Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Contribuições para o estudo do centralizador de fluxos, Hamiltonianos e ações de $\mathbb{R}^d$

Wescley Bonomo

Salvador-Bahia
01 de dezembro de 2016

Bonomo, Wescley.

Contribuições para o estudo do centralizador de fluxos, Hamiltonianos e ações de $\mathbb{R}^d$ / Wescley Bonomo. -- Salvador - BA, 2016.

Orientador: Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas.

Tese (doutorado em matemática) -- Universidade Federal da Bahia, UFBA, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Centralizadores. 3. Fluxos expansivos. 4. Sistemas conservativos. 5. Hamiltonianos. 6. Problema 12 de Smale. I. Varandas, Paulo Cesar Rodrigues Pinto . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

Contribuições para o estudo do centralizador de fluxos, Hamiltonianos e ações de $\mathbb{R}^d$

Wescley Bonomo

Tese apresentada ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 01 de dezembro de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior
UFBA

Prof. Dr. Thiago Bomfim
UFBA

Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
UFRJ

Prof. Dr. Carlos Maquera
USP

Agradecimentos

Ao Professor Paulo Varandas, orientador desta Tese, pela forma como conduziu este trabalho, pelo tema de pesquisa proposto e pelas oportunidades que tive durante a realização deste doutorado, como a possibilidade de participar do Semestre temático no IMPA (2013) e a realização de intercâmbio na Universidade do Porto (Portugal).

Ao professor Jorge Rocha (Un. do Porto), pelo seu carisma e pela participação direta na elaboração da pesquisa que resultou nesta tese. Espero revê-lo em breve.

Aos professores do Programa de doutorado da UFBA, Armando, Vilton e Vitor e também aos professores do Semestre temático no IMPA, Gugu, Marcelo e Pujals, pela formação sólida em matemática que me foi fornecida.

As amizades estabelecidas em Portugal, em especial a Lourdes, Mercedes e seus familiares, e também a Dona Maria josé, a Silvana, e os funcionários da FCUP em geral. As amizades com brasileiros estabelecidas em portugal: Jaqueline, Fagner (Tchê), Mohammad ("o mais brasileiro dos iranianos") e Alessandra, bem como os colegas da residência universitária de ciências pelas confraternizações e viagens, ao Fernando, Solange e Luís. Com vocês sempre senti um pouquinho de Brasil neste país lusitano, ao mesmo tempo que conhecia e maravilhava-me com os lugares, história e demais aspectos portugueses.

Os colegas de residência em Salvador, com os quais estabeleci grande relação de amizade e corresponderam a maior parte de minha vida social, enquanto estive nesta cidade: Débora, Marina, Mariza, Mússio e Wanessa.

Aos colegas do IM / UFBA, em especial aos decanos Teófilo, Marcia e Aubedir que, sendo professores como eu, me baseei nos mesmos como exemplo para desenvolver meu doutorado; a Alejandra e Ronaldinho, com os quais tive maior contato e diálogo; a Andressa, Anderson e Marcus Morro, eventuais colegas de disciplinas além de colegas de moradia em Copacabana durante o semestre temático no IMPA e de intercâmbio em Portugal, A Elen, por todo o apoio

A Luerci (Leu) e ao Seu Marcos, pela longa amizade e pela hospitalidade com que me recebem sempre que os visito e, em cuja casa escrevi uma parte desta Tese.

A Sérgio Facchinetti Dória (M. Cafuné), pela amizade, pelo contato que tive pessoalmente com a sua regional, e pela lembrança, durante minha preparação para o exame de qualificação, da citação de Da. Canõ que diz "ser feliz é para quem tem coragem".

Aos Professores William Santiago e José Andre Lourenço pela amizade e pelas conversas esclarecedoras sobre mecânica hamiltoniana que tivemos; também aos professores do DMA Andressa, Daniel, Iury e Lúcio e em especial ao Prof. José A. da Rocha (DM/UFES) pela amizade e por todo o apoio que me deram para a realização do meu doutorado.

A padre Jonas, pelos confortantes diálogos que tivemos, durante um período difícil de minha vida.

A minha mãe, pessoa mais importânte de minha vida, pelo companheirismo e pelo apoio que sempre ofereceu a mim.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

"O tempo é a imitação móvel da eternidade."

Platão - Timeu

Resumo

O conteúdo desta Tese está relacionado a versão da conjectura de Smale sobre a trivialidade do centralizador para certas classes de fluxos e ações de $\mathbb{R}^n$. A conjectura de Smale estabelece que a maioria dos sistemas dinâmicos tem centralizador trivial, significando que toda a dinâmica que comuta com a original é um reescalonamento temporal da mesma. Neste trabalho, mostramos a trivialidade do centralizador para as seguintes classes de sistemas dinâmicos: (i) conjunto aberto de campos de classe $\mathcal{C}^\infty$ com singularidades hiperbólicas não-ressonantes e que satisfazem a Komuro-expansividade, os quais contém o atrator de Lorenz clássico como caso particular; (ii) conjunto Baire residual de campos conservativos de classe $\mathcal{C}^1$; (iii) conjunto Baire residual de campos hamiltonianos de classe $\mathcal{C}^1$. Além disso, provamos que o conjunto das ações de $\mathbb{R}^d$ localmente livres, expansivas e de classe $\mathcal{C}^1$ têm centralizador quase-trivial. Em particular, obtivemos os seguintes: (i) $\mathbb{R}^d$-ações Anosov transitivas em variedades compactas têm centralizador quase-trivial; (ii) caracterização de sub-ações expansivas de ações de $\mathbb{R}^d$.

Palavras-chave: Centralizadores de Sistemas Dinâmicos, Fluxos Expansivos, Sistemas Conservativos, Hamiltonianos, Problema 12 de Smale.

Abstract

The content of this thesis is related to the version of the Smale conjecture about the centralizer triviality For certain classes of flows and $\mathbb{R}^d$-actions. The Smale conjecture states that most of the dynamic systems have a trivial centralizer, meaning that all the dynamics that commute with the original is a temporal rescaling of the same. In this work, we show the triviality of the centralizer for the following classes of dynamic systems: (i) open set of $\mathcal{C}^\infty$ vector fields with non-resonant hyperbolic singularities satisfying Komuro-expansivity, which contains the classic Lorenz attractor as Particular case; (ii) residual Baire set of $\mathcal{C}^1$-conservative vector fields; (iii) residual Baire set of $\mathcal{C}^1$-Hamiltonian vector fields. In addition, we prove that the set of locally free, expansive $\mathcal{C}^1$ $\mathbb{R}^n$-actions have a quasi-trivial centralizer. In particular, we obtained the following: (i) transitive $\mathbb{R}^d$-Anosov actions in compact manifolds have quasi-trivial centralizer; (ii) characterization of expansive sub-actions of $\mathbb{R}^d$-actions.

Keywords: Centralizers of Dynamical Systems, Expansive Flows, Conservative Systems, Hamiltonians, Smale's 12^{th} Problem.

Sumário

Capítulo 0

Introdução

Dada uma variedade M, para cada $f \in Diff^r(M)$, o *centralizador de* f é $\mathcal{Z}^r(f) = \{g \in Diff^r(M) : f \circ g = g \circ f\}$. Do ponto de vista da Álgebra, $\mathcal{Z}^r(f)$ consiste do subgrupo de difeomorfismos em $Diff^r(M)$ que comutam com f e, do ponto de vista topológico, se $h \in \mathcal{Z}^r(f)$, então $h \circ f \circ h^{-1} = f$, ou seja, h é uma $\mathcal{C}^r$-conjugação do difeomorfismo f consigo mesmo. Mais ainda, $\mathcal{Z}^r(f)$ pode ser pensado como sendo o mapeamento das simetrias de f do ponto de vista dinâmico. Naturalmente, $\mathcal{Z}^r(f)$ contém todas as potências inteiras, por composição, de f. Quando ocorrer a igualdade $\mathcal{Z}^r(f) = \{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{Z}^r(f)$ é denominado *trivial*.

Na década de sessenta, S. Smale [78] questionou se, em qualquer variedade compacta e conexa M, o conjunto $\mathcal{T}^r(M) = \{f \in Diff^r(M) : \mathcal{Z}^r(f) \text{ é trivial}\}$ é genérico em $Diff^r(M)$. Também, inspirado na lista dos 23 problemas propostos por D. Hilbert, em 1900, Smale [80] apresentou a lista "*Mathematical Problems for the Next Century*", constando de 18 problemas para o século XXI, na qual o Problema 12 consiste nesta pergunta sobre a trivialidade do centralizador. Provavelmente, uma das principais relevâncias do "*Problema 12 de Smale*" seja o estudo do mergulho de difeomorfismos $f : M \to M$ definidos em uma variedade diferenciável M como aplicação tempo-1 de um fluxo contínuo $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, também definido em M, isto é, $\varphi_1 = f$. Se este é o caso, cada φ_t comuta com f e portanto o centralizador de f contém um subgrupo isomorfo a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ se f é periódica. Com isto, se o centralizador de f for discreto (em particular centralizadores triviais o são), f não é aplicação tempo-1 de um fluxo em M. Entretanto, centralizadores também foram utilizados no problema da classificação de difeomorfismos do círculo via conjugações diferenciáveis, estudado por Herman [30] e posteriormente, continuado por Yoccoz [88].

Neste sentido, um dos aspectos do Capítulo 2 desta tese é seu cunho histórico, no qual fizemos uma exposição de resultados relacionado a Conjectura de Smale, descrita nos parágrafos anteriores, obtidos Até o presente (Seção 2.2.1). De referir, com o trabalho de Bonatti-Crovisier-Wilkinson [16], foi verificada a veracidade da conjectura de Smale para o caso $r = 1$. O caso $r \geq 2$ continua em aberto, exceto para o caso em que M é uma variedade compacta e conexa unidimensional (e portanto difeomorfa ao círculo), para o qual Kopell [39] provou a existência de um conjunto aberto e denso de difeomorfismos em $Diff^r(\mathbb{S}^1)$ cujos elementos têm centralizador trivial. Em variedades de dimensão superior a 1, com respeito a conjectura de Smale, há resultados afirmativos, porém restritos a certas classes particulares de difeomorfismos, de referir, Bonatti-Crovisier-Vago-Wilkinson [15] para difeomorfismos conservativos e simpléticos; Burslem [22] para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos; Anderson [4] e Togawa [84] para difeomorfismos Morse-Smale; Palis-Yoccoz [60] para difeomorfismos Anosov em toros; Togawa [85], Palis-Yoccoz [59], Fisher [27, 28], Rocha [70, 71] para difeomorfismos Axioma A.

Na Seção 2.4 apresentamos a versão da Conjectura de Smale para campos vetoriais e fluxos. Dado um fluxo $(\varphi_t)_t$ de classe $\mathcal{C}^r$, se definirmos o *centralizador de* $(\varphi_t)_t$ como sendo $\mathcal{Z}^r((\varphi_t)_t) = \{$ fluxos $(\psi_s)_s$ de classe $\mathcal{C}^r$ em $M : \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para quaisquer $t,\, s \in \mathbb{R}\}$. Como para qualquer $h : M \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e invariante ao longo das órbitas de $(\varphi_t)_t$ (isto é, $h(\varphi_t(x)) = h(x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$) o fluxo $(\psi_t)_t$ definido por $\psi_t(x) = \varphi_{h(x)\cdot t}(x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$ está em $\mathcal{Z}^r((\varphi_t)_t)$, então uma versão da conjectura de Smale pode ser estabelecida para fluxos, conjecturando que, tipicamente, o centralizador de um fluxo $(\varphi_t)_t$ é constituído apenas por fluxos $(\psi_s)_s$ tais que $\psi_t(x) = \varphi_{h(x)\cdot t}(x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R}\times M$ para alguma aplicação $h : M \to \mathbb{R}$ contínua e invariante ao longo das órbitas de $(\varphi_t)_t$. Neste trabalho, denominamos $\mathcal{Z}^r((\varphi_t)_t)$ como sendo *quase-trivial* quando qualquer um de seus elementos for desta forma para alguma aplicação $h : M \to \mathbb{R}$ contínua e invariante ao longo das órbitas de $(\varphi_t)_t$. Se por ventura, $\mathcal{Z}^r((\varphi_t)_t)$ for quase-trivial e para qualquer um de seus elementos dado por $\psi_t(x) = \varphi_{h(x)\cdot t}(x)$, a aplicação h for constante, $\mathcal{Z}^r((\varphi_t)_t)$ denomina-se *trivial*.

Um interessante resultado de Geometria diz que dois campos vetoriais suaves X e Y em uma variedade M são tais que o colchete de Lie $[X,\, Y]$ é o campo nulo se e somente se os fluxos associados $(X_t)_t$ e $(Y_s)_s$ verificam $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ para quaisquer $t,\, s \in \mathbb{R}$. A partir disso, dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, define-se $\mathcal{Z}^r(X) = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M) : [X,\, Y] = 0\}$. Reparafraseando, se $X,\, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ se e somente se $(Y_s)_s \in \mathcal{Z}^{r+1}((X_t)_t)$. Equivalentemente, em termos do campo vetorial, $\mathcal{Z}^r(X)$ é quase-trivial se para qualquer $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ existir uma aplicação $h : M \to \mathbb{R}$ tal que $Y(x) = h(x) \cdot X(x)$ para todo $x \in M$ e $X(h) = 0$, considerando X como operador diferencial. Esta definição é conforme, visto que $X(h) = 0$ se e somente se h é constante ao longo das órbitas do campo X e $Y(x) = h(x) \cdot X(x)$ se e somente se os fluxos associados satisfazem $Y_t(x) = X_{h(x)\cdot t}(x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$.

Mas, se o centralizador de um fluxo φ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, é quase-trivial, sob que condições ele é na verdade trivial? Neste sentido, a Subseção 2.4.1 do Capítulo 1 contém conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, incluindo o Teorema A (p. 26) que exibe condições suficientes para a trivialidade do centralizador de um campo vetorial. Mais precisamente, se I) φ é transitivo, II) $Per(\varphi)$ é denso em M e, III) órbitas periódicas distintas de mesmo período são isoladas entre si, então $\mathcal{Z}^1(\varphi)$ é trivial. Como consequência imediata deste *Critério para a trivialidade do centralizador de campos vetoriais*, similar ao resultado de Kato e Morimoto [34] e o resultado de Jungreis e Hirsch [33] para fluxos Anosov, verificamos que campos vetoriais Anosov transitivos têm centralizador trivial e além disso, também como aplicação deste critério, nós obtivemos, no Capítulo 5, um residual de campos vetoriais conservativos, na topologia $\mathcal{C}^1$, cujos elementos têm centralizador trivial.

Ao contrário do que ocorre com difeomorfismos, aparentemente não há uma literatura tão vasta sobre centralizadores de campos vetoriais e fluxos. Neste sentido, Kato-Morimoto [34] provaram que fluxos Anosov de classe $\mathcal{C}^1$ em variedades compactas têm centralizador quase-trivial. Oka [52] provou que fluxos expansivos definidos em espaços métricos compactos e conexos têm centralizador quase-trivial. Sad [76] provou que existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^\infty$-campos veroriais Axioma A com transversalidade forte, tal que se $X \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{Z}^\infty(X)$ é trivial. Uma das características inéditas deste trabalho, quando comparado aos predecessores, citados neste parágrafo, é o fato de obtermos trivialidade do centralizador para classes de fluxos que admitem singularidades.

No Capítulo 3, nós provamos o Teorema B (p. 35) que estabelece a existência de um conjunto aberto de fluxos φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ com singularidades hiperbólicas não-ressonantes e que satisfazem a Komuro-expansividade quando restrito a um compacto φ-invariante $\Lambda \subset M$, cujos elementos têm centralizador quase-trivial. Para tanto, fixado $\psi \in \mathcal{Z}^\infty(\varphi)$, pela continuidade e expansividade de φ, no Lema 3.3.2 obtivemos $\mu > 0$ uniforme e uma aplicação $z : [-\mu, \mu] \times \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda}) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{z(t,x)}(x) = \psi(t, x)$ para todo $(t, x) \in [-\mu, \mu] \times \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$. Por outro lado, a hipótese de hiperbolicidade das singularidades foi importante para garantir a existência de ínfimo positivo para os períodos das órbitas periódicas do fluxo Komuro-expansivo (Lema 3.3.1) e como consequência disto, obtivemos a unicidade de z e que a mesma satisfaz uma propriedade de cociclo, possibilitando sua extensão e de modo único a uma aplicação $p : \mathbb{R} \times \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda}) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{z(t,x)}(x) = \psi(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$, como estabelecido no Lema 3.3.3. Finalmente, a invariância de p ao longo de órbitas regulares, como estabelecido no Lema 3.3.4, junto a hiperbolicidade e não ressonância das singularidades, garante a existência de extensão contínua da reparametrização p, obtida na Proposição 3.3.3, as singularidades de $\varphi_{|\Lambda}$, sendo que para isto, nós provamos uma versão para fluxos lineares (Lema 3.3.5) de um teorema de Kopell sobre centralizadores de contrações lineares. Adicionalmente, se o fluxo Komuro-expansivo for tal que a reunião das variedades estáveis de suas singularidades for densa, ou ele for transitivo, então seu centralizador é trivial (Corolário 1, p. 36). Verificamos que este Resultado obtido contém o atrator de Lorenz clássico como caso particular (Exemplo 3.4.1). Além disto, Artigue [8] apresentou definições mais gerais de campos vetoriais expansivos. Neste sentido, verificamos que as técnicas da demonstração do Teorema B também se aplicam a classe de fluxos cinemático-expansivos introduzida por Artigue (Exemplo 3.4.3). Artigue introduziu também o conceito de fluxo fortemente cinemático-expansivo e apresentou um exemplo concreto para esta definição, constando de um fluxo no toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ com uma única singularidade não-hiperbólica, mas apesar disto, verificamos que este fluxo fortemente cinemático-expansivo tem centralizador trivial (Exemplo 3.4.4).

No Capítulo 4, nós propomos uma definição de expansividade para ações de $\mathbb{R}^d$ (Definição 4.1.1), similar a correspondente unidimensional para fluxos. Inspirados num resultado de Bowen e Walters [20], no Teorema E (p. 55) verificamos que uma $\mathbb{Z}^d$-ação é expansiva se e somente se a a sua suspensão é uma $\mathbb{R}^d$-ação expansiva. Este resultado permite a construção de importantes classes de ações de $\mathbb{R}^d$ expansivas. Sequencialmente, provamos que ações de $\mathbb{R}^d$ localmente livres, expansivas e de classe $\mathcal{C}^1$ têm centralizador quase-trivial (Teorema D, p. 54). A demonstração deste resultado para ações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, de dimensão mais alta permitiu entender melhor certas simetrias da reparametrização associada a quase-trivialidade do centralizador de uma ação expansiva. Por exemplo, no Lema 4.3.6, provamos que, localmente, esta reparametrização é, a menos de uma carta, uma mudança de coordenadas linear. Como aplicação do Teorema D, verificamos que um resultado similar é válido para ações cinemático-expansivas localmente livres. Neste contexto, no Corolário 5 (p. 55), verificamos que $\mathbb{R}^d$-ações Anosov são cinemático-expansivas e com isto, elas têm centralizador quase-trivial, generalizando para $\mathbb{R}^d$ o resultado de Kato e Morimoto [34] para fluxos Anosov.

O Capítulo 5 é baseado em [19]. Na Seção 5.1 introduzimos uma definição de centralizador para campos vetoriais conservativos e, no Teorema F (p. 66), via o citado *Critério para a trivialidade do centralizador de campos vetoriais*, provamos a existência de um residual de campos vetoriais conservativos, na topologia $\mathcal{C}^1$, cujos elementos têm centralizador trivial. Posteriormente, motivados pelo Teorema de Noether, dentre outros, introduzimos uma definição para o centralizador de campos vetoriais hamiltonianos (Definição 5.2.11). Com uma versão de um resultado de Bessa-Ferreira-Rocha-Varandas [13], apresentada no Teorema **??** (p. **??**), e o supracitado *Critério para a trivialidade do centralizador de campos vetoriais*, provamos (Teorema G) a existência de um residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$ e um residual $E \subset \mathbb{R}$ tal que se $e \in E$ e $h \in \mathcal{R}$, então o centralizador do fluxo hamiltoniano $(X_H^t)_t$, restrito a cada componente conexa de $H^{-1}(e)$, é trivial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Campos vetoriais e fluxos

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Um* campo vetorial contínuo *em M é uma aplicação contínua $X : M \to TM$ tal que $X(p) \in T_p(M)$. O campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ for diferenciável.*

Se X é um campo vetorial contínuo definido em uma variedade diferenciável M, uma curva integral *de X é uma curva diferenciável $\gamma : J \to M$ (J intervalo de $\mathbb{R}$) com a propriedade que para cada $t \in J$ o vetor velocidade $\gamma'(t)$ é igual a $X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}(M)$.*

Como uma variedade diferenciável M é localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^{dim(M)}$, os teoremas de existência e de unicidade de soluções de equações diferenciais (em $\mathbb{R}^n$) estendem-se naturalmente para variedades diferenciáveis. Também, pelo Teorema do escapamento ([40], Lemma 17.10), se o o domínio maximal de uma curva integral γ em uma variedade diferenciável M não é todo o $\mathbb{R}$, então a imagem de γ em M não está contida em nenhum compacto de M. Como consequência, em variedades compactas sem bordo, curvas integrais maximais estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.2. *Dada uma variedade diferenciável compacta M, um* fluxo de classe $\mathcal{C}^r$ *em M, $r \geq 0$, é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\mathbb{R}, +) & \to & (Diff^r(M), \circ) \\ & t & \to & \varphi(t) = \varphi_t : \begin{array}{ccc} M & \to & M \\ x & \to & \varphi_t(x) \end{array} \end{array},$$

isto é,

1. $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$, *e*

2. $\varphi_0(x) = Id(x) = x$

para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$ *e além disto, a aplicação* $F : \mathbb{R} \times M \to M$ *dada por* $F(t,\, x) = \varphi_t(x)$ *é de classe* $\mathcal{C}^r$*.*

A Definição 1.1.1 e a Definição 1.1.2 são duais no sentido que a todo campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^1$ (ou pelo menos lipschitziano), definido em uma variedade compacta M está associado um fluxo $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ tal que $\frac{d}{dt}\varphi_t(x)_{|t=t_0} = X(\varphi_{t_0}(x))$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$. Reciprocamente, a todo fluxo $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ definido em uma variedade M está associado a um campo vetorial definido em M dado por $X(x) = \frac{d\varphi_t}{dt}_{|t=0}(x)$. Neste trabalho usaremos, de modo indistinto, as notações $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ para denotar a aplicação tempo-t de um fluxo $(\varphi_t)_t$.

Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ e $(X_t)_t$ o fluxo associado a X. Dado qualquer $p \in M$, a *órbita* de p relativo ao fluxo $(X_t)_t$ (ou ao campo associado X) é $\mathcal{O}(p) = \{X_t(p) \in M : t \in \mathbb{R}\}$. O ponto p é *regular* se $X(p) \neq 0$, do contrário, ele denomina-se *singular*. Denota-se por $Sing(X)$ o conjunto dos pontos singulares de X. p é dito *periódico* se $\inf\{t > 0 : X_t(p) = p\} > 0$. O conjunto dos pontos periódicos de X é indicado por $Per(X)$. Um resultado clássico da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias diz que qualquer ponto $p \in M$ ou é um ponto singular de X, ou é um ponto periódico de X, ou a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathcal{O}(p)$ dada por $f(t) = X_t(p)$ é injetiva. Também usaremos a notação $Crit(X) = Per(X) \cup Sing(X)$ para denotar o conjunto dos pontos críticos de X.

A Definição seguinte consiste na relação de equivalência usual no caso de campos vetoriais e seus fluxos associados.

Definição 1.1.3. *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$*,* φ *e* ψ *os fluxos associados a* X *e* Y*, respectivamente. Se existirem* $h \in Homeo(M)$ *e, para cada* $x \in M$ *uma aplicação contínua e estritamente crescente* $\tau_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $h(\varphi(t,\, x)) = \psi(\tau_x(t),\, h(x))$*, então os campos* X *e* Y *denominam-se* topologicamente equivalentes *em* p *e* q *respectivamente. Se* h *é um difeomorfismo de classe* $\mathcal{C}^r$*, então* X *e* Y *são ditos* $\mathcal{C}^r$-equivalentes.

Adicionalmente, se , respectivamente, e $h(\varphi(t,\, x)) = \psi(t,\, h(x))$ *para todo* $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times M$ *(neste caso particular,* $\tau_x = Id_{\mathbb{R}}$ *para todo* $x \in M$*), então os campos* X *e* Y *denominam-se* topologicamente conjugados*. Se* h *é um difeomorfismo de classe* $\mathcal{C}^r$*, então* X *e* Y *são ditos* $\mathcal{C}^r$-conjugados.

O teorema do fluxo tubular, que apresentaremos a seguir fornece uma descrição do comportamento local de campos vetoriais, numa vizinhança de um ponto regular do campo.

Proposição 1.1.4. *[Teorema do fluxo tubular] Sejam* M *uma variedade de dimensão* n*,* p *um ponto regular de um campo* $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ *e* Σ *uma seção transversal a* X *centrada em* p*. Existe uma vizinhança* $V_p \subset M$ *centrada em* p *e um difeomorfismo* $h : V \to (-\varepsilon,\, \varepsilon) \times B$ *de classe* $\mathcal{C}^r$*, onde* B *é uma bola aberta em* $\mathbb{R}^{n-1}$ *centrada na origem tal que* $h(\Sigma \cap V_p) = \{0\} \times B$ *e* h *é uma* $\mathcal{C}^r$*-conjugação entre* $X_{|V_p}$ *e o campo constante* $Y : (-\varepsilon,\, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$ *dado por* $Y(x) = (1,\, 0,\, \cdots,\, 0) \in \mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Vide [58], Cap. 2, Theorem 1.1. □

Há também a versão longa do Teorema do fluxo tubular 1.1.4, desde que consideremos arcos de órbitas não fechados. Mais precisamente,

Proposição 1.1.5 (Teorema do fluxo tubular longo)**.** *Sejam M uma variedade de dimensão n, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\gamma \subset M$ um arco de trajetória de X compacto e não fechado. Existe uma vizinhança tubular V contendo γ tal que $X_{|V}$ é conjugado ao campo constante $Y(x) = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Vide [58], Cap. 3, Proposition 1.1. □

O Teorema do fluxo tubular estabelece que o comportamento local de campos vetoriais em vizinhanças de pontos regulares é relativamente simples, visto que seu fluxo associado é conjugado a um fluxo de translações. Neste sentido, é plausível deduzir que comportamentos mais complexos de campos vetoriais sejam gerados por singularidades e órbitas periódicas e pelo comportamento global de órbitas regulares.

1.1.1 Hiperbolicidade e variedades invariantes

Seja $(X_t)_t$ o fluxo gerado por um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Um conjunto invariante $\Gamma \subset M$ para um fluxo $(X_t)_t$ é hiperbólico se

a) Para cada $p \in \Gamma$, o espaço tangente T_pM se expressa como soma direta

$$T_pM = E^s_p \oplus E^u_p \oplus span(X(p))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ os fibrados são DX_t-invariantes, isto é, para todo $p \in \Gamma$ e $t \in \mathbb{R}$,

1. $DX_t(p) \cdot E^s_p = E^s_{X_t(p)}$,
2. $DX_t(p) \cdot E^u_p = E^u_{X_t(p)}$, e
3. $DX_t(p) \cdot X(p) = X(X_t(p))$;

b) Existem constantes $\mu > 0$ e $C \geq 1$ tal que para todo $t \geq 0$ e $p \in \Gamma$

1. $\|DX_t(p)\, v^s\| \leq C\, e^{-\mu t}\|v^s\|$ para $v^s \in E^s_p$, e
2. $\|DX_{-t}(p)\, v^u\| \leq C\, e^{-\mu t}\|v^u\|$ para $v^u \in E^u_p$.

A descrição do comportamento de um campo vetorial numa vizinhança centrada numa singularidade do campo é mais complexa. No caso de uma singularidade hiperbólica, há a seguinte

Proposição 1.1.6. *[Teorema de Hartman-Grobman] Seja $X : V \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^r tal que 0 é uma singularidade hiperbólica de X. Se $L = DX(0)$, então X é topologicamente conjugado a L numa vizinhança de 0.*

Demonstração. Vide [58], Theorem 4.10, Chapter 2. $\square$

Se $p \in Sing(X)$ é singularidade, a *variedade estável global* de p é o conjunto

$$W^s(p) = \{x \in M : \lim_{t\to\infty} X_t(x) = p\}.$$

Do mesmo modo, a *variedade instável global* de p é

$$W^u(p) = \{x \in M : \lim_{t\to-\infty} X_t(x) = p\}.$$

Se $p \in Per(X)$ e $\mathcal{O} = \mathcal{O}(p)$ é a órbita correspondente de p, relativa ao fluxo associado ao campo X, então as variedades estável e instável de $\mathcal{O}$ são respectivamente

$$W^s(\mathcal{O}) = \{x \in M : \omega(x) = \mathcal{O}\} \quad \text{e} \quad W^u(\mathcal{O}) = \{x \in M : \alpha(x) = \mathcal{O}\},$$

onde $\alpha(x)$ e $\omega(x)$ são os conjuntos α-limite e ω-limite do ponto x, dados por

$$\alpha(x) = \bigcap_{s\in(-\infty,0]} \overline{\bigcup_{t\in(-\infty,s]} X_t(x)} \qquad e \qquad \omega(x) = \bigcap_{s\in[0,\infty)} \overline{\bigcup_{t\in[s,\infty)} X_t(x)},$$

os quais são invariantes pelo fluxo $(X_t)_t$.

As variedades estável e instável de um ponto $p \in Per(X)$ são definidas de modo análogo ao caso das respectivas para elementos de $Sing(X)$. Também, são comuns as nomenclaturas

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = W^{cs}(p) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^s(X^t(p))$$

para a variedade centro-estável de p e

$$W^u(\mathcal{O}(p)) = W^{cu}(p) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^u(X^t(p))$$

para a variedade centro-instável de p.

Como a conjugação estabelecida no teorema de Hartman-Grobman é apenas topológica, a partir do mesmo é possível concluir que a variedade estável de uma singularidade hiperbólica é uma variedade topológica imersa em M. A diferenciabilidade da mesma é estabelecida pelo teorema da variedade estável, que apresentaremos a seguir.

Teorema 1.1.7 (Teorema da variedade estável para fluxos)**.** *Suponha que $p \in Crit(X)$ é hiperbólico. A variedade estável de p é uma subvariedade C^1-imersa de M.*

No caso em que $p \in Per(X)$, $W^s_\varepsilon(\mathcal{O}(p))$, a variedade estável local da órbita de p é uma subvariedade mergulhada em M e pode ser representada como um gráfico sobre $E^s_{\mathcal{O}(p)}(\varepsilon) = \cup\{(q, y) : q \in \mathcal{O}(p), y \in E^s_q(\varepsilon)\}$, onde $E^s_q(\varepsilon)$ é um disco em E^s_q, centrado na origem e com raio ε, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Vide [69], 5.10.3, p. 199. $\square$

1.1.2 Campos vetoriais como operadores diferenciais e o colchete de Lie

Seja M uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, $X \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$.

Considerando uma carta $h : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$, X induz o campo $h_* X$ em $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ dado por $h_* X = Dh_{h^{-1}(x)} \cdot X(h^{-1}(x))$. Assim, a menos da identificação $X \approx h_* X$, tem-se

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é a base canônica associada a $T_x M$. X é diferenciável se e somente se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e portanto para qualquer uma) reparametrização de classe $\mathcal{C}^r$. Com isto, um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ sobre uma variedade M também pode ser considerado como um operador diferencial atuando em $\mathcal{C}^r(M)$, definido por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

sendo que, esta definição independe da reparametrização utilizada.

