



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



DECAIMENTO DE CORRELAÇÃO E TEOREMA DO LIMITE
CENTRAL PARA MEDIDAS ZOOMING

ROBERTO SANT'ANNA SACRAMENTO

Salvador-Bahia

Março de 2012

DECAIMENTO DE CORRELAÇÃO E TEOREMA DO LIMITE CENTRAL PARA MEDIDAS ZOOMING

ROBERTO SANT'ANNA SACRAMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Salvador-Bahia

Março de 2012

Sacramento, Roberto Sant'Anna.

Decaimento de Correlação e Teorema do Limite Central para Medidas
Zooming / Roberto Sant'Anna Sacramento. – Salvador: UFBA, 2012.

60 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de
Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Teoria da medida.
I. Pinheiro, Vilton Jeovan Viana. II. Universidade Federal da Bahia,
Instituto de Matemática. III. Título.

CDU : 519.218.84

: QA614

DECAIMENTO DE CORRELAÇÃO E TEOREMA DO LIMITE CENTRAL PARA MEDIDAS ZOOMING

ROBERTO SANT'ANNA SACRAMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal da Bahia como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre em
Matemática,

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araujo
UFBA

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira
UFAL

À minha mãe, Delma, minha irmã, Karine, à Kaila e a Augusto Bolívar.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu Deus, pois me deu forças e direção para chegar ao final de mais uma grande etapa em minha vida, juntamente com a conclusão deste trabalho.

Agradeço também à minha mãe, pois sempre e de modo muito forte me ajudou nesta caminhada. Sem o seu incentivo eu muito possivelmente não teria chegado até aqui!

Agradeço ao Força Jovem Universal pelo incentivo, apoio e pelos maravilhosos momentos vividos.

Agradeço ao professor Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro, pelo seu apoio e orientação neste trabalho, bem como por toda a sua paciência e dedicação ao me ajudar a concluir esta dissertação de mestrado.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido a mim durante todo o meu mestrado.

“-Quem? O infinito? Diz-lhe que entre! Faz bem ao infinito estar entre gente.”

(Alexandre O’Neill)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a validade de algumas propriedades estatísticas para sistemas dinâmicos associados a uma certa medida, a saber, o decaimento de correlações e a validade do Teorema do Limite Central. Essas propriedades serão obtidas no contexto de um tipo especial de medida (as medidas *zooming*). Nesse contexto, as partições de *Markov* tem sido um ferramenta muito útil para analisar o comportamento qualitativo de tais sistemas. Outra ferramenta útil utilizada aqui é o levantamento de medidas. Utilizaremos também algumas ferramentas intermediárias, como conjuntos encaixados e componentes ergódicas, para obter a construção de uma partição de *Markov* associada a nosso sistema.

Palavras-chave: Medidas *zooming*; Decaimento de Correlações; Partições de Markov; Torre de Young

Abstract

This work aims to present the validate of some statistical properties for dynamical systems associated to a measure, namely, decay of correlations and validate of Limit Central Theorem. These properties will be obtained in the context of a special kind of measures (the zooming measures). In this way, Markov partitions have been a useful tool for to analyze the qualitative behavior of such systems. Another tool utilized here is the lift of measures. We utilize also some intermediary tools, such as nested sets and ergodic components, in order to obtain the construction of a Markov partition associated to our system.

Keywords: Zooming measures; Decay of correlations; Markov partitions; Young Tower.

Sumário

Introdução	1
1 Conjuntos encaixados	7
1.1 Construção de conjuntos \mathcal{E} -encaixados	9
2 Componentes Ergódicas	13
3 Medidas <i>zooming</i>	20
4 Construção de uma aplicação de <i>Markov</i> induzida local	32
5 Propriedades estatísticas para medidas <i>zooming</i>	41
5.1 Preliminares	41
5.2 Algumas propriedades estatísticas para a Torre de <i>Young</i>	45
5.3 Conclusão	47
6 Definições básicas	53
A Alguns resultados importantes	56
Referências	58

Introdução

Os modelos de sistemas dinâmicos em que estamos interessados mais diretamente são transformações determinísticas, isto é, o estado do sistema em qualquer momento determina toda a trajetória futura. Por exemplo, se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação definida num espaço X , se sabemos onde se encontra um certo ponto $x \in X$, certamente saberemos onde se encontra o seu décimo sétimo iterado. Para isso, basta computarmos $f^{17}(x)$. Quando o sistema é invértível, a trajetória passada fica igualmente determinada. No entanto, esses sistemas podem apresentar também um comportamento do tipo estocástico (ou seja, "parcialmente aleatório"). De um modo informal, isso significa que em num nível mais amplo que o das trajetórias individuais, a informação sobre o passado vai sendo esquecida à medida que o sistema é iterado.

Mais formalmente: Considere uma aplicação $f : X \rightarrow X$ definida em um espaço métrico X e uma medida invariante μ associada a f . Dadas funções mensuráveis $\psi, \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, queremos analisar a evolução das correlações entre ψ (em tempo zero) e $\phi \circ f^n$ (em tempo n). Podemos pensar em ψ e ϕ como grandezas observáveis que medimos no sistema (num contexto físico, essas grandezas poderiam ser a energia cinética, a temperatura ou a pressão, por exemplo).

Em Sistemas Dinâmicos, chamamos de correlação de dois observáveis ψ e ϕ com respeito a f em tempo n ao número:

$$\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) = \left| \int \psi \phi \circ f^n d\mu - \int \psi d\mu \int \phi d\mu \right|$$

Por exemplo, se $\psi = \chi_A$ e $\phi = \chi_B$ são funções características de conjuntos mensuráveis $A, B \subset X$ então ψ dá informação sobre a posição inicial de um ponto $x \in X$, enquanto que $\phi \circ f^n$ informa sobre a posição do seu n -ésimo iterado $f^n(x)$. Se a correlação $\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n)$ for pequena então a primeira informação será de pouca utilidade para fazer previsões quanto à segunda informação. Em outras palavras, se a correlação $\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n)$ entre ψ e ϕ diminui à medida que n aumenta, temos que o sistema determinístico f tende a se tornar probabilístico, visto que a posição de um ponto não teria muita utilidade para prever a posição um iterado grande desse ponto.

É conhecido que esse tipo de comportamento (o decaimento da correlação entre

duas funções observáveis à medida que n aumenta) é bastante comum em vários modelos importantes de sistemas dinâmicos, como é o caso dos sistemas não uniformemente expansores (veja, por exemplo, [3, 4, 7]). Muitas vezes o decaimento ocorre numa taxa exponencial, por exemplo, $\exists 0 < \lambda < 1$ e uma constante $C = C(\psi, \phi) > 0$ tais que

$$\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) \leq C\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainda no nosso exemplo, em que $\psi = \mathcal{X}_A$ e $\phi = \mathcal{X}_B$, vemos que afirmar que a correlação entre ψ e $\phi \circ f^n$ decai (ou converge) a zero quando $n \rightarrow +\infty$ equivale a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) = 0$$

para quaisquer conjuntos mensuráveis $A, B \subset X$. Em outras palavras, quando n cresce, a probabilidade do evento $\{x \in B \text{ e } f^n(x) \in A\}$ converge para o produto das probabilidades dos eventos $\{x \in B\}$ e $\{f^n(x) \in A\}$.

Pelo exposto acima, é possível perceber que estamos interessados no estudo qualitativo de sistemas dinâmicos. Desde o final da década de 1960, as partições de *Markov* foram uma das principais ferramentas para essa análise qualitativa no caso de sistemas uniformemente hiperbólicos e até mesmo sistemas uniformemente expansores. Para dinâmicas uniformemente hiperbólicas, a introdução sistemática dessas partições foi devida a Sinai, Ruelle e Bowen, e se tornou uma ferramenta técnica chave na teoria ergódica de sistemas uniformemente hiperbólicos/expansores. Sinai, Ruelle e Bowen usaram partições de Markov para associar estes sistemas com dinâmicas simbólicas, provar a existência e unicidade de estados de equilíbrio, e muitas outras propriedades, na vizinhança de qualquer conjunto transitivo hiperbólico.

A estrutura estudada neste trabalho é mais geral, pois ela pode ser aplicada não apenas em dinâmicas uniformemente hiperbólicas, mas também em sistemas não uniformemente expansores, mesmo aqueles que admitam uma região crítica ou singular. Em geral, nesses casos não se pode esperar a existência de uma partição de *Markov* finita clássica. Entretanto, iremos mostrar a existência de uma partição bastante similar, que será chamada de partição induzida de *Markov*.

Sabemos que as dinâmicas expansoras sempre admitem contração para o passado (isto é, a distância entre a imagem de dois pontos próximos é maior que a distância entre esses pontos). A grosso modo, veremos que no caso expansor (uniformemente ou não) as imagens de uma grande quantidade de pontos (no sentido de medida) se afasta exponencialmente, enquanto seus iterados permanecerem próximos o suficiente. Como se pode ver em [2], a existência desse fenômeno é possível mesmo quando a dinâmica f

admite algum subconjunto de pontos críticos ou singulares (para isso ocorrer, é preciso supor que os iterados não ficam muito próximos da região crítica).

É nesse aspecto que consiste o grau de generalidade maior do contexto que estamos abordando. Estaremos lidando com um caso mais abstrato, onde apenas suporemos que o sistema dinâmico admite um fenômeno de contração para o passado, informalmente descrito acima. Portanto, estaremos incluindo aqui tanto o caso uniformemente expansor como o não uniformemente expansor (mesmo admitindo regiões críticas ou singulares).

Formalmente falando, considere uma aplicação mensurável $f : X \rightarrow X$ definida num espaço métrico, conexo, compacto e separável. Dizemos que uma sequência $\alpha = \{\alpha_n\}_{1 \leq n \in \mathbb{N}}$ de funções $\alpha_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma contração *zooming* se satisfizer as seguintes condições:

- $\alpha_n(r) < r$, $\forall r > 0$ e $\forall n \geq 1$;
- $\alpha_n(r) \leq \alpha_n(\tilde{r})$, $\forall 0 \leq r \leq \tilde{r}$ e $\forall n \geq 1$;
- $\alpha_n \circ \alpha_m(r) \leq \alpha_{n+m}(r)$; $\forall r > 0$ e $\forall n, m \geq 1$;
- $\sup_{0 \leq r \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \right) < \infty$

Sejam $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ uma contração *zooming* e $\delta > 0$ uma constante positiva.

Dizemos que $n \geq 1$ é um tempo (α, δ) -*zooming* para $p \in X$ (com respeito a f) se existe uma vizinhança $V_n(p)$ de p satisfazendo:

1. f^n envia $\overline{V_n(p)}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$;
2. $\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \leq \alpha_{n-j}(\text{dist}(f^n(x), f^n(y)))$, quaisquer que sejam $x, y \in V_n(p)$ e $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Estaremos assumindo que esse sistema admite uma medida (medida *zooming*, conforme definição abaixo) com respeito à qual quase todo ponto admite infinitos tempos *zooming* e que também a frequência de tempos *zooming* é positiva. Uma medida μ , finita e f não singular definida na σ -álgebra de Borel associada a X , é chamada medida *zooming* se μ quase todo ponto possui infinitos tempos (α, δ) -*zooming* e além disto tem-se que

$$\limsup \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in Z_j(\alpha, \delta, f)\} > 0$$

para μ quase todo ponto $x \in X$, em que $Z_j(\alpha, \delta, f)$ é o conjunto de pontos de X para os quais j é um tempo (α, δ) -*zooming*.

Suponha que temos uma aplicação f agindo num espaço métrico X associado a uma medida de referência μ (uma medida *zooming*, por exemplo). De maneira geral ocorre que a medida de referência não é invariante com respeito a f . Surge então a necessidade

de obtermos uma medida invariante com respeito à dinâmica mas que também tenha uma boa relação com a medida de referência original (que seja absolutamente contínua, por exemplo). Desse modo, podemos estudar as propriedades associadas ao sistema, tais como entropia métrica ou (no nosso caso) o decaimento de correlações. Nesse ponto nos deparamos com um problema, visto que em geral não é simples encontrar medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito a uma dada medida de referência.

A ferramenta utilizada nesse texto para contornar esse problema consiste na utilização das aplicações induzidas de *Markov*. De uma maneira bem simplória, podemos dizer que uma aplicação induzida de *Markov* é uma aplicação de um subconjunto $\Delta \subset X$ em si mesmo, que para cada $x \in \Delta$ associa um certo iterado de x com relação à dinâmica original, onde o número de iterados depende do ponto x considerado. Se esse processo for feito cuidadosamente, algumas propriedades da dinâmica original (alguma expansão, por exemplo) podem ser verificadas como propriedades da aplicação induzida, já na primeira iteração da induzida. É bem conhecido o fato de que, se assumirmos alguma condição de controle de distorção para a aplicação induzida, existe uma medida invariante ergódica associada a essa aplicação induzida, e que é absolutamente contínua com respeito à medida de referência. Uma vantagem de utilizarmos aplicações induzidas é que, em vários sentidos, elas são aplicações mais simples e que várias propriedades que valem para as aplicações (que essencialmente consiste de um iterado da dinâmica original, para cada ponto) podem ser verificadas como propriedades válidas também para a dinâmica original (apesar de em algumas vezes não ser tão simples de fazer essa verificação).

