Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Trigonometria Racional: Uma Nova Abordagem para o Ensino de Trigonometria

Luiz José da Silva

Salvador - Bahia
Abril de 2013

Trigonometria Racional: Uma Nova Abordagem para o Ensino de Trigonometria

Luiz José da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia
Abril de 2013

Trigonometria Racional: Uma Nova Abordagem para o Ensino de Trigonometria

Luiz José da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 5 de abril de 2013.

Banca Examinadora:

Vinicius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (Orientador)
UFBA

Perfilino Jr.

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Jr.
UFBA

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves
UESC

Aos meus pais, a minha mulher Elda Schoucair e aos meus filhos Luiz Victor e Louise,
razões do meu existir.

Agradecimentos

Para não ser injusto, ou cometer equívocos no esquecimento, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta acreditaram em mim como pessoa, profissional e/ou amigo, todos que de alguma forma me motivaram a seguir em frente e concluir mais uma etapa desta formação, e particularmente a amiga Lise Canário, incentivadora e companheira de incansáveis tardes e noites de estudos em sua casa, ao seu companheiro fiel e também incentivador Sérgio, que foi imprescindível na logística com os lanchinhos etc. Ao também companheiro de estudos Ian Santana, com sua jovialidade e perseverança, que não deixou em momento algum que fraquejássemos. Um agradecimento especial a Ademildes Romana, coordenadora de matemática do IFBA/Simões Filho, pela confiança e apoio profissional nesse momento atribulado. Aos nossos Mestres que nos conduziram durante esses dois anos com profissionalismo e zelo. E por fim ao querido professor, orientador e incentivador Vinícius Mello, pela sua dedicação, confiança e parceria neste trabalho.

"Enseigner, c'est apprendre deux fois."

Joseph Joubert

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste em fazer uma análise critica de uma nova abordagem para o ensino de trigonometria, chamada *trigonometria racional*, visto que esse é um tópico muito importante no ensino médio, não só para matemática como também para outras áreas. Na prática, essa nova abordagem minimiza a necessidade de operações de extração de raízes quadradas e outras operações transcendentais, substituindo-as apenas por operações racionais.

Abstract

The objective of this work is to make a critical analysis of a new approach to the teaching of trigonometry, called *rational trigonometry*, since this is a very important topic in high school, not only for mathematics but also to other areas. In practice, this new approach minimizes the need of taking square roots and other transcendental operations, replacing them only by rational operations.

Sumário

Introdução

É publico e notório que os alunos do ensino médio, sejam da escola pública ou privada, demonstram grandes dificuldades em matemática, em particular no tópico trigonometria. Um dos objetivos deste trabalho não é apontar culpados, mas sim oferecer algumas sugestões para reverter tal quadro.

Porém antes de tudo é bom destacar que tal tópico consta no conteúdo programático das escolas, quer sejam publicas ou privadas, segundo os Parâmetro Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). Noções de trigonometria no triangulo são vistas desde o 9^o ano do ensino fundamental de maneira superficial. Aí se iniciam os problemas, pois o ensino de geometria nas escolas de certa forma sofreu uma perda de carga horária por ter sido retirada a disciplina desenho geométrico da grade curricular, a qual dava subsídios significativos ao ensino de geometria.

Essa dificuldade de compreensão por parte dos alunos pode ser devida a diversos outros fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de conceitualizar os objetos matemáticos, que se apresentam de forma muito abstrata. Segundo Duval [5], os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de registros de representações, pois eles não têm existência física. Em relação aos conteúdos da trigonometria geralmente os alunos encontram dificuldades na compreensão de conceitos trigonométricos básicos.

Uma excelente alternativa é o trabalho interdisciplinar, com intuito de dar significado aos entes geométricos nas séries inicias, com auxílio da história da matemática, o que, com certeza, dá maior sentido ao estudo de geometria. Em projetos envolvendo matemática e geografia, por exemplo, trabalhos utilizando teodolito, GPS, e outros instrumentos de localização, evidenciariam a necessidade o conhecimento de geometria e particularmente dos triângulos.

A título de exemplo, já realizamos, conjuntamente com o professor de geografia, um trabalho de levantamento topográfico do campus onde trabalhamos e isso nos rendeu um maior interesse por parte dos alunos no conteúdo que trabalhávamos em sala, trigonometria no triangulo retângulo, no caso. Os alunos fizeram associações interessantes do porquê estudamos geometria e trigonometria. Notamos a partir dessa experiência um maior interesse por parte dos alunos. Foram cerca de três encontros conjuntos, todos muito gratificantes para nós professores, pois podemos observar que se concatenarmos teoria e prática e, porque não dizer, história, o conhecimento e interesse naturalmente afloram. Observe o que D'Ambrósio (citado em [14]) diz:

> ... não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir história da matemática em seus cursos. [...] Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de matemática.

Foi esse interesse por trigonometria, que nos levou a conhecer a trigonometria racional, desenvolvida pelo prof. Norman Wildberger no livro *Proporções Divinas: da Trigonometria Racional à Geometria Universal* [16].

A trigonometria tradicional usa funções não-algébricas como $\operatorname{sen}(x)$ ou $\cos(x)$ para "resolver" triângulos, ou seja, usa os valores de alguns de seus parâmetros (lados a, b, c e ângulos α, β e γ, por exemplo) para encontrar os valores dos outros parâmetros. Na visão de Wildberger, o uso de funções não-algébricas na trigonometria complica a análise matemática, tornando os cálculos mais complicados e o assunto em si mais difícil de aprender.

Para evitar essas dificuldades, Wildberger propõe substituir a medida dos lados a, b e c por seus quadrados (que ele chama de *quadrâncias*), e substituir a medida dos ângulos em graus ou radianos pela *abertura* (o quadrado do seno do ângulo). Nestes termos, todas as fórmulas da trigonometria exibem expressões puramente algébricas. Em particular, se os dados dos problemas forem racionais, suas soluções também serão, com o possível acréscimo, em alguns casos, da extração de uma raiz quadrada.

Este trabalho está assim organizado: no capítulo 1, veremos um breve histórico da trigonometria clássica, juntamente com exemplos de sua importância prática e no ensino da matemática. No capítulo 2, faremos uma apresentaçao sucinta dos princípios da trigonometria racional, introduzindo os conceitos de abertura e quadrância e suas cinco leis básicas. No capítulo 3, aplicaremos a trigonometria racional à resolução de alguns problemas típicos. Finalmente, faremos uma breve conclusão, com uma análise crítica dessa nova abordagem para o ensino da trigonometria. No apêndice, apresentamos traduções de resenhas [9, 7] do livro *Proporções Divinas* que ajudam a avaliar a trigonometria racional.

Capítulo 1

Trigonometria Clássica

1.1 Breve Histórico

A origem da trigonometria é um tópico importante da história da matemática[2, 15, 13, 6, 11]. Podemos dizer que seu início se deu por demandas da astronomia, navegação e agrimensura, por volta do século IV ou V a.C. Os precursores foram os egípcios e os babilônios. A palavra trigonometria vem do grego *tri*-três, *gono*-ângulo e *metrien*-medida, significando medida de triângulos, ou seja, o estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triangulo.

Muito provavelmente, a trigonometria surgiu com a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia, os *relógios de sol*. Segundo o historiador Heródoto (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome *gnômon* ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C.[11].

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim. Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

O gnômon era uma vareta (GN na figura 1.1) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90^o, e o comprimento de sua sombra (AN) era observado, num horário determinado: meio dia. Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano e o movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia.

Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de AN ao meio dia variava com o ângulo A. Para nós isto significa uma colocação de AN, ou $\frac{AN}{GN}$, como uma "função" do ângulo A, nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome no período.

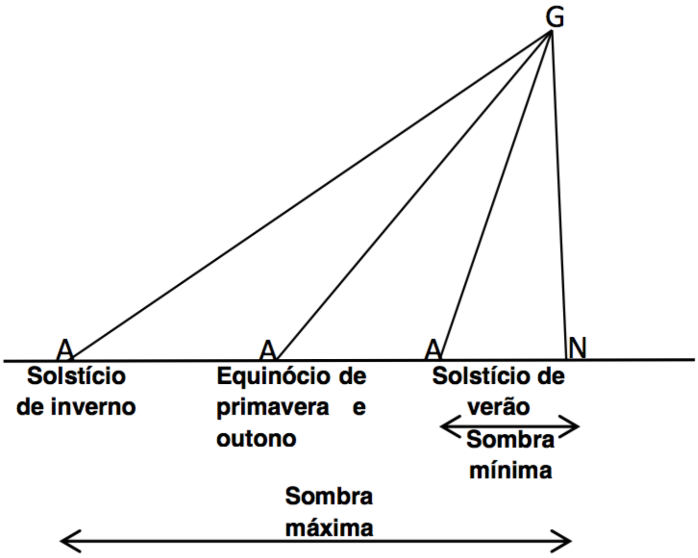


Figura 1.1: Esquema do gnômon (extraído de [11]).

