Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O Uso das Recorrências e do Raciocínio Recursivo no Ensino Médio

Fábio Lima Pinto

Salvador - Bahia
Julho de 2015

O Uso das Recorrências e do Raciocínio Recursivo no Ensino Médio

Fábio Lima Pinto

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva.

Salvador - Bahia
Julho de 2015

P659 Pinto, Fábio Lima.
O uso das recorrências e do raciocínio recursivo no Ensino Médio / Fábio Lima Pinto. 2015.
63 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2015.

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. II. Silva, Rita de Cássia de Jesus. III. Título.

CDU: 510

O Uso das Recorrências e do Raciocínio Recursivo no Ensino Médio

Fábio Lima Pinto

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva (Orientadora)
UFBA

Prof. Dr. Juan Andres Gonzalez Marin
UFBA

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes
UFBA

A Deus,à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força nos momentos mais difíceis e ter me ajudado a nunca desistir deste sonho de me tornar Mestre em Matemática, à minha "Rainha" Nossa Senhora Aparecida por estar sempre ao meu lado nos momentos de maiores dificuldades, à minha esposa Tatiane e minha filha Laura por suportarem minha ausência e sempre me apoiarem em todas as situações, aos meus pais meu "Porto Seguro", pois sem eles eu não seria nada, à "rapaziada" da turma 2013 do PROFMAT(UFBA), aos meus amigos, aos professores do profmat e à minha orientadora Professora Rita pelas dicas, paciência e apoio que sempre me passou.

"A tarefa essencial do professor é despertar a alegria de trabalhar e de conhecer".
Albert Einsten

Resumo

A aplicação das recorrências matemáticas e do raciocínio recursivo são dois grandes aliados na resolução de problemas nas mais diversas áreas da Matemática, principalmente na Matemática vista no dia a dia.

Neste trabalho, além de abordar a aplicação do raciocínio recursivo na resolução de problemas, será trabalhado também a resolução de recorrências de primeira e segunda ordens e suas aplicações nas sequências e na Matemática financeira.

A minha expectativa é que este trabalho seja um grande motivador para que esta parte tão instigante da Matemática (o raciocínio recursivo), possa ser incluída nos conteúdos do ensino médio.

Palavras chaves:Recorrência, Raciocínio Recursivo.

Abstract

The application of the mathematical recurrences and recursive reasoning are two great allies in solving problems in various areas of mathematics, particularly in Math vista on a daily basis.

In this work, in addition to addressing the application of recursive reasoning in problem solving, will be also worked solving recurrences of first and second orders and their applications in sequences and in financial mathematics.

My expectation is that this work is a great motivator for this part so thought-provoking of Mathematics (recursive reasoning), can be included in the contents of the high school.

Key words: Recurrence, Recursive Reasoning.

Sumário

Introdução

Às vezes é difícil definir um objeto explicitamente. Entretanto, pode ser mais fácil defini-lo em termos dele próprio. Esse processo é chamado de recursão. Por exemplo, a Figura 1, é produzida recursivamente. Primeiro, é dada uma ilustração. Então, é realizado um processo de sobreposição de sucessivas centralizações de fotos menores sobre a ilustração anterior.

Figura 1: Imagem recursiva.
Fonte: http://www.estatisticacomr.uff.br/wp-content/uploads/2015/05/recursao.jpg

Outro exemplo de recorrências são os Fractais, que são figuras geométricas produzidas por meio de equações matemáticas que podem ser interpretadas como formas e cores por programas de computador. Sua principal característica é a autossimilaridade. "Eles contêm, dentro de si, cópias menores deles mesmos. Essas cópias, por sua vez, contêm cópias ainda menores, e assim sucessivamente". Na Figura 2 temos exemplo de um fractal baseado em circunferências.

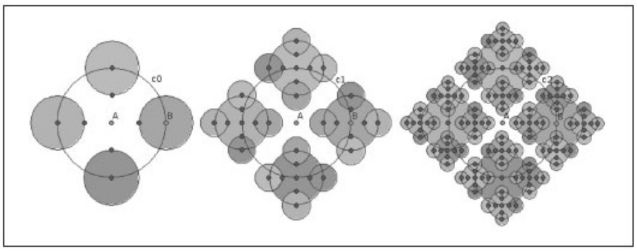

Figura 2: Exemplo de fractal gerado no programa iGeon.
Fonte: http://www.scielo.br/img/revistas/bolema/v27n45/a09fig06.jpg

É importante saber como lidar com essas relações de recorrência, já que são muito comuns.

A Recursividade faz parte do nosso quotidiano, tão naturalmente, que quase não damos por ela.

Quando vamos subir uma escada, tomamos, sem pensar, as seguintes ações:

1- Ao atingir o topo das escadas, a tarefa de subir está terminada;

2- Enquanto o topo não for atingido, avançar um degrau, retomando a tarefa de subir as escadas, mas agora, tendo já avançado um dos degraus, a dimensão do problema aparece mais reduzida, ou seja, o nosso problema é reduzido de a_n para a_{n-1}.

Identifica-se a recursividade nestas ações quando, uma delas, retoma ou chama a tarefa inicial (subir as escadas). A garantia que a tarefa termina resulta de:

1- Na chamada seguinte o problema que se pretende resolver deve apresentar-se mais reduzido (já se subiu um degrau);

2- Deve existir uma condição de terminação (já se atingiu o cimo das escadas).

Em [12], são mostradas outras situações práticas, vividas no dia a dia, envolvendo as recorrências.

Na Matemática, podemos encontrar a ideia de recursividade em diversos conteúdos. O cálculo dos fatoriais é uma representação clara da aparição das recorrências.

$$\begin{gathered} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 2.1 \\ 3! = 3.2! \\ \vdots \\ n! = n(n-1)!, \text{ com } n > 0 \end{gathered}$$

Não podemos esquecer também das sequências, por sinal estas serão exploradas um pouco mais adiante.

Uma dessas sequências que estudaremos posteriormente é a de Fibonacci, onde a partir do terceiro termo, os termos são obtidos através da soma dos dois anteriores imediatos. Este tipo de recorrência é muito utilizada na resolução de problemas, como será vista no capítulo 3.

$$\begin{gathered} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ com } n > 1 \end{gathered}$$

Uma das aplicações mais importantes das recorrências na Matemática apareceu no final do século XVII, quando Giussepe Peano[1] fez a constatação de que se poderia elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de três fatos básicos, conhecidos atualmente como os axiomas de Peano. Noutras palavras, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui três propriedades fundamentais, das quais resultam, como consequências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números.

[1] Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 – 20 de abril de 1932) foi um matemático italiano. Autor de mais de 200 livros e artigos, ele foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, para as quais ele também contribuiu bastante da notação. A axiomatização padrão dos números naturais é chamada de axiomas de Peano, em sua homenagem. Como parte desse esforço, ele fez contribuições fundamentais para o tratamento rigoroso e sistemático moderno do método da indução matemática. Ele passou a maior parte da sua carreira ensinando matemática na Universidade de Turim.

Axiomas de Peano: São dados, como objetos não-definidos, um conjunto, que se designa pela letra $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o numero natural $s(n)$ é chamado o sucessor de n. A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

(I) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva, ou seja, se $s(m) = s(n)$, então $m = n$.

(II) $n \longrightarrow s(n)$ consiste de um único elemento, ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de outro número natural. Este número, chamado um, é representado pelo símbolo 1.

Assim, $s(n) \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se $n \neq 1$, existe um único $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(m) = n$.
(III) (Princípio de Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O Princípio da Indução é uma das principais ferramentas utilizada nas demonstrações matemáticas.

Mais informações sobre os Axiomas de Peano e as demonstrações por indução, poderão ser encontradas em [13].

Muitos algoritmos baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios, considerados difíceis à primeira vista, podem ser resolvidos de uma maneira mais prática e simples quando escritos na forma de recorrência. Estas, como veremos posteriormente, geralmente são dadas por um conjunto de equações contendo um valor inicial e outra equação para o valor geral em termos dos anteriores. Isso significa que, se quisermos saber o n-ésimo termo de uma sequência dada por uma relação recorrente, teremos que calcular os $n - 1$ termos anteriores, o que, na prática, não é nada interessante, especialmente para n grande. Então, o mais natural é que encontremos uma forma fechada para a relação de recorrência, ou seja, uma solução que não dependa dos termos anteriores, mas somente do valor de n. A procura dessa forma fechada é chamada de resolução da recorrência e será abordada posteriormente.

Este trabalho está subdivido em 5 capítulos. No primeiro capítulo falaremos um pouco da história das recorrências, começando com uma breve história das sequências matemáticas, em particular as progressões aritméticas e geométricas, posteriormente será apresentado um resumo sobre o surgimento dos fractais, e finalizaremos relatando a história do número de ouro e sua aparição nas mais diversas áreas, em especial na sequência de Fibonacci.

No segundo capítulo partiremos para a definições de recorrências, segundo [1], [3] e [6]. Iremos tratar apenas das resoluções das recorrências de 1ª e 2ª ordens(mais abordadas no ensino médio) tendo em vista que as de 3ª ordem ou superiores são mais difícies de encontrar suas raízes, consequêntemente pouco aparecem nos problemas aboradados na educação básica. Para estas resoluções serão abordadas as mais diversas técnicas que nos possibilitem escrever uma recorrência em função de n. Um dos objetivos desde capítulo, é mostrar o quanto é simples resolver uma recorrência, podendo tranquilamente aplicar essas técnicas de resolução no Ensino Básico. Serão abordados alguns teoremas encontrados em[3], bastante simples de se demonstrar.

No terceiro capítulo, serão apresentados alguns conteúdos aplicados no Ensino Básico que podem ser definidos recursivamente. Iremos demonstrar algumas fórmulas vistas nas progressões aritméticas e geométricas utilizando o raciocínio recursivo, também abordaremos a Sequência de Fibonacci, aplicando a ideia desta sequência na resolução de problemas. Este capítulo será finalizado com a aplicação do raciocínio recursivo na Matemática Financeira, iremos demonstrar as fórmulas dos juros simples e compostos utilizando recorrências.

O quarto capítulo será destinado a aplicação das recorrências na resolução dos mais diversos tipos de problemas. Vale resaltar que a resolução de problemas, é uma parte da Matemática, onde os alunos do Ensino Básico apresentam maiores dificuldades, visto que a maioria dos professores se preocupam mais em trabalhar com resoluções mecânicas ao invés de propor problemas e desafios. Em um relato do Professor Elon Lages Lima ele diz o seguinte:

> *"O ensino da Matemática na educação básica brasileira deve fazer com que os estudantes pensem mais para resolver problemas matemáticos, ao invés de simplesmente resolverem exercícios de forma mecânica."*

Neste capítulo iremos trabalhar com vários tipos de problemas, retirados de: [3], [5], [7], [8], [9] e [19], onde serão abordandos os mais diversos conteúdos do Ensino Médio, mostrando assim, como as recorrências podem ser aplicadas nas mais variadas áreas da Matemática. Um destaque deste capítulo é a resolução do Problema 4.15, onde será confrontada a resolução deste de duas maneiras distitas: uma sem usar o raciocínio recursivo, e a outra utilizando o raciocínio recursivo. Uma pequena observação é que nos problemas foram listados os conteúdos e a série na qual estes podem ser aplicados.