Esta interpretação de campos vetoriais como operadores diferenciáveis permite o cálculo de iterados no seguinte sentido: se M é uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^r$, $X,\, Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^r(M,\, \mathbb{R})$, em geral as aplicações $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ não advêm de campos vetoriais, pois o cômputo das mesmas envolve derivadas de ordem superior a 1. Entretanto, vale o seguinte

Lema 1.1.8. *Seja M uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^r$ e $X,\, Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$. Existe um único campo vetorial diferenciável Z em M de classe $\mathcal{C}^{r-2}$ tal que $Zf = (XY - YX)f$ para toda aplicação diferenciável $f : M \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$.*

Demonstração. Vide [24], Lemma 5.2. □

Consoante com o determinado pelo Lema 1.1.8, define-se o *colchete de Lie* $[X,\, Y]$ de dois campos vetoriais diferenciáveis em M como sendo o operador diferencial

$$[X,\, Y](f) = (XY - YX)f.$$

Proposição 1.1.9. *O colchete de Lie definido pelo Lema 1.1.8 satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}^2(M)$ e $a,\, b \in \mathbb{R}$:*

1. *Bilinearidade:* $[aX + bY,\, Z] = a[X,\, Z] + b[Y,\, Z]$ *e* $[Z,\, aX + bY] = a[Z,\, X] + b[Z,\, Y]$;
2. *Antissimetria:* $[X,\, Y] = -[Y,\, X]$;
3. *Identidade de Jacobi:* $[X,\, [Y,\, Z]] + [Y,\, [Z,\, X]] + [Z,\, [X,\, Y]] = 0$.

Demonstração. Vide [24], Proposition 5.3. □

Como consequência da Proposição 1.1.9 e invariância de $[\cdot, \cdot]$, restrito a $\mathfrak{X}^\infty(M)$, no sentido que se $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, então $[X, Y] \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, segue que $(\mathfrak{X}^\infty(M), +, [\cdot, \cdot])$ é uma *álgebra de Lie*. A proposição seguinte estabelece que o colchete de Lie $[X, Y]$ também pode ser interpretado como sendo a derivação de Y ao longo das trajetórias de X (a derivada de Lie $\mathcal{L}_X(Y)$ do campo Y, na direção do campo X).

Proposição 1.1.10. *Sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável M, $p \in M$ e X_t o fluxos local de X em uma vizinhança U de p. Então*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - DX_t Y](X_t(p)).$$

Demonstração. Vide [24], Proposition 5.4. □

Em coordenadas, o colchete de Lie pode ser calculado como mostra o seguinte

Lema 1.1.11. *Seja M uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ e $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ dados em coordenadas por $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Neste caso, $[X, Y]$ tem a seguinte representação em coordenadas:*

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Demonstração. Vide [40], Lemma 4.13. □

Capítulo 2

Centralizadores

Neste Capítulo apresentaremos o conceito de centralizador de difeomorfismos e sua relação com a conjectura de Smale sobre a trivialidade do centralizador. Versões para fluxos e campos vetoriais também serão apresentadas. Neste sentido, este Capítulo é importante pelo seu seu cunho histórico, mas também apresentaremos nele um critério que exibe condições suficientes para a trivialidade do centralizador de fluxos em variedades compactas, o qual será utilizado no desenvolvimento dos capítulos posteriores.

2.1 Centralizador de difeomorfismos

Uma abordagem algébrica

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Para todo $r \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \cup \{\infty\}$, $Diff^r(M)$, o conjunto dos difeomorfismos em M, é um grupo com a operação usual de composição de funções (por convenção, $r = 0$ corresponde ao conjunto $Hom(M)$ dos homeomorfismos em M). Dado $f \in Diff^r(M)$, para cada $s \in \{0, 1, 2, \cdots, r\}$, como em Álgebra, define-se o centralizador $\mathcal{Z}^s(f)$ como sendo o subconjunto de $Diff^s(M)$ constituído pelos difeomorfismos em M que comutam com f:*

$$\mathcal{Z}^s(f) = \{h \in Diff^s(M) \mid f \circ h = h \circ f \text{ ou } h^{-1} \circ f \circ h = f\}.$$

Exemplo 2.1.2. *Dois exemplos triviais de centralizadores que seguem imediatamente da Definição 2.1.1:*

a) *Se $f = Id : M \to M$, então $\mathcal{Z}^r(Id) = Diff^r(M)$;*

b) *Se M é uma subvariedade diferenciável mergulhada em $\mathbb{R}^n$ e simétrica com relação a origem de $\mathbb{R}^n$, $f = -Id : M \to M$ e $g \in Z^r(-Id)$, então todo $x \in M$ satisfaz $g(-x) = -g(x)$, ou seja, $g \in Z^r(-Id)$ é um difeomorfismo impar de classe $\mathcal{C}^r$.*

Outros exemplos de centralizadores de certas classes de sistemas dinâmicos, ou então propriedades acerca dos mesmos, aparecerão ao longo do texto.

Do ponto de vista algébrico, para cada $f \in Diff^r(M)$, $\mathcal{Z}^r(f)$ é subgrupo de $Diff^r(M)$. De fato, (I) se $g \in \mathcal{Z}^r(f)$, então $g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow f = g \circ f \circ g^{-1} \Leftrightarrow g^{-1} \circ f = f \circ g^{-1}$, ou seja, $g^{-1} \in \mathcal{Z}^r(f)$, e (II) se $g,\, h \in \mathcal{Z}^r(f)$, então $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, do que se conclui que $g \circ h \in \mathcal{Z}^r(f)$;

Ademais, é imediato da Definição 2.1.1 que para qualquer $f \in Diff^r(M)$,

$$\mathcal{Z}^0(f) \supset \mathcal{Z}^1(f) \supset \mathcal{Z}^2(f) \supset \cdots \supset \mathcal{Z}^r(f),$$

podendo alguma destas inclusões ser estrita.

Do ponto de vista topológico, se $h \in \mathcal{Z}(f)$, então $f = h \circ f \circ h^{-1}$. Ou seja, h é uma conjugação topológica do homeomorfismo f consigo mesmo. Além disto, indutivamente, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tem-se $f^n \circ h = h \circ f^n$, ou equivalentemente, $f^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$, do que se conclui que para qualquer $f \in Diff^r(M)$, $\{f^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é subgrupo (cíclico e) normal de $\mathcal{Z}^s(f)$ para cada $s \in \{0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, r\}$. Se $\mathcal{Z}^s(f)$ se reduz a $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, então diz-se que $\mathcal{Z}^s(f)$ é trivial.

Centralizadores desempenham um papel importante em diversos tópicos de sistemas dinâmicos. Este é o caso quando consideramos o problema da classificação de difeomorfismos no círculo via conjugações diferenciáveis (Herman [30], Yoccoz [88]). Outro ítem interessante é o estudo do mergulho de difeomorfismos $f : M \to M$ definidos em uma variedade diferenciável M como aplicação tempo-1 de um fluxo contínuo $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ também definido em M, isto é, $\varphi_1 = f$; se este é o caso, cada φ_t comuta com f e portanto o centralizador de f contém um subgrupo homeomorfo a $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ se f é periódica, isto é, raiz da identidade). Com isto, se o centralizador de f for discreto (em particular centralizadores triviais o são), então f não é aplicação tempo-1 de um fluxo em M.

Observe que $\mathcal{Z}^r(f)$ é um invariante da dinâmica de f, no seguinte sentido: se um difeomorfismo $h : N \to N$ de classe $\mathcal{C}^r$ é conjugado com $f : M \to M$ por um difeomorfismo $\varphi : M \to N$ de classe $\mathcal{C}^r$ (ou seja, $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$), então os grupos $\mathcal{Z}^r(f)$ e $\mathcal{Z}^r(h)$ são algebricamente isomorfos. De fato,

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{Z}^r(f) & \to & \mathcal{Z}^r(h) \\ & g & \to & \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

é um isomorfismo explícito entre os grupos $\mathcal{Z}^r(f)$ e $\mathcal{Z}^r(h)$.

- Φ é homomorfismo:

  Se $g,\, h \in \mathcal{Z}^0(f)$, então

  $$\Phi(g\circ h) = \varphi\circ(g\circ h)\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ g\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ h\circ\varphi^{-1} = (\varphi\circ g\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}) = \Phi(g)\circ\Phi(h).$$

- Φ é injetivo: Se $g_1,\, g_2 \in \mathcal{Z}^0(f)$ são tais que $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$, isto é, $\varphi \circ g_1 \circ \varphi^{-1} = \Phi(g_1) = \Phi(g_2) = \varphi \circ g_2 \circ \varphi^{-1}$, então $g_1 = g_2$.

- Φ é sobrejetivo:

Se $k \in \mathcal{Z}^r(h)$, então $\varphi^{-1} \circ k \circ \varphi \in \mathcal{Z}^r(f)$, pois
$(\varphi^{-1} \circ k \circ \varphi) \circ f = \varphi^{-1} \circ k \circ (\varphi \circ f) = \varphi^{-1} \circ k \circ (h \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ (k \circ h) \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ (h \circ k) \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ h) \circ k \circ \varphi = (f \circ \varphi^{-1}) \circ k \circ \varphi = f \circ (\varphi^{-1} \circ k \circ \varphi)$
e além disso, $\Phi(\varphi^{-1} \circ k \circ \varphi) = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ k \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = k$.

Noutras palavras, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "h"'] \arrow[rrr, bend left, "\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{Z}^r(h)"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "h"] \\
N \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] \arrow[rrr, bend right, "\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}"'] & M \arrow[r, "g \in \mathcal{Z}^r(f)"'] & M \arrow[r, "\varphi"'] & N
\end{tikzcd}$$

Em particular, se $X = Y$ e $f, h \in Diff^r(X)$ são $\mathcal{C}^r$-conjugados, então seus centralizadores $\mathcal{Z}^r(f)$ e $\mathcal{Z}^r(h)$ são dois subgrupos de $Diff^r(X)$ algebricamente conjugados.

2.2 O “Problema 12 de Smale”

Uma abordagem topológica

Para simplificação de notações, considere

$$\mathcal{T}^r(M) = \{f \in Diff^r(M);\ \mathcal{Z}^r(f) \text{ é trivial}\}.$$

A partir dos anos 60, S. Smale [78, 79], fez questionamentos sobre a estrutura topológica de $\mathcal{T}^r(M)$. Também, inspirado na lista dos 23 problemas propostos por David Hilbert no Congresso Internacional de matemática (Paris, 1900), Smale [80] apresentou a lista “*Mathematical Problems for the Next Century*”, constando de 18 problemas para o século XXI, na qual ele propôs o seguinte

Questão 1. *[Smale's Problem 12 [80], 2000] Pode um difeomorfismo de uma variedade compacta M sobre ela mesma ser aproximado na topologia $\mathcal{C}^r$, por um difeomorfismo f que comuta somente com seus iterados? $\mathcal{T}^r(M)$ é aberto e denso em $Diff^r(M)$, na topologia $\mathcal{C}^r$?*

2.2.1 O “Problema 12 de Smale” em $Diff^1(M)$

A versão $\mathcal{C}^1$ do “*Problema 12 de Smale*” foi respondida afirmativamente. Nesta direção, Palis[56] já havia obtido que em variedades compactas M de classe $\mathcal{C}^\infty$, o subconjunto dos elementos de $Diff^\infty(M)$ que são aplicação tempo-1 de $\mathcal{C}^0$-fluxos é de primeira categoria (reunião enumerável de fechados de interior vazio). Posteriormente, Bonati-Crovisier-Wilkinson[16] provaram o seguinte resultado que determina a veracidade desta Conjectura de Smale na topologia $\mathcal{C}^1$. Mais especificamente,

[2009, Bonatti-Crovisier-Wilkinson, [16]]. Para qualquer variedade compacta e conexa M, existe um residual de $Diff^1(M)$, que está contido em $\mathcal{T}^1(M)$.

Também, com Vago [14], eles provaram que para qualquer variedade compacta M, com $dim(M) \geq 3$, existe um aberto não vazio $\mathcal{A} \subset Diff^1(M)$ e um subconjunto denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}^1(M) = \varnothing$, estabelecendo assim uma descrição topológica de $\mathcal{T}^1(M)$ ao afirmarem que $\mathcal{T}^1(M)$ contém um G_δ (residual) e também que isto é “ótimo”, no sentido que $\mathcal{T}^1(M)$ não contém subconjuntos abertos e densos em $Diff^1(M)$. Mas, há outras questões em aberto relacionadas a $\mathcal{T}^1(M)$. Por exemplo,

Questão 2 (Bonatti-Crovisier-Wilkinson [16])**.** *$\mathcal{T}^1(M)$ é um boreliano?*

Questão 3 (Bonatti-Crovisier-Wilkinson [16])**.** *Qual é o interior de $\mathcal{T}^1(M)$?*

Nesta direção, Bakker e Fisher [9] questionam quais variedades M suportam um aberto de $Diff^1(M)$ constituído apenas por difeomorfismos com centralizador trivial, tendo obtido (Theorem 1.3) que para $2 \leq n \leq 4$, $\mathcal{T}^1(\mathbb{T}^n)$ tem interior não vazio. Ademais, neste artigo eles também expõem obstruções que fazem com que este Teorema não seja verdadeiro para $Diff^1(\mathbb{T}^n)$ com $n > 4$. Para $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, Bonatti-Crovisier-Vago-Wilkinson [14] provam a existência de um subconjunto denso de $Diff^1(\mathbb{S}^1)$ cujos elementos não estão em $\mathcal{T}^1(\mathbb{S}^1)$.

2.2.2 O “Problema 12 de Smale” em $Diff^r(\mathbb{S}^1)$, $r \geq 2$

Ao contrário do caso do que foi apresentado na Subseção 2.2.1, não há resultado geral para o “*Problema 12 de Smale*” em $Diff^r(M)$, M variedade compacta e conexa e $r \geq 2$, exceto para o caso unidimensional, isto é, $M = \mathbb{S}^1$. Nancy J. Kopell, Em sua tese de doutorado [38, 39], sob orientação do próprio Smale, provou o seguinte

[1970, Kopell, [39] Theorem 3]. $\mathcal{T}^r(\mathbb{S}^1)$, $2 \leq r \leq \infty$, contém um subconjunto $\mathcal{C}^1$-aberto e $\mathcal{C}^r$-denso de $Diff^r(\mathbb{S}^1)$.

Os difeomorfismos Morse-Smale constituem um aberto e denso de $Diff^r(\mathbb{S}^1)$ para todo $r \geq 1$ (vide [58], p. 154). Com isto, existe um subconjunto aberto e denso de difeomorfismos Morse-Smale cujos elementos têm centralizador trivial. Meirong [44] mostrou que tais centralizadores são subgrupos solúveis de $Diff^r(\mathbb{S}^1)$, $2 \leq r \leq \infty$.

Ademais, este teorema de Kopell não é válido em $Diff^1(\mathbb{S}^1)$. De fato, Bonatti-Crovisier-Vago-Wilkinson [14] provaram a existência de um subconjunto denso $D \subset Diff^1(\mathbb{S}^1)$ tal que cada $f \in D$ comuta com o fluxo de um campo vetorial Morse-Smale $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{S}^1)$. Mais precisamente, f é um difeomorfismo Morse-Smale e f^q é a aplicação tempo-1 do fluxo de X, onde $q = 2$ se f inverte orientação, e q é o período das órbitas periódicas de f, caso contrário. Além disso, $\mathcal{Z}^1(f)$ é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q$.

Conjugação diferenciável dos difeomorfismos do círculo

O invariante fundamental por conjugações topológicas de um homeomorfismo do círculo f é o número de rotação $\rho(f)$ introduzido por Poincaré.

As rotações desempenham um papel central no estudo dos difeomorfismos do círculo. Pelo Teorema de Poincaré-Denjoy, qualquer difeomorfismo do círculo f com número de rotação irracional θ é semi-conjugado a rotação R_θ. Se f for de classe $\mathcal{C}^2$, ele é topologicamente conjugado a R_θ. Ademais, há uma dicotomia notável entre rotações racionais e rotações irracionais em termo de seus centralizadores:

1. Rotações irracionais R_θ em $\mathbb{S}^1$ comutam apenas com rotações em $\mathbb{S}^1$, isto é, $\mathcal{Z}^0(R_\theta) = \{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{S}^1\}$.
2. Por outro lado, se $Diff^r_+(\mathbb{S}^1)$ é o conjunto dos difeomorfismos do círculo de classe $\mathcal{C}^r$ que preservam orientação e R_θ é uma rotação racional, então $\mathcal{Z}^r(R_\theta) \cap Diff^r_+(\mathbb{S}^1) \simeq Diff^r_+(\mathbb{S}^1)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Seja $F^r_\theta \subset Diff^r(\mathbb{S}^1)$ o subconjunto fechado de difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$ cujo número de rotação é θ. Herman provou diversos resultados acerca de F^r_θ, para θ irracional: ele é conexo e F^s_θ, para $s > r$ é denso em F^r_θ com respeito a topologia $\mathcal{C}^r$. Dado qualquer difeomorfismo $f \subset Diff^r(\mathbb{S}^1)$, seja $\mathcal{O}^r(f) = \{h \circ f \circ h^{-1} : h \in Diff^r(\mathbb{S}^1)\}$ a C^r-classe de conjugação de f. Para qualquer $f \in Diff^r(\mathbb{S}^1)$, $\rho(f) = \theta$, vale a inclusão $\mathcal{O}^r(f) \subset F^r_\theta$. Herman também provou que, se $f \in Diff^r(\mathbb{S}^1)$ tem número de rotação θ irracional, a classe $\mathcal{O}^r(f)$ é $\mathcal{C}^1$-densa em F^r_θ. Por outro lado, se existirem $\beta \geq 0$ e $\gamma > 0$ tais que θ satisfaz a condição diofantina $|\theta - p/q| \geq \gamma\, q^{-2-\beta}$ para todo racional p/q (com $q \geq 1$), então $\mathcal{O}^\infty(f) = F^\infty_\theta$. O conjunto dos $\theta \in \mathbb{R}$ que verificam esta condição tem medida de Lebesgue total e contém todos os irracionais algébricos reais.

Herman [30] (p. 48) provou que $f \in Diff^r_+(\mathbb{S}^1)$ com $\rho(f) = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é tal que $f^q = Id$ se e somente se f é $\mathcal{C}^r$-conjugada a $R_{\frac{p}{q}}$. Com isto, para todo $s \in \{0, 1, 2, \cdots, r\}$ o centralizador $\mathcal{Z}^s_+(f)$ é $\mathcal{C}^r$-conjugado a $\mathcal{Z}^s_+(R_{\frac{p}{q}}) \simeq Diff^s_+(\mathbb{S}^1)$.

Mais geralmente, o *Teorema fundamental da conjungação diferenciável dos difeomorfismos do círculo* ([30], p. 127) estabelece que para $3 \leq r \leq \omega$ (não necessariamente inteiro) e $f \in D^r(\mathbb{S}^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ satisfaz a condição A de Herman, então para todo $\beta > 0$, f é $\mathcal{C}^{r-1-\beta}$-conjugada a R_α. Ademais, se f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^\omega$), então f é $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^\omega$)-conjugada a R_α.

Yoccoz, em seu doutoramento [88] (orientado por M. Herman) estendeu os resultados de Herman sobre a conjugação diferenciável dos difeomorfismos do círculo. Os resultados obtidos por Yoccoz são muito importantes e estavam entre as razões pelas quais ele foi premiado com uma medalha Fields em 1994. Neste sentido, poderíamos enunciar o

Teorema 2.2.1 (Teorema de Herman-Yoccoz (Versão $\mathcal{C}^\infty$)). *Se $f \in Diff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ é tal que $\rho(f)$ é diofantino, então f é $\mathcal{C}^\infty$-conjugado a $R_{\rho(f)}$.*

Como consequência do Teorema de Herman-Yoccoz, se $f \in Diff^\infty(\mathbb{S}^1)$ tem número de rotação irracional θ que verifica a propriedade diofantina, então para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{Z}^r(f) \simeq \mathcal{Z}^r(R_\theta) = \{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{S}^1\}$.

Em [88] (Théorème 3.1), Yoccoz prova a existência de um difeomorfismo $f \in Diff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ com número de rotação irracional e tal que $\mathcal{Z}^\infty(f) \cap Diff_+^\infty(\mathbb{S}^1) = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.3 O "Problema 12 de Smale" restrito a difeomorfismos Axioma A

Existe na literatura alguns resultados sobre centralizadores, restrito a classes de difeomorfismos específicas, que em geral satisfazem a algum tipo de hiperbolicidade, como o são os difeomorfismos Axioma A. Nesta classe de difeomorfismos, que tem seus primórdios com S. Smale nos anos 1960's, o objeto de importância primordial é o conjunto não-errante $\Omega(f)$ associado a cada $f \in Diff^r(M)$. Um difeomorfismo f é Axioma A se $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.

Difeomorfismos Morse-Smale

Uma sub-classe extrema dos difeomorfismos Axioma A compreende os difeormorfismos Morse-Smale, para os quais o conjunto não-errante é constituído apenas por um número finito de pontos periódicos. Difeomorfismos Morse-Smale existem em qualquer variedade diferenciável compacta (Palis-Smale [54]). Em $Diff^r(\mathbb{S}^1)$ o subconjunto dos difeormorfismos Morse-smale constituem um aberto e denso e portanto genérico, mas isso não ocorre em variedades diferenciáveis M de dimensão superior a 1. Neste caso os difeormorfismos Morse-smale ainda constituem um subconjunto aberto de $Diff^r(M)$, porém não denso (Palis [55]). Notação:

$$MS^r(M) = \{\text{difeomorfismos Morse-Smale } f : M \to M \text{ de classe } \mathcal{C}^r,\ 1 \leq r \leq \infty\}.$$

B. Anderson [3, 4], em seu doutorado, provou a existência de um subconjunto de $MS^\infty(M)$ que é $\mathcal{C}^3$-aberto, $\mathcal{C}^\infty$-denso e cujos elementos têm centralizador $\mathcal{C}^0$-discreto. Posteriormente, Togawa [84] apresentou uma resposta afirmativa ao Problema 12 de Smale restrito aos difeomorfismos morse-Smale ao provar que $\mathcal{T}^1(M) \cap MS^1(M)$ é $\mathcal{C}^1$-genérico em $MS^1(M)$.

Por outro lado, Bonati-Crovisier-Vago-Wilkinson [14] (Theorem 2, Theorem 3) provam que em variedades diferenciáveis bidimensionais compactas e conexas M, é $\mathcal{C}^1$-localmente denso o conjunto de difeomorfismos Morse-Smale em $Diff^1(M)$ que são aplicação tempo-1 de um fluxo.

Difeomorfismos Anosov

A outra sub-classe extremal dos difeomorfismos Axioma A consiste dos difeomorfismos Anosov, para os quais o conjunto não-errante é toda a variedade na qual o difeomorfismo Anosov está definido. Difeomorfismos Anosov só são suportados por algumas variedades diferenciáveis especiais, como os toros $\mathbb{T}^n$, e toda a variedade ambiente é hiperbólica neste caso. Durante algum tempo, acreditou-se que os toros $\mathbb{T}^n$ eram as únicas variedades que suportavam difeomorfismos Anosov, mas Smale apresentou outros exemplos definidos em grupos de Lie não abelianos.

[1989, Palis e Yoccoz, [60]]. Existe um subconjunto aberto e denso (na topologia $\mathcal{C}^\infty$) de $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfismos Anosov $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, $\mathcal{Z}^\infty(f)$ é trivial.

[1998, Plykin, [63]]. Seja $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo Anosov definido por uma matriz unimodular, tendo um polinômio característico irredutível e espectro $spec(A) = \{\lambda_1(A), \cdots, \lambda_k(A), \mu_1(A), \overline{\mu_1}(A), \cdots, \mu_s(A), \overline{\mu_s}(A)\}$, onde $\lambda_i(A)$ e $\mu_j(A)$ são, respectivamente, os aujtovalores reais e complexos de A. Neste caso, $\mathcal{Z}^1(A)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^l \oplus G$, onde $1 \leq l \leq k + s - 1$ e G é um grupo abeliano finito.

[2005, Rocha, [73]]. Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo Anosov no toro bidimensional tendo somente um ponto fixo. Neste caso, $\mathcal{Z}^0(f)$ é gerado por f e uma raiz quadrada da identidade se f reverte orientação (ou por uma raiz quadrada de f e uma raiz quadrada da identidade se f preserva orientação).

Em [60], os autores deixam a seguinte

Questão 4 (Palis-Yoccoz, [60])**.** *As técnicas utilizadas na obtenção do resultado provado em [60] podem ser generalizadas para o caso de difeomorfismos Anosov em infranilvariedades?*

Difeomorfismos Axioma A, em geral

O *Teorema da Estabilidade Estrutural*, conjecturado por Palis e Smale e posteriormente provado por Robbin [64], Robinson [68] e Mañe [42], estabelece que um difeomorfismo $f \in Diff^r(M)$ é estruturalmente estável, isto é, existe uma vizinhança aberta $V_f \subset Diff^r(M)$ de f tal que qualquer difeomorfismo $g \in V_f$ é conjugado a f se e somente se f é um difeomorfismo Axioma A com condição de transversalidade forte. Notação:

$$\mathcal{A}_r(M) = \{f \in Diff^r(M);\ f \text{ é Axioma A com condição de transversalidade forte}\}$$

Com isto, $\mathcal{A}_r(M)$ constitui um subconjunto aberto de $Diff^r(M)$ mas o mesmo não é denso em $Diff^r(M)$. O conhecimento de uma propriedade genérica em $Diff^r(M)$ que preserve num sentido razoável a estrutura das órbitas dos difeomorfismos neste subconjunto genérico, seria um prelúdio a aplicação em $Diff^r(M)$ da ideia utilizada na demonstração do Teorema de Kopell para Difeomorfismos no círculo. O próprio Smale questionou se em variedades de dimensão superior a 1 é possível obter uma tal propriedade. Entretanto, aparentemente uma tal propriedade genérica ainda não foi encontrada.

Entretanto há alguns resultados acerca dos centralizadores de difeomorfismos Axioma A. Em uma $\mathcal{C}^\infty$-variedade compacta e conexa M, Palis [57] provou que existe um subconjunto $\mathcal{C}^\infty$-aberto e denso (na topologia de Whitney) de $\mathcal{A}_r(M)$, cujos elementos têm centralizador discreto. Posteriormente, Togawa [85]] obteve um subconjunto genérico $\mathcal{A}$ (na topologia $\mathcal{C}^1$) de $\mathcal{C}^1$-difeomorfismos Axioma A tal que $\mathcal{Z}^1(f)$ é trivial para qualquer difeomorfismo $f \in \mathcal{A}$.

Alguns resultados obtidos sobre centralizadores de difeomorfismos Axioma A são exclusivos para esta classe de difeomorfismo em variedades diferenciáveis bidimensionais. Em uma $\mathcal{C}^\infty$-variedade bidimensional compacta e conexa M^2, com a topologia $\mathcal{C}^\infty$, Palis-Yoccoz [59] (Theorem 3 (a)) mostraram que $\mathcal{A}_\infty(M^2) \cap \mathcal{T}^\infty(M^2)$ contém um aberto e denso em $\mathcal{A}_\infty(M^2)$; Rocha [70] (Theorem 2) provou que $\mathcal{A}_\infty(M^2) \cap \mathcal{T}^1(M^2)$ contém um aberto e denso em $\mathcal{A}_\infty(M^2)$ e Fisher [27] (Theorem 1.4) obteve que em $\mathcal{A} = \{\mathcal{C}^r$-difeormorfismos Axioma A $(r \geq 2)$ sem cíclos em $M\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{T}^r(M^2)$ contém um aberto denso em $\mathcal{A}$.

Em variedades com dimensão superior a 2, os resultados correspondentes aos citados no parágrafo anterior apresentam hipótese adicional do difeomorfismos conter um atrtor ou repulsor periódico. Ainda no contexto de uma $\mathcal{C}^\infty$-variedade compacta e conexa M com a topologia $\mathcal{C}^\infty$, Palis e Yoccoz [59] provaram que existe um aberto e denso de $\mathcal{C}^\infty$-difeormorfismos f que são Axioma A sem ciclos, com um atrator ou repulsor periódico e com condição de transversalidade forte, para os quais $\mathcal{Z}^\infty(f)$ é trivial. posteriormente, Fisher [27] (Theorem 1.2) generalizou este resultado de Palis e Yoccoz, retirando a condição de transversalidade forte. Ele tambem provou [28] que se f é um $\mathcal{C}^r$-difeomorfismo Axioma A não Anosov $(2 \leq r \leq \infty)$ com um atrator de codimensão 1, então existe subconjunto aberto e denso de uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f em $Dif^r(M)$, cujos elementos têm centralizador trivial.

Ademais, em geral, retirando-se ou a condição de transversalidade forte, ou a condição de não-ciclos, garante-se apenas a existência de um residual de difeomorfismos, em vez de um subconjunto aberto e denso: Em uma $\mathcal{C}^\infty$-variedade compacta e conexa M com $dim(M) \geq 3$, com a topologia $\mathcal{C}^\infty$, Palis e Yoccoz [59] (Theorem 3 (b)) mostraram que existe um residual de $\mathcal{C}^\infty$-difeormorfismos f que são Axioma A com transversalidade forte, para os quais $\mathcal{Z}^\infty(f)$ é trivial. Neste mesmo contexto, Fisher [27] (Theorem 1.3) mostrou que existe um residual $\mathcal{A}$ no conjunto dos $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfismos Axioma A não-Anosov e sem ciclos, cujos elementos $f \in \mathcal{A}$ são tais que $\mathcal{Z}^\infty(f)$ é trivial.

2.2.4 O “Problema 12 de Smale” em outras classes de difeomorfismos

Dentre as conclusões importantes sobre o Problema 12 de Smale que foram obtidos para certas classes particulares de difeomorfismos, podemos citar o resultado de Bonatti-Crovisier-Vago-Wilkinson [15], no qual eles provam que em qualquer variedade M compacta, conexa e tal que $dim(M) \geq 2$, se $Diff^1_\mu(M)$ denota o conjunto dos $\mathcal{C}^1$-difeomorfismos conservativos de M com respeito a uma medida de volume μ e $Symp^1(M)$ denota o conjunto dos difeomorfismos simpléticos de M, então $\mathcal{T}^1(M) \cap Diff^1_\mu(M)$ é residual em $Diff^1_\mu(M)$ e $\mathcal{T}^1(M) \cap Symp^1(M)$ é residual em $Symp^1(M)$.

Burslem [22] provou que no conjunto dos $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em uma variedade compacta, existe subconjunto $\mathcal{C}^1$-aberto e $\mathcal{C}^1$-denso $\mathcal{A}$ tal que se $f \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{Z}^r(f)$ é discreto. Ademais, sob algumas condições adicionais, ela prova ([22], Theorem 3.2) que existe um $\mathcal{C}^{\infty}$-residual local de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos cujos elementos têm centralizador trivial.

Burslem [23] também obteve resultados parciais acerca da trivialidade do centralizador de $\mathcal{C}^r$-difeomorfismos em $\mathbb{S}^2$ $(r \geq 16)$ que preservam orientação e preservam área. Walters [87](Theorem 2) verificou que homeomorfismos expansivos têm centralizador discreto. Rocha [72] provou que o centralizador analítico da Família de Hénon (em $\mathbb{R}^2$) $f_\rho(x, y) = (\rho - x^2 - y, x)$ é trivial para $\rho > -1$. Rocha-Varandas mostraram que [74] mostraram que genericamente, difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$ que exibem peça básica hiperbolica têm centralizador trivial.