Por volta da metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia, veio a ser chamado de "Pai da Trigonometria" por ter escrito um tratado em doze livros onde se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de astronomia. Ele foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. Grandes contribuições à astronomia foram atribuídas a ele, tais como a organização de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, o que trouxe melhoramentos em constantes astronômicas importantes, tais como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica (a circunferência imaginária correspondente à trajetória aparente do Sol na esfera celeste) e também a descoberta da precessão dos equinócios. [1]

A trigonometria era então baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Hiparco escreve a respeito do cálculo de comprimentos das cordas. Apesar da corda de um arco não ser o *seno*, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo

[1]Precessão dos equinócios é literalmente um círculo imaginário, riscado na esfera celeste pela projeção do eixo de rotação terrestre. Esse risco, que há milênios vem sendo acompanhado, se chama precessão que é um movimento para trás em relação ao avanço do ponto vernal do equador celeste, tomando-se como referência o ciclo anual do sol. O movimento retrógrado, coloca os eixo norte e sul apontados para diferentes pontos , ocupados ou não por estrelas, no correr do círculo completo que dura cerca de 25 800 anos, ao fim do qual o eixo norte ou sul apontará para a mesma região eventualmente coincidente (ou não) com uma estrela denominada polar. Devido a este movimento, o equinócio (data em que o dia e noite têm a mesma duração) de primavera passa a acontecer com a entrada do Sol em diferentes constelações da eclíptica. A este fenômeno se deu o nome de precessão dos equinócios.

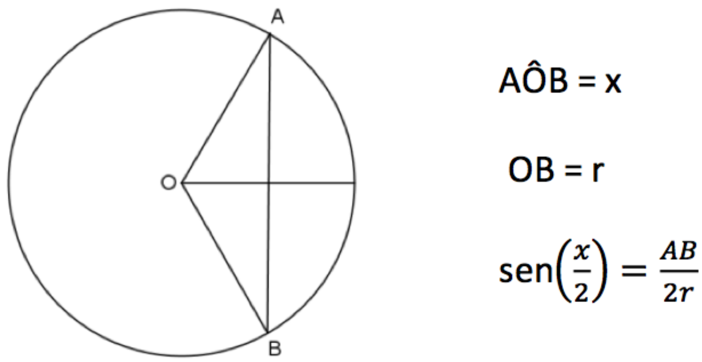


Figura 1.2: Corda

comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo x é $2\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2}$, conforme figura 1.2.

Outro matemático grego, Menelau de Alexandria, por volta de 100 d.C., produziu um tratado sobre cordas num círculo, em seis livros, porém vários deles se perderam. Felizmente o seu tratado *Sphaerica*, em três livros, se preservou numa versão árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica.

A *Syntaxis Mathematica*, obra que contém 13 livros, escrita por Ptolomeu de Alexandria é a obra mais significativa da trigonometria da Antiguidade. Esta obra é famosa por sua compacidade e elegância e por isso foi associado a ela o título de *magiste* ou "a maior". Depois, na Arábia, o chamaram de Almajesto e, desde então, a obra é conhecida por esse nome. Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes, utilizou como uma boa aproximação para o número π a fração $\frac{377}{120}$, foi também quem utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Analogamente, em termos de cordas, Ptolomeu conhecia as propriedades que, em linguagem atual, são

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x$$
$$\text{sen}(x-y) = \text{sen}\,x\cos y - \text{sen}\,y\cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}\,y\,\text{sen}\,x$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \text{sen}\,y\,\text{sen}\,x$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

Conhecendo essas formulas, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de 0^o até 180^o, inscrevendo polígonos de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num circulo e calculando os comprimentos das cordas subentenditas aos ângulos de 120^o, 90^o, 72^o, 60^o e 36^o, respectivamente. Como ele conhecia um método para encontrar a corda subtendida pela metade do arco de uma corda conhecida,

$$\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

em linguagem atual, ele obteve, utilizando o que hoje é conhecido como interpolação, valores para as cordas com boa precisão. Posteriormente surge o radiano como unidade de medidas de ângulos, o que veio simplificar seu manuseio na matemática e na física.

Na Índia foi descoberta a mais antiga tábua de senos, por isso se acredita que de lá se originaram. Os seus inventores conheciam as ideias matemáticas gregas e babilônias, que circulavam como subprodutos de um vigoroso comércio romano com o sul da Índia pelo Mar Vermelho e Oceano Índico. O aparecimento real do seno de um ângulo ocorreu no trabalho dos indianos. Por volta do ano 500 d.C., Arayabhata elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos (*jiva* — meia corda), tabela esta que foi reproduzida no trabalho de Brahmagupta em 628 e, posteriormente, por volta de 1150, Bhaskara criou um método para construir tabelas de senos para quaisquer ângulos.

Já o vocábulo *cosseno* surgiu somente no século XVII, definido como sendo o seno do complemento de um ângulo. Esses dois conceitos, seno e cosseno, foram originados pelos problemas relativos à astronomia, no entanto, os de *tangente* e *cotangente*, ao que parece, surgiram da necessidade de calcular alturas e distâncias. Utilizando-se de uma vara colocada na posição horizontal, a variação na elevação do sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara, modificando o tamanho da sua sombra (ver figura 1.3). Esse método foi utilizado por Tales para calcular as alturas das pirâmides através de semelhança de triângulos.

Já a *secante* e a *cossecante* não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram por volta do século XV, quando os navegadores começaram a preparar tabelas. Nicolau Copérnico sabia da secante que ele chamou a hipotenusa. Viète conhecia os resultados

$$\frac{\operatorname{cossec} x}{\sec x} = \cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ e } \frac{1}{\operatorname{cossec} x} = \frac{\cos x}{\cot x} = \operatorname{sen} x.$$

1.2 Importância da Trigonometria

A trigonometria não se limita ao estudo de triângulos. Encontramos aplicações da trigonometria na engenharia, na mecânica, na eletricidade, na física, na acústica, na

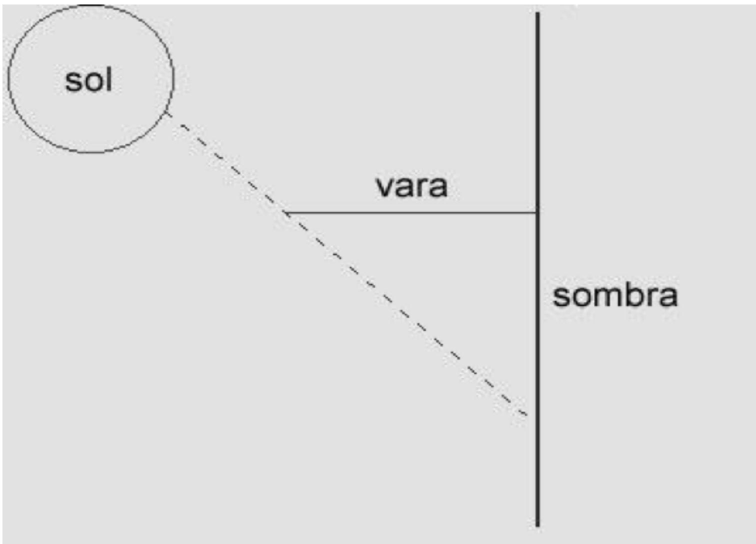


Figura 1.3: Sombra.

medicina, na astronomia e até na música.

Nas engenharias é onde percebemos uma grande presença da trigonometria; na engenharia civil, por exemplo, na construção de pontes, estradas, barragens portos e aeroportos; na eng. mecânica, desenvolvimentos de máquinas, dispositivos mecânicos e elétricos tais como teodolito, GPS entre outros.

Na medicina, alguns exemplos de aplicação: a pressão interpleural (pressão existente na caixa torácica), também durante o processo de respiração, problemas de pressão sanguínea (sístole e diástole) podem ser modulados por funções trigonométricas.

Na astronomia, como já dito, não conheceríamos tanto sobre o universo sem trigonometria, no que diz respeito às inovações que esta ferramenta agregou a estes estudos, em termos de melhores previsões e mais longínquas observações.

Já na música, a relação com matemática é muito antiga, surgindo com mais força nos experimentos de Pitágoras (sec.VI a.C.) que conseguiu organizar os sons numa escala musical. Brook Taylor (1685-1731) foi o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante. Fourier (1768 – 1830), que provou que uma onda qualquer é formada pela somatória de varias outras de formato senoidal, o que constitui a base do processamento de sinais, daí o papel central da *Análise de Fourier* nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais.

Como curiosidade: é utilizando análise de Fourier que se retira a voz das canções para fazer *karaokê* e também que se faz a compressão de imagens em formato JPEG.

A trigonometria de fato traz grandes contribuições e avanços para as diversas áreas do conhecimento, ter deixado de citar outras áreas não é por displicência, mas sim pela grande quantidade de aplicações que esta parte da matemática nos trouxe.