No capítulo 5 estão as considerações finais, onde serão expostas as conclusões sobre o trabalho.

Capítulo 1

Um Pouco de História

Neste capítulo pretendemos explicitar aspectos históricos de conteúdos matemáticos, onde podemos utilizar aplicações relacionadas ao raciocínio recursivo.

1.1 Breve História das Sequências

Segundo [10], as progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5 000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento.

Eles observaram que o rio subia logo depois que a Estrela Sírius[1] se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos Deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys.

Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto a tableta Plimpton 322, 1900 a 1600 a.C.(Figura 1.1). Numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$ é achada.

Figura 1.1: Tableta de Plimpton 322.
Fonte: http://static01.nyt.com/images/2010/11/27/arts/TABLET/TABLET-popup.jpg

[1]Sírio é a estrela mais brilhante no céu noturno. Pode ser vista a partir de qualquer ponto na Terra, sendo que, no Hemisfério Norte faz parte do Hexágono do Inverno.

Em um papiro que data de 1950 a.C. podemos encontrar alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esse papiro foi encontrado em Kahun[2] e contém o seguinte problema:

"Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : \frac{3}{4}$*".*

Presume-se que se deve a Pitágoras[3] e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

1.2 O Surgimento dos Fractais

No final do século XIX, Georg Cantor[4], pegou num segmento de reta e dividi-o em 3 partes iguais. Em seguida, retirou a parte central, obtendo dois segmentos de reta mais curtos. Usando repetidamente este processo, obteve algo como ilustra a Figura 1.2:

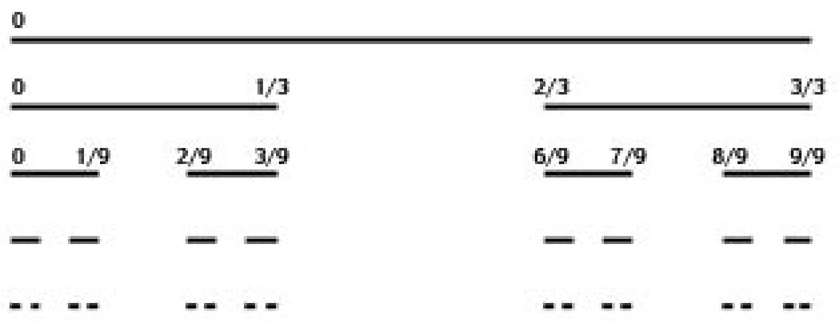

Figura 1.2: Construção do conjunto de Cantor.
Fonte: http://www.cyberalley.com/G-Home/R&D/R&D5/Cantor.jpg

Cantor reparou que se fizesse este processo um número infinito de vezes, iria obter um número infinito de segmentos de reta com um número infinito de espaços entre eles, concluindo que este conjunto é superior ao infinito. Mais tarde, por volta 1872, ele criou a Teoria dos Conjuntos, onde provou que existem diferentes tipos de infinitos usando a cardinalidade dos conjuntos.

Em 1904, Von Koch [5] usou a ideia do conjunto de Cantor, mas em vez de retirar um terço do segmento de reta, decidiu adicioná-lo. Ao fazer esta particularidade começou

[2] A cidade de Kahun foi construída durante o Reino Médio por ordem do faraó Senusret II para abrigar os artesãos responsáveis pela construção de sua pirâmide e os sacerdotes que estavam a serviço de seu culto funerário.Estava localizada no antigo Egito

[3] Pitágoras foi um importante matemático e filósofo grego. Nasceu no ano de 570 a.C na ilha de Samos, na região da Ásia Menor (Magna Grécia). Provavelmente, morreu em 497 ou 496 a.C em Metaponto (região sul da Itália)

[4] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 3 de março de 1845 — Halle, 6 de janeiro de 1918) foi um matemático russo nascido no Império Russo.

[5] Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 25 de janeiro de 1870 - Estocolmo, 11 de março de 1924) foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o "floco de neve Koch", que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito.

num triângulo obtendo o famoso floco de Neve. A seguir, na Figura 1.3, veremos este exemplo de recorrência geométrica.

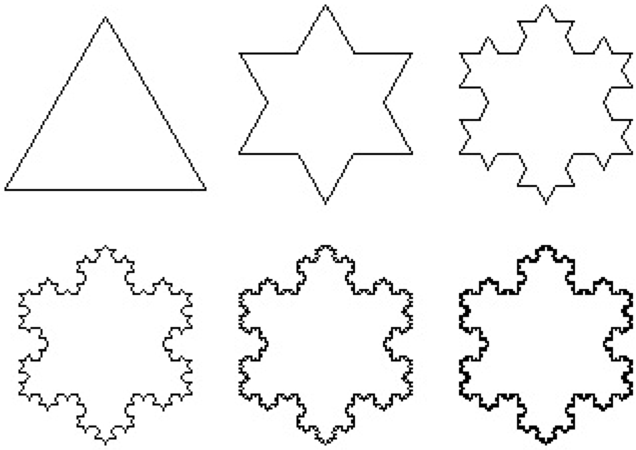

Figura 1.3: Floco de neve de Koch.
Fonte: http://www.ceticismoaberto.com/wp-content/uploads/imagens4/fractalkoch.gif

Benoit Mandelbrot[6], em 1975, usando a ideia Cantor e de muitos outros matemáticos, criou a Teoria dos Fractais. Existem várias definições para os fractais. A mais usual, encontrada em [20], evoca um processo de recorrência e é definida da seguinte forma: um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes à original.

Benoit também mostrou que existem fractais na natureza. Na Figura 1.4 são retratados 4 exemplos destes fractais :

Figura 1.4: Fractais na natureza.
Fonte: http://2.bp.blogspot.com/-D0GkbNTm-Dw/UaDvBghBb4I/AAAAAAAAheY/dgwRGMpYzSA/s640/Imagem22.jpg

Apesar dos fractais terem sido descobertos apenas no final do século XIX, eles já eram utilizados há bastante tempo no continente africano.

[6]Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia, 20 de novembro de 1924 — Cambridge, 14 de outubro de 2010)[2] foi um matemático francês de origem judaico-polonesa. É conhecido principalmente por suas contribuições no campo da geometria fractal, tendo o termo "fractal"sido por ele cunhado em 1975.

A seguir temos 2 exemplos do uso dos fractais na antiga África.

***Exemplo* 1.2.1.**

Os fractais eram usados na confecção de diversos apetrechos, tais como: os símbolos religiosos, na decoração de tapetes, objetos de decoração, dentre outros, como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.5: Missanga africana.
Fonte: [15]

***Exemplo* 1.2.2.**

Numa aldeia africana, com milhares de anos, atualmente localizada no distrito de Zâmbia, as casas eram construídas em círculos dentro de círculos. Curiosamente o círculo tem uma pequena entrada, as casas mais próximas da entrada são pequenas e à medida que nos afastamos da entrada, o tamanho das casas aumenta. A casa mais afastada seria a do membro mais importante ou mais rico. Este círculo estaria dentro de outro com uma entrada, tal como indicam as Figuras 1.6 e 1.7:

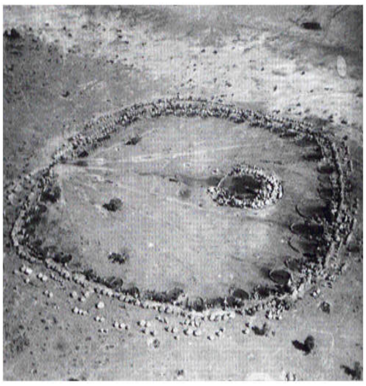

Figura 1.6: Vista aérea das casas de Bal-la.
Fonte: [15]

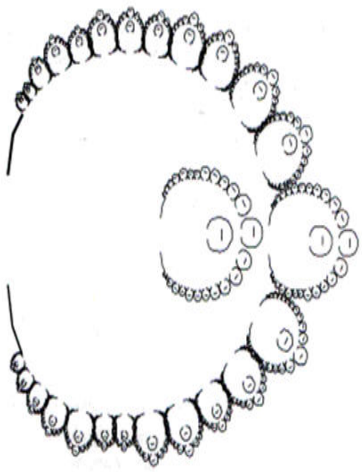

Figura 1.7: Esquena das casas.
Fonte: [15]

1.2.1 O Triângulo de Sierpinski

De acordo com [17], o Triângulo de Sierpinski, também chamado de Junta de Sierpinski, é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades, tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais; ter área igual a zero; ser auto-semelhante (uma sua parte é idêntica ao todo); não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

Foi primeiramente descrito em 1915 por Waclaw Sierpinski.[7].

A Construção do Triângulo de Sierpinski

Uma das maneiras de se obter um triângulo de Sierpinski é através do seguinte algoritmo:

1- Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, Figura 1.8, mas qualquer triângulo pode ser usado.

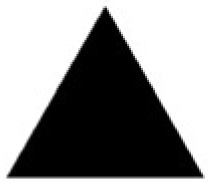

Figura 1.8: 1ªEtapa da construção do Triângulo de Sierpinski
Fonte: http://yurii.ru/ref7/images/image004-404.gif

2- Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três copias, e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto. A Figura 1.9 mostra exatamente este processo.

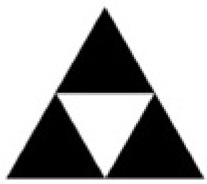

Figura 1.9: 2ªEtapa da construção do Triângulo de Sierpinski
Fonte: http://yurii.ru/ref7/images/image004-404.gif

3- Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente. Ver Figura 1.10.

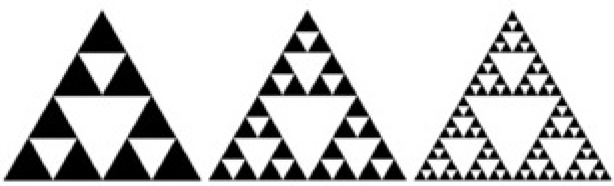

Figura 1.10: 3ªEtapa da construção do Triângulo de Sierpinski
Fonte: http://yurii.ru/ref7/images/image004-404.gif

[7]Matemático polonês nasceu em Varsóvia no ano de 1882 e faleceu na mesma cidade em 1969, participou da Universidade de Varsóvia no ano de 1899

1.3 História do número do ouro

O número de ouro é o número irracional mais misterioso e enigmático, que nos surge em diversos elementos da natureza, na música, na arte e nas grandes construções feita pelo homem.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$$

Seu símbolo é em homenagem ao escultor e arquiteto Fídias.