2.3 Centralizador de operadores lineares em dimensão finita

Apesar de operadores lieares não estarem definidos em variedades compactas, a determinação do centralizador dos mesmos é importante quando se quer obter conclusões acerca do Problema 12 de Smale via teoremas de linearização local. Neste sentido, podemos citar os trabalhos de Palis-Yoccoz [59], Rocha [73] e Fisher [27]. Neste trabalho nós também utilizamos o Teorema de Kopell a seguir. Ademais, centralizadores de operadores lineares também constitui um assunto interessante por si só.

2.3.1 Centralizador de contrações lineares

É simples concluir que no caso unidimensional, qualquer $g \in Diff^1(\mathbb{R})$ que comuta com uma contração linear $f: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \lambda x \end{array}$, $(0 < |\lambda| < 1)$ é também uma aplicação linear. De fato, inicialmente observe que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comuta com f, então $g(0) = g(f(0)) = f(g(0))$ e como $0 \in \mathbb{R}$ é o único ponto fixo de f, necessariamente, $g(0) = 0$. Ademais, se $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
a = g^{'}(0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(\lambda^n x) - g(0)}{\lambda^n x - 0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{g(f^n(x)) - 0}{\lambda^n x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(g(x))}{\lambda^n x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n (g(x))}{\lambda^n x} \\
&= \frac{g(x)}{x},
\end{aligned}
$$

do que conclui-se que $g(x) = ax$. Noutras palavras, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma contração linear, então $\mathcal{Z}^1(f)$ é puramente linear. Ademais, a diferenciabilidade de g é imprescindível para a conclusão de sua linearidade neste caso. De fato, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dado por $g(x) =$

$\begin{cases} mx, \ x \geq 0 \\ nx, \ x \leq 0 \end{cases}$, $m \neq n$ e $m \cdot n > 0$, é um homomorfismo não linear que comuta com f.

A versão multidimensional para este resultado envolve condições de não-ressonância entre os autovalores da contração linear e foi determinada por Kopell [39]. Uma contração linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com autovalores são $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ contados de acordo com suas multiplicidades é não-ressonante se $\lambda_i \neq \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\alpha_j}$, onde cada α_j é inteiro não negativo com $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j > 1$. A condição de não-ressonância é aberta e densa no espaço vetorial topológico dos operadores lineares em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.1. *[Kopell, [39]] Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma contração linear, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ os autovalores reais de A e $\lambda_{r+1}, \overline{\lambda_{r+1}}, \cdots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda_{r+s}}$ os autovalores complexos de A ($r + 2s = n$), $\lambda^+ = \max\{|\lambda_i|\}$ e $\lambda^- = \min\{|\lambda_i|\}$, contados de acordo com suas respectivas multiplicidades e seja m o menor inteiro positivo tal que $(\lambda^+)^m < \lambda^-$. Se $B \in \mathcal{Z}^m(A)$, então B é um polinômio de grau menor do que m.*

Ademais, se os autovalores de A são não-ressonantes, então $\mathcal{Z}^m(A)$ é puramente linear, constituído por todos os operadores $B \in GL_n(\mathbb{R})$ que são diagonalizáveis numa mesma base que diagonaliza A. Além disto, o grupo $\mathcal{Z}^m(A)$ é algebricamente isomorfo a $\mathbb{R}^{r+s} \times (\mathbb{Z}_2)^r \times (\mathbb{S}^1)^s$.

A hipótese de não-ressonância no Teorema 2.3.1 é a mesma que aparece nos resultados de Sternberg ([81, 82, 83]) sobre linearização diferenciável. Neste Tabalho obtivemos uma versão deste Teorema de Kopell para fluxos (vide Lema 3.3.5).

Exemplo 2.3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear cuja representação matricial, com respeito a base canônica, é dada por $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$. Os difeomorfismos $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por $h(x, y) = (ax, by + cx^2)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ comutam com f. Noutras palavras, $\mathcal{Z}^\infty(f)$ não reduz-se a difeomorfismos lineares. isto mostra que a hipótese de não-ressonância no Teorema 2.3.1 é necessária.*

2.3.2 Centralizador analítico de selas lineares

Kopell [39] observou que se a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ for um ponto de sela para um difeomorfismo linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, então $\mathcal{Z}^\infty(f)$ nunca é trivial, exibindo o seguinte exemplo:

Exemplo 2.3.3 (Kopell [39], Remark 12)**.** *Considere o operador linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (\lambda x, \sigma y)$, onde $0 < \lambda < 1 < \sigma$. Existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma = \lambda^{-t}$ (ou equivalentemente, $\lambda^t \sigma = 1$).*

Sejam h_1 e h_2 duas funções em $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tais que $h_1(0) = 0 = h_2(0)$ e todas as derivadas n-ésimas de h_1 e h_2 anulam-se na origem.

Assim, se $a,\, b \in \mathbb{R}-\{0\}$, para aplicações não nulas $h_1,\, h_2 \in \mathcal{C}^\infty$ adequadas, a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,\, y) = (x[a + h_1(x^t y)],\, y[b + h_2(x^t y)]) = (ax,\, by) + (x\, h_1(x^t y),\, y\, h_2(x^t y))$$

é um $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfismo. Mais ainda, todo difeomorfismo que é desta forma comuta com f. De fato,

$$\begin{aligned} g(f(x,\, y)) &= g(\lambda\, x,\, \sigma\, y) \\ &= (a\,\lambda\, x,\, b\,\sigma\, y) + (\lambda\, x\, h_1((\lambda x)^t(\sigma y)),\, \sigma\, y\, h_2((\lambda x)^t(\sigma y))) \\ &= (a\,\lambda\, x,\, b\,\sigma\, y) + (\lambda\, x\, h_1((\lambda^t \sigma)(x^t y)),\, \sigma\, y\, h_2((\lambda^t \sigma)(x^t y))) \\ &= (a\,\lambda\, x,\, b\,\sigma\, y) + (\lambda\, x\, h_1(x^t y),\, \sigma\, y\, h_2(x^t y)) \\ &= (\lambda\, x[a + h_1(x^t y)],\, \sigma\, y\,[b + h_2(x^t y)]) \\ &= f(x[a + h_1(x^t y)],\, y[b + h_2(x^t y)]) \\ &= f(g(x,\, y)) \end{aligned}$$

Com base nesta observação de Kopell, neste Trabalho nós verificamos que, no entanto, o centralizador analítico de uma sela linear, cujos autovalores satisfazem condições de não-ressonância, é puramente linear.

Lema 2.3.4. *O centralizador analítico de uma sela linear não ressonante é puramente linear.*

Demonstração. Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma sela linear não ressonante e $f \in \mathcal{Z}^\omega(A)$, dado pelas coordenadas $f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n))$. Como os autovalores de A são não ressonantes, eles são distintos e com isto A é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$). Assim, a menos de uma conjugação (complexa) linear, podemos supor $A(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda_1\, x_1, \cdots, \lambda_n\, x_n)$. Por outro lado, a comutatividade

$$\begin{aligned} (f_1(\lambda_1\, x_1, \cdots, \lambda_n\, x_n), \cdots, f_n(\lambda_1\, x_1, \cdots, \lambda_n\, x_n)) & \\ &= f(\lambda_1\, x_1, \cdots, \lambda_n\, x_n) \\ &= f(A(x_1, \cdots, x_n)) \\ &= A(f(x_1, \cdots, x_n)) \\ &= A(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)) \\ &= (\lambda_1\, f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \lambda_n\, f_n(x_1, \cdots, x_n)) \end{aligned}$$

implica que $f_i(\lambda_1\, x_1, \cdots, \lambda_n\, x_n) = \lambda_i\, f_i(x_1, \cdots, x_n)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Seja

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \right]$$

a expansão de f_i em série de Taylor. Pela unicidade da representação dessa expansão, a igualdade $f_i(\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n) = \lambda_i f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ implica, para cada índice $k \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{1}{k!}\left[\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \cdot \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j)^{\alpha_j}\right]$$
$$= \lambda_i \frac{1}{k!}\left[\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}\right].$$

Em particular, para todo $k \geq 2$, esta igualdade implica que

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j)^{\alpha_j} = \lambda_i \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j},$$

ou $$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) \cdot \left[\lambda_1 - \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j)^{\alpha_j}\right] = 0.$$

Mas, a não ressonância dos autovalores garante que $\left[\lambda_1 - \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j x_j)^{\alpha_j}\right] \neq 0$ para todo $k \geq 2$. Com isto, necessariamente deve-se ter $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(0, \cdots, 0) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $k \geq 2$. Com isto, f deve ser linear. $\square$

2.4 Centralizador de campos vetoriais e fluxos

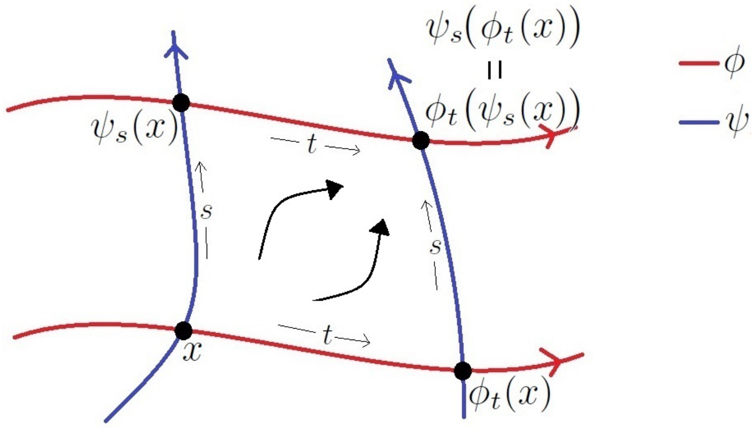
Definição 2.4.1 (Centralizador de um fluxo)**.** *Um fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe $\mathcal{C}^r$ em uma variedade M é comutativo com o fluxo de classe $\mathcal{C}^r$ $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$ se para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$. Com isto, define-se o centralizador de φ como sendo*

$$\mathcal{Z}^r(\varphi) = \{\text{fluxos de classe } \mathcal{C}^r\ \psi : \mathbb{R} \times M \to M : \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 2.4.2 (Centralizador de um campo vetorial)**.** *Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é comutativo com um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ se $[X, Y]$ for identicamente nulo. Define-se o* centralizador do campo X *do seguinte modo:*

$$\mathcal{Z}^r(X) = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M) : [X, Y] = 0\}.$$

A bilinearidade e continuidade do colchete de Lie, estabelecidas na Proposição 1.1.9 e no Lema 1.1.8, implicam que $\mathcal{Z}^r(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Além disto, os conceitos de comutatividade de fluxos e comutatividade de campos vetoriais são de fato duais, devido ao Teorema seguinte.



Teorema 2.4.3. *Em uma variedade M, dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, são tais que $[X, y] = 0$ se e somente se seus fluxos associados $(X_t)_t$ e $(Y_s)_s$ satisfazem $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ para quaisquer t, $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Vide Lee [40], Proposition 18.5. □

No exemplo a seguir, nós determinamos o centralizador do campo contante. Estes cálculos serão utilizados na prova do Lema 2.4.10, mas também é interessante por si só.

Exemplo 2.4.4. *[Centralizador do fluxo tubular] Seja $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$ o campo constante que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa o vetor $X(x) = (1, 0, \cdots, 0)$ e seja $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ dado pelas coordenadas $Y(x) = (Y_1(x), \cdots, Y_n(x))$. Neste caso,*

$$\begin{aligned} 0 = [Y, X] &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial Y_n}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Noutras palavras, $\dfrac{\partial Y_i}{\partial x_1} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e consequentemente, o campo Y não depende da coordenada x_1.

Para garantir a aplicabilidade do Exemplo 2.4.4, é necessário verificar que o mesmo preserva a estrutura local do centralizador de um campo vetorial no sentido que se M é uma variedade diferencial de dimensão n, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, $p \in M$ é um ponto regular de X, V_x é uma vizinhança em M centrada em x, $h : V_x \to h(V_x) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo e $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$, então os campos induzidos (pushforwards) h_*X e h_*Y em $h(V_x) \subset \mathbb{R}^n$ são tais que $[h_*X, h_*Y] = 0$. De fato, mais preciso do que isto, temos o seguinte

Teorema 2.4.5. *Sejam M e N variedades diferenciais de mesma dimensão e suponha que exista um difeomorfismo $h : M \to N$. Nestas condições, se $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, então $[X, Y] = [h_*X, h_*Y]$.*

Demonstração. Vide Lee [40], Corollary 8.31. □

Também, no exemplo seguinte apresentamos algumas propriedades do centralizador do centro linear em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.4.6. *[Centralizador do centro linear em $\mathbb{R}^2$] Considere o centro linear em $\mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (-y, x)$, ou o fluxo associado $(X_t)_t$, dado por $x_t = \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

É fácil determinar os campos lineares em $\mathcal{Z}^1(X)$, pois se um campo linear $Z(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ comuta com X, então

$$
\begin{aligned}
0 = [X, Z] &= \left(Z_1\frac{\partial X_1}{\partial x} - X_1\frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_2\frac{\partial X_1}{\partial y} - X_2\frac{\partial Z_1}{\partial y};\;\; Z_1\frac{\partial X_2}{\partial x} - X_1\frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2\frac{\partial X_2}{\partial y} - X_2\frac{\partial Z_2}{\partial y}\right) \\
&= \big(-(b+c)x + (-a+d)y;\;\; (a-d)x + (b-c)y\big),
\end{aligned}
$$

ou seja, $a = d$ e $c = -b$. Noutras palavras, o campo X comuta com os campos lineares da forma $Z(x, y) = (ax + by, -bx + ay)$ e reciprocamente, estes são os únicos campos lineares em $\mathbb{R}^2$ com esta característica. Entretanto, o campo X também comuta com campos não-lineares. Por exemplo, o campo Y em $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ e não-linear, definido por $Y(x, y) = \big(y + x(1 - x^2 - y^2),\; -x + y(1 - x^2 - y^2)\big)$, é tal que $[X, Y] = 0$. De fato, escrevendo $[X, Y](x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, temos

$$
\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \left(Y_1\frac{\partial X_1}{\partial x} - X_1\frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_2\frac{\partial X_1}{\partial y} - X_2\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)(x, y) \\
&= [y + x(1 - x^2 - y^2)] \cdot 0 + y \cdot [1 - 3x^2 - y^2] - [-x + y(1 - x^2 - y^2)] - x \cdot [1 - 2xy] \\
&= y - 3x^2y - y^3 + x - y + x^2y + y^3 - x + 2x^2y \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

e do mesmo modo,

$$
\begin{aligned}
f_2(x, y) &= \left(Y_1\frac{\partial X_2}{\partial x} - X_1\frac{\partial Y_2}{\partial x} + Y_2\frac{\partial X_2}{\partial y} - X_2\frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)(x, y) \\
&= [y + x(1 - x^2 - y^2)] \cdot 1 + y[-1 - 2xy] + [-x + y(1 - x^2 - y^2)] \cdot 0 - x[1 - x^2 - 3y^2] \\
&= y + x - x^3 - xy^2 - y - 2xy^2 - x + x^3 + 3xy^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Noutras palavras, $[X, Y] = 0$, neste caso.

Na verdade, como $(X_t)_t$ é um grupo a um parâmetro de rotações em $\mathbb{R}^2$, se $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ e $(Y_s)_s$ é o fluxo associado a Y, então $Y_s(X_t) = X_t(Y_s)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, mostrando que Y é um campo de classe $\mathcal{C}^r$ com simetria radial (com relação a origem), isto é, se $\mathcal{O}_Y(x)$ é uma órbita de Y, $X_t(\mathcal{O}_Y(x))$ também o é para qualquer t real.

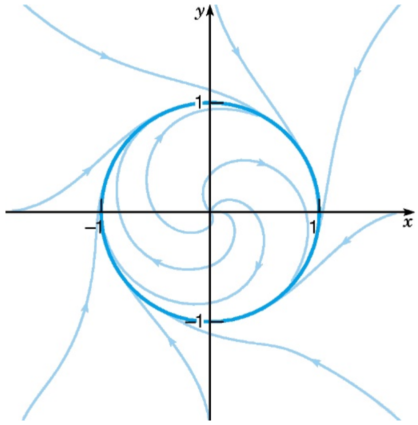


Figura 2.1: retrato de fase do campo Y.

2.4.1 Trivialidade do centralizador de campos vetoriais e fluxos

Definição 2.4.7. *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e conexo e $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo de classe $\mathcal{C}^r$ definido em M. Neste trabalho, diremos que o centralizador $\mathcal{Z}^r(\varphi)$ é* quase-trivial *se para todo $\psi \in \mathcal{Z}^r(\varphi)$ existir uma aplicação contínua $h : M \to \mathbb{R}$ invariante ao longo das órbitas de φ, isto é, $h(x) = h(\varphi(t, x))$, e tal que $\psi(t, x) = \varphi(h(x) \cdot t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$.*

Adicionalmente, se a aplicação A for constante, diremos que $\mathcal{Z}^r(\varphi)$ é trivial.

OBS: Oka [52] usou o termo "instável" ao referir-se a centralizadores quase-triviais, enquanto que Maquera e Tahzibi [43] usaram a denominação "trivial", ao fazerem menção ao mesmo. Neste trabalho entretanto, optamos pelas terminologias quase-trivial e trivial por analogia aos conceitos de centralizador discreto e centralizador trivial respectivamente, para os difeomorfismos. Mais especificamente, dado um fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ e uma função contínua $h : M \to \mathbb{R}$ invariante por órbitas de φ, então o fluxo ψ dado por $\psi(t, x) = \varphi(h(x) \cdot t, x)$ comuta com φ e com isto, a Definição 2.4.7 estabelece, num certo sentido, conceitos de minimalidade para centralizadores de fluxos, análogo as respectivas definições para difeomorfismos.

Considerada a dualidade entre os conceitos de comutatividade de fluxos suaves e de seus respectivos campos vetoriais dada pelo Teorema 2.4.3, um conceito análogo ao estabelecido para fluxos na Definição 2.4.7 pode ser definido para Campos vetoriais:

Definição 2.4.8. *Sejam M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Diremos que $\mathcal{Z}^r(X)$ é* centralizador quase-trivial *se para todo $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ existir $h \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ tal que $Y = h \cdot X$ e $X(h) = 0$.*

Do mesmo modo, centralizadores quase-triviais de campos são minimais.

Lema 2.4.9. *Seja M uma variedade compacta. $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ tem centralizador quase-trivial se e somente se seu fluxo associado $(X_t)_t$ tem centralizador quase-trivial.*

Demonstração. Inicialmente, a igualdade $X(h) = 0$ é equivalente a dizer que h é constante ao longo das órbitas de $(X_t)_t$. De fato, se $x \in M$ é um ponto regular do campo X, a menos de considerar uma carta local, pelo Teorema do fluxo tubular 1.1.4, pode-se supor que X é o campo constante dado por $X(x) = (1, 0, \cdots, 0)$. Com isto, de acordo com o Teorema 2.4.5 e Exemplo 2.4.4, $0 = X(h) = \dfrac{\partial h}{\partial x_1}$ é equivalente a dizer que h não depende da coordenada x_1, o que por sua vez é equivalente a dizer que h é constante ao longo das curvas $(t, 0, \cdots, 0)_t$ que são as órbitas do fluxo $(X_t)_t$.

O caso de uma singularidade que é acumulada por órbitas regulares decorre do caso tratado no parágrafo anterior, por um argumento de continuidade.

No caso em que x_0 é uma singularidade e existe uma vizinhança V_{x_0} centrada em x_0 tal que $X_{V_{x_0}}$ é o campo nulo, trivialmente, qualquer $h \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$ é tal que $X(h) = 0$ em V_{x_0} e também é constante ao longo das órbitas contidas em V_{x_0}, pois elas resumem-se a pontos singulares, neste caso.

Com isto, suponha que $\mathcal{Z}^{r+1}((X_t)_t)$ é quase-trivial, isto é, para todo $(Y_s)_s \in \mathcal{Z}^{r+1}((X_t)_t)$ existe $h \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ constante ao longo das órbitas de $(X_t)_t$ e tal que $Y_t(x) = X(h(x)t, x)$.

Neste caso, $Y(x) = \dfrac{d}{dt}Y_t(x)_{t=0} = \dfrac{d}{dt}X_{h(x)\cdot t}(x)_{t=0} = h(x)X(x)$.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{Z}^r(X)$ é quase-trivial, isto é, Para cada $Y \in \mathcal{Z}^r(X)$ existe $h \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$ tal que $X(h) = 0$ e $Y = h \cdot X$.

Neste caso, fixado $x_0 \in M$ arbitrariamente, $Y_t(x_0)$ é a solução do Problema de Valor Inicial $\begin{cases} x' = Y(x) = h(x) \cdot X(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. Entretanto, $X_{h(x_0)\cdot t}(x_0)$ também é solução deste Problema, e neste caso pelo Teorema de existência e unicidade de Picard, $Y_t(x_0) = X_{h(x_0)\cdot t}(x_0)$. De fato, como $X(h) = 0$ ou equivalentemente, h é constante ao longo das órbitas de X, se $u = h(x_0) \cdot t$, $\dfrac{d}{du}(X_{h(x_0)\cdot t}(x_0)) = h(x_0)\dfrac{d}{du}X_u(x_0) = h(X_s(x_0))\dfrac{d}{du}X_u(x_0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Mas quando o centralizador de um campo vetorial / fluxo é trivial? Neste sentido, o teorema seguinte que obtivemos apresenta condições suficientes para que um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ em uma variedade riemanniana compacta tenha centralizador trivial.

Teorema A. *[Critério para a trivialidade do centralizador de campos vetoriais] Seja M uma variedade diferencial compacta, $r \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ um campo vetorial e $(X_t)_t$ o fluxo associado a X. Suponha que*

1. *$(X_t)_t$ é transitivo,*
2. *$Per((X_t)_t)$ é denso em M,*
3. *órbitas periódicas distintas de $(X_t)_t$ de mesmo período são isoladas entre si (isto ocorre em particular se órbitas distintas de $(X_t)_t$ têm períodos distintos).*

Nestas condições, $\mathcal{Z}^1(X) = \{Y \in \mathfrak{X}^1(M) : [X, Y] = 0\}$ *é trivial, isto é,* $\mathcal{Z}^1(X) = \{c \cdot X : c \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração. Se $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $Y \in \mathcal{Z}^1(X)$, de acordo com o Teorema 2.4.3, seus fluxos associados $(X_t)_t$ e $(Y_s)_s$ são tais que $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ para quaisquer t, $s \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, para cada $s \in \mathbb{R}$, $Y_{-s} \circ X_t \circ Y_s = X_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostrando que o difeomorfismo Y_s é uma conjugação entre o fluxo $(X_t)_t$ consigo mesmo.

Com isto, cada difeomorfismo Y_s transforma cada órbita periódica γ_1 do fluxo $(X_t)_t$ numa órbita periódica γ_2 de $(X_t)_t$, de mesmo período que γ_1. De fato, se $\pi(\gamma_1)$ é o período de γ_1 e $p \in \gamma_1$, isto é, $X_{\pi(\gamma_1)}(p) = p$, segue que $Y_s(p) = Y_s(X_{\pi(\gamma_1)}(p)) = X_{\pi(\gamma_1)}(Y_s(p))$. por outro lado, se γ é uma órbita periódica de $(X_t)_t$, as órbitas periódicas $\{Y_s(\gamma)\}_{s\in\mathbb{R}}$ têm todas o mesmo período e variam continuamente com $s \in \mathbb{R}$, visto que $(Y_s)_s$ é um fluxo contínuo. Mas, por hipótese, órbitas periódicas distintas de $(X_t)_t$ de mesmo período são isoladas entre si, de modo que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$ tem-se $Y_s(\gamma) = \gamma$ e em γ o campo Y é, para cada ponto de γ, colinear a X.

Por outro lado, as órbitas periódicas de X são densas em M, de modo que, pontualmente em $Per(X)$, o campo Y é colinear a X. Isto implicará na existência de uma aplicação contínua $h : M \setminus Sing(X) \to \mathbb{R}$ unicamente definida e tal que $Y(x) = h(x) \cdot X(x)$ para todo $x \in M \setminus Sing(X)$. Mais precisamente, provaremos agora o seguinte resultado auxiliar:

Lema 2.4.10. *Seja* $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ *um campo vetorial tal que* $\overline{Per(X)} = M$ *e órbitas periódicas distintas de* $(X_t)_t$ *de mesmo período são isoladas entre si. Se* $Y \in \mathcal{Z}^1(X)$, *então existe uma aplicação* $h : M \setminus Sing(X) \to \mathbb{R}$ *tal que* $Y(x) = h(x) \cdot X(x)$ *para todo* $x \in M \setminus Sing(X)$. *Ademais, esta aplicação* h *satisfaz*

(a) *h é unicamente definida;*

(b) *h é constante ao longo das órbitas regulares de X;*

(c) *h é contínua.*

Prova do Lema. Inicialmente, suponha por contradição que exista $x_0 \in M \setminus Sing(X)$ tal que os vetores $X(x_0)$ e $Y(x_0)\}$ são linearmente independentes e considere a aplicação contínua $r : M \setminus Sing(X) \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = Y(x) - \dfrac{\langle Y(x),\, X(x)\rangle_x}{\langle X(x),\, X(x)\rangle_x} \cdot X(x)$, onde $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_x$ denota a métrica riemanniana de M. Observe que $r(x_0) \neq 0$ e por continuidade existe uma vizinhança $V_{x_0} \subset M$ centrada em x_0 tal que $r(x) \neq 0$ para todo $x \in V_{x_0}$. Mas isto não pode ocorrer, visto que $r(x) = 0$ para todo $x \in Per((X_t)_t)$ e $Per((X_t)_t)$ é denso em M. Logo, r é identicamente nula em M.

A conclusão de (a) é imediata: se existirem h_1, $h_2 : M \setminus Sing(X) \to \mathbb{R}$ tais que $h_1(x)\, X(x) = Y(x) = h_2(x)\, X(x)$, então $(h_1(x) - h_2(x))\, X(x) = 0$ e como $X(x)$ é um vetor não nulo, segue que $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in M \setminus Sing(X)$.

Mostremos (b). Sejam p ponto regular de X e $\varphi : V_p \to \varphi(V_p) \subset \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ dados pelo Teorema do fluxo tubular (Teorema 1.1.4). $X_{|V_p}$ é $\mathcal{C}^1$-conjugado ao campo constante $X(x) = (1, 0, \cdots, 0)$ e neste caso, se $Y \in \mathcal{Z}^1(X)$ fixa as órbitas de X, isto é, $Y(x) = (h(x), 0, \cdots, 0)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, então pela descrição do centralizador do campo constante (Exemplo 2.4.4), h não depende da direção do campo X, logo é constante ao longo das órbitas de X. Noutras palavras, $h(x) = h(X_t(x))$ para todo $x \in M \setminus Sing(X)$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

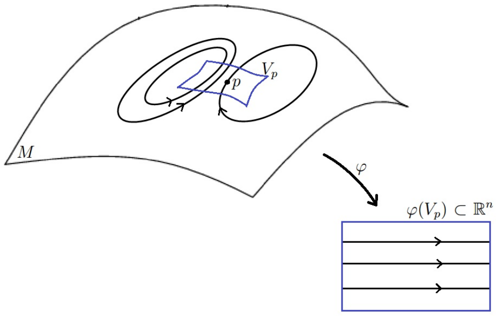


Figura 2.2: Item b).

A demonstração de (c) é, num certo sentido, similar aos cálculos que foram feitos na demonstração do Lema 3.3.2. Inicialmente, pelo Lema 2.4.9, a igualdade $Y(x) = h(x)\,X(x)$ implica que $(X_t)_t$ e $(Y_s)_s$, os fluxos associados a X e Y respectivamente, são tais que $Y_t(x) = X_{h(x)\cdot t}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in M \setminus Sing(X)$. Com isto, se a reparametrização h não fosse contínua, existiria $\delta_0 > 0$, $(s, x) \in \mathbb{R} \times (M \setminus Sing(X))$ e uma sequência $(s_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R} \times (M \setminus Sing(X))$ tal que $(s_n, x_n) \to (s, x)$ mas $|h(x_n) \cdot s_n - h(x) \cdot s| \geq \delta_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como x é ponto regular, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x),\ X_{h(x)\cdot s}(x)) \geq \delta_1$ e por outro lado,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\leq d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x),\ X_{h(x)\cdot s}(x)) \\
&\leq d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x),\ X_{h(x_n)\cdot s_n}(x_n)) + d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x_n),\ X_{h(x)\cdot s}(x)) \\
&= d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x),\ X_{h(x_n)\cdot s_n}(x_n)) + d(Y_{s_n}(x_n),\ Y_s(x)).
\end{aligned}$$

Por continuidade, $X(x) = \lim_{n\to\infty} X(x_n)$. Assim, segue que existe $\lim_{n\to\infty} |h(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \|Y(x_n)\|/\|X(x_n)\|$ e disto conclui-se que a sequência $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Com isto, a menos de considerar uma subsequência, suponha que $h(x_n) \cdot s_n \to t_0$ quando $n \to \infty$. Assim, o lado direito da desigualdade $\delta_1 \leq d(X_{h(x_n)\cdot s_n}(x),\ X_{h(x_n)\cdot s_n}(x_n)) + d(Y_{s_n}(x_n),\ Y_s(x))$ tende a 0 pela continuidade do fluxo de X e da aplicação tempo-t_0 X_{t_0}, o que é contraditório com a existência de $\delta_1 > 0$. Isto prova a continuidade de h e consequentemente, o Lema 2.4.10 está provado.

Finalmente, como o fluxo $(X_t)_t$ é transitivo, existe $x_0 \in M$ tal que $\overline{\{X_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}} = M$. Com isto, dado $x \in M$, existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{R}$ tal que $X_{t_n}(x_0) \to x$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, a continuidade de $h : M \setminus Sing(X) \to \mathbb{R}$ e sua invariância ao longo das órbitas de $(X_t)_t$ implica que

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(X_{t_n}(x_0)) = \lim_{n\to\infty} h(x_0) = h(x_0).$$

Noutras palavras, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = c$ para todo $M \setminus Sing(X)$ e por causa disto ela pode ser estendida a uma aplicação definida em M, de modo que $Y(x) = c\,X(x)$ para todo $x \in M$. Isto prova a trivialidade do centralizador. $\square$

O Teorema A, apesar de simples, por si só estabelece conexão entre a caoticidade para campos vetoriais e a trivialidade do centralizador do mesmo. Por exemplo, campos vetoriais conservativos em variedades riemannianas compactas genericamente satisfazem as hipóteses do Teorema A e por isso utilizaremo-no na Seção 5.1 para provar que a versão para campos vetoriais conservativos da Conjectura de Smale sobre a trivialidade do centralizador é verdadeira. Vale citar o Trabalho de Bonatti-Crovisier-Wilkinson [15], no qual os autores provam que $\mathcal{C}^1$-genericamente, difeomorfismos conservativos (e simpléticos) em variedades compactas e conexas M têm centralizador trivial, sendo que a técnica mais importante que foi empregada na dedução deste resultado é a propriedade de distorção ilimitada em $Diff^1_\mu(M)$ e boa parte do referido trabalho é destinada a provar que a propriedade distorção ilimitada é genérica.

Similarmente, o Teorema A também será aplicado para dedução que residualmente campos hamiltonianos $\mathcal{C}^\infty$-genéricos em variedades simpléticas compactas têm centralizador quase-trivial (Teorema G, p. 73).