1.3 Trigonometria no Ensino de Matemática

O tema trigonometria é abordado na educação básica em dois momentos [12]: no fim do ensino fundamental, quando são introduzidos os conceitos de senos , cossenos e tangentes no triângulo retângulo, e no ensino médio quando se trabalha os conceitos de arcos, ângulos e suas unidades de medidas (graus e radianos); o ciclo trigonométrico; identificação das razões trigonométricas neste círculo; equações ; as funções trigonométricas e seus gráficos e a resolução de problemas que envolvem trigonometria. Esses temas são abordados em outros momentos dentro da disciplina matemática, no estudo da taxa de variação (coeficiente angular de uma reta), em geometria analítica, no estudo dos números complexos na sua representação na forma trigonométrica.

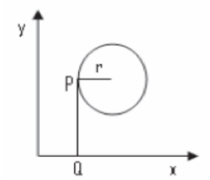
Os PCNEM orientam as instituições de ensino da educação básica quantos às competências, às habilidades e conhecimentos fundamentais que se espera que os alunos venham desenvolver durante a sua vida escolar. Sobre trigonometria este documento ressalta:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especificamente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvam medições, em especial o cálculo de distancias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondam a modelos periódicos

Note que o aspecto algébrico é desenfatizado, o que não deixa de ter suas implicações nas áreas de exatas, como também está descrito da referência [12]. Por outro lado, a ênfase em modelos periódicos e distâncias inacessíveis é clara nas provas de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), como pode ser visto nas figura 1.4.

Questão 174

Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

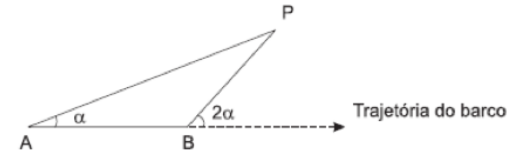


Então, o ponto Q percorrerá, no eixo *x*, uma distância dada por

- **A** $r\left(1-\text{sen}\frac{d}{r}\right)$.
- **B** $r\left(1-\cos\frac{d}{r}\right)$.
- **C** $r\left(1-\text{tg}\frac{d}{r}\right)$.
- **D** $r\,\text{sen}\left(\frac{r}{d}\right)$.
- **E** $r\cos\left(\frac{r}{d}\right)$.

QUESTÃO 158

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- **A** 1 000 m.
- **B** $1\,000\sqrt{3}$ m.
- **C** $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
- **D** 2 000 m.
- **E** $2\,000\sqrt{3}$ m.

Figura 1.4: À esquerda, a questão 174 da prova azul do Enem 2009; À direita, a questão 158 do Enem 2011

Capítulo 2

Trigonometria Racional

2.1 Quadrância e Abertura

Para iniciar o estudo da trigonometria racional, precisamos definir dois novos conceitos que são os análogos trigonométrico-racionais dos conceitos de distância e ângulo.

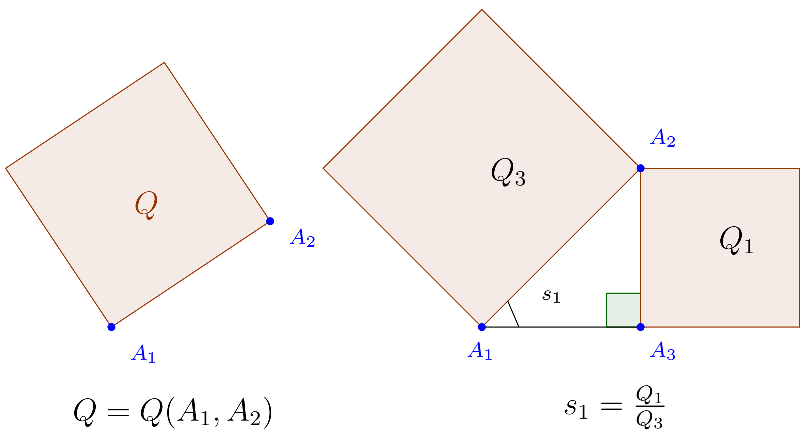


Figura 2.1: Quadrância e Abertura.

A *quadrância*[1] entre dois pontos A_1 e A_2 é a área $Q(A_1, A_2)$ do quadrado construído sobre o segmento A_1A_2 (lado esquerdo da figura 2.1). Claramente

$$Q(A_1, A_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

[1] *quadrance*, em inglês.

para $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$, ou seja, a quadrância é exatamente o quadrado da distância entre A_1 e A_2.

Note que se as coordenadas de A_1 e A_2 são racionais, então $Q(A_1, A_2)$ também é racional, ao passo que a distância $d(A_1, A_2)$ pode ser irracional, por causa da extração da raiz quadrada.

O uso de quadrados para medir a separação entre pontos não é novo, basta lembrar do enunciado do Teorema de Pitágoras. Novo é o termo "quadrância". Mas a introdução desse neologismo se justifica tanto para abreviar os enunciados dos teoremas e problemas, quanto pela sua importância conceitual, pois "quadrância" remete imediatamente a "quadrado da distância".

Para definir o conceito de abertura[2], vamos considerar o inicialmente o triângulo retângulo do lado direito da figura 2.1. É claro que

$$\operatorname{sen}^2 \hat{A}_1 = \frac{Q_1}{Q_3},$$

portanto a razão entre as quadrâncias do cateto oposto e da hipotenusa contém a mesma informação que o seno do ângulo $\hat{A}_1$, ou seja, essencialmente a mesma informação do ângulo $\hat{A}_1$, sendo assim uma boa medida da separação entre as retas A_1A_3 e A_1A_2. Assim, ao invés de medir o ângulo $\hat{A}_1$ em graus ou radianos, podemos medi-lo por sua *abertura*

$$s_1 = \frac{Q_1}{Q_3}.$$

A abertura é sempre um número entre 0 e 1 e podemos adaptar um transferidor para medir ângulos em abertura (figura 2.2). Se os pontos A_1, A_2 e A_3 possuem coordenadas racionais, então s_1 também é racional.

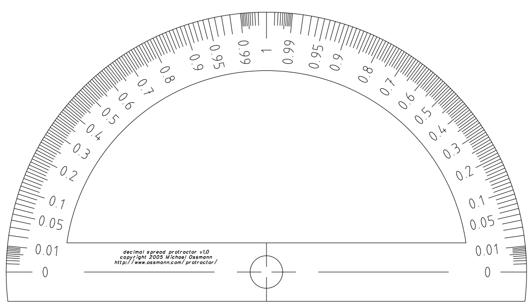


Figura 2.2: Transferidor com medidas em abertura, retirado de `http://www.ossmann.com/protractor/`.

Usar o quadrado do seno de um ângulo para medir sua abertura também não é algo novo. O grande matemático John H. Conway cunhou, no artigo [3] de 1998,

[2]*spread*, em inglês

a expressão "ângulo geodético puro" para designar um ângulo cujo quadrado do seno seja racional. Tais ângulos aparecem frequentemente como ângulos diedrais de poliedros regulares (platônicos ou arquimedianos). Nesse artigo, Conway recomendou o emprego da notação $\angle r$ para denotar um ângulo de abertura r, ou equivalentemente,

$$\angle r = \operatorname{arcsen} \sqrt{r},$$

a qual seguiremos neste trabalho.

Passemos a estudar agora como os principais fatos da trigonometria podem ser expressos em termos de quadrância e abertura.

2.2 Teorema de Pitágoras

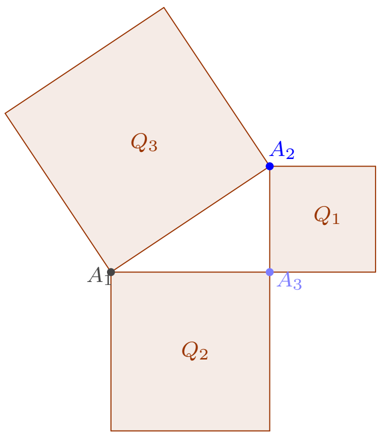


Figura 2.3: Teorema de Pitágoras: $Q_3 = Q_1 + Q_2$.