O número de ouro está na natureza em diversas coisas, uma delas foi a reprodução de coelhos estudada por Fibonacci, pois na sequência temos uma razão entre um número e o que o antecede que vão se aproximando do número de ouro. Esta demonstração pode ser encontrada em [14].

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Temos na arte a contribuição de Leonardo da Vinci, que utilizou em várias de suas obras o número de ouro, uma delas é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscrito em uma circunferência(Figura 1.11).

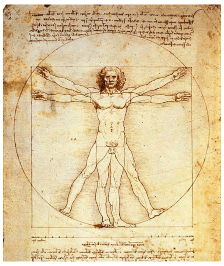

Figura 1.11: Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci.
Fonte: http://www.desenhoonline.com/site/wp-content/uploads/Homem-Vitruviano-Leonardo-da-Vinci.jpg

Nas grandes construções temos as pirâmides de Gizé no Egito(Figura 1.12), a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro.

Figura 1.12: Pirâmide de Gizé.
Fonte: http://www.historiadomundo.com.br/upload/Gize%20-%20HISTORIA%20DO%20MUNDO.jpg

Na música temos a construção dos instrumentos, que em diversos momentos utilizam o número de ouro.

Temos assim o número de ouro como um enigma a ser desvendado.

Capítulo 2

Recorrência Matemática

Neste capítulo será apresentado um estudo dirigido para a resolução de recorrências de primeira e segunda ordens.

2.1 Sequências

Iniciaremos este subcapítulo expressando a definição de uma sequência segundo [2]

Definição 2.1.1. Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $f : N \longrightarrow R$, que associa a cada número natural n um número real $f(n)$.

O valor da sequência f no número natural n é denominado n-ésimo termo ou termo geral da sequência f e é representado genericamente por a_n, b_n, x_n, etc. Por simplicidade, faremos referência ao termo geral a_n como sendo a sequência f, tal que, $f(n) = a_n$. Assim, uma sequência nada mais é do que uma lista ordenada infinita de n números reais

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

em que a_1 é o primeiro termo e a_n é o n-ésimo termo ou termo de ordem n. Em se tratando de uma lista infinita cada termo a_n tem um sucessor a_{n+1} e uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral ou explicitando-se seus primeiros termos.

2.2 Recorrências

Neste tópico serão apresentadas definicões, encontradas em [1], das recorrências e das recorrências lineares, definições estas, de extrema importância para a continuidade deste trabalho.

Definição 2.2.1. Uma relação de recorrência ou, como também é chamada, uma equação de recorrência, é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função do(s) termo(s) anterior(es).

Definição 2.2.2. Para que uma sequência seja completamente definida por uma relação de recorrência, é necessário que sejam informados também os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos.

Definição 2.2.3. Temos que uma relação de recorrência é linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é do 1º grau.

As recorrências lineares são da forma

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + ... + c_0 a_n = 0.$$

2.3 Recorrências lineares de primeira ordem

A seguir veremos duas definições que se encontram em [6], a 1ª de uma recorrência de primeira ordem e a outra de recorrências homogêneas.

Definição 2.3.1. Uma recorrência é dita de primeira ordem quando o x_{n+1} é expresso em função de um x_n.

***Exemplo* 2.3.1.**

$x_{n+1} = 3x_n + 5$; $x_{n+1} = 8x_n - (n+2)$

Definição 2.3.2. Quando uma recorrência não possuir termos independentes de x_n, ela é chamada de homogênea.

***Exemplo* 2.3.2.**

$x_{n+1} = 4nx_n$; $x_{n+1} = 7^n x_n$

2.3.1 Resolução de recorrências lineares de primeira ordem

A resolução das recorrências lineares de primeira ordem serão subdivididas em 3 tipos, e no final será expresso um caso especial, mostrando quando é possível resolver algumas recorrências do 3º tipo de uma maneira bem prática e rápida.

1º Tipo: Homogêneas $\quad a_{n+1} = f(n)a_n$

Para resolver estas recorrências será utilizado o método dos produtos telescópicos.

$$\begin{array}{c} a_2 = f(1)a_1 \\ a_3 = f(2)a_2 \\ a_4 = f(3)a_3 \\ \vdots \\ a_n = f(n-1)a_{n-1} \end{array}$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n-1} f(j)$$

***Exemplo* 2.3.3.**

Considere a recorrência definida por $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$. Calcule o valor do centésimo termo, ou seja, x_{100}.

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

multiplicando as equações acima, encontramos

$$x_n = (n-1)!x_1.$$

Como $x_1 = 1$ temos que

$$x_n = (n-1)!$$

Com esta fórmula fica fácil calcular qualquer x_n, como foi pedido o centésimo termo, termos que:

$$x_{100} = 99!$$

2º Tipo: Não Homogêneas da forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$

Neste tipo será utilizado o método das somas telescópicas.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + f(1) \\ a_3 &= a_2 + f(2) \\ a_4 &= a_3 + f(3) \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

Somando as igualdades ficamos com:

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$

***Exemplo* 2.3.4.**

Qual o vigésimo termo da recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, com $x_1 = 1$?

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2^1 \\ x_3 &= x_2 + 2^2 \\ x_4 &= x_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} + 2^{n-2} \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Somando todas as igualdades teremos $x_n = x_1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$

Como $x_1 = 1$ temos que $x_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ (soma dos termos de uma PG)

Logo: $x_n = \dfrac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n – 1$.

Consequentemente o vigésimo termo é $2^{20}–1$.

3º Tipo: Não Homogêneas da forma $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$

Para a resolução deste tipo será preciso recorrer ao Teorema 2.3.1, encontrado em [3], que tem como objetivo transformar a recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ numa do tipo $y_{n+1} = y_n + t(n)$. Observem que a recorrência $y_{n+1} = y_n + t(n)$ é facilmente resolvida utilizando o processo de soma telescópicas.

Teorema 2.3.1. *Se x_n é solução não nula da recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n$, então a substituição $a_n = x_n y_n$, transforma a recorrência $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{g(n)x_n}$.*

Demonstração

Tomando $a_n = x_n y_n$ podemos escrever a equação $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ como $x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$.

Usando $x_{n+1} = g(n)x_n$, pois x_n é solução de $a_{n+1} = g(n)a_n$, iremos transformar a equação $x_{n+1}y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$ em $g(n)x_n y_{n+1} = g(n)x_n y_n + h(n)$.

Dividindo a equação por $g(n)x_n$ obtém-se $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{g(n)x_n}$

***Exemplo* 2.3.5.**

Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + n2^n$.

Utilizando a substituição $x_n = a_n y_n$, onde a_n é uma solução da equação homogênea $a_{n+1} = 2a_n$.

Resolvendo a homogênea $a_{n+1} = 2a_n$.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 2a_2 \\ a_4 &= 2a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades, teremos:

$$a_n = 2^{n-1}a_1$$

Como o objetivo é encontrar uma solução, é mais prático tomar $a_1 = 1$, ficando então com $a_n = 2^{n-1}$.

Substituindo a_n em $x_n = a_n y_n$ será obtida a equação $x_n = 2^{n-1} y_n$.

Agora substituindo $x_n = 2^{n-1} y_n$ na recorrência inicial, encontramos $2^n y_{n+1} = 2(2^{n-1} y_n) + n2^n$

Dividindo a equação $2^n y_{n+1} = 2(2^{n-1} y_n) + n2^n$ por 2^n, em seguida simplificando, iremos obter:

$$y_{n+1} = y_n + n \tag{2.1}$$

Resolvendo (2.1), utilizando o processo visto no 2º tipo, será encontrado $y_n = y_1 + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2}$

Para finalizar basta substituir os valores obtidos em a_n e y_n na equação $x_n = a_n y_n$, assim:

$$x_n = 2^{n-1}\left[y_1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2}\right]$$

Como $x_1 = 1$ encontramos $y_1 = 1$

Simplificando $x_n = 2^{n-1}\left[1 + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2}\right]$ ficamos com $x_n = (n^2 + n)2^{n-2}$ que é a solução da recorrência.

Caso particular do 3º tipo: Não homogênea da forma $x_{n+1} = sx_n + t$, com $s, t \in \mathbb{R}$)

Existe uma maneira mais prática e rápida para resolver esses tipos de recorrências, é fazendo a substituição $a_n = y_n + k$, onde k é uma constante que transforma a recorrência inicial numa homogênea.

Vale ressaltar que todas as recorrências desse "caso particular"podem ser resolvidas utilizando os procedimentos vistos no 3º tipo.

***Exemplo* 2.3.6.**

Resolva a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com $x_1 = 2$.

Vamos utilizar a substituição

$$x_n = y_n + k \tag{2.2}$$

para transformar a recorrência inicial em uma recorrência homogênea.

Substituindo teremos $y_{n+1} + k = 2(y_n + k) + 1 \iff y_{n+1} = 2y_n + k + 1$; para que essa recorrência se torne homogênea basta que o $k = -1$, assim a recorrência passa a ser $y_{n+1} = 2y_n$.

Resolvendo $y_{n+1} = 2y_n$ temos:

$$y_2 = 2y_1$$
$$y_3 = 2y_2$$

$$y_4 = 2y_3$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1} = 2y_{n-2}$$
$$y_n = 2y_{n-1}$$

multiplicando todas as igualdades ficamos com $y_n = 2^{n-1}y_1$

Substituindo em (2.2)
$x_n = 2^{n-1}y_1 + k$, como $k = -1$

$x_n = 2^{n-1}y_1 - 1$, como $x_1 = 2$ teremos:

$2 = 2^0 y_1 - 1$

logo $y_1 = 3$

Finalizando

$x_n = 3.2^{n-1} - 1$

2.4 Recorrências lineares de segunda ordem

Este capítulo será destinado as recorrências lineares de 2ª ordem. Inicialmente apresentaremos sua definição e posteriormente sua resolução.

Definição 2.4.1. De acordo com [6], uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, quando $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Uma recorrência linear de segunda ordem é do tipo: $a_n = h(n)a_{n-1} + g(n)a_{n-2} + f(n)$, onde $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $f(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário será não homogênea.

***Exemplo* 2.4.1.**

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n - 7$ (recorrência linear de 2ª ordem não homogênea)

***Exemplo* 2.4.2.**

$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ (recorrência linear de 2ª ordem homogênea)

2.4.1 Equação Característica e Solução Geral de Uma Recorrência de 2ª Ordem

Neste trabalho abordaremos as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas. Recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, não esquecendo que $q \neq 0$.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $t^2 + pt + q = 0$, chamada equação característica. A nossa suposição preliminar de que o termo $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

Em [3], encontramos o Teorema 2.4.1, que mostra como encontrar a solução geral de uma recorrência de 2ª ordem, cujas raízes da equação característica são distintas.