E é exatamente isso o que pretendemos fazer nesse trabalho. Vamos verificar que para uma dinâmica associada a uma medida *zooming* com algum controle de distorção existe uma aplicação induzida de *Markov* que é compatível com essa medida (ver Definição 4.0.33). Poderemos assim obter uma medida ergódica invariante com respeito à induzida e absolutamente contínua com respeito à medida de referência. Para essa medida poderemos garantir que existe decaimento de correlações associado à aplicação induzida. A parte final do trabalho é verificar, a partir desse fato, que também existe decaimento de correlações com respeito à dinâmica original.

Para garantir a existência de uma aplicação induzida de *Markov* associada a uma medida *zooming* recorreremos à noção de conjunto encaixado, cuja principal propriedade é que duas pré-imagens desse conjunto (pré-imagens por f^n , para algum $n \in \mathbb{N}$ arbitrário) não podem se intersectar.

Além disso, para garantir a existência de uma medida ergódica invariante com respeito à aplicação induzida que é absolutamente contínua com relação à medida *zooming* original, recorreremos ao trabalho de L. -S. Young em [16, 15], o qual fornece a construção de uma estrutura abstrata que se relaciona bem com aplicações induzidas por meio de uma

ideia bastante simples mas que por outro lado possui propriedades muito importantes, a saber, as Torres de *Young*.

O corpo do presente texto está dividido em seis capítulos e um apêndice cujos conteúdos e objetivos estão brevemente discriminados a seguir:

- **Capítulo 1:** Conjuntos encaixados. Neste Capítulo apresentamos a noção de conjuntos encaixados (introduzida em [13]) adaptados ao tipo de pré-imagens com as quais nós estamos interessados.
- **Capítulo 2:** Componentes ergódicas. Aqui são estudadas as componentes ergódicas para medidas não (necessariamente) invariantes associadas a aplicações em espaços métricos. É interessante notar que nesse trabalho estaremos lidando com a noção (talvez exótica para alguns) de medidas ergódicas que não precisam ser invariantes com respeito à dinâmica considerada.
- **Capítulo 3:** Medidas *zooming*. Neste Capítulo são estudadas propriedades associadas às medidas *zooming*, definidas anteriormente, bem como a sua relação com conjuntos encaixados e componentes ergódicas. O principal objetivo aqui é mostrar a construção de uma estrutura que possibilite garantir a existência de uma aplicação de *Markov* induzida com respeito à dinâmica original, sempre que tivermos uma medida *zooming* associada.
- **Capítulo 4:** Aplicação de *Markov* induzida. Nesta parte são mostrados resultados importantes associadas à medidas e conjuntos *zooming*. Além disto, é mostrada a existência de uma medida invariante com respeito à aplicação induzida de *Markov* obtida no contexto *zooming* e, por conseguinte, a existência de uma medida invariante $\nu \ll \mu$ que é absolutamente contínua com respeito a uma dada medida *zooming* μ de referência com algum controle de distorção.
- **Capítulo 5:** Decaimento de correlações e Teorema do Limite Central. Neste Capítulo estão os resultados principais deste trabalho, bem como é feita uma breve descrição do método para análise qualitativa das propriedades estatísticas associadas ao sistema em estudo. Este método, proposto em [15], é baseado nas Torres de *Young*.
- **Capítulo 6:** Definições básicas. Apresenta algumas definições necessárias à compreensão do texto.
- **Apêndice A:** Resultados envolvendo o levantamento de medidas. Encontram-se neste Apêndice o enunciado de alguns resultados relacionados com a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas e o levantamento de medidas (veja

4.0.32). A demonstração desses resultados pode ser encontrada em literatura indicada.

Capítulo 1

Conjuntos encaixados

Neste capítulo iremos apresentar a construção abstrata dos conjuntos encaixados. Estes conjuntos são uma generalização para o caso multidimensional dos intervalos *nice*, introduzidos por Martens em [10]. Considere, por exemplo, uma aplicação $f : [0, 1] \curvearrowright$. Um *intervalo nice* é um intervalo aberto tal que a órbita futura $\mathcal{O}^+(\partial I)$ do bordo de I não retorna a I , isto é, $\mathcal{O}^+(\partial I) \cap I = \emptyset$. Estes intervalos são fáceis de construir quando consideramos aplicações de intervalos. Por exemplo, dois pontos consecutivos de uma órbita periódica definem um intervalo *nice*. Em geral a propriedade mais interessante dos intervalos *nice* é que não existem pré-imagens não-lincadas de tais intervalos (isto é, se I_1 e I_2 são enviados homeomorficamente em um intervalo *nice* por f^{n_1} e f^{n_2} respectivamente então $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \subset I_2$ ou $I_2 \subset I_1$).

Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação definida em um espaço métrico X completo e separável. Um conjunto $P \subset X$ é dito ser uma *pré-imagem regular de ordem* $n \in \mathbb{N}$ de um conjunto $K \subset X$ se f^n envia P homeomorficamente em K . Vamos denotar por $\text{ord}(P)$ a ordem de P (com respeito a K).

Neste capítulo iremos fixar uma coleção \mathcal{E}_0 de subconjuntos abertos e conexos de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $V \in \mathcal{E}_0$, considere uma coleção $\mathcal{E}_n(V)$ de pré-imagens regulares de K com ordem n . Note que não estamos considerando que a coleção $\mathcal{E}_n(V)$ contenha necessariamente todas as pré-imagens de ordem n de V . Tome $\mathcal{E}_n = (\mathcal{E}_n(V))_{V \in \mathcal{E}_0}$. Dizemos que a sequência $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ é uma *família dinamicamente fechada de pré-imagens (regulares)* se $f^\ell(E) \in \mathcal{E}_{n-\ell} \forall E \in \mathcal{E}_n$ e $\forall 0 \leq \ell \leq n$. Esta condição nos garante que se uma pré-imagem regular de ordem n de V não pertence a $\mathcal{E}_n(V)$ então as pré-imagens regulares de V com ordem maior que n também não pertencerão a $\mathcal{E}(V)$. Veja a Figura 1.1.

Dado $Q \in \mathcal{E}_n$, denotamos $f^n|_Q$ por f^Q e denotamos por f^{-Q} o ramo \mathcal{E} -inverso, $(f^n|_Q)^{-1}$. Seja $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_n$ uma família dinamicamente fechada de pré-imagens. Um conjunto P é chamado *\mathcal{E} -pré-imagem* de um conjunto $W \subset X$ se existe $n \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{E}_n$ tais que $\overline{W} \subset f^n(Q)$ e $P = f^{-Q}(W)$, onde \overline{W} é o fecho de W .

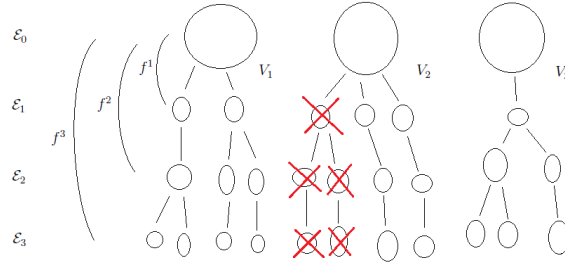


Figura 1.1: Esquema mostrando a construção de uma família de pré-imagens fechada pela dinâmica. Se desprezamos um elemento em \mathcal{E}_1 , devemos também desprezar as suas pré-imagens correspondentes em \mathcal{E}_2 e \mathcal{E}_3 .

Observação 1.0.1. *Veja que se duas \mathcal{E} -pré-imagens distintas, \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , de um conjunto $\mathcal{X} \subset X$ possuem a mesma ordem então elas não podem se intersectar. De fato, sejam $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$ \mathcal{E} -pré-imagens de $\mathcal{X} \subset X$ com $n = \text{ord}(\mathcal{X}_1) = \text{ord}(\mathcal{X}_2)$ e suponha por absurdo que $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, escrevamos $\mathcal{X}_i = f^{-Q_i}(\mathcal{X})$, com $Q_i \in \mathcal{E}_n$ e $P_i = f^{-Q_i}(f^n(Q_1) \cap f^n(Q_2))$. Note que, por definição, $f^n(Q_i) \supset \overline{\mathcal{X}}$, logo $P_i \supset \mathcal{X}_i$, com $i \in \{1, 2\}$. Segue que $\emptyset \neq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \subset P_1 \cap P_2$. Veja que $P_1 \neq P_2$ (do contrário teríamos: $\mathcal{X}_2 = f^{-Q_2}(\mathcal{X}) = (f^n|_{P_2})^{-1}(\mathcal{X}) = (f^n|_{P_1})^{-1}(\mathcal{X}) = f^{-Q_1}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_1$, o que contraria a hipótese). Como $P_1 \neq P_2$ e $\emptyset \neq P_1 \cap P_2$, obtemos que $P_1 \cap \partial P_2 \neq \emptyset$ ou $P_2 \cap \partial P_1 \neq \emptyset$. (Para isto, usamos o Teorema da Alfândega). Suponha sem perda de generalidade que $P_1 \cap \partial P_2 \neq \emptyset$. Então, $\emptyset \neq f^n(P_1 \cap \partial P_2) \subset f^n(P_1) \cap \partial(f^n(P_2)) \subset (f^n(Q_1) \cap f^n(Q_2)) \cap \partial(f^n(Q_1) \cap f^n(Q_2)) = \emptyset$, o que é um absurdo, já que Q_i é um conjunto aberto e f^{Q_i} é homeomorfismo, para $i \in \{1, 2\}$.*

Definição 1.0.2. (Conjuntos ligados). Dizemos que dois conjuntos abertos U_1 e U_2 são ligados se $U_1 \setminus U_2$, $U_2 \setminus U_1$ e $U_1 \cap U_2$ são não vazios.

Note que dois conjuntos abertos e conexos, U_1 e U_2 , são ligados se, e somente se, $\partial U_1 \cap U_2$ e $U_1 \cap \partial U_2$ são ambos conjuntos não vazios.

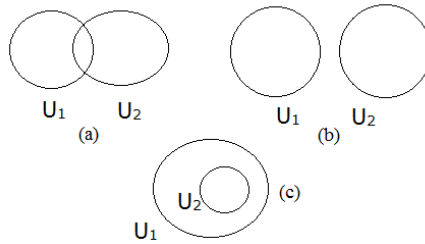


Figura 1.2: Algumas situações segundo as quais dois conjuntos abertos conexos podem ou não se intersectar. Apenas no caso (a) eles são ligados.

Definição 1.0.3. (*Conjunto \mathcal{E} -encaixado*). Um conjunto V é chamado \mathcal{E} -encaixado se é aberto e não é ligado com nenhuma \mathcal{E} -pré-imagem de si mesmo.

A propriedade fundamental de um conjunto encaixado é que quaisquer \mathcal{E} -pré-imagens P_1, P_2 deste conjunto não são lincadas, como se pode verificar pelo resultado a seguir.

Proposição 1.0.4. (*Principal propriedade de um conjunto \mathcal{E} -encaixado*). Se V é um conjunto \mathcal{E} -encaixado e P_1, P_2 são \mathcal{E} -pré-imagens de V , então P_1 e P_2 não são ligados. Ademais, as seguintes afirmações são válidas:

1. Se $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ então $\text{ord}(P_1) \neq \text{ord}(P_2)$;
2. Se $P_1 \subsetneq P_2$ com $\text{ord}(P_1) < \text{ord}(P_2)$ então V está contido em uma \mathcal{E} -pré-imagem de si mesmo com ordem maior que zero (isto é, $f^{\text{ord}(P_2)-\text{ord}(P_1)}(V) \subset V$).

Demonstração: Vamos primeiramente mostrar que P_1 e P_2 não são ligados. Seja $l_j = \text{ord}(P_j)$, com $j \in \{1, 2\}$. Se $l_1 = l_2$, temos pela Observação 1.0.1 que P_1 e P_2 não são ligados. Assuma sem perda de generalidade que $l_1 < l_2$ e suponha por absurdo que P_1 e P_2 são ligados. Considere também $p_j \in P_j \cap \partial P_{3-j}$ e $Q_i \in \mathcal{E}_{l_i}$ tais que $P_i = f^{-Q_i}(V)$. Como \mathcal{E} foi tomada como uma família dinamicamente fechada de pré-imagens de elementos de \mathcal{E}_0 , temos que $Q = f^{l_1}(Q_2) \in \mathcal{E}_{l_2-l_1}$ e que $P = f^{l_1}(P_2) = f^{-Q}(V)$ é uma \mathcal{E} -pré-imagem de V . Além disto, $f^{l_1}(P_1) = V$. Como $f^{l_1}(p_1) \in f^{l_1}(P_1) \cap \partial(f^{l_1}(P_2)) = V \cap \partial P$ e $f^{l_1}(p_2) \in f^{l_1}(P_2) \cap \partial(f^{l_1}(P_1)) = P \cap \partial V$, segue que P e V são ligados, mas isto é impossível pois V é um conjunto \mathcal{E} -encaixado.

Suponha que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. Pela Observação 1.0.1 temos que P_1 e P_2 só podem ter ordens diferentes (pois são \mathcal{E} -pré-imagens de um mesmo conjunto). Isto conclui (1).

Para concluir (2), suponha que $P_1 \subsetneq P_2$ e $l_1 < l_2$. Então $V = f^{l_1}(P_1) \subset f^{l_1}(P_2)$ (isto é, V está contido em uma \mathcal{E} -pré-imagem de si mesmo com ordem $l_2 - l_1 > 0$) e, como $f^{l_1}(P_2)$ é uma \mathcal{E} -pré-imagem de V , concluímos que $f^{l_2-l_1}(V) \subset f^{l_2}(P_2) = V$.

□

1.1 Construção de conjuntos \mathcal{E} -encaixados

Para o que será exposto nesta seção, considere um subconjunto de A de X que é aberto, conexo e não está contido em nenhuma \mathcal{E} -pré-imagem de si mesmo com ordem maior que zero.

Uma sequência finita $\mathcal{K} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de \mathcal{E} -pré-imagens de A é chamada de cadeia de pré-imagens de A iniciando em A se

1. $0 < \text{ord}(P_0) < \text{ord}(P_1) < \dots < \text{ord}(P_{n-1}) < \text{ord}(P_n)$;

2. A e P_0 são ligados;
3. P_{j-1} e P_j são ligados, $\forall 1 \leq j \leq n$;

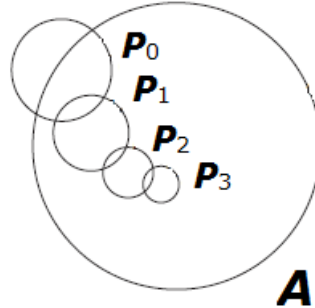


Figura 1.3: Uma cadeia (P_0, P_1, P_2, P_3) de pré-imagens começando em A .

Denote $ch_{\mathcal{E}}(A)$ como sendo a coleção de todas as cadeias de pré-imagens de A começando em A . Como A é aberto e conexo, obtemos facilmente a seguinte observação.

Observação 1.1.1. Se $(P_0, P_1, \dots, P_n) \in ch_{\mathcal{E}}(A)$, com $A \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{j=n_0}^{n_1} P_j$ é um conjunto aberto conexo $\forall 0 \leq n_0 \leq n_1 \leq n$

Defina o conjunto aberto

$$A^* = A \setminus \overline{\bigcup_{(P_j)_{j \in ch_{\mathcal{E}}(A)}} P_j}. \quad (1.1)$$

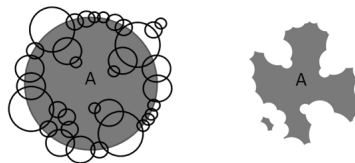


Figura 1.4: No lado esquerdo é vista uma bola A (em cinza) e os bordos das pré-imagens de A que pertencem às cadeias. No lado direito é mostrado A^* .

Proposição 1.1.2 (Uma construção abstrata de um conjunto encaixado). *Seja $A \in X$ definido como acima tal que $A^* \neq \emptyset$ e escolha uma componente conexa A' de A^* . Então A' é um conjunto \mathcal{E} -encaixado.*

Demonstração: Suponha que $A' \neq \emptyset$. Por contradição, assuma que existe uma \mathcal{E} -pré-imagem P de A' , com $\text{ord}(P) > 0$, tal que A' e P são ligados. Portanto, como A' e P são conjuntos conexos, $\exists p \in P \cap \partial A'$. Sejam $\mathfrak{p} = \text{ord}(P)$ e $E \in \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$ tal que $P = f^{-E}(A')$. Definindo $Q = f^{-E}(A)$, obtemos que $P \subset Q$.

Afirmação. $Q \subset A$.

Demonstração: Primeiramente note que $Q \cap A \supset Q \cap A' \supset P \cap A' \neq \emptyset$. Por outro lado, se $Q \cap \partial A \neq \emptyset$, a sequência unitária (Q) será uma cadeia de \mathcal{E} -pré-imagens começando em A , isto é, $(Q) \in ch_{\mathcal{E}}(A)$. Mas isto é uma contradição com a definição de A^* , pois $Q \cap A^* \supset Q \cap A' \neq \emptyset$. Assim, $Q \cap \partial A = \emptyset$. Como Q e A são conjuntos conexos e $Q \cap A \supset Q \neq \emptyset$, temos que $Q \supset A$ ou $Q \subset A$. A primeira opção não é possível pois (por hipótese) A não está contido em nenhuma \mathcal{E} -pré-imagem de si mesmo com ordem maior que zero. Portanto, $Q \subset A$. □

Como $p \in \partial A'$, para um dado $\epsilon > 0$ existe uma cadeia $(Q_0, \dots, Q_n) \in ch_{\mathcal{E}}(A)$ tal que $\text{dist}(p, \bigcup_{j=0}^n Q_j) < \epsilon$ (isto é, como $p \in \partial A'$, podemos obter uma cadeia tão próxima de p quanto quisermos). Por outro lado, como P e Q são conjuntos abertos e $p \in P \subset Q$, tomando ϵ pequeno o suficiente, $P \cap (\bigcup_{j=0}^n Q_j) \neq \emptyset$ e, portanto,

$$Q_m \cap Q \supset Q_m \cap P \neq \emptyset, \quad (1.2)$$

para algum $1 \leq m \leq n$. Como $Q_0 \cup \dots \cup Q_m$ é um conjunto conexo (Observação 1.1.1) e $Q_0 \cap (X \setminus Q) \supset Q_0 \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ (pois Q_0 e A são ligados), existe $0 \leq j \leq m$ tal que $Q_j \cap \partial Q \neq \emptyset$. Portanto, definindo $l = \min\{0 \leq j \leq m; Q_j \cap \partial Q \neq \emptyset\}$ (menor índice dos elementos da cadeia que intersectam o bordo de Q), segue que Q_l e Q são ligados. De fato, Q_l não pode conter Q , do contrário $A' \cap (Q_0 \cup \dots \cup Q_n) \neq \emptyset$ e isto contradiz $A' \subset A^*$. Além disto, $Q_l \cap (X \setminus Q) \neq \emptyset$ pois, pela definição de Q_l , tem-se que $Q_{l-1} \cap Q = \emptyset$ e $Q \cap Q_l \neq \emptyset$.

Temos dois casos a considerar: Ou $\text{ord}(Q_l) < \text{ord}(Q)$ ou $\text{ord}(Q_l) > \text{ord}(Q)$ (o caso em que $\text{ord}(Q_l) = \text{ord}(Q)$ não precisa ser levado em conta pois Q e Q_l são ligados e, pela Observação 1.0.1, duas \mathcal{E} -pré-imagens de A com mesma ordem não podem se intersectar). Suponha primeiro que $\text{ord}(Q_l) < \text{ord}(Q)$. Pela minimalidade de l , $Q \neq Q_j \forall 0 \leq j \leq l$. Assim, é fácil verificar que $\mathcal{K} = (Q_0, \dots, Q_l, Q) \in ch_{\mathcal{E}}(A)$. Como $Q \cap A^* \supset Q \cap A' \neq \emptyset$, a existência da cadeia \mathcal{K} é uma contradição com (1.1) e, portanto, este caso não pode ocorrer. Para o segundo caso ($\text{ord}(Q_l) > \text{ord}(Q)$), considere a sequência $\mathcal{K} = (f^p(Q_l), \dots, f^p(Q_m))$. É fácil verificar que $\mathcal{K} \in ck_{\mathcal{E}}(A)$ (note que, como $f^p(Q) = A$ e $f^p|_Q$ é homeomorfismo, temos $f^p(Q_l) \cap \partial A = f^p(Q_l \cap \partial Q) \neq \emptyset$, isto é, $f^p(Q_l)$ e A são ligados. Analogamente se verifica que \mathcal{K} satisfaz às outras propriedades de uma cadeia de \mathcal{E} -pré-imagens começando em A). Mas como $f^p(P) = A' \subset A^*$, segue de (1.2) que $f^p(Q_m) \cap A^* \supset f^p(Q_m \cap P) \neq \emptyset$, contradizendo (1.1) novamente e concluindo assim a demonstração. □

O resultado anterior fornece uma maneira de construir conjuntos encaixados, porém isto dependerá de o conjunto A^* ser não vazio. Uma maneira de assegurar a existência de conjuntos encaixados é mostrar que as cadeias têm diâmetro pequeno (o

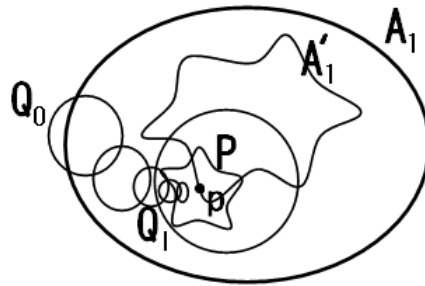


Figura 1.5: Diagrama contendo a ideia da prova da Proposição 1.1.2

diâmetro de uma cadeia $(P_j)_j$ é definido como sendo o diâmetro de $\cup_j P_j$ ou então assumir que as pré-imagens de um conjunto estão suficientemente separadas deste mesmo conjunto. Veremos como usar isto mais adiante no Capítulo 3.

Capítulo 2

Componentes Ergódicas

Antes de construirmos partições de Markov utilizando os conjuntos encaixados, precisamos de algum conhecimento preliminar acerca das componentes ergódicas associadas a medidas. Este conhecimento é importante para assegurar boas propriedades estatísticas para os conjuntos encaixados com relação à classe de medidas que estaremos estudando. É válido ressaltar que existem resultados importantes que auxiliam o estudo de medidas ergódicas se assumimos a hipótese de que a medida é invariante (a exemplo do Teorema Ergódico de Birkhoff). No contexto em que estamos trabalhando, será preciso obter resultados que envolvam ergodicidade associada a medidas não (necessariamente) invariantes (isto é, $\exists A \subset X; \mu(f^{-1}(A)) \neq \mu(A)$).

Para este capítulo, seja μ uma medida finita definida nos conjuntos de Borel de um espaço métrico, compacto, separável X e seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável.

Definição 2.0.3 (Componentes ergódicas). *Um conjunto invariante U , com $\mu(U) > 0$ é chamado de componente ergódica (isto é, componente μ ergódica com respeito a f), se $\forall V \subset U$ invariante satisfaz $\mu(V) = 0$ ou $\mu(U \setminus V) = 0$, ou seja, se U não admite nenhum subconjunto com medida positiva menor que a sua. A medida μ é chamada ergódica se X é uma componente ergódica.*

Exemplo 2.0.4. *Como exemplo de medida ergódica não-invariante, considere $p \in X$, com $f(p) \neq p$. Então a medida de Dirac δ_p é ergódica e não-invariante. De fato, se $V \subset X$ é tal que $f^{-1}(V) = V$, obviamente teremos $\mu(V) = 0$ ou $\mu(X \setminus V) = 0$, visto que no nosso caso qualquer subconjunto de X possui medida 0 ou 1. Além disso, δ_p não é invariante pois se $A = \{p\}$, temos $\delta_p(f^{-1}(A)) = 0 \neq 1 = \delta_p(A)$.*

Além disto, dado um subconjunto finito $A \subset \mathcal{O}_f^-(p)$ da pré-órbita de um ponto $p \in X$, seja $\mu = \frac{1}{\#A} \sum_{q \in A} \delta_q$. Se $f^{-1}(A) \neq A$, então μ é ergódica e não-invariante. De fato, considere $V \subset X$ invariante. É claro que, como $A \subset \mathcal{O}_f^-(p)$ então ou $V \cap A = \emptyset$ ou $V \supset A$.

Pela definição de μ concluímos que ou $\mu(V) = 0$ ou $\mu(V) = 1$. Além disso, μ não é invariante pois $f^{-1}(A) \neq A \Rightarrow \mu(f^{-1}(A)) \neq \mu(A) = 1$.

Dizemos que o conjunto $A \subset X$ é um μ -atrator (ou, simplesmente, atrator) se A é compacto, sua bacia de atração $\mathcal{B}_f(A) := \{x \in X; \omega_f(x) \subset A\}$ possui medida positiva e a bacia de atração de qualquer conjunto compacto $A' \subsetneq A$ possui medida nula. ($\omega_f(x)$ denota o conjunto ω -limite de $x \in X$).

Uma coleção \mathcal{P} de conjuntos com medida positiva é dita ser uma partição mod μ de $U \subset X$ se esta coleção cobre U em quase todo ponto ($\mu(U \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = 0$) e $\mu(P \cap Q) = 0$ para quaisquer $P, Q \in \mathcal{P}$ com $P \neq Q$. O diâmetro de uma partição \mathcal{P} é definido por $\text{diam}(\mathcal{P}) = \sup\{\text{diam}(P); P \in \mathcal{P}\}$.

O próximo resultado nos garante a existência de um atrator associado a cada componente ergódica de μ .

Proposição 2.0.5 (Atratores ergódicos). *Dada uma componente ergódica $U \subset X$, existe um único atrator $A \subset X$ que atrai quase todo ponto de U . Além disto, $\omega_f(x) = A$ para quase todo ponto de U .*

Demonstração: Seja \mathcal{P}_1 uma partição finita (mod μ) de U formada por abertos tal que $\text{diam}(\mathcal{P}_1) < 1$. A estratégia para esta demonstração consiste em construir uma sequência de partições e obter assim uma família de compactos satisfazendo a propriedade da interseção finita. A interseção destes compactos irá formar o atrator procurado.

Vamos construir uma sequência de partições por indução, de modo que $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots < \mathcal{P}_n < \dots$. Considerando a partição \mathcal{P}_1 construída acima, suponha que a partição \mathcal{P}_{n-1} já esteja construída. Defina, para cada $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, o conjunto $U_P = \{x \in U; \omega_f(x) \cap P \neq \emptyset\}$. Como U é componente ergódica e $f^{-1}(U_P) = U_P$ (pois $\omega_f(x) = \omega_f(f(x))$, $\forall x$), temos que $\mu(U_P) = 0$ ou $\mu(U \setminus U_P) = 0$.

Dado $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, definimos uma partição \mathbb{P}_P (mod μ) de P como segue: Se $\mu(U_P) = 0$, \mathbb{P}_P é escolhida como o refinamento trivial (isto é, $\mathbb{P}_P = \{P\}$). Caso contrário, se $\mu(U_P) > 0$, escolhemos \mathbb{P}_P como sendo alguma partição finita (mod μ) de $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ formada por subconjuntos abertos de P com diâmetro menor que $\frac{1}{2}\text{diam}(P)$ (Para garantir que existem tais partições, veja A.0.19).

Defina então: $\mathcal{P}_n = \{Q \in \mathbb{P}_P; P \in \mathcal{P}_{n-1}\}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{P}_n^* = \{P \in \mathcal{P}_n; \mu(U \setminus U_P) = 0\}$ e $K_n = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n^*} \overline{P}$. Veja que $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ é uma sequência (encaixada) de compactos, satisfazendo a propriedade da interseção finita.

Afirmamos que cada compacto K_i é não vazio. De fato, se para um certo $P \in \mathcal{P}_i$ tivermos que μ -q.t.p. $x \in U$ satisfaz $\omega_f(x) \cap P = \emptyset$ (isto é, $\mu(U_P) = 0$), obtemos do fato de que \mathcal{P}_i é uma partição finita que deverá existir $Q \in \mathcal{P}_i$ tal que o ω -limite dos pontos x

de um subconjunto de U com medida positiva sempre intersecta Q , ou seja, $\mu(U_Q) > 0$. Como U_Q é invariante temos que $\mu(U \setminus U_Q) = 0$ e, com isso, que $K_i \neq \emptyset$.

Assim $A = \bigcap_n K_n$ é um compacto não vazio. Afirmamos que A é o atrator procurado.

De fato, temos que:

i) A é compacto.

Por construção.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ e para μ quase todo ponto $x \in U$, temos que $\omega_f(x) \subset K_n$

Do contrário, teríamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ e algum $x \in U$, $\exists y \in \omega_f(x)$ tal que $y \notin K_n$. Mas

$y \notin K_n \Rightarrow y \in P$, para algum $P \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_n^* \Rightarrow \mu(U_P) = 0$ (sendo que $x \in U_P$), isto é, x pertence a um conjunto de medida nula.

iii) $\sup\{\text{dist}(y, \mathcal{O}_f(x)); y \in A\} \leq 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para μ quase todo ponto $x \in U$.

De fato, seja $y \in A$. Logo $y \in K_n \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $y \in \bar{P}$ para algum $P \in \mathcal{P}_n^*$. (Sem perda de generalidade, podemos supor $y \in P$).

Mas $\mu(U_P) = \mu(\{x \in U; \omega_f(x) \cap P \neq \emptyset\}) = \mu(U)$, pois $P \in \mathcal{P}_n$. Tome $z \in \omega_f(x) \cap P$. Logo, para μ quase todo ponto $x \in U$, temos: $\text{dist}(y, \mathcal{O}_f(x)) \leq \text{dist}(y, z) + \text{dist}(z, \mathcal{O}_f(x)) = \text{dist}(y, z) \text{diam}(P) \leq 2^{-n}$.

iv) $\omega_f(x) = A$ para μ quase todo $x \in U$.

A inclusão “ \subset ” segue de *ii*) e do fato de que a interseção enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.

Para ver a inclusão “ \supset ”, considere $y \in A$. De *iii*) podemos construir uma sequência de pontos de $\mathcal{O}_f(x)$ convergindo para y da seguinte forma:

Como $\sup\{\text{dist}(y, \mathcal{O}_f(x)); y \in A\} \leq 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $f^{j_n}(x) \in \mathcal{O}_f(x)$ tal que $\text{dist}(f^{j_n}(x), y) < (2^n + 1)^{-1}$. Garantimos que existe um tal $f^{j_n}(x)$ pois $\inf\{\text{dist}(f^j(x), y)\} < 2^{-n}$. Por construção obtemos que $f^{j_n}(x) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$

Logo $y \in \omega_f(x)$.

v) $\mu(\mathcal{B}_f(A)) > 0$

Pois, por *iv*), $\mathcal{B}_f(A) \supset U$ e $\mu(U) > 0$.

vi) A é minimal, i.e.m não existe subconjunto $A' \subset A$ compacto cuja bacia de atração tem medida positiva.

Decorre de *iv*) e da própria definição de bacia de atração.

vii) A é único.

Decorre diretamente de *iv*).

□

Considere, para cada ponto x de um conjunto positivamente invariante $U \subset X$, um subconjunto $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{O}_f^+(x)$ da órbita positiva de $x \in U$.

Definição 2.0.6. *A coleção $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ é chamada assintoticamente invariante se, para todo $x \in U$, tivermos:*

1. $\#\{j \in \mathbb{N}; f^j(x) \in \mathcal{U}(x)\} = \infty$ e
2. $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{O}_f^+(f^n(x)) = \mathcal{U}(f(x)) \cap \mathcal{O}_f^+(f^n(x))$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Definição 2.0.7 (ω_f, \mathcal{U}). *Seja $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$. Defina para cada $x \in U$ o conjunto ômega- \mathcal{U} limite de x (ou, abreviadamente, ômega- \mathcal{U} de x), denotado por $\omega_{f, \mathcal{U}}(x)$ (ou simplesmente $\omega_{\mathcal{U}}(x)$, quando o contexto não apresentar ambiguidades), como o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{U}(x)$, isto é, o conjunto dos pontos $p \in X$ tais que existe uma sequência $n_j \rightarrow +\infty$ satisfazendo $\mathcal{U}(x) \ni f^{n_j}(x) \rightarrow p$.*

É fácil mostrar que $\omega_{\mathcal{U}}(x)$ é um conjunto não vazio, compacto mas não necessariamente invariante.

Dizemos que uma coleção assintoticamente invariante $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ possui frequência positiva se $\limsup \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x)\} > 0$, para todo $x \in U$.

Definição 2.0.8 ($\omega_{+, f, \mathcal{U}}$). *Se \mathcal{U} é uma coleção assintoticamente invariante com frequência positiva, definimos $\omega_{+, f, \mathcal{U}}(x)$, o conjunto dos pontos \mathcal{U} -frequentemente visitados pela órbita de x , como o conjunto dos pontos $p \in X$ tais que $\limsup \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{U}(x) \cap V\} > 0$, para toda vizinhança V de p .*

É possível encontrar, de uma maneira análoga à da proposição anterior, um conjunto atrator (num sentido generalizado) dentro de cada componente ergódica contida em X , como mostra o resultado seguinte. Nesse caso, ele irá coincidir com o conjunto $\omega_{\mathcal{U}}(x)$, para μ -q.t.p. $x \in U$.

Lema 2.0.9. *Seja $\mathcal{U} = (\mathcal{U}(x))_{x \in U}$ uma coleção assintoticamente invariante definida em uma componente ergódica $U \subset X$ e seja $A \subset X$ o atrator associado a U (conforme 2.0.5). Então existe um conjunto compacto $A_{\mathcal{U}} \subset A$ tal que $\omega_{f, \mathcal{U}}(x) = A_{\mathcal{U}}$ para μ -quase todo ponto $x \in U$. Além disso, se \mathcal{U} possui frequência positiva então também existe $A_{+, \mathcal{U}} \subset A_{\mathcal{U}}$ tal que $\omega_{+, f, \mathcal{U}}(x) = A_{+, \mathcal{U}}$ para μ -quase todo ponto $x \in U$.*

Demonstração: Construimos os conjuntos compactos $A_{\mathcal{U}}$ e $A_{+, \mathcal{U}}$ da mesma forma que em 2.0.5. A única diferença é que no lugar de $\omega_f(x)$ usamos $\omega_{f, \mathcal{U}}(x)$ (no caso de $A_{\mathcal{U}}$) ou $\omega_{+, f, \mathcal{U}}(x)$ (no caso de $A_{+, \mathcal{U}}$). Note que a propriedade chave de $\omega_f(x)$ usada na demonstração anterior também é usada de maneira análoga nesta demonstração (a saber, $\omega_{f, \mathcal{U}}(x) = \omega_{f, \mathcal{U}}(f(x))$ e $\omega_{+, f, \mathcal{U}}(x) = \omega_{+, f, \mathcal{U}}(f(x))$, $\forall x$).

Para $A_{+, \mathcal{U}}$ é necessário também mudar a definição do conjunto U_P de acordo com o descrito a seguir. Dados $x \in U$ e $K \subset X$, denote a \mathcal{U} -frequência de visitas de x a K por $\phi_K(x) = \limsup \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in K \cap \mathcal{U}(x)\}$. Escolha, para cada $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, $U_P = \{x \in U; \phi_P(x) > 0\}$. Veja que U_P é invariante (pois $\omega_{+, f, \mathcal{U}}(x) = \omega_{+, f, \mathcal{U}}(f(x))$, $\forall x$). Por estarmos usando \limsup na definição de ϕ_K , temos que $\phi_K(x) > 0$ ou $\phi_{X \setminus K}(x) > 0$. Isto é importante para garantir que $K_n \neq \emptyset$; $\forall n \in \mathbb{N}$ (garantimos que existe pelo menos um $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $U_P \neq \emptyset$).

Para finalizar a prova, observamos que cada ponto de $A_{+, \mathcal{U}} = \bigcap_n K_n$ é acumulado pela sequência $\{f^n(x); n \in \mathbb{N} \text{ e } f^n(x) \in \mathcal{U}(x)\}$ para μ quase todo ponto $x \in U$ e, portanto, $A_{+, \mathcal{U}} \subset A_{\mathcal{U}} \subset A$. Ademais, se B é um conjunto aberto satisfazendo $B \cap A_{+, \mathcal{U}} \neq \emptyset$, então para algum n grande o suficiente existirá algum elemento $P \in \mathcal{P}_n^*$ contido em B . Portanto, por construção, teremos que $\limsup \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in B \cap \mathcal{U}(x)\} \geq \limsup \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in P \cap \mathcal{U}(x)\} \geq 0$, o que conclui a demonstração. \square

Definição 2.0.10. Dizemos que uma medida μ é f -não-singular se a pré imagem por f de qualquer conjunto com medida nula também possui medida nula ($f_*\mu := \mu \circ f^{-1} \ll \mu$). As medidas ergódicas do exemplo 2.0.4 não são em geral f -não-singulares.

O lema abaixo garante que se μ é uma medida ergódica f -não-singular, então a restrição de μ a qualquer subconjunto positivamente invariante de X com medida positiva continua sendo uma medida não singular com respeito a f .

Lema 2.0.11. Se μ é uma medida ergódica f -não singular (não necessariamente invariante) então $\frac{1}{\mu(E)}\mu|_E$ é uma probabilidade ergódica f -não singular desde que $E \subset X$ seja um conjunto de Borel positivamente invariante com medida positiva.

Demonstração: É fácil ver que, nas condições do enunciado acima, $\frac{1}{\mu(E)}\mu|_E$ é uma probabilidade ergódica. Dado $Y \subset X$, teremos $\mu(f^{-1}(Y) \cap E) \leq \mu(f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(f(E))) = \mu(f^{-1}(Y \cap f(E)))$. Assim, se $\mu|_E(Y) = \mu(Y \cap E) = 0$, então $0 \leq \mu|_E(f^{-1}(Y)) \leq \mu(f^{-1}(Y \cap f(E))) = 0$ (pois μ é f -não-singular). Como consequência disto, temos que $\frac{1}{\mu(E)}\mu|_E$ é f -não-singular. \square

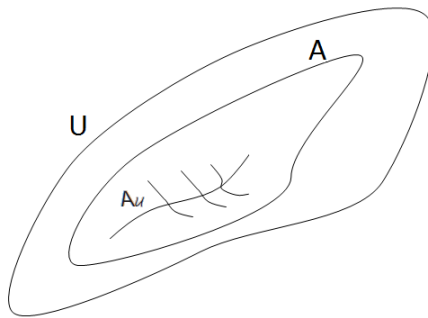


Figura 2.1: U é uma componente ergódica com seu atrator A e seu conjunto $\omega_{\mathcal{U}}$ -limite $A_{\mathcal{U}}$.

Os resultados a seguir nos mostram que se conseguirmos uma cota inferior para a medida dos conjuntos invariantes (ou positivamente invariantes) conseguiremos de alguma maneira estimar a quantidade de componentes ergódicas associadas a essa medida.

Lema 2.0.12. *Seja μ uma medida finita. Se existe algum $\delta > 0$ tal que todo conjunto invariante possui medida μ nula ou maior que δ , então X pode ser decomposto em um número finito de componentes μ ergódicas.*

Demonstração: Seja $W_1 \subset X$ um subconjunto invariante qualquer de X (por exemplo, $W_1 = X$) com medida μ não nula e defina $\mathcal{F}(W_1) = \{U \subset W_1; U \text{ é invariante e } \mu(U) > 0\}$. Claramente temos que $\mathcal{F}(W_1)$ é uma coleção não vazia (pois $W_1 \in \mathcal{F}(W_1)$). Vamos considerar a inclusão (mod μ) como uma ordem parcial sobre $\mathcal{F}(W_1)$ (a saber, estamos definindo: Dados $A, B \in \mathcal{F}(W_1)$, $A \leq B \Leftrightarrow B \subset A \pmod{\mu} \Leftrightarrow \mu(B \setminus A) = 0$). Afirmamos que toda cadeia totalmente ordenada $\Gamma \subset \mathcal{F}(W_1)$ é finita. (Em particular, possui uma cota superior).

De fato, suponha por absurdo que exista uma cadeia infinita $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ com $\gamma_i \neq \gamma_{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (isto é, $\gamma_0 \supset \gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \dots$ com $\mu(\gamma_i \setminus \gamma_{i+1}) > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Mas como $\sum_i \mu(\gamma_i \setminus \gamma_{i+1}) = \mu(\gamma_0) < \infty$, segue que $\mu(\gamma_i \setminus \gamma_{i+1}) < \delta$ para i suficientemente grande, o que contradiz a hipótese pois $\gamma_i \setminus \gamma_{i+1}$ é um conjunto invariante.

Pelo Lema de *Zorn*, existe um elemento maximal $U_1 \in \mathcal{F}(W_1)$. Veja que U_1 é uma componente ergódica (de fato, se supusermos que existe $A \subset U_1$ invariante com $\mu(A) > 0$ e $\mu(U_1 \setminus A) > 0$, teremos que $\mu(A) = \mu(U_1 \setminus A) = \mu(U_1)$, pois U_1 é maximal com relação à ordem definida acima, e assim: $\mu(U_1) = \mu(A \cup U_1 \setminus A) = \mu(A) + \mu(U_1 \setminus A) = \mu(U_1) + \mu(U_1)$, o que é um absurdo).

Como $W_2 = X \setminus U_1$ é um conjunto invariante, ou ele possui medida nula ou poderemos usar o mesmo argumento acima para W_2 e obter uma nova componente ergódica $U_2 \subset W_2$. Indutivamente, poderemos construir uma coleção de componentes ergódicas U_1, U_2, \dots, U_r enquanto tivermos $\mu(X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r)) > 0$. Mas, como $\mu(U_i) > \delta$, este

processo irá terminar em tempo finito e, assim, conseguiremos a decomposição de X em um número finito de componentes μ ergódicas.

□

Note que o Lema anterior fornece um critério para conseguirmos medidas ergódicas associadas à dinâmica f . Para tal, é suficiente conseguirmos uma cota inferior para a medida dos conjuntos invariantes (que possuem medida positiva) por f . Assim, a restrição de μ a cada conjunto invariante por f que tiver medida positiva será uma medida ergódica associada a f . Nessas condições, como estamos lidando com medidas finitas, é óbvio que só teremos um número finito de tais medidas (pois só teremos um número finito de conjuntos invariantes com medida positiva). Como todo conjunto invariante é positivamente invariante, temos a seguinte generalização do resultado anterior.

Proposição 2.0.13 (Um critério para ergodicidade). *Seja μ uma medida f -não singular. Se existe algum $\delta > 0$ tal que todo conjunto positivamente invariante possui medida μ nula ou maior que δ , então X pode ser decomposto em um número finito de componentes μ ergódicas. Ademais, o atrator associado a cada componente ergódica possui medida μ positiva.*

Demonstração: Como todo conjunto invariante é também positivamente invariante, temos pelo Lema 2.0.12 que X pode ser decomposto em um número finito de componentes μ ergódicas.

Da proposição 2.0.5, temos que cada componente ergódica é a bacia de algum atrator A .

Suponhamos que $\mu(A) = 0$. Neste caso, podemos escolher uma vizinhança aberta V de A tal que $\mu(V) < \delta$ (isto ocorre pois no nosso caso a medida pode ser considerada regular, ver observação 6.0.14 no Capítulo 6) e um inteiro n_0 tal que $\mu(U') > 0$, onde $U' = \{x \in U; f^n(x) \in V \forall n \geq n_0\}$. Note que $\mu(f^{n_0}(U')) > 0$ pois μ é f -não-singular. Como U' é positivamente invariante, $f^{n_0}(U')$ é um conjunto positivamente invariante com $0 < \mu(f^{n_0}(U')) < \mu(V) < \delta$, mas isto, por hipótese, é impossível.

Logo, $\mu(A) > 0$ (na verdade, $\mu(A) > \delta$).

□

Capítulo 3

Medidas *zooming*

No presente capítulo, introduziremos a noção de tempos e contração *zooming* para a construção das medidas *zooming*, associadas às quais obteremos resultados estatísticos importantes para alguns tipos de sistemas importantes (conforme falamos na Introdução, dentro desses sistemas está englobado o caso expansor e o não uniformemente expansor, mesmo onde se admite a existência de regiões críticas).

Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável definida num espaço métrico, conexo, compacto e separável.

Definição 3.0.14 (Contração *zooming*). *Uma sequência $\alpha = \{\alpha_n\}_{1 \leq n \in \mathbb{N}}$ de funções $\alpha_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é chamada de contração *zooming* se satisfizer as seguintes condições:*

- $\alpha_n(r) < r$, $\forall r > 0$ e $\forall n \geq 1$;
- $\alpha_n(r) \leq \alpha_n(\tilde{r})$, $\forall 0 \leq r \leq \tilde{r}$ e $\forall n \geq 1$;
- $\alpha_n \circ \alpha_m(r) \leq \alpha_{n+m}(r)$; $\forall r > 0$ e $\forall n, m \geq 1$;
- $\sup_{0 \leq r \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \right) < \infty$

Por exemplo, uma contração exponencial corresponde a uma contração *zooming* $\alpha_n(r) = \lambda^n r$ com $0 < \lambda < 1$. Podemos também trabalhar com contrações polinomiais ($\alpha_n(r) = n^{-a}r$, $a > 1$) ou até com contrações que (em pequena escala) tornam-se tão fracas quanto quisermos ($\alpha_n(r) := \left(\frac{1}{1 + n\sqrt{r}} \right)^2 r$ define uma contração *zooming* e $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_n(r)}{r} = 1$, veja Exemplo 9.14 de [13]).

Sejam $\alpha = \{\alpha_n\}_n$ uma contração *zooming* e $\delta > 0$ uma constante positiva.

Definição 3.0.15 (Tempos *zooming*). *Dizemos que $n \geq 1$ é um tempo (α, δ) -*zooming* para $p \in X$ (com respeito a f) se existe uma vizinhança $V_n(p)$ de p satisfazendo:*

1. f^n envia $\overline{V_n(p)}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$;

2. $\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \leq \alpha_{n-j}(\text{dist}(f^n(x), f^n(y)))$, quaisquer que sejam $x, y \in V_n(p)$ e $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

A bola $B_\delta(f^n(p))$ é chamada bola *zooming* e o conjunto $V_n(p)$ é chamado *pré-bola zooming*.

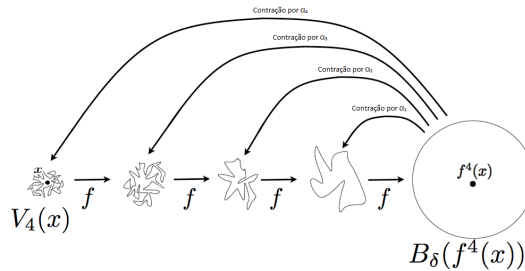


Figura 3.1: Exemplo em que $n = 4$ é um tempo *zooming* para x .

Denote por $Z_n(\alpha, \delta, f)$ o conjunto de pontos de X para os quais n é um tempo (α, δ) -*zooming*.

Definição 3.0.16 (Medida *zooming*). Uma medida μ , finita e f -não singular definida na σ -álgebra de Borel associada a X é chamada medida fracamente *zooming* se μ quase todo ponto possui infinitos tempos (α, δ) -*zooming*. Uma medida μ fracamente *zooming* é dita ser medida *zooming* se

$$\limsup \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in Z_j(\alpha, \delta, f)\} > 0, \quad (3.1)$$

para μ quase todo ponto $x \in X$.

Definição 3.0.17 (Conjuntos *zooming*). Um conjunto positivamente invariante $\Lambda \subset X$ é chamado de conjunto *zooming* se (3.1) é válida para todo $x \in \Lambda$.

Definição 3.0.18 (Distorção limitada). Dizemos que uma medida *zooming* μ possui *distorção limitada* se $\exists \rho > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ e μ quase todo ponto $p \in Z_n(\alpha, \delta, f)$, o jacobiano de f^n com respeito a μ , $J_\mu f^n$, é bem definido em $V_n(p)$ e

$$\left| \log \frac{J_\mu f^n(x)}{J_\mu f^n(y)} \right| \leq \rho \text{dist}(f^n(x), f^n(y)), \quad (3.2)$$

para μ quase todo x e y em $V_n(p)$.

(Para definição de Jacobiano de uma medida, ver 6.0.15).

Essencialmente, dizer que μ tem *distorção limitada* significa dizer que a dinâmica f sempre altera (ou distorce) dois dados subconjuntos de X de maneira bastante parecida em tempos *zooming*, do ponto de vista da medida. Em outras palavras, a partir da hipótese de *distorção limitada* pode-se provar:

Afirmação. Suponha que μ tem distorção limitada, $x \in X$ e n é um tempo (α, δ) -*zooming* para x , $g : B_\delta(f^n(x)) \rightarrow V_n(x)$ é a inversa de f^n restrita à bola *zooming* em torno de $f^n(x)$ (conforme a definição 3.0.15) e que $A, B \subset B_\delta(f^n(x))$ são conjuntos mensuráveis. É possível encontrar uma constante $C > 0$ tal que:

$$C^{-1} \frac{\mu(A)}{\mu(B)} \leq \frac{\mu(g(A))}{\mu(g(B))} \leq C \frac{\mu(A)}{\mu(B)}. \quad (3.3)$$

A prova dessa afirmação depende essencialmente de dois passos:

- Como $J_\mu f^n$ é o Jacobiano de f^n com respeito a μ (ver definição 6.0.15), obtemos que:

$$\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\int_{g(A)} J_\mu f^n d\mu}{\int_{g(B)} J_\mu f^n d\mu} \quad (3.4)$$

- $\exists K > 0$ tal que:

$$K^{-1} \leq \frac{J_\mu f^n(y)}{J_\mu f^n(z)} \leq K, \quad (3.5)$$

para todo ponto y, z em $V_n(x)$.

De fato, usando a Regra da Cadeia, a definição de tempo *zooming* e sabendo que vale a expressão 3.2, nós facilmente podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \log \frac{J_\mu f^n(y)}{J_\mu f^n(z)} &= \log \prod_{i=0}^{k-1} \frac{J_\mu f^i(f^{i-1}(y))}{J_\mu f^i(f^{i-1}(z))} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \log \frac{J_\mu f^i(f^{i-1}(y))}{J_\mu f^i(f^{i-1}(z))} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \rho \text{dist}(f^{i-1}(y), f^{i-1}(z)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \rho \alpha_{n-i}(\text{dist}(f^n(y), f^n(z))) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \rho \alpha_{n-i}(\text{diam} X) \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \rho \alpha_i(\text{diam} X) =: K < +\infty \end{aligned}$$

A desigualdade contrária é obtida de maneira análoga.

