UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

LUÍS FERNANDO DE SOUZA DIAS

ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS

Salvador
2015

LUÍS FERNANDO DE SOUZA DIAS

ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia de Estruturas; área de concentração: Mecânica Computacional.

ORIENTADORA: Prof.ª Dr.ª Paula Frassinetti Cavalcante

Salvador
2015

ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS

Autor:

_____

Luís Fernando de Souza Dias

Orientadora:

_____

Prof.ª Dr.ª Paula Frassinetti Cavalcante

Avaliador:

_____

Prof. Dr. Anderson de Souza Matos Gádea

Avaliador:

_____

Prof. Dr. Alberto Borges Vieira Jr.

Salvador, 09 de dezembro de 2015.

Com amor e saudade, dedico este trabalho à minha família que, embora fisicamente separados, todos os dias fazemos do outro o alicerce para o enfretamento das dificuldades cotidianas.

Dedico-o também ao amor da minha vida, Rosângela.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter dado força para continuar sempre.

Agradeço a meus pais pela importância que me foi dada quando decidi continuar os estudos e por não me abandonarem um só instante.

Também a meus irmãos, Lipe e João, pelo companheirismo e apoio de sempre que, mesmo longe, cada um a seu jeito, me fazem rir e ver a vida com mais leveza.

A Rô, agradeço por acreditar em meu sucesso, repetindo "*você sempre consegue!* " a cada novo impasse que aparecia para me desafiar todo dia, além do riso, carinho e amor.

Aos meus amigos e companheiros de república e do mestrado, por me fazerem rir por qualquer besteira!

Agradeço a minha orientadora, Paula, por me apoiar intelectualmente, além de me dar autonomia e segurança no processo de desenvolvimento deste trabalho.

“Duvidar de tudo ou acreditar em tudo, são duas soluções igualmente cômodas que nos dispensam, ambas, de refletir. ”

Henri Poincaré

DIAS, Luís Fernando de Souza. ESTUDO NUMÉRICO DO FENÔMENO DO AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS SÓLIDAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS IMPULSIVOS. 2015. Dissertação – Departamento de Construção e Estruturas. Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

RESUMO

A presença do amortecimento em sistemas estruturais pode ser de considerável relevância no comportamento dos níveis de vibração, respostas transientes, transmissibilidade, razão de decaimento e outras características que são influenciadas pela caracterização da dissipação de energia. Neste trabalho, está apresentado um estudo numérico que permite a estimativa do amortecimento presente em estruturas e sua influência nas respostas quando o carregamento é configurado na forma de um impulso, mostrando que a influência da matriz de rigidez nas equações do movimento pode, muitas vezes, ser desprezada sem considerável perda de informações a este respeito. A matriz de amortecimento foi construída com base no modelo viscoso de Rayleigh, fazendo uso dos modos normais extraídos do sistema a partir do método dos elementos finitos, através do método de Jacobi, que foi viável com a redução da ordem das matrizes dada pelo método de iteração por subespaços. Em seguida as respostas no domínio do tempo foram conseguidas pelo método de Newmark, feitas no FEMAP. Os métodos implementados, foram feitos em linguagem de alto nível C++ e Matlab e mostraram resultados satisfatórios, permitindo averiguar o distanciamento entre os níveis de deslocamento quando a matriz de amortecimento está presente nas equações do movimento.

Palavras-chave: análise modal, carregamento impulsivo, amortecimento proporcional.

ABSTRACT

The presence of the structural damping systems can be of considerable importance in the behavior of vibration levels, transient responses, transferability, decay ratio and other characteristics that are influenced by the energy dissipation characteristics. In this work a numerical study that allows estimation of this damping structures and their influence on responses when loading is configured in the form of a pulse is presented, showing that the influence of the stiffness matrix in equations of motion can often be neglected without considerable loss of information in this regard. The damping matrix was constructed based on the viscous model Rayleigh, making use of normal modes taken from the system from the finite element method, using the Jacobi method, which has been feasible to reduce the order of the matrices given by the method By iteration subspaces. Then the responses in the time domain were obtained by Newmark method made in FEMAP. The methods implemented are made high-level C ++ language and Matlab and showed satisfactory results, allowing to determine the distance between the levels of displacement when the damping matrix is present in the equations of motion.

Keywords: modal analysis, impulsive loading, proportional damping.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1-1 – SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO 22
FIGURA 2.1-2 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DO SISTEMA MASSA MOLA 22
FIGURA 2.2-1 - REPRESENTAÇÃO DE CARGA IMPULSIVA (CHOWDHURY E DASGUPTA, 2009) 34
FIGURA 2.3-1 – DIAGRAMA DE HISTERESE PARA AMORTECIMENTO LINEAR 36
FIGURA 2.3-2 - DIAGRAMA DE HISTERESE PARA AMORTECIMENTO NÃO LINEAR 36
FIGURA 2.3-3- AMORTECIMENTO INERCIAL, AMORTECIMENTO ESTRUTURAL E AMORTECIMENTO PROPORCIONAL. ADAPTADO DE (JIANG E ROGERS, 1989) 41
FIGURA 2.4-1 - REFERENCIAL LAGRANGEANO ATUALIZADO FONTE: (SILVA, 2009) 45
FIGURA 2.4-2 – REFERENCIAL LAGRANGEANO TOTAL (SILVA, 2009) 46
FIGURA 2.4-3 - SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR. ADAPTADO DE (ZIENKIEWICZ E TAYLOR, 2000) 47
FIGURA 2.4-4 – INTERVALO DEFINIDO ENTRE A E B. 48
FIGURA 2.4-5 – PROCESSO DE ITERAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON. FONTE: (BATHE, 1996) 49
FIGURA 2.5-1 – ACELERAÇÃO NO INTERVALO DE TEMPO. ADAPTADO DE (BATHE, 1996) .. 51
FIGURA 2.5-2 COMPORTAMENTO DA ACELERAÇÃO DENTRO DO INCREMENTO DE TEMPO, EM FUNÇÃO DE BETA. ADAPTADO DE (NEWMARK, 1959). 52
FIGURA 3.1-1 – DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO DO CORPO AO LONGO DAS COORDENADAS X_1, X_2 E X_3, AO LONGO DO INTERVALO 0 ATÉ T + ΔT. ADAPTADO DE (JELENIC E CRISFIELD, 1999). 54
FIGURA 3.2-1 - MOVIMENTO DO EF AO LONGO DO TEMPO. 57
FIGURA 3.3-1 - MODELO DE CORPO EM QUEDA LIVRE 60
FIGURA 3.3-2 - CURVA DA FORÇA X TEMPO 62
FIGURA 3.3-3 - ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES. ... 63
FIGURA 4.1-1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA MALHA NO GMDNA. 65
FIGURA 4.1-2 - ALGORITMO SIMPLIFICADO DO PROGRAMA 66
FIGURA 4.1-3 – EXEMPLO DE ARQUIVO CONECTIVIDADE.TXT 67
FIGURA 4.2-1 – ALGORITMO REPRESENTATIVO DO PROGRAMA MDNA 69
FIGURA 4.3-1 – EXEMPLO PARA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA 70
FIGURA 4.3-2 - CONFIGURAÇÃO DEFORMADA 71
FIGURA 4.3-3 - CURVA DE CONVERGÊNCIA. 71
FIGURA 4.3-4 – ERRO ENTRE OS RESULTADOS GERADOS NO ANSYS E MDNA 72
FIGURA 4.3-5 - RESPOSTA DA EXTREMIDADE LIVRE DO SISTEMA. 73

FIGURA 4.3-6 - FORÇA HARMÔNICA DE EXCITAÇÃO DO SISTEMA..... 74
FIGURA 5.1-1 - MODELO PARA AVALIAÇÃO..... 76
FIGURA 5.1-2 - ESTRUTURA DEFORMADA ESTATICAMENTE 77
FIGURA 5.1-3 - 1º MODO (82.8 HZ)..... 78
FIGURA 5.1-4 - 3º MODO (497.46 HZ)..... 78
FIGURA 5.1-5 - 5º MODO (782.10HZ)..... 78
FIGURA 5.1-6 - 6º MODO (1252.86 HZ)..... 79
FIGURA 5.2-2 - DESLOCAMENTO X TEMPO..... 80
FIGURA 5.2-3 - DESLOCAMENTO X TEMPO (0.2 < T < 0.4)..... 80
FIGURA 5.2-4 - DESLOCAMENTO DA EXTREMIDADE LIVRE (0.2S À 0.4S)..... 81
FIGURA 5.2-8 - DISTANCIAMENTO DAS RESPOSTAS EM FUNÇÃO DO FATOR DE AMORTECIMENTO (DESLOCAMENTOS)..... 82
FIGURA 5.2-10 - DESLOCAMENTOS X TEMPO..... 83
FIGURA 5.2-11 - DESLOCAMENTO X TEMPO (0.19 < T < 0.24)..... 84

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.3-1 - RAZÃO DE AMORTECIMENTO DE MATERIAIS SOB CONDIÇÕES NORMAIS DE TRABALHO 42
TABELA 4.3-1 – DADOS DO MODELO NA VERIFICAÇÃO DE CONVERGÊNCIA. 70
TABELA 4.3-2 - ERRO ANSYS X MDNA (EM %) 72
TABELA 5.1-1 - MODELO DE AVALIAÇÃO 76
TABELA 5.2-1 - COEFICIENTES DE RAYLEIGH 79
TABELA 5.2-3 - COEFICIENTES DE RAYLEIGH 82

ABREVIATURAS E SIMBOLOGIA

$[M], \boldsymbol{M}$ – *Matriz massa,*

$\boldsymbol{M}^l, \boldsymbol{M}^C$ – *Matriz de massas concentradas e consistente respectivamente.*

$\boldsymbol{M}_{k+1}$- (k + 1)ésima projeção da matriz de massa.

m – *Massa concentrada.*

ρ - *Densidade volumétrica.*

${}^0\rho$, ${}^t\rho$, ${}^{t+\Delta t}\rho$ – *Densidade volumétrica no tempo t = 0, t e* $t + \Delta t$, *respectivamente.*

a_1, a_2 – *Coeficientes de ponderação da matriz de massa.*

$[C], \boldsymbol{C}$ - *Matriz de amortecimento.*

c – Coeficiente de amortecimento.

$[K], \boldsymbol{K}$ – *Matriz de rigidez.*

$\boldsymbol{K}_{k+1}$- *(k+1) ésima projeção da matriz de rigidez.*

k – Coeficiente de Rigidez.

$\boldsymbol{K_L}, \boldsymbol{K_{NL}}$ – *Matriz de rigidez linear e não linear, respectivamente.*

$\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}$ – *Vetores posição, velocidade e aceleração, respectivamente.*

$x_p(t)$ – *Vetor posição. Solução particular da equação diferencial do sistema massa mola.*

$u, \dot{u}, \ddot{u}$- *Vetores deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente.*

${}^{t+\Delta t}u$, ${}^t u$, ${}^0 u$ – *Vetores inscritos no tempo* $t + \Delta t$, *t e tempo inicial, respectivamente.*

$\boldsymbol{X}_0$- *Vetor posição.*

Δu_i – *Incremento de deslocamento.*

v_0 - *Velocidade inicial.*

Δt – *Incremento de tempo.*

$\vec{F}$- *Vetor força.*

$\vec{F}(t)$- *Vetor força variável no tempo.*

$\vec{F}(\Delta t)$- *Vetor força dado em um incremento de tempo qualquer.*

$\vec{F}_{max}$- *Amplitude da força.*

F_i, F_c, F_k – *Força de inércia, amortecimento e elástica, respectivamente.*

λ_i - *i-ésimo autovalor de uma transformação.*

X_i – *Autovetor referente à* λ_i.

X_k - *Autovetor referente à k-ésima iteração.*

$[D], D$ – *Matriz dinâmica.*

A_K - *Matriz de transformação qualquer referente a uma iteração k.*

$\boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_k^T$, - *Matriz de transformação do método de Jacobi e sua transposta. (ambos referentes a uma iteração k).*

p_{ij} – *Elemento da matriz* ***P****.*

Θ – *ângulo de rotação da matriz* ***P***

$\boldsymbol{\Lambda}$ – *Matriz diagonal de autovalores.*

$\boldsymbol{\Phi}$ – Matriz ortogonal de autovetores dispostos em suas colunas.

$\boldsymbol{Q}_{k+1}$ – (k+1)ésima matriz de autovetores.

α, β – *Coeficientes de Rayleigh.*

ω_i – *i-ésima frequência natural de uma estrutura.*

ξ_i – *i-ésimo fator de amortecimento de uma estrutura.*

${}^0A$, ${}^tA$, ${}^{t+\Delta t}A$ – *Área superficial de um corpo nos instantes t = 0, t e* $t + \Delta t$.

${}^0V$, ${}^tV$, ${}^{t+\Delta t}V$ – *Volume de um corpo nos instantes t = 0, t e* $t + \Delta t$.

t_k - *Forças de superfície*

f_k – *Forças de corpo*.

R – *Soma das forças externas sobre um corpo.*

$\boldsymbol{\Psi}(a)$ – Resíduo de uma função qualquer.

$f(x)$ – função qualquer de x.

W^{ext}, W^{int} – *Trabalho realizado pelas forças externas e internas, respectivamente.*

S_{ij} – *Componentes cartesianos do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff,* $\boldsymbol{S}$.

ϵ_{ij} - *Coordenadas cartesianas do tensor das deformações de Green-Lagrange*, $\boldsymbol{\epsilon}$.

$u_{i,j}$ - *Derivada do deslocamento u na direção i com relação à direção j.*

C_{ijkl} - *Tensor constitutivo do material.*

$\boldsymbol{B}_L$ – *Matriz de transformação linear deslocamento-deformação.*

$\boldsymbol{B}_{NL}$ - Matriz de transformação não-linear deslocamento-deformação.

$\boldsymbol{F}$ – Vetor de forças devido à tensão interna no material.

h_k - *Funções de interpolação.*

$[H]$ - *Matriz de funções de interpolação.*

$[\partial h]$ - *Matriz de derivadas parciais das funções de interpolação.*

$\vec{q}$ - *Vetor das derivadas dos deslocamentos.*

j – *Determinante da matriz jacobiana* $[J]$.

γ, δ, μ - *Parâmetros do método de Newmark*

$[\Gamma]$ - Matriz inversa da matriz jacobiana.

U_p, U_M- Energia potencial de um corpo qualquer, energia potencial elástica, respectivamente.

h - Altura.

Δ_{est}- Deflexão da mola sob carregamento estático.

Δ_{d} – deflexão da mola sob carregamento dinâmico.

n – Coeficiente de multiplicação devido ao efeito dinâmico.

F_d – Força aplicada sob efeito dinâmico.

F_{est}- Força estática.

f – relação entre coeficiente de multiplicação e intervalo de crescimento da força.

PVT – Princípio dos Trabalhos Virtuais

MIS – *Método de Iteração por subespaços.*

MEF – *Método dos elementos finitos*.

$MDNA$ – *Modal and Dynamic Numerical Analysis.*

$GMDNA$ – *Graphical - Modal and Dynamic Numerical Analysis.*

SUMÁRIO

1 CAPÍTULO 1 17

INTRODUÇÃO 17

1.1 Considerações Iniciais 17

1.2 Objetivos 18

1.3 Justificativa 19

1.4 Metodologia 19

1.5 Organização do Trabalho 20

2 CAPÍTULO 2 21

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 21

2.1 Análise Modal de Estruturas 21

2.1.1 Métodos de Solução 26

2.1.1.1 Método de Jacobi 27

2.1.1.2 Método de Iteração por Subespaços 30

2.2 Resposta a Carga Impulsiva 32

2.3 Identificação do Amortecimento 35

2.3.1 Amortecimento Proporcional 39

2.4 Não Linearidade Geométrica 43

2.4.1 Descrição do Movimento 43

2.4.2 Solução de Equações Não Lineares 46

2.5 Resposta no Domínio do Tempo 50

3 CAPÍTULO 3 54

FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS 54

3.1 Formulação Generalizada pelo PTV. 54

3.2 Apresentação do Elemento Finito. 57

3.3 Carregamento de Impulso 59

4 CAPÍTULO 4 64

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL 64

4.1 Aspectos Gerais 64

4.1.1 Limitações do Programa 67

4.2 Estrutura do Programa 68

4.3 Validação da Implementação 70

5 CAPÍTULO 5 75

ANÁLISES E RESULTADOS 75

5.1 Cálculos Preliminares 75

5.1.1 Análise Estática 76

5.1.2 Análise Modal 77

5.2 Resposta no Domínio do Tempo 79

5.2.1 Estudo de Caso 1 79

5.2.2 Estudo de Caso 2 82

5.3 Análise Comparativa 84

6 CAPÍTULO 6 85

CONCLUSÕES 85

REFERÊNCIAS 86

APÊNDICE 93

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

O entendimento do comportamento dos meios contínuos é, em geral, o maior objetivo da análise estrutural no que diz respeito aos fenômenos físicos presentes, quando estes são submetidos a ações externas de carregamento e condições de contorno. Dessa forma um modelo matemático, onde as respostas obtidas são satisfatoriamente condizentes com a realidade fenomenológica da estrutura, é conseguido a partir das grandezas relacionadas, dentre outros, com as propriedades que descrevem seu material constituinte.

Um sistema dinâmico é característico pelo surgimento da influência das forças de inércia no desenvolvimento de seu movimento, em adição às forças elásticas presentes na estática dos sólidos deformáveis, entretanto são as forças de dissipação, isto é, as forças pelas quais se transfere energia cinética para fora do sistema na forma de calor, que se apresentam com relativa complexidade e imprecisão. O fenômeno do amortecimento presente nos materiais, chamado de amortecimento histerético, diferentemente da inércia e rigidez, não é bem definido apenas em função do material, mas comporta-se diferentemente em função dos diversos parâmetros do sistema. Assim, uma abordagem diferenciada sobre o efeito da dissipação da energia vibratória pode ser realizada para assegurar uma avaliação precisa do sistema estrutural.

Uma abordagem largamente utilizada no estabelecimento do coeficiente de amortecimento é feita a partir de testes experimentais do sistema no qual se deseja estudar, onde este é posto a vibrar sob uma condição livre de carregamentos e os vetores componentes do deslocamento de pontos pré-definidos e distribuídos ao longo da estrutura, alimentam discretamente um

modelo matemático a partir da determinação do decremento logarítmico da resposta.

Outra metodologia não menos utilizada, consiste na combinação linear das matrizes de massa $\boldsymbol{M}$ e rigidez $\boldsymbol{K}$, formando uma matriz de amortecimento $\boldsymbol{C}$ proporcional, e que na forma $C = \alpha M + \beta \mathrm{K}$ é chamado de amortecimento de Rayleigh. A coerência deste, relacionando-o com o modelo real, se dá na determinação dos coeficientes α e β que são definidos em função de determinados parâmetros, particulares de cada sistema.

O enfoque deste trabalho alicerça-se no estudo da influência com que o amortecimento, modelado aqui como proporcional, implica nas respostas obtidas quando uma estrutura, discretizada com elementos finitos volumétricos, é submetida a um tipo de carregamento em especial, isto é, o carregamento no formato de pulsos. A formulação do elemento finito aqui apresentada permite a presença de grandes deslocamentos, mas pequenas deformações devido à metodologia adotada nas implementações computacionais.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo, a realização de estudos, baseados em análise numérica, a respeito da influência quantitativa exercida pela matriz de amortecimento nas equações do movimento de estruturas sólidas e suas respectivas respostas quando estão presentes excitações constituídas na forma de pulso.

Contemplam os objetivos específicos:

O estudo da matriz de amortecimento proporcional, gerada a partir da análise modal, obtida com uso de métodos numéricos para solução do problema de autovalor.

O tratamento dado ao carregamento impulsivo, quando comparados com outros tipos de carregamentos existentes em problemas de engenharia.

1.3 Justificativa

A presença não rara de carregamentos configurados em forma de pulsos no cotidiano de estruturas, tais como edifícios, máquinas, equipamentos, entre outros, nos leva a necessidade de sua compreensão em detalhes.

Em muitos casos práticos, contudo, aproximações destes carregamentos dinâmicos, são feitos, considerando-os estáticos ou quase-estáticos. Todavia, quando sua magnitude se eleva, ou as solicitações se mostram também elevadas, o estudo do histórico das respostas deve ser levado em consideração, configurando uma análise suficientemente complexa.

Além disso, atribui-se a este estudo, uma contribuição no entendimento do fenômeno de amortecimento e seu tratamento matemático nos cálculos numéricos na engenharia de estruturas, uma vez que esse é, em muitas situações, desprezado ou de difícil definição nas equações governamentais.

1.4 Metodologia

A metodologia relacionada com o desenvolvimento deste trabalho consiste em: Levantamento teórico a respeito de elementos fundamentais nas análises aqui propostas, isto é; modelos e mecanismos de amortecimento utilizados na modelagem matemática de estruturas, métodos numéricos de integração, solução do problema de autovalor e solução de sistemas de equações não lineares.

Realizar-se-á a formulação matemática referente ao elemento finito utilizado nas análises aqui presentes. Além disso, a construção do modelo onde o carregamento configura-se como um carregamento impulsivo. A metodologia compreende ainda, a implementação computacional dos métodos supracitados para realização dos cálculos utilizados nas análises que, por fim, serão estudados e avaliados para concluir-se a respeito dos objetivos propostos.

Em suma, a construção do estudo se dá, inicialmente, a partir do cálculo dos coeficientes de Rayleigh, utilizando-se da análise modal e seus respectivos métodos associados, isto é, método de Jacobi e Iteração de subespaços, o que

permitirá a construção da matriz de amortecimento utilizada nas equações do movimento. Por fim, utilizam-se os resultados obtidos das respostas nas análises transientes para se avaliar a influência imposta pela consideração do amortecimento nas equações.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em 5 capítulos, onde:

No capítulo 1, estão apresentados os objetivos, justificativa e metodologia, necessariamente nesta ordem, tomados como alicerce para a construção desta dissertação.

No capítulo 2 encontra-se a fundamentação teórica, onde foram levantadas bibliografias referentes aos métodos numéricos que permitirão a construção da base para a implementação dos algoritmos referentes às análises propostas neste texto, além da teoria a respeito do fenômeno de amortecimento.

As formulações matemáticas, referentes ao método dos elementos finitos, aplicadas e o modelo constituído pelo carregamento de impulso, foram construídos, ambos, no capítulo 3.

O capítulo 4 traz a organização dos algoritmos e toda a implementação computacional dos métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Finalmente, encontra-se no capítulo 5 as análises realizadas com o objetivo de se avaliar as respostas no domínio do tempo para um conjunto de problemas amortecidos e não amortecidos.

O capítulo 6 traz uma conclusão sobre as análises realizadas anteriormente.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Os conceitos necessários para o embasamento dos estudos e implementações realizadas neste trabalho, fundamentam-se nos textos a seguir, contudo, a busca por bibliografia mostrou uma escassez de estudos no que diz respeito às respostas de estruturas histereticamente amortecidas, quando excitadas por cargas impulsivas. Por outro lado, existem um número, ainda que pequeno, de autores que afirmam, embora não demonstrem o porquê, que a parcela das forças relativas ao amortecimento é desnecessária nas equações do movimento, sendo, na maioria das vezes, não consideradas nos cálculos. Assim, uma avaliação quantificada desta parcela é um dos objetos de estudo deste trabalho, o que justifica uma fundamentação teórica discriminada em temas como análise modal e seus métodos de solução, identificação do amortecimento, integração numérica das equações do movimento ao longo do tempo e suas não linearidades, todos abordados no presente capítulo.

2.1 Análise Modal de Estruturas

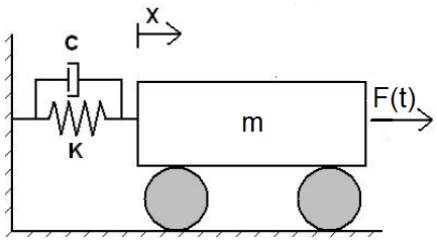
> O problema de autovalor de operadores lineares, é de intensa importância para todos os problemas de vibração em engenharia e física, seja vibração de corpos elásticos, aerodinâmica, estabilidade, atomística ou vibração molecular (LANCZOS, 1950).