Teorema 2.4.1. *Se t_1 e t_2 são raízes da equação $t^2 - pt - q = 0$, então $x_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n$ é solução da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$, para quaisquer valores de C_1 e C_2.*

Demonstração

Como $x_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n$ é solução da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$, iremos substituir x_n na recorrência.
Assim:

$$C_1t_1^n + C_2t_2^n - p(C_1t_1^{n-1} + C_2t_2^{n-1}) - q(C_1t_1^{n-2} + C_2t_2^{n-2})$$

Aplicando a distributiva e agrupando os termos semelhantes

$$C_1t_1^{n-2}(t_1^2 - pt_1 - q) + C_2t_2^{n-2}(t_2^2 - pt_2 - q)$$

Como t_1 e t_2 são raízes,por hipótese

$$C_1t_1^{n-2}.0 + C_2t_2^{n-2}.0 = 0$$

Então x_n é solução.

O Teorema a seguir, também retirado de [3], servirá para mostrar que através de um sistema de equações, é possível determinar os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 2.4.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos tentar determinar constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1r_1 + C_2r_2 = y_1 \\ C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Isso é possível pois $r_2 \neq r_1$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Logo $y_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrência para todo n natural.

***Exemplo* 2.4.3.**

Vamos resolver a recorrência de 2ª ordem $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

Primeiro vamos encontrar a sua equação característica, em seguida calcular suas raízes.

A recorrência $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ possui equação característica $t^2 - t - 2 = 0$. Resolvendo esta equação do 2º grau encontraremos como raízes $t_1 = -2$ e $t_2 = 1$.

Pelo Teorema 2.4.1, temos a solução geral

$$a_n = C_1(-2)^n + C_2 1^n$$

Substituindo $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$ na equação $a_n = C_1(-2)^n + C_2 1^n$ iremos obter:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos como raízes

$$C_1 = -\frac{1}{3} \qquad C_2 = \frac{4}{3}$$

Logo a solução da recorrência $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$ é:

$$a_n = -\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{4}{3}1^n$$

Para finalizar a resolução de recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, iremos aplicar o Teorema 2.4.3, que se encontra em [3], para mostrar como encontrarmos a solução geral das recorrências de 2ª ordem quando as raízes da equação característica forem iguais.

Teorema 2.4.3. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Demonstração

Se as raízes são iguais então $r = -\dfrac{p}{2}$.

Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos:

$C_1 r^n(r^2 + pr + q) + C_2 n r^n(r^2 + pr + q) + C_2 r^n r(2r + p) =$

$C_1 r^n.0 + C_2 n r^n.0 + C_2 r^n r.0 = 0$

Logo é solução da recorrência.

Este Teorema mostra que quando as raízes forem iguais a solução da recorrência será do tipo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$, com C_1 e C_2 constantes. Para encontrar os valores desta constantes basta resolver um sistema utilizando dois valores da recorrência.

***Exemplo* 2.4.4.**

Resolva a recorrência $a_{n+2} = 10a_{n+1} - 25a_n$, sabendo que $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

A equação característica de $a_{n+2} = 10a_{n+1} - 25a_n$ é

$$t^2 - 10t + 25 = 0$$

cujas raízes são

$$t_1 = 5 \text{ e } t_2 = 5$$

Logo pelo Teorema 2.4.3, temos que a solução geral é

$$a_n = C_1 5^n + C_2 n 5^n$$

Como $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$, ficamos com o sistema

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 5C_1 + 5C_2 = 2 \end{cases}$$

A solução do sistema é $C_1 = 1$ e $C_2 = -\dfrac{3}{5}$

Assim a solução final é

$$a_n = 5^n - \frac{3}{5} n 5^n$$

Capítulo 3

Conteúdos da Educação Básica Associados ao Raciocínio Recursivo

Neste capítulo serão abordados diversos conteúdos vistos no Ensino Básico que podem ser trabalhados utilizando o raciocínio recursivo. Iremos iniciar com algumas sequências e finalizaremos com a aplicação do raciocínio recursivo na Matemática Financeira.

3.1 Progressões Aritméticas.

As Progressões Aritméticas (PA) constituem-se na família mais simples de sequências definidas recursivamente. Elas são comuns na vida real e sempre aparecem quando se apresentam grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais como, por exemplo, no cálculo de juros simples, ou desvalorização de um bem ao longo do tempo.

Definição 3.1.1. Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma constante $r \neq 0$ ao termo anterior. Essa constante r chama-se razão da progressão aritmética.

Como o termo seguinte é encontrado através do antecessor as progressões aritméticas são recorrências. Assim teremos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando as igualdades ficaremos com

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Assim encontramos a fórmula do termo geral de uma PA.

A seguir, vamos resolver uma questão envolvendo progressão aritimética, utilizando as recorrêcias.

O exemplo a seguir pode ser encontrado em [3].

***Exemplo* 3.1.1.**

Formam-se n triângulos com palitos, conforme a Figura 3.1. Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

Temos como condição inicial $a_1 = 3$

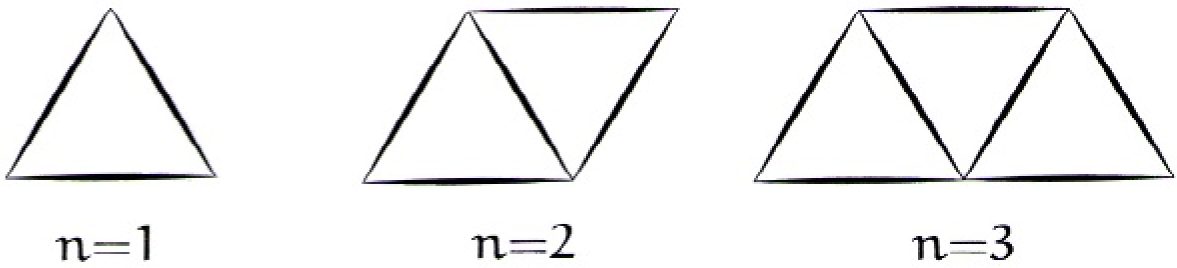

Figura 3.1:
Fonte: [3]

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Somando as equações teremos

$$a_n = a_1 + 2(n-1)$$

Como $a_1 = 3$, ficamos com

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

Assim para construímos n triângulos iremos precisar de

$$a_n = 2n + 1$$

3.2 Progressões Geométricas

Partiremos agora para o estudo das progressões geométricas. Iniciaremos com sua definição, segundo [1], em seguida encontraremos o seu termo geral utilizando o raciocínio recursivo e finalizaremos com um exemplo encontrado em [3].

Definição 3.2.1. Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q, chamada de razão da progressão geométrica.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1.q \\
a_3 &= a_2.q \\
a_4 &= a_3.q \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1}.q
\end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades ficaremos com

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Assim encontramos a fórmula do termo geral de uma PG.

O exemplo a seguir, será resolvido utilizando o raciocínio recursivo.

***Exemplo* 3.2.1.**

Um carro novo custa R$ 18 000,00 e, com 4 anos de uso, vale R$ 12 000,00. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com 1 ano de uso.

Temos que $a_0 = 18000,00$ e $a_4 = 12000,00$
Sabemos que

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0 q \\
a_2 &= a_1 q \\
a_3 &= a_2 q \\
a_4 &= a_3 q
\end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades, teremos

$$a_4 = a_0 q^4$$

Substituindo $a_0 = 18000,00$ e $a_4 = 12000,00$, ficamos com

$$12000 = 18000 q^4$$

logo

$$q = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

Assim

$$a_1 = 18000\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \text{ ou seja, R\$ 16264,84.}$$

3.3 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci[1] tem origem no seguinte problema:

Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, e que os coelhos não morrem. Ao fim de n meses, quantos casais de coelhos estão no pátio?

Vamos observar a Figura 3.2, em seguida, usando recorrência, montar a fórmula que representa o termo geral da sequência de Fibonacci.

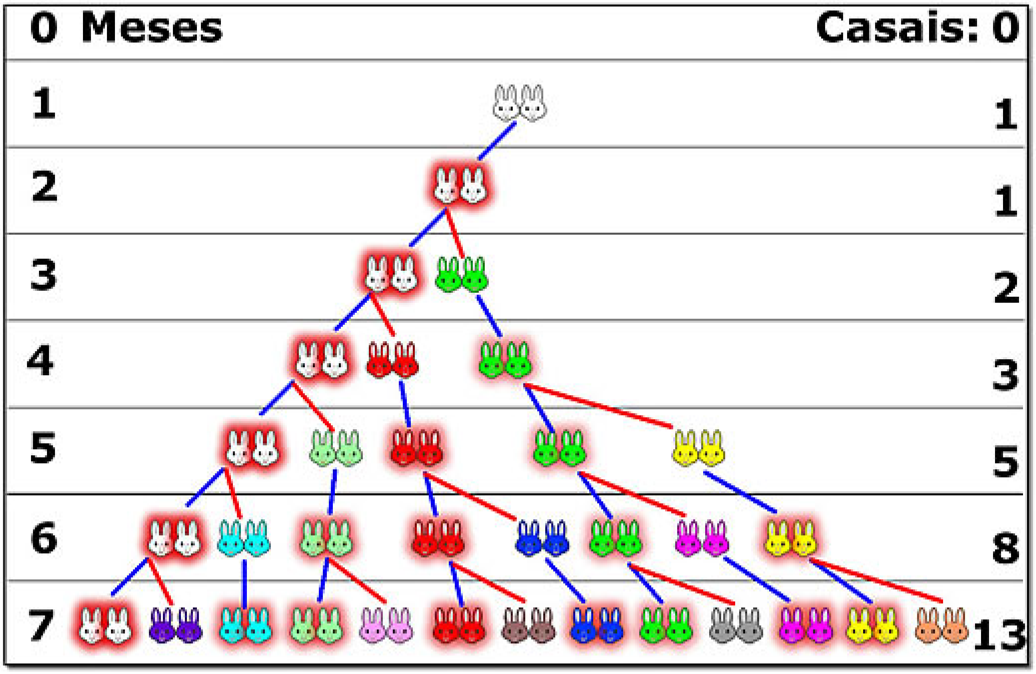

Figura 3.2:
Fonte: http://www.estudofacil.com.br/wp-content/uploads/2015/04/fibonacci-coelhos.jpg

Solução:

Chamando os termos da sequência de $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, temos:

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$ (o casal inicial deu origem ao novo casal)
$a_4 = 3$ (o casal inicial deu origem a 1 novo casal)
$a_5 = 5$ (o casal nascido em a_3 começa a reproduzir)
$a_6 = 8$ (os casais nascidos em a_4 começam a reproduzir)

No fim 6 meses teremos 8 casais

Para escrever o termos geral da sequência, observamos que cada termo a partir do 2º, é a soma de dois anteriores:

[1] *No ocidente, a sequência de Fibonacci apareceu pela primeira vez no livro Liber Abaci (1202) de Leonardo Fibonacci, embora ela já tivesse sido descrita por gregos e indianos*

$a_3 = a_1 + a_2$
$a_4 = a_2 + a_3$
$a_5 = a_3 + a_4$
$a_6 = a_4 + a_5$

$$a_n = \begin{cases} 1 & se \quad n = 1 \\ 1 & se \quad n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} & se \quad n > 2 \end{cases}$$

Agora vamos resolver esta recorrência para que possamos generalizar todas as situações.