Agora, utilizando 3.4 e 3.5, obtemos que:

$$\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\int_{g(A)} J_\mu f^n d\mu}{\int_{g(B)} J_\mu f^n d\mu} \leq K^2 \frac{J_\mu f^n(x) \mu(g(A))}{J_\mu f^n(x) \mu(g(B))} = K^2 \frac{\mu(g(A))}{\mu(g(B))}.$$

Definindo $C = K^2$, obtemos a prova da afirmação. Novamente, a desigualdade contrária segue de modo análogo.

O próximo resultado é uma ferramenta técnica útil para a construção de conceitos e demonstração de resultados presentes ao longo deste capítulo, tais como o conjunto de imagens *zooming* e o fato de que este conjunto é uma coleção assintoticamente invariante (conforme (2.0.6)).

Lema 3.0.19. *Os tempos zooming satisfazem à seguinte propriedade:*

Se $p \in Z_j(\alpha, \delta, f)$ então $f^l(p) \in Z_{j-l}(\alpha, \delta, f)$ para todo $0 \leq l < j$.

Demonstração: Seja $V_n(p)$ a pré-bola *zooming* associada a p . Veja que, dado $l \in \{0, \dots, n-1\}$, $V_{n-l}(f^{n-l}(p)) = f^l(V_n(p))$ é uma pré-bola *zooming* associada a $f^l(p)$. De fato:

- Primeiro, veja que $g = f^{n-l}|_{V_{n-l}(f^l(p))} : V_{n-l}(f^l(p)) \longrightarrow B_\delta(f^{n-l}(f^l(p))) (= B_\delta(f^n(p)))$ é inversível. Suponha por absurdo que $g(x) = g(y) \in B_\delta(f^n(p))$, onde $x, y \in V_{n-l}(f^l(p))$ são tais que $x \neq y$. Como $f^n|_{V_n(p)}$ é inversível, existe $x_0 \in V_n(p)$ tal que $g(x) = g(y) = f^n(x_0) = f^{n-l}(f^l(x_0))$. Veja que $f^l(x_0) = x = y$, pois se existisse, por exemplo, $y_0 \in V_n(p)$ com $f^l(y_0) = x$ e $y_0 \neq x_0$ teríamos que $f^n(x_0) = f^n(y_0)$, o que contradiz a hipótese de que f^n é injetiva em $V_n(p)$. Mas isto constitui um absurdo, pois supusemos que $x \neq y$. Logo, g é injetiva. Além disto, g é sobrejetiva, pois dado $z \in B_\delta(f^n(p))$, existe $y \in V_n(p)$ com $f^n(y) = z$, e assim, existe $x = f^{n-l}(y)$ tal que $g(x) = z$. Usando a contração para o passado associada aos tempos *zooming*, podemos facilmente mostrar que g leva $\overline{V_{n-l}(f^l(p))}$ homeomorficamente em $\overline{B_\delta(f^n(p))}$.
- Além disto, o item *ii*) de (3.0.15) é satisfeito para $V_{n-l}(f^{n-l}(p))$ pois dados $x_1, y_1 \in V_{n-l}(f^{n-l}(p))$, tome $x_0, y_0 \in V_n(p)$ tais que $f^l(x_0) = x_1$ e $f^l(y_0) = y_1$. Como $p \in Z_n(\alpha, \delta, f)$, temos que $\text{dist}(f^j(x_0), f^j(y_0)) \leq \alpha_{n-j}(\text{dist}(f^n(x_0), f^n(y_0)))$, quaisquer que sejam $x, y \in V_n(p)$ e $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, e assim (fazendo $m = j-l$, para $j \geq l$) teremos que $\text{dist}(f^j(x_0), f^j(y_0)) = \text{dist}(f^{j-l}(x_1), f^{j-l}(y_1)) \leq \alpha_{n-j}(\text{dist}(f^n(x_0), f^n(y_0))) = \alpha_{n-l-(j-l)}(\text{dist}(f^{n-l}(x_1), f^{n-l}(y_1)))$, qualquer que seja $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \geq l$, isto é, $\text{dist}(f^m(x_1), f^m(y_1)) \leq \alpha_{(n-l)-m}(\text{dist}(f^m(x_1), f^m(y_1)))$ qualquer que seja $m \in \{0, 1, \dots, n-l\}$.

□

Dada uma sequência qualquer de conjuntos $\{U_n\}_n$, denote por $\limsup_n U_n$ o conjunto de pontos que pertencem a infinitos elementos desta sequência, isto é,

$$\limsup_n U_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{j \geq n} U_j.$$

Usando a notação acima, temos que uma medida finita f -não-singular μ é fracamente *zooming* se $\mu(X \setminus \limsup Z_m(\alpha, \delta, f)) = 0$.

A partir deste ponto iremos apresentar alguns conceitos e resultados que nos possibilitem unir a noção de conjuntos encaixados, família dinamicamente fechada de pré-imagens e medidas *zooming*, o que será útil para obter resultados importantes no presente capítulo e também nos posteriores.

Seja \mathcal{Z} o conjunto de todos os pontos de X com frequência positiva de tempos $(\{\alpha_n\}_n, \delta)$ -*zooming*, isto é, o conjunto de pontos para os quais (3.1) é válida. Denote por $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}} = (\mathcal{E}_{\mathcal{Z},n})_n$ como a coleção de todas as pré-bolas (α, δ) -*zooming*, onde $\mathcal{E}_{\mathcal{Z},n} = \{V_n(x); x \in Z_n(\alpha, \delta, f)\}$ é a coleção de todas as pré-bolas (α, δ) -*zooming* de ordem n . É possível verificar facilmente que a coleção de todas as pré-bolas (α, δ) -*zooming* é uma família dinamicamente fechada de pré-imagens, como definido no Capítulo 1 (basta usar o Lema 3.0.19).

Dados $x \in X$ e $0 < r < \delta$, seja $(B_r(x))^*$ o conjunto definido por (1.1) associado a $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$. Se $x \in (B_r(x))^*$, segue da Proposição 1.1.2 (tomando $A = \{B_r(x)\}$) que a componente conexa de $(B_r(x))^*$ que contém x é um conjunto $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ - encaixado.

Definição 3.0.20 (Bolas *zooming* encaixadas). *Se $x \in (B_r(x))^*$, defina a bola (α, δ) -*zooming* encaixada (com respeito a f) de raio r e centro x , denotada por $B_r^*(x)$, como a componente conexa de $(B_r(x))^*$ que contém x .*

Note que, como temos contração em qualquer tempo *zooming*, $B_r(x)$ não pode estar contida em nenhuma pré-imagem *zooming* (com ordem maior que zero) de si mesma, isto é, não poderemos encontrar uma $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}$ -pré-imagem $P \in X$ de $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset P$ (e portanto $\text{diam}(B_r(x)) < \text{diam}(P)$), do contrário, obteríamos $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{Z},n}$ e um comportamento contrativo (para o passado) entre $E \supset P$ e $f^n(E) \supset B_r(x)$, e portanto teríamos $\text{diam}(B_r(x)) \geq \text{diam}(P)$, o que é um absurdo. Portanto, $A = \{B_r(x)\}$, na definição acima, é de fato um conjunto aberto conforme as hipóteses da Seção 1.1.

Definição 3.0.21 (Aplicação inversamente separada). *Dizemos que f é inversamente separada se para todo $x \in X$ temos:*

$$\text{dist} \left(x, \bigcup_{j=1}^n f^{-j}(x) \setminus \{x\} \right) > 0; \quad \forall n \geq 1. \quad (3.6)$$

Um exemplo de aplicação inversamente separada consiste em uma aplicação f com número limitado de pré-imagens ($\sup \#\{f^{-1}(x); x \in X\} < +\infty$).

Na seção 1.1.2 é apresentada uma construção abstrata de um conjunto encaixado. Para essa construção é necessário que o conjunto A^* dado por (1.1) seja não vazio. O próximo resultado fornecerá uma condição segundo a qual seja sempre possível a existência de bolas *zooming* encaixadas. Esta condição envolverá a definição anterior.

Lema 3.0.22 (Existência de bolas *zooming* encaixadas). *Se f é inversamente separada e $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(r)}{r} \right) < +\infty$ então para cada $x \in X$ existe $0 < r_0 < \delta/2$ tal que $B_r^*(x)$ está bem definida $\forall 0 < r \leq r_0$ e, dado qualquer $0 < \gamma < 1$, é possível encontrar $0 < r_\gamma < r_0$ dependendo apenas de δ, α, x e γ tal que $B_r^*(x) \supset B_{\gamma r}(x); \forall 0 < r \leq r_\gamma$.*



Figura 3.2: Se Q é uma \mathcal{E}_Z pré-imagem de $B_r(x)$ então $Q \cap B_r(x) = \emptyset$.

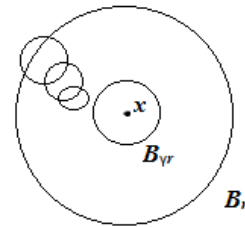


Figura 3.3: Toda cadeia de pré-imagens em $ch_{\mathcal{E}_Z}(B_r(x))$ tem diâmetro pequeno o suficiente, de modo que $\emptyset \neq B_{\gamma r}(x) \subset B_r^*(x)$.

Demonstração:

Suponha que $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \alpha_n(r)/r \right) < +\infty$. Dado $0 < \gamma < 1$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n > n_0} \alpha_n(r) < (1 - \gamma)r/2$. Dado $x \in X$, sejam $\epsilon > 0$ tal que $\text{dist}(x, \bigcup_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x) \setminus \{x\}) > \epsilon$, $r_\gamma = \frac{1}{3} \min\{\epsilon, \delta\}$ e $0 < r \leq r_\gamma$.

Note que se $j < n_0$ e Q é uma \mathcal{E}_Z -pré-imagem de $B_r(x)$ com ordem j então $B_r(x) \cap Q = \emptyset \forall Q \in \mathcal{E}_{Z,j}$. De fato, escrevendo $Q = f^{-V}(B_r(x)) = (f^j|_V)^{-1}(B_r(x))$ para algum V em $\mathcal{E}_{Z,j}$ temos que $Q \cap (\bigcup_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x)) = (f^j|_V)^{-1}(B_r(x)) \cap (\bigcup_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x)) \supset (f^j|_V)^{-1}(x) \cap (\bigcup_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x)) \neq \emptyset$. Como $\text{dist}(x, \bigcup_{j=1}^{n_0} f^{-j}(x) \setminus \{x\}) > \epsilon$ e $\text{diam}(Q) < 2r < 2\epsilon/3$ (a penúltima desigualdade decorre da hipótese de que Q é uma \mathcal{E}_Z -pré-imagem de $B_r(x)$ e do item 2 de 3.0.15), temos que $B_r(x) \cap Q = \emptyset$.

Assim, toda cadeia de \mathcal{E}_Z -pré-imagens de $B_r(x)$ começa com uma pré-imagem de ordem maior que n_0 . Seja $(P) = (P_0, P_1, \dots, P_k)$ uma cadeia de \mathcal{E}_Z -pré-imagens de $B_r(x)$

com $\text{ord}(P_j) = n_j$. Então, como $\text{diam}(P) = \text{diam}(\bigcup_{j=1}^k P_j) \leq \sum_{j=1}^k \text{diam}(P_j)$ e, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, temos $\text{diam}(P_j) = \sup_{x,y \in P_j} \text{dist}(x, y) \leq \sup_{x,y \in P_j} \alpha_{n_j}(\text{dist}(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y))) \leq \alpha_{n_j}(\sup_{x,y \in P_j} (\text{dist}(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)))) = \alpha_{n_j}(\text{diam}(B_r(x)))$, concluímos que:

$$\begin{aligned} \text{diam}(P) &\leq \sum_{j=1}^k \alpha_{n_j}(\text{diam}(B_r(x))) \leq \sum_{n > n_0} \alpha_n(\text{diam}(B_r(x))) \\ &< (1 - \gamma) \frac{\text{diam}(B_r(x))}{2} = (1 - \gamma)r \end{aligned}$$

e, como qualquer cadeia intersecta o bordo de $B_r(x)$, podemos concluir que esta cadeia não intersecta $B_{\gamma r}(x)$. Portanto, $(B_r(x))^*$ (e também $B_r^*(x)$) contém $B_{\gamma r}(x)$. \square

É importante observar que existem outras maneiras de garantir a existência de bolas encaixadas *zooming* sem precisar impor hipóteses adicionais sobre a aplicação f (por exemplo, se conseguirmos controlar a soma $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(r)$, garantiremos a existência de tais conjuntos, conforme o Lema 5.12 de [13]).

Se $x \in X$ possui tempo *zooming*, podemos definir o primeiro tempo *zooming* de x como $\min\{n; x \in Z_n(\alpha, \delta, f)\}$. Podemos verificar que, se μ é uma medida finita f -não-singular e o primeiro tempo *zooming* está bem definido para μ quase todo ponto, então μ é uma medida fracamente *zooming*. Isto é,

$$\mu(X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j(\alpha, \delta, f)) = 0 \Rightarrow \mu(X \setminus \limsup Z_m(\alpha, \delta, f)) = 0$$

De fato, defina $G_0 = \{x \in X; x \notin Z_j(\alpha, \delta, f), \forall j\}$ e $G_j = \{x \in X; j \text{ é o maior tempo } \textit{zooming} \text{ de } x\}$, para $j \geq 1$. Veja que $\mu(G_0) = 0$ (pois $G_0 \subset X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j(\alpha, \delta, f)$) e $\mu(G_j) = 0$ (pois μ é f -não-singular, $\mu(G_0) = 0$ e, pelo Lema 3.0.19, temos que $f^j(G_j) \subset G_0$). Como $X \setminus \limsup Z_m(\alpha, \delta, f) = \bigcup_{k \geq 0} G_k$, segue a afirmação.

Denote a coleção de imagens *zooming* de f por $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \limsup Z_m(\alpha, \delta, f)}$, onde $\mathfrak{z}(x) = \{f^m(x); m \in \mathbb{N} \text{ e } x \in z_m(\alpha, \delta, f)\}$ é o conjunto de imagens *zooming* de x por f .

Usando o Lema 3.0.19, temos que se $x \in Z_m(\alpha, \delta, f)$ então $f^j(x) \in Z_{m-j}(\alpha, \delta, f)$, para todo $0 \leq j < m$. Assim, usando esta informação pode-se provar que \mathfrak{z} é uma coleção assintoticamente invariante. De fato, se $x \in \limsup Z_m(\alpha, \delta, f)$ e m_0 é o primeiro tempo *zooming* de x , então:

- Por construção, está claro que $\#\mathfrak{z}(x) = +\infty; \forall x \in \limsup Z_m(\alpha, \delta, f)$;
- $\mathfrak{z}(x) \cap \mathcal{O}_f^+(f^{M_0+1}(x)) = \{f^m(x); m \geq 2 \text{ e } x \in Z_m(\alpha, \delta, f)\} = \{f^m(f(x)); m \geq M_0 \text{ e } f(x) \in Z_m(\alpha, \delta, f)\} = \mathfrak{z}(f(x)) \cap \mathcal{O}_f^+(f^{M_0+1}(x))$ onde $M_0 = \max\{m_0 - 1, 1\}$, isto é, o item (2) de 2.0.6 continua válido.

O próximo lema nos mostra que se as imagens *zooming* de uma quantidade grande de pontos de um conjunto positivamente invariante U intersectam assintoticamente a vizinhança de um ponto $p \in X$, então esta vizinhança está contida em U do ponto de vista da medida, desde que esteja presente algum controle de distorção.

Lema 3.0.23. *Seja μ uma medida fracamente (α, δ) -zooming com distorção limitada. Suponha que para algum $0 < r_0 < \delta/2$ e $p \in X$ a bola encaixada (α, δ) -zooming $B_{r_0}^*(p)$ esteja bem definida e contenha $B_{r_0/2}(p)$. Se $U \subset X$ é um conjunto positivamente invariante, $\mu(U) > 0$ e $\mu(\{x \in U; B_{r_0/2}(p) \cap \omega_3(x) \neq \emptyset\}) > 0$ então $\mu(B_{r_0/2}(p) \cap U) = \mu(B_{r_0/2}) > 0$.*

Demonstração: Seja $\rho > 0$ a constante de distorção presente na Definição 3.0.18 e seja $K \subset \{x \in U; B_{r_0/2}(p) \cap \omega_3(x) \neq \emptyset\}$ um compacto com medida positiva.

Dado $l > 0$ escolha uma vizinhança aberta $V \supset K$ de K tal que $\mu(V \setminus K) < \mu(K)/l$. Veja que a existência de K e de V são garantidas pois a medida em questão é regular. (Ver Observação 6.0.14 no Capítulo 6). Escolha para cada $x \in K$ um tempo *zooming* $n(x)$ tal que $V_{n(x)}(x) \subset V$ e $f^{n(x)}(x) \in B_{r_0/2}(p)$. Como $V_{n(x)}(x)$ é levada homeomorficamente em $B_\delta(f^{n(x)}(x))$ por $f^{n(x)}$ e além disto $B_\delta(f^{n(x)}(x)) \supset B_{r_0}^*(p)$ (pois $r_0 < \delta/2$), defina, para cada $x \in K$, o conjunto

$$W(x) = (f^{n(x)}|_{V_{n(x)}(x)})^{-1}(B_{r_0}^*(p)).$$

Veja que cada $W(x)$ é aberto (pois $B_{r_0}^*(p)$ é aberto e $f^{n(x)}|_{V_{n(x)}(x)}$ é homeomorfismo) e que $\bigcup_{x \in K} W(x)$ é uma cobertura de K . Por compacidade, $\exists x_1, x_2, \dots, x_m \in K$ tais que $K \subset W(x_1) \cup W(x_2) \cup \dots \cup W(x_m)$. Como $B_{r_0}^*(p)$ é um conjunto encaixado, podemos assumir que $W(x_j) \cap W(x_i) = \emptyset$ sempre que $j \neq i$. (Cada $W(x)$, $x \in K$, é pré-imagem de um conjunto encaixado e portanto quaisquer dois conjuntos $W(x_i)$ e $W(x_j)$ não são ligados (ver Proposição 1.0.4). Desta forma, ou $W(x_i) \cap W(x_j) = \emptyset$ ou um destes conjuntos contém o outro, digamos, $W(x_i) \subset W(x_j)$. Defina então uma nova cobertura finita de K que consiste na cobertura anterior excluindo o conjunto $W(x_i)$. Repetindo este procedimento sempre que houver interseção entre $W(x_i)$ e $W(x_j)$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, a cobertura de K resultante satisfará a propriedade acima).

Como os elementos da cobertura de K são dois a dois disjuntos, existirá pelo menos um j para o qual teremos $\mu(W(x_j) \setminus K) < \mu(W(x_j))/l$ (Do contrário, $\mu(V \setminus K) \geq \mu((\bigcup_j W(x_j)) \setminus K) = \sum_j \mu(W(x_j) \setminus K) \geq \sum_j \mu(W(x_j))/l = \mu \bigcup_j W(x_j)/l \geq \mu(K)/l$). Portanto para cada $l \in \mathbb{N}$ podemos encontrar algum conjunto aberto W_l que é enviado por algum iterado f^{n_l} de f homeomorficamente em $B_{r_0}^*(p)$ com distorção limitada por C (ver 3.3). Ademais, $\mu(W_l \setminus K) < \mu(W_l)/l$, $\forall l$. Pela condição de distorção limitada, temos:

$$\frac{\mu(B_{r_0}^*(p) \setminus U)}{\mu(B_{r_0}^*(p))} \leq \frac{\mu(B_{r_0}^*(p) \setminus f^{n_l}(K))}{\mu(B_{r_0}^*(p))} \leq C \frac{\mu(W_l \setminus K)}{\mu(W_l)} < \frac{C}{l} \rightarrow 0.$$

(Isto ocorre pois $W_l = (f^{n_l})^{-1}|_{V_{n_l}}(B_{r_0}^*(p))$ e desta forma $(f^{n_l})^{-1}|_{V_{n_l}}(B_{r_0}^*(p) \setminus f^{n_l}(K)) =$

$(f^{n_l})^{-1}|_{V_{n_l}}(B_{r_0}^*(p)) \setminus (f^{n_l})^{-1}|_{V_{n_l}}(f^{n_l}(K)) = W_l \setminus (f^{n_l})^{-1}(f^{n_l}(K)) \subset W_l \setminus K$. Dessa forma, usando 3.3, a expressão acima é obtida facilmente.).

Assim obtemos que $\mu(B_{r_0}^*(p) \setminus U) = 0$. Veja que, como μ é f -não-singular, devemos obter $\mu(B_{r_0/2}(p)) > 0$ (do contrário, teríamos que $0 < \mu(K) \leq \sum_{x \in K} \mu(W(x)) = \sum_{x \in K} \mu((f^{n(x)})^{-1}|_{V_{n(x)}}(B_{r_0}^*(p))) = 0$).

Logo, $\mu(B_{r_0/2}(p) \cap U) = \mu(B_{r_0/2}(p)) > 0$.

□

O próximo resultado irá mostrar que trabalhando no contexto das medidas *zooming* conseguiremos limitar por baixo a medida dos conjuntos positivamente invariantes (e portanto, usando os resultados do Capítulo 2, garantiremos a existência de um número finito de componentes ergódicas que contém conjuntos atratores, tais como em 2.0.5 e 2.0.9). Isto será importante para a construção de uma aplicação de *Markov* induzida com respeito a f e, por conseguinte, obter propriedades estatísticas para o sistema analisado, conforme veremos nos Capítulos 4 e 5. É importante ressaltar que apresentamos a demonstração destes resultados para o caso em que f é uma aplicação inversamente separada, mas é possível obter os mesmos resultados sem essa restrição, bastando para isso substituir f por f^k , para algum k suficientemente grande de modo a obter contração suficiente para assegurar a existência de bolas *zooming* encaixadas (Veja o Lema 3.0.22).

Vejamos antes o seguinte lema.

Lema 3.0.24. *Seja μ uma medida finita f -não-singular. Então para μ quase todo ponto $x \in X$ temos que $\omega_f(x) \cap \text{supp}\mu \neq \emptyset$*

Demonstração: Mostraremos que $\mu(\{x \in X; \omega_f(x) \cap \text{supp}\mu = \emptyset\}) = 0$.

Suponha por absurdo que exista $W \in X$ com $\mu(W) > 0$ tal que $\omega_f(x) \cap \text{supp}\mu = \emptyset$, $\forall x \in W$.

Veja que se $\omega_f(x) \cap \text{supp}\mu = \emptyset$ então existem uma vizinhança $B_{\frac{1}{m(x)}}(\text{supp}\mu) = \{x \in X; \text{dist}(x, \text{supp}\mu) \leq \frac{1}{m(x)}\}$ de $\text{supp}\mu$ e um natural $n(x)$ tais que $f^j(x) \notin B_{\frac{1}{m(x)}}(\text{supp}\mu) \forall j \geq n(x)$, isto é, para cada $x \in W$ tal que $\omega_f(x) \cap \text{supp}\mu = \emptyset$, obtemos uma vizinhança de $\text{supp}\mu$ tal que os iterados de x estão fora dessa vizinhança, para um tempo suficientemente grande.

Defina $M_k := \{x \in W; n(x) \leq k \text{ e } m(x) \leq k\}$. É claro que $W = \bigcup_{k \geq 1} M_k$. Assim, $\exists K_0$ tal que $\mu(M_{K_0}) > 0$. Veja que $\mu(f^{K_0}(M_{K_0})) = 0$ pois, por definição, $f^{K_0}(M_{K_0}) \cap B_{\frac{1}{m(x)}}(\text{supp}\mu) = \emptyset$, isto é, $f^{K_0}(M_{K_0}) \cap \text{supp}\mu = \emptyset$. Mas, como μ é f -não-singular, temos que $\mu(M_{K_0}) = 0$, o que é um absurdo.

□

O resultado anterior continua válido se trocarmos $\omega_f(x)$ por $\omega_{f,3}(x)$. A demonstração é análoga.

Corolário 3.0.25. *Suponha que f é inversamente separada e que $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(r)}{r} \right) < +\infty$. Se μ é uma medida fracamente zooming com suporte compacto e distorção limitada, então existe $\epsilon > 0$ tal que todo conjunto positivamente invariante possui medida μ maior que ϵ ou igual a zero. Ademais, se $f|_{\text{supp}\mu}$ é transitiva, contínua e $K \subset \text{supp}\mu$ é um conjunto compacto positivamente invariante com $\mu(K) > 0$ então $K = \text{supp}\mu$.*

Demonstração: Seja μ uma medida fracamente (α, δ) -zooming (onde $\alpha = \{\alpha_n\}_n$) com suporte compacto e distorção limitada. Seja U um conjunto positivamente invariante com $\mu(U) > 0$.

Como f é inversamente separada e que $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(r)}{r} \right) < +\infty$, segue do Lema 3.0.22 existe r_0 tal que para todo $p \in X$ a bola encaixada (α, δ) -zooming $B_{r_0}^*(p)$ está bem definida e contém $B_{r_0/2}(p)$. Seja p um ponto qualquer no suporte de μ tal que $\mu(U_p) > 0$, em que $U_p = \{x \in U; B_{r_0/2}(p) \cap \omega_{f,3}(x) \neq \emptyset\}$.

Veja que existe pelo menos um ponto $p \in X$ satisfazendo a propriedade acima. De fato, como $\text{supp}\mu$ é compacto, considere uma cobertura aberta finita $\{B_{r_0/2}(p_i)\}_{1 \leq i \leq s}$ de $\text{supp}\mu$. Suponha por absurdo que $\mu(U_p) = 0$, qualquer que seja $p \in \text{supp}\mu$. Então $\mu(\{x \in U; (B_{r_0/2}(p_1) \cup B_{r_0/2}(p_2) \cup \dots \cup B_{r_0/2}(p_s)) \cap \omega_{f,3}(x) \neq \emptyset\}) = \mu(U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \dots \cup U_{p_s}) = \mu(\{x \in U; \omega_{f,3}(x) \cap \text{supp}\mu \neq \emptyset\}) = 0$, o que contradiz o Lema 3.0.24.

