UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

GRAÇA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS

UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

SALVADOR

2017

GRAÇA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS

UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Doutora, na área de concentração Educação Científica e Formação de Professores.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa

Salvador

2017

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Graça Luzia Dominguez
SA237 Bibliotecas Universitárias da UFBA: Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função / Graça Luzia Dominguez Santos. -- Salvador, 2017.
165 f. : il

Orientador: Jonei Cerqueira Barbosa

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) -- Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2017.

1. Matemática para o Ensino. 2. Conceito. 3. Função. 4. Realizações. 5. Regras de Reconhecimento e Realização. I. Barbosa, Jonei Cerqueira. II. Título.

GRAÇA LUZIA DOMINGUEZ SANTOS

UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração Educação Científica e Formação de Professores, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, pela seguinte banca examinadora:

Jonei Cerqueira Barbosa

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa (orientador)
Universidade Federal da Bahia

Andreia Maria Pereira de Oliveira

Profa. Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Federal da Bahia

Miguel Ribeiro

Prof. Dr. Carlos Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Elder Sales Teixeira
Universidade Estadual de Feira de Santana

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resultado: Aprovada Salvador, 09 de março de 2017

À minha mãe, Erondina, meu alicerce.

Ao meu filho, Vinícius, meu horizonte.

AGRADECIMENTOS

A tantos que de diferentes modos e em diferentes dimensões contribuíram para construção e finalização desse trabalho. Agradeço a alguns nominalmente.

A Deus – energia do bem infinito – que por intermédio da sua presença em mim e dos cuidados dos bem-feitores espirituais propiciaram-me a sustentação emocional para realização desse trabalho.

À minha mãe, Erondina, exemplo de força e determinação com valores éticos e morais que norteiam a minha vida. As nossas conversas quase diárias, nas pausas dos estudos, revigoravam minhas forças! Obrigada mãe pelas orações e torcida!

Ao meu filho, Vinícius, que me ensinou o verdadeiro sentido da palavra amor em toda a sua plenitude. Obrigada filho pelo incentivo, apoio e vibração em cada uma das pequenas conquistas na construção desse sonho. Agradeço também pelas leituras e sugestões em alguns trechos dessa tese e pela revisão dos *abstracts*.

À minha irmã, Núbia, minha companheira de todas as horas, obrigada pelo apoio e incentivo incondicionais.

A Enaldo, meu amor, pelo companheirismo, apoio, carinho e afeto. Muitíssimo obrigada pela leitura criteriosa, correções e sugestões às inúmeras versões de todos os capítulos dessa tese.

À minha família, em especial, aos meus irmãos Paulo e Palmiro, às minhas cunhadas Andréia e Élvia e à minha sobrinha-afilhada Náira pelas alegrias da convivência e apoio. Nossos divertidos e barulhentos almoços dominicais eram momentos de leveza que restauravam as minhas energias.

Às minhas amigas-irmãs, Glória e Cristiana, por estarem presentes na minha vida.

À minha nora, Bianca, agradeço pela leitura e correções na Introdução desse trabalho.

Ao meu orientador, Jonei Cerqueira Barbosa, por ter acreditado em mim desde o início. Muitíssimo obrigada pela dedicação, disponibilidade, seriedade e segurança na condução da orientação dessa pesquisa. É imensurável o quanto tenho aprendido com você. Foi um enorme privilégio ter sido sua orientanda. Muito Axé!

À professora Andreia Maria Pereira de Oliveira e aos professores Carlos Miguel Ribeiro e Elder Soares Teixeira pelas críticas, comentários e sugestões feitas na ocasião do exame de qualificação. Obrigada professores pelo tempo e dedicação destinados à leitura da tese. Em particular, muito obrigada Profª Andreia pelas interlocuções sobre conceitos da Teoria de Basil Bernstein.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA) pela licença para realização do curso de doutorado.

Ao Instituto de Matemática da UFBA, na pessoa do Diretor Professor Evandro Carlos Ferreira Santos, pela cessão de uma sala nas dependências do Instituto de Matemática para realização do estudo empírico com professores.

Aos professores Cibele, Claúdia, Cledson, Deise, Élcio, Eusébio, Janice, Luis, Patrícia, Sampaio, Regina e Talita participantes do estudo empírico e que disponibilizaram os dados do curso para essa pesquisa.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA), Ana Virginia Luna, Flávia Cristina Macedo, Jamille Villas Boas, Jaqueline Grilo, Jean Lázaro Coutinho, Maria Raquel Queiroz, Olmar Gómez, Paulo Diniz, Roberta Bortoloti e Thaine Souza Santana, agradeço pelo nosso convívio e pelos comentários às versões preliminares de alguns capítulos dessa tese. Obrigada, especialmente, a companheira de jornada Roberta pelas nossas conversas terapêuticas! Saudades, Roberta!

Aos funcionários do Instituto de Matemática e da secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela atenção as solicitações feitas.

Graça Luzia Dominguez Santos

“Education can have a crucial role in creating tomorrow's optimism in the context of today's pessimism.”

Bernstein (2000, p. xix)

RESUMO

Nesse estudo, desenvolvemos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. O modelo *re-presenta,* de forma estruturada e sistemática, "o que" e "o como" do conjunto de atos comunicacionais (textos) veiculados e produzidos na dinamicidade da realização do ensino do conceito de função pelos agentes responsáveis por tal tarefa, de acordo com os critérios de legitimação comunicacional operada nos contextos educacionais. Como fontes para construção do modelo foram empregadas: uma revisão sistemática de literatura de pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função, duas coleções de livros didáticos e um estudo com um grupo de professores. O modelo foi estruturado em categorias de *realizações* (panoramas) do conceito de função identificadas nas três fontes, que foram construídas utilizando como parâmetros formas específicas de comunicar (*regras de reconhecimento* e *realização*) o conceito de função. Os panoramas que compõem o modelo são: tabular, diagrama, algébrico, máquina de transformação, gráfico, generalização de padrões e formal. O modelo fornece uma transparência discursiva para a comunicação do conceito de função, ao explicitar formas de reconhecer, selecionar e produzir textos legítimos dentro de cada panorama, designando suas implicações e limitações comunicativas. Dessa forma, tem o potencial para subsidiar os processos de desenvolvimento curricular e de produção de materiais curriculares para alunos e professores, e o planejamento de estratégias para abordagem desse tema nos contextos educacionais. A linguagem de descrição apresentada pelo modelo visa contribuir com esforços de pesquisadores da área de Educação Matemática, no tocante a estabelecer uma identidade à Matemática para o Ensino, por intermédio da demarcação das suas fronteiras comunicativas e explicitação do grau de especialização das suas regras discursivas. Sustentamos, ainda, que o percurso metodológico desenvolvido e operacionalizado para a construção desse modelo pode ser utilizado para outros conceitos matemáticos centrais no processo de escolarização.

Palavras- Chave: Matemática para o Ensino; Conceito; Função; Realizações; Regras de Reconhecimento e Realização.

ABSTRACT

In this study, we developed a theoretical model of Mathematics for Teaching of the Concept of Function. The model *re-presents*, in a structured and systematic way, "what" and "how" of the set of communicational acts (texts) conveyed and produced in the dynamicity of the teaching of the concept of function by the responsible agents for such task, according to the criteria of communication legitimacy operated in educational contexts. As sources for the construction of the model were used: a systematic review of the literature extracted from researches about teaching and/or learning of the concept of function, two collections of textbooks and a study with a group of teachers. The model was structured in categories of realizations (landscapes) of the concept of function identified in the three sources, which were constructed using as parameters specific ways of communicating (*recognition* and *realization rules*) the concept of function. The landscapes that compose the model are: tabular, diagram, algebraic, transformation machine, graphic, generalization of patterns and formal. The model provides a discursive transparency for the communication of the concept of function, by explaining ways of recognizing, selecting and producing legitimated texts within each landscape, designating its communicative implications and limitations. Therefore, it has the potential to support the processes of curriculum development, production of curricular materials for students and teachers and the planning of strategies to approach this theme in educational contexts. The description language presented by the model aims to contribute with the efforts of researchers in the area of Mathematics Education, in relation to establishing an identity to Mathematics for Teaching, through the demarcation of their communicative boundaries and explication of the degree of specialization of its discursive rules. We also argue that the methodological approach developed and operationalized for the building of this model may be used to other central mathematical concepts in schooling process.

Keywords: Mathematics for Teaching; Concept; Function; Realizations; Recognition and realization rules.

LISTA DE QUADROS E FIGURAS

Introdução

Capítulo 2 – Artigo 2

Capítulo 3 – Artigo 2

Capítulo 4 – Artigo 3

Capítulo 5 – Artigo 4

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

CAPES	Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior
CCK	Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Knowledge of Content*)
EC	Estudo do Conceito (*Concept Study*)
ENCIMA	Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática
GLND	Guia Nacional do Livro Didático
LEMA-UFBA	Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA
MAT 198	Fundamentos de Matemática Elementar I-A
MKT	Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*)
MnE	Matemática no Ensino
MpE	Matemática para o Ensino (*Mathematical for Teaching*)
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SCK	Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge)*
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UFBA	Universidade Federal da Bahia

R	Conjunto dos números reais
R_{+}	Conjunto dos números reais não-negativos
R_{+}^{*}	Conjunto dos números reais positivos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nesse capítulo introdutório, inicialmente descrevo alguns fatos da minha trajetória profissional/acadêmica como docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), que me aproximaram e contribuíram para a escolha da Matemática para o Ensino do Conceito de Função como tema da pesquisa que ora relato. Em seguida, apresento os princípios teóricos que nortearam e fundamentaram o estudo; os objetivos; as justificativas para o seu desenvolvimento; os procedimentos metodológicos empregados para sua efetivação; e, por fim, a organização textual dessa tese.

Na Seção 1.1 a seguir, utilizo em quase sua totalidade, como tempo verbal, a primeira pessoa do singular, por focalizar minha trajetória profissional/acadêmica. Nas seções e capítulos subsequentes, adoto a primeira pessoa do plural, porque entendo que, embora a tese seja de minha autoria, a sua construção foi fruto da multiplicidade de interações comunicativas estabelecidas no decorrer da minha trajetória profissional e acadêmica, dentro as quais destaco o Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA)[1] da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, e precipuamente o meu orientador Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa, com o qual compartilho a autoria dos artigos que compõem esse trabalho.

1.1. TRAJETÓRIA PROFISSIONAL/ACADÊMICA E A APROXIMAÇÃO COM O OBJETO DE PESQUISA

Minha experiência com o ensino específico do tema função teve início quando me tornei responsável pela disciplina Fundamentos de Matemática Elementar I-A (MAT 198), integrante da estrutura curricular do Curso de Matemática (licenciatura/bacharelado) da UFBA. A referida disciplina foi introduzida como uma tentativa de reduzir os índices de reprovação nas disciplinas que deveriam ser cursadas posteriormente, a exemplo, das disciplinas com conteúdos relativos ao cálculo diferencial e integral. Compunham a programa de MAT 198 os assuntos: lógica,

[1] Grupo ENCIMA – Ensino de Ciências e Matemática, coordenado pelo Prof. Jonei Cerqueira Barbosa, certificado no CNPQ desde 2010, vinculado ao Departamento de Educação da Universidade Federal da Bahia. Espelho do grupo disponível em http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/2409423356128882 . Acesso em 22 ago. 2016.

conjuntos numéricos e funções – estudo geral, funções afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométricas. A recomendação era que esses assuntos fossem abordados sob uma perspectiva lógica-dedutiva-formal, que hoje entendo, como empregando os parâmetros de validação da Matemática Científica ou Acadêmica[2] (dos matemáticos).

Como não havia bibliografia que atendesse à especificidade da disciplina no tocante a sua abordagem, eu e a Professora Ilka Soares, que também ministrava a disciplina, elaboramos alguns textos (em forma de apostilas) que versavam sobre os assuntos integrantes do programa da disciplina.

Também nesse período, integrei uma equipe de professores do Departamento de Matemática que elaborou e executou o Projeto "A Matemática e suas Conexões" do Programa de Capacitação para Professores do Ensino Médio, o chamado Pró Ciências, financiado pela Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (CAPES), tendo como público alvo os professores do Ensino Médio das escolas públicas. O projeto foi implementado no período de 1997 a 2000, e tinha como objetivos a "melhoria" do ensino de Matemática da rede pública, por intermédio do fortalecimento do domínio do conteúdo matemático pelos professores, e a interação entre Universidade e Escola, por meio da construção conjunta de atividades de atualização e reflexão sobre o fazer pedagógico.

Em virtude dos altos índices de reprovação, notadamente na primeira componente curricular de cálculo[3], nos vários cursos oferecidos pelo Departamento de Matemática da UFBA, disciplina que demanda, como conhecimento prévio, as principais características dos diferentes tipos de funções, optamos por abordar esse tema no projeto supracitado. Assim, tomando como base alguns textos que havíamos desenvolvido para disciplina MAT 198, a equipe de professores que compôs o projeto elaborou um conjunto de textos (em formato de apostilas) versando sobre os seguinte tópicos: Conjuntos Numéricos e Funções, Funções Exponenciais e Logarítmicas e

---

[2] "conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de Matemática" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 17).

[3] Ementa: As funções polinomiais e as funções racionais. A interpolação por polinômios. O limite e a continuidade de funções reais de uma variável real: principais propriedades. A derivada de funções reais de uma variável real. As propriedades da derivada de tais funções. Os extremantes de funções reais de uma variável real e o polinômio de Taylor. A construção do gráfico de tais funções. A integral de uma função real definida em um intervalo limitado e fechado. Principais teoremas. O cálculo de primitivas de funções reais. In <http://www.dmat.ufba.br/disciplinas/c%C3%A1lculo>. Acesso em 25 mai. de 2016.

Funções Trigonométricas[4]. No desenvolvimento dessas apostilas, empenhamo-nos tanto em contemplar a perspectiva lógica-dedutiva-formal da Matemática Científica, quanto em apresentar atividades que pudessem ser, efetivamente, utilizadas no ensino desses temas no Ensino Médio, a exemplo de problemas de aplicação[5] e tarefas com apoio de tecnologias digitais.

Portanto, na equipe de professores, já havia um entendimento, o qual eu compartilhava, mesmo que tácito e sem embasamento teórico (no que concerne aos parâmetros das áreas de Educação Matemática e/ou Ensino de Ciências), de que existem formas específicas e possivelmente mais pertinentes de abordar um conteúdo matemático na Educação Básica. Cito como exemplo uma tarefa que desenvolvemos com apoio das tecnologias digitais, que consistia em plotar, usando um *software*, os gráficos da função $y = f(x)$ e de funções do tipo $y = af(x) + b$, com a e b números reais não nulos, e com base na variação dos parâmetros a e b e na observação dos gráficos resultantes, inferir que os gráficos das funções $y = af(x) + b$ são obtidos a partir de translações horizontais e/ou verticais do gráfico de $y = f(x)$. Tal conclusão só seria aceita na Matemática Científica mediante uma prova ou demonstração fundamentada na lógica dedutiva.

Além disso, meu interesse em conhecer estratégias diferentes de abordar conteúdo matemático no ensino levou-me a integrar, a partir de 2003, a equipe do Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA (LEMA-UFBA). O LEMA-UFBA tem como objetivo principal contribuir para popularização da ciência nas áreas de Matemática e Estatística e desenvolve diversas atividades, tais como a elaboração e construção de materiais manipuláveis[6] nas áreas citadas, para os níveis fundamental, médio e superior; a realização de exposições do seu acervo, com o propósito de desenvolver ações que contribuam para melhoria do ensino e aprendizagem. No LEMA-UFBA, atuei na elaboração de materiais manipuláveis; na orientação de alunos da graduação; na formação continuada, ministrando minicursos para professores acerca, tanto da construção, quanto do uso dos materiais manipuláveis para o Ensino Médio e

---

[4] Essas apostilas foram posteriormente utilizadas como referência bibliográfica na disciplina MAT 198, e encontram-se disponíveis em < http://www.fund198.ufba.br>. Acesso em 02 de mai. de 2016.

[5] Olhando retrospectivamente, assumindo a categorização proposta por Alrø e Skovsmose (2006), identifico tais "problemas de aplicações" como exercícios com referência à semirrealidade (situações fictícias ou hipotéticas).

[6] Materiais manipuláveis podem ser vistos como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar" (MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 193).

Superior; e também como membro coordenador e integrante das exposições realizadas pelo LEMA-UFBA em vários eventos no Brasil.

A participação nas atividades supracitadas propiciou-me reflexões acerca do fazer docente, apontando para uma perspectiva de que este está vinculado e é regulado por especificidades do contexto de ensino, e não apenas pelos valores e critérios de validação da Matemática Científica. Tais ponderações se materializaram, a princípio, com adoção da utilização de materiais manipuláveis, tecnologias digitais e formas de validação de resultados (proposições e teoremas) mais pertinentes ao contexto de ensino nas disciplinas que lecionei a partir de então.

Entretanto, depois de algum tempo, comecei a perceber e reconhecer a necessidade de compreender quais pressupostos teóricos subsidiam ou podem subsidiar as estratégias de ensino adotadas, se essas estratégias repercutem e de que forma na aprendizagem, qual o teor das diferenças e especificidades entre a matemática que é produzida e circula na comunidade científica dos matemáticos (Matemática Científica) e a que é veiculada e produzida no ensino. Registro que a minha formação em nível de Mestrado é na área de Matemática Pura – Geometria Diferencial – e, portanto, não contemplava esse aspecto. Esses questionamentos impulsionaram-se a procurar conhecer o Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, realizado em parceria pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e a Universidade Federal da Bahia (UFBA). Nesse programa, no período de 2010 a 2012, assisti palestras, cursei, na condição de aluna ouvinte e/ou especial, as seguintes disciplinas: Elementos de Euclides e suas influências, Filosofia da Ciência e Ensino das Ciências, Ensino-Aprendizagem de Conceitos Científicos e Fundamentos Teóricos do Desenvolvimento Cognitivo para Aprendizagem, Tópicos de Educação: sobre a perspectiva da Aprendizagem Situada.

Nesse período, estava responsável pelas duas componentes curriculares iniciais dos cursos de cálculo, nomeadas de Cálculo A e Cálculo B, nas quais eu já utilizava materiais manipuláveis e tecnologias digitais. Como decorrência dos estudos realizados e das interlocuções com professores do referido programa, em particular com o Prof. Jonei Cerqueira Barbosa, escrevi em coautoria o artigo intitulado "O cálculo de volume de sólidos por seções transversais e o uso de materiais manipuláveis" (SANTOS, VILAS BOAS, BARBOSA, 2012) que foi aprovado e publicado nos anais do V SIPEM, realizado de 28 a 31 de outubro de 2012. Ainda analisando formas alternativas de abordar o ensino de Cálculo, no segundo semestre de 2012, realizamos um estudo com alunos, cujo foco foi a análise das ações produzidas quando alunos resolvem exercícios de Cálculo mediados por um *software* matemático. Tal estudo resultou em um artigo que foi publicado em 2014 (SANTOS, BARBOSA, 2014). Nesses dois artigos, a análise dos dados foi realizada a partir da perspectiva sociocultural da ação mediada, tal como formulada por James Wertsch (1998).

Ainda em 2012, atuei no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), como tutora das disciplinas Fundamentos de Cálculo e Geometria Analítica. De acordo com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM),

> O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente (SBM, 2010).

As disciplinas, pelo menos das quais participei, tinham como propósito a consolidação da perspectiva lógica-dedutiva-formal no tratamento dos temas abordados, como recomendado na citação anterior. Segundo Davis e Renert (2013), investigações na área de Educação Matemática indicam que existe pouca relação entre a preparação em matemática formal dos professores e o desempenho dos seus alunos em testes padronizados. Substanciando tal ponto de vista, Deborah Ball e colaboradores ao introduzirem a concepção de um tipo específico de conhecimento matemático em relação ao ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT), entendem que o MKT não é necessariamente adquirido ou ampliado por intermédio da participação em aulas de matemática com uma tendência puramente científica (RIBEIRO; CARRILLO, 2011). Essa participação no PROFMAT levou-me a refletir sobre a relação entre os conteúdos tratados nessas disciplinas e o papel destes na ação de ensino dos professores no contexto escolar da Educação Básica[7], reavivando o meu interesse em investigar, compreender e teorizar sobre a existência e a natureza da especificidade de formas de tratar os conteúdos matemáticos que são objetos de ensino.

Nesse período, a partir do segundo semestre de 2012, comecei a participar das reuniões do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, a convite do coordenador do grupo Prof. Jonei Cerqueira Barbosa. Dois integrantes do grupo estavam investigando o tema *Matemática para o Ensino* (MpE) (tradução livre de *Mathematics for Teaching*) de alguns conceitos matemáticos, sob uma perspectiva discursiva, tema que estava em alguma medida em consonância com meus questionamentos à época, sobre a

---

[7] Os professores que participam do PROFMAT estão em atuação no Ensino Básico da rede pública.

compreensão da especificidade de formas de abordar os conteúdos matemáticos no ensino. Destarte, a partir de indicações de referências bibliográficas e discussões do grupo sobre MpE, foi delineando-se o objeto da presente investigação.

A Matemática para o Ensino ou Conhecimento Matemático para o Ensino[8], cumpre ressaltar, é um tema de pesquisa que emergiu na área de Educação Matemática nas últimas décadas, e procura demarcar que a forma como a matemática é veiculada, mobilizada, produzida e utilizada pelos professores no ensino, tem uma especificidade (ADLER; DAVIS. 2006; ADLER; HULLIET, 2008; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2013). Segundo Chapman (2013), O Conhecimento Matemático para o Ensino “[...] tornou-se uma das construções centrais na pesquisa sobre o desenvolvimento de entendimentos para o ensino da matemática” (p. 237, tradução nossa).

No ensino de matemática, a comunicação desenvolve-se em torno de conceitos matemáticos[9], e como nos estudos efetivados pelo grupo ENCIMA estamos trabalhando em uma perspectiva discursiva, conceptualizamos MpE como sendo uma Matemática para o Ensino de um conceito. Em virtude da minha aproximação com o tema função, considerei que esse conceito poderia ser o foco do estudo, desde que fosse constatada, por intermédio de uma revisão de literatura, tanto a sua relevância, quanto a variabilidade de formas de abordá-lo no ensino.

De fato, o conceito de função é considerado um dos pilares da matemática contemporânea, em razão do seu caráter unificador, que fornece uma estrutura para o estudo de vários dos seus ramos, além de propiciar conexões com outras áreas de conhecimento (BRASIL, 2002b; HANSSON, 2006; KLEINER, 1993).

No que tange ao ensino do conceito de função na Escola Básica, os documentos oficiais do Brasil estabelecem que, no Ensino Fundamental II (do sexto ao nono anos), o ensino de Álgebra deve apresentar uma abordagem funcional, com análise da variação de grandezas, adotando a notação de letras como variáveis para expressar relações e funções (BRASIL, 1998). Para as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares (PCN$^+$) do Ensino Médio, o conceito de função é um dos subtemas estruturadores desse nível de ensino (BRASIL, 2002a).

[8] Tradução livre de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)
[9] A seguir, apresento o nosso entendimento de um conceito matemático adotado nessa investigação. Por ora tome-o de forma intuitiva.

Tais considerações apontam para a relevância e centralidade do conceito de função na matemática escolar, o que têm se refletido em uma ampla literatura de relatórios de investigações, teóricas e/ou empíricas, sobre o ensino e aprendizagem desse tema na área de Educação Matemática (DOORMAN et al., 2012; DUBINKSY; WILSON, 2013).

No que diz respeito às formas de abordar o ensino de funções, destacamos a seguir algumas alternativas, entre as diversas que têm sido consideradas, na área de Educação Matemática. Para Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), Maggio e Nehring (2012), o estudo de funções deve ser introduzido mediante a análise de padrões em sequências numéricas e geométricas. Beltrão e Igliori (2010), Doorman et al. (2012) e Sierpinska (1992) sugerem que o ensino de função, pelo menos inicialmente, deve estar atrelado ao contexto de modelagem de situações contextualizadas, como um instrumento para matematizar relações de dependência e variabilidade entre grandezas físicas e de outras naturezas. Noutro prisma, Oehrtman, Carlson e Thompson (2008) recomendam que seja dado maior foco à noção de covariação para função, isto é, na análise de como duas quantidades variam simultaneamente, com o objetivo de evidenciar caráter dinâmico e quantificável deste conceito.

Os estudos mencionados até aqui apontam para certa diversidade de formas de realizar[10] o conceito de função no ensino. Sajka (2003), Tabach e Natchieli (2015) atribuem essa diversidade à complexidade deste conceito, e por esse motivo consideram o tema função ainda um terreno fecundo para estudos sobre os seus processos de ensino, apesar da vasta literatura existente sobre o tema.

Em face as tais considerações, ficou definido o objeto de investigação do estudo: Matemática para o Ensino do Conceito de Função. No início de 2013, elaborei um projeto tratando desse tema, que foi submetido e aprovado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências das UFBA/UEFS.

Na próxima seção, discutimos algumas visões de Conhecimento Matemático para Ensino e de Matemática para o Ensino, presentes na literatura de Educação Matemática, com o propósito de situar a nossa perspectiva para Matemática para o Ensino.

[10] Na seção 1.3 apresento o entendimento assumido para "formas de realizar".

1.2. SOBRE CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO E MATEMÁTICA PARA O ENSINO.

Nas últimas décadas, a área de Educação Matemática tem testemunhado uma série de estudos relacionados ao trabalho vanguardista de Shulman (1987), que, ao categorizar em domínios específicos e técnicos do fazer docente, gerou importantes implicações no debate emergente a respeito do estabelecimento do ensino como profissão (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; CHAPMAN, 2013; GUERRERO; RIBEIRO, 2015). Como consequência, um novo discurso emergiu, sendo matematizado sob as denominações Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT, sigla no idioma inglês) e Matemática para o Ensino (MpE) (ADLER; DAVIS, 2006; BARWELL, 2013; CHAPMAN, 2013).

Dentre as investigações que trilharam o caminho de estabelecer uma tipologia para o domínio do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática, refinando a categorização proposta por Shulman, destacam-se, segundo Barwell (2013) e Chapman (2013), os estudos de D. Ball e colaboradores (por exemplo, BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Esses pesquisadores desenvolveram um modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino, com uma taxonomia de seus subdomínios (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), baseados em “[...] uma ‘teoria baseada na prática’ dos recursos matemáticos inerentes ao trabalho de ensino” (BALL; BASS, 2009, ênfases dos autores, tradução nossa). Fundamentados em investigações empíricas, Ball e colaboradores concluíram que o fazer docente caracteriza-se por apresentar demandas específicas “[...] e que o reconhecimento desta especificidade reside no coração do ensino de matemática [...]” (ADLER; HULLIET, 2008, p. 22, tradução nossa). Dentre essas demandas, notabiliza-se como uma característica essencial e distintiva, a ação de “desempacotar” os elementos que constituem os conteúdos matemáticos, trazendo suas características à tona para os estudantes, diversamente da compressão de informações (definições, teoremas, etc.) (ADLER, DAVIS, 2006; BALL; THAMES; PHELPS, 2008), que configura a comunicação produzida pelos participantes da Matemática Científica. Desse modo, Ball e colaboradores conceituam MKT como “[...] os conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensinar matemática.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 396, tradução nossa).

Barwell (2013) ao analisar a perspectiva epistemológica da definição de MKT de Ball e colaboradores destaca que não há uma discussão sobre “[...] a natureza do próprio conhecimento [...]" (p. 597, tradução nossa), esses pesquisadores concentram-se "[...] na identificação de suas diferentes formas no ensino da matemática." (p. 597, tradução nossa). No entanto, Barwell (2013) afirma, que é possível discernir "[...] uma epistemologia construtivista, em grande parte implícita [...]" (p. 597, tradução nossa), principalmente ao analisarmos o trabalho antecedente de Shulman, no qual se fundamenta a noção de MKT proposta por Ball e colaboradores, que é declaradamente inspirado nos estudos de Piaget (BARWELL, 2013). Tal epistemologia tanto resulta em uma visão representacional do conhecimento e, portanto, na existência de uma representação externa do que está internamente na mente, quanto no entendimento de que o conhecimento (MKT) é formado por subcategorias, as quais possuem papéis específicos no ensino (BARWELL, 2013).

Para Pournara et al. (2015) apesar das subcategorias de MKT propostas por Ball, Thames e Phleps (2008) serem úteis para enfatizar diferentes aspectos do conhecimento do professor, falta clareza entre elas e, por conseguinte, são problemáticas quando usadas como construções analíticas. Assim, adotam o uso do "[...] termo Matemática para o Ensino (Adler et al., 2005; Adler; Davis, 2006) para abranger ambos, tanto o Conhecimento do Conteúdo[11] como o Conhecimento Pedagógico Específico de Matemática[12]" (p. 2, tradução nossa).

Adler e Hulliet (2008) também utilizam a denominação MpE e, por assumirem uma perspectiva epistemológica social, consideram que "[...] toda atividade matemática é direcionada para algum propósito, e ocorre no interior de alguma instituição (social)" (p. 22, tradução nossa). Nessa conformidade, afirmam as pesquisadoras, as subcategorias, propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), de Conhecimento Comum do Conteúdo[13] e Conhecimento Especializado do Conteúdo[14] são controversas (ADLER, HULLIET, 2008).

Davis e Renert (2014) em seu livro intitulado - *The Math Teachers Know: Profund Understand of Emergent Mathematics*- igualmente adotam a terminologia MpE[15] para "[...] conhecimento disciplinar dos professores de matemática" (p. 3, tradução nossa), ressaltando que MpE "[...] é muito mais do que um conjunto de conceitos facilmente catalogados ou objetivamente testados" (p. 3, tradução nossa). Para Davis e Renert

[11] Tradução livre de *Content Knowledge* (CK)
[12] Tradução livre de *Mathematics-Specific Pedagogical Kowledge*.
[13] Tradução livre de *Common Content Knowledge.*
[14] Tradução livre de *Specialized Content Knowledge*.
[15] *"Mathematics-for-teaching,* or M_4T, *in short*" (DAVIS; RENERT, 2014, p.3)

(2014), as conceptualizações de MpE têm focado, majoritariamente, no indivíduo, no que diz respeito, por exemplo, ao conteúdo matemático especializado para o ensino e às demandas decorrentes do fazer docente. A despeito de considerarem esses elementos como aspectos vitais da MpE, ao mesmo tempo ponderam que essas caracterizações não são suficientes, por não contemplarem o caráter simultaneamente individual e coletivo, vasto, dinâmico, emergente, tácito e em constante desenvolvimento da MpE (DAVIS; RENERT, 2013, 2014). À vista do reconhecimento da natureza complexa do fenômeno (MpE), Davis e Renert (2014) preferem "[...] focar em formas frutíferas para propiciar a evolução do conhecimento dos professores" (p.22, tradução nossa). Em virtude dessa perspectiva, sugerem como ferramenta para investigar e desenvolver a MpE, uma estratégia colaborativa realizada "com" professores, nomeada de Estudo do Conceito[16] (EC) (tradução livre de *Concept Study*), na qual os professores engajam-se na análise, reflexão, elaboração e desenvolvimento, individual e coletivo, de entendimentos sobre um determinado conceito matemático, do ponto de vista do seu ensino (DAVIS; RENERT, 2013, 2014).

Subordinar a investigação de MpE a um conceito matemático também é considerado basilar por Kazima, Pilay e Adler (2008). Esses pesquisadores argumentam "que a Matemática para o Ensino precisa ser entendida como moldada pelo tópico específico que está sendo ensinado [...]" (p. 283, tradução nossa).

As perspectivas mencionadas anteriormente apresentam conceptualizações diferenciadas para MpE e MKT, porém assumem como hipótese o reconhecimento de que forma a matemática é ou deve ser utilizada e produzida no ensino tem uma especificidade (ADLER; HULLIET, 2008; DAVIS; RENERT, 2009), que não deve ser confundida com um ramo da matemática científica (DAVIS; RENERT, 2009). Corroboramos tal entendimento, porque compreendemos que a MpE é constituída em um contexto comunicacional e, portanto, tem processos de produção e validação sociais que lhes são próprios.

Nesse estudo, optamos por utilizar a denominação Matemática para o Ensino (MpE), não apenas por uma questão terminológica, mas porque estamos analisando o fenômeno em termos discursivos. Portanto, não há nenhuma tentativa de atribuir às ações comunicativas (produtos discursivos) realizadas no contexto escolar quaisquer categorias representacionais cognitivas; pelo contrário, elas constituem o próprio objeto

[16] Mais adiante, apresentaremos de forma mais detalhada a discussão sobre o Estudo do Conceito.

de análise. Dessa ótica, a MpE é estruturada discursivamente, e como a comunicação matemática nos contextos de ensino é produzida em torno de conceitos matemáticos, entendemos a MpE em termos de um determinado conceito, o qual, no nosso estudo, é MpE do Conceito de Função.

Na próxima seção, circunstanciamos a conceptualização de Matemática para o Ensino (MpE) de um conceito desenvolvida nesse estudo. Para uma compreensão dessa conceptualização, expomos os construtos teóricos, que servem de aporte para fundamentá-la, tornando, por conseguinte, mais preciso e delimitado o objetivo da investigação que ora relato.

1.3. UMA PERSPECTIVA TEÓRICA PARA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE UM CONCEITO

A Educação Matemática tem sido amplamente reconhecida pela comunidade científica de pesquisa como um campo de estudo complexo por ser constituído de multicamadas de ferramentas teóricas (MORGAN, 2013).[17] Em particular, a MpE, um dos temas de interesse na área de Educação Matemática atualmente, é “[...] um campo de rápido crescimento de insights” (DAVIS, RENERT, 2013, p. 120, tradução nossa). Por conseguinte, orientados pela convicção de que diferentes conceptualizações para um fenômeno são possíveis, a depender das estruturas teóricas que as alicerçam (BARBOSA, 2013), o presente estudo almeja contribuir com pesquisas na área de Educação Matemática que investigam a natureza singular da matemática utilizada e produzida no ensino, trazendo lentes teóricas que visam demarcar a especificidade da MpE de um conceito em termos discursivos. No uso da expressão “demarcar a sua especificidade”, está subjacente a linguagem de descrição da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (2000, 2003), que fornece o aporte teórico sobre o qual se alicerça a nossa conceptualização de MpE.

Conforme Bernstein (2000, 2003), para cada categoria[18] que formam as práticas pedagógicas[19] (sejam essas categorias referindo-se a atores sociais – por exemplo,

[17] Especialmente após a “virada social” identificada por Lerman (2000) (MORGAN, 2013).

[18] As relações de poder posicionam e isolam sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos etc. em relação a outros sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos etc., delimitando assim fronteiras entre estes (BERNESTEIN, 2000, 2003). As categorias simbolizam essas fronteiras (BERNESTEIN, 2000), sendo instâncias das relações de poder (HOADLEY, 2006).

[19] Bernstein (2000) concebe prática pedagógica de uma forma mais ampla do que as relações que ocorrem nas escolas, entre professores e alunos. Inclui, por exemplo, as relações entre médico e paciente, pais e

professores, alunos -, disciplinas, práticas - tradicionais e não tradicionais -, contextos - escola, universidade, família, etc.) operam princípios que agem seletivamente regulando e legitimando o teor e a forma de realização da comunicação, caracterizando o grau de especialidade da categoria e, dessa forma, limites para o seu potencial comunicativo. Assim sendo, a comunicação matemática veiculada e produzida no contexto escolar onde ocorrem as relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados conteúdos (prática pedagógica) é distinta, por exemplo, da realizada pelos matemáticos no contexto de pesquisas na área de Matemática Pura e/ou Aplicada[20], como apontado por Ball, Bass (2000)[21] .

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação de *classificação* e *enquadramento*[22]. O princípio de classificação regula o grau de isolamento entre categorias (BERNSTEIN, 2000, 2003; MORAIS; NEVES, 2007). É o isolamento que gera espaço para uma categoria tornar-se específica (BERNESTEIN, 2003). Logo, se uma categoria objetiva especializar-se ou aumentar sua especificidade, então deve "[...] apropriar-se dos meios para produzir o isolamento necessário, que é a condição prévia para adquirir a sua especificidade" (BERNSTEIN, 2003, p.19, tradução nossa). Com esse entendimento, se pretendemos estabelecer a MpE como uma categoria, devemos apropriar-nos e explicitar os meios que demarcarão a sua especificidade.

O grau de isolamento entre categorias é regulado por marcadores de fronteiras, denominados de *regras de reconhecimento*, que fornecem os critérios essenciais para distinção de "que" textos são legítimos para determinada categoria, delimitando a potencialidade de sua comunicação (BERNSTEIN, 2000, 2003). Em conformidade com Bernstein (2003), compreendemos texto como qualquer ato comunicativo expresso por alguém, abrangendo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais. No contexto de uma

---

filhos, formador e professores (MORAIS; NEVES, 2007). Bernstein (2000) considera "[...] prática pedagógica como um contexto social fundamental através do qual a reprodução-produção cultural tem lugar." (p. 3, tradução nossa).

[20] De acordo com Bernstein (2003) os princípios que regulam a comunicação matemática como disciplina escolar são próprios desse contexto e, portanto, são fatos sociais, como consequência, não podem ser derivados de alguma lógica interna à Matemática (Científica), nem a prática daqueles que produzem Matemática.

[21] Os autores referem-se a formas de conhecer e usar a matemática.

[22] "[...] dependendo da estrutura social que caracteriza uma determinada sociedade, se geram determinados princípios de distribuição de poder e de controle social que [...] se traduzirão, respectivamente, em determinados valores de classificação e de enquadramento." (MORAIS; NEVES, 2007, p.6).

sala de aula, por exemplo, professor e alunos, usualmente, reconhecem o texto que pode ser dito (legítimo) e o texto que não é legítimo (OLIVEIRA, 2010).

O grau de isolamento determinado pelo princípio classificatório pode variar entre classificação mais forte (C+) e mais fraca (C-)[23], no qual há C+ quando as categorias são mais especializadas, visto que estão fortemente isoladas uma das outras (BERNSTEIN, 2000, 2003). Já no caso C-, o isolamento entre as categorias é reduzido, tornando-as menos especializadas (BERNSTEIN, 2000, 2003). Desse modo, por exemplo, se em uma escola, há uma C+ entre as disciplinas escolares, então esse grau de classificação cria seu conjunto de regras especializadas (reconhecimento) para cada uma das matérias escolares, que se transforma em uma sintaxe específica, de forma que existe uma ausência ou reduzida relação entre seus respectivos textos (AFONSO; NEVES, 2000; BERNSTEIN, 2003).

Bernstein (2003) usa o princípio de "[...] enquadramento para analisar as diferentes formas de comunicação legítima realizada em qualquer prática pedagógica" (p. 12, tradução nossa). O enquadramento refere-se à natureza do controle sobre as regras comunicativas[24] dentro de uma prática pedagógica. Analogamente ao princípio de classificação, o enquadramento também pode variar entre a gradação do enquadramento mais forte (E+) ao mais fraco (E-) (BERNSTEIN, 2000, 2003). É mais forte (E+) quando uma determinada categoria, geralmente a com maior estatuto[25], tem o controle da comunicação; é mais fraco (E-) quando as categorias de menor estatuto também têm algum controle (MORAIS; NEVES, 2007). Por exemplo, no contexto escolar, dizemos que há E+ quando o professor tem controle explícito sobre as regras de comunicação, e existe E-, quando os alunos tem algum controle sobre essas regras (BERNSTEIN, 2000, MORAIS; NEVES, 2007). O princípio de enquadramento gera e regula as *regras de realização* que estabelecem critérios para seleção e produção dos textos legítimos dentro de cada prática pedagógica, ou seja, "como" os textos legítimos podem se tornar públicos (BERNSTEIN, 2000, 2003).

[23] Bernstein (2000, 2003) refere-se ao princípio de classificação como forte e fraco. Optamos por usar o advérbio mais, porque pretendemos ressaltar a flutuação desse valor.

[24] Para Bernstein (2000), o enquadramento também regula as regras de ordem social, que dizem respeito à forma que as relações hierárquicas tomam em uma determinada prática pedagógica.

[25] O estatuto de uma categoria em relação à outra, dentro de um conjunto de categorias que estamos considerando, é determinado pelo princípio classificatório (relações de poder), que são traduzidas por relações hierárquicas entre essas categorias (MORAIS; NEVES, 2007). Dessa forma, por exemplo, na relação professor-alunos, a categoria professor tem maior estatuto.

Entre os extremos de classificações e enquadramentos mais fortes e mais fracos pode haver, de um ponto de vista analítico, toda uma gradação possível (MORAIS; NEVES, 2007).

Apropriamo-nos dos conceitos de enquadramento e regras de realização de Bernstein (2000, 2003) não para examinar o teor das relações nas práticas pedagógicas, mas para construir e analisar categorias de formações discursivas de um conceito.

Com base nesses pressupostos, sustentamos que uma conceptualização de MpE de um conceito matemático perpassa pela demarcação das suas fronteiras comunicativas, potencial comunicativo e formas de comunicação, por intermédio da explicitação das regras de reconhecimento e realização geradas, respectivamente, pelos vários graus dos princípios de classificação e enquadramento operantes, nos contextos educacionais, onde ocorrem as relações pedagógicas.

No presente estudo, um conceito matemático é compreendido como um conjunto constituído pelas realizações[26] (textos) que são associadas ou podem ser associadas à palavra que o nomeia. Assim sendo, o "conceito de função" é formado pelo conjunto de realizações que são associadas ou podem ser associadas à palavra função. As realizações, assim entendemos, podem se apresentar como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos (DAVIS; RENERT, 2014). Com essa visão, os conceitos existem apenas como atributos de suas realizações, isto é, são nas realizações e pelas realizações que os conceitos são constituídos, não havendo, dessa forma, conceito fora do âmbito textual, estranho às próprias realizações. Como decorrência de estarmos adotando essa perspectiva teórica, optamos por não usar o termo "representações", porque entendemos que esta denominação pode propiciar a noção de uma separação dualista entre o objeto matemático – no caso, função – e suas representações, como se objeto matemático (função) tivesse uma existência autônoma, isto é, independente das suas representações.

Isso posto, conceptualizamos o conjunto de textos sobre o conceito de função, comunicados com propósito de ensino no contexto escolar, de acordo com a regulação operada (classificação e enquadramento) nesse contexto, como a categoria *Matemática no Ensino* (MnE) do Conceito de Função. Em outras palavras, MnE[27] do Conceito de

---

[26] Tradução livre de *realizations*.

[27] Ressaltamos que a MnE é díspar da Matemática Escolar. Para Moreira (2004), "a *matemática escolar* referir-se-á ao conjunto dos saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (p. 18, ênfase do autor). Por conseguinte, Moreira (2004) define a matemática escolar em termos de saberes, isto é, apresenta uma definição epistemológica.

Função diz respeito à dimensão da forma como se dá a participação (formações discursivas) daquele(s) que é (são) encarregado(s) de ensinar o conceito de função na relação pedagógica, no contexto escolar, que segundo Bernstein (2003) evoca orientações (regras) legitimadoras.

Dessa ótica, conceptualizamos uma *Matemática para o Ensino do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da Matemática *no* Ensino do Conceito de Função. Portanto, por exemplo, um grupo de professores discutindo um conceito ou um autor de livro didático abordando um conceito em seu texto são MpE(s) deste conceito, porquanto são re-presentações (modelos) da Matemática *no* Ensino. Observemos que usamos de modo proposital o vocábulo *re-presentação*, separando o prefixo com um hífen, porque queremos sinalizar que se trata de outra apresentação das formas de realização do conceito de função no ensino. Em outras palavras, a Matemática *para* o Ensino refere-se à Matemática *no* Ensino, mas não podem ser coincidentes, pois esta última somente se realiza na própria dinâmica do contexto escolar.

Dentre as possíveis formas de MpE de um conceito, focalizamos, na presente investigação, aquela que se apresenta de forma estruturada e sistemática, identificando descritivamente suas categorias e propriedades. Neste caso, uma MpE de um conceito pode ser vista como um modelo teórico, já que atende às características do que se espera de uma estrutura teórica, qual seja um conjunto coerente de proposições usadas para compreensão de uma classe de fenômenos. Neste caso, a MpE de um conceito como um modelo teórico deve oferecer um conjunto de descrições organizadas sistematicamente sobre a Matemática no Ensino (MnE), portanto, nas relações pedagógicas (a serem) efetivadas.

Por relação pedagógica, entendemos qualquer relação social na qual há posições estabelecidas para a tarefa do ensino e da aprendizagem (BERNSTEIN, 2003). A presente investigação, restringimo-nos ao contexto escolar da Educação Básica, porquanto usamos como fontes, para construção do modelo, textos sobre o conceito de função, comunicados com propósito de ensino nesse contexto.

Salientamos que o nosso objetivo não é criar uma nova matemática formal, tarefa que demandaria critérios diferentes de legitimação, mas sim, investigar, apresentar e sistematizar as formações textuais (realizações) possíveis do conceito de função,

---

Enquanto para nós a Matemática Escolar diz respeito à relação pedagógica, ou seja, uma relação social entre agentes do contexto escolar, por conseguinte, trazemos uma definição sociológica.

mobilizadas, selecionadas, recontextualizadas[28] e produzidas no contexto de ensino desse tema, aqui restrito a Escola Básica, em conformidade com os princípios e regras operantes nesse contexto.

Na próxima seção, descrevemos a estrutura de construção do modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função.

1.4. UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.

Como sugerimos anteriormente, um modelo teórico é uma forma de re-presentar sistematicamente uma classe de fenômenos (no nosso estudo, MnE do Conceito de Função), cujas características pretende-se descrever, explicar ou prever (CHAMON, 2006).

Para construção do modelo teórico de uma MpE do Conceito de Função, utilizamos a estrutura de investigação proposta por Bernstein (2000), que tem o potencial para permitir uma relação dialética/reflexiva entre os conceitos contidos numa teoria (linguagem interna de descrição) e os dados que se pretendem analisar (MORAIS, NEVES, 2007). Bernstein (2000) define linguagem de descrição como um esquema de tradução, em que uma linguagem é transformada em outra, distinguindo as linguagens interna e externa de descrição. A linguagem interna de descrição refere-se à sintaxe por meio da qual uma linguagem conceitual é criada, enquanto a linguagem externa de descrição diz respeito à sintaxe por intermédio da qual a linguagem interna pode descrever algo mais do que a si própria (BERNSTEIN, 2000). Uma linguagem interna de descrição constrói o que conta como referentes de investigação, como estes se relacionam uns com os outros de forma a produzir um texto específico e como estas relações referenciais são transformadas em objetos teóricos ou objetos teóricos potenciais (linguagem externa de descrição) (BERNSTEIN, 2000). A linguagem externa de descrição “[...] deve ser construída para categorizar, numa grade lógica, o que, para esse campo de dados particular, deve ser considerado como as instâncias identificáveis estáveis de classificação e enquadramento.” (MOORE; MULLER, 2003, p. 1355, tradução nossa), com as respectivas regras de reconhecimento e realização.

---

[28] Bernstein (2000, 2003) descreve recontextualização como o processo de mover um texto de seu contexto original (onde foi produzido) para outro contexto, no qual é modificado de acordo com as regras que regulam esse contexto.

Nesse estudo, a linguagem interna de descrição são os conceitos da teoria de Bernstein, os referentes de investigação são as fontes analisadas e a linguagem externa de descrição corresponde ao modelo construído – MpE do Conceito de Função.

Estruturamos o modelo em categorias de realizações (panoramas[29]) que apresentam similaridades no que diz respeito às regras de reconhecimento e realização, geradas pelos princípios de classificação e enquadramento, nessa ordem, que regulam a comunicação matemática sobre o conceito de função na Educação Básica. Portanto, mobilizamos os conceitos de regras de reconhecimento e realização da teoria de Bernstein (2000, 2003) como instrumentos para análise das fontes, de modo que esse *interplay* possibilita-nos construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função – que é a linguagem externa de descrição – na estrutura de investigação proposta por Bernstein (2000).

Para construir um modelo teórico que *re-presenta* a Matemática *no* Ensino do Conceito de Função poderíamos observar salas de aula (referentes de investigação). Entretanto, o ensino desse conceito perpassa vários níveis da Escola Básica, principalmente, tendo em vista que definimos como realizações os textos que são associados ou *que podem* ser associados à palavra função, ou seja, consideramos as definições, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos que são ou podem ser associadas à palavra "função". Desse modo, estamos incluindo textos que podem ser associados à palavra função, mesmo que este vocábulo não tenha sido explicitamente mencionado na prática pedagógica. Assim, tal forma de coleta de dados demandaria um prolongado tempo de investigação, inviável de ser realizado no decorrer de um curso de doutoramento. Diante de tais considerações, optamos por recorrer à análise de outras fontes.