1º Passo: Encontrar a equação característica e suas raízes:

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, com $n \geqslant 3$.

A equação característica será $t^2 - t - 1 = 0$

Resolvendo esta equação do 2º grau obtemos como raízes

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2º Passo: A solução geral, com as constantes C_1 e C_2:

Vimos que $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ eram as soluções da equação característica, logo pelo Teorema 2.4.1:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para calcular C_1 e C_2, basta usar os primeiros termos da sequência $F_0 = F_1 = 1$ (Teorema 2.4.2)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \qquad C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Substituindo na solução

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ iremos obter:}$$

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Simplificando encontramos a solução geral da Sequência de Fibonacci, que é:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Este tipo de recorrência facilita muito a resolução de diversos problemas nas mais diversas áreas.

O exemplo abaixo, retirado de [18], envolve análise combinatória e será resolvido utilizando a ideia da Sequência de Fibonacci.

***Exemplo* 3.3.1.**

De quantas maneiras podemos guardar n dominós 2x1 em uma caixa 2xn?

Seja x_n o número de maneiras de distribuir os n dominós na caixa. Vejamos, na Figura 3.3, alguns casos pequenos:

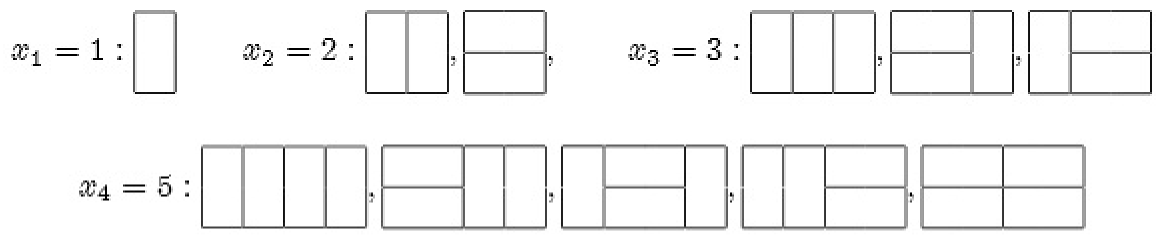

Figura 3.3:
Fonte: [18]

Lembrando que a ideia em recursão, é obter cada valor em função dos anteriores, observe, na Figura 3.4, o que ocorre quando tiramos a última parte do caso n = 4:

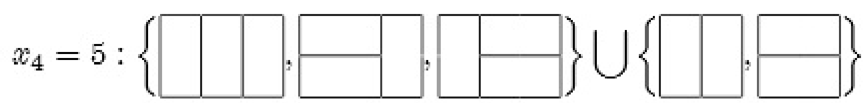

Figura 3.4:
Fonte: [18]

Note que ao tirarmos o "fim"de cada possibilidade, obtemos uma possibilidade menor. Como os "fins"têm tamanho 1 ou 2, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $x_4 = x_3 + x_2$.

É claro que isso pode ser generalizado para

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Vamos agora resolver esta recorrência, e consequentemente, generalizar a solução para a caixa de dominó 2xn.

A equação característica é a mesma da Sequência de Fibonacci.

$$t^2 - t - 1 = 0$$

Como vimos anteriormente as raízes são

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Assim a solução geral será

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ com } c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

O que diferencia este problema da Sequência de Fibonacci são os termos iniciais, que nesse caso são

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

Substituindo esses termos, ficamos com o sistema de equações

$$\begin{cases} c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\[2ex] c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, encontramos

$$c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Assim a solução para caixa de dominó 2xn é

$$x_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad para\ n > 0$$

3.4 Juros Simples

Conforme [4], no regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo capital. Não existe capitalização de juros nesse regime, pois os juros de um determinado período não são incorporados ao capital para que essa soma sirva de base de cálculo dos juros do período seguinte.

Partiremos agora para demonstrar a fórmula para o cálculo dos juros simples utilizando recorrências.

Seja C o capital inicial aplicado a uma taxa i e M o montante final, assim:

$$
\begin{gathered}
M_1 = C + C.i \\
M_2 = M_1 + C.i \\
M_3 = M_2 + C.i \\
M_4 = M_3 + C.i \\
\vdots \\
M_n = M_{n-1} + C.i
\end{gathered}
$$

Somando as igualdades teremos

$$M_n = C + n.C.i$$

***Exemplo* 3.4.1.**

Qual o montante produzido pelo capital de R$ 5 200,00 aplicado a taxa 0,6% ao mês durante 1 ano?

$$M_{12} = 5200 + 12.5200.0,006$$

$$M_{12} = 5574,40$$

3.5 Juros Compostos

De acordo com [4], o regime de juros compostos é o mais comum no dia a dia no sistema financeiro e no cálculo econômico. Neste regime os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação será incorporado a ela, passando a participar da geração do rendimento no período seguinte, dizemos então, que os juros são capitalizados.

A seguir utilizaremos o raciocínio recursivo para mostrarmos a fórmula de cálculo dos juros compostos.

Seja C o capital, M o montante, J o juro e i a taxa,

Assim

$$
\begin{gathered}
M_1 = C + J = C + C.i = C(1+i) \\
M_2 = M_1 + J = M_1 + M_1 i = M_1(1+i) \\
M_3 = M_2 + J = M_2 + M_2 i = M_2(1+i)
\end{gathered}
$$

Logo

$$
\begin{gathered}
M_1 = C(1+i) \\
M_2 = M_1(1+i) \\
M_3 = M_2(1+i) \\
\vdots \\
M_n = M_{n-1}(1+i)
\end{gathered}
$$

Multiplicando as igualdades acima teremos

$$M_n = C(1+i)^n$$

***Exemplo* 3.5.1.**

A juros compostos de 20% ao mês, qual o montante de R$ 3 500,00 em 8 meses?

$$M_8 = 3500(1+0,2)^8$$
$$M_8 = 15049,36$$

Capítulo 4

Problemas Utilizando o Raciocínio Recursivo

O Raciocínio Recursivo e as Recorrências são grandes facilitadores na resolução de problemas no Ensino Médio. Neste capítulo serão listados alguns problemas relativamente "complicados", que quando resolvidos utilizando o raciocínio recursivo e as recorrências ficam bem mais simples.

4.1 Problemas Resolvidos

Problema 4.1

Este primeiro problema, retirado de [5], pode ser resolvido tranquilamente por alunos a partir 7º ano do Ensino Fundamental, pois envolve apenas resolução de equação do 1º grau.

Enunciado

Um problema clássico que já foi recontado em outras versões é o da pessoa que sai às compras e gasta na primeira loja que entra, metade do que tem no bolso e mais um real. Na segunda loja gasta metade do que sobrou e mais um real. Na loja seguinte ocorre o mesmo. Entretanto, ao sair da décima e última loja, a pessoa percebe que não tem dinheiro algum. Quantos reais ela possuía ao sair de casa?

Resolução

Para resolver este problema iremos utilizar o raciocínio recursivo sabendo que $a_{10} = 0$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - 1$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1$$

Basta resolver a recorrência $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1$.

Utilizaremos a substituição $a_n = x_n + k$, para tornar a recorrência homogênea.

$$\begin{aligned} x_{n+1} + k &= \frac{x_n}{2} + \frac{k}{2} - 1 \\ x_{n+1} &= \frac{x_n}{2} - \frac{k}{2} - 1 \end{aligned}$$

Tomando $k = -2$, a recorrência $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - \frac{k}{2} - 1$ torna-se homogênea ficando $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$

Resolvendo $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1}{2} \\ x_3 &= \frac{x_2}{2} \\ x_4 &= \frac{x_3}{2} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{x_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$x_n = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Substituindo x_n na igualdade $a_n = x_n - 2$ temos que $a_n = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$.
Como $a_{10} = 0$ temos que $0 = x_1.\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 2$; logo $x_1 = 1024$ consequentemente
$a_n = 2^{10}.2^{1-n} - 2$

$$a_n = 2^{11-n} - 2$$

Assim $a_1 = 2^{10} - 2 = 1022$

Logo a pessoa possuía 1022 reais quando saiu de casa.

Observação: Após encontrar $a_n = x_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$, podemos resolver este problema para qualquer quantidade de lojas visitadas pela pessoa, bastando apenas calcular o x_1, que irá depender apenas em qual loja o dinheiro acabará.

Problema 4.2

Este problema, que encontra-se em [5], pode ser resolvido por alunos a partir do 8º do Ensino Fundamental, desde que estes já tenham aprendido os conceitos básicos da geometria plana (retas e planos) e tenham uma ideia de sequências.

Enunciado

Qual o número máximo de regiões em que 10 retas podem dividir um plano?

Resolução

Observe se formos fazer o desenho a chance de atrapalharmos e, consequentemente, contarmos o número de divisões erradas é muito grande. Vamos partir então para o raciocínio recursivo.

Com 1 reta é fácil são 2 partes
Com 2 retas são 4 partes
Com 3 retas o máximo são 7 partes
Com 4 retas o máximo são 11 partes

Partiremos agora para o raciocínio recursivo

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 7 \\ a_4 &= 11 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

Resolvendo a recorrência $a_n = a_{n-1} + n$, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

Somando as igualdades

$$a_n = a_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

Como $a_1 = 2$ temos $a_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$, assim

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{(n+1)n}{n} \\ a_n &= \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$

Logo $a_{10} = \dfrac{10^2 + 10 + 2}{2} = 56$ partes

Consequentemente o número máximo de regiões que 10 retas podem dividir o plano são 56.

Observação: Conhecendo a fórmula $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ podemos resolver este problema para qualquer quantidade de retas.

Problema 4.3

Este problema é uma adaptação feita numa questão da OBMEP [9] nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) aplicada no ano de 2014. É um problema que aborda formas geométricas e sequências numéricas.

Enunciado

Começando com um quadrado de $1cm$ de lado, formamos uma sequência de figuras, observe a Figura 4.1. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, $4cm, 8cm, 20cm$ e $56cm$. Quanto mede o contorno da figura n?