O Teorema de Pitágoras (figura 2.3) é o resultado mais básico da trigonometria. Inúmeras demonstrações são conhecidas, uma particularmente visual está representada da figura 2.4. Em termos de quadrância ele pode ser assim enunciado:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Pitágoras). *Os segmentos A_1A_3 e A_3A_2 são perpendiculares se, e somente se,*

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

2.3 Fórmula das Três Quadrâncias

Como a área Q de um retângulo é dada pelo produto do comprimento da base pela altura, segue que Q^2 é igual ao produto das quadrâncias dos lados (lado esquerdo

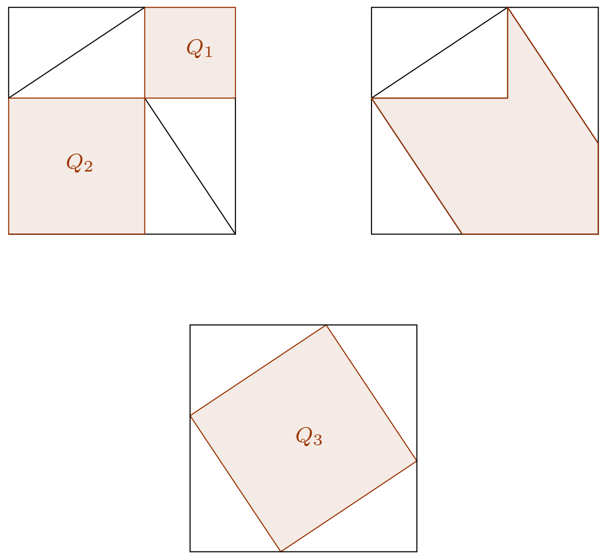


Figura 2.4: Demonstração visual do Teorema de Pitágoras.

da figura 2.5). Por outro lado, se três pontos A_1, A_3, A_3 são colineares, vemos pelo lado direito da figura 2.5 que

$$(Q_3 - Q_1 - Q_2)^2 = (2Q)^2 = 4Q_1Q_2. \tag{2.1}$$

Essa condição pode ser colocada em uma forma mais simétrica se considerarmos a seguinte identidade polinomial:

$$\begin{aligned} 4xy - (x+y-z)^2 &= 4xy - (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz) \\ &= -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \\ &= (x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2) = 4xy - (x+y-z)^2. \tag{Simetria}$$

Aplicando (Simetria) à equação (2.1), com $x = Q_1$, $y = Q_2$ e $z = Q_3$, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1 (Fórmula das Três Quadrâncias[3]). *Pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares se, e somente se,*

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2$$

[3] *Triple Quad Formula*, em inglês.

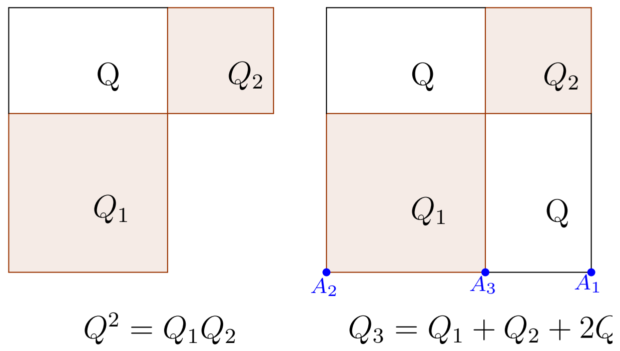


Figura 2.5: Fórmula das Três Quadrâncias.

ou, de maneira equivalente, se e somente se,

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$

De fato, a recíproca é válida, mas deixaremos sua demonstração para a seção 2.7.

Definindo a *função de Arquimedes* como

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

segue que três pontos são colineares se, e somente se, $\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3) = 0$.

2.4 Lei da Abertura

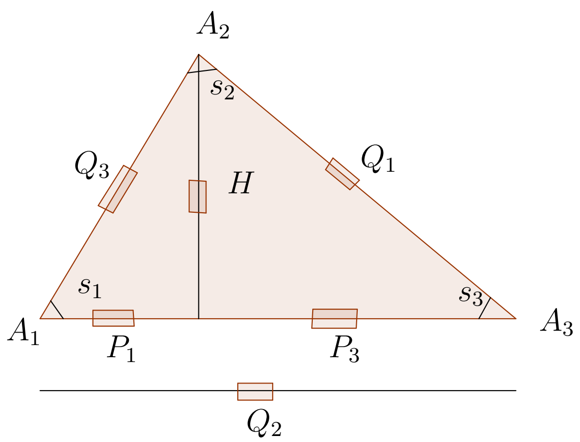


Figura 2.6: Triângulo utilizado nas demonstrações das Leis da Abertura e da Coabertura.

Da figura 2.6, vemos que

$$s_1 = \frac{H}{Q_3} \text{ e } s_3 = \frac{H}{Q_1},$$

logo, igualando H nas duas expressões,

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

Repetindo o argumento para os outros pares de lados, chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 (Lei da Abertura[4]). *Em um triângulo qualquer,*

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

Note que a Lei da Abertura é análoga à Lei dos Senos

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{A}_1}{d_1} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}_2}{d_2} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}_3}{d_3},$$

onde $d_1 = d(A_2, A_3)$, $d_2 = d(A_1, A_3)$ e $d_3 = d(A_1, A_3)$, e pode ser derivada dela simplesmente elevando cada membro ao quadrado.

2.5 Lei da Coabertura

Ainda com base na figura 2.6,

$$P_1 = Q_3 - H, \tag{2.2}$$

pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo A_1BA_2. Aplicando o mesmo teorema ao triângulo A_3BA_2, resulta que

$$P_3 = Q_1 - H = Q_1 - s_3Q_1 = Q_1(1 - s_3). \tag{2.3}$$

Como A_1, B e A_3 são colineares, segue da Fórmula das Três Quadrâncias que

$$(P_3 + Q_2 - P_1)^2 = 4P_3Q_2,$$

e substituindo na equação acima os valores de P_3 e P_1 em (2.2) e (2.2), chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 2.5.1 (Lei da Coabertura[5]). *Em um triângulo qualquer,*

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3,$$

onde $c_3 = 1 - s_3$ *é a* coabertura *associada a abertura* s_3*.*

[4] *Spread Law*, em inglês.
[5] *Cross Law*, em inglês.

A Lei da Coabertura é análoga à Lei dos Cossenos

$$d_3{}^2 = d_1{}^2 + d_2{}^2 - 2d_1d_2\cos\hat{A}_3$$

e pode ser facilmente derivada dela, bastando notar que

$$c_3 = 1 - s_3 = 1 - \operatorname{sen}^2\hat{A}_3 = \cos^2\hat{A}_3.$$

2.6 Fórmula das Três Aberturas

Pela Lei da Abertura,

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3} = \frac{1}{D},$$

assim $Q_1 = s_1D$, $Q_2 = s_2D$ e $Q_3 = s_3D$. Substituindo esses valores na Lei da Coabertura, temos que

$$(s_1D + s_2D - s_3D)^2 = 4(s_1D)(s_2D)c_3$$

e, cancelando o D^2 em ambos os membros,

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2 - s_3)^2 &= 4s_1s_2c_3 \\ &= 4s_1s_2(1 - s_3) \\ &= 4s_1s_2 - 4s_1s_2s_3.\end{aligned}$$

Aplicando a identidade (Simetria), chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 2.6.1 (Fórmula das Três Aberturas[6]). *Em qualquer triângulo,*

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 - 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 4s_1s_2s_3,$$

ou seja, $\mathcal{A}(s_1, s_2, s_3) = 4s_1s_2s_3$.

Essa fórmula permite obter a abertura de um dos ângulos do triângulo, conhecidas as abertura dos outros dois ângulos, sendo assim análoga ao fato que os ângulos de um triângulo somam 180^o.

2.7 Teorema de Arquimedes

Vamos agora encontrar uma fórmula para a área S de um triângulo em função das quadrâncias de seus lados. Pela figura 2.6, temos que

$$S^2 = \frac{Q_2H}{4},$$

[6] *Triple Spread Formula*, em inglês.

ou seja, $4S^2 = Q_2H = Q_2Q_1s_3$. Por outro lado, pela Lei da Coabertura,

$$\begin{aligned}(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 &= 4Q_1Q_2c_3\\ &= 4Q_1Q_2(1 - s_3)\\ &= 4Q_1Q_2 - 4Q_1Q_2s_3\\ &= 4Q_1Q_2 - 16S^2,\end{aligned}$$

donde

$$16S^2 = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2.$$

Aplicando (Simetria), chegamos a relação desejada:

Teorema 2.7.1 (Teorema de Arquimedes)**.** *A área S de um triângulo $\triangle A_1A_2A_3$ com quadrâncias Q_1, Q_2 e Q_3 é determinada pela fórmula*

$$16S^2 = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2),$$

ou seja

$$S^2 = \frac{1}{16}\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3).$$

Em particular, vemos que se $\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3) = 0$, os três pontos formam um triângulo de área zero, ou seja, eles são colineares, mostrando assim a recíproca da Fórmula das Três Quadrâncias.

É interessante notar que

$$\begin{aligned}4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 &= \begin{vmatrix} 2Q_1 & Q_1 + Q_2 - Q_3 \\ Q_1 + Q_2 - Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & Q_1 & Q_2 \\ 1 & Q_1 & 0 & Q_3 \\ 1 & Q_2 & Q_3 & 0 \end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_1^2 & d_2^2 \\ 1 & d_1^2 & 0 & d_3^2 \\ 1 & d_2^2 & d_3^2 & 0 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

onde o último determinante é a versão bidimensional do *determinante de Cayley-Menger*[4]. O determinante de Cayley-Menger permite calcular o volume de um simplexo n-dimensional conhecendo-se apenas as medidas dos seus lados, ou suas quadrâncias, mais exatamente.

O Teorema de Arquimedes é equivalente à Fórmula de Heron e pode ser derivado dela da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 16\left(\sqrt{s(s-d_1)(s-d_2)(s-d_3)}\right)^2 \\
&= (d_1+d_2+d_3)(-d_1+d_2+d_3)(d_1-d_2+d_3)(d_1+d_2-d_3) \\
&= ((d_1+d_2)^2-d_3^2)(d_3^2-(d_1-d_2)^2) \\
&= ((d_1+d_2)^2+(d_1-d_2)^2))Q_3-(d_1+d_2)^2(d_1-d_2)^2-Q_3^2 \\
&= 2(Q_1+Q_2)Q_3-(d_1^2-d_2^2)^2-Q_3^2 \\
&= 2(Q_1+Q_2)Q_3-(Q_1-Q_2)^2-Q_3^2 \\
&= (Q_1+Q_2+Q_3)^2-2(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2).
\end{aligned}$$

2.8 Conclusão

A trigonometria racional faz com que alguns problemas sejam resolvidos apenas com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, com pequena utilização de outras funções como a raiz quadrada, seno, cosseno etc, em comparação com a trigonometria clássica. No capítulo seguinte, ilustraremos isso com a resolução detalhada de alguns problemas.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Resolução de Triângulos

Vamos comparar a trigometria clássica com a racional nos três casos de resolução de triângulos:

1 - Três lados — Três Quadrâncias

Solução Tradicional

Aplicando a Lei dos Cossenos, descobrimos um dos ângulos, α por exemplo,

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\pm\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{2bc}$$

e com a Lei dos Senos achamos os outros ângulos:

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}),$$

$$\gamma = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a}).$$

Solução Racional

Aplicando a Lei das Coaberturas, descobrimos uma das aberturas, s_1 por exemplo,

$$1 - s_1 = \frac{(Q_2 + Q_3 - Q_1)^2}{4Q_2Q_3},$$

ou seja,

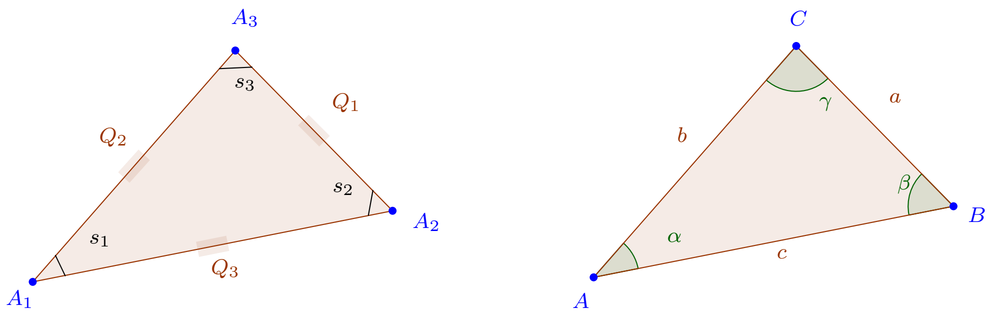
$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{4Q_2Q_3 - (Q_2 + Q_3 - Q_1)^2}{4Q_2Q_3} \\ &= \frac{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}{4Q_2Q_3}, \end{aligned}$$

por (Simetria). Aplicando a Lei da Abertura achamos as outras aberturas:

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}{4Q_1Q_3}$$

e

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}{4Q_1Q_2}.$$



2 - Dois lados e um ângulo — Duas quadrâncias e uma abertura

Solução Tradicional

Digamos que a, b e α sejam conhecidos. Aplicando a Lei dos Cossenos, encontramos uma equação quadrática para c:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Resolvida a equação, encontramos os outros ângulos pela Lei dos Senos:

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a}\right),$$

$$\gamma = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{c\operatorname{sen}\alpha}{a}\right).$$

Solução Racional

Digamos que Q_1, Q_2 e s_1 sejam conhecidos. Aplicando a Lei dos Coaberturas, encontramos uma equação quadrática para Q_3:

$$(Q_2 + Q_3 - Q_1)^2 = 4Q_2Q_3(1 - s_1).$$

Resolvida a equação, encontramos as outras aberturas pela Lei das Aberturas:

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}{4Q_1Q_3}$$

e

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}{4Q_1Q_2}.$$

3 - Dois ângulos e um lado — Duas aberturas e uma quadrância

Solução Tradicional

Digamos que a, α e β sejam conhecidos. Calculamos $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, e os outros lados saem pela Lei dos Senos:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha},$$

e

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Solução Racional

Digamos que Q_1, s_1 e s_2 sejam conhecidos. Aplicando a Fórmula das Três Aberturas, encontramos uma equação quadrática para s_3:

$$\mathcal{A}(s_1, s_2, s_3) = 4s_1s_2s_3.$$

Resolvida a equação, encontramos as outras quadrâncias pela Lei das Aberturas:

$$Q_2 = \frac{s_2Q_1}{s_1}$$

e

$$Q_3 = \frac{s_3Q_1}{s_1}.$$

Resumo Em resumo, vemos que se os problemas forem dados em quadrância e abertura, a resolução de triângulos pela trigonometria racional envolve apenas operações racionais, mais uma equação quadrática nos casos 2 e 3. Se os problemas forem dados em ângulos e distâncias, sempre vamos precisar calcular funções trigonométricas e trigonométricas inversas, exceto no caso 3, onde funções inversas não são necessárias.

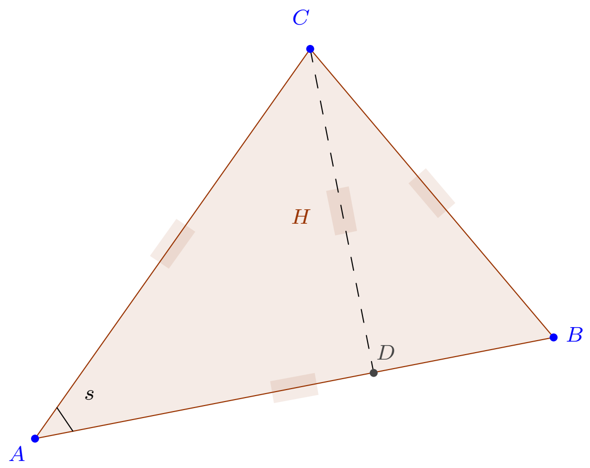
Mas note que no caso tradicional podemos informar e pedir não os ângulos, mas os seus senos (ou cossenos, ou tangentes)! Nesse caso as funções trigonométricas ou trigonométricas inversas podem ser calculadas algebricamente e a diferença entre as abordagens tradicional e racional diminui sensivelmente. Em particular, o caso 3, fica mais simples na trigonometria tradicional, pois podemos encontrar a tangente de γ através da bela identidade

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma,$$

que é linear em $\operatorname{tg} \gamma$, enquanto na trigometria racional precisamos inevitavelmente resolver uma equação do segundo grau.

3.2 Problemas Resolvidos

Problema 1. *Sabendo que $Q(A, B) = 13$, $Q(B, C) = 17$, $Q(A, C) = 8$, determine a quadrância $H = Q(C, D)$.*



Solução: Aplicando a Lei da Coabertura

$$(Q(A,C)+Q(A,B)-Q(B,C))^2 = 4Q(A,C)Q(A,B)(1-s),$$

donde

$$(17+13-8)^2 = 4.17.13(1-s),$$

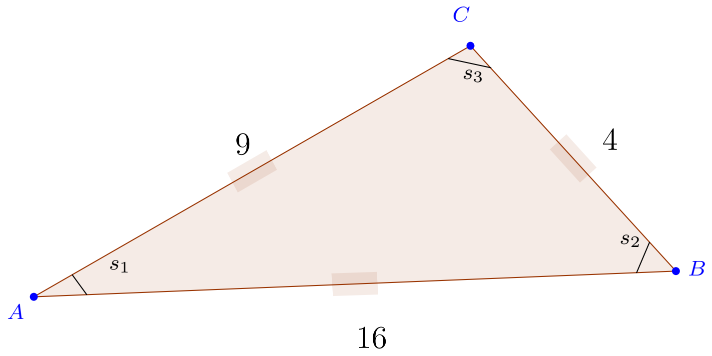
ou seja,

$$s = 1 - \frac{22^2}{4.17.13} = \frac{100}{221}.$$

Logo

$$H = 17S = 17\frac{100}{221} = \frac{100}{13}.$$

Problema 2. *Dado o triângulo com quadrâncias indicadas abaixo, determine as aberturas e a área.*