Segue do Lema 3.0.23 que

$$\mu(U) \geq \mu(B_{r_0/2}(p) \cap U) = \mu(B_{r_0/2}) > 0. \quad (3.7)$$

Seja $\epsilon := \inf\{\mu(B_{r_0/2}(x)); x \in \text{supp}\mu\}$. É fácil ver que $\epsilon > 0$, ϵ não depende de U e $\mu(U) \geq \epsilon > 0$.

Assumindo que U é compacto e que $f|_{\text{supp}\mu}$ é transitiva, afirmamos que $B_{r_0/2}(p) \cap \text{supp}\mu \subset U$. Do contrário teríamos que $B_{r_0/2}(p) \setminus U$ é um conjunto aberto com $(B_{r_0/2}(p) \setminus U) \cap \text{supp}\mu \neq \emptyset$. Assim, pela definição de suporte de uma medida, $\mu(B_{r_0/2}(p) \setminus U) > 0$, contradizendo (3.7).

Afirmção. $\exists q \in \text{supp}\mu$ tal que $\omega(q) = \text{supp}\mu$

Demonstração: Este é o momento onde iremos usar que $f|_{\text{supp}\mu}$ é transitiva. Seja $q \in \text{supp}\mu$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(q)} = \text{supp}\mu$. Para demonstrar a afirmção vamos seguir três passos:

- $\mu(q) = 0$

Suponha por absurdo que $\mu(q) > 0$. Da hipótese de que μ é f -não-singular temos que $\mu(f^j(p)) > 0, \forall j \in \mathbb{N}$. Além disto, como $\mu(\mathcal{O}_f^+(q)) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(f^j(q)) < \infty$, temos por um argumento comum da teoria de séries que

$$\mu(\mathcal{O}_f^+(f^n(q))) = \sum_{j \geq n} \mu(f^j(q)) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Mas isto é um absurdo pois $f(\mathcal{O}_f^+(f^n(q))) \subset \mathcal{O}_f^+(f^n(q))$ (isto é, $\mathcal{O}_f^+(f^n(q))$ é um conjunto positivamente invariante) e temos por hipótese que $\mu(\mathcal{O}_f^+(f^n(q))) > \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

- $\mu(q) = 0 \Rightarrow q \in \omega(q)$

De fato, dado $\epsilon > 0$, suponha por absurdo a existência de um certo n_0 tal que $f^n(q) \notin B_\epsilon(q), \forall n \geq n_0$ (podemos tomar ϵ pequeno o suficiente de modo que $n_0 = 1$). Assim teremos que $(B_\epsilon(q) \setminus \{q\}) \cap \text{supp} \mu = \emptyset$, isto é, $\mu(B_\epsilon(q) \setminus \{q\}) = 0$. Mas $\mu(B_\epsilon(q)) = \mu(\{q\} \cup (B_\epsilon(q) \setminus \{q\})) = \mu(\{q\}) + \mu(B_\epsilon(q) \setminus \{q\}) = \mu(\{q\}) > 0$, pois $q \in \text{supp} \mu$, o que é um absurdo.

- $q \in \omega(q) \Rightarrow \omega(q) = \text{supp} \mu$

Óbvio. Basta usar as propriedades do conjunto $\omega(q)$ e o fato de que $\overline{\mathcal{O}_f^+(q)} = \mathcal{O}_f^+(q) \cup \omega(q)$.

□

Concluimos assim que $U = \text{supp} \mu$. De fato, seja $q \in \text{supp} \mu$ tal que $\omega(q) = \text{supp} \mu$. Então existe $n > 0$ tal que $f^n(q) \in (B_{r_0/2}(x) \cap \text{supp} \mu) \subset U$. Como U é positivamente invariante e compacto, obtemos que $\text{supp} \mu = \omega(q) \subset U \subset \text{supp} \mu$.

□

Como uma consequência da Proposição 2.0.5, Proposição 2.0.13, Corolário 3.0.25 e Lema 2.0.9 temos o seguinte resultado.

Teorema 3.0.26. *Se μ é uma medida fracamente zooming com distorção limitada então X pode ser particionado em uma coleção finita de componentes μ -ergódicas. Dentro de cada componente μ -ergódica U existe um atrator grande A (i.e., $\mu(A) > 0$) tal que $\omega_f(x) = A$ para μ -quase todo ponto $x \in U$.*

Ademais, existe um conjunto compacto $A_3 \subset A$ tal que $\omega_{f,3}(x) = A_3$ para μ -quase todo ponto $x \in U$ e, se μ é uma medida zooming, existe um conjunto compacto $A_{+,3} \subset A_3$ tal que $\omega_{+,f,3}(x) = A_{+,3}$ para μ -quase todo ponto $x \in U$.

Corolário 3.0.27. *Se μ é uma medida fracamente zooming com distorção limitada e $f|_{\text{supp}\mu}$ é transitiva e contínua então $\omega_f(x) = \text{supp}\mu$ para μ -quase todo x .*

Para demonstrar esse último resultado, essencialmente precisamos verificar que $\omega(x) \subset \text{supp}\mu$, para μ -quase todo x (o que não requer muito esforço, a não ser o de trocar $\omega(x) \cap B_{r_0}(p)$ por $\omega(x) \subset B_{r_0}(p)$ e repetir o procedimento descrito no segundo e terceiro parágrafos da demonstração de 3.0.25) e fazer $K = \omega(x)$ no Corolário 3.0.25.

Capítulo 4

Construção de uma aplicação de *Markov* induzida local

Neste capítulo mostraremos alguns resultados importantes para conjuntos e medidas *zooming*. Provaremos a existência de uma medida $\nu \ll \mu$ absolutamente contínua com respeito a uma dada medida *zooming* μ invariante. Isto será mostrado também no caso em que μ possui apenas algum controle de distorção.

Definição 4.0.28 (Bacia de uma medida). *Sejam X um conjunto, $f : X \rightarrow X$ uma aplicação em X e η uma medida em X . A bacia de η , $\mathcal{B}(\eta)$ é o conjunto de pontos $x \in X$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(x) = \int \phi d\eta,$$

para toda função contínua $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Observação 4.0.29. *Facilmente podemos ver que a bacia de uma medida é um conjunto invariante com respeito a f (isto é, $f^{-1}(\mathcal{B}(\eta)) = \mathcal{B}(\eta)$).*

De fato, considere $y \in f^{-1}(x)$, com $x \in \mathcal{B}(\eta)$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j(y) &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\{ y + \sum_{j=0}^{n-2} \phi \circ f^j(x) \right\} &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot y + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-2} \phi \circ f^j(x) &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \phi \circ f^j(x) &= \\ &= 1 \cdot \int \phi d\eta, \end{aligned}$$

isto é, $f^{-1}(\mathcal{B}(\eta)) \subset \mathcal{B}(\eta)$. De um modo análogo concluímos que $f^{-1}(\mathcal{B}(\eta)) \supset \mathcal{B}(\eta)$, o que garante que $\mathcal{B}(\eta)$ é invariante por f .

Definição 4.0.30 (Partição de Markov induzida). *Seja $f : U \rightarrow U$ uma aplicação mensurável definida em um boreliano U contido em um espaço métrico, compacto, separável X . Uma coleção enumerável $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ de subconjuntos borelianos de U é chamada de partição de Markov induzida se:*

- $\text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$, se $i \neq j$
- para cada $P_i \in \mathcal{P}$, existe $R_i \geq 1$ tal que:
 1. $l < R_i$ e $f^l(P_i) \cap \text{int}(P_j) \neq \emptyset \Rightarrow f^l(P_i) \subset P_j$;
 2. $f^{R_i}(P_i) \cap \text{int}(P_j) \neq \emptyset \Rightarrow f^{R_i}(P_i) \supset P_j$.
- $\#\{f^{R_i}(P_i); i \in \mathbb{N}\} < \infty$;
- $f^{R_i}|_{P_i}$ é um homeomorfismo e pode ser estendido a um homeomorfismo enviando $\overline{P_i}$ em $\overline{f^{R_i}(P_i)}$;
- $\lim_n \text{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = 0$, $\forall x \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\cup_i P_i)$, onde $\mathcal{P}_n(x) = \{y \in U; \mathcal{P}(f^j(y)) = \mathcal{P}(f^j(x)) \forall 0 \leq j \leq n\}$ e $\mathcal{P}(x)$ denota o elemento de \mathcal{P} que contém x .

Definição 4.0.31 (Aplicação de Markov induzida). *Considere uma função $F : U \rightarrow U$ e uma partição \mathcal{P} de Markov induzida com respeito a F . O par (F, \mathcal{P}) é chamado de aplicação de Markov induzida por f definida em U se existe uma função $R : U \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (denominada tempo de indução) tal que*

- $\{R \geq 1\} = \{x \in U; R(x) \geq 1\} = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$,
- $R|_P$ é constante $\forall P \in \mathcal{P}$ e
- $F(x) = f^{R(x)}(x) \forall x \in U$.

Além disto, a aplicação induzida de Markov (F, \mathcal{P}) é dita ser uma aplicação de Markov induzida completa se $F(P) = U$, $\forall P \in \mathcal{P}$.

Definição 4.0.32 (Medida levantável). *Dada uma aplicação de Markov induzida (F, \mathcal{P}) , uma probabilidade μ ergódica f -invariante é dita ser levantável a F se existe uma medida finita F -invariante $\nu \ll \mu$ tal que*

$$\mu = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=0}^{R(P)-1} f_*^j(\nu|_P),$$

onde R é o tempo de indução de F , $\nu|_P$ denota a medida dada por $\nu|_P(A) = \nu(A \cap P)$ e f_*^j é o push-forward por f^j ($f_*^j \nu = \nu \circ f^{-j}$).

Definição 4.0.33 (Aplicação de Markov compatível com uma medida). Dizemos que uma aplicação induzida de Markov (F, \mathcal{P}) definida em um conjunto aberto $Y \subset X$ é compatível com uma medida μ se

1. $\mu(Y) > 0$;
2. μ é F -não-singular;
3. $\mu(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = \mu(Y)$ (em particular, $\mu(\partial P) = 0 \ \forall P \in \mathcal{P}$, pois cada $P \in \mathcal{P}$ é um conjunto aberto).

Definição 4.0.34 (Aplicação de Markov com distorção limitada). Dizemos que uma aplicação de Markov induzida (F, \mathcal{P}) definida em um conjunto $Y \subset X$ possui distorção limitada com respeito a uma medida μ (ou, de uma maneira mais simples, possui μ -distorção limitada) se (F, \mathcal{P}) é compatível com μ , μ possui Jacobiano com respeito a F e $\exists K > 0$ tal que

$$\left| \log \frac{J_\mu F(x)}{J_\mu F(y)} \right| \leq K \operatorname{dist}(F(x), F(y)),$$

para μ quase todo ponto $x, y \in P$ e para todo $P \in \mathcal{P}$

Sejam $X, f, \delta, \alpha = \{\alpha_n\}_n$ e $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \limsup Z_n(\alpha, \delta, f)}$ como definidos no Capítulo 3.

Seja

$$\Lambda \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} Z_n(\alpha, \delta, f) \subset X$$

um conjunto positivamente invariante.

Seja Δ um conjunto (α, δ) -zooming encaixado aberto. Suponha que $\operatorname{diam}(\Delta) < \delta/2$ (por exemplo, se f é inversamente separada e $\sup_{r>0} \sum_{n \geq 1} \alpha_n(r)/r < +\infty$, podemos tomar Δ como sendo qualquer bola zooming encaixada $B_r^*(q)$ dada pelo Lema 3.0.22).

Agora, seja $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \Lambda}$ a coleção de imagens zooming e seja \mathcal{E}_Z a coleção de todas as pré-bolas zooming. Dado $x \in \Delta$, seja $\Omega(x)$ a coleção de \mathcal{E}_Z -pré-imagens V de Δ tais que $x \in V$ (veja que, definindo desta forma, x pode ser visto como um ponto de Δ que retorna a este conjunto pelo menos no tempo $n_V = \operatorname{ord}(V)$).

O conjunto $\Omega(x)$ é não vazio para todo $x \in \Delta$ que possui um \mathfrak{z} -retorno a Δ . De fato, se $x \in \Delta$ e $f^n(x) \in \Delta \cap \mathfrak{z}(x)$ então $B_\delta(f^n(x)) = f^n(V_n(x)) \supset \Delta$ (pois $\operatorname{diam}(\Delta) < \delta/2$). Assim, para cada tempo de \mathfrak{z} -retorno de um ponto $x \in \Delta$ podemos associar a \mathcal{E}_Z -pré-imagem $P = (f^n|_{V_n(x)})^{-1}(\Delta)$ de $x \in P$.

Definição 4.0.35. O tempo de indução em Δ associado ao “primeiro tempo de \mathcal{E}_