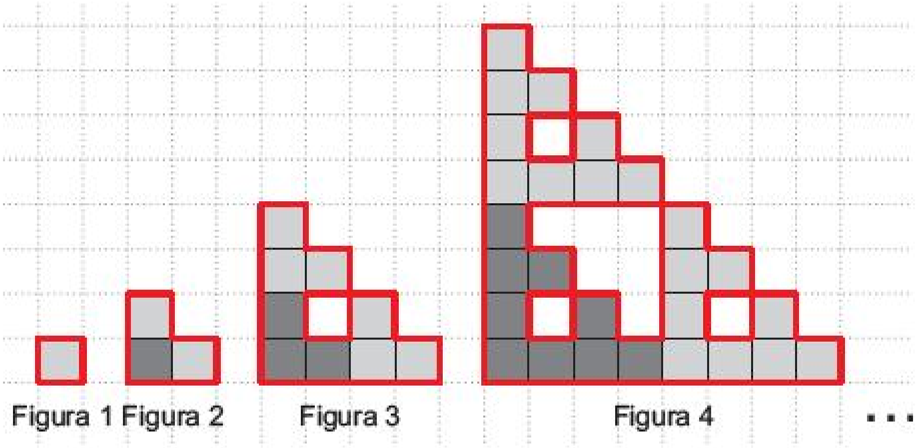

Figura 4.1:
Fonte: [9]

Resolução

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 8 \\ a_3 &= 20 \\ a_4 &= 56 \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= 3a_n - 4 \end{aligned}$$

Basta agora resolver a recorrência $a_{n+1} = 3a_n - 4$

Usaremos a substituição $a_n = x_n + k$, para tornar a recorrência homogênea.

Assim teremos:

$x_{n+1} + k = 3x_n + 3k - 4$
$x_{n+1} = 3x_n + 2k - 4$
Tomaremos $k = 2$ para que a recorrência se torne a homogênea $x_{n+1} = 3x_n$.

Resolvendo esta homogênea

$$x_2 = 3x_1$$

$$x_3 = 3x_2$$
$$x_4 = 3x_3$$
$$\vdots$$
$$x_n = 3x_{n-1}$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$x_n = 3^{n-1}x_1$$

Substituindo x_n em $a_n = x_n + 2$, teremos $a_n = 3^{n-1}x_1 + 2$, como $a_1 = 4$ teremos: $4 = 3^0 x_1 + 2$, logo $x_1 = 2$.

Concluindo

$$a_n = 2.3^{n-1} + 2$$

Problema 4.4

Novamente retiramos um problema de uma avaliação de da OBMEP [9] nível 2(8º e 9º anos do Ensino Fundamental), desta vez o ano foi o de 2012. Este aborda sequências numéricas e equação do 2º grau.

Enunciado

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na Figura 4.2. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

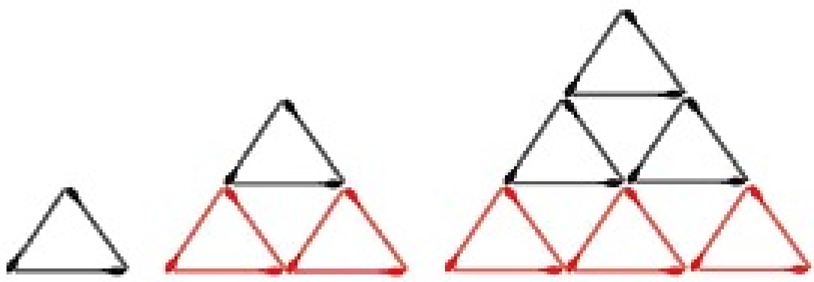

Figura 4.2:
Fonte: [9]

Resolução

Utilizaremos o raciocínio recursivo para esta solução.
Observe que:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 3.2$$
$$a_3 = a_2 + 3.3$$
$$a_4 = a_3 + 3.4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 3n$$

Somando os termos teremos que

$$a_n = 3 + 2.3 + 3.3 + 4.3 + \ldots + n.3$$
$$a_n = 3.(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

ou seja

$$a_n = \frac{3[n(n+1)]}{2}$$
$$a_n = \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

Agora basta substituir o a_n por 135, resolver a equação quadrática e concluir que n = 9.

Observação: Vale ressaltar que com a fórmula $a_n = \dfrac{3n^2 + 3n}{2}$ podemos calcular todas as possibilidades, não apenas a solicitada no problema.

Problema 4.5

O problema a seguir trata-se um antigo problema envolvendo sequências, retirado de [7], que pode ser aplicado a partir de 9ºano do Ensino Fundamental.

Enunciado

A Torre de Hanói[1] É um "quebra-cabeça"que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo, Figura 4.3. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três. Escreva uma função recursiva para determinar o menor número de movimentos para resolver o "quebra-cabeça" da Torre de Hanói.

Resolução

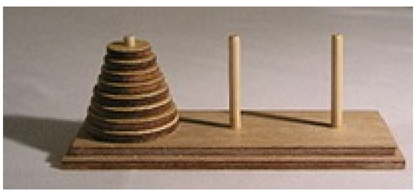

Figura 4.3:
Fonte: https://waldexifba.files.wordpress.com/2011/06/300px-tower_of_hanoi.jpeg

Se por acaso a torre tivesse apenas 1 disco é obvio que apenas um movimento seria suficiente então temos $a_1 = 1$ movimento.

Com 2 discos teremos que fazer 3 movimentos como mostrado na Figura 4.4.

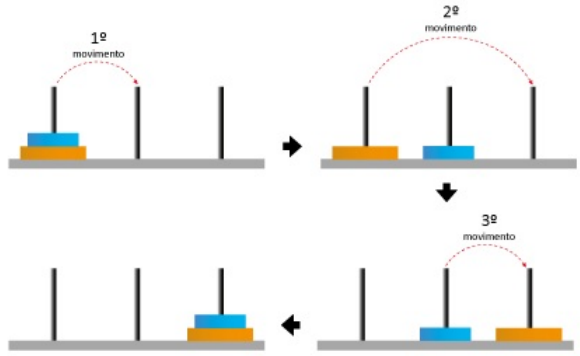

Figura 4.4:
Fonte: http://jogadamais.blogspot.com.br/2013/11/torre-de-hanoi_19.html

Então $a_2 = 3$ movimentos

Com 3 discos teremos que fazer 7 movimentos como mostrado na Figura 4.5.

Então $a_3 = 7$

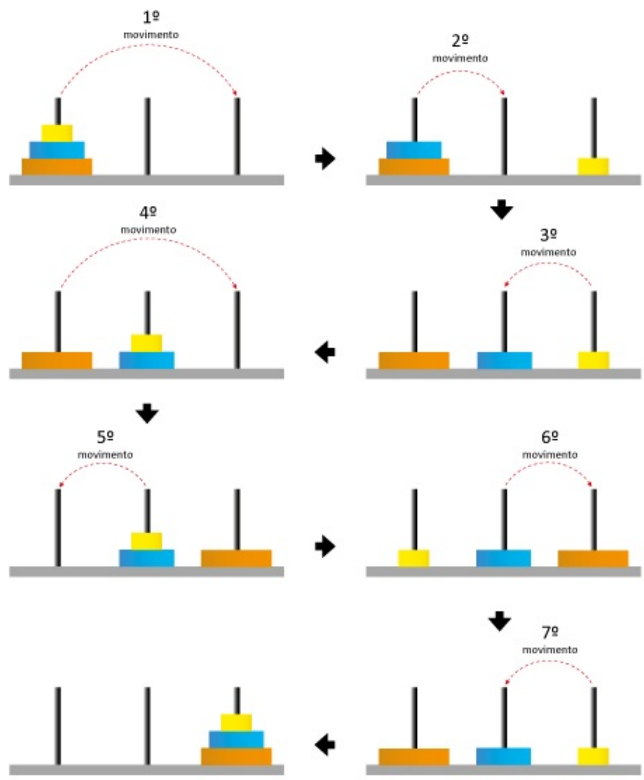

Figura 4.5:
Fonte: http://jogadamais.blogspot.com.br/2013/11/torre-de-hanoi_19.html

Observe que nos 3 primeiros e nos últimos movimentos (para 3 discos) repetimos os movimentos feitos para 2 discos portanto:

$a_3 = 2a_2 + 1$. Com a_2 o mesmo acontece, pois $a_2 = 2a_1 + 1$. Usando este raciocínio teremos:

[1]O nome Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 2a_1 + 1 \\
a_3 &= 2a_2 + 1 \\
a_4 &= 2a_3 + 1 \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= 2a_n + 1
\end{aligned}
$$

Iremos agora resolver a recorrência $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Usando a substituição $a_n = y_n + k$ teremos
$y_{n+1} + k = 2y_n + 2k + 1$
$y_{n+1} = 2y_n + k + 1$. Tomaremos $k = -1$ para que a recorrência se torne homogênea $y_{n+1} = 2y_n$.

Vamos agora resolver esta homogênea.

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 2y_1 \\
y_3 &= 2y_2 \\
y_4 &= 2y_3 \\
&\vdots \\
y_n &= 2y_{n-1}
\end{aligned}
$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$y_n = 2^{n-1}y_1$$

Substituindo $y_n = 2^{n-1}y_1$ em $a_n = y_n - 1$ ficamos com:

$a_n = y_n = 2^{n-1}y_1 - 1$, como $a_1 = 1$, teremos $y_1 = 2$ consequentemente

$$a_n = 2^n - 1$$

Curiosidade sobre a Torre de Hanói:

Segundo publicação de [16], a torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou quebracabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas[2]. O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges.

De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, havia uma placa de bronze sobre a qual estavam fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o Deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo.

Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria.

[2]Um dos maiores matemáticos da história, nasceu em 04 de abril de 1842 em Amiens, França, e morreu em 03 de outubro de 1891, em Paris.
Foi educado na École Normale Supérieure. Trabalhou no Observatório de Paris e posteriormente foi professor de Matemática em escolas e universidades francesas.
Lucas é conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, conhecida como Sequência de Fibonacci.

Problema 4.6

Esta é uma questão do Profmat [8] (disciplina Matemática Discreta, MA 12, ano de 2012), mas pode ser aplicada no Ensino Médio a partir do 1^{o}ano, bastando apenas que os alunos saibam sequências, em particular progressão aritimética.

Enunciado

Considere a sequência a_n com $n \geq 1$ definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 2 + 3\\
&a_3 = 4 + 5 + 6\\
&a_4 = 7 + 8 + 9 + 10\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?
(b) Calcule a_{10}.
(c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Resolução

Chamaremos x_n a recorrência formada pelos primeiros termos e y_n a recorrência formada pelos últimos termos.

Começando com x_n,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1\\
x_2 &= 2\\
x_3 &= 4\\
x_4 &= 7\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x_n = x_{n-1} + n - 1$$

Resolvendo a recorrência $x_n = x_{n-1} + n - 1$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 1\\
x_3 &= x_2 + 2\\
&\vdots\\
x_n &= x_{n-1} + n - 1
\end{aligned}$$

Somando as igualdades

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1$$

Logo

$$x_n = 1 + \frac{(1+n-1)(n-1)}{2}$$
$$x_n = \frac{n^2-n+2}{2}$$

Calculando agora para y_n (últimos termos)

$$\begin{gathered} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 6 \\ y_4 = 10 \\ \vdots \\ y_n = y_{n-1} + n \end{gathered}$$

Resolvendo a recorrência $y_n = y_{n-1} + n$

$$\begin{gathered} y_2 = y_1 + 2 \\ y_3 = y_2 + 3 \\ y_4 = y_3 + 4 \\ \vdots \\ y_n = y_{n-1} + n \end{gathered}$$

Somando as igualdades teremos:

$$y_n = y_1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Como $y_1 = 1$

$$y_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Logo

$$y_n = \frac{(1+n)n}{2}$$
$$y_n = \frac{n^2+n}{2}$$

Como x_n é o primeiro termo, y_n é o último termo e eles formam uma PA de razão 1. O valor de $a_n = \dfrac{(x_n+y_n).n}{2}$
Substituindo x_n e y_n encontramos:

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{n^2-n+2}{2} + \dfrac{n^2+n}{2}\right).n}{2}$$

Simplificando

$$a_n = \frac{n^3+n}{2}$$

Com x_n, y_n e a_n resolvemos tranquilamente as proposições a, b e c.