Solução: Pela Lei da Coabertura,

$$(4 + 16 - 9)^2 = 4.4.16(1 - s_3),$$

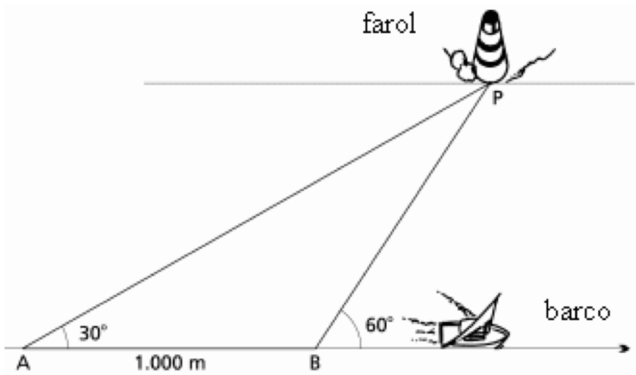
daí concluimos que $s_3 = \frac{135}{256}$ e, pela Lei da Abertura,

$$s_1 = \frac{4s_3}{9} = \frac{15}{64},$$

e

$$s_2 = \frac{16s_3}{9} = \frac{15}{16}.$$

Problema 3. *No ponto A, sob um ângulo de 30^o o navegador verifica que do outro lado do rio no ponto P está o farol. Após a embarcação percorrer 1000 metros, chegando ao ponto B ele avista o farol sob um ângulo de 60^o. Seguindo sempre na direção AB, qual a menor distância entre a embarcação e o farol?*

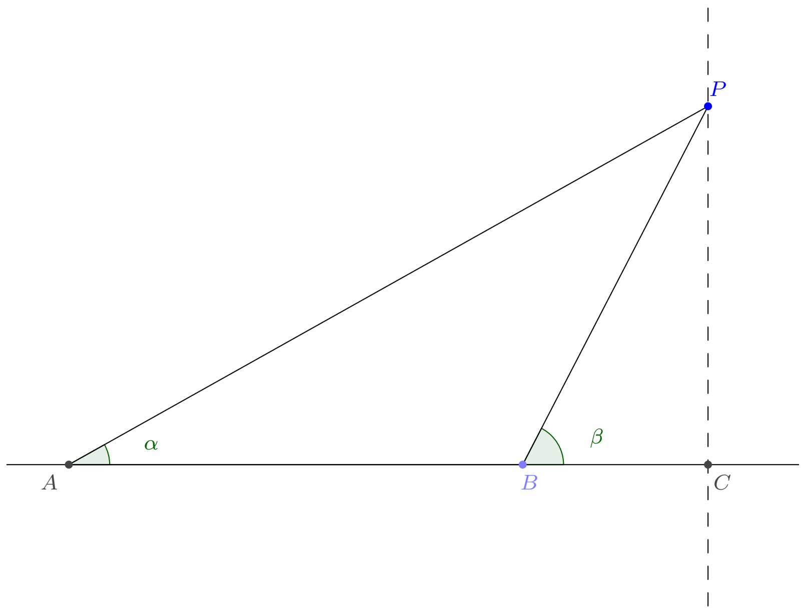


Este problema foi adaptado de Bongiovanni [1], mas apresenta um modelo recorrente em vários concursos, inclusive no Enem 2011 (figura 1.4). A escolha dos ângulos facilita o problema, pois neste caso o ângulo em P é igual ao ângulo em A e o triângulo é isósceles, portanto BP também mede 1000 m. Assim, a menor distância h satisfaz

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{h}{1000},$$

ou seja, $h = 500\sqrt{3}$.

Considere agora uma generalização do problema, onde a distância $d = d(A, B)$ e os ângulos α e β são conhecidos e se pede a distância h. Se $\beta = 2\alpha$, o triângulo é isósceles e a solução é como vimos acima. Vamos supor, portanto, apenas que $\beta > \alpha$.



Vamos comparar a resolução deste problema da maneira tradicional e da maneira racional:

Solução Tradicional

Fazendo $x = d(B, C)$, temos que

$$(d + x) \operatorname{tg} \alpha = h = x \operatorname{tg} \beta,$$

donde

$$x = \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha},$$

e

$$h = \frac{d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Solução Racional

Aplicando a Fórmula das Três Aberturas, resolvemos a equação quadrática

$$\mathcal{A}(s_A, s_B, s_P) = 4 s_A s_B s_P$$

para s_P. Portanto, pela Lei da Abertura,

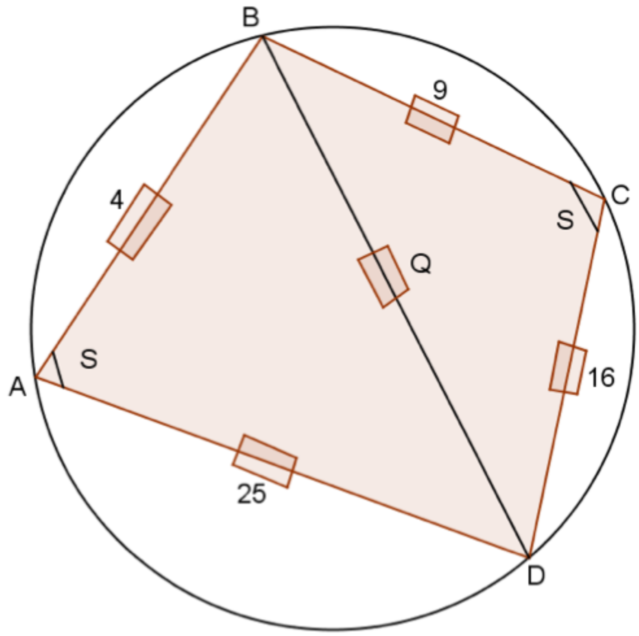
$$Q(B, P) = \frac{s_A Q(A, B)}{s_P},$$

e

$$H = Q(P, C) = Q(P, B) s_B.$$

Comentário: Note como nesse caso simples a não-linearidade da trigonometria racional complica desnecessariamente a solução.

Problema 4. *Calcule o raio do círculo abaixo?*



Solução: Seja $K = (raio)^2$. Como o quadrilátero está inscrito no círculo os ângulo opostos são suplementares, portanto possuem a mesma abertura s. Aplicando a Lei da Coabertura duas vezes, temos que

$$(4 + 25 - Q)^2 = 4.4.25(1 - s)$$

e

$$(9 + 16 - Q)^2 = 4.9.16(1 - s).$$

Segue que

$$(1 - s) = \frac{(29 - Q)^2}{400} = \frac{(25 - Q)^2}{576},$$

ou seja,

$$\frac{25 - Q}{20} = \pm\frac{25 - Q}{24},$$

donde $Q = 49$ ou $Q = \frac{299}{11}$. Portanto

$$K = \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)} = \frac{3298}{480}$$

e o raio é igual a

$$\sqrt{\frac{3298}{480}}.$$

Comentário: Como o raio r da circunferência circunscrita ao triângulo satisfaz,

$$r = \frac{abc}{4A},$$

elevando ao quadrado obtemos

$$K = \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{\mathcal{A}(Q_1, Q_2, Q_3)}.$$

Capítulo 4

Conclusão

Depois desse estudo sobre trigonometria racional, temos a impressão que não deva existir dicotomias entre trigonometria racional e clássica, visto que em nenhum momento as duas se contradizem. Observamos que pode, sim, existir uma boa complementação entre elas, no ensino médio principalmente, com a ampliação dos problemas propostos, saindo do ciclo de problemas com apenas arcos "notáveis".

Negar tudo que foi feito com o conhecimento da trigonometria clássica, tachando-a de "errada", como por vezes o prof. Wildberger faz, entretanto, seria negar o conhecimento até aqui desenvolvido. Como diz Michael Gilsdorf em [8]

> Embora Wildberger possa muito bem estar correto ao afirmar que a maneira como a trigonometria é ensinada está errada, é um erro dizer que trigonometria clássica é a causa, ou que a trigonometria racional é uma alternativa melhor. Educadores devem simplesmente mudar o modo de ensinar trigonometria, e não substituí-la por uma teoria não-linear que é incompatível com o nosso sistema linear de medidas, tem uma aplicação limitada (por exemplo, principalmente triângulos), envolve geralmente mais cálculos, pode ser menos intuitiva, e ainda exige que o aluno aprenda a teoria clássica, no todo ou em parte.

Por outro lado, não há como negar que a trigonometria racional traz para muitos problemas certo traço de elegância, no que diz respeito à apresentação dos cálculos, como vimos em algumas comparações feitas no capítulo 3. Também é notável que o fato de trabalhar com quadrados de senos e números racionais facilita muito os cálculos, dispensando muitas vezes o uso de tabelas e calculadoras científicas. De fato, a trigonometria racional é mais eficiente que a clássica, do ponto de vista computacional, nos problemas de resolução de triângulos, como foi demonstrado em [10], se não contarmos a extração de raízes final que transforma quadrâncias em distâncias.

Observamos também que as leis apresentadas pela trigonometria racional na sua maioria são correspondentes às da trigonometria clássica e portanto a introdução delas não causará grandes dificuldades no ensino. Caberá ao professor perceber em que momento deve apresentar a trigonometria racional aos alunos, sem que haja necessidade de apresentá-la como algo diferente, mas simplesmente uma nova forma de ver alguns fatos da trigonometria clássica.

Portanto, neste momento, cabe a todos nós, diante da apropriação dessa nova abordagem proposta para o ensino de trigonometria, particularmente na resolução de triângulos, que foi a proposta deste trabalho, aferir se é possível a sua implementação e que fatores positivos ou não traria a adoção deste caminho no ensino de trigonometria no ensino médio.