2.4.2 Centralizadores de algumas classes de campos vetoriais e fluxos

Ao contrário do caso de difeomorfismos, aparentemente não há uma literatura tão vasta sobre centralizadores de campos vetoriais e fluxos. Abaixo, segue os resultados sobre centralizadores de campos vetoriais (ou fluxos) encontrados, que como no caso de difeomorfismos, majoritariamentte referem-se ao centralizador de fluxos com algum tipo de hiperbolicidade:

[1973, Kato-Morimoto, [34] Theorem B]. Seja M uma variedade compacta de classe $\mathcal{C}^\infty$. Um campo vetorial em $\mathfrak{X}^1(M)$ cujo fluxo associado é Anosov tem centralizador quase-trivial.

Generalizando este resultado de Kato e Morimoto, Oka obteve o seguinte resultado:

[1976, Oka, [52] Theorem 1]. Fluxos C-expansivos definidos em espaços métricos compactos e conexos têm centralizador quase-trivial.

Sad, em seu doutoramento [75], obteve a seguinte versão para fluxos, do resultado de Palis [57] para difeomorfismos Axioma A com transversalidade forte:

[1978, Sad, [76]]. Existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^\infty$-campos veroriais Axioma A com transversalidade forte, tal que se $X \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{Z}^\infty(X)$ é trivial.

Semelhante ao Teorema A, Jungreis e Hirsch [33] haviam provado que se $(\phi_t)_t$ é um fluxo Anosov definido em uma variedade fechada e $f \in Homeo(M)$ é um homeomorfismo tal que $f \circ \phi_t = \phi_t \circ f$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e além disso, $f(\gamma) = \gamma$ para qualquer órbita periódica γ de $(\phi_t)_t$, então $f = \phi_{t_0}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Neste sentido, temos a seguinte versão para o resultado de Kato e Morimoto ([34], Theorem B) sobre a trivialidade do centralizador de fluxos Anosov, citado anteriormente:

Exemplo 2.4.11. *O Critério para a trivialidade do centralizador de campos vetoriais (Teorema A) implica que se uma variedade riemanniana compacta M que admite campos vetoriais Anosov transitivos e se $\mathcal{AN}^r(M)$ é o conjunto dos campos vetoriais Anosov transitivos de classe $\mathcal{C}^r$ em M, $r \geq 1$, e $X \in \mathcal{AN}^r(M)$, então $\mathcal{Z}^1(X)$ é trivial.*

De fato, como $X \in \mathcal{AN}^r(M)$ é Anosov, as órbitas periódicas de X são densas em $\Omega(X) = M$ e a hiperbolicidade de X implica que órbitas de mesmo período são isoladas entre si. Com isto, o Teorema A se aplica, revelando que $\mathcal{Z}^1(X)$ é trivial.

Capítulo 3

A conjectura de Smale para fluxos Komuro-expansivos

O resultado principal deste Capítulo é o Teorema B que estabelece a existência de um conjunto aberto de fluxos φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ com singularidades hiperbólicas não-ressonantes e que satisfazem a Komuro-expansividade quando restrito a um compacto φ-invariante $\Lambda \subset M$, cujos elementos têm centralizador quase-trivial. No Exemplo 3.4.1 verificamos que este resultado que obtivemos contém o atrator de Lorenz clássico como caso particular. Além disto, este resultado principal também é compatível com outras definições de expansividade apresentadas por Artigue (Exemplos 3.4.3 e 3.4.4).

3.1 Expansividade

Uma questão natural que surge é a de introduzir o conceito de expansividade para fluxos. Nessa direção, uma das primeiras tentativas que apareceram consta no trabalho de Norton e OBrien [50], no qual os autores propoem que uma ação π de um grupo topológico G em um espaço métrico (M, d) é expansiva se existir $\varepsilon > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ distintos existe $g \in G$ tal que $d(\pi(g, x), \pi(g, y)) > \varepsilon$. Entretanto esta definição conduz a conclusões não muito empolgantes, visto que o autor prova ([50], Proposition 3.1) a inexistência de fluxos expansivos, segundo esta definição, em espaços métricos compactos infinitos.

Na tentativa de deteminar definições de expansividade para fluxos mais "interessantes" que a de OBrien, Bowen e Walters [20] introduziram a noção que detalharemos na Subsecção 3.1.1 a seguir.

3.1.1 C-expansividade

Definição 3.1.1 (C-expansividade, Bowen-Walters [20]). *Seja (M, d) um espaço métrico* *compacto, $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ um fluxo contínuo e $\Lambda \subseteq M$ um compacto φ-invariante. O fluxo φ é dito* C-expansivo em Λ *se para todo $\varepsilon > 0$ dado existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ e $d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para alguma função contínua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(0) = 0$, então $y = \varphi_{t_0}(x)$, onde $|t_0| < \varepsilon$. Em particular, y está na órbita de x, relativo ao fluxo φ.*

Bowen e Walters mostraram ([20], Lemma 1) que se $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ é um fluxo C-expansivo definido em um espaço métrico M, então as singularidades de $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ são pontos isolados de M. Assim, fluxos C-expansivos definidos em variedades diferenciáveis conexas não admitem singularidades. Paternain [62] mostrou que fluxos Bowen-expansivos não possuem pontos estáveis e se a variedade tem dimensão três, então o fluxo possui estrutura de produto local. Por outro lado, He e Shan [31] provaram a inexistência de fluxos expansivos em variedades compactas bidimensionais. Paternain [62] provou que se uma variedade tridimensional compacta e conexa M suporta fluxos C-expansivos, então o grupo fundamental de M tem crescimento exponencial.

C-expansividade versus robustez

Em uma variedade diferenciável fechada M de classe $\mathcal{C}^\infty$ considere $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ um campo vetorial sem singularidades, $\mathcal{N} \subset TM$ o subfibrado tal que a fibra $\mathcal{N}_x$ em $x \in M$ é o subespaço vetorial de T_xM constituído pelos vetores ortogonais a $X(x)$, $\pi : TM \to \mathcal{N}$ a projeção ao longo de $x \in M$ que a cada vetor $v \in T_xM$ associa a sua projeção ortogonal em $\mathcal{N}_x$, e seja $F_x^t(v) = \pi(D_x X_t(v))$ onde $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ é o fluxo linear de Poincaré associado a X, $x \in M$ e $v \in \mathcal{N}_x$.

Um campo $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ sem singularidades é *quase-Anosov* se para $v \in \mathcal{N}_x$ e $\sup_{t\in\mathbb{R}} ||F_x^t(v)|| < \infty$, então $v = 0$.

Um fluxo $(X_t)_t$ gerado por um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ é *Anosov* se toda variedade M é um conjunto hiperbólico para $(X_t)_t$. Se um fluxo é Anosov, então ele é quase-anosov, mas a recíproca não vale. De fato, Robinson [67] apresentou um exemplo de um fluxo quase-Anosov e que não é Anosov, definido em uma determinada variedade compacta de dimensão 11.

Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ definido em uma variedade compacta M de classe $\mathcal{C}^\infty$ é dito *robustamente C-expansivo* se existir uma vizinhança de X na topologia $\mathcal{C}^1$ formada apenas por campos C-expansivos. Moriyasu, Sakai e Sun [46] provaram a seguinte caracterização de campos robustamente C-expansivos:

Teorema 3.1.2. *(Moriyasu-Sakai-Sun [46], Theorem A) Para $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ as seguintes condições são mutuamente equivalentes:*

1. *X é robustamente C-expansivo;*

2. *X é quase-Anosov;*

3. *X não admite singularidades e satisfaz o Axioma A e a condição de quase-tranversalidade.*

Como corolário deste resultado, os autores provam que um fluxo é robustamente Bowen-expansivo e possui propriedade de sombreamento se, e somente se, ele é estruturalmente estável, e portanto Anosov, isto é,

Teorema 3.1.3. *(Moriyasu-Sakai-Sun [46], Theorem B) Para $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ as seguintes condições são mutuamente equivalentes:*

1. *X é robustamente C-expansivo e satisfaz a propriedade de sombreamento;*
2. *X é robustamente C-expansivo e estruturalmente estável;*
3. *X é Anosov.*

3.1.2 K-expansividade

Ao final da década de 70, Keynes e Sears [36], no contexto de ações de grupos, apresentaram definições de expansividade, a priori mais fracas do que C-expansividade. Dentre elas, a seguinte

Definição 3.1.4 (K-expansividade, Keynes-Sears [36])**.** *Seja (X, d) um espaço métrico compacto, $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ um fluxo contínuo e $\Lambda \subseteq X$ um compacto φ-invariante.* φ é K-expansivo em Λ *se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ e $d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(0) = 0$, então $y = \varphi_{t_0}(x)$, onde $|t_0| < \varepsilon$. Em particular, y está na órbita de x, relativo ao fluxo φ.*

Entretanto, vale o

Teorema 3.1.5 (Araújo-Pacífico [5], Proposition 2.12)**.** *Em variedades diferenciáveis, C-expansividade é equivalente a K-expansividade.*

3.1.3 Komuro-expansividade

O atrator de Lorenz não é C-expansivo pois apresenta uma singularidade que é acumulada por órbitas regulares do atrator. Com isto uma pergunta natural que surge é determinar uma definição de expansividade que generalize a C-expansividade e que contenha o atrator de Lorenz como caso particular. Neste sentido, Komuro [37] apresentou a seguinte

Definição 3.1.6. *[Expansividade, Komuro [37]] Seja (M, d) um espaço métrico compacto, $\varphi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um fluxo contínuo e $\Lambda \subseteq M$ um compacto φ-invariante.* φ é expansivo em Λ *se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ satisfazem $d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,, então existe t_0 tal que $\varphi_{h(t_0)}(y) = \varphi_\eta(x)$, com $\eta \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Em particular, y está na órbita de x, relativo ao fluxo φ.*

Campos que satisfazem a Komuro-expansividade podem admitir singularidades. Entretanto, como ocorre no caso da C-expansividade, se um campo X é Komuro-expansivo, então $Sing(X)$ é um conjunto discreto. De fato, se assim não fosse, se σ é uma singularidade de X, tomando $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\delta = \varepsilon$ e $h = Id$, como na Definição 3.1.6, se x_0 é uma singularidade de X tal que $d(\sigma, x_0) < \varepsilon$, $d(X_t(\sigma), X_{Id(t)}(x_0)) = d(\sigma, x_0) < \delta = \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $(X_t)_t$ é o fluxo associado a X, pela Komuro-expansividade de X, x_0 deve estar na órbita de σ e portanto $x_0 = \sigma$.

Do que se discutiu acima, C-expansividade $\Leftrightarrow$ K-expansividade $\Rightarrow$ Expansividade. Por outro lado, sob certas hipóteses, vale a implicação recíproca. Mais precisamente, temos o

Teorema 3.1.7 (Oka [53], Theorem A). *Se $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ é um fluxo sem singularidades em um compacto φ-invariante Λ, então C-expansividade é equivalente a expansividade.*

komuro-expansividade robusta

Um campo vetorial é $\mathcal{C}^1$-robustamente Komuro-expansivo se ele admite uma vizinhança $\mathcal{V}$ (na topologia $\mathcal{C}^1$) constituída apenas por campos Komuro-expansivos. Seja $\mathcal{E}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais $\mathcal{C}^1$-robustamente Komuro-expansivos. Vale o seguinte

Teorema 3.1.8 (Senos [77], Teorema A). *Se $X \in \mathcal{E}(M)$, então as singularidades de X, caso existam, são hiperbólicas.*

3.1.4 Outras noções de expansividade para fluxos

Artigue [8] apresentou as seguintes definições mais gerais de campos vetoriais expansivos:

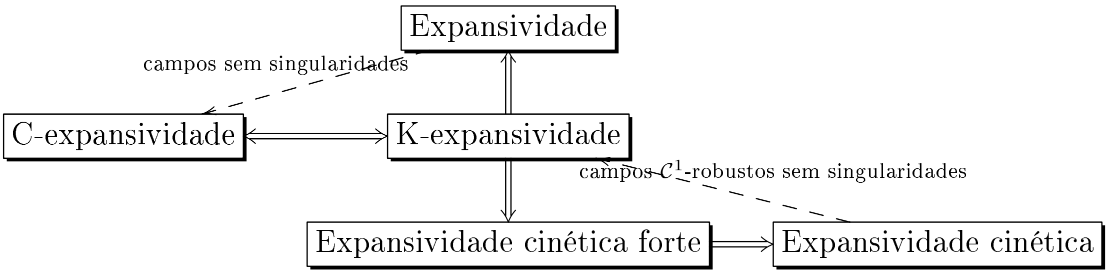
Definição 3.1.9. *Um fluxo ϕ é* cinemático-expansivo *se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $y = \phi_s(x)$.*

Definição 3.1.10. *Um fluxo $(\phi_t)_t$ é* fortemente cinemático-expansivo *se qualquer reparametrização temporal de ϕ é um fluxo cinemático-expansivo.*

Um campo vetorial X é $\mathcal{C}^1$-robustamente cinemático expansivo se existe uma $\mathcal{C}^1$-vizinhança $\mathcal{V}$ de X tal que todo campo vetorial em $\mathcal{V}$ é cinemático expansivo. Ademais, vale o

Teorema 3.1.11 (Artigue [8], Theorem 7.5). *Todo campo vetorial definido em uma a variedade fechada que é $\mathcal{C}^1$-robustamente cinemático expansivo e sem singularidades é K-expansivo.*

Resumidamente, as diferentes noções de expansividade para fluxos, apresentadas nesta Secção, relacionam-se segundo o seguinte diagrama:



3.2 Resultados principais do capítulo 3

Dados um fluxo φ um fluxo expansivo de classe $\mathcal{C}^r$ em uma variedade compacta e conexa M e $\Lambda \subset M$ um compacto φ-invariante, considerada a restrição $\varphi_{|\Lambda}$ do fluxo φ a Λ, definimos

$$\mathcal{Z}^r(\varphi_{|\Lambda}) = \{\psi_{|\Lambda} : \ \psi \in \mathcal{Z}^r(\varphi)\}.$$

$\mathcal{Z}^r(\varphi_{|\Lambda})$ é dito ser quase-trivial se para qualquer $\psi \in \mathcal{Z}^r(\varphi)$ existe uma aplicação contínua $A : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $A(x) = A(\varphi_t(x))$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Lambda)$ e $\psi(t, x) = \varphi_{A(x)t}(x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Lambda$.

Teorema B. *Seja φ um fluxo expansivo de classe $\mathcal{C}^\infty$, definido numa variedade riemanniana compacta e conexa M e seja $\Lambda \subset M$ um compacto φ-invariante tal que φ é Komuro-expansivo em Λ. Se todas as singularidades de φ em Λ são hiperbólicas e não-ressonantes, então $\mathcal{Z}^\infty(\varphi_{|\Lambda})$ é quase-trivial.*

Pela dualidade existente entre fluxos suaves que comutam e e comutatividade de seus respectivos campos vetoriais associados, como estabelecida pelo Teorema 2.4.3, o Teorema B implica no seguinte caso particular, reformulado em termos de campos vetoriais:

Teorema C. *Se $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ gera um fluxo expansivo em uma variedade riemanniana M compacta e conexa cujas singularidades são hiperbólicas e não-ressonantes, então para qualquer $Y \in \mathcal{Z}^\infty(X)$ existe $h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $Y = h \cdot X$ e $X(h) = 0$.*

Via a decomposição espectral nas (finitas peças básicas do conjunto não-errante, Sad [76] (Theorem B) provou que existe um suconjunto aberto e denso A'_τ de campos vetoriais em $\mathfrak{X}^\infty(M)$ que satisfazem o Axioma A e a condição de transversalidade forte, tal que $\mathcal{Z}^\infty(X) = \{cX : c \in \mathbb{R}\}$ para todo campo $X \in A'_\tau$. O seguinte pode ser entendido como uma extenção de [76], onde a expansividade e não-ressonância (condição aberta e densa) substitui a uniformidade hiperbólica nas hipóteses do resultado de [76].

Corolário 1. *Seja φ um fluxo expansivo de classe $\mathcal{C}^\infty$, definido numa variedade compacta e conexa, cujas singularidades $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ são hiperbólicas e não-ressonantes e além disso, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^s(\sigma_i)} = M$ (ou $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^u(\sigma_i)} = M$), então $\mathcal{Z}^\infty((\varphi_t)_t) = \{(\varphi_{ct})_t;\, c \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração. Sejam $\psi \in \mathcal{Z}^\infty(\varphi)$ e $A : M \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(t, x) = \varphi(A(x)t, x)$, como no Teorema B. Pelo lema 3.3.7, A é constante em cada $\overline{W^s(\sigma_i)}$, assim a imagem de A é constituída apenas por um número finito de valores. Com isto, da conexidade de M e continuidade de A conclui-se que A é constante. Consequentemente, $\psi_t(x) = \varphi_{ct}(x)$, para algum $c \in \mathbb{R}$. □

Naturalmente, o Corolário 1 admite a seguinte reformulação em termos de campos vetoriais:

Corolário 2. *Seja $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, M variedade compacta e conexa, um campo expansivo cujas singularidades são hiperbólicas e não-ressonantes e além disso, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^s(\sigma_i)} = M$ (ou $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^u(\sigma_i)} = M$), então $\mathcal{Z}^\infty(X) = \{cX;\, c \in \mathbb{R}\}$.*

Os resultados prévios têm implicação no estudo de centralizadores de $\mathbb{R}^d$-ações suaves que admitem sub-ações unidimensionais (fluxos) expansivas. Por exemplo, o seguinte é uma consequência do Teorema B:

Corolário 3. *Seja M um espaço métrico compacto e $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação de classe $\mathcal{C}^1$. Se existe $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tal que o fluxo $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$ é expansivo, então as órbitas da ação coincidem com as órbitas de $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$.*

Mais ainda, se $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$ admite as singularidades $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ e as mesmas são hiperbólicas e não-ressonantes, e além disso, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^s(\sigma_i)} = M$ (ou $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^u(\sigma_i)} = M$), então Φ é definida por um fluxo.

Demonstração. Seja $\{v, u_2, u_3, \cdots, u_d\}$ uma base de $\mathbb{R}^d$ contendo o vetor v como no enunciado. Como o fluxo $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$ é expansivo, pelo Teorema B, para cada $2 \le i \le d$ existe uma função $A_i : X \to \mathbb{R}$ invariante pelas órbitas de $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$ e tal que $\Phi_{u_i}(t, x) = \Phi_v(A_i(x)t, x)$. Consequentemente, $\Phi(t_1 \cdot v + t_2 \cdot u_2 + \cdots + t_d \cdot u_d, x) = \Phi_v(t_1 + A_2(x) \cdot t_2 + \cdots + A_d(x) \cdot t_d, x)$.

Em particular, se $(\Phi_{t\,v})_{t\in\mathbb{R}}$ admite singularidades hiperbólicas e não-ressonantes $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ e além disso, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^s(\sigma_i)} = M$ (ou $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W^u(\sigma_i)} = M$), então para cada $2 \le i \le d$ existe $c_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(t_1 \cdot v + t_2 \cdot u_2 + \cdots + t_d \cdot u_d, x) = \Phi_v(t_1 + c_2 \cdot t_2 + \cdots + c_d \cdot t_d, x)$, noutras palavras, Φ é definida por um fluxo. □

3.3 Prova da trivialidade do centralizador de fluxos expansivos

Nesta secção provaremos o Teorema B, que é um dos resultados principais deste trabalho. Ele será obtido como consequência dos resultados apresentados a seguir nesta secção. Inicialmente, no próximo Lema provaremos a existência de ínfimo positivo para os períodos das órbitas periódicas de pontos regulares de $\varphi_{|\Lambda}$, caso elas existam.

Lema 3.3.1. *Sejam φ um fluxo de classe $\mathcal{C}^1$ definido em uma variedade compacta M e $\Lambda \subset M$ um subconjunto compacto e φ-invariante tal que todas as singularidades de φ em Λ são hiperbólicas. Nestas condições, ou $\varphi_{|\Lambda}$ não admite órbitas periódicas, ou*

$$\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda}) = \inf\{T > 0;\ T \text{ é período de uma órbita periódica de } \varphi_{|\Lambda}\} > 0.$$

Demonstração. Assuma que $\varphi_{|\Lambda}$ admita órbitas periódicas. Como as singularidades são hiperbólicas e Λ é compacto, elas ocorrem em um número finito $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ seja V_i uma vizinhança aberta de σ_i suficientemente pequena dada pelo Teorema de Hartman-Grobman 1.1.6. Nenhuma tal V_i que seja vizinhança de poços ou fontes contém pontos periódicos de φ. Por outro lado, se uma órbita periódica intersecta uma vizinhança V_i associada a uma singularidade de tipo sela, então seu período é uniformemente limitado por uma constante uniforme (que é inversamente proporcional ao maior autovalor entre os subsepaços instáveis das selas hiperbólicas).

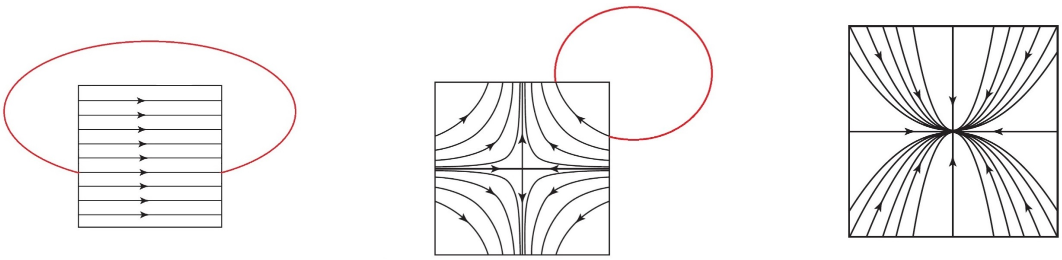


Figura 3.1: Existência de ínfimo positivo para as órbitas periódicas.

Resta provar que existe $c > 0$ tal que todas as órbitas periódicas em $S = \Lambda \cap \left(M \setminus \bigcup_{i=0}^{n} V_i\right)$ têm período maior do que c. Para todo $x \in S$ seja $\delta_x > 0$ e $B_x = U_x^{\delta_x}$ a vizinhança tubular associada a x (vide o Teorema do fluxo tubular 1.1.4). Como por construção, S é um compacto sem singularidades e $(B_x)_{x\in S}$ é uma cobertura de S, ela admite uma subcorbertura finita $\left(B_{x_j}\right)_{j=1}^{k}$. Consequentemente, toda órbita periódica tem período maior do que $\min_{1\leq j\leq k}\{\delta_{x_j}\}$, o que termina a prova do Lema. $\square$

3.3.1 Existência e unicidade de reparametrização local

No próximo Lema, provaremos a existência, unicidade e continuidade de reparametrização local para um elemento no centralizador de um fluxo expansivo $\varphi_{|\Lambda}$. No caso que $\varphi_{|\Lambda}$ não possui órbitas periódicas regulares, considere por simplicidade $\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda}) = +\infty$.

Lema 3.3.2. *Seja φ um fluxo de classe $\mathcal{C}^1$ definido em uma variedade compacta M e $\Lambda \subset M$ um compacto φ-invariante tal que $\varphi_{|\Lambda}$ é expansivo e todas as singularidades de φ em Λ são hiperbólicas. Se $\psi \in \mathcal{Z}^1(\varphi)$, então para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})/3$ existe $\mu > 0$ e uma única função $z : [-\mu, \mu] \times \left(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\right) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\psi(s, x) = \varphi(z(s, x), x)$ para todo $(s, x) \in [-\mu, \mu] \times \Lambda$. Ademais,*

1. *z é contínua,*
2. *se $t, s, t+s \in [-\mu, \mu]$, então $z(t+s, x) = z(t, x) + z(s, \psi(t, x))$.*

Demonstração. $\varphi_{|\Lambda}$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.1, logo existe $\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda}) > 0$. Dado $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})/3$, seja $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ dado pela expansividade de $\varphi_{|\Lambda}$ (Definição 3.1.6). Como Λ é compacto e φ-invariante, existe $\mu > 0$ tal que $\sup\limits_{|s| \le \mu} \{d(Id, \psi_s)\} < \delta$ e consequentemente,

$$\begin{aligned} d(\varphi_t(x), \varphi_t(\psi_s(x))) &= d(\varphi_t(\psi_0(x)), \varphi_t(\psi_s(x))) \\ &= d(\psi_0(\varphi_t(x)), \psi_s(\varphi_t(x))) \\ &< \delta \end{aligned}$$

para todo $x \in \Lambda$, $|s| < \mu$ e $t \in \mathbb{R}$. Como $\varphi_{|\Lambda}$ é Komuro-expansivo, segue que (com $h(t) = t$ na Definição 3.1.6) existe $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\varphi_{t_0}(\psi_s(x)) = \varphi_{t_0+\eta}(x)$ para algum $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Consequentemente, $\psi_s(x) = \varphi_\eta(x)$ está na órbita de x com respeito ao fluxo φ.

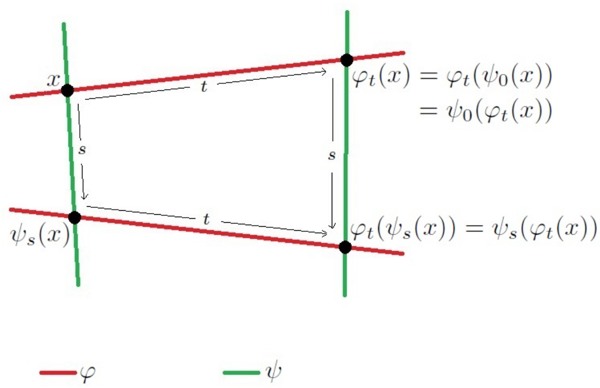


Figura 3.2: Comutatividade de φ com ψ e expansividade de φ.

Isto define unicamente uma aplicação $z : [-\mu, \mu] \times \left(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\right) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\psi(s, x) = \varphi(z(s, x), x)$ para qualquer $(s, x) \in [-\mu, \mu] \times \left(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\right)$. De fato, se $z_1, z_2 : [-\mu, \mu] \times \left(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\right) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ são tais que $\varphi(z_1(s, x), x) = \psi(s, x) =$

$\varphi(z_2(s,x),x)$, então $\varphi(z_1(s,x)-z_2(s,x),x)=x$, com $|z_1(s,x)-z_2(s,x)|\leq|z_1(s,x)|+|z_2(s,x)|<\frac{2}{3}\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})$ e pela definição de $\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})$ segue que $z_1(s,x)=z_2(s,x)$.

Para provar 1., assuma por contradição que z não é contínua. Com isto, existem $\delta_0>0$, $(s,x)\in[-\mu,\mu]\times\big(\Lambda\setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$ e uma sequência $(s_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[-\mu,\mu]\times\big(\Lambda\setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$ tal que $(s_n,x_n)\to(s,x)$ mas $|z(s_n,x_n)-z(s,x)|\geq\delta_0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Com isto, existe $\delta_1>0$ tal que $d(\varphi(z(s_n,x_n),x),\ \varphi(z(s,x),x))\geq\delta_1$ e por outro lado,

$$\begin{aligned}\delta_1&\leq d(\varphi(z(s_n,x_n),x),\ \varphi(z(s,x),x))\\&\leq d(\varphi(z(s_n,x_n),x),\ \varphi(z(s_n,x_n),x_n))+d(\varphi(z(s_n,x_n),x_n),\ \varphi(z(s,x),x))\\&=d(\varphi(z(s_n,x_n),x),\ \varphi(z(s_n,x_n),x_n))+d(\psi(s_n,x_n),\ \psi(s,x)).\end{aligned}$$

Como $(z(s_n,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de considerar uma subsequência, suponha que $z(s_n,x_n)\to t_0$ quando $n\to\infty$. Consequentemente, o lado direito da desigualdade $\delta_1\leq d(\varphi(z(s_n,x_n),x),\ \varphi(z(s_n,x_n),x_n))+d(\psi(s_n,x_n),\ \psi(s,x))$ tende a 0 pela continuidade do fluxo φ e da aplicação tempo-t_0 φ_{t_0}, o que é contraditório com a existência de $\delta_1>0$. Isto prova a continuidade descrita em 1.

Para provar 2., pela igualdade

$$\begin{aligned}\varphi(z(t+s,x),x)&=\psi(t+s,x)\\&=\psi(t,\ \psi(s,x))\\&=\varphi(z(t,\ \psi(s,x)),\ \psi(s,x))\\&=\varphi(z(t,\ \psi(s,x)),\ \varphi(z(s,x),x))\\&=\varphi(z(t,\ \psi(s,x))+z(s,x),x)\end{aligned}$$

e unicidade da reparametrização local, obtém-se $\varphi(z(t+s,x)-z(t,\ \psi(s,x)-z(s,x),x)=x$. Por outro lado, como $|z(t+s,x)-z(t,\ \psi(s,x)-z(s,x)|\leq|z(t+s,x)|+|z(t,\ \psi(s,x)|+|z(s,x)|<\dfrac{\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})}{3}+\dfrac{\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})}{3}+\dfrac{\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})}{3}=\varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})$, segue que $z(t+s,x)=z(t,\ \psi(s,x))+z(s,x)$. □

OBSERVAÇÃO: na demonstração do Teorema B, a hipótese que o fluxo φ é Komuro-expansivo é utilizada somente no Lema 3.3.2, em cuja demonstração utilizou-se $h(t)=t$, h como na Definição de fluxos Komuro-expansivos 3.1.6, de modo que, o Teorema B também é válido para fluxos cinemático-expansivos sem singularidades (vide o exemplo 3.4.3 para maiores detalhes).

3.3.2 Extensão contínua para a reparametrização local

No Lema seguinte construiremos uma extensão contínua a $\mathbb{R}\times(\Lambda\setminus Sing(\varphi\,|_\Lambda))$ para a reparametrização descrita no Lema 3.3.2. Mais precisamente:

Proposição 3.3.3. *Seja φ um fluxo de classe $\mathcal{C}^1$ em M, $\Lambda\subset M$ um compacto φ-invariante e ψ é um fluxo de classe $\mathcal{C}^1$ tal que existe $\mu>0$ e uma aplicação $z:[-\mu,\mu]\times\big(\Lambda\setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$ tal que $\psi(s,x)=\varphi(z(s,x),x)$ para qualquer*

$(s,\, x) \in [-\mu,\, \mu] \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$, *onde* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\varphi_{|\Lambda})/3$. *Existe uma única função contínua* $p : \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big) \to \mathbb{R}$, *tal que* $\psi(s,\, x) = \varphi(p(s,\, x),\, x)$ *para qualquer* $(s,\, x) \in \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$.

Demonstração. Como consequência do Lema 3.3.2, a aplicação z é contínua e satisfaz $z(t+s,\, x) = z(t,\, x) + z(s,\, \psi(t,\, x))$ para $t,\, s,\, t+s \in [-\mu,\, \mu]$. Com isto, para provar a existência de uma tal p, tome inicialmente $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \mu$. Com isto, considere a função contínua $z_1 : [1/2^N,\, 2/2^N] \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big) \to \mathbb{R}$ dada por

$$z_1(t,\, x) = z(t - 1/2^N,\, x) + z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N,\, x)).$$

Para qualquer $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$, z_1 assim definida satisfaz

$$z_1(1/2^N,\, x) = z(1/2^N,\, x) \tag{3.1}$$

para todo $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$. De fato,

$$\begin{aligned} z_1(1/2^N,\, x) &= z(1/2^N - 1/2^N,\, x) + z(1/2^N, \psi(1/2^N - 1/2^N,\, x)) \\ &= z(0,\, x) + z(1/2^N, \psi(0,\, x)) \\ &= z(0 + 1/2^N,\, x) \\ &= z(1/2^N,\, x). \end{aligned}$$

Isto significa que as funções z e z_1 coincidem no ponto extremo do intervalo $[0, 2^{-N}]$.

Ademais, para todo $(t,\, x) \in [1/2^N,\, 2/2^N] \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda}))$, a função z_1 é tal que

$$\psi(t,\, x) = \varphi(z_1(t,\, x),\, x). \tag{3.2}$$

Com efeito, visto que x é um ponto regular para o fluxo φ, pelo Lema 3.3.2,

$$0 = z(1/2^N - 1/2^N, \psi(t,\, x)) = z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N,\, x)) + z(-1/2^N, \psi(t,\, x)),$$

e consequentemente,

$$z(-1/2^N, \psi(t,\, x)) = -z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N,\, x)) \tag{3.3}$$

para todo $(t,\, x) \in [1/2^N,\, 2/2^N] \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$. Por outro lado, usando (3.3),

$$\begin{aligned} \varphi(-z(1/2^N, &\psi(t - 1/2^N,\, x)), \varphi(z_1(t,\, x),\, x)) \\ &= \varphi(-z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N,\, x)) + z_1(t,\, x),\, x) \\ &= \varphi(z(t - 1/2^N,\, x)),\, x) \\ &= \psi(t - 1/2^N,\, x) \\ &= \psi(-1/2^N,\, \psi(t,\, x)) \\ &= \varphi(z(-1/2^N,\, \psi(t,\, x)),\, \psi(t,\, x)) \\ &= \varphi(-z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N,\, x)),\, \psi(t,\, x)), \end{aligned}$$

do que obtém-se $\psi(t,\, x) = \varphi(z_1(t,\, x),\, x)$ para $(t,\, x) \in [1/2^N,\, 2/2^N] \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$, ou seja, ψ é dado por uma reparameterização local do fluxo φ em $[1/2^N,\, 2/2^N] \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$.

Agora, indutivamente, para cada inteiro positivo $k \geq 1$, considere a função contínua $z_k : \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right] \times \left(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$z_k(t, x) = z(t - k/2^N, x) + \sum_{i=1}^{k} z(1/2^N, \psi(t - i/2^N, x)).$$

Para qualquer $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$, z_k satisfaz

$$z_k((k+1)/2^N, x) = z_{k+1}((k+1)/2^N, x). \tag{3.4}$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_k((k+1)/2^N, x) &= z(1/2^N, x) + \sum_{i=1}^{k} z(1/2^N, \psi((k+i-1)/2^N, x)) \\ &= z(1/2^N, x) + \sum_{j=1}^{k} z(1/2^N, \psi(j/2^N, x)) \\ &= \sum_{j=0}^{k} z(1/2^N, \psi(j/2^N, x)) \\ &= z_{k+1}((k+1)/2^N, x). \end{aligned}$$

Como consequência disto,

$$z_k(t, x) = z_{k-1}(t - 1/2^N, x) + z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N, x)). \tag{3.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_k(t, x) &= z\Big(t - \frac{k}{2^N}, x\Big) + \sum_{i=1}^{k} z\Big(\frac{1}{2^N}, \psi\Big(t - \frac{i}{2^N}, x\Big)\Big) \\ &= z\Big(\Big(t - \frac{1}{2^N}\Big) - \frac{k-1}{2^N}, x\Big) + \sum_{i=1}^{k} z\Big(\frac{1}{2^N}, \psi\Big(\Big(t - \frac{1}{2^N}\Big) - \frac{i-1}{2^N}, x\Big)\Big) \\ &= \left[z\Big(\Big(t - \frac{1}{2^N}\Big) - \frac{k-1}{2^N}, x\Big) + \sum_{i=1}^{k-1} z\Big(\frac{1}{2^N}, \psi\Big(\Big(t - \frac{1}{2^N}\Big) - \frac{i-1}{2^N}, x\Big)\Big)\right] \\ &\qquad + z\Big(\frac{1}{2^N}, \psi\Big(t - \frac{1}{2^N}, x\Big)\Big) \\ &= z_{k-1}(t - 1/2^N, x) + z(1/2^N, \psi(t - 1/2^N, x)). \end{aligned}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, as identidades (3.5) e (3.3) implicam que

$$\psi(t, x) = \varphi(z_k(t, x), x). \tag{3.6}$$

Já provamos isto quando $k = 1$ em (3.2). Por indução, supondo que a afirmação é verdadeira para algum $k-1 \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
&\varphi(-z(1/2^N, \psi(t-1/2^N, x)), \varphi(z_k(t, x), x)) \\
&\qquad = \varphi(-z(1/2^N, \psi(t-1/2^N, x)) + z_k(t, x), x) \\
&\qquad = \varphi(z_{k-1}(t-1/2^N, x), x) \\
&\qquad = \psi(t-1/2^N, x) \\
&\qquad = \psi(-1/2^N, \psi(t, x)) \\
&\qquad = \varphi(z(-1/2^N, \psi(t, x)), \psi(t, x)) \\
&\qquad = \varphi(-z(1/2^N, \psi(t-1/2^N, x)), \psi(t, x)).
\end{aligned}$$

Com isto, como φ_s é um difeomorfismo para todo $s \in \mathbb{R}$, da igualdade $\varphi(-z(1/2^N, \psi(t-1/2^N, x)), \psi_t(x)) = \varphi(-z(1/2^N, \psi(t-1/2^N, x)), \varphi(z_k(t, x), x))$ segue $\psi_t(x) = \varphi(z_k(t, x), x)$. Claramente, argumentos completamente similares aos que foram

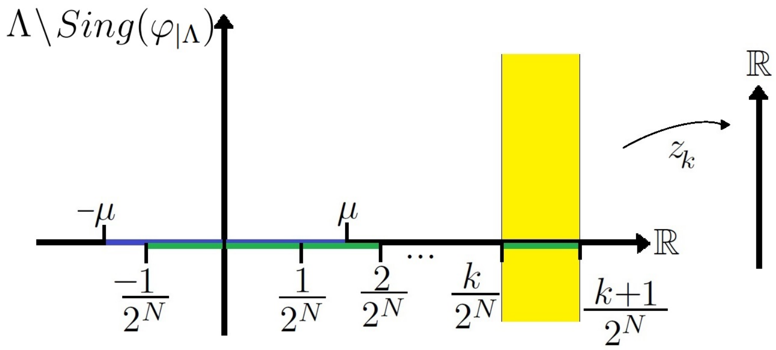


Figura 3.3: Aplicações z_k.

apresentados acima podem ser utilizados para estender $z(t, x)$ para todo $t < 0$. Para isso, considere a função contínua $\overline{z}_1 : [-2/2^N, -1/2^N] \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi\,|_\Lambda)) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{z}_1(t, x) = z\Big(t + \frac{1}{2^N}, x\Big) + z\Big(-\frac{1}{2^N}, \varphi\Big(t + \frac{1}{2^N}, x\Big)\Big).$$

Cálculos similares aos feitos com a função z_1 em 3.1 e 3.2 mostram que para qualquer $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$, a função $\overline{z}_1(\cdot, x)$ satisfaz

$\overline{z}_1(-1/2^N, x) = z(-1/2^N, x)$ e $\varphi(t, x) = \varphi(\overline{z}_1(t, x), x)$.

Também, para cada inteiro positivo k, considere $\overline{z}_k : [-(k+1)/2^N, -k/2^N] \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi\,|_\Lambda)) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{z}_k(t, x) = z\Big(t + \frac{k}{2^N}, x\Big) + \sum_{i=1}^{k} z\Big(-\frac{1}{2^N}, \varphi\Big(t + \frac{i}{2^N}, x\Big)\Big),$$

a qual satisfaz $\psi(t, x) = \varphi(\overline{z}_k(t, x), x)$ para todo $t \in [-(k+1)/2^N, -k/2^N]$ e $x \in \mathbb{R} \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda}))$.

Com isto, $p : \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big) \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(t,\, x) = \begin{cases} z(t,\, x), & \text{if } t \in [-1/2^N,\, 1/2^N] \\ z_k(t,\, x), & \text{if } t \in \big[k/2^N,\, (k+1)/2^N\big] \\ \overline{z}_k(t,\, x), & \text{if } t \in \big[-(k+1)/2^N,\, -k/2^N\big] \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{N}$$

é uma função bem definida, contínua e tal que $\psi(t,\, x) = \varphi(p(t,\, x),\, x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$. Isto conclui a prova da existência da reparametrização.

Resta provar a unicidade da reparametrização p ao longo dos pontos não-singulares. Para isto, suponha que existam $p_1,\, p_2 : \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big) \to \mathbb{R}$, extensões contínuas de z tais que $\varphi(p_1(t,\, x),\, x) = \psi(t,\, x) = \varphi(p_2(t,\, x),\, x)$ para todo $(t,\, x) \in \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$. Fixe $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$ e considere a função contínua $\alpha_x(t) = p_1(t,\, x) - p_2(t,\, x)$. Observe que, pelo Lema 3.3.2, $\alpha_x^{-1}(0) \supset [-\mu,\, \mu]$ (logo $\alpha_x^{-1}(0)$ é não vazio) e $\alpha_x^{-1}(0)$ é fechado por continuidade de α_x.

Assuma por contradição que $\alpha_x^{-1}(0) \neq \mathbb{R}$, então existe $t_0 = \max\{t > 0 : [0,\, t] \subset \alpha_x^{-1}(0)\} \geq \mu$ ou $\min\{t < 0 : [t,\, 0] \subset \alpha_x^{-1}(0)\} \leq -\mu$. Assuma que o primeiro caso valha (o segundo é completamente análogo).

Pela continuidade das reparametrizações, $p_1(t_0,\, x) = p_2(t_0,\, x)$. Ademais, se $t \in [-\mu,\, \mu]$, então $\varphi(p_i(t + t_0,\, x),\, x) = \psi(t + t_0,\, x) = \psi(t,\, \psi(t_0,\, x))$ para $i \in \{1,\, 2\}$.

Pelo Lema 3.3.2, existe uma única função $z : [-\mu,\, \mu] \times \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big) \to (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ tal que $\varphi(s,\, x) = \varphi(z(s,\, x),\, x)$ para qualquer $(s,\, x) \in [-\mu,\, \mu] \times \mathbb{R} \times \big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$. Em particular,

$$\begin{aligned} \psi(t,\, \psi(t_0,\, x)) &= \varphi(z(t, \psi(t_0,\, x)),\, \psi(t_0,\, x)) \\ &= \varphi(z(t, \psi(t_0,\, x)),\, \varphi(p(t_0,\, x),\, x)) \\ &= \varphi(z(t, \psi(t_0,\, x)) + p(t_0,\, x),\, x), \end{aligned}$$

o que contradiz a maximalidade de t_0. Consequentemente, $\alpha_x^{-1}(0) = \mathbb{R}$ e as reparametrizações p_1 e p_2 coincidem. Isto completa a prova da Proposição 3.3.3. $\square$

3.3.3 Invariância da reparametrização ao longo de órbitas regulares

No Lema seguinte, provaremos que a reparametrização obtida na Proposição 3.3.3 é invariante ao longo de órbitas de pontos regulares.

Lema 3.3.4. *Se p é a reparametrização obtida na Proposição 3.3.3, então $p(t,\, x) = p(t,\, \varphi(s,\, x))$ para todo $t,\, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$. Ademais, existe uma única função contínua $A : \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda}) \to \mathbb{R}$ tal que $p(t,\, x) = A(x)t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})$.*

Demonstração. Inicialmente, observe que como ψ comuta com φ, fixado $s \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(s+p(t,\,x),\,x) &= \varphi(s,\,\varphi(p(t,\,x),\,x)) \\ &= \varphi(s,\,\psi(t,\,x)) \\ &= \psi(t,\,\varphi(s,\,x)) \\ &= \varphi(p(t,\,\varphi(s,\,x)),\,\varphi(s,\,x)) \\ &= \varphi(p(t,\,\varphi(s,\,x))+s,\,x).\end{aligned}$$

Portanto, para μ suficientemente pequeno e $t \in [-\mu,\,\mu]$ esta igualdade implica que $p(t,\,x) = p(t,\,\varphi(s,\,x))$ para qualquer $(s,\,x) \in \mathbb{R} \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi_\Lambda))$. Por outro lado, pela construção e unicidade da função p estabelecidas no Lema 3.3.3, segue que $p(t,\,x) = p(t,\,\varphi(s,\,x))$ para todo $s \in \mathbb{R}$ para todos $t,\,s \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_\Lambda)$. Ademais, isto implica que

$$\begin{aligned}\varphi(p(t+s,\,x),\,x) &= \psi(t+s,\,x) \\ &= \psi(t,\,\psi(s,\,x)) \\ &= \varphi(p(t,\,\psi(s,\,x)),\,\psi(s,\,x)) \\ &= \varphi(p(t,\,\varphi(p(s,\,x),\,x)),\,\varphi(p(s,\,x),\,x)) \\ &= \varphi(p(t,\,\varphi(p(s,\,x),\,x))+p(s,\,x),\,x) \\ &= \varphi(p(t,\,x)+p(s,\,x),\,x)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Lambda \setminus Sing(\varphi_\Lambda)$. A unicidade de p implica que $p(t+s,\,x) = p(t,\,x)+p(s,\,x)$ para todo $t,\,s \in \mathbb{R}$. Como $p(\cdot,\,x)$ é contínua, então ela é linear. Assim, existe uma aplicação contínua $A : (\Lambda \setminus Sing(\varphi_\Lambda)) \to \mathbb{R}$ tal que $p(t,\,x) = A(x) \cdot t$ para todo $(t,\,x) \in \mathbb{R} \times (\Lambda \setminus Sing(\varphi_\Lambda))$. Isto encerra a prova do Lema. □

3.3.4 Extensão da reparametrização aos pontos singulares

Sob nossas suposições sobre as singularidades, provaremos que a reparametrização obtida na Proposição 3.3.3 estende-se continuamente aos pontos singulares. Isto completará a prova do Teorema B. Para isto, inicialmente deduziremos a seguinte versão do Teorema de Kopell (Teorema 2.3.1) para contrações lineares. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ seja $Re(\lambda)$ a parte real de λ.

Lema 3.3.5. *Dada $B \in GL(n,\,\mathbb{R})$, suponha que 0 é uma singularidade não-ressonante de tipo poço para o fluxo linear $\varphi = (e^{t\cdot B})_{t\in\mathbb{R}}$ e que os autovalores de B são distintos e não-ressonantes. Se $\lambda_1,\,\cdots,\,\lambda_n$ são os autovalores de B e m é o menor inteiro positivo tal que*

$$m \cdot \big(\max_{1\le i\le n} Re(\lambda_i)\big) < \min_{1\le j\le n} Re(\lambda_j), \tag{3.7}$$

então $\mathcal{Z}^m(\varphi)$ consiste no conjunto de fluxos lineares $(e^{s\cdot C})_{s\in\mathbb{R}}$, onde $C \in GL(n,\,\mathbb{R})$ é tal que $B \cdot C = C \cdot B$.

Demonstração. Como 0 é um poço para B, então e^B é uma contração linear. Por outro lado, se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os autovalores de B, $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ são os autovalores de e^B e além disto, se não existem relações da forma $\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot Re(\lambda_i)$ onde cada n_i é inteiro não negativo e $\sum_{i=1}^{n} n_i \geq 2$, então também não há relações da forma $e^{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot Re(\lambda_i)} = \prod_{i=1}^{n} e^{n_i \cdot Re(\lambda_i)} = \prod_{i=1}^{n} \left|e^{\lambda_i}\right|^{n_i}$ com $\sum_{i=1}^{n} n_i \geq 2$, do que segue que e^B é uma contração linear não-ressonante como no Teorema de Kopell 2.3.1, o qual implica que $\mathcal{Z}^m(e^B)$ é constituído exclusivamente por operadores lineares, onde m é o menor inteiro positivo tal que $m \cdot \left(\max_{1\leq i\leq n} Re(\lambda_i)\right) = \max_{1\leq i\leq n}\{\left|e^{\lambda_i}\right|^m\} < \min_{1\leq j\leq n}\{\left|e^{\lambda_j}\right|\} = \min_{1\leq j\leq n} Re(\lambda_j)$. Com isto, qualquer elemento de $\mathcal{Z}^m(\varphi)$ é um fluxo $\psi = (\psi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ tal que ψ_s é um operador linear para todo $s \in \mathbb{R}$. Ademais, $\psi_s = e^{sC}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, onde

$$C(x) := \lim_{s\to 0} \frac{\psi_s(x) - x}{s} = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}_{|s=0}(x)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$.

De fato, seja $T > 0$ fixado. Como as aplicações $t \to ||e^{tC}||_\infty$ e $s \to ||\psi_s||_\infty$ são contínuas, existe uma constante $K > 0$ (dependendo de T) tal que $||\psi_s||_\infty \cdot ||e^{tC}||_\infty \leq K$ para todo $0 \leq t,\ s \leq T$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{s\to 0} \frac{e^{sC} - Id}{s} = C$, seja $0 < \delta \leq T$ tal que

$$\left\|\frac{\psi_h - e^{hC}}{h}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{KT} \text{ para todo } 0 \leq h \leq \delta.$$

Agora, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{T}{n} < \delta$. Pela desigualdade triangular, para qualquer $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
||\psi_t - e^{tC}||_\infty &= ||\psi_{n\cdot\frac{t}{n}} - e^{n\frac{t}{n}C}||_\infty \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{n-1} \psi_{(n-k)\cdot\frac{t}{n}} \circ e^{k\frac{t}{n}C} - \psi_{(n-k-1)\cdot\frac{1}{n}} \circ e^{(k+1)\frac{t}{n}C}\right\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|\psi_{(n-k)\cdot\frac{t}{n}} \circ e^{k\frac{t}{n}C} - \psi_{(n-k-1)\cdot\frac{t}{n}} \circ e^{(k+1)\frac{t}{n}C}\right\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} ||\psi_{(n-k-1)\cdot\frac{t}{n}}||_\infty \cdot ||\psi_{\frac{t}{n}} - e^{\frac{t}{n}C}||_\infty \cdot ||e^{k\frac{t}{n}C}||_\infty \\
&\leq Kn \cdot \frac{\varepsilon}{KT} \cdot \frac{t}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, a desigualdade acima prova que $\psi_t = e^{tC}$ para todo $t \in [0, T]$. Por outro lado, a propriedade de grupo implica que $\psi_t = e^{tC}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, pelo resultado clássico da teoria das equações diferenciais ordinárias lineares, $(e^{tB})_t$ e $(e^{sC})_s$ comutam se e somente se $BC = CB$. Isto completa a prova do Lema.

□

A conjugação entre fluxo, restrito a uma vizinhaça de uma singularidade hiperbólica e a parte linear desta singularidade, estabelecida pelo teorema de Hartman-Grobman 1.1.6, é apenas topológica. Baseado em trabalhos de Poincaré e Siegel, Sternberg [81, 82] mostrou que sob condições de não-ressonância nos autovalores da derivada do campo associado ao referido fluxo, quando aplicada a singularidade, existe uma conjugação diferenciável, como estabelecido pelo Teorema de Hartman-Grobman. Mais precisamente:

Proposição 3.3.6 (Teorema de Sternberg)**.** *Seja σ é uma singularidade hiperbólica de um campo vetorial X tal que o espectro spect$(DX(\sigma)) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$de $DX(\sigma)$ satisfaz*

1. *$Re(\lambda_i) < 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, e*
2. *não existem relações da forma $\lambda_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \lambda_j$, onde cada m_j é um inteiro não negativo e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j \geq 2$ (neste caso a singularidade é dita não-ressonante).*

Nestas condições, existe uma vizinhança V centrada na singularidade σ e conjugação diferenciável h entre $X_{|V}$ e $DX(\sigma)_{|h(V)}$.

Para uma descrição mais detalhada sobre resultados de linearização diferenciável de campos vetoriais e difeomorfismos, em vizinhanças de singularidades, vide ElBialy [25, 26].

Lema 3.3.7. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times \Lambda \to \Lambda$ um fluxo Komuro-expansivo de classe $\mathcal{C}^\infty$ definido em uma variedade riemanniana compacta M. Suponha que as singularidades $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ of φ são hiperbólicas. Sejam $B_i = \dfrac{d}{dt}\varphi(t, \sigma_i)_{|t=0}$ e $T_{\sigma_i}M = E_i^s \oplus E_i^u$ a respectiva decomposição hiperbólica, $1 \leq i \leq k$. Se os autovalores de $B_i \mid_{E_i^*}$ são distintos e não-ressonantes para todo $1 \leq i \leq k$ e $* \in \{s, u\}$, então a função contínua $A(\cdot)$ dada pelo Lema 3.3.4 admite uma extensão contínua a Λ.*

Demonstração. Como as singularidades de φ são hiperbólicas, então elas são isoladas e, Por esse motivo, é suficiente estender a função $A(\cdot)$ para cada singularidade isoladamente.

Subdividiremos a prova em dois casos, consoante a singularidade seja poço/fonte ou sela.

Caso 1: σ_i é um poço ou fonte.

Assuma sem perda de generalidade que σ_i é um poço. De fato, no caso que σ_i é uma fonte, a prova é completamente análoga, apenas considerando o fluxo com o tempo invertido $(\varphi_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$. Como os autovalores da derivada em σ_i, do campo associado a φ, são não-ressonantes, pelo Teorema de linearização de Sternberg (vide [81]), existe uma vizinhança W_i de σ_i tal que o fluxo $(\varphi_t)_t$ é $\mathcal{C}^\infty$-linearizável em W_i: existe uma carta de classe $\mathcal{C}^\infty$ ζ_i em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{\dim M}$ tal que $\eta_t := \zeta_i \circ \varphi_t \circ \zeta_i^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, define um fluxo linear em W_i. Esta conjugação ζ_i induz, localmente, um isomorfismo natural entre $\mathcal{Z}^\infty((\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}})$ e $\mathcal{Z}^\infty((\eta_s)_{s\in\mathbb{R}})$ no sentido que $(\psi_s)_{s\in\mathbb{R}} \in \mathcal{Z}^\infty((\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}})$ se e somente se $(h \circ \psi_s \circ h^{-1})_{s\in\mathbb{R}} \in \mathcal{Z}^\infty((\eta_t)_{t\in\mathbb{R}})$. Este fato será utilizado para determinar o centralziador de φ numa vizinhança da singularidade σ_i. Por um lado, o Lemma 3.3.5 implica que $\mathcal{Z}^\infty((e^{sB_i})_{s\in\mathbb{R}})$ é constituído exclusivamente por fluxos lineares $(e^{sC})_{s\in\mathbb{R}}$, onde as aplicações lineares C satisfazem $B_i \cdot C = C \cdot B_i$.

Por outro lado, pelos Lemas 3.3.2 e 3.3.4 e Proposição 3.3.3, qualquer $\psi \in \mathcal{Z}^\infty(\varphi)$ é reparametrização de φ, isto é, existe uma função contínua $A : W_i \setminus \{\sigma_i\} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi_t(x) = \varphi_{A(x)\cdot t}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por isto, via o isomorfismo natural discutido acima, é preciso determinar quais fluxos lineares $(e^{sC})_{s\in\mathbb{R}}$ preservam as órbitas do fluxo linear $(e^{tB_i})_{t\in\mathbb{R}}$. Tais fluxos são da forma $(e^{sC})_{s\in\mathbb{R}}$, com $C = c\,B_i$ para algum $c \in \mathbb{R}$. De fato,

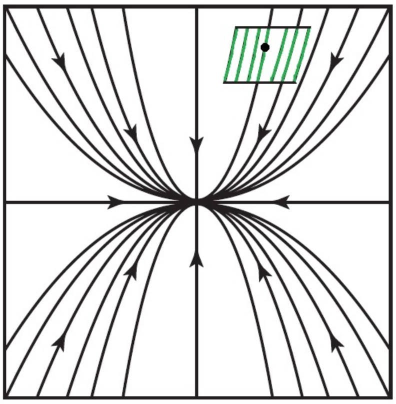


Figura 3.4: Descrição pictórica do Caso 1.

se para todo $c \in \mathbb{R}$, $C \neq c\,B_i$, então deve existir $x \in \mathbb{R}^n$ tal que os vetores $B_i(x)$ e $C(x)$ são linearmente independentes e, consequentemente, as órbitas de x com relação aos dois fluxos seriam transversais em x, mas isto é contraditório com o fato que $(e^{sC}x)_{s\in\mathbb{R}}$ é uma reparametrização de $(e^{tB_i}x)_{t\in\mathbb{R}}$.

Isto mostra, via a conjugação dada pelo Teorema de linearização de Sternberg, que a função $A(x)$ dada pelo Lema 3.3.4 é constante em $W^s(\sigma_i)\setminus\{\sigma_i\}$, com isto ela admite uma extensão contínua a σ_i.

Caso 2: σ_i é uma sela.

Seja W_i uma vizinhança de σ_i dada pelo Teorema de Hartman-Grobman. Em W_i, o fluxo φ é topologicamente conjugado ao fluxo hiperbólico linear $(e^{tB_i})_{t\in\mathbb{R}}$, onde $B_i = \dfrac{d}{dt}\varphi(t,\sigma_i)|_{t=0}$. Escolhendo uma base adequada de $\mathbb{R}^d$, $B_i = \operatorname{diag}\{B_{1,i}, B_{2,i}\}$, onde $B_{1,i}$ e $B_{2,i}^{-1}$ são contrações. Além disso, como os autovalores de B são não-ressonantes, reduzindo W_i se necessário, existem vizinhanças abertas $S_i \subset W_i \cap W^s(\sigma)$ de p em $W^s(\sigma_i)$ e $U_i \subset W_i \cap W^u(\sigma)$ de p em $W^u(\sigma_i)$ tais que o fluxo φ restrito a vizinhança aberta S_i de p em $W^s(\sigma_i)$ (vizinhança aberta U_i de p em $W^u(\sigma_i)$) é $\mathcal{C}^\infty$-conjugado a contração linear $(e^{tB_{1,i}})_{t\in\mathbb{R}}$ (respectivamente, a expansão linear $(e^{tB_{2,i}})_{t\in\mathbb{R}}$).

Via o Caso 1, a reparametrização $A(x)$ dada pelo Lema 3.3.4 é constante ao longo de ambas as variedades invariantes $W^s(\sigma_i)\setminus\{\sigma_i\}$ e $W^u(\sigma_i)\setminus\{\sigma_i\}$. Assim, para concluir que $A(x)$ estende-se continuamente a σ_i é suficiente mostrar que, nas coordenadas dadas pela linearização, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) = c$ é constante para todo $x \in [W^s(\sigma_i) \cup W^u(\sigma_i)] \setminus \{\sigma_i\}$.

Para isto, considere uma secção compacta Σ transversal a $W^s(\sigma_i)$, uma secção compacta cilíndrica $\Sigma^{'}$ em torno de $W^s_{\varepsilon}(\sigma_i)$ e transversal a $W^u(\sigma_i)$, um ponto $x \in \Sigma \cap W^s(\sigma_i)$ e uma sequência (x_n) de pontos regulares em $\Sigma \setminus (W^s(\sigma_i) \cup W^u(\sigma_i))$ tais que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

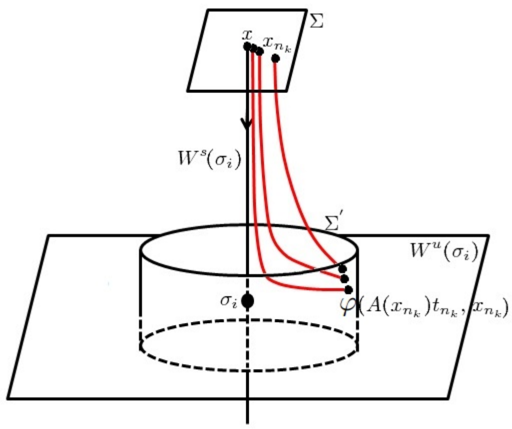


Figura 3.5: Descrição pictórica do Caso 2.

Para todo $n \geq 1$ suficientemente grande existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(A(x_n)t_n, x_n) \in \Sigma^{'}$. Pela compacidade de $\Sigma^{'}$, existe uma subsequência convergente $(\varphi(A(x_{n_k})t_{n_k}, x_{n_k}))_{k\geq 1}$. Denotando por $x' \in W^u(\sigma_i)$ o limite desta subsequência, a continuidade de A em $\mathbb{R}\times\big(\Lambda \setminus Sing(\varphi_{|\Lambda})\big)$ e sua invariância ao longo das órbitas (conforme Proposição 3.3.3 e Lema 3.3.4) implica que

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_{k\to\infty} A(x_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} A(\varphi(A(x_{n_k})t_{n_k}, x_{n_k}) \\ &= A(\lim_{k\to\infty} \varphi(A(x_{n_k})t_{n_k}, x_{n_k})) \\ &= A(x^{'}), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação A é constante em $W^s(\sigma_i) \cup W^u(\sigma_i)$.

Por outro lado, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\Lambda \setminus \{\sigma_i\}$ tal que $y_n \setminus \sigma_i$ quando $n \to \infty$, para todo n suficientemente grande existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_n, x_n) \in \Sigma$, e a menos de considerar uma subsequência, pode-se supor que $(\varphi(t_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto em $W^s(\sigma_i) \setminus \{\sigma_i\}$. Assim, existe $\lim\limits_{n\to\infty} A(y_n)$ e o valor é o mesmo para qualquer sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para a singularidade σ_i. Assim, a aplicação A pode ser estendida continuamente e de modo único, como reparametrização definida em toda a variedade M, tal que $\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, $\psi \in \mathcal{Z}^{\infty}(\varphi)$. Isto completa a prova do Lema. $\square$

3.4 Exemplos

3.4.1 Lorenz geométrico

Exemplo 3.4.1. *As equações de Lorenz correspondem ao sistema de equações diferenciais ordinárias polinomiais em* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}, \tag{3.8}$$

com parâmetros $a, b, r \in \mathbb{R}$*. Simulações computacionais levaram Lorenz [41] a propor a existência de um atrator estranho para os parâmetros* $a = 10$*,* $b = 8/3$ *e* $r = 28$*. Não é difícil verificar que as equações de Lorenz (3.8) admitem as três singularidades*

$$\begin{aligned} &\sigma_0 = (0,\, 0,\, 0) \\ &\sigma_1 = (\sqrt{b(r-1)},\, \sqrt{b(r-1)},\, r-1) \text{ e} \\ &\sigma_2 = (-\sqrt{b(r-1)},\, -\sqrt{b(r-1)},\, r-1). \end{aligned}$$

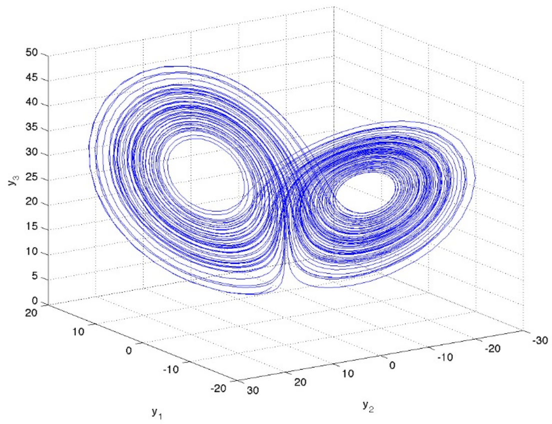


Figura 3.6: Atrator estranho de 3.8, obtido por simulações computacionais.

Para os parâmetros clássicos propostos por Lorenz, cada uma das singularidades são hiperbólicas, e σ_0 *pertence ao "atrator caótico" e é acumulada por órbitas de pontos regulares. De fato, para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *a Jacobiana associada a (3.8) é dada por*

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

e cálculos simples mostram que o polinômio característico associado a $\sigma_0 = (0,\, 0,\, 0)$ *é* $p_{\sigma_0}(x) = (x+b)[(x+a)(x+1) - ar] = (x+8/3)(x^2+11x-270)$*. Consequentemente, os autovalores de* σ_0 *são* $\dfrac{-11-\sqrt{1201}}{2} \approx -22,83$*;* $-\dfrac{8}{3} \approx -2,67$ *e* $\dfrac{-11+\sqrt{1201}}{2} \approx 11,83$*.*

Por simetria das equações de Lorenz (3.8)*, os autovalores de* σ_1 *e* σ_2 *são os mesmos. O polinômio característico da Jacobiana associada a* σ_1 *(ou* σ_2*) é* $p_{\sigma_1}(x) = x^3 + \frac{41}{3}x^2 + \frac{304}{3}x + 1440$*. Assim, a singularidade* σ_1 *tem um autovalor real* $\lambda \approx -13,85$ *e dois autovalores complexos conjugados* $z, \bar{z}$*, onde* $z \approx 0,09 + 10,19i$*.*

Observe que as singularidades de (3.8) *satisfazem as condições de não-ressonâcia. De fato, a singularidade* σ_0 *é não-ressonante pois seu subespaço instável é unidimensional e o subespaço estável de* σ_0 *é não-ressonante pois um autovalor é racional e o outro é irracional. Finalmente, as singularidades* σ_1 *e* σ_2 *são não-ressonantes pois seus subspaços estáveis são unidimensionais e ao longo dos subespaços instáveis elas têm um par de autovalores complexos conjugados.*

A fim de descrever as características dinâmicas do "atrator caótico" associado a (3.8)*, modelos geométricos para o atrator de Lorenz foram introduzidos independentemente por Afraimovich-Bykov-Shilnikov [2] e Guckenheimer-Williams [29]. Estes modelos constituem uma família parametrizada de campos vetoriais, cujos parâmetros correspondem aos autovalores reais* $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < -\lambda_2 < \lambda_3$ *na singularidade* $\sigma_0 = (0,0,0)$*. Existe um subconjunto* $\mathcal{C}^1$*-aberto de campos vetoriais* $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^3)$ *e um elipsóide aberto* $V \subset \mathbb{R}^3$ *contendo a origem e tal que todo* $X \in \mathcal{U}$ *apresenta um atrator de Lorenz geométrico* $\Lambda_X = \bigcap_{t \geq 0} \overline{X_t(V)}$*, que é um atrator parcialmente hiperbólico e cujas restrições do fluxo ao atrator é Komuro-expansivo (vide [5] para definições precisas e demonstrações). Tucker [86] provou a existência de um atrator estranho para as equações introduzidas por Lorenz e a equivalência do mesmo com os modelos geométricos.*

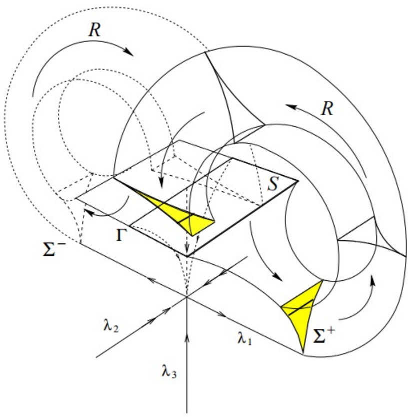


Figura 3.7: Modelo geométrico do atrator de Lorenz.

Tal construção pode ser realizada em um domínio aberto de uma variedade compacta M *e se este é o caso, dizemos que* $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ *tem um atrator de Lorenz geométrico. Como a condição de não-ressonância para a singularidade* σ_0 *é satisfeita para os parâmetros originais propostos por Lorenz e é uma condição* C^1*-aberta e* C^∞*-densa no espaço de campos vetoriais em* $\mathcal{U}$*, o seguinte é uma consequência imediata do Teorema B e do fato que atratores de Lorenz geométricos são classes homoclínicas (vide [5], Proposition 3.17), e portanto possuem uma órbita transitiva:*

Corolário 3.4.2. *Seja $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^{\infty}(M)$ um aberto de campos vetoriais tal que todo $X \in U$ tem um atrator de Lorenz geométrico Λ_X. Então existe um subconjunto C^1-aberto e C^{∞}-denso $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que, todo campo vetorial $X \in \mathcal{U}'$ admite um atrator de Lorenz geométrico Λ_X cujo centralizador em sua base de atração topológica é trivial.*

3.4.2 Centralizador de fluxos cinemático-expansivos

Observe que o argumento usado no exemplo prévio estende-se a uma classe mais geral de fluxos tridimensionais.

Exemplo 3.4.3. *(Fluxo cinemático-expansivo com centralizador quase-trivial)*

Considere $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e o fluxo φ em $\mathbb{T}^2$ obtido como suspensão da aplicação identidade em $\mathbb{S}^1$ por uma função positiva e suave $r : \mathbb{S}^1 \to (0, +\infty)$ sem qualquer "plateau" (intervalo restrito ao qual Dr é identicamente nula). O fluxo φ é cinemático-expansivo (vide Definição 3.1.9), mas não fortemente-cinemático-expansivo. A prova do Lema 3.3.2 também se aplica para fluxos cinemático-expansivos (Def. 3.1.9), o que garante que qualquer elemento $\psi \in \mathcal{Z}^1(\varphi)$ é localmente uma reparametrização de φ. Ademais, como φ não possui singularidades, os argumentos da Proposição 3.3.3 e Lema 3.3.4 implicam que ψ é uma reparametrização linear de φ. Noutras palavras, $\mathcal{Z}^1(\varphi)$ é quase-trivial.

Como consequência do Teorema de Borsuk-Ulam, para a aplicação r do Exemplo 3.4.3 existe $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $Dr(x_0) = 0$ e com isto, r pode ser $\mathcal{C}^1$-aproximada por uma aplicação com plateau centrado em x_0. Consequentemente, o fluxo φ do Exemplo 3.4.3 pode ser $\mathcal{C}^1$-aproximado por um fluxo que não é cinemático-expansivo.

No Exemplo 3.4.4 a seguir, descreveremos o centralizador do fluxo fortemente-cinemático-expansivo apresentado por Artigue ([8], Example 2.8).

Exemplo 3.4.4. *(Centralizador de um fluxo fortemente-cinemático-expansivo no toro $\mathbb{T}^2$)*

Considere um fluxo irracional no toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ associado ao campo vetorial X e uma função suave e não-negativa $f : \mathbb{T}^2 \to [0, \infty)$ com um único zero isolado em um ponto $p \in \mathbb{T}^2$. O fluxo φ gerado pelo campo vetorial fX é fortemente-cinemático-expansivo (vide [8], Example 2.8).

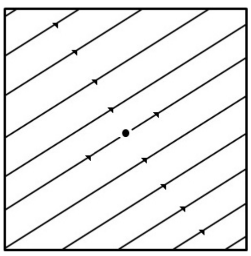


Figura 3.8: retrato de fase do fluxo apresentado no Exemplo 3.4.4.

Como este fluxo admite uma singularidade não-hiperbólica, Então o Teorema A não se aplica neste caso. De fato, não é difícil verificar que φ não é Komuro-expansivo. Entretanto, $\mathcal{Z}^1(\varphi)$ é trivial.

De fato, se σ é a única singularidade de φ e $\psi \in \mathcal{Z}^1(\varphi)$, então $\psi_s(\sigma) = \sigma$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Noutras palavras, σ é uma singularidade de ψ. Ademais, o (φ-invariante) conjunto estável $\mathcal{B}^s(\sigma) := \{y \in \mathbb{T}^2 : d(\varphi_t(y), \sigma) \to 0$ quando $t \to +\infty\}$ é invariante por ψ. Além disto, $\mathcal{B}^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ é uma órbita de φ, relativa a qualquer um de seus elementos. Como mencionado no exemplo prévio, os argumentos usados para deduzir a existência e unicidade de uma função contínua e φ-invariante $A : \mathbb{T}^2 \setminus \{\sigma\} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi_t(x) = \varphi_{A(x)t}(x)$ para todo $\mathbb{T}^2 \setminus \{\sigma\}$ e $t \in \mathbb{R}$. Ademais, como $\mathcal{B}^s(\sigma)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ e a função A é constante ao longo das órbitas de φ, ela precisa ser constante em $\mathbb{T}^2 \setminus \{\sigma\}$. Com isto, A claramente estende-se a uma função constante em $\mathbb{T}^2$, o que prova que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_t(x) = \varphi_{ct}(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Noutras palavras, $\mathcal{Z}^1(\varphi)$ é trivial.

Capítulo 4

O centralizador de $\mathbb{R}^d$-ações expansivas

Neste Capítulo 4, como resultado principal, provamos que ações de $\mathbb{R}^d$ localmente livres, expansivas e de classe $\mathcal{C}^1$ têm centralizador quase-trivial (Teorema D, p. 54), sendo que, a definição de expansividade para ações de $\mathbb{R}^d$ (Definição 4.1.1) aqui utilizada é similar a Bowen-expansividade para fluxos. Neste sentido, no Teorema E (p. 55) verificamos que uma $\mathbb{Z}^d$-ação é expansiva se e somente se a a sua suspensão é uma $\mathbb{R}^d$-ação expansiva. Como aplicação do Teorema D, verificamos que $\mathbb{R}^d$-ações Anosov têm centralizador quase-trivial, generalizando para $\mathbb{R}^d$ o resultado de Kato e Morimoto [34] para fluxos Anosov.

4.1 Resultados principais

Boyle e Lind [21] definiram o conceito de expansividade para uma ação $\varphi : \mathbb{Z}^d \times M \to M$. Como ocorre no caso $d = 1$, φ é dita expansiva se existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ distintos, então existe $N \in \mathbb{Z}^d$ tal que $d(\varphi(N, x), \varphi(N, y)) > \delta$. Aparentemente, há também consenso quanto a esta definição. Por outro lado, não encontramos na literatura o conceito de $\mathbb{R}^d$-ações expansivas. Com isto, motivados principalmente pelo que foi tratado na Subseção 3.1.1, propomos a seguinte definição de expansividade para ações que essencialmente é a versão d-dimensional para o conceito de fluxo Bowen-expansivo.

Definição 4.1.1. *Seja M um espaço métrico compacto e $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação contínua. Φ é dita* expansiva *se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in M$ satisfazem $d(\Phi_v(x), \Phi_{h(v)}(y)) < \delta$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ e para alguma aplicação contínua $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $h(0) = 0$, então $y = \Phi_{v_0}(x)$ para algum $||v_0|| < \varepsilon$. Em particular, y pertence a órbita of x relativo a Φ.*

Como ocorre no caso de fluxos, singularidades de ações de $\mathbb{R}^d$ expansivas são isoladas em M. Com isto, tais ações em variedades conexas não admitem singularidades.

Seja M uma variedade riemanniana compacta. Uma $\mathbb{R}^d$-ação $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é *localmente livre* se todas as órbitas de Φ são subvariedades de M com dimensão igual a d.

O espaço de $\mathbb{R}^d$-ações localmente livres constitui um subconjunto aberto no conjunto das $\mathbb{R}^d$-ações. De fato, se $\{e_1, \ldots, e_d\}$ denota uma base de $\mathbb{R}^d$, $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é uma $\mathbb{R}^d$-ação suave, e $\varphi_{e_i} := (\Phi_{te_i})_{t\in\mathbb{R}}$ denota o fluxo canônico gerado pela direção e_i

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{e_i}: & \mathbb{R}\times M & \to & M \\ & (t,x) & \mapsto & \Phi(te_i,\, x), \end{array}$$

então não é difícil checar que Φ é localmente livre se e somente se os campos vetoriais $X_{e_i}(x) = \dfrac{d}{dt}\varphi_{e_i}(t,x)\,|_{t=0}$ são linearmente independentes em todos os pontos de M, o que claramente é uma condição aberta.

Observe que um fluxo é localmente livre se e somente se ele não possui singularidades. Em particular, nem toda variedade admite $\mathbb{R}^d$-ações localmente livres (por exemplo, todo $\mathcal{C}^1$-fluxo em $\mathbb{S}^2$ admite singularidades, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson). Por outro lado, as únicas variedades que suportam $\mathbb{R}^d$-ações localmente livres são os toros $\mathbb{T}^n$, $n \geq d$ (vide [7], p. 274, Lemma 2).

Definição 4.1.2. *Dada uma ação $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ em uma variedade M, um ponto $x \in M$ é* periódico *relativo a ação Φ se existir $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tal que $\Phi(v,\, x) = x$ e neste caso, v é um período para o ponto periódico x.*

Neste capítulo apresentaremos a prova da seguinte versão para ações expansivas (conforme Definição 4.1.1) do Teorema B:

Teorema D. *Seja M uma variedade riemanniana compacta e $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação de classe $\mathcal{C}^1$. Se Φ é expansiva e localmente livre, então $\mathcal{Z}^1(\Phi)$ é quase-trivial, isto é, existe uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ $A : M \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ satisfazendo $A(x) = A(\Phi(v,\, x))$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ e tal que $\Psi(v,\, x) = \Phi(A(x)v,\, x)$ para todo $(v,\, x) \in \mathbb{R}^d \times M$. Adicionalmente, se existir $x \in M$ tal que $\overline{\{\Phi(v,\, x) : v \in \mathbb{R}^d\}} = M$, então $\mathcal{Z}^1(\Phi)$ é trivial.*

Uma interpretação geométrica para a reparametrização $A(\cdot)$ obtida acima será apresentada no Lema 4.3.6.

Dentre as consequências do Teorema D, análogo ao Corolário 3, estão a seguinte caracterização das sub-ações expansivas de ações de $\mathbb{R}^d$:

Corolário 4. *Seja M um espaço métrico compacto e $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação de classe $\mathcal{C}^1$, gerada por d campos vetoriais $X_1, \cdots, X_d \in \mathfrak{X}^1(M)$. Se k destes vetores $(k < d)$, $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$ geram uma sub-ação $\overline{\Phi} : \mathbb{R}^k \times M \to M$ que é expansiva e localmente livre, então as órbitas da ação Φ coincidem com as órbitas da sub-ação $\overline{\Phi}$.*

Demonstração. Para cada $1 \leq i \leq d$, a ação $\Psi : \mathbb{R}^k \times M \to M$ gerada pelos campos $Y_1 = \cdots = Y_{k-1} = 0$ e $Y_k = X_i$ está em $\mathcal{Z}^1(\overline{\Phi})$. Por outro lado, o Teorema D implica que existe uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ $A : M \to \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{R})$ satisfazendo $A(x) = A(\overline{\Phi}_v(x))$ para todo $v \in \mathbb{R}^k$ e tal que $\Psi_v(x) = \overline{\Phi}(A(x)v,\, x)$ para todo $(v,\, x) \in \mathbb{R}^k \times M$. Consequentemente, o campo Y_i pode ser expresso como combinação linear de $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$ e com isto, as órbitas de Φ são k-dimensionais. $\square$

Também, como consequência do Teorema D, obtivemos o seguinte

Corolário 5. *Seja M uma variedade riemanniana compacta e seja $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação Anosov localmente livre. Então Φ tem centralizador quase-trivial.*

A descrição do centralizador de $\mathbb{R}^d$-ações expansivas não-localmente livres apresenta dificuldades similares a dos fluxos que possuem singularidades além de órbitas regulares. A estratégia utilizada no caso de fluxos com singularidades talvez possa ser aplicada, no caso de que o conjunto de órbitas singulares (isto é, de dimensão menor do que d) tem interior vazio em M. Mais geralmente, não é difícil ver que elementos do centralizador de uma $\mathbb{R}^d$-ação preservam órbitas de mesma dimensão, mas não é claro se estes são dados por reparametrizações da ação original.

Bowen e Walters [20] (Theorem 6) provaram que o fluxo de suspensão de um homeomorfismo é C-expansivo se e somente se, o referido homeomorfismo for expansivo. No Teorema E a seguir, provamos uma generalização deste resultado para as $\mathbb{R}^d$-ações que satisfazem a Definição 4.1.1 de expansividade para $\mathbb{R}^d$-ações que introduzimos. Num certo sentido, este resultado é um exibidor de exemplos para esta classe de ações e por causa disto, o provaremos considerando apenas a suspensão pela aplicação $R : M \to (0, \infty)^d$ constante igual a $(1,, 1, \cdots, 1)$.

Teorema E. *Seja M uma variedade riemanniana compacta e $\overline{1} : M \to (0, \infty)^d$ constante igual a 1. Uma $\mathbb{Z}^d$-ação contínua $\varphi : \mathbb{Z}^d \times M \to M$ tal que $\varphi((\sigma_1, \cdots, \sigma_d), \cdot\,)$ é um homeomorfismo lipschitziano cujo inverso também é lipschitziano para todo $(\sigma_1, \cdots, \sigma_d) \in \{0, 1\}^d$, é expansiva se e somente se sua suspensão $\Phi : \mathbb{R}^d \times M_1 \to M_1$ é expansiva.*

A prova do Teorema E será feita na Seção 4.2. Antes, introduziremos a seguinte terminologia:

Seja $\{e_1, \cdots, e_d\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^d$. Dada uma $\mathbb{Z}^d$-ação $\varphi : \mathbb{Z}^d \times M \to M$ $(d \geq 2)$, se $f_i(x) = \varphi(e_i, x)$, então $\varphi((n_1, \cdots, n_d), x) = f^{n_1} \circ \cdots \circ f^{n_d}(x)$ para todo $(n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ e para todo $x \in M$.

Dada uma função $R : M \to (0, \infty)^d$, $R = (R_1, \cdots, R_d)$, considere $M_R = (M \times \mathbb{R}^d)/\sim_R$, onde $\sim_R$ é a relação de equivalência definida por

$$(x, a_1, \cdots, a_{i-1}, R_i(x), a_{i+1}, \cdots, a_d) \sim_R (f_i(x), a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_d)$$

para todo $x \in M$, $0 \leq a_j \leq R_j(x)$.

Com isto, a suspensão de φ é a $\mathbb{R}^d$-ação $\Phi : \mathbb{R}^d \times M_R \to M_R$ definida por

$$\begin{aligned}\Phi((t_1, \cdots, t_d), (x, a_1, \cdots, a_d)) &= \Phi(t_1 e_1 + \cdots + t_d e_d, (x, a_1, \cdots, a_d)) \\ &= \Phi(t_1 e_1, \Phi(t_2 e_2, \cdots \Phi(t_d e_d, (x, a_1, \cdots, a_d))))\end{aligned}$$

onde $\Phi(te_i, (x, a_1, \cdots, a_d)) = (f_i^n(x), a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + t - \sum_{j=0}^{n-1} R_i(f_i^j(x)), a_{i+1}\, a_d)$ e $n \in \mathbb{Z}$ é unicamente determinada por $\sum_{j=0}^{n-1} R_i(f_i^j(x)) \leq a_i + t < \sum_{j=0}^{n} R_i(f_i^j(x))$, para todo $x \in M$,

$1 \leq i \leq d$ e $0 \leq a_i \leq R_i(x)$. Deste modo, qualquer $\mathbb{Z}^d$-ação em uma variedade compacta d-dimensional M determina uma $\mathbb{R}^d$-ação Φ na variedade compacta $n+d$-dimensional M_R, a qual é metrizável. Descreveremos uma métrica d que é compatível com a topologia natural de M_R e é a análoga a métrica que foi introduzida por Bowen-Walters [20] para fluxos de suspensão.

Para os propósitos do Teorema E é suficiente considerar a função R constante igual a 1 e o espaço correspondente $M_{\bar{1}}$. Seja ρ a métrica de M.

Dado $M \times \{(t_1, \cdots, t_r)\} \subset M_{\bar{1}}$ e $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_d) \in \{0, 1\}^d$, considere a distância "horizontal" ρ_h e $M \times \{(t_1, \cdots, t_r)\}$ definida por

$$\rho_h((x, t_1, \cdots, t_r), (y, t_1, \cdots, t_r)) \\ = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^d} \left\{ \prod_{i=1}^{d} \Big[\sigma_i \cdot t_i + (1-\sigma_i)\cdot(1-t_i) \Big] \right\} \cdot \rho(f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(x), f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(y)).$$

Definida deste modo, $\rho_h((x_1, t_1, \cdots, t_r), (x_2, t_1, \cdots, t_r))$ consiste da combinação convexa das distâncias entre as imagens dos pontos x e y e seus iterados pelas aplicações da forma $f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}$, $(\sigma_1, \cdots, \sigma_d) \in \{0, 1\}^d$, no "topo" da suspensão. Dados quaisquer dois

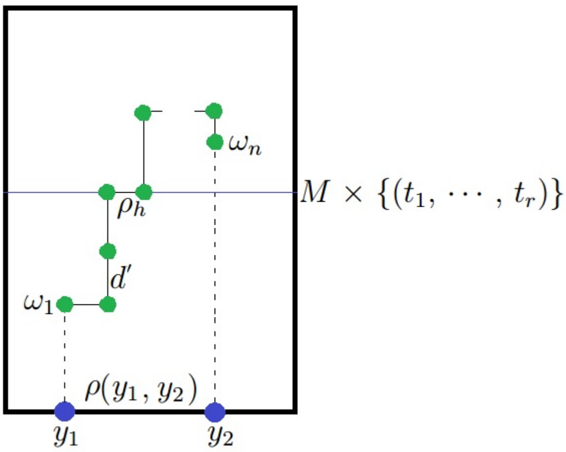


Figura 4.1: Métrica d.

pontos $(x, t_1, \cdots, t_r), (y, s_1, \cdots, s_r) \in M_1$, considere o espaço de todas as sequências finitas (admissíveis) $\omega_1 = (x_1, t_1, \cdots, t_r) \cdots, \omega_n = (x_n, s_1, \cdots, s_r)$ tais que $x_1 = x$, $x_n = y$ e, para cada $1 \leq i \leq n-1$, exatamente uma das seguintes ocorre:

1. $\omega_i, \omega_{i+1} \in M \times \{(t_1, \cdots, t_r)\}$ para algum $(t_1, \cdots, t_r) \in [0, 1)^d$, neste caso seja $d'(\omega_i, \omega_{i+1}) = \rho_h(\omega_i, \omega_{i+1})$;

2. ω_i, ω_{i+1} estão na mesma órbita, relativo a ação Φ, e neste caso $d'(\omega_i, \omega_{i+1}) = \min\{||v|| : \Phi_v(\omega_i) = \omega_{i+1}\}$.

Finalmente, considere a métrica d em M_1, dada por

$$d((x, t_1, \cdots, t_r), (y, s_1, \cdots, s_r)) = \inf \sum_{i=1}^{n-1} d'(\omega_i, \omega_{i+1}),$$

onde o ínfimo é tomado sobre o espaço de todas as sequências admissíveis entre $(x, t_1, \cdots, t_r)$ e $(y, s_1, \cdots, s_r)$.

4.2 Prova da expansividade da suspensão de $\mathbb{Z}^d$-ações expansivas

Apresentaremos a seguir, a prova do Teorema E (p. 55).

Demonstração. Suponha que a ação $(\Phi_v)_{v\in\mathbb{R}^d}$ é expansiva (conforme Definição 4.1.1). Dado $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ seja $\delta > 0$ tal que se $x, y \in M$ satisfaz $d(\Phi_v(x), \Phi_{h(v)}(y)) < \delta$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ com respeito a uma função contínua $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $h(0) = 0$, então $y = \Phi_{v_0}(x)$ para algum $\|v_0\| < \varepsilon$. Afirmamos que a $\mathbb{Z}^d$-ação φ é expansiva. Para ver isto, assuma que $x_1, x_2 \in M$ são tais que $\rho(\varphi_{(n_1,\cdots,n_d)}(x_1), \varphi_{(n_1,\cdots,n_d)}(x_2)) < \delta$ para todo $(n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Se $[t]$ denota a parte inteira de t e $\{t\} = t - [t]$ denota a parte fracionária de t para todo $t \in \mathbb{R}$, observe que

$$\begin{aligned}
&d(\Phi_{(t_1,\cdots,t_d)}(x_1, 0, \cdots, 0), \Phi_{(t_1,\cdots,t_d)}(x_2, 0, \cdots, 0)) \\
&\quad = d(\Phi_{([t_1],\cdots,[t_d])}(x_1, \{t_1\}, \cdots, \{t_d\}), \Phi_{([t_1],\cdots,[t_d])}(x_2, \{t_1\}, \cdots, \{t_d\})) \\
&\quad \le \rho_h(\Phi_{([t_1],\cdots,[t_d])}(x_1, \{t_1\}, \cdots, \{t_d\}), \\
&\qquad\qquad \Phi_{([t_1],\cdots,[t_d])}(x_2, \{t_1\}, \cdots, \{t_d\})) \\
&\quad = \rho_h((f_1^{[t_1]} \circ \cdots \circ f_d^{[t_d]}(x_1), \{t_1\}, \cdots, \{t_d\}), \\
&\qquad\qquad (f_1^{[t_1]} \circ \cdots \circ f_d^{[t_d]}(x_2), \{t_1\}, \cdots, \{t_d\})) \\
&\quad = \sum_{\sigma\in\{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} \sigma_i \cdot \{t_i\} + (1-\sigma_i)\cdot(1-\{t_i\})\right) \\
&\qquad\qquad \cdot \rho(f_1^{[t_1]+\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{[t_d]+\sigma_d}(x_1), f_1^{[t_1]+\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{[t_d]+\sigma_d}(x_2)) \\
&\quad < \sum_{\sigma\in\{0,1\}^d} \left(\prod_{i=1}^{d} \sigma_i \cdot \{t_i\} + (1-\sigma_i)\cdot(1-\{t_i\})\right) \cdot \delta = \delta
\end{aligned}$$

para todo $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. A expansividade de Φ garante que $(x_2, 0, \cdots, 0) = \Phi_{v_0}(x_1, 0, \cdots, 0)$ para algum $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|v_0\| < \varepsilon < 1/2$. Isto implica que $x_1 = x_2$ e consequentemente a ação $\varphi : \mathbb{Z}^d \times M \to M$ é expansiva.

Reciprocamente, suponha que φ é expansiva. Como por hipótese, cada $f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(\circ) = \varphi((\sigma_1, \cdots, \sigma_d), \cdot\,)$ é um homeomorfismo lipschitziano cujo inverso também é lipschitziano, é possível obter $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C} \cdot \rho(x_1, x_2) \le \rho(f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(x_1), f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(x_2)) \le C \cdot \rho(x_1, x_2)$$

para todo $\{0, 1\}^d$. Por outro lado, considerando

$$\rho'(x_1, x_2) = \min_{\sigma\in\{0,1\}^d} \{\rho(f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(x_1), f_1^{\sigma_1} \circ \cdots \circ f_d^{\sigma_d}(x_2))\},$$

observe que $\rho^{'}(x_1, x_2) \geq 0$ para quaisquer x_1, x_2, $\rho^{'}(x_1, x_2) = 0$ se e só se $x_1 = x_2$, $\rho^{'}(x_1, x_2) = \rho^{'}(x_2, x_1)$ para quaisquer x_1, x_2 e além disto, pela maneira como $\rho^{'}$ foi definido, vale a estimativa $\frac{1}{C} \cdot \rho(x_1, x_2) \leq \rho^{'}(x_1, x_2) \leq C \cdot \rho(x_1, x_2)$ para quaisquer x_1, x_2, o que estabelece equivalência entre ρ e $\rho^{'}$.

Seja $\zeta > 0$ a respectiva constante de expansividade de φ com respeito a $\rho^{'}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $0 < \delta < \min\{\varepsilon, \frac{1}{4}, \zeta\}$. Suponha que $d(\Phi_v(x_1, t_1, \cdots, t_d), \Phi_{h(v)}(x_2, s_1, \cdots, s_d)) < \delta$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ e para alguma aplicação contínua $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $h(0) = 0$. Assuma sem perda de generalidade que $y_1 = (x_1, 1/2, \cdots, 1/2)$ e $y_2 = (x_2, s_1, \cdots, s_d)$, $y_1, y_2 \in M \times [0, 1]^d$ (Se y_1 não é da forma $(x_1, 1/2, \cdots, 1/2)$, então tome $\|w\| \leq 1/2$ tal que $\Phi_w(y_1) = (x_1, 1/2, \cdots, 1/2)$ e considere os pontos $\Phi_w(y_1)$ e $\Phi_{h(w)}(y_2)$). Observe que

$$\rho^{'}(x_1, x_2) \leq d(y_1, y_2) = d(\Phi_0(y_1), \Phi_{h(0)}(y_2)) < \delta < 1/4.$$

Agora, suponha que $d(\Phi_v(y_1), \Phi_{h(v)}(y_2)) < \delta < 1/4$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$. Em particular, tomando $v = e_i$ $(1 \leq i \leq d)$, segue que $\rho^{'}(f_i^n(x_1), f_i^n(x_2)) \leq d(\Phi_{n\cdot e_i}(y_1), \Phi_{h(n\cdot e_i)}(y_2)) < \delta < 1/4$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Procedendo recursivamente, obtem-se que

$$\begin{aligned}\rho^{'}((f_1^{n_1} \circ \cdots \circ f_d^{n_d})(x_1), (f_1^{n_1} \circ \cdots \circ f_d^{n_d})(x_2))\\ \leq d(\Phi_{(n_1, \cdots, n_d)}(\overline{y_1}), \Phi_{h(n_1, \cdots, n_d)}(\overline{y_2})) < \delta\end{aligned}$$

para todo $(n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. Finalmente, pela expansividade de φ, segue que $x_1 = x_2$, implicando em $y_2 = \Phi_v(y_1)$ para algum $v \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|v\| < \delta < \varepsilon$. □

4.3 Prova da trivialidade do centralizador de ações expansivas

Nesta Seção provaremos o Teorema D. Com isto, caracterizaremos o espaço de $\mathbb{R}^d$-ações Ψ de classe $\mathcal{C}^1$ que comutam com uma $\mathbb{R}^d$-ação expansiva Φ de classe $\mathcal{C}^1$. Nosso propósito é provar que a ação Ψ é uma reparametrização de Φ, isto é, existe uma aplicação $A : M \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfazendo $A(x) = A(\Phi_v(x))$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ e tal que $\Psi_v(x) = \Phi(A(x)v, x)$ para todo $(v, x) \in \mathbb{R}^d \times M$ (conforme Lema 4.3.6 a seguir). Como a estratégia da prova é similar a do Teorema B, esboçaremos os detalhes com destaque para as principais diferenças. O ponto de partida é a seguinte forma canônica para campos vetoriais que comutam, similar ao Teorema da vizinhança tubular 1.1.4.

Lema 4.3.1 (Lee [40], Theorem 18.6). *Seja M uma n-variedade suave e seja Φ uma $\mathbb{R}^d$-ação de classe $\mathcal{C}^1$ em M com $d < n$. Assuma que Φ é gerada por campos vetoriais suaves $X_1, \cdots, X_d$ que comutam e são linearmente independentes em algum subconjunto aberto $W \subseteq M$. Para cada $p \in W$ existe uma vizinhança aberta de p, um difeomorfismo $h : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n$ com funções coordenadas $h(q) = (s_1(q), \cdots, s_n(q))$ são as coordenadas* *locais em U, $h(p) = 0$ e tal que $X_i = h_*^{-1}\dfrac{\partial}{\partial s_i}$ para $i = 1, \cdots, d$. Se $S \subseteq U$ é uma subvariedade mergulhada de codimensão d e p é um ponto de S tal que T_pS é complementar a span$(X_1(p), \cdots, X_d(p))$, então as coordenadas podem ser escolhidas tal que S é definida por $s_1 = \cdots = s_d = 0$.*

Como consequência do Lema 4.3.1, provaremos no Lema 4.3.2 a seguir, a existência de infímo positivo para os períodos de pontos periódicos (conforme Definição 4.1.2).

Lema 4.3.2. *Se $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é uma $\mathbb{R}^d$-ação expansiva e localmente livre de classe $\mathcal{C}^1$, então*

$$\varepsilon_0(\Phi) = \inf\{\|v\| > 0 : \ v \text{ é período de uma órbita periódica de } \Phi\} > 0.$$

Como a prova do Lema 4.3.2 é completamente similar a do Lema 3.3.1, via o uso do Lema 4.3.1, ela será omitida.

Observe que se uma $\mathbb{R}^d$-ação não é localmente livre, então $\varepsilon_0(\Phi)$ é igual a zero.

Lema 4.3.3. *Se $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é uma ação expansiva de classe $\mathcal{C}^1$ e $\Psi \in \mathcal{Z}^1(\Phi)$, então para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\Phi)/3$ existe $\mu > 0$ e uma única aplicação $z : \overline{B_\mu(0)} \times M \to B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\Psi_s(x) = \Phi(z(s, x), x)$ para todo $(s, x) \in \overline{B_\mu(0)} \times M$. Ademais,*

(I) z é uma aplicação contínua,

(II) Se $v, u, u + v \in \overline{B_\mu(0)}$, então $z(u + v, x) = z(u, x) + z(v, \Psi(u, x))$.

Demonstração. Seja $\varepsilon_0(\Phi) > 0$ como no Lema 4.3.2, considere $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\Phi)/3$ e seja $\delta > 0$ correspondente, dado pela expansividade de Φ (conforme Definição 4.1.1). Pela compacidade de M existe $\mu > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/3$, então

$$\sup_{\|u\| \leq \mu} \{d(Id, \Psi_u)\} < \delta.$$

Se $\|u\| \leq \mu$, então $d(\Phi_v(x), \Phi_v(\Psi_u(x))) = d(\Psi_0(\Phi_v(x)), \Psi_u(\Phi_v(x))) < \delta$ para todo $(v, x) \in \mathbb{R}^d \times M$. Como Φ é uma ação expansiva e $d(\Phi_v(x), \Phi_{h(v)}(\Psi_u(x))) < \delta$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ (com $h = Id$), existe $v_0 \in \mathbb{R}^d$ tal que $\Phi_{v_0}(\Psi_u(x)) = \Phi_{v_0+\eta}(x)$ para algum $\eta \in B_\varepsilon(0)$. Isto implica que $\Psi_u(x) = \Phi_\eta(x)$ para algum vetor η satisfazendo $\|\eta\| < \varepsilon$. Em particular, $\Psi_u(x)$ pertence a órbita de x relativo a $\mathbb{R}^d$-ação Φ.

Isto define uma aplicação $z : \overline{B_\mu(0)} \times M \to B_\varepsilon(0)$ tal que $\Psi(u, x) = \Phi(z(u, x), x)$ para qualquer $(u, x) \in \overline{B_\mu(0)} \times M$. Para provar a unicidade, observe que se $z_1, z_2 : \overline{B_\mu(0)} \times M \to B_\varepsilon(0)$ são tais que $\Phi(z_1(u, x), x) = \Psi(u, x) = \Phi(z_2(u, x), x)$, então $\Phi(z_1(u, x) - z_2(u, x), x) = x$, onde $\|z_1(u, x) - z_2(u, x)\| \leq \|z_1(u, x)\| + \|z_2(u, x)\| < 2\,\varepsilon_0(\Phi)/3$. Como não existem pontos periódicos de período menor do que $\varepsilon_0(\Psi)$, a unicidade de z segue. A prova da continuidade de z, bem como a prova do ítem (II) são completamente análogas as respectivas que foram apresentadas no Lema 3.3.2, e por isto serão omitida. $\square$

Observe que como na demonstração do Lema 4.3.3 utiliza-se $h = Id$, o mesmo também é verdadeiro se a ação Φ fosse cinemático-expansiva. Consequentemente, como ocorre com o Teorema B, o Teorema D também é válido para ações de $\mathbb{R}^d$ em variedades compactas que são cinemático-expansivas.

A seguir, construiremos uma extensão para $\mathbb{R}^d \times M$ para a reparametrização contínua descrita no Lema 4.3.3. Mais precisamente, temos o seguinte

Lema 4.3.4. *Se $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é uma ação contínua e $\Psi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é uma ação contínua tal que para $\mu > 0$ fixado existe uma aplicação $z : \overline{B_\mu(0)} \times M \to B_\varepsilon(0)$ tal que $\Psi(v, x) = \Phi(z(v, x), x)$ para qualquer $(v, x) \in \overline{B_\mu(0)} \times M$, onde $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\Phi)/3$, então existe uma única aplicação contínua $p : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ que é extensão de z e tal que $\Psi(s, x) = \Phi(p(s, x), x)$ para todo $(s, x) \in \mathbb{R}^d \times M$.*

Demonstração. A estratégia da prova deste Lema é similar a da Proposição 3.3.3. Para estender a reparametrização local dada no Lemma 4.3.3 para uma aplicação $p : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ tal que $\Psi(s, x) = \Phi(p(s, x), x)$ para todo $(s, x) \in \mathbb{R}^d \times M$.

A novidade aqui é que, devido a dimensão superior a 1 de $\mathbb{R}^n$, há várias maneiras de estender o domínio da reparametrização para $\mathbb{R}^n$. A extensão aqui feita é radial considerando-se os vetores em $\mathbb{R}^d$ como múltiplos dos vetores na esfera unitária $\mathbb{S}^{d-1}$.

Para isto, seja $\mu > 0$ dado pelo Lema 4.3.3, $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \mu$ e fixe $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $D_k = \left\{ z \in \mathbb{R}^d : \dfrac{k}{2^N} \leq \|z\| \leq \dfrac{k+1}{2^N} \right\}$, contendo os vetores da forma $u = t \cdot v \in \mathbb{R}^d$ para $t \in [k/2^N, (k+1)/2^N]$.

Agora, considere as funções $z_k : D_k \times M \to \mathbb{R}^d$ dadas por

$$z_k(t \cdot v, x) = z\left(\frac{t-k}{2^N} \cdot v, x\right) + \sum_{i=1}^{k} z\left(\frac{1}{2^N} \cdot v, \Psi\left(\frac{t-i}{2^N} \cdot v, x\right)\right), \tag{4.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.3.3 e pela definição de z_k, segue que z_k é contínua e satisfaz

$$z_k\left(\frac{k+1}{2^N} \cdot v, x\right) = z_{k+1}\left(\frac{k+1}{2^N} \cdot v, x\right) \quad \text{e} \quad \Psi(tv, x) = \Phi(z_k(tv, x), x) \tag{4.2}$$

para todo $x \in M$, $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [k/2^N, (k+1)/2^N]$.

Isto permite definir a aplicação contínua $p : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ dada por

$$p(t \cdot v, x) = \begin{cases} z(t \cdot v, x), & \text{if } t \in [0, 1/2^N], v \in \mathbb{S}^{d-1} \\ z_k(t \cdot v, x), & \text{if } t \in \left[k/2^N, (k+1)/2^N\right], v \in \mathbb{S}^{d-1}, k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

A continuidade de p segue da relação (4.2) e Lema 4.3.3. Ademais, como $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ pode ser escolhido arbitrariamente, os Lemas 4.3.3 e 4.3.4 implicam que p satisfaz $\Psi(t \cdot v, x) = \Phi(p(t \cdot v, x), x)$ para todo $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Para provar a unicidade da reparametrização p, assuma que existem reparametrizações contínuas $p_1, p_2 : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}^d$ que estendem z e são tais que $\Phi(p_1(u, x), x) = \Psi(u, x) = \Phi(p_2(u, x), x)$ para qualquer $(u, x) \in \mathbb{R}^d \times M$. Fixado $x \in M$, seja $\alpha_x(u) = p_1(u, x) -$

$p_2(u, x)$. Observe que $\alpha_x^{-1}(0) \supset \overline{B_\mu(0)}$ e, consequentemente, $\alpha_x^{-1}(0) \neq \emptyset$. Ademais, como α_x é contínua, $\alpha_x^{-1}(0)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^d$.
Afirmação: $\alpha_x^{-1}(0) = \mathbb{R}^d$. Se $\alpha_x^{-1}(0) \neq \mathbb{R}^d$, existiria um vector unitário $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ e $t_0 = \sup\{t > 0 : t \cdot v \in \alpha_x^{-1}(0)\} < \infty$. Como $\alpha_x^{-1}(0)$ é um subconjunto fechado, então $t_0 \cdot v \in \alpha_x^{-1}(0)$. Pela discussão anterior, considerando $x^{'} = \Psi(p_1(t_0 \cdot v, x), x)\,(= \Psi(p_2(t_0 \cdot v, x), x))$, segue que $\alpha_{x'}$ é identicamente nula em $\overline{B_\mu(0)}$. α_x é identicamente nula em $\{t \cdot v : t \in [0, t_0 + \mu]\}$, o que contradiz a maximalidade de t_0. Isto prova a afirmação e a unicidade da reparametrização. □

Lema 4.3.5. *Se p é a reparametrização dada pelo lema 4.3.4, então p é invariante ao longo das órbitas de Φ, isto é, $p(v, x) = p(v, \Phi(u, x))$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^d$ e $x \in M$.*

Demonstração. Seguindo os argumentos do Lema 3.3.4, é possível provar que $\Phi(p(v + u, x), x) = \Phi(p(v, x) + p(u, x), x)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^d$ e $x \in M$. A unicidade de p implica que

$$p(v + u, x) = p(v, x) + p(u, x) \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{R}^d \text{ e } x \in M \tag{4.3}$$

Por (4.3) e continuidade de p, segue que existe uma aplicação contínua $M \ni x \mapsto A(x) \in M_d(\mathbb{R})$ tal que $p(v, x) = A(x) \cdot v$ para todo $x \in M$ e $v \in \mathbb{R}^d$. Com isto, o teorema D está provado. □

No restante desta Seção provaremos uma caracterização geométrica da reparametrização linear obtida no Teorema D.

Lema 4.3.6. *Seja $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ uma ação de classe $\mathcal{C}^1$ expansiva e localmente livre e seja $\Psi \in \mathcal{Z}^1(\Phi)$ tal que $\Psi(v, x) = \Phi(A(x)v, x)$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$ e $x \in M$. Considerando os campos vetoriais $X_i(\cdot) = \dfrac{d\Phi(te_i, \cdot)}{dt}\,|_{t=0}$ and $Y_i(\cdot) = \dfrac{d\Psi(te_i, \cdot)}{dt}\,|_{t=0}$ para todo $1 \leq i \leq d$, para cada $x \in M$ a aplicação linear $A(x)$ é dada pela matriz de representação dos vetores $(Y_i(x))_{1 \leq i \leq d}$ em termos da base $(X_i(x))_{1 \leq i \leq d}$.*

Demonstração. A homogeneidade assegura que os campos vetoriais $X_1, \cdots, X_d$ são linearmente independentes. Fixado $x \in M$, por uma mudança de coordenadas, assuma sem perda de generadidade que Φ é localmente uma $\mathbb{R}^d$-ação em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ $(n = dimM)$ e que $X_i(z) = e_i$ para todo $1 \leq i \leq d\,(< n)$. Ademais, o Lema 4.3.1 garante a existência de uma vizinhança aberta $V_x \subset M$ de x, e uma mudança de coordenadas $h : V_x \to h(V_x) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X_i = h_*^{-1} e_i$ para todo $1 \leq i \leq d$. Também denotando por Φ a ação induzida em $h_x(V)$, segue que

$$\Phi(v, z) = z + \sum_{i=1}^{d} v_i \cdot X_i$$

para todo $z = h(x) \in \mathbb{R}^d$ e todo $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ tal que $\Phi(v, z)$ está em $h(V_x)$. Reduzindo V_x se necessário, seja $\delta > 0$ tal que $h(V_x) = (-\delta, \delta)^d$.

O primeiro passo na prova do Teorema D implica que as órbitas da ação Φ são fixadas por qualquer elemento $\Psi \in \mathcal{Z}^1(\Phi)$. Ademais, como Φ restrita a cada uma de suas órbitas é gerada por d campos vetoriais constantes $X_i(z) = e_i$ $(1 \leq i \leq d)$, Φ age (localmente) em cada uma de suas órbitas como um grupo de translações em $\mathbb{R}^d$. Além disso, nas coordenadas linearizadas, a órbita (local) de $z \in h(V_x)$ é $\mathcal{F}(z) = \{w \in (-d, d)^n : w = z + t\, ei$ para algum $1 \leq i \leq d$ e $t \in \mathbb{R}\}$. Com isto, para qualquer vetor de translação $g \in \mathcal{F}(z) \simeq \mathbb{R}^d$ suficientemente pequeno dado, existe um vetor $u = u_g$ tal que $\Phi(u_g, z) = z + g$. Consequentemente, para todo $z \in (-d, d)^n$, $\Psi_{|F(z)}$ comuta com todas as tranlações locais em $\mathcal{F}(z)$.

Nestas coordenadas linearizadas a ação $\Psi \in \mathcal{Z}^1(\Phi)$ também age por um grupo de translações ao longo da órbita $\mathcal{F}(z)$. Como $\mathcal{F}(z) \simeq (-d, d)^n \subset \mathbb{R}^n$, isto é uma consequência imediata da seguinte

Afirmação: Se uma aplicação $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ comuta com todas as translações em $\mathbb{R}^d$, então f é também uma translação em $\mathbb{R}^d$.

Prova da afirmação: Escrevendo f em termos de suas funções coordenadas

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_d), \cdots, f_d(x_1, x_2, \cdots, x_d))$$

para $(x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, como f comuta com todas as translações da forma $x + \lambda\, e_j$, para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{e_1, \cdots, e_d\}$ denotando a base canônica de $\mathbb{R}^d$, então $f(x + \lambda\, e_j) = f(x) + \lambda\, e_j$. Analizando cada coordenada separadamente, isto significa que $f_i(x + \lambda\, e_j) = f_i(x) + \lambda\, \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kroneker dado por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.
Com isto,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_i(x + \lambda\, e_j) - f_i(x)}{\lambda} = \delta_{ij}.$$

Consequentemente, $f_i(x) = x_i + r_i$ para $r_i = f_i(0) \in \mathbb{R}$. Isto garante que $f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = (x_1, x_2, \cdots, x_d) + (r_1, r_2, \cdots, r_d)$ é uma translação, o que completa a prova da afirmação.

Agora, podemos concluir a prova do Lema. A afirmação prévia implica que $\Psi(u, y)$ é uma translação para todo $(u, y) \in U$. Em particular, se $\{u_1, \cdots, u_d\}$ é uma base de $\mathbb{R}^d$, os fluxos $(\Psi_{t \cdot u_i})_{t \in \mathbb{R}}$ são fluxos de translações. Ademais, pela propriedade de grupo de $(\Psi_{t \cdot u_i})_{t \in \mathbb{R}}$, existe um vetor w_i tal que $\Psi_{t \cdot u_i}(x) = x + t\, w_i$ e consequentemnete os d campos vetoriais $Y_1, Y_2, \cdots, Y_d$ que definem Ψ são constantes. Assim, em U é possível escrever

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{d1}X_d \\ Y_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{d2}X_d \\ \qquad\qquad \vdots \\ Y_d = a_{1d}X_1 + a_{2d}X_2 + \cdots + a_{dd}X_d \end{cases}.$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{bmatrix}$. Se $v = \sum_{i=1}^{d} r_i Y_i \in \mathbb{R}^d$ escrito como combinação linear dos vetores $(Y_i)_{1\leq i\leq d}$, então

$$\begin{aligned}\Psi(v,\,z) &= z+\sum_{j=1}^{d} r_j Y_j\\ &= z+\sum_{j=1}^{d} r_j\Big[\sum_{i=1}^{d} a_{ij}X_i\Big]\\ &= z+\sum_{i=1}^{d}\Big[\sum_{j=1}^{d} r_j\,a_{ij}\Big]\cdot X_i\\ &= z+Av\\ &= \Phi(Av,\,z)\end{aligned}$$

para todo $z\in U$, provando que $A(x)=Dh(x)^{-1}\cdot A\cdot Dh(x)$, onde A é a matriz de mudança de coordenadas que determina a ação Ψ como reparametrização da ação Φ. Isto termina a prova do Lema 4.3.6. $\square$

4.4 Trivialidade do centralizador de ações Anosov

Nesta Seção provaremos o Corolário 5. Seja M uma variedade riemanniana compacta e seja $\Phi:\mathbb{R}^d\times M\to M$ uma Ação Anosov. Como extensão de [34], provaremos que $\mathcal{Z}^1(\Phi)$ é quase-trivial. Para isto, introduziremos a seguir alguma terminologia.

Seja G um grupo de Lie conexo. Uma ação $\Phi:G\times M\to M$ é Anosov ela for localmente livre e além disto, existir $g\in G$ tal que $f=\Phi_g$ é normalmente hiperbólico com respeito a folheação de M por órbitas de Φ, isto é,

$$TM=E^u\oplus T\mathcal{F}\oplus E^s,$$

com $Df(E^u)=E^u$, $D(\mathcal{F})=\mathcal{F}$, $Df(E^u)=E^u$ e para cada $x\in M$,

$$\max\left\{||Df^n(x)_{|E^s_x}||,\ ||Df^{-n}(x)_{|E^u_x}||,\ \frac{||Df^n(x)_{|E^s_x}||}{m(Df^n(x)_{|T_x\mathcal{F}})},\ \frac{||Df^n(x)_{|T_x\mathcal{F}}||}{m(Df^n(x)_{|E^u_x})}\right\}<Ce^{-\lambda n},$$

onde $m(\,\cdot\,)$ é a co-norma do operador.

Uma plaquação de $\mathcal{F}$ resulta de uma escolha de um número finito de caixas de folheações locais $\varphi:D^d\times D^{m-d}\subset\mathbb{R}^m\to M$ tal que $\varphi\left(\frac{1}{2}D^d\times\frac{1}{2}D^{m-d}\right)$ cobre M. para cada $y\in v$, $\varphi\left(D^d\times\{y\}\right)$ é dito ser uma *placa* de $\mathcal{P}$.

Uma *δ-pseudo órbita* de um difeomorfismo f é uma sequência bi-infinita de pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $d(f(x_n),\,x_{n+1})<\delta$ para todo $n\in\mathbb{Z}$. Uma δ-pseudo órbita (x_n) é compatível com a plaquação $\mathcal{P}$ se $f(x_n)$ e x_{n+1} sempre pertencem a uma mesma placa de $\mathcal{P}$.

Uma folheação f-invariante é expansiva por placas se existir uma plaquação $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}$ e um $\delta > 0$ tal que qualquer duas δ-pseudo-órbitas (x_n) e (y_n) de f, com respeito a $\mathcal{P}$ e mutuamente δ-sombreadas, isto é, $d(x_n, y_n) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, necessariamente x_n e y_n pertencem as mesmas placas de $\mathcal{P}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma questão fundamental que surge é saber quando um difeomorfismo normalmente hiperbólico é expansivo por placas. Neste sentido há uma resposta afirmativa a esta questão para o caso $\mathcal{C}^1$ (vide [32], Theorem 7.2, p. 119). Como consequência deste fato, temos o seguinte

Lema 4.4.1. *Toda $\mathbb{R}^d$-ação Anosov Φ em uma uma variedade riemanniana compacta M é cinemática-expansiva.*

Demonstração. Provavelmente, este seja um fato conhecido, mas não o encontramos na Literatura. Seja $\mathcal{F}$ a folheação em M pelas órbitas de Φ. Nestas condições, existe $v \in \mathbb{R}^d$ tal que o difeomorfismo Φ_v é um elemento Anosov, e portanto normalmente hiperbólico. Seja $\overline{\delta} > 0$ dado pela plaque-expansividade de $(\Phi_v, \mathcal{F})$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$ e suponha que $x, y \in M$ satisfazem $d(\Phi_u(x), \Phi_u(y)) < \delta$ para todo $u \in \mathbb{R}^d$. Em particular, as órbitas de x e y pelo difeomorfismo Φ_v diferem por no máximo $\overline{\delta}$, já que $d(\Phi_{nv}(x), \Phi_{nv}(y)) < \delta \leq \overline{\delta}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$). Ademais, a plaque-expansividade implica que $y \in \mathcal{F}(x)$. Isto prova que y está na órbita de x por Φ e que $d(x, y) < \varepsilon$. Consequentemente, existe um vetor $w \in \mathbb{R}^d$ tal que $||w|| < \varepsilon$ e $y = \Phi_w(x)$, e portanto a ação $\Phi : \mathbb{R}^d \times M \to M$ é cinemático-expansiva. $\square$

Finalmente, via o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema D, o fato que uma $\mathbb{R}^d$-ação Anosov Φ em uma uma variedade riemanniana compacta M é cinemática-expansiva implica que $\mathcal{Z}^1(\Phi)$ é quase-trivial.

Capítulo 5

A conjectura de Smale para fluxos C^1-conservativos e $\mathcal{C}^2$-hamiltonianos

Neste capítulo, M denotará uma variedade riemanniana compacta e conexa com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$. O estudo deste capítulo da tese versa sobre o centralizador de fluxos associados a campos de vetores C^1-genéricos em dois contextos importantes: o dos fluxos conservativos e o dos fluxos Hamiltonianos.

5.1 Trivialidade do centralizador de campos conservativos $\mathcal{C}^1$-genéricos

Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n com uma forma de volume ω e seja μ a medida de Lebesgue associada a ω. Um campo vetorial $X : M \to TM$ (ou o fluxo associado) é *conservativo* se o laplaciano $\nabla \cdot X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i} = 0$ ou equivalentemente, se a medida μ é invariante para o fluxo associado $(X_t)_t$. Denotaremos por $\mathfrak{X}^r_\mu(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^r$ em M e que são conservativos com respeito a uma medida de volume μ.

Para cada $X \in \mathfrak{X}^r_\mu(M)$, define-se o centralizador (conservativo) de X como sendo

$$\mathcal{Z}^r_\mu(X) = \{Y \in \mathfrak{X}^r_\mu(M) : \; [X, Y] = 0\} = \mathcal{Z}^r(X) \cap \mathfrak{X}^r_\mu(M).$$

Exemplo 5.1.1. *Considere o centro linear em $\mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (-y, x)$, ou o fluxo associado $(X_t)_t$, dado por $x_t = \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como no Exemplo 2.4.6.*

Este campo X é conservativo, visto que $\nabla \cdot X = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0$ e neste caso, se $Y \in \mathcal{Z}^1_\mu(X)$, os fluxos associados satisfazem $X_t \circ Y_s = Y_s \circ X_t$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e com *isto, toda rotação por algum X_t de qualquer órbita $\mathcal{O}_Y(x,\, y)$ de um ponto $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ com respeito a Y é também uma órbita de Y.*

Supondo por absurdo que existe $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $X(x_0,\, y_0)$ e $Y(x_0,\, y_0)$ não são colineares, trocando Y por $-Y$ se necessário, $Y_t(x_0,\, y_0) \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < x_0^2 + y_0^2\}$ para todo $t > 0$ pois se $Y_t(x_0,\, y_0)$ intesectasse o círculo $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$ para algum $t > 0$ em um ponto $(x_1,\, y_1)$, necessariamente o faria numa direção distinta de $Y(x_1,\, y_1)$. Com isto, o Teorema de Poincaré-Bendixson (vide [58]) é aplicável, revelando que o conjunto ω-limite de $\mathcal{O}_Y(x_0,\, y_0)$ ou é um ponto singular, ou é uma órbita periódica ou é um conjunto constituído por singularidades e órbitas regulares que tendem a singularidades quando $t \to \pm\infty$.

Se $\omega_Y(x_0,\, y_0)$ é uma singularidade $(\tilde{x},\, \tilde{y})$, pela comutatividade de X e Y, cada ponto de $\mathcal{O}_X(\tilde{x},\, \tilde{y})$ é uma singularidade de Y e qualquer ponto na região compacta limitada por $\mathcal{O}_X((x_0,\, y_0))$ e $\mathcal{O}_X(\tilde{x},\, \tilde{y})$ converge para algum ponto da órbita circular $\mathcal{O}_X((x_0,\, y_0))$ e portanto o campo Y não é conservativo. Logo este caso não pode ocorrer.

Se $\omega_Y(x_0,\, y_0)$ é uma órbita periódica, então ela também deve ser uma órbita periódica de X, pois do contrário, pela comutatividade de X e Y, $X_t(\omega_Y(x_0,\, y_0)) = \omega_Y(X_t(x_0,\, y_0))$, de modo que, para $t \neq 0$ suficientemente pequeno, $\omega_Y(x_0,\, y_0)$ e $X_t(\omega_Y(x_0,\, y_0))$ seriam duas órbitas periódicas distintas de Y e que se intersectariam. Por outro lado, a comutatividade de X e Y também implica que para qualquer ponto $(x\, y)$ na região compacta limitada pelos círculos $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$ e $\omega_Y(x_0,\, y_0)$, $\omega_Y(x,\, y) = \omega_Y(x_0,\, y_0)$, o que contraria a hipótese que X é conservativo e portanto este caso não pode ocorrer.

Se $\omega_Y(x_0,\, y_0)$ é um conjunto constituído por singularidades e órbitas regulares que tendem as singularidades quando $t \to \pm\infty$, análogo ao caso anterior, a comutatividade de X e Y implica que para $t \neq 0$ suficientemente pequeno, órbitas regulares distintas de $\omega_Y(x_0,\, y_0)$ e $X_t(\omega_Y(x_0,\, y_0))$ se intersectariam, o que é absurdo. Logo este caso não pode ocorrer.

Noutras palavras, qualquer $Y \in \mathcal{Z}^1_\mu(X)$ é pontualmente colinear a X e portanto existe $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Y(x) = h(x) \cdot X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $X(h) = -y\dfrac{\partial h}{\partial x} + x\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$.

Neste trabalho, dentre as aplicações do Teorema A, segue a trivialidade de $\mathcal{Z}^1_\mu(X)$ para campos conservativos $\mathcal{C}^1$-genéricos X definidos em variedades riemannianas compactas. Mais precisamente,

Teorema F. *Seja M uma variedade riemanniana compacta. Existe um residual $\mathcal{R} \subset \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ tal que se $X \in \mathcal{R}$, então $\mathcal{Z}^1_\mu(X)$ é trivial.*

Demonstração. Bessa [10] provou que existe um residual $\mathcal{R}_1 \subset \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ tal que se $X \in \mathcal{R}_1$, existe um ponto $p \in Crit(X)$ cuja classe homoclínica associada é densa em M. Mais ainda, neste mesmo artigo ele também provou ([10], Lemma 2.2) que existe um residual $\mathcal{R}_2 \subset \mathfrak{X}^1_\mu(M)$ tal que se $X \in \mathcal{R}_2$, para quaisquer $p,\, q \in Per(X)$ em órbitas periódicas distintas de X, $\dfrac{\pi(x)}{\pi(y)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onde $\pi(x)$ e $\pi(y)$ denotam os períodos de x e de y, respectivamente.

Com isto, seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, residual em $\mathfrak{X}^1_\mu(M)$. O Teorema de Birkhoff-Smale estabelece que qualquer classe homoclinica não-vazia admite uma órbita densa (na verdade ela é topologicamente transitiva) e contém um subconjunto denso de órbitas periodicas hiperbólicas. Para uma demonstração da densidade das órbitas periódicas hiperbólicas e transitividade topológica da classe homoclínica, vide [61] ou [69] (p. 260, Theorem 4.5), e [5] (Lemma 2.18), respectivamente.

Assim sendo, todo $X \in \mathcal{R}$ satisfaz as hipóteses do Teorema A e com isto o Teorema F está provado. □

OBS: Na verdade, o mesmo raciocínio utilizado na prova do Teorema F mostra que para qualquer campo X no residual $\mathcal{R}$ como descrito na referida prova, o centralizador $\mathcal{Z}^1(X) = \mathcal{Z}^1_\mu(X) = \{c \cdot X : c \in \mathbb{R}\}$.

5.2 Trivialidade do centralizador de hamiltonianos C^2-genéricos

Esta Seção é dedicada a prova do Teorema G (p. 73) sobre centralizadores de campos hamiltonianos, como descritos na Subseção 5.2.1.

Considerando a Proposição 5.2.3, Proposição 5.2.4 e o Teorema de Noether 5.2.10, neste trabalho o centralizador de campos hamiltonianos será determinado como apresentado na Definição 5.2.11.

5.2.1 Uma introdução ao formalismo hamiltoniano

Hamiltonianos em $\mathbb{R}^{2n}$

Uma estrutura simplética em $\mathbb{R}^k$ é uma forma bilinear antissimétrica não degenerada $\omega(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}\, u_i\, v_j$. Isto significa que ω é tal que

1. antissimetria] : Para todo $v, w \in \mathbb{R}^k$, $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$,
2. não-degenerada: Para todo $v \in \mathbb{R}^k$, se $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^k$, então $v = 0$.

Fixada uma base $\{e_1, \cdots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^k$, a forma simplética fica unicamente determinada por uma matriz $J = (\omega_{ij})$, onde $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Esta matriz é antissimétrica e não degenerada, o que implica que k, a dimensão do espaço vetorial simplético $(\mathbb{R}^k, \omega)$ é par, pois $det(J) = det(J^T) = det(-J) = (-1)^k det(J)$, do que segue que $det(\Omega) \neq 0$ se e somente se $k = 2n$ é par, neste caso.

No espaço euclidiano simplético $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ existe uma base $\{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$, denominada canônica ou simplética, relativo a qual $J = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix}$, onde $Id = Id_n$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^n$. Noutras palavras, isto significa que $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j)$ e $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Um hamiltoniano em $\mathbb{R}^{2n}$ é um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{p}_i = & -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ \dot{q}_i = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{array} \right. , \ 1 \leq i \leq n,$$

ou abreviadamente, $\dot{z} = J \cdot \nabla H(z)$, onde $J = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix}$, $Id = Id_n$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^n$.

Hamiltonianos em variedades simpléticas

Seja M uma variedade e ω uma 2-forma em M. O par (M, ω) é uma *variedade simplética* se a forma ω satisfaz

1. $d\omega = 0$,
2. Para cada $p \in M$, (T_pM, ω_p) é um espaço vetorial simplético. Em particular, variedades simpléticas têm dimensão par.

Definição 5.2.1. *Seja (M, ω) uma variedade simplética e $H \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$. O único campo vetorial $X_H \in \mathfrak{X}^1(M)$ tal que*

$$\omega(X_H(x), v) = DH(x) \cdot v$$

para todo $x \in M$ e para todo $v \in T_xM$ denomina-se campo hamiltoniano *associado a H.*

5.2.2 Colchete de Poisson

Algumas propriedades importantes dos sistemas hamiltonianos podem ser formuladas em termos do colchete de Poisson, que apresentaremos a seguir.

Definição 5.2.2. *Dadas $F, G \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$, define-se o Colchete de Poisson como sendo a aplicação $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ que a cada par de funções $F, G \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ associa a função $\{F, G\} \in \mathcal{C}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ dada por qualquer uma das seguintes expressões equivalentes:*

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = dF(X_G) = X_G(F),$$

onde $X_G(F)$ consiste na avaliação de F pelo campo X_G, conforme Subsecção 1.1.2 (para mais detalhes sobre estas equivalências, vide Lee [40]).

Em particular, $\{F, G\} = 0$ se e somente se F é constante ao longo de $(X^t_G)_t$, o fluxo hamiltoniano associado a G, isto é, F é uma integral primeira para $(X^t_G)_t$ e vice-versa.