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

$$x_{10} = \frac{10^2 - 10 + 2}{2} = 46 \text{ e } y_{10} = \frac{10^2 + 10}{2} = 55$$

(b) Calcule a_{10}.

$$a_{10} = \frac{10^3 + 10}{2} = 505$$

(c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

$$a_n = \frac{n^3 + n}{2}$$

Problema 4.7

O problema a seguir que se encontra em [3], requer um aprofundamento no uso das sequências podendo ser aplicados para os alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio

Enunciado

Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?

Resolução

No ano $n+2$ são geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano $n+1$ e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores. Logo, se x_n denota o número de sementes geradas no ano n, temos:

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \ldots + x_1 + x_0) \tag{4.1}$$

Analogamente:

$$x_{n+1} = 21x_n + 44(x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1 + x_0) \tag{4.2}$$

Fazendo (4.1) – (4.2), ficamos com:

$$x_{n+2} = 22x_{n+1} + 23x_n;$$

ou seja,

$$x_{n+2} - 22x_{n+1} - 23x_n = 0$$

A equação característica $r^2 - 22r - 23 = 0$ tem raízes $r_1 = 23$ e $r_2 = -1$, assim a solução geral fica:

$$x_n = C_1 23^n + C_2(-1)^n$$

Observamos que:

$$\begin{cases} a_1 = 21 \\ a_2 = 44.1 + 21.21 = 485 \end{cases}$$

Assim ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} 23C_1 - C_2 = 21 \\ 529C_1 + C_2 = 485 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $C_1 = \dfrac{11}{12}$ e $C_2 = \dfrac{1}{12}$. Assim a solução da recorrência é:

$$x_n = \frac{11}{12}23^n + \frac{1}{12}(-1)^n$$

Problema 4.8

Este problema envolvendo sequências e análise combinatória, foi extraído de [5], pode ser aplicado aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio.

Enunciado

Ao subir a escada de seu prédio, José às vezes sobe dois degraus de uma vez e às vezes sobe um de cada vez. Sabendo que a escada tem 8 degraus, de quantas maneiras diferentes José pode subir a escada? Generalize para o caso de uma escada com n degraus?

Resolução

Chamaremos o total de possibilidades de a_n e iremos subdividir este em duas possibilidades.

1ª Possibilidade: Iniciando subindo 1 degrau.
2ª Possibilidade: Iniciando subindo 2 degraus.

Começaremos calculando as condições iniciais. Vamos considerar $a_0 = 1$ (supondo que se não tiver nenhum degrau, Olavo terá a possibilidade de não se deslocar, pois este ja estar no topo da escada) e $a_1 = 1$ (se tiver apenas 1 degrau ele só terá uma possibilidade de subir este degrau).

1ª Possibilidade: Iniciando com 1 degrau.

Se ele começar subindo 1 degrau restará a_{n-1} possibilidades para subir.

2ª Possibilidade: Iniciando subindo 2 degraus.

Se ele começar subindo 2 degraus restará a_{n-2} possibilidades para subir.

Logo o total de possibilidades a_n será:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Esta é a recorrência que define a Sequência de Fibonacci.

Sabendo disso, é muito simples calcular o 8º termo.

$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$
$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$
$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$
$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$
$a_6 = a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13$
$a_7 = a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21$
$a_8 = a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34$

Para calcular as possibilidades para n degraus é só resolver a Sequência de Fibonacci, resolução que já foi feita anteriormente.

Logo:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Problema 4.9

Este problema, que se encontra em [3], necessita que os alunos dominem análise combinatória, portanto pode ser aplicado aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio.

Enunciado

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem número ímpar de termos iguais a 0?

Resolução

Inicialmente vamos calcular o total de sequências. Esse cálculo é bastante simples bastando observar que tratam-se de apenas 3 termos, assim o total de sequências é 3^n.

Vamos chamar de a_n as sequências com número ímpar de termos iguais a 0.

Logo teremos $3^n - a_n$ as sequências com número par de termos iguais a 0.

Chamando a_{n+1} o total de possibilidades que possuem número ímpar de termos iguais a zero.

Observemos que para o a_n, teremos duas possibilidades de continuarmos com número ímpar de zeros, basta acrescentar o 1 ou o 2.

Agora nos 3^n - a_n termos, teremos apenas uma única possibilidade de transformá-la numa sequência com número ímpar de zeros que é acrescentando um zero.

Assim o a_{n+1} será a soma de $2a_n$ com $3^n - a_n$.

Logo $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ - a_n, ou seja,

$$a_{n+1} = a_n + 3^n$$

Resolvendo a recorrência $a_{n+1} = a_n + 3^n$, onde $a_1 = 1$,

$$a_2 = a_1 + 3^1$$
$$a_3 = a_2 + 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

Somando as igualdades

$$a_n = a_1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{n-1}$$

como $a_1 = 1$, ou seja $a_1 = 3^0$, então

$$a_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{n-1}$$

Logo percebemos que a_n é a soma dos termos de uma PG.
Assim

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

Problema 4.10

O problema a seguir foi retirado de uma videoaula do saudoso Professor Morgado [19]. Este aborda o princípio fundamental da contagem e pode ser aplicado aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio.

Enunciado

Havia uma bancada com 10 lâmpadas. Cada uma delas poderia está ligada ou desligada. De quantas maneiras podem está as lâmpadas, sendo que não pode haver lâmpadas adjacentes simultaneamente ligadas?

Resolução

Este é um clássico problema que o uso do raciocínio recursivo torna um problema dito "complicado" em um problema simples. Para isto iremos generalizar para uma bancada com n lâmpadas, depois passaremos para as 10 lâmpadas.

Iremos dividir em duas situações:

1ª Situação: A primeira lâmpada ligada
2ª Situação: A primeira lâmpada desligada
O total a_n será a soma das situações acima.

Na situação 1, como a primeira está ligada a segunda não pode está ligada, logo estará desligada, consequentemente sobrarão a_{n-2} soluções.
Na situação 2 como a primeira está desligada a segunda pode está ligada ou desligada, logo teremos a_{n-1} soluções.

Assim teremos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Com esta ideia podemos calcular qualquer número de lâmpadas sobre a bancada.
$a_1 = 2$ (ligada ou desligada)
$a_2 = 3$ (ligada e desligada ; desligada e desligada, desligada e desligada)

Agora basta usar a equação $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e calcular o décimo termo.

$a_3 = a_2 + a_1$ $\quad 2 + 3 = 5$
$a_4 = a_3 + a_2$ $\quad 5 + 3 = 8$
$a_5 = a_4 + a_3$ $\quad 8 + 5 = 13$
$a_6 = a_5 + a_4$ $\quad 13 + 8 = 21$
$a_7 = a_6 + a_5$ $\quad 21 + 13 = 34$
$a_8 = a_7 + a_6$ $\quad 34 + 21 = 55$
$a_9 = a_8 + a_7$ $\quad 55 + 34 = 89$
$a_{10} = a_9 + a_8$ $\quad 89 + 55 = 144$

Logo existem 144 possibilidades.

Observação: A generalização deste problema é extremamente simples visto que esta recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ é a Sequência de Fibonacci.

Problema 4.11

O problema a seguir envolve juros compostos,este foi retirado de uma avaliação de Matemática Discreta (Profmat)[8] ano 2013, podendo ser aplicado aos alunos do 2º e 3º anos.

Enunciado

Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje, $R\$500.000,00$ aplicados em um investimento que rende juros de 1% ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de $R\$1.000,00$.

a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação, após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida.

b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n.

Resolução

Temos que $S_{n+1} = 1,01S_n - 1.000$; com $S_1 = 500.000,00$

Vamos resolver a recorrência $S_{n+1} = 1,01S_n - 1.000$

Iremos utilizar o caso especial para resolução de recorrências lineares de 1ªordem. Faremos a substituição $S_n = y_n + k$.

Substituindo $S_n = y_n + k$ em $S_{n+1} = 1,01S_n - 1.000$ teremos

$y_{n+1} + k = 1,01y_n + 1,01k - 1.000$, logo

$y_{n+1} = 1,01y_n + 0,01k - 1.000$.

Para que esta recorrência se torne homogênea basta que $0,01k - 1000 = 0$, assim temos

$k = 100.000$.

Resolvendo a homogênea $y_{n+1} = 1,01y_n$ iremos obter $y_n = 1,01^{n-1}y_1$.

Substituindo $y_n = 1,01^{n-1}y_1$ em $S_n = y_n + 100.000$ obtemos $S_n = 1,01^{n-1}y_1 + 100.000$, como $S_1 = 500.000$ teremos:

$500.000 = 1,01^{1-1}y_1 + 100000$

Logo, $y_1 = 400.000$

Assim:

$$S_n = 1,01^{n-1}400000 + 100000$$

Problema 4.12

A seguir veremos um problema de juros compostos e função exponencial. Abordaremos, agora, um problema exposto em [7], de fácil aplicabilidade aos alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Enunciado

Admita que há atualmente 1000 baleias numa certa zona e que se estima que em cada ano o aumento natural (decorrente de nascimentos e mortes naturais, não causadas pelo Homem) da população das baleias (nessa zona) é de 25%. Admita ainda que o Homem mata cerca de 100 baleias por ano.
Designando por a_n $(n > 0)$ o número de baleias que se prevê existirem (de acordo com as hipóteses assumidas) daqui a n anos (sendo a_1 o número de baleias atualmente existentes):

a) Escreva a condição inicial e a equação de recorrência para a_n.

b) Encontre uma expressão explícita para o valor de a_n como função de n.

Resolução

A condição inicial é:

$$a_{n+1} = 1,25a_n - 100, \text{ com } a_1 = 1000$$

Agora basta resolver a recorrência $a_{n+1} = 1,25a_n - 100$. Para isso iremos utilizar a substituição $a_n = y_n + k$, visto que esta recorrência se enquadra no caso especial do 3º tipo de resolução de recorrências lineares de 1ª ordem.

Sustituindo $a_n = y_n + k$ em $a_{n+1} = 1,25a_n - 100$ iremos obter:

$$y_{n+1} + k = 1,25(y_n + k) - 100$$
$$y_{n+1} = 1,25y_n + 0,25k - 100$$

Como o objetivo é tornar esta recorrência homogêna, basta então igualar $0,25k - 100$ a zero, obtendo então $k = 400$.

