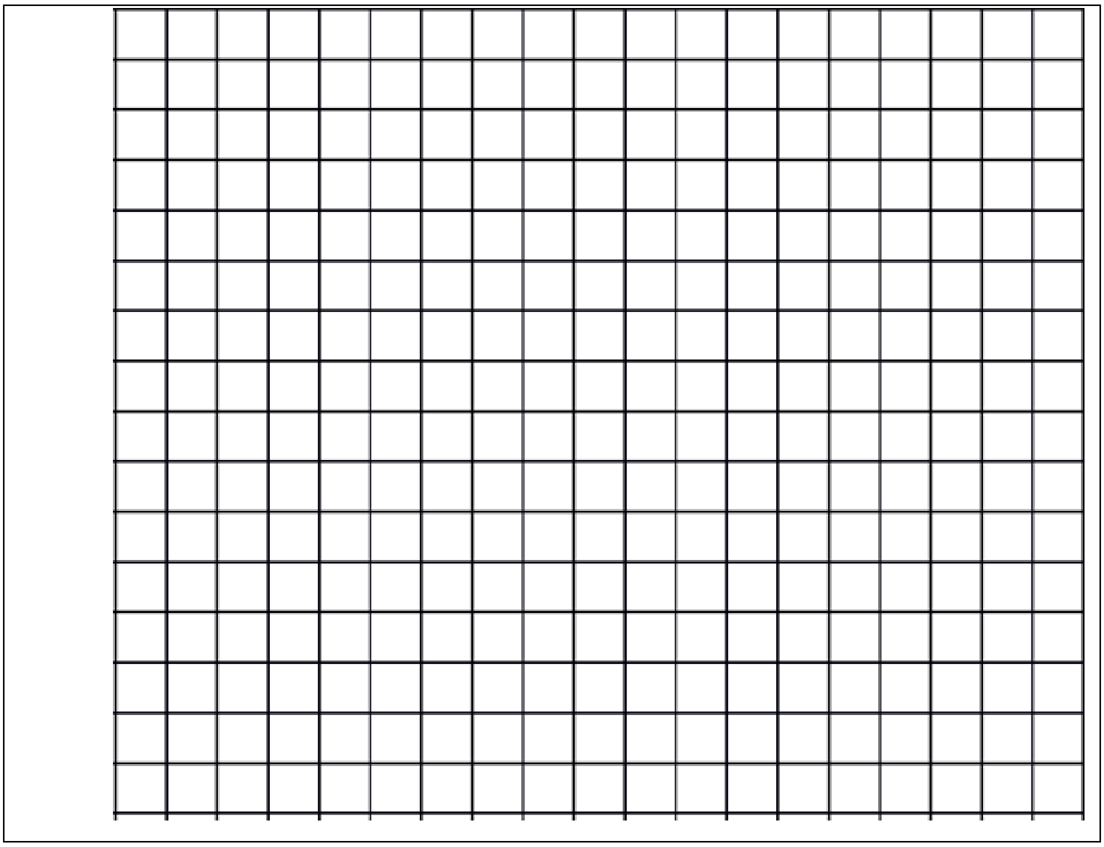
Fonte: (Ferreira, 2010, p. 82). Adaptado pelos professores e pesquisadora (2017)

Atividade 7

7) Desenhe na malha quadrangular, quatro figuras geométricas planas obedecendo as seguintes condições:

a) A figura I possui maior quantidade de papel que as figuras II e III.
b) A figura II possui maior quantidade de papel que a figura III.
c) A figura III possui a mesma quantidade de papel que a figura IV.
d) Qual a medida da área das figuras I, II, III, e IV? Qual(is) dessas figuras são maiores, menores, ou iguais entre si?

Justifique sua resposta.



Fonte: Professores participantes da pesquisa

Atividade 8

8) Na malha abaixo, considere cada quadrinho como uma unidade de área.

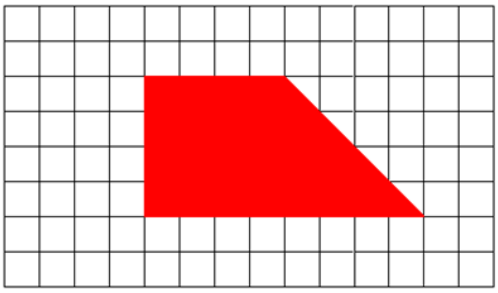


Figura 1

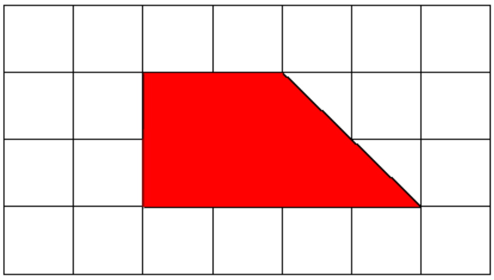


Figura 2

Se as figuras utilizam o mesmo espaço:

a) Qual a medida da área da figura 1?
b) Qual a medida da área da figura 2?
c) Explique como você fez para responder essa tarefa.
d) Que conclusão você pode tirar observando a figura 1 e 2?

Fonte: Professores participantes e a pesquisadora (2017)

Bom trabalho!