Resenhas

Proporções Divinas: da Trigonometria Racional à Geometria Universal, por N. J. Wildberger

Resenhado por Michael Henle

The American Mathematical Monthly, Vol. 114, No. 10 (Dec., 2007), pp. 933-937

Reforma da Trigonometria Já!

Não parece um *slogan* muito plausível, não é? Trigonometria, pode-se supor, é um assunto petrificado, certamente imune a reformas. Não! Agora vem N.J. Wildberger, cujo livro *Proporções Divinas* explica como a trigonometria pode ser radicalmente remodelada. Se necessária ou não, Wildberger descobriu uma nova e elegante teoria que pode (potencialmente) reformar a trigonometria.

Trigonometria Racional. Wildberger inicia sugerindo alternativas a dois conceitos da trigonometria clássica: distância (que mede a separação entre pontos) e ângulo (que mede a separação entre retas). Ao invés de distância, Wildberger propõe utilizar o quadrado da distância, para o qual ele cunhou o termo *quadrância*. Essa substituição, claramente, já foi considerada conveniente por outros. Mais interessante é a abordagem de Wildberger para ângulo. Ele propõe utilizar, com efeito, o quadrado do seno do ângulo. Wildberger chama isso de *abertura* entre as retas.

E quanto aos conceitos tradicionais de distância e ângulo? Wildberger reconhece que distâncias são necessárias em aplicações. Em sua abordagem a resolução de problemas trigonométricos, distâncias são sempre obtidas ao final através da extração da raiz quadrada — após outras manipulações que resultam em quadrâncias. Entretanto, ele dispensaria completamente as tradicionais medidas de ângulo (graus, radianos etc). Não obstante, é divertido notar que as aberturas dos nossos ângulos tradicionalmente privilegiados — 30, 45, 60 e 90 graus — são, respectivamente, 1/4, 1/2, 3/4 e 1. Legal. Claro que a abertura *não é* linear, *nem* (como o seno) distingue um ângulo de seu suplemento.

O que é importante, no ponto de vista de Wildberger, é que abertura e quadrância são quantidades racionais. A saber, se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos do plano cartesiano, então a quadrância $Q(A,B)$ entre eles é dada por

$$Q(A,B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

enquando se ℓ_1 e ℓ_2 são retas dadas por equações $\ell_1 : a_1x + b_1y = c_1$ e $\ell_2 : a_2x + b_2y = c_2$, então a abertura $s(\ell_1, \ell_2)$ entre elas é dada por

$$s(\ell_1, \ell_2) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Note que a abertura depende apenas das retas ℓ_1 e ℓ_2, não das equações particulares escolhidas para representá-las. Utilizando-se quadrância e abertura, trigonometria se torna um assunto racional, quadrático, de fato.

A trigonometria clássica preocupa-se em grande medida com triângulos. Três pontos A, B e C determinam um triângulo que contém as três quadrâncias e as três aberturas mostradas na figura 4.1. A figura também mostra as convenções visuais adotadas por Wildberger para evitar confusão com a figuras euclidianas tradicionais. Cinco leis

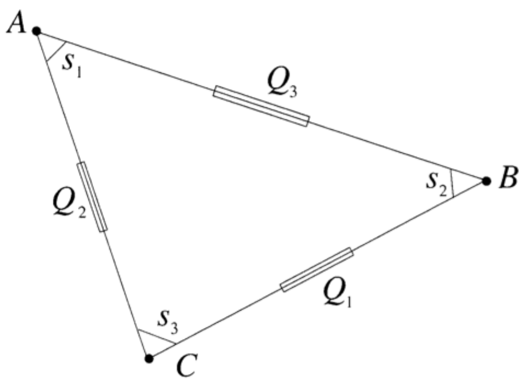


Figura 4.1: Um triângulo na trigonometria racional

sumarizam a trigonometria racional de um triângulo:

Teorema de Pitágoras: Os segmentos AC e BC são perpendiculares se, e somente se,

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

Lei da Abertura: Se Q_1, Q_2 e Q_3 são não nulas,

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

Lei da Coabertura: Dado uma abertura s com correspondente *coabertura* $c = 1 - s$,

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

Fórmula das Três Quadrâncias: Pontos A, B e C são colineares se, e somente se,

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 0.$$

Fórmula das Três Aberturas: Em qualquer triângulo,

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 - 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 4s_1s_2s_3.$$

As três primeiras leis são clássicas. A Lei da Abertura é a Lei dos Senos; A Lei da Coabertura é a Lei dos Cossenos (Coabertura é o análogo trigonométrico-racional do cosseno — o cosseno ao quadrado, é claro). As duas últimas leis são de Wildberger. A Fórmula das Três Quadrâncias é uma versão da Lei da Coabertura e a Fórmula das Três Aberturas codifica o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é uma certa constante.

Ambas as leis "triplas"estão relacionadas à identidade polinomial

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2.$$

Em um triângulo retângulo, claramente

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 4Q_1Q_2.$$

Wildberger toma o lado esquerdo (que de acordo com a Fórmula das Três Quadrâncias mede quanto os três pontos A, B e C deixam de ser colineares) como o análogo trigonométrico-racional da área, denominando-a *quadrárea*. Ela é igual a 16 vezes o *quadrado* da área usual — seja o triângulo ABC reto ou não.

Esses resultados estão citados para mostrar a elegância da formulação de Wildberger. *Proporções Divinas* é recheado com resultados similares envolvendo várias combinações de quadrâncias e aberturas. Muitos outros são dados como exercícios. Todos eles são relações polinomiais ou interpretações geométricas dessas relações. As demonstrações são fáceis de seguir. Enquanto lemos o livro, é bastante simples inserir as hipóteses da maioria dos teoremas/exercícios em um sistema de álgebra computacional e verificar suas conclusões (i.e., prová-los) com uma única digitação, uma sugestão que o próprio Wildberger faz.

Resolver triângulos, um objetivo principal da trigonometria, é um processo direto. Dadas três ou mais das seis quantidades — Q_1, Q_2, Q_3, s_1, s_2, s_3 — utiliza-se as leis acima para se determinar as outras. Se é preciso resolver uma equaçao do segundo grau, então alguma atenção será necessária para se escolher a raiz correta (apesar que naturalmente algums problemas desse tipo possuem múltiplas soluções). Uma vez que as leis não envolvem nada mais complicado que equações quadráticas, nada mais complicado que extração de raízes quadradas é necessário em termos aritméticos.

Geometria Universal. Quadrância e abertura têm definições racionais. Portanto elas fazem sentido sobre qualquer corpo de característica diferente de 2. Isso leva a uma teoria geral da geometria euclidiana sobre tais corpos, que Wildberger chama *geometria universal*.

O terço médio de *Proporções Divinas* é devotado a essa teoria. Triângulos, quadriláteros, círculos, centros de triângulos, proporção e seções cônicas são discutidos em capítulos separados. Análogos de muitos teoremas clássicos (e.g., os de Menelau e Ceva, o círculo de nove pontos) são obtidos. Como no caso da trigonometria racional, todos esses tópicos são construídos sobre identidades polinomiais.

Essa é uma teoria elegante de grande generalidade. Parece abrir-se uma área substancial de pesquisa posterior. Adicionalmente, Wildberger promete versões esférica, hiperbólica e projetiva no futuro.

Para arredondar este resumo de *Proporções Divinas*, o último terço é uma sequência de capítulos miscelâneos sobre aplicações em agrimensura, problemas de movimento e medidas de aberturas, entre outras. Há também capítulos sobre geometria tridimensional, incluindo um capítulo sobre sólidos platônicos.

Crítica à Trigonometria Clássica. Em *Proporções Divinas* e no material auxiliar [1]-[3], disponível no sítio do livro (`http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/Rational1.htm`, Wildberger realiza um ataque determinado, mas não generoso e, ao final, fútil, sobre a trigonometria clássica, chamando-a de "trigonometria errada". Em [1] ele escreve

> Incontáveis jovens ao longo das eras tiveram que aprender uma teoria artificial e improvisada que complica desnecessariamente o assunto e leva a perda de precisão em aplicações práticas. Infelizmente, repetição contínuada tem cimentado essa abordagem nas mentes de educadores como a única possível. Como você verá, isso é um erro.

Sua objeção recai em várias categorias.

Primeiro, é um argumento baseado na facilidade de uso. Wildberger faz o convincente, mas artificial, caso que trigonometria racional é não apenas mais fácil de usar, como também mais acurada que a trigonometria clássica, se não se permite o uso de computadores, calculadoras ou tabelas. O artigo [2] coloca o argumento em no divertido contexto de uma competição em uma ilha deserta. Certamente pode-se concordar que é uma vergonha que esta teoria não tenha sido descoberta séculos atrás.