Resolvendo agora a homogênea $y_{n+1} = 1,25y_n$, iremos obter:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1,25y_1 \\ y_3 &= 1,25y_2 \\ y_4 &= 1,25y_3 \\ &\vdots \\ y_n &= 1,25y_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando as igualdades teremos:

$$y_n = 1,25^{n-1}y_1$$

Substituindo agora $y_n = 1,25^{n-1}y_1$ e k=400 em $a_n = y_n + k$ ficaremos com:

$$a_n = 1,25^{n-1}y_1 + 400$$

Substituindo $a_1 = 1000$, encontramos $y_1 = 600$. Assim a expressão explícita para o valor de a_n em função de n é:

$$a_n = 1,25^{n-1}600 + 400, \text{ com } n > 0$$

Problema 4.13

Neste problema, de [7], será aborado sequências e função exponencial, podendo ser aplicado aos alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Enunciado

Suponha-se que a população de uma dada espécie animal, numa determinada localidade, era de 200 num certo instante, que designaremos pelo instante inicial $n = 0$, e que no instante de tempo $n = 1$ (o instante em que foi realizada a contagem seguinte) a população, em causa, era formada por 220 animais. Suponha ainda que se verificou que o crescimento da população ocorrido entre o instante (de contagem) $n - 1$ e instante n é duas vezes o crescimento ocorrido entre os instantes $n - 2$ e $n - 1$ (podemos supor que os sucessivos instantes de contagem estão igualmente espaçados ao longo do tempo). Qual o tamanho da população em causa, no instante 50?

Resolução

Designando por p_n o número de elementos da população em causa no instante n (com $n \geqslant 0$), é imediato que p_n satisfaz a seguinte relação de recorrência:

Condições iniciais:

$$\begin{aligned} p_0 &= 200 \\ p_1 &= 220 \end{aligned}$$

A equação de recorrência é:

$$p_n - p_{n-1} = 2(p_{n-1} - p_{n-2})$$

Simplificamos obtemos:

$$p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}, \text{ para } n \geqslant 2$$

Trata-se de uma relação de recorrência linear, de 2ª ordem, com coeficientes constantes e equação característica $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Resolvendo a equação característica obtém-se como raízes:

$$x = 2 \text{ e } x = 1$$

Assim, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2:

$$p_n = c_1 2^n + c_2 1^n = c_1 2^n + c_2,\ para\, n \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Substituindo $p_0 = 200$ e $p_1 = 220$, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 200 \\ 2c_1 + c_2 = 220 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $c_1 = 20$ e $c_2 = 180$.
Substituindo os valores de c_1 e c_2 na equação (4.3) obtemos:

$$p_n = 20.2^n + 180,\ para\, n \geqslant 0$$

Simplificando

$$p_n = 5.2^{n+2} + 180,\ para\, n \geqslant 0$$

Finalizando é só encontrar o tamanho da população no instante 50, ou seja, p_{50}.

$$p_{50} = 5.2^{52} + 180$$

Problema 4.14

Vejamos mais um problema retirado de [7], que envolve sequências e função exponencial e que pode ser aplicado aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio.

Enunciado

Num certo local a população de uma determinada espécie é contada no fim de cada ano, desde há 10 anos. Designando por p_{n+1} o número de elementos da espécie quando da $(n+1)$-ésima contagem, sabe-se que $p_0 = 200$ (isto é, há 10 anos havia 200 elementos da espécie em questão) e $p_1 = 400$, e verificou-se que no fim de cada ano o número de elementos da espécie em questão era igual ao quádruplo do crescimento que essa população teve no ano anterior (ao que acabou de findar). A manter-se esta relação no futuro, qual a população da espécie daqui a 20 anos ?

Resolução

Condições iniciais:

$$p_0 = 200 \quad p_1 = 400$$

Equação de recorrência é:

$$p_{n+2} = 4(p_{n+1} - p_n)$$

Simplificando temos

$$p_{n+2} - 4p_{n+1} + 4p_n = 0$$

Sua equação característica é:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

Calculando suas raízes encontramos

$$t_1 = 2 \text{ e } t_2 = 2$$

Logo sua solução geral é

$$p_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n, \text{ com } c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $p_0 = 200$, $p_1 = 400$ na solução geral ficaremos com o sistema

$$\begin{cases} c_1 = 200 \\ 2c_1 + 2c_2 = 400 \end{cases}$$

Onde $c_1 = 200$ e $c_2 = 0$

Assim a solução geral do problema com as suas constantes é

$$p_n = 200.2^n \text{ ou } p_n = 25.2^{n+3}$$

E consequentemente a resposta específica para daqui a 20 anos é o p_{20} que é

$$p_{20} = 25.2^{23}$$

Problema 4.15

Escolhemos como último problema uma questão retirada de [3], envolve o princípio fundamental da contagem podendo ser aplicada no 2º e 3º anos do Ensino Médio.

Enunciado

Quantas são as sequências de 5 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$ que não têm dois termos consecutivos iguais a 0? E com 6 termos?

Resolução

Este problema, em particular, será resolvido de 2 maneiras diferentes:

O objetivo é mostrar o quanto é mais simples e mais completa a resolução utilizando as recorrências.

1º Tipo: Princípio Fundamental da Contagem.

Para utilizar o princípio fundamental da contagem será necessário dividir a resolução em várias etapas.

1ª Etapa: Sem o uso do zero.

$\bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}$ Teremos então 32 possibilidades.

2ª Etapa: Usando 1 zero.

$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}$ Como podemos permutar 5 vezes, teremos 80 possibilidades.

3ª Etapa: Usando 2 zeros.

$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2}$ teremos 8 possibilidades.
$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}$ teremos 8 possibilidades.
$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}$ teremos 8 possibilidades.
$\bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}$ teremos 8 possibilidades.
$\bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}$ teremos 8 possibilidades.
$\bar{2}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}$ teremos 8 possibilidades.

Logo encontramos 48 possibilidades.

4ª Etapa: Usando 3 números zero.

$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}$ Teremos então 4 possibilidades.

Total:
$32 + 80 + 48 + 4 = 164$ possibilidades.

Para calcular o a_6 teremos que refazer este processo, só que agora para 6 termos, o que convenhamos, será muito trabalhoso.

2º Tipo: Utilizando o raciocínio recursivo.

Vamos chamar a_n o total de possibilidades e subdividir este a_n em partes menores.

1ªSituação: Começando por 0.

Nesta situação teremos 2 maneiras de iniciar podendo começar por:
0 1 ...
ou
0 2 ... ;
teremos então $2a_{n-2}$ possibilidades

2ª Situação: Começando por 1 ou começando por 2.

Nesta situação teremos também 2 maneiras de começar podendo a sequência ser da forma
1 ...
ou
2 ... ;
teremos então $2a_{n-1}$ possibilidades

Assim $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ou $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$.

Agora basta usar a fórmula $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$ para calcular o a_5, onde o $a_1 = 3$ e o $a_2 = 8$.

Logo:
$a_3 = 2(3 + 8) = 22$

$a_4 = 2(8 + 22) = 60$
$a_5 = 2(22 + 60) = 164$

Para calcular o a_6 é bastante simples, basta substituir na fórmula $a_6 = 2(a_5 + a_4)$ que dará 448.

O uso das recorrências ainda nos permite generalizar este problema, para n possibilidades, de uma maneira bem simples, bastando resolver a recorrência de 2ª ordem $a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$.

A generalização será:

$$a_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n$$

Observação: Vale ressaltar que utilizando software como Excel, Geogebra podemos calcular qualquer termo desta recorrência.

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho contempla o estudo inicial das recorrências e suas aplicações no Ensino Básico, principalmente como um grande facilitador na resolução dos mais diversos tipos de problemas abordando vários conteúdos. Neste, foi buscado ao máximo simplificar as resoluções, sempre procurando generalizar as soluções, não ficando preso apenas as soluções específicas pedidas nos problemas.

Tentamos mostrar que o uso das Recorrências e do Raciocínio Recursivo no ensino básico é totalmente viável, visto que, para resolver problemas utilizando recorrências serão necessários conteúdos já conhecidos pelos alunos, como as somas de PAs e PGs, fatoriais, somas e produtos telescópicos (que os alunos aprendem como método da adição e multiplicação dos sistemas lineares)dentre outros.

Uma das "grandes vantagens" na utilização das recorrências e o raciocínio recursivo é que, além de desenvolver o raciocínio lógico dos alunos, é uma grande ferramenta para as generalizações das soluções nos problemas, tornando assim suas resoluções mais práticas, inteligentes e completas.

Por fim, gostariamos de ressaltar que o objetivo principal deste trabalho não é a retirada de nenhum conteúdo da educação básica, e sim a implantação de uma ferramenta extremamente atrativa e facilitadora, principalmente na resolução de problemas, envolvendo os mais diversos conteúdos matemáticos.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages - A Matemática do Ensino Médio-volume 2. SBM, 2006.

[2] Matos, Marivaldo P. - Séries e Equações Diferenciais. Ciência Moderna, 2006.

[3] Carvalho, Paulo Cezar Pinto - Matemática Discreta, Coleção PROFMAT. SBM, 2013.

[4] Samanez, Carlos Patrício - Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos. Prentice Hall, 2002.

[5] Cohen, Márcio Assad - Sequências e Recorrências, Material da VIII Semana Olímpica, 2004, disponível em http://www.obm.org.br/opencms/semana_olimpica/VIII.html.

[6] Rosen, Kenneth H. - Matemática Discreta e suas aplicações. Mc Graw Hill, 2009.

[7] Centro de Competências de Ciências Exatas e da Engenharia, disponível em http://cee.uma.pt/edu/ed/textosp/Texto9.pdf.

[8] Provas do PROFMAT - disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/memoria/provas.

[9] Provas da OBMEP - disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm.

[10] Costa, Ailton Barcelos da - disponível em http://www.geocities.ws/ailton_barcelos/historia.sequencias_progres.doc.

[11] Wikipédia - disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano.

[12] A Recursividade que nos rodeia - disponível em https://web.fe.up.pt/~fnf/leic/ip1/cap2.PDF.

[13] Lima, Elon Lages - O Princípio da Indução - disponível em http://www.mat.uc.pt/~mat0829/A.Peano.htm.

[14] Oliveira, Fernanda Alves de - Sequência de Fibonacci - disponível em http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/F_M1_FM_2013.pdf.

[15] Matemática na África - disponível em http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/Civiliza%C3%A7%C3%A3oafricana2.htm.

[16] Manoel, Luís Ricardo da Silva - A Torre de Hanói disponível em http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf.

[17] Triângulo de Sierpinski - disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski.

[18] Recorrências - disponível em http://cyshine.webs.com/recursoes.pdf.

[19] Morgado, Augusto César - vídeo-aula Recorrências - Papmen 2002 - disponível em https://www.youtube.com/watch?v=Ioy3e9G-7kk

[20] Fractal - disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal.