Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT
Tese de Doutorado

Propriedades estatísticas da medida de máxima entropia para atratores parcialmente hiperbólicos

Antonio Teófilo Ataide do Nascimento

Salvador-Bahia

24 de Janeiro de 2014

Propriedades estatísticas da medida de máxima entropia para atratores parcialmente hiperbólicos

Antonio Teófilo Ataíde do Nascimento

Tese apresentada ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 24 de janeiro de 2014.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior.

Salvador-Bahia

24 de Janeiro de 2014

Nascimento, Antonio Teófilo Ataíde do.

Propriedades estatísticas da medida de máxima entropia para atratores parcialmente hiperbólicos / Antonio Teófilo Ataíde do Nascimento. – Salvador: UFBA, 2014.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior.

Dissertação (doutorado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Formalismo Termodinâmico . 3. Sistemas Parcialmente Hiperbólicos. I. Junior, Augusto Armando Castro . II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 512.552.7

Propriedades estatísticas da medida de máxima entropia para atratores parcialmente hiperbólicos

Antonio Teófilo Ataíde do Nascimento

Tese apresentada ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática UFBA/UFAL como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática, aprovada em 24 de janeiro de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Armando de Castro Junior (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues P. Varandas
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo
UFBA

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
UFRGS

Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
UFRJ

Ao meu Pai(em memória). O tempo não esperou para que estivesse aqui neste momento, mas sei que você sempre acreditou.

As minhas filhas Jéssica e Vanessa. Em especial a vitoriosa Vanessa. Não me faltam respostas para a vida, quando penso em vocês.

Agradecimentos

A Ju, Jéssica e Vanessa, pelo amor, carinho e paciência.

A minha mãe e irmã, pelo amor e por todo alicerce dado ao longo de minha vida.

A Jurandir e Creusa, por toda dedicação a minha esposa Ju e minhas filhas.

A Vilmar e Jacson, pela integração familiar.

A André e Lorena, pelo companheirismo e amizade.

Ao meu orientador Armando Castro, pela confiança em trabalharmos juntos e por compartilhar seu conhecimento e humor refinados. Sobretudo pela amizade, compreensão e apoio em momentos bastante difíceis.

A todos os professores do programa de doutorado em Matemática da UFBA-UFAL. Em especial ao professor Paulo Varandas, por nortear bastante meus estudos em Sistemas Dinâmicos.

A todos os professores e professoras da UFBa de longas datas, que fizeram parte da minha formação. Em especial a Adelmo Ribeiro, Marco Antônio, José Fernandes, Ednalva Vergasta e Graça Luzia pelas orientações nas iniciações científicas.

Aos professores amigos da UFBa: José Nelson , Evandro, Perfilino, Isac e Enaldo.

Ao professor Raimundo Nonato da USP-SãoCarlos, pela amizade e por me encorajar a fazer o doutorado.

Aos colegas de turma da UFBA e UFAl: Isnaldo, Kenerson, Rodrigo, Darlinton, Gregório e Ângela. Não desistam dos seus ideais.

Aos amigos e colegas do Mestrado da UFBA ao qual convivi na sala 18: Ana Paula, Emanueli, Felipe, Rodrigo, Dimi, Felipe Antonio(chará), Darlan, Raimundo, Júlio, Jaqueline Costa, Jaqueline Azevedo, Felipe Fonseca, Glendson, Heides, Mariana e Sara. Desejo sucesso na jornada do doutorado.

Aos amigos e colegas do doutorado UFBA da nova sala 282: Aubedir, Ronaldo, Luiz, Roberto, Morro, Anderson, Thiago, Wescley, Alejandra, Márcia, Elaine, Kátia e Carina. Em especial a Andrêssa e Elen, por toda atenção e amizade. Tenho certeza do sucesso de todos vocês.

Aos amigos e colegas do mestrado e doutorado UFAl: Giovane, Vagner, Márcio Cavalcante, Nicolas, Carlos, Adina, Márcio, Rafael, Marlon e Ivan.

Aos meus colegas e amigos de trabalho da UNEB, pela torcida. Em especial a Roque, Lorival e Erivelton.

Ao Márcio das revistas, pela amizade.

Aos funcionários da PGMAT-UFBa, pelo pronto atendimento e simpatia.

Aos meus amigos do Vôlei e Xadrez, pela válvula de escape dos problemas acadêmicos e extra-acadêmicos. Em especial ao velho Jau, pela sua luta.

Aos meus amigos de Castelo Branco, onde nasci e me criei. Seremos sempre uma família.

A UNEB, pelo auxílio financeiro a pesquisa e capacitação de seu corpo docente.

Aos professores integrantes da banca examinadora pelas correções e sugestões. E, sobre tudo, pela atenção que deram ao trabalho.

Desde já, peço desculpas pelos nomes que porventura não citei aqui, mas que fizeram parte desta batalha.

"Queira! Basta ser sincero e desejar profundo. Você será capaz de sacudir o mundo. Vai! Tente outra vez!"

Raul Seixas

Resumo

Mostramos a existência e unicidade de medida de máxima entropia, para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos semi-conjugados a uma classe de aplicações não uniformemente expansoras. Bem como provamos a estabilidade estatística do sistema. E principalmente obtemos propriedades estatísticas para tal medida. Mais precisamente, usando a teoria de métricas projetivas em cones, provamos o decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos e o teorema do limite central para a medida de máxima entropia. Além disso, utilizamos tais técnicas para obter resultados análogos no contexto de sistemas parcialmente hiperbólicos derivados de Anosov.

Palavras-chave: Formalismo Termodinâmico, Sistemas Parcialmente Hiperbólicos, Operador Transferência.

Abstract

We show the existence and uniqueness of the maximal entropy measure for partially hyperbolic diffeomorphisms which are semi-conjugate to a class of nonuniformly expanding maps. As well as show the statistical stability of the system. And especially, we obtain good statistical properties for such measure. More precisely, using the theory of projective metric on cones we prove exponential decay of correlations for Hölder continuous observables and the central limit theorem for the measure of maximal entropy. Furthermore, we use such techniques to obtain similar results in the context of partially hyperbolic systems derived from Anosov.

Keywords: Thermodynamic Formalism, Partially Hyperbolic Systems, Transfer Operator.

Sumário

1 Preliminares **1**

1.1 Introdução 1

1.2 Contexto 3

1.3 Exemplos 4

1.4 Definições e Principais Resultados 7

2 Medida de Máxima Entropia **11**

2.1 Construção da Medida de Máxima Entropia 11

2.2 Unicidade da Medida de Máxima Entropia 16

2.3 Estabilidade Estatística 18

3 Propriedades Estatísticas **20**

3.1 Cones e Métricas Projetivas 20

3.2 Operador Ruelle-Perron-Frobenius e Cones Invariantes 23

3.3 Invariância do Cone Principal 31

3.4 Diâmetro Finito do Cone Principal 37

3.5 Decaimento Exponencial de Correlações 41

3.6 Teorema do Limite Central 48

4 Resultados Ulteriores: Derivados de Anosov **52**

4.1 Contexto 52

4.2 Cones Invariantes 55

4.3 Propriedades Estatísticas 69

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

O formalismo termodinâmico aplicado a mecânica estatística tem como precursores os trabalhos de Sinai, Ruelle e Bowen para sistemas uniformemente hiperbólicos e potenciais Hölder, no inicio dos anos 70. Tal teoria foi bem aplicada a outros sistemas como Axioma A e difeomorfismos de Anosov. Fora do contexto uniformemente hiperbólico ainda não temos dissecada a teoria. Muitas contribuições neste sentido existem, para citar algumas temos [BK98, BF09, Yur03, OV08, SV09, BF09, Sar99, Cas02, VV10, CV13].

Especificamente, Varandas e Viana provaram em [VV10] que dados um homeomorfismo local $f : M \to M$, não uniformemente expansor, com inversa lipschitziana e um potencial contínuo $\phi : M \to \mathbb{R}$ satisfazendo certas propriedades, existem um número finito de estados de equilíbrio ergódicos com respeito a f e ϕ tais que todo estado de equilíbrio é combinação linear convexa destes. Na hipótese da dinâmica ser topologicamente exata, existe então um único estado de equilíbrio. Além disso, Varandas e Viana provaram que os estados de equilíbrio são absolutamente contínuos, em relação a alguma medida conforme.

Com este último resultado, através de uma abordagem da análise espectral, Castro e Varandas em [CV13], apresentaram uma outra prova de existência e unicidade de estados de equilíbrio associados a uma dinâmica como em [VV10] e a potenciais Hölder contínuos, de baixa variação e contidos em um cone de funções apropriado. Mais ainda, aplicando técnicas de cones e métricas projetivas ao operador de Ruelle-Perron-Frobenius, Castro e Varandas em [CV13], provaram boas propriedades estatísticas destes estados de equilíbrio, a saber, o decaimento exponencial para observáveis Hölder contínuo e o teorema do limite central. Os autores provaram também outros resultados de estabilidade sobre pertubações determinísticas e aleatórias.

Nosso trabalho aqui é provar a existência, unicidade, decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos e o teorema do limite central da medida maximizante da entropia, relativa a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos semiconjugados a aplicações como em [CV13]. Tal medida será construída a partir do único estado de equilíbrio garantido em [VV10, CV13]. E a partir de resultados de estabilidade obtidos em [CV13], provamos a estabilidade estatística do sistema. Aplicando também técnicas de cones e métricas projetivas ao operador de Ruelle-Perron-Frobenius para obter contração num cone de funções adaptado, estendemos tais técnicas a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos derivados de Anosov.

Neste capítulo encontra-se a definição precisa do nosso contexto parcialmente hiperbólico e uma família de exemplos. Além disso recapitulamos as principais definições com desígnio de enunciar os principais teoremas deste trabalho.

O segundo capítulo estabelece a existência e unicidade de medida de máxima entropia, com base no estado de equilíbrio garantido em [CV13]. A construção de tal medida surge naturalmente da idéia de que nas regiões de contração o sistema não gera entropia, assim, a complexidade do sistema do ponto de vista da entropia é determinada pela dinâmica não uniformemente expansora como em [CV13]. Provamos aqui também a estabilidade estatística do sistema.

No terceiro capítulo provamos boas propriedades estatísticas da medida de máxima entropia. Mais precisamente, o decaimento exponencial de correlações e o teorema do limite central. Aplicamos as técnicas de cones e métricas projetivas e para tal fizemos um breve resumo destes conceitos e principais resultados aqui utilizados. O trabalho mais laborioso é a prova da invariância de um cone de funções apropriado, no sentido de que o mesmo seja estritamente invariante pelo operador de Ruelle-Perron-Frobenius. Além disso, encontra-se também a prova, não menos árdua, que a imagem do cone por tal operador possui diâmetro finito na métrica projetiva. Estes são os requisitos básicos para obter contração na métrica projetiva. De posse disto, devido a dualidade nos espaços das medidas de probabilidade, podemos através do operador de Ruelle-Perron-Frobenius herdar o decaimento exponencial de correlações e como consequência o teorema do limite central.

Reservamos ao último capítulo a extensão natural dos resultados a sistemas derivados de Anosov onde admitimos uma partição de Markov com propriedade mixing, porém com diâmetro não necessariamente indo a zero. Estabelecemos de forma precisa o contexto e provamos os principais resultados do terceiro capítulo. Mais ainda, construímos uma medida candidata a medida de máxima entropia com boas propriedades estatísticas.

1.2 Contexto

O objetivo principal deste trabalho é provar propriedades estatísticas da medida de máxima entropia, relativa a difeomorfismos parcialmente hiperbólicos semi-conjugados a aplicações $g : N \to N$ como em [CV13]. Tais aplicações são homeomorfismos locais de uma variedade riemanniana N, compacta e conexa, de grau maior que dois, de modo que dado qualquer $y \in N$ existe uma pré-imagem $x \in N$ onde localmente existe expansão global. Além disso, nas demais pré-imagens eventualmente pode existir contração em alguma direção, porém tal contração é limitada de modo que a dinâmica não contraia muito.

Mais precisamente, seja $g : N \to N$ um *homeomorfismo local* e assuma que existe uma função contínua $x \mapsto L(x)$ tal que, para todo $x \in N$ existe uma vizinhança U_x de x tal que $g_x : U_x \to g(U_x)$ é invertível e

$$d(g_x^{-1}(y), g_x^{-1}(z)) \leq L(x)\, d(y, z), \quad \forall y, z \in g(U_x). \tag{1.1}$$

Em particular todo ponto possui o mesmo número finito de pré-imagens $\deg(g)$ que coincide com o grau de g. Existem também constantes $0 < \lambda_u < 1$, $L \geq 1$ e uma região aberta $\Omega \subset N$ tais que

(H1) $L(x) \leq L$ para cada $x \in \Omega$ e $L(x) < \lambda_u$ para todo $x \notin \Omega$, com L próximo de 1.

(H2) Existe uma cobertura finita $\mathcal{U}$ de N por domínios abertos de injetividade para g, tais que Ω pode ser coberto por $q < \deg(g)$ elementos de $\mathcal{U}$.

A condição $(H1)$ diz que em $N \backslash \Omega$ existe expansão global e na região Ω pode haver contração em alguma direção pela aplicação g, em uma taxa máxima de $\dfrac{1}{L}$. A condição $(H2)$ garante que para todo ponto, ao menos uma pré-imagem deste, encontra-se na região de expansão.

Seja então $f : M \to M$ um difeomorfismo sobre sua imagem, onde M é uma variedade riemanniana compacta, tal que exista $\Pi : M \to N$ contínua, sobrejetiva e de modo que

$$\Pi \circ f = g \circ \Pi. \tag{P1}$$

Dado $y \in N$, seja $M_y = \Pi^{-1}(y)$. Podemos então escrever $M = \bigcup_{y \in N} M_y$. Observado que $f(M_y) \subset M_{g(y)}$, suponha ainda que f seja uma contração forte restrita a M_y, ou seja, existe $0 < \lambda_s < 1$, suficientemente pequeno, tal que para todo $y \in N$, $f : M_y \to M_{g(y)}$ é uma λ_s-contração, isto é,

$$d(f(z), f(w)) \leq \lambda_s d(z, w) \tag{P2}$$

para todo $z, w \in M_y$.

Nosso objeto de estudo é uma medida de máxima entropia que em particular é uma medida f-invariante, logo pelo teorema de recorrência de Poincaré tal medida é suportada no atrator

$$\Lambda := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(M).$$

Observe que Λ é compacto e invariante pela aplicação f. Portanto do ponto de vista de medidas f-invariantes, é suficiente estudar a dinâmica de f restrita a Λ.

Dados $x, y \in M$ denotando a projeção $\Pi(x)$ por $\hat{x}$ e a projeção $\Pi(y)$ por $\hat{y}$, exigiremos que $M_{\hat{x}} \cap \Lambda$ e $M_{\hat{y}} \cap \Lambda$ sejam homeomorfos e que a métrica de M seja equivalente a uma métrica produto. Mais precisamente, existe um homeomorfismo $\pi_{\hat{x},\hat{y}} : M_{\hat{x}} \cap \Lambda \to M_{\hat{y}} \cap \Lambda$ de modo que

$$\frac{1}{C}\left[d_N(\hat{x},\hat{y}) + d_M(\pi_{\hat{x},\hat{y}}(x), y)\right] \leq d_M(x,y) \leq C\left[d_N(\hat{x},\hat{y}) + d_M(\pi_{\hat{x},\hat{y}}(x), y)\right] \tag{P3}$$

para alguma constante $C > 0$. Onde d_M e d_N representam as métricas riemanniana de M e N, respectivamente. Por simplicidade representaremos ambas as métricas por d.

Além disso teremos como hipótese que tais homeomorfismos são invariantes, isto é,

$$f\left(\pi_{\hat{x},\hat{y}}(z)\right) = \pi_{g(\hat{x}),g(\hat{y})}\left(f(z)\right) \tag{P4}$$

para todo $z \in M_{\hat{x}} \cap \Lambda$.

Observação 1. *Um segundo objetivo deste trabalho é utilizar as técnicas aplicadas ao caso das dinâmicas semi-conjugadas a aplicações como em* [$CV13$] *e construir uma medida invariante para derivados de Anosov parcialmente hiperbólicos. Bem como, provar boas propriedades estatísticas para tal medida. O contexto específico para este caso será explicitado no capítulo* 4.

1.3 Exemplos

1. A mais simples família de exemplos sob nosso contexto corresponde a sistemas do tipo *skew-product*. Mais especificamente, tome um *skew-product* obtido de uma aplicação $g : N \to N$ como em [CV13] com N uma variedade riemanniana, compacta, conexa e um difeomorfismo local $\Phi : N \times K \to K$, tais que

$$\begin{aligned} f : \ & N \times K && \to N \times K \\ & (x, y) && \mapsto (g(x), \Phi(x, y)) \end{aligned}$$

seja um difeomorfismo sobre sua image, e para cada $x \in N$, $\Phi(x, \cdot) : K \to K$ seja uma λ_s-contração. Em tal caso, Π é a projeção canônica na primeira coordenada, e $N \times K = \bigcup_{x \in N} K_x$, onde $K_x = \{x\} \times K$ para todo $x \in N$.

2. Como um subexemplo, podemos considerar o solenóide gerado em um toro sólido $S^1 \times D$. Definimos f por

$$
\begin{aligned}
f : \quad S^1 \times D &\to S^1 \times D \\
(\theta, z) &\mapsto (g(\theta), \varphi(\theta) + A(z))
\end{aligned}
$$

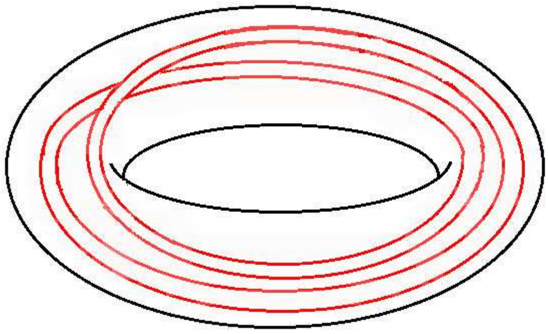

Figura 1.1: Solenóide

em que g é a aplicação de Manneville-Pomeau dada por

$$
g(\theta) = \begin{cases} \theta(1 + 2^\alpha \theta^\alpha) & , \text{ se } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \\ (\theta - 1)(1 + 2^\alpha (1 - \theta)^\alpha) + 1 & , \text{ se } \frac{1}{2} < \theta \leq 1 \end{cases}
$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, φ é um difeomorfismo local e A é uma contração.

3. Podemos modificar os exemplos acima de modo a obter classes C^2-robustas (contendo um conjunto aberto) de exemplos. Estes exemplos são ditos tipo Derivados de Solenóide (*Derived from Solenoid-like*).

   Para fixar ideias, trabalharemos em dimensão três, começando com um exemplo análogo ao do item anterior. Nossa construção é facilmente adaptável para dimensões mais altas.

   Seja então um sistema tipo solenóide no toro sólido tridimensional, isto é, um C^2-*skew-product* difeomorfismo hiperbólico $f_0 : S^1 \times D \to S^1 \times D$.

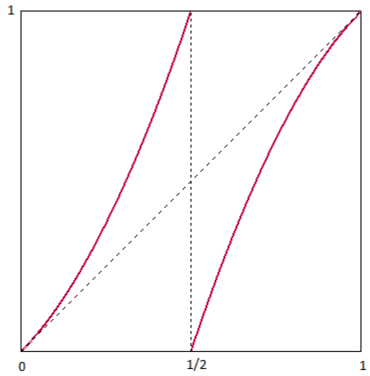

Figura 1.2: Manneville-Pomeau

Identifique S^1 com $S^1 \times \{0\}$, e considere Π_1 a projeção na primeira coordenada. Suponha então que $\Pi_1 \circ f_0|_{S^1} : S^1 \to S^1 \times \{y\}$ seja uma aplicação expansora (a qual não depende de $y \in D$), e que f_0 seja contrativo ao longo das folhas $\{x\} \times D$, $x \in S^1$. Ademais, suponha f_0 injetiva restrita a cada folha estável $\{x\} \times D$, e portanto f_0 seja um difeomorfismo sobre imagem.

Suponha que a norma de Df_0 ao longo do subfibrado estável e a norma de Df_0^{-1} ao longo do fibrado instável sejam limitadas por uma constante $\lambda_0 < 1/3$. Seja p um ponto fixo de f_0 e seja $\delta > 0$ pequeno. Denote $V_0 = B(p, \delta/2)$. Então, como em [Cas02], deformamos f_0^{-1} dentro de V_0 por uma isotopia obtendo uma família contínua de aplicações $f_t, 0 < t < 2$ de tal forma que

i) A continuação p_{f_t} do ponto fixo p vai através de uma bifurcação tipo flip, ou outra genérica, ocorrendo por todo o tempo, em V_0. Para $t = 1$, com f_1 conjugado a f_0. Supomos que a derivada $Df_1|_{E^{cs}}$ não expanda vetores.

ii) No processo, sempre há um campo-cone estável forte C^{ss} (cf. [Vi97] para definições) e um campo-cone centro-instável C^{cu}, definidos em toda parte, tal que C^{cu} contém a direção instável da aplicação inicial f_0.

iii) Finalmente, a abertura dos campos de cones C^{ss} e C^{cu} é acotada por uma pequena constante $\alpha > 0$.

iv) Existe uma constante $\sigma > 1$ e uma vizinhança $V_1 \subset V_0 \cap W^s(p)$, tal que $J^c = \|detDf_\nu^{-1}|_{E^{cu}}\| > \sigma$ fora de V_1;

v) As aplicações f_t^{-1} são $\delta - C^0$-próximas de f_0^{-1} fora de V_0 de modo que $\|(Df_1^{-1}|_{E^{cu}})\| < \lambda_0 < 1/3$ fora de V_0.

Note que as propriedades expressas nas condições i) a v), válidas para $f_t, 0 \leq \nu \leq 2$, são válidas também em uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ do conjunto de difeomorfismos

$\{f_t, 0 \leq t \leq 2\}$. Em particular, por [HPS77] as condições i) a iii) implicam que todo $f \in \mathcal{U}$ possui uma folheação central ivariante, já o campo de cones central nos permite definir uma transformação de gráfico a ele associado, com domínio no espaço de folheações tangentes a C^{cs}, o qual não é vazio, uma vez que a folheação instável de f_0 é tangente a este campo de cones. Por outro lado, toda $f \in \mathcal{U}$ também exibe uma folheação estável forte variando continuamente com o difeomorfismo.

Como uma consequência do lema 6.1 de [BoV99] existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ do conjunto $\{f_t, 1 < t \leq 2\}$ tal que para todo $f \in \mathcal{U}_1$, o maximal invariante de $S^1 \times D$ é um atrator parcialmente hiperbólico, que não é hiperbólico, por ser transitivo e conter pontos com diferentes índices.

Considerando condições C^2-robustas sobre as derivadas como em [HP70, HPS77], temos que as holonomias (projeções ao longo das folheações invariantes) podem ser tomadas de classe C^1.

Desse modo, podemos considerar para cada $f \in \mathcal{U}_1$ o círculo $N = N_f = {S^1}_f$ que passa por p_f (paralelo a primeira componente do produto $S^1 \times D$), e $g_f : N_f \to N_f$ a aplicação dada por $g(x) = \Pi_f f(x)$, onde $\Pi_f(y)$ é o único ponto da variedade estável forte $W_f^{ss}(y)$ de y que intersecta N_f. Como a folheação estável forte é f invariante, temos que

$$g(\Pi_f(x)) = \Pi_f f(x),$$

dando-nos a semiconjugação desejada.

Nesse exemplo, é fácil verificar, que g é não uniformemente expansora no círculo, com todo ponto possuindo um ramo inverso contrativo, sendo o outro não muito expansor, conforme as hipóteses em [CV13].

1.4 Definições e Principais Resultados

Considerando que a entropia topológica mede a taxa exponencial de crescimento do número de órbitas distintas da dinâmica, daremos ênfase à definição de entropia topológica segundo Bowen, usando a definição de conjuntos (n, ϵ)-separáveis. Para este fim relembramos que um conjunto compacto K contido num espaço métrico (X, d) é dito ser (n, ϵ)-separável se

$$\forall x, y \in K, x \neq y, \max\left\{d(f^j(x), d(f^j(y)); j = 0, \cdots, n-1\right\} > \epsilon$$

Denotaremos por $S(n, \epsilon, K)$ a máxima cardinalidade de um subconjunto (n, ϵ)-separável de K. Definiremos a entropia topológica de f relativa a um subconjunto compacto K de

X, não necessariamente invariante, por

$$h(f,K) = \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S(n,\epsilon,K).$$

E assim podemos definir a entropia topológica de uma aplicação uniformemente contínua $f : X \to X$, (X não necessariamente compacto) como sendo

$$h(f) = \sup\{h(f,K); K \text{ compacto }\}$$

Como no nosso contexto Λ é compacto, a continuidade de f é suficiente para a definição da entropia. Notemos também que a definição acima depende da métrica. Mas se X é compacto e f é contínua por [W93] temos que $h(f) = h(f,X)$ e não depende da métrica.

Abrimos mão da definição puramente topológica da entropia, que pode ser vista também em [W93], pois a definição acima será mais adequada para determinarmos a entropia de f. Mas precisamente, provaremos que a entropia de f é igual a entropia de g.

Agora, com o intuito de estabelecer nossos principais resultados daremos a definição de entropia segundo Shannon [S48], em 1948, nos seus estudos em teoria da informação. Tal definição, quantifica a complexidade da dinâmica relativa a uma medida, ou seja, estaremos interessados em estudar a taxa de crescimento exponencial de órbitas que são relevantes a uma determinada medida.