Entretanto, esse é um falso argumento. *Com* calculadoras (ou mesmo tabelas), os algoritmos da trigonometria clássica são tão fáceis quanto os algoritmos racionais. Eles envolvem até mesmo sutilezas análogas — por exemplo, escolher o ângulo certo ou a raiz correta de uma equação quadrática a partir de várias alternativas. Trigonometria clássica, ao menos no que diz respeito a resolução de triângulos, pode ser tão concisamente sumarizada quanto as cinco leis citadas acima. Quanto a precisão, calculadoras e computadores são suficientes para todos os propósitos práticos. Finalmente, a precisão de qualquer procedimento depende da precisão dos dados de entrada. Aberturas medidas com instrumentos projetados apropriadamente (como o transferidor de aberturas mostrado em *Proporções Divinas*) não serão mais acuradas que os ângulos medidos por instrumentos clássicos de agrimensura — provavelmente serão menos.

Em outra direção, Wildberger argumenta que a trigonometria racional é conceitualmente mais simples que a clássica e mais fácil de aprender. Esse argumento, entretanto, depende de como a comparação é feita. Wildberger escreve como se a trigonometria racional consistisse apenas de quadrância e abertura enquanto a clássica, por outro lado, incluísse distância, medidas de ângulo, senos, cossenos, tangentes, séries de potências, teoria da proporção, e assim por diante. Colocado dessa maneira, claro que a trigonometria racional é mais simples de se entender e mais fácil de aprender. Se, ao invés, comparamos quadrância e abertura simplesmente com distância, ângulo e seno, então sem dúvida a trigonometria clássica é geometricamente mais fundamental e mais fácil de compreender. Qualquer complicação criada pela trigonometria clássica em termos de múltiplas funções e identidades é comparável com as criadas pela trigonometria racional, com sua própria multiplicidade de identidades polinomiais.

A trigonometria racional espertamente esconde as funções trancendentes, explícitas na trigonometria clássica, dentro do conceito de abertura. Em trigonometria racional, medidas de ângulos e cálculos de senos são a mesma coisa. Muitos estudantes, entretanto, ainda irão querer aprender sobre seno e cosseno. Wildberger desdenha das funções clássicas, afirmando que elas são úteis apenas para o estudo do movimento circular. Ele escolhe ignorar o papel primário delas como funções periódicas arquetípicas, essencial para a análise de Fourier e outras aplicações. Como as mais elementares das funções transcendentais, elas são também belos e importantes objetos de estudos por si mesmas.

Conclusão. *Proporções Divinas* contém muitas ideias e resultados elegantes. Este talvez seja o lugar para mencionar que trata-se de um livro exepcionalmente bem produzido. Impresso em papel de alta qualidade, é tao bom de olhar como o material que ele contém é bom de ler. Ele emprega uma recurso bem pensado: teoremas são citados não somente por nome e número, mas também por página.

Que Wildberger conseguiu contribuir com novas ideias para uma das mais antigas disciplinas matemáticas, é um feito notável. Diminuir a trigonometria clássica de maneira tão sem reserva, como ele faz, entretanto, é contraproducente. Uma síntese de ideias clássicas e racionais é possível — e é provavelmente a única maneira de conceitos "racionais" entrarem no cânone da trigonometria.

Reforma de um grande ramo da matemática é uma batalha morro acima. Sucesso demanda um forte argumento para a superioridade de qualquer novo método ou abordagem. Até aqui, o caso para a trigonometria racional não chegou lá.

Referências

[1] N.J. Wildberger, A rational approach totrigonometry, disponível em `http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/papers/RationalTrig.pdf`

[2] N.J. Wildberger, Survivor: the trigonometry challenge, disponível em `http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/papers/Survivor.pdf`

[3] N.J. Wildberger, The wrong trigonometry, disponível em `http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/papers/WrongTrig.pdf`

Oberlin College, Oberlin, OH 44074

michael.henle@oberlin.edu

Proporções Divinas: da Trigonometria Racional à Geometria Universal, por N. J. Wildberger

Resenhado por Dan Gaffney

Uniken, No. 29 (Nov., 2005), p. 12

Reescrevendo as Regras Matemáticas

Dois mil anos depois da gênese da trigonometria, um matemático da UNSW entregou este veredicto: o quadro conceitual da trigonometria clássica está errado e deve ser remetido para a lata de lixo da história. O Professor Associado Norman Wildberger, autor de um novo livro intitulado "Proporções Divinas: da Trigonometria Racional à Geometria Universal", produziu um quadro revolucionário susceptível de causar polêmica no meio acadêmico e celebração entre os alunos.

Professor Wildberger, da Escola de Matemática, sustentou que a trigonometria clássica torna o assunto desnecessariamente complexo e conduz a soluções imprecisas. Ele tropeçou na idéia de um novo quadro da trigonometria quatro anos atrás, quando estava pesquisando geometria relativista.

"Eu tive vários pequenos momentos de *eureka*, nenhum deles grande", disse o Professor Wildberger, que veio à UNSW 15 anos depois de nomeações nas Universidade de Stanford, nos Estados Unidos e na Universidade de Toronto, em seu Canadá natal.

"Gradualmente fui percebendo que tinha descoberto uma nova maneira de pensar sobre trigonometria elementar. A ficha caiu lentamente, mas quando caiu, eu sabia que ia mudar as coisas. No início, parecia quase bom demais para ser verdade — como se as ferramentas com que eu estava trabalhando fossem também suaves e simples — Mas à medida que fui abordando problemas mais complexos, percebi que esta nova metodologia funcionava. A trigonometria racional separa claramente movimento circular e geometria".

Baseada no trabalho de antigos babilônios e gregos e introduzida pelo astrônomos Hiparco e Ptolomeu, o papel essencial da trigonometria é explicar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Hoje ela é usada em campos tão diversos como acústica, imagens médica, navegação, *design*, engenharia industrial e topografia.

Incontáveis gerações de estudiosos e alunos aceitaram as suposições que distância é a melhor maneira de medir a separação entre dois pontos e ângulo é a melhor maneira de medir a separação entre duas linhas. Professor Wildberger não concorda.

Ele diz que os matemáticos, sendo uma multidão conservadora, têm se contentado em construir sobre as bases da trigonometria clássica, em vez de questioná-las. Distância e ângulo parecem bastante simples, de modo que a ideia de substituí-los não apareceu.

Escrito para os estudiosos e matematicamente inclinados, *Proporções Divinas* reformula as enigmáticas regras da trigonometria e remove as funções transcendentais trigonométricas — senos, cossenos, tangentes e suas funções inversas — do conjunto de ferramentas trigonométricas.

Em vez disso, o Professor Wildberger trouxe à tona a natureza essencialmente quadrática da geometria. Ele suplantou as noções quase-lineares de ângulos e distâncias com novos conceitos chamados "abertura" e "quadrância" para que os problemas trigonométricos possam ser resolvidos com álgebra e aritmética simples. Como consequência, os cálculos podem ser feito sem tabelas trigonométricas ou calculadoras, muitas vezes com maior precisão.

As novas ideias provocativas do Professor Wildberger representam uma mudança *kuhniana* de paradigma nas áreas de geometria euclidiana e trigonometria. Resta ver se elas são feitas da mesma matéria das revoluções científicas.

Referências Bibliográficas

[1] V. et al. Bongiovanni. *Matemática e Vida*. Editora Ática, São Paulo, 1990.

[2] C.B. Boyer. *História da Matemática*. Editora Blücher, São Paulo,SP, 1974.

[3] John H. Conway, Charles Radin, and L. Sadun. On angles whose squared trigonometric functions are rational. *Discrete & Computational Geometry*, 22(3):321–332, 1999.

[4] C. D'Andrea and M. Sombra. The Cayley-Menger determinant is irreducible for n 3. *Siberian Mathematical Journal*, 46(1):71–76, January 2005.

[5] R. Duval. *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (FascículoI)*. Livraria da Física, São Paulo, 2009. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

[6] H. Eves. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 1997.

[7] Dan Gaffney. Review of "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry". *Uniken*, (29):12, November 2005.

[8] Michael Gilsdorf. A comparison of rational and classical trigonometry. `http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/papers/TrigComparison.pdf`, March 2006.

[9] Michael Henle. Review of "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry". *The American Mathematical Monthly*, 114(10):933–937, December 2006.

[10] Olga Kosheleva. Rational trigonometry: Computational viewpoint. *Geocombinatorics*, 18(1):18–27, 2008.

[11] Nielce M. Lobo da Costa. História da Trigonometria. *Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM*, (10):60–68, Março 2003.

[12] Leonor Wierzynski Pedroso. Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do sofware GeoGebra. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática., 2012.

[13] K. Ribnikov. *História de las Matemáticas.* Editora Mir, Moscou, 1987.

[14] E. R Simionato, I. M. e Pacheco. Um olhar histórico à trigonometria como fonte de motivação em sala de aula. *Secretaria de Estado da Educação do Paraná*, 2011.

[15] D.J. Struik. *História Concisa das Matemáticas.* Editora Gradiva, Lisboa, 1992.

[16] N.J. Wildberger. *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry.* Wild Egg Books, Sydney, 2005.

[17] N.J. Wildberger. Greek geometry, rational trigonometry, and the Snellius – Pothenot surveying problem. *Chamchuri Journal of Mathematics*, 2, December 2010.