Os textos com propósito de ensino veiculados, mobilizados, reproduzidos e produzidos no contexto escolar da Educação Básica sobre um conceito (isto é, MnE desse conceito) podem ser provenientes de variadas fontes, mesmo que possam sofrer modificações quando recontextualizados na prática pedagógica do contexto escolar, como decorrência de princípios e regras subjacentes específicos, operantes nesse contexto. Dentre tais fontes, podemos citar: livros didáticos, documentos oficiais, avaliações de larga escala, cursos de formação, pesquisas na área de Educação Matemática que investiguem o ensino e/ou aprendizagem do conceito sob exame,

[29] Tradução livre de *landscapes*, expressão cunhada por Davis e Renert (2009, 2013, 2014).

grupos de professores trabalhando conjuntamente, de forma sistemática ou não, na análise do ensino de um determinado conceito.

A viabilidade da identificação de diversidade de realizações do conceito de função em pesquisas de segmentos da área de Educação Matemática, que investigam o ensino e/ou aprendizagem desse conceito, é embasada nos resultados apresentados por Davis e Renert (2014), que afirmam haver um proeminente corpo de investigação na comunidade de Educação Matemática sobre a variedade de realizações (em geral, sob a denominação de representações[30]) no ensino de um conceito. Isto possibilitou-nos inferir que essa fonte fornecer-nos-ia um amplo escopo acerca da variabilidade de realizações do conceito de função no ensino, propiciando, inclusive, pressupostos a priori, para efetuar a análise de outras fontes.

Em termos bernsteinianos, o livro didático é resultado dos textos que foram movidos do campo de produção (Matemática e Educação Matemática) e dos documentos oficiais produzidos pelos órgãos normatizadores da educação, e transformados em textos com propósito de ensino e aprendizagem. De fato, o livro didático é uma ferramenta de ensino legitimada pelo sistema educacional brasileiro (GRANVILLE, 2008), tendo o discurso tanto dos órgãos oficiais responsáveis pela educação, quanto dos agentes dos campos de produção manifestado em seus textos, por intermédio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[31]. Ademais, pesquisas apontam que o livro didático é uma das principais fontes de orientação dos professores nas tarefas do fazer escolar, sendo utilizado como suporte e apoio tanto para a seleção do conteúdo a ser ensinado, o seu sequenciamento e a sua forma, quanto para a organização das atividades de aprendizagem e de avaliação (BIEHL, BAYER, 2009; NICOL, CRESPO, 2006; REIS, 2014; SHIELD; DOLE, 2012), portanto, o livro didático é uma referência para prática pedagógica.

Quanto aos professores, estes são os principais agentes no processo de ensino e aprendizagem (EVEN; BALL, 2009; GUERRERO; RIBEIRO, 2014), participantes essenciais na geração e produção de textos matemáticos, especialmente no que tange a seleção de interpretações singulares que dão aos conceitos matemáticos (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), em conformidade com a especificidade e legitimidade do contexto escolar.

---

[30] E, portanto, associadas a outros arcabouços teóricos, como por exemplo, alicerçadas na ideia de conhecimento.

[31] Informações sobre o PNLD disponíveis em <www.portal.mec.gov.br/pnld >. Acesso em 21 ago. 2016.

Em face do exposto, depreendemos que as três fontes supracitadas produziriam uma variabilidade de realizações deste conceito, que, ao serem organizadas utilizando conceitos da teoria dos códigos de Bernstein nos termos mencionados anteriormente, possibilitar-nos-ia a construção de um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Ressaltamos que não estamos assegurando a primazia (em termos de produtividade e/ou qualidade de resultados) dessas fontes em relação às outras. A nossa escolha foi fundamentada nas potencialidades descritas e, porque, temos que delimitar as fontes empregadas na investigação.

Isto posto, nesse estudo utilizamos como fontes: pesquisas na área de Educação Matemática que abordam o ensino e/ou a aprendizagem do conceito de função, livros didáticos de Matemática dos Ensinos Fundamental II e Médio[32] e um estudo coletivo com professores[33], que atuavam nos Ensinos Fundamental II e Médio na época da coleta dos dados.

1.5.OBJETIVOS

O presente estudo tem como objetivo geral:

Construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função.

Portanto, trata-se de construir um modelo teórico que organize de modo sistemático as realizações do conceito de função da Matemática no Ensino. Para atingir esse objetivo, que será especificamente desenvolvido no Capítulo 5, dessa tese, três objetivos específicos foram traçados, cada um deles correspondente a uma fonte utilizada, que estão desenvolvidos nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente.

- construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma revisão sistemática de literatura;
- construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos da Educação Básica;
- construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores que atuam na Educação Básica.

[32] Ressaltamos que não faremos uma análise dos livros didáticos, estes serão utilizados apenas como fontes de dados para construção do modelo teórico.
[33] A forma como foi conduzido o estudo com professores será apresentada de forma concisa na Seção 1.7 desse capítulo e pormenorizada no Capítulo 4.

Por meio de uma análise transversal dos Capítulos 2, 3 e 4, globalizamos esses resultados apresentando-os no Capítulo 5.

1.6. JUSTIFICATIVA

Compreender a forma como a matemática é utilizada e/ou produzida no contexto escolar pelos agentes responsáveis pelo seu ensino tem sido objeto crescente de investigação na área de Educação Matemática nas últimas décadas (CHAPMAN, 2013). Tal tema vem consolidando-se como uma frente de pesquisa nessa área, denominada de Conhecimento Matemático para o Ensino (CHAPMAN, 2013) ou Matemática para o Ensino, a depender dos arcabouços teóricos subjacentes as suas conceptualizações, como mencionamos anteriormente. No entanto, ressalta Prediger (2010), trata-se de "projeto em andamento" (p. 75, tradução nossa), dado que, apesar de algumas décadas de pesquisa, ainda não é bem compreendido (DAVIS; RENERT, 2014), de forma que pesquisadores continuam trabalhando para reconhecer a sua natureza, os seus elementos fundantes, como se desenvolve e quais as estratégias para articulá-lo nos cursos de formação inicial e continuada de professores de matemática (PREDIGER, 2010, RANGEL, 2015, SILVERMAN; THOMPSON, 2008).

Nosso propósito nesse estudo é apresentar uma conceptualização de MpE que almeja contribuir com os esforços de pesquisadores na área de Educação Matemática que compartilham interesse por esse tema de pesquisa.

Os conceitos da Teoria dos Códigos de B. Bernstein (2000, 2003) utilizados para conceptualizar e operacionalizar a construção de um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, com seu conjunto de princípios e linguagem precisa, permite-nos uma descrição sistemática (uma re-presentação) do "que" e do "como" conceptualizamos como Matemática *no* Ensino do Conceito de Função. Em decorrência da natureza dinâmica e emergente da Matemática *no* Ensino, o modelo teórico que construímos não captura completamente a comunicação dos conceitos matemáticos com propósito de ensino, realizada no contexto escolar (e nenhum modelo pode), visto que, como salientamos precedentemente, trata-se de uma re-presentação.

A conceptualização de MpE proposta nesse estudo apresenta algumas semelhanças com as desenvolvidas por integrantes do grupo de pesquisa (ENCIMA), o qual participamos, que construíram nas suas investigações modelos teóricos de MpE, como Coutinho (2015) que focalizou o conceito de combinação simples e Meduni-Bortoloti

(2016), o de proporcionalidade. Diferimos, contudo, das conceituações propostas por Coutinho (2015) e Meduni-Bortoloti (2016) no aporte teórico utilizado. Coutinho (2015) modela uma MpE do conceito de combinação simples, utilizando a estrutura proposta por Davis e Renert (2009, 2013, 2014) para Estudo do Conceito (EC), assim, Coutinho (2015) organiza as realizações conceito de combinação simples em categorias e apresenta as implicações e relevâncias dessas categorias. Enquanto, Meduni-Bortoloti (2016), para modelar a MpE do conceito de proporcionalidade entrelaça a estrutura do EC com definições teóricas de Anna Sfard (2008). Nós, entretanto, fundamentamos a conceptualização de MpE do Conceito de Função em conceitos da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (2000, 2003), nos parâmetros reportados anteriormente, e utilizamos o EC como ferramenta analítica para construção do modelo teórico, em termos que descreveremos na seção a seguir. A adoção dessa abordagem teórica possibilita-nos estabelecer critérios para demarcar as fronteiras e construir uma linguagem especializada, que objetiva conferir especificidade, isto é, uma identidade ao modelo teórico da MpE de um conceito matemático, no caso do conceito de função.

Salientamos que a perspectiva de MpE de um conceito, especificamente do conceito de função, que apresentamos e o seu modelo teórico desenvolvido nesse estudo, deve ser entendida como produto de uma lente teórica específica, a qual fundamenta a conceptualização do fenômeno "MnE do Conceito de Função", e consequentemente a MpE desse conceito, de acordo com esse quadro teórico, possibilitando-nos teorizar sobre este fenômeno como um processo de implicação da análise. Entendemos que "nenhuma interpretação de dados é certa, visto que é construída dentro de um quadro teórico particular" (MORGAN, 2013, p. 135, tradução nossa). Assim, como apontado por Carrillo et al. (2013), ao sugerirem um modelo alternativo para MKT, baseado no modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), qualquer modelo ao ser desenvolvido, deve ser posto em jogo, "[...] como uma espécie de kit de investigador, ajuda-os a evitar um prescritivismo que possa impedir a compreensão do fenômeno sob escrutínio" (p. 8, tradução nossa). Aspiramos, dessa forma, que esse modelo teórico de MpE do Conceito de Função, possa servir como ponto de partida para reflexões de pesquisadores que compartilham interesse tanto com esse tema de pesquisa, quanto com a nossa perspectiva teórica. Além disso, apesar de não nos determos nessa análise, por não ser esse o foco do presente estudo, supomos que algum diálogo talvez seja possível com outras conceptualizações de MKT ou MpE. Por exemplo, no que diz respeito ao MKT, proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), é possível reconhecer, na análise das realizações no processo de construção dos modelos de MpE que apresentamos (capítulos 2, 3, 4 e 5), algumas das subcategorias: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), por exemplo: usar definições, regras e propriedades associadas a um tópico específico (CARREÑO et al., 2013); Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) – por exemplo: reconhecer o que está envolvido na utilização de uma representação especial, vincular representações às ideias subjacentes e a outras representações, conectar um tema a ser ensinado aos tópicos de anos anteriores ou futuros, selecionar representações para fins particulares (BALL; THAMES; PHELPS, 20008); Conhecimento do Conteúdo e Ensino (KCT)[34] – por exemplo: sequenciar conteúdo específico para a instrução, decidir qual o exemplo deve ser utilizado para começar um tópico, avaliar as vantagens e desvantagens das representações usadas para ensinar uma noção específica (BALL; THAMES; PHELPS, 20008).

O modelo que desenvolvemos objetiva explicitar de forma pormenorizada a orientação específica de codificação, para o reconhecimento, seleção e produção (realização) dos textos referentes ao conceito de função, entendidos como legítimos no contexto educacional da Escola Básica. Explicitamos as regras de reconhecimento, para que os panoramas, e as realizações que os constituem, sejam reconhecidos pela sintaxe específica dos seus textos, na sua variedade de apresentações. Especificamos as regras de realização, que fornecerão os parâmetros para seleção e produção dos textos legítimos de cada panorama, ou seja, "como" os textos legítimos de cada panorama podem ser ditos.

Tendo em vista o papel desempenhado por uma variedade de realizações na compreensão de conceitos (DAVIS; RENERT, 2014), em particular, no conceito de função, por revelar, por exemplo, aspectos e interpretações particulares deste conceito (STEELE, HILLEN; SMITH, 2013) e, que esse tópico (realizações) ainda não foi sistematicamente incorporado aos cursos de formação (DAVIS; RENERT, 2014). Considerando, além disso, que "[...] segundo Bernstein, a produção textual num dado contexto depende da posse da orientação de codificação específica (regras de reconhecimento e realização) para esse contexto" (MORAIS; NEVES, 2007, p. 9, observação dos autores). Almejamos que a transparência comunicativa apresentada no modelo teórico de MpE do Conceito de Função proposto, possa fornecer para autores de materiais curriculares e para comunidade de professores que atuam na Escola Básica ou

[34] Tradução livre de *Knowledge of Content and Teaching*.

cursos de formação inicial e continuada, uma visão macro, micro e correlacionada de aspectos do conceito de função, que podem ser tomadas como pontos de referência, em relação à diversidade e especificidade de formas de realizar esse conceito no ensino. No que diz respeito, por exemplo, a seleção e ao sequenciamento das realizações do conceito de função de acordo com os objetivos de ensino e grau de escolaridade; estratégias para evidenciar noções que constituem e subjazem a esse conceito; proposição de situações funcionais que propiciem tanto emersão de determinadas realizações, quanto a necessidade do estabelecimento de relações entre essas.

Sustentamos, ainda, que o percurso metodológico concebido e operacionalizado para a construção do modelo teórico da MpE do Conceito de Função pode ser utilizado para o desenvolvimento da MpE de outros conceitos matemáticos, centrais no processo de escolarização.

1.7. ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE OS CONTEXTOS

Nesse estudo, temos o propósito de construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função, com base na compreensão das diferentes interpretações dos textos, em forma de realizações, reconhecidas nas fontes analisadas, o que demanda uma abordagem qualitativa.

Na pesquisa qualitativa, no paradigma interpretativista, no qual se enquadra a presente investigação, o pesquisador é um coconstrutor dos fenômenos estudados, devendo buscar um novo olhar sobre o objeto de pesquisa, com objetivo de perceber utilidades e potencialidades distintas das quais foram convencionadas anteriormente (CROTTY, 1998). Em outras palavras, é “um convite à reinterpretação” (CROTTY, 1998, p. 51), que demanda versatilidade na utilização de procedimentos de produção e coleta de dados, ferramentas e estratégias disponíveis (CROTTY, 1998). A combinação de múltiplos procedimentos de produção e coleta de dados, em um único estudo, importa ressaltar, deve ser entendida como uma estratégia que acrescenta rigor, abrangência, complexidade, riqueza e profundidade à investigação, esperando sempre obter uma compreensão mais aprofundada do assunto, considerando que cada prática faz o mundo visível de uma forma diferente (DENZIN; LINCOLN, 2007), em decorrência da variabilidade de interpretações que os participantes dos contextos dão aos textos.

À vista disso, e da natureza dessa pesquisa, fez-se profícuo a utilização de fontes diferentes. O primeiro estudo, correlativo ao primeiro objetivo específico, é uma pesquisa bibliográfica (GIL, 2002), do tipo revisão sistemática da literatura, que consiste em identificar, analisar e sintetizar, de forma integradora, estudos em um campo particular de trabalho ou sobre um determinado tema, usando critérios de seleção rigorosos e transparentes (PETTICREW; ROBERTS, 2006; VICTOR, 2008). Os segundo e terceiros estudos, correspondentes ao segundo e terceiro objetivos específicos, respectivamente, são empíricos. No segundo, usamos duas coleções de livros didáticos, uma do Ensino Fundamental nos anos finais e a outra do Ensino Médio, como fonte para produção dos dados que compuseram a investigação. No terceiro estudo, o contexto para coleta de dados da investigação empírica foi um grupo de professores, todos licenciados em Matemática, que, na ocasião da coleta, atuavam no Ensino Fundamental II (anos finais) e/ou no Ensino Médio, na região metropolitana de Salvador-Bahia.

Para categorizar e analisar as realizações identificadas nessas fontes e, dessa forma, construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, além de conceitos da teoria de Basil Bernstein (2000, 2003), nos termos descritos previamente, apropriamo-nos da configuração do Estudo do Conceito (EC), implementada por Davis e Renert (2013, 2014), como ferramenta analítica para organizar estruturalmente o modelo.

Originalmente, o EC é uma estrutura de investigação coletiva com um grupo de professores, que tem como propósito engajá-los na análise e elaboração de entendimentos de um conceito matemático, apoiando-os no desenvolvimento da Matemática para o Ensino[35] (DAVIS; RENERT, 2009, 2013, 2014). A partir de 2009, o EC começou a ser organizado, sistematicamente, em quatro ênfases, que se demostraram, segundo esses investigadores, produtivas para a elaboração coletiva de conceitos matemáticos (DAVIS; RENERT, 2013, 2014). Essas ênfases são denominadas pelos pesquisadores de *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (DAVIS; RENERT, 2009, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento de realizações é o mesmo que consideramos anteriormente. Por outro lado, panoramas são agrupamentos de realizações que apresentam características semelhantes, conforme critérios estabelecidos pelos participantes do estudo (DAVIS;

[35] Na conceptualização por eles adotada.

RENERT, 2013, 2014). Vinculações são implicações lógicas que as realizações constituintes de cada panorama instauram, resultando em conexões, potencialidades e limitações das relações conceituais (DAVIS; RENERT, 2013, 2014). Por fim, combinações são fusões de realizações que geram construtos mais abrangentes (metarrealizações) com possibilidades interpretativas mais amplas (DAVIS; RENERT, 2014). A ênfase combinação não foi identificada nessa investigação.

No presente estudo, utilizamos como parâmetro, para agrupar as realizações identificadas nas diferentes fontes em panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Para vinculações, adotamos entendimento análogo ao de Davis e Renert (2013, 2014), porém conduzidos por nossa perspectiva teórica. Por conseguinte, vinculações referem-se à produção de potencialidades e limitações comunicativas desinentes das implicações lógicas estabelecidas pelas realizações constituintes de cada panorama, que geram uma rede de semelhanças e diferenças relativamente a noções e especificidades, muitas vezes subjacentes, do conceito de função.

Os conceitos da teoria de Bernstein, a organização estrutural do EC (panoramas e vinculações) e as fontes analisadas em um *interplay* dialógico/dialético, destarte conduziram a uma maior profundidade e precisão na linguagem conceitual (linguagem externa de descrição) para os modelos teóricos de MpE do Conceito de Função construídos[36].

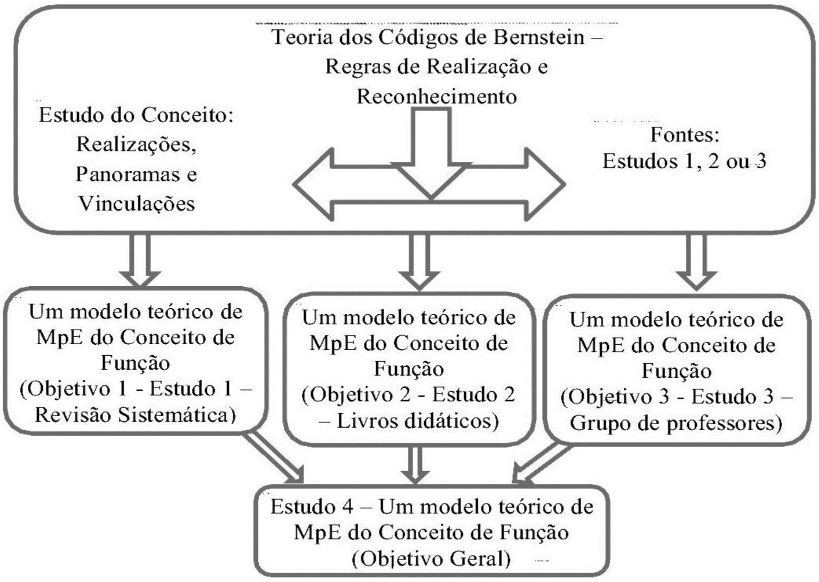
Na Figura 1, a seguir, apresentamos o esquema do desenho metodológico do presente estudo. Observemos que se trata de uma investigação, decomposta em quatro estudos, dos quais os três primeiros compõem o último da lista.

O Estudo 1 tem como objetivo construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma revisão sistemática. Trata-se, pois, de um estudo bibliográfico, do tipo revisão sistemática. Estabelecemos para *corpus* os seguintes periódicos: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Educação Matemática Pesquisa (EMP), *Educational Studies in Mathematics* (*ESM*), *Journal of Mathematics Teacher Education* (*JMTE*) e Zetetiké. Esses periódicos foram selecionados por serem,

[36] O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído teve inspiração, a princípio, no modelo teórico de Perfil Conceitual, que foi desenvolvido e está descrito em Mortimer (1994, 1995), e vem sendo amplamente utilizado no Ensino de Ciências. Esse modelo teórico considera que um conceito polissêmico "[...] pode ter diferentes zonas que correspondem a diferentes maneiras de ver, representar e significar o mundo, e são usadas pelas pessoas em contextos diferenciados" (COUTINHO; MORTIMER; EL-HANI, 2007, p. 116).

dentre outros, reconhecidos e responsáveis por trabalhos de pesquisa de relevância na área de Educação Matemática, possuindo todas as classificações A1, A2, B1 ou B2, no Qualis das áreas de Ensino e de Educação da CAPES[37] e circunscrevemos o período de busca de 1990 a 2015. Inicialmente, a seleção baseou-se na leitura do título, resumo e palavras-chave. Assim, à medida que identificávamos elementos relevantes concatenados com o objetivo norteador da pesquisa, os artigos eram lidos integralmente, tendo sido, por fim, selecionados 29 (vinte e nove) artigos.

Figura 1 - Esquema do desenho metodológico da pesquisa



Fonte: autores

O Estudo 2 tem como objetivo construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações identificadas em livros didáticos, tratando-se de um estudo de caráter empírico. A seleção dos livros que compuseram a investigação deu-se com base em dois parâmetros, simultaneamente: livros referenciados pelo Guia Nacional do Livro Didático (GNLD) do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dos anos 2014 (BRASIL, 2013) e 2015 (BRASIL, 2014), para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, respectivamente; e critérios que os professores preponderantemente utilizam na escolha dos livros didáticos de Matemática constantes dos GLNDs, segundo algumas pesquisas da área de Educação Matemática. Dessa forma, selecionamos as coleções *Matemática*, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, dos 6º ao 9º anos (IMENES; LELLIS, 2010a, 2010b,

[37] Disponível em <http://www.qualis.capes.gov.br>. Acesso em 05 mai. 2016.

2010c, 2010 d), e *Matemática*, de autoria de Manoel Paiva, do Ensino Médio (PAIVA, 2013a, 2013b, 2013c)[38].

O Estudo 3 é de natureza empírica e tem o propósito de construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores. O contexto para coleta de dados foi o grupo de professores constituído pelos participantes do curso de extensão, intitulado “Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de ensino”, promovido pela Pró-Reitoria de Extensão e o Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e conduzido pela autora da tese. O curso teve carga horária total de sessenta horas, com 32 horas de aulas presenciais, realizadas nas dependências do Instituto de Matemática da UFBA, aos sábados, no período de 12 de setembro a 21 de novembro de 2015.

O Estudo 4 é um estudo bibliográfico e empírico, pois, por intermédio de uma análise transversal dos Estudos 1, 2 e 3, globalizamos os resultados e apresentamos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função com base nas três fontes utilizadas nesses estudos, o que contempla o objetivo geral da presente investigação.

Os procedimentos metodológicos dos estudos serão pormenorizados em cada capítulo subsequente, para minimizar repetições.

1.8. ORGANIZAÇÃO DA TESE

A presente tese adota um formato insubordinado em relação aos modelos predominantes. Segundo Barbosa (2015), “formatos insubordinados de dissertações e teses são aqueles que rompem com a representação tradicional da pesquisa educacional nestas modalidades de trabalhos acadêmicos” (p. 350). Por formato tradicional entende-se uma dissertação ou tese estruturada, usualmente, por uma introdução, revisão de literatura, descrição de métodos e procedimentos, apresentação dos resultados, discussão e conclusão (DUKE; BECK, 1999; PALTRIDGE, 2002).

Esta tese é constituída de uma coleção de artigos de pesquisas, portanto um formato insubordinado (BARBOSA, 2015), denominado também de *multi-paper*. Caracteriza-se por ser composto por uma série de artigos publicáveis, que poderão ser publicados ou

[38] Detalhamento sobre os procedimentos empregados para seleção dos livros didáticos que compuseram a investigação será apresentado no Capítulo 3.

submetidos à publicação, previamente ou posteriormente à defesa (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999).

Duke e Beck (1999) sugerem que as dissertações ou teses nesse formato apresentem um capítulo introdutório, documentando o programa global de pesquisa, o que justamente estamos fazendo no presente capítulo. É possível também incorporar um "[...] capítulo final para retomar e globalizar os resultados relatados nos artigos" (BARBOSA, 2015, p 351), o que aqui corresponde ao capítulo 5 da presente peça.

O formato *multi-paper* possibilita a disseminação da pesquisa para uma vasta audiência de profissionais, público alvo para o qual o doutorando ou mestrando irá escrever ao longo de sua carreira como pesquisador, ampliando o potencial do estudo ter real repercussão no campo de pesquisa na qual está inserida, dando-lhe o *status* de uma genuína obra de investigação (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999).

Ademais, tal formato cultiva as habilidades de escrita necessárias para o tipo de publicação que será esperado dos mestrandos ou doutorandos depois de receberem o grau correspondente, realizada com a tutela e supervisão individual de um corpo docente capacitado, habitual na avaliação de uma dissertação ou tese (DUKE, BECK, 1999).

Outra prerrogativa do formato *multi-paper*, posta por Boote e Beile (2005), é que, como a revisão de literatura nesse modelo não está separada em uma seção, esta assume um caráter dinâmico, integrante do processo de pesquisa. Visto que, como cada artigo deve ser completo em si mesmo, incluindo a sua própria revisão de literatura, o mestrando ou doutorando tem que rever continuamente o seu entendimento da literatura ao longo da escrita, articulá-la coerentemente à luz das conclusões e análises posteriores, e também abordar ideias que emergiram em cada um dos artigos que compõem a dissertação ou tese (BOOTE; BEILE, 2005).

Segundo Duke e Beck (1999), o formato *multi-paper* tem sido usado regularmente nas áreas de Química, Geologia e Física, e, em menor medida, em departamentos de Biologia e áreas afins, além de estar em crescimento no setor de Educação em diversas universidades da Europa e dos Estados Unidos.

Esse modelo vem sendo usado em algumas dissertações de mestrado e teses de doutorado no Programa de Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, no qual essa tese se insere, a exemplo de Freitas (2007), Queiroz (2014), Santana (2015), Teixeira (2010) e Vilas Boas (2015).

Corroborando os argumentos postos por Barbosa (2015), Boote e Beile (2005), Duke e Beck (1999) e Paltridge (2002), optamos pela escrita desta tese no formato *multi-paper*, com a seguinte configuração: esse capítulo de Introdução e os capítulos dos artigos.

Neste primeiro capítulo -Introdução - apresentei minha trajetória acadêmica e profissional, considerações sobre a fundamentação teórica do estudo, objetivos, relevância, justificativa, delineamento metodológico do estudo e uma descrição geral do que versam os artigos. Os Capítulos 2, 3, 4 e 5 estão escritos em formato de artigos, de acordo com as diretrizes dos periódicos aos quais serão submetidos. O capítulo 2 é um estudo bibliográfico, os Capítulos 3 e 4 são empíricos e Capítulo 5 retoma e globaliza os resultados relatados nos artigos 2, 3 e 4 correspondendo dessa forma, ao capítulo final da tese[39]. Nessa conformidade, a tese apresenta a seguinte organização:

- Capítulo 1 – Introdução.
- Capítulo 2 – Artigo 1 – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma revisão sistemática.
- Capítulo 3 – Artigo 2 – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos da Educação Básica
- Capítulo 4 – Artigo 3 – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores da Educação Básica.
- Capítulo 5 – Artigo 4 – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função.

Ao final de cada artigo, apresento suas implicações e limitações tanto para o campo científico, quanto para o campo profissional.

Os artigos serão submetidos aos seguintes periódicos: artigo 1 – Boletim de Educação Matemática (BOLEMA); artigo 2 – Educação Matemática Pesquisa (EMP); artigo 3 – UNIÓN – Revista Iberoamaricana de Educación Matematica[40]; artigo 4 – *Journal of Mathematics Teacher Education* (*JMTE*)

Como os Capítulos 2, 3, 4 e 5 têm objetivos correlacionados - construir uma MpE do Conceito de Função -, sendo os três primeiros utilizando distintas fontes e o último

[39] Por esse motivo, entendemos não haver necessidade de apresentar um capítulo de “Considerações Finais”, pois ele já assume este papel.
[40] O artigo foi submetido em 26 nov. de 2016 e publicado no N. 48, em dez. de 2016.

globalizando os resultados dos precedentes -, e são independentes, visto que devem ter as caraterísticas necessárias para viabilizar suas publicações, então repetições das nossas posições teóricas são inevitáveis. Ademais, pode ocorrer (não é possível prever), que alguns resultados sejam compartilhados pelas três fontes.

1.9. REFERÊNCIAS

ADLER, J. at al. Reflections on an emerging field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, n. 60, p. 359 -381, 2005.

ADLER, J.; DAVIS, Z. Opening another black box: researching mathematics for teaching mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*, 2006, p. 270–296.

ADLER, J.; HUILLET, D. The social production of mathematics for teaching. In SULLIVAN, P.; WOOD, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008, p. 195 – 222.

AFONSO, M. ; NEVES, I. P. Influência da prática pedagógica na mudança conceptual em ciências: um estudo sociológico. *Revista Portuguesa de Educação*, Universidade do Minho, Braga, Portugal, vol. 13, núm. 1, 2000, p. 247-282.

ASGHARY, N.; SHAHNARANI, A.; MEDGHALCHI, A. R. Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, 2013, p. 1007-1026.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *O Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 158p.

Ball, D. L., Bass, H. Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. C. Phillips (Ed.), *Constructivism in education:* Opinions and second opinions on controversial issues. Yearbook of the National Society for the Study of Education Chicago: University of Chicago Press, p. 193-224, 2000.

BALL, D. L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at *The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference*. 2009. Disponível em http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf. Acesso em 05 mai. 2016.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, New York, v. 59, n. 5, p. 389 - 407, 2008.

BARBOSA, J. C**.** Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: *7th International Mathematics Education and Society*

Conference, 2013, Cape Town. Proceedings of the Seventh International mathematics Education and Society Conference. Cape Town: University of Cape Town, 2007. v. 1. p. 213-222.

BARBOSA, J. C. Formatos Insubordinados de Dissertações e Teses na Educação Matemática. In: Beatriz Silva D'Ambrosio; Celi Espasandin Lopes (org.). Vertentes as subversão na produção Científica em Educação Matemática. 1 ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p. 347 -367.

BARWELL, R. Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p.595–606, 2013.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções. *Educação Matemática e Pesquisa*, v.12, n.1, p.17-42, 2010.

BERNSTEIN, B. *Pedagogy, symbolic control and identity***:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield, 2000.

BERNSTEIN, B. *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge, 2003.

BIEHL, J. V.; BAYER, A. A escolha do livro didático de Matemática. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Ijuí/RS, 2009. Disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_43.pdf . Acesso em 08 de ago. 2015.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars Before Researchers: On the Centrality of the Dissertation Literature Review in Research Preparation. *Educational Researcher*, Vol. 34, N. 6, p. 3–15. 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais PCN* – 3 e 4 ciclos - Matemática . Brasília : MEC /SEF, 148 p., 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *PCN + Ensino médio***:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002a.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília: MEC, 2002b.

BRASIL Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2014. Matemática. Ensino Fundamental – Anos finais. Brasília. 104 p., 2013.

BRASIL Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2015. Matemática. Ensino Médio. Brasília, 108 p., 2014.

CARREÑO, E. et al. Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections Based On Specific Descriptors Of Knowledge. Proceedings *CERME 8*. Working 17, Antalya –

Turquia, p. 2976 -2984, 2013. Disponível em http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf. Acesso em 23 ago. 2016.

CARRILLO, J. et al. Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. Proceedings *CERME 8*. Working 17, Antalya – Turquia, p. 2985 -2994, 2013. Disponível em http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf. Acesso em 23 ago. 2016.

CHAMON, E. Um modelo de formação e sua aplicação em educação continuada. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, v. 44. p. 89-109.. 2006.

CHAPMAN, O. Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237 – 243, 2013.

COUTINHO, F. A.; MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. Construção de um perfil conceitual para o conceito biológico de vida. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 12, n. 1, p. 115-137, 2007.

COUTINHO, J. L. *Matemática para o ensino do conceito de combinação simples*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 115 p., 2015.

CROTTY, M. *The Foundations of Social Research*: meaning and perspective in the research process. Thousand Oaks: Sage. 1998.

DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 29, N. 3, 2009, p. 37- 43.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, , p. 245 – 265, 2013.

DAVIS, B. ; RENERT, M. *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group. 2014, 141 p.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: the discipline and the practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Third Edition. London: Sage Publications, 2007. p. 1-32.

DOORMAN, M. et al. Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 2012, V. 10, I. 6, 2012, p. 1243 – 1267.

DUBINKSY, E.; WILSON, E. High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 2013, p. 83– 101.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. *Educational Researcher*, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

EVEN, R.; BALL, D. (Eds.). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer. 2009.

FREITAS, F. H. A. Os Estados Relativos de Hugh Everett III: uma análise histórica e conceitual. *Dissertação de Mestrado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2007.

GIL, A. C., *Como elaborar projetos de pesquisa*. - 4. ed. - São Paulo. Atlas, 2002.

GRANVILLE, M. A. O discurso pedagógico dos livros didáticos da década de sessenta: reflexos ou reproduções das "políticas públicas de educação" da época? *1ª JIED – Jornada Internacional de Estudos do Discurso*. Maringá – PR, 2008. Disponível em www.dle.uem.br/jied/trab3.html, acesso em 17 jun 2015.

GUERRERO, L. S.; RIBEIRO, C. M. La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*. 2014.

GUERRERO, L. S.; RIBEIRO, C. M.. El conocimiento profesional como característica distintiva de profesionalización docente en la formación de profesores. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, v. 2, p. 1, 2015.

HANSSON, O. *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Tese de Doutorado. Luleå University of Technology, Suécia, 2006.

HOADLEY, U. Analysing pedagogy: the problem of framing. *Journal of Education*, n. 40, p. 15 – 34, 2006. Disponível em http://www.joe.ukzn.ac.za. Acesso em 07 set. 2016.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 6º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010a.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 7º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010b.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 8º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010c.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* – Imenes & Lelis, 9º ano. Editora Moderna. São Paulo. 2010d.

KAZIMA, M.; PILLAY, V.; ADLER, J. Mathematics for teaching: observations from two case studies**.** *South African Journal of Education.* Vol 28, p.283-299, 2008.

KLEINER, I. Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209, 1993

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, *Boletim GEPEM*, n. 61, p. 95 – 108, 2012.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MEDUNI-BORTOLOTI, R. A. *Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de Proporcionalidade.* Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

MOORE, R.; MULLER, J. O Crescimento do Conhecimento e a Lacuna Discursiva. *Eduação &. Sociedade.* Campinas, vol. 24, n. 85, p. 1343-1360, 2003.

MORAIS, A. M.; NEVES, I. P. A Teoria de Basil Bernstein- Alguns aspectos fundamentais. *Revista Práxis Educativa*, 2 (2), 2007, p.115-130.

MOREIRA, P C. O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. *Tese de Doutorado.* Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S.. *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MORGAN, C. Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics*, n. 87, 2014, p. 129–143.

MORTIMER, E. F. Evolução do atomismo em sala de aula: mudanças de perfis conceituais. 1994. 281 f. *Tese* (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

MORTIMER, E. F . Conceptual change or conceptual profile change? *Science & Education*, Dordrecht, v. 4, n. 3, p. 267-285, 1995.

NICOL, C. C.; CRESPO, S. M. Learning to teach with mathematics textbooks: how preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, n. 62, 2006, p. 331–355.

OEHRTMAN, M. C.; CARLSON, M. P.;THOMPSON, P. W. *Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function*. In M. P. CARLSON, M. P.; RASMUSSEN, C. (Eds.), Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics . Washington DC: Mathematical Association of America, p. 27–42, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P. Modelagem Matemática e as tensões nos discursos dos Professores. *Tese de doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2010.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 1. 2ª edição. São Paulo. 2013a.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 2. 2ª edição. São Paulo. 2013b.

PAIVA, M. *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 3. 2ª edição. São Paulo. 2013c.

PALTRIDGE, B. Thesis and dissertations writing: an examination of published advice and actual practice. *English for Specific Purposes*. n. 21, Amsterdan, p. 125 -143, 2002.

PETTICREW, M.; ROBERTS, H. *Systematic Reviews in the Social Sciences:* A Practical Guide. Oxford: Blackwell. 2006.

PREDIGER, S. How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal Mathematics Teacher Education*, N. 13, p. 73 -93, 2010.

POURNARA, C. at al. Can improving teachers' knowledge of mathematics lead to gains in learners' attainment in Mathematics? *South African Journal of Education*, V. 35, N.3, 2015.

QUEIROZ, M. R. P. P. P. A Matemática Financeira situada em contextos bancários e em livros didáticos. *Tese de doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2014.

RANGEL, L. G. *Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico doe Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo.* Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação). Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2015.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações. *Professor de Matemática Online* – SBM. No. 1, v.2. 2013.

REIS, A. Q. M. O livro didático como suporte para o fortalecimento das áreas de conhecimento. *X ANPED SUL*, Florianópolis, outubro de 2014. Disponível em http://xanpedsul.faed.udesc.br/arq_pdf/450-0.pdf . Acesso em 08 ago. 2015.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO J. . Knowing mathematics as a teacher. In: *Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7*, p. 2818-2826. 2011.

SAJKA, M. A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, 2003, p. 229 – 254.

SANTANA, S. C. M. O trabalho colaborativo com professores de Matemática e seus conflitos entre/nos textos produzidos por seus participantes. *Tese de doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2015.

SANTOS, G. L.. D; VILAS BOAS J.; BARBOSA, J. C. O cálculo de volume de sólidos por seções transversais e o uso de materiais manipuláveis. In Anais do *VI Simpósio Internacional de Educação Matemática*. Petrópolis, RJ, 2012.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C, o que acontece quando os alunos resolvem exercícios de cálculo com um software? VIDYA, v. 34, n. 1, p. 257-276, jan./jun., 2014.

SBM (2010). PROFMAT - Mestrado Profissional em Rede Nacional. Apresentação. Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br . Acesso em 04 de jan. 2016.

SFARD, A. *Thinking as communicating*: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: university press, 2008.

SHIELD, M.; DOLE, S. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, n. 82, p. 183–199, 2013.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1987, p.1–22.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. W. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, V. 11, p. 499 – 511, 2008.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. United States: The Mathematical Association of America. 1992, p. 25 -58.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, 2013, p. 451 – 483.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, n.90, 2015, p. 163 -187.

TEIXEIRA, E. S. Argumentação e Abordagem Contextual no Ensino de Física. *Tese de doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2010.

VICTOR, L. Systematic reviewing. In: *Social Research Update***.** 2008. Disponível em: http://sru.soc.surrey.ac.uk/SRU54.pdf. Acesso em: 29 jan. 2017.

VILAS BOAS, J. Professores de Matemática e materiais curriculares educativos: participação e oportunidades de aprendizagens. *Tese de doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2015.

WERTSCH, J. V. *Mind as action*. New York: Oxford University, 203 p., 1998.

CAPÍTULO 2 – ARTIGO 1

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura

A Theoretical Model of Mathematics for Teaching the Concept of Function from a Systematic Review of Literature

Resumo

O objetivo do presente estudo é construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. O modelo *re-presenta*, organizando estruturalmente, textos com o propósito de ensino, produzidos e reproduzidos sobre o conceito de função. Como fonte de dados para construção do modelo, empregamos artigos publicados em periódicos da área de Educação Matemática que investigam o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função nos Ensinos Fundamental e Médio. O modelo foi estruturado nos seguintes panoramas: tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal, os quais são constituídos de textos que apresentam uma sintaxe específica na realização do conceito de função. Espera-se que o modelo desenvolvido forneça subsídios e reflexões sobre as formas de realizar esse conceito no ensino. Argumentamos que o percurso metodológico concebido e operacionalizado para a construção desse modelo pode ser utilizado para outros conceitos matemáticos centrais no processo de escolarização.

Palavras-chave: Função. Conceito. Matemática para o Ensino. Realizações. Regras de Reconhecimento e Realização.

Abstract

The present study was aimed at constructing a theoretical model of mathematics for teaching the concept of function. The model *re-presents* and structurally organizes the texts that are produced and reproduced about the concept of function for the purpose of teaching. As data source, we use papers that presented researches about teaching and/or learning the function in elementary and secondary schools. Those selected papers belong to journals of mathematics education. The model was structured in the following landscapes: tabular, processing machine, diagram, algebraic, graphic, generalization of patterns, and formal. The landscapes are constituted of texts that present a specific syntax for realizing the concept of function. It is expected that the developed model provides subsidies and reflections about the realization of the concept of function in teaching. We argue that the methodological approach designed and operated for building the model may be used to other central mathematical concepts in schooling process.

Keywords: Function. Concept. Mathematics for Teaching. Realizations. Recognition and Realization Rules.

1. Introdução

Desde o início do século XX, o conceito de função tem sido considerado como um dos conceitos fundamentais da Matemática (SIERPINSKA, 1992). Tal importância reverberou também no contexto escolar, em virtude das ideias defendidas por Felix

Klein em 1908 sobre o caráter basilar desse conceito na organização da matemática nos contextos educacionais (SIERPINSKA, 1992).

A relevância deste tema tem se refletido em um corpo substancial de pesquisa, em relação ao seu ensino, na área de Educação Matemática (DOORMAN et al., 2012; HANSSON, 2006). Estudos sugerem que a apresentação de uma definição formal de função (como por exemplo, a fundamentada na teoria dos conjuntos) deve ser postergada no ensino desse tema na Educação Básica (HASSON, 2006), porquanto tais definições demandam uma familiaridade anterior com a terminologia matemática (JONES, 2006). À vista disso, a literatura tem sugerido alternativas para ensino deste tema. Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), por exemplo, sugerem iniciar o ensino de funções recorrendo à análise e descrição de regularidades e padrões em sequências numéricas e geométricas. Noutro prisma, Oehrtman, Carlson e Thompson (2008), com o objetivo de evidenciar o cunho dinâmico e quantificável do conceito de função, recomendam que seja dado maior foco à noção de covariação para função, isto é, à análise e explicitação de como duas quantidades variam simultaneamente. Já Sierpinska (1992) e Doorman et al. (2012) propõem que o ensino de função seja apresentado vinculando-o à noção de dependência em fenômenos físicos e de outras naturezas.

Em suma, podemos dizer que os estudos mencionados até aqui apontam para uma diversidade de configurações comunicativas específicas para abordar o conceito de função no ensino.

Compreender e interpretar a comunicação matemática mobilizada, produzida e utilizada no ensino tem sido objeto crescente de pesquisas na área de Educação Matemática nas últimas três décadas (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Como consequência, vem consolidando-se uma frente de pesquisa, sob os rótulos de “Matemática para o Ensino” (MpE) (*Mathematical for Teaching*, tradução nossa) ou Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (*Mathematical Knowledge for Teaching*, tradução nossa), com o objetivo de compreender e caracterizar a especificidade da forma como a matemática é usada no ensino (ADLER; HUILLET, 2008; BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

No presente estudo, unimo-nos aos esforços empreendidos por pesquisadores da área de Educação Matemática que investigam a MpE, adotando como lentes teóricas conceitos da Teoria dos Códigos do sociólogo Basil Bernstein (2000, 2003), com o propósito de caracterizar e conceituar a MpE de um conceito matemático, como base na diversidade comunicativa de formas específicas de *realizar* o conceito de função no ensino. Tomemos o termo realizar ou realização provisoriamente como intuitivo, e adiante iremos defini-lo apropriadamente.

Nesse trabalho, conceptualizamos a MpE em termos discursivos. À vista disso, optamos por utilizar a nomenclatura MpE, ao invés de MKT, porquanto esta última é empregada, majoritariamente, pelas conceituações pautadas em abordagens cognitivistas (RHOADS; WEBER, 2016). Antes de enunciar o objetivo do presente estudo em termos precisos e delimitados, apresentaremos a perspectiva teórica que edificamos e alicerça a investigação.

2. Uma perspectiva teórica de Matemática para o Ensino

MpE ou MKT têm sido investigado a partir de uma variedade de aportes teóricos (ROADS; WEBER, 2016). Considerando a perspectiva cognitivista, destacam-se alguns trabalhos de Deborah Ball em coautoria com outros pesquisadores (por exemplo, Ball, Phelps e Thames (2008)) (ROADS; WEBER, 2016), que adotam a nomenclatura MKT. Ball e seus colaboradores, ao investigarem o fazer docente no ensino, identificaram, descreveram e classificaram as demandas específicas do professor, as quais demarcam o caráter distintivo da matemática produzida e usada no ensino, estruturando-as em uma taxonomia de categorias de conhecimento que podem ser mensuradas (ADLER; HULLIET, 2008; BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Uma perspectiva epistemológica social é assumida por Adler e Hulliet (2008), que utilizam a nomenclatura MpE. Essas pesquisadoras julgam que as subcategorias Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge*, tradução nossa) e Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge*, tradução nossa), propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), são contingentes, tendo em vista que “[...] toda atividade matemática é direcionada para algum propósito, e ocorre no interior de alguma instituição social” (ADLER, HULLIET, 2008, p. 22, tradução nossa).

Davis e Renert (2009, 2013, 2014) também adotam a denominação MpE, e conceitualizam a Matemática para o Ensino como vasta, dinâmica, em constante evolução, tácita e distribuída pela categoria de professores, não sendo, portanto, segundo esses pesquisadores, “[...] nem facilmente identificada e nem prontamente mensurável” (DAVIS; RENERT, 2013, p. 246, tradução nossa).

Independente das epistemologias subjacentes às conceptualizações de MpE ou MKT, há como pressuposto o reconhecimento de que a forma como a (comunicação) matemática é ou deve ser utilizada e produzida no ensino tem especificidades (ADLER; HULLIET, 2008; DAVIS; RENERT, 2009). Tal especificidade corrobora o entendimento de Bernstein (2000) de que os princípios reguladores da comunicação pedagógica são próprios dessa prática e, portanto, são fatos sociais. Como consequência, não podem ser derivados de alguma lógica interna à Matemática Científica (produzida por matemáticos), nem ao fazer daqueles que a produzem.

Segundo Bernstein (2000, 2003), as relações de poder e controle (que dependem da estrutura social que caracteriza uma determinada sociedade) traduzem-se em princípios de comunicação que operam isolando e posicionando os sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos, etc., em relação a outros sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos, etc., agrupando-os em categorias especializadas. É com base nesse isolamento que esses princípios, denominados de *classificação* e *enquadramento*, estabelecem formas legítimas de comunicação entre e para diferentes categorias (BERNSTEIN, 2000, 2003).

O princípio de classificação estabelece a delimitação de fronteiras, isto é, o grau de isolamento entre categorias (professores, alunos, disciplinas, conteúdos de uma disciplina, escola, família, etc.) (BERNSTEIN, 2000, 2003). Assim, o princípio classificatório gera, por intermédio do seu isolamento, o grau de especialidade da categoria e, ao fazê-lo, fornece limites para o seu potencial comunicativo (BERNSTEIN, 2003). Os valores do princípio de classificação podem variar de uma classificação mais forte (C+) a uma classificação mais fraca (C-), de acordo com o grau de isolamento entre categorias (BERNSTEIN, 2000, 2003). Por exemplo, as relações entre as disciplinas podem ser caracterizadas por distintos valores de classificação, conforme se realizam de modo mais articuladas ou menos. O princípio de classificação gera um conjunto de regras especializadas – regras de reconhecimento – que funcionam como uma chave para distinguir (reconhecer) as características comunicativas de uma categoria, em função da especificidade dos seus textos (BERNSTEIN, 2000, 2003). Texto, aqui, é compreendido no sentido amplo, como qualquer ato comunicativo expresso por alguém, abrangendo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (BERNSTEIN, 2000, 2003).