Iniciaremos definindo a entropia de uma partição relativa a uma medida. Dado um espaço de medida $(X,\mathcal{B},\mu)$ tal que $\mu \in \mathcal{M}_f^1(X)$, isto é, μ é uma medida de probabilidade f-invariante, definiremos a entropia de uma partição finita $\mathcal{P}$ de X por:

$$h_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P\in\mathcal{P}}\mu(P)\log\mu(P).$$

Tendo em mente que se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições de X, então $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q} := \{P\cap Q; P\in\mathcal{P}, Q\in\mathcal{Q}\}$ e $f^{-1}(\mathcal{P})$ são ainda partições de X, podemos definir

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_\mu(\mathcal{P}\vee f^{-1}(\mathcal{P})\vee\cdots\vee f^{n-1}(\mathcal{P})).$$

A entropia de f relativa a μ é dada por $h_\mu(f) := \sup\{h_\mu(f,\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ finita }\}$. O **princípio variacional** estabelece uma relação natural entre a entropia topológica e a entropia topológica relativa a uma medida. Precisamente ele nos diz que, se f é uma aplicação contínua e X é um espaço métrico compacto então

$$h(f) = \sup\left\{h_\mu(f); \mu\in\mathcal{M}_f^1(X)\right\}.$$

Dizemos então que uma medida de probabilidade f-invariante μ é uma medida de máxima entropia para f se

$$h(f) = h_\mu(f)$$

Estamos em condições agora de enunciar os principais resultados deste trabalho:

Teorema A. ***(Medida de Máxima Entropia)*** *Seja $f : \Lambda \to \Lambda$ um difeomorfismo satisfazendo (P1), (P2) e (P3). Então existe uma única medida μ de máxima entropia para f.*

Provaremos também propriedades estatísticas de tal medida. Mais precisamente provaremos que tal medida de máxima entropia possui decaimento exponencial de correlação para observáveis Hölder contínuos e satisfaz o teorema do limite central que é bastante relevante na mecânica estatística.

Dizemos que uma medida ν possui decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos, se existe alguma constante $0 < \tau < 1$ tal que para todo φ, ψ α-Hölder existe $K(\varphi, \psi) > 0$ satisfazendo

$$\left| \int (\varphi \circ f^n) \psi d\nu - \int \varphi d\nu \int \psi d\nu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Utilizando a teoria de cones e métricas projetivas provaremos o seguinte teorema:

Teorema B. ***(Decaimento Exponencial de Correlações)*** *A medida μ de máxima entropia para $f : \Lambda \to \Lambda$, satisfazendo (P1), (P2), (P3) e (P4), possui decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos.*

Vale ainda o teorema do limite central para a medida μ, isto é:

Teorema C. ***(Teorema do Limite Central)***

Seja μ de máxima entropia para $f : \Lambda \to \Lambda$, satisfazendo (P1), (P2), (P3) e (P4). Dada φ uma função Hölder contínua e

$$\sigma_\varphi^2 := \int \phi^2 d\mu + 2\sum_{j=1}^{\infty} \int \phi \cdot (\phi \circ f^j)\, d\mu, \qquad \textit{onde} \qquad \phi = \varphi - \int \varphi\, d\mu.$$

Então $\sigma_\varphi < \infty$ e $\sigma_\varphi = 0$ se, somente se, $\varphi = u \circ f - u$ para algum $u \in L^1(\mu)$. Mais ainda, se $\sigma_\varphi > 0$ então para todo intervalo $A \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\varphi(f^j(x)) - \int \varphi d\mu \right) \in A \right) = \frac{1}{\sigma_\varphi \sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{t^2}{2\sigma_\varphi^2}} dt.$$

Capítulo 2

Medida de Máxima Entropia

Provaremos neste capítulo a existência de uma única medida de máxima entropia para f, que será construída a partir do único estado de equilíbrio para g, associado aos potenciais constantes, que é garantido por Castro e Varandas em [CV13]. Além disso provaremos a estabilidade estatística do sistema.

2.1 Construção da Medida de Máxima Entropia

A ideia da construção da medida de máxima entropia é que, devido à contração de $f : M_y \to M_{g(y)}$, a dinâmica das órbitas distintas de $f : M \to M$ vai ser determinada pelo comportamento da aplicação $g : N \to N$. Tal aplicação possui, como visto em $[CV13]$, uma única medida de máxima entropia, a qual denotaremos por ν, que coincide com o único estado de equilíbrio para g associado aos potenciais constantes. Nada mais natural então definir uma medida em M a partir de conjuntos da forma $\Pi^{-1}(A)$ onde A é um mensurável da σ-álgebra de Borel em N.

Como Π é contínua, sobrejetiva e $\Pi \circ f = g \circ \Pi$, pode ser visto em [W93] que,

$$h(f) \geq h(g).$$

Mais ainda, devido a Bowen [Bow71] segue que

$$h(f) \leq h(g) + \sup\{h(f, \Pi^{-1}(y)); y \in N\}$$

Provaremos que $h(f, \Pi^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in N$. De fato, como $f : M_y \to M_{g(y)}$ é uma λ_s-contração, fixado $\epsilon > 0$, os únicos conjuntos (n, ϵ)-separáveis em bolas de diâmetro ϵ restritas a M_y são os conjuntos unitários. Assim, como $\Pi^{-1}(y)$ pode ser escrito como união de $m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ bolas de diâmetro ϵ, concluímos que a maior cardinalidade de um conjunto (n, ϵ)-separável em $\Pi^{-1}(y)$ é $m(\epsilon)$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $S(n, \epsilon, \Pi^{-1}(y)) \leq$

$m(\epsilon)$ e pela definição da entropia segue que $h(f, \Pi^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in N$. Logo $h(f) \leq h(g)$, garantindo que $h(f) = h(g)$.

Esta informação nos permitirá construir uma medida de máxima entropia para f a partir de uma medida de máxima entropia para g. De fato, sabemos por [CV13] que existe uma única medida de probabilidade g-invariante, a qual denotamos por ν, que realiza a máxima entropia de g. Pelo princípio variacional, como $h(f) = h(g)$, a medida ν possui entropia relativa a g, maior que a entropia relativa a f de qualquer outra medida de probabilidade que seja f-invariante. Assim, é suficiente obter uma medida de probabilidade f-invariante, que possua entropia relativa a f maior que a entropia de ν relativa a g.

Para tal, seja Π_Λ a restrição de Π ao conjunto Λ. Seja $\mathcal{A}_N$ a σ-álgebra de Borel de N. Claramente, $\mathcal{A}_0 := \Pi_\Lambda^{-1}(\mathcal{A}_N)$ é uma σ-álgebra em Λ. Os elementos de A em $\mathcal{A}_0$ são da forma $A = \Pi_\Lambda^{-1}(B)$ onde $B \in \mathcal{A}_N$. Como f é uma bijeção em Λ e $\Pi_\Lambda \circ f = g \circ \Pi_\Lambda$ temos que

$$A = \Pi_\Lambda^{-1}(B) = f \circ f^{-1} \circ \Pi_\Lambda^{-1}(B) = f \circ \Pi_\Lambda^{-1} \circ g^{-1}(B).$$

Sabemos que $g^{-1}(B)$ pertence a $\mathcal{A}_N$. Segue então que $\mathcal{A}_0 \subset f(\mathcal{A}_0)$ e assim $\mathcal{A}_n := f^n(\mathcal{A}_0)$ é uma sequência de σ-álgebras tais que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots$. Seja agora $\mu_n : \mathcal{A}_n \to [0,1]$ definida por:

$$\mu_n(f^n(A_0)) = \nu(\Pi_\Lambda(A_0))$$

para todo $A_0 \in \mathcal{A}_0$. Observemos que μ_n é f-invariante para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $A = f^n(A_0)$, onde $A_0 = \Pi_\Lambda^{-1}(B)$ e $B \in \mathcal{A}_N$, segue da g-invariância da ν e sobrejeção das aplicações g e Π_Λ, que:

$$\begin{aligned}
\mu_n(f^{-1}(A)) &= \mu_n(f^{-1}(f^n(A_0))) = \mu_n(f^n(f^{-1}(A_0))) \\
&= \nu(\Pi_\Lambda(f^{-1}(A_0))) = \nu(\Pi_\Lambda(f^{-1} \circ \Pi_\Lambda^{-1}(B))) \\
&= \nu(\Pi_\Lambda(\Pi_\Lambda^{-1} \circ g^{-1}(B))) = \nu(g^{-1}(B)) \\
&= \nu(B) = \nu(\Pi_\Lambda(A_0)) \\
&= \mu_n(f^n(A_0)) = \mu_n(A)
\end{aligned}$$

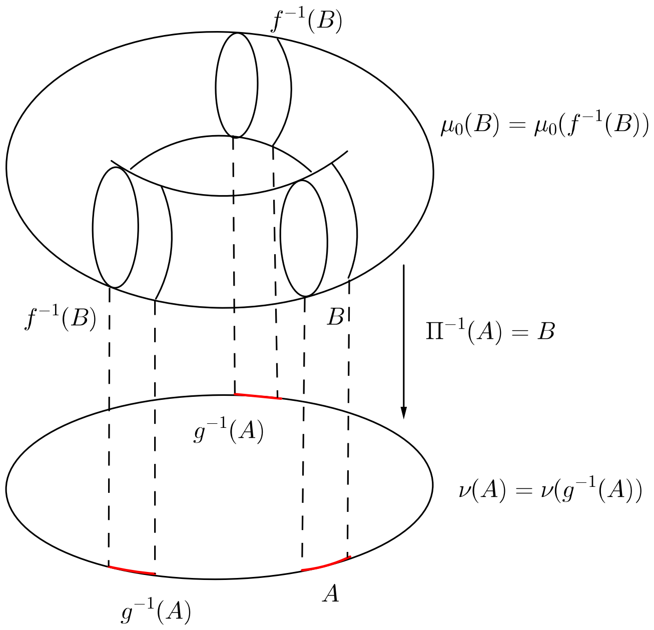

Figura 2.1: Invariância da Medida μ_0 no solenoide

Agora, como $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, temos que $\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ é uma álgebra em Λ.

Definiremos então $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que $\mu(A) = \mu_n(A)$ se $A \in \mathcal{A}_n$. Claramente μ está bem definida e além disso é finitamente aditiva visto que μ_n o são e $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Para provar que μ é σ-aditiva utilizaremos o seguinte critério, que pode ser visto em [Mane]:

Proposição 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ uma função tal que*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

para toda família $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de subconjuntos disjuntos de X em $\mathcal{A}$. Suponha que exista uma família $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tal que

- *$\mathcal{C}$ é uma classe compacta, isto é, se $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$ são elementos de $\mathcal{C}$ então $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.*
- *$\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade de aproximação, isto é, para todo $A \in \mathcal{A}$ temos $\mu(A) = \sup\{\mu(C); C \subset A, C \in \mathcal{C}\}$*

Então μ é uma medida.

$\square$

Seja então K_N a reunião de todos os compactos de N. Podemos definir uma subfamília $\mathcal{K}_0 := \Pi_\Lambda^{-1}(K_N)$ de $\mathcal{A}_0$ tal que $\mathcal{K}_\Lambda := \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathcal{K}_0)$ contida em $\mathcal{A}$ é uma classe compacta e satisfaz a propriedade de aproximação. Provemos estes fatos:

- Seja $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$ subconjuntos de K_Λ. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $D_i \in K_N$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $C_i = f^{n_i}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(D_i)\right)$. Como $\Pi_\Lambda^{-1}(D_i)$ é compacto, pois é fechado e está contido no compacto Λ, segue pela continuidade da f, que $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família de compactos encaixantes, em particular $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

- Dado agora, $A \in \mathcal{A}$ queremos provar que $\mu(A) = \sup\{\mu(C); C \subset A, C \in \mathcal{K}_\Lambda\}$. Sabemos que pela regularidade da medida ν, para todo $B \in \mathcal{A}_N$ temos $\nu(B) = \sup\{\nu(D); D \subset B, D \in \mathcal{K}_N\}$. Observemos que $C \in K_\Lambda$ se, somente se, existe $D \in K_N$ tal que $f^n(\Pi_\Lambda^{-1}(D)) = C$. Além disso

$$\mu(C) = \mu(f^n(\Pi_\Lambda^{-1}(D))) = \nu(\Pi_\Lambda \circ \Pi_\Lambda^{-1}(D)) = \nu(D),$$

portanto $\sup\{\nu(D); D \subset B, D \in \mathcal{K}_N\} = \sup\{\mu(C); C \subset A, C \in \mathcal{K}_\Lambda\}$. Como para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{A}_N$ tal que $\mu(A) = \nu(B)$ obtemos que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C); C \subset A, C \in \mathcal{K}_\Lambda\}.$$

Logo, pelo critério de aditividade dado acima, segue-se que μ é uma medida σ-aditiva. Mais ainda, μ é f-invariante, já que todas as μ_n são f-invariantes. Resta-nos então provar que a extensão de $\mathcal{A}$ coincide com a σ-álgebra de Borel. Para tal, como $\mathcal{A}$ está contida na σ-álgebra de Borel de Λ, pois Π_Λ é contínua, é suficiente notar que $\mathcal{A}$ contém uma sequência de partições cujo diâmetro vai a zero, pois $f : M_y \to M_{g(y)}$ é uma λ_s-contração.

Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela continuidade(uniforme) de g^n, dado λ_s^n existe $\delta(n) > 0$ tal que $d(z, w) < \delta(n)$ implica que $d(g^n(z), g^n(w)) < \lambda_s^n$, para todo $z, w \in N$. Seja então $\mathcal{P}_n^0$ uma sequência de partições em N formada por borelianos e cujo diâmetro da partição é menor que $\delta(n)$. Definiremos agora a sequência de partições

$$\mathcal{P}_n := f^n\left(\Pi_\Lambda^{-1}\left(\mathcal{P}_n^0\right)\right) \tag{2.1}$$

de Λ cujo diâmetro vai a zero. De fato, dados $\bar{x}, \bar{y} \in P_n$ onde $P_n = f^n\left(\Pi_\Lambda^{-1}\left(P_n^0\right)\right)$ para algum elemento $P_n^0 \in \mathcal{P}_n^0$, existem $x, y \in \Lambda$ tais que $\bar{x} = f^n(x)$ e $\bar{y} = f^n(y)$ com $\Pi(x), \Pi(y) \in P_n^0$. Assim, definindo $\hat{x} = \Pi(x), \hat{y} = \Pi(y), \tilde{x} = \Pi(\bar{x})$ e $\tilde{y} = \Pi(\bar{y})$ e observando que $g^n(\hat{x}) = g^n(\Pi(x)) = \Pi(f^n(x)) = \tilde{x}$ e $g^n(\hat{y}) = g^n(\Pi(y)) = \Pi(f^n(y)) = \tilde{y}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
d(f^n(x), f^n(y)) &\leq C\left[d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\pi_{\tilde{x},\tilde{y}} \circ f^n(x), f^n(y))\right] \\
&= C\left[d(g^n \circ \Pi(x), g^n \circ \Pi(y)) + d(f^n(\pi_{\hat{x},\hat{y}}(x)), f^n(y))\right] \\
&\leq C\left[\lambda_s^n + \lambda_s^n d(\pi_{\hat{x},\hat{y}}(x), y)\right] \\
&\leq C\left[1 + diam(M)\right] \lambda_s^n.
\end{aligned}$$

Com abuso de notação, denotaremos ainda por μ sua extensão à σ-álgebra de Borel. Sabemos que μ é também f-invariante.

Agora provaremos que a entropia de μ relativa a f é maior que a entropia de ν relativa a g. Para isto observamos que o estado de equilíbrio construído em $[VV10]$ é ergódico. Denotaremos por $B_\epsilon^n(g, y_0)$ a (n, ϵ)-bola dinâmica de g no ponto $y_0 \in N$, isto é, o conjunto de pontos $y \in N$, tais que $d(g^j(y), g^j(y_0)) < \epsilon, \forall j \in \{0, \cdots, n-1\}$. Segue então, por Brin-Katok, que existe $F \subset N$ de medida ν total, onde

$$h_\nu(g) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\nu\left(B_\epsilon^n(g, y)\right)}$$

para todo ponto $y \in F$.

Seja agora $B_\epsilon^n(f, x)$ a (n, ϵ)-bola dinâmica de f restrita a Λ no ponto $x \in \Lambda$, ou seja, os pontos $z \in \Lambda$ tais que $d(f^j(z), f^j(x)) < \epsilon, \forall j \in \{0, \cdots, n-1\}$. Pela continuidade(uniforme) de Π dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\Pi(B_\delta(w)) \subset B_\epsilon(\Pi(w))$ para todo $w \in M$. Observaremos então que $B_\delta^n(f, x) \subset \Pi_\Lambda^{-1}\left(B_\epsilon^n(g, y)\right)$ para todo $x \in \Pi_\Lambda^{-1}(y)$.

De fato, dado $z \in B_\delta^n(f, x)$ devemos provar que $\Pi(z) \in B_\epsilon^n(g, y)$. Como $\Pi(x) = y$ temos para todo $j \in \{0, \cdots, n-1\}$

$$d(g^j \circ \Pi(z), g^j(y)) = d(g^j \circ \Pi(z), g^j \circ \Pi(x)) = d(\Pi \circ f^j(z), \Pi \circ f^j(x)) < \epsilon.$$

Por esta razão

$$\mu\left(B_\delta^n(f, x)\right) \leq \mu\left(\Pi_\Lambda^{-1}\left(B_\epsilon^n(g, y)\right)\right) = \nu\left(B_\epsilon^n(g, y)\right)$$

e portanto como $\delta \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ temos que

$$h_\nu(g) \leq \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\mu\left(B_\delta^n(f, x)\right)}$$

para todo ponto $x \in \Pi_\Lambda^{-1}(F)$. Observe que $\mu(\Pi_\Lambda^{-1}(F)) = \nu(F) = 1$, assim

$$\begin{aligned} h_\mu(f) &= \int_\Lambda \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\mu\left(B_\delta^n(f,x)\right)} d\mu \\ &\geq \int_{\Pi_\Lambda^{-1}(F)} h_\nu(g) d\mu \\ &= h_\nu(g) \end{aligned}$$

e então concluímos que, $h_\mu(f) \geq h_\nu(g) = h(g) = h(f)$, ou seja, μ é uma medida de máxima entropia para f.

2.2 Unicidade da Medida de Máxima Entropia

Provaremos agora a unicidade da medida de máxima entropia para f construída na seção anterior. A prova baseia-se na unicidade da medida de máxima entropia de g. Suponha que μ_1 é também uma medida invariante de máxima entropia para f diferente de μ. Seja $\nu_1 := (\Pi_\Lambda)_* \mu_1$, o push-forward da medida μ_1. Como μ_1 é diferente de μ segue-se que ν_1 é diferente de ν. De fato, como μ_1 é diferente de μ, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu_1(A)$ é diferente de $\mu(A)$. Sabemos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup f(\mathcal{A}_0) \cup \cdots \cup f^n(\mathcal{A}_0) \cup \cdots$, assim existem $A_0 \in \mathcal{A}_0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(A_0) = A$. Pela definição de $\mathcal{A}_0$ existe $B_0 \in \mathcal{A}_N$ tal que $\Pi_\Lambda^{-1}(B_0) = A_0$. Observemos agora que

$$\nu_1(B_0) = (\Pi_\Lambda)_* \mu_1(B_0) = \mu_1(\Pi_\Lambda^{-1}(B_0)) = \mu_1(A_0) = \mu_1(f^n(A_0)) = \mu_1(A)$$

e por outro lado

$$\nu(B_0) = \nu(\Pi_\Lambda(A_0)) = \mu(A_0) = \mu(f^n(A_0)) = \mu(A)$$

e como consequência temos que ν_1 é diferente de ν. Pela f-invariância de μ_1 segue imediatamente que ν_1 é g-invariante.

Provaremos então que ν_1 é também uma medida de máxima entropia para g, o que é uma contradição. Para isto é suficiente provar que $h_{\nu_1}(g) \geq h_{\mu_1}(f)$, já que estamos supondo μ_1 uma medida de máxima entropia para f e sabemos que a entropia de f é igual a entropia de g.

Com efeito, podemos assumir que a sequência de partições $\mathcal{P}_n^0$ é obtida por refinamento. Então $\mathcal{P}_n = f^n\left(\Pi_\Lambda^{-1}\left(\mathcal{P}_n^0\right)\right)$, como em 2.1, é tal que $\mathcal{P}_0 \leq \mathcal{P}_1 \leq \cdots \leq \mathcal{P}_n \leq \cdots$ e como $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ gera a σ-álgebra de Borel temos

$$h_{\mu_1}(f) = \sup_n \left\{h_{\mu_1}(f, P_n)\right\}.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que

$$h_{\mu_1}(f, P_n) \geq h_{\mu_1}(f) - \epsilon.$$

Por outro lado, segue da definição de ν_1 que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$h_{\nu_1}(g, P_n^0) = h_{\mu_1}(f, \Pi_\Lambda^{-1}\left(P_n^0\right)).$$

De fato, para qualquer partição $\mathcal{P}$ a entropia de g relativa a medida ν_1 é dada por

$$h_{\nu_1}(g, \mathcal{P}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} h_{\nu_1}\left(\mathcal{P} \vee g^{-1}(\mathcal{P}) \vee \cdots \vee g^{-(m-1)}(\mathcal{P})\right)$$

pela definição de ν_1 e a semi-conjugação das dinâmicas f e g obtemos

$$\begin{aligned}
\nu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} g^{-j}(P_{i_j})\right) &= \mu_1\left(\Pi_\Lambda^{-1}\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} g^{-j}(P_{i_j})\right)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} \Pi_\Lambda^{-1}\left(g^{-j}(P_{i_j})\right)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{i_j})\right)\right)
\end{aligned}$$

o que nos garante que $h_{\nu_1}\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} g^{-j}(\mathcal{P})\right) = h_{\mu_1}\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(\mathcal{P})\right)\right)$ e consequentemente obtemos

$$h_{\nu_1}(g, \mathcal{P}) = h_{\mu_1}(f, \Pi_\Lambda^{-1}\left(\mathcal{P}\right))$$

e segue da f-invariância de μ_1 que

$$h_{\mu_1}(f, \Pi_\Lambda^{-1}\left(\mathcal{P}_n^0\right)) = h_{\mu_1}(f, \mathcal{P}_n)$$

pois $P_{n_j} \in \mathcal{P}_n$ se somente se existem $P_{n_j}^0 \in \mathcal{P}_n^0$ tais que $P_{n_j} = f^n(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{n_j}^0))$. Assim

$$\begin{aligned}
\mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}(P_{n_j})\right) &= \mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}\left(f^n\left(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{n_j}^0)\right)\right)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^n\left(f^{-j}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{n_j}^0)\right)\right)\right) \\
&= \mu_1\left(f^n\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{n_j}^0)\right)\right)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}\left(\Pi_\Lambda^{-1}(P_{n_j}^0)\right)\right).
\end{aligned}$$

Obtemos então que para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} h_{\nu_1}(g) &\geq h_{\nu_1}(g, P_n^0) \\ &= h_{\mu_1}\left(f, \Pi_\Lambda^{-1} P_n^0\right) \\ &= h_{\mu_1}(f, P_n) \\ &\geq h_{\mu_1}(f) - \epsilon \end{aligned}$$

provando que $h_{\nu_1}(g) \geq h_{\mu_1}(f)$. Logo μ é a uma única medida de máxima entropia para f.

2.3 Estabilidade Estatística

Provaremos agora a estabilidade estatística para a medida μ. Mais precisamente, provaremos que se $f_n \to f$ na topologia C^1, e $\Pi_n \to \Pi$ na topologia C^0 onde Π_n semi-conjuga as aplicações f_n e g_n(como em [CV13]) então $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca-$*$, onde μ_n (respectivamente μ) é maximizante da entropia para f_n (respectivamente f).

Para tal para f, considere a coleção $\mathcal{C}$ cujos elementos são abertos A no ambiente M cuja fronteira tem medida μ nula da forma $A = \cup_{x\in B} M_x$, com $B \subset N$ uma bola aberta de fronteira medida ν nula, e dos abertos iterados de tais abertos por f^j, $j \geq 0$. Observe que $f^k(\cup_{x\in N} M_x)$ é uma vizinhança dos atratores Λ_n onde as μ_n estão suportadas, para todo n suficientemente grande. Note que a coleção $\hat{\mathcal{C}}$ formada por $\mathcal{C}$ e as imagens por iterados positivos de f de seus elementos forma uma base de vizinhanças de Λ.

Primeiro mostremos o seguinte lema

Lema 1. *Seja $\hat{A} \in \hat{\mathcal{C}}$. Então $\mu_n(\hat{A}) \to \mu(\hat{A})$ quando $n \to +\infty$.*

Prova: Dado $\hat{A} = f^k(A)$, com $A = \cup_{x\in B} M_x$. Como $f^k(\cup_{x\in N} M_x)$ é uma vizinhança dos atratores Λ_n onde as μ_n estão suportadas, para todo n suficientemente grande, basta mostrar que $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

Seja então $A_n := \Pi_n^{-1}(B)$. Temos que $\mu_n(A_n) = \nu_n(B)$, onde ν_n é a medida de máxima entropia associada a g_n como em [CV13]. E sabemos também que $\mu(A) = \nu(B)$, onde ν é a medida de máxima entropia associada a g como em [CV13].

Dado $\epsilon > 0$, tome $B^+ \supset B \supset B^-$, com fronteira $\nu-$nula tais que

$$\nu(B^+) - \epsilon/3 < \nu(B) < \nu(B^-) + \epsilon/3,$$

Suponha ainda $A_n^\pm := \Pi_n^{-1}(B^\pm)$, com fronteira $\mu-$nula tais que existe n_2 onde, para todo $n \geq n_2$ temos $A_n^+ \supset A \supset A_n^-$ e

$$\mu(A_n^+) - \epsilon/3 < \mu(A) < \mu(A_n^-) + \epsilon/3,$$

Tais conjuntos são possíveis pela convergência C^0 das folheações de f_n a f.