A análise modal de estruturas é uma ferramenta das mais utilizadas pela comunidade de engenharia na investigação de características vibratórias, isto é, consiste em uma metodologia para a determinação dos modos normais e frequências naturais de um determinado sistema estrutural. Sua versatilidade permite às informações, obtidas nestes tipos de análises, serem utilizadas, entre outras aplicações, em favor da determinação dos parâmetros referentes

ao amortecimento do sistema, permitindo uma adequada concepção da matriz de amortecimento presente na equação do movimento da estrutura. É neste contexto que se encontra a necessidade de se entender os mecanismos de solução, e suas peculiaridades, dos sistemas de equações governamentais construídos sob a forma do problema de autovalor.

Para um melhor entendimento, considera-se um sistema mecânico amortecido excitado por uma força qualquer:

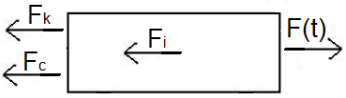
Figura 2.1-1 – Sistema massa-mola amortecido



Onde *c*, *k* e *m* representam os elementos de amortecimento, rigidez e inércia, respectivamente. E *F(t)* representa a força excitadora variável no tempo.

O diagrama de corpo livre do sistema da Figura 2.1-1 pode ser representado por:

Figura 2.1-2 - Diagrama de corpo livre do sistema massa mola



A soma das forças atuantes no corpo m é dada por:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Ou,

$$F_i + F_c + F_K = F(t)$$

Ou ainda,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Equação 2.1-1

Admitindo um problema com F(t) = 0, e uma perturbação inicial é promovida no sistema da Figura 2.1-1, a equação é reescrita na forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Equação 2.1-2

Além disso, o sistema é não amortecido, uma vez que o amortecimento é o parâmetro a ser determinado pelos processos posteriormente estudados.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Equação 2.1-3

Usando uma possível solução sendo:

$$x_p(x) = X_0 \cos(\omega t)$$

Equação 2.1-4

E aplicando na equação do movimento, fica:

$$-mX_0\omega^2 \cos(\omega t) + kX_0 \cos(\omega t) = 0$$

$$[-m\omega^2 X_0 + kX_0] \cos(\omega t) = 0$$

Equação 2.1-5

A solução não trivial é dada por:

$$[-m\omega^2 X_0 + kX_0] = 0$$

Ou,

$$m\omega^2 X_0 = kX_0$$

Expandindo esta equação para um sistema de vários graus de liberdade, a equação de equilíbrio é expressa na forma:

$$[M]\omega^2 \boldsymbol{X_0} = [K]\boldsymbol{X_0}$$

Que manipulada na forma

$$[K]^{-1}[M]\boldsymbol{X_0} = \lambda \boldsymbol{X_0}$$

Leva a:

$$[D]\boldsymbol{X_0} = \lambda \boldsymbol{X_0}$$

Equação 2.1-6

Com;

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Sendo λ o autovalor da transformação e ω a frequência natural.

Onde, D é um operador linear e os valores de λ para soluções não nulas da equação acima são chamados autovalores de D e assumem apenas valores reais[1]. Para cada autovalor λ_0, o respectivo vetor $\boldsymbol{X_0}$ não nulo, que satisfaz a equação $[D]\boldsymbol{X_0} = \lambda_0 \boldsymbol{X_0}$, é chamado autovetor. Além disso, o conjunto das soluções da equação acima, para cada valor λ de D mais o vetor nulo, formam uma base vetorial (KREIDER, 1966). Dessa forma, podemos escrever a solução da Equação 2.1-6 como uma combinação linear dos autovetores da transformação.

A viabilidade da análise de estruturas complexas se dá no campo da análise numérica. Assim, Wilkinson, 1965 apresentou uma variedade de fatores relevantes na eficiência dos algoritmos para solução do dado problema, como é mostrado a seguir, uma vez que os autovalores e autovetores podem ser calculados através de técnicas iterativas bem definidas e eficientes, especialmente para modos em baixas frequências (COHEN e MCCALLION, 1967).

- São necessários autovalores e autovetores ou apenas autovalores.
- É requerido todo o conjunto de autovalores e/ou autovetores ou uma parcela desse número é suficiente para a análise.
- A matriz de transformação é simétrica ou não simétrica. O custo computacional pode ser reduzido consideravelmente quando a simetria está presente.
- A matriz é esparsa, possui elementos não nulos em uma banda centrada na diagonal, ou os elementos estão dispostos em todo o corpo da matriz.
- Para matrizes muito grandes, sua armazenagem na memória do computador deve ser considerara na escolha do algoritmo.
- Os resultados devem ser apresentados com uma modesta ou grande precisão.

[1] Os autovalores de uma transformação podem também assumir valores complexos, entretanto neste tipo de problema físico, a restrição assumida de valores reais é assegurada pelo teorema da álgebra linear que afirma que uma matriz real simétrica tem somente autovalores reais (KREYSZIG, 2011).

Uma estratégia muito eficiente, do ponto de vista computacional, é o uso das propriedades de cada uma das matrizes constitutivas (massa e rigidez), uma vez que o consumo de tempo neste tipo de análise é muito grande. Uma particular propriedade é a forma dessas matrizes, que, geralmente, quando oriundas da discretização de sistemas contínuos, se apresentam na forma de banda, isto é, os elementos, que se encontram em posições fora da banda, tem valores iguais a zero, ou seja, podem ser descartados da memória do computador, sem perda de informação, proporcionando uma maior capacidade de armazenamento. Além disso, essas matrizes são simétricas e semi-definidas positivas[2], dessa forma, alguns dos modos calculados representam modos de corpo rígido, que podem ser eliminados ao aplicar sobre as matrizes as condições de contorno necessárias. Outras propriedades consistem na ortogonalidade destas matrizes e a unicidade da solução da Equação 2.1-6.

Deve ser observado também que a solução não requer necessariamente que se inclua a superposição de todos os modos, pois, para muitas condições de carregamento dinâmico e determinadas formas de montagem dos elementos, é suficientemente aceitável uns poucos modos, podendo ser negligenciável a contribuição de modos em frequências mais altas (BATHE e WILSON, 1973). Portanto, o custo computacional pode ser diminuído com apenas uma restrição no número requerido de autovalores e autovetores correspondentes.

Um cuidado especial com a presença de elementos nulos na diagonal principal, da matriz de massa, deve ser tomado, e contornado através do algoritmo utilizado. Essencialmente, os métodos de solução do problema de autovalor, são baseados nestas propriedades (BATHE, 1996).

Uma preocupação no uso destes métodos, está relacionada com a estimativa da acurácia nos cálculos, na qual o sistema é requerido. Uma vez que este tipo de problema requer processos iterativos, a solução deve convergir quando alcança as tolerâncias estabelecidas, de forma que esta é medida utilizando as sucessivas aproximações dos autovalores e pelo estudo

[2] Quando [M] representa uma matriz de massas concentradas, ainda que não se aplique as condições de contorno, ela é definida positiva. (COOK, MALKUS, *et al.*, 2002)

dos elementos fora da diagonal principal, de modo que estes devem ter valor nulo, ou próximo disso (BATHE, 1996).

Em suma, a escolha da rotina é embasada primordialmente no número de operações necessárias para que se obtenha a solução, e na requisição da memória do computador. Logo, ao longo dos anos, os métodos foram melhorados com o objetivo de contornarem estes quesitos.

2.1.1 Métodos de Solução

Há uma infinidade de trabalhos acadêmicos, cujo objetivo se apoia no aprimoramento dos métodos utilizados na solução do problema de autovalor, em geral focados no aumento da taxa de convergência, e também na precisão dos resultados calculados, de modo a se tornarem cada vez mais confiáveis no uso em engenharia.

Segundo Qiant e Dhatt (1993), dentre os métodos numéricos disponíveis, os três mais utilizados pela comunidade de engenharia são: A iteração inversa, iteração por subespaços e os algoritmos baseados em métodos de Lanczos.

Neste âmbito, Lanczos, (1950) desenvolveu um método iterativo para solução de problemas de autovalor, que embora tenha sido inicialmente ignorado devido à instabilidade numérica apresentada, ao longo dos anos, este método vem sofrendo melhorias substanciais, no campo da matemática ou da computação, de modo que, entre outros autores, Weinmarten, Ramanathan e Chen, (1983) mostram o desenvolvimento de um algoritmo eficiente, adequado para computadores de pequeno porte, onde faz uso de armazenamento em '*skyline'* das matrizes de massa e rigidez, na qual resulta de um processamento eficiente de matrizes de ordem elevada. Além disso, foi melhorado ao longo dos anos seguintes e pode ser utilizado com êxito na solução de problemas de autovalor padrão (MARQUES, 1991). Embora, esse método contenha alguma deficiência devido aos erros de truncamento (BATHE, 1996), se o objetivo for encontrar, relativamente, poucos autovalores, um algoritmo baseado em transformações de Lanczos pode ser muito eficiente.

Uma análise comparativa entre diversas outras técnicas iterativas, é realizada por Bathe e Wilson, (1973), onde são avaliados os métodos '*Generalized Jacobi Iteration solution'*, '*Householder-QR-Inverse iteration Solution'*, '*Determinant Seach Solution*', mostrando particularidades de cada método, como erros, convergência, precisão e outras.

Além dos autores citados, diversos outros contribuíram fortemente para o desenvolvimento dos métodos de solução deste tipo de problema. Ao longo das últimas décadas, devido ao crescimento da capacidade de processamento dos computadores, o avanço dos métodos numéricos ocorre tanto pelo desenvolvimento matemático quanto pela otimização dos algoritmos implementados para realização dos cálculos.

Dentre os métodos avaliados, foi escolhido para esta dissertação o método de Jacobi, pois nos trabalhos supracitados foi observada a simplicidade do método em sua implementação, além da estabilidade e a convergência para valores muito próximos da solução exata, como também o fato de não necessitar do uso da condensação estática e de transformação das matrizes de massa em matrizes bandadas (BATHE, 1971). Por outro lado, quando a ordem das matrizes cresce consideravelmente, perde-se a eficiência do método, o que levou a necessidade do uso conjunto deste método com o método de iteração por subespaços, para que a redução na ordem das matrizes permita a viabilidade do método de Jacobi.

2.1.1.1 Método de Jacobi

Quanto ao método de Jacobi, embora tenha sido elaborado no século XIX, seu atual uso se apoia em melhorias desenvolvidas ao longo dos anos, pois, se por um lado o método, como originalmente proposto, se mostra infalível para qualquer matriz real simétrica, além de ser muito simples se comparado com outros métodos mais eficientes, por outro lado, para matrizes de ordem superior a 10, o algoritmo é lento (PRESS, TEUKOLSKY, *et al.*, 1992). A principal vantagem deste método é o fato das rotações de Jacobi produzirem uma diminuição sistemática dos elementos fora da diagonal, e a convergência destes para zero é garantida a cada processo de iteração (WILKINSON e REINSCH, 1971). Dentre os trabalhos recentes, podem ser

citados (DAVIDSON, 1974), (VOSS, 2007), (FREITAG e SPENCE, 2008), entre outros. Em Freitag e Spence, (2008) está apresentado um desenvolvimento de pré-condicionamento das matrizes de transformação, além dos métodos de Jacobi-Davidson e quociente de Rayleigh com iterações inexatas, e finaliza seu trabalho mostrando um estudo numérico que indica satisfatória convergência nas soluções.

O método de Jacobi consiste de sucessivas transformações ortogonais sobre uma determinada matriz, onde cada transformação estabelece uma rotação em um plano com objetivo de eliminar os elementos fora da diagonal, levando-os a aproximarem de zero a cada transformação.

Dada uma matriz A_0, as sucessivas operações lineares sobre a matriz, conhecidas como rotações de Jacobi, levam a:

$$A_k \rightarrow A_{k+1} = \boldsymbol{P}_k^T \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_k$$

Equação 2.1-7

Sendo a matriz $\boldsymbol{P}_k$ uma matriz ortogonal dada na forma

$$[\boldsymbol{P}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & & & \\ & & & \sin(\theta) & \cos(\theta) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao fim do processo o método leva a operação (aproximadamente);

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}^T A \, \boldsymbol{\Lambda}$$

Equação 2.1-8

Onde

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \ldots$$

Equação 2.1-9

Assim, têm-se a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonal, onde estão dispostos em sua diagonal principal os autovalores e o vetor $\boldsymbol{\Phi}$ ortogonal, onde estão dispostos em suas colunas os autovetores, e o ângulo de rotação é expresso por:

$$\tan 2\theta = \left(\frac{2p_{ij}}{p_{ii} - p_{jj}}\right)$$

Equação 2.1-10

Onde p_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz de transformação $[\boldsymbol{P_k}]$

O tratamento apresentado, pode ser estendido ao caso generalizado do problema de autovalor, onde este é escrito na forma:

$$[K]\{\vec{X}\}\lambda = [M]\{\vec{X}\}$$

Equação 2.1-11

Esta forma mostra-se bastante conveniente, pois inversão de matrizes grandes, mesmo que bandadas, levam a um custo computacional elevado, perdendo assim a eficiência.

Neste caso, as rotações de Jacobi são realizadas sobre cada matriz, e por fim, quando se alcança a convergência, as matrizes de rigidez ou massa, que se apresentarão na forma diagonal, são invertidas sem custo computacional adicional. Além de que a matriz de rotação $\boldsymbol{P}_k$ tem a seguinte configuração:

$$[\boldsymbol{P}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & \Theta_2 & & & & \\ & & & \Theta_1 & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & 0 \\ & 0 & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o problema generalizado, os ângulos de rotação são definidos por (BATHE, 1971):

$$\Theta_1 = -\frac{\bar{k}_{ii}^k}{x};$$

E,

$$\Theta_2 = \frac{\bar{k}_{jj}}{x}$$

Com,

$$\bar{k}_{ii}^{k} = k_{ii}^{k} m_{ij}^{k} - k_{ij}^{k} m_{ii}^{k}$$

$$\bar{k}_{jj}^{k} = k_{jj}^{k} m_{ij}^{k} - k_{ij}^{k} m_{jj}^{k}$$

$$\bar{k}^{k} = k_{ii}^{k} m_{jj}^{k} - k_{jj}^{k} m_{ii}^{k}$$

$$x = \frac{\bar{k}^{k}}{2} + sign(\bar{k}^{k}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{k}}{2}\right)^{2} + \bar{k}_{ii}^{k} \bar{k}_{jj}^{k}}$$

E as operações ocorrerão simultaneamente nas matrizes de massa e rigidez, até que ambas apresentarem-se na forma diagonal (salvo as tolerâncias).

Salienta-se os requisitos necessários para o uso deste método, e o sucesso do algoritmo, como no caso de as matrizes serem positivas, cheias ou bandadas e o determinante das sucessivas matrizes de rotação serem sempre diferentes de zero. Para isto:

$$\left(\frac{k^{k}}{2}\right)^{2} + k_{ii}^{k} k_{jj}^{k} > 0$$

Com relação a convergência, como citado anteriormente, têm-se as seguintes relações:

$$\frac{\left|\lambda_{i}^{l+1} - \lambda_{i}^{l}\right|}{\lambda_{i}^{l+1}} \leq tolerância$$

E

$$\left[\frac{\left(k_{ij}^{l+1}\right)^{2}}{k_{ii}^{l+1} k_{jj}^{l+1}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq tolerância$$

$$\left[\frac{\left(m_{ij}^{l+1}\right)^{2}}{m_{ii}^{l+1} m_{jj}^{l+1}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq tolerância$$

Sendo as matrizes simétricas, o estudo dos elementos fora da diagonal, pode ser feito para todos i, j com $i < j$.

2.1.1.2 Método de Iteração por Subespaços

O método de iteração por subespaços, cunhado por Bathe, (1971), se mostra muito adequado na busca por poucos autopares em sistemas com grande número de elementos finitos (BATHE, 1996).

Desde seu desenvolvimento original, muitas melhorias foram acrescentadas ao método, dentre eles, (WILSON e ITOH, 1983) o otimizou ao identificar falhas, quando utilizado em problemas específicos, como erros e/ou perdas de autovetores, convergência lenta quando os autovalores estão em um intervalo muito próximo, problemas de armazenamento e processamento quando o número de autovetores é grande. O problema da lenta convergência foi foco de trabalhos, como; (BATHE e RAMASWAMY, 1980), (QIANT e DHATT, 1993), (WANG e ZHOU, 1999) e (ZHAO, CHEN, *et al.*, 2007). Por fim, Bathe, (2012) traz uma revisão, com melhorias ao método, fazendo uso de técnicas de programação, mais precisamente de processamento paralelo e gerenciamento de memória.

O método abordado em 2.1.1.1, como foi mencionado, apresenta resultados com boa acurácia e estabilidade numérica, contudo o processamento das matrizes, devido ao número de transformações sobre matrizes de grandes proporções, muito comuns em problemas de cálculo estrutural, ocorre de forma muito lenta, fazendo com que o método seja, na maioria das aplicações, inviável, levando a necessidade do uso de outro método. Nesse contexto, o método de iteração por subespaços (*MIS*) mostra-se bastante eficiente, pois em geral, em uma análise modal, são requisitados um número de autovalores muito menor que o número total de autovalores da equação Equação 2.1-11.

A necessidade de um número de autovalores muito menor que os disponíveis, faz com que o método de iteração por subespaços seja muito adequado e para este problema reduzido, o método de Jacobi é utilizado para a extração dos autovalores e autovetores. O método de iteração por subespaços consiste nas seguintes etapas (BATHE, 1996):

- Definição de q vetores iniciais, onde q > p (q << número total de autovalores), sendo p o número total de autovetores requeridos para a análise.
- Uso simultâneo da iteração inversa dos q vetores e análise de Ritz para extrair a melhor aproximação dos autopares.
- Após a convergência, verificar se os autovalores e autovetores requeridos são soluções da equação, usando sequência de Sturm.

Este método apresenta vantagem de ser de fácil interpretação e implementação dos algoritmos. Seu objetivo básico é a iteração de um subespaço q-dimensional, onde para p menores autovalores, a Equação 2.1-12 é satisfeita.

$$\boldsymbol{K\Phi = M\Phi\Lambda}$$

Equação 2.1-12

Além disso, as condições de ortogonalidade devem ser satisfeitas.

$$\boldsymbol{\Phi^T K\Phi = \Lambda} \quad e \quad \boldsymbol{\Phi^T M\Phi = I}$$

As etapas para a iteração do subespaço são dadas por:

- Para $k = 1, 2, \ldots$

$$\boldsymbol{K\bar{X}_{k+1} = MX_k}$$

  - Encontrar as projeções das matrizes estruturais:

$$\boldsymbol{M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M\bar{X}_{k+1}} \quad e \quad \boldsymbol{K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T K\bar{X}_{k+1}}$$

  - Solucionar o novo problema de autovalor das projeções das matrizes:

$$\boldsymbol{K_{k+1}Q_{k+1} = M_{k+1}Q_{k+1}\Lambda_{k+1}}$$

  - Encontrar uma aproximação melhorada para os autovetores:

$$\boldsymbol{X_{k+1} = \bar{X}_{k+1}Q_{k+1}}$$

Assim, a cada iteração o vetor $\boldsymbol{X_{k+1} \rightarrow \Phi}$ **e** $\boldsymbol{\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda}$.

Os vetores de iteração inicial devem ser selecionados de modo que eles gerem um subespaço referente ao espaço das matrizes **K** e **M**. E a convergência deve ser dada de tal forma que:

$$\left[1 - \frac{\left(\lambda_i^{(k)}\right)^2}{\left(q_i^{(k)}\right)^T q_i^{(k)}}\right]^{\frac{1}{2}} < tolerância\,; i = 1, 2, \ldots, p$$

Sendo $q_i^{(k)}$o vetor da matriz Q_k correspondente ao autovalor $\lambda_i^{(k)}$.

2.2 Resposta a Carga Impulsiva

A carga impulsiva ou choque, frequentemente é de considerável importância em determinadas classes de sistemas estruturais como veículos, guindastes, indústria, construção mecânica, construção civil, balística, entre

outros. Estas cargas, com crescimento súbito, podem ser originárias de acidentes ou condições extremas de operação, e podem causar deformações permanentes inaceitáveis e eventualmente falha do material.

Griffth e Vanzant (1961), mostraram que, para cargas de mesma intensidade, uma modificação no caráter em que ocorre sua aplicação pode conduzir a solicitações significativamente maiores, o que pode constituir a presença do impulso em determinadas situações de aplicação de cargas. Este carregamento, quando na forma de um impulso, é caracterizado pelo aumento quase instantâneo no valor da carga aplicada para uma magnitude bastante elevada, embora finita, que age por um breve intervalo de tempo (HALL, AL-HASSANI e JOHNSON, 1971), como ilustrado na Figura 2.2-1 - Representação de Carga Impulsiva

.

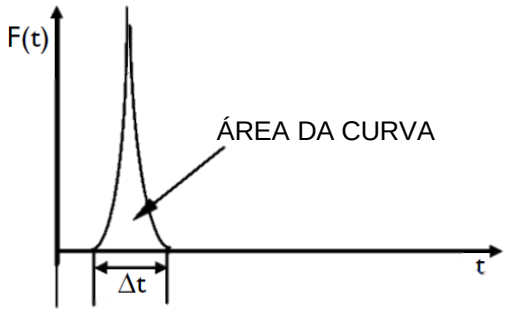
Outra característica do carregamento impulsivo é que este apresenta-se com uma duração muito menor que o período natural do sistema e sua ação sobre uma massa em repouso, acarreta em mudança brusca de sua velocidade, sem considerável deslocamento (CHOWDHURY e DASGUPTA, 2009). Com a massa em repouso, esta ganhará velocidade inicial igual a

$$\hat{F} = \int_0^{\Delta t} F(t)dt \ = mv_0$$

Dessa forma, o problema de impulso pode também ser representado como um problema específico com velocidade inicial igual v_0 com deslocamento inicial nulo. Neste caso, pode ser conseguido por diversos métodos analíticos, dentre os quais se podem citar os métodos clássicos para solução de equações diferenciais, superposição de funções simples equivalentes e a integral de Duhamel (CHOPRA, 1995).

A presença deste tipo de carregamento faz com que o amortecimento se mostre menos incisivo nas respostas obtidas quando comparado com os carregamentos periódicos ou harmônicos em intervalos próximos à excitação. Isto ocorre devido a curta duração da aplicação da carga, o que dificulta a absorção de energia da estrutura pelas forças dissipativas (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

Figura 2.2-1 - Representação de Carga Impulsiva (CHOWDHURY e DASGUPTA, 2009)



Encontra-se disponível um número elevado de trabalhos desenvolvidos a partir do estudo de respostas dinâmica em estruturas submetidas a carregamentos impulsivos. Entretanto, um número relativamente pequeno refere-se a pequenas deformações e/ou deformações elásticas. Dentre os trabalhos disponíveis, (PERZYNA, 1958) apud (NURICK e MARTIN, 1989), avaliou a influência em que o caráter da função de impulso incide na deformação final de placas, e mostrou que esta influência se faz desprezável. Todavia, os estudos de (SANKARANARAYANAN, 1966), resultaram em considerável influência na forma do pulso quando há presença de deformações plásticas. Os trabalhos, em sua maioria, mostram que os formatos dos pulsos são construídos a partir de dados empíricos, e um número reduzido é traçado analiticamente, com formatos triangulares, constantes, entre outros.

No que concerne ao campo das pequenas deformações, podem ser citados os trabalhos de (NURICK e MARTIN, 1989), onde, na primeira parte do seu trabalho, é feita uma avaliação teórica a respeito de pequenas deflexões elásticas em placas circulares. Esses autores relatam também um grande número de trabalhos com ênfase em análises de deformações com modelos de materiais plásticos, visco-elásticas e visco-plásticos, entre outros, reafirmando a relativa escassez de artigos relacionados com o estudo de pequenas deformações.

Verificou-se que, aos estudos elaborados nos últimos anos, englobaram-se abordagens como: mecânica da fratura, problema de contato, impacto de corpos em altas velocidades, modelos de materiais compósitos, cerâmicos, etc. Todos fogem do escopo desta dissertação.

2.3 Identificação do Amortecimento.

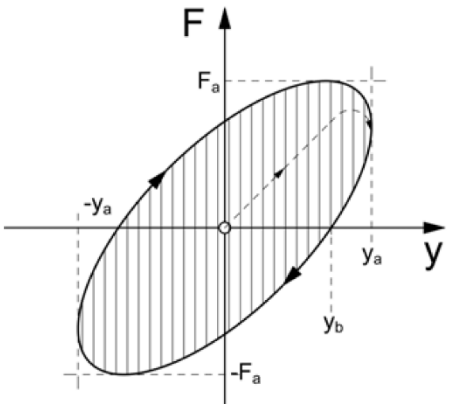
O amortecimento de materiais e sistemas estruturais é frequentemente abordado em trabalhos acadêmicos, onde o foco, constantemente, é o cálculo das respostas quando o amortecimento é adicionado às equações governamentais. Adicionalmente, com o objetivo de descrever matematicamente os padrões de amortecimento, diversos modelos físicos foram propostos, onde cita-se, por exemplo, o modelo viscoso de (RAYLEIGH, 1877), viscoelástico (CHRISTENSEN, 1971), histerético (BERT, 1973), atrito (BERGER, 2002), entre outros.

A respeito do fenômeno físico de amortecimento, este é definido como a conversão de energia mecânica vibratória em energia térmica. Pode ser acrescentado a esta definição que é matematicamente conveniente considerar que este parâmetro é proporcional à velocidade, contudo, se assim o for, implica um modelo físico de amortecimento viscoso, o que não pode ser observado em estruturas reais. Nestas, o modelo que melhor pode ser observado constitui um modelo de atrito, entretanto é matematicamente inviável se trabalhar nesse formato (JEARY, 1997). Para os metais, os mecanismos físicos fundamentais do amortecimento incluem termo-elasticidade em micro e macro escalas, viscosidade do contorno do grão, entre outros (BERT, 1973).

Com relação à presença do elemento dissipador em um determinado sistema, este pode ser tipificado em 3 classes: (1) Amortecimento do material, associado com a perda de energia ao longo de toda a estrutura através do processo de deformação. (2) Dissipação associada às juntas, ou interface de partes distintas (soldas, parafusos, etc). (3) Dissipação associada ao contato com fluido, promovendo o efeito viscoso ou perda por radiação para o fluido (WOODHOUSE, 1998). Além disso, há duas características distintas com o qual deve-se preocupar na identificação do amortecimento de uma estrutura. Primeiramente, o mecanismo como ocorre a dissipação de energia, isto é, o modelo adotado para construção da análise. Em seguida, sua distribuição ao longo da estrutura (PRADHAN e MODAK, 2012). O nível de amortecimento contido em um sistema pode ser quantificado traçando, em um gráfico, a força

versus os deslocamentos para um dado ciclo de movimento. Este processo é chamado de histerese e está representado na Figura 2.3-1 e Figura 2.3-2, com sua área representando a energia dissipada por ciclo.

Figura 2.3-1 – Diagrama de histerese para amortecimento linear



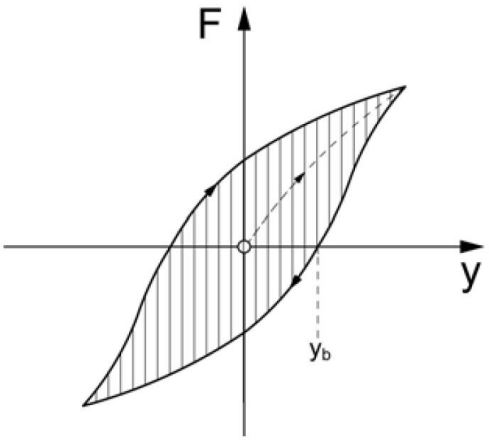


Figura 2.3-2 - Diagrama de histerese para amortecimento não linear

As referências sobre o amortecimento, em sua maioria, tratam de aplicações e desenvolvimento de métodos para identificação do amortecimento em sistemas lineares, dentre outros motivos, por apresentarem satisfatória acurácia em situações de baixos níveis de tensão e deformação, além do

relativo baixo custo computacional associado à análise linear (BERT, 1973). Dentre estes, autores podem ser citados, como:

(CRANDALL, 1970), que traz um estudo a respeito da relevância do amortecimento na modelagem matemática de sistemas vibratórios. Mostra uma avaliação entre a relação do amortecimento com frequência e amplitude do movimento. Traz ainda uma apresentação sobre a relação entre o nível de excitações e a estabilidade de sistemas mecânicos para sistemas não conservativos.

Bert (1973), por sua vez, apresentou uma discussão sobre diversos modelos matemáticos propostos para representação do amortecimento com ênfase em sistemas estruturais dinâmicos. Utiliza-se da derivação das equações do movimento, para fazer um levantamento das relações entre os diversos modelos de amortecimento em materiais homogêneos. Modelos de Kelvin-Voigt e Maxwell, além de outros, foram estudados.

(JIANG e ROGERS, 1989), de outra perspectiva, aborda um método para adequação do amortecimento proporcional a um modelo de MEF submetido a carregamento de impacto de corpos deformáveis, combinando a técnica de multiplicadores de Lagrange e função penalidade.

(JEARY, 1997) avalia a relação entre o mecanismo de fratura, associando-a ao decaimento de energia do sistema e, portanto, ao amortecimento.

(WOODHOUSE, 1998) estudou o comportamento vibracional de sistemas com amortecimento linear quando há presença de pequenos valores de amortecimento. Utilizou do baixo amortecimento na construção de expressões simples para frequências naturais amortecidas, formas modais complexas, e funções de transferência.

A respeito de trabalhos mais recentes, podem ser citados também; (ADHIKARI e WOODHOUSE, 2001a), que propuseram um método, desenvolvido baseado em funções de transferência, para identificação de amortecimento viscoso não-proporcional em sistemas vibracionais levemente amortecidos. Este trabalho foi generalizado por (ADHIKARI e WOODHOUSE, 2001b) para sistemas com amortecimento não viscoso, adequando seu desenvolvimento anterior a estes sistemas. Posteriormente continuado em

(ADHIKARI e WOODHOUSE, 2002a) e (ADHIKARI e WOODHOUSE, 2002b) onde são abordados respectivamente, métodos utilizados para a conservação da simetria na matriz de amortecimento dos modelos propostos, e o tratamento dos erros contidos nas metodologias realizadas, ambos referentes aos trabalhos anteriores.

Além disso, (PHANI e WOODHOUSE, 2007) identificaram características relacionadas a diversos métodos aplicados a sistemas lineares, disponíveis na literatura, agrupados em matriciais e modais, classificando-as de acordo com suas vantagens e deficiências.

(PRANDINA, MOTTERSHEAD e BONISOLI, 2009), por sua vez, descreveram uma revisão a respeito da performance de uma variedade de métodos de identificação de amortecimento, concentrados apenas no amortecimento viscoso linear. Concluem que o método que obteve a melhor performance é o método de inversão da matriz *receptance*.

Orban (2011), por sua vez, traz um levantamento a respeito da influência da geometria no amortecimento de estruturas, usando dados obtidos a partir de simulações numéricas e experimentais.

No que diz respeito ainda à identificação do fator de amortecimento em estruturas, inúmeros trabalhos trazem métodos para determinação do parâmetro de amortecimento de estruturas obtidos experimentalmente. Como exemplo, cita-se; (KAREEM e GURLEY, 1996) que fez um estudo a respeito da incerteza contida nos métodos de determinação do amortecimento. Avaliou diversos tipos de amortecimento, como amortecimento estrutural, hidrostático, aerodinâmico, entre outros, relacionando-os a métodos de determinação experimental, no domínio da frequência e do tempo, dentre outros, *largura de banda e decremento logarítmico*, respectivamente.

Recentemente Sarparast, Ashory, *et al.* (2014), apresentaram um método baseado em *transformadas wavelet*, onde utilizou-se destas para a determinação de frequências naturais e razões de amortecimento, e posteriormente, para extração das formas modais a partir das frequências naturais e respostas no domínio do tempo de estruturas amortecidas excitadas por uma força de impacto.

E por fim, Pradhan e Modak e Modak, (2012) e Arora (2015), apresentam métodos baseados em respostas em função da frequência, cujo objetivo é a atualização da matriz de amortecimento na equação do movimento, separadamente das matrizes de massa e rigidez.

2.3.1 Amortecimento Proporcional

A compreensão do fenômeno de amortecimento mostra-se ainda um desafio para a comunidade científica, uma vez que não pode ser identificado e previsto com grande precisão quando comparado com outros parâmetros, como frequências naturais, modos normais, etc. Este fenômeno se dá, contudo, a duas razões básicas: a) O amortecimento do material e b) A fricção das conexões ao longo da estrutura (ORBAN, 2011). Isto se agrava ainda com a complexidade de grande parte das estruturas de engenharia, além dos erros de medição presentes dos experimentos (LI e LAW, 2009).

Assim, muitos algoritmos são levados a desconsiderar as forças de amortecimento presentes no sistema, embora o algoritmo deva satisfazer a condição de confiabilidade da solução (CRISFIELD, 1997). Contudo, a presença do amortecimento histerético traz, aos cálculos de engenharia, um respeito maior à condição real da estrutura. Além disso, é muito útil na atenuação de oscilações espúrias contidas nas soluções numéricas (JIANG e ROGERS, 1989). Assim, um conjunto de métodos para uma maior eficiência na determinação deste parâmetro, baseados em análise modal, tem sido desenvolvido. Por simplicidade, o amortecimento modal é frequentemente utilizado e considerado como um amortecimento proporcional (HUANG, WANG, *et al.*, 2007). O modelo de combinação linear para amortecimento viscoso, proposto por Rayleigh, é a aproximação mais popularmente utilizada na composição da matriz de amortecimento. A respeito deste método, Caugley e O'Kelly, (1965) derivaram a condição ideal na qual o sistema de matrizes deve satisfazer para que o sistema linear viscosamente amortecido possuam modos normais clássicos.

Adhikari, (2006) propôs um modelo, baseado no amortecimento proporcional, onde a matriz de amortecimento é expressa em termos de

funções contínuas envolvendo arranjos especiais das matrizes de massa e rigidez.

Kuzmanovic, Tomljanovic e Truhar (2012), elaboraram um desenvolvimento onde dos parâmetros da definição do amortecimento proporcional e de Rayleigh são expressos explicitamente a partir da otimização de funções derivadas a partir da linearização da equação do movimento amortecido.

Uma das principais limitações do modelo proporcional à massa e à rigidez advém do fato que os fatores de amortecimento com relação à frequência de vibração não podem ser calculados com alta precisão (ADHIKARI, 2006).

Dessa forma, escrevendo o amortecimento como função linear das matrizes de massa e rigidez, tem-se:

$$[C] = f([M], [K], \alpha, \beta, \dots)$$

Equação 2.3-1

Ou;

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

Equação 2.3-2

Esse formato do amortecimento é conveniente, pois a matriz $[C]$ é ortogonalizável, isto é, pode ser transformada em uma matriz diagonal no espaço cuja base é formada pelos autovetores da Equação 2.1-11, tendo em vista que as matrizes $[M]$ e $[K]$ também possuem esta propriedade (VAZ, 2011).

Para que se obtenham os valores de α e β, o sistema linear que segue, deve ser resolvido:

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(\alpha\omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}\right)$$

Equação 2.3-3

Onde $\omega_{1,2}$ são duas frequências naturais do sistema determinado pela análise modal. Neste caso, apenas dois valores de amortecimento e frequência são considerados, entretanto o método pode ser estendido para um sistema de n equações com n valores de ξ e ω.

As relações de cada termo da Equação 2.3-1

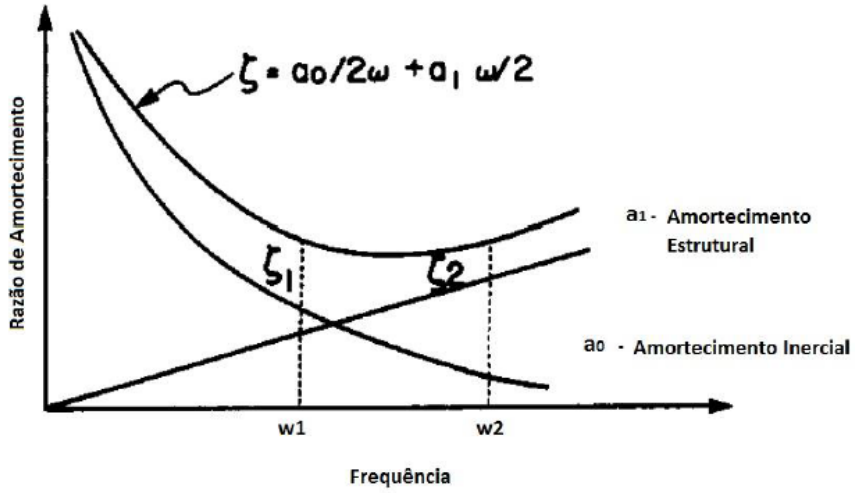
com a frequência estão representadas na Equação 2.3-4

Figura 2.3-3. Percebe-se que o amortecimento devido à matriz de massa, decresce hiperbolicamente com o aumento da frequência, enquanto o amortecimento estrutural, cresce linearmente. Este último se mostra muito eficiente na atenuação de oscilações em altas frequências, pois elimina componentes de alta frequência sem perturbação nos componentes de baixa frequência. Quando este modelo é considerado na análise (ou seja, $\alpha = 0$), o amortecimento fica[3] (JIANG e ROGERS, 1989):

$$\beta = \frac{2\xi}{\omega}$$

Equação 2.3-4

Figura 2.3-3- Amortecimento Inercial, Amortecimento Estrutural e Amortecimento proporcional. Adaptado de (JIANG e ROGERS, 1989)



A razão de amortecimento depende de muitos fatores, entre os quais podem ser citados como mais importantes: o tipo de material, amplitude das tensões, forças internas, número de ciclos, tipo de geometria, qualidade das superfícies e temperatura (ORBAN, 2011). Porém, segundo (LAZAN, 1968) apud Orban (2011), o principal fator é o nível de tensões contidas na estrutura. Em estruturas de aço rebitadas ou soldadas e estruturas de concreto armado ou protendido, ξ varia de 2% a 15%. Todavia, a definição do valor de ξ

[3] Neste caso o amortecimento é proporcional apenas, e não representa um amortecimento de Rayleigh((KUZMANOVIC, TOMLJANOVIC e TRUHAR, 2012).

rotineiramente depende ainda da experiência do engenheiro (VAZ, 2011). A aquisição de dados em laboratório pode ser utilizada para levantamento dos parâmetros. Entretanto estruturas grandes e complexas são em geral de difícil análise experimental (HUANG, WANG, *et al.*, 2007).

Na Tabela 2.3-1, estão listados os valores de amortecimento para alguns materiais (ORBAN, 2011, p. 5).

Tabela 2.3-1 - Razão de amortecimento de materiais sob condições normais de trabalho

SISTEMA	ξ
Metal (regime elástico)	< 0.01
Estrutura Metálica Contínua	0.02 a 0.04
Estrutura Metálica com Juntas	0.03 a 0.07
Alumínio / Linhas de Transmissão	0.0004
Tubulação com Pequenos Diâmetros	0.01 a 0.02
Tubulação com Grandes Diâmetros	0.02 a 0.03
Absorvedores de Choque	0.03
Borracha	0.05
Grandes Construções Durante Terremotos	0.01 a 0.05

Os valores contidos na Tabela 2.3-1 não consideram a geometria do material, ou seja, são valores estabelecidos apenas em função das propriedades do material.

Devido à imprecisão levantada anteriormente, é usual admitir-se o mesmo coeficiente de amortecimento para ambas as frequências, ou seja, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ (SILVA, 2009). Neste caso, manipulando a Equação 2.3-3

:

$$\alpha = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_2} \quad e \quad \beta = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

Equação 2.3-5

Na utilização do amortecimento proporcional, recomenda-se que ω_1 seja a frequência fundamental do sistema e ω_2 esteja entre esta e a mais alta

frequência, cujo modo contribui significativamente em sua resposta dinâmica (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

De acordo Bathe, (1996) com Outra desvantagem do amortecimento de Rayleigh consiste no fato de que modos relacionados com autovalores mais altos são desprezados e, em geral, estes modos possuem uma maior razão de amortecimento. Além do mais, em muitas análises a consideração de amortecimento proporcional é adequada, contudo, se a análise constitui de uma variação muito grande das propriedades dos materiais, então, um amortecimento não proporcional é mais apropriado (BATHE, 1996).

2.4 Não Linearidade Geométrica

O comportamento não linear em sólidos pode ocorrer de duas formas: não linearidade das relações constitutivas do material e não linearidades geométricas. A forma mais simples da não linearidade do material ocorre quando a tensão não é linearmente proporcional à deformação (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000). A não linearidade geométrica surge devido a alteração na geometria em função do processo de deformação sofrida pelo corpo ao ser solicitado. Pode ocorrer devido a grandes deformações, grandes deslocamentos ou rotações, ou a ambos (SILVA, 2009).

Em análise dinâmica, com não linearidades que envolvam grandes deslocamentos e/ou grandes deformações, além de não linearidades físicas no comportamento do material, há a necessidade de se fazer uso de técnicas incrementais para solução das equações do movimento (BATHE, RAMM e WILSON, 1975). A vantagem do tratamento incremental resulta da simplicidade e generalidade com que as equações são escritas na forma matricial, de tal modo que tornam-se computacionalmente viáveis (HIBBIT, MARCAL e RICE, 1970). Entretanto, uma formulação e montagem de matrizes em análises não linear leva a um custo computacional elevado (GUMMADI e PALAZOTTO, 1997).

2.4.1 Descrição do Movimento

Se há a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos ou deformações na estrutura, então há a necessidade de distinguir entre a configuração de referência, onde é conhecido a configuração indeformada, e a configuração deformada ou atual, após a aplicação da carga (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000). Duas abordagens diferentes se mostram mais comumente utilizadas na formulação das equações não lineares. A primeira, chamada Euleriana, onde as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas em uma base móvel e que se atualiza a cada passo no processo de solução do sistema. Na formulação Euleriana, as variáveis desconhecidas são medidas com relação ao estado futuro, e são comumente utilizadas em aplicações presentes na mecânica dos fluidos (GUMMADI e PALAZOTTO, 1997). A segunda, na qual é geralmente chamada de formulação Lagrangeana, todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas a um sistema estático, baseado na configuração inicial do sistema (BATHE, RAMM e WILSON, 1975). Esta última possui a vantagem de ser numericamente implementada mais facilmente (GUMMADI e PALAZOTTO, 1997).

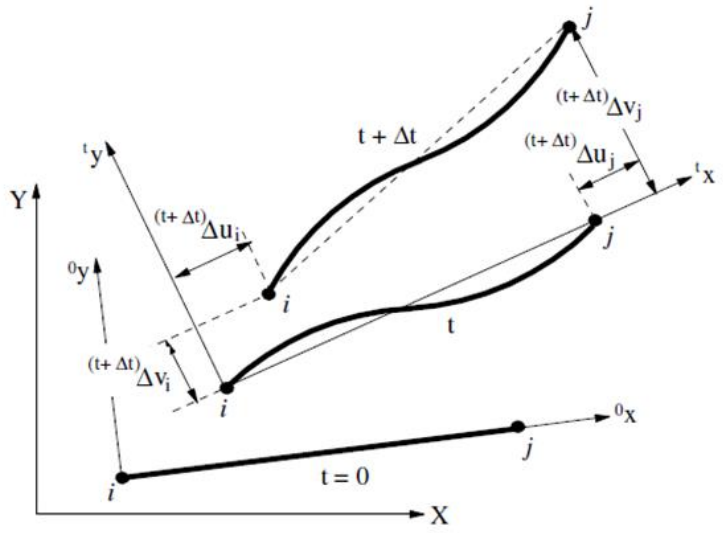
Em ambas as formulações, baseadas nos princípios da mecânica do contínuo, onde todos os efeitos não lineares são levados em conta, o mesmo resultado deverá ser obtido (BATHE, RAMM e WILSON, 1975). De acordo com (STRICKLIN, VON RIESEMANN, *et al.*, 1972), entretanto, o referencial Lagrangeano se mostra mais geral e, computacionalmente, mais eficiente.

Descrição Lagrangeana Atualizada

Um maior número de formulações de elementos finitos encontrado na literatura, para mecânica dos sólidos, é baseado nos referenciais lagrangeanos. Ainda com relação a estes referenciais, há duas possíveis abordagens, o lagrangeano atualizado, que, como ilustrado na Figura 2.4-1, tendo seu referencial sempre atualizado com relação à última configuração de equilíbrio calculada no tempo t[4] (SILVA, 2009).

[4] t representa um tempo qualquer ao longo do movimento de um corpo. Este procedimento será abordado com maior profundidade no próximo capítulo.

Figura 2.4-1 - Referencial Lagrangeano Atualizado fonte: (SILVA, 2009)

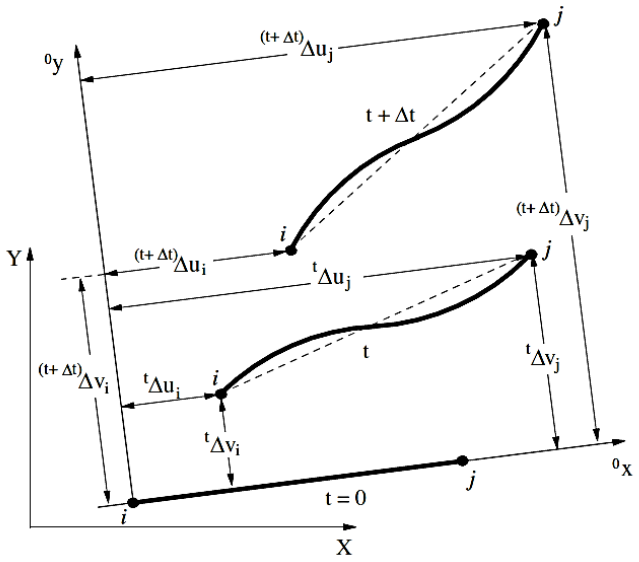


Na Figura 2.4-1 está representada a transformação ocorrida pelo sistema cartesiano, sendo levado até a configuração no tempo t, ou seja, até o equilíbrio ter sido alcançado para o último incremento de tempo. Uma vantagem da formulação atualizada é que muitos modelos constitutivos, são apresentados sob a forma incremental de tensão e deformação, de tal modo que seja numericamente mais fácil de ser aplicado (VANLUCHENE , LEE e MEYERS, 1986).

Descrição Lagrangeana Total

Na segunda abordagem, *Lagrangeana Total*, todas as variáveis estáticas e cinemáticas têm como referência, a configuração inicial do sistema, isto é, as novas configurações de equilíbrio, definidas em cada incremento de tempo, são escritas com base na configuração no tempo t = 0, ou seja, na configuração indeformada (CRISFIELD, 1991), como na Figura 2.4-2.

Figura 2.4-2 – Referencial Lagrangeano Total (SILVA, 2009)



O lagrangeano total é apropriado para grandes rotações e pequenas deformações, e sob estas condições pode ser utilizado em problemas de elasto-plasticidade. Pode também ser usado com grandes deformações elásticas, como ocorrem em borrachas, se um modelo adequado de material hiper-elástico é usado (CRISFIELD, 1991). Além disso, esta formulação requer um número maior de cálculos para as deformações e deslocamentos. Contudo uma grande parte destes cálculos é realizada no início da análise, e então salva para ser utilizada posteriormente, no fim da análise. Porém, pode ser mostrado que é mais eficiente recalcular estas variáveis que armazená-las para um uso futuro (VANLUCHENE , LEE e MEYERS, 1986).

Se utilizado em sua forma pura, o método Lagrangeano atualizado deve levar à mesma solução que o Lagrangeano total. Entretanto, para se obter o máximo no ganho de eficiência computacional, usa-se de aproximações (CRISFIELD, 1991).

O método utilizado no desenvolvimento deste trabalho é o Lagrangeano total.

2.4.2 Solução de Equações Não Lineares

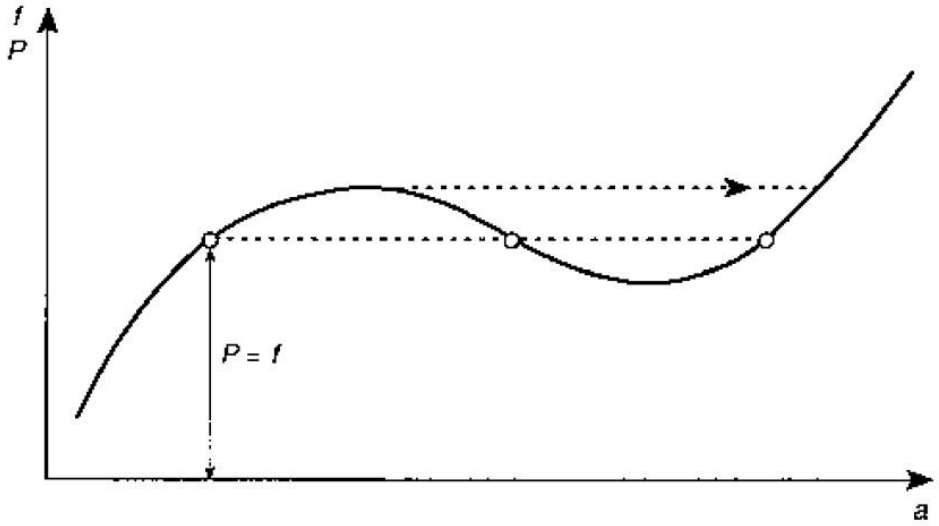
Uma equação não linear pode ser representada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\Psi}(a) = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{P}(a) = 0$$

Equação 2.4-1

Ou, graficamente:

Figura 2.4-3 - Solução de uma equação não linear. Adaptado de (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000)



Onde existem n valores possíveis de a que a satisfaçam. Assim, a solução encontrada pode não ser necessariamente a correta, do ponto de vista físico. Conhecimento a respeito do fenômeno físico, e uso de técnicas incrementais são essenciais para o sucesso na determinação de uma solução coerente.

Dessa forma, a Equação 2.4-1

deve ser formulada da seguinte maneira (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000):

$$\boldsymbol{\Psi}_{n+1} = \boldsymbol{\Psi}(\mathrm{a_{n+1}}) = \boldsymbol{f}_{n+1} - \boldsymbol{P}(\mathrm{a_{n+1}}) = 0$$

Equação 2.4-2

De tal modo que na solução;

$$a = a_n$$
$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{n}} = 0$$
$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_n$$

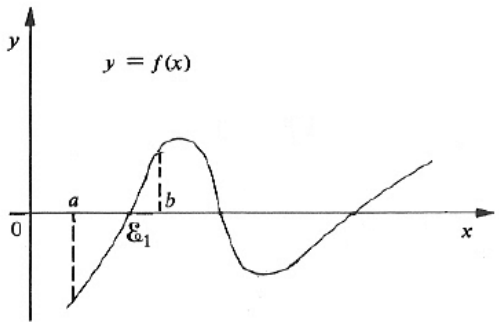
Na literatura, muitos métodos são encontrados, muitos dos quais vêm sendo melhorados com objetivo de aumentar sua eficiência nos cálculos. Dentre eles, podem ser citados o método de Newton-Raphson e suas variantes.

O método de Newton-Raphson é o método mais robusto e largamente utilizado na solução de equações não lineares. É muito eficiente, apresentando uma razão de convergência assintótica quadrática, embora apresente relativo alto custo computacional.

Pode-se entender o método da seguinte forma (BARROSO, BARROSO, *et al.*, 1987):

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e ε seu único zero neste intervalo. As derivadas $f'(x)$ (com $f'(x) \neq 0$) e $f''(x)$ devem ser também contínuas. Encontra-se uma aproximação x_n para a raiz ε e é feita uma aproximação utilizando série de Taylor.

Figura 2.4-4 – Intervalo definido entre a e b.



$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$f(x_{k+1}) = 0 = f(x_k) + f'(x)(x_{k+1} - x)$$

$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x \quad ou \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \; ; \; com\, k = \; 0, 1, 2, \ldots$$

Onde x_{k+1} é uma aproximação de ε.

Utilizando-se deste método, exprimindo-o em termos adequados para o processo incremental de solução de um sistema de equações não lineares do longo do tempo, fica:

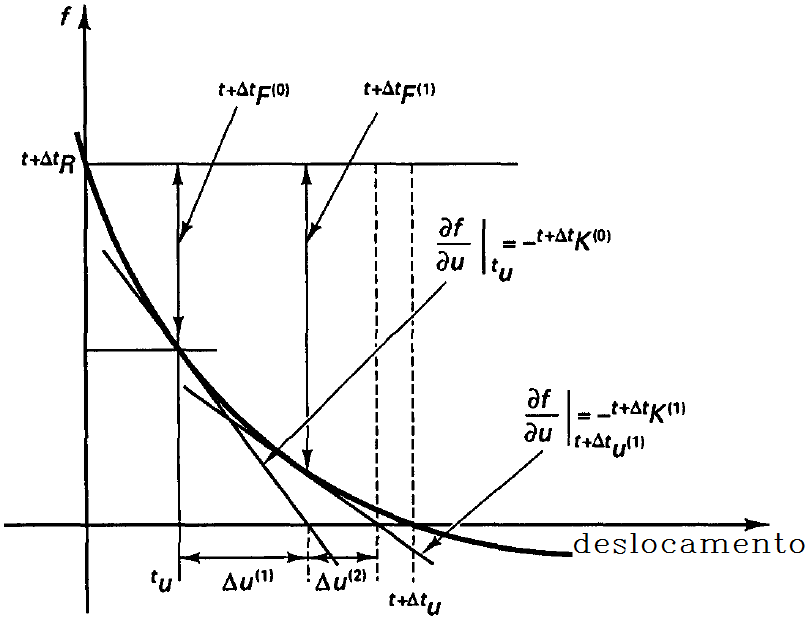
$$\boldsymbol{\Psi}\left(a_{n+1}^{i+1}\right) \approx \boldsymbol{\Psi}\left(a_{n+1}^{i}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)^{i}_{n+1} da_n^i = 0$$

Equação 2.4-3

Sendo que i indica a iteração na definição da solução dentro do incremento, enquanto que n representa o passo referente ao processo incremental.

O procedimento referente ao método de Newton-Raphson pode ser graficamente representado como na figura abaixo

Figura 2.4-5 – Processo de iteração do método de Newton-Raphson. Fonte: (BATHE, 1996)



Nesta imagem está representado o método de Newton-Raphson, utilizado na busca pela solução de uma relação não linear entre um carregamento f e o deslocamento representado por u. Na imagem, os índices superiores, entre parênteses, à direita identificam o número da iteração realizada até a aproximação conseguida.

O critério de convergência utilizado envolve a norma do incremento $\left|\left|da_n^i\right|\right|$ e/ou a norma do resíduo $\left|\left|\Psi_{\mathrm{n+1}}^{i}\right|\right|$. Recomenda-se que a tolerância seja metade da precisão da máquina utilizada na análise, assim se a precisão da máquina for 16 dígitos,$\varepsilon = 10^{-8}$ (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000). Mais precisamente, pode ser escrito como;

$$\left|\left|\Psi_{n+1}^{i}\right|\right| \leq \varepsilon\left|\left|\Psi_{n+1}^{1}\right|\right|$$

Eq. 2.4-1

2.5 Resposta no Domínio do Tempo

Em essência, a integração direta se baseia em duas ideias básicas. A primeira refere-se ao fato de se determinar o equilíbrio estático em cada incremento de tempo, com a inclusão dos efeitos de inercia e amortecimento, de forma que a não linearidade geométrica deve ser solucionada para cada um destes incrementos (CRISFIELD, 1997). A segunda, refere-se ao fato de se admitir uma variação para o deslocamento, velocidade e aceleração ao longo do intervalo de tempo utilizado no processo incremental. Ao padrão de variação estabelecido para essas variáveis, estão associadas características como acurácia, estabilidade numérica, e custo da análise, relacionadas ao método utilizado (BATHE, 1996). Além disso, a preocupação com relação aos métodos de integração aplicados a sistemas dinâmicos lineares é direcionada à acurácia dos resultados, pois estes têm sua estabilidade facilmente satisfeitas, contudo, em sistemas dinâmicos não lineares, há a necessidade de se preocupar também com a estabilidade numérica do algoritmo, uma vez que estas frequentemente são perdidas em sistemas não lineares (KUHL e CRISFIELD, 1999).

Muitas estratégias de integração no tempo, podem ser utilizadas para atualização de velocidades e acelerações, sendo o método de Newmark (NEWMARK, 1959), um dos mais populares. Neste, a velocidade e o deslocamento são atualizados respectivamente na forma:

$$^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^{t}\dot{u} + \left[(1-\gamma)\ {}^{t}\ddot{u} + \gamma\, {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\right]\Delta t$$

Equação 2.5-1

$$^{t+\Delta t}u = {}^{t}u + {}^{t}\dot{u}\Delta t + \left[(1-2\beta)\ {}^{t}\ddot{u} + 2\beta\, {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\right]\frac{\Delta t^2}{2}$$

Equação 2.5-2

Onde γ e β são as constantes de Newmark e Δt o incremento de tempo, e estão associados diretamente com a acurácia, convergência e estabilidade da integração. De acordo com (HILBER, HUGHES e TAYLOR, 1977) o método é considerado incondicionalmente estável para α contido num intervalo definido por:

$$\gamma = \frac{(1-2\alpha)}{2}$$

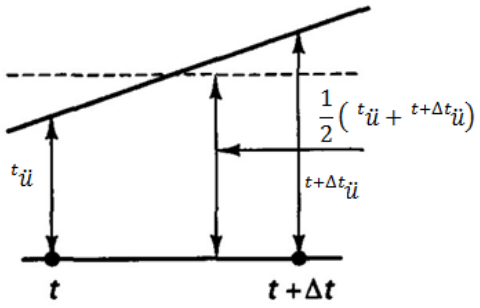
$$\delta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$$

$$\mu = \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$$

Equação 2.5-3

Para a situação em que $\mu = 0$, ou seja, $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\delta = \frac{1}{4}$, a variação linear da aceleração pode ser ilustrada na imagem abaixo.

Figura 2.5-1 – Aceleração no intervalo de tempo. Adaptado de (BATHE, 1996)

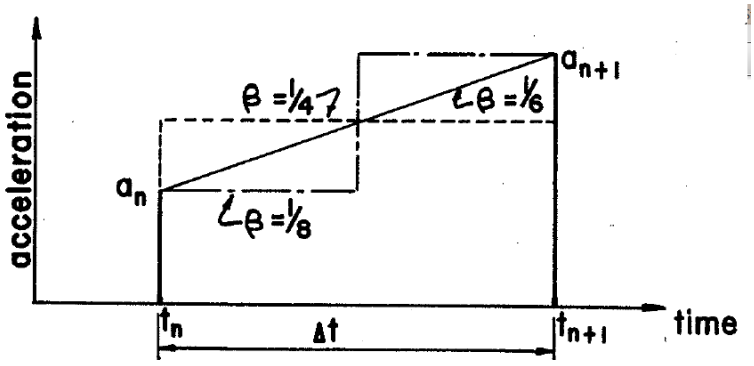


A respeito da escolha dos parâmetros do método, é importante observar que a menos que γ seja 1/2, um amortecimento espúrio é introduzido proporcional à quantidade (γ - 1/2). Se γ é zero, o amortecimento é negativo, promovendo uma autoexcitação, inexistente no sistema físico, sendo portanto

apenas um erro do procedimento numérico. Similarmente, se γ é maior que 1/2, amortecimento positivo é introduzido nas respostas calculadas.

δ, por outro lado, corresponde ao comportamento adotado na variação da aceleração dentro do passo de tempo definido para o método. Na Figura 2.5-2 três possíveis valores estão representados. (NEWMARK, 1959).

Figura 2.5-2 Comportamento da aceleração dentro do incremento de tempo, em função de beta. Adaptado de (NEWMARK, 1959).



A aplicação do procedimento, a menos que $\delta = 0$, se dá da seguinte forma (NEWMARK, 1959):

i. Assumir o valor da aceleração de cada massa no fim do incremento de tempo.
ii. Calcular a velocidade e o deslocamento de cada massa no fim do intervalor utilizando a Equação 2.5-1 e a Equação 2.5-2.
iii. Para o cálculo dos deslocamentos no fim do incremento, calcular força de resistência no qual é requerido para equilibrar a estrutura na configuração deformada.
iv. A partir da aplicação da força externa e força resistiva, recalcular o valor da aceleração ao fim do incremento.
v. Comparar os valores de aceleração no fim do incremento. Caso seja diferente, deverá ser realizado novamente o procedimento, sendo recomendado utilizar a aceleração calculada no passo iv.

A taxa de convergência da aceleração dentro do intervalo, é função do tamanho do incremento de tempo estabelecido.

A equação de equilíbrio dinâmico a ser satisfeita no fim do incremento, pode ser expresso por:

$$\boldsymbol{M}^{t+\Delta t}\ddot{u} + \boldsymbol{C}^{t+\Delta t}\dot{u} + \boldsymbol{K}^{t+\Delta t}u = \boldsymbol{F}$$

Equação 2.5-4

Inserindo a Equação 2.5-1 e Equação 2.5-2, a Equação 2.5-4, e manipulando-a matematicamente,

$$\left[\frac{1}{\delta\Delta \mathrm{t}^2}\boldsymbol{M} + \frac{\gamma}{\delta\Delta t}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right]^{t+\Delta t}u =$$
$$= \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}\left(\frac{1}{\delta\Delta t^2}\ {}^{t}u + \frac{1}{\delta\Delta t}\ {}^{t}\dot{u} + \left(\frac{1}{2\delta} - 1\right)\ {}^{t}\ddot{u}\right)$$
$$+ \boldsymbol{C}\left(\frac{\gamma}{\delta\Delta t}\ {}^{t}u + \left(\frac{\gamma}{\delta} - 1\right)\ {}^{t}\dot{u} + \left(\frac{\gamma}{\delta} - 2\right)\frac{\Delta t}{2}\ {}^{t}\ddot{u}\ \right)$$

Equação 2.5-5

Tem-se uma relação para a definição de ${}^{t+\Delta t}u$.

Capítulo 3

Formulações Matemáticas

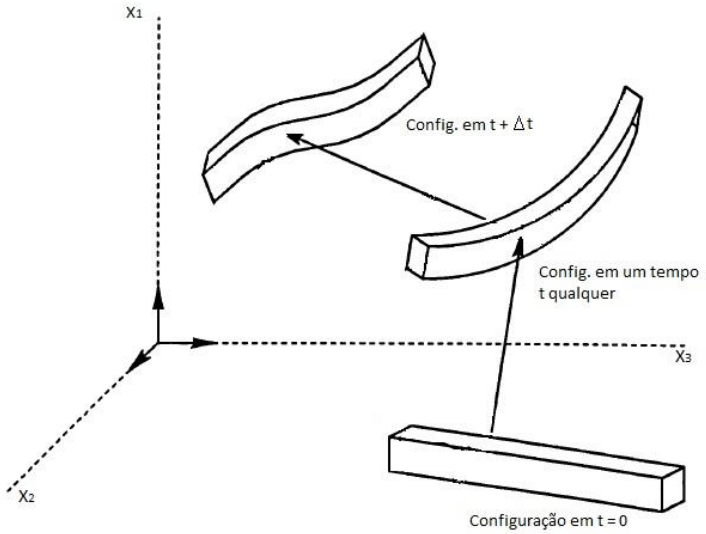
3.1 Formulação Generalizada pelo PTV.

Pelas razões as quais foram explanadas anteriormente, o princípio dos trabalhos virtuais (*PTV*), com referência Lagrangeana total, é utilizado para a formulação matemática do elemento finito neste trabalho.

O desenvolvimento a seguir, é baseado em (BATHE, RAMM e WILSON, 1975), (CRISFIELD, 1991) e (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000).

Inicialmente considera-se o corpo em movimento ao longo das coordenadas espaciais $x_1; x_2\ e\ x_3$ durante um intervalo de tempo, como na Figura 3.1-1:

Figura 3.1-1 – Descrição do movimento do corpo ao longo das coordenadas X_1, X_2 e X_3, ao longo do intervalo 0 até t + **Δ**t. Adaptado de (JELENIC e CRISFIELD, 1999).



É considerado que as configurações de equilíbrio tempo t = 0 até um tempo t são conhecidas. Deseja-se então, determinar a configuração em um tempo $t + \Delta t$, de tal modo que as forças aplicadas, as tensões e deformações, sejam escritas em uma referência conhecida.

Durante o movimento, as variáveis mudam constantemente, assim, têm-se que:

${}^{0}\rho,\ {}^{t}\rho, {}^{t+\Delta t}\rho$, é a densidade volumétrica,

${}^{0}A,\ {}^{t}A, {}^{t+\Delta t}A$, é a área superficial do corpo. E,

${}^{0}V,\ {}^{t}V, {}^{t+\Delta t}V$, é o volume do corpo, ambos em t = 0, t e t + Δt, respectivamente.

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais;

$$W_{int}^{\delta} - W_{ext}^{\delta} = 0$$

Eq. 3.1-1

Sabendo que as variáveis da Eq. 3.1-1 devem ser referenciadas na configuração inicial do corpo, e também que, a medida de tensão que está conjugada ao tensor de Green-Lagrange é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, pode-se reescrevê-las na forma:

$$\int_{{}^{0}V} {}_{0}^{t+\Delta t}S_{ij}\ \delta\, {}_{0}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}\ \ {}^{0}dV = \ {}^{t+\Delta t}R$$

Eq. 3.1-2

Com;

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{{}^{0}A} {}_{0}^{t+\Delta t}t_k\ \delta\, {}_{0}^{t+\Delta t}u_k\ \ {}^{0}dA + \int_{{}^{0}V} {}^{0}\rho\ {}_{0}^{t+\Delta t}f_k\ \delta u_k\ \ {}^{0}dV$$

Eq. 3.1-3

Com t_k e f_k sendo as forças de superfície e corpo respectivamente.

Sendo ${}_{0}^{t+\Delta t}S_{ij}$ e ${}_{0}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ respectivamente as coordenadas cartesianas do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, e do tensor das deformações de Green-Lagrange.

Uma vez que ${}_{0}^{t+\Delta t}S_{ij}$ e ${}_{0}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ são desconhecidos, utiliza-se da seguinte decomposição incremental para o alcance da solução:

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij} = {}_{0}S_{ij} + {}^{t}_{0}S_{ij} $$

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}\epsilon_{ij} = {}_{0}\epsilon_{ij} + {}^{t}_{0}\epsilon_{ij} $$

Com a variação de ${}_{0}\epsilon_{ij}$ na forma:

$$ {}_{0}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{i,j} + {}_{0}u_{j,i} \right) + \frac{1}{2}\left({}^{t}_{0}u_{k,i}\ {}_{0}u_{k,j} + {}^{t}_{0}u_{k,j}\ {}_{0}u_{k,i} \right) + \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{k,i}\ {}_{0}u_{k,j} \right) $$

Ou,

$$ {}_{0}\epsilon_{ij} = {}_{0}e_{ij} + {}_{0}\eta_{ij} $$

Com u_i sendo o deslocamento na direção x_i.

Sendo ${}_{0}\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{k,i}\ {}_{0}u_{k,j} \right)$ o termo não linear.

Com a relação;

$$ {}_{0}S_{ij} = {}_{0}C_{ijrs}\ {}_{0}\epsilon_{rs} $$

Eq. 3.1-4

A Eq. 3.1-2 é reescrita na forma:

$$ \int_{{}_{0}V} {}_{0}C_{ijrs}\ {}_{0}\epsilon_{ij}\delta\ {}_{0}\epsilon_{ij}\ {}^{0}dV + \int_{{}_{0}V} {}_{0}S_{ij}\delta\ {}_{0}\eta_{ij}\ {}^{0}dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_{0}V} {}_{0}S_{ij}\delta\ {}_{0}e_{ij}\ {}^{0}dV $$

Eq. 3.1-5

Que representa uma equação não-linear para os deslocamentos u_i, assim, sua solução não pode ser calculada diretamente, dessa forma, emprega-se a aproximação de ${}_{0}\epsilon = {}_{0}e$ e a relação entre tensão e deformação, de acordo com a Eq. 3.1-6, fica:

$$ {}_{0}S_{ij} = {}_{0}C_{ijrs}\ {}_{0}e_{rs} $$

Eq. 3.1-6

O que leva a;

$$ \int_{{}_{0}V} {}_{0}C_{ijrs}\ {}_{0}e_{ij}\delta\ {}_{0}e_{ij}\ {}^{0}dV + \int_{{}_{0}V} {}_{0}S_{ij}\delta\ {}_{0}\eta_{ij}\ {}^{0}dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_{0}V} {}_{0}S_{ij}\delta\ {}_{0}e_{ij}\ {}^{0}dV $$

Eq. 3.1-7

Utilizando das funções isoparamétricas para interpolação dos deslocamentos e coordenadas cartesianas.

$$ {}_0u_i(\xi_j, t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(\xi_j)\overline{u_i}^k(t) $$

$$ {}_0x_i(\xi_j, t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(\xi_j)\overline{x_i}^k(t) $$

E com:

$$ \boldsymbol{\epsilon = Bu} $$

Sendo $\boldsymbol{B}$ a matriz de transformação deslocamento-deformação.

A equação é escrita na forma:

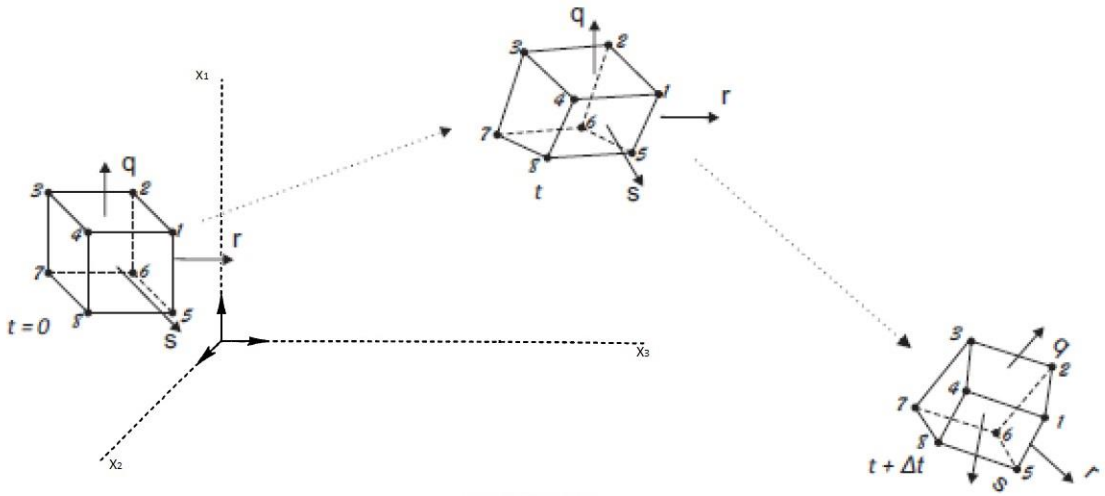
$$ \int_{{}^0V} {}_0^t\boldsymbol{B_L^T C}\,{}_0^t\boldsymbol{B_L}\ {}^0dV + \int_{{}^0V} {}_0^t\boldsymbol{B_{NL}^T S}\,{}_0^t\boldsymbol{B_{NL}}\ {}^0dV = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - \int_{{}^0V} {}_0^t\boldsymbol{B_{NL}^T}\,{}^t\widehat{\boldsymbol{S}}\ {}^0dV $$

Sendo esta, a equação não linear incremental dos deslocamentos, escrita com base nas funções de interpolação para o MEF.

3.2 Apresentação do Elemento Finito.

Neste trabalho, as análises são feitas com uso do elemento finito isoparamétrico sólido de 8 nós com formulação *Lagrangeana Total* e sua formulação completa está detalhada na página 93.

Figura 3.2-1 - Movimento do EF ao longo do tempo.



Dado o elemento finito da Figura 3.2-1, seus deslocamentos são interpolados pelas funções lagrangeanas escritas na forma:

$$h_k = \frac{1}{8}(1 + r_i r)(1 + s_i s)(1 + t_i t)$$

Considerando uma formulação isoparamétrica,

$$^{t}x_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \ {}^{t}x_i^k$$

E

$$^{t}u_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \ {}^{t}u_i^k$$

Sendo t um tempo qualquer durante o movimento.

Sabendo que o tensor das deformações de Green-Lagrange é definido por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^{t}_0u_{k,i} \ {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} \ {}^{t}_0u_{k,j} \right) + \frac{1}{2}\left({}_0u_{k,i} \ {}_0u_{k,j} \right)$$

E tendo como tensor conjugado de medida das tensões, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, para uma análise hiper-elástica:

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} \ {}_0\epsilon_{rs}$$

Podemos definir as matrizes de rigidez, linear e não linear respectivamente da seguinte forma:

$$\boldsymbol{K_L} = \iiint_{-1}^{1} {}^{t}_0\boldsymbol{B}_L^T \boldsymbol{C} \, {}^{t}_0\boldsymbol{B}_L j \ dr \ ds \ dt$$

$$\boldsymbol{K}_{NL} = \iiint_{-1}^{1} {}^{t}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{B}_{NL}^T \, {}^{t}_0\boldsymbol{S} \, {}^{t}_0\boldsymbol{B}_{NL} j \ dr \ ds \ dt$$

A força devido a tensão interna do elemento é dada por:

$${}^{t}_0\boldsymbol{F} = \iiint_{\boldsymbol{-1}}^{\boldsymbol{1}} {}^{t}_0\boldsymbol{B}_L^T \, {}^{t}_0\widehat{\boldsymbol{S}} j \ dr \ ds \ dt$$

Sendo o termo

$$dV = jdrdsdt$$

A variação volumétrica do elemento, com j sendo o determinante da transformação de coordenadas.

A matriz de massa do elemento pode ser descrita como uma combinação linear de uma matriz de massas concentradas, dada na forma:

$$\boldsymbol{M}^{l} = j\frac{\rho}{8}\boldsymbol{I}\int_{V} dr\ ds\ dt$$

Somada à matriz de massa consistente dada pela forma:

$$\boldsymbol{M}^{c} = \rho\iiint_{-1}^{1}[H]^{T}[H]\ j\ dr\ ds\ dt$$

Com $[H]$ a matriz de funções de interpolação.

Resultando em:

$$\boldsymbol{M} = a_1\boldsymbol{M}^{c} + a_2\boldsymbol{M}^{l}$$

Sendo a_1 e a_2 os coeficientes de ponderação.

A matriz de amortecimento deve ser construída em função da análise, para o modelo de MEF apresentado neste trabalho, pode ser implementada com a seguinte relação:

$$\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K}$$

Onde α e β são as constantes de Rayleigh para o amortecimento proporcional (veja item 2.3.1).

Da equação do movimento de um sistema forçado com amortecimento na forma:

$$\boldsymbol{M\ddot{u}} + \boldsymbol{C\dot{u}} + \boldsymbol{Ku} = \boldsymbol{R}$$

Manipulando-a e substituindo cada termo, fica:

$$({}_{0}^{t}\boldsymbol{K_L} + {}_{0}^{t}\boldsymbol{K_{NL}})\boldsymbol{u} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\boldsymbol{\ddot{u}} - \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\boldsymbol{\dot{u}}$$

Sendo ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R}$ o valor da força ao longo do incremento de tempo.

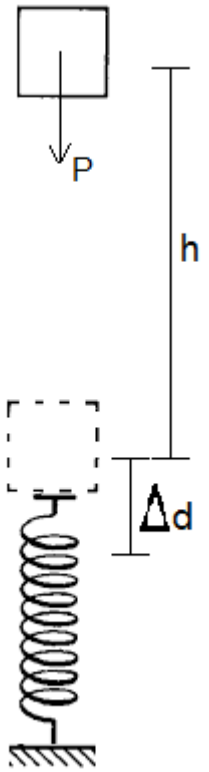
3.3 Carregamento de Impulso

Em muitos casos práticos, usa-se de aproximações para os carregamentos dinâmicos como sendo quase-estáticos ou estáticos. Contudo quando a magnitude das solicitações é elevada, como em casos de cargas de impacto, ou eventos específicos, este tratamento pode ser inadequado. No estudo realizado neste trabalho, a configuração do carregamento é considerada como um carregamento impulsivo.

Um carregamento hipotético de impulso, não periódico, para as análises deste trabalho está representado na Figura 2.1-1. O tempo de análise compreende o intervalo $[t_0, t_f]$, sendo que a amplitude atinge seu valor máximo em $t = \zeta$.

Para modelagem da forma do carregamento, é considerado um carregamento originado por um corpo rígido que cai, sob a ação da gravidade apenas, de uma altura h até a estrutura específica. Para tal, considere-se o sistema a seguir (Figura 3.3-1):

Figura 3.3-1 - Modelo de corpo em queda livre



Se é considerado que há a conservação de energia, tem-se:

$$U_P = U_M$$

Equação 3.3-1

Sabe-se que a energia potencial da mola é dada por: $U_M = \frac{1}{2} k \Delta_d{}^2$

$$P(h + \Delta_d) = \frac{1}{2} k {\Delta_d}^2$$

Equação 3.3-2

Que desenvolvendo para Δ_d:

$$k\Delta_d^2 - 2P\Delta_d - 2Ph = 0$$

Então, o maior valor de Δ_d é dado por:

$$\Delta_d^2 = \frac{2P + (4P^2 + 8kh)^{\frac{1}{2}}}{2k}$$

$$\Delta_d = \frac{P}{k} + \left(\frac{P^2}{k^2} + \frac{2Ph}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta_d = \frac{P}{k}\left[1 + \left(1 + \frac{2kh}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Equação 3.3-3

Mas,

$$\Delta_{est} = \frac{P}{k}$$

É o deslocamento provocado pela carga estática, então pode-se reescrever a equação para o deslocamento provocado pela carga de impacto.

$$\Delta_d = \Delta_{est}\left[1 + \left(1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Equação 3.3-4

$$\Delta_d = \mathrm{n}\Delta_{est}$$

Então a força aplicada pode ser expressa por:

$$F_d = k\Delta_d = k(n\Delta_{est}) = nF_{est}$$

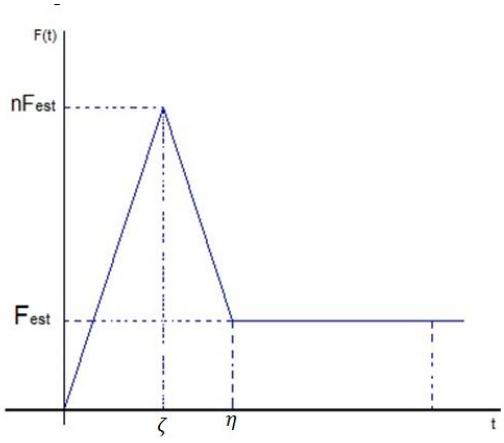
Com F_{est} sendo a força aplicada de forma estática e n o fator multiplicador da força admitindo que ela ocorre devido à queda de um corpo a altura h.

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}$$

Equação 3.3-5

Admite-se, portanto, que a força aplicada tem um pico de valor nF_{est} (sendo $n > 1$) e retorna até um valor de F_{est} que permanece constante durante o tempo em que ela é aplicada (ou enquanto a análise é realizada). Deve ser observado que se h = 0, o fator multiplicador da força é n = 2, isso implica que o corpo está sobre a superfície e então é solto, duplicando a força estática equivalente. Esse comportamento está descrito na imagem a seguir (Figura 3.3-2).

Figura 3.3-2 - Curva da força x tempo



A curva ocorre em 3 estágios descritos por:

$$f(x) = \begin{cases} fF_{est}t, & 0 < t < \xi \\ F_{est}(2n - ft), & \xi \leq t < \eta \\ F_{est}, & t \geq \eta \end{cases}$$

Equação 3.3-6

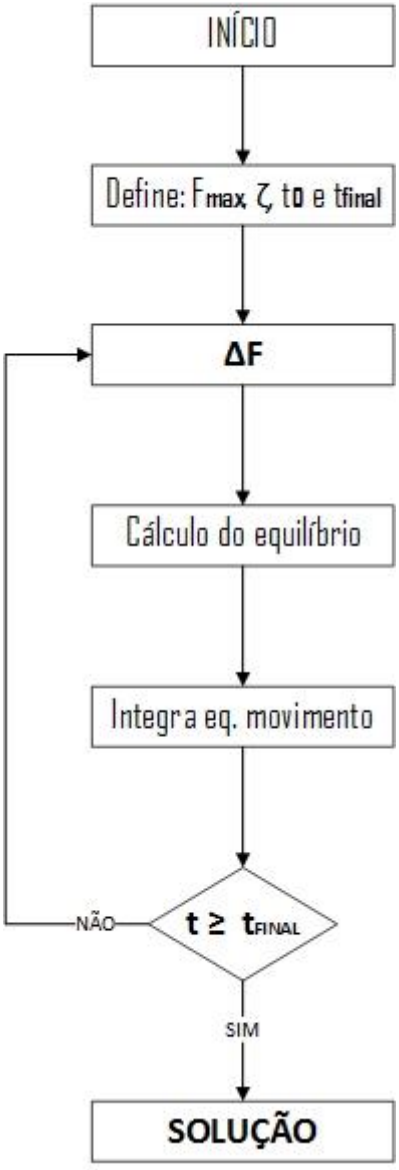
Com $f = \frac{n}{\xi}$.

Os parâmetros F_{est}, ζ e η são estabelecidos a partir das características da análise e do problema.

O carregamento indicado na Equação 3.3-6 deve ser aplicado ao sistema de forma incremental, de modo que a cada incremento, a equação de equilíbrio seja estabelecida e solucionada. Este processo ocorre até que o intervalo da análise seja finalmente concluído, e se obtenha o histórico da resposta da estrutura.

O processo incremental de solução do sistema dinâmico, está representado no algoritmo ilustrado na Figura 3.3-3[5].

Figura 3.3-3 - Algoritmo para solução do sistema de equações não lineares.



[5] Os algoritmos para o cálculo do equilíbrio incremental e o processo de integração direta, serão abordados nos próximos capítulos.

A respeito das tensões no material, é considerado que não ultrapassam seu limite elástico, sendo assim não há deformações plásticas aceitáveis, configurando então, linearidade nas propriedades do material durante o processo de deformação e não linearidade geométrica, para o caso de grandes deslocamentos.

Capítulo 4

Implementação Computacional

4.1 Aspectos Gerais

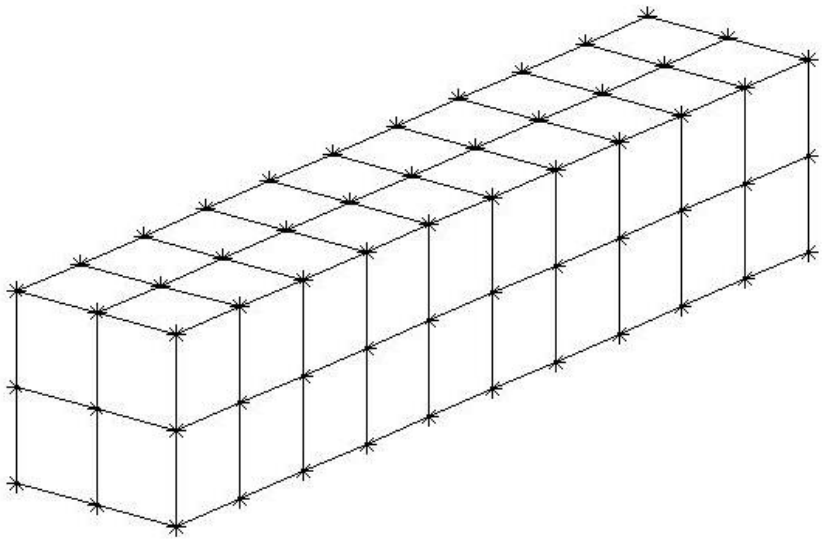
Neste capítulo está apresentada a estruturação, da implementação dos algoritmos referentes aos métodos anteriormente estudados, utilizada na construção da ferramenta computacional empregada nos cálculos necessários para as avaliações propostas.

A necessidade da construção do programa aqui mencionado, advém da natural sinergia entre as ferramentas disponíveis na computação e o campo das análises numéricas aplicadas às estruturas mecânicas. Assim, implementou-se, neste trabalho, um número definido de algoritmos para a composição de cada etapa do programa, além de sua adequação à funcionalidade de cada método estabelecido e aos parâmetros requisitados.

Este programa é identificado como *MDNA* (*Modal and Dynamics Numerical Analysis*), tem como objetivo fundamental, o cálculo dos autovalores e autovetores, utilizados para construção da matriz de amortecimento, além do cálculo da resposta em função do tempo de estruturas simples submetidas a carregamentos variáveis no tempo, com formato impulsivo (ver item 3.3). Às rotinas que constituem o programa, está atribuído o método dos elementos finitos, aplicado na solução dos sistemas de equações oriundos da estrutura a ser estudada.

Os métodos numéricos foram implementados em rotinas escritas com linguagem c++[6], onde são geradas as respostas, que por sua vez são salvas em arquivos externos (formato txt). As representações visuais, isto é, a geração de gráficos correspondente às informações contidas nos arquivos externos (conectividade dos elementos finitos, coordenadas nodais, autopares, etc), foram implementados em Matlab, com a denominação de G*MDNA* (*Graphical MDNA*). Um exemplo da representação gráfica do modelo pode ser visto na Figura 4.1-1.

Figura 4.1-1 – Representação Gráfica da Malha no GMDNA.



[6] Foi utilizado, como ambiente de desenvolvimento, o Codeblocks, cuja distribuição é gratuita e apresentou desempenho satisfatório com relação às necessidades presentes no desenvolvimento do programa *MDNA*.

No que diz respeito às tolerâncias atribuídas a cada método, foram utilizados os conceitos abordados nos capítulos referentes a cada um deles.

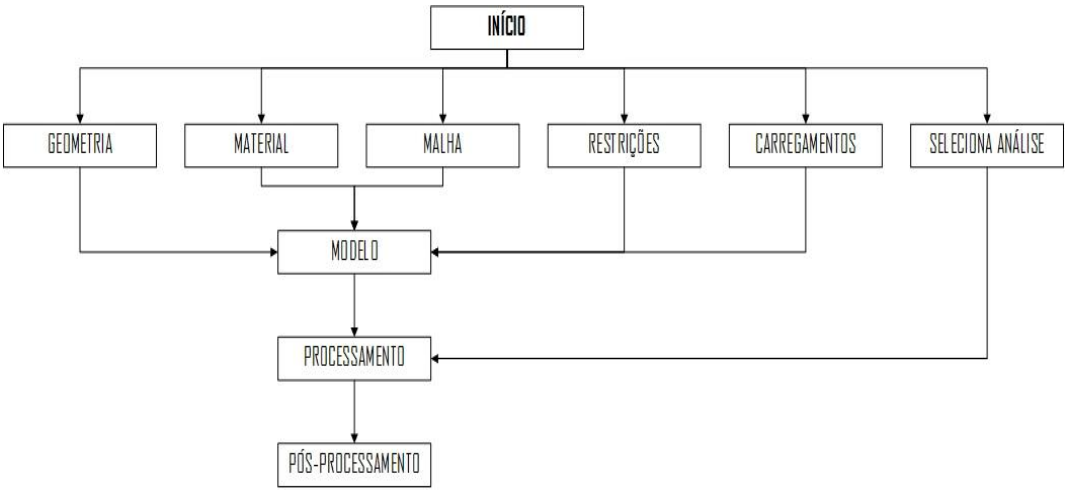
Além disso, os métodos utilizados na análise estática, modal e dinâmica, estão prontamente implementados, estando seus algoritmos disponíveis no Apêndice B.

O programa é dividido em 4 setores bem definidos:

- Entrada de Dados.
- Seleção da Análise.
- Processamento.
- Pós-processamento.

A fluxograma do programa pode ser melhor avaliado na figura abaixo (Figura 4.1-2).

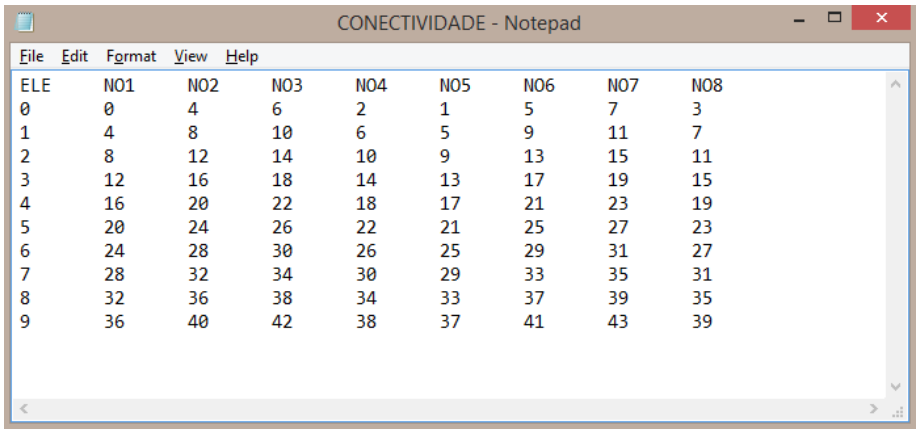
Figura 4.1-2 - Algoritmo simplificado do programa



Os principais arquivos de saída estão organizados da seguinte maneira:

1) CONECTIVIDADE.txt – Apresenta a forma como os nós constroem os elementos. Este arquivo é necessário para construção do modelo visual no Matlab. A Figura 4.1-3 mostra um exemplo de uma malha com 10 elementos.

Figura 4.1-3 – Exemplo de arquivo CONECTIVIDADE.txt



2) MODELO.txt – Apresenta os dados de entrada imputado pelo analista.
3) COORDENODES_DATA.txt – Armazena as coordenadas de todos os nós da estrutura, para a construção do modelo em Matlab.
4) AUTOVALORES.txt – Apresenta os autovalores oriundos da análise modal.
5) AUTOVETORES.txt – Apresenta os autovetores oriundos da análise modal.
6) DESLOCAMENTO.txt, POSICAO.txt, VELOCIDADE.txt e ACELERACAO.txt para os dados da análise transiente.
7) DESLOC_ANALISE_ESTATICA_NAO_LINEAR com os dados a respeito da análise estática.

4.1.1 Limitações do Programa

Faz-se necessário, nesta seção, uma abordagem a respeito das limitações físicas do programa MDNA e suas rotinas.

No que tange as limitações físicas, os algoritmos não estão adaptados para situações em que são abordadas não-linearidades físicas do material, isto é, admite-se que as tensões não ultrapassam o limite elástico da curva tensão x deformação para um determinado material. Embora, de acordo com as referências utilizadas, as formulações matemáticas do elemento finito, não apresentem restrições a não-linearidades geométricas.

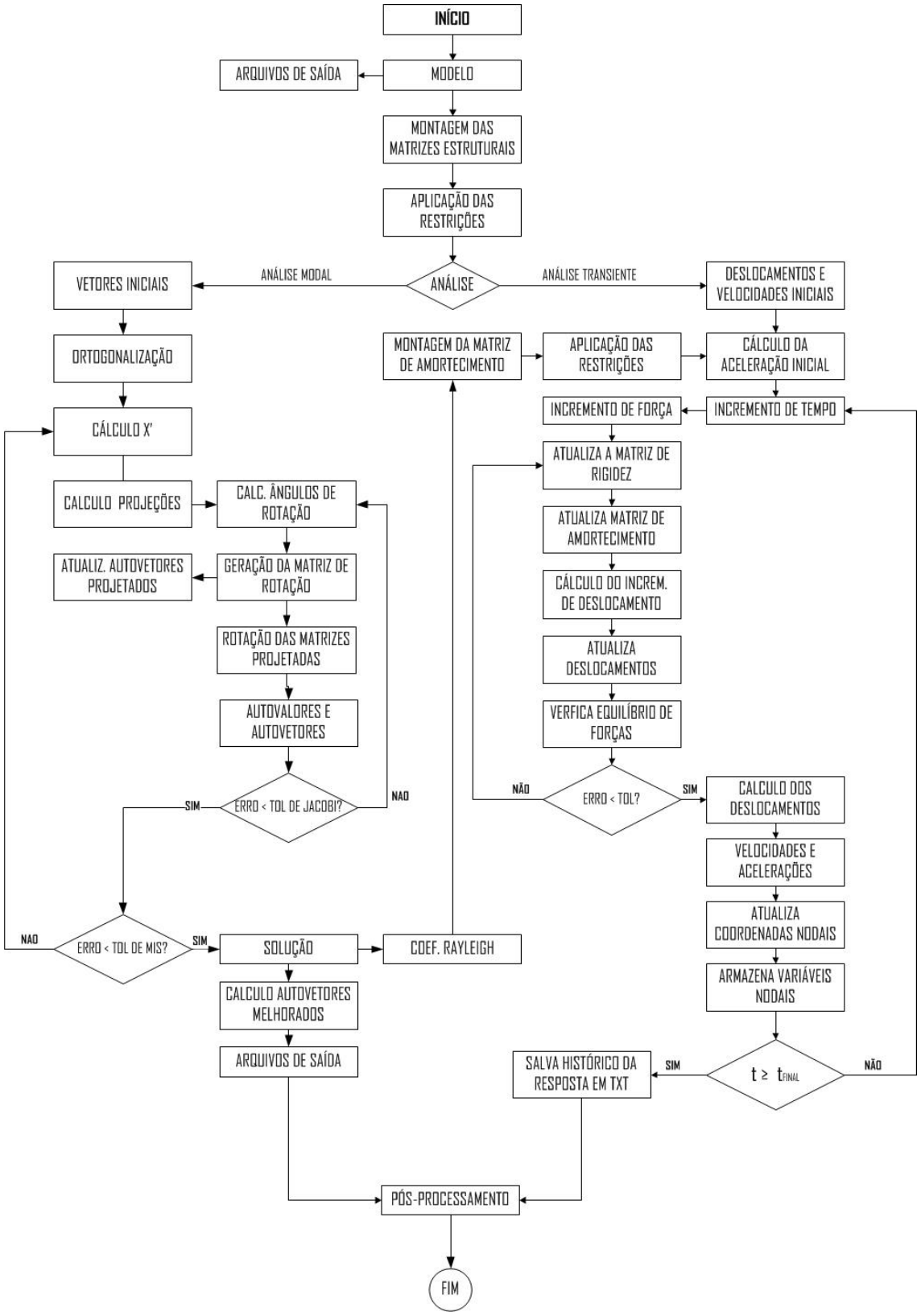
Visto isso, as análises são feitas tomando como ressalva os critérios anteriormente abordados.

4.2 Estrutura do Programa

O algoritmo da página 69, representa a estrutura do programa, entendido como um todo, isto é, como o programa completo, abrangendo todos os processos envolvidos no cálculo por ele realizados. Foi construído a partir da superposição dos métodos representados pelos algoritmos ilustrados no Apêndice B.

Em suma, o programa representa uma possibilidade da resolução de sistemas não lineares e respectiva integração ao longo do tempo.

Figura 4.2-1 – Algoritmo representativo do programa MDNA



4.3 Validação da Implementação

Por fim, faz-se necessário a avaliação dos resultados obtidos nas implementações finalizadas até este ponto, para averiguação da eficiência e confiabilidade obtidas nos cálculos feitos pelo programa MDNA.

TESTE 1 - Convergência dos resultados quando o número de elementos é aumentado.

A seguir, na Tabela 4.3-1, estão apresentados os dados do problema exemplo tomado como parâmetro para o teste da convergência do programa MDNA. A solução analítica, foi baseada na deflexão estática da estremidade livre da estrutura na Figura 4.3-1 – Exemplo para análise de convergência.

O exemplo utilizado é uma viga, cuja seção transversal consiste em um quadrado, simplesmente engastada em uma das extremidades com uma carga concentrada F na outra extremidade. Veja imagem abaixo.

Figura 4.3-1 – Exemplo para análise de convergência

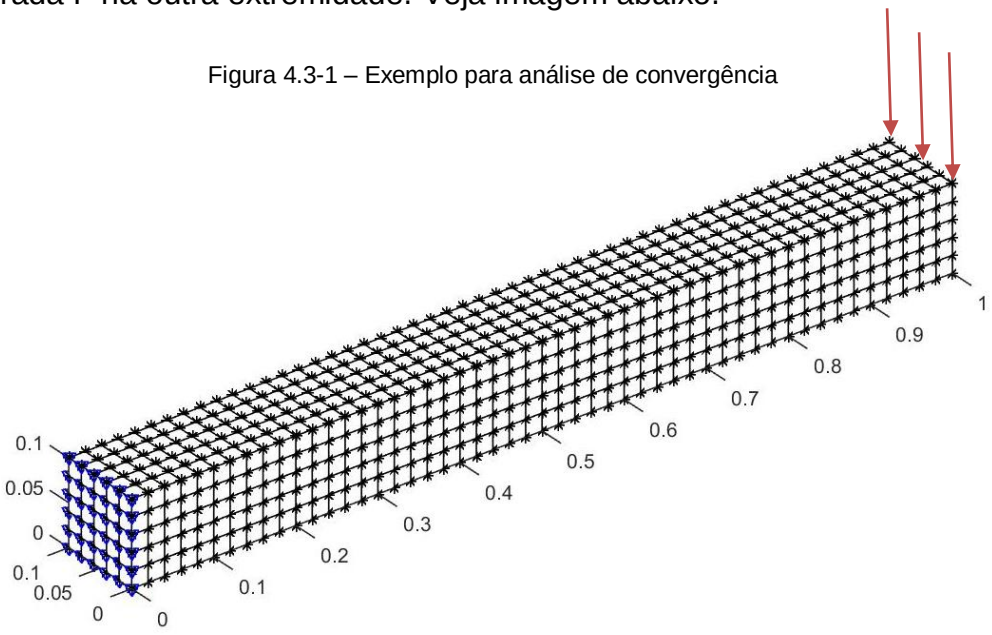


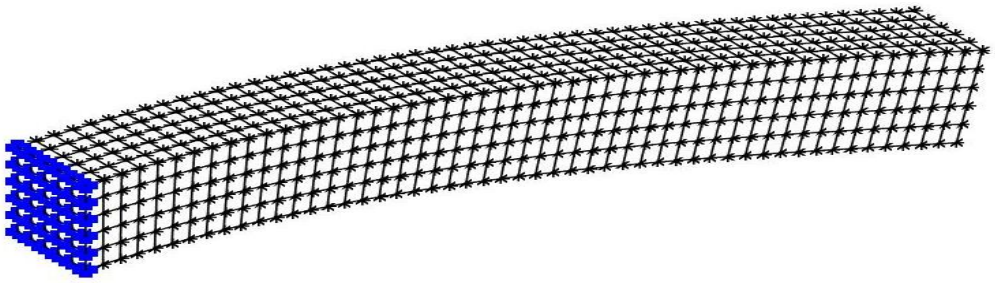
Tabela 4.3-1 – Dados do modelo na verificação de convergência.

PROBLEMA EXEMPLO	
E(Gpa) =	200.00
Poisson =	0.30
Dimensões(lxbxh) (m) =	1.00 x 0.10 x 0.10
F(kN) =	10.00
Sol. Analítica(mm) =	2.00
Fator de amortecimento =	0.03

Os dados geométricos e de materiais estão na Tabela 4.3-1. A solução analítica encontra-se na mesma tabela e foi conseguida pela consideração de um problema linear da viga de Bernoulli-Euler.

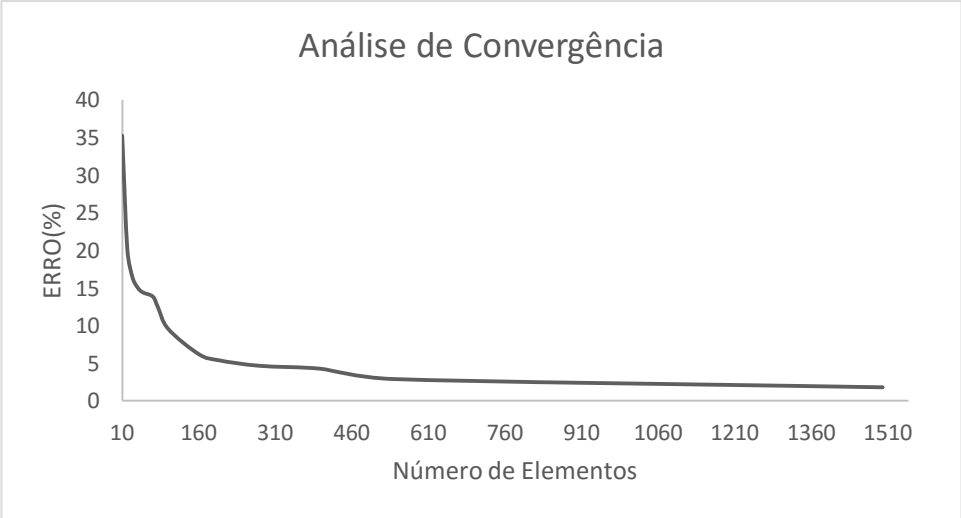
Após a aplicação do carregamento, a estrutura possui a seguinte configuração:

Figura 4.3-2 - Configuração deformada



A curva de convergência encontra-se na Figura 4.3-3:

Figura 4.3-3 - Curva de convergência.



O teste acima apresentou sucesso, haja visto que a diferença entre a valor calculado analiticamente e o encontrado no modelo de MEF (-0.001955, isto é cerca de 2%) é razoável e justificado pelas diferentes considerações entre um modelo e outro.

TESTE 2 – Comparação entre análise modal obtido no programa MDNA e Ansys.

MODELO (Mesmo que o anterior):

Figura 4.3-4 – Erro entre os resultados gerados no ANSYS E MDNA

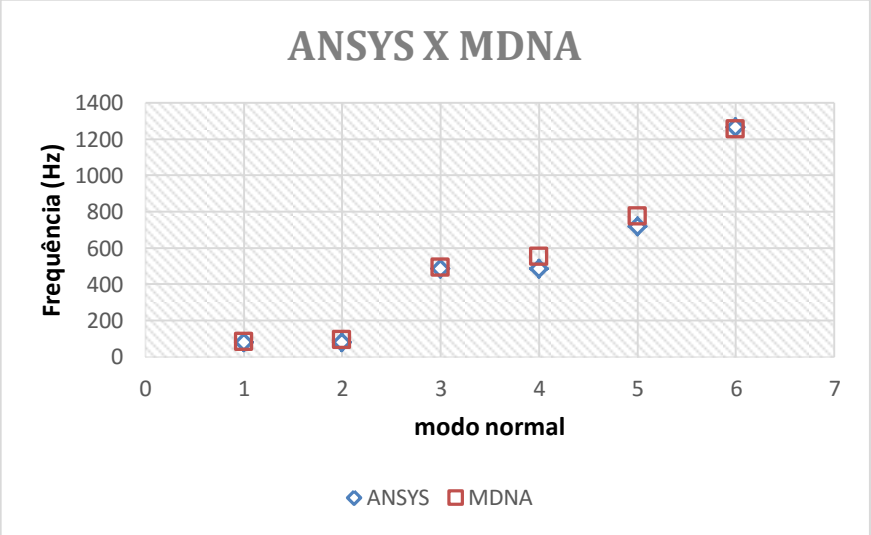


Tabela 4.3-2 - Erro Ansys x MDNA (em %)

MODO	ANSYS	MDNA	ERRO(%)
1	81,30	82,275	1,18
2	81,30	92,59	12,19
3	487,59	494,183	1,33
4	487,59	554,419	12,05
5	720,06	776,031	7,21
6	1265,70	1253,84	0,95

Acima, na Figura 4.3-4, estão apresentados os 6 primeiros autovalores calculados no ANSYS e no MDNA, e mostram um erro associado aos cálculos. Porém, considerando as diferentes hipóteses e formulações de cada elemento finito, além do algoritmo de solução, os erros citados são esperados.

TESTE 3 – Verificação da integração numérica.

A integração numérica será verificada utilizando um problema de excitação harmônica, de modo que a resposta obtida deverá, após um

intervalor de tempo referente às respostas transientes, ter um perfil similar à excitação, isto é, uma resposta também harmônica.

Abaixo seguem as representações gráficas da força de excitação e a resposta da extremidade livre do sistema obtida na integração numérica. O modelo físico é similar ao da Figura 4.3-1, e os dados de acordo com a Tabela 4.3-1, exceto pelo valor da força, que neste caso não é constante, mas harmônica, ilustrada na Figura 4.3-6.

Neste caso utilizou-se dos seguinte valores para os parâmetros do método de Newmark.

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad ; \quad \delta = \frac{1}{4} \quad ; \quad \Delta t = 0.01$$

A força de excitação F é expressa por:

$$F = F_0 \cos \omega t = 10000 * \cos 20\pi t$$

Figura 4.3-5 - Resposta da extremidade livre do sistema.

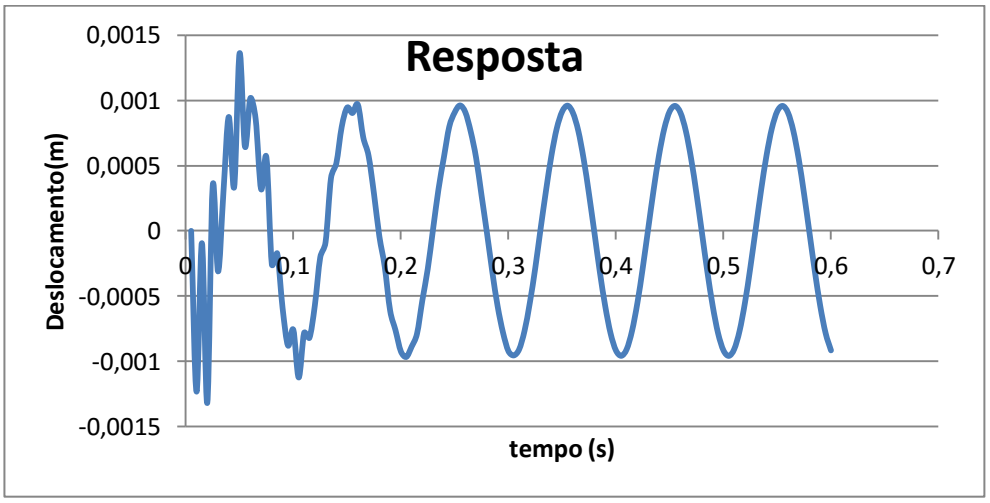
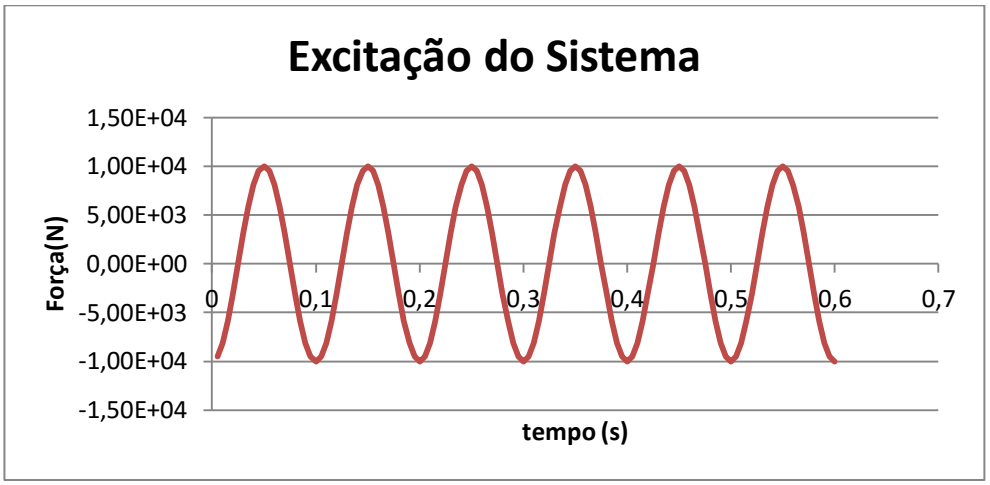


Figura 4.3-6 - Força harmônica de excitação do sistema



Nota-se que a resposta tem um perfil idêntico ao da excitação à partir de um determinado instante de tempo, ou seja, após o trecho transiente.

Capítulo 5

Análises e Resultados

As análises seguintes permitirão averiguar a influência da matriz de amortecimento nas equações do movimento do sistema, visto que duas situações possíveis são avaliadas: o sistema com a presença da matriz de amortecimento e outro com ausência do amortecimento. O modelo é similar ao mostrado na Tabela 4.3-1, exceto pelo carregamento que passa a ser variável no tempo, o que implica que deverá ser atualizado a cada incremento de tempo.

Inicialmente, realiza-se uma análise cujo valor do carregamento é o carregamento estático, para o cálculo dos deslocamentos estáticos que permite a definição do fator de multiplicação n (devido ao efeito dinâmico, ver item 3.3, página 59). Em seguida, a análise modal, para o cálculo dos autovalores que permitem o cálculo dos coeficientes de Rayleigh, e finalmente, o cálculo da resposta no domínio do tempo.

No cálculo no domínio do tempo foi necessário utilizar um software comercial, pois devido a uma limitação técnica no que diz respeito à utilização de memória, as respostas não se mostraram com boa qualidade na integração, proveniente de um incremento de tempo não suficientemente pequeno. Dessa forma, utilizou-se o FEMAP para esta etapa do cálculo.

No primeiro problema proposto, o carregamento é considerado como um corpo rígido de 1000kg (10kN) que cai de uma altura 5cm sobre uma barra em balanço de metal com seção quadrada. No segundo problema, um corpo de 100kg cai da mesma altura.

5.1 Cálculos Preliminares

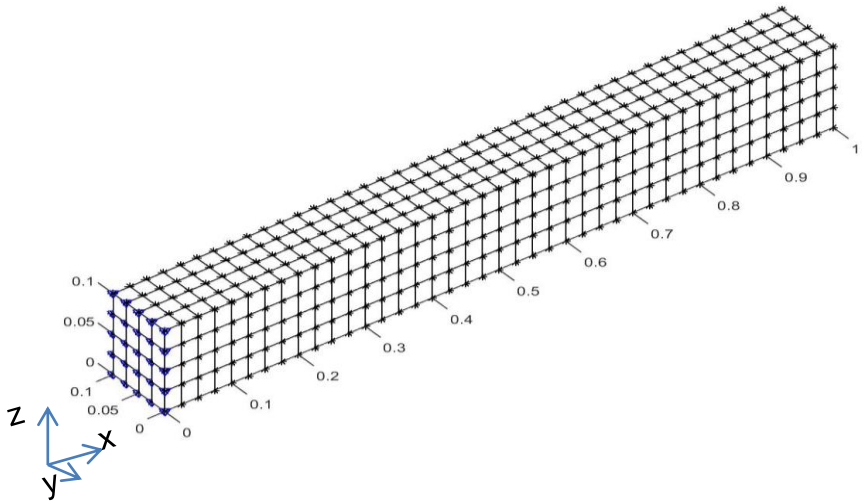
A seguir, a Tabela 5.1-1 mostra as características do modelo:

Tabela 5.1-1 - Modelo de avaliação

PROBLEMA EXEMPLO	
E(Gpa) =	200.00
Poisson =	0.30
Dimensões(lxbxh) (m) =	1.00 x 0.10 x 0.10
$\mathbf{F_{ESTÁTICA}}$(N) =	10000.00
Altura(cm) =	5.00

O modelo de elementos finitos utilizado está modelado, conforme é mostrado na Figura 5.1-1:

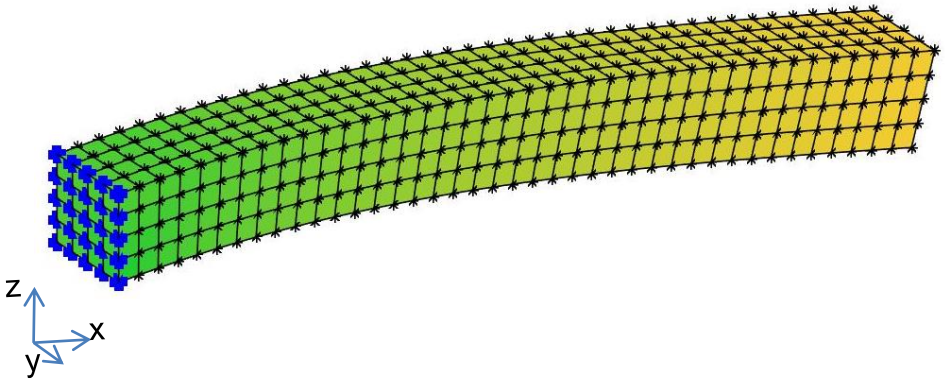
Figura 5.1-1 - Modelo para avaliação



5.1.1 Análise Estática

A configuração deformada obtida da análise estática está apresentada na Figura 5.1-2.

Figura 5.1-2 - Estrutura deformada estaticamente



No cálculo do fator de multiplicação n, foi utilizado apenas o deslocamento vertical (pois é nesta direção que a força está aplicada) do nó central da face onde ocorre a solicitação, uma vez que nesta face, os deslocamentos verticais têm valores muito próximos, sendo desnecessário que se utilize o deslocamento estático de cada nó, quando a respectiva força for aplicada. Assim, o deslocamento estático utilizado é:

$$|\Delta_{est}| = 0.00195533\ m$$

O que leva o fator *n* a:

$$n = 8.22$$

Assim, quando considerado um problema dinâmico, a força de 10.00kN tem um pico de 82,21kN antes de retornar ao valor de 10.00kN.

5.1.2 Análise Modal

4 dos modos normais obtidos da análise modal estão mostrados a seguir (Figura 5.1-3 a Figura 5.1-6).

Figura 5.1-3 - 1º Modo (82.8 Hz)

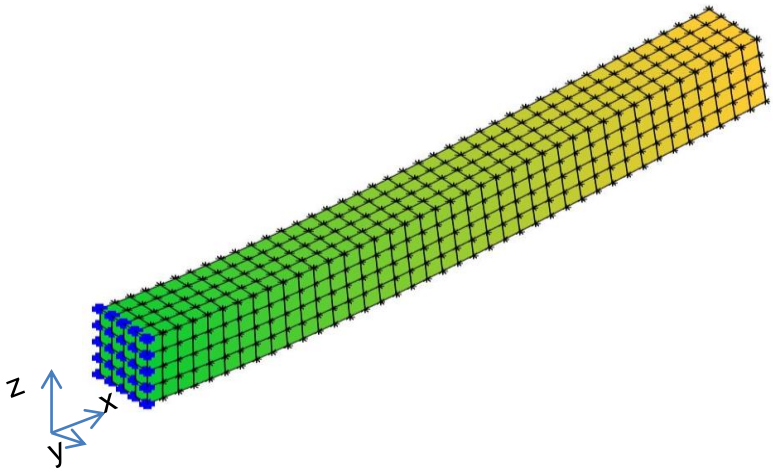


Figura 5.1-4 - 3º Modo (497.46 Hz)

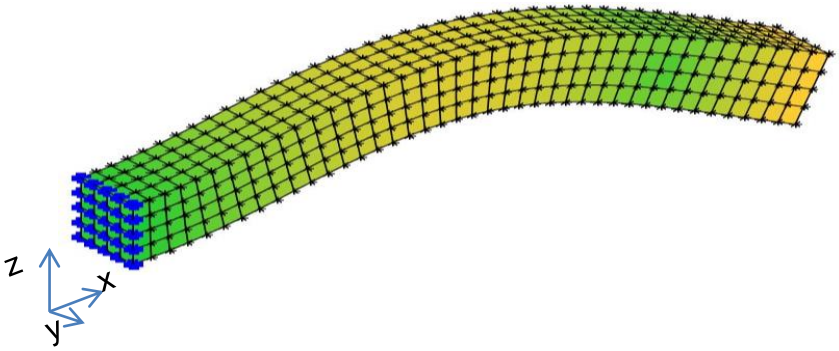


Figura 5.1-5 - 5º Modo (782.10Hz)

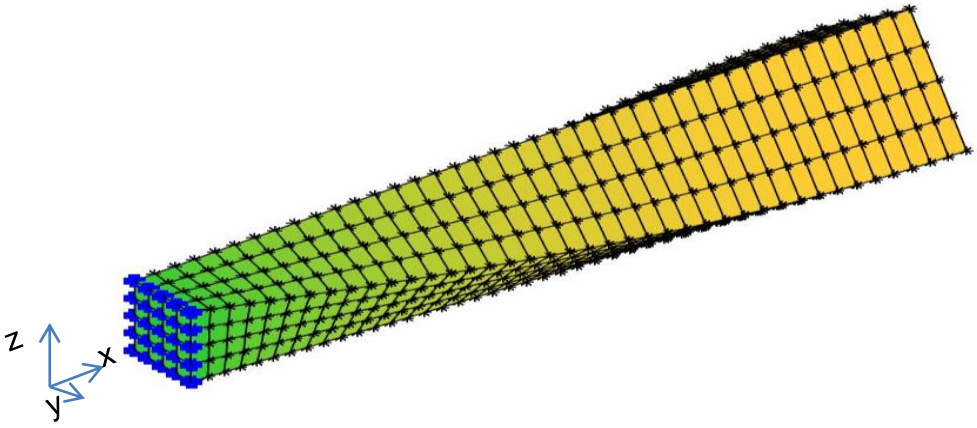
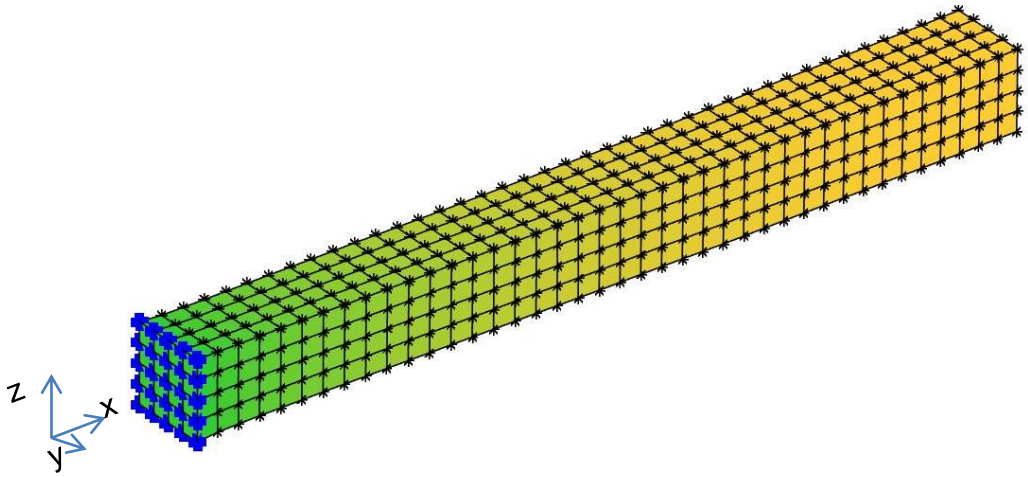


Figura 5.1-6 - 6º Modo (1252.86 Hz)



Fazendo uso dos resultados obtidos anteriormente, podem ser estimados os valores dos coeficientes de Rayleigh para o amortecimento (ver Equação 2.3-5

). Assim, como visto na Tabela 2.3-1, o amortecimento para cada tipo de material, é expresso em faixas, que para estruturas similares aos exemplos anteriores está compreendido em: $0.02 < \xi < 0.07$.

5.2 Resposta no Domínio do Tempo

5.2.1 Estudo de Caso 1

A **Error! Reference source not found.** mostra a variação dos coeficientes de Rayleigh de acordo com o valor do fator de amortecimento. Para cada um destes valores foi calculada a resposta no domínio do tempo e verificado o comportamento dos deslocamentos.

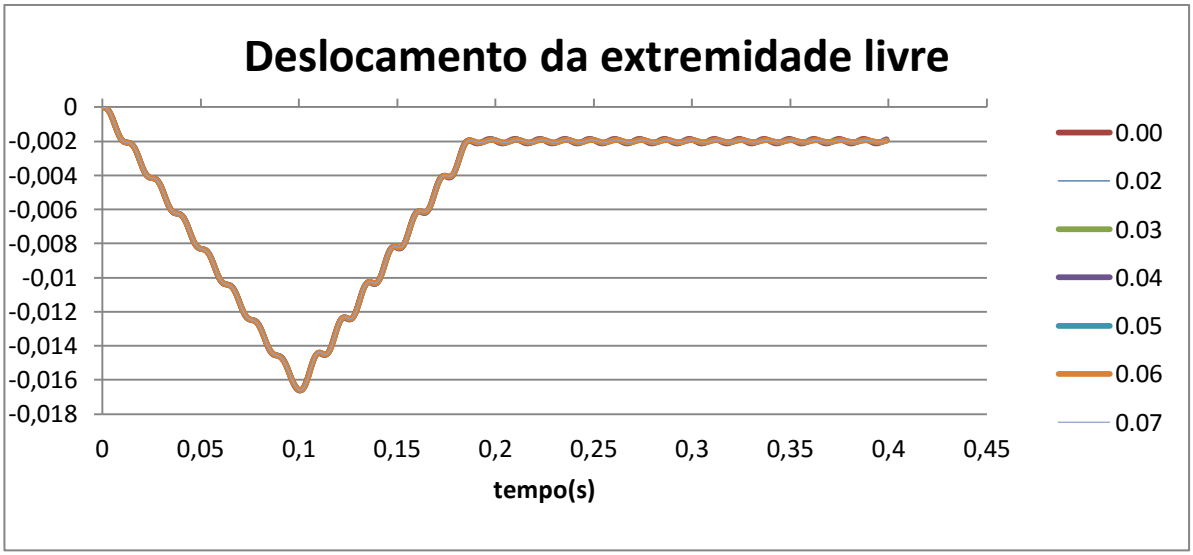
Tabela 5.2-1 - Coeficientes de Rayleigh

w1 = 82.80Hz		w2 = 497.46Hz	
ANALISE	**FATOR DE AMORTECIMENTO**	**ALPHA**	**BETA**
ANALISE 01	0.00	0.00000E+00	0.00000E+00
ANALISE 02	0.02	6.89346E-05	2.83940E+00
ANALISE 03	0.03	1.03402E-04	4.25909E+00
ANALISE 04	0.04	1.37869E-04	5.67879E+00
ANALISE 05	0.05	1.72337E-04	7.09849E+00
ANALISE 06	0.06	2.06804E-04	8.51819E+00

ANALISE 07	0.07	2.41271E-04	9.93788E+00

Ao longo do tempo, o deslocamento vertical do nó avaliado teve, para cada nível de amortecimento, o seguinte comportamento:

Figura 5.2-1 - Deslocamento x tempo



A região onde se apresentou os maiores distanciamentos dentre os valores de deslocamento foi:

Figura 5.2-2 - Deslocamento x tempo (0.2 < t < 0.4)

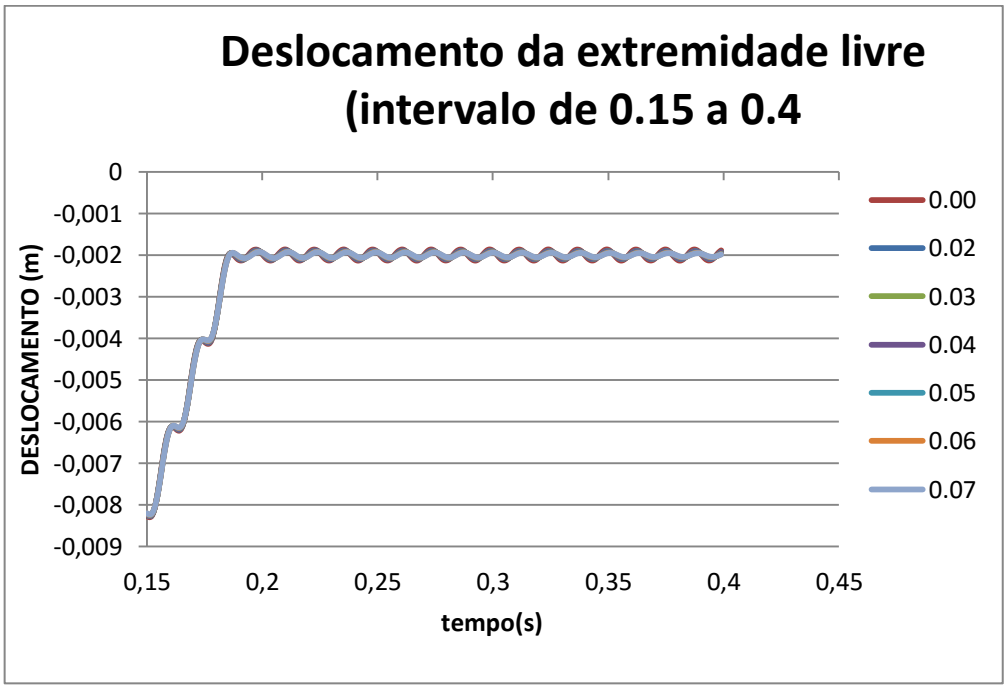
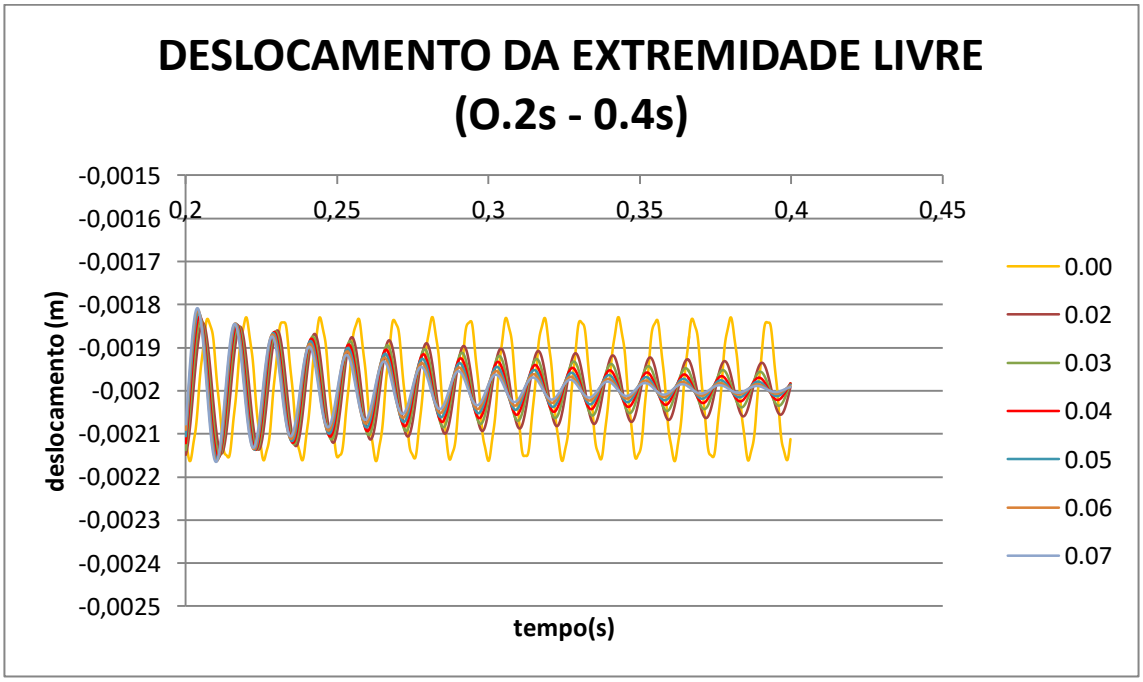


Figura 5.2-3 - Deslocamento da extremidade Livre (0.2s à 0.4s)



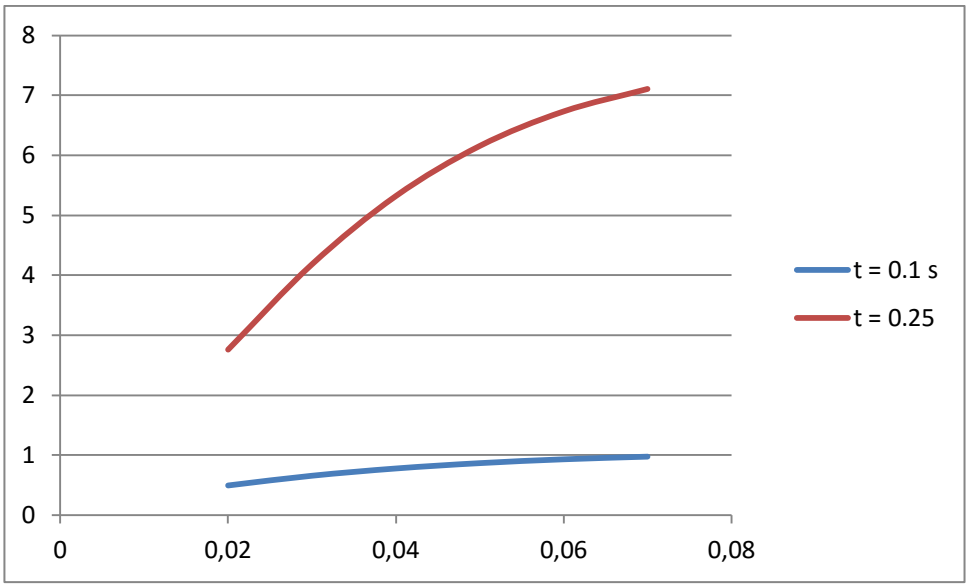
Percebe-se que as curvas na Figura 5.2-3 oscilam em torno de 0.002m, ou seja, do valor referente ao deslocamento estático calculado analiticamente. Logo, o maior erro associado aos valores das curvas serão conseguidos comparando os valores determinados na análise dinâmica com o deslocamento estático. Assim, o maior erro ocorrerá entre o valor de deslocamento do sistema sem amortecimento ($\xi = 0.00$) e o deslocamento estático, uma vez que, após um tempo suficientemente grande, o sistema amortecido irá parar sua oscilação com deslocamento final igual ao deslocamento estático.

Sendo o valor da amplitude do movimento sem amortecimento igual a 0.00215m, este distanciamento entre os valores é de:

$$erro = \frac{0.00215 - 0.002}{0.002} = 7.5\%$$

Em relação à análise dinâmica, os maiores valores de deslocamento ocorrem no instante t = 0.1 segundo, ou seja, onde o carregamento atinge seu valor máximo, porém o distanciamento relativo entre as curvas amortecidas e àquela não amortecida é muito pequeno, sendo portanto desprezível.

Figura 5.2-4 - Distanciamento das respostas em função do fator de amortecimento (deslocamentos).



Neste ponto (t = 0.1 segundo), o erro máximo ocorre quando o sistema possui um fator de amortecimento de 0.07. Neste, o erro é de aproximadamente 1%. Está ilustrado no gráfico da Figura 5.2-4, também, a curva dos distanciamentos no tempo igual a 0.25 segundo. Percebe-se que o erro aumenta, cujo valor tende a aproximadamente 7%, no qual é o erro máximo.

5.2.2 Estudo de Caso 2

Neste estudo, foi realizada uma avaliação das respostas para um nível de esforços menores, ou seja, um modelo semelhante ao anterior, contudo com uma menor intensidade na força, e esta orientada para cima.

Utilizou-se um valor intermediário para o amortecimento, isto é $\xi = 0.05$. Além disso, a força estática tem valor de 1000N.

Considerando a análise modal realizada no item anterior, utilizando o 1º e 3º modos, os cálculos de α e β levam a:

Tabela 5.2-2 - Coeficientes de Rayleigh

w_1 = 82.3 Hz	α = 7.052883e0
w_3 = 497.46 Hz	β = 1.73517e-4

Percebe-se, nos valores dos coeficientes calculados, que a matriz de rigidez (que é acompanhada pelo coeficiente β), ainda que possui um coeficiente de ordem menor, promove uma maior contribuição na construção da matriz de amortecimento, uma vez que os elementos não nulos da matriz de massa são em geral muito menores que a rigidez.

O deslocamento para a análise estática é (em metros):

$$|\Delta_{est}| = |-0.000193016|$$

O que leva o fator n a:

$$n = 23.78$$

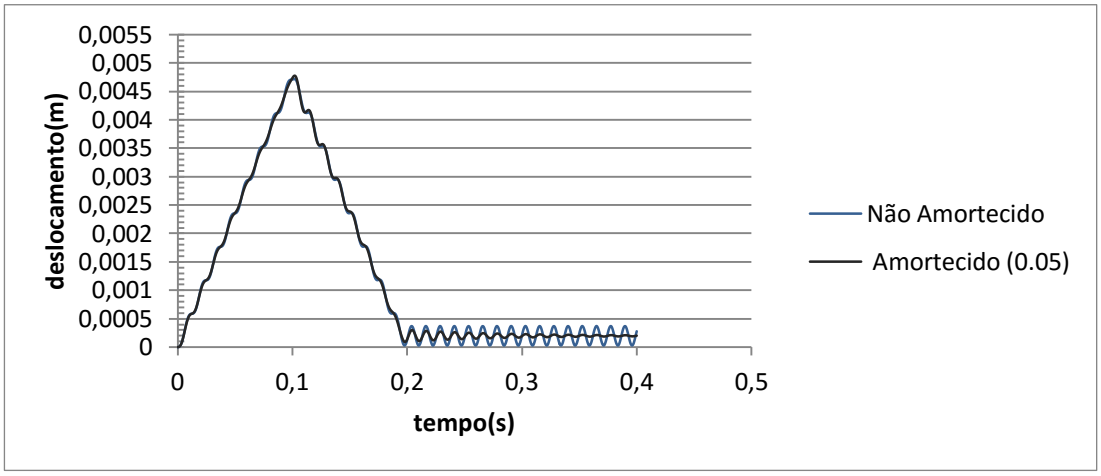
Logo a amplitude máxima da força impulsiva é de:

$$F_{imp} = nF_{est} = 23.7836 * 1000 = 23783.6\ Newtons$$

Isso leva às seguintes relações de deslocamento:

Nas curvas a seguir (Figura 5.2-5 a **Error! Reference source not found.**), estão representados os deslocamentos verticais dos nós contidos nas faces extremas[7] do sistema não amortecido e amortecido ao longo do tempo de análise.

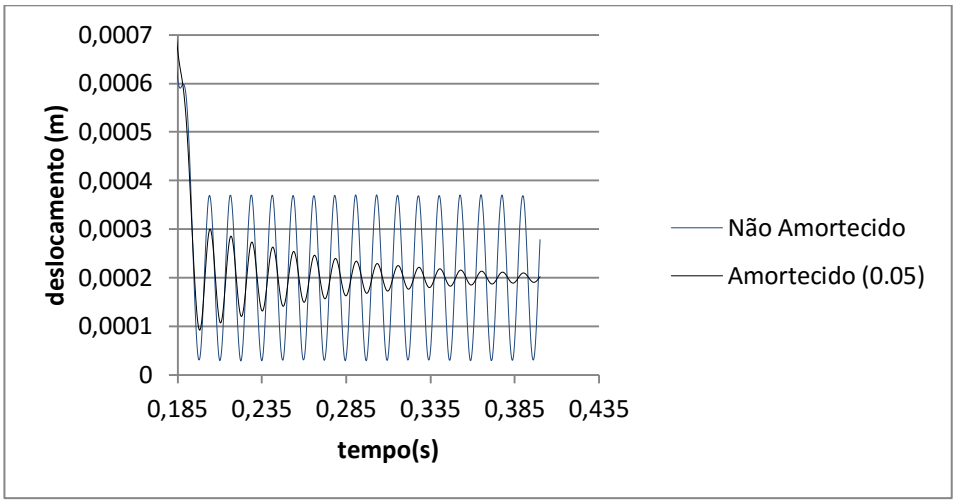
Figura 5.2-5 - Deslocamentos x tempo



Percebe-se que o comportamento de ambas as situações é muito semelhante, contudo algumas regiões apresentam alguma diferença entre seus valores, como ilustradas na imagem seguinte (Figura 5.2-6).

[7] Foi escolhido este ponto, por se tratar da face onde ocorre os maiores valores de deslocamento.

Figura 5.2-6 - Deslocamento x tempo (0.19 < t < 0.24)



O distanciamento entre as duas curvas ocorre seu valor máximo em um instante grande o suficiente para a estabilização da curva amortecida, onde esta curva tende ao valor de 0.0002m, enquanto a não amortecida oscila atingindo valores de aproximadamente entre 0.00035m e 0.00005. O que dá um erro associado de cerca de:

$$erro = \frac{|0.00035 - 0.0002|}{0.0002} = 7.5\%$$

No pico de maiores deslocamentos, o distanciamento é desprezível se comparado com o distanciamento ocorrido na estabilização da estrutura, cerca de 0.5%.

5.3 Análise Comparativa

Os estudos anteriores mostraram que os níveis relativos de deslocamentos obtidos nas respostas, ainda que com níveis de esforços diferentes, se mostraram relativamente próximos. Isto é um indicativo de que não há uma relação direta, onde o aumento na intensidade do carregamento implica de maneira significativa no distanciamento entre as respostas do sistema amortecido e não amortecido. Por outro lado, é importante salientar que os modelos estudados apresentam simplicidade em sua geometria e comportamento do material.

Capítulo 6

Conclusões

Como fora citado anteriormente, um número pequeno de autores afirmou que a matriz de amortecimento é, muitas vezes, desprezada sem perdas relevantes de informações na análise. Outros afirmaram, ainda, que o amortecimento na presença de carregamentos de impulso também pode ser irrelevante, contudo não foi encontrado um estudo onde está demonstrado a intensidade com que a matriz de amortecimento influencia sobre as respostas. Assim, os estudos realizados no capítulo 5, trouxeram uma luz sobre esta questão, de modo que foram averiguadas as respostas de um sistema simplista, mas que permitiu reafirmar, para este caso, que as diferenças entre respostas, em seus picos, foram relativamente pequenas (cerca de 7% na presença de 0,07 de amortecimento). Entretanto, os valores dos deslocamentos, foram linearmente decrescentes com o amortecimento, ou seja, com um nível de amortecimento maior, respostas em níveis menos críticos se farão presentes, o que pode promover uma análise com respostas menos conservadoras, implicando em uma resistência adicional oferecida pelo sistema. Além disso, com a precisão das respostas melhorada devido à presença do amortecimento, uma avaliação do engenheiro deve ser feita ao considerá-la, uma vez que, sendo uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, relativamente pouco custo computacional é adicionado à análise.

Por fim, faz-se necessário ressaltar a necessidade de estudos futuros, com maior aprofundamento em detalhes que podem se mostrar incisivos nas conclusões a este respeito, tais como: a utilização de outros materiais com características diferentes, como amortecimento mais intenso, comportamento não linear, ou estruturas complexas, com presença de elementos estruturais diferentes, materiais diferentes, entre outros.

REFERÊNCIAS

ADHIKARI, S. Damping modelling using generalized proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**, UK, n. 293, p. 156-170, 2006.

ADHIKARI, S.; WOODHOUSE, J. Identification of damping: Part 1, Viscous Damping. **Journal of Sound and Vibrations**, Cambridge, v. 1, n. 243, p. 43-61, 2001a.

ADHIKARI, S.; WOODHOUSE, J. Identification of damping: Part 2, Non-viscous damping. **Journal of Sound and Vibrations**, Cambridge, v. 1, n. 243, p. 63-88, 2001b.

ADHIKARI, S.; WOODHOUSE, J. Identification of damping: Part 3, Symmetry-preserving methods. **Journal of Sound and Vibrations**, Cambridge, v. 3, n. 251, p. 477-490, 2002a.

ADHIKARI, S.; WOODHOUSE, J. Identification of damping: Part 4, Error Analisys. **Journal of Sound and Vibration**, Cambridge, v. 3, n. 251, p. 491-504, 2002b.

ANDRIANNE, T.; DIMITRIADIS, G. Damping identification of lightly damped linear dynamic systems using common-base proper orthogonal decomposition. **Mechanical SystemsandSignalProcessing**, Belgium, n. 28, p. 492-506, 2012.

ANGELES, F. J. R.; HERNÁNDEZ, A. O. V.; MARTINEZ, U. Vibration analysis for the determination of modal parameters of steel catenary risers based on response-only data. **Engineering Structures**, n. 59, p. 68-79, 2014.

ARORA, V. Direct structural damping identification method using complex FRFs. **Journal of Sound and Vibrations**, Denmark, n. 339, p. 304-323, 2015.

BARROSO, L. et al. **Cálculo Numérico com Aplicações**. 2ª. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BATHE, K. J. Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering. **Report UCSESM**, Berkeley, p. 71-20, 1971.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BATHE, K. J. The subspace iteration method - Revisited. **Computers and Structures**, Cambridge, maio 2012.

BATHE, K. J.; RAMASWAMY, S. An Accelerated Subspace Iteration Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Cambridge, n. 23, p. 313-331, 1980.

BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite Element Formulations For Large Deformation Dynamic Analysis. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, v. IX, p. 353-386, 1975.

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. VI, p. 213-226, 1973.

BELYTSCHKO, T. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. [S.l.]: Wiley , 2000.

BERGER, E. J. Friction modeling for dynamic system simulation. **Applied Mechanics**, v. 6, n. 55, p. 535-577, 2002.

BERT, C. W. Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models. Measures and Experimental Tecniques. **Journal of Sound**, Oklahoma, v. II, n. 29, p. 129-153, 1973.

BOSCOLO, M.; BANERJEE, J. R. Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part II: Results and applications. **Computers and Structures**, n. 96-97, p. 74–83, 2012.

CAUGHEY, T. K.; O'KELLY, M. E. J. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. **Journal of Applied**, n. 32, p. 583–588, 1965.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 1ª. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

CHOWDHURY, I.; DASGUPTA, S. P. **Dynamics of Structure and Foundation - A unified Approach - vol 1**. 1ª. ed. London: CRC Press, 2009.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of Viscoelasticity, an introduction**. New York: Academic Press, 1971.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN,. **Dynamics of Structures**. 3ª. ed. Berkeley: Computers & Structures, 2003.

COHEN, E.; MCCALLION, H. Economical Methods for Finding Eigenvalues and Eigenvectors. **Journal of Sound and Vibrations**, v. V, n. 3, p. 397-406, 1967.

COOK, R. et al. **Concepts and Applitations of Finite Element Analysis**. 4. ed. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, 2002.

COOPER, J. E. Extending the Logarithmic Decrement Method to Analyse Two Degree of Freedom Transient Responses. **Mechanical Systems and Signal Processing**, n. 10, p. 497-500, 1996.

CRANDALL, S. H. The role of damping in vibration theory. **Journal of Sound and Vibrations**, Massachusetts, v. I, n. 11, p. 3-18, 1970.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Vol 1:** Essentials. London: JOHN WILEY & SONS, 1991.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 2:** Advanced Topics. London: John Wiley & Sons , 1997.

DAVIDSON, E. R. The Iterative Calculation of a Few of the Lowest Eigenvalues and Corresponding Eigenvectors of Large Real-Symmetric Matrices. **Journal of Computational Physics**, Columbus, n. 17, p. 87-94, August 1974.

FREITAG, M. A.; SPENCE, A. Rayleigh quotient iteration and simplified Jacobi–Davidson method with preconditioned iterative solves. **Linear Algebra and its Applications**, n. 428, p. 2049–2060, 2008.

GRIFFTH, J. E.; VANZANT, H. Large Deformation of Circular Membranes Under Static and Dynamic Loading. **Int. Cong. Exp Mech.**, North Carolina, 1961.

GUMMADI, L. N. B.; PALAZOTTO, A. N. Nonlinear Finite Element Analysis of Beams and Arches using Parallel Processors. **Computers and Structures**, v. 63, n. 3, p. 413-428, 1997.

HALL, R. G.; AL-HASSANI, S. T. S.; JOHNSON, W. The Impulsive Loading of Cantilever. **Int. Journal of Mechanical Sciences**, Manchester, v. 13, p. 415-430, February 1971.

HIBBIT, H. D.; MARCAL, P. V.; RICE, J. R. A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement. **Int. J.Solids Structures**, v. VI, p. 1069 - 1086, 1970.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, n. 5, p. 283-292, 1977.

HUANG, F. L. et al. A new approach to identification of structural damping ratios. **Journal of Sound and Vibration**, n. 303, p. 144–153, 2007.

JEARY, A. P. Damping in Structures. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Hong Kong, n. 72, p. 345-355, 1997.

JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** , London, n. 171, p. 141-171, 1999.

JIANG, ; ROGERS, J. R. Proportional Material Damping in Finite Element Impact Analysis. **Computer & Structures**, New Brunswick, v. 31, n. 2, p. 235-247, December 1989.

JONES, N. Impulsive Loading of a Simple Supported Circular Rigid-Plastic Plate. **Journa of Applied Mechanics**, n. 3, p. 59-65, 1968.

KAREEM, A.; GURLEY, K. Damping in structures: its evaluation and treatment of uncertainty. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Notre Dame, n. 59, p. 131-157, 1996.

KREIDER, D. L. **An Introduction to Linear Analysis**. 1ª. ed. Palo Alto: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

KREYSZIG,. **Advanced Engineering Mathematics**. 10ª. ed. Danvers: John Wiley & Sons, 2011.

KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. ENERGY-CONSERVING AND DECAYING ALGORITHMS IN NON-LINEAR STRUCTURAL DYNAMICS. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, London, n. 45, p. 569-599, 1999.

KUZMANOVIC, ; TOMLJANOVIC, ; TRUHAR,. Optimization of material with modal damping. **Applied Mathematics and Computation**, Osijek, Croácia, n. 218, p. 7326-7338, 2012.

KUZMANOVIC, I.; TOMLJANOVIC, Z.; TRUHAR, N. Optimization of Material With Modal Damping. **Applied Mathematics and Computation**, Croatia, n. 218, p. 7326-7338, 2012.

LANCZOS, C. An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 45, n. 4, Outubro 1950.

LAZAN, B. J. **Damping of Materials and Members in Structural mechanics**. Oxford: Oxford Pergamon Press, 1968.

LAZAN, J. B. **Damping of materials and members in structural mechanics**. Oxford): Oxford Pergamon Press, 1968.

LI, X. Y.; LAW, S. S. Identification of structural damping in time domain. **Journal of Sound and Vibration**, n. 328, p. 71–84, 2009.

MARQUES, O. A. Utilização do Algoritmo de Lanczos em Blocos na Análise Dinâmica de Estruturas - Tese de Doutorado. **Programa de Pos-Graduação em Engenharia UFRJ**, Rio de Janeiro, Outubro 1991.

MÜLLER, J. ; SPENCE, A.; GRAHAM, I. G. Inexact inverse iteration for symmetric matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. I, n. 416, p. 389–413, 2006.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics**, Illinois, n. 85, p. 67-94, July 1959.

NURICK, G. N.; MARTIN, J. B. Deformation of Thin Plates Subjected to Impulsive Loading - A Review Part I: Theoretical Considerations. **Int. J. Impact of Engineering**, South Africa, v. 8, n. 2, p. 159-170, December 1989.

NURICK, G. N.; MARTIN, J. B. Deformation of Thin Plates Subjected to Impulsive Loading - A Review part II: Experimental Studies. **Int. J. Impact of Engineering**, South Africa, v. 8, n. 2, p. 171-186, December 1989.

ORBAN, F. **Damping of materials and Members in Structures**. 5th International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis. Hungary: Journal of Physics. 2011.

PERZYNA, P. Dynamic Load Carrying Capacity of a Circular Plate. **Archiwum Mechaniki Stosowanej**, n. 10, p. 635-647, 1958.

PHANI, A. S.; WOODHOUSE, J. Viscous damping identification in linear vibration. **Journal of Sound and Vibrations**, Cambridge, n. 303, p. 475-500, 2007.

PRADHAN, S.; MODAK, S. V. A method for damping matrix identification using frequency response data. **Mechanical Systems and Signal Processing**, India, n. 33, p. 69-82, 2012.

PRANDINA, M.; MOTTERSHEAD, J. E.; BONISOLI, E. An assessment of damping identification methods. **Journal of Sound and Vibration**, n. 323, p. 662-676, 2009.

PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing**. 2ª. ed. Cambridge: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992.

QIANT, Y.-Y.; DHATT, G. An Accelerated Subspace Method for Generalized Eigenproblem. **Computers & Structures**, Québec, v. 54, n. 6, p. 1127-1134, July 1993.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 4ª. ed. New Jersey: Pearson, 2004.

RAYLEIGH, L. **Theory of Sound**. 2ª. ed. New York: Dover Publications, v. I, 1877.

SANKARANARAYANAN, R. On the Impact Pressure Loading of a Plastic Spherical Cap. **Journal of Applied Mechanics**, n. 33, p. 704-706, 1966.

SARPARAST, H. et al. Estimation of modal parameters for structurally damped systems using wavelet transform. **European Journal of Mechanics A/Solids**, Iran, n. 47, p. 82-91, 2014.

SILVA, A. R. D. Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas - Tese de Douturado. **Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/UFOP**, Ouro Preto, 2009.

SOEDEL, W. **Vibrations of Shells and Plates**. 3ª. ed. New York: Marcel Dekker, 2005.

STRICKLIN, J. A. et al. Static geometric and material nonlinear analysis. **Advances in Computa t ional Methods in Computational Methods in Structural Mechanics and Design**, n. 2, p. 301-324, 1972.

STRICKLIN, J. A.; HAISLER, W. E. Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis. **Computers & Structures**, Texas, v. 7, p. 125-136, November 1977.

SYMONDS, P. S. Dynamic Characteristics in Plastic Bending of Beams. **Journal Applied Mechanics**, n. 20, p. 475-481, 1953.

VANLUCHENE , R. D.; LEE, R. H.; MEYERS, V. J. Large Scale Finite Element Analises on a Vector Processor. **Computer & Structures**, v. 24, n. 4, p. 625-635, 1986.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2011.

VOSS, H. A new justification of the Jacobi–Davidson method for Large Eigenproblems. **Linear Algebra and its Applications**, Hamburg, n. 424, p. 448–455, February 2007.

WANG, X.; ZHOU, J. An accelerated subspace iteration method for generalized eigenproblems. **Computers & Structures**, Hubei, n. 71, p. 293-301, 1999.

WEINGARTEN, V. I.; RAMANATHAN, R. K.; CHEN, C. N. Lanczos Eigenvalue Algorithm for Large Structures on a Minicomputer. **Computer & Structures**, Los Angeles, CA, v. 16, p. 253-257, 1983.

WILKINSON, J. H.; REINSCH, C. **Linear Algebra**. 1ª. ed. New York: Springer-Verlag, 1971. 11 p.

WILKINSON, J. W. **The Algebraic Eigenvalue Problem**. Londres: Oxford University Press, 1965.

WILSON, E. L.; ITOH, T. An Eigensolution Strategy For Large Systems. **Computers & Structures**, v. 16, n. 4, p. 259-267, 1983.

WOODHOUSE, J. Linear damping models for structural vibration. **Journal of Sound and Vibrations**, Cambridge, v. 3, n. 215, p. 547-569, 1998.

YIN, H. P. A new theoretical basis for the bandwidth method and optimal power ratios for the damping estimation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, n. 22, p. 1869–1881, 2008.

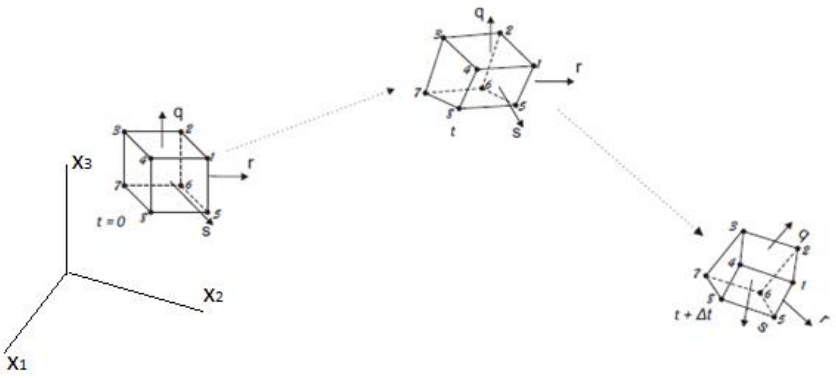
ZHAO, Q. C. et al. Accelerated Subspace Iteration with aggressive shft. **Computers & Structures**, Beijing, n. 85, p. 1562-1578, 2007.

ZHOU, X. L.; WANG, J. H.; LU, J. F. Transient dynamic response of poroelastic medium subjected to impulsive loading. **Computers And Geotechnics**, China, n. 30, p. 109-120, 2003.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5ª. ed. Woburn: Butterworth Heinemann, v. 2: Solid Mechanics, 2000.

APÊNDICE

A. Formulação do Elemento Finito Hexaédrico Lagrangeano de 8 nós.



Um ponto *p* qualquer dentro elemento pode ter seu movimento descrito por:

$$^{0}x_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; {}^{0}x_i^k$$

$$^{t}x_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; {}^{t}x_i^k$$

$$^{t+\Delta t}u_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; {}^{t+\Delta t}u_i^k$$

$$^{t+\Delta t}x_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; ^{t+\Delta t}x_i^k$$

$$^{t}u_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; ^{t}u_i^k$$

$$^{0}u_i = \sum_{k=1}^{8} h_k \; ^{0}u_i^k$$

Com $i = 1, 2, 3$.

E as funções Lagrangeanas de interpolação,

$$h_k = \frac{1}{8}(1 \pm r \;\;)(1 \pm s \;\;)(1 \pm t \;\;)$$

O tensor das deformações de Green-Lagrange, representado por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left({}_0u_{i,j} + \;\; {}_0u_{j,i} + \; {}^t_0u_{k,i} \;\; {}_0u_{k,j} + \;\; {}_0u_{k,i} \; {}^t_0u_{k,j} \right) + \frac{1}{2}\left({}_0u_{k,i} \;\; {}_0u_{k,j} \right)$$

Ou,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\eta}$$

Sendo $\boldsymbol{e}$, o termo linear e $\boldsymbol{\eta}$, o termo não linear. Expandindo na forma de um vetor, fica:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{e_0} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e_t}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{t}_{0}u_{1,1}\ {}_{0}u_{1,1} + {}^{t}_{0}u_{2,1}\ {}_{0}u_{2,1} + {}^{t}_{0}u_{3,1}\ {}_{0}u_{3,1} \\ {}^{t}_{0}u_{1,2}\ {}_{0}u_{1,2} + {}^{t}_{0}u_{2,2}\ {}_{0}u_{2,2} + {}^{t}_{0}u_{3,2}\ {}_{0}u_{3,2} \\ {}^{t}_{0}u_{1,3}\ {}_{0}u_{1,3} + {}^{t}_{0}u_{2,3}\ {}_{0}u_{2,3} + {}^{t}_{0}u_{3,3}\ {}_{0}u_{3,3} \\ \left({}^{t}_{0}u_{1,1}\ {}_{0}u_{1,2} + {}^{t}_{0}u_{2,1}\ {}_{0}u_{2,2} + {}^{t}_{0}u_{3,1}\ {}_{0}u_{3,2} + {}_{0}u_{1,1}\,{}^{t}_{0}u_{1,2} + {}_{0}u_{2,1}\,{}^{t}_{0}u_{2,2} + {}_{0}u_{3,1}\,{}^{t}_{0}u_{3,2}\right) \\ \left({}^{t}_{0}u_{1,1}\ {}_{0}u_{1,3} + {}^{t}_{0}u_{2,1}\ {}_{0}u_{2,3} + {}^{t}_{0}u_{3,1}\ {}_{0}u_{3,3} + {}_{0}u_{1,1}\,{}^{t}_{0}u_{1,3} + {}_{0}u_{2,1}\,{}^{t}_{0}u_{2,3} + {}_{0}u_{3,1}\,{}^{t}_{0}u_{3,3}\right) \\ \left({}^{t}_{0}u_{1,2}\ {}_{0}u_{1,3} + {}^{t}_{0}u_{2,2}\ {}_{0}u_{2,3} + {}^{t}_{0}u_{3,2}\ {}_{0}u_{3,3} + {}_{0}u_{1,2}\,{}^{t}_{0}u_{1,3} + {}_{0}u_{2,2}\,{}^{t}_{0}u_{2,3} + {}_{0}u_{3,2}\,{}^{t}_{0}u_{3,3}\right) \end{bmatrix}$$

Sendo $\boldsymbol{e = e_0 + e_t}$.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{1,1}^{2} + {}_{0}u_{2,1}^{2} + {}_{0}u_{3,1}^{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{1,2}^{2} + {}_{0}u_{2,2}^{2} + {}_{0}u_{3,2}^{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left({}_{0}u_{1,3}^{2} + {}_{0}u_{2,3}^{2} + {}_{0}u_{3,3}^{2}\right) \\ {}_{0}u_{1,1}\ {}_{0}u_{1,2} + {}_{0}u_{2,1}\ {}_{0}u_{2,2} + {}_{0}u_{3,1}\ {}_{0}u_{3,2} \\ {}_{0}u_{1,1}\ {}_{0}u_{1,3} + {}_{0}u_{2,1}\ {}_{0}u_{2,3} + {}^{t}_{0}u_{3,1}\ {}_{0}u_{3,3} \\ {}_{0}u_{1,2}\ {}_{0}u_{1,3} + {}_{0}u_{2,2}\ {}_{0}u_{2,3} + {}_{0}u_{3,2}\ {}_{0}u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Escrevendo os termos sob uma forma conveniente;

$$\boldsymbol{e_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{0}u_{1,1} \\ {}_{0}u_{1,2} \\ {}_{0}u_{1,3} \\ {}_{0}u_{2,1} \\ {}_{0}u_{2,2} \\ {}_{0}u_{2,3} \\ {}_{0}u_{3,1} \\ {}_{0}u_{3,2} \\ {}_{0}u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$e_t = \begin{bmatrix} {}^{t}_{0}u_{1,1} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,1} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{t}_{0}u_{1,2} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,2} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{1,3} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,3} & 0 & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,3} \\ {}^{t}_{0}u_{1,2} & {}^{t}_{0}u_{1,1} & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,2} & {}^{t}_{0}u_{2,1} & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,2} & {}^{t}_{0}u_{3,1} & 0 \\ {}^{t}_{0}u_{1,3} & 0 & {}^{t}_{0}u_{1,1} & {}^{t}_{0}u_{2,3} & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,1} & {}^{t}_{0}u_{3,3} & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,1} \\ 0 & {}^{t}_{0}u_{1,3} & {}^{t}_{0}u_{1,2} & 0 & {}^{t}_{0}u_{2,3} & {}^{t}_{0}u_{2,2} & 0 & {}^{t}_{0}u_{3,3} & {}^{t}_{0}u_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{0}u_{1,1} \\ {}_{0}u_{1,2} \\ {}_{0}u_{1,3} \\ {}_{0}u_{2,1} \\ {}_{0}u_{2,2} \\ {}_{0}u_{2,3} \\ {}_{0}u_{3,1} \\ {}_{0}u_{3,2} \\ {}_{0}u_{3,3} \end{bmatrix}$$

E;

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}_{0}u_{1,1} & 0 & 0 & {}_{0}u_{2,1} & 0 & 0 & {}_{0}u_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{0}u_{1,2} & 0 & 0 & {}_{0}u_{2,2} & 0 & 0 & {}_{0}u_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{0}u_{1,3} & 0 & 0 & {}_{0}u_{2,3} & 0 & 0 & {}_{0}u_{3,3} \\ {}_{0}u_{1,2} & {}_{0}u_{1,1} & 0 & {}_{0}u_{2,2} & {}_{0}u_{2,1} & 0 & {}_{0}u_{3,2} & {}_{0}u_{3,1} & 0 \\ {}_{0}u_{1,3} & 0 & {}_{0}u_{1,1} & {}_{0}u_{2,3} & 0 & {}_{0}u_{2,1} & {}_{0}u_{3,3} & 0 & {}_{0}u_{3,1} \\ 0 & {}_{0}u_{1,3} & {}_{0}u_{1,2} & 0 & {}_{0}u_{2,3} & {}_{0}u_{2,2} & 0 & {}_{0}u_{3,3} & {}_{0}u_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{0}u_{1,1} \\ {}_{0}u_{1,2} \\ {}_{0}u_{1,3} \\ {}_{0}u_{2,1} \\ {}_{0}u_{2,2} \\ {}_{0}u_{2,3} \\ {}_{0}u_{3,1} \\ {}_{0}u_{3,2} \\ {}_{0}u_{3,3} \end{bmatrix};$$

Que podem ser escritos como:

$$\boldsymbol{e_0} = \boldsymbol{L}G\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{e_t} = A_t G\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} A_0 G\boldsymbol{q}$$

G pode ainda ser escrito como:

$$G = [\Gamma][\partial h]$$

Sabendo que $u_i = f(x_1, x_2, x_3)$ e $x_1, x_2, x_3 = f(r, s, t)$, o gradiente dos deslocamentos, fica:

$$\begin{bmatrix} u_{i,r} \\ u_{i,s} \\ u_{i,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} & x_{3,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} & x_{3,s} \\ x_{1,t} & x_{2,t} & x_{3,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ u_{i,3} \end{bmatrix}$$

Ou,

$$\begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ u_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} & x_{3,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} & x_{3,s} \\ x_{1,t} & x_{2,t} & x_{3,t} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{i,r} \\ u_{i,s} \\ u_{i,t} \end{bmatrix}$$

Com,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} & x_{3,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} & x_{3,s} \\ x_{1,t} & x_{2,t} & x_{3,t} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo os vetores nas seguintes formas:

$$G = \begin{bmatrix} {}_0u_{1,1} \\ {}_0u_{1,2} \\ {}_0u_{1,3} \\ {}_0u_{2,1} \\ {}_0u_{2,2} \\ {}_0u_{2,3} \\ {}_0u_{3,1} \\ {}_0u_{3,2} \\ {}_0u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0u_{1,r} \\ {}_0u_{1,s} \\ {}_0u_{1,t} \\ {}_0u_{2,r} \\ {}_0u_{2,s} \\ {}_0u_{2,t} \\ {}_0u_{3,r} \\ {}_0u_{3,s} \\ {}_0u_{3,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}_0u_{1,r} \\ {}_0u_{1,s} \\ {}_0u_{1,t} \\ {}_0u_{2,r} \\ {}_0u_{2,s} \\ {}_0u_{2,t} \\ {}_0u_{3,r} \\ {}_0u_{3,s} \\ {}_0u_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{8} h_{k,r}\ {}_0u_1^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,s}\ {}_0u_1^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,t}\ {}_0u_1^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,r}\ {}_0u_2^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,s}\ {}_0u_2^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,t}\ {}_0u_2^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,r}\ {}_0u_3^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,s}\ {}_0u_3^k \\ \sum_{k=1}^{8} h_{k,t}\ {}_0u_3^k \end{bmatrix} = [\partial h]\{q\}$$

E a matriz A_t é estabelecida semelhantemente a anterior, todavia, devem ser utilizadas as transformações e seus respectivos deslocamentos no tempo t.

Desse modo, a matrizes de transformação $\boldsymbol{B_L}$ **e** $\boldsymbol{B_{NL}}$ são definidas por:

$$\boldsymbol{B_{NL}} = \frac{1}{2} A_0[\Gamma][\partial h]$$

E,

$$\boldsymbol{B_L} = \boldsymbol{B_{L0}} + \boldsymbol{B_{Lt}} = [L][\Gamma][\partial h] + A_t[\Gamma][\partial h]$$

$$[\Gamma] = [J]^{-1}$$

Assim, do princípio dos trabalhos virtuais, têm-se:

$$({}^t_0\boldsymbol{K_L} + {}^t_0\boldsymbol{K_{NL}})\boldsymbol{u} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^t_0\boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{t+\Delta t}}\dot{\boldsymbol{u}}$$

Sabendo ainda que;

$$\boldsymbol{K_L} = \int_{-1}^{1}\int\int {}^t_0\boldsymbol{B}_L^T\boldsymbol{C}\,{}^t_0\boldsymbol{B_L} j\, dr\, ds\, dt$$

$$\boldsymbol{K}_{NL} = \int_{-1}^{1}\int\int {}^t_0\boldsymbol{B}_{NL}^T\,{}^t_0\boldsymbol{S}\,{}^t_0\boldsymbol{B}_{NL} j\, dr\, ds\, dt$$

$${}^t_0\boldsymbol{F} = \int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}}\int\int {}^t_0\boldsymbol{B}_L^T\,{}^t_0\widehat{\boldsymbol{S}} j\, dr\, ds\, dt$$

Sendo $\boldsymbol{S}$ o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff. Para a descrição lagrangeana total da análises de materiais hipereslásticos ou lineares elásticos, é relacionado por:

$${}^t_0S_{ij} = {}^t_0C_{ijrs}\,{}^t_0\epsilon_{rs}$$

j é chamado de Jacobiano da transformação e é dado pelo determinante da matriz jacobiana

E, a matriz de massa pode ser escrita como combinação de uma matriz de massa consistente e outra de massas concentradas:

A matriz de massa consistente fica:

$$\boldsymbol{M}^{c}{}_{24X24} = \iiint_{-1}^{1} \rho[H]^{T}[H]\, j\, dr\, ds\, dt$$

Onde [H] é a matriz de funções de interpolação e ρ é a massa por unidade de volume do material.

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_8 \end{bmatrix}$$

A matriz de massas concentradas, fica:

$$\boldsymbol{M}^{l}{}_{24X24} = \int_{V} j\frac{\rho}{8}\, dr\, ds\, dt\, \boldsymbol{I}_{24X24}$$

Então a matriz de massa fica:

$$\boldsymbol{M}^{ele} = a_1\boldsymbol{M}^{c} + a_2\boldsymbol{M}^{l}$$

a_1 e a_2 são os coeficientes de ponderação.

A matriz de amortecimento deve ser construída em função da análise. Entretanto, para o MEF pode ser implementada com a seguinte relação:

$$\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K}$$

Onde α e β são as constantes de Rayleigh para o amortecimento proporcional.

B. Algoritmos

I. Método de Newmark.

Segue o algoritmo para integração das equações não lineares.

a. Determinar parâmetros e tolerâncias dos métodos de Newmark e Newton: $\Delta t, t_f, t_0, \gamma, \delta, a_1 \ldots a_7, etc.$
b. Montar $\boldsymbol{K_L}$ e $\boldsymbol{M}$. Dado **R**(t = 0) e $\mathbf{u}_0$, cálcular de, $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}_0$.
c. Fazer $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.
d. Determinar $\boldsymbol{R}(t_{i+1})$.
e. Método de Newton. Iterar: $k = 1$ até n
   i. k = k + 1
   ii. Montar: $\boldsymbol{K}^k = \boldsymbol{K_L} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{NL}}^k$
   iii. Fazer: $\boldsymbol{C}^k = \boldsymbol{\alpha M} + \boldsymbol{\beta K}$
   iv. Fazer: $\boldsymbol{F}^{*k} = \boldsymbol{F}^{t_{i+1}} + [\boldsymbol{M}(a_0\boldsymbol{u}^t + a_2\boldsymbol{v}^t + a_3\boldsymbol{a}^t) + \boldsymbol{C}(a_1\boldsymbol{u}^t + a_4\boldsymbol{v}^t + a_5\boldsymbol{a}^t)]$ e $\boldsymbol{K}^{*k} = (\boldsymbol{K}^k + a_0\boldsymbol{M} + a_1\boldsymbol{C}^k)$
   v. Calcular: $\boldsymbol{K}^{*\mathrm{k}}\Delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{t_{i+1}}} = \boldsymbol{S}^k$; $\mathbf{S}^{\mathrm{k}} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{F}^{*k}$
   vi. Atualizar:$\boldsymbol{u}_{k+1}^{t_{i+1}} = \boldsymbol{u}_k^{t_{i+1}} + \Delta\boldsymbol{u}^{t_{i+1}}$
   vii. Verificar: $|\boldsymbol{S}^k| \leq tol$ e $|\Delta\boldsymbol{u}^k| \leq tol$?
      i. ***sim***: Vá para o passo f.
      ii. ***não*****:** Retorne para o passo i.
f. Calcular $v(t_{i+1})$ e $a(t_{i+1})$.
g. Atualizar coordenadas nodais.
h. Aloca as variáveis do passo na memória, para uso no passo seguinte.
i. Verificar: $t_{i+1} \geq t_f$?
      i. ***sim***: Seguir para o passo j.
      ii. ***não***: Processo é continuado. Vá para o passo c.

j. Salva o histórico do movimento em arquivo externo para análise no pós-processamento.

II. Método de Iteração por Subespaços

Abaixo, o algoritmo para extração dos modos e frequências naturais.

a. Definir vetores Iniciais aleatórios: $\boldsymbol{X}_0$
b. Ortonormalizar $\boldsymbol{X}_0$.
c. Fazer $k = 1\ até\ n$
   i. Fazer k = k + 1
   ii. Calcular: $\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}$
d. Calcular projeções: $\boldsymbol{M}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}{}^{T}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1} \quad e \quad \boldsymbol{K}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}{}^{T}\boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}$
e. Entra no método de Jacobi: Resolver $\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1} = \boldsymbol{M}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{\Lambda}_{k+1}$
   i. Fazer $\boldsymbol{\Lambda}_0 = \boldsymbol{I}$
   ii. Fazer $i = i + 1$
   iii. Calcular: θ_1 e θ_2
   iv. Montar: $[P] = \boldsymbol{P}(\theta_1, \theta_2)$
   v. Transformar: $\boldsymbol{M}_{k+1}^{i+1} = \boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{M}_k^i\boldsymbol{P}_i$ e $\boldsymbol{K}_{k+1}^{i+1} = \boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{K}_k^i\boldsymbol{P}_i$
   vi. Fazer: $\boldsymbol{Q}_{k+1}^{i+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}^{i}\boldsymbol{P}_i$
      1. Se $\boldsymbol{M}_{k+1}^{i+1}\ e\ \boldsymbol{K}_{k+1}^{i+1} \rightarrow diagonal$: $\boldsymbol{\Phi}(l,l) = \frac{\boldsymbol{M}(l,l)}{\boldsymbol{K}(l,l)}$.
      Vá ao passo f.
      2. Caso contrário: Retornar ao passo ii.
f. Calcular: $\boldsymbol{X}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1}$
g. Verifica convergência:
   i. Se ***sim***: Vá ao passo h.
   ii. Se ***não***: Retorne ao passo c.
h. Salvar Autovalores e Autovetores. Análise Concluída