"O enquadramento refere-se ao controle sobre as comunicações em relações pedagógicas interacionais locais" (BERNSTEIN, 2000, p. 12, tradução nossa), regulando as formas de comunicações legítimas nessas relações (por exemplo, nas relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados conteúdos)

(BERNSTEIN, 2000). O enquadramento também pode variar entre enquadramento mais forte (E+) e mais fraco (E-). Quando há E+, a categoria em posição hierárquica superior (estabelecida pelo princípio classificatório, por exemplo, professor em relação aos estudantes) na relação pedagógica possui maior controle sobre os critérios de comunicação. O enquadramento é E- quando as categorias de menor estatuto também têm algum controle (MORAIS; NEVES, 2007). Este princípio gera as regras de realização que instauram critérios para seleção e produção dos textos legítimos, ou seja, "como" os textos legítimos podem ser selecionados e tornados públicos (BERNSTEIN, 2000, 2003).

Dessa perspectiva, entendemos que é necessário explicitar as regras de reconhecimento e realização, geradas, respectivamente, pelos vários graus dos princípios de classificação e enquadramento operantes nas relações pedagógicas efetivadas (ou a serem efetivadas) nos contextos educacionais. Assim sendo, buscamos estabelecer critérios para o reconhecimento e realização da comunicação matemática veiculada e produzida nos contextos de ensino pelos seus participantes sobre um determinado conceito e, dessa forma, apresentar uma perspectiva para MpE em termos de suas fronteiras e possibilidades comunicativas.

Como será visto a seguir, empregamos as regras de reconhecimento e realização para modelar categorias de formações textuais do conceito de função.

Um conceito matemático é compreendido como um conjunto constituído de textos, denominados de realizações (*realizations* (DAVIS; RENERT, 2014), tradução nossa), que podem ser associadas à palavra que o designa. As realizações são textos que podem se apresentar, assim reconhecemos, como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos manipuláveis (DAVIS; RENERT, 2014). As realizações de um conceito matemático não são meras janelas para esse conceito, mas os seus elementos constituintes (DAVIS; RENERT, 2014). Em outras palavras, o conceito matemático somente existe pelas – e nas – suas formas comunicativas. Não há dois planos, um do conceito e outro de suas *representações*, mas sim suas *re-presentações*, no sentido de cada uma delas apresentar de novo um texto, as quais constituem o conceito matemático. Por conseguinte, entendemos o "conceito de função" como o conjunto das realizações que podem ser associadas à palavra função.

Com base nesses pressupostos, conceptualizamos Matemática *no* Ensino (MnE) do Conceito de Função como o conjunto de textos sobre conceito de função, comunicados com propósito de ensino no contexto escolar, em conformidade com os princípios (classificação e enquadramento) reguladores desse contexto. Portanto, a MnE de um conceito refere-se ao ensino deste conceito tal como ele ocorre nas relações pedagógicas e, tomando a caracterização emprestada de Davis e Renert (2014), é dinâmica e emergente.

Isto posto, a Matemática *para* o Ensino do Conceito de Função é conceptualizada como uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função. De novo, utilizamos o vocábulo *re-presentar* (separando com um hífen) com a finalidade de ressaltar que se trata de outra apresentação das formas de realização do conceito de função no ensino. Como exemplo de uma MpE do Conceito de Função, podemos citar um autor de livro didático quando aborda esse conceito em seu texto, ou um grupo de professores analisando o ensino desse conceito. Nestes casos, não se tem o ensino sendo realizado, mas sim uma *re-presentação* com vistas ao ensino.

Uma das possíveis *re-presentações* para MpE de um conceito, a qual focalizamos no presente estudo, consiste em estruturar e sistematizar o fenômeno MnE desse conceito. Em outras palavras, trata-se de um conjunto coerente e formalizado de proposições para compreensão desse fenômeno. Desse modo, uma MpE de um conceito (aqui, do conceito de função) pode ser vista como um modelo teórico.

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função que construímos nesse estudo está estruturado e sistematizado em termos de categorias, denominadas de panoramas (*landscapes* (DAVIS; RENERT, 2014), tradução nossa) de realizações, que apresentam similaridades no que diz respeito às regras de reconhecimento e realização, decorrentes dos princípios que regulam a comunicação matemática sobre o conceito de função nos contextos de ensino.

Dentre as possíveis fontes dos textos que constituem a MnE do Conceito de Função[41], utilizamos, nesse estudo, uma revisão sistemática de pesquisas em segmentos da área de Educação Matemática que investigam o ensino e/ou aprendizagem desse conceito. A potencialidade dessa fonte é fundamentada em resultados apresentados por Davis e Renert (2014), que afirmam haver um corpo relevante de pesquisa na comunidade de Educação Matemática sobre a variedade de realizações (em geral, sob a denominação de representações) no ensino de um conceito.

[41] Mesmo que passem por mudanças quando se tornam ativos na dinamicidade das relações pedagógicas no contexto escolar, devido aos princípios e regras que operam nesse contexto.

Neste ponto, podemos enunciar o objetivo da investigação: construir um modelo teórico da matemática para o ensino do conceito de função a partir de uma revisão de sistemática de literatura.

O modelo construído pode contribuir tanto com pesquisas que investigam esse tema, servindo-lhes de fundamentação teórica, quanto com a comunidade de professores e formadores de professores, oferecendo uma sistematização sobre a diversidade e especificidade de formas de realizar esse conceito no ensino.

3. Aspectos metodológicos

Uma revisão sistemática tem como objetivo analisar, compendiar e disseminar evidências de grandes corpos de informação em um campo particular de trabalho ou sobre um determinado tema, tendo como entendimento que os resultados de pesquisas podem ser organizados de forma integradora, em vez de uma forma aditiva (PETTICREW; ROBERTS, 2006; VICTOR, 2008).

Para a pesquisa bibliográfica, selecionamos os seguintes periódicos: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Educação Matemática Pesquisa (EMP), *Educational Studies in Mathematics* (*ESM*), *Journal of Mathematics Teacher Education* (*JMTE*) e Zetetiké. Esses periódicos foram selecionados por serem, dentre outros, reconhecidos e responsáveis por trabalhos de pesquisa de relevância na área de Educação Matemática, possuindo todos eles uma das classificações no estrato entre A1 e B2 no Qualis das áreas de Ensino e/ou Educação da CAPES[42]. Circunscrevemos o período da busca dos artigos de 1990 a 2015[43], por considerarmos que tal intervalo de tempo é amplo o suficiente, para formar um *corpus* substancial de pesquisas que investiguem e/ou tragam indícios de realizações do conceito de função que circulam e são produzidas no ensino desse conceito.

Inicialmente, a seleção baseou-se na leitura do título, resumo e palavras-chave. Conforme identificávamos elementos relevantes concatenados com o objetivo norteador da pesquisa, os artigos eram lidos integralmente. Dessa forma, foram selecionados vinte e nove artigos, em conformidade com o Quadro 1. Os artigos de pesquisas (de natureza

---

[42] Disponível em <www.qualis.capes.gov.br>. Acesso em 05 ago. 2015.

[43] Alguns periódicos não disponibilizam on line ou iniciaram suas atividades após 1990: JMTE – 1998, BOLEMA – 2006, Zetetiké – 2001 e EMP – 2004.

empírica e/ou teórica) selecionados focalizam o conceito de função nos Ensinos Fundamental e Médio.

Periódico	Autores
BOLEMA	Birgin (2012), Menegheti e Redling (2012), Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), Dazzi e Dullius (2013), Strapason e Bisognin (2013), Callejo e Zapatera(2014), Maciel e Cardoso (2014),
EMP	Rossini (2007), Beltrão e Igliori, (2010)
GEPEM	Silva et al. (2001), Frant (2003), Maggio e Nehring (2012)
ESM	Even (1990), Confrey e Smith (1994), Schwarz e Dreyfus (1995), Slavit (1997), Yerushalmy (2000), Sajka (2003), Moschkovich (2004), Falcade, Laborde e Moriotti (2007), White (2009), Ayalon, Watson e Lerman (2015), Hitt, González-Martín (2015), Ronda (2015), Tabach e Nachlieli (2015)
JMTE	Sánchez e Llinares (2003), Steele, Hillen e Smith (2013), Wilkie (2014)
ZETETIKÉ	Brito e Almeida (2005)

Quadro 1 - Relação dos artigos selecionados por periódicos
Fonte: autores

Para categorizar e analisar as realizações identificadas no *corpus*, além de conceitos de regras de realização e reconhecimento da teoria de Basil Bernstein (2000, 2003), apropriamo-nos, *como ferramenta analítica* do arcabouço organizacional do Estudo do Conceito (EC) (tradução livre de *Concept Study*), desenvolvido por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), para organizar estruturalmente o modelo teórico.

O EC, originalmente, é uma estrutura colaborativa com o propósito de engajar professores na análise e desenvolvimento de entendimentos sobre um determinado conceito matemático, sob a perspectiva do seu ensino (DAVIS; RENERT, 2009, 2013; 2014). A partir de 2009, o EC começou a ser organizado sistematicamente em torno de quatro ênfases: *realizations, landscapes, entailments* e *blends* (DAVIS; RENERT, 2009, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

Para realizações, a formulação é a que expomos precedentemente. Panoramas são conjuntos de realizações que apresentam similaridades conforme parâmetros estabelecidos pelos professores integrantes de cada grupo de EC (DAVIS; RENERT, 2009, 2013, 2014). Vinculações dizem respeito às implicações lógicas instauradas pelas realizações componentes dos panoramas que acarretam potencialidades e limitações no entendimento das relações conceituais (DAVIS; RENERT, 2009, 2013, 2014). Por fim, combinações são integrações de realizações que geram novas realizações (meta-realizações) com perspectivas interpretativas mais abrangentes.

Nesse estudo, como mencionamos anteriormente, os panoramas são erigidos considerando como critério a convergência das regras de reconhecimento e realização. Para vinculações, adotamos entendimento análogo ao proposto por Davis e Renert

(2009, 2013, 2014), contudo norteados pela perspectiva teórica assumida no presente estudo. Assim, vinculações, aqui, reportam-se à geração de potencialidades e limitações comunicativas decorrentes de implicações lógicas instauradas pelas realizações que compõem cada panorama, estabelecendo uma rede de semelhanças e diferenças a respeito de noções e especificidades do conceito de função. No que se refere à ênfase combinação, esta não foi identificada na presente investigação.

4. Os panoramas e suas vinculações

As realizações que podem ser associadas à palavra função, identificadas nos artigos do *corpus*, que apresentam semelhanças no que concerne às regras de realização e reconhecimento, foram organizadas nos seguintes panoramas: tabular, máquina de transformação, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. Passamos a apresentá-los e caracterizá-los.

4.1. Tabular

O panorama tabular é constituído das realizações de função como tabela, que são reconhecidas pela disposição em linhas ou colunas, dos dados de entrada e os correspondentes dados de saída, de uma relação funcional. Na Parte A do Quadro 2 solicita-se a realização tabular da relação funcional que a cada intervalo de tempo transcorrido (dados de entrada – 1ª coluna) associa a distância percorrida por um carro com velocidade constante de 60 km/h (dados de chegada – 2ª coluna). Nessa conformidade, o número de quilômetros trilhados pelo veículo depende do tempo decorrido. Para realizar a tabela é necessário determinar o número de quilômetros rodados pelo veículo, que varia em decorrência do tempo transcorrido, obedecendo a um padrão (multiplicar o tempo por 60 – velocidade constante). Por conseguinte, as realizações tabulares propiciam o reconhecimento e a legitimação das noções de associação, dependência, variação e regularidade entre grandezas/quantidades variáveis como integrantes da rede de entendimentos sobre o conceito de função (SILVA et al., 2001; MAGGIO; NEHRING, 2012). Para Steele, Hillen e Smith (2013), a observação do caráter da relação entre dos dados de entrada e saída de uma realização tabular pode facultar o reconhecimento de funções proporcionais (também chamadas de lineares) e não proporcionais. Por exemplo, a relação funcional cuja realização tabular é apresentada no Parte A do Quadro 2 é linear, visto que o número de quilômetros rodados é igual ao tempo transcorrido multiplicado por 60 (velocidade média).

Um carro está percorrendo uma estrada com velocidade constante de 60 km/h. Complete a tabela associando a cada tempo a distância percorrida.

horas	Km
0	0
1/2	30
1	60
1 1/2	90
2	120
3	180

Parte A

Fonte: Silva et al. (2001) - adaptado

x	y
7	5
9	5
11	5
8	5
1	5

Fonte: Tabach, Nachlieli (2015, p. 178)

x	y
-10	-100
-5	-25
-2	-4
0	0
-2	4
-5	25
-10	100

Fonte: Slavit (1997, p. 276)

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
0	0
2	4
5	25
10	100

Fonte: Slavit (1997, p. 276)

Parte B

Quadro 2 – Realizações tabulares

Além disso, por intermédio de tais realizações é possível instaurar o reconhecimento dos dados de entrada (no exemplo - horas) e saída (km rodados), como variáveis independentes e dependentes, respectivamente (MAGGIO; NEHRING, 2012; STRAPASON; BISOGNIN, 2013) e, consequentemente, a caracterização dos conjuntos domínio (das variáveis independentes) e imagem (das variáveis dependentes) de uma relação funcional.

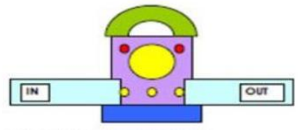
O reconhecimento de uma tabela como sendo uma realização tabular de uma relação funcional está fundamentado no caráter univalente de uma relação funcional - "[...] toda fonte tem uma única imagem" (TABACH; NACHLIELI, 2015, p. 172, tradução nossa). Com base nesse critério, é possível reconhecer que a primeira e a terceira tabelas, da esquerda para direita da Parte B do Quadro 2, são realizações tabulares de uma relação funcional, enquanto que a segunda não é uma realização tabular.

Para Schwarz e Dreyfus (1995), a utilização exclusivamente da realização tabular pode acarretar inferências incorretas acerca da relação funcional, tais como, identificação do tipo de função, injetividade ou valor extremo, pois nessas realizações só é possível ter informações sobre alguns dados da relação funcional, o que ocasiona uma visão apenas local (ponto a ponto) da relação funcional sob análise.

4.2. Máquina de Transformação

As realizações de função como uma máquina de transformação utilizam a metáfora de função como uma máquina que processa/transforma/modifica cada *input* (elemento de entrada) gerando um único *output* (elemento de saída). No Quadro 3, apresentamos um texto icônico de uma realização de função como máquina de transformação.

INPUT
1
2
3
4
n



OUTPUT
3
5
7
9
?

Quadro 3 – Realização como máquina de transformação
Fonte: Wilkie (2014, p. 425)

As realizações desse panorama são indicadas por Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013) e Rossini (2007) para uma aproximação introdutória aos textos que abordam o conceito de função, considerando que a metáfora empregada nessas realizações correlaciona textos do cotidiano (familiares) com o conceito de função. Nessa direção, Grilo (2014) destaca que os professores usam metáforas com o objetivo de tornar os textos matemáticos mais facilmente reconhecíveis pelos alunos, mesmo que não apresentem o rigor da Matemática Científica, corroborando o pressuposto de que, no contexto escolar, operam regras específicas de legitimação dos seus textos.

O reconhecimento de mudança, processo, transformação e dependência como noções subjacentes ao conceito de função torna-se patente nas realizações de função como máquina de transformação. Ademais, com o suporte de tais realizações, é possível reconhecer como características de uma relação funcional a natureza das variáveis (*input*/*output*), identificando-as como variáveis independentes (*inputs*) e dependentes (*outputs*), e assim, os conjuntos domínio (conjunto dos *inputs)* e imagem (conjunto dos *outputs*) (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; WILKIE, 2014).

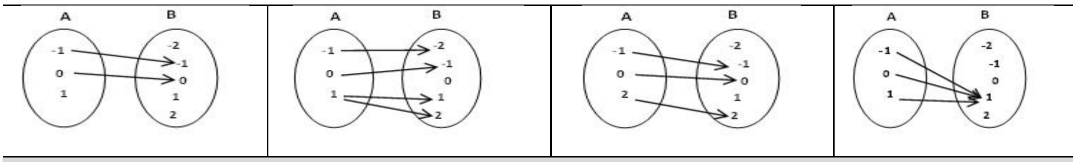
Para Slavit (1997), as realizações desse panorama podem subordinar o conceito de função a aspectos computacionais, considerando que essas realizações reportam-se a relações funcionais que obedecem a um padrão. Além disso, como os dados do conjunto de entrada são restritos a um número reduzido, então as referidas realizações apresentam as mesmas limitações das realizações tabulares, já citadas precedentemente.

4.3. Diagrama

Esse panorama é composto das realizações de função como diagramas de setas, que são caracterizados pela correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. As relações funcionais passíveis de serem realizadas por diagramas são aquelas em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas.

Por intermédio dessas realizações, uma relação funcional é reconhecida “[...] como sendo uma correspondência entre cada elemento do conjunto A com um único elemento do conjunto B” (MENEGHETI; REDLING, 2012, p. 215), com A e B conjuntos não vazios e arbitrários, dispostos em diagramas, e cuja correspondência é descrita por um texto icônico (uma seta) partindo de cada elemento do conjunto A para um único elemento do conjunto B. Como podemos constatar, os referidos pesquisadores utilizaram a realização por diagrama para definir uma relação funcional como uma correspondência, demarcando a característica univalente do conceito de função.

No Quadro 4, retratamos alguns diagramas que foram utilizados com o propósito de reconhecer (com base na definição dada), quais eram realizações de uma relação funcional, e em caso afirmativo, identificar os seus conjuntos domínio, imagem e contradomínio.



Quadro 4 – Realizações de função como diagrama
Fonte: Meneghetti; Redling, 2012, p. 215

Assim, da esquerda para direita, os dois primeiros exemplos não são realizações de uma relação funcional, em razão das relações não serem univalentes. Os dois últimos exemplos são realizações por diagrama de relações funcionais, um e outro tendo como domínio o conjunto A e contradomínio o conjunto B; o conjunto imagem da terceira relação funcional é {-1, 0, 2} e da última é {1}. Meneghetti e Redling (2012) destacam que as realizações como diagramas tornam visível o reconhecimento do conjunto imagem de uma relação funcional como um subconjunto do seu contradomínio.

4.4. Algébrico

Compõem o panorama algébrico as realizações do conceito de função que explicitam a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional por intermédio de uma lei, regra ou fórmula algébrica (usando letras e símbolos). Quando a variável independente é indicada por x e a dependente por y, as realizações de função como expressão algébrica são usualmente reconhecidas e realizadas pelo texto $y = f(x)$, para relações funcionais cujo domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais.

Na situação reportada no Quadro 5, a realização algébrica opera como um modelo matemático para descrever um fenômeno, explicitando a relação de causa e efeito, isto é, de dependência entre as variáveis, propiciando assim a quantificação do fenômeno (descrito pela relação funcional) sob investigação (FRANT, 2003, SLAVIT, 1997).

Inicia-se a criação de certa bactéria em um laboratório. Estudos indicam que o número inicial é de 200 bactérias. A cada duas horas a quantidade dobra. A fórmula que representa esta situação é dada por: $N(t) = N_0 . K^t$, onde: N_0 = número inicial de bactérias, t = tempo e K = constante. Determine o numero de bactérias, 12 horas após o início do estudo.

Quadro 5 – Realização do conceito de função como expressão algébrica
Fonte: Menegheti; Redling, 2012, p. 217

De fato, na situação funcional apresentada, fica notório o reconhecimento de que a variação do número de bactérias na colônia depende da variação do tempo, sendo possível determinar para qualquer tempo t, a sua imagem, no caso o número de bactérias ($N(t)$).

As realizações algébricas são compactas, pois condensam em um texto (uma cadeia de símbolos) um grande número de informações (SCHWARZ; DREYFUS, 1995; RONDA, 2015), possibilitando, por exemplo, o reconhecimento e a caracterização de uma família de relações funcionais (WILKIE, 2014), tais como, funções linear, quadrática, polinomial, racional, exponencial, logarítmica e trigonométricas, as quais constituem um repertório básico (EVEN, 1990) das relações funcionais que são objeto de ensino na Escola Básica.

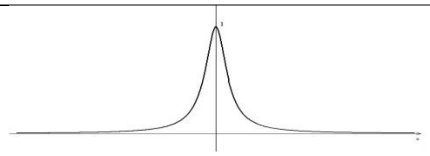
As realizações algébricas facultam a realização de operações com relações funcionais (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003; RONDA, 2015, YERUSHALMY, 2000) que possuem ou podem ser restritas a um mesmo domínio, tais como, realizar soma, subtração, multiplicação e/ou divisão (neste caso, a função do quociente deve ser não nula) de relações funcionais, gerando, dessa forma, um grande número de "novas" relações funcionais (EVEN, 1990). Além disso, segundo Even (1990), o poder gerativo de "novas funções" propiciado pela composição e inversão de relações funcionais que podem ser realizadas algebricamente é uma das mais reconhecidas potencialidades dessas realizações.

Sajka (2003) destaca que o conceito de função é frequentemente indistinguível das realizações algébricas. Tal preponderância é justificada, em alguns estudos, pelo reconhecimento do papel central que o conceito de função desempenha no ensino e aprendizagem de Álgebra (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; BIRGIN, 2012; SLAVIT, 1997; WILKIE, 2014; YERUSHALMY, 2000), de forma que as referidas realizações acabam por serem priorizadas no Ensino Médio (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013). No entanto, a predominância de tais realizações no ensino pode acarretar a subordinação de uma relação funcional a uma realização algébrica, impossibilitando o reconhecimento de relações que são funcionais apesar de não serem realizáveis algebricamente. Por exemplo, a relação funcional que associa o nome de um aluno a sua nota em um teste.

4.5. Gráfico

Esse panorama é composto das realizações gráficas de uma relação funcional cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais (*R*), denominadas de gráfico da relação funcional. O gráfico de relação funcional *f* dessa natureza é realizado plotando-se no plano cartesiano ($R \times R$) o conjunto de pontos (*x*, *y*), tal que *x* (variável independe usualmente associada ao eixo horizontal) é um elemento do domínio de *f* e $y = f(x)$ (variável dependente usualmente associada ao eixo vertical) (SHWARZ, DREYFUS, 1995).

A partir da realização gráfica da relação funcional apresentada no Quadro 6, cuja realização algébrica é $f(x) = 1/(1+x^2)$, podemos inferir, conforme solicitado, que *f* tem um máximo em *x* = 0, porque $f(0) = 1 \geq f(x), \forall x \in R$; é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e decrescente no intervalo $]0, +\infty[$; é limitada, pois $0 < f(x) \leq 1 = f(0)$, $\forall x \in R$; e é simétrica em relação ao eixo O*y*. Ainda, é possível depreender que *f* é estritamente positiva $(f(x) > 0, \forall x \in R)$ e não é injetora. Isso ilustra a potencialidade das realizações gráficas no reconhecimento e especificação de características das relações funcionais sobre intervalos de monotonicidade, extremos, simetria, limitação, sinal, injetividade e sobrejetividade (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003, STRAPASON; BISOGNIN, 2012). Com base nessas informações é possível fazer estimativas sobre o comportamento global ou local da relação funcional (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003).

Considere o gráfico da função $f(x) = 1/(1+x^2)$ você poderia responder às seguintes perguntas? Qual é o máximo de *f*? Em que intervalo a função é crescente? E decrescente? A função é limitada? A função simétrica? Se é, em relação a quê?	

Quadro 6 – Realização gráfica do conceito de função

Fonte: Adaptado Sanchéz; Llinares (2003, p. 12)

Dazzi e Dullius (2013), Moschkovich (2003) e White (2009) utilizaram tecnologias digitais para potencializar o estabelecimento de *pontes* entre os panoramas algébrico e gráfico. Nesses estudos, em decorrência do uso das tecnologias digitais, a variação de parâmetros nas realizações algébricas das relações funcionais repercutia automaticamente nas suas realizações gráficas, possibilitando que fossem "deduzidas" informações sobre características do comportamento da relação funcional. O reconhecimento e a legitimação das informações assim obtidas demarcam critérios de validação específicos para o ensino do conceito de função, isto é, da MnE do Conceito de Função, no contexto do Ensino Básico. No contexto da Matemática Científica, a legitimação dessas informações teria que ser pautada em uma demonstração.

Por intermédio dessas realizações, é possível explicitar o caráter univalente do conceito de função, utilizando-se o "teste da linha vertical", que consiste em visualizar ou traçar linhas verticais, ou seja, paralelas ao eixo O*y*, e verificar que estas intersectam o gráfico da função em no máximo um ponto (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013). Por conseguinte, o teste da linha vertical fornece um critério para reconhecer se um subconjunto do plano cartesiano $(R \times R)$ é ou não a realização gráfica de uma relação funcional (SLAVIT, 1997; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

A ênfase nas realizações de função como um gráfico pode dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente, a exemplo da função de Dirichlet: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 1, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$, ou de relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínio não são subconjuntos dos números reais (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

4.6. Generalização de padrões

As realizações que constituem o presente panorama comunicam o conceito de função como textos que apresentam afirmações de cunho geral, que são realizadas com base no reconhecimento da relação de dependência ou variação entre quantidades e/ou variáveis de descrições ou casos particulares de relações funcionais (WILKIE, 2014).

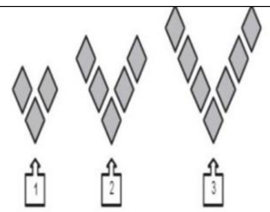
As relações funcionais que são foco de realização por generalização de padrões são as sequências numéricas, sequências de formas geométricas e fenômenos funcionais[44]

[44] Estamos denominando por fenômenos funcionais aqueles que podem ser modelados por uma relação funcional.

(que obedecem a um padrão) (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; BELTRÃO; IGLIORI, 2010; BRITO; ALMEIDA, 2005; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; CONFREY; SMITH, 1994; MACIEL; CARDOSO, 2015; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE, 2014).

O reconhecimento e a realização da generalização de padrões em sequências numéricas e de figuras geométricas podem ser operacionalizados por intermédio de uma generalização explícita (abordagem relacional) (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; MACIEL; CARDOSO, 2014; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE 2014) ou recursiva (abordagem covariacional) (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; FALCADE; LABORDI; MARIOTTI, 2007; WILKIE 2014; HITT; GONZÁLEZ-MARTIN, 2015). Na generalização explícita analisam-se os padrões, buscando reconhecer a relação entre as variáveis, com o propósito de gerar uma regra geral para determinar o valor de um elemento da sequência numa posição arbitrária, enquanto na generalização recursiva o âmago consiste em reconhecer e descrever a relação entre os itens sucessivos da sequência (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CONFREY; SMITH, 1994; WILKIE, 2014).

No Quadro 7, reportamos a generalização de uma sequência de figuras geométricas. Observe que a organização dos dados da relação funcional em uma realização tabular fornece suporte para o reconhecimento e realização da generalização do padrão (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013) nas duas abordagens, ou seja, nesse caso, foram estabelecidas *pontes* entre essas realizações.



Figura/posição	N^0 de losangos
1	3
2	5
3	7
4	9

Recursiva/Covariação: Quando o item posição aumenta 1 o número de losangos aumenta 2.

Correspondência: O número de losangos em cada posição é igual a duas vezes o número da posição adicionado a um.

Quadro 7 – Generalização de padrões: sequência geométrica
Fonte: MAGGIO; NEHRING, 2012, p. 102

Com base nas realizações por generalização em linguagem natural da relação funcional, podemos realizá-las também por textos simbólicos. Assim, para a sequência do Quadro 7, temos como generalização explícita do padrão: $L(n) = 2n + 1$ com n denotando a figura/posição (n natural maior que 1) e $L(n)$ o número de losangos; e na recursiva: $L(1) = 3$ e $L(n+1) = L(n) + 2$, com n natural maior que 1. Quando a generalização explícita do padrão é realizada por intermédio de símbolos algébricos, temos então uma realização algébrica da correspondente relação funcional.

As realizações por generalização de padrões podem favorecer a participação inicial na comunicação sobre o conceito de função, até mesmo antes que o texto "função" tenha sido introduzido explicitamente no ensino (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE, 2014). Considerando que tais realizações têm o potencial de propiciar o reconhecimento da relação de dependência entre as quantidades/variáveis envolvidas, que posteriormente pode ser incorporada, explicitamente, como uma das noções que compõem o entendimento do conceito de função (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013, WILKIE, 2014).

A realização de função como generalização covariacional é considerada mais intuitiva (mais facilmente realizável) por Confrey, Smith (1994) e Wilkie (2014), e assim pode apoiar a abordagem inicial na generalização de padrões e no conceito de função. Todavia, alguns estudos empíricos assinalam que a fixação na generalização recursiva de padrões pode gerar equívocos na caracterização da relação funcional, tais como, a utilização indevida da proporcionalidade direta (AYALON; WATSON; LERMAN, 2015; CALLEJO; ZAPATERA; 2014).

A abordagem covariacional para generalização de padrões torna exequível a realização de função como taxa de mudança ou taxa de variação (CONFREY; SMITH, 1994). A realização de função como taxa de variação ou taxa de mudança descreve como o *output* de uma relação funcional varia em relação à variação do *input*. Por exemplo, recorrendo aos dados do Quadro 7, a taxa de variação da relação funcional é constante e igual a 2, pois $\frac{\Delta L}{\Delta n} = \frac{L_{n+1} - L_n}{(n+1) - n} = 2$.

A realização de função como taxa de variação viabiliza reconhecer a qual família particular a relação funcional pertence, tendo em vista que membros de uma família de (algumas) relações funcionais compartilham a mesma taxa de mudança. Por exemplo, funções afins são reconhecidas por apresentarem taxa de variação constante (BIRGIN, 2012), como na relação funcional descrita no Quadro 7, enquanto as funções exponenciais são reconhecidas por possuírem taxa de mudança proporcional à função (BRITO; ALMEIDA, 2005; CONFREY; SMITH, 1994). Por conseguinte, tais realizações podem funcionar como uma base operacional para modelagem de fenômenos (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CONFREY; SMITH, 1994; STEELE; HILLEN; SMITH 2013), porquanto a partir da realização de função como taxa de variação é possível reconhecer o tipo de relação funcional e determinar sua realização algébrica (generalização explícita) e, dessa forma, fazer estimativas de como o fenômeno se comporta (CONFREY; SMITH, 1994; SLAVIT, 1997; STEELE; HILLEN; SMITH 2013).

4.7. Formal

O panorama denominado como formal é composto pelas realizações de função na configuração de definições, que denominamos como formais porque se caracterizam por serem realizadas por textos que são muito semelhantes aos produzidos no contexto da Matemática Científica, quando definem função.

As realizações de função como definição formal identificadas nos artigos do *corpus*, definem uma relação funcional como uma relação univalente entre os elementos de dois conjuntos não vazios quaisquer (ROSSINI, 2007; SÁNCHEZ; LLINARES, 2003; TABACH; NACHLIELI, 2015). Por exemplo, Rossini (2007) reproduz uma definição de função creditada ao grupo Bourbaki:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x (p. 207-208).

Essas realizações explicitam duas características do conceito contemporâneo de função (na perspectiva da Matemática Acadêmica), a saber, univalência e arbitrariedade, as quais devem integrar os textos da matemática do Ensino Básico que abordam esse conceito, segundo Even (1990) e Steele, Hillen e Smith (2013).

A natureza arbitrária diz respeito tanto aos conjuntos que compõem a relação funcional - domínio e contradomínio -, que podem ser conjuntos quaisquer, não necessariamente conjuntos numéricos, quanto à relação entre os dois conjuntos, que não precisa ser realizada algebricamente ou graficamente (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013). Como exemplo, podemos citar a relação funcional que associa a cada palavra de um conjunto de palavras a sua primeira vogal, ou ainda a função de Dirichlet.

A característica da univalência que está explícita nas realizações de função como definição formal possibilita o reconhecimento de relações funcionais realizadas graficamente (teste da linha vertical), por tabelas (como na Parte B do Quadro 2) e por diagramas (como no Quadro 4) (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

As realizações de função como definição formal apresentam clareza, rigor e precisão, que são características dos textos da Matemática Acadêmica. Entretanto, não abarcam a amplitude de noções e interpretações que subjazem e dão forma ao conceito de função, instituídos no seu desenvolvimento histórico, os quais transcendem a sua estrutura lógica (EVEN, 1990; FALCADE; LABORDI; MARIOTI, 2007). Essa estrutura lógica foi apontada por Tabach e Nachlieli (2015) como um dos entraves no entendimento da realização de função como definição formal, em um estudo empírico conduzido por esses pesquisadores.

Com o propósito de familiarizar os alunos com os textos de tais realizações, Steele, Hillen, Smith (2013), Tabach e Nachlieli (2015) sugerem que as realizações de função como definição formal sejam apresentadas concomitantemente com outras realizações que já tenham sido objeto de ensino, tais como as realizações tabulares, por diagrama e gráficas. Assim, esses pesquisadores indicam o estabelecimento de *pontes* entre essas realizações e, portanto entre os seus respectivos panoramas.

5. Síntese do modelo

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído nesse estudo foi organizado em panoramas (categorias de realizações), constituídos com base na convergência das regras de reconhecimento e realização, geradas, respectivamente, pelos princípios de classificação e enquadramento que operam no contexto do Ensino Básico. Assim, os panoramas identificam *que* textos integram e comunicam legitimamente o conceito de função e, a partir daí, *como* esses textos podem ser selecionados e realizados de forma legítima, em decorrência das circunstâncias evocadoras, caracterizando formas distintivas de comunicar o conceito de função.

No Quadro 8 apresentamos um sumário da análise desenvolvida na seção anterior, especificando o “que” (regras de reconhecimento) e o “como” (regras de realização) dos textos que constituem cada panorama do modelo teórico erigido. Sintetizamos, também, as vinculações que as realizações de cada panorama instauram.

Panoramas	“que” (reconhecimento)	“como” (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados dispostos em uma tabela, de forma que a cada dado de uma linha (ou coluna) está associado a um único dado na linha (ou coluna) correspondente.	Dispor os dados de entrada e os correspondentes dados de saída, de uma relação funcional, em linhas ou colunas.	- Evidenciar as noções de associação, variação, dependência e regularidade. -Reconhecer variáveis dependentes e independentes. -Caracterizar os conjuntos domínio e imagem. -Reconhecer funções proporcionais e não proporcionais. - Propiciar apenas uma visão local (ponto a ponto) da relação funcional. -Inferir incorretamente acerca do tipo de relação funcional, injetividade e valor extremo.
Máquina de transformação	Texto icônico de uma máquina que transforma cada dado de entrada (*input*) em um único dado de saída (*output*).	Realizar um texto icônico caracterizando a relação funcional como uma máquina que transforma os elementos do domínio nas suas correspondentes imagens.	-Demarcar as noções de processo, mudança, transformação e dependência. -Identificar variáveis dependentes e independentes. -Subordinar o conceito de função a aspectos computacionais. -Propiciar apenas uma visão local (ponto a ponto) da relação funcional.
Diagrama	Correspondência entre dois conjuntos quaisquer A e B, dispostos em diagramas disjuntos, que a cada elemento do conjunto A faz corresponder, por intermédio de uma seta, um único elemento do conjunto B.	Dispor os conjuntos domínio e contradomínio de uma relação funcional em dois diagramas disjuntos, e cada elemento do domínio fazer corresponder (com uma seta) a sua imagem.	-Caracterizar o conjunto imagem. -Demarcar a natureza arbitrária e univalente de uma relação funcional.
Algébrico	Uma lei, regra ou fórmula em um texto algébrico, no qual seja possível explicitar de forma única (com exceção de expressões algébricas equivalentes) uma variável (nomeada de dependente) em termos de outra variável (nomeada de independente).	Explicitar a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional por intermédio de uma lei, regra ou fórmula algébrica (usando letras e símbolos).	-Quantificar fenômenos funcionais. -Evidenciar a relação de dependência. -Reconhecer família de relações funcionais. -Operar com relações funcionais. -Compor e inverter relações funcionais. -Impossibilitar o reconhecimento de relações funcionais que não possuem como domínio e contradomínio números reais.

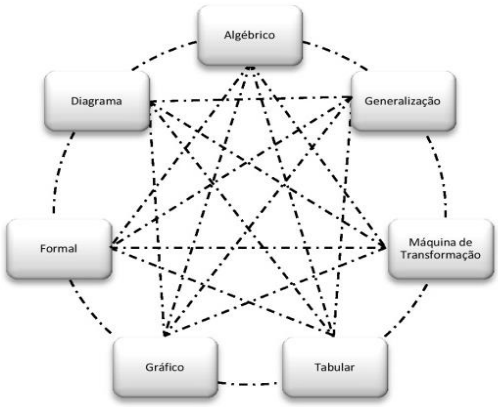
Gráfico	Um subconjunto de pontos: $G = \{(x, y); x, y \in R\}$, de forma que se $(x, y_1) = (x, y_2)$ então $y_1 = y_2$. (Teste da linha vertical) Obs: *R* é o conjunto dos números reais.	Plotar no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y), tal que *x* é um elemento do domínio de uma relação funcional *f* e $y = f(x)$.	-Identificar e determinar características geométricas: intervalos de monotonicidade, sinal, zeros, limitação, simetria, injetividade. -Reconhecer família de funções. -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que explicita o padrão caráter univalente da relação, a partir de algumas informações.	Apresentar um texto declarativo ou simbólico que expresse o padrão de uma relação funcional, com base em algumas informações particulares da referida relação.	-Reconhecer a relação de dependência ou variação entre quantidades e/ou variáveis. -Reconhecer família de relações funcionais. -Gerar equívocos na caracterização da relação funcional.
Formal	Texto declarativo que designa a relação arbitrária e univalente entre os elementos e dois conjuntos não vazios quaisquer, empregando quantificadores.	Realizar um texto declarativo que define uma relação funcional explicitando as características de univalência e arbitrariedade, com a utilização de quantificadores.	-Reconhecer as relações que são funcionais em qualquer realização. -Omitir noções e interpretações que subjazem e constituem o conceito de função, tais como a noção de variação e dependência.

Quadro 8 – Síntese do modelo teórico de MpE do Conceito de Função: o “que” e o “como” dos seus textos e vinculações

Fonte: autores

A explicitação das regras de reconhecimento e realização fornecem recursos fundamentais para leitura (reconhecimento), seleção e criação (realização) de textos (BERNSTEIN, 2000, 2003) sobre o conceito de função que podem ser legitimamente veiculados e produzidos no contexto escolar da Educação Básica, ou seja, de textos que se enquadram dentro das possibilidades validadas de geração deste contexto.

Apresentamos, no Quadro 9, um texto ilustrativo do modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de uma revisão sistemática de literatura construído nesse estudo.



Quadro 9 - Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de uma revisão sistemática
Fonte: autores

Na figura do Quadro 9, retratamos os panoramas em retângulos disjuntos com o objetivo de demarcar a especificidade (fronteiras) de cada um dos panoramas, posto que estes são caracterizados por textos singulares, com parâmetros próprios de reconhecimento e realização. A organização circular desses retângulos pretende comunicar, que *do ponto de vista do modelo*, os panoramas não apresentam relações hierárquicas, considerando que pertencem ao conjunto de realizações do conceito de função. Por fim, as linhas tracejadas que conectam, dois a dois, todos os panoramas indicam *a possibilidade do estabelecimento de pontes entre os panoramas*, na realização do conceito de função no ensino. No decorrer da análise efetivada na seção anterior, apontamos algumas *pontes* que foram indicadas em artigos do *corpus*.

O estabelecimento de *pontes* entre os panoramas, em termos bernsteinianos, pode ser entendido como uma classificação mais fraca (C-) nas relações entre estes. Já uma classificação C+ implica um forte isolamento entre os panoramas, estabelecendo-se reduzida ou nenhuma articulação entre os seus textos.

Schwarz e Dreyfus (1995) e Steele, Hillen e Smith (2013) apontam que estudos na área de Educação Matemática já diagnosticaram que, usando nossos termos, uma classificação permanentemente C+ entre os panoramas tabular, gráfico e algébrico, ocasiona uma visão compartimentalizada do conceito de função. De fato, devido a um forte isolamento entre os panoramas, a tendência é identificar o conceito de função somente por intermédio de um dos panoramas, excluindo os textos dos outros (NACHLIELI; TABACH, 2012).

Tais considerações parecem sugerir uma regulação do princípio de classificação mais fraca (C-) na relação *intraconceito* (entre os panoramas que constituem o conceito) na realização do conceito de função, em algum momento, no ensino. Estamos nos referindo a uma C- em algum momento, pois a gradação de princípio classificatório, segundo Cause (2010), não é necessariamente fixa e, dessa forma, pode variar na realização do ensino de um conceito. Ademais, como cada panorama é caracterizado por textos singulares, com suas potencialidades e limitações, que precisam ser demarcados, indicando a importância de uma C+, em algum momento, então inferimos sobre da fecundidade de imprimir uma variabilidade na gradação da classificação na relação intraconceito no decorrer da realização do ensino desse tema.

6. Considerações finais

O presente estudo teve como propósito construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função, tomando como base uma revisão sistemática de pesquisas relatadas em alguns periódicos da área de Educação Matemática.

O modelo construído utilizou como aporte teórico os conceitos da Teoria dos Códigos de Bernstein (2000, 2003) e como ferramenta analítica a estrutura do Estudo do Conceito de Davis e Renert (2009, 2013, 2014). Essa abordagem possibilitou-nos apresentar uma linguagem sistemática, estruturada e especializada (BERNSTEIN, 2000), que demarca as fronteiras e, assim, confere uma identidade para comunicação matemática veiculada e produzida nos contextos de ensino pelos seus participantes sobre conceito de função no contexto da Educação Básica. Pode, dessa forma, contribuir e subsidiar pesquisas sobre esse tema, tendo em vista que o modelo teórico apresentado expressa formas comunicacionais no âmbito macro e micro do conceito de função. A visão macro está patente na figura do Quadro 9, que evidencia a diversidade de panoramas e integra-os, trazendo-os organizados em um conjunto. A visão micro está representada, sinteticamente, no Quadro 8, em que cada panorama é apresentado com a caracterização pormenorizada de sua sintaxe textual específica para a comunicação do conceito de função, evidenciando facetas singulares deste conceito.

Assim, o modelo teórico de MpE do Conceito Função construído pode fornecer subsídios e reflexões, para autores de livros didáticos do Ensino Básico e para comunidade de professores que atuam na Ensino Básico ou cursos de formação inicial e continuada, sobre as formas de realizar esse conceito no ensino, no que diz respeito, por exemplo, a seleção e ao sequenciamento das realizações do conceito de função de acordo com os objetivos de ensino e grau de escolaridade e, a estratégias para evidenciar e fazer emergir noções e interpretações específicas que constituem esse conceito.

Sustentamos, ainda, que o percurso metodológico elaborado e operacionalizado para a construção da MpE do Conceito de Função pode ser utilizado empregando-se outras fontes e, também, para o desenvolvimento da MpE de outros conceitos matemáticos centrais no processo de escolarização. Aspiramos, dessa forma, que esse modelo teórico de MpE do Conceito de Função possa servir como ponto de partida para reflexões de pesquisadores que compartilham tanto o interesse como esse tema de pesquisa quanto com a nossa perspectiva teórica.

7. Referências

ADLER, J.; HUILLET, D. The social production of mathematics for teaching. In SULLIVAN, P.; WOOD, T. (eds). **International handbook of mathematics teacher education**: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195 – 222, 2008.

ASGHARY, N.; SHAHNARANI, A.; MEDGHALCHI, A. R. Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 1007 – 1026, 2013.

AYALON, M.; WATSON, A.; LERMAN, S. Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. **Educational Studies in Mathematics**, n.90, p. 321 – 329, 2015.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, *59*, p. 389-407, 2008.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções**. Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n.1, p.17 – 42, 2010.

BERNSTEIN, B. **Pedagogy, symbolic control and identity:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield, 2000.

BERNSTEIN, B. **Class, codes and control**: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge, 2003.

BIRGIN, O. Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. **Bolema**, v. 26, n. 42A, p. 139 – 162, 2012.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Cempem, Unicamp, v.13 , n. 23,p. 63 – 86, 2005.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. **Bolema**. v.28, n. 48, p. 64 – 88, 2014.

CAUSE, L. Bernstein's Code Theory and the educational Researcher. **Asian Social Science**, vol. 6, N. 5, 2010.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in Mathematics**, n. 26, p. 135 – 164, 1994.

DAVIS, B., RENERT, M. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, *29*(3), p. 37 – 43, 2009.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics s**, v. 82, , p. 245 – 265, 2013.

DAVIS, B. ; RENERT, M. **The Math Teachers Know**: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group, 141 p., 2014.

DAZZI, G. J.; DULLIUS, M. M. Ensino de Funções Polinomiais de Grau Maior que Dois Através da Análise de seus Gráficos, com Auxílio do *Software* Graphmatica. **Bolema**. v. 27, n. 46, p. 381 – 398, 2013.

DOORMAN, M. et al. Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking**. International Journal of Science and Mathematics Education**. V. 10, I. 6, p. 1243 – 1267, 2012.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. **Educational Studies in Mathematics**, 21, p. 521 – 544, 1990.

FALCADE, R.; LABORDE, C.; MARIOTTI, M. A. Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation**. Educational Studies in Mathematics**, n. 66, p. 317 – 333, 2007.

FRANT, B. J. As equações e conceito de função. **Boletim GEPEM**, n. 42, p. 71 – 80, 2003.

GRILO, J. S. P. **Da Universidade para a Escola***:* A Recontextualização de Princípios e Textos do discurso pedagógico de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.

HANSSON, O. **Studying the views of preservice teachers on the concept of function**. Doctoral Thesis. Luleå University of Technology, Suécia, 2006.

Hitt, F; González-Martín, A. S. Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. **Educational Studies in Mathematics**. V. 88, I. 3, p. 201 –219.

JONES, M. Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. **Undergraduate Math Journal**, 7 (2), p. 1 – 20, 2006.

MACIEL, P. R. C., CARDOSO, T. F. L. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348 – 1367, 2014.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, **Boletim GEPEM**, n. 61, p. 95 – 108, 2012.

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193 – 229, 2012.

MORAIS, A. M.; NEVES, I. P. A Teoria de Basil Bernstein- Alguns aspectos fundamentais**.** **Revista Práxis Educativa**, 2 (2), p. 115 – 130, 2007.

MOSCHKOVICH, J. Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through Interaction with a tutor. **Educational Studies in Mathematics**, n. 55, p. 49 – 80, 2004.

Nachlieli, T., Tabach, M. Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. **International Journal of Educational Research**, 51/52, p. 10-27, 2012

OEHRTMAN, M.; CARLSON, M.; THOMPSON, P. Foundational reasoning abilities that promote coherence in student's understanding of function. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Orgs.). **Making the connection*:*** research and teaching in undergraduated mathematics. Mathematical Association of America, n. 150, p. 27 – 42, 2008.

PETTICREW, M.; ROBERTS, H. **Systematic Reviews in the Social Sciences***:* A Practical Guide. Oxford: Blackwell. 2006.

RHOADS, K.; WEBER, K. Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. **International Journal of Education**, V. 78, p. 1 – 12, 2016.

RONDA, E. Growth points in linking representations of function: a research-based framework. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 303 – 319, 2015.

ROSSINI, R. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 9, n. 2, p. 205 – 247, 2007.

SÁNCHEZ, V. LLINARES, S. Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 6, I. 1, p. 5 – 25, 2003.

SAJKA, M. A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. **Educational Studies in Mathematics**, n. 53, p. 229 – 254, 2003.

SCHWARZ, B.; DREYFUS, T. New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. **Educational Studies in Mathematics**, 29(3), p. 259 – 291, 1995.

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. United States: The Mathematical Association of America, p. 25 – 58, 1992.

SILVA, A. L. et al. Pesquisando, discutindo, pensando e produzindo material sobre funções. **Boletim GEPEM**, n. 38, p. 55 – 72, 2001.

SLAVIT, D. An alternate route to the reification of function. **Educational Studies in Mathematics**, n.33, p. 259 – 281, 1997.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, I. 6, p. 451 – 483, 2013.

STRAPASON, L. P. R.; BISOGNIN, E. Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579 – 595, 2013.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163 – 187, 2015.

VICTOR, L. Systematic reviewing. In: **Social Research Update.** 2008. Disponível em: http://sru.soc.surrey.ac.uk/SRU54.pdf. Acesso em: 04 ago. 2014.

WHITE, T. Encrypted objects and decryption processes: problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. **Educational Studies in Mathematics**, n. 72, p. 17 – 37, 2009.

WILKIE, K. J. Upper primary school teachers’ mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 17, p. 397 – 428, 2014.

YERUSHALMY, M. Problem solving strategies and mathematical Resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. **Educational Studies in Mathematics**, n. 43, p. 125 – 147, 2000.

Agradecimentos: Ainda que não sejam responsáveis pelas posições adotadas neste artigo, nossos agradecimentos pelos comentários a Enaldo Silva Vergasta, Flávia Cristina Macêdo Santana, Maria Rachel Pinheiro Pessoa Pinto de Queiroz, Olmar Gómez, Paulo Diniz e Roberta D’Angela Menduni Bortoli.

CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos

Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos

A theoretical model of Mathematics for Teaching of the concept of function from realizations in textbooks

Resumo

Nesse estudo, construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de uma perspectiva discursiva. Utilizamos como fonte de dados para construção do modelo duas coleções de livros didáticos. O modelo está estruturado em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, que foram sistematizados empregando como parâmetro a convergência das regras de reconhecimento e realização. Os panoramas que compõem o modelo são: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal. O modelo construído explicita as formas de reconhecer, selecionar e produzir textos legítimos dentro de cada panorama, designando suas potencialidades e limitações comunicativas, podendo, desse modo, servir como quadro analítico para pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de função.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino; Conceito de Função; Regras de Reconhecimento e Realização.

Abstract

In this study, we build a theoretical model of mathematics for teaching of the concept of function from a discursive perspective. Two collections of textbooks were used as data source. The theoretical model is structured around the realizations of the concept of function identified in such textbooks categorized in which we call landscapes. By identifying recognition and realization rules, we were able to structure the landscapes. The following were found: tabular, diagram, algebraic, graphical, generalization of patterns and formal. The model explains how to recognize, select and produce legitimate texts within each landscape, as well as describing their communicative affordances and limitations. The result is expected to be used as framework for researches about teaching and learning function.

Keywords: Mathematics for Teaching; Function Concept; Recognition and Realization Rules.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos fundamentos da matemática contemporânea, permeando praticamente todos os campos desta disciplina (KLEINER, 1993), caracterizando-se como o instrumento essencial para descrever, explicar e prever a interação quantidade-qualidade de regularidades em fenômenos naturais ou sociais (MOURA, MORETTI, 2003).

Os documentos oficiais vigentes no Brasil refletem a importância deste conceito ao estabelecerem funções como um dos subtemas estruturadores do Ensino Médio (BRASIL, 2002) e sugerirem que o ensino da Álgebra, no Ensino Fundamental II, dos 6º ao 9º anos, deve apresentar uma abordagem funcional, com análise na variação de grandezas, utilizando a notação de letras como variáveis para expressar relações funcionais (BRASIL, 1998).

Dada à centralidade desse tema na matemática escolar, nas últimas décadas, o ensino e a aprendizagem de função têm sido amplamente pesquisados na área de Educação Matemática (TABACH; NACHLIELI, 2015).

No que diz respeito a formas de abordar o ensino de funções, as definições formais de função (como por exemplo, a fundamentada na teoria dos conjuntos) são consideradas muito amplas e gerais (KLEINER, 1993). Estudos indicam que a natureza estrutural lógica dos seus textos ocasiona dificuldade no seu entendimento, pelo menos para uma abordagem inicial, de forma que é necessário reconsiderar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem (NACHIELI, TABACH, 2015; VIIRMAN, 2014), no decorrer da Educação Básica. À vista disso, pesquisadores têm sugerido descrições mais operacionais para o seu ensino (VIIRMAN, 2014), considerando que as bases conceituais do conceito de função devem ser acessíveis desde os anos inicias do Ensino Fundamental (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), tal como comunicá-lo como uma relação de dependência por meio da análise de regularidades e padrões em sequências numéricas e geométricas (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; MAGGIO; NEHRING, 2012), mesmo antes que a palavra função tenha sido oficialmente introduzida no ensino. Outra sugestão, indicada por Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), é comunicar o conceito de função usando a metáfora de uma máquina que transforma cada *input* em um único *output*.

Tais alternativas apontam para uma certa variabilidade e especificidade nas formas de comunicar o conceito de função no ensino. Nesse estudo, temos o propósito de caracterizar, mapear e organizar estruturalmente essa variabilidade. Esse objetivo nos vincula a um tema de pesquisa que vem se consolidando na área de Educação Matemática, sob as denominações de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (*Mathematical Knowledge for Teaching*, tradução nossa) ou Matemática para o Ensino

(MpE) (*Mathematical for Teaching*, tradução nossa), que se tornou parte do léxico de pesquisas que visam desenvolver entendimentos sobre o ensino de matemática (CHAPMAN, 2013), formação de professores e desenvolvimento profissional (BARWELL, 2013).

Na seção a seguir enunciamos precisamente o objetivo do presente estudo, para tanto expomos a perspectiva que propomos para uma MpE do Conceito de Função, bem como o entendimento de um modelo teórico. Visando a compreensão desses construtos, apresentamos como está edificada a perspectiva teórica que os fundamentam.

2. UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.

As investigações sobre MKT ou MpE têm sido efetuadas a partir de diversos pontos de vista, fundamentados em epistemologias variadas, nem sempre explicitadas (BARWELL, 2013; RHOADS; WEBER, 2016).

Uma das visões mais proeminentes na literatura é a elaborada por Ball e colaboradores (por exemplo, Ball, Thames e Phelps (2008)) (RHOADS; WEBER, 2016), que compreende MKT como um conhecimento específico requerido para o trabalho de ensinar matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Em decorrência da epistemologia construtivista que alicerça o enfoque conceitual desses pesquisadores, o MKT é codificado e descrito utilizando taxonomias de conhecimento (RHOADS; WEBER, 2016). Chapman (2013) destaca que, apesar dessa caracterização de MKT oferecer uma estrutura útil para investigar os conhecimentos dos professores demandados para o ensino de matemática, fixar-se exclusivamente nesse conjunto de conhecimentos propende a limitar a “[...] nossa compreensão do que acontece nas salas de aula de matemática [...]” (p. 238, tradução nossa).

Para Davis e Renert (2014) o “[...] conhecimento dos professores de matemática (*matemática-para-ensino*, ou M_4T, em resumo) [...] compreende uma complexa rede de entendimentos, disposições e competências” (p.3, ênfase dos autores, tradução nossa) emergentes, que está distribuída pelo corpo de professores, habilitando-os a estruturar situações de ensino e aprendizagem. Em decorrência de tal perspectiva, esses pesquisadores optam por evadir-se de tentativas de rotular ou estabelecer medidas para caracterizar o conhecimento dos professores (DAVIS; RENERT, 2014).

Adler e Hulliet (2008) adotam a nomenclatura MpE e, por assumirem uma perspectiva epistemológica social, consideram que a categorização para MKT proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), em particular a categoria Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge*, tradução nossa), é de caráter geral, por não considerar as demandas contextuais, e desse modo, não captura o fato de que "[...] toda atividade matemática é direcionada para algum propósito, e ocorre no interior de alguma instituição (social)" (p. 22, tradução nossa).

As supracitadas perspectivas para MKT ou MpE apontam para o caráter singular da matemática veiculada e produzida no ensino. Nesse estudo, analisamos essa singularidade em termos discursivos, utilizando para tal fim, como aporte teórico, conceitos da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (2000, 2003). Para Bernstein (2000), os princípios reguladores da comunicação pedagógica são inerentes a essa prática e, por conseguinte, são fatos sociais. Consequentemente, a comunicação pedagógica matemática não pode ter origem em alguma lógica interna à Matemática Científica (produzida por matemáticos), nem no fazer daqueles que a produzem. Fundamentados nesse quadro teórico, a variabilidade e especificidades das ações comunicativas do conceito de função (produtos discursivos) realizadas no contexto escolar constituem o próprio objeto de análise da presente investigação, ou seja, não atribuímos a essas ações comunicativas quaisquer categorias representacionais cognitivas. Por essa razão, optamos em utilizar a denominação MpE (do Conceito de Função).

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação de *classificação* e *enquadramento*, os quais são gerados, respectivamente, pelas relações de poder e controle que caracterizam determinada prática. O princípio de classificação cria, reproduz e legitima fronteiras, posicionando os sujeitos, espaços, discursos, etc., em diferentes categorias (BERNSTEIN, 2000). Com base no princípio classificatório, o enquadramento regula formas legítimas de comunicação para diferentes categorias de uma prática pedagógica[45], em termos do controle que uma determinada categoria dessa prática tem sobre a comunicação (BERNSTEN, 2000, 2003).

O princípio de classificação gera marcadores de fronteira, denominados de *regras de reconhecimento*, que fornecem os meios necessários para distinção de "que" textos são legítimos para determinada categoria, estabelecendo assim, limites para o seu potencial comunicativo (BERNSTEIN, 2003). Um exemplo do princípio classificatório é a divisão do currículo escolar em disciplinas (Matemática, Física, Biologia e etc.), posto

[45] Prática pedagógica diz respeito, por exemplo, às relações entre professores e alunos ou entre médico e paciente (BERNSTEIN, 2000).

que existem fronteiras que as delimitam, no que diz respeito aos textos que constituem cada uma delas. Consoante com a teoria, compreendemos por texto qualquer ato comunicativo expresso por alguém, incluindo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (BERNSTEIN, 2003). O grau de isolamento do princípio de classificação pode variar entre as classificações mais forte (C+) e mais fraca (C-) (BERNSTEIN, 2000, 2003), no qual, quando há C+, as categorias estão separadas por fortes limites, apresentando textos mais especializados. Já no caso C-, o isolamento entre as categorias é reduzido, tornando-as menos especializadas (BERNSTEIN, 2000, 2003).

A regulação de formas legítimas de comunicação para diferentes categorias oriundas do princípio de enquadramento é estabelecida por intermédio das *regras de realização*, as quais instituem o que conta "como" comunicação legítima e, consequentemente à forma dos textos (BERNSTEIN, 2000, 2003). O enquadramento também pode assumir valores mais forte (E+) ou mais fraco (E-). O enquadramento apresenta valor mais forte (E+) quando a categoria com maior estatuto tem maior controle sobre a comunicação na prática pedagógica e, há E-, quando as categorias com menor estatuto também têm algum controle sobre essa comunicação (BERNSTEIN, 2003). Por exemplo, E+ na relação professor-alunos implica que o professor tem mais controle sobre as regras comunicativas, já no caso E-, os alunos também têm algum controle sobre essas regras.

Apropriamo-nos dos conceitos de regras de reconhecimento e realização e, consequentemente, dos princípios de classificação e enquadramento, para analisar, categorizar e caracterizar a variabilidade e especificidades de formações textuais sobre o conceito de função, veiculadas e produzidas nos contextos de ensino, onde ocorrem as relações pedagógicas. Com essa perspectiva teórica, pretendemos apresentar uma perspectiva de MpE do Conceito de Função em termos discursivos, demarcando as suas fronteiras e possibilidades comunicativas.

Entendemos um conceito matemático como um conjunto formado pelas *realizações* (tradução livre de *realizations* (DAVIS; RENERT, 2014)) – textos – que podem ser associadas à palavra que o nomeia. Por exemplo, o *conceito de função* é constituído pelo conjunto de realizações que podem ser associadas à palavra função. São reconhecidas como realizações as definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, algoritmos, gestos, desenhos ou objetos concretos (DAVIS; RENERT, 2014). Ressaltamos que, em decorrência desse ponto de vista, os conceitos existem apenas como atributos de suas realizações, ou seja, são nas realizações e pelas realizações que os conceitos são constituídos, não havendo, dessa forma, conceito fora do âmbito textual, estranho às próprias realizações.

Conceituamos *Matemática no Ensino* (*MnE*) *do Conceito de Função* como a categoria constituída do conjunto de textos sobre o conceito de função, comunicados com propósito de ensino no contexto escolar, de acordo com a regulação operada (classificação e enquadramento) nesse contexto. Portanto, a MnE do Conceito de Função realiza-se na própria dinâmica da prática pedagógica no contexto escolar.

Sob esse prisma, conceptualizamos a *Matemática para o Ensino do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da Matemática *no* Ensino do Conceito de Função. Assim, a simulação de uma aula sobre o conceito de função em um curso de formação ou um autor de livro didático apresentando o conceito de função em sua obra, são exemplos de MpE(s) do Conceito de Função, pois são *outras apresentações* das formas de realização do conceito de função no ensino. Por esse motivo, utilizamos a palavra *re-presentação*, separando o prefixo com um hífen, para ressaltar que estamos referindo-nos a outra apresentação das formas de realização do conceito de função no ensino.

Focalizamos nessa investigação uma MpE do Conceito de Função como um conjunto estruturado e sistematizado, identificando descritivamente as categorias de realizações e propriedades do fenômeno MnE do Conceito de Função. Nesse caso, MpE do Conceito de Função pode ser caracterizada como um *modelo teórico*, porquanto apresenta os atributos de um modelo teórico, isto é, um conjunto formalizado e coerente de proposições que descreve e possibilita a compreensão do fenômeno MnE do Conceito de Função.

As categorias de realizações que estruturam o modelo, denominadas de *panoramas* (*landscapes* (DAVIS; RENERT, 2014), tradução nossa), são organizadas considerando as instâncias estáveis identificáveis de classificação e enquadramento, por intermédio da convergência das regras de realização e reconhecimento.

Em virtude das perspectivas de MnE e MpE formuladas nesse estudo, podemos considerar como referentes de investigação (fonte de dados) para construção do modelo teórico, por exemplo, observação de salas de aula quando o ensino do conceito de função está sendo realizado, livros didáticos ou documentos oficiais. Neste estudo, adotamos como fonte de dados livros didáticos, tendo em vista que estes são uma referência para a prática pedagógica do contexto escolar. De fato, o livro didático é uma das principais fontes de orientação dos professores nas tarefas do fazer escolar, sendo utilizado como suporte e apoio tanto para a seleção do conteúdo a ser ensinado, o seu sequenciamento e a sua forma, quanto para a organização das atividades de aprendizagem e de avaliação (BIEHL, BAYER, 2009; PERRELLI; LIMA; BELMAR, 2013; SHIELD; DOLE, 2013). Em termos bernsteinianos, o livro didático é resultado dos textos que foram movidos do campo de produção (Matemática e Educação Matemática) e dos documentos oficiais produzidos pelos órgãos normatizadores da educação, e transformados em textos com o propósito de ensino e aprendizagem. O livro didático é uma ferramenta de ensino legitimada pelo sistema educacional brasileiro (GRANVILLE, 2008), tendo o discurso tanto dos órgãos oficiais responsáveis pela educação, quanto dos agentes dos campos de produção (Matemática e Educação Matemática) manifestado em seus textos, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[46].

Por conseguinte, temos por objetivo, na pesquisa que relatamos aqui, apresentar um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir da identificação de realizações em livros didáticos da Educação Básica.

No campo científico, espera-se que a estrutura teórica e metodológica utilizada para construção do modelo teórico de MpE do Conceito de Função possa ser utilizada para subsidiar análises sobre ensino e aprendizagem de função. Almejamos também, que o modelo apresentado possa fornecer, para a comunidade de professores, formadores de professores e autores de materiais didáticos que atuam nas diversos âmbitos de ensino, uma visão comunicacional multifacetada de aspectos do conceito de função que permeiam o seu ensino no contexto escolar.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para selecionar os livros de matemática do Ensino Fundamental nos anos finais e do Ensino Médio que compuseram a investigação, recorremos inicialmente aos guias dos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dos anos 2014, para os anos finais do Ensino Fundamental, e 2015, para o Ensino Médio. O PNLD ocorre a cada três anos para cada nível de ensino, avaliando, selecionando e recomendando coleções de livros didáticos, de acordo com critérios previamente estabelecidos, gerais e específicos por área, cujos resultados são divulgados no Guia Nacional do Livro Didático (GNLD). Por intermédio do GLND, os professores tomam conhecimento das coleções selecionadas, e assim efetivam a escolha da coleção que será utilizada na escola, no triênio subsequente à publicação do Guia.

[46] Informações sobre o PNLD disponíveis em <www.portal.mec.gov.br/pnld >. Acesso em 21 ago. 2016.

Fizemos uma leitura minuciosa das resenhas das obras recomendadas nos GLNDs 2014 (BRASIL, 2013) e 2015 (BRASIL, 2014), analisando, sobretudo, quais coleções apresentavam textos mais claros e simples, mais atividades contextualizadas, diversidade e quantidade de exercícios, e boas ilustrações. Segundo algumas pesquisas, esses são os critérios que os professores preponderantemente utilizam na escolha dos livros didáticos de Matemática constantes dos GLNDs (PERRELLI; LIMA; BELMAR, 2013; TRINDADE; SANTOS, 2012; VIEIRA, 2013). Com base nessa análise, construímos uma tabela para cada nível de ensino com os critérios citados, pontuando positivamente, com base na análise dos GLDNs, as coleções mais bem avaliadas nesses itens. Por fim, selecionamos as coleções *Matemática*, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, dos $6^{\underline{0}}$ ao $9^{\underline{0}}$ anos (IMENES; LELLIS, 2010a, 2010b, 2010c, 2010 d), e *Matemática*, de autoria de Manoel Paiva, do Ensino Médio (PAIVA, 2013a, 2013b, 2013c). Optamos por analisar somente duas coleções, tendo em vista que a utilização de um número maior de coleções implicaria em um volume de dados muito grande, o que poderia inviabilizar uma análise mais refinada. Ademais, julgamos que os critérios empregados para escolha das coleções tornam-nas representativas o suficiente, para cumprir o propósito da investigação que ora estamos relatando.

Pode-se levantar o argumento de que o fato do presente estudo restringir-se à análise de livros didáticos limita a construção do modelo teórico a que nos propusemos. Entretanto, pelas razões apresentadas acima, os livros didáticos selecionados dão conta de uma diversidade de realizações legítimas do conceito de função, portanto atendendo ao que se espera de um modelo teórico, a saber a sua potencialidade descritiva.

As coleções foram lidas integralmente e, à medida que identificamos realizações que considerávamos associáveis à palavra função, codificamo-las. Para categorizar e analisar as realizações e, assim, construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, além de conceitos da teoria de Basil Bernstein (2000, 2003), apropriamo-nos da estrutura do Estudo do Conceito (EC) (tradução livre de *Concept Study*), proposta por Davis e Renert (2013, 2014), transformando-a em uma ferramenta analítica. Originalmente, o EC é uma estratégia colaborativa que visa propiciar a evolução do conhecimento dos professores, mediante a análise e elaboração de formas de comunicar um conceito matemático no seu ensino (DAVIS; RENERT, 2013, 2014). A partir de 2009, o EC tem sido organizado sistematicamente em torno de quatro ênfases: *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (DAVIS; RENERT, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento de realizações é o mesmo que consideramos precedentemente. Nos EC(s) organizados por Davis e Renert (2013, 2014), os panoramas são agrupamentos de realizações que apresentam características semelhantes, de acordo com critérios acordados entre os participantes do estudo. Como mencionamos anteriormente, adotamos como critério para categorização das realizações identificadas nos livros didáticos em panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Davis e Renert (2014) definem vinculações como implicações lógicas das realizações componentes de cada panorama, que acarretam em conexões, potencialidades e limitações das relações conceituais. Norteados pela nossa perspectiva teórica, na composição das vinculações reportamo-nos às potencialidades e limitações *comunicativas* instauradas pelas realizações constituintes de cada panorama, que estabelecem uma rede de similaridades e dessemelhanças a respeito de noções e especificidades, em grande parte subjacente, do conceito de função. Combinações, para Davis e Renert (2014), são fusões de realizações que geram construtos (meta-realizações) com novas e mais abrangentes possibilidades interpretativas. A ênfase combinação não foi identificada no presente estudo.

4. OS PANORAMAS E SUAS VINCULAÇÕES

Nessa seção apresentamos os panoramas e suas vinculações. As realizações associáveis à palavra função identificadas nas coleções analisadas, que apresentam características semelhantes no que concernem às regras de realização e reconhecimento, foram organizadas nos seguintes panoramas: tabular, diagrama, algébrico, gráfico, generalização de padrões e formal.

4.1.Panorama Tabular

Constituem esse panorama as realizações de função como tabelas, que apresentam os dados de entrada e saída de uma relação funcional, dispostos em linhas ou colunas.

Na Parte A do Quadro 1, a tabela apresenta o resultado de um concurso para escolher a banda da cidade de Jucálopis que receberá o prêmio oferecido por uma revista local. O reconhecimento da referida tabela como a realização de uma função, mesmo sem uma menção explícita à palavra função, como é o caso, decorre da constatação que a cada banda da cidade corresponderá um único número de votos. Observe que se uma banda não obtiver nenhum voto, a ela será associada o número zero. Portanto, o reconhecimento de uma tabela como a realização de uma função está baseado em seu caráter univalente, isto é, a cada elemento do conjunto de entrada (da variável independente) está associado a um único elemento do conjunto de saída (da variável dependente).

Quadro 1 - Realizações de função como tabela

Parte A

Jucápolis	
Banda	Votos
Fala Grosso	730
Abóbora com Leite	682
Admirável Pé	611
Lamabamba	507

Fonte: Imenis e Lellis (2010a, p. 155)

Parte B

Nas feiras ou supermercados, o maço de couve é vendido por unidade. Pense nessas variáveis n, número de maços de couve; P, preço de n maços. Temos aqui uma função, pois P depende de n. A variação de P em função de n pode ser mostrada na tabela.

n(número de maços)	1	2	3	...
P (preço em R$)	2,50	5,00	7,50	...

Fonte: Imenis e Lellis (2010d, p. 207)

Parte C

x	y
-2	**-4**
0	**0**
2	**4**

Fonte: autores

A Parte B do Quadro 1, exibe a realização tabular que descreve a variação de P (preço de n maços de couve) em função de n (número de maços), considerando que um maço custa R$ 2,50. Para realização da tabela é necessário identificar as variáveis independente e dependente da relação funcional, n e P, respectivamente, e desse modo determinar P (que é único) para cada n. Assim, as realizações tabulares de função tanto possibilitam a identificação das variáveis independentes e dependentes, como também permitem que se integre a rede de entendimentos do conceito de função às noções de relação entre variáveis e de variação.

As realizações de função como tabelas podem ser empregadas para identificação de tipos específicos de funções, tais como a proporcionalidade direta e inversa (STEELE; HILLEN, SMITH, 2013), que posteriormente podem ser identificadas, respectivamente, como as relações funcionais linear e recíproca. Na realização tabular da Parte B do Quadro 1, as variáveis n e P são diretamente proporcionais, tendo em vista que se multiplicarmos n por um número real k, o preço P também fica multiplicado por k.

Vale ressaltar que a utilização exclusivamente da realização de função como tabela, pode não ser suficiente para identificação do tipo de relação funcional. Por exemplo, na realização tabular de uma relação funcional, apresentada na Parte C do Quadro 1, parece tratar-se de uma proporcionalidade direta entre x e y ($y = 2x$), no entanto os dados podem corresponder também à relação funcional $y = x^2$, a qual não é uma proporcionalidade direta, nem inversa, entre x e y. Tal limitação, nesse caso, é decorrência de, na realização tabular, termos informações apenas sobre um pequeno número de dados.

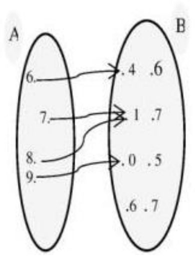
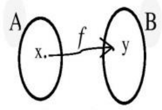
4.2. Panorama Diagrama

As realizações de funções como diagramas de setas visibilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. As referidas realizações estão restritas as relações funcionais em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser organizados em diagramas. A Parte A do Quadro 2 apresenta a realização de uma relação funcional como um diagrama de setas.

Na Parte B do Quadro 2, Paiva (2013a) utiliza a realização de função como diagrama de setas para tornar patente uma definição de função. Para relações funcionais cujo domínio e o contradomínio são conjuntos finitos e com um número reduzido de elementos, torna-se exequível o reconhecimento de correspondências entre conjuntos que são ou não relações funcionais, bem como a realização por diagramas dos exemplos de relações funcionais.

Como podemos observar Parte B do Quadro 2, com base nessas realizações pode-se introduzir a identificação dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma relação funcional, bem como, das suas respectivas notações, estabelecendo-se gradualmente textos com uma certa sintaxe matemática desse tema.

Quadro 2 - Realização do conceito de função como diagramas de setas

Parte A	Parte B
	Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se **função** de A em B toda correspondência *f* que associa cada elemento de A a um único elemento de B.  - Os conjuntos A e B são o domínio e contradomínio da função *f*, respectivamente. - Indica-se que f é uma função de domínio A e contradomínio B, por meio do símbolo $f : A \to B$. - Cada elemento y de B associado, através de f, a um elemento x de A é chamado de imagem de x. Esse fato é indicado por y = *f*(x) (lê-se "y é igual a *f* de x" ou "y é imagem de x através de *f*"). - O subconjunto de B, formado por todos os elementos que são imagens através de *f*, é chamado de conjunto imagem de *f*.
Fonte: Paiva (2013a, p. 119)	Fonte: Paiva (2013a, p. 120)

Paiva (2013a) apresenta a definição de uma relação funcional invertível, e da inversa de uma relação funcional, por intermédio das realizações de função como diagramas. O seu caráter icônico dá suporte à identificação da correspondência biunívoca entre dois conjuntos não vazios. Isso possibilita o reconhecimento de relações funcionais invertíveis, que é realizado pela afirmação "[...] uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, *f* é uma correspondência biunívoca entre A e B" (PAIVA, 2013a, p. 144). Assim, a relação funcional da Parte A do Quadro 1 não é invertível, tendo em vista que é não é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

4.3. Panorama Algébrico

Compõem esse panorama as realizações de funções (cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) que associam uma variável, chamada dependente, a uma outra variável, denominada de independente, por uma fórmula, equação ou lei algébrica. Quando a variável independente é denotada por x e a dependente por y, a realização de uma função como expressão algébrica é usualmente reconhecida e realizada pela expressão $y = f(x)$.

Nas coleções analisadas, mesmo quando o tema função ainda não tinha sido explicitamente abordado, as realizações desse panorama estão presentes na realização de fórmulas para situações (funcionais) do cotidiano, como a descrita na Parte A do Quadro 3, sobre o valor a pagar em um estacionamento, ou em leis que descrevem fenômenos físicos, conforme o exemplo da Parte B também do Quadro 3, ambos extraídos do livro do 8º ano.

Os autores Imenis e Lellis (2010b), em uma observação para o professor, destacam que exemplos de tal natureza viabilizam o início da construção do conceito de função. De fato, por intermédio das realizações algébricas das relações funcionais que modelam esses exemplos é possível explorar o reconhecimento da relação de dependência entre variáveis, como constituinte da estrutura comunicacional do conceito de função. Considerando que, por exemplo, na situação descrita na Parte A do Quadro 3 – a quantia a pagar depende do número de horas que o carro permanece no estacionamento; e na Parte B o tempo gasto no movimento de ida e volta depende do comprimento do pêndulo.

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 3 – Panorama algébrico</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>Veja a tabela de preços de um estacionamento:
<table>
<tr><th>Tempo</th><th>Preço em reais</th></tr>
<tr><td>1ª hora</td><td>6,00</td></tr>
<tr><td>Horas seguintes</td><td>3,00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fração de hora é cobrada como hora inteira</td></tr>
</table>
a) Quanto tempo deverá pagar o motorista que deixar seu carro estacionado por 3 h e 20 min? (R$ 15,00)
b) Deduza a fórmula que fornece a quantia a pagar Q para um carro que ficou estacionando por n horas, n > 1. $Q = 6 + (n-1).3 = 3 + 3n$</td>
<td>Há uma fórmula que se aplica ao movimento de um pêndulo e, para entendê-la, é preciso conhecer a raiz quadrada. A fórmula que permite calcular quanto tempo um pêndulo gasta aproximadamente em um movimento de ida e volta, é: $t = 2\sqrt{l}$
Com t (tempo) em segundos e l (comprimento do pêndulo) em metro.</td></tr>
<tr><td>Fonte: Imenis e Lellis (2010c, p. 191)</td><td>Fonte: Imenis e Lellis (2010c, p.161)</td></tr>
</table>

As realizações de função como expressão algébrica descrevem como é o padrão da relação funcional, viabilizando mais facilmente, em virtude da sua forma compacta, o reconhecimento do tipo (linear, afim, quadrática, etc.) de relação funcional em questão. De modo que, quando o tópico função é abordado explicitamente no ensino, as realizações de funções como expressão algébrica podem ser usadas para definir tipos de relações funcionais. Por exemplo, Paiva (2014a) define a função exponencial do seguinte modo: “Chama-se **função exponencial** toda função $f: R \to R_{+}^{*}$ [47], tal que $f(x) = a^{x}$, com $a \in R_{+}^{*}$ e $a \neq 1$" (p. 215, realce do autor).

As realizações algébricas, também em virtude da especificidade e compacidade dos seus textos, possibilitam a execução de operações, tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor funções (quando possível) e, também determinar a realização algébrica da inversa de uma relação funcional invertível (EVEN, 1990).

No entanto, apesar das potencialidades das realizações desse panorama, a sua ênfase no ensino pode acarretar a subordinação do conceito de função à realização algébrica (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), ou seja, o não reconhecimento do caráter arbitrário de uma relação funcional, tanto no que diz respeito tanto à natureza da relação entre às variáveis, que não precisa ser descrita por uma fórmula (como na parte A do Quadro 2), quanto aos conjuntos (domínio e contradomínio) que não têm que ser numéricos (como podemos observar no exemplo da Parte A do Quadro 1).

4.4. Panorama Gráfico

Esse panorama é constituído das realizações gráficas (gráficos) de uma relação funcional, na qual os conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais (*R*). A realização gráfica de uma relação funcional *f* dessa natureza é o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano ($R \times R$), em que *x* pertence ao domínio da função *f* e *y* é a imagem de *x* por *f*, ou seja, $y = f(x)$.

O reconhecimento de um subconjunto do plano cartesiano como sendo uma realização gráfica de uma relação funcional é baseado no caráter univalente do conceito de função, descrito pelo denominado teste da linha vertical. Esse teste consiste em traçar retas paralelas ao eixo O*y* (variáveis dependente), passando por pontos de abscissa *x* (variável independente), com *x* um elemento do domínio de *f*, de forma que o subconjunto em análise é o gráfico de uma relação funcional como esse domínio se, e somente se, cada uma dessas retas intersectarem o subconjunto em um único ponto (PAIVA, 2014a).

Nas coleções sob análise, os primeiros gráficos introduzidos no ensino são os gráficos de segmentos ou de linha, como na Parte A do Quadro 4, utilizados no

---

47 R_{+}^{*} é o conjunto dos números reais positivos.

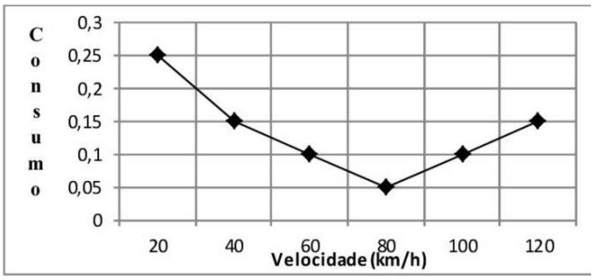
tratamento de informações, antes de uma abordagem explícita ao tema função. Os dados da realização tabular foram plotados no sistema cartesiano, obtendo um gráfico de linha, o qual possibilita a constatação de que o automóvel consome mais combustível em velocidades mais altas ou mais baixas. Para os autores, esses gráficos “[...] são adequados para visualizar a **variação** de uma grandeza que depende de outra.” (IMENIS; LELLIS, 2010b, p. 187, ênfase dos autores). Inferimos que tal abordagem pode propiciar posteriormente a integração das noções de variação e dependência como constituintes da rede de possibilidades interpretativas do conceito de função.

Quadro 4 – Realizações gráficas

Parte A

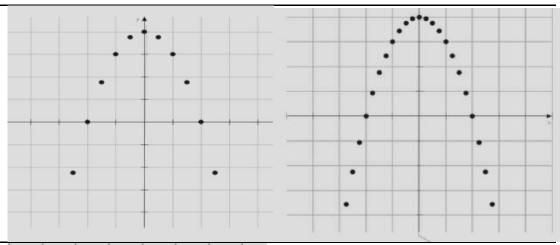
A tabela apresenta a relação entre o consumo de combustível de um automóvel e sua velocidade, fornecido por um fabricante.

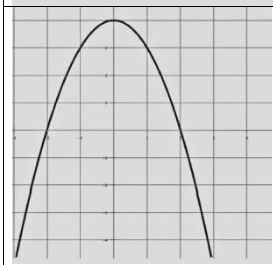
Velocidade (km/h)	20	40	60	80	100	120
Consumo de combustível (l/km)	0,25	0,15	0,10	0,05	0,10	0,15



Fonte: Imenis e Lellis (2010b, p. 187-188)

Parte B





Fonte: Imenis e Lellis (2010d, p. 214)

Quando o tema função é apresentado explicitamente, no livro do nono ano na coleção analisada (IMENIS; LELLIS, 2010d), o processo de transição de um conjunto finito de pontos no plano, como os utilizados na construção dos gráficos de linha, para realização gráfica de uma relação funcional cujo domínio é conjunto dos números reais, um intervalo ou reunião de intervalos do conjunto dos números reais, é feita de forma “informal” a partir de um conjunto finito de pontos $(x, f(x))$, tomando-se mais e mais pontos para uma relação funcional f cuja realização algébrica é dada ((IMENIS; LELLIS, 2010d). Os autores ressaltam que nesses casos os pontos não são ligados por segmentos de reta, pois existe uma curva que passa por esses pontos. Imenis e Lellis (2010d) justificam essa abordagem, afirmando que a demonstração formal desse fato não é acessível a esse nível de ensino. Na Parte B do Quadro 4, reportamos como os autores apresentam essa estratégia para a relação funcional realizada algebricamente por $f(x) = -x^2+4$.

A abordagem adotada legitima não apenas as realizações de função como gráfico no contexto escolar do Ensino Básico, como também a forma de realizá-las: “fórmula → tabela → marcar pontos → unir pontos” (IMENIS; LELLIS, 2010d, p. 214).

Conforme os tipos de relações funcionais abordadas no Ensino Básico vão sendo inseridos, com o reconhecimento e a realização de *pontes* entre as suas realizações algébrica e gráfica, a produção das realizações gráficas seguem rotinas de acordo com o tipo da relação funcional. Por exemplo, se f é uma função polinomial do 1º grau $(f(x) = ax + b, a \neq 0)$, então a sua realização gráfica é uma reta, logo para realizá-la é suficiente considerar dois pontos da forma (x, $f(x)$) (PAIVA, 2014a).

As realizações gráficas tornam visíveis inúmeras informações sobre uma relação funcional, tais como, imagem, sinal, injetividade, intervalos de crescimento e decrescimento, zero(s) e extremos, caso existam.

Apesar das potencialidades operacionais e interpretativas das realizações desse panorama, estudos ponderam que o seu predomínio no ensino, sobretudo com o foco em relações funcionais contínuas, pode acarretar dificuldades em reconhecer como relações funcionais aquelas cujas realizações gráficas não são facilmente realizadas, ou ainda, de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente, tal como a relação funcional real de variável real (função de Dirichlet), que associa a zero (0) todo número racional e um (1) a todo número irracional (KLEINER, 1993; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

4.5.Panorama Generalização de padrões

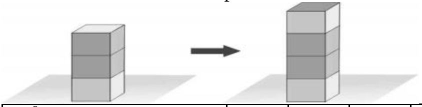
Compõem esse panorama as realizações que comunicam o conceito de função como um texto que descreve uma regra (funcional) para determinar o valor de um elemento de uma posição arbitrária em uma sequência, com base no conhecimento dos seus elementos iniciais (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). A construção e a validação dessa regra não é baseada em uma inferência formal, fundamentada na realização de uma prova (demonstração), trata-se de processo indutivo “informal” que é legitimado como uma forma de argumentação no contexto da Escola Básica.

Nas coleções analisadas, as realizações desse panorama já estão presentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, no reconhecimento e realização de generalização de padrões de sequências numéricas e/ou geométricas. Na Parte A do Quadro 5, reportamos um exemplo de uma sequência geométrica, em que os dados de entrada (número de cubos) e saída (número de faces visíveis) dos primeiros elementos da sequência, são organizados em uma realização tabular (item a), e depois generalizados pela afirmação constante do item b. Trata-se de um texto de cunho geral (generalização) que explicita a relação de dependência funcional entre o número de faces visíveis e o número de cubos, por intermédio de uma regra, que opera como uma “autorização” para determinar o número de faces visíveis para qualquer número de cubos.

Quadro 5 - Generalização de padrões

Parte A

a) Imaginando que o garoto prossiga empilhando cubos dessa maneira, complete a tabela.



N^0 de cubos	3	4	7	13
N^0 de faces visíveis	13	17	29	53

b) Comple a conclusão: O número de faces visíveis é igual ao número de cubos multiplicado por 4 e somado a 1 .

Fonte: Imenis e Lellis (2010a, p. 255)

Parte B

Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante.

Raciocinando como no exemplo anterior, vamos calcular o montante M, no fim de cada unidade de tempo, da aplicação de um capital C a juro composto, à taxa *i* por unidade de tempo.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C+iC=C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$iC(1+i)$	$C(1+i)+iC(1+i)=C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$iC(1+i)^2$	$C(1+i)^2+iC(1+i)^2=C(1+i)^3$
4	$C(1+i)^3$	$iC(1+i)^3$	$C(1+i)^3+iC(1+i)^3=C(1+i)^4$
. .			

A última coluna da tabela possibilita concluir que, em cada unidade de tempo t, o montante M é dado por: $M=C(1+i)^t$

Fonte: Paiva (2014a, p. 56)

No que concerne ao exemplo supracitado, Imenis e Lellis (2010a) sugerem ao professor a introdução de “[...] frases como: “O número de faces visíveis **depende** do número de cubos”; “Variando o número de cubos, **varia** o número de faces visíveis”; “O número de faces visíveis **é função** do número de cubos”” (p. 255, aspas e negrito no original), por considerarem que esses textos concorrem para formação do conceito de função. Atesta-se, dessa forma, o potencial dessas realizações como portadoras do reconhecimento das noções de variação e relação de dependência como constituintes da ampla teia de interpretações do conceito de função.

As realizações desse panorama podem ser empregadas para justificar e legitimar fórmulas no contexto da Escola Básica. A Parte B do Quadro 5, apresenta o processo indutivo (inferência não formal) de como, a partir dos primeiros elementos da sequência, “infere-se” a fórmula (realização algébrica, $M=C(1+i)^t$) que possibilita o cálculo do montante *M*, de um capital *C* (dado) aplicado a juros compostos à taxa *i* (fixa) por unidade de tempo *t*, também dada, em função do tempo *t*.

A despeito dos recursos facultados pelas realizações desse panorama, investigações identificaram a prevalência da escolha do modelo linear ou afim para gerar generalizações, mesmo que esse não seja o modelo da situação em análise (CALLEJO; ZAPATERA, 2014; REZENDE, 2011).

4.6. Panorama Formal

O panorama formal é constituído das realizações de função como uma definição formal, tal como em Paiva (2014a)

> Dizemos que uma variável *y* é dada em função da variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de *y*. A condição que estabelece a correspondência entre os valores de *x* e *y* é chamada **de lei de associação**, ou simplesmente lei entre *x* e *y*. Quando possível, essa lei é expressa por uma equação (p. 117, ênfase do autor).

As caraterísticas de univalência e arbitrariedade são explicitadas nessas realizações. Considerando a citação anterior de Paiva (2014a), a univalência está expressa no trecho – "[...] a cada valor de *x* corresponde um único valor de *y* [...]" (p. 117), e o caráter arbitrário – na medida em que não são especificados os conjuntos aos quais as variáveis x e y pertencem, e também o tipo de associação entre *x* e *y*. Essas características, como evidenciamos na análise de alguns panoramas anteriormente, estão presentes, ainda que não explicitamente, nas realizações consideradas como associáveis a palavra função, propiciando reconhecimento, a seleção e a produção de realizações legítimas do conceito de função.

A estrutura e a natureza precisa e concisa das realizações do presente panorama apresentam grande similitude com textos da Matemática Acadêmica (dos matemáticos) que definem função, tendo em vista que, nesses contextos, conforme Tabach e Nachlieli (2015), as definições encerram condições necessárias e suficientes para fundamentar o reconhecimento de que uma palavra se aplica a certos exemplos. Entretanto, estudos têm demonstrado que mesmo os alunos que conseguem realizar as definições formais (reproduzir seus textos), podem não utilizá-las para identificar exemplos de relações funcionais (TABACH; NACHIELI, 2015). Em uma investigação empreendida por Tabach e Nachlieli (2015), essas limitações estavam relacionadas com a estrutura lógica dessas realizações, principalmente no que diz respeito à utilização dos quantificadores.

5. SÍNTESE DO MODELO TEÓRICO

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído nesse estudo foi estruturado em categorias de realizações (panoramas) utilizando como parâmetro a convergência das regras de reconhecimento e realização. As regras de reconhecimento são os marcadores de fronteiras, que fornecem critérios para o reconhecimento dos panoramas pela especificidade dos seus textos, na sua variedade de apresentações. Elas regulam “o que vai com que”, ou seja, “que” textos podem ser legitimamente reunidos (BERNSTEIN, 2000) em cada panorama. As regras de realização regulam o que conta como comunicação legítima (BERNSTEIN, 2003) em cada panorama. Sendo assim, são necessárias para a seleção e produção de textos legítimos, considerando que regulam “como” o texto pode ser dito (BERNSTEIN, 2003) em cada panorama.

No Quadro 6, sintetizamos o “que” (regras de reconhecimento), o “como” (regras de realização) das realizações constituintes de cada panorama e as vinculações instauradas pelas suas realizações, que foram analisadas e especificadas na seção anterior.

Como podemos constatar na síntese apresentada no Quadro 6, cada panorama é caracterizado por uma sintaxe específica, revelada nas regras de reconhecimento e realização, que evidenciam facetas comunicacionais e interpretativas singulares do conceito de função, proporcionando uma rede de possibilidades de comunicação, que são estabelecidas por parâmetros próprios de legitimação.

Quadro 6 – Síntese do modelo: o “que” e o “como” dos seus textos

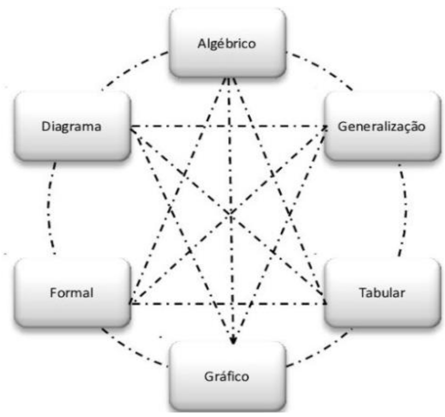
Panorama	“que” (regras de reconhecimento)	“como” (regras de realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados por intermédio de uma tabela, desde que a cada dado de entrada esteja relacionado a um único dado de saída.	Dispor os dados de entrada e os correspondentes de saída, de uma relação funcional, em linhas ou colunas.	-Identificar variáveis dependentes e independentes. -Reconhecer a noção de variação. -Identificar relações funcionais proporcionais direta (linear) e indireta (recíproca). -Caracterizar incorretamente o tipo de relação funcional.
Diagrama	Correspondência entre conjuntos (apresentados em diagramas), que a cada elemento de conjunto de entrada corresponda um único elemento do conjunto de saída.	Dispor os conjuntos de entrada e saída de uma relação funcional em diagramas, de forma que cada elemento do conjunto de entrada corresponda (seta) a único elemento do conjunto de saída.	-Identificar os conjuntos domínio, contradomínio e imagem de uma relação funcional. -Reconhecer relações funcionais invertíveis.
Algébrico	Lei, regra, fórmula, a qual seja possível explicitar, de forma única (excetuando-se expressões algébricas equivalentes), a variável dependente em termos da variável independente.	Realizar um texto da forma $y = f(x)$, para uma relação funcional f cuja variável independente é denotada por x e a dependente por y.	-Reconhecer a relação de dependência entre variáveis. -Reconhecer e definir tipos de relações funcionais. -Operar com relações funcionais. -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis algebricamente.
Gráfico	Conjunto de pontos (x,y) no plano cartesiano (*R*x*R*), em que $(x,y_1) = (x,y_2)$, se e somente se $y_1 = y_2$.	Plotar pontos (x,y) no plano cartesiano, em que y e x estão em relação funcional, com x variável independente e y dependente. Esses dados podem ser extraídos de uma realização tabular, por diagrama, ou algébrica.	-Reconhecer a noção de variação e dependência entre variáveis. -Caracterizar e reconhecer algumas características das relações funcionais, tais como: zeros, sinal, injetividade e monotonicidade. -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis graficamente.
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que a partir de algumas informações de uma sequência aritmética ou geométrica, explicita de forma geral, seu	Expressar um padrão ou regularidade para um elemento em uma posição genérica de uma sequência aritmética ou geométrica, em termos da sua posição.	- Reconhecer e desenvolver o entendimento da relação de dependência entre variáveis e de variação. -Gerar equívocos na caracterização da relação funcional, com a prevalência do modelo linear ou afim para realizar generalização de padrões.
Formal	Associação ou correspondência univalente e arbitrária	Produzir um texto que defina função, na qual devem estar explicitadas as características de	- Evidenciar as características de univalência e arbitrariedade do conceito de função. -Propiciar o reconhecimento de relações que são

	entre variáveis quaisquer.	univalência e arbitrariedade, por intermédio de quantificadores.	funcionais em diferentes realizações. -Exigir uma familiaridade com a terminologia de quantificadores.

Fonte: autores

Na Figura 1, apresentamos um texto ilustrativo do modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de realizações desse conceito identificadas nas duas coleções de livros didáticos, utilizadas como fontes da presente investigação. Dispomos os panoramas em retângulos disjuntos com o propósito de ressaltar as suas características textuais específicas. As dimensões semelhantes dos retângulos pretendem comunicar que, do ponto de vista do modelo, há uma dimensão horizontal entre os panoramas; eles não têm relações hierárquicas, pois partilham o pertencimento a um conjunto comum, ou seja, são conjuntos de realizações de um mesmo conceito (função). Por fim, as linhas tracejadas que conectam, dois a dois, todos os panoramas, indicam que podem existir *pontes* interligando os panoramas. O "tamanho" dessas pontes refere-se ao grau de isolamento entre os panoramas (princípio de classificação), que varia a depender das relações que poderão ser estabelecidos entre os textos dos panoramas (*intraconceito*), na realização do ensino do conceito de função, isto é, na MnE deste conceito. Dessa perspectiva, quando a classificação é mais forte (C+) nas relações intraconceito, os panoramas estão fortemente isolados, não se estabelecendo ou estabelecendo-se uma reduzida relação entre os seus textos. Quando a classificação é mais fraca (C-) nessa relação, há uma redução no isolamento entre os panoramas, as pontes "diminuem de tamanho", havendo articulação entre os seus textos.

Figura 1 – Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos



Fonte: autores

Estudos sustentam que um componente fundamental para a aprendizagem do tema função, em nossos termos, é a fluência na transição entre os textos do que chamamos de diferentes panoramas (EVEN, 1990, MAGGIO; NEHRING, 2012; STEELE; HILLEN;

SMITH, 2013). Isto nos possibilita inferir sobre a importância da implementação de uma C- nas relações intraconceito na realização do ensino desse conceito. Porquanto, uma permanente C+, nessas relações, pode implicar em uma compartimentalização do conceito de função (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013), de forma que os panoramas venham a constituir-se apenas em um somatório de produções textuais do conceito de função, sem articulação.

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído apresenta uma visão micro, macro e correlacionada deste conceito (Quadro 6 e Figura 1). O ponto de vista micro corresponde às formas de reconhecer, selecionar e produzir realizações legítimas dentro de cada panorama, cônscio das suas implicações e limitações comunicacionais. A visão macro fica patente na diversidade de panoramas e a correlacionada evidencia a possibilidade (quando possível) do estabelecimento de *pontes* entre os panoramas (Figura 1).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse artigo apresenta o resultado de um estudo que teve como objetivo construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de diferentes realizações, identificadas em duas coleções de livros didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio.

Esperamos que o modelo teórico de MpE do conceito de função, construído nesse estudo, ao explicitar as regras de reconhecimento e realização, possa contribuir trazendo reflexões e subsidiando discussões acerca do ensino desse tema na Escola Básica, tanto na elaboração de materiais didáticos, como nos cursos de formação inicial e continuada de professores. Em virtude do papel desempenhado por uma variedade de realizações na compreensão de conceitos (DAVIS; RENERT, 2014), em particular no conceito de função, por revelar, por exemplo, aspectos e interpretações particulares deste conceito (STEELE, HILLEN; SMITH, 2013) e, que esse tópico (realizações), ainda não foi sistematicamente incorporado aos cursos de formação (DAVIS; RENERT, 2014). Considerando, além disso, que as referenciadas regras são tacitamente adquiridas de acordo com inferências que o sujeito (a quem depreendemos como sendo agentes que compartilham o contexto, por exemplo: professor, alunos) faz (Bernstein, 2000, 2003).

Segundo Davis e Renert (2014), apesar de décadas de pesquisa, a MpE ainda não é bem compreendida. Nesse estudo, apresentamos uma perspectiva para MnE e MpE de um conceito matemático e um percurso metodológico para construção de um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, utilizando como arcabouço teórico conceitos da

Teoria dos códigos de Basil Bernstein (2000, 2003) e como ferramenta de análise a estrutura organizacional do EC proposta por Davis e Renert (2013, 2014). Esses construtos teóricos instrumentaram-nos com um quadro rigoroso para desenvolver uma descrição precisa, que nos propiciou demarcar as fronteiras comunicacionais, conferindo do ponto de vista discursivo, identidade as conceptualizações propostas. Estamos cientes que se trata de uma abordagem teórica distinta da presente na literatura sobre MKT ou MpE analisada, e ainda em construção, portanto, sujeita a análise, críticas e reavaliações. Entretanto, almejamos que esse estudo possa servir como ponto de partida para reflexões de pesquisadores que compartilham tanto o interesse por esse tema de pesquisa, quanto com perspectiva teórica utilizada.

7. REFERÊNCIAS

ADLER, J.; HUILLET, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In SULLIVAN, P.; WOOD, T. (eds). **International handbook of mathematics teacher education**: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222.

ASGHARY, N.; SHAHNARANI, A.; MEDGHALCHI, A. R. (2013). Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 1007-1026.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, *59*, p. 389-407.

BARWELL, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. **ZDM Mathematics Education**, V. 45, p.595-606.

BERNSTEIN, B. (2000). **Pedagogy, symbolic control and identity:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield, 2000.

BERNSTEIN, B. (2003). **Class, codes and control**: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge.

BIEHL, J. V.; BAYER, A. (2009). A escolha do livro didático de Matemática. **X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Ijuí/RS. Disponível em <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_43.pdf >. Acesso em 08 de ago. 2015.

BRASIL. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** *PCN* – 3 e 4 ciclos - Matemática . Brasília : MEC /SEF, 148 p.

BRASIL (2002). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros

Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec.

BRASIL (2013). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2014. Matemática. Ensino Fundamental – Anos finais. Brasília, 104 p.

BRASIL (2014). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015. Matemática. Ensino Médio. Brasília, 108 p.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. **BOLEMA**. v.28, n. 48, p. 64-88.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, V. 40, p. 3–22.

CHAPMAN, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 16, p. 237-243.

DAVIS, B.; RENERT, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, , p. 245 – 265.

DAVIS, B.; RENERT, M. (2014). **The Math Teachers Know**: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group, 141 p.

EVEN, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. **Educational Studies in Mathematics**, V. 21, p. 521-544.

GRANVILLE, M. A. **(2008).** O discurso pedagógico dos livros didáticos da década de sessenta: reflexos ou reproduções das "políticas públicas de educação" da época? **1ª JIED – Jornada Internacional de Estudos do Discurso**. Maringá – PR. Disponível em <www.dle.uem.br/jied/trab3.html>. Acesso em 17 jun 2015.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. (2010a). **Matemática** – Imenes & Lelis, 6º ano. Editora Moderna. São Paulo.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. (2010b). **Matemática** – Imenes & Lelis, 7º ano. Editora Moderna. São Paulo.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. (2010c). **Matemática** – Imenes & Lelis, 8º ano. Editora Moderna. São Paulo.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. (2010d). **Matemática** – Imenes & Lelis, 9º ano. Editora Moderna. São Paulo.

KLEINER, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogic Aspects. **Science & Education**. Vol 2, p. 183-209.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. (2012). Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, **Boletim GEPEM**, n. 61, p. 95-108.

MOURA, M. O.; MORETTI, V. D. (2003). Investigando a Aprendizagem do Conceito de Função a partir dos Conhecimentos Prévios e das Interações Sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, p. 67-82.

PAIVA, M. (2013a). **Matemática**: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 1. 2ª edição. São Paulo.

PAIVA, M. (2013b). **Matemática**: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 2. 2ª edição. São Paulo.

PAIVA, M. (2013c). **Matemática**: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 3. 2ª edição. São Paulo.

PERRELLI, M. A. S.; LIMA, A. A., BELMAR, C. C. (2013). A escolha e o uso do livro didático pelos professores das áreas de Ciências Naturais e Matemática: as pesquisas que abordam essa temática. **Série-Estudos** (UCDB) , v. 35, p. 241-261.

REZENDE, W. M. (2011). O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais. **CIAEM – XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife – Brasil, junho de 2011.

RHOADS, K.; WEBER, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. **International Journal of Education**, V. 78, p. 1-12.

SHIELD, M.; DOLE, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. **Educational Studies in Mathematics**, n. 82, p. 183-99.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, I. 6, p. 451-483.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions
for developing mathematical objects: the case of function. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163-187.

TRINDADE, D. A.; SANTOS, I. B. (2012). Critérios apontados por professores de matemática aracajuanos para seleção do livro didático. In: **VI Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade**, 2012, São Cristóvão. Anais VI Educon.

VIEIRA, C. M. (2013). Professores dos anos iniciais do ensino fundamental e livros didáticos de matemática. **Tese de Doutorado**. Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação (FaE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Minas Gerais.

VIIRMAN, O. (2014). The function concept and university mathematics teaching. **Dissertation**. Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology, Department of Mathematics and Computer Science.. Disponível em: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf>, acesso em 05 out 2016.

Agradecimentos: Ainda que não sejam responsáveis pelas posições adotadas neste artigo, nossos agradecimentos pelos comentários a Enaldo Silva Vergasta, Flávia Cristina Macêdo Santana, Maria Rachel Pinheiro Pessoa Pinto de Queiroz, Olmar Gómez e Roberta D'Angela Menduni Bortoli.

CAPÍTULO 4 – ARTIGO 3

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores

Graça Luzia Dominguez Santos, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 26/11/2016
Fecha de aceptación: 13/12/2016

Resumen

En este estudio desarrollamos un modelo teórico de Matemáticas para la Enseñanza del Concepto de Función. Utilizamos como aporte teórico las reglas de reconocimiento y realización de la teoría del sociólogo Basil Bernstein, y como herramienta metodológica la estructura organizacional del Estudio del Concepto. Los datos fueron recolectados en una investigación empírica con un grupo de profesores. El modelo fue estructurado a partir de la categorización de las realizaciones (llamadas Panoramas), identificados como tabular, algebraico, máquina de transformación, generalización de patrones, gráfico, diagrama y formal. Estos Panoramas fueron construidos a la luz de la convergencia entre las reglas de realización y reconocimiento. El modelo puede ser empleado como cuadro teórico en pesquisas sobre Matemáticas para la Enseñanza, así como para analizar y generar una amplia gama de formas de realización del concepto de función en la enseñanza.
Palabras clave: Matemática para la Enseñanza. Función. Concepto. Reglas de Realización y Reconocimiento.

Abstract

In this study, we built a theoretical model of Mathematics for Teaching the Concept of Function. Recognition and realization rules from Basil Bernstein’s theory and the structure so-called concept study were used as methodological tools. Data were collected at a group of schoolteachers discussing on teaching function. The model was structured through categories of realizations, which we named as landscapes: tabular, algebraic, transformation machine, pattern generalization, graphics, diagram and formal. These landscapes were built in light of their realization and recognition rules. The model might be used as theoretical framework in researches about Mathematics for Teaching, as well to analyze and produce a wide set of forms of realizing the concept of function in pedagogical practices.
Keywords: Mathematics for Teaching. Function. Concept. Realization and Recognition rules.

Resumo

Nesse estudo, desenvolvemos um modelo teórico de *Matemática para o Ensino do Conceito de Função*. Utilizamos como aporte teórico, os construtos *regras de reconhecimento* e *realização* da teoria do sociólogo Basil Bernstein e como ferramenta metodológica, a estrutura organizacional do Estudo do Conceito. Os dados foram coletados em uma investigação empírica com um grupo de professores. O modelo foi estruturado nas categorias de realizações (panoramas): tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. Estes foram construídos à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. O modelo pode ser empregado tanto como quadro teórico em pesquisas sobre Matemática para o Ensino, quanto para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino nas práticas pedagógicas.
Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Função. Conceito. Regras de Realização e Reconhecimento.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

1. Introdução

Em meados de 1980, conforme Adler e Davis (2006), Shulman identificou e descreveu o conhecimento profissional para docência em domínios específicos e técnicos, gerando o reconhecimento da natureza multidimensional do conhecimento em uso no ensino. Na área de Educação Matemática, o trabalho de Shulman alavancou uma série de estudos com o propósito de analisar, compreender e caracterizar a forma como a matemática é utilizada e/ou produzida pelos agentes responsáveis pelo seu ensino no contexto escolar (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013). Como consequência, um novo entendimento emergiu, sendo teorizado sob as denominações Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (tradução livre de *Mathematical Knowledge for Teaching*) e Matemática para o Ensino (MpE) (tradução livre de *Mathematics for Teaching*) (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013).

O MKT e MpE têm sido investigados a partir de diferentes quadros epistemológicos e teóricos (Barwell, 2013; Rhoads; Weber, 2016). Nesse estudo, como será explicitado na seção a seguir, adotamos uma perspectiva discursiva para apresentar uma conceptualização de MpE. Sendo assim, como a comunicação produzida na realização do ensino de matemática desenvolve-se em torno de conceitos matemáticos[48], compreendemos MpE como sendo uma Matemática para o Ensino de um determinado conceito. No presente estudo, elegemos função como o conceito a ser investigado.

A escolha do tema função deve-se ao seu papel central e estruturador no ensino da matemática, em virtude de estar presente na maioria dos seus ramos e proporcionar uma forma consistente de fazer conexões entre e através de uma ampla gama de tópicos na própria matemática e em outras áreas (Brasil, 2002; Kleiner, 1993). A relevância desse tópico na matemática, e em particular na matemática escolar, tem se refletido em uma vasta literatura sobre o seu ensino e aprendizagem (Tabach; Nachlieli, 2015). Para Sajka (2003) e Nachlieli e Tabach (2012), a complexidade deste conceito, decorrente da diversidade de formas de comunicá-lo e, portanto de interpretá-lo, torna-o um terreno fecundo para estudos sobre os seus processos de ensino.

Investigações têm sugerido e utilizado diferentes abordagens para o ensino desse tema (Elia, 2006). Callejo, Zapatera (2014) e Wilkie (2016) recomendam a exploração sistemática de padrões e regularidades nos anos iniciais, com o propósito de subsidiar o entendimento de funções. Doorman et al. (2012) e Sierpinska (1992) indicam que função deve aparecer inicialmente no contexto de modelagem, como um instrumento para matematizar relações de dependência e variabilidade entre grandezas físicas e de outras naturezas. Hitt e González-Martin (2015) propõem iniciar o ensino de função utilizando a noção de covariação (análise de como duas quantidades variam simultaneamente).

[48] Na seção a seguir apresentamos o entendimento de um conceito matemático adotado nessa investigação. Por ora, considere-o de forma intuitiva.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

No que diz respeito à apresentação de uma definição formal do conceito de função[49] no ensino desse tema, segundo Hansson (2006), pesquisadores da área de Educação Matemática consideram que, apesar da precisão e concisão de tais definições, estas não são adequadas para uma abordagem inicial desse conceito na Escola Básica, em decorrência de demandarem uma familiaridade anterior com a terminologia matemática (Jones, 2006). Desse modo, segundo Nachlieli e Tabach (2012), é necessário reexaminar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Tais considerações apontam tanto para uma certa variabilidade, quanto para a natureza singular das configurações comunicativas produzidas no ensino do conceito de função, especialmente na Escola Básica. Ressaltamos que o foco da presente pesquisa não é o *status* ontológico do conceito de função, mas sim como é realizada[50] e quais as regras que regulam a comunicação matemática no ensino deste conceito.

Isto posto, nesse estudo temos como propósito analisar, descrever e demarcar essa variabilidade e natureza singular de formas de comunicar o conceito de função mobilizada e produzida no ensino, em termos de uma conceptualização de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Essa perspectiva para MpE do Conceito de Função será caracterizada por intermédio de suas fronteiras e possibilidades comunicativas, utilizando como quadro teórico conceitos da Teoria do sociólogo Basil Bernstein (2000, 2003).

Adiante, reapresentamos o objetivo do presente estudo de maneira mais delimitada, após a apresentação da fundamentação teórica que sustenta a investigação.

2. Matemática para o Ensino do Conceito de Função: uma perspectiva teórica

Dentre as investigações que trilharam o caminho de estabelecer uma tipologia para o domínio do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática, refinando a categorização proposta por Shulman, destacam-se, segundo Barwell (2013) e Chapman (2013), os estudos de Deborah Ball e colaboradores (por exemplo, Ball; Thames; Phelps, 2008). Com base em investigações empíricas de como professores da Educação Básica utilizam a matemática no ensino, esses pesquisadores estabeleceram uma categorização para MKT que está em sintonia, conforme visão por eles adotada, com as demandas matemáticas específicas mobilizadas no trabalho do professor (Ball; Thames; Phelps, 2008). Fundamentado nessa categorização, o projeto *Learning Mathematics for Teaching*[51], cujo corpo

[49] Por exemplo: “Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if for all $x \in E$ there exists a unique $y \in F$ which is in the given relation with x” (Nachlieli; Tabach, 2012, p.14).

[50] Provisoriamente, tomemos o termo realizar ou realização como intuitivo, a seguir iremos defini-lo apropriadamente.

[51] O projeto investiga os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino. Estas medidas incluem itens que refletem as tarefas matemáticas reais que os professores enfrentam nas salas de aula. As

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

técnico é composto por Deborah Ball e colaboradores, tem desenvolvido e validado instrumentos qualitativos e quantitativos para avaliação do conhecimento profissional do professor de matemática (Adler; Patahuddin, 2012).

Para Adler e Huillet (2008), do ponto de vista epistemológico social, toda atividade matemática está direcionada a algum propósito e ocorre dentro de alguma instituição social. Então, a MpE só pode ser compreendida através de uma linguagem que a posiciona como estruturada e estruturando o contexto pedagógico, no qual ela "vive" (Adler; Huillet, 2008). Com base nesses pressupostos, Adler e Huillet (2008) analisam como a MpE é (re) produzida nos cursos de formação de professores na África do Sul.

Davis e Renert (2014), que adotam a nomenclatura MpE (*"Mathematics-for-teaching*", p.3) para o "[...] conhecimento disciplinar dos professores de matemática" (p. 3, tradução nossa), afastam-se de uma caraterização da MpE em domínios de conhecimento, em razão de a caracterizarem como emergente, dinâmica, tácita e distribuída pela categoria dos professores. Assim, esses pesquisadores sugerem como ferramenta para investigar e desenvolver a MpE, a estratégia colaborativa denominada de *Concept Study*, que traduzimos como Estudo do Conceito (EC), realizada "com" professores, para trazer à tona interpretações tácitas de conceitos matemáticos, selecionadas, mobilizadas e produzidas pelos professores no ensino, em diferentes circunstâncias e contextos (Davis; Renert, 2013, 2014).

Barwell (2013) sugere uma interpretação para o conhecimento de professores de matemática fundamentada na Psicologia Discursiva. Tendo em vista que, nessa perspectiva, o conhecimento é socialmente organizado e discursivamente estruturado (Barwell, 2013), então a comunicação matemática "[...] instanciada pelo ensino de matemática *in situ* desenvolve-se em formas que não são bem captadas por uma abordagem baseada em, por exemplo, categorias de conhecimento dos professores" (Barwell, 2013, p. 596, tradução nossa).

Diante do exposto, é possível corroborar o posicionamento de Chapman (2013) e Davis e Renert (2013) de que há, na área de Educação Matemática, um cenário heterogêneo de conceptualizações para MKT e MpE, implicando em diferenças consideráveis de como estes podem ser estudados, avaliados e desenvolvidos. Nesse estudo, apresentamos uma perspectiva discursiva para MpE[52], porquanto em ressonância com Bernstein (2000), entendemos que a comunicação matemática veiculada e produzida no contexto escolar onde ocorrem as relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados conteúdos (prática pedagógica) é *regulada* por princípios inerentes a essa prática.

---

avaliações podem ser usadas para medir a eficácia do desenvolvimento profissional focalizado na matemática. Informações disponíveis em http://www.umich.edu/~lmtweb/, acesso em 14 nov. 2016.

[52] Em decorrência da perspectiva assumida, as ações comunicativas (produtos discursivos) realizadas no contexto escolar constituíram o objeto de análise da presente investigação, por esse motivo optamos por usar a terminologia MpE.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação em cada prática pedagógica[53], como princípios de classificação e enquadramento. O princípio de classificação regula o grau de isolamento entre categorias, sejam essas categorias referindo-se a atores sociais, tais como: professores, alunos, disciplinas, práticas tradicionais e não tradicionais, contextos, a exemplo de: escola, universidade, família, etc.. Esse isolamento é o que gera espaço para uma categoria tornar-se específica (Bernstein, 2003). O isolamento é regulado pelos marcadores de fronteira - *regras de reconhecimento*, que possibilitam distinguir as categorias pela especificidade dos seus textos, na sua variabilidade de apresentações (Bernstein, 2000, 2003). Concordante com Bernstein, compreendemos por texto aqui qualquer ato comunicativo expresso por alguém, incluindo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (Bernstein, 2003). O grau de isolamento do princípio classificatório pode variar entre os valores mais forte (C+) e mais fraco (C-) (Bernstein, 2000, 2003). No caso C+, as categorias são mais especializadas, pois estão separadas por fortes limites (Bernstein, 2000, 2003). Onde há C-, o isolamento é mais reduzido, e como consequência as categorias são menos especializadas (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, se em uma determinada escola a relação entre as disciplinas é regulada por uma C+, há uma relação limitada ou ausente entre os seus respectivos textos.

O princípio de enquadramento refere-se à natureza do controle sobre as regras comunicativas[54] entre as categorias de uma prática pedagógica. Como dito por Bernstein (2003), por intermédio desse princípio é possível "[...] analisar as diferentes formas de comunicação legítima realizada em qualquer prática pedagógica" (p. 12, tradução nossa). O enquadramento também pode apresentar e variar entre valores mais forte (E+) e mais fraco (E-) (Bernstein, 2000, 2003). Diz-se que há E+, quando a categoria considerada como a de maior estatuto[55], dentro de um conjunto de categorias que estamos considerando, tem controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). No caso E-, as categorias de menor estatuto também têm algum controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). O princípio de enquadramento gera e regula as *regras de realização* que fornecem uma base para a seleção e produção de textos legítimos para cada categoria, ou seja, "como" os textos legítimos podem se tornar públicos (Bernstein, 2000, 2003).

Nesse estudo, apropriamo-nos dos conceitos de classificação, enquadramento, regras de reconhecimento e realização para analisar, identificar e categorizar formas especializadas de comunicar o conceito de função, produzidas para/no seu ensino no contexto escolar. Fundamentados nesses pressupostos teóricos, sustentamos que uma perspectiva para uma

---

[53] De forma mais ampla, Bernstein (2000) considera "[...] prática pedagógica como um contexto social fundamental por intermédio do qual a reprodução-produção cultural tem lugar." (p. 3, tradução nossa).
[54] Para Bernstein (2000), o enquadramento também regula as regras de ordem social, que dizem respeito à forma que as relações hierárquicas tomam em uma determinada prática pedagógica.
[55] A posição hierárquica das categorias que constituem uma prática pedagógica é estabelecida pelo princípio classificatório (relações de poder) (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, na relação médico-paciente, o médico pertence à categoria com maior estatuto ou o professor, na relação professor-alunos.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

MpE do Conceito de Função perpassa pela explicitação das regras de reconhecimento e realização que estruturam as configurações comunicativas do conceito de função realizadas no seu ensino. Essas regras são geradas, respectivamente, pelos princípios de classificação e enquadramento operantes na prática pedagógica, que demarcam, regulam e legitimam o caráter e a forma especializada dos seus textos.

Entendemos um conceito matemático como um conjunto constituído pelas *realizações* (tradução livre de *realizations* (Davis; Renert, 2013, 2014)) (textos) que podem ser associadas à palavra que o denomina. Por conseguinte, o "conceito de função" é formado pelo conjunto de realizações que podem ser associadas à palavra função. As realizações podem se apresentar, assim consideramos, como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos (Davis; Renert, 2014). Ressaltamos que optamos em adotar a denominação "realizações", ao invés de representações, com o propósito de evidenciar que não há, na perspectiva que estamos considerando, uma separação dualista entre o objeto matemático – no caso, função – e suas representações, como se objeto matemático (função) tivesse uma existência autônoma, ou seja, independente das suas representações. Nesse prisma, um conceito matemático não é nada mais do que um conjunto de suas realizações, reconhecidas e legitimadas no contexto comunicacional em que se manifestam.

Alicerçados por esses pressupostos teóricos, conceptualizamos *Matemática no Ensino* (MnE) *do Conceito de Função* como a categoria constituída dos textos do conceito de função, veiculados e produzidos no contexto escolar, pelos agentes responsáveis pelo ensino, de acordo com os princípios de classificação e enquadramento operantes na correspondente prática pedagógica. Portanto, a MnE do Conceito de Função diz respeito às formações discursivas deste conceito, com propósito de ensino, que ocorrem e emergem na dinamicidade da prática pedagógica, no contexto escolar.

Isto posto, definimos *Matemática para o Ensino* (MpE) *do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função. A utilização da palavra representação – separando o prefixo com um hífen – tem como objetivo demarcar que estamos referindo-nos a uma outra apresentação (apresentar novamente) das formas de realização do conceito de função no ensino. Como exemplos de MpE(s) do Conceito de Função, podemos citar: um grupo de professores analisando o ensino deste conceito ou um autor de um material curricular apresentando um conceito em sua obra. Além desses e outros exemplos, pode-se ter uma Matemática pra o Ensino de um determinado de conceito através de um modelo teórico, ou seja, um conjunto coerente, formalizado e sistematizado de proposições, que descreve as possibilidades e propriedades da MnE.

Assim posto, o objetivo do presente estudo foi desenvolver um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, portanto, identificando e descrevendo sistematicamente as categorias de realizações do conceito de função e suas propriedades, produzidas nas relações pedagógicas (a serem) efetivadas. O

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

modelo está estruturado em categorias de realizações do conceito de função que se assemelham relativamente às regras de reconhecimento e realização, produzidas pelos princípios de classificação e enquadramento, respectivamente, que regulam a comunicação nas aulas de matemática.

Para desenvolver o modelo de uma MpE, podemos recorrer a variadas fontes, que contenham realizações possíveis do conceito nas práticas pedagógicas, tais como: livros didáticos, documentos oficiais, avaliações de larga escala, pesquisas na área de Educação Matemática e professores. Esses últimos assumem um papel fundamental, porquanto são os principais agentes no processo de ensino e aprendizagem da matemática (Even; Ball, 2009; Guerrero; Ribeiro, 2014). Os professores são participantes vitais na circulação de textos nas práticas pedagógicas, principalmente por meio da seleção e relevância que dão a interpretações particulares de conceitos matemáticos, culturalmente situadas, que são evocadas, explicita ou implicitamente, de acordo com a adequação matemática, suficiência para situação em questão (Davis; Renert, 2009, 2014), especificidade e legitimidade do contexto escolar.

À vista disso, inferimos que um estudo coletivo com professores, analisando o ensino do conceito de função, produziria uma variabilidade de realizações deste conceito, que, ao serem organizadas utilizando conceitos da teoria dos códigos de Bernstein, nos termos mencionados anteriormente, possibilitar-nos-ia a construção de um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Nesta conformidade, colocando o objetivo da pesquisa de forma mais precisa, tivemos por propósito construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores, que atuam em segmentos da Educação Básica.

O resultado da presente investigação pode servir de quadro analítico para pesquisas que se debruçam sobre fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem de função. Além disso, pode subsidiar autores de materiais didáticos e propostas curriculares no seu trabalho de delineamento, bem como professores no planejamento e realização do ensino.

3. O Contexto e os Participantes

O contexto para coleta de dados da investigação empírica foi um grupo de professores, todos licenciados em Matemática, que na ocasião atuavam no Ensino Fundamental II (anos finais) e/ou no Ensino Médio[56], na região metropolitana da Salvador na Bahia, Brasil. O grupo foi constituído pelos participantes do curso de extensão, intitulado “Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de ensino”, proposto e coordenado pela primeira autora, promovido pela Pró-Reitoria de Extensão e o Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). O curso teve carga horária total de sessenta horas, com trinta e duas horas de aulas

[56] No Brasil, o Ensino Fundamental II, o qual tem duração de 4 anos, atende alunos com idade média (padrão) entre 10 e 15 anos; o Ensino Médio é posterior ao Ensino Fundamental II e tem duração de 3 anos.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

presenciais, realizadas nas dependências do Instituto de Matemática da UFBA, aos sábados, no período entre setembro e novembro de 2015.

O curso foi iniciado com treze participantes, mas em decorrência de algumas desistências no seu transcorrer, a partir do quinto encontro presencial esse número foi reduzido a sete participantes, que prosseguiram até sua finalização. No Quadro 1, apresentamos o perfil de todos os professores participantes.

Quadro 1 – Perfil dos participantes

Nome	Nível escolar de atuação	Tempo de docência
Profª Talita	Fundamental II e Médio	1 ano e 6 meses
Profª Cibele	Fundamental II e Médio	4 anos
Profª Cláudia	Fundamental II	4 anos
Prof. Cledson	Fundamental II	5 anos
Profª Deise	Médio	15 anos
Prof. Elcio	Fundamental II e Médio	30 anos
Prof. Eusébio	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Janice	Fundamental II	13 anos
Prof. Luis	Fundamental II	3 anos
Prof. Nadison	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Patrícia	Fundamental II	3 anos
Prof. Sampaio	Fundamental II	25 anos
Profª Regina	Fundamental II	20 anos

Fonte: autores

Dentre os nomes constantes no Quadro 1, apenas o nome da professora Talita é fictício. Os demais participantes optaram por sua identificação, pelo primeiro nome ou sobrenome.

O formato do curso foi inspirado na configuração do Estudo do Conceito (EC) proposta por Davis e Renert (2013, 2014). O EC é um modelo de estudo coletivo com professores, em que esses são convidados a analisar, refletir, estender e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito matemático, sob o ponto de vista do seu ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Segundo esses pesquisadores, investigações empíricas ratificam que grupos de professores trabalhando coletivamente, geram listas ricas e consistentes de realizações, quando convidados a situar um conceito no contexto das suas experiências de ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Foi precisamente com base nessa acepção que propusemos o referido curso, pois julgamos que tal configuração produziria dados para a construção de um modelo teórico da MpE do Conceito de Função.

Conforme sugerem Davis e Simmt (2006), no EC, o pesquisador é responsável pelo gerenciamento do curso, organizando, selecionando e adequando ações que possibilitem aos participantes interagirem e exporem suas perspectivas e entendimentos acerca do conceito que está sendo objeto de análise. Sendo assim, com o propósito de instaurar o debate e reflexões sobre o tema, a pesquisadora propôs no primeiro encontro: *Elaborem uma situação problema, questão ou tarefa que vocês utilizam ou já utilizaram em sala de aula, abordando o tema função, que em seguida será socializada com o grupo*. A apresentação dessa atividade gerou uma lista diversificada de noções e interpretações sobre formas de realizar o conceito de função no ensino, que foram anotadas por todos para reflexões posteriores. Nessa lista, já foi possível identificar várias realizações deste conceito.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

No Quadro 2, apresentamos, as atividades desenvolvidas a partir do segundo encontro. Tomando como base os estudos do conceito realizados por Davis e Renert (2013, 2014), iniciamos o curso com apenas o primeiro encontro planejado previamente. As conformações das sessões seguintes emergiram no transcorrer de cada encontro precedente, como decorrência das discussões entrecorridas.

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas nos encontros presenciais

Encontro	Atividades Desenvolvidas
Segundo	Cada professor trouxe uma situação problema, com solução, selecionada da sua experiência no ensino do tema. As situações foram analisadas pelo grupo e confrontadas com a lista construída no primeiro encontro.
Terceiro	O grupo foi dividido em três subgrupos, em que cada subgrupo apresentou uma situação problema (preparada previamente) que poderia ser aplicada no sexto, sétimo e oitavo anos, envolvendo noções do conceito de função, apesar desse tema não ser explicitamente abordado nesses anos.
Quarto	Organização e agrupamento da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função, por semelhanças de acordo com critérios estabelecidos pelos subgrupos.
Quinto	Apresentação das soluções de questões propostas pela pesquisadora no encontro anterior, com análise de quais noções e interpretações associadas ao tema função, construídas até o momento pelo grupo, as questões se vinculavam, bem como se existia algum outro entendimento relacionado com tema, que ainda não havia sido contemplado nos encontros anteriores.
Sexto	Discussão e análise de um texto que abordava a história do conceito de função, buscando relacionar as etapas históricas do desenvolvimento do conceito de função com as formas de realizar esse tema no ensino, que já haviam sido levantadas pelo grupo.
Sétimo	O grupo foi dividido em dois subgrupos, em que um subgrupo expôs uma aula de introdução do conceito de função no nono ano e o outro no primeiro ano do Ensino Médio. Após a apresentação, o grupo fez uma apreciação das similaridades e diferenças entre as duas aulas.
Oitavo	Retomada da tentativa de organizar da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função, por semelhanças, de acordo com critérios estabelecidos pelo grupo. Análise e reflexão coletiva acerca da variabilidade de formas de realizar o conceito de função na Escola Básica, bem como a repercussão dessa perspectiva, construída coletivamente, na tarefa de realizar o ensino esse conceito.

Fonte: autores

4. Procedimentos Metodológicos

Para análise e categorização das realizações do conceito de função identificadas no estudo com os professores, além dos conceitos da teoria dos códigos de Basil Bernstein, fundamentamo-nos na estrutura dos EC(s) implementados por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), porém, nesta dimensão, tomando-a para a análise de dados.

Baseados em experiências anteriores, Davis e Renert (2009) identificaram um conjunto de quatro ênfases para organização do trabalho dos grupos de estudo do conceito, que se mostraram produtivas para elaboração coletiva de entendimentos sobre conceitos matemáticos. Os investigadores intitularam essas ênfases de *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (Davis; Renert, 2009, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento para realizações é o mesmo apresentado na seção 2. Nos estudos realizados por Davis e Renert (2013, 2014), os panoramas são conjuntos de realizações que possuem características similares, em conformidade com parâmetros estabelecidos pelos participantes. Vinculações são, segundo Davis e Renert (2013, 2014), implicações lógicas que as realizações constituintes de cada panorama instauram, gerando diferentes

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

possibilidades e restrições interpretativas das relações conceituais. A ênfase combinação é definida como uma fusão de realizações que produzem novas realizações (meta-realizações), as quais circunscrevem perspectivas interpretativas de cunho mais amplo. (Davis; Renert, 2014). No presente estudo a ênfase combinações não foi observada.

Nesse estudo, usamos como parâmetro para construção dos panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Para vinculações, adotamos entendimento congênere ao de Davis e Renert (2013, 2014), norteados, porém, por nossa perspectiva teórica. Por conseguinte, vinculações referem-se à produção de potencialidades e limitações comunicativas, desinentes das implicações lógicas estabelecidas pelas realizações componentes de cada panorama, que produzem uma teia de semelhanças e diferenças de noções, entendimentos e especificidades, muitas vezes subjacentes do conceito de função.

Ainda que os professores participantes do grupo pudessem agrupar as realizações e discutir suas implicações, a tarefa de organizá-las sistematicamente como necessário a um modelo teórico ficou sob a responsabilidade dos pesquisadores. Nesse sentido, entendemos que nos apropriamos da estrutura do EC, proposta por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), para além de uma estratégia de trabalho com os professores, transformando tal sistematização organizacional das realizações em uma ferramenta analítica para construção do modelo teórico de MpE do Conceito de Função.

Para o registro dos dados gerados, utilizamos: 1) o diário de campo, no qual fizemos anotações sobre o andamento do curso e das realizações do conceito de função produzidas pelos participantes; 2) gravações audiovisuais de todos os encontros, que após serem analisadas, tiveram transcritos os trechos nos quais identificamos realizações e vinculações discutidas e produzidas pelos participantes; 3) produções escritas pelos participantes (registros em papel e no quadro); 4) questionário que aplicamos para traçar o perfil dos participantes.

Tais documentos foram analisados em relação dialógica-dialética com a sintaxe conceitual explícita dos conceitos da teoria dos códigos de Bernstein (2000; 2003) e com a organização estrutural do Estudo do Conceito, os quais constituíram o quadro teórico, analítico e metodológico que fundamentam a linguagem conceitual do modelo de MpE do Conceito de Função construído.

5. Panoramas e Vinculações

As realizações consideradas como associáveis à palavra função, identificadas na coleção dos dados produzidos pelos participantes do curso, foram agrupadas por semelhanças de acordo com a convergência das regras de realização e reconhecimento, nos seguintes panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. A seguir, analisamos cada um dos panoramas, abordando suas vinculações.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Nas transcrições das falas dos professores quando inserimos alguma explicação para o enunciado, colocamo-la entre parêntesis.

5.1. Panorama Tabular

Compõem o panorama tabular as realizações de função como tabela, que se caracterizam pela disposição dos dados de entrada e os correspondentes dados de saída de uma relação funcional, em linhas ou colunas.

Na Parte A do Quadro 3, transcrevemos uma tabela da relação funcional que associa o consumo mensal em *watts* ao correspondente valor a ser pago na conta de energia elétrica, considerando o preço de R$ 0,54 por *watt*. Essa atividade foi proposta pela Profª Janice a uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental (quando o tema função ainda não foi inserido explicitamente no ensino), com os dados sobre o consumo mensal em watts de vários eletrodomésticos trazidos de casa pelos alunos. Segundo a Profª Janice, a tabela é realizada:

> "[...] usando a operação multiplicação pelo valor constante do *watt* [...] o que estaria variando é o valor mensal do consumo e automaticamente o valor da conta que iria ser paga [...] um ideia de função [...] a gente vai obedecer a uma sentença matemática e nós vamos calcular o valor em cima disso [...] que no caso é a operação matemática" (Profª Janice – 3º encontro).

Quadro 3 – Realizações de função como tabela

Parte A

Um *watt*-hora (W/h) é a medida de energia usualmente utilizada em eletrotécnica e é a quantidade de energia utilizada para alimentar uma carga de potência de um *watt* pelo período de uma hora. O valor de nossa conta de energia, depende do consumo de watts mensal. Com base nessas informações, complete a tabela abaixo:

.0,54	
Consumo (W)	Valor (R$)
40	21,60
70	37,80
120	64,80
170	91,80
220	118,80
254	137,16

Fonte: Transcrição do registro da Profª Janice – 3º encontro

Parte B

Uma caneta custa 3 reais. Se representarmos por "x" o nº de canetas que queremos comprar e por "y" o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela:

nº canetas	Preço a pagar
1	1 . 3 = 3
2	2 . 3 = 6
.	
.	
6	6 . 3 = 18

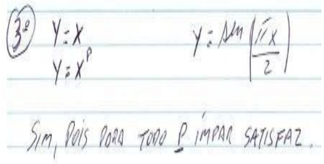
Fonte: Transcrição do registro da Profª Cibele – 2º encontro

Parte C

Atividade 3: Apresente uma lei de formação de uma função que satisfaça a relação descrita pela tabela a seguir.
Existem outras funções que satisfazem a relação? Por quê?

x	-1	0	1
y	-1	0	1

Adaptado de Schwarz e Dreyfus (1995)



Fonte: Registro do Prof. Luis Sérgio - 5º encontro

No supracitado extrato, podemos constatar que na realização da tabela está presente o reconhecimento das noções de variação e dependência, considerando que o preço a pagar (variável dependente) varia em decorrência do consumo (variável independente), bem como, que essa variação obedece a um padrão, uma lei (que no caso é a multiplicação do consumo por R$0,54, valor fixo do *watt*). Entendemos que a realização tabular pode ser o prelúdio do reconhecimento e legitimação das noções de variação, dependência, regularidade como constituintes da rede de interpretações do conceito de função.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Na Parte B do Quadro 3, expomos uma questão sugerida pela Profª Cibele para introdução do tema função no nono ano. No decorrer da apresentação da referida questão, a professora enuncia:

> Olhando a tabela você percebe que [...] a todos os valores de *x* estão associados valores de *y* e para cada valor de *x* está associado um único valor de y (Profª Cibele – 2º encontro).

Tal assertiva trata do caráter univalente de uma relação funcional, demarcando, dessa forma, o critério para o reconhecimento de uma tabela como uma realização do conceito de função, ou seja, a cada elemento do conjunto de entrada (das variáveis independentes) está associado um único elemento do conjunto de saída (das variáveis dependentes).

A solução da atividade descrita na Parte C do Quadro 3, apresenta uma infinidade de relações funcionais satisfazendo os dados da mesma realização tabular, e a análise da sua solução gerou algumas ponderações pelo grupo:

> Se temos um fenômeno e focalizamos parte de um fenômeno (poucos dados) então podemos ter modelos matemáticos (relações funcionais) que representem aquele fragmento, mas não o fenômeno como um todo (Prof. Eusébio- 5º encontro).

O excerto anterior entremostra a limitação de termos informações apenas de um número reduzido de dados da realização tabular de uma relação funcional.

5.2. Panorama Algébrico

O panorama algébrico é composto das realizações de uma relação funcional cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, que explicitam a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou expressão algébrica. Indicando-se, em uma relação funcional, a variável independente por x e a variável dependente por y, então a realização de uma função como expressão algébrica é frequentemente reconhecida e realizada pelo texto $y = f(x)$.

O exercício da Parte A do Quadro 4 faz referência a uma relação funcional de uma situação fictícia ou hipotética, na qual a realização de função como expressão algébrica $(f(x) = 1{,}5x + 16)$ foi utilizada para descrever (modelar matematicamente) a situação, ou seja, a realização algébrica “traduz o comportamento do fenômeno” (enunciação do Prof. Eusébio – 2º Encontro), de forma concisa e compacta, por intermédio de textos específicos, a saber, operadores simbólicos e letras (variáveis).

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Quadro 4 – Realizações de função como expressão algébrica		
Parte A	**Parte B**	**Parte C**
Na produção de peças, uma fábrica tem custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida (custo unitário). Sendo *x* o número de peças produzidas, determine: a) A lei da função que fornece o custo de produção de *x* peças; b) Calcule o custo de produção de 400 peças. Respostas: a) $f(x)=1{,}5x+16$ b) $f(400)=1{,}5.400+16$ $f(400)=600+16=616$	Um automóvel está parado diante da UFBA, um caminhão o ultrapassa com velocidade constante de 20m/s, nesse exato instante o motorista do automóvel arranca com a aceleração de 4m/s^2, em perseguição ao caminhão. Após quanto tempo o automóvel alcançará o caminhão? Quanto terá percorrido o automóvel? $S=S_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$ $S_a=0+(0\cdot 1)+\frac{4t^2}{2}\Rightarrow S_a=2t^2$ $S_c=0+20t+\frac{0t^2}{2}\Rightarrow S_c=20t$ $S_c=S_a\Rightarrow 20t=2t^2\Rightarrow 2t^2-20t=0$ $\Rightarrow 2t(t-10)=0\Rightarrow t=0 \text{ ou } t=10s$	Uma aplicação *f* de R em R, define uma função "afim", quando associa a cada $x\in R$ o elemento $(ax+b)\in R$, onde $a\neq 0$. Isto significa que $(x,ax+b)\in f,\forall x\in R.$ Se $b=0$ então $f:x\rightarrow ax$, é dita função linear.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Luis Sérgio – 4º encontro	Fonte: Transcrição do registro do Prof. Nadison – 2º encontro	Fonte: Transcrição do registro de Registro do Prof. Sampaio – 5º encontro

A partir da realização algébrica da relação funcional é possível determinar o custo de produção ($f(x)$ – variável dependente) que é único, para cada número x de peças produzidas (variável independente), o que foi realizado, no item b da questão transcrita na Parte A do Quadro 4 para $x=400$. Tais considerações apontam para o reconhecimento da realização algébrica como apropriada para tratar aspectos quantitativos de uma relação funcional.

Para solucionar a questão apresentada na Parte B do Quadro 4 é necessário a partir da função horária do espaço do movimento uniformemente variado, cuja realização algébrica é $S=S_0+v_0t+(at^2/2)$, realizar algebricamente as funções horárias do automóvel ($S_a=2t^2$) e do caminhão ($S_c=20t$), e em seguida determinar a interseção entre essas duas relações funcionais, que é equivalente a obter os zeros da função quadrática $S_a-S_c=2t^2-20t$. Demarcamos que o reconhecimento dos textos das realizações algébricas propiciou a legitimação da realização tanto da operação subtração $(S_a-S_c=2t^2-20t)$, como também da determinação dos zeros desta relação funcional.

As realizações de função como expressão algébrica apresentam como especificidade e potencialidade consolidar informações acerca de uma relação funcional em uma única cadeia de símbolos, tornando possível realizar operações (Ronda, 2015), tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor.

Na Parte C do Quadro 4, transcrevemos um registro em que a realização de função como expressão algébrica foi utilizada para definir as relações funcionais afim e linear. O caráter conciso das realizações algébricas pode

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

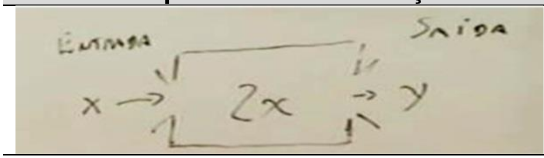
viabilizar o reconhecimento de tipos específicos de funções, podendo ser empregada para defini-las.

No entanto, apesar das potencialidades das realizações desse panorama, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) ressaltam que as realizações algébricas não são alternativas viáveis para estudantes no início do processo de escolarização, porquanto eles não estão familiarizados com esses textos. Desse modo, segundo esses pesquisadores, torna-se cabal investigar (outras) formas de como as relações funcionais podem ser realizadas no ensino (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

5.3. Panorama Máquina de Transformação

Constituem esse panorama as realizações de função que utilizam a metáfora de uma relação funcional como uma máquina que transforma um dado valor (de entrada ou *input*) em outro (saída ou *output*). No Quadro 5, reportamos um texto icônico da realização de função como máquina de transformação, apresentado pelo Prof. Sampaio no primeiro encontro presencial do curso.

Quadro 5 – Realização de função como máquina de transformação



Fonte: Registro de Prof. Sampaio – 1º encontro

O professor relata que utiliza essa realização na introdução do tema função, pois considera que tais textos têm uma relação mais direta com o contexto cotidiano dos alunos: “Aqui nessa máquina eu coloco minha matéria prima, a minha máquina processa e coloca para fora o meu produto” (Prof. Sampaio, 1º encontro), isto é, cada elemento que entra é transformado/processado em um (único) elemento de saída, condição (univalência) para que uma dada relação seja funcional. Esse extrato da fala do Prof. Sampaio revela que as realizações de função como máquina de transformação viabilizam o reconhecimento e legitimação das noções processo, transformação e mudança como constituintes da teia de possibilidades interpretativas do conceito de função. O Prof. Sampaio também menciona que, a partir dessa realização, introduz as definições dos conjuntos domínio (entrada) e imagem (saída), instaurando, desse modo, o processo de familiarização com os textos legítimos que compõem esse conceito.

As realizações desse panorama afiguram-se como mais condizentes para realizar funções cujos conjuntos domínio e imagem são numéricos, e a relação funcional respeita uma regra, como podemos observar no Quadro 5, em que a realização de função como máquina de transformação está subordinada à realização algébrica ($f(x)=2x$). Essas considerações evidenciam as limitações comunicativas que os textos desse panorama estabelecem.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

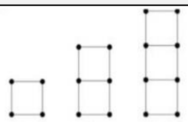
5.4. Panorama Generalização de Padrões

O presente panorama é formado das realizações que comunicam o conceito de função como uma generalização de padrões. Estamos considerando generalização de padrões como textos com afirmações gerais, que são gerados pelo reconhecimento do padrão de relação entre quantidades e/ou variáveis, com base em algumas informações de uma situação (funcional) particular (Mavrikis et al., 2012).

Na Parte A do Quadro 6, reportamos uma questão adaptada de Callejo e Zapatera (2014), proposta aos professores pela pesquisadora, que se refere ao reconhecimento e realização de uma generalização, padrão ou regularidade em uma sequência geométrica. Na discussão da questão pelo grupo a generalização foi realizada, por exemplo, pelos textos:

> Foram usados quatro palitos para fazer o primeiro quadrado e três para cada quadrado subsequente, assim n quadrados requererão $4+3(n-1)=3n+1$ palitos (Profª Cibele, 5º encontro).

> [...] as bolinhas vão aumentando dois a dois, só que eu tenho que subtrair sempre (as) do primeiro quadrado [...], logo $B=4+2(Q-1)$ [...] $2Q+2$, essa é a lei que vai reger as bolinhas [...] (Prof. Nadison, 5º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 6 – Realizações de função como generalização</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>Observe as seguintes figuras:
Como podem ver na imagem a figura com um quadrado, para ser construída necessita de 4 bolinhas e 4 palitos, a figura com dois quadros precisa de 6 bolinhas e 7 palitos e a com três quadrados de 8 bolinha e 10 palitos.

a) Quantos bolinhas e palitos serão necessários para construir uma figura com 4 quadrados? E com 6? E com 20?
b) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de bolinhas.
c) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de palitos.
Adaptado de Callejo e Zapatera (2014)</td>
<td>A bula de um medicamento apresenta a dosimetria em função da massa corpórea, de acordo com a tabela:
<table>
<tr><td>Massa Corporal (Kg)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Dose indicada (gota)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
a) Escrever a expressão que relacione a dose a ser ministrada com a correspondente massa corporal.
$DI.2=M \Leftrightarrow M.\frac{1}{2}=DI$</td></tr>
<tr><td>Fonte: Questão proposta pela pesquisadora - 5º encontro.</td><td>Fonte: Transcrição dos registros dos professores Cibele, Cláudia, Sampaio e Luis Sérgio - 7º encontro.</td></tr>
</table>

Como podemos observar, são afirmações gerais (generalizações) de dependência funcional entre o número de palitos e o número de quadrados, e número de bolinhas e o número de quadrados, que foram realizadas com textos em linguagem natural e, posteriormente por realizações algébricas das respectivas relações funcionais. As realizações de função por generalização foram obtidas por inferências decorrentes da análise da estrutura de construção dos primeiros elementos da sequência, e funcionam como uma “autorização” para determinar qualquer elemento da sequência. Isso evidencia parâmetros próprios para o reconhecimento e realização de textos no contexto da Educação Básica, isto é, da MnE do Conceito de Função. Note que que a

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

legitimação dessas realizações (as fórmulas), no contexto da Matemática Acadêmica (dos matemáticos, assim estamos assumindo), teria que ser pautada em uma demonstração, no caso, pelo processo de indução matemática.

Na Parte B do Quadro 6, relatamos uma questão em que com base em alguns dados de uma situação funcional, fornecidos por uma realização tabular, solicita-se uma expressão (afirmação geral) que relacione a dose (em gotas) de um medicamento com a correspondente massa corpórea (em kg) do usuário. Essa questão foi sugerida no 7º encontro, para introdução do tema função em uma turma do nono ano. O Prof. Luis Sérgio afirma: "A massa corporal é sempre o dobro da dose indicada" e escreve no quadro os textos: "$DI.2 = M$" e "$M.(1/2) = DI$". As três afirmações são generalizações da situação funcional descrita pela realização tabular, e como destacou o Prof. Eusébio, "do ponto de vista matemático procedem". No entanto, conforme ressaltaram os professores Sampaio e Eusébio, apenas uma delas é apropriada para generalizar o fenômeno, a saber: $DI = M/2$, porquanto "[...] é a quantidade de gotas que vai depender da massa" (Prof. Sampaio).

Os extratos relatados assinalam que realizar uma generalização de uma situação funcional, suscita tanto o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis, quanto a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. No exemplo descrito na Parte B do Quadro 6, as três generalizações obtidas seriam realizações da relação funcional que satisfaz a tabela, caso esta fosse considerada isoladamente. O reconhecimento da natureza das variáveis, como independente (massa corpórea) e dependente (dose), decorreu da análise dos textos, denominados por nós de não-escolares, que evidenciou a relação de causa e efeito do fenômeno (mesmo que fictício) matematizado por uma relação funcional.

Frisamos que as realizações de função como generalização de padrões estão restritas a um subconjunto de relações funcionais, aquelas que são passíveis de serem realizadas algebricamente (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

5.5. Panorama Gráfico

Compõem o panorama gráfico as realizações gráficas de relações funcionais, cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, denotado por R. A realização gráfica de uma relação funcional *f,* dessa natureza, é o conjunto: $\{(x, y) \in R \times R; x \in dom(f) \text{ e } y = f(x)\}$. A realização gráfica de uma função real com variável real geralmente é uma curva no plano cartesiano $R \times R$, designada de gráfico da função.

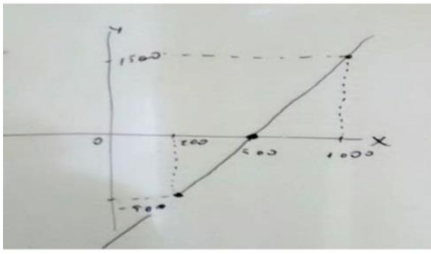
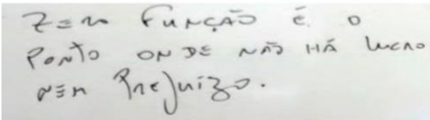
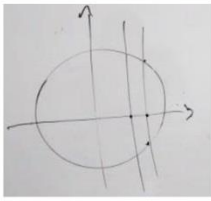
Na Parte A do Quadro 7, apresentamos a realização gráfica de função, obtida a partir da sua realização algébrica $y = 3x - 1500$, que descreve uma situação funcional da semirrealidade (1ª coluna). Para realizar o gráfico da relação funcional $y = 3x - 1500$, o Prof. Eusébio determinou os pontos $(200, -900)$, $(500, 0)$ e $(1000, 1500)$, e plotou-os no plano cartesiano. O processo

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

de realização do gráfico está subordinado ao reconhecimento (com base na realização algébrica) de que a relação funcional $y = 3x - 1500$ é afim[57], e, portanto tem como realização gráfica uma reta. A partir dessa realização gráfica é possível visualizar e interpretar para que valores de x (número de DVD(s) locados) a locadora teve lucro ($y > 0$), prejuízo ($y < 0$), ou nem lucro e nem prejuízo ($y = 0$), o zero da função ($x = 500$), que corresponde à interseção do gráfico com o eixo horizontal.

O exemplo supracitado atesta que as realizações gráficas de uma relação funcional propiciam o reconhecimento de características das funções, tais como sinal e zeros (caso existam), além também dos intervalos de monotonicidade e extremos (caso existam). Portanto, o comportamento global ou local de uma relação funcional pode ser analisado, reconhecido e legitimado, nesse contexto, com base na sua realização gráfica.

Quadro 7 – Realizações gráficas

Parte A		**Parte B – teste da linha vertical**
Em uma locadora de DVD(s), a locação de uma DVS custa R\$ 3,00/mês e o custo fixo de manutenção da locadora é R\$ 1500,00/mês. Que relação matemática podemos estabelecer para saber se ao final do período de um mês a locadora obteve lucro ou prejuízo? Locação: R\$ 3,00 Custo mensal: R\$ 1500,00 Lucro: *y* Quantidade de DVD(s) locados: *x* $y = 3x - 1500$	 	
Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro		Fonte: Registros do Prof. Sampaio – 7º encontro

O Prof. Eusébio evidenciou, nos quinto e oitavo encontros, que a noção de correspondência entre as variáveis está implícita nas realizações gráficas, em razão da existência dos pontos $(x, f(x))$ ser decorrência do fato de que: a cada x (variável independente) do domínio da função *f* corresponde a um (único) $y = f(x)$ (variável dependente). Além disso, o caráter univalente (um único $y = f(x)$) dessa correspondência possibilita o reconhecimento das curvas no plano cartesiano que são realizações gráficas de uma relação funcional. Na Parte B do Quadro 7, a curva (uma circunferência) não é a realização gráfica de uma relação funcional, porque as retas verticais traçadas intersectam a curva em dois pontos. Esse processo de traçar retas paralelas ao eixo vertical, passando por pontos de abscissa x, com x um elemento do

[57] Ressaltamos que o domínio da relação funcional que descreve o fenômeno é um subconjunto dos números naturais, assim sendo, a sua realização gráfica é um conjunto (discreto) de pontos sobre o gráfico da relação funcional $f(x) = 3x - 1500, x \in R$.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

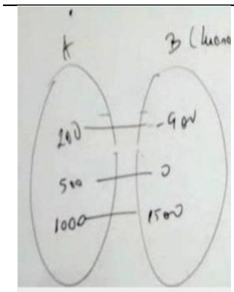
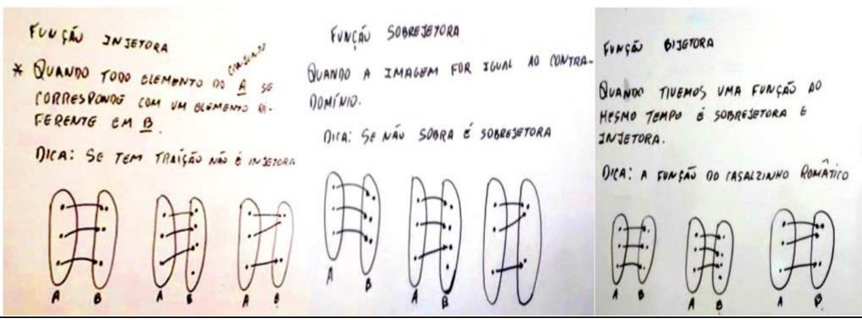
domínio de *f*, e verificar se estas intersectam a curva em um único ponto, é denominado de teste da linha vertical e é um critério para o reconhecimento (ágil) de curvas que são realizações gráficas de uma relação funcional (Jones, 2006; Steele; Hillen; Smith, 2013), legitimado no contexto da Educação Básica.

5.6. Panorama Diagrama

Constituem esse panorama as realizações de função como diagramas de setas, as quais viabilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. Convencionalmente as realizações por diagramas estão restritas as relações funcionais em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas.

Na Parte A do Quadro 8 é apresentada a realização por diagramas de flechas da (parte) relação funcional descrita na Parte A do Quadro 7, que foi realizada tomando como referência a sua realização algébrica $f(x) = 3x - 1500$, com a determinação das imagens $f(1000) = 1500$, $f(500) = 0$ e $f(200) = 900$[58]. Neste caso, foram estabelecidas conexões (*pontes*) entre as realizações algébrica e por diagramas de setas. Na realização do diagrama o Prof. Eusébio comunica:

> "Então a gente teve para a quantidade locada (referindo-se ao conjunto A do número de DVD's locados) uma valor correspondente [...] que corresponde a lucro ou prejuízo (conjunto B). A partir do diagrama a gente observa que todo elemento de A, vai ter um único correspondente em B" (7º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 8 – Realizações de função como diagrama</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro</td><td>Fonte: Registros do Prof. Luis Sérgio – 7º encontro</td></tr>
</table>

O excerto demarca que para realizar uma função por diagramas é necessário identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e a cada elemento do domínio fazer corresponder (por uma seta) um único elemento do contradomínio. Portanto, o caráter univalente do conceito de função está patente nessas realizações.

[58] Neste caso, o professor usou a realização por diagramas apenas para alguns elementos do domínio e contradomínio da relação funcional em tema.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

No sétimo encontro, O Prof. Luis Sérgio apresentou as definições de função injetora[59], sobrejetora e bijetora por intermédio das realizações de função como diagramas, conforme é possível observar na Parte B do Quadro 8, em que as mesmas três realizações por diagrama foram utilizadas para exemplificar as referidas definições. Nessa conformidade, a relação funcional realizada pelo primeiro diagrama (da direita para esquerda) é injetora e sobrejetora, e, portanto bijetora, a realizada pelo segundo diagrama é injetora, mas não é sobrejetora, e a realizada pelo terceiro é apenas sobrejetora.

Ainda referindo-nos a Parte B do Quadro 8, o Prof. Luis Sérgio apresentou o que denominou de "Dica" para cada uma das definições enunciadas. Cada "Dica" é um texto na forma de metáfora, empregado como recurso mnemônico, que estabelece relações entre o conteúdo matemático (no caso, as definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras) com circunstâncias da vida cotidiana. Segundo Grilo (2014), os recursos mnemônicos são estratégias utilizadas pelos professores com o propósito de auxiliar o reconhecimento de determinados textos (matemáticos), na expectativa de que possam ser realizados mais facilmente pelos estudantes, por apresentarem uma linguagem mais familiar para os alunos. Como é possível observar, tais textos distanciam-se do rigor e precisão dos textos da Matemática Acadêmica (Grilo, 2014), mais uma vez consubstanciando o pressuposto assumido de que os critérios de comunicação são regulados nos contextos em que são produzidos.

No que concerne às limitações das realizações desse panorama, ressaltamos que, para relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínios são constituídos de uma grande quantidade de elementos (ou são infinitos), não é viável (possível) utilizar as realizações como diagramas, para reconhecer se a relação funcional em análise é injetora, sobrejetora ou bijetora.

5.7. Panorama Formal

Compõem o panorama formal as realizações de função como uma definição formal. Utilizamos o adjetivo formal, em razão dessas definições apresentarem perceptível semelhança com os textos contemporâneos que definem função, e são legitimados na Matemática Acadêmica, como por exemplo, a definição apresentada na seção 1 (nota de rodapé) e a atribuída ao grupo Bourbaki: "Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f) em que X e Y são conjuntos não vazios e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$" (Sierpinska, 1992, p.30, tradução nossa).

No Quadro 9, expomos duas realizações de função como definição formal. A que consta na Parte A foi apresentada pelo Prof. Eusébio no sétimo encontro, na simulação de uma aula para introdução do tema função no primeiro ano do Ensino Médio, e a da Parte B foi enunciada pelo Prof. Sampaio

[59] Sugerimos uma definição mais precisa, por exemplo, uma função é injetora se, e só se elementos distintos do domínio da função possuem imagens distintas.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

no quinto encontro. Como podemos constatar, ambas apresentam reconhecível similitude com as definições supracitadas.

Quadro 9 – Realizações de função como definição formal

Parte A	Parte B
Dados dois conjuntos não vazios (*A* e *B*). Uma relação que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$, recebe o nome de função.	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação [...] f de $A \times B$, recebe o nome de aplicação de *A* em *B* ou função definida em *A* com imagens em *B* se, e somente se, para cada elemento do primeiro existe um e só um *y* do segundo, tal que o par (x, y) pertence a f.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Eusébio – 7º encontro	Fonte: Transcrição da enunciação do Prof. Sampaio – 5º encontro

O Prof. Eusébio apresentou a definição (formal) descrita na Parte A do Quadro 9, conjuntamente com as realizações algébrica, gráfica (Parte A - Quadro 7) e por diagramas (Parte A – Quadro 8), da situação funcional descrita na Parte A do Quadro 7 (1ª coluna). Segundo o professor, "[...] essas são algumas possibilidades da gente poder confrontar o conceito formal (definição formal, segundo nosso entendimento), vamos dizer assim com as representações [...]" (7º encontro). No caso, o Prof. Eusébio empenhou-se em instaurar o reconhecimento das relações existentes entre a realização de função como definição (formal) apresentada e as realizações gráficas e por diagrama, sobretudo no que diz respeito ao seu caráter univalente. Isso posto, afigura-se que o professor pretendeu estabelecer *pontes* entre tais realizações. De forma mais abrangente, essas *pontes* podem ser estabelecidas entre os panoramas aos quais essas realizações pertencem.

Os caracteres univalente e arbitrário das relações funcionais, expressos nas realizações de função como definição formal, propiciam precisão, estrutura lógica e generalidade a essas realizações, atributos que estão em consonância com os parâmetros de legitimação da Matemática Científica (Tabach; Nachlieli, 2015). Entretanto, segundo Even (1990) e Sierpinska (1992), não abarcam a variabilidade de entendimentos e formas de comunicar o conceito de função, quando este é utilizado tanto na matemática, como em ciências e situações funcionais do cotidiano, pois tais casos transcendem a mera lógica desta definição.

A natureza formal e generalista das realizações de função como definição formal indica, conforme Kleiner (1993), o que incluir ou excluir do estoque de exemplos de relações funcionais. Foi exatamente com esse propósito, que o Prof. Sampaio enunciou a realização de função como definição formal constante na Parte B do Quadro 9, para justificar o reconhecimento do texto: $g(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ como a realização algébrica de uma relação funcional, considerando que satisfaz a definição formal apresentada.

Comparada com a univalência, arbitrariedade é um critério menos visível (Steele; Hillen; Smith, 2013) nas realizações de função. Todavia, essas duas caraterísticas, concomitantes ou não, explicitadas ou não, auxiliam, ou mesmo

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

possibilitam, o reconhecimento e a realização das legítimas realizações de função, como destacamos na análise dos panoramas anteriores.

6. Síntese do Modelo

O modelo foi estruturado em termos de panoramas, constituídos de agrupamentos de realizações do conceito de função que portam semelhanças referentes às regras de reconhecimento e realização.

As regras de reconhecimento são essenciais para caracterizar a especialização comunicativa de cada um dos panoramas. Em razão de regularem "que" textos podem ser reconhecidos, em decorrência da sua sintaxe específica (Bernstein, 2000, 2003;), como legitimamente pertencentes ao correspondente panorama.

As regras de realização regulam a forma da comunicação em cada panorama, transmitindo parâmetros específicos para seleção e produção dos seus textos legítimos (Bernstein, 2000), isto é, operam regulando "como" um texto legítimo de cada panorama pode ser dito.

No Quadro 10, sumariamos o "que" (regras de reconhecimento) e o "como" (regras de realização) das realizações integrantes de cada um dos panoramas que compõem o modelo construído. Apresentamos também um resumo das vinculações das realizações constituintes dos panoramas, identificadas no estudo com os professores.

Considerando que um conceito matemático é constituído pelo seu conjunto de realizações, a síntese apresentada no Quadro 10 ao explicitar o "que" e o "como" dos textos que constituem as realizações de cada um dos panoramas do conceito de função operam como "lentes de aumento", que esquadrinham as suas partes constituintes ao expor a variabilidade de facetas singulares dos seus textos, com suas diferentes estruturas de referências, conjuntos de convenções, interpretações e parâmetros de comunicação que são legitimados no contexto em questão.

Quadro 10 – Síntese da MpE do Conceito de Função – o "que" e o "como" dos seus textos

Panorama	o "que" (reconhecimento)	o "como" (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados numéricos ou não em uma tabela, no caso em que, todo elemento de uma linha (coluna) está associado a um único elemento da respectiva linha (coluna).	Organizar os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus respectivos dados de saída estejam na mesma linha ou coluna.	-Evidenciar as noções de variação, dependência e regularidade. -Inferir incorretamente sobre o tipo da relação funcional.
Algébrico	Uma lei, regra ou fórmula, em textos com notação algébrica, na qual seja possível exprimir de forma única (com exceção de expressões algébricas equivalentes) uma variável (denominada de dependente) em termos de uma outra variável (denominada de independente).	Explicitar a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou regra empregando símbolos algébricos.	-Tratar de aspectos quantitativos. -Operar com relações funcionais. -Propiciar o reconhecimento de tipos de relação funcionais. -Exigir familiaridade com a notação algébrica simbólica.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Máquina de transformação	Texto icônico de uma máquina, que transforma cada dado de entrada em um único dado de saída, obedecendo a uma regra.	Realizar texto icônico que simule uma relação funcional como uma máquina que processa os elementos do conjunto domínio transformando-os, por intermédio de uma regra, nos elementos do conjunto imagem.	-Demarcar as noções de processo, transformação e mudança. -Introduzir as definições dos conjuntos domínio e imagem de uma relação funcional.
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que a partir de algumas informações de uma dada relação funcional, explicita de forma geral, seu padrão ou regularidade de caráter univalente.	Apresentar uma afirmação geral (texto declarativo ou simbólico), que com base em algumas informações de uma relação funcional, que expressam seu padrão ou regularidade.	- Propiciar o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis. - Propiciar a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. -Propiciar o reconhecimento da existência de um padrão ou regularidade.
Gráfico	Um conjunto G de pontos do plano cartesiano, tal que se (x,y_1) e (x,y_2) são elementos de G então $y_1 = y_2$.	Plotar no plano cartesiano os pontos da forma $(x, f(x))$, em que f é uma relação funcional com variável independente x.	-Evidenciar a noção de correspondência entre variáveis. -Utilizar o teste da linha vertical. -Identificar e determinar[60] os intervalos de monotonicidade, sinal, zeros e extremos (caso existam) de uma relação funcional.
Diagrama	Uma correspondência arbitrária e univalente entre conjuntos dispostos em diagramas.	Identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e dispô-los em diagramas, de forma que a cada elemento do domínio corresponda (seta) um único elemento do contradomínio.	-Demarcar a correspondência entre conjuntos. -Apresentar as definições de funções injetoras, sobrejetora e injetoras.
Formal	-Associação arbitrária e univalente entre variáveis. -Subconjunto de AxB, A e B quaisquer e não vazios, tal que os elementos de A e B estão em uma associação univalente.	Realizar um texto declarativo que define função, na qual devem estar explicitadas as características de univalência e arbitrariedade, com a utilização de quantificadores.	-Reconhecer as relações que são funcionais nas suas mais variadas formas de realização. -Limitar o entendimento da variabilidade de noções e interpretações associadas ao conceito de função.

Fonte: autores

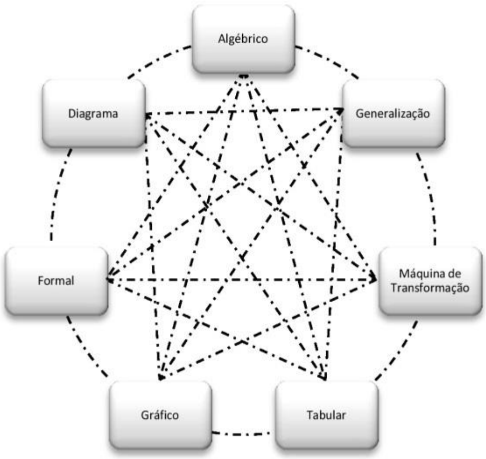
Na Figura 1, apresentamos um texto icônico do modelo construído nesse estudo – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores.

A Figura 1 tem como propósito apresentar uma visão estrutural geral (macro) do modelo de MpE do Conceito de Função desenvolvido no presente estudo.

[60] Com a utilização de softwares gráficos é possível não apenas identificar, mas também determinar os zeros, extremos e as interseções (caso existam).

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Figura 1 – Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de um estudo com professores



Fonte: autores

Ao dispormos os panoramas em retângulos disjuntos objetivamos comunicar que cada um deles tem sua identidade e fronteiras específicas, porquanto é o isolamento que confere singularidade (Bernstein, 2000, 2003) a cada panorama. As dimensões semelhantes dos retângulos e a conformação circular têm como propósito assinalar que as relações entre os panoramas, sob perspectiva do modelo, não são hierárquicas, tendo em vista que todos os panoramas têm como característica comum serem conjuntos de realizações do mesmo conceito. Por fim, as linhas tracejadas que interligam, dois a dois, os panoramas pretendem demarcar a possibilidade do estabelecimento de *pontes* entre os panoramas, no processo do ensino do conceito de função. Alguns dessas pontes, identificadas nos dados, foram evidenciados no decorrer da análise dos panoramas.

As pontes entre os panoramas podem ser interpretados, sob o ponto de vista bernsteiniano, como uma redução no isolamento entre os panoramas, ou seja, como uma classificação mais fraca nas relações entre os panoramas (intraconceito). Nessa perspectiva, valores de classificação mais forte ou mais fraco nas relações intraconceito, levam à menor ou maior articulação entre os vários panoramas.

Estudos assinalam a importância de organizar o ensino de forma a estabelecer, em nossos termos, *pontes* entre os diferentes modos de realizar funções (Ronda, 2015; Steele; Hillen; Smith, 2013), em razão de muitas investigações apontarem que os alunos tendem a identificar o conceito de função somente com uma das suas realizações (Nachlieli; Tabach, 2012). Por exemplo, o texto “função” pode ser visto como equivalente à sua realização algébrica em um contexto, como sua realização gráfica em outro, e só raramente, como relacionada às duas realizações simultaneamente (Nachlieli; Tabach, 2012). Por conseguinte, esses resultados sugerem que o ensino do

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

conceito de função, em algum momento, dever ser pautado em uma classificação (C-) nas relações intraconceito.

Entretanto, como cada panorama tem sua comunicação especializada que revela aspectos particulares do conceito de função, mais apropriados e operacionais para certos contextos funcionais do que para outros, entendemos que deve haver espaço no ensino do conceito de função para o desenvolvimento de uma orientação específica e focada no reconhecimento e na realização dos seus textos, isto é, para uma classificação mais forte nas relações intraconceito. Nessa configuração, entendemos que o enquadramento também terá uma gradação mais forte (E+), pois os textos do panorama em estudo serão privilegiados em relação aos dos outros panoramas, em certo sentido os textos do panorama que está sob foco no ensino têm "controle" sobre as regras de comunicação.

Diante do exposto, entendemos que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído pode ser empregado para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino, em decorrência da variação da gradação nos valores de classificação e enquadramento, que podem variar entre os extremos de mais forte a mais fraco.

7. Considerações Finais

No presente estudo, construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de estudo com um grupo de professores, subsidiados por conceitos da teoria sociológica de Bernstein.

A teoria de Bernstein apresenta rigor e precisão que dão origem a uma série de conceitos inter-relacionados (Hoadley, 2006), operacionalizando-nos com robustez analítica, teórica e metodológica. No entanto, como ressaltado por Hoadley (2006), as suas categorias teóricas não permitem uma leitura direta do empírico. Nessa conformidade, faz-se necessário a construção de uma linguagem de descrição (no nosso caso, modelo teórico de MpE do Conceito de Função) com o propósito de trazer esses conceitos para mais perto dos dados, possibilitando a sua leitura. Assim sendo, os dados empíricos foram organizados em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. Desse modo, o modelo foi estruturado nos panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal.

A identificação com precisão dos critérios comunicativos legítimos para cada panorama possibilita tanto o reconhecimento, como uma forma de selecionar e produzir segmentos legítimos de textos sobre o conceito de função, inteirado da sua rede de entendimentos e especificidades interpretativas. Fornece, dessa forma, uma transparência comunicativa para leitura do modelo, que propicia uma perspectiva multifacetada da MnE do Conceito de Função, operacionalizada (ou a ser operacionalizada) no decorrer

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

dos Ensinos Fundamental II e Médio, podendo, inclusive, alertar para novas possibilidades, relações e configurações comunicativas.

Tal perspectiva pode contribuir com a comunidade de professores que atuam na Escola Básica ou cursos de formação inicial e continuada, trazendo subsídios e reflexões em relação a formas de realizar conceito de função no ensino nesses níveis, tanto no diz respeito à diversidade e especificidade de formas de realizá-lo, a sua organização e sequenciamento, critérios de avaliação, quanto na escolha pela gradação dos princípios de classificação e enquadramento nas relações intraconceito das práticas pedagógicas a serem efetivadas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função desenvolvido e construído nesse estudo deve ser entendido como resultado de uma lente teórica particular, a qual nos permitiu uma descrição (uma re-presentação) sistemática e estruturada do que reconhecemos através do nosso olhar como o fenômeno que conceptualizamos como MnE do Conceito de Função.

Referências

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: researching mathematics for teaching mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*, p. 270-296.

Adler, J.; Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In Sullivan, P.; Wood, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222.

Adler, J.; Patahuddin, S. M. (2012). Recontexualising items that measure mathematical knowledge for teaching into scenario based interviews: an investigation*. Journal of Education***,** N. 56.

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, p. 389-407.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p.595-606.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity***:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield.

Bernstein, B. (2003). *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge.

Brasil (2002). Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *PCN + Ensino médio***:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*.* Brasília: MEC/Semtec.

Callejo, M. L.; Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *BOLEMA*. v. 28, n.48, p. 64-88.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Carraher, D. W.; Martinez, M. V.; Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 3-22.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237-243.

Davis, B.; Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 29, N. 3, p. 37-43.

DAVIS, B.; RENERT, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, , p. 245-265.

Davis, B.; Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group. 141 p.

Davis, B.; Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics***,** v. 61, n. 3, p. 293-319.

Doorman, M. et al. (2012). Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. V. 10, I. 6, p. 1243-1267.

Elia, I. et al. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*. p. 317-333.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* V. 21, p. 521-544.

Even, R.; Ball, D. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Grilo, J. S. P. (2014). *Da Universidade para a Escola: A Recontextualização de Princípios e Textos do discurso pedagógico de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática*. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Guerrero, L. S.; Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, v. 1, p. 1-15.

Hansson, O. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Tese de Doutorado. Luleå University of Technology, Suécia.

Hitt, F; González-Martin, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*. V. 88, p. 163-187.

Hoadley, U. (2006). Analysing pedagogy: the problem of framing. *Journal of Education*, n. 40, p. 15-34. Disponível em <http://www.joe.ukzn.ac.za>. Acesso em 07 set. 2016.

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
páginas 143-167

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, 7 (2), p. 1-20.

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209.

Mavrikis, M. et al. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic a_ordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, Wiley.

Nachlieli, T., Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, p. 10-27.

Rhoads, K.; Weber, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. *International Journal of Education*, V. 78, p. 1-12.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics,* n. 90, p. 303-319.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, p. 229-254.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. United States: The Mathematical Association of America, p. 25-58.

Steele, M.; Hillen, A. F.; Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, p. 451-483.

Tabach, M.; Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitionsfor developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, n.90, p. 163-187.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, n.93, p. 333-361.

CAPÍTULO 5 – ARTIGO 4

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função

Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função

Resumo

Esse artigo apresenta um estudo com o propósito de desenvolver um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função, em uma perspectiva discursiva, empregando as seguintes fontes: uma revisão sistemática de literatura de pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função, duas coleções de livros didáticos e um estudo com um grupo de professores. O modelo apresenta uma linguagem de descrição cuja estruturação teórica está ancorada, fundamentalmente, nos construtos *regras de realização* e *reconhecimento* da Teoria de Basil Bernstein, sendo organizado em categorias de *realizações* (panoramas) do conceito de função, as quais foram erigidas usando como parâmetro a convergência das regras acima mencionadas. Os panoramas que constituem o modelo são: tabular, diagrama, algébrico, máquina de transformação, gráfico, generalização de padrões e formal. O modelo fornece uma transparência discursiva para comunicação do conceito de função, que poderá subsidiar os processos de desenvolvimento curricular e de produção de materiais curriculares para alunos e professores, e o planejamento de estratégias para abordagem desse tema nos contextos educacionais. A linguagem de descrição apresentada pelo modelo pode contribuir com esforços de pesquisadores da área de Educação Matemática, no tocante a estabelecer uma identidade à Matemática para o Ensino, por intermédio da demarcação das suas fronteiras comunicativas e explicitação do grau de especialização das suas regras discursivas.

Palavras-Chave: Matemática para o Ensino; Conceito; Função; Realizações; Regras de Reconhecimento e Realização.

1. Introdução

Investigações sobre a natureza e a forma como a matemática é desenvolvida, produzida e usada pelos agentes encarregados pelo seu ensino expandiram-se consideravelmente nas últimas décadas (Barwell, 2013; Chapman, 2013; Davis; Renert, 2009, 2014), a partir do reconhecimento da sua especificidade no fazer docente (Adler; Hulliet, 2008; Davis; Renert, 2009; Hodgen, 2011). Esta especificidade é distinta da conformação, por exemplo, empregada pelos matemáticos profissionais (Ball; Bass, 2000; Hodgen, 2011) e não deve ser reputada como um ramo da Matemática Científica ou Acadêmica[61] (Davis; Renert, 2009). O trabalho de Shulman (1987), que colocou o conhecimento do conteúdo e sua integração com o conhecimento pedagógico em primeiro plano na tarefa de ensino (Adler; Davis, 2006; Adler; Huillet, 2008), é amplamente reconhecido como o ponto de partida teórico para pesquisas em vertentes que passaram a ser denominadas como Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) e Matemática para o Ensino (MpE) (Adler; Davis, 2006; Adler; Huillet, 2008; Barwell, 2013; Chapman, 2013; Stylianides, Delaney, 2011).

Os construtos MKT e MpE têm sido elaborados e desenvolvidos empregando como alicerce diferentes estruturas teóricas e metodológicas (Rhoads; Weber, 2016, Davis; Renert, 2009). As perspectivas cognitivistas permeiam as pesquisas sobre esses construtos, particularmente nos Estados Unidos, mas as abordagens situadas estão crescendo e oferecem *insights* diferenciados acerca de tais conceptualizações (Rhoads; Weber, 2016; Rowland; Ruthven, 2011).

[61] "conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de Matemática" (Moreira; David, 2010, p. 17).

Nesse estudo, temos o propósito de desenvolver e estruturar uma conceptualização discursiva de Matemática para o Ensino. Assim sendo, considerando que a comunicação matemática nos contextos de ensino é produzida em torno de conceitos matemáticos, entendemos a MpE em termos de um determinado conceito, o qual, na presente investigação, é o conceito[62] de função.

A escolha do conceito de função decorre do seu papel central na matemática contemporânea, por permear praticamente todos os seus ramos, sendo também considerado essencial em áreas afins das ciências, como ferramenta para modelar uma ampla gama de fenômenos (Güçler, 2016; Kleiner, 1993; Michelsen, 2006; Steele; Hillen, Smith, 2013).

A importância desse tema repercutiu no contexto escolar, conforme Sierpinska (1992), principalmente em virtude da perspectiva proposta por Felix Klein no início do século vinte, acerca da natureza basilar e unificadora do conceito de função na organização curricular da matemática escolar. Tornar o conceito de função um dos temas centrais no currículo de matemática ecoou por diferentes associações e movimentos de reforma (Nyikahadzoyi, 2015), o que se refletiu em um corpo substancial de pesquisas de caráter teórico e/ou empírico sobre o ensino e aprendizagem desse tema na área de Educação Matemática (Ayalon; Watson; Lerman, 2015; Doorman et al., 2012; Dubinksy; Wilson, 2013).

O conceito de função apresenta uma surpreendente diversidade de formas de comunicação (tabelas, expressões algébricas, gráficos, etc. – denominadas na literatura geralmente como representações) e, por conseguinte, de interpretações (Elia et al., 2007; Sajka, 2003), de modo que o seu ensino e aprendizagem não consistem em uma única via hierárquica (Ayalon; Watson; Lerman, 2015), implicando, dessa forma, em um enorme desafio, tanto para alunos quanto para professores, conforme Nachlieli e Tabach (2012) e Steele, Hillen e Smith (2013). À vista disso, várias alternativas e abordagens têm sido apresentadas para o ensino desse conceito (Elia et al., 2007). Por exemplo, Callejo e Zapatera (2014) e Wilkie (2016) sugerem que as bases para o entendimento da relação de dependência, que integra uma das possibilidades interpretativas do conceito de função, sejam introduzidas antes de uma menção explícita a esse conceito, já nos anos iniciais de escolaridade, por intermédio da análise e comunicação da generalização de padrões em sequências geométricas e aritméticas. A alternativa proposta por Hitt e González-Martín (2015) é principiar o ensino de função comunicando-o como uma covariação (caracterizar como duas quantidades de uma relação funcional variam simultaneamente). Para Ayalon, Watson e Lerman (2015) tal abordagem é o pilar da modelagem de fenômenos funcionais. Outro enfoque, indicado por Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013) para apresentação do conceito de função, é utilizar uma forma de comunicação mais familiar aos estudantes: função como a metáfora de uma máquina que transforma cada *input* em um único *output*.

Ao contrário do que ocorre na Matemática Científica, em que a introdução de um construto matemático é efetivada a partir da sua definição (Tabach; Nachlieli, 2015), estudos apontam que a apresentação de uma definição formal[63] do conceito de função deve ser postergada no ensino desse tema (Hansson 2006; Nachlieli, Tabach, 2012), em razão da natureza estrutural lógica dos seus textos, que requerem uma familiaridade prévia com uma terminologia comunicacional similar à da Matemática Científica (Jones, 2006).

Em síntese, em face das considerações anteriores, podemos inferir que as configurações comunicativas na realização[64] do ensino do conceito de função são variadas e específicas. Por decorrência, temos como escopo no presente estudo identificar, caracterizar, demarcar e estruturar essa diversidade singular de formas de comunicar o conceito de função no ensino, em termos de uma conceptualização de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Empregamos como aporte teórico, para alicerçar e desenvolver uma conceptualização de MpE, conceitos da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (2000, 2003).

---

[62] Na terceira seção expomos o entendimento de um conceito matemático adotado nessa investigação. Por ora, considere-o de forma intuitiva.

[63] Por exemplo: "Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if for all $x \in E$ there exists a unique $y \in F$ which is in the given relation with x" (Nachlieli; Tabach, 2012, p.14).

[64] Tomemos os termos realizar e realização provisoriamente como intuitivos. Na terceira seção iremos defini-los apropriadamente.

Na seção a seguir, discutimos, sucintamente, algumas visões presentes na literatura de Educação Matemática sobre MKT e MpE, com o objetivo de apresentar a perspectiva adotada para Matemática para o Ensino nesta investigação.

2. Sobre Conhecimento Matemático para o Ensino e Matemática para o Ensino

Dentre os modelos que desenvolveram e/ou refinaram o quadro teórico proposto por Shulman, adaptando-o ao ensino de matemática, destaca-se o modelo de MKT elaborado por Deborah Ball e colaboradores (por exemplo, Ball; Thames; Phelps, 2008), que é um dos mais influentes, não só nos Estados Unidos, mas também internacionalmente (Barwell, 2013; Chapman, 2013; Speer; King; Howell, 2015). Deborah Ball e colaboradores construíram um modelo de MKT que é constituído de uma taxonomia de subdomínios (Ball; Thames; Phelps, 2008), tal como a estrutura proposta por Shulman. Fundamentados em "[...] uma 'teoria baseada na prática' dos recursos matemáticos inerentes ao trabalho de ensino" (Ball; Bass, 2009, p. 1, ênfases dos autores), Ball e colaboradores conceituam MKT como "[...] os conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensinar matemática." (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 396). De acordo com Petrou e Goulding (2011), o modelo de MKT proposto por Ball e colaboradores enquadra-se na tradição cognitivista. Portanto, apesar do reconhecimento do contexto, o foco tende a ser sobre o conhecimento de um professor individual (Petrou; Goulding, 2011).

Para Chapman (2013, 2015), não obstante as abordagens de descrição de MKT em categorias terem maior visibilidade na literatura e oferecerem construções úteis para investigar o conhecimento dos professores para o ensino da matemática, não fica claro como a variabilidade cultural é contabilizada nesses modelos. Nessa direção, Hodgen (2011), assumindo uma perspectiva situada, argumenta que o conhecimento do professor de matemática, como qualquer outro, é "[...] situado no mundo complexo e social das salas de aula de matemática" (p. 27). Contudo, apesar de tal posicionamento, conforme Barwell (2013), "[...] é difícil afastar-se totalmente de um discurso de conhecimento como possuído pelo professor individual" (p. 599). O próprio Hodgen (2011) ao relatar um estudo de caso em que o conhecimento de uma professora é analisado em dois contextos diferentes, escreve que a professora apresenta "[...] significativas lacunas em seu conhecimento de números racionais" (p. 36). Afigura-se, como ressaltado por Stylianides e Delaney (2011), que o reconhecimento da dimensão cultural do conhecimento matemático dos professores é um fenômeno relativamente recente.

Adler e Huillet (2008) assumem a denominação Matemática para o Ensino e, com base em uma perspectiva epistemológica social, tomam como pressuposto que "[...] qualquer atividade matemática é direcionada para algum propósito e vive dentro de alguma instituição (social)" (p. 22). Por conseguinte, afirmam que as categorias de Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) e Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), elaboradas por Ball, Thames e Phelps (2008), são problemáticas quando empregadas como construções analíticas. Assumindo a mesma perspectiva, Kazima, Pilay e Adler (2008) argumentam que a MpE é moldada tanto pelo tópico que está sendo objeto de ensino, quanto pela abordagem que os professores empregam para introduzir esses conceitos. Analogamente, Andrews (2011) propõe a importância de reconhecer não apenas o contexto cultural em que o ensino e aprendizagem ocorrem, mas também o tema sob escrutínio.

Davis e Renert (2014) conceituam Matemática para o Ensino[65] como "[...] conhecimento disciplinar dos professores de matemática" (p. 3). Entretanto, utilizando como arcabouço teórico a Teoria da Complexidade, sustentam que MpE abrange uma rede complexa de entendimentos, disposições e competências de caráter tácito e emergente, simultaneamente individual e coletivo, que

> [...] permite ao professor estruturar situações de aprendizagem, interpretar atentamente as ações dos alunos e responder flexivelmente, de forma a permitir que os alunos ampliem o entendimento e o alcance de suas possibilidades interpretativas por intermédio do acesso a eficazes conexões e práticas apropriadas. (p. 4).

Com base nesse ponto de vista, Davis e Renert (2014) argumentam que a MpE é muito mais que um conjunto de conceitos a ser catalogado e medido.

---

[65] Davis e Renert (2014) usam a nomenclatura *mathematics-for-teaching* ou *M₄T*.

Para Barwell (2013) as perspectivas cognitivistas para MKT assumem um modelo representacional de conhecimento e, assim, requerem que os pesquisadores façam suposições sobre a natureza das representações dos professores, não refletindo os discursos que surgem nas salas de aula de matemática. De acordo com Barwell (2013), uma das mais fortes críticas às abordagens cognitivistas para MKT baseia-se numa perspectiva situada para o conhecimento, a qual sugere a necessidade de investigar as interações que ocorrem nas salas de aula, "embora, geralmente sem ferramentas específicas para analisar a interação" (p. 599). Como alternativa a tais abordagens, Barwell (2013) indica a psicologia discursiva, "[...] cujo objetivo é entender como os atores sociais (isto é, as pessoas) interpretam, constroem e orientam as normas sociais, que raramente são pré-estabelecidas e frequentemente não são explicitamente articuladas pelos participantes" (p. 600).

Em suma, apesar de reconhecermos que a forma como apresentamos as conceptualizações de MKT e MpE minimiza importantes contribuições feitas por elas, entendemos que a síntese exposta permite-nos corroborar o posicionamento de Rhoads e Weber (2016) e Chapman (2013) que esses construtos têm sido investigados com base nas mais variadas epistemologias, empregando consequentemente, diversas ferramentas metodológicas. Trata-se de um "projeto em andamento" (Prediger, 2010, p. 75), sendo "[...] um campo de rápido crescimento de *insights*" (Davis, Renert, 2014, p. 120).

Assumindo como pressuposto que diferentes interpretações e caracterizações de um determinado fenômeno, e a até mesmo a sua existência, dependem das lentes teóricas empregadas para construí-lo e analisá-lo (Barbosa, 2013), o presente estudo desenvolve e estrutura uma conceptualização para MpE que será caracterizada pela demarcação de suas especificidades e fronteiras discursivas e pela explicitação da forma de realização da sua comunicação, com a apresentação de descrições específicas das regras comunicativas que a constituem. Para operacionalização desse propósito, fundamentamos a conceptualização de MpE desenvolvida nesse estudo em conceitos da Teoria dos Códigos do sociólogo Basil Bernstein (2000, 2003).

A opção pela nomenclatura Matemática para o Ensino, em vez de Conhecimento Matemático para o Ensino, deriva do arcabouço teórico discursivo empregado na presente investigação. Dessa ótica, as ações comunicativas (produtos discursivos) constituem-se no próprio objeto de análise; assim, a elas não serão atribuídas quaisquer representações de categorias cognitivas.

Na seção a seguir, após circunstanciarmos algumas noções-chave da teoria de Bernstein que fundamentam a investigação, apresentamos a conceptualização de MpE de um conceito erigida nesse estudo e, por fim, reapresentamos o objetivo do estudo de maneira mais precisa e delimitada.

3. Uma Perspectiva para um modelo teórico de MpE de um conceito

Conforme Bernstein (2000, 2003), toda comunicação é regulada por princípios inerentes à prática pedagógica na qual ela ocorre. Prática pedagógica diz respeito, por exemplo, às relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados tópicos, porém também pode referir-se às relações entre médico e paciente, pais e filhos, formador e professores (Bernstein, 2000, Morais; Neves, 2007). De maneira mais abrangente, Bernstein (2000) define "[...] prática pedagógica como um contexto social fundamental através do qual a reprodução-produção cultural tem lugar." (p. 3). Por conseguinte, a comunicação sobre conceitos matemáticos veiculada e produzida na prática pedagógica no contexto escolar é regulada por princípios imanentes a essa prática, o que ratifica a nossa inferência, na primeira seção, de que as configurações comunicativas na realização do ensino do conceito de função são específicas.

Os princípios reguladores da comunicação das práticas pedagógicas são denominados por Bernstein (2000, 2003) de *classificação* e *enquadramento*[66]. O princípio de classificação cria, regula e legitima fronteiras entre sujeitos, espaços, discursos, práticas e objetos, posicionando-os em categorias, por intermédio do isolamento; assim, as categorias simbolizam essas fronteiras (Bernstein, 2000, 2003). É esse isolamento que gera espaço para uma categoria tornar-se específica (Bernstein, 2000). O princípio de

[66] Esses princípios são derivados, respectivamente, da distribuição de poder e controle social, gerados pela estrutura social que caracteriza uma determinada sociedade (Morais; Neves, 2007).

classificação estabelece sinalizadores de demarcação que são as *regras de reconhecimento*. São essas regras que fornecem os meios para distinguir a especificidade (comunicativa) de uma categoria pela natureza dos seus textos (Bernstein, 2000, 2003). Texto, nesse estudo, é compreendido de acordo com Bernstein (2000), isto é, como qualquer ato comunicativo expresso por alguém, abrangendo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais. As relações entre as categorias (grau de isolamento entre elas) são caracterizadas por variação nos valores de classificação e esses valores podem variar de uma classificação mais forte (C+) a uma classificação mais fraca (C-)[67]. Diz-se que existe uma C+, quando as categorias estão fortemente isoladas, ou seja, as suas fronteiras são explícitas; nesse caso, as categorias são mais especializadas. Ocorre C-, quando o isolamento é reduzido (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, a gradação do princípio classificatório pode ser usada para analisar as relações entre as disciplinas (Matemática, Português, Geografia, etc.) de uma determinada escola, de forma que, se há uma C+ entre as disciplinas, existe uma relação reduzida ou até mesmo ausente entre os seus respectivos textos. Assim, tal grau de classificação gera um conjunto de regras de reconhecimento que cria uma sintaxe específica para cada uma das disciplinas (Afonso; Neves, 2000; Bernstein, 2003).

O princípio de enquadramento, que é limitado pelo princípio de classificação, tange à natureza do controle sobre as regras comunicativas[68], regulando e legitimando as formas de comunicação realizadas por/entre categorias de qualquer prática pedagógica (Bernstein, 2000). Analogamente ao princípio de classificação, há variação na gradação do princípio de enquadramento. Diz-se que o enquadramento é mais forte (E+) quando a categoria com maior estatuto em uma prática pedagógica tem controle sobre as regras comunicativas (Morais; Neves, 2007). E, sempre que a(s) categoria(s) com menor estatuto possui (possuem) algum controle sobre a comunicação, diz-se que há enquadramento mais fraco (E-)[69] (Morais; Neves, 2007). O estatuto de uma categoria em relação a outras é determinado pelo princípio de classificação (relações de poder), que se traduz por relações hierárquicas entre essas categorias (Bernstein, 2000, 2003). De forma que, por exemplo, na relação professor-alunos, a categoria professor tem maior estatuto. O princípio de enquadramento regula as *regras de realização*, que fornecem critérios para selecionar e tornar públicos os textos legítimos para cada categoria, isto é, para geração do que conta como comunicação legítima e, por conseguinte, a gama de textos possíveis (Bernstein, 2003). "Distintos valores de enquadramento agem seletivamente sobre as regras de realização e, então na produção de diferentes textos" (Bernstein, 2000, p. 18).

Dessa perspectiva, uma conceptualização de MpE de um conceito (nesse estudo, do conceito de função) será estabelecida pela caracterização e demarcação das suas fronteiras e formas comunicacionais, por intermédio da explicitação das regras de reconhecimento e realização, originárias, respectivamente, dos valores de classificação e enquadramento, que operam (ou podem ser operados) nas relações pedagógicas efetivadas (ou a serem efetivadas) nos contextos educacionais. Para levar a termo tal propósito, apropriamo-nos dos conceitos de classificação, enquadramento, regras de reconhecimento e realização para caracterizar e construir categorias de formações textuais do conceito de função, produzidas e realizadas no ensino desse tema nos contextos educacionais formais.

Um conceito matemático é compreendido como um conjunto de *realizações* (Davis, Renert, 2014) (textos) que são associados ou podem ser associadas à palavra que o nomeia. Por conseguinte, o *conceito de função* é constituído de um conjunto de realizações associadas ou que podem ser associadas à palavra função. As realizações são consideradas como textos que podem tomar a forma de definições, algoritmos, metáforas, analogias, símbolos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos (Davis; Renert, 2014).

Algumas realizações do conceito de função são conhecidas na literatura, sob a denominação usualmente de representações, tais como tabela, expressão algébrica e gráfico. Optamos por usar a designação realizações, em virtude da abordagem discursiva que estamos assumindo como aporte teórico dessa investigação. Trata-se de não caracterizar um conceito de uma forma dualista, como se houvesse uma instância autônoma para o objeto matemático (no caso, função) e outra instância para suas

[67] Bernstein (2000, 2003) refere-se ao princípio de classificação como forte e fraco. Optamos por usar o advérbio mais, porque pretendemos ressaltar a flutuação desse valor.

[68] O enquadramento refere-se também à natureza do controle sobre as regras sociais, as quais dizem respeito às formas que as relações hierárquicas assumem na relação pedagógica (Bernstein, 2000).

[69] Bernstein (2000, 2003) considera o princípio de enquadramento como forte e fraco. Nesse caso, também optamos por usar o advérbio mais, porque pretendemos ressaltar a flutuação desse valor.

representações. Com tal perspectiva, um conceito matemático é constituído pelas suas realizações, significando que somente podemos falar de um conceito em termos de suas realizações.

Fundamentados em tais pressupostos, conceptualizamos *Matemática no Ensino* (MnE) do Conceito de Função como o conjunto de atos comunicacionais (textos), veiculados e produzidos na dinamicidade da realização do ensino do conceito de função pelos agentes responsáveis por tal tarefa, de acordo com os princípios de classificação e enquadramento que operam nas correspondentes práticas pedagógicas nos contextos educacionais.

Com esse entendimento, *Matemática para o Ensino* (MpE) de um conceito é uma *re-presentação* da Matemática *no* Ensino desse conceito. Fizemos uso do vocábulo *re-presentação*, separando o prefixo com um hífen, porquanto objetivamos evidenciar que MpE de um conceito diz respeito a uma outra apresentação (apresentar novamente) de formas de realizar esse conceito. Por conseguinte, apesar da Matemática *para* o Ensino referir-se a Matemática *no* Ensino, esta última realiza-se tão somente na dinâmica emergente da prática pedagógica no contexto escolar.

Como exemplos de Matemática *para* o Ensino de um conceito, ou seja, de *re-presentações* de Matemática *no* Ensino de um conceito, podemos citar: materiais instrucionais abordando esse conceito, professores investigando e apresentando (sistematicamente ou não) propostas para o ensino desse conceito, e alunos simulando uma aula sobre o conceito em cursos de formação. Dentre essas e outras possibilidades, a que é foco nesse estudo diz respeito a uma caracterização de MpE como um *modelo teórico*. Trata-se de apresentá-la de forma estruturada e sistemática, identificando descritivamente suas categorias e propriedades. Portanto, um modelo teórico de MpE do Conceito de Função é caracterizado por um conjunto coerente de proposições usadas para a compreensão do que reconhecemos como o fenômeno MnE ou mesmo outros MpE – como as mencionadas acima – do Conceito de Função.

Isto posto, o propósito desse estudo é construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. O modelo está estruturado em categorias de realizações (*panoramas* (Davis; Renert, 2014)) do conceito de função, que estão erigidas em conformidade com a convergência das regras de reconhecimento e realização, geradas, respectivamente, pelos princípios de classificação e enquadramento que regulam a comunicação sobre o ensino do conceito de função efetivada (a ser efetivada) nas práticas pedagógicas no contexto escolar.

A MnE do Conceito de Função pode ser constituída por textos de diferentes fontes, após sofrerem modificações quando se tornam ativos na dinamicidade da prática pedagógica no contexto escolar, em decorrência dos princípios e regras operantes nesse contexto. Dentre tais fontes, podemos citar: pesquisas na área de Educação Matemática que investiguem o ensino e/ou aprendizagem desse conceito, livros didáticos, avaliações de larga escala, documentos oficiais e grupos de professores trabalhando conjuntamente, de forma sistemática ou não, na análise do ensino do conceito.

Segundo Davis e Renert (2014), há um expressivo corpo de pesquisas na área de Educação Matemática que investigam a variedade de realizações (denominadas geralmente de representações) no entendimento de um conceito. Em particular, conforme Dubinksy e Wilson (2013), grande parte da literatura sobre funções concentra-se em investigar o papel das suas múltiplas representações no ensino e a aprendizagem desse conceito. Deste modo, a literatura afigura-se como promissora em propiciar visibilidade a uma vasta gama de realizações do conceito de função, fornecendo, inclusive, pressupostos a priori para análise das outras fontes.

O livro didático é um dos principais norteadores da prática pedagógica no contexto escolar, em razão de ser uma ferramenta comunicacional que orienta e auxilia o professor nas tarefas de ensino, fornecendo suporte na seleção e sequenciamento do conteúdo, nas estratégias metodológicas empregadas, na atribuição de tarefas aos alunos e na organização de atividades de avaliação (Alajmi, 2012; Biehl, Bayer, 2009; Mesa, 2004; Nicol; Crespo, 2006; Reis, 2014; Shield; Dole, 2013). Segundo Mesa (2004) e Nicol e Crespo (2006), o livro didático é uma expressão do currículo pretendido (objetivos e metas para o ensino e aprendizagem de matemática, instituídos pelos órgãos normatizadores). De fato, na perspectiva bernsteiniana, o livro didático é resultado da seleção e apropriação de textos oriundos dos campos científicos e dos documentos oficiais estabelecidos pelas instituições reguladoras da educação, trazidos em relação especial um com outro, e transformados em textos com o propósito de ensino e aprendizagem. No Brasil, o livro didático é legitimado pelo sistema educacional (Granville, 2008), que, por intermédio de um programa de avaliação do livro didático, regula, em seus textos, a expressão dos discursos dos campos científicos e dos órgãos normatizadores da educação.

Os professores desempenham papel central no processo de ensino e aprendizagem (Even; Ball, 2009; Guerrero; Ribeiro, 2014), dado que são participantes vitais na produção da comunicação matemática realizada na prática pedagógica no contexto escolar, indo além dos elementos já estruturados dos conceitos matemáticos (Davis; Renert, 2014), ou seja, não são simples "[...] agentes periféricos que passivamente transmitem os resultados estabelecidos da matemática[70]" (Davis; Renert, 2009, p. 41). Os professores selecionam e produzem realizações de conceitos matemáticos, culturalmente situadas, que estabelecem e condicionam o desenvolvimento de estruturas interpretativas de um conceito, em conformidade com a pertinência matemática da situação em foco (Davis; Renert, 2009, 2014), a especificidade e legitimidade do contexto escolar. Segundo Davis e Renert (2014), professores trabalhando conjuntamente geram ricas listas de realizações de um conceito, quando o examinam com vistas a situá-lo no contexto de suas experiências de ensino.

Diante de tais considerações, depreendemos que as três fontes supracitadas fornecem uma variabilidade de realizações, que trazem robustez na construção de um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função que objetivamos construir. Assim, nesse estudo, usamos como fontes para construção do modelo teórico: análise de pesquisas que investigam o ensino e/ou aprendizagem desse conceito, livros didáticos e um estudo coletivo com professores analisando o ensino do conceito de função.

Os resultados da presente pesquisa apresentam uma transparência comunicativa na sistematização e apresentação da variabilidade e especificidade de formas de realizar o ensino desse conceito. Assim sendo, podem gerar *insights* e fornecer subsídios que contribuam para o delineamento de estratégias e recursos, por exemplo, para o ensino do conceito de função no contexto escolar, para autores de materiais didáticos na elaboração dos seus textos e para aprendizagem profissional dos professores. Além disso, o quadro analítico e metodológico desenvolvido para edificar o modelo teórico de MpE do Conceito de Função pode propiciar reflexões para pesquisas que investigam esse tema.

4. Aspectos metodológicos, contextos e participantes

Para organizar as realizações identificadas nas três fontes em categorias (panoramas) e analisar suas implicações comunicacionais e, desse modo, construir um modelo, além dos conceitos de classificação, enquadramento, regras de reconhecimento e realização da teoria de Basil Bernstein, tomamos como *ferramenta analítica*, para estruturar o modelo, a configuração organizacional do Estudo do Conceito – EC, proposta por Davis e Renert (2009, 2013, 2014).

Originalmente, o EC é uma estratégia desenvolvida por Davis e Renert (2009, 2013, 2014) como ferramenta para investigar e desenvolver a MpE. Trata-se de um projeto participativo realizado *com* professores, com o propósito de engajá-los na análise, desenvolvimento e elaboração da explicitação da diversidade de realizações, associações e interpretações que constituem um conceito matemático e dão suporte ao seu ensino e aprendizagem. O Estudo do Conceito têm sido estruturado em quatro ênfases: *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (Davis; Renert, 2014).

O entendimento adotado para realizações é o mesmo de Davis e Renert (2009, 2014), reportado na seção precedente. Nos Estudos do Conceito desenvolvidos por Davis e Renert (2009, 2014), os panoramas (*landscapes)* foram construídos com base em critérios estabelecidos[71] pelos componentes dos grupos. Nessa investigação, como apontamos anteriormente, empregamos como parâmetro para composição dos panoramas a convergência das regras de reconhecimento e realização. Vinculações (*entailments*) são definidas por esses pesquisadores como associações e implicações lógicas fomentadas pela diferentes realizações que moldam a compreensão dos conceitos matemáticos (Davis, Renert, 2014). Assumimos para vinculações entendimento congênere ao adotado por Davis e Renert (2009, 2014). Todavia, em virtude da abordagem teórica desenvolvida, reportamo-nos às potencialidades e limitações comunicativas decorrentes das implicações lógicas imputadas pelas realizações componentes de cada um

[70] Matemática Acadêmica, segundo nossa perspectiva.
[71] Como por exemplo, a ocorrência das realizações por nível de ensino (Davis; Renert, 2014).

dos panoramas, que produzem uma rede de noções e interpretações integrantes do conceito de função. As combinações *(blends*) são composições de realizações de um conceito que geram outras realizações (meta- realizações) de caráter interpretativo *lato sensu*. A ênfase combinação não foi identificada nas fontes que integram o presente estudo.

Para analisar os artigos que abordam o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função recorremos a uma revisão sistemática de literatura, que se caracteriza como um método para identificar, analisar e sintetizar de forma transparente, rigorosa e integradora grandes corpos de pesquisas, de qualidade reconhecida, sobre um tema específico (Petticrew; Roberts, 2006; Victor, 2008). A revisão sistemática possibilita a compreensão e produção de *insights*, por intermédio da vinculação de contextos e abordagens metodológicas diversas, inclusive, para elaboração de modelos ou quadros teóricos (Victor, 2008).

Compõem o *corpus* da revisão sistemática artigos que abordam o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função dos periódicos: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Educação Matemática Pesquisa (EMP), *Educational Studies in Mathematics* (*ESM*), *Journal of Mathematics Teacher Education* (*JMTE*) e Zetetiké. Esses periódicos são reconhecidos, dentre outros, por serem responsáveis pela divulgação de estudos de relevância na área de Educação Matemática, todos avaliados pelo sistema brasileiro de pós-graduação como pertencente ao estrato de melhor avaliação. Como o presente estudo foi desenvolvido no Brasil, buscamos, assim, contemplar periódicos publicados neste país, bem como periódicos considerados internacionais. Delimitamos o período de busca de 1990 a 2015[72], pois julgamos que tal período de tempo é amplo o bastante para compor um *corpus* considerável e substancial de pesquisas que trazem indícios de realizações do conceito de função que circulam e são produzidas no ensino desse conceito. A seleção inicialmente embasou-se na leitura do título, resumo e palavras-chave. À medida que reconhecíamos, nos estudos, dados relevantes relacionados ao objetivo da pesquisa, esses artigos eram lidos integralmente. Desse modo, foram selecionados vinte e nove artigos, conforme mostra o Quadro 1.

Quadro 1 - Relação dos artigos selecionados por periódicos

Periódico	**Autores**
BOLEMA	Birgin (2012), Meneghetti e Redling (2012), Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), Dazzi e Dullius (2013), Strapason e Bisognin (2013), Callejo e Zapatera (2014), Maciel e Cardoso (2014)
EMP	Rossini (2007), Beltrão e Igliori (2010)
GEPEM	Silva et al. (2001), Frant (2003), Maggio e Nehring (2012)
ESM	Even (1990), Confrey e Smith (1994), Schwarz e Dreyfus (1995), Slavit (1997), Yerushalmy (2000), Sajka (2003), Moschkovich (2004), Falcade, Laborde e Moriotti (2007), White (2009), Ayalon, Watson e Lerman (2015), Hitt, González-Martín (2015), Ronda (2015), Tabach e Nachlieli (2015).
JMTE	Sánchez e Llinares (2003), Steele, Hillen e Smith (2013), Wilkie (2014)
ZETETIKÉ	Brito e Almeida (2005)

Fonte: autores

A primeira etapa da seleção dos livros didáticos foi realizada com base nas obras recomendadas pelo programa brasileiro de avaliação do livro didático dos anos 2014 (Brasil, 2013a) e 2015 (Brasil, 2014), para os anos finais do Ensino Fundamental (Ensino Fundamental II) e Ensino Médio[73]. O Programa brasileiro de avaliação do livro didático é executado no âmbito do Ministério da Educação em ciclos trienais alternados para cada segmento de ensino, com o propósito de prover as escolas públicas da educação básica com obras didáticas, de forma sistemática, regular e gratuita. O Programa faz a seleção das obras, com base em critérios previamente estabelecidos, gerais e específicos por área. As coleções selecionadas são referendadas em um guia escrito para os professores, que é composto de resenhas, uma descrição resumida e avaliação das características de cada uma das obras aprovadas. Como base na análise dos guias, o corpo docente e dirigente de cada escola escolhe os livros que serão utilizados no triênio subsequente à publicação do Guia, considerando-se a adequação e a pertinência das obras em relação à proposta pedagógica de cada instituição escolar.

[72] Alguns periódicos não disponibilizam online ou iniciaram suas atividades após 1990: JMTE – 1998; BOLEMA – 2006; Zetetiké – 2001; EMP – 2004.
[73] No Brasil, o Ensino Fundamental II tem duração de 4 anos e atende alunos com idade média (padrão) entre 10 e 15 anos; o Ensino Médio é posterior ao Ensino Fundamental II e tem duração de 3 anos.

Fizemos uma leitura completa dos guias dos anos 2014 e 2015, analisando detalhadamente, sobretudo, quais obras apresentavam textos mais claros e simples, mais atividades contextualizadas, diversidade e quantidade de exercícios, e ilustrações de qualidade, tendo em vista que, conforme Perrelli, Lima e Belmar (2013), Trindade e Santos (2012) e Vieira (2013), esses são os critérios que os professores, majoritariamente, utilizam na escolha dos livros didáticos de Matemática referendados pelos guias. A partir dessa análise, para cada nível de ensino construímos uma tabela com as obras e os critérios citados, assinalando positivamente as coleções mais bem avaliadas nesses itens pelos guias. Desse modo, selecionamos as coleções *Matemática*, dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, dos 6º ao 9º anos (Imenes; Lellis, 2010a, 2010b, 2010c, 2010 d), e *Matemática*, de autoria de Manoel Paiva, do Ensino Médio (Paiva, 2013a, 2013b, 2013c).

O estudo com o grupo de professores foi implementado por intermédio de um curso de extensão intitulado de *Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de ensino*, organizado e conduzido pela primeira autora, promovido pela Pró-Reitoria de Extensão e pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). O curso ocorreu no período entre setembro e novembro de 2015, teve carga horária total de sessenta horas, sendo trinta e duas horas de aulas presenciais, que ocorreram nas dependências do Instituto de Matemática da UFBA. Todos os professores que participaram do curso são licenciados em Matemática e, na época, estavam em exercício de atividades docentes no Ensino Fundamental II e/ou no Ensino Médio na região metropolitana da cidade de Salvador na Bahia, Brasil[74]. No Quadro 2, apresentamos o perfil de todos os professores participantes.

Quadro 2 – Perfil dos participantes

Nome[75]	**Nível escolar de atuação**	**Tempo de docência**
Profª Cibele	Fundamental II e Médio	4 anos
Profª Cláudia	Fundamental II	4 anos
Prof. Cledson	Fundamental II	5 anos
Profª Deise	Médio	15 anos
Prof. Elcio	Fundamental II e Médio	30 anos
Prof. Eusébio	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Janice	Fundamental II	13 anos
Prof. Luis	Fundamental II	3 anos
Prof. Nadison	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Patrícia	Fundamental II	3 anos
Profª Regina	Fundamental II	20 anos
Prof. Sampaio	Fundamental II	25 anos
Profª Talita	Fundamental II e Médio	1 ano e 6 meses

Fonte: autores

O curso foi inicializado com treze participantes. Entretanto, após algumas intercorrências, que acarretaram algumas desistências, ao fim do quinto encontro presencial passou a contar com sete participantes, que prosseguiram até a sua finalização.

A formatação do curso, principalmente no que diz respeito à organização sequencial das atividades, foi inspirada nos grupos de Estudos dos Conceitos realizados por Davis e Renert (2009, 2014). Assim, apenas o primeiro encontro foi planejado previamente e as conformações dos demais encontros emergiram no desenrolar de cada uma das sessões anteriores, derivadas das discussões entrecorridas. Além disso, adotamos também uma sugestão de Davis e Simmt (2006) que o pesquisador responsável pelo gerenciamento do curso organize, selecione e promova ações que propiciem aos participantes interrelacionarem-se, expondo e compartilhando realizações e entendimentos sobre o ensino do conceito que está sendo analisado. Com essa perspectiva, no primeiro encontro a pesquisadora propôs aos professores participantes a seguinte atividade: *elaborar ou apresentar uma situação problema, questão*

[74] Todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, em cumprimento à Resolução 466/12, que regulamenta pesquisas envolvendo seres humanos (Brasil, 2013b) e autoriza os pesquisadores a utilizar todas as informações geradas durante o curso em pesquisa científica.

[75] Somente o nome da professora Talita é fictício, os demais participantes optaram por sua identificação, usando primeiro nome ou sobrenome.

ou tarefa que utilizam ou já utilizaram em sala de aula, abordando o tema função, a ser socializada com o grupo, em seguida. Essa atividade instaurou debates, reflexões e uma lista bastante variada de noções e interpretações sobre o ensino do conceito de função, na qual os pesquisadores já puderam identificar várias realizações e algumas vinculações empregadas pelos professores na realização do ensino desse conceito. Essa lista foi registrada por todos os participantes e foram analisadas, discutidas e ampliadas nos encontros posteriores. Entre as atividades realizadas durante o curso, podemos citar: elaboração e apresentação de uma situação problema que poderia ser aplicada no sexto, sétimo e oitavo anos, envolvendo noções do conceito de função, apesar desse tema não ser explicitamente abordado nesses anos; preparação, exposição e discussão de uma aula para introdução do conceito de função no nono ano e outra no primeiro ano do Ensino Médio; resolução de tarefas extraídas de pesquisas que abordam o ensino e aprendizagem do conceito de função; análise de um texto abordando a história do conceito de função, com o propósito de buscar relações entre as etapas históricas do seu desenvolvimento e as formas de realizar esse tema no ensino, que já haviam sido levantadas pelo grupo.

Para registrar os dados oriundos do curso, utilizamos: o diário de campo, gravações audiovisuais de todos os encontros e produções escritas pelos participantes (registros no papel e no quadro).

Na presente investigação, combinamos múltiplas fontes: pesquisa bibliográfica (Gil, 2002), do tipo revisão sistemática da literatura, e dois estudos empíricos – livros didáticos e um grupo de professores[76]. Tal abordagem deve ser entendida como uma estratégia que acrescenta rigor, abrangência, complexidade e riqueza à investigação, com o objetivo de alcançar uma compreensão mais aprofundada sobre o fenômeno.

As aludidas fontes foram estabelecidas como referentes de investigação, em virtude da linguagem conceitual da teoria de Bernstein que alicerça o estudo. A linguagem conceitual e gramática forte da teoria de Bernstein tem o potencial não apenas para construir o que conta como referentes de investigação, mas também para estruturar como esses se relacionam uns com os outros (Morais; Neves, 2007). Além disso, possibilita tanto a análise e descrição com relativa precisão dessas relações referenciais, quanto à transformação dessas relações em objetos teóricos, por meio de um texto específico (Bernstein, 2000; Morais; Neves, 2007). Esse objeto teórico, denominado por Bernstein (2000) de *linguagem externa de descrição*, corresponde aqui a um modelo teórico de MpE do Conceito de Função. A linguagem externa de descrição é um dispositivo próximo dos dados e deve ser construída para categorizar os dados de um determinado campo, numa grade lógica, como instâncias identificáveis de classificação e enquadramento (Moore; Muller, 2003), por intermédio das suas respectivas regras de reconhecimento e realização. Desse modo, o modelo teórico de MpE do Conceito de Função gera descrições específicas da MnE do Conceito de Função, derivadas da linguagem conceitual de Bernstein, com um grau mais elevado de aplicabilidade.

5. Os Panoramas e suas Vinculações

As realizações que foram identificadas como associadas ou associáveis ao conceito de função nas três fontes foram agrupadas, de acordo com a confluência das regras de reconhecimento e realização, nos panoramas: tabular, diagrama, algébrico, máquina de transformação, gráfico, generalização de padrões, e formal.

A seguir apresentamos as características de cada um dos panoramas e também explicitamos as vinculações identificadas.

5.1. Tabular

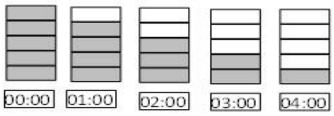
No panorama tabular estão as realizações de função como tabelas, que são realizadas por intermédio da organização dos dados de entrada (elementos do conjunto domínio da relação funcional) e seus correspondentes dados de saída (elementos do conjunto imagem da relação funcional) em linhas (ou

---

[76] Todas as fontes analisadas focalizam o conceito de função nos Ensinos Fundamental e Médio.

colunas). As realizações desse panorama, em decorrência da sua natureza, apresentam apenas um número finito de dados dos conjuntos domínio e imagem da relação funcional.

As realizações tabulares podem ser introduzidas antes mesmo que o texto *função* ganhe residência na comunicação realizada com o propósito de ensino, como em situações para investigação da relação de proporcionalidade direta e inversa (Imenis; Lellis, 2010b; Steele; Hillen; Smith, 2013), conforme exemplo descrito na Parte a do Quadro 3, extraído do livro do sétimo ano (Imenis; Lellis, 2010b). Neste exemplo, existem duas realizações funcionais, a saber, a que associa o lado do quadrado a seu perímetro e a outra que associa o lado do quadrado a sua área. No primeiro caso, há uma proporcionalidade direta (pois, multiplicando o comprimento do lado por uma constante então o perímetro será multiplicado pela mesma constante) e no segundo não. Imenis e Lellis (2010b) destacam, em uma observação para os professores, que posteriormente a proporcionalidade direta será descrita por equações do tipo $y = kx$ (relação funcional linear), na qual *k* é a constante de proporcionalidade.

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 3 – Realizações tabulares</th></tr>
<tr><th>Parte a</th><th>Parte b</th></tr>
<tr><td>Resolva as questões referentes à figura geométrica do quadrado.
A) A tabela apresenta algumas medidas relativas a quadrados. Complete-a:
<table>
<tr><th>Lado (cm)</th><th>Perímetro (cm)</th><th>Área (cm²)</th></tr>
<tr><td>10</td><td>40</td><td>100</td></tr>
<tr><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>25</td><td></td><td></td></tr>
</table>
B) Em um quadrado qualquer, se o lado dobrar de comprimento, o perímetro também dobrará? Se o comprimento do lado triplicar, o perímetro também triplicará? O perímetro é diretamente proporcional ao comprimento do lado?
C) Em um quadrado qualquer, se o lado dobrar de comprimento, a área também dobrará? Há proporcionalidade direta entre a área e o comprimento do lado?</td>
<td>Um reservatório de água com capacidade de 1.000 litros está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento constante, como ilustram as figuras abaixo.


Observando as ilustrações acima preencha a tabela.
<table>
<tr><td>Tempo</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Volume</td><td>1000</td><td>___</td><td>800</td><td>___</td><td>600</td><td>___</td><td>___</td><td>200</td><td>__</td></tr>
</table>
O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.
Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante t = 7?</td></tr>
<tr><td>Fonte: Imenis e Lellis (2010b, p.146-147)</td><td>Fonte: Reprodução de Rossini (2007, p. 228 - 230)</td></tr>
</table>

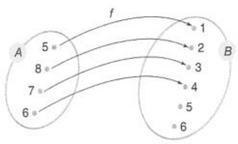
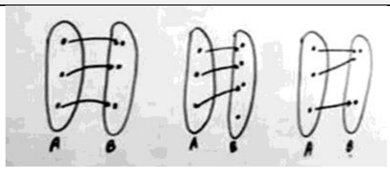
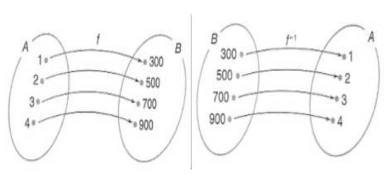
A questão reportada na Parte b do Quadro 3 foi sugerida para introdução do conceito de função por um grupo de professores na investigação de Rossini (2007). A realização tabular é empregada para organizar os dados da relação funcional e caracterizar, como integrantes das noções do conceito de função, tanto a relação de dependência entre as variáveis (Maggio; Nehring, 2012; Rossini, 2007; Silva et al., 2007) quanto a natureza dessas variáveis (como variáveis independente e dependente) (Maggio; Nehring, 2012; Strapason; Bisognin, 2013), que no exemplo são tempo e volume, respectivamente.

A Profª Cibele, participante do curso de extensão, também sugere as realizações tabulares de situações funcionais do cotidiano para introdução do conceito de função, ressaltando a importância de evidenciar que "a todos os valores de *x* estão associados valores de *y* e para cada valor de *x* está associado um único valor de y" (2º Encontro) – em que *x* indica a variável independente e *y* a dependente. No caso, trata-se de apresentar o caráter univalente de uma relação funcional - a cada elemento do conjunto de entrada (da variável independente) está associado um único elemento do conjunto de saída (da variável dependente) (Even, 1990; Steele; Hillen; Smith, 2013; Tabach; Nachlieli, 2015) -, e, por conseguinte, estabelecer um parâmetro para o reconhecimento de uma tabela como uma realização de uma relação funcional, além de integrar a noção de associação entre variáveis como uma forma de interpretar uma relação funcional.

Wilkie (2014) aponta que o uso efetivo das realizações tabulares para analisar as relações entre as variáveis de uma relação funcional é fundamental para o entendimento do conceito de função. Entretanto, Bloch (2003) e Schwarz e Dreyfus (1995) ressaltam que, como nessas realizações só é possível visualizar alguns dados da relação funcional, elas em geral são parciais, o que pode gerar ambiguidades, tais como inferir que a relação funcional é linear ou tem um valor extremo, mesmo quando não seja o caso. Nessa direção, o Prof. Eusébio no 5º Encontro do curso de extensão afirmou: "Se temos um fenômeno e focalizamos parte de um fenômeno então podemos ter modelos matemáticos (relações funcionais) que representem aquele fragmento, mas não o fenômeno como um todo”. Tais considerações indicam algumas limitações comunicativas das realizações tabulares.

5.2. Diagrama

Constituem esse panorama as realizações de função como diagrama de setas, as quais são realizadas dispondo todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio (que indicamos aqui por A e B, respectivamente) em dois diagramas disjuntos e fazendo corresponder a cada elemento de A (por uma seta) um único elemento de B. Tais realizações viabilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. Por exemplo, Paiva (2013a) e Meneghetti e Redling (2012), com base em tais realizações, definem uma relação funcional como uma correspondência entre dois conjuntos não vazios A e B, em que a cada elemento do conjunto A corresponde um único elemento do conjunto B. A natureza arbitrária da relação funcional diz respeito tanto aos conjuntos A e B, que não precisam ser numéricos, quanto à correspondência que não necessariamente obedece a um padrão (Even, 1990, Steele; Hillen; Smith, 2013; Tabach; Nachlieli, 2015). Na Parte a do Quadro 4, apresentamos uma realização por diagramas de uma relação funcional.

<table>
<tr><th colspan="3">Quadro 4 – Realizações como diagramas</th></tr>
<tr><th>Parte a</th><th>Parte b</th><th>Parte c</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fonte: Reprodução de Paiva (2013a, p. 121)</td><td>Fonte: Registros do Prof. Luis Sérgio – 7º encontro</td><td>Fonte: Reprodução de Paiva (2013a, p. 143)</td></tr>
</table>

No livro didático (Paiva, 2013a) e no estudo empírico com os professores, as realizações por diagramas foram indicadas para uma introdução ao conceito de função, considerando que a partir dessas realizações é possível tanto identificar os conjuntos domínio (conjunto de partida), contradomínio (conjunto de chegada) e imagem (como um subconjunto do contradomínio) de uma relação funcional, quanto apresentar as suas respectivas notações simbólicas. Esses elementos, como o Prof. Nadison ressaltou, fazem parte da caracterização de todos os tipos de relações funcionais, portanto compõem a sintaxe matemática do conceito de função.

No estudo com os professores, as realizações por diagrama foram utilizadas, em virtude do seu caráter icônico, para propiciar visibilidade às definições de relações funcionais injetoras, sobrejetoras e bijetoras (correspondência biunívoca). Na Parte b do Quadro 4, reproduzimos três realizações por diagrama de relações funcionais, em que, da direita para esquerda, a primeira e a segunda são injetoras (elementos distintos do domínio da relação funcional possuem imagens distintas), a primeira e a terceira são sobrejetoras (os conjuntos contradomínio e imagem são iguais) e a primeira é bijetora (a relação funcional é injetora e sobrejetora). Com essa caracterização e reconhecimento de uma relação funcional bijetora (correspondência biunívoca), Paiva (2013a) apresenta as definições de uma relação funcional invertível e da sua inversa com os textos: “[...] uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, f é uma correspondência biunívoca entre A e B” [...] “Sendo $f : A \to B$ uma correspondência biunívoca entre A e B, a **inversa** de f é a função $f^{-1} : B \to A$, tal que: se $f(x) = y$ então $f^{-1}(y) = x$, para quaisquer x e y, com $x \in A$ e $y \in B$” (p. 144, ênfase do autor). Desse modo, a relação funcional da Parte a do Quadro 4 não é invertível, tendo em vista que é não é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B, enquanto a relação funcional reproduzida na parte c é invertível e a realização por diagrama da sua inversa também é apresentada na Parte c.

As realizações desse panorama estão restritas às relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínio são finitos e com um número reduzido de dados.

5.3. Algébrico

Integram o panorama algébrico as realizações do conceito de função que estabelecem uma relação funcional[77] como uma correspondência, associação ou relação entre as variáveis independentes e dependentes de forma única[78] por intermédio de uma lei, fórmula ou expressão algébrica (empregando letras e símbolos algébricos). Quando se indica a variável independente por x e a dependente por y, a realização de função como expressão algébrica é reconhecida e realizada pelo texto $y = f(x)$.

Imenis e Lellis (2010b, 2010c) introduzem as realizações algébricas antes mesmo da apresentação "oficial" do conceito de função, como *fórmulas* que expressam "[...] uma relação entre grandezas" (Imenis; Lellis, 2010c, p.86). Os autores sugerem que os professores explorem as expressões: *depende*, *varia* e *é função de*, porquanto "[...] o uso dessas expressões ajuda a transmitir as ideias formadoras do conceito de função" (Imenis; Lelis, 2010b, p. 216), isto é, a propiciar familiaridade com as noções de dependência e variabilidade como integrantes da teia interpretativa do conceito de função. Na Parte a do Quadro 5, reportamos um exemplo de uma dessas realizações algébricas (fórmulas), em que é possível explorar que: *Q depende x*, *Q varia com x* ou *Q é função de x*. Além disso, essa fórmula permite determinar um valor único para Q a partir de qualquer x dado, demarcando o critério para o reconhecimento de uma fórmula, lei ou expressão algébrica (empregando letras e símbolos algébricos) como uma realização algébrica de uma relação funcional, isto é, uma fórmula do tipo $y = f(x)$ é a realização algébrica de uma relação funcional f se e somente se y é único para cada x (Confrey; Smith, 1994).

Quadro 5 – Realizações algébricas

Parte a	Parte b
Em certa cidade, o custo de água consumida em uma residência é calculado de acordo com: A fórmula para $x \leq 20$ é $Q = 2{,}5x$ A fórmula para $x > 20$ é $Q = 4{,}7x - 44$, em que x é o consumo em m^3 e Q a quantia pagar.	Em certa fábrica, o custo p de produção, em real, de cada chocolate depende da quantidade q de chocolates fabricados, e essa quantidade depende do número n de horas de funcionamento da máquina. Essas dependências são descritas pelas funções: $p = 3 + (500/q)$ e $q = 200n$ A) Se essa máquina funcionar por 5 horas apenas, qual será o custo de produção de cada chocolate? B) Expresse p em função de n. C) Expresse n em função de p.
Fonte: Imenis e Lellis (2010c, p.189-190, adaptado)	Fonte: Paiva (2014a, p. 147, modificado)

Beltrão e Igliori (2010), Frant (2003), Maciel e Cardoso (2014), Rossini (2007), Sánchez e Llinares (2003) recomendam que o conceito de função seja abordado no ensino também como modelo matemático para descrever fenômenos naturais, cotidianos e de outras ciências, demonstrando o seu caráter pragmático. Corroborando essa indicação, o Prof. Nadison (2º Encontro) sugere a utilização da realização algébrica da relação funcional horária do espaço do movimento uniformemente variado, $S = S_0 + v_0 t + (at^2/2)$, no estudo das relações funcionais quadráticas. Tal como nesse caso, as realizações algébricas das Partes a e b do Quadro 5 são usadas para modelar matematicamente fenômenos, traduzindo o seu comportamento, ao explicitar a relação de dependência entre as variáveis, de forma concisa e compacta, por intermédio de textos específicos, a saber, operadores simbólicos e letras indicando variáveis, propiciando assim a quantificação do fenômeno (relação funcional) sob investigação (Beltrão; Igliori, 2010; Frant, 2003, Prof. Eusébio – 2º Encontro, Slavit, 1997).

No estudo empírico com professores, a realização algébrica foi utilizada para definir uma relação funcional afim, e em particular uma relação funcional linear: "Uma aplicação f de R em R, define uma função "afim", quando associa a cada $x \in R$ o elemento $(ax + b) \in R$, onde $a \neq 0$. Isto significa que

[77] Abordamos nesse panorama as realizações algébricas de relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais.
[78] Com exceção de expressões algébricas equivalentes.

$(x, ax+b) \in f, \forall x \in R.$ Se $b=0$ então $f: x \to ax$, é dita função linear" (Prof. Sampaio – 5º encontro, ênfase do professor).

Na Parte b do Quadro 5, apresentamos uma questão proposta por Paiva (2014a), em que, para solução do item B é necessário, a partir das realizações algébricas de p e n, realizar algebricamente a composição $p \circ n$, e no item C a sua inversa, cujos textos são, respectivamente, $p = 3 + (5/(2n))$ e $n = 5/(2(p-3))$.

Tais exemplos demonstram que as realizações algébricas apresentam textos concisos que consolidam informações sobre as relações funcionais em uma única cadeia de símbolos (Schwarz; Dreyfus, 1995; Ronda, 2015). A característica referenciada propicia tanto o reconhecimento e a caracterização de tipos de relações funcionais (funções linear, afim, quadrática, etc.) (Wilkie, 2014), quanto a execução de operações, tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir, compor relações funcionais (quando possível) e também a determinação da realização algébrica da inversa de uma função invertível (Sánchez; Llinares, 2003; Ronda, 2015, Yerushalmy, 2000).

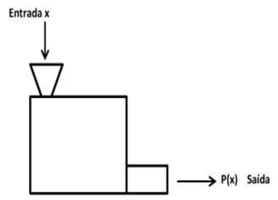
No entanto, apesar das potencialidades de tais realizações, uma ênfase no ensino do conceito de função nas realizações algébricas pode tornar o conceito de função indistinguível das realizações algébricas (Sajka, 2003). Tal predominância pode ter, por exemplo, as seguintes consequências; (i) tratar o conceito de função, preponderantemente, como um processo computacional, ou seja, como uma cadeia de operações, um algoritmo para calcular $f(x)$, para um dado x (Sánchez, Llinares, 2003; Sajka, 2003); (ii) não considerar outros elementos de uma relação funcional, comprometendo o reconhecimento, por exemplo, de que $f(x) = x+3$ e $g(x) = (x^2 + x - 6)/(x-2)$ podem definir a mesma relação funcional a depender do domínio (Schwarz; Dreyfus, 1995; Slavit, 1997); (iii) não cogitar que para uma relação funcional não bijetora realizável algebricamente, é possível restringir os seus conjuntos domínio e/ou contradomínio obtendo outra relação funcional com a mesma realização algébrica, porém bijetora e, portanto, invertível[79]; (iv) impossibilitar o reconhecimento de relações funcionais não realizáveis algebricamente (por exemplo, a relação funcional que tem como domínio uma lista de palavras e a cada palavra faz corresponder a sua primeira vogal) (Steele; Hillen; Smith, 2013).

5.4. Máquina de Transformação

Esse panorama é composto das realizações do conceito de função como uma metáfora de uma máquina que transforma *inputs* (matéria-prima ou elementos de entrada) em *outputs* (produto ou elementos de saída). No Quadro 6, reportamos dois textos icônicos de realizações do conceito de função como máquina de transformação, em que cada elemento de entrada é transformado/processado/modificado em um (único) elemento de saída.

Quadro 6 – Realizações como máquina de transformação

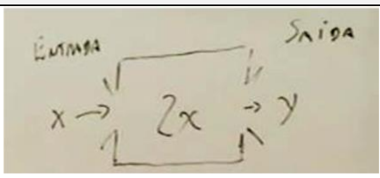
Parte a



x	P(x)
0	1
1	2
2	4
3	8
5	32
8	256
10	1024

Fonte: Reprodução de Rossini (2007, p. 243, adaptado)

Parte b



Fonte: Registro de Prof. Sampaio – 1º encontro

[79] Por exemplo, a relação funcional quadrática $f: R \to R; f(x) = x^2$ não é bijetora, porém restringindo-se os seus conjuntos domínio e contradomínio ao conjunto dos números reais não negativos, obtemos a relação funcional $g: R_+ \to R_+; g(x) = x^2$, que é bijetora e, portanto, invertível. A sua inversa é a relação funcional $h: R_+ \to R_+; h(x) = \sqrt{x}$.

A figura de linguagem – metáfora – possibilita dissertar sobre uma coisa como se fosse outra. No caso de uma relação funcional usamos a metáfora de uma máquina de transformação, de forma que os textos de tais realizações são mais informais e relacionados com a experiência diária dos alunos. Por esse motivo, são apontadas em Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), Rossini (2007), Wilkie (2014) e pelo Prof. Sampaio para introduzir o conceito de função no ensino.

Por intermédio das realizações como máquina, é possível explorar a relação entre as variáveis dependentes e independentes (Wilkie, 2014), introduzir domínio de uma relação funcional como o conjunto formado pelos elementos de entrada e imagem como o conjunto constituído pelos elementos de saída (Rossini, 2007; Prof. Sampaio – 1º Encontro), e também integrar as noções de processo, mudança, e transformação à rede de interpretações do conceito de função (Sánchez; Llinares, 2003; Prof. Sampaio – 1º Encontro).

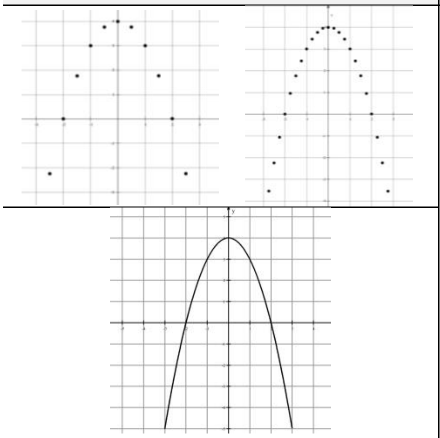
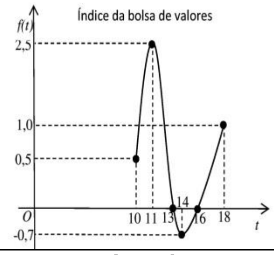
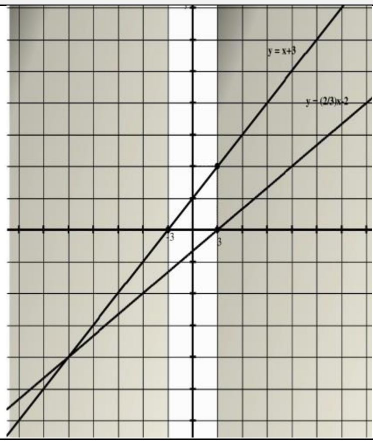
Por evidenciarem as noções de processo, mudança e transformação, as realizações de função como máquina de transformação são compatíveis apenas com relações funcionais cujos dados de entrada (domínio) e saída (imagem) são numéricos e obedecem a uma lei ou fórmula, como na Parte a do Quadro 6, em que a realização algébrica da relação funcional é $P(x) = 2^x$, e na Parte b, $y = 2x$. Ademais, por intermédio de tais realizações não é possível caracterizar o contradomínio de uma relação funcional. Tais considerações indicam algumas limitações comunicativas estabelecidas pelas realizações desse panorama.

5.5. Gráfico

O panorama gráfico é formado pelas realizações gráficas (gráficos) de uma relação funcional, na qual os conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais (que denotamos por R). O gráfico de uma relação funcional $f: A \to B,$ dessa natureza é um subconjunto de $R \times R$, constituído de todos os pares ordenados (x, y), em que x é um elemento domínio de f (o conjunto *A*) e $y = f(x)$.

O reconhecimento de um subconjunto do plano cartesiano como sendo a realização gráfica de uma relação funcional é operacionalizado por intermédio do denominado teste da linha vertical (Paiva, 2014a; Prof. Sampaio – 7º Encontro; Slavit, 1997; Steele; Hillen; Smith, 2013). Esse teste está fundamentado no caráter univalente de uma relação funcional, e consiste em traçar retas paralelas ao eixo vertical (das variáveis dependentes), passando por pontos de abscissa *x* (variável independente), com *x* um elemento do domínio da relação, de modo que tal subconjunto é realização gráfica de uma relação funcional com esse domínio se, e somente se, cada uma dessas retas intersecta o subconjunto em um único ponto (Paiva, 2014a; Prof. Sampaio – 7º Encontro; Steele; Hillen; Smith, 2013).

A realização do gráfico de uma relação funcional é apresentada em Imenis e Lellis (2010d) a partir da sua realização algébrica. Considerando o exemplo da relação funcional realizada algebricamente por $f(x) = -x^2 + 4$, o processo exposto pelos autores para construir uma realização gráfica dessa relação funcional consiste em organizar uma realização tabular, marcar alguns pontos ((*x*, *f*(*x*))) no plano cartesiano, repetir o processo considerando mais pontos, ligar esses pontos, assumindo que por eles passa uma curva denominada de parábola, de forma que “se marcássemos infinitos pontos teríamos uma curva sem saltos, sem furos, contínua” (Imenis; Lellis, 2101d, p. 214). Na Parte a do Quadro 7, reproduzimos o referido exemplo. Os autores argumentam que essa abordagem é uma forma acessível de justificar, para o aluno nesse nível de ensino, porque “[...] os pontos devem ser ligados de maneira a formar uma **curva suave**” (Imenis; Lellis, 2101d, p. 213, ênfase dos autores).

<table>
<tr><th colspan="3">Quadro 7 – Realizações gráficas</th></tr>
<tr><th>Parte a</th><th>Parte b</th><th>Parte c</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>O gráfico a seguir descreve o índice f(t) da bolsa de valores de um estado, em porcentagem, em função do horário t, em hora, desde o início do pregão, 10 h, até o fechamento, 18 h, de determinado dia.

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Fonte: Reprodução de Imenis e Lellis (2010d, p. 214)</td>
<td>Fonte: Reprodução de Paiva (2014a, p. 126)</td>
<td>Fonte: Reprodução de Bloch (2003, p.21, modificado)</td>
</tr>
</table>

A abordagem adotada legitima não apenas as realizações de função como gráfico no contexto escolar do Ensino Básico, como também o processo de realizá-las, que segundo os autores é: “fórmula → tabela → marcar pontos → unir pontos” (Imenis; Lellis, 2010d, p. 214). Ressaltamos que esse processo é exequível[80] desde que se reconheça para a relação funcional, com o suporte da realização algébrica, qual é a realização gráfica esperada e, assim que pontos devem ser considerados para realizá-la. Tal procedimento para realizar graficamente uma relação funcional a partir da realização algébrica também é adotado na coleção do Ensino Médio (Paiva, 2014a, 2014b, 2014c) analisada. Conforme tipos específicos de relações funcionais e suas respectivas realizações algébricas vão sendo inseridos, a realização dos seus correspondentes gráficos seguem procedimentos de acordo com a relação funcional. Por exemplo, em Paiva (2014a), o autor afirma: “Demonstra-se que o gráfico de uma função polinomial qualquer *f* do1º grau, com domínio *R*, é uma reta. Esse gráfico é obtido representando-se dois pontos distintos[81] de *f* e traçando-se a reta que passa por eles.” (p.152).

O processo supracitado estabelece conexões (*pontes*), notadamente, entre os panoramas algébrico e gráfico. O uso de tecnologias digitais é indicado por Dazzi e Dullius (2013), Moschkovich (2003) e White (2009) para dinamizar e, dessa forma fomentar o estabelecimento de *pontes* entre os panoramas algébrico, gráfico e/ou tabular. Em Moschkovich (2003), por exemplo, a variação nos parâmetros da família de relações funcionais realizadas algebricamente por $f(x) = mx + b$, repercute automaticamente nas respectivas realizações gráficas (no caso, retas), tornando possível deduzir sobre conexões entre os valores dos parâmetros *m* e *b* com, respectivamente, a inclinação da reta e a interseção da reta com eixo vertical (Oy).

Por intermédio das realizações gráficas é possível inferir e analisar propriedades e características das relações funcionais, tais como: domínio, imagem, sinal, limitação, intervalos de crescimento e decrescimento, injetividade, existência de extremos e zeros (Paiva, 2014a; Sánchez; Llinares, 2003, Strapason; Bisognin, 2012). Por exemplo, a partir da realização gráfica reportada na Parte b do Quadro 7, que descreve o índice da bolsa de valores em um determinado dia, podemos afirmar que o maior índice (ponto de máximo global da função) foi de 2,5 % e ocorreu às 11h, pois $f(11) = 2{,}5\% \geq f(t), \forall t \in [10,18]$; a maior queda (ponto de mínimo global) foi de –0,7%, às 14h, tendo em vista que $f(14) = -0{,}7\% \leq f(t), \forall t \in [10,18]$; a cotação da bolsa foi negativa entre 13 e 16 horas, porquanto $f(t) < 0, \forall t \in]13,16[$; foi positiva entre 10 e 13 horas e entre 16 e 18 horas, porque $f(t) > 0, \forall t \in]10,13[\cup]16,18[$; e foi nula às 13h e 16h, dado que $f(13) = f(16) = 0$. Ademais, o índice cresceu entre 10 e 11 horas e a partir das 14h até o fim do pregão, às 18h, pois $f(t_1) < f(t_2)$, para

[80] Supondo que a relação funcional seja realizável graficamente.
[81] No plano cartesiano *R* x *R*.

quaisquer $t_1 < t_2$, com t_1 e $t_2 \in [10,11]$ ou t_1 e $t_2 \in [14,18]$; decresceu entre 11 e 14 horas, dado que, $f(t_1) > f(t_2)$, para quaisquer $t_1 < t_2$, com t_1 e $t_2 \in [11,14]$. Por conseguinte, comportamento global ou local do fenômeno modelado por uma relação funcional pode ser visualizado, analisado, reconhecido (Prof. Eusébio – 5º Encontro; Prof. Sampaio – 3º Encontro; Sánchez; Llinares, 2003) e legitimado, nesse contexto, com base na análise da sua realização gráfica.

A análise do gráfico apresentada no parágrafo anterior possibilita que se instaurem, em nossos termos, *pontes* entre panoramas algébrico e gráfico, por intermédio do reconhecimento e legitimação da equivalência entre procedimentos que são vinculados aos textos de cada um desses panoramas (Bloch, 2003; Moschkovich, 2003; Slavit, 1997), tais como: determinar os zeros de uma relação funcional *f*, que no panorama algébrico corresponde a resolver a equação $f(x) = 0$, e no panorama gráfico é visualizado como a interseção da realização gráfica de *f* com o eixo O*x*; determinar o sinal de uma relação funcional *f*, que no panorama algébrico equivale a resolver uma inequação e, no gráfico, a analisar para que valores do domínio as suas respectivas imagens são positivas ou negativas. Outra equivalência entre procedimentos dos panoramas algébrico e gráfico foi discutida em Bloch (2003), na resolução da inequação $(x+3)((2/3)x-2) > 0$. No panorama gráfico a resolução dessa inequação pode ser obtida com base na visualização e análise do sinal das realizações gráficas das relações funcionais cujas realizações algébricas são $f(x) = x+3$ e $g(x) = (2/3)x-2$. Observe que nas regiões sombreadas da figura da Parte c do Quadro 7, ou ambas relações funcionais (*f* e *g*) são negativas (para x < -3) ou ambas são positivas (para x > 3), desse modo, o produto $f(x).g(x) = (x+3)((2/3)x-2)$ é positivo, logo a solução da inequação é o conjunto $S =]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$. No panorama algébrico, o procedimento equivalente consiste em resolver cada um dos sistemas de inequações (i) $x+3<0$ e $(2/3)x-2<0$, (ii) $x+3>0$ e $(2/3)x-2>0$, e em seguida determinar a união das suas soluções.

Não obstante as potencialidades das realizações gráficas, estudos consideram que o seu predomínio no ensino, com o foco em relações funcionais contínuas, majoritariamente nas relações funcionais lineares e quadráticas, pode dificultar o reconhecimento de relações funcionais cujas realizações gráficas não são facilmente realizáveis, ou ainda, de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente, tal como a função de Dirichlet $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 1, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$ (Kleiner, 1993; Even, 1990; Steele; Hillen; Smith, 2013), que é descontínua em todos os pontos do seu domínio.

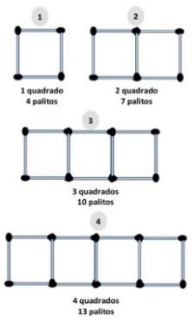
5.6. Generalização de Padrões

Compõem esse panorama as realizações do conceito de função que comunicam o conceito de função como textos que permitem determinar a imagem de qualquer elemento do domínio de uma relação funcional (sequências numéricas, sequências de formas geométricas e fenômenos funcionais[82], que podem ser realizados algebricamente), que são realizados com base no reconhecimento do caráter da relação (regra geral ou recursiva) entre quantidades e/ou variáveis, tomando como base algumas informações ou descrições da correspondente relação funcional (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008; Mavrikis et al., 2012; Wilkie, 2014).

O reconhecimento e a realização da generalização de padrões podem ser operacionalizados por dois tipos de abordagem: relacional, por correspondência ou explícita e recursiva ou covariacional (Asghary; Shahvarani; Medghalchi, 2013; Aylon; Watson; Lerman, 2015; Callejo; Zapatera; 2014; Maciel; Cardoso, 2014; Maggio; Nehring, 2012; Rossini, 2007; Wilkie 2014). A abordagem covariacional fundamenta-se em estabelecer como as variáveis independente e dependente variam conjuntamente, enquanto a relacional consiste na determinação de um padrão ou regra que relacione diretamente a variável independente com a dependente (Aylon; Watson; Lerman, 2015; Callejo; Zapatera; 2014; Cooney et al., 2013; Confrey; Smith, 1994; Falcade; Labordi; Mariotti, 2007; Hitt; González-Martin, 2015, Slavit, 1997; Wilkie, 2014).

[82] Estamos denominando por fenômenos funcionais aqueles que podem ser modelados por uma relação funcional.

Na Parte a do Quadro 8, apresentamos uma sequência de figuras geométricas cuja generalização de padrões foi realizada nas duas abordagens. Na abordagem recursiva, estabelece-se como a variação do número q de quadrados está relacionada com a variação do número P de palitos. . Desse modo, a generalização recursiva em linguagem natural descrita na parte a do Quadro 8, pode ser realizada também por textos simbólicos como: $P(1) = 4$; $P(q+1) = P(q) + 3, q \geq 1$, q um número natural. Na abordagem relacional, explicita-se a relação de dependência funcional entre o número P palitos e o número q de quadrados, que realizada com textos simbólicos é $P(q) = 4 + (q-1)3 = 1 + 3q$, com $q \geq 1$, q um número natural, a qual corresponde à realização algébrica da relação funcional[83]. Como podemos constatar, a realização da generalização de padrões dessa sequência de figuras geométricas está fundamentada em um processo indutivo informal, que é reconhecido e legitimado como uma forma de argumentação nesse contexto, funcionando como uma “autorização” para determinar qualquer elemento da sequência.

<table>
<tr><th colspan="3">Quadro 8 – Realizações como generalizações de padrões</th></tr>
<tr><th colspan="2">Parte a</th><th>Parte b</th></tr>
<tr>
<td>Observe a sequência de figuras
</td>
<td>Padrão Recursivo: Para formar um novo quadrado, bastam 3 palitos, porque aproveita-se 1 lado do último quadrado. Por isso, enquanto o número de quadrados varia (aumenta) de 1 em 1, o número de palitos varia (aumenta) de 3 em 3.

Padrão Relacional:
Figura 1) Começamos com 1 quadrado e quatro (4) palitos.
(Figura 2, com 2 quadrados): Número de palitos: $4+3=4+1.3$
(Figura 3, com 3quadrados): Número de palitos: $4+3+3=4+2.3$
(Figura 4, com 4quadrados): Número de palitos: $4+3+3+3=4+3.3$
O número de palitos (variável dependente) é sempre igual a 4 mais o número de quadrados (variável independente) menos 1 multiplicado por três.</td>
<td>Um restaurante a quilo vende 100 Kg de comida por dia a R$ 12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, para cada real de aumento de preço, o restaurante perderia 10 clientes com um consumo médio de 500 gramas cada. Qual deve ser o valor do Kg de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?
<table>
<tr><th>Preço em Kg (R$)</th><th>Vendas por dia (Kg)</th><th>Receita</th></tr>
<tr><td>(12+0)</td><td>(100–0)</td><td>(12+0) (100–0) = 1200</td></tr>
<tr><td>(12+1)</td><td>(100 – 1.10.(1/2))</td><td>(12+1) (100 – 1.5) = 1235</td></tr>
<tr><td>(12+2)
.
.
.</td><td>(100 – 2.10.(1/2))</td><td>(12+2) (100 – 2.5) = 1260</td></tr>
<tr><td>(12+x)</td><td>(100 – x.10.(1/2))</td><td>(12+x) (100 – x.5) = R(x)</td></tr>
</table>
Daí vem:
$R(x) = (12+x)(100-x.5)$
$R(x) = 1200 - 60x + 100x - 5x^2$</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Fonte: Imenis e Lellis (2010a, p 260-261, modificado).</td><td>Fonte: Transcrição dos registros do Prof. Sampaio - 2º Encontro.</td></tr>
</table>

As realizações de função como generalização de padrões de relações funcionais lineares ou afins são indicadas por artigos do *corpus* (Asghary; Shahvarani; Medghalchi, 2013; Callejo; Zapatera; 2014; Maggio; Nehring, 2012; Rossini, 2007; Wilkie, 2014) e apresentadas nos livros didáticos analisados (Imenis; Lellis, 2010a, 2010b, 2010c), para um contato inicial com textos que comunicam esse conceito, mesmo antes de uma abordagem explícita do tema. A exploração de generalizações de padrões pode apoiar o estudo posterior do conceito de função, considerando que essas realizações dão visibilidade às noções de variação e relação de dependência entre as quantidades/variáveis envolvidas (Wilkie, 2014), que posteriormente podem ser reconhecidas e legitimadas como noções constituintes da rede de possibilidades interpretativas desse conceito (Steele; Hillen; Smith, 2013, Wilkie, 2014), como também possibilitam à distinção entre as variáveis independentes e dependentes (Estudo com professores – 7º encontro). Corroborando esse entendimento, Imenis e Lellis (2010a) sugerem que os professores incluam as expressões: “[...] **depende** de [...]”, “[...] **varia** [...]”, “[...] **é função** [...]” (p. 255, ênfase dos autores), na análise das generalizações de padrões, porquanto consideram que esses textos contribuem para a formação do conceito de função.

A abordagem covariacional está intrinsicamente conectada à realização de função como taxa de variação ou taxa de mudança (Confrey; Smith, 1994) e em alguns estudos essas realizações são usadas indistintamente (Aylon; Watson; Lerman, 2015). A realização de função como taxa de variação expressa a relação entre a variação de *outputs* e seus respectivos *inputs* (Aylon; Watson; Lerman, 2015). Por

[83] Desse modo, tal relação funcional é a restrição de uma função afim ao conjunto dos números naturais.

exemplo, para relação funcional descrita na Parte a do Quadro 8, a taxa de variação é $\frac{\Delta P}{\Delta q}=\frac{P(q+1)-P(q)}{(q+1)-q}=\frac{P(q)+3-P(q)}{1}=3$ (constante). A taxa de variação constante caracteriza as relações funcionais afins (Birgin, 2012). A relação funcional do referido exemplo é realizada algebricamente por $P(q)=1+3q$, ou seja, restrição de uma relação funcional afim, considerando que nesse caso o domínio da relação funcional não é o conjunto dos números reais. Observe que a taxa de variação corresponde ao coeficiente da variável linear da realização algébrica (no exemplo, q), a qual também pode ser interpretada como o coeficiente angular ou declividade da reta que é a realização gráfica dessa relação funcional (Birgin, 2012; Steele; Hillen; Smith, 2013). Dessa perspectiva é possível estabelecer *pontes* entre os panoramas gráfico, generalização de padrões e algébrico.

Membros de algumas famílias de relações funcionais compartilham a mesma taxa de variação ou mudança (Cooney et al., 2013). Por conseguinte, conhecer a realização de uma função como taxa de variação pode viabilizar o reconhecimento do tipo de relação funcional estudada (Slavit, 1997). Por conseguinte, tais realizações podem operar como suporte na modelagem de fenômenos funcionais (Aylon; Watson; Lerman, 2015; Confrey; Smith, 1994; Steele; Hillen; Smith, 2013). Assim como as relações funcionais afins são reconhecidas por apresentarem taxa de variação constante (Birgin, 2012), as funções exponenciais têm taxa de variação proporcional à função (Brito; Almeida, 2005; Confrey; Smith, 1994) e as quadráticas são caracterizadas por uma taxa de variação linear, ou seja, a taxa de variação da taxa de variação (segunda taxa de variação) é constante (Cooney et al., 2013).

A realização do conceito de função por generalização de padrões também pode ser utilizada quando se desenvolve o estudo de tipos específicos de relações funcionais (Brito; Almeida, 2005; Confrey; Smith, 1994), na modelagem de fenômenos ou situações funcionais que são “matematizados” por essas relações funcionais. Os professores do estudo empírico apontaram que textos com uma relação mais direta com o contexto local e específico dos alunos, os quais denominamos de textos não-escolares, tem o propósito de erigir o reconhecimento do conceito de função como significativo, do ponto de vista da sua aplicabilidade em situações do cotidiano, ou seja, do seu valor pragmático. Relacionado a essa posição, Michlesen (2006) sugere que problemas do cotidiano devem ser explorados para o ensino do conceito de função, considerando o seu caráter motivacional e que, a partir daí, podem emergir estruturas conceituais da matemática. Isso sugere, da perspectiva que estamos assumindo, a possibilidade do reconhecimento de que tais situações demandam explicações, que podem ser realizadas legitimamente pelos textos da matemática escolar sobre o tema função. Por exemplo, a Parte b do Quadro 8 reporta-se à generalização de padrões de um fenômeno funcional modelado por uma relação funcional quadrática. O Prof. Sampaio empregou a abordagem relacional e, para realizá-la, organizou os dados oriundos da descrição da relação funcional em uma tabela, destacando a variação da variável independente x, que no caso corresponde a cada real de aumento no preço do quilograma. No estudo de Wilkie (2014), os professores assinalaram que organizar os dados em uma realização tabular auxilia no reconhecimento do tipo de regularidade na realização de função como generalização de padrões. A partir desse processo, o professor Sampaio obteve (por um procedimento indutivo informal) a realização algébrica da receita do restaurante em função da variável x como $R(x)=-5x^2+40x+1200$. Com base no reconhecimento de que se trata de uma relação funcional quadrática e, portanto, possui um único máximo em $x=-\frac{40}{2(-5)}=4$, conclui-se que a receita é máxima quando o preço por quilo for R$(12+4), isto é, R$16,00. Na abordagem recursiva, teríamos a segunda taxa de variação igual a -10, que é (2).(-5); observe que -5 é coeficiente do termo de segundo grau da realização algébrica $R(x)$.

Para Ayalon, Watson e Lerman (2015), as duas abordagens para realizações de função como generalizações de padrões são complementares, em razão de apresentarem perspectivas interpretativas comunicacionais distintas para o conceito de função. Confrey e Smith (1995) consideram a abordagem covariacional mais facilmente realizável e, segundo esses pesquisadores, estudos revelam que mesmo estudantes bem jovens podem usar a taxa de variação como forma de explorar relações funcionais. Entretanto, ressaltam que a transição da abordagem covariacional para relacional é um desafio, e relatam como exemplo um encontro informal com professores do ensino secundário, que resolveram celeremente um problema de generalização de padrões (taxa de matrícula de uma escola aumentou a uma taxa de 11% ao ano) empregando a abordagem covariacional, mas conjecturaram que a relação funcional seria polinomial e não exponencial. Nessa direção, Callejo e Zapatera (2014) apontam que a ênfase na abordagem recursiva pode ser um obstáculo para obtenção da generalização relacional (explícita), tal como a escolha do modelo linear, ainda que esse não seja a relação funcional que caracterize o fenômeno em análise.

O estudo com professores empreendido por Wilkie (2014) apresenta resultados semelhantes às considerações supracitadas, sugerindo, conforme Wilkie (2014), a importância dos cursos de formação propiciarem familiaridade com as estratégias empregadas nas duas abordagens.

5.7. Formal

Compõem esse panorama as realizações do conceito de função como definições formais. Empregamos o adjetivo formal porque tais realizações apresentam estruturas textuais precisas, semelhantes às que caracterizam as definições legitimadas no contexto da Matemática Acadêmica. Logo, as realizações do conceito de função como definições formais contêm condições necessárias e suficientes que auxiliam no reconhecimento de relações funcionais (Tabach, Nachlieli, 2015) nas suas variadas formas de realização.

No Quadro 9 a seguir, reproduzimos três realizações de função como definição formal extraídas das fontes analisadas. A realização transcrita na Parte a define uma relação funcional como um subconjunto de um produto cartesiano com características especiais (fundamenta-se, portanto na teoria dos conjuntos), e as das Parte b e c como uma associação entre variáveis, com propriedades específicas.

Quadro 9 – Realizações como definição formal

Parte a	Parte b	Parte c
Uma função *f* é definida como qualquer conjunto de pares ordenados de elementos tais que se $(a,b) \in f$, $(c,d) \in f$ e $a = c$ então $b = d$.	Dizemos que uma variável *y* é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de *y*. A condição que estabelece a correspondência entre os valores de *x* e *y* é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre *x* e *y*. Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.	Dados dois conjuntos não vazios (*A* e *B*). Uma relação que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$, recebe o nome de função.
Fonte: Even (1990, p. 531).	Fonte: Paiva (2014a, p. 117, ênfase do autor).	Fonte: Transcrição do registro do Prof. Eusébio – 7º encontro.

Nas realizações de função como definição formal os caráteres univalente e arbitrário do conceito de função estão presentes. Even (1990) e Steele, Hillen e Smith (2013) consideram esses dois atributos como características-chave do conceito de função, pois permitem distinguir relações funcionais (em qualquer forma de realização) de outras relações. A natureza arbitrária refere-se tanto à relação entre os elementos dos dois conjuntos, que não necessariamente precisa ser realizada por uma expressão algébrica ou gráfica, nem observar algum padrão de regularidade, quanto aos conjuntos domínio e contradomínio, que podem ser de qualquer tipo, não precisando ser numéricos (Even, 1990; Steele; Hillen; Smith, 2013). Como exemplo, citamos a relação funcional cujo domínio é uma lista de palavras e associa cada palavra a sua primeira vogal (Steele; Hillen; Smith, 2013). A univalência diz respeito “[...] ao mapeamento de cada elemento do domínio para exatamente um elemento do contradomínio” (Steele; Hillen; Smith, 2013, p. 454-455). A característica da univalência é frequentemente usada como critério para o reconhecimento de relações funcionais (Even, 1990) realizadas por gráficos (teste da linha vertical) (Steele; Hillen; Smith, 2013), tabelas e diagramas, conforme demarcamos na análise desses panoramas.

Para Even (1990), embora a realização de função como definição formal, embasada na Teoria dos Conjuntos (por exemplo, a da Parte a do Quadro 9), seja precisa, não comunica as possibilidades interpretativas da forma como o conceito de função é frequentemente usado na matemática, ciência ou vida cotidiana. Consoante com essa afirmação, Falcade, Labordi e Mariotti (2007) anuem que as realizações de função como definição formal são desprovidas da noção de variável.

De acordo com Tabach e Nachlieli (2015), investigações demonstraram que mesmo os alunos que são capazes de reproduzir tais realizações podem contradizer os seus textos quando as utilizam como instrumento para reconhecer relações funcionais, principalmente, segundo Lambertus (2007), quando se defrontam com relações funcionais não familiares, tal como a função de Dirichlet. No estudo empírico empreendido por Tabach e Nachlieli (2015), os entraves ao entendimento estavam relacionados à estrutura lógica de tais realizações, especificamente ao uso dos quantificadores. Tal resultado ratifica o posicionamento de Jones (2006), de que tais realizações requerem uma experiência anterior e reconhecimento dos textos matemáticos (Matemática Acadêmica) específicos. Tabach e Nachlieli (2015) sugerem uma introdução prévia aos textos de lógica, com o intuito de minimizar dificuldades na compreensão das realizações de função como definição formal.

No estudo empírico que efetivamos com professores, o Prof. Eusébio (7º Encontro) apresentou a realização de função como definição formal transcrita na Parte c do Quadro 9 concomitantemente com as realizações por diagrama, algébrica e gráfica de uma relação funcional. O professor entende que "[...] essas são algumas possibilidades da gente poder confrontar o conceito formal (realização como definição formal, sob a nossa perspectiva), vamos dizer assim com as representações (outras realizações, na nossa denominação) [...]" (7º encontro). Com uma abordagem análoga quando expõe pela primeira vez a realização de função como definição formal (Parte b do Quadro 9), Paiva (2014a) considera a relação funcional que para alguns dias de um determinado mês associa a temperatura média, em grau Celsius, de uma região, relacionando-a com as suas realizações como diagrama, tabela, gráfico e expressão algébrica, destacando o caráter univalente e arbitrário (no exemplo, a relação funcional não satisfaz uma regra). Nesses casos, buscou-se estabelecer conexões (*pontes*) entre as referidas realizações, com o objetivo de propiciar o reconhecimento e realização dos textos das realizações de função como definição formal, do ponto de vista da estrutura lógica, ao considerarem-se as características univalência e arbitrariedade em diferentes realizações.

6. Síntese do modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função está organizado em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, identificadas nas três fontes analisadas, erigidas considerando como parâmetro a convergência das regras de reconhecimento e realização.

Na análise dos panoramas e suas vinculações, efetivada na seção anterior, empenhamo-nos em explicitar de forma pormenorizada a orientação específica de cada panorama para o reconhecimento, seleção e realização dos textos e interpretações legítimos que constituem o conceito de função, nos contextos educacionais. As regras de reconhecimento permitem identificar cada panorama, demarcando-o de outros panoramas, em razão da especificidade dos seus textos, e assim regulam *que* textos constituem cada panorama. As regras de realização permitem selecionar e produzir os textos legítimos que compõem cada panorama, regulando *como* os textos de cada panorama podem ser tornados públicos.

No Quadro 10, apresentamos uma síntese da análise efetuada na seção anterior, descrevendo *que* textos caracterizam e constituem cada panorama, e também *como* esses textos podem ser realizados, nas suas várias apresentações. Ademais, sumariamos as vinculações instituídas pelas realizações que integram os panoramas.

Quadro 10 - Síntese do modelo teórico MpE do Conceito de Função: o "que" e o "como" dos seus textos e vinculações

Panoramas	"que" (reconhecimento)	"como" (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados (numéricos ou não) dispostos em uma tabela, desde que a cada dado de uma linha ou coluna (entrada) esteja associado, respectivamente, a um único dado na linha ou coluna (saída) correspondente.	Organizar os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de modo que os dados de entrada e os seus correspondentes dados de saída estejam na mesma linha ou coluna.	*Potencialidades* -Evidenciar as noções de associação e dependência. -Identificar variáveis dependentes e independentes. -Organizar os dados de uma relação funcional -Reconhecer funções proporcionais e não proporcionais. *Limitações* - Não inferir corretamente acerca do tipo de relação funcional e valor extremo -Apresentar uma visão apenas parcial da relação funcional.

Diagrama	Correspondência entre dois conjuntos arbitrários A e B, dispostos em diagramas disjuntos, que a cada elemento do conjunto A (entrada ou domínio) faz corresponder (por intermédio de uma seta), um único elemento do conjunto B (contradomínio ou saída).	Identificar os conjuntos domínio e contradomínio de uma relação funcional dispô-los em dois diagramas disjuntos, e a cada elemento do domínio fazer corresponder (com uma seta) a sua imagem.	*Potencialidades* -Identificar os conjuntos domínio e contradomínio -Caracterizar o conjunto imagem. -Demarcar a natureza arbitrária e univalente de uma relação funcional. -Apresentar as definições de funções injetoras, sobrejetora e bijetoras. -Reconhecer e definir relações funcionais invertíveis. *Limitações* - Restringir-se às relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínio são finitos e com um número reduzido de elementos.
Algébrico	Uma lei, regra ou fórmula em um texto algébrico, no qual seja possível explicitar de forma única (com exceção de expressões algébricas equivalentes) uma variável (denominada de dependente) em termos de outra variável (denominada de independente).	Explicitar a relação de dependência entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional por intermédio de uma lei, regra ou fórmula algébrica (usando letras e símbolos).	*Potencialidades* -Modelar fenômenos. -Tratar de aspectos quantitativos. -Evidenciar a relação de dependência e variabilidade. -Reconhecer e definir família de relações funcionais. -Operar com relações funcionais. -Compor e inverter relações funcionais. *Limitações* -Impossibilitar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis algebricamente. -Desconsiderar outros elementos de uma relação funcional – domínio e contradomínio.
Máquina de Transformação	Texto icônico de uma máquina que transforma (obedecendo a uma regra) cada dado de entrada (*input*) em um único dado de saída (*output*).	Realizar um texto icônico que caracterize uma relação funcional (que obedece a uma regra) como uma máquina que transforma cada elemento do conjunto domínio na sua imagem correspondente.	*Potencialidades* -Demarcar as noções de processo, mudança, transformação e relação. -Introduzir as definições dos conjuntos domínio e imagem de uma relação funcional. *Limitações* -Subordinar o conceito de função a aspectos computacionais. -Dificultar a caracterização do contradomínio de uma relação funcional.
Gráfico	Um subconjunto de pontos: $G=\{(x,y), x\in A \text{ e } y\in B\}$, com A e B subconjuntos de R, de forma que se $(x,y_1)=(x,y_2)$ então $y_1=y_2$ (Teste da linha vertical). Notações: R é o conjunto dos números reais; x é a variável independente e y a variável dependente.	Plotar no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y), tal que x e y estão em relação funcional, considerando x como variável independente e y como variável dependente. Esses dados podem ser extraídos de uma realização tabular, por diagrama, ou algébrica.	*Potencialidades* -Identificar, caracterizar e determinar: domínio, imagem, intervalos de crescimento e decrescimento, sinal, zeros e extremos. -Ressaltar o caráter univalente. -Estabelecer *pontes* com o panorama algébrico. -Reconhecer família de relações funcionais. *Limitações* -Dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não são realizáveis graficamente ou não são facilmente realizáveis.
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que, a partir de alguns dados ou informações de uma relação funcional, explicita o caráter da relação (regra geral ou recursiva) que permite determinar a imagem de qualquer elemento do domínio de uma relação funcional.	Apresentar texto declarativo ou simbólico que expresse o padrão geral ou recursivo de uma relação funcional, com base em algumas informações particulares.	*Potencialidades* -Dar visibilidade às noções de variação e relação de dependência. -Propiciar o reconhecimento da distinção entre variáveis independentes e dependentes. -Reconhecer família de relações funcionais. -Operar como suporte na modelagem de fenômenos funcionais. -Estabelecer pontes entre os panoramas generalização de padrões, algébrico e gráfico. *Limitações* -Gerar equívocos na caracterização da relação funcional, com prevalência do modelo linear ou afim.

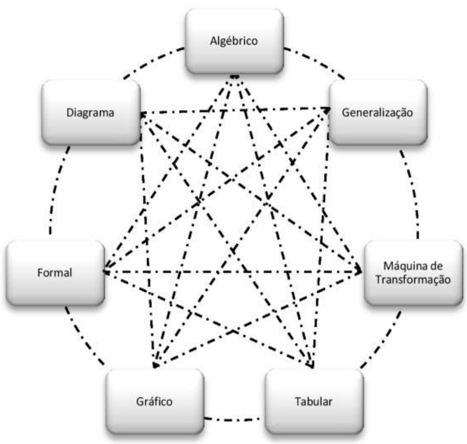
Formal	Texto declarativo que designa uma relação funcional como uma relação arbitrária e univalente entre os elementos de dois conjuntos A e B não vazios quaisquer ou como subconjunto do produto cartesiano A x B	Realizar um texto declarativo que defina uma relação funcional explicitando as características de univalência e arbitrariedade, com a utilização de quantificadores.	*Potencialidades* -Evidenciar as características de univalência e arbitrariedade. -Propiciar o reconhecimento de relações funcionais em diferentes realizações. *Limitações* -Omitir e limitar o entendimento de noções e interpretações associadas ao conceito de função, tais como a noção de variação e dependência. -Exigir uma familiaridade com a terminologia de quantificadores.

Fonte: autores

O quadro conceitual de referência da teoria de Bernstein instrumentalizou-nos com um conjunto de princípios e linguagem precisa para estruturar teoricamente uma *re-presentação* sobre *o que* e *o como* da MnE do Conceito de Função. Assim focalizamos tanto nas características que constituem e distinguem a forma especializada dos textos de cada panorama, quanto nas suas implicações e limitações interpretativas, como sumariamos no Quadro 10. O modelo apresenta uma visão micro das nuances e múltiplas formações discursivas da comunicação realizada no ensino do conceito de função, no contexto escolar da Educação Básica, de acordo com a regulação operada (classificação e enquadramento) nesse contexto.

Na Figura 1, apresentamos um texto icônico para caracterizar o modelo teórico de MpE do Conceito de Função desenvolvido no presente estudo. Os panoramas foram organizados em retângulos disjuntos, com dimensões semelhantes e dispostos em formação circular com o propósito de demarcar que cada panorama é caracterizado por textos singulares, com seus próprios critérios de reconhecimento e realização. Também sinaliza que, *do ponto de vista do modelo*, os panoramas não apresentam relações hierárquicas, considerando que se tratam de categorias do conceito de função. Destacamos "*do ponto de vista do modelo*", porque o modelo é uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função, a qual é dinâmica e emergente, tendo em vista que diz respeito à dimensão da forma como se dá a participação (formações discursivas) daquele(s) que é (são) encarregado(s) de ensinar e aprender o conceito de função na relação pedagógica, portanto são construídas dentro das estruturas e práticas sociais.

Figura 1 – Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função



Fonte: autores

Por fim, as linhas tracejadas que conectam, dois a dois, todos os panoramas, pretendem comunicar a possibilidade do estabelecimento (quando possível) de relações (*pontes*[84]) entre estes, no processo de ensino do conceito de função. Algumas dessas pontes foram evidenciadas na análise efetuada na seção anterior. O princípio de classificação pode ser empregado para analisar as relações (*pontes*) entre os panoramas (que são categorias) do conceito de função; denominamos essas relações de *intraconceito*. Desse prisma, quando são estabelecidas pontes entre os panoramas, há uma classificação mais fraca (C-)

[84] O modelo prevê essas pontes, mas estas só se realizam na prática pedagógica.

nas relações intraconceito. Nesse caso, existe uma articulação maior entre os seus respectivos textos, sendo possível, como foi mencionado na seção anterior, tanto desenvolver e legitimar equivalência entre procedimentos e interpretações desses panoramas, quanto minimizar dificuldades e limitações comunicativas instauradas pelas realizações de cada um dos panoramas. A inexistência ou reduzido estabelecimento de pontes entre os panoramas pode ser interpretado, nessa perspectiva, como uma C+ nas relações intraconceito.

Estudos apontam a importância de, sob nosso ponto de vista, estabelecer uma classificação mais fraca (C-) nas relações intraconceito no ensino do conceito de função (Elia et al., 2006; Ronda, 2015; Slavit, 2003). Tal abordagem propicia que se evidenciem características e propriedades do conceito de função em suas diferentes realizações (Ronda, 2015), desenvolvendo uma visão integrada deste conceito, ao invés de identificá-lo como uma das suas realizações (Elia et al., 2006; Nachlieli; Tabach, 2012).

No entanto, como cada panorama estabelece aspectos e interpretações particulares do conceito de função, com suas próprias regras comunicativas, entendemos que também deve haver lugar no ensino desse conceito, pelo menos temporariamente, para uma classificação C+ nas relações intraconceito, de modo que as fronteiras de cada um dos panoramas também fiquem demarcadas, pois é o isolamento entre categorias que confere especificidade a uma categoria, dando-lhe uma determinada voz (Bernstein, 2000). Ademais, conforme Bernstein (2000), uma classificação permanentemente C- pode gerar ambiguidades no reconhecimento - e acrescentamos, na realização - comunicacional. A sugestão de variação na gradação do princípio de classificação nas relações intraconceito na realização do ensino do conceito de função é sustentada pelas considerações de Cause (2010) e Morais e Neves (2007, 2011) de que essa gradação pode variar no decorrer do ensino de um conteúdo e até em uma mesma aula e que, entre os dois extremos, toda uma gradação é possível.

Bernstein (2000, 2003) usa o princípio de enquadramento para analisar a natureza do controle sobre as regras comunicativas, de modo que o adaptamos[85] para examinar a forma de comunicação no ensino do conceito de função, à luz dos panoramas. Podemos considerar que quando há uma C+ nas relações intraconceito, o enquadramento também pode ser visto como E+. Tendo em vista que, quando um panorama estiver sendo foco de ensino, nessa configuração, os seus textos serão privilegiados em detrimento dos demais, é como se este panorama, empregando uma metáfora, tivesse "controle" sobre as regras na comunicação do conceito de função. Corroborando esse entendimento, podemos citar o resultado de uma investigação empírica com futuros professores do Ensino Médio, relatada em Even (1990), que foram convidados a resolver a questão: "Se você substituir x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais), obterá um número positivo. Substituindo por 6, obterá um número negativo. Quantas soluções reais tem a equação $ax^2+bx+c=0$?" (p. 533). Cerca de 80% dos sujeitos tentaram, sem êxito, resolver a questão usando apenas a realização algébrica da referida relação funcional, ao passo que o uso da sua realização gráfica seria mais apropriada. Nesse caso, as realizações algébricas foram priorizadas na comunicação, em comparação com as realizações gráficas.

Considerando que, segundo Bernstein (2000), são os valores da classificação e do enquadramento que vão definir a prática pedagógica nos contextos básicos de comunicação, em particular, nos contextos educacionais. Entendemos que a citada análise revela o potencial do modelo para orientar o planejamento de práticas pedagógicas para aquisição das regras de reconhecimento e realização necessárias à produção de textos instrucionais sobre o conceito de função, de acordo a gradação dos valores de classificação e enquadramento.

7. Considerações Finais

Nesse estudo construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função, usando como fontes para identificação das realizações e suas vinculações: uma revisão sistemática de literatura de pesquisas relatadas em periódicos de segmentos da área de Educação Matemática que investigaram o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função na Educação Básica, duas coleções

[85] A plasticidade da teoria de Bernstein possibilita que os seus conceitos sejam utilizados em diferentes contextos (Morais; Neves, 2001).

brasileiras de livros didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio e um estudo com um grupo de professores brasileiros em exercício da atividade docente nos Ensinos Fundamental II e/ou Médio.

O modelo construído apresenta uma linguagem de descrição construtiva, no âmbito da produção textual, que foi desenvolvida tomando como alicerce a relação dialética/dialógica entre os conceitos da teoria de Bernstein, a configuração do EC (empregada como ferramenta analítica) e as informações identificadas nas três fontes.

O modelo objetiva mostrar, por intermédio de uma estruturação teórica sistemática, os elementos constituintes do fenômeno, entendido em virtude das nossas lentes teóricas como MnE do Conceito de Função, constituindo-se em um meio de analisar esse fenômeno pelo conjunto de suas características comunicacionais. Essas características podem ser analisadas nas dimensões micro e macro. A dimensão micro fica patente na síntese apresentada no Quadro 10, no qual focamos nos indicadores textuais das características que constituem e distinguem a forma especializada de comunicação de cada panorama, com suas potencialidades e limitações comunicacionais. A dimensão macro está representada no texto icônico do modelo na Figura 1, que indica as múltiplas instâncias comunicacionais das realizações do conceito de função, organizadas pela convergência das regras de reconhecimento e realização, as quais revelam a diversidade de formas de realizar o conceito de função no ensino, no contexto da Educação Básica. Além disso, o texto icônico da Figura 1 também reflete as possíveis e diferentes modalidades de relações que podem ser estabelecidas entre essas instâncias comunicacionais (panoramas) na prática pedagógica, em função da gradação dos princípios de classificação e enquadramento operantes sobre as regras comunicativas.

Posto que, de acordo com Bernstein (2000), a produção textual em um dado contexto depende da posse da orientação de codificação para tal contexto, ou seja, é necessário ter tanto as regras de reconhecimento, quanto as regras de realização (Morais; Neves, 2007) e considerando ainda que tais regras constituem fator crucial para aprendizagem em contextos educacionais (Afonso; Neves, 2000), entendemos que o modelo construído, ao fornecer uma transparência discursiva sobre as regras de reconhecimento e realização para comunicação do conceito de função, pode subsidiar os processos de desenvolvimento curricular, de produção de materiais curriculares para alunos e professores do Ensino Básico, e de estratégias para abordagem desse tema nos contextos educacionais.

O modelo teórico construído nesse estudo está desenvolvido dentro do quadro teórico discursivo, que orientou a nossa forma de propor a existência e caracterização do fenômeno MnE do Conceito de Função Assim, apresenta uma diferente perspectiva para o construto Matemática para o Ensino, um diferente olhar de princípios, uma linguagem de descrição que pode contribuir com esforços de pesquisadores da área de Educação Matemática para estabelecer uma identidade a MpE, com a instauração de uma classificação mais forte entre a MpE e, por exemplo, a Matemática Acadêmica, por intermédio da demarcação das suas fronteiras comunicativas e explicitação do grau de especialização das suas regras discursivas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar, que estamos cientes, apesar desse não ter sido esse foco desse estudo, dos múltiplos e complexos mecanismos (relações de poder e controle) que intervêm na produção e reprodução da comunicação nas práticas pedagógicas nos contextos educacionais.

8. Referências

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: researching mathematics for teaching mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*, p. 270-296.

Adler, J.; Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In Sullivan, P.; Wood, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222.

Afonso, M.; Neves, I. P. (2000). Influência da prática pedagógica na mudança conceptual em ciências: um estudo sociológico. *Revista Portuguesa de Educação*, Universidade do Minho, Braga, Portugal, vol. 13, núm. 1, p. 247-282.

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, V. 79, I. 1, p. 239 – 261.

Andrews, P. (2011). The Cultural Location of Teachers' Mathematical Knowledge: Another Hidden Variable in Mathematics Education Research? In Rowland, T.; Ruthven, K. (Eds). *Mathematics Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library. Springer. V. 50, p. 99-118.

Asghary, N.; Shahvarani, A.; Medghalchi, A. R. (2013). Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 1007-1026.

Ayalon, M.; Watson, A.; Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics,* V.90, I. 3, p. 321 – 329.

Ball, D. L., Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. C. Phillips (Ed.), *Constructivism in education:* Opinions and second opinions on controversial issues. Yearbook of the National Society for the Study of Education Chicago: University of Chicago Press, p. 193-224**.**

Ball, D. L.; Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at *The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference*. Disponível em http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf . Acesso em 05 mai. 2016.

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, p. 389-407.

Barbosa, J. C**.** (2013). Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: *7th International Mathematics Education and Society Conference*, 2013, Cape Town. Proceedings of the Seventh International mathematics Education and Society Conference. Cape Town: University of Cape Town, 2007. v. 1. p. 213-222.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p.595-606.

Beltrão, M. E. P.; Igliori, S. B. C. (2010). Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções**.** *Educação Matemática Pesquisa*, v.12, n.1, p.17-42.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity***:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield.

Bernstein, B. (2003). *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge.

Biehl, J. V.; Bayer, A. (2009). A escolha do livro didático de Matemática. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Ijuí/RS. Disponível em <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_43.pdf >. Acesso em 08 de ago. 2015.

Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. *Bolema*, v. 26, n. 42A, p. 139-162.

Brasil. (2013a). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2014. Matemática. Ensino Fundamental – Anos finais. Brasília. 104 p.

Brasil. (2013b) Ministério da Saúde. Conselho Nacional de Saúde. *Comissão Nacional de Ética em Pesquisa*. Plataforma Brasil. Disponível em: http://aplicacao.saude.gov.br/plataformabrasil/login.jsf . Acesso em: 21 ago. 2015.

Brasil. (2014). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos*: PNLD 2015. Matemática. Ensino Médio. Brasília. 108 p.

Brito, D. S.; Almeida, L. M. W. (2005). O conceito de função em situações de modelagem matemática. *Zetetiké,* Cempem, Unicamp, v.13 , n. 23, p. 63 – 86.

Callejo, M. L.; Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *Boolema*. v. 28, n.48, p. 64-88.

Carraher, D. W.; Martinez, M. V.; Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 3-22.

Cause, L. (2010). Bernstein's Code Theory and the educational Researcher. *Asian Social Science*, vol. 6, N. 5, p. 3-9.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237-243.

Chapman, O. (2015). Understanding and supporting mathematics teachers'knowledge for Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. V. 18, I. 2, p. 101-103.

Confrey, J.; Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, V. 26, I. 2-3, p. 135-164.

Cooney, T. J. et al.(2013). *Developing Essential Understanding of Functions*: Grades 9 – 12. Essential understanding series. The National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, B.; Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 29, N. 3, p. 37-43.

Davis, B.; Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers'disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, , p. 245 – 265.

Davis, B.; Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group. 141 p.

Davis, B.; Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, I. 3, p. 293-319.

Dazzi, G. J.; Dullius, M. M. (2013). Ensino de Funções Polinomiais de Grau Maior que Dois Através da Análise de seus Gráficos, com Auxílio do *Software* Graphmatica. *Bolema*. v. 27, n. 46, p. 381-398.

Doorman, M. et al. (2012). Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. V. 10, I. 6, p. 1243-1267.

Dubinksy, E.; Wilson, E. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, p. 83-101.

Elia, I. et al. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*. p. 317-333.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, V. 21, p. 521-544.

Even, R.; Ball, D. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Falcade, R.; Laborde, C.; Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, V. 66, I. 3, p. 317-333.

Frant, B. J. (2003). As equações e conceito de função. *Boletim GEPEM*, n. 42, p. 71 – 80.

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. - São Paulo. Atlas.

Granville, M. A. (2008). O discurso pedagógico dos livros didáticos da década de sessenta: reflexos ou reproduções das "políticas públicas de educação" da época? *1ª JIED – Jornada Internacional de Estudos do Discurso*. Maringá – PR. Disponível em <http://www.dle.uem.br/jied/trab3.html>, acesso em 17 jun. 2015.

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics*. V. 91, p. 375 -393.

Guerrero, L. S.; Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, v. 1, p. 1-15.

Hansson, O. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Doctoral Thesis. Luleå University of Technology, Suécia.

Hitt, F; González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*. V. 88, I. 3, p. 201-219.

Hodgen, J. (2011). Knowing and Identity: A Situated Theory of Mathematics Knowledge in Teaching. In Rowland, T.; Ruthven, K. (Eds). *Mathematics Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library. Springer. V. 50, p. 27-42.

Imenes, L. M.; Lellis, M. (2010a). *Matemática* – Imenes & Lelis, 6º ano. Editora Moderna. São Paulo.

Imenes, L. M.; Lellis, M. (2010b). *Matemática* – Imenes & Lelis, 7º ano. Editora Moderna. São Paulo.

Imenes, L. M.; Lellis, M. (2010c). *Matemática* – Imenes & Lelis, 8º ano. Editora Moderna. São Paulo.

Imenes, L. M.; Lellis, M. (2010c). *Matemática* – Imenes & Lelis, 9º ano. Editora Moderna. São Paulo.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, 7 (2), p. 1-20.

Kazima, M.; Pillay, V.; Adler, J. (2008). Mathematics for teaching: observations from two case studies. *South African Journal of Education.* Vol 28, p.283-299.

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209.

Mavrikis, M. et al. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic affordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, Wiley.

Maciel, P. R. C., Cardoso, T. F. L. (2014) A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. *Bolema*. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348-1367.

Maggio, D. P.; Nehring, C. M. (2012) Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, *Boletim Gepem*, n. 61, p. 95-108.

Meneghetti, R. C. G.; Redling, J. P. (2012). Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. *Bolema*. Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193-229.

Mesa, V. (2004). Characterizing Practices Associated with Functions in Middle School Textbooks: An Empirical Approach. *Educational Studies in Mathematics*, V.56, I. 2-3, p. 255-286.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, vol. 38, p. 269 -280.

Moschkovich, J. (2004). Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through Interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, V. 55, I: 2-3, p. 49-80.

Morais, A. M.; Neves, I. P. (2001). Pedagogic social contexts: Studies for a sociology of learning. *In* A. Morais, A.; Neves, I; Davies, B.; Daniels, H. (Eds.). *Towards a sociology of pedagogy*: The contribution of Basil Bernstein to research. New York: Peter Lang. Cap. 8, p. 185-221.

Morais, A. M.; Neves, I. P. (2007). A Teoria de Basil Bernstein- Alguns aspectos fundamentais. *Revista Práxis Educativa*, 2 (2), p.115-130.

Morais, A. M.; Neves, I. P. (2011). Educational texts and contexts that work: Discussing the optimization of a model of pedagogic practice. In Frandji, D.; Vitale, P. (Eds.). *Knowledge, pedagogy & society*: International perspectives on Basil Bernstein's sociology of education. London: Routledge. Cap. 12.

Moreira, P. C.; David, M. M. M. S.. (2010). *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Moore, R.; Muller, J. (2003). O Crescimento do Conhecimento e a Lacuna Discursiva. *Educação &. Sociedade.* Campinas, vol. 24, n. 85, p. 1343-1360.

Nachlieli, T., Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, p. 10-27.

Nicol, C. C.; Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with Mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, V.62, I. 3, p. 331-355.

Nyikahadzoyi, M. R. (2015). Teachers' Knowledge of the Concept of a Function: A theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education*. V. 13, I. 2 – Supplement, p. 261-283.

Paiva, M. (2013a). *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 1. 2ª edição. São Paulo.

Paiva, M. (2013b). *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 2. 2ª edição. São Paulo.

Paiva, M. (2013c). *Matemática*: Paiva. Ensino Médio. Editora Moderna. Vol 3. 2ª edição. São Paulo.

Perrelli, M. A. S.; Lima, A. A., Belmar, C. C. (2013). A escolha e o uso do livro didático pelos professores das áreas de Ciências Naturais e Matemática: as pesquisas que abordam essa temática. *Série-Estudos* (UCDB), v. 35, p. 241-261.

Petrou, M.; Goulding, M. Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. The Cultural Dimension of Teachers' Mathematical Knowledge. In Rowland, T.; Ruthven, K. (Eds). *Mathematics Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library. Springer. V. 50, p. 9 -26.

Petticrew, M.; Roberts, H. (2006). *Systematic Reviews in the Social Sciences:* A Practical Guide. Oxford: Blackwell.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal Mathematics Teacher Education*, N. 13, p. 73-93.

Rhoads, K.; Weber, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. *International Journal of Education*, V. 78, p. 1-12.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics*, n. 90, p. 303-319.

Rossini, R. (2007). Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 9, n. 2, p. 205-247.

Rowland, T.; Ruthven, K. *Introduction*. The Cultural Dimension of Teachers' Mathematical Knowledge. In Rowland, T.; Ruthven, K. (Eds). *Mathematics Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library. Springer. V. 50, p. 1-8.

Sánchez, V. Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 6, I. 1, p. 5-25.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, V. 53, p. 229-254.

Schwarz, B.; Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, V. 29, I-3, p. 259-291.

Shield, M.; Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, V. 82, I. 3, p.183-199.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), p.1-22.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. United States: The Mathematical Association of America, p. 25-58.

Silva, A. L. et al. (2001). Pesquisando, discutindo, pensando e produzindo material sobre funções. *Boletim GEPEM*, n. 38, p. 55 -72.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, V.33, I. 3, p. 259-281.

Speer, N. M.; King, K. D.; Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. V. 18, I. 2, p. 105-122.

Steele, M.; Hillen, A. F.; Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, p. 451-483.

Strapason, L. P. R.; Bisognin, E. (2013). Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579-595.

Stylianides, A. J.; Delaney, S. (2011). The Cultural Dimension of Teachers' Mathematical Knowledge. In Rowland, T.; Ruthven, K. (Eds). *Mathematics Knowledge in Teaching*. Mathematics Education Library. Springer. V. 50, p. 179 -191.

Tabach, M.; Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitionsfor developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, V.90, p. 163-187.

Trindade, D. A.; Santos, I. B. (2012). Critérios apontados por professores de matemática aracajuanos para seleção do livro didático. In: *VI Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade*, São Cristóvão- Sergipe-Br. Anais VI Educon.

Victor, L. (2008). Systematic reviewing. In: *Social Research Update*. Disponível em: http://sru.soc.surrey.ac.uk/SRU54.pdf. Acesso em: 04 ago. 2014.

Vieira, C. M. (2013). Professores dos anos iniciais do ensino fundamental e livros didáticos de matemática. *Tese de Doutorado*. Programa de Pós-graduação da Faculdade de Educação (FaE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Minas Gerais-Br.

White, T. (2009). Encrypted objects and decryption processes: Problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics*, V. 72, I-1, p. 17-37.

Wilkie, K. J. (2014) Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, n. 17, p. 397-428.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, V.93, p. 333-361.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical Resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, V. 43, I- 2, p. 125-147.

ANEXO 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Questionário

1) Nome:

____

2) Formação:

Graduado ( ) Especialista ( ) Mestre ( ) Doutor ( )

3) Sua graduação é em Matemática?

Sim ( ) Não ( ). Qual? ____

4) Quanto tempo de experiência na docência em Matemática você possui?

____

5) Em qual rede de ensino você atua?

Municipal ( ) Estadual ( ) Federal ( )

6) Em que série(s) você atua? ____

7) Qual o nome da escola?

____

8) Você já trabalhou de alguma forma com aspectos do tema Função neste tempo de experiência docente?

Sim ( ) Não ( )

9) Durante sua formação, algum tópico de Função apresentou maior dificuldade de aprendizagem? Qual?

____

10) Atuando como docente, qual o tópico de Função você tem maior dificuldade em ensinar? E qual o aluno apresenta maior dificuldade em entender? Ao que você atribui essas dificuldades?

____

____

____

____

ANEXO 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Em cumprimento à Resolução 466/12, a qual regulamenta a realização de pesquisas envolvendo seres humanos, este termo visa sua anuência em participar da pesquisa intitulada "Matemática para o Ensino do Conceito de Função", após esclarecimentos sobre a natureza da mesma, seus objetivos e método.

A supracitada pesquisa está sob a responsabilidade da pesquisadora Professora Graça Luzia Dominguez Santos, sendo parte integrante da pesquisa do seu curso de doutorado, desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, sob orientação do Professor Doutor Jonei Cerqueira Barbosa.

Um dos objetivos da pesquisa é identificar formas de ensinar funções. Para cumprir esse propósito propomos, entre outras fontes, como metodologia de pesquisa a realização do *Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de Ensino*, o qual consiste em uma série de sessões de estudo de teor colaborativo, que visa investigar e analisar a estrutura lógica, definições, origens, analogias, associações, aplicações e representações do conceito de função no contexto da matemática escolar, sob a perspectiva do seu ensino e aprendizagem. O caráter colaborativo do referido curso, diz respeito à forma como este será desenvolvido. Trata-se de uma pareceria entre os participantes (pesquisadora e professores), de maneira que o compartilhamento de experiências de ensino, os questionamentos e reflexões do grupo, que emergirem no decorrer das sessões, orientarão o seu prosseguimento.

Solicito permissão para filmar e gravar os encontros e transcrever as falas, assim como para utilizar a produção de textos escritos gerados nas sessões do curso. Todos esses dados serão empregados para elaboração de parte do meu relatório de pesquisa, produção de artigos e divulgação em encontros científicos. Esses registros ficarão sob minha responsabilidade, em sigilo, resguardando a identidade dos participantes, que assim desejarem, durante todas as fases da pesquisa.

Para o participante que optar pelo sigilo da sua identidade, será utilizado um pseudônimo escolhido por ele próprio.

Esclareço que nessa pesquisa não há risco para o participante, além do que é garantido o direito de desistir da participação em qualquer tempo, assim como de se recusar a participar da mesma, sem qualquer penalização.

O formato do curso, que viabiliza a pesquisa, visa propiciar aos professores participantes a oportunidade de compartilhar suas experiências, refletirem, enriquecerem e reformularem a própria prática pedagógica, em particular sobre o ensino de funções.

Caso você se sinta esclarecido quanto aos procedimentos, riscos e benefícios envolvidos, e concorde em colaborar, na condição de participante, por favor, assine no local abaixo reservado, declarando assim o seu consentimento livre e esclarecido, em duas vias, uma da pesquisadora e a outra sua.

Salvador, 12 de setembro de 2015

Nome do participante: ______________________________

Assinatura do participante: ___________________________

R.G do participante: ________________________________

Pesquisadora responsável: Graça Luzia Dominguez Santos ________________________

Assinatura

Deseja utilizar pseudônimo: Sim ☐ Não ☐

Qual? _________________________________