Daí, por um lado, $\exists n_1 \geq n_2$ tal que

$$\mu(A) - \mu_n(A) \leq \mu(A) - \mu_n(A_n^-) = \nu(B) - \nu_n(B^-) \leq \frac{2\epsilon}{3},$$

para todo $n \geq n_1$, uma vez que $\nu_n(B^-) \to \nu(B^-)$ pela estabilidade estatística provada em [CV13].

Analogamente, provamos a outra desigualdade, implicando que existe $n_0 \geq n_1$ tal que

$$|\mu(A) - \mu_n(A)| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Isso finaliza a prova do lema. □

Estamos agora em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Dada φ contínua. Então* $\int_M \varphi d\mu_n \to \int_M \varphi d\mu$.

Prova: Este teorema está fundamentalmente provado em [Cas08]. Relembramos a prova para a completude do texto. Seja $\epsilon > 0$ dado, e $\delta > 0$ da continuidade uniforme de φ correspondente a $\epsilon/9$. Tome então uma cobertura $\cup_{j=1}^k C_j$, $C_j \in \hat{\mathcal{C}}$ de Λ, com diâmetro menor que $\delta/3$. Existe n_0 tal que tal cobertura também cobre Λ_n, $\forall n \geq n_0$. Em particular, $\mu_n(M \setminus \cup_{j=1}^k C_j) = 0$, $\forall n \geq n_0$.

Tome uma partição da unidade $\{\psi_j, j = 1, \ldots, k\}$ associada a $\cup_{j=1}^k C_j$.

Para cada C_j, tome $x_j \in C_j$ e escreva

$$\hat{\varphi} = \sum_{j=1}^k \varphi(x_j)\psi_j.$$

Daí, $\|\varphi - \hat{\varphi}\|_\infty < \epsilon/3$.

Tome então n_0 tal que

$$|(\mu_n - \mu)(C_j)| < \frac{\epsilon}{3k\|\varphi\|_\infty}.$$

Daí,

$$\left|\int_M \varphi d\mu_n - \int_M \varphi d\mu\right| \leq \left|\int_M \varphi d\mu_n - \int_M \hat{\varphi} d\mu_n\right| + \left|\int_M \hat{\varphi} d\mu_n - \int_M \hat{\varphi} d\mu\right| + \left|\int_M \varphi d\mu - \int_M \hat{\varphi} d\mu\right| \leq$$

$$\|\varphi - \hat{\varphi}\|_\infty + \sum_{j=1}^k \|\varphi\|_\infty |\mu_n(C_j) - \mu(C_j)| + \|\varphi - \hat{\varphi}\|_\infty < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

□

Capítulo 3

Propriedades Estatísticas

Neste capítulo, provamos boas propriedades estatísticas da medida de máxima entropia. Utilizamos aqui as técnicas de cones e métricas projetivas para obter contração num cone estritamente invariante pelo operador Ruelle-Perron-Frobenius, onde tal cone possui diâmetro finito em relação a métrica projetiva. Com isto, provamos o decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölderes e como consequência obtemos que também é válido o teorema do limite central.

3.1 Cones e Métricas Projetivas

Relembraremos aqui alguns resultados sobre a teoria de cones e métricas projetiva associados a operadores lineares. Mais precisamente apresentaremos o teorema de Birkhoff o qual garante a contração, na métrica projetiva, de operadores lineares restritos a cones invariantes. Enunciaremos aqui alguns resultados sobre a teoria, cuja prova pode ser visto em [Li95, Bal00, Vi97].

Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $C \subset E \backslash \{0\}$ é um cone se

$$t > 0 \text{ e } v \in C \Rightarrow t \cdot v \in C.$$

Um cone é dito convexo se

$$t_1, t_2 > 0 \text{ e } v_1, v_2 \in C \Rightarrow t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 \in C,$$

tal condição permite combinar quaisquer direção do cone.

Mesmo na ausência de uma topologia, definiremos o fecho $\overline{C}$ de C, como sendo o conjunto dos pontos $w \in E$ tais que existem $v \in C$ e uma sequência de elementos positivos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tendendo a zero, tais que $w + t_n \cdot v \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da definição de fecho que $0 \in \overline{C}$ qualquer que seja o cone $C \subset E$. Além disso estamos interessados em eliminar cones degenerados, como por exemplo, semi-planos. Para tal exigiremos que

$$\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}.$$

Denominaremos os cones convexos com a propriedade acima de **cones projetivos**. Passaremos agora a definir a métrica projetiva associada ao cone projetivo C. Sejam

$$\alpha(v, w) = \sup \{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$$

e

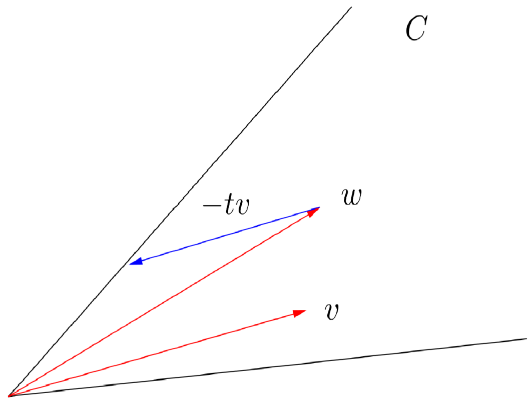

Figura 3.1: Métrica Projetiva - Função α

$$\beta(v, w) = \inf \{s > 0; s \cdot v - w \in C\}.$$

Observe que $\{t > 0; w - t \cdot v \in C\}$ e $\{s > 0; s \cdot v - w \in C\}$ podem ser vazios. Assim, por

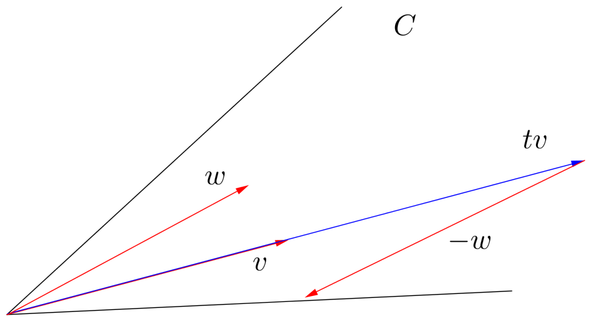

Figura 3.2: Métrica Projetiva- Função β

se tratar de valores positivos, convencionaremos que $\sup \emptyset = 0$ e naturalmente $\inf \emptyset = +\infty$. Definiremos agora

$$\theta(v, w) = \log \frac{\beta(v, w)}{\alpha(v, w)}.$$

Convencionando que $\theta = +\infty$ se $\alpha = 0$ ou $\beta = +\infty$ e observando que $\alpha(v,w) \leq \beta(v,w)$, segue que $\theta(v,w)$ toma valores em $[0,+\infty]$. A próxima proposição estabelece que θ é uma métrica no espaço quociente $C/\sim$, onde $v \sim w$ se, somente se, existe $t > 0$ tal que $v = t \cdot w$.

Proposição 2. *Seja C um cone projetivo. Então $\theta(\cdot,\cdot) : \overline{C} \times \overline{C} \to [0,+\infty]$ é uma métrica em $C/\sim$, isto é,*

- $\theta(v,w) = \theta(w,v)$.
- $\theta(u,w) \leq \theta(u,v) + \theta(v,w)$.
- $\theta(v,w) = 0$ *se somente se existe $t > 0$ tal que $v = t \cdot w$*

A métrica θ é denominada métrica projetiva associada ao cone C. A dependência do cone é dada de forma monótona, isto é, dados dois cones C_1 e C_2 projetivos, tais que $C_1 \subset C_2$, denotando por $\theta_1 = \log \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ e $\theta_2 = \log \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$ suas respectivas métricas projetivas, temos que $\theta_1 \geq \theta_2$. Com efeito, como $\{t > 0; w - t \cdot v \in C_1\} \subset \{t > 0; w - t \cdot v \in C_2\}$ e $\{s > 0; s \cdot v - w \in C_1\} \subset \{s > 0; s \cdot v - w \in C\}$ segue-se que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\beta_1 \geq \beta_2$. Logo, $\theta_1 \geq \theta_2$.

Uma observação sobre a métrica projetiva é que vetores na fronteira do cone $\partial C := \overline{C} \setminus C$, possuem distância infinita para qualquer outro vetor no cone. Com efeito, se $w \in \partial C$ então $w \notin C$. Dados $v \in C$ e $t > 0$ tais que $w - tv \in C$, obtemos que $w = w - tv + tv \in C$. O que é uma contradição. Logo $\alpha(v,w) = \sup \emptyset = 0$ e assim $\theta(v,w) = +\infty$.

Outro fato interessante associado a métricas projetivas, é que dados E_1 e E_2 espaços vetoriais, $L : E_1 \to E_2$ operador linear e C_1, C_2 cones projetivos tais que $L(C_1) \subset C_2$, temos que L é uma contração fraca restrito a C_1, mais precisamente,

$$\theta_2(L(v), L(w)) \leq \theta_1(v,w), \text{ para todos } v, w \in C_1$$

Porém, podemos obter uma contração forte sobre a hipótese de que o θ_2-diâmetro de $L(C_1)$ é finito. Este resultado é devido a Birkhoff, que pode ser encontrado, por exemplo, em [Vi97, Proposição 2.3].

Teorema 2. *Sejam E_1 e E_2 espaços vetoriais e sejam $C_1 \subset E_1$ e $C_2 \subset E_2$ cones projetivos. Se $L : E_1 \to E_2$ é um operador linear tal que $L(C_1) \subset C_2$ e*

$$D = \sup \{\theta_2(L(v), L(w)); v, w \in C_1\} < \infty$$

então

$$\theta_2(L(v), L(w)) \leq \left(1 - e^{-D}\right) \theta_1(v,w),$$

para quaisquer $v, w \in C_1$.

Uma boa aplicação do teorema anterior é que ele nos permite provar a existência de um único ponto fixo para L, através da convergência de sequências no cone projetivo. Em particular, é sabido na teoria do formalismo termodinâmico, que se L é o operador transferência, o qual definiremos na próxima seção, obtendo medidas conformes (auto medidas do dual do operador transferência) podemos a partir destas obter bons candidatos a medida de máxima entropia.

3.2 Operador Ruelle-Perron-Frobenius e Cones Invariantes

Relembramos que o objetivo principal deste trabalho é deduzir boas propriedades estatísticas da medida de máxima entropia associada a dinâmica f. A técnica aqui presente é utilizar o operador Ruelle-Perron-Frobenius(por simplicidade denominado operador transferência) para obter a partir da dualidade com o operador de Koopman, $U(\varphi) = \varphi \circ f$, o decaimento exponencial de correlações e em consequência o teorema do limite central.

Porém, tal técnica permite também provar o decaimento exponencial de correlações e em consequência o teorema do limite central para estados de equilíbrio de modo geral, não só particularmente para medidas de máxima entropia. Lembramos que dada uma dinâmica $f : \Lambda \to \Lambda$, fixado um potencial $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$, dizemos que uma medida η é um estado de equilíbrio para f com respeito a ϕ se

$$h_\eta(f) + \int \phi d\eta = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \phi d\mu ; \mu \text{ é uma medida } f\text{-invariante} \right\}.$$

Ou seja, pelo princípio variacional, η realiza a pressão topológica $P(f, \phi)$. O leitor pode observar facilmente que, no caso em que o potencial ϕ é constante, obter um estado de equilíbrio é equivalente a obter uma medida de máxima entropia. O que faremos aqui é obter alguns resultados, mas não todos, para potenciais mais gerais que potenciais constantes, a saber, potenciais de baixa variação, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\sup \phi - \inf \phi < \varepsilon$. Além disso tais potenciais devem pertencer ao seguinte cone:

$$\left| e^\phi \right|_\alpha \leq \varepsilon \inf e^\phi \tag{3.1}$$

onde $\left| e^\phi \right|_\alpha = \inf \left\{ C > 0; |e^\phi(x) - e^\phi(y)| \leq C d(x, y)^\alpha, \forall x, y \in \Lambda \right\}$. Seja então E o espaço das funções contínuas $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$. Definiremos o operador Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L} : E \to E$ dado por

$$\mathcal{L}(\varphi)(y) = \varphi(f^{-1}(y)) e^{\phi(f^{-1}(y))}$$

onde ϕ satisfaz as condições acima.

Nossa inspiração encontra-se no trabalho desenvolvido por Castro e Varandas em [CV13], onde os mesmos provaram, entre outros resultados, propriedades estatísticas para o único estado de equilíbrio desenvolvido inicialmente por Varandas e Viana em [VV10], com a hipótese da dinâmica ser topologicamente exata, relembrado também que em [CV13] os autores deram outra prova da existência e unicidade de estado de equilíbrio eliminando tal hipótese. No contexto não uniformemente expansor, Castro e Varandas definiram cones apropriados ao operador Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}$, no sentido que foi possível provar a sua invariância e diâmetro finito da imagem destes cones por $\mathcal{L}$.

Mais precisamente, eles definiram um cone de funções positivas e Hölder contínuas φ tais que $|\varphi|_\alpha \leq \kappa \inf \varphi$. Em nosso contexto os pontos em $\Pi^{-1}(y)$ são contraídos exponencialmente. Sabendo que o operador $\mathcal{L}$, no caso da entropia($\phi = 0$), nada mais é do que avaliar o observável φ na pré-imagem dos pontos(no passado), ou seja, calcular $\varphi(f^{-1}(x))$, então a constante de Hölder de $\mathcal{L}(\varphi)$, mesmo para φ como em [CV13], não teria muitas chances de melhorar sua regularidade, pois para z e w restritos as folhas estáveis $d(z, w) \leq \lambda_s d(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$, o que compromete a invariância estrita do cone como em [CV13] pelo operador transferência.

Gostaríamos então de evitar este efeito indesejável nas direções onde certamente existe contração, ou seja, em $\Pi^{-1}(y)$. Para tal, analisaremos a ação de $\mathcal{L}$ em médias calculadas em folhas estáveis, entendendo aqui uma folha estável como um subconjunto de Λ da forma $\Pi_\Lambda^{-1}(y)$ onde $y \in N$ e Π_Λ é a restrição de $\Pi : M \to N$ ao atrator Λ. Denotaremos tais folhas por γ e a união destas folhas por $\mathcal{F}^s$. Observe que $\mathcal{F}^s$ particiona Λ em folhas γ. Salientemos também que devido ao comportamento intrínseco do operador Ruelle-Perron-Frobenius, nada mais natural que tal média nas folhas estáveis seja dada pela integral das funções testes nas mesmas, relativa a uma medida de probabilidade adequadamente escolhida em cada folha .

Fixado $y \in N$, sejam y_j tais que $g(y_j) = y$, onde $j \in \{1, \cdots, deg(g)\}$. Sendo $\gamma = \Pi_\Lambda^{-1}(y)$ e $\gamma_j = \Pi_\Lambda^{-1}(y_j)$, segue-se que $f(\gamma_j) \subset \gamma$, pois se $z = f(x)$ onde $x \in \gamma_j$ então $\Pi(z) = \Pi \circ f(x) = g \circ \Pi(x) = g(y_j) = y$.

Como desejamos provar o decaimento exponencial de correlações para a medida de máxima entropia construída, necessitamos comparar a integral de funções testes em folhas estáveis variando as densidades de integração. Isto induz naturalmente um operador linear definido em cones auxiliares nas folhas γ e γ_j. Denotaremos tal cone por $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ e chamaremos de cone auxiliar de densidades Hölder continuas. Mais precisamente diremos que $\rho : \gamma \to \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ se somente se $\rho > 0$ e $|\rho|_\alpha < \kappa \inf \rho$, onde $|\rho|_\alpha = \inf \{C > 0; |\rho(x) - \rho(y)| \leq C d(x, y)^\alpha, \forall x, y \in \gamma\}$.

As funções no cone $\mathcal{D}(\gamma,\kappa)$ possuem uma importante cota para o supremo a partir do infimo, mais precisamente se $\rho\in\mathcal{D}(\gamma,\kappa)$ então $\sup\rho\le\inf\rho\,(1+\kappa\cdot diamM^{\alpha})$. De fato, para todo $\delta>0$ existem $x_0,y_0\in\gamma$ tais que $\sup\rho-\delta<\rho(x_0)$ e $\rho(y_0)<\inf\rho+\delta$. Da hipótese $|\rho|_\alpha<\kappa\inf\rho$ obtemos que $|\rho(x_0)-\rho(y_0)|<\kappa d(x_0,y_0)^\alpha\inf\rho$, logo

$$\sup\rho-\inf\rho<\rho(x_0)+\delta-\rho(y_0)+\delta<\kappa d(x_0,y_0)^\alpha\inf\rho+2\delta$$

como δ é arbitrário concluímos que $\sup\rho\le\inf\rho\,(1+\kappa\cdot diamM^{\alpha})$.

Seja $\mathbf{p}$ o grau da aplicação g. Provaremos agora que existe uma família de medidas $\{\mu_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{F}^s}$ em Λ, tais que para todo $\hat{\gamma}$, onde $f^n(\hat{\gamma})\subset\gamma$, temos $\mu_\gamma(f^n(\hat{\gamma}))=\dfrac{1}{p^n}$, em particular $\mu_\gamma(\gamma)=1$. Além disso, para toda γ_j, com $f(\gamma_j)\subset\gamma$ obtemos a seguinte relação

$$\int_{f(\gamma_j)}\psi d\mu_\gamma=\frac{1}{p}\int_{\gamma_j}\psi\circ f d\mu_{\gamma_j}.$$

Com efeito, fixado $\gamma=\Pi_\Lambda^{-1}(y)$, para todo $n\in\mathbb{N}$, maior que zero, definindo $\gamma_j=\Pi_\Lambda^{-1}(y_j)$, onde $y_j\in g^{-n}(y)$, podemos escrever $\gamma=\dot{\bigcup}_{j=1}^{p^n}f^n(\gamma_j)$, pois cada f^n é uma bijeção em Λ e $\Pi\circ f^n=g^n\circ\Pi$. Portanto, $\{f^n(\gamma_j)\}_{j=1}^{p^n}$ é uma sequência de partições de γ. Como $\gamma_j=\Pi_\Lambda^{-1}(y_j)$ e $f^n:M_{y_j}\to M_{g^n(y_j)}$ é uma λ_s^n-contração segue-se que o diâmetro de $\{f^n(\gamma_j)\}_{j=1}^{p^n}$ tende a zero. Basta definir então μ_γ nos elementos desta partição por distribuição de massa

$$\mu_\gamma(f^n(\gamma_j))=\frac{1}{p^n}$$

e em seguida, por restrição à folha γ, estendemos naturalmente μ_γ a um elemento A da $\sigma-$álgebra de Borel de Λ.

Agora definindo $\gamma_j=\Pi_\Lambda^{-1}(x_j)$, onde $x_j\in g^{-1}(x)$ podemos escrever

$$\mu_\gamma(A)=\mu_\gamma(A\cap\gamma)=\mu_\gamma\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{p}f(\gamma_j)\right)=\mu_\gamma\left(\bigcup_{j=1}^{p}(A\cap f(\gamma_j))\right)=\sum_{j=1}^{p}\mu_\gamma(A\cap f(\gamma_j))$$

Definindo $\mu_{\gamma_j}(A):=p\cdot\mu_\gamma(f(A\cap\gamma_j))$ obtemos que $\mu_\gamma(A\cap f(\gamma_j))=\dfrac{1}{p}\mu_{\gamma_j}(f^{-1}(A))$ e assim

$$\mu_\gamma(A)=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\mu_{\gamma_j}(f^{-1}(A)).$$

Concluímos também que para todo A mensurável, a função característica χ_A satisfaz

$$\int_{f(\gamma_j)}\chi_A d\mu_\gamma=\frac{1}{p}\int_{\gamma_j}\chi_A\circ f d\mu_{\gamma_j}$$

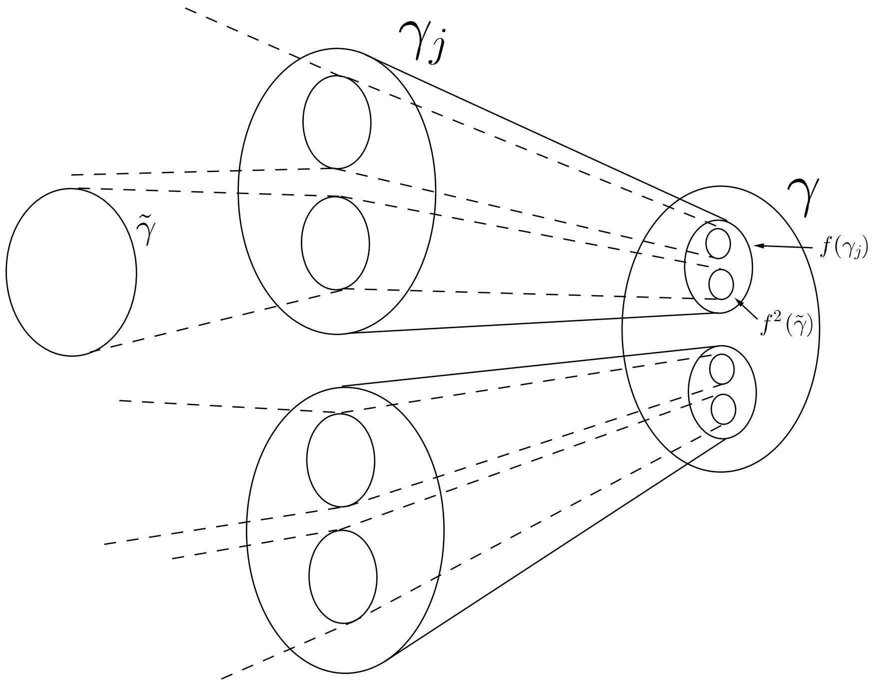

Figura 3.3: Distribuiçao de Massa

e pelo teorema da convergência dominada, segue que para toda $g : \Lambda \to \mathbb{R}$ contínua que

$$\int_{f(\gamma_j)} g d\mu_\gamma = \frac{1}{p} \int_{\gamma_j} g \circ f d\mu_{\gamma_j}. \tag{3.2}$$

Observe ainda que como para todo $\hat{\gamma}$, onde $f^n(\hat{\gamma}) \subset \gamma$, temos $\mu_\gamma(f^n(\hat{\gamma})) = \dfrac{1}{p^n}$, segue que para todo $\widetilde{\gamma}$, onde $f^n(\widetilde{\gamma}) \subset \gamma_j$ e $f(\gamma_j) \subset \gamma$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_{\gamma_j}(f^n(\widetilde{\gamma})) &= p\mu_\gamma(f(f^n(\widetilde{\gamma}) \cap \gamma_j)) \\ &= p\mu_\gamma(f^{n+1}(\widetilde{\gamma})) \\ &= \frac{p}{p^{n+1}} = \frac{1}{p^n}. \end{aligned}$$

Ou seja, μ_{γ_j} é também uma distribuição de massa em γ_j.

Mais ainda, visto que para cada $y \in N$ existem y_j, tais que $g(y_j) = y$, onde $j \in \{1, \cdots, p\}$. Podemos definir, $\gamma = \Pi_\Lambda^{-1}(y)$ e $\gamma_j = \Pi_\Lambda^{-1}(y_j)$, onde $f(\gamma_j) \subset \gamma$, e assim $\gamma = \dot{\bigcup}_{j=1}^{p} f(\gamma_j)$. Portanto para toda $\psi : \gamma \to \mathbb{R}$ segue que

$$\int_\gamma \psi d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{f(\gamma_j)} \psi d\mu_\gamma.$$

Concluímos então, para todo $\rho : \gamma \to \mathbb{R}$, que

$$\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{f(\gamma_j)} \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{p} \int_{\gamma_j} \mathcal{L}(\varphi) \circ f \cdot \rho \circ f d\mu_{\gamma_j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{p} \int_{\gamma_j} \varphi \cdot e^\phi \cdot \rho \circ f d\mu_{\gamma_j}$$

definindo $\rho_j := \frac{1}{p}\rho \circ f e^{\phi}$ podemos escrever

$$\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} \varphi \rho_j d\mu_{\gamma_j}$$

Observemos que ρ_j está definido em γ_j. É importante verificar se ρ_j pertence a algum cone, desde que ρ pertença ao cone $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$. Mais ainda, determinar a relação entre estas densidades no que diz respeito a métrica projetiva associada a estes cones. O lema abaixo responde a estas questões.

Lema 2. *Existem $0 < \lambda < 1$ e $\kappa > 0$, suficientemente pequenos, tais que valem os seguintes items:*

1. *Se $\rho \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ então $\rho_j \in \mathcal{D}(\gamma_j, \lambda\kappa)$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.*
2. *Para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ se $\rho, \hat{\rho} \in \mathcal{D}(\gamma, \lambda\kappa)$ então $\theta(\rho, \hat{\rho}) \leq 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$.*
3. *Se $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ então existe $\Lambda_1 = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ tal que $\theta_j(\rho'_j, \rho''_j) \leq \Lambda_1 \theta(\rho', \rho'')$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$;*

onde θ_j e θ são, respectivamente, as métricas projetiva associadas aos cones $\mathcal{D}(\gamma_j, \kappa)$ e $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$.

Prova:

Procederemos agora a prova de (1). Em nosso contexto estamos supondo que

$\sup\phi - \inf\phi < \varepsilon$ and $\left|e^{\phi}\right|_{\alpha} < \varepsilon \inf e^{\phi}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{|\rho_j|_\alpha}{\inf\{\rho_j\}} &= \frac{\left|\frac{1}{p}\rho\circ f\cdot e^{\phi}\right|_\alpha}{\inf\left\{\frac{1}{p}\rho\circ f\cdot e^{\phi}\right\}} \\
&= \frac{|\rho\circ f\cdot e^{\phi}|_\alpha}{\inf\{\rho\circ f\cdot e^{\phi}\}} \\
&\leq \frac{|\rho\circ f|_\alpha\cdot e^{\sup\phi}+\sup\{\rho\circ f\}\cdot|e^{\phi}|_\alpha}{\inf\rho\cdot e^{\inf\phi}} \\
&\leq \frac{|\rho\circ f|_\alpha\cdot e^{\sup\phi}}{\inf\rho\cdot e^{\inf\phi}}+\frac{\sup\{\rho\circ f\}\cdot|e^{\phi}|_\alpha}{\inf\rho\cdot e^{\inf\phi}} \\
&\leq \frac{\lambda_s^\alpha\kappa\inf\rho\cdot e^{\sup\phi}}{\inf\rho\cdot e^{\inf\phi}}+\frac{(1+\kappa\cdot diamM^\alpha)\inf\rho\cdot|e^{\phi}|_\alpha}{\inf\rho\cdot e^{\inf\phi}} \\
&\leq \lambda_s^\alpha\kappa e^{\varepsilon}+(1+\kappa\cdot diamM^\alpha)\varepsilon \\
&= (\lambda_s^\alpha e^{\varepsilon}+diamM^\alpha\epsilon)\kappa+\varepsilon
\end{aligned}$$

Para garantir a existência de $0<\lambda<1$ tal que

$$(\lambda_s^\alpha e^{\varepsilon}+diamM^\alpha\varepsilon)\kappa+\varepsilon<\lambda\kappa$$

é suficiente obter

$$\frac{(\lambda_s^\alpha e^{\varepsilon}+diamM^\alpha\varepsilon)\kappa+\varepsilon}{\kappa}<\lambda<1$$

para isto devemos ter

$$\frac{(\lambda_s^\alpha e^{\varepsilon}+diamM^\alpha\varepsilon)\kappa+\varepsilon}{\kappa}<1$$

ou, equivalentemente,

$$\kappa>\frac{\varepsilon}{1-(\lambda_s^\alpha e^{\varepsilon}+diamM^\alpha\varepsilon)}. \tag{3.3}$$

Note que λ e κ podem ser escolhidos suficientemente pequenos, visto que $\varepsilon>0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, assim como $0<\lambda_s<1$. Isto finaliza a prova de (1).

Para provar (2), observemos que pela desigualdade triangular é suficiente encontrar uma limitação para $\theta(1,\rho)$ onde $\rho\in\mathcal{D}(\gamma,\lambda\kappa)$. Sabemos que $\rho\in\mathcal{D}(\gamma,\lambda\kappa)$ significa que ρ é positivo e que $|\rho|_\alpha<\lambda\kappa\inf\rho$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\inf\rho=1$. Assim para $t=1-\lambda$ temos

$$\frac{|\rho-t|_\alpha}{\inf(\rho-t)}=\frac{|\rho|_\alpha}{\inf\rho-t}<\frac{\lambda\kappa}{1-t}=\frac{\lambda\kappa}{\lambda}=\kappa$$

como $\inf \rho = 1$ segue que $\rho - t \geq \inf \rho - (1-\lambda) = \lambda > 0$ o que nos garante $\alpha(1,\rho) \geq 1-\lambda$. Por outro lado, tomando $s = 1+\lambda$

$$\frac{|s-\rho|_\alpha}{\inf(s-\rho)} = \frac{|\rho|_\alpha}{s - \inf\rho} < \frac{\lambda\kappa}{s-1} = \frac{\lambda\kappa}{\lambda} = \kappa.$$

Como $\sup\rho \leq \inf\rho\,(1+\kappa diam M^\alpha) = 1+\kappa diam M^\alpha$ escolhendo κ tal que $\lambda > \kappa diam M^\alpha$, segue que $s-\rho = 1+\lambda-\rho \geq 1+\lambda-\sup\rho \geq 1+\lambda-(1+\kappa diam M^\alpha) > 0$ portanto $\beta(1,\rho) \leq 1+\lambda$. Logo $\theta(\rho,\hat{\rho}) \leq 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$.

Finalmente, para provar (3) é suficiente notar que pelo item (1) temos que $\rho_j \in \mathcal{D}(\gamma_j, \lambda\kappa)$ para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$ e pelo item (2) o diâmetro de $\mathcal{D}(\gamma_j,\lambda\kappa)$ em $\mathcal{D}(\gamma_j,\kappa)$ é no máximo $2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$. Assim, pelo teorema 2, considerando $\Delta = 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$ e aplicação linear

$$\rho \mapsto \frac{1}{p}\rho\circ f e^{\phi}$$

temos $\theta_j(\rho'_j, \rho''_j) \leq \Lambda_1 \theta(\rho', \rho'')$ onde

$$\Lambda_1 = 1 - e^{-\Delta} = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$$

□

Precisaremos agora de uma noção de distância entre duas folhas γ e $\widetilde{\gamma}$ em $\mathcal{F}^s$. Para tal, dados $x, y \in N$ sejam $\gamma = \Pi_\Lambda^{-1}(x)$ e $\widetilde{\gamma} = \Pi_\Lambda^{-1}(y)$. Suponha que $\pi = \pi_{x,y} : \widetilde{\gamma} \to \gamma$ satisfaz

$$\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma = \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi\circ\pi d\mu_{\widetilde{\gamma}}$$

para toda φ contínua e defina a distância $d(\gamma,\widetilde{\gamma}) = \sup\{d(\pi(p),p); p \in \widetilde{\gamma}\}$.

Estamos agora em condições de definir nosso cone principal. Denotaremos por $\mathcal{D}_1(\gamma)$ o conjunto das densidades $\rho \in \mathcal{D}(\gamma,\kappa)$ tais que $\int_\gamma \rho d\mu_\gamma = 1$. Dados $b>0$, $c>0$ e κ como no lema 2, seja $C(b,c,\alpha)$ o cone de funções $\varphi \in E$ satisfazendo para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s$ as condições abaixo:

(A) Para todo $\rho \in \mathcal{D}(\gamma,\kappa)$:

$$\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma > 0$$

(B) Para todo $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$:

$$\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right| < b\theta(\rho',\rho'') \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma\right\}$$

(C) Dada qualquer folha estável $\widetilde{\gamma}$ suficientemente próxima de γ:

$$\left|\int_{\gamma}\varphi d\mu_{\gamma}-\int_{\widetilde{\gamma}}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}}\right|<cd(\gamma,\widetilde{\gamma})^{\alpha}\inf_{\gamma}\left\{\int_{\gamma}\varphi d\mu_{\gamma}\right\}$$

Nosso primeiro passo é mostrar que nosso cone principal possui as condições necessárias para obtermos uma métrica projetiva associada ao mesmo. Provaremos então o seguinte lema:

Lema 3. *$C(b,c,\alpha)$ é um cone projetivo, isto é, convexo e $\overline{C(b,c,\alpha)}\cap-\overline{C(b,c,\alpha)}=0$.*

Prova: Provemos inicialmente a convexidade de $C(b,c,\alpha)$. Dados $\varphi,\psi\in C(b,c,\alpha)$ e $s,t>0$ temos

(A) $\displaystyle\int_{\gamma}(s\varphi+t\psi)d\mu_{\gamma}=s\int_{\gamma}\varphi d\mu_{\gamma}+t\int_{\gamma}\psi d\mu_{\gamma}>0.$

(B) Por hipótese $\dfrac{\left|\int_{\gamma}\varphi\rho' d\mu_{\gamma}-\int_{\gamma}\varphi\rho'' d\mu_{\gamma}\right|}{\theta(\rho',\rho'')\inf\limits_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}\right\}}<b$ e $\dfrac{\left|\int_{\gamma}\psi\rho' d\mu_{\gamma}-\int_{\gamma}\psi\rho'' d\mu_{\gamma}\right|}{\theta(\rho',\rho'')\inf\limits_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}\psi\rho d\mu_{\gamma}\right\}}<b.$

Por propriedades do ínfimo segue que

$$\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}(s\varphi+t\psi)\,\rho d\mu_{\gamma}\right\}\geq s\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}\right\}+t\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}\psi\rho d\mu_{\gamma}\right\}.$$

Portanto, $\dfrac{\left|\int_{\gamma}(s\varphi+t\psi)\rho' d\mu_{\gamma}-\int_{\gamma}(s\varphi+t\psi)\rho'' d\mu_{\gamma}\right|}{\theta(\rho',\rho'')\inf\limits_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}(s\varphi+t\psi)\,\rho d\mu_{\gamma}\right\}}<b.$

(C) Análogo ao item (B).

Resta então provar que $\overline{C(b,c,\alpha)}\cap-\overline{C(b,c,\alpha)}=0$. Suponha que $\varphi\in\overline{C(b,c,\alpha)}\cap-\overline{C(b,c,\alpha)}$. Se $\varphi\in\overline{C(b,c,\alpha)}$ existe $\psi\in C(b,c,\alpha)$ e uma sequência $(t_n)_{n\in N}\searrow 0$ tais que $\varphi+t_n\psi\in C(b,c,\alpha)$ para todo $n\in N$. Em particular, dados $\gamma\in\mathcal{F}^s$ e $\rho\in D(\gamma,\kappa)$, temos que $\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}>-t_n\int_{\gamma}\psi\rho d\mu_{\gamma}$ para todo $t_n>0$. Como $t_n\to 0$ e $\int_{\gamma}\psi\rho d\mu_{\gamma}>0$, segue que $\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}\geq 0$. Por outro lado se $\varphi\in-\overline{C(b,c,\alpha)}$ então $\varphi=-\overline{\varphi}$ onde $\overline{\varphi}\in\overline{C(b,c,\alpha)}$ e assim $\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}=-\int_{\gamma}\overline{\varphi}\rho d\mu_{\gamma}\leq 0$. Portanto, $\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}=0$ para todo $\gamma\in\mathcal{F}^s$ e $\rho\in D(\gamma,\kappa)$. Basta provar então que

$$\int_{\gamma}\varphi\rho d\mu_{\gamma}=0,\forall\gamma\in\mathcal{F}^s \text{ e } \rho\in\mathcal{D}(\gamma,\kappa)\Rightarrow\varphi=0 \text{ em } \Lambda.$$

De fato, fixado γ, dada qualquer $\psi : \gamma \to \mathbb{R}$ Hölder contínua podemos escrever $\psi = \psi^+ - \psi^-$, onde ψ^+, ψ^- pertencem ao cone auxiliar $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$. Para tal, basta definir $\psi^\pm = \frac{1}{2}(|\psi| \pm \psi) + B$ e escolher B suficientemente grande. Por linearidade temos $\int_\gamma \varphi\psi d\mu_\gamma = 0$. Visto que toda função limitada pode ser aproximada em $L^1(\mu_\gamma)$ por funções Hölder contínuas segue-se que $\int_\gamma \varphi\psi d\mu_\gamma = 0$, para toda função limitada $\psi : \gamma \to \mathbb{R}$. Tomando $\psi = \varphi|_A$, onde A é um elemento da σ-álgebra de Borel de Λ restrito a γ, obtemos que $\int_\gamma \varphi^2|_A d\mu_\gamma = 0$ e assim $\varphi|_A = 0$ para μ_γ-quase todo ponto de A. Como A e γ são arbitrários, concluímos que $\varphi = 0$ em Λ.

$\square$

3.3 Invariância do Cone Principal

Nesta seção provaremos a invariância do cone $C(b, c, \alpha)$ pelo operador Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}$, que é uma das hipóteses do teorema 2. Porém, devemos ter também como hipótese que o diâmetro de $\mathcal{L}(C(b, c, \alpha))$ na métrica projetiva referente ao cone $C(b, c, \alpha)$ seja finito. Observamos anteriormente, que pela definição da métrica projetiva, vetores na fronteira do cone possuem distância infinita para qualquer outro vetor no cone. Então, necessariamente devemos ter uma invariância estrita do cone $C(b, c, \alpha)$ pelo operador Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}$. Mais precisamente provaremos a seguinte proposição:

Proposição 3. *Seja ϕ um potencial constante. Existe $0 < \sigma < 1$ tal que $\mathcal{L}(C(b, c, \alpha)) \subset C(\sigma b, \sigma c, \alpha)$ para b e c suficientemente grandes.*

Prova: Invariância da condição (A):

Seja $\varphi \in C(b, c, \alpha)$. Sabemos que $\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}$ e pelo lema 2 $\rho_j \in \mathcal{D}(\gamma_j, \kappa)$. Portanto, $\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma > 0$.

Invariância da condição (B):

Denotando $\dfrac{\rho_j}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}}$ por $\hat{\rho}_j$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi) \rho d\mu_\gamma \right\} &\geq \sum_{j=1}^{p} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \hat{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^{p} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \hat{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^{p} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho d\mu_{\gamma_j} \right\} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\}
\end{aligned}
$$

Dados $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ denotando $\rho'_j / \int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j}$ e $\rho''_j / \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}$ por $\overline{\rho}_j$ e $\overline{\overline{\rho}}_j$, respectivamente, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi) \rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi) \rho'' d\mu_\gamma \right| &\leq \sum_{j=1}^{p} \left| \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j} \right| \int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} \\
&+ \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j} \left| \int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j} \right|.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Por hipótese φ está no cone e pelo lema 2, temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j} \right| &\leq b\theta_j \left(\overline{\rho}_j, \overline{\overline{\rho}}_j \right) \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho d\mu_{\gamma_j} \right\} \\
&= b\theta_j \left(\rho'_j, \rho''_j \right) \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho d\mu_{\gamma_j} \right\} \\
&\leq b\Lambda_1 \theta \left(\rho', \rho'' \right) \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho d\mu_{\gamma_j} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Vamos observar um pouco mais. Para todo $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ obtemos a seguinte estimativa

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\}} \leq (1+\kappa diam M^\alpha)^2 \tag{3.6}$$

De fato, dado $\delta > 0$ existe $\widetilde{\rho} \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ tal que $\displaystyle\int_{\gamma_j} (\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j} \leq (1+\delta) \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\}$ e mais ainda, como $\hat{\rho}$ e $\widetilde{\rho}$ estão normalizados pela integral, devemos ter necessariamente $\inf \hat{\rho} \leq 1$ e $\sup \widetilde{\rho} \geq 1$. Logo,

$$\frac{(\hat{\rho})_j}{(\widetilde{\rho})_j} = \frac{\frac{1}{p}\hat{\rho}\circ f e^{\phi}}{\frac{1}{p}\widetilde{\rho}\circ f e^{\phi}} \leq \frac{\sup \hat{\rho}}{\inf \widetilde{\rho}} \leq \frac{(1+\kappa diam M^\alpha)\inf \hat{\rho}}{(1+\kappa diam M^\alpha)^{-1}\sup \widetilde{\rho}} = (1+\kappa diam M^\alpha)^2 .$$

Assim $\displaystyle\int_{\gamma_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j} \leq (1+\kappa diam M^\alpha)^2 \int_{\gamma_j} (\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}$, obtendo para todo $\delta > 0$ que

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\}} \leq \frac{(1+\delta)(1+\kappa diam M^\alpha)^2 \displaystyle\int_{\gamma_j} (\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} (\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}} \leq (1+\delta)(1+\kappa diam M^\alpha)^2$$

o que prova a afirmação acima.

Agora, para j fixado, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\left| \displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi \overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j} \right| \displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \rho d\mu_{\gamma_j} \right\} \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \theta(\rho', \rho'')} &\leq \frac{b\Lambda_1 \theta(\rho', \rho'') \displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j} \right\} \theta(\rho', \rho'')} \\
&\leq (1+\kappa diam M^\alpha)^2 \Lambda_1 b
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Analisaremos então a segunda parcela de 3.4. Para tal observaremos primeiro que para todo $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\gamma)$, denotando $(\hat{\rho})_j / \displaystyle\int_{\gamma_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}$ por $\bar{\hat{\rho}}_j$, segue-se que

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi \bar{\hat{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_{\gamma_j} \varphi \overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} \right\}} < b \log \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 + 1$$

Com efeito, analogamente ao que foi feito em 3.6, é suficiente notar que como φ está no cone temos

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\bar{\hat{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}} < b\theta(\bar{\hat{\rho}}_j, \overline{\rho}_j) + 1 = b\theta((\hat{\rho})_j, \rho_j) + 1$$

pelo lema 2, segue a afirmação anterior. Agora estabeleceremos outra estimativa necessária:

$$\frac{\left|\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq 2\left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2.$$

Para mostrar isso observaremos que

$$\frac{\rho'_j}{\rho''_j} \leq \frac{\sup\rho'}{\inf\rho''} \leq \frac{\sup\rho'/\inf\rho'}{\inf\rho''/\sup\rho''} = e^{\theta_+(\rho',\rho'')} \leq e^{\theta(\rho',\rho'')}$$

Assim, assumindo sem perda de generalidade que $\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} \geq \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}$ temos

$$\frac{\left|\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq \frac{\left(e^{\theta\left(\rho', \rho''\right)} - 1\right)\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}}$$

para $\theta\left(\rho', \rho''\right) \leq 1$ segue que $\dfrac{e^{\theta\left(\rho', \rho''\right)} - 1}{\theta\left(\rho', \rho''\right)} < 2$ a assim neste caso obtemos a estimativa requerida.

Se $\theta\left(\rho', \rho''\right) \geq 1$ também temos

$$\frac{\left|\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq \frac{\left|\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq 2\left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2$$

e novamente para j fixado e denotando $(1 + \kappa diam M^{\alpha})^2$ por $M(\kappa, \alpha)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}\left|\int_{\gamma_j}\rho'_j d\mu_{\gamma_j}-\int_{\gamma_j}\rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\theta(\rho',\rho'')} &\leq \frac{\displaystyle\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}}2M(\kappa,\alpha)\\
&\leq \left(b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2+1\right)2M(\kappa,\alpha)\\
&\leq 2M(\kappa,\alpha)\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 b+2M(\kappa,\alpha)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

As estimativas 3.7 e 3.8 não dependem de j, então

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\left|\int_{\gamma}\mathcal{L}(\varphi)\rho' d\mu_{\gamma}-\int_{\gamma}\mathcal{L}(\varphi)\rho'' d\mu_{\gamma}\right|}{\displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma}\mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_{\gamma}\right\}\theta(\rho',\rho'')} &\leq M(\kappa,\alpha)\Lambda_1 b+2M(\kappa,\alpha)\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 b+2M(\kappa,\alpha)\\
&= \left(\Lambda_1+2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)M(\kappa,\alpha)b+2M(\kappa,\alpha)
\end{aligned}
$$

Desejamos que o termo que multiplica b acima seja menor que 1. Relembrando que pelo lema (2), $\Lambda_1 = 1-\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ devemos então garantir que

$$
\left(1-\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2+2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)(1+\kappa diam M^{\alpha})^2<1
$$

e ainda pelo lema 2, na prova do segundo item, escolhemos κ, suficientemente pequeno, de modo que $\kappa diam M^{\alpha}<\lambda$. Portanto basta encontrar $0<\lambda<1$ de modo que

$$
\left(1-\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2+2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)(1+\lambda)^2<1.
$$

Tal escolha é possível pois no lema 2, $0<\lambda<1$ pode ser tomado suficientemente pequeno. Assim, existe $0<\tilde{\sigma}_1<1$ tal que

$$
\left(\Lambda_1+2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)M(\kappa,\alpha)<\tilde{\sigma}_1.
$$

Como $M(\kappa,\alpha)$ não depende de b. Para b suficientemente grande, podemos obter $\sigma_1<1$

tal que

$$\frac{\left|\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma\right\}\theta(\rho',\rho'')} \leq \sigma_1 b$$

isto prova a invariância estrita da condição (B).

Invariância da condição (C): Provaremos o caso onde ϕ é constante. Isto implica que

$$\inf_\gamma\left\{\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma\right\} \geq e^\phi \inf_\gamma\left\{\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma\right\}.$$

Observemos que a aplicação g como em 1.1 satisfaz as condições $(H1)$ e $(H2)$, logo todo ponto $y \in N$ possui uma pré-imagem na região Ω onde $L(y) \leq \lambda_u$. Desta forma para $\gamma = \Pi^{-1}(y)$ e $\widetilde{\gamma} = \Pi^{-1}(\tilde{y})$ suficientemente próximo de γ de modo que $\tilde{y}_i$ pré-imagem de $\tilde{y}$, próximo de y_i, esteja em U_{y_i} obtemos que $d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i) \leq \lambda_u d(\gamma, \widetilde{\gamma})$.

Com efeito, seja $x \in \widetilde{\gamma}_i$ que realiza a distância $d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i)$. Representando ainda por d a métrica produto equivalente a métrica original obtemos,

$$\begin{aligned} d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i) &= d(x, \pi_{\tilde{y}_i, y_i}(x)) = d(\tilde{y}_i, y_i) \leq \lambda_u d(g(\tilde{y}_i), g(y_i)) \\ &= \lambda_u d(\tilde{y}, y) = \lambda_u \left[d(\tilde{y}, y) + d(\pi_{\tilde{y},y}(f(x)), \pi_{\tilde{y},y}(f(x)))\right] \\ &= \lambda_u d(f(x), \pi_{\tilde{y},y}(f(x))) \leq \lambda_u d(\widetilde{\gamma}, \gamma) \end{aligned}$$

analogamente nos demais casos temos $d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j) \leq L d(\gamma, \widetilde{\gamma})$. Além disso, podemos assumir sem perda de generalidade, que $d(\gamma_1, \widetilde{\gamma}_1) \leq \tilde{\lambda}_u d(\gamma, \widetilde{\gamma})$, e nos outros casos $d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j) \leq \tilde{L} d(\gamma, \widetilde{\gamma})$. Segue então que

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \mathcal{L}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}}\right| &\leq \frac{e^\phi}{p}\sum_{j=1}^p \left|\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j} - \int_{\widetilde{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}_j}\right| \\ &\leq \frac{e^\phi C}{p} \inf_\gamma\left\{\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma\right\} \sum_{j=1}^p d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j)^\alpha \\ &\leq \frac{\tilde{\lambda}_u^\alpha + (p-1)\tilde{L}^\alpha}{p} C d(\gamma, \widetilde{\gamma})^\alpha \inf_\gamma\left\{\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma\right\} \end{aligned}$$

Devemos ter então $\dfrac{\tilde{\lambda}_u^\alpha + (p-1)\tilde{L}^\alpha}{p} < 1$ e isto é equivalente a

$$\tilde{L}^\alpha < \frac{p - \tilde{\lambda}_u^\alpha}{p-1}$$

pelo fato de que $\tilde{L} \geq 1$, devemos ter necessariamente

$$\frac{p - \tilde{\lambda}_u^\alpha}{p-1} \geq 1$$

e isto é verdadeiro porque $\tilde{\lambda}_u < 1$. Portanto, existe $0 < \sigma_2 < 1$ tal que

$$\left| \int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \mathcal{L}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right| < \sigma_2 C d(\gamma, \widetilde{\gamma})^\alpha \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma \right\}$$

o que prova a invariância estrita da condição (C). Para finalizar a prova da proposição basta tomar $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

$\square$

3.4 Diâmetro Finito do Cone Principal

De posse da invariância estrita do cone principal $C\,(b, c, \alpha)$ pelo operador Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}$, provaremos aqui que $\mathcal{L}(C\,(b, c, \alpha))$ possui diâmetro finito na métrica projetiva Θ, relativa ao cone $C\,(b, c, \alpha)$. Para tal, calcularemos agora a expressão para a métrica Θ. Relembramos que $\alpha(\varphi, \psi) = \sup\{t > 0; \psi - t\varphi \in C\,(b, c, \alpha)\}$. Então observemos que pela condição (A), para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ e $\rho \in \mathcal{D}\,(\gamma)$ temos $\int_\gamma (\psi - t\varphi)\rho d\mu_\gamma > 0$ daí

$$t < \frac{\int_\gamma \psi\rho d\mu_\gamma}{\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma}.$$

Pela condição (B),

$$\left| \int_\gamma (\psi - t\varphi)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma (\psi - t\varphi)\rho'' d\mu_\gamma \right| < b\theta\,(\rho', \rho'') \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_\gamma (\psi - t\varphi)\rho d\mu_\gamma \right\}$$

e assim para todo ρ', ρ'', e $\hat{\rho}$ em $\mathcal{D}_1(\gamma)$ temos

$$t < \frac{\int_\gamma \psi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \psi\rho'' d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'') \int_\gamma \psi\hat{\rho} d\mu_\gamma}{\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'') \int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma}$$

e

$$t < \frac{\int_\gamma \psi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \psi\rho' d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'') \int_\gamma \psi\hat{\rho} d\mu_\gamma}{\int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'') \int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma}.$$

Pela condição (C),

$$\left| \int_\gamma (\psi - t\varphi) d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} (\psi - t\varphi) d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right| < c d(\gamma, \widetilde{\gamma})^\alpha \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma (\psi - t\varphi)\, d\mu_\gamma \right\}$$

portanto, para todo $\gamma, \hat{\gamma} \in \mathcal{F}^s_{loc}$ e $\widetilde{\gamma}$ suficientemente próximo de γ temos

$$t < \frac{\displaystyle\int_{\widetilde{\gamma}} \psi d\mu_{\widetilde{\gamma}} - \int_{\gamma} \psi d\mu_{\gamma} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma}) \int_{\hat{\gamma}} \psi d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} - \int_{\gamma} \varphi d\mu_{\gamma} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma}) \int_{\hat{\gamma}} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}}}$$

e

$$t < \frac{\displaystyle\int_{\gamma} \psi d\mu_{\gamma} - \int_{\widetilde{\gamma}} \psi d\mu_{\widetilde{\gamma}} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma}) \int_{\hat{\gamma}} \psi d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\gamma} \varphi d\mu_{\gamma} - \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma}) \int_{\hat{\gamma}} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}}}.$$

Definindo

$$\xi(\gamma, \rho', \rho'', \hat{\rho}, \varphi, \psi) = \frac{\left(\displaystyle\int_{\gamma} \psi \rho'' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \psi \rho' d\mu_{\gamma}\right) / \displaystyle\int_{\gamma} \psi \hat{\rho} d\mu_{\gamma} + b\theta(\rho', \rho'')}{\left(\displaystyle\int_{\gamma} \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \varphi \rho' d\mu_{\gamma}\right) / \displaystyle\int_{\gamma} \varphi \hat{\rho} d\mu_{\gamma} + b\theta(\rho', \rho'')}$$

e

$$\eta(\gamma, \widetilde{\gamma}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}, \varphi, \psi) = \frac{\left(\displaystyle\int_{\gamma} \psi d\mu_{\gamma} - \int_{\widetilde{\gamma}} \psi d\mu_{\widetilde{\gamma}}\right) / \displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \psi d\mu_{\hat{\gamma}} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma})}{\left(\displaystyle\int_{\gamma} \varphi d\mu_{\gamma} - \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}}\right) / \displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}} + cd(\gamma, \widetilde{\gamma})}.$$

Podemos escrever

$$\alpha(\varphi, \psi) = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\gamma} \psi \rho d\mu_{\gamma}}{\displaystyle\int_{\gamma} \varphi \rho d\mu_{\gamma}}, \frac{\displaystyle\int_{\gamma} \psi \hat{\rho} d\mu_{\gamma}}{\displaystyle\int_{\gamma} \varphi \hat{\rho} d\mu_{\gamma}} \xi(\gamma, \rho', \rho'', \hat{\rho}, \varphi, \psi), \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \psi d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}}} \eta(\gamma, \widetilde{\gamma}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}, \varphi, \psi) \right\}$$

como $\beta(\varphi, \psi) = \alpha(\psi, \varphi)^{-1}$ temos

$$\beta(\varphi, \psi) = \sup \left\{ \frac{\displaystyle\int_{\gamma} \varphi \rho d\mu_{\gamma}}{\displaystyle\int_{\gamma} \psi \rho d\mu_{\gamma}}, \frac{\displaystyle\int_{\gamma} \varphi \hat{\rho} d\mu_{\gamma}}{\displaystyle\int_{\gamma} \psi \hat{\rho} d\mu_{\gamma}} \xi(\gamma, \rho', \rho'', \hat{\rho}, \psi, \varphi), \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \psi d\mu_{\hat{\gamma}}} \eta(\gamma, \widetilde{\gamma}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}, \psi, \varphi) \right\}$$

com tal expressão podemos mostrar que o Θ-diâmetro de $\mathcal{L}\left(C(b, c, \alpha)\right)$ é finito.

Proposição 4. *Para b e c suficientemente grandes e $\alpha \in (0, 1]$ temos*

$$\Delta := \sup \left\{ \Theta\left(\mathcal{L}\varphi, \mathcal{L}\psi\right); \varphi, \psi \in C(b, c, \alpha) \right\} < \infty.$$

Prova: Dados $\varphi, \psi \in C(\sigma b, \sigma c, \alpha)$ observemos que

$$\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} < \xi(\gamma, \rho', \rho'', \hat{\rho}, \psi, \varphi) < \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}$$

e

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \eta(\gamma, \widetilde{\gamma}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}, \psi, \varphi) < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

De fato, dados $\rho', \rho'', \hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ podemos garantir que

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma} \leq \frac{\sigma b\theta(\rho', \rho'') \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma\right\}}{\displaystyle\int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma} \leq \sigma b\theta(\rho', \rho'')$$

e que

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma} \geq \frac{-\sigma b\theta(\rho', \rho'') \displaystyle\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma\right\}}{\displaystyle\int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma} \geq -\sigma b\theta(\rho', \rho'').$$

O mesmo vale para ψ e como $\sigma < 1$ concluímos que

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \frac{\left(\displaystyle\int_\gamma \psi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \psi\rho' d\mu_\gamma\right) / \displaystyle\int_\gamma \psi\hat{\rho} d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'')}{\left(\displaystyle\int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma\right) / \displaystyle\int_\gamma \varphi\hat{\rho} d\mu_\gamma + b\theta(\rho', \rho'')} < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

ou seja,

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \xi(\gamma, \rho', \rho'', \hat{\rho}, \psi, \varphi) < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}.$$

Analogamente prova-se que

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} < \eta(\gamma, \widetilde{\gamma}, \hat{\gamma}, \hat{\rho}, \psi, \varphi) < \frac{1+\sigma}{1-\sigma}$$

Denotando por Θ_+ a métrica projetiva associada ao cone definido pela condição (A) expressa através de

$$e^{\Theta_+(\varphi,\psi)} = \sup_{\gamma,\rho\in\mathcal{D}(\gamma),\hat{\gamma},\hat{\rho}\in\mathcal{D}(\hat{\gamma})} \left\{\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi\rho d\mu_\gamma \int_{\hat{\gamma}} \psi\hat{\rho} d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi\hat{\rho} d\mu_{\hat{\gamma}} \int_\gamma \psi\rho d\mu_\gamma}\right\}$$

segue da definição de Θ e das expressões de α e β que

$$\Theta(\varphi, \psi) < \Theta_+(\varphi, \psi) + \log\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2.$$

Então resta somente provar que o Θ_+-diâmetro de $\mathcal{L}\left(C(b, c, \alpha)\right)$ é finito. Para tal, observaremos que devido a desigualdade triangular é suficiente mostrar que $\{\Theta_+(\mathcal{L}\varphi, 1); \varphi \in C(b, c, \alpha)\}$ é finito. Pela expressão de Θ_+ basta encontrar um limite superior para

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \mathcal{L}\varphi\hat{\rho} d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_\gamma \mathcal{L}\varphi\rho d\mu_\gamma}$$

para todo $\varphi \in C(b,c,\alpha)$, $\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ e $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\hat{\gamma})$. Observemos primeiro que

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \mathcal{L}\varphi\hat{\rho}d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\gamma} \mathcal{L}\varphi\rho d\mu_{\gamma}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}}$$

o que reduz nosso problema a limitar a expressão

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} = \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}} \frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}}$$

Denotando $\dfrac{\rho_j}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}}$ e $\dfrac{(\hat{\rho})_j}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}$ por $\overline{\rho}_j$ e $\overline{\overline{\rho}}_j$, respectivamente, aplicando a condição (B) e o lema 2, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} &= \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\hat{\gamma}_j} \int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} \\
&\leq \left(1 + b\theta_j\left(\overline{\overline{\rho}}_j, 1\right)\right) \int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j} \\
&\leq \left(1 + b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right) \int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} = \frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} \int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}} \leq \frac{\left(1 + b\theta_j\left(1, \overline{\rho}_j\right)\right)}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}} \leq \frac{\left(1 + b\log\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}}$$

Sabemos que $(\hat{\rho})_j = \dfrac{1}{p}\hat{\rho} \circ f \cdot e^{\phi}$ e $\rho_j = \dfrac{1}{p}\rho \circ f \cdot e^{\phi}$. Como ρ e $\hat{\rho}$ estão normalizados, segue que $(\hat{\rho})_j \leq \dfrac{1}{p}(1 + \kappa diam(M)^{\alpha})e^{\phi}$ e $\rho_j \geq \dfrac{1}{p}(1 + \kappa diam(M)^{\alpha})^{-1}e^{\phi}$. Portanto

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}} < (1 + \kappa diam(M)^{\alpha})^2 \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} e^{\phi} d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} e^{\phi} d\mu_{\gamma_j}},$$

por outro lado $\left|e^{\phi}\right|_{\alpha} < \varepsilon \inf e^{\phi}$ e assim $\sup e^{\phi} < (1+\varepsilon diam(M)^{\alpha}) \inf e^{\phi}$. Obtendo que

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} e^{\phi} d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} e^{\phi} d\mu_{\gamma_j}} < 1+\varepsilon diam(M)^{\alpha}$$

e por consequência

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}} \quad < \quad (1+\kappa diam(M)^{\alpha})^2(1+\varepsilon diam(M)^{\alpha}).$$

mais ainda, sem perda de generalidade podemos assumir que γ e $\hat{\gamma}$ estão próximos o suficiente. Então podemos aplicar a condição (C) daí

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}} \leq 1+cd\left(\hat{\gamma}_j,\gamma_j\right)^{\alpha} \leq 1+c.diam(M)^{\alpha}$$

e temos

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} < \left(1+b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^2 (1+\max\{\kappa,c,\varepsilon\}diam(M)^{\alpha})^4,$$

finalizando a prova da proposição.

□

3.5 Decaimento Exponencial de Correlações

Estamos agora aptos a provar o decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos. Seja ϕ constante e $\tilde{\mathcal{L}}$ o operador Ruelle-Perron-Frobenius normalizado pelo potencial, isto é, $\tilde{\mathcal{L}} = \dfrac{\mathcal{L}}{e^{\phi}}$. Portanto $\tilde{\mathcal{L}}(\varphi) = \varphi \circ f^{-1}$. Sabemos que está bem definido o operador dual, $\tilde{\mathcal{L}}^*$, tal que

$$\int \tilde{\mathcal{L}}\varphi d\mu = \int \varphi d\tilde{\mathcal{L}}^*\mu.$$

para toda φ contínua e toda medida de probabilidade μ. É verdadeiro o seguinte resultado:

Proposição 5. *Se f é invertível então $\tilde{\mathcal{L}}^*(\mu) = \mu$ se somente se μ é f-invariante.*

Prova:

Para toda φ contínua, temos que:

Se $\tilde{\mathcal{L}}^*(\mu) = \mu$ então

$$\int \varphi \circ f^{-1} d\mu = \int \tilde{\mathcal{L}}(\varphi) d\mu = \int \varphi d\tilde{\mathcal{L}}^*(\mu) = \int \varphi d\mu.$$

Agora dado μ f-invariante

$$\int \varphi d\tilde{\mathcal{L}}^*(\mu) = \int \tilde{\mathcal{L}}(\varphi) d\mu = \int \varphi \circ f^{-1} d\mu = \int \varphi d\mu$$

$\square$

Outra relação importante obtida pela f-invariância da medida μ é que

$$\int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu = \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu \tag{3.9}$$

De fato, como $\tilde{\mathcal{L}}(\psi) = \psi \circ f^{-1}$ obtemos

$$\int (\varphi \circ f) \psi d\mu = \int (\varphi \circ f \circ f^{-1})(\psi \circ f^{-1}) d\mu = \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}(\psi) d\mu$$

e por indução, supondo

$$\int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu = \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu.$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\int \left(\varphi \circ f^{n+1}\right) \psi d\mu &= \int (\varphi \circ f \circ f^n) \psi d\mu \\
&= \int (\varphi \circ f) \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu \\
&= \int (\varphi \circ f \circ f^{-1})(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) \circ f^{-1}) d\mu \\
&= \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^{n+1}(\psi) d\mu.
\end{aligned}$$

O decaimento exponencial de correlações é facilmente obtido por contração do operador Ruelle-Perron-Frobenius restrito ao cone de funções $C(b, c, \alpha)$. Portanto, precisamos garantir que toda função Hölder contínua pode ser escrita como soma de funções no cone. A próxima proposição atende a este requisito:

Proposição 6. *Para toda $\varphi \in C^\alpha(M)$ existe $K(\varphi) > 0$ tal que $\varphi + K(\varphi) \in C(b, c, \alpha)$.*

Prova: Provaremos primeiro que existe $K_3 = K_3(\varphi) > 0$ tal que $\varphi + K_3$ satisfaz a condição (C) na definição do cone $C(b, c, \alpha)$. A projeção nas folhas estáveis garante que

$$\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \varphi \circ \pi d\mu_{\tilde{\gamma}}$$

e pela definição de $d(\gamma, \widetilde{\gamma})$, dado $\varphi \in C^{\alpha}(M)$ temos

$$\frac{\varphi(\pi(x)) - \varphi(x)}{d(\gamma, \widetilde{\gamma})} \leq \frac{\varphi(\pi(x)) - \varphi(x)}{d(\pi(x), x)} \leq |\varphi|_{\alpha}$$

Assim

$$\sup_{\gamma, \widetilde{\gamma}} \left\{ \frac{\left| \int_{\gamma} \varphi d\mu_{\gamma} - \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right|}{d(\gamma, \widetilde{\gamma})} \right\} \leq |\varphi|_{\alpha} < \infty$$

Por outro lado para todo $K > 0$, temos $\inf_{\gamma} \left\{ \int_{\gamma} (\varphi + K)\, d\mu_{\gamma} \right\} = \inf_{\gamma} \left\{ \int_{\gamma} \varphi d\mu_{\gamma} \right\} + K$. É suficiente então escolher $K_3 = K_3(\varphi) > 0$ tal que

$$c \inf_{\gamma} \left\{ \int_{\gamma} (\varphi + K_3)\, d\mu_{\gamma} \right\} > |\varphi|_{\alpha}$$

Para provar que existe $K_2 = K_2(\varphi)$ tal que $\varphi + K_2$ satisfaz a condição (B) basta notar que

$$\sup_{\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \frac{\left| \int_{\gamma} \varphi \rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} \right|}{\theta(\rho', \rho'')} \right\} < \infty.$$

De fato, como $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ temos $\frac{\rho'}{\rho''} \leq e^{\theta(\rho', \rho'')}$ a assim para todo φ limitado

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \varphi \rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} \right| &= \left| \int_{\gamma} \left(\frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right) \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right| |\varphi|\, \rho'' d\mu_{\gamma} \\ &\leq \sup \left| \frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right| \sup \varphi \sup \rho'' = \left| \sup \frac{\rho'}{\rho''} - 1 \right| \sup \varphi \sup \rho'' \\ &\leq \left| e^{\theta(\rho', \rho'')} - 1 \right| \sup \varphi \sup \rho'' \end{aligned}$$

Seja B tal que $\sup(\varphi + B) = 1$. Segue-se que

$$\frac{\left| \int_{\gamma} \varphi \rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} \right|}{\theta(\rho', \rho'')} = \frac{\left| \int_{\gamma} (\varphi + B)\, \rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} (\varphi + B)\, \rho'' d\mu_{\gamma} \right|}{\theta(\rho', \rho'')} \leq \frac{\left(e^{\theta(\rho', \rho'')} - 1\right) \sup \rho''}{\theta(\rho', \rho'')}.$$

Se $\theta(\rho', \rho'') < 1$ sabemos que $\frac{e^{\theta(\rho', \rho'')} - 1}{\theta(\rho', \rho'')} < 2$ e como $\rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ podemos afirmar que

$$\frac{\left| \int_{\gamma} \varphi \rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \varphi \rho'' d\mu_{\gamma} \right|}{\theta(\rho', \rho'')} \leq 2(1 + \kappa diam(M)^{\alpha})$$

Agora se $\theta(\rho', \rho'') \geq 1$ chegamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho', \rho'')} &\leq \left|\int_\gamma (\varphi + B)\,\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma (\varphi + B)\,\rho'' d\mu_\gamma\right| \\
&\leq \int_\gamma |(\varphi + B)(\rho' - \rho'')|\, d\mu_\gamma \\
&\leq \sup(\varphi + B)(\sup \rho' + \sup \rho'') \\
&\leq 2(1 + \kappa diam(M)^\alpha)
\end{aligned}$$

e isto prova que

$$\sup_{\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho', \rho'')} \right\} < \infty.$$

A escolha de $K_2 = K_2(\varphi)$ é análoga ao que foi feito na condição (C). Na condição (A) , como φ é em particular contínua sabemos que num domínio compacto existe $K_1 = K_1(\varphi)$ tal que $\varphi + K_1 > 0$ e portanto $\int_\gamma (\varphi + K_1)\,\rho d\mu_\gamma > 0$ para todo $\gamma \in F^s_{loc}$ e $\rho \in \mathcal{D}(\gamma)$. Completamos a prova definindo $K(\varphi) = \max\{K_1, K_2, K_3\}$.

□

Para provar o decaimento exponencial de correlações observemos que definindo uma medida $\mu_\gamma \times \nu$ por

$$\mu_\gamma \times \nu(\varphi) := \int \int_\gamma \varphi d\mu_\gamma d\nu(\gamma)$$

obtemos que $\mu = \mu_\gamma \times \nu$. Para tal, provaremos inicialmente que $\mu_\gamma \times \nu$ é f-invariante. Com efeito, para todo $x \in M$ dados $\gamma = \Pi_\Lambda^{-1}(x)$ e $\gamma_j = \Pi_\Lambda^{-1}(x_j)$, onde $f(\gamma_j) \subset \gamma$ e $g(x_j) = x$ temos $\mu_\gamma(A) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \mu_{\gamma_j}\left(f^{-1}(A)\right)$. Por outro lado, sabemos que a medida de máxima entropia ν coincide com os estados de equilíbrio de g relativo a qualquer potencial constante ϕ. Por Castro e Varandas em [CV13], tais estados de equilíbrio são auto-medidas do dual, $\mathcal{L}^*_{g,\phi}$, do operador transferência

$$\mathcal{L}_{g,\phi}(\varphi)(x) := \sum_{g(x_j)=x} e^{\phi(x_j)}\varphi(x_j),$$

mais precisamente tais auto-medidas estão associadas ao raio espectral de $\mathcal{L}_{g,\phi}$, denotado aqui por $r = r(\mathcal{L}_{g,\phi})$, logo $\mathcal{L}^*_{g,\phi}(\nu) = r\nu$.

Em particular, para $\phi = \log \frac{r}{p}$ temos $\mathcal{L}_{g,\phi}(\varphi)(x) = \frac{r}{p}\sum_{j=1}^{p}\varphi(x_j)$ e assim

$$\int \varphi(x)d\nu = \frac{1}{r}\int \varphi(x)d\mathcal{L}^*_{g,\phi}\nu = \frac{1}{r}\int \mathcal{L}_{g,\phi}(\varphi)(x)d\nu = \int \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\varphi(x_j)d\nu.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu_\gamma \times \nu(f^{-1}(A)) &= \mu_\gamma \times \nu(\chi_{f^{-1}(A)}) = \int\int_\gamma \chi_{f^{-1}(A)}d\mu_\gamma d\nu \\
&= \int \mu_\gamma\left(f^{-1}(A)\right)d\nu = \int \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\mu_{\gamma_j}\left(f^{-1}(A)\right)d\nu \\
&= \int \mu_\gamma(A)d\nu = \int\int_\gamma \chi_A d\mu_\gamma d\nu \\
&= \mu_\gamma \times \nu(A)
\end{aligned}$$

Além disso $\mu_\gamma \times \nu(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_0$. De fato, seja $A = \Pi_\Lambda^{-1}(A_N)$ onde $A_N \in \mathcal{A}_N$. Temos que

$$\mu(\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)) = \nu\left(\Pi_\Lambda\left(\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)\right)\right) = \nu\left(A_N\right) = \int_N \chi_{A_N}d\nu$$

e por outro lado,

$$\mu_\gamma \times \nu\left(\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)\right) = \int\int_\gamma \chi_{\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)}d\mu_\gamma d\nu$$

Como $\chi_{\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)}(x) = \chi_{A_N}(\Pi_\Lambda(x))$ e para todo γ existe $x_0 \in N$ tal que $\gamma = \Pi_\Lambda^{-1}(x_0)$ obtemos

$$\int_\gamma \chi_{\Pi_\Lambda^{-1}(A_N)}(x)d\mu_\gamma = \int_\gamma \chi_{A_N}(\Pi_\Lambda(x))d\mu_\gamma = \int_\gamma \chi_{A_N}(x_0)d\mu_\gamma = \chi_{A_N}(x_0)$$

e assim $\mu_\gamma \times \nu(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_0$. Agora dado qualquer $A \in \mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n$, como $\mathcal{A}_n = f^n(\mathcal{A}_0)$, temos que existem $n \in \mathbb{N}$ e $A_0 \in \mathcal{A}_0$ tais que $A = f^n(A_0)$ e assim

$$\mu_\gamma \times \nu(A) = \mu_\gamma \times \nu(f^n(A_0)) = \mu_\gamma \times \nu(A_0).$$

Por outro lado μ é também f-invariante, logo $\mu(A) = \mu(f^n(A_0)) = \mu(A_0)$, o que nos permite concluir que $\mu = \mu_\gamma \times \nu$.

Teorema B. *A medida μ possui decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos.*

Prova:

Devemos provar que dada φ, ψ α-Hölder, existe uma constante $0 < \tau < 1$ e $K(\varphi, \psi) > 0$ tais que

$$\left| \int (\varphi \circ f^n)\psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n,$$

para todo $n \geq 1$, e isto, por (3.9) é equivalente a mostrar que

$$\left| \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n (\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Provaremos inicialmente o caso onde $\varphi_{|\gamma} \in \mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ e $\psi \in C(b, c, \alpha)$, supondo ainda $\int \varphi d\mu \neq 0$ e $\int \psi d\mu = 1$.

Sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}(1) = 1 \circ f = 1$. Como $\varphi_{|\gamma} \in \mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ temos, pela condição (A), que

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma} \leq \beta_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right)$$

A normalização de ψ nos diz que $\displaystyle\int \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu = \int \psi d\mu = 1$. Agora, como observado antes $\mu = \mu_\gamma \times \nu$. Portanto,

$$\int \left(\int_\gamma \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma \right) d\nu = \int \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu = 1$$

e assim existe $\hat{\gamma}$ tal que $\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}} \leq 1$. Podemos então concluir que

$$\alpha_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right) \leq \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} d\mu_{\hat{\gamma}}} = \int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}} \leq 1$$

e que para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma} \leq \frac{\beta_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right)}{\alpha_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right)} \leq e^{\Theta_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right)} \leq e^{\Theta \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1 \right)}.$$

Como, pela proposição 3, o cone $C\,(b, c, \alpha)$ é invariante e, pela proposição 4, o cone $C\,(\sigma b, \sigma c, \alpha)$ possui Θ-diâmetro finito menor ou igual a Δ, segue da proposição 2 que existe $0 < \tau < 1$ tal que para todo $\varphi, \psi \in C\,(b, c, \alpha)$ temos $\Theta(\tilde{\mathcal{L}}^n(\varphi), \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)) \leq \Delta \tau^{n-1}$.

Logo,
$$\frac{\displaystyle\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu}{\displaystyle\int \varphi d\mu} = \frac{\displaystyle\int\int_\gamma \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu_\gamma d\nu}{\displaystyle\int\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma d\nu} \leq e^{\Theta\left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi),1\right)} \leq e^{\Delta\tau^{n-1}}.$$

Observemos agora que $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\Delta\tau^{n-1}}-1}{\tau^n} = \dfrac{\Delta}{\tau}$, portanto existe $\tilde{\Delta}>0$ tal que $e^{\Delta\tau^{n-1}}-1 < \tilde{\Delta}\tau^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Isto nos permite provar que

$$\left|\int \varphi d\mu\right|\left|\frac{\displaystyle\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu}{\displaystyle\int \varphi d\mu} - 1\right| \leq \left|\int \varphi d\mu\right|\left(e^{\Delta\tau^{n-1}}-1\right) \leq \left|\int \varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n$$

Se $\int \psi d\mu \neq 1$ então

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\,d\mu - \int \varphi d\mu\int \psi d\mu\right| &= \left|\int \psi d\mu\right|\left|\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n\left(\frac{\psi}{\int \psi d\mu}\right)d\mu - \int \varphi d\mu\right| \\ &\leq \left|\int \psi d\mu\right|\left|\int \varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n\end{aligned}$$

para todo $n\geq 1$.

Para toda ψ α-Hölder, vimos que existe $K(\psi)>0$, suficientemente grande, tal que $\psi + K(\psi)\in C(b,c,\alpha)$. Portanto, escrevendo $\psi = \psi + K(\psi) - K(\psi)$ e observando que $\displaystyle\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(K(\psi))d\mu = \int \varphi d\mu\int K(\psi)d\mu$ obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\,d\mu - \int \varphi d\mu\int \psi d\mu\right| &= \left|\int \varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi + K(\psi))\,d\mu - \int \varphi d\mu\int (\psi+K(\psi))d\mu\right| \\ &\leq \left(\left|\int \psi d\mu\right| + K(\psi)\right)\left|\int \varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n\end{aligned}$$

Agora, se φ é α-Hölder é suficiente notar que existe $K(\varphi)\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi_{|\gamma} + K(\varphi) + B \in \mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}$ e que $\displaystyle\int \varphi + K(\varphi) + Bd\mu > 0$, para todo $B>0$. De fato,

$$\left|\varphi_{|\gamma} + K(\varphi)\right|_\alpha < \kappa\inf\left\{\varphi_{|\gamma} + K(\varphi)\right\}$$

se, somente se,

$$K(\varphi) > \frac{\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha}{\kappa} - \inf\left\{\varphi_{|\gamma}\right\}$$

Seja então $K(\varphi) = \sup_{\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}}\left\{\left|\dfrac{\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha}{\kappa}\right|\right\} - \inf\varphi$. Observe que $K(\varphi)\leq\dfrac{|\varphi|_\alpha}{\kappa} - \inf\varphi < \infty$. Como $\varphi_{|\gamma} + K(\varphi) \geq \dfrac{\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha}{\kappa}\geq 0$ para todo $\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}$, segue que $\varphi_{|\gamma} + K(\varphi) + B\in\mathcal{D}(\gamma)$ e que $\displaystyle\int (\varphi + K(\varphi))d\mu + B > 0$, para todo $B > 0$. Logo, analogamente ao caso anterior

$$\left|\int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu\right| \quad \leq \quad \left(\left|\int \psi d\mu\right| + K(\psi)\right)\left(\left|\int \varphi d\mu\right| + K(\varphi) + B\right)\tilde{\Delta}\tau^n$$

e pela arbitrariedade de B obtemos

$$\left|\int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu\right| \quad \leq \quad \left(\left|\int \psi d\mu\right| + K(\psi)\right)\left(\left|\int \varphi d\mu\right| + K(\varphi)\right)\tilde{\Delta}\tau^n$$

.

Observando que $\displaystyle\left|\int \varphi d\mu\right| - \inf \varphi \geq 0$, temos que $\displaystyle\left|\int \varphi d\mu\right| + K(\varphi) \geq 0$. Portanto, definindo $\displaystyle K(\varphi, \psi) := \left(\left|\int \psi d\mu\right| + K(\psi)\right)\left(\left|\int \varphi d\mu\right| + K(\varphi)\right)\tilde{\Delta}$, concluímos a prova do teorema.

□

3.6 Teorema do Limite Central

Nesta seção obteremos o teorema do limite central devido ao decaimento exponencial de correlações. Antes relembraremos alguns fatos gerais. Seja $\mathcal{G}$ uma σ-álgebra de Borel de M e $\mathcal{G}_n := f^{-n}(\mathcal{G})$ uma família de σ-álgebras não crescente. Uma função $\xi : M \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{G}_n$-mensurável se somente se $\xi = \xi_n \circ f^n$ para algum ξ_n $\mathcal{G}$- mensurável. Seja $L^2(\mathcal{G}_n) = \{\xi \in L^2(\mu)\,; \xi$ é $\mathcal{G}_n$-mensurável $\}$. Note que $\mathcal{L}^2(\mathcal{G}_{n+1}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{G}_n)$ para cada $n \geq 0$. Dado $\varphi \in L^2(\mu)$, denotaremos por $\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{G}_n)$ a L^2-projeção ortogonal de φ em $L^2(\mathcal{G}_n)$.

A estratégia agora é aplicar o seguinte resultado devido a Gordin, cuja a prova pode ser vista em [Vi97]:

Teorema 3. *[Teorema de Gordin] Sejam $(M, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $\phi \in L^2(\mu)$ tal que $\int \phi d\mu = 0$, $f : M \to M$ uma aplicação invertível tal que f e f^{-1} sejam mensuráveis e μ f-invariante e f-ergódica. Seja $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_n := f^{-n}(\mathcal{F}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, é uma sequência não crescente de σ-álgebras. Defina*

$$\sigma_\phi^2 := \int \phi^2 d\mu + 2\sum_{j=1}^{\infty} \phi \cdot (\phi \circ f^j)\, d\mu.$$

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbb{E}(\phi|\mathcal{F}_n)\|_2 < \infty \;\; e \;\; \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi - \mathbb{E}(\phi|\mathcal{F}_{-n})\|_2 < \infty$$

então $\sigma_\phi < \infty$ e $\sigma_\phi = 0$ se somente se $\phi = u \circ f - u$ para algum $u \in L^1(\mu)$. Mais ainda, se $\sigma_\phi > 0$ então para qualquer intervalo $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu\left(x\in M:\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\phi(f^j(x))\right)\in A\right)\to\frac{1}{\sigma_\phi\sqrt{2\pi}}\int_A e^{-\frac{t^2}{2\sigma_\phi^2}}dt,$$

com $n\to\infty$.

Seja então $\mathcal{F}_0$ os conjuntos da σ-álgebra de Borel de Λ que são uniões de folhas estáveis locais, mais precisamente, $B\in F_0$ se, somente se, B é um subconjunto de Borel de Λ e dado qualquer folha estável local γ, ou $\gamma\cap B=\emptyset$ ou $\gamma\subset B$. Observe que, se φ é F_0-mensurável então φ é constante ao longo de folhas estáveis locais.

Provaremos inicialmente o decaimento exponencial de correlações para funções em $L^1(F_0)$, isto é, funções F_0-mensuráveis que são também integráveis em relação a medida μ:

Proposição 7. *Sejam $\varphi\in L^1(F_0)$ e ψ α-Hölder. Então existem constantes $0<\tau<1$ e $C(\psi)>0$ tais que*

$$\left|\int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu-\int\varphi d\mu\int\psi d\mu\right|\leq C(\psi)\int|\varphi|\,d\mu\cdot\tau^n$$

para todo $n\geq 1$.

Prova:

Basta observar que se φ é F_0-mensurável então φ é constante ao longo de folhas estáveis locais, daí, $\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha=0$ para todo $\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}$. Suponha $\varphi\geq 0$ e sejam $K(\varphi)$ e $K(\psi)$ como na prova do teorema B. Logo

$$K(\varphi)=\sup_{\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}}\left\{\left|\frac{\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha}{\kappa}\right|\right\}-\inf\varphi=-\inf\varphi$$

Como $\left|\int\varphi d\mu\right|-\inf\varphi\leq\int|\varphi|\,d\mu$, analogamente a prova do teorema B, segue que

$$\left|\int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu-\int\varphi d\mu\int\psi d\mu\right|\leq\left(\left|\int\psi d\mu\right|+K(\psi)\right)\int|\varphi|\,d\mu\cdot\tau^n.$$

Agora, podemos escrever $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ onde $\varphi^\pm=\frac{1}{2}(|\varphi|\pm\varphi)$. Observando que $\int\left|\varphi^\pm\right|d\mu\leq\int|\varphi|\,d\mu$ segue da linearidade da integral que

$$\left|\int(\varphi\circ f^n)\psi d\mu-\int\varphi d\mu\int\psi d\mu\right|\leq C(\psi)\int|\varphi|\,d\mu\cdot\tau^n$$

onde $C(\psi):=2\left(\left|\int\psi d\mu\right|+K(\psi)\right)$.

$\square$

Em consequência disto provaremos o seguinte lema:

Lema 4. *Para toda função φ Hölder continua com $\int \varphi d\mu = 0$ existe $R = R(\varphi)$ tais que $\|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}_n)\|_2 \leq R\tau^n$ para $n \geq 0$.*

Prova:
Devido a proposição anterior se $\psi \in L^1(F_0)$ e $\int |\psi| d\mu \leq 1$ então

$$\left| \int (\psi \circ f^n) \varphi d\mu - \int \psi d\mu \int \varphi d\mu \right| \leq C(\varphi) \cdot \tau^n.$$

Sabemos que $\|\psi\|_1 \leq \|\psi\|_2$ como $\int \varphi d\mu = 0$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}_n)\|_2 &= \sup \left\{ \int \xi \varphi d\mu; \xi \in L^2(\mathcal{F}_n), \|\xi\|_2 = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int (\psi \circ f^n) \varphi d\mu; \psi \in L^2(F_0), \|\psi\|_2 = 1 \right\} \\ &\leq R(\varphi) \tau^n \end{aligned}$$

$\square$

Estamos agora em condições de provar o teorema do limite central:

Teorema C. ***(Teorema do Limite Central)***
Seja μ de máxima entropia para $f : \Lambda \to \Lambda$, satisfazendo (P1), (P2), (P3) e (P4). Dada φ uma função Hölder contínua e

$$\sigma_\varphi^2 := \int \phi^2 d\mu + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int \phi \cdot (\phi \circ f^j) \, d\mu, \qquad \text{onde} \qquad \phi = \varphi - \int \varphi \, d\mu.$$

Então $\sigma_\varphi < \infty$ e $\sigma_\varphi = 0$ se somente se $\varphi = u \circ f - u$ para algum $u \in L^1(\mu)$. Mais ainda, se $\sigma_\varphi > 0$ então para todo intervalo $A \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left(x \in M : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\varphi(f^j(x)) - \int \varphi d\mu \right) \in A \right) = \frac{1}{\sigma_\varphi \sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{t^2}{2\sigma_\varphi^2}} dt.$$

Prova: O lema acima prova que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbb{E}(\phi|\mathcal{F}_n)\|_2 < \infty$, o que assegura a primeira condição do teorema de Gordin. A segunda condição do teorema de Gordin segue da

Hölder continuidade de φ. De fato, $\mathbb{E}(\phi, \mathcal{F}_{-n})$ é constante em cada n-ésima imagem $\eta = f^n(\gamma)$ de uma folha estável γ e

$$\inf(\phi|_\gamma) \leq \mathbb{E}(\phi, \mathcal{F}_{-n}) \leq \sup(\phi|_\gamma).$$

Visto que o diâmetro de η é menor que $C_s\lambda_s^n$ para alguma constante C_s que não depende de γ, $\lambda_s \in (0,1)$ e ϕ é (A,α)-Hölder para alguma constante $A > 0$, obtemos que

$$\|\phi - \mathbb{E}(\phi, \mathcal{F}_{-n})\|_2 \leq \|\phi - \mathbb{E}(\phi, \mathcal{F}_{-n})\|_0 \leq AC_s^\alpha \lambda_s^{\alpha n}.$$

Isto nos garante que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|\phi - \mathbb{E}(\phi, \mathcal{F}_{-n})\|_2 < \infty$. O resultado segue como corolário do teorema de Gordin.

□

Capítulo 4

Resultados Ulteriores: Derivados de Anosov

Este último capítulo é reservado a dinâmicas parcialmente hiperbólicas derivadas de sistemas Anosov. De posse das técnicas e resultados provados no capítulo anterior, provamos a invariância pelo operador transferência e diâmetro finito na métrica projetiva, de um cone de funções análogo ao contexto de semi-conjugações com dinâmicas não uniformemente expansoras, como em Castro-Varandas. Além disso, construímos a partir da convergência nos cones uma medida com decaimento exponencial de correlações, e por consequência, que satisfaz o teorema do limite central.

4.1 Contexto

Nosso objetivo neste capítulo é provar o decaimento exponencial de correlações e como consequência o teorema do limite central, para uma medida invariante associada a uma dinâmica $f : M \to M$ derivada de um sistema Anosov.

Sejam M uma variedade riemanniana compacta e $f : M \to M$ um difeomorfismo sobre sua imagem. Seja Λ um subconjunto compacto de M com as seguintes propriedades:

1. Existe uma vizinhança aberta Q de Λ, f-invariante, tal que $f(\overline{Q}) \subset Q$ e

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(Q).$$

2. Suponha Λ parcialmente hiperbólico, no sentido que existe uma decomposição contínua Df-invariante

$$T_\Lambda M = E^{ss} \oplus E^{uc}, dim(E^{ss}) > 0$$

do fibrado tangente restrito a Λ, tal que, fixada uma métrica riemanniana em M temos:

(a) E^{ss} contrai uniformemente:
$\|Df^n|E_x^{ss}\| \leq C\lambda_s^n$

(b) E^{uc} é dominado por E^{ss}:
$\|Df^n|E_x^{ss}\|\|Df^{-n}|E_{f^n(x)}^{uc}\| \leq C\lambda_s^n$

para todo $n \geq 1$ e $x \in \Lambda$, onde $0 < \lambda_s < 1$.

3. Existe uma foliação centro instável $\mathcal{F}_{loc}^{uc}$ de uma vizinhança de Λ, invariante, tangente ao subfibrado centro instável E^{uc} em Λ, além da foliação estável $\mathcal{F}_{loc}^{s}$ tangente ao subfibrado estável E^{ss} em Λ.

   Para seguir com as considerações sobre a dinâmica f, necessitaremos do conceito de Partição de Markov no nosso contexto parcialmente hiperbólico. Iniciaremos definindo um retângulo próprio de Markov:

   Definição 1. *Dizemos que $R \subset \Lambda$ é um* ***retângulo próprio*** *de Markov, se para todos x e y em R existir um único ponto $z := [x, y]$ em R que é a interseção de uma variedade estável local passando por x, com uma variedade centro instável local passando por y. Além disso, R é o fecho do seu interior(na topologia relativa a Λ) e em particular fechado.*

   Podemos observar que a fronteira de retângulos próprios de Markov são uniões de variedades estáveis e centro instáveis locais.

   Definição 2. *Dizemos que a coleção $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_p\}$ de retângulos próprios é uma* ***Partição de Markov*** *para f restrito a Λ, se:*

   (a) $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{p} R_i$;

   (b) $int\,(R_i) \cap int\,(R_j) = \emptyset$ *para* $i \neq j$;

   (c) Se γ é a interseção de uma variedade estável local com R_i e $f(\gamma) \cap R_j \neq \emptyset$ então $f(\gamma) \subset R_j$. Analogamente, se Γ é a interseção de uma variedade centro instável local com R_i e $f^{-1}(\Gamma) \cap R_k \neq \emptyset$ então $f^{-1}(\Gamma) \subset R_k$.

4. A dinâmica f restrita à Λ admite uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_p\}$, $p \geq 2$ com a propriedade mixing: dados $i, j \in \{1, \cdots, p\}$, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$f^n(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$$

para todo $n \geq n_0$.

Distinguiremos dois tipos de retângulos em $\mathcal{R}$ de acordo com o seu comportamento na direção E^{uc}. Fixado $0 < \zeta < 1$, diremos que $R_i \in \mathcal{R}$ é um **retângulo bom** se

$$\|Df|_{E^{uc}_x}\|^{-1} \leq \zeta$$

para todo $x \in R_i$. Ou seja, E^{uc} contrai uniformemente em R_i. Chamaremos de **retângulo ruim** todos os outros retângulos de $\mathcal{R}$. Nossa próxima hipótese sobre o sistema dinâmico f é que

5. Existe algum retângulo bom e para todo x num retângulo ruim

$$\|Df|_{E^{uc}_x}\|^{-1} \leq L$$

onde $L \geq 1$ é necessariamente próximo de um. Isto nos diz que nesta direção a dinâmica pode contrair, mas não muito.

Uma classe robusta de aplicações satisfazendo as condições 1 à 5, acima, pode ser obtida por A. A. Castro em [Cas02]. De fato, seja $g : M \to M$ como em [Cas02]. Considerando $f = g^{-1}$, os subfribados instável forte(E^{uu}) e centro estável(E^{cs}), de g como em [Cas02], são respectivamente os subfibrados estável forte(E^{ss}) e centro instável(E^{uc}) de f, como no nosso contexto.

Seja $\bar{\mathcal{R}} := \left\{\bar{R}_1, \cdots, \bar{R}_p\right\}$ a partição de Markov associada a g com propriedade mixing. Definindo $R_j = g(\bar{R}_j)$ temos que $\mathcal{R} := \{R_1, \cdots, R_p\}$ é uma partição de Markov para f e $f^n(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$ implica que $\bar{R}_i \cap g^n(\bar{R}_j) \neq \emptyset$, daí $\mathcal{R}$ também satisfaz a propriedade mixing.

Além disso um retângulo bom de f é a imagem de um retângulo bom de g, pois se $\bar{R}_j$ é tal que $\|Dg(y)|E^{cs}_y\| \leq \zeta$ para todo $y \in \bar{R}_j$, segue que para todo $x \in R_j = g(\bar{R}_j)$ temos $x = g(y)$ onde $y \in \bar{R}_j$ e assim

$$\begin{aligned}
\|Df|_{E^{uc}_x}\|^{-1} &= \|Dg^{-1}|_{E^{cs}_{g(y)}}\|^{-1} \\
&= \left(\|Dg|_{E^{cs}_{g^{-1}(g(y))}}\|^{-1}\right)^{-1} \\
&= \|Dg|_{E^{cs}_y}\| \leq \zeta.
\end{aligned}$$

4.2 Cones Invariantes

Dado $x \in \Lambda$ denotaremos por γ a interseção de uma variedade estável local no ponto x com um retângulo da partição de Markov. Podemos supor que a propriedade mixing é dada na primeira interação, ou seja, dados quaisquer retângulos R_i e R_j de $\mathcal{R}$ temos

$$f(R_i) \cap R_j \neq \emptyset.$$

Caso contrário, provaríamos os resultados para um iterado da f. Sendo assim, se γ é a interseção da variedade estável local $W^s_{loc}(x)$ com algum retângulo R_i, temos $\gamma = \bigcup_{j=1}^{p_\gamma} f(\gamma_j)$, onde γ_j é a interseção de um retângulo R_j com a variedade estável local no ponto $f^{-1}(y)$, para algum ponto $y \in W^s_{loc}(x)$ e $p_\gamma \in \mathbb{N}$.

Observemos agora que pelas propriedades da Partição de Markov, se $\gamma = W^s_{loc}(x) \cap R_i$, $\hat{\gamma} = W^s_{loc}(y) \cap R_i$ e $x, y \in R_i$ então $W^s_{loc}(x) \cap f(R_j) \neq \emptyset$ se somente se $W^s_{loc}(y) \cap f(R_j) \neq \emptyset$. Assim existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \bigcup_{j=1}^{s} f(\gamma_j)$ e $\hat{\gamma} = \bigcup_{j=1}^{s} f(\hat{\gamma}_j)$, onde $\gamma_j, \hat{\gamma}_j \subset R_j$ e $p_\gamma = p_{\hat{\gamma}} = s$. Não temos garantia disto no caso onde x e y estão no interior de retângulos distintos da Partição de Markov.

A observação acima é importante para o cálculo do diâmetro finito e além disso modifica ligeiramente a definição das medidas de probabilidades definidas nas folhas $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$, comparado ao caso onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em [CV13] e assim p_γ é constante igual a p, que por sua vez representa o grau da aplicação g.

Fixada então $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ temos $\gamma = \bigcup_{j=1}^{p_\gamma} f(\gamma_j)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, por indução podemos escrever

$$\gamma = \bigcup_{i_1=1}^{p_{i_0}} \bigcup_{i_2=1}^{p_{i_1}} \cdots \bigcup_{i_n=1}^{p_{i_{n-1}}} f^n(\gamma_{i_1 \cdots i_n})$$

onde $f(\gamma_{i_1 \cdots i_{n+1}}) \subset \gamma_{i_1 \cdots i_n}$, $\gamma_{i_1 \cdots i_n} = \bigcup_{i_{n+1}=1}^{p_{i_n}} f(\gamma_{i_1 \cdots i_{n+1}})$ e $p_{i_k}, k \in \mathbb{N}$. Observe também que $p_{i_0} = p_\gamma$. Como a união acima é disjunta, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, os conjuntos da forma $f^n(\gamma_{i_1 \cdots i_n})$ com $i_k \in \{1, \cdots, p_{i_{k-1}}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ definem uma partição para γ. Nada mais natural então que definir uma medida de probabilidade em γ da seguinte forma:

$$\mu_\gamma\left(f^n\left(\gamma_{i_1 \cdots i_n}\right)\right) := \frac{1}{p_{i_0} p_{i_1} \cdots p_{i_{n-1}}}$$

Como o diâmetro de $f^n\left(\gamma_{i_1 \cdots i_n}\right)$ tende a zero, pois $\gamma_{i_1 \cdots i_n}$ está contida numa variedade estável local, temos que μ_γ está bem definida em γ e é uma medida de probabilidade em

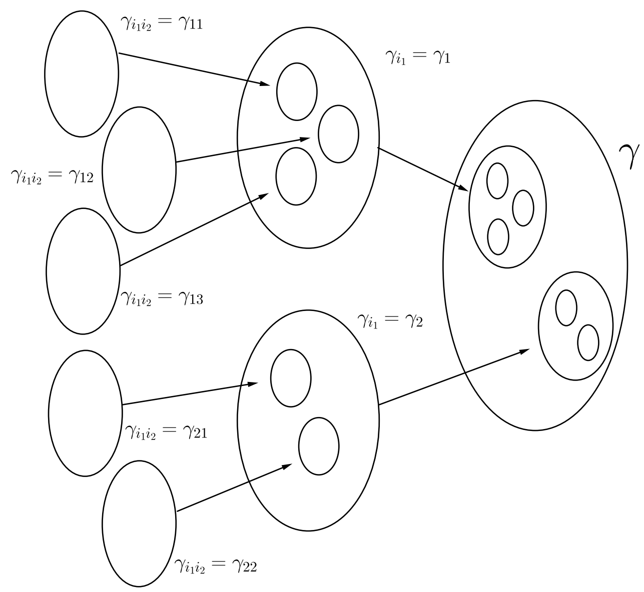

Figura 4.1: Distribuição de massa para derivados de Anosov

γ pois,

$$\mu_\gamma(\gamma)=\sum_{i_1=1}^{p_{i_0}}\sum_{i_2=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{i_n=1}^{p_{i_{n-1}}}\mu_\gamma\left(f^n(\gamma_{i_1\cdots i_n})\right)=\sum_{i_1=1}^{p_{i_0}}\sum_{i_2=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{i_n=1}^{p_{i_{n-1}}}\frac{1}{p_{i_0}p_{i_1}\cdots p_{i_{n-1}}}=1.$$

Naturalmente é possível estender tal medida ao atrator Λ. Seja então A um elemento da $\sigma-$álgebra de Borel de Λ. Podemos escrever

$$\mu_\gamma(A)=\mu_\gamma(A\cap\gamma)=\mu_\gamma\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{p_\gamma}f(\gamma_j)\right)=\mu_\gamma\left(\bigcup_{j=1}^{p_\gamma}(A\cap f(\gamma_j))\right)=\sum_{j=1}^{p_\gamma}\mu_\gamma(A\cap f(\gamma_j))$$

Definindo $\mu_{\gamma_j}(A):=p_\gamma\mu_\gamma(f(A\cap\gamma_j))$ obtemos que $\dfrac{1}{p_\gamma}\mu_{\gamma_j}(f^{-1}(A))=\mu_\gamma(A\cap f(\gamma_j))$ e assim

$$\mu_\gamma(A)=\frac{1}{p_\gamma}\sum_{j=1}^{p_\gamma}\mu_{\gamma_j}(f^{-1}(A))$$

Além disso $\mu_{\gamma_j}\left(f^n\left(\gamma_{j_1\cdots j_n}\right)\right)=\dfrac{1}{p_{j_0}p_{j_1}\cdots p_{j_{n-1}}}$ e em particular é uma medida de probabilidade em γ_j. Observemos agora que $\mu_\gamma(A\cap f(\gamma_j))=\dfrac{1}{p_\gamma}\mu_{\gamma_j}(f^{-1}(A))$ implica que para todo A mensurável, obtemos que a função característica χ_A satisfaz

$$\int_{f(\gamma_j)}\chi_A d\mu_\gamma=\frac{1}{p_\gamma}\int_{\gamma_j}\chi_A\circ f d\mu_{\gamma_j}$$

e pelo teorema da convergência dominada, segue que para toda $g:\Lambda\to\mathbb{R}$ contínua que

$$\int_{f(\gamma_j)}g d\mu_\gamma=\frac{1}{p_\gamma}\int_{\gamma_j}g\circ f d\mu_{\gamma_j}. \tag{4.1}$$

Nosso operador transferência $\mathcal{L}$ definido no espaço de Banach E das funções $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$ limitadas , é dado por $\mathcal{L}(\varphi)(x) = \varphi(f^{-1}(x))e^{\phi(f^{-1}(x))}$. Como $\gamma = \bigcup_{j=1}^{p_\gamma} f(\gamma_j)$ e utilizando a mudança de variável como em 4.1 obtemos que

$$\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p_\gamma} \int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}$$

onde $\rho_j := \frac{1}{p_\gamma}\rho \circ f e^{\phi}$. Ou seja, o operador de Ruelle-Perron-Frobenius atua sobre as funções testes no caso do derivado de Anosov da mesma forma que no caso onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em [CV13]. Isto nos motiva a definir de forma similar nosso cone de funções apropriado, isto é, um cone estritamente invariante para o operador de Ruelle-Perron-Frobenius e diâmetro finito da imagem do cone pelo operador, em relação a métrica projetiva.

Para isso devemos modificar os critérios da definição do item (C) do caso onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em [CV13]. Pois, mesmo para folhas próximas γ e $\widetilde{\gamma}$ necessitamos acrescentar a hipótese que as mesmas estejam no mesmo retângulo da Partição de Markov, já que sem tal hipótese não garantimos a existência da projeção $\pi : \widetilde{\gamma} \to \gamma$ entre as folhas de forma que possamos definir a distância entre γ e $\widetilde{\gamma}$, como sendo $d(\gamma, \widetilde{\gamma}) = \sup\{d(\pi(p), p); p \in \widetilde{\gamma}\}$.

Igualmente ao contexto onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em $[CV13]$, definiremos o cone auxiliar $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ das densidades $\rho : \gamma \to \mathbb{R}$ tais que $\rho > 0$ e $|\rho|_\alpha < \kappa \inf \rho$. Como γ está contida numa variedade estável local e ainda assegurando as hipóteses sobre o potencial ϕ, ou seja, $\sup \phi - \inf \phi < \varepsilon$ and $\left|e^{\phi}\right|_\alpha \le \varepsilon \inf e^{\phi}$, temos ainda válido o lema auxiliar 2, isto é, existe $0 < \lambda < 1$ e $\kappa > 0$ tais que

1. Para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ se $\rho, \hat{\rho} \in \mathcal{D}(\gamma, \lambda\kappa)$ então $\theta(\rho, \hat{\rho}) \le 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$.

2. Se $\rho \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ então $\rho_j \in \mathcal{D}(\gamma_j, \lambda\kappa)$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$.

3. Se $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ então existe $\Lambda_1 = 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ tal que $\theta_j(\rho'_j, \rho''_j) \le \Lambda_1 \theta(\rho', \rho'')$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$;

onde θ_j e θ são, respectivamente, a métrica projetiva associadas aos cones $\mathcal{D}(\gamma_j, \kappa)$ e $\mathcal{D}(\gamma, \kappa)$.

Explicitemos agora nosso cone principal. Para tal, denotaremos mais uma vez por $\mathcal{D}_1(\gamma)$ o conjunto das densidades $\rho \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$ tais que $\int_\gamma \rho d\mu_\gamma = 1$. Dados $b > 0$, $c > 0$ e κ como no lema auxiliar 2, seja $C[b, c, \alpha]$ o cone de funções $\varphi \in E$ satisfazendo para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s$ as condições abaixo:

- (A)Para todo $\rho \in \mathcal{D}(\gamma, \kappa)$:
$$\int_\gamma \varphi \rho d\mu_\gamma > 0$$
- (B) Para todo $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$:
$$\left| \int_\gamma \varphi \rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi \rho'' d\mu_\gamma \right| < b\theta\left(\rho', \rho''\right) \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \int_\gamma \varphi \rho d\mu_\gamma \right\}$$
- (C) Dadas quaisquer folhas γ e $\widetilde{\gamma}$ num mesmo retângulo R_i, da Partição de Markov:
$$\left| \int_\gamma \varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right| < c d(\gamma, \widetilde{\gamma})^\alpha \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma \varphi d\mu_\gamma \right\}$$

A prova da invariância estrita do cone $C[b, c, \alpha]$ pelo operador Ruelle-Perron-Frobenius segue os passos da invariância do cone $C(b, c, \alpha)$ no caso onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em [CV13].

Antes de iniciar a prova da invariância, devemos atentar aos seguintes fatos:

Observação 2. *Dados γ e $\widetilde{\gamma}$ em um mesmo retângulo, ou seja, se $\gamma = W^s_{loc}(x) \cap R_i$, $\widetilde{\gamma} = W^s_{loc}(y) \cap R_i$ e $x, y \in int(R_i)$ então $W^s_{loc}(x) \cap f(R_j) \neq \emptyset$ se somente se $W^s_{loc}(y) \cap f(R_j) \neq \emptyset$. Assim existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \bigcup_{j=1}^{p} f(\gamma_j)$ e $\widetilde{\gamma} = \bigcup_{j=1}^{p} f(\widetilde{\gamma}_j)$, onde $\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j \subset R_j$ e $p_\gamma = p_{\widetilde{\gamma}} = p$.*

Observação 3. *Sejam γ e $\widetilde{\gamma}$ como na observação anterior. Podemos supor sem perda de generalidade que γ_1 e $\widetilde{\gamma}_1$ estão em um mesmo retângulo bom e assim existe $0 < \lambda_{uc} < 1$ tal que $d(\gamma_1, \widetilde{\gamma}_1) \leq \lambda_{uc} d(\gamma, \widetilde{\gamma})$ e nos demais casos, $j \neq 1$, existe $\tilde{L} \geq 1$ próximo de um tal que $d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j) \leq \tilde{L} d(\gamma, \widetilde{\gamma})$.*

Para justificar a observação 3, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 8. *Sejam $\gamma = \bigcup_{j=1}^{p} f(\gamma_j)$ e $\widetilde{\gamma} = \bigcup_{j=1}^{p} f(\widetilde{\gamma}_j)$ contidos em um retângulo $R_j \in \mathcal{R}$ e $\delta > 0$ fixado. Se $\|Df|E^{uc}_x\|^{-1} \leq K$ para todo $x \in R_i$ e $\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i \subset R_i$ então $d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i) \leq K(1 + \delta) d(\gamma, \widetilde{\gamma})$.*

Prova: Sejam Γ_0 e Γ_1, folhas em $\mathcal{F}^{uc}_{loc}$ passando respectivamente por $x \in \widetilde{\gamma}_i$ e $f(x)$ necessariamente em $\widetilde{\gamma}$. Podemos escolher uma curva ξ_1 em Γ_1 tal que $d(f(x), \pi(f(x))) = l(\xi_1)$(onde $l(.)$ indica o comprimento da curva). Sabemos que o ângulo entre Γ_1 e $f(\Gamma_0)$ é limitado. Por outro lado, dado $\delta > 0$ podemos supor o diâmetro do retângulo R_j suficientemente pequeno de modo que existe uma curva ξ_2 em $f(\Gamma_0)$ ligando os pontos $f(x)$ e $f(\pi_i(x))$ tal que
$$l(\xi_2) \leq (1 + \delta) l(\xi_1)$$

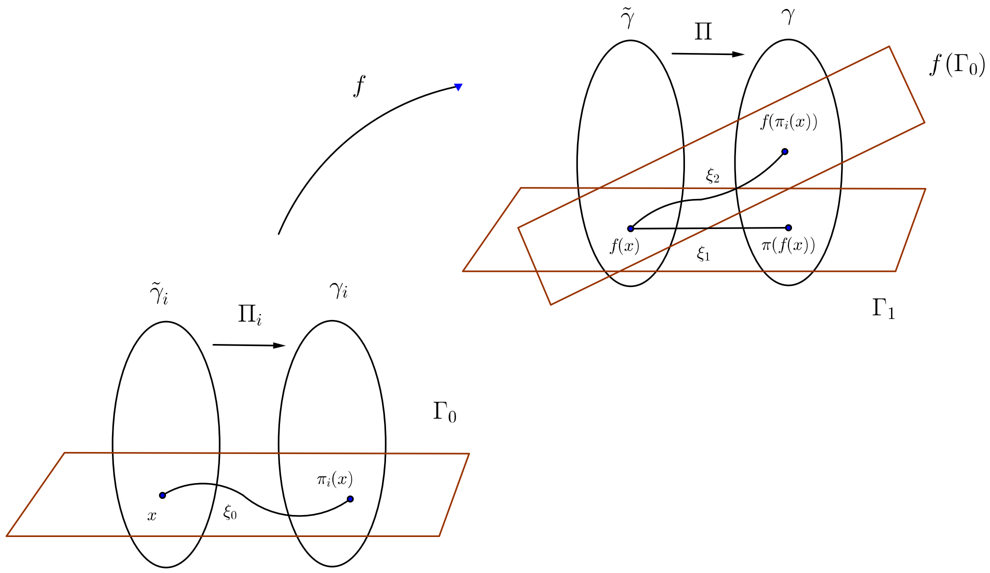

Figura 4.2: Distância entre folhas

Defina então $\xi_0 = f^{-1}(\xi_2)$. Daí

$$l(\xi_0) = l(f^{-1}(\xi_2)) = \int_0^1 \| \left(f^{-1} \circ \xi_2\right)' (t) \| dt \le \int_0^1 \|Df^{-1}(\xi_2(t))\| \cdot \|\xi_2'(t)\| dt.$$

Como $\xi_2 = f(\xi_0)$ e $\xi_0 \subset \Gamma_0$ temos $\|Df^{-1}(f(\xi_0))\| = \|Df(\xi_0)\|^{-1} \le \|Df(\xi_0)|E^{uc}\|^{-1}$ e assim $l(\xi_0) \le K \cdot l(\xi_2)$. Logo

$$d(x, \pi_i(x)) \le l(\xi_0) \le K \cdot l(\xi_2) \le K(1+\delta) l(\xi_1) = K(1+\delta) d(f(x), \pi(f(x))).$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in \widetilde{\gamma}_i$ tal que

$$d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i) \le d(x, \pi_i(x)) + \epsilon \le K(1+\delta) d(f(x), \pi(f(x)) + \epsilon \le K(1+\delta) d(\gamma, \widetilde{\gamma}) + \epsilon$$

isto nos permite concluir que $d(\gamma_i, \widetilde{\gamma}_i) \le K(1+\delta) d(\gamma, \widetilde{\gamma})$.

$\square$

Em particular se na proposição 8, $K = \zeta < 1$ podemos definir $\lambda_{uc} = \zeta(1+\delta)$ e escolher δ suficientemente pequeno para que $0 < \lambda_{uc} < 1$. Por outro lado se $K = L$, arbitrariamente próximo de um, podemos definir $\tilde{L} = L(1+\delta)$ e escolher δ suficientemente pequeno para que $\tilde{L}$ seja também arbitrariamente próximo de um. Isto prova a observação 3.

Proposição 9. *Seja ϕ um potencial constante. Existe $0 < \sigma < 1$ tal que $\mathcal{L}(C[b,c,\alpha]) \subset C[\sigma b, \sigma c, \alpha]$ para b e c suficientemente grandes.*

Prova: Invariância da condição (A):

Seja $\varphi \in C[b,c,\alpha]$. Sabemos que $\displaystyle\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p_\gamma}\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}$ e pelo lema 2 $\rho_j \in \mathcal{D}(\gamma_j,\kappa)$. Portanto, $\displaystyle\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma > 0$.

Invariância da condição (B):

Denotando $\dfrac{\rho_j}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}}$ por $\hat{\rho}_j$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma\right\} &\geq \sum_{j=1}^{p_\gamma}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{p_\gamma}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\hat{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\\
&\geq \sum_{j=1}^{p_\gamma}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\hat{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}\\
&\geq \sum_{j=1}^{p_\gamma}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho d\mu_{\gamma_j}\right\}\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}
\end{aligned}$$

Dado $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ denotando $\rho'_j/\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho'_j d\mu_{\gamma_j}$ e $\rho''_j/\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho''_j d\mu_{\gamma_j}$ por $\overline{\rho}_j$ e $\overline{\overline{\rho}}_j$, respectivamente, segue-se que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho'' d\mu_\gamma\right| &\leq \sum_{j=1}^{p_\gamma}\left|\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j}\varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}\right|\int_{\gamma_j}\rho'_j d\mu_{\gamma_j}\\
&+ \sum_{j=1}^{p_\gamma}\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}\left|\int_{\gamma_j}\rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j}\rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Por hipótese φ está no cone e pelo lema 2, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}-\int_{\gamma_j}\varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}\right| &\leq b\theta_j\left(\overline{\rho}_j,\overline{\overline{\rho}}_j\right)\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho d\mu_{\gamma_j}\right\} \\
&= b\theta_j\left(\rho\text{'}_j,\rho\text{''}_j\right)\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho d\mu_{\gamma_j}\right\} \qquad (4.3)\\
&\leq b\Lambda_1\theta\left(\rho\text{'},\rho\text{''}\right)\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)}\left\{\int_{\gamma_j}\varphi\rho d\mu_{\gamma_j}\right\}.
\end{aligned}
$$

Vamos observar um pouco mais. Para todo $\hat{\rho}\in\mathcal{D}_1(\gamma)$ obtemos a seguinte estimativa

$$
\frac{\int_{\gamma_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}}\leq(1+\kappa diam M^{\alpha})^2 \qquad (4.4)
$$

De fato, dado $\delta>0$ existe $\widetilde{\rho}\in\mathcal{D}_1(\gamma)$ tal que $\int_{\gamma_j}(\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}\leq(1+\delta)\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}$ e mais ainda, como $\hat{\rho}$ e $\widetilde{\rho}$ estão normalizados pela integral, devemos ter necessariamente $\inf\hat{\rho}\leq 1$ e $\sup\widetilde{\rho}\geq 1$. Logo,

$$
\frac{(\hat{\rho})_j}{(\widetilde{\rho})_j}=\frac{\frac{1}{p_\gamma}\hat{\rho}\circ fe^{\phi}}{\frac{1}{p_\gamma}\widetilde{\rho}\circ fe^{\phi}}\leq\frac{\sup\hat{\rho}}{\inf\widetilde{\rho}}\leq\frac{(1+\kappa diam M^{\alpha})\inf\hat{\rho}}{(1+\kappa diam M^{\alpha})^{-1}\sup\widetilde{\rho}}=(1+\kappa diam M^{\alpha})^2.
$$

Assim $\int_{\gamma_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}\leq(1+\kappa diam M^{\alpha})^2\int_{\gamma_j}(\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}$, obtendo para todo $\delta>0$ que

$$
\frac{\int_{\gamma_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}}\leq\frac{(1+\delta)(1+\kappa diam M^{\alpha})^2\int_{\gamma_j}(\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}{\int_{\gamma_j}(\widetilde{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}}\leq(1+\delta)(1+\kappa diam M^{\alpha})^2
$$

o que prova a afirmação acima.

Agora, para j fixado, obtemos

$$\frac{\left|\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}\right| \int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma_j)} \left\{\int_{\gamma_j} \varphi\rho d\mu_{\gamma_j}\right\} \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\} \theta(\rho', \rho'')} \leq \frac{b\Lambda_1\theta\left(\rho', \rho''\right) \int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\} \theta(\rho', \rho'')}$$

$$\leq \left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2 \Lambda_1 b \tag{4.5}$$

Analisaremos então a segunda parcela de 4.2. Para tal observaremos primeiro que para todo $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\gamma)$, denotando $(\hat{\rho})_j / \int_{\gamma_j} (\hat{\rho})_j d\mu_{\gamma_j}$ por $\bar{\hat{\rho}}_j$, segue-se que

$$\frac{\int_{\gamma_j} \varphi\bar{\hat{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} < b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + 1$$

Com efeito, analogamente ao que foi feito em 4.4, é suficiente notar que como φ está no cone temos

$$\frac{\int_{\gamma_j} \varphi\bar{\hat{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}} < b\theta(\bar{\hat{\rho}}_j, \overline{\rho}_j) + 1 = b\theta((\hat{\rho})_j, \rho_j) + 1$$

pelo lema 2, segue a afirmação anterior. Agora estabeleceremos outra estimativa necessária:

$$\frac{\left|\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq 2\left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2.$$

Para mostrar isso observaremos que

$$\frac{\rho'_j}{\rho''_j} = \frac{1/p_\gamma\rho' \circ f e^{\phi}}{1/p_\gamma\rho'' \circ f e^{\phi}} \leq \frac{\sup\rho'}{\inf\rho''} \leq \frac{\sup\rho'/\inf\rho'}{\inf\rho''/\sup\rho''} = e^{\theta_+(\rho',\rho'')} \leq e^{\theta(\rho',\rho'')}$$

Assim, assumindo sem perda de generalidade que $\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} \geq \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}$ temos

$$\frac{\left|\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq \frac{\left(e^{\theta\left(\rho', \rho''\right)} - 1\right) \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}}{\theta\left(\rho', \rho''\right) \inf_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}}$$

para $\theta(\rho', \rho'') \leq 1$ segue que $\dfrac{e^{\theta(\rho', \rho'')} - 1}{\theta(\rho', \rho'')} < 2$ a assim neste caso obtemos a estimativa requerida.

Se $\theta(\rho', \rho'') \geq 1$ também temos

$$\frac{\left|\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\theta(\rho', \rho'') \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq \frac{\left|\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} \leq 2\left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2$$

e novamente para j fixado e denotando $(1 + \kappa diam M^{\alpha})^2$ por $M(\kappa, \alpha)$

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j} \left|\int_{\gamma_j} \rho'_j d\mu_{\gamma_j} - \int_{\gamma_j} \rho''_j d\mu_{\gamma_j}\right|}{\inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\} \inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\} \theta(\rho', \rho'')} &\leq \frac{\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\gamma_j}}{\inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}\right\}} 2M(\kappa, \alpha) \\
&\leq \left(b \log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 + 1\right) 2M(\kappa, \alpha) \\
&\leq 2M(\kappa, \alpha) \log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 b + 2M(\kappa, \alpha)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

As estimativas 4.5 e 4.6 não dependem de j, então

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\int_{\gamma} \mathcal{L}(\varphi)\rho' d\mu_{\gamma} - \int_{\gamma} \mathcal{L}(\varphi)\rho'' d\mu_{\gamma}\right|}{\inf_{\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\int_{\gamma} \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_{\gamma}\right\} \theta(\rho', \rho'')} &\leq M(\kappa, \alpha)\Lambda_1 b + 2M(\kappa, \alpha) \log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 b + 2M(\kappa, \alpha) \\
&= \left(\Lambda_1 + 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right) M(\kappa, \alpha) b + 2M(\kappa, \alpha)
\end{aligned}$$

Desejamos que o termo que multiplica b acima seja menor que 1. Relembrando que pelo lema (2), $\Lambda_1 = 1 - \left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$ devemos então garantir que

$$\left(1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)\left(1 + \kappa diam M^{\alpha}\right)^2 < 1$$

e ainda pelo lema (2), na prova do segundo item, escolhemos κ, suficientemente pequeno, de modo que $\kappa diam M^{\alpha} < \lambda$. Portanto basta encontrar $0 < \lambda < 1$ de modo que

$$\left(1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)(1+\lambda)^2 < 1.$$

Tal escolha é possível pois no lema (2), $0 < \lambda < 1$ pode ser tomado suficientemente pequeno. Assim, existe $0 < \tilde{\sigma}_1 < 1$ tal que

$$\left(\Lambda_1 + 2\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right) M(\kappa,\alpha) < \tilde{\sigma}_1.$$

Como $M(\kappa,\alpha)$ não depende de b. Para b suficientemente grande, podemos obter $\sigma_1 < 1$ tal que

$$\frac{\left|\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\inf\limits_{\rho\in\mathcal{D}_1(\gamma)}\left\{\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma\right\}\theta(\rho', \rho'')} \leq \sigma_1 b$$

isto prova a invariância estrita da condição (B).

Invariância da condição (C): Provaremos o caso onde ϕ é constante. Como $\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)\rho d\mu_\gamma = \sum_{j=1}^{p_\gamma}\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}$, onde $\rho_j = \frac{1}{p_\gamma}\rho\circ f e^{\phi}$. Para $\rho = 1$ obtemos $\int_\gamma \mathcal{L}(\varphi)d\mu_\gamma = e^{\phi}\sum_{j=1}^{p_\gamma}\frac{1}{p_\gamma}\int_{\gamma_j}\varphi d\mu_{\gamma_j}$. Isto implica que

$$\inf_\gamma\left\{\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma\right\} \geq e^{\phi}\inf_\gamma\left\{\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma\right\}.$$

Pela observação 3, podemos assumir, sem perda de generalidades, que $d(\gamma_1, \widetilde{\gamma}_1) \leq \lambda_u d(\gamma, \widetilde{\gamma})$, e nos outros casos $d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j) \leq \tilde{L} d(\gamma, \widetilde{\gamma})$. E pela observação 2, temos que se γ e $\widetilde{\gamma}$ estão em um mesmo retângulo da partição de Markov, então $p_\gamma = p_{\widetilde{\gamma}}$. Segue então que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \mathcal{L}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}}\right| &\leq \frac{e^{\phi}}{p_\gamma}\sum_{j=1}^{p_\gamma}\left|\int_{\gamma_j}\varphi d\mu_{\gamma_j} - \int_{\widetilde{\gamma}_j}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}_j}\right| \\
&\leq \frac{e^{\phi}c}{p_\gamma}\inf_\gamma\left\{\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma\right\}\sum_{j=1}^{p_\gamma} d(\gamma_j, \widetilde{\gamma}_j)^{\alpha} \\
&\leq \frac{\lambda_u^{\alpha} + (p_\gamma - 1)L^{\alpha}}{p_\gamma} C d(\gamma, \widetilde{\gamma})^{\alpha}\inf_\gamma\left\{\int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma\right\}
\end{aligned}$$

Devemos ter então $\frac{\lambda_u^{\alpha} + (p_\gamma - 1)\tilde{L}^{\alpha}}{p_\gamma} < 1$ e isto é equivalente a

$$\tilde{L}^{\alpha} < \frac{p_\gamma - \lambda_u^{\alpha}}{p_\gamma - 1}$$

Seja $p_{max} \in \mathbb{N}$ tal que $p_\gamma \leq p_{max}$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$. Como $\lambda_u < 1 < p_\gamma \leq p_{max}$ temos que

$$\frac{p_{max} - \lambda_u^\alpha}{p_{max} - 1} \leq \frac{p_\gamma - \lambda_u^\alpha}{p_\gamma - 1}$$

Basta escolher então $\tilde{L}$ tal que

$$\tilde{L}^\alpha < \frac{p_{max} - \lambda_u^\alpha}{p_{max} - 1}$$

Relembramos que $\tilde{L} \geq 1$, assim devemos ter necessariamente

$$\frac{p_{max} - \lambda_u^\alpha}{p_{max} - 1} \geq 1$$

e isto é verdadeiro porque $\lambda_u < 1$. Portanto, existe $\sigma_2 < 1$ tal que

$$\left| \int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \mathcal{L}\varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right| < \sigma_2 C d(\gamma, \widetilde{\gamma})^\alpha \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma \mathcal{L}\varphi d\mu_\gamma \right\}$$

o que prova a invariância estrita da condição (C). Para finalizar a prova da proposição basta tomar $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

$\square$

Prova-se de modo inteiramente análogo ao caso caso onde a dinâmica é semi-conjugada a uma aplicação g como em [CV13] que

Lema 5. *$C[b,c,\alpha]$ é um cone projetivo, isto é, convexo e* $\overline{C[b,c,\alpha]} \cap -\overline{C[b,c,\alpha]} = 0$.

Passaremos agora a nos preocupar com o diâmetro finito da imagem do cone $C[b,c,\alpha]$. Mais precisamente, denotando ainda por Θ a métrica projetiva associada ao cone $C[b,c,\alpha]$ provaremos a seguinte proposição:

Proposição 10. *Para b e c suficientemente grandes e $\alpha \in (0,1]$ temos*

$$\Delta := \sup \left\{ \Theta\left(\mathcal{L}\varphi, \mathcal{L}\psi\right); \varphi, \psi \in C[b,c,\alpha] \right\} < \infty.$$

Prova:

Denotando também por Θ_+ a métrica projetiva associada ao cone definido pela condição (A) expressa através de

$$e^{\Theta_+(\varphi,\psi)} = \sup_{\gamma, \rho \in \mathcal{D}(\gamma), \hat{\gamma}, \hat{\rho} \in \mathcal{D}(\hat{\gamma})} \left\{ \frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi \rho d\mu_\gamma \int_{\hat{\gamma}} \psi \hat{\rho} d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi \hat{\rho} d\mu_{\hat{\gamma}} \int_\gamma \psi \rho d\mu_\gamma} \right\}$$

segue da definição de Θ e das expressões de α e β que

$$\Theta(\varphi,\psi) < \Theta_+(\varphi,\psi) + log \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^2.$$

Para mostrar que o Θ_+-diâmetro de $\mathcal{L}\left(C[b,c,\alpha]\right)$ é finito, já observamos que é suficiente majorar os possíveis valores de $\Theta_+(\mathcal{L}(\varphi),1)$ variando φ no cone $C[b,c,\alpha]$. Pela definição da métrica Θ_+ isto se resume a encontrar uma cota superior para

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \mathcal{L}\varphi\hat{\rho}d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\gamma} \mathcal{L}\varphi\rho d\mu_{\gamma}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p_{\hat{\gamma}}}\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{p_{\gamma}}\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} \tag{4.7}$$

onde ρ e $\hat{\rho}$ são normalizados, isto é, $\rho \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ e $\hat{\rho} \in \mathcal{D}_1(\hat{\gamma})$. Limitaremos primeiro a expressão

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} = \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}} \frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}}$$

para γ_j e $\hat{\gamma}_j$ em um mesmo retângulo da Partição de Markov. Denotando $\dfrac{\rho_j}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}}$ e $\dfrac{(\hat{\rho})_j}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}$ por $\overline{\rho}_j$ e $\overline{\overline{\rho}}_j$, respectivamente, aplicando a condição (B) e o lema 2, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} &= \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi\overline{\overline{\rho}}_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j} \varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}} \\
&\leq \left(1 + b\theta_j\left(\overline{\overline{\rho}}_j, 1\right)\right)\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j} \\
&\leq \left(1 + b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} = \frac{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi d\mu_{\gamma_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j} \varphi\overline{\rho}_j d\mu_{\gamma_j}\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}} \leq \frac{\left(1 + b\theta_j\left(1, \overline{\rho}_j\right)\right)}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}} \leq \frac{\left(1 + b\log\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}}.$$

Sabemos que $(\hat{\rho})_j = \dfrac{1}{p_{\hat{\gamma}}}\hat{\rho}\circ f\cdot e^{\phi}$ e $\rho_j = \dfrac{1}{p_{\gamma}}\rho\circ f\cdot e^{\phi}$. Como ρ e $\hat{\rho}$ estão normalizados, segue que $(\hat{\rho})_j \leq \dfrac{1}{p_{\hat{\gamma}}}(1+\kappa diam(M)^\alpha)e^\phi$ e $\rho_j \geq \dfrac{1}{p_\gamma}(1+\kappa diam(M)^\alpha)^{-1}e^\phi$. Portanto

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}} < \frac{p_\gamma}{p_{\hat{\gamma}}}(1+\kappa diam(M)^\alpha)^2\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}e^\phi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}e^\phi d\mu_{\gamma_j}},$$

por outro lado $\left|e^\phi\right|_\alpha < \varepsilon \inf e^\phi$ e assim $\sup e^\phi < (1+\varepsilon diam(M)^\alpha)\inf e^\phi$. Obtendo que

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}e^\phi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}e^\phi d\mu_{\gamma_j}} < 1+\varepsilon diam(M)^\alpha$$

e por consequência

$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\rho_j d\mu_{\gamma_j}} &< \frac{p_\gamma}{p_{\hat{\gamma}}}(1+\kappa diam(M)^\alpha)^2(1+\varepsilon diam(M)^\alpha)\\ &\leq p_{max}(1+\kappa diam(M)^\alpha)^2(1+\varepsilon diam(M)^\alpha).\end{aligned}$$

Pela condição (C), a seguinte estimativa também é verdadeira

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}\varphi d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\varphi d\mu_{\gamma_j}} \leq 1+cd\left(\hat{\gamma}_j,\gamma_j\right)^\alpha \leq 1+c.diam(M)^\alpha$$

logo

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_j}\varphi(\hat{\rho})_j d\mu_{\hat{\gamma}_j}}{\displaystyle\int_{\gamma_j}\varphi\rho_j d\mu_{\gamma_j}} < p_{max}\left(1+b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^2(1+\max\{\kappa,c,\varepsilon\}diam(M)^\alpha)^4.$$

Porém, dada uma folha γ pode existir mais de uma folha γ_j em um retângulo da Partição de Markov $\mathcal{R}=\{R_1,\cdots,R_p\}$. Assim, podemos reescrever 4.7 da seguinte forma

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}}\mathcal{L}\varphi\hat{\rho}d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\gamma}\mathcal{L}\varphi\rho d\mu_{\gamma}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}}\varphi(\hat{\rho})_{k_l}d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}}\varphi\rho_{k_l}d\mu_{\gamma_{k_l}}}$$

onde dado $R_k \in \mathcal{R}$ temos $\gamma_{k_l} \subset R_k$ para todo $l \in \{1,\cdots,r_k(\gamma)\}$ e $\hat{\gamma}_{k_l} \subset R_k$ para todo $l \in \{1,\cdots,r_k(\hat{\gamma})\}$. Além disso $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} r_k(\gamma) = p_\gamma$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} r_k(\hat{\gamma}) = p_{\hat{\gamma}}$. Como $\gamma_{k_l}, \hat{\gamma}_{k_l} \subset R_k$, definindo

$$\tilde{C} := p_{max}\left(1 + b\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^2 (1 + \max\{\kappa, c, \epsilon\}diam(M)^\alpha)^4,$$

sabemos que

$$\frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}} \leq \tilde{C}.$$

Estamos agora interessados em encontrar uma cota superior para

$$\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}}$$

Suponha $r_k(\hat{\gamma}) \leq r_k(\gamma)$. Como as parcelas $\displaystyle\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}$ são positivas podemos descartar $r_k(\gamma) - r_k(\hat{\gamma})$ destas e supor $r_k(\hat{\gamma}) = r_k(\gamma)$. Logo,

$$\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}} \leq \tilde{C}$$

Agora se $r_k(\hat{\gamma}) \geq r_k(\gamma)$, existem $q = q(\gamma, \hat{\gamma}), r \in \mathbb{N}$ tais que $r_k(\hat{\gamma}) = qr_k(\gamma) + r$ onde $0 \leq r < r_k(\gamma)$ e $1 \leq q$. Assim, denotando $(s-1)r_k(\gamma) + l$ por $l(s)$, podemos escrever

$$\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}} = \sum_{s=1}^{q}\left(\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\hat{\gamma}_{k_{l(s)}}} \varphi(\hat{\rho})_{k_{l(s)}} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_{l(s)}}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}}\right) + \frac{\displaystyle\sum_{l=qr_k(\gamma)+1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}}$$

Cada termo da soma em $s \in \{1, \cdots, q\}$, acima, satisfaz o primeiro caso, logo tal parcela é menor que $q\tilde{C}$. Como $r_k(\hat{\gamma}) - qr_k(\gamma) = r < r_k(\gamma)$ a última parcela também satisfaz o primeiro caso. Isto garante que

$$\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\hat{\gamma})}\int_{\hat{\gamma}_{k_l}} \varphi(\hat{\rho})_{k_l} d\mu_{\hat{\gamma}_{k_l}}}{\displaystyle\sum_{l=1}^{r_k(\gamma)}\int_{\gamma_{k_l}} \varphi\rho_{k_l} d\mu_{\gamma_{k_l}}} \leq (q+1)\tilde{C}.$$

Basta observar agora que $q = q(\gamma, \hat{\gamma})$ é menor ou igual a p_{max} para quaisquer que sejam γ e $\hat{\gamma}$. Segue então que 4.7 é limitado por $(p_{max}+1)\tilde{C}$ e portanto

$$\Delta := \sup\left\{\Theta\left(\mathcal{L}\varphi, \mathcal{L}\psi\right); \varphi, \psi \in C(b,c,\alpha)\right\} \leq 2(p_{max}+1)\tilde{C}.$$

□

4.3 Propriedades Estatísticas

Nosso objetivo aqui é construir uma medida em Λ que possua boas propriedades estatísticas. Mais precisamente uma medida que apresente decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos e satisfaça o teorema do limite central. O que obtemos até agora é que o cone $C[b,c,\alpha]$ é invariante por $\mathcal{L}$ e que $\mathcal{L}(C[b,c,\alpha])$ possui diâmetro finito. Isto nos dá convergência, em um certo sentido, para funções no cone $C[b,c,\alpha]$.