Proposição 5.2.3. *Para quaisquer $F, G, H \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, vale as seguintes*

1. *Bilinearidade: $\{F + c \cdot G, H\} = \{F, H\} + c \cdot \{G, H\}$ e análogo com a outra coordenada,*
2. *Antissimetria: $\{F, G\} = -\{G, F\}$,*
3. *Regra de Leibniz: $d(FG)(X_H) = \{F\,G, H\} = F\,\{G, H\} + G\,\{F, H\} = F\,dG(X_H) + G\,dF(X_H)$,*
4. *Identidade de Jacobi: $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$,*
5. *$X_{\{F, G\}} = -[X_F, X_G]$.*

Demonstração. Vide [40], Proposition 18.25. □

De todos os espaços $\mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ é o único no qual $\{\cdot, \cdot\}$ define uma operação, no sentido que se $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, então $\{F, G\} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Com isto, a Proposição 5.2.3 estabelece que a aplicação $\psi : (\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), +, \{\,,\,\}) \to (\mathfrak{X}^\infty(M), +, [\,,\,])$ que a cada $H \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ associa o campo $\psi(H) = X_H \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ é um homomorfismo e consequentemente, $Im(\psi) = \{\text{campos hamiltonianos em } \mathfrak{X}^\infty(M)\}$ constituem uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}^\infty(M)$ que é topologicamente fechada.

Também, $[X_F, X_G] = 0$ se e somente se $\{F, G\} = c$ constante. O caso particular em que $c = 0$ é especial como estabelecido na Proposição 5.2.4 a seguir. Juntamente com o Teorema de Noether 5.2.10, estes dois conceitos formam as principais motivações para a introdução do Centralizador de campos Hamiltonianos (Definição 5.2.11).

Proposição 5.2.4. *Sejam $F, G, H \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ então*

1. *F é uma integral primeira de $\dot{z} = J \cdot \nabla H(z)$ se e somente se $\{F, H\} = 0$;*
2. *H é uma integral primeira de $\dot{z} = J \cdot \nabla H(z)$;*
3. *Se F e G são integrais primeiras de $\dot{z} = J \cdot \nabla H(z)$, então $\{F, G\}$ também o é.*

Demonstração. Vide [45] (Theorem 2, p. 5). □

Teorema 5.2.5. *[Darboux] Para qualquer ponto de uma variedade simplética M existe uma vizinhança aberta com coordenadas locais $(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$, relativo as quais a estrutura simplética ω de M assume a forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Equivalentemente, isto pode ser reescrito em termos do colchete de Poisson como*

$$\{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Demonstração. Vide [40] ou [35], Theorem 5.5.9. □

Moralmente, o Teorema de Darboux estabelece que, localmente, hamiltonianos definidos em variedades simpléticas comportam-se como hamiltonianos em $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposição 5.2.6. *Em coordenadas canônicas, estabelecidas pelo Teorema de Darboux, o colchete de Poisson é dado por*

$$\{f,\, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Demonstração. Vide [35], Proposition 5.5.15. □

Exemplo 5.2.7. *Considere em $\mathbb{R}^2$ os campos hamiltonianos $X(x,\, y) = (1,\, 0)$ e $Y(x,\, y) = (0,\, 1)$. Mais precisamente, $X = X_H$ e $Y = X_K$, onde $H,\, K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por $H(x,\, y) = x$ e $K(x,\, y) = y$. Observe que X_H e X_K também induzem campos hamiltonianos no toro $\mathbb{T}^2 = \dfrac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ via a projeção natural.*

Neste caso,

$$[X_H,\, X_K] = \sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

visto que todas as derivadas que aparecem na fórmula do Colchete de Lie são nulas neste caso. Entretanto,

$$\{H,\, K\} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

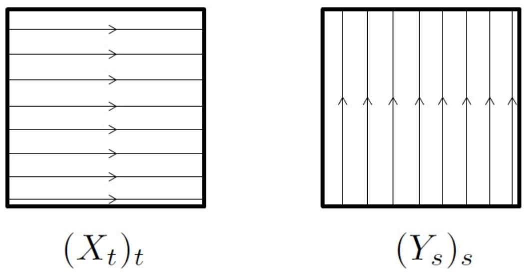


Figura 5.1: Campos do Exemplo 5.2.7.

Observe que estes campos X e Y induzem campos hamiltonianos em $\mathbb{T}^2 = \dfrac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, cujo colchete de Lie é nulo, mas cujo colchete de Poisson é não nulo.

5.2.3 O Teorema de Noether

Do ponto de vista físico, é relevante o estudo das simetrias da dinâmica determinada por um hamiltoniano, como veremos a seguir.

Definição 5.2.8. *Se (M, ω, H) é um sistema hamiltoniano, qualquer $K \in \mathcal{C}^r(M, \mathbb{R})$ que é constante em cada curva integral de X_H é dita ser uma quantidade conservada (integral primeira) do sistema.*

Definição 5.2.9. *Um campo vetorial suave Y em M é dito ser uma simetria infinitesimal de (M, ω, H) se ω e H são invariantes por $(Y_t)_t$, o fluxo de Y, isto é, $H(Y_t(x)) = H(x)$ (ou $Y(H) = 0$) e $Y_t^*\omega = \omega$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$.*

Pela Proposição 5.2.4, K é uma quantidade conservada do sistem hamiltoniano (M, ω, H) se e somente se $\{K, H\} = 0$.

Uma versão do seguinte resultado foi provada inicialmente por Emmy Noether. O mesmo teve grande influência tanto em físca quanto em matemática por estabelecer correspondência um-a-um entre quantidades conservadas (módulo constantes) e simetrias infinitesimais.

Teorema 5.2.10. *[Noether] Seja (M, ω, H) um sistema hamiltoniano. Se K é qualquer quantidade conservada de X_H então o campo hamiltoniano associado a K é uma simetria infinitesimal de (M, ω, H). Reciprocamente, se o grupo de cohomologia de De Rham $H^1_{dR}(M)$ é trivial (isto significa que toda 1-forma fechada em M é também exata), então toda simetria infinitesimal de (M, ω, H) é o campo hamiltoniano de uma quantidade conservada, que é única a menos da adição por uma função que é constante em cada componente conexa de M.*

Demonstração. Vide [40], Theorem 18.27, ou [35], Proposition 5.5.16. □

Informalmente, para sistemas hamiltonianos físicos H, o Teorema de Noether diz que

"para cada simetria infinitesimal de H, corresponde uma lei de conservação física de H".

Para qualquer sistema hamiltoniano (M, ω, H), H, a hamiltoniana H é uma quantidade conservada do sistema pois é constante em cada curva integral do campo hamiltoniano X_H associado a ela. Neste caso, a simetria infinitesimal associada a H é o campo X_H, cujo fluxo corresponde a simetrias pelo tempo (variável t) de (M, ω, H). Do ponto de vista físico esta simetria trivial corresponde a conservação da energia mecânica.

Além desta, para os hamiltonianos oriundos de sistemas físicos, classicamente, são importantes a simetria por rotações que corresponde a conservação do momento angular; e a simetria por translação espacial (na variável x) que corresponde a conservação do momento linear.

5.2.4 Centralizador de hamiltonianos

Dado um campo Hamiltoniano X_H, o Teorema de Noether 5.2.10 e a Proposição 5.2.4 motivam a consideração das *simetrias* de X_H definidas como segue:

Definição 5.2.11. *Seja M uma variedade simplética riemanniana compacta. Para cada campo vetorial hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}^r(M)$, define-se o centralizador (hamiltoniano) de X_H como sendo*

$$\mathcal{Z}^r_\omega(X_H) = \{X_K \in \mathfrak{X}^r_\omega(M) : \{K, H\} = 0\}.$$

Comecemos com um exemplo que ilustra a teoria.

Exemplo 5.2.12. *Considere o centro linear em $\mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (-y, x)$, ou o fluxo associado $(X_t)_t$, dado por $x_t = \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como discutido nos Exemplos 2.4.6 e 5.1.1. O argumento utilizado no Exemplo 5.1.1 permite concluir a quase-trivialidade de $\mathbb{Z}_\omega(X)$. Entretanto, este fato também pode seer obtido via o argumento a seguir:*

O campo $X = X_H$ é hamiltoniano com hamiltoniano $H = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se $Y \in \mathcal{Z}^1_\omega(X)$, existe $K \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$ tal que $Y = X_K$ e neste caso,

$$\begin{aligned} 0 &= \{H, K\} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial K}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left\langle (x, y); \left(\frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x}\right)\right\rangle \end{aligned}$$

do que se conlcui que os vetores (x, y) e $\left(\frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x}\right)$ são ortogonais. mas, $\left(\frac{\partial K}{\partial y}, -\frac{\partial K}{\partial x}\right)$ também é ortogonal a ∇K, e por causa disto, os vetores (x, y) e $\nabla K(x, y)$ devem ser colineares. Como o vetor gradiente avaliado em qualquer ponto é sempre ortogonal ao conjunto de nível que contém tal ponto, segue que as curvas de nível de K são círculos centrados na origem, como também são as curvas de nível de H.

Com isto, $\{X_H(x), X_K(x)\}$ é linearmente dependente para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e do que foi discutido mo Lema 2.4.10, segue que existe $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ constante ao longo das órbitas de X_H e tal que $X_K(x) = h(x) \cdot X_H(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Observe que isso não ocorre no Exemplo 2.4.6.

Lema 5.2.13. *[Centralizadores de fluxos hamiltonianos em baixa dimensão] Para todo campo hamiltoniano X_H de classe $\mathcal{C}^1$, definido numa variedade simplética (M, ω),* *compacta e conexa de dimensão 2, $\mathcal{Z}^1_\omega(X_H)$ é quase-trivial, isto é, para qualquer $X_K \in \mathcal{Z}^1_\omega(X_H)$ existe uma aplicação contínua $h : M \to \mathbb{R}$ que naturalmente depende de K, que satisfaz $X_H(h) = 0$ e $X_K(x) = h(x) \cdot X_H(x)$ para todo $x \in \mathbb{M}$.*

Demonstração. Este lema segue do ítem 1. da Proposição 5.2.4, visto que se $X_K \in \mathcal{Z}^1_\omega(X_H)$, então $\{H, K\} = 0$ e com isto, K é uma integral primeira (de classe $\mathcal{C}^2$) para o hamiltoniano X_H. Por outro lado, como $dim(M) = 2$, H e K precisam ter os mesmos conjuntos de nível neste caso, e por isto existe uma aplicação $h : M \to \mathbb{R}$ (dependendo de K), tal que $X_K(x) = h(x) \cdot X_H(x)$ para todo $x \in M$, inclusive para as singularidades, pois se $\sigma \in Sing(X_H)$ e $\lambda \in spect(\sigma)$, então $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda} \in spect(\sigma)$ (vide [45], Proposition 3.3.1), segue que em dimensão 2, ou $spect(\sigma) = \{\lambda, -\lambda\}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ (sela), ou $spect(\sigma) = \{\lambda \cdot i, -\lambda \cdot i\}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ (centro), portanto são isoladas e consequentemente, são singularidades isoladas de qualquer campo em $\mathcal{Z}^1_\omega(X_H)$.

Argumentos similares aos que foram utilizados na demonstração do Lema 2.4.10 aplicam-se neste caso, revelando a unicidade de h, sua continuidade e invariância ao longo de órbitas de X_H. □

Mais geralmente, em variedades riemannianas compactas e simpléticas de dimensão superior a 2 vale a seguinte versão do lema 5.2.13:

Teorema G. *Seja M variedade riemanniana compacta e simplética de dimensão par $d \geq 4$. Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset C^2(M, \mathbb{R})$ e, para cada $H \in \mathcal{R}$ existe um conjunto residual $R_H \subset \mathbb{R}$ tal que a propriedade seguinte vale: se $e \in R_H$, então o centralizador do fluxo Hamiltoniano $(X^t_H)_t$ é trivial em cada componente conexa $\mathcal{E}_{H,e} \subset H^{-1}(e)$. Noutras palavras, $\mathcal{Z}^1_\omega(X_H)$ é quase-trivial.*

5.2.5 Prova da trivialidade do centralizador de Hamiltonianos C^2-genéricos

A prova do Teorema G que apresentaremos a seguir é, num certo sentido, similar a prova do Teorema F.

Demonstração. Seja $\mathcal{KS} \subset C^2(M, \mathbb{R})$, M variedade de dimensão maior do que 2, o $\mathcal{C}^2$-residual de hamiltonianos que satisfazem a condição de of Kupka-Smale, apresentado em [65] (Theorem 1), isto é, para todo $H \in \mathcal{KS}$ todas as órbitas fechadas de X_H ou são hiperbólicas, ou são elípticas. Pelo Teorema do ponto fixo de Birkhoff (vide [48], Proposition 3.1, Corollary 3.2 e §6), as órbitas hiperbólicas em M são densas.

Robinson [65] (Theorem 5) apresenta a versão para campos hamiltonianos do *General Density Theorem* que afirma a existência de um residual $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$ e residual $F \subset \mathbb{R}$ tal que se $H \in \mathcal{P}$, $e \in F$ e $H^{-1}(e) \neq \varnothing$, então o campo hamiltoniano associado X_H é tal que $\overline{Crit(X_{H|H^{-1}(e)})} = \Omega\left(X_{H|H^{-1}(e)}\right)$, o conjunto dos pontos não-errantes de $X_{H|H^{-1}(e)}$.

Em [13], os autores provam a existência de um residual $\mathcal{R} \subset C^2(M, \mathbb{R})$ tal que para qualquer $H \in \mathcal{R}$ existe um residual, (resp. subcontjunto de medida de Lebesgue total) E

de níveis de energia regulares em $H(M) \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $e \in E$ a restrição do fluxo $(\varphi_t^H)_t$ a cada componente conexa $\mathcal{E}_{H,e}$ do nível $H^{-1}(e)$ é transitiva.

Em $\mathcal{KS} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$, a densidade das órbitas periódicas hiperbolicas e o fato que as que tiverem o mesmo período necessariamente são isoladas entre si, garante, como no critério para a trivialidade do centralizador, que para cada $X_K \in \mathcal{Z}_\omega^1(X_H)$ existe uma aplicação contínua $h : M \setminus Sing(X_H) \to \mathbb{R}$ tal que $X_K(x) = h(x) \cdot X_H(x)$ para todo $x \in M \setminus Sing(X_H)$ e invariante ao longo das órbitas regulares de X_H.

Agora, considerando a restrição do fluxo $(\varphi_t^H)_t$ a uma componente conexa transitiva $\mathcal{E}_{H,e}$ do nível $H^{-1}(e)$, a transitividade garante que h é constante nos pontos regulares $\mathcal{E}_{H,e}$ e portanto pode seer continuamente estendida as singularidades de $_{H,e}$, caso existam. Por outro lado, pela continuidade de h e o fato que o conjunto dos níveis de energia cujas componentes conexas são transitivas é residual, segue que h é constante em cada componente $\mathcal{E}_{H,e}$ de $H^{-1}(e)$. Noutras palavras, o centralizador do fluxo hamiltoniano $(X_H^t)_t$ restrito a cada componente conexa $\mathcal{E}_{H,\,e}$ de $H^{-1}(e)$, $H \in \mathcal{KS} \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$, é trivial.

$\square$

OBS: Na verdade, o mesmo raciocínio utilizado na prova do Teorema G mostra que para qualquer campo X no residual $\mathcal{R}$ como descrito na referida prova, o centralizador $\mathcal{Z}^1(X_H) = \mathcal{Z}_\omega^1(X_H)$.

Capítulo 6

Perspectivas futuras

Neste Capítulo será apresentado algumas questões relacionadas ao conteudo deste trabalho e que poderão ser, futuramente, desenvolvidas sob a forma de pesquisa.

6.1 A conjectura de Smale para outras classes de fluxos

O problema de Smale, assunto desta Tese, questiona se a maioria dos sistemas dinâmicos têm centralizador trivial. A determinação do centralizador ou a verificação da conjectura de Smale para o centralizador pode, a priori, ser feita em qualquer classe de sistemas dinâmicos, sejam eles difeomorfismos, fluxos ou ações de grupos em geral, que apresentem propriedades que possibilitem tal verificação. Algumas questões naturais que surgem após os trabalhos desenvolvidos nesta tese sãoas seguintes:

1. Genericamente, fluxos de classe $\mathcal{C}^1$ em variedades compactas têm centralizador trivial?

2. Genericamente, fluxos parcialmente hiperbólicos de classe $\mathcal{C}^r$ em variedades compactas têm centralizador quase-trivial?

3. Genericamente, fluxos de Reeb têm centralizador quase-trivial?

4. Existe aberto e denso de difeomorfismos em $Diff^r(M)$, onde $r \geq 2$ e M é uma variedade bidimensional compacta, cujos elementos têm centralizador trivial?

Esperamos que as respostas as questões anteriores sejam afirmativas. Em particular, uma resposta afirmativa a questãovelmente 1 provavelmente possa ser obtida pelo método de distorção ilimitada de Bonatti-Crovisier-Wilkinson [16], para lidar com o conjunto errante.

6.2 Ações expansivas

Também, considerado o conteúdo desenvolvido no Capítulo 4 sobre ações expansivas, no qual mostramos a quase-trivialidade do centralizador de ações expansivas segundo Bowen que são localmente livres e também que, como no caso unidimensional, uma ação de $\mathbb{Z}^d$ irredutível definida numa variedade compacta é expansiva se e somente se a sua suspensão é uma ação de $\mathbb{R}^d$ Bowen-expansiva, algumas questões sobre as noções expansividade para ações são naturais. Por exemplo,

1. Considerado o resultado de Paternain [62] sobre o crescimento exponencial do grupo fundamental de uma variedade tridimensional compacta e conexa que suporta fluxos C-expansivos, Será que se uma variedade $d+2$-dimensional M que é compacta e conexa e que suporta uma ação de $\mathbb{R}^d$ Bowen-expansiva (não necessariamente localmente livre), conforme definição 4.1.1, então o grupo fundamental $\pi(M)$ tem crescimento exponencial?

2. Considerado que para fluxos definidos em variedades diferenciáveis, as noções de C-expansividade e K-expansividade são equivalentes ([5], Proposition 2.12), será que para ações de $\mathbb{R}^d$ em variedades compactas, as noções de C-expansividade e K-expansividade para ações de $\mathbb{R}^d$ localmente livres também coincidem?

Ademais, em termos do centralizador, é também natural questionar se o Teorema D e seu Corolário 5 continuam válidos noutros contextos. De referir,

1. É possível estabelecer uma versão do Teorema D para ações expansivas de $\mathbb{R}^2$ em variedades compactas tridimensionais que não sejam localmente livres?

2. O Corolário 5 generaliza-se para ações Anosov de grupos de Lie em variedades compactas?

Referências Bibliográficas

[1] ABRAHAN, R.; MARDSDEN, J. E. **Foundations of mechanics**. 2. ed, Addison-Wesley, Springer-Verlag, 1980.

[2] AFRAIMOVICH, V. S.; BYKOV, V. V.; SHILNIKOV, L. P. On the appearence and structure of the Lorenz attractor. **Dokl. Acad. Sci. USSR**, 234, p. 336-339, 1977.

[3] ANDERSON, R. B. **The centralizer of a Morse-Smale diffeomorphism**. Tese (Doutorado em matemática), orientador: Morris William Hirsch - University of California, Berkeley, 1973.

[4] ANDERSON, R. B. Diffeomorphisms with discrete centralizer. **Topology**, v. 15, n. 2, p. 143-147, 1976.

[5] ARAÚJO, V.; PACÍFICO, M. J. **Three-Dimensional Flows**. Springer-Verlag, 2010. (Modern Surveys in Mathematics, 53).

[6] ARBIETO, A.; MATHEUS, C. A pasting lemma and some applications for conservative systems. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 27, p. 1399-1417, 2007.

[7] ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. Tradução de K. Vogtmann e A. Weinstein, 2. ed. Springer, 1937. (Graduate Texts in Mathematics, 60).

[8] ARTIGUE, A. Kinematic expansive flows. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, V. 36, I. 02, p. 390-421, abr. 2016. .

[9] BAKKER, L.; FISHER, T. **Open sets of diffeomorphisms with trivial centralizer in the $\mathcal{C}^1$ topology**. 2014. Disponível em: http://arxiv.org/pdf/1405.1492.pdf.

[10] BESSA, M. A generic incompressible flow is topological mixing. *Comptes Rendus Mathématique*, Vol. 346, n. 21-22, p. 1169-1174, nov. 2008.

[11] BESSA, M.; ROCHA, J. Removing zero Lyapunov exponents in volume-preserving flows. Nonlinearity, v. 20, p. 1007-1016, 2007.

[12] BESSA, M.; ROCHA, J. Topological stability for conservative systems. **Journal of Differential Equations**, V. 250, n. 10, p. 3960-3969, maio. 2011.

[13] BESSA, M.; FERREIRA, C.; ROCHA, J.; VARANDAS, P. Generic Hamiltonian Dynamic. **Journal of Differential Equations**, p. 01-16, 2015

[14] BONATTI, C.; CROVISIER, S.; VAGO, G. M.; WILKINSON, A. Local density of diffeomorphisms with large centralizer. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**. v. 41, f. 6, p. 925-954, 2008.

[15] BONATTI, C.; CROVISIER, S.; WILKINSON, A. $\mathcal{C}^1$-generic conservative diffeomorphisms have trivial centralizer. **Journal of Modern Dynamics**. v. 2, n. 2, p. 359-373, 2008.

[16] BONATTI, C.; CROVISIER, S.; WILKINSON, A. The $\mathcal{C}^1$-generic diffeomorphisms has trivial centralizer. **Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**. v. 109, p. 185-244, 2009.

[17] BONATTI, C.; GUELMAN, N. Smooth Conjugacy classes of circle diffeomorphisms with irrational rotation number.

[18] BONOMO, W.; ROCHA, J.; VARANDAS, P. **The Centralizer of Komuro-expansive flows and expansive $\mathbb{R}^d$-actions**. Preprint. Disponível em https://arxiv.org/abs/1604.06516.

[19] BONOMO, W.; VARANDAS, P. **On commuting hamiltonians**. Preprint (to appear).

[20] BOWEN, R.; WALTERS, P. Expansive one-parameter flows. **Journal of Differential Equations**, v. 12, p. 180-193, 1972.

[21] BOYLE, M.; LIND, D. Expansive subdynamics. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 349, p. 55-102, 1997.

[22] BURSLEM, L. Centralizers of partially hyperbolic diffeomorphisms. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, v. 24, p. 55-87, 2004.

[23] BURSLEM, L. Centralizers of area preserving diffeomorphisms on $\mathbb{S}^2$. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 133, n. 04, p. 1101-1108, 2004.

[24] CARMO, M. P. **Riemannnian geometry**. 2. ed., Birkhäuser Boston, 1993. (Mathematics: Theory and aplication).

[25] ELBIALY, M. S. On the Smoothness of the linearization of vector fields near resonant rest points. **Journal of Differential Equations**, v. 118, n. 2, p. 336-370, Mai. 1995.

[26] ELBIALY, M. S. Smooth conjugacy and linearization near resonant fixed points in Hilbert spaces. **Houston Journal of Mathematics**, v. 40, n. 2, p. 467-509, 2014.

[27] FISHER, T. Trivial centralizers from axiom A diffeomorphisms. **Nonlinearity**, v. 21, p. 2505-2517, 2008.

[28] FISHER, T. Trivial centralizers for codimension-one attractors, **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 41, n. 1, p. 51-56, 2009.

[29] GUCKENHEIMER, J.; WILLIAMS, R. F. Structural stability of Lorenz attractors. **Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, 50, p. 59-72, 1979.

[30] HERMAN, M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. **Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, tome 49, p. 5-233, 1979.

[31] HE, L. F.; SHAN, G. Z. The nonexistence of expansive flow on a compact 2-manifold. **Chinese Annals of Mathematics, Series B**, v. 12, n. 2, p. 213-218, 1991.

[32] HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. **Invariant Manifolds**, Lecture Notes in Mathematics, 583, Springer-Verlag, 1977.

[33] JUNGREIS, D.; HIRSCH, M. Rigidity of centralizers of Anosov flows. **International Journal of Mathematics**. v. 2, n. 1, p. 37-40, 1991.

[34] KATO, K.; MORIMOTO, A. Topological stability of Anosov flows and their centralizers. **Topology**, v. 12, p. 255-273, 1973.

[35] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge University Press, 1995.

[36] KEYNES, H. B.; SEARS, M. F-expansive transformation groups. **General Topology and its Applications**, v. 10, n. 1, p. 67-85, 1979.

[37] KOMURO, M. **Expansive properties of Lorenz attractors. The theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems**. Kyoto, p. 4-26, 1984.

[38] KOPELL, N. J. **Commuting diffeomorphisms**. Tese (Doutorado em matemática), University of California, Berkeley, 1967.

[39] KOPELL, N. J. **Commuting diffeomorphisms**. In Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, AMS, p. 165-184, 1970.

[40] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Springer, 2003. (Graduate Texts in Mathematics, 218).

[41] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141, 1963.

[42] MAÑÉ, R. A proof of the $\mathcal{C}^1$ stability conjecture. **Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, v. 66, p. 161-210, 1987.

[43] MAQUERA, C.; TAHZIBI, A. Robustly transitive actions of $\mathbb{R}^2$ on compact three manifolds. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, v. 38, n. 2, p. 189-201, jun. 2007.

[44] MEIRONG, Z. Centralizers and iterate radicals of Morse-Smale diffeomorphisms of circle. **Acta mathematica Sinica, New Series**, v. 11, n. 1, p. 1-11, mar. 1995.

[45] MEYER, K. R.; HALL, G. R. **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**. Springer, 1991. (Applied Mathematical Sciences, 90).

[46] MORIYASU, K.; SAKAI, W.; SUN, N. $\mathcal{C}^1$-stably expansive flows. **Journal of Differential Equations**, v. 213, p. 352-367, 2005.

[47] MOSER, J. On a theorem of Anosov. **Journal of Differential Equations**, v. 5, p. 411-440, 1969.

[48] NEWHOUSE, S. Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. **American Journal of Mathematics**. v. 99, n. 5, p. 1061-1087, 1977.

[49] NOETHER, E. Invariant variation problems. **Transport Theory and Statistical Physics**, v. 1, n. 3, p. 186-207, 1971.

[50] NORTON, V.; O'BRIEN, T. Anosov flows and expansiveness. **Proceedings of the American Mathematical Society**. v. 40, n. 2, p. 625-628, oct. 1973.

[51] OBATA, D.; SANTIAGO, B. On symmetries of flows. Preprint (to appear)

[52] OKA, M. Expansive flows and their centralizers. **Nagoya Mathematical Journal**, v. 64, p. 1-15, 1976.

[53] OKA, M. Expansiveness of real flows. **Tsukuba Journal of Mathematics**, v. 14, n. 1, p. 1-8, 1990.

[54] PALIS, J.; SMALE, S. **Structural stability theorems**. In Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., vol XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., p. 223-231, 1970.

[55] PALIS, J. On Morse-Smale Dynamical Systems. **Topology**, v. 8, p. 385-405, 1969.

[56] PALIS, J. Vector fields generate few diffeomorphisms. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 80, n. 3, p. 503-505, 1974.

[57] PALIS, J. Rigidity of centralizers of diffeomorphisms and structural stability of suspended foliations. **Lecture Notes in Mathematics**, n. 652, Springer-Verlag, p. 114-121, 1978.

[58] PALIS, J.; de MELO, Welington. **Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction**. Springer, 1982.

[59] PALIS, J.; YOCCOZ, J.-C. Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, série 4, v. 22, n. 1, p. 81-98, 1989.

[60] PALIS, J.; YOCCOZ, J.-C. Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, série 4, v. 22, n. 1, p. 99-108, 1989.

[61] PALIS, J.; TAKENS, F. **Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations**. Cambridge University Press, 1993.

[62] PATERNAIN, M. Expansive Flows and the Fundamental Group. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 24, n. 2, p. 179 - 199, 1993.

[63] PLYKIN, R. V. On the structure of centralizers of Anosov diffeomorphisms of a torus. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, v. 53, n. 6 (324), p. 259-260, 1998.

[64] ROBBIN, J. W. A structural stability theorem. **Annals of Mathematics**, v. 94, n. 3, p. 447 - 493, Nov. 1971.

[65] ROBINSON, C. Generic Properties of Conservative Systems. **American Journal of Mathematics**, v. 92, n. 3, p. 562-603, Jul. 1970.

[66] ROBINSON, C. Generic Properties of Conservative Systems II. **American Journal of Mathematics**, v. 92, n. 4, p. 897-906, Oct. 1970.

[67] ROBINSON, C. A quasi-Anosov flow that is not Anosov. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 25, n. 8, p. 763 - 767, 1976.

[68] ROBINSON, C. Structural stability of $\mathcal{C}^1$ diffeomorphisms. **Journal of Differential Equations**, v. 22, n. 1, p. 28 - 73, 1976.

[69] ROBINSON, C. **Dynamical Systems, stabiblty, symbolic dynamics and chaos**, CRC Press, 1995.

[70] ROCHA, J. **Rigidity of the $\mathcal{C}^1$ centralizer of bidimensional diffeomorphisms**. Pitman Res. Notes Math. Ser., 285, p. 211-229, 1993.

[71] ROCHA, J. **Rigidity of centralizers of real analytic diffeomorphisms**. Erg. Theory and Dyn. Syst., 13, 1, p. 175-197, 1993.

[72] ROCHA, J. Centralizers and Entropy. **Boletim da Sociedade Brasileira de matemática**, v. 25, n. 2, p. 213-222, 1994.

[73] ROCHA, J. A note on the $\mathcal{C}^0$-centralizer of an open class of bidimensional Anosov diffeomorphisms. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 24, p. 55-87, 2005.

[74] ROCHA, J.; VARANDAS, P. **The centralizer of $\mathcal{C}^r$-generic diffeomorphisms at hyperbolic basic sets is trivial**. Preprint, 2016. Disponível em https://pgmat.ufba.br/sites/pgmat.ufba.br/files/rv-final.pdf.

[75] SAD, P. R. **Centralizadores de campos vetoriais**. Tese (Doutorado em matemática), orientador: Jacob Palis Jr. - IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[76] SAD, P. R. Centralizers of vector fields. **Topology**, v. 18, n. 2, p. 97-104, 1979.

[77] SENOS, L. **Expansividade, Especificação e Sensibilidade em Fluxos com Singularidades**. Tese (Doutorado em matemática), IM - UFBA, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em http://www.im.ufrj.br/ arbieto/slaves/teseLaura.pdf.

[78] SMALE, S. **Differentiable Dynamical Systems**. Bull. Amer. Math. Soc. 73, P. 747-817, 1967.

[79] SMALE, S. **Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed**. Physica D 51, P. 267-273, 1991.

[80] SMALE, S. **Mathematical problems for the next century**. Mathematics: Frontiers and Perspectives, Am. Math. Soc, p. 271 - 294, 2000.

[81] STERNBERG, S. Local contractions and a theorem of Poincaré. **American Journal of Mathematics**, v. 79, p. 809-824, 1957.

[82] STERNBERG, S. On the structure of local homeomorphisms of euclidean. II. **American Journal of Mathematics**, v. 80, p. 623-631, 1958.

[83] STERNBERG, S. The structure of local homeomorphisms. III. **American Journal of Mathematics**, v. 81, p. 578-604, 1959.

[84] TOGAWA, Y. Generic morse-smale diffeomorphisms have only trivial symetries. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 65, n. 1, jul. 1977.

[85] TOGAWA, Y. Centralizers of $\mathcal{C}^1$-diffeomorphisms. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 71, n. 2, p. 289-293, sep. 1978.

[86] TUCKER, Warwick. The Lorenz attractor exists. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, v. 328, p. 1197-1202, 1999.

[87] WALTERS, P. Homeomorphisms with Discrete Centralizers and Ergodic Properties. **Mathematical System Theory**, v. 4, n. 4, p. 322-326, 1970.

[88] YOCCOZ, J.-C. Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. **Astérisque**, v. 231, p. 89-242, 1995.

Índice Remissivo