Para $\varphi \in C[b,c,\alpha]$, seja $\varphi_n = \mathcal{L}^n(\varphi)$. Como $\Theta_+(\varphi_m, \varphi_n) \leq \Theta(\varphi_m, \varphi_n)$ segue-se que φ_n é uma sequência de Cauchy na métrica Θ_+. Mais ainda, observamos também que $\Theta_+(\varphi_n, 1) = \Theta_+(\varphi_n, \mathcal{L}^n(1)) \to 0$. Portanto, pela definição da métrica Θ_+, segue que

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi_n d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \varphi_n d\mu_{\hat{\gamma}}} \to 1, \forall \gamma, \hat{\gamma} \in \mathcal{F}^s_{loc}, \text{ uniformemente }. \tag{4.8}$$

Suponha agora que μ é uma medida de probabilidade f-invariante na forma produto, ou seja , existe $\hat{\mu}$ em F^s_{loc} tal que

$$\mu(\varphi) = \mu_\gamma \times \hat{\mu}(\varphi) := \int \left(\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma\right) d\hat{\mu}.$$

Então, para todo n existe γ_n, $\hat{\gamma}_n$ tais que

$$\int_{\gamma_n} \varphi_n d\mu_{\gamma_n} \geq \int_M \varphi_n d\mu = \int_M \varphi d\mu \geq \int_{\hat{\gamma}_n} \varphi_n d\mu_{\hat{\gamma}_n}.$$

Segue das desigualdades acima e de 4.8, que para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ existe $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \varphi_n d\mu_\gamma$ e tal limite não depende de γ. Além disso, podemos concluir que $\mu(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \varphi_n d\mu_\gamma$.

Portanto, dada qualquer medida de probabilidade $\hat{\eta}$ em $\mathcal{F}^s_{loc}$, não necessariamente invariante, segue do teorema da convergência dominada, que

$$\lim_{n\to\infty} \int \left(\int_\gamma \varphi_n d\mu_\gamma\right) d\hat{\eta} = \int \lim_{n\to\infty} \left(\int_\gamma \varphi_n d\mu_\gamma\right) d\hat{\eta}.$$

Daí, definindo a medida produto $\eta = \mu_\gamma \times \hat{\eta}$ concluímos que

$$\mu(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\eta. \tag{4.9}$$

Estamos interessados em provar que, caso exista a medida f-invariante μ, na forma produto $\mu_\gamma \times \hat{\mu}$, então tal medida é única. Provaremos inicialmente sua unicidade no espaço das funções Hölder contínuas. Para tal, faremos uso da seguinte proposição que nos garante que toda função Hölder contínua pode ser escrita como soma de funções no cone $C[b, c, \alpha]$:

Proposição 11. *Para toda $\varphi \in C^\alpha(M)$ existe $K(\varphi) > 0$ tal que $\varphi + K(\varphi) \in C[b, c, \alpha]$.*

Prova: Provaremos primeiro que existe $K_3 = K_3(\varphi) > 0$ tal que $\varphi + K_3$ satisfaz a condição (C) na definição do cone $C[b, c, \alpha]$. A projeção nas folhas estáveis garante que

$$\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma = \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi \circ \pi d\mu_{\widetilde{\gamma}}$$

e pela definição de $d(\gamma, \widetilde{\gamma})$, dado $\varphi \in C^\alpha(M)$ temos

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(\pi(x))}{d(\gamma, \widetilde{\gamma})} \le \frac{\varphi(x) - \varphi(\pi(x))}{d(\pi(x), x)} \le |\varphi|_\alpha$$

Assim

$$\sup_{\gamma, \widetilde{\gamma}} \left\{ \frac{\left| \int_\gamma \varphi d\mu_\gamma - \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi d\mu_{\widetilde{\gamma}} \right|}{d(\gamma, \widetilde{\gamma})} \right\} \le |\varphi|_\alpha < \infty$$

Por outro lado para todo $K > 0$, temos $\inf_\gamma \left\{ \int_\gamma (\varphi + K) d\mu_\gamma \right\} = \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma \varphi d\mu_\gamma \right\} + K$. É suficiente então escolher $K_3 = K_3(\varphi) > 0$ tal que

$$c \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma (\varphi + K_3) d\mu_\gamma \right\} > |\varphi|_\alpha$$

Para provar que existe $K_2 = K_2(\varphi)$ tal que $\varphi + K_2$ satisfaz a condição (B) basta notar que

$$\sup_{\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{ \frac{\left| \int_\gamma \varphi \rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi \rho'' d\mu_\gamma \right|}{\theta(\rho', \rho'')} \right\} < \infty.$$

De fato, como $\rho', \rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ temos $\dfrac{\rho'}{\rho''} \leq e^{\theta(\rho',\rho'')}$ a assim para todo φ limitado

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right| &= \left|\int_\gamma \left(\frac{\rho'}{\rho''}-1\right)\varphi\rho'' d\mu_\gamma\right| \leq \int_\gamma \left|\frac{\rho'}{\rho''}-1\right| |\varphi|\, \rho'' d\mu_\gamma \\ &\leq \sup\left|\frac{\rho'}{\rho''}-1\right| \sup\varphi \sup\rho'' = \left|\sup\frac{\rho'}{\rho''}-1\right| \sup\varphi\sup\rho'' \\ &\leq \left|e^{\theta(\rho',\rho'')}-1\right| \sup\varphi\sup\rho''\end{aligned}$$

Seja B tal que $\sup(\varphi + B) = 1$. Segue-se que

$$\frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho',\rho'')} = \frac{\left|\int_\gamma (\varphi+B)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma (\varphi+B)\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho',\rho'')} \leq \frac{\left(e^{\theta(\rho',\rho'')}-1\right)\sup\rho''}{\theta(\rho',\rho'')}.$$

Se $\theta(\rho',\rho'') < 1$ sabemos que $\dfrac{e^{\theta(\rho',\rho'')}-1}{\theta(\rho',\rho'')} < 2$ e como $\rho'' \in \mathcal{D}_1(\gamma)$ podemos afirmar que

$$\frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho',\rho'')} \leq 2(1+\kappa diam(M)^\alpha)$$

Agora se $\theta(\rho',\rho'') \geq 1$ chegamos que

$$\begin{aligned}\frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho',\rho'')} &\leq \left|\int_\gamma (\varphi+B)\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma (\varphi+B)\rho'' d\mu_\gamma\right| \\ &\leq \int_\gamma |(\varphi+B)(\rho'-\rho'')|\, d\mu_\gamma \\ &\leq \sup(\varphi+B)(\sup\rho' + \sup\rho'') \\ &\leq 2(1+\kappa diam(M)^\alpha)\end{aligned}$$

e isto prova que

$$\sup_{\rho',\rho''\in\mathcal{D}_1(\gamma)} \left\{\frac{\left|\int_\gamma \varphi\rho' d\mu_\gamma - \int_\gamma \varphi\rho'' d\mu_\gamma\right|}{\theta(\rho',\rho'')}\right\} < \infty.$$

A escola de $K_2 = K_2(\varphi)$ é análoga ao que foi feito na condição (C). Na condição (A) , como φ é em particular contínua sabemos que num domínio compacto, existe $K_1 = K_1(\varphi)$ tal que $\varphi + K_1 > 0$ e portanto $\int_\gamma (\varphi + K_1)\rho d\mu_\gamma > 0$ para todo $\gamma \in F^s_{loc}$ e $\rho \in \mathcal{D}(\gamma)$. Completamos a prova definindo $K(\varphi) = \max\{K_1, K_2, K_3\}$.

□

Segue da proposição anterior e da linearidade do operador $\mathcal{L}$, que 4.9 vale também para toda $\varphi \in C^{\alpha}(M)$. Pelo teorema de extensão de operadores limitados concluímos que a medida, na forma produto, $\mu = \mu_{\gamma} \times \hat{\mu}$, f-invariante é única. Observamos ainda que a medida construída é a provável candidata a medida de máxima entropia, o que se pode realmente provar, por exemplo no caso em que a direção centro instável é unidimensional, usando-se o estado de equilíbrio da direção unidimensional garantido em [LSV98].

Provaremos agora, de modo geral, a existência de uma medida $\hat{\mu}$ tal que $\mu_{\gamma} \times \hat{\mu}$ seja f-invariante. Construiremos tal medida por distribuição de massa, isto é, de forma que a pré-imagem de cada retângulo possua a mesma medida, e a soma das medidas destas pré-imagens seja igual a um.

Para tal, considere agora em M a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se, somente se, x e y pertencem a uma mesma folha $\gamma \in \mathcal{F}^{s}_{loc}$. Tomemos a σ-álgebra gerada pelos retângulos da partição de Markov e seus refinamentos por f^{-1}. Observemos que tal σ-álgebra pode não coincidir com a σ-álgebra de Borel de $M/\sim$.

Fixemos um retângulo $R_1 \in \mathcal{R}$. Seja $\mathcal{R}_1 := \{R_{1,1}, \ldots R_{1,n_1}\}$ o conjunto de interseções conexas de $f^{-1}(R_1)$ com os vários elementos de $\mathcal{R}$. Então, denotando $R_{1,j}/\sim$ por $\tilde{R}_{1,j}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n_1\}$ definiremos $\hat{\mu}\left(\tilde{R}_{1,j}\right) = 1/n_1$.

Continuaremos por indução, tomando as pré-imagens dos elementos em $\mathcal{R}_1$, fazendo a distribuição de massa. Note que pela propriedade mixing, existe $0 < c < 1$ tal que os cilindros em toda fase da construção possui $\hat{\mu}$-medida multiplicada por uma fração menor que c, se comparadas com os cilindros da fase anterior. Em particular, se tomarmos o elemento minimal S em $M/\sim$ com diâmetro não nulo, sua $\hat{\mu}$-medida pode ser aproximada por um cilindro com $\hat{\mu}$-medida arbitrariamente pequena. Isso significa, que a medida $\hat{\mu}$ se estende como uma medida Boreliana, pois a σ-álgebra gerada pelos retângulos e suas imagens seria então, coincidente com a de Borel, módulo conjuntos de medidas $\hat{\mu}$ igual a zero. Finalmente saturamos positivamente μ para estender para uma medida em M. Observe ainda que a medida $\mu = \mu_{\gamma} \times \hat{\mu}$ é f-invariante por construção.

Nosso objetivo agora é provar o decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos e o teorema do limite central para a medida μ. Seja ϕ constante e $\tilde{\mathcal{L}}$ o operador Ruelle-Perron-Frobenius normalizado pelo potencial, isto é, $\tilde{\mathcal{L}} = \dfrac{\mathcal{L}}{e^{\phi}}$. Portanto $\tilde{\mathcal{L}}(\varphi) = \varphi \circ f^{-1}$. Sabemos que está bem definido o operador dual, $\tilde{\mathcal{L}}^{*}$, tal que

$$\int \tilde{\mathcal{L}}\varphi d\mu = \int \varphi d\tilde{\mathcal{L}}^{*}\mu.$$

para toda φ contínua e toda medida de probabilidade μ. Vimos que é verdadeiro o seguinte resultado:

Proposição 12. *Se f é invertível então $\tilde{\mathcal{L}}^*(\mu) = \mu$ se somente se μ é f-invariante.*

Segue então que como μ é f-invariante:

$$\int (\varphi \circ f^n)\, \psi d\mu = \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu. \tag{4.10}$$

Estamos agora em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema B (Derivados de Anosov)**.** *A medida μ possui decaimento exponencial de correlações para observáveis Hölder contínuos.*

Prova: Devemos provar que dada φ, ψ α-Hölder, existe uma constante $0 < \tau < 1$ e $K(\varphi, \psi) > 0$ tais que

$$\left| \int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n,$$

para todo $n \geq 1$, e isto, por (4.10) é equivalente a mostrar que

$$\left| \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n (\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq K(\varphi, \psi) \cdot \tau^n, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Provaremos inicialmente o caso onde $\varphi_{|\gamma} \in \mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ e $\psi \in C[b, c, \alpha]$, supondo ainda $\int \varphi d\mu \neq 0$ e $\int \psi d\mu = 1$.

Sabemos que $\tilde{\mathcal{L}}(1) = 1 \circ f = 1$. Como $\varphi_{|\gamma} \in \mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$ temos, pela condição (A), que

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma} \leq \beta_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right)$$

A normalização de ψ nos diz que $\displaystyle\int \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu = \int \psi d\mu = 1$. Agora, como observado antes $\mu = \eta$. Portanto,

$$\int \left(\int_\gamma \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma\right) d\hat{\mu} = \int \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu = 1$$

e assim existe $\hat{\gamma}$ tal que $\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}} \leq 1$. Podemos então concluir que

$$\alpha_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right) \leq \frac{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}}}{\displaystyle\int_{\hat{\gamma}} d\mu_{\hat{\gamma}}} = \int_{\hat{\gamma}} \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_{\hat{\gamma}} \leq 1$$

e que para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$

$$\frac{\displaystyle\int_\gamma \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi) d\mu_\gamma}{\displaystyle\int_\gamma \varphi d\mu_\gamma} \leq \frac{\beta_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right)}{\alpha_+ \left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right)} \leq e^{\Theta_+\left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right)} \leq e^{\Theta\left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi), 1\right)}.$$

Como, pela proposição 9, o cone $C\,[b,c,\alpha]$ é invariante e, pela proposição 10, o cone $C\,(\sigma b,\sigma c,\alpha)$ possui Θ-diâmetro finito menor ou igual a Δ, segue da proposição 2 que existe $0<\tau<1$ tal que para todo $\varphi,\psi\in C\,[b,c,\alpha]$ temos $\Theta(\tilde{\mathcal{L}}^n(\varphi),\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi))\le\Delta\tau^{n-1}$. Logo,

$$\frac{\displaystyle\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu}{\displaystyle\int\varphi d\mu}=\frac{\displaystyle\int\left(\int_\gamma\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu_\gamma\right)d\hat{\mu}}{\displaystyle\int\left(\int_\gamma\varphi d\mu_\gamma\right)d\hat{\mu}}\le e^{\Theta\left(\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi),1\right)}\le e^{\Delta\tau^{n-1}}.$$

Observemos agora que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\Delta\tau^{n-1}}-1}{\tau^n}=\frac{\Delta}{\tau}$, portanto existe $\tilde{\Delta}>0$ tal que $e^{\Delta\tau^{n-1}}-1<\tilde{\Delta}\tau^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Isto nos permite provar que

$$\left|\int\varphi d\mu\right|\left|\frac{\displaystyle\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)d\mu}{\displaystyle\int\varphi d\mu}-1\right|\le\left|\int\varphi d\mu\right|\left(e^{\Delta\tau^{n-1}}-1\right)\le\left|\int\varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n$$

Se $\int\psi d\mu\neq1$ então

$$\begin{aligned}\left|\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\,d\mu-\int\varphi d\mu\int\psi d\mu\right| &= \left|\int\psi d\mu\right|\left|\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n\left(\frac{\psi}{\int\psi d\mu}\right)d\mu-\int\varphi d\mu\right|\\ &\le \left|\int\psi d\mu\right|\left|\int\varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n\end{aligned}$$

para todo $n\ge1$.

Para toda ψ α-Hölder, vimos que existe $K(\psi)>0$, suficientemente grande, tal que $\psi+K(\psi)\in C[b,c,\alpha]$. Portanto, escrevendo $\psi=\psi+K(\psi)-K(\psi)$ e observando que $\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(K(\psi))d\mu=\int\varphi d\mu\int K(\psi)d\mu$ obtemos que

$$\begin{aligned}\left|\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\,d\mu-\int\varphi d\mu\int\psi d\mu\right| &= \left|\int\varphi\tilde{\mathcal{L}}^n(\psi+K(\psi))\,d\mu-\int\varphi d\mu\int(\psi+K(\psi))d\mu\right|\\ &\le \left(\left|\int\psi d\mu\right|+K(\psi)\right)\left|\int\varphi d\mu\right|\tilde{\Delta}\tau^n\end{aligned}$$

Agora, se φ é α-Hölder é suficiente notar que existe $K(\varphi)\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi_{|\gamma}+K(\varphi)+B\in\mathcal{D}(\gamma)$ para todo $\gamma\in\mathcal{F}^s_{loc}$ e que $\displaystyle\int\varphi+K(\varphi)+Bd\mu>0$, para todo $B>0$. De fato,

$$\left|\varphi_{|\gamma}+K(\varphi)\right|_\alpha<\kappa\inf\left\{\varphi_{|\gamma}+K(\varphi)\right\}$$

se, somente se,

$$K(\varphi)>\frac{\left|\varphi_{|\gamma}\right|_\alpha}{\kappa}-\inf\left\{\varphi_{|\gamma}\right\}$$

Seja então $K(\varphi) = \sup_{\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}} \left\{ \left| \frac{|\varphi_{|\gamma}|_\alpha}{\kappa} \right| \right\} - \inf \varphi$. Observe que $K(\varphi) \leq \frac{|\varphi|_\alpha}{\kappa} - \inf \varphi < \infty$. Como $\varphi_{|\gamma} + K(\varphi) \geq \frac{|\varphi_{|\gamma}|_\alpha}{\kappa} \geq 0$ para todo $\gamma \in \mathcal{F}^s_{loc}$, segue que $\varphi_{|\gamma} + K(\varphi) + B \in \mathcal{D}(\gamma)$ e que $\int (\varphi + K(\varphi))d\mu + B > 0$, para todo $B > 0$. Logo, analogamente ao caso anterior

$$\left| \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \left(\left| \int \psi d\mu \right| + K(\psi) \right) \left(\left| \int \varphi d\mu \right| + K(\varphi) + B \right) \tilde{\Delta} \tau^n$$

e pela arbitrariedade de B obtemos

$$\left| \int \varphi \tilde{\mathcal{L}}^n(\psi)\, d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \left(\left| \int \psi d\mu \right| + K(\psi) \right) \left(\left| \int \varphi d\mu \right| + K(\varphi) \right) \tilde{\Delta} \tau^n$$

.

Observando que $\left| \int \varphi d\mu \right| - \inf \varphi \geq 0$, temos que $\left| \int \varphi d\mu \right| + K(\varphi) \geq 0$. Portanto definindo $K(\varphi, \psi) := \left(\left| \int \psi d\mu \right| + K(\psi) \right) \left(\left| \int \varphi d\mu \right| + K(\varphi) \right) \tilde{\Delta}$, concluímos a prova do teorema.

□

O Teorema do Limite Central segue novamente do decaimento exponencial de correlações e do Teorema de Gordin(3).

Referências Bibliográficas

[AM06] A. Arbieto and C. Matheus. Fast decay of correlations of equilibrium states of open classes of non-uniformly expanding maps and potentials. Preprint www.preprint.impa.br, 2006.

[Bal00] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations.* World Scientific Publishing Co. Inc., 2000.

[BKL01] M. Blank and G. Keller and C. Liverani. Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps. *Nonlinearity*, 15, 1905–1973, 2001.

[Bow71] R. Bowen. Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces. Transactions of the American Mathematical Society,Volume 153, January 1971

[Bow75] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, 1975.

[BoV99] C. Bonatti and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic system whose central direction is mostly contracting, *Israel Journal Math.*, 115 (1), 157-193, 1999.

[BK98] H. Bruin and G. Keller. Equilibrium states for S-unimodal maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 18:765–789, 1998.

[BF09] J. Buzzi and T. Fisher. Intrinsic ergodicity for certain nonhyperbolic robustly transitive systems. ArXiv:0903.3692

[Cas02] A. Castro, Backward inducing and exponential decay of correlations for partially hyperbolic attractors, *Israel J. Math.* **130** (2002), 29-75.

[Cas04] A. Castro, Fast mixing for attractors with mostly contracting central direction, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24** (2004), 17-44.

[Cas08] A. Castro. Curso de Teoria da Medida, *Projeto Euclides, IMPA* 2a. edição (2008).

[CV13] A. Castro, P. Varandas. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability. Annales de I'Institut Henri Poincaré - Analyse non Lineaire, 30:2, 225-249, 2013

[DL08] M. Demers and C. Liverani. Stability of statistical properties in two-dimensional piecewise hyperbolic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360, 4777-4814, 2008.

[HP70] W. Hirsch and C. C. Pugh. Stable manifolds and hyperbolic sets. *In Global analysis, Proc. Sympos. PureMath. Vol. XIV, (Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 1970, pp. 133163.

[HPS77] W. Hirsch and C. Pugh and M. Shub. Invariant manifolds. Lect. Notes in Math, vol. 583, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[LR06] R. Leplaideur and I. Rios. Invariant manifolds and equilibrium states for non-uniformly hyperbolic horseshoes. *Nonlinearity*, 19:2667–2694, 2006.

[Li95] C. Liverani, Decay of correlations, *Annals of Math.*, 142, 239–301, 1995.

[LSV98] C. Liverani,B. Saussol and S. Vaienti Conformal measure and decay of correlation for covering weighted systems Ergod. Th. & Dynam. Sys., 18, 13991420,1998.

[Mane] R. Mañé Introdução à Teoria Ergódica Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada : Distribuído por Livros Técnicos e Científicos Editora, ©1983.

[OV08] K. Oliveira and M. Viana. Thermodynamical formalism for an open classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 28, 2008.

[Pin08] V. Pinheiro. Expanding measures. *Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse Non-Lineaire*, v. 28, p. 889-939, 2011.

[SV09] M. Sambarino and C. Vásquez. Bowen measure for derived from Anosov diffeomorphims. Preprint ArXiv:0904.1036

[Sar99] O. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19:1565–1593, 1999.

[Sin72] Ya. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Math. Surveys*, 27:21–69, 1972.

[VV10] P. Varandas and M. Viana, Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps, *Annales de l'Institut Henri Poincaré- Analyse Non-Linaire*, 27:555–593, 2010.

[Vi97] M. Viana, Stochastic dynamics of deterministic systems, *Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1997.

[W93] Walters P. An Introduction To Ergodic Theory. Springer-Verlag

[Yur03] M. Yuri. Thermodynamical formalism for countable to one Markov systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 335:2949–2971, 2003.

[You98] L.-S. Young. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann. of Math.*, 147, no. 3, 585D-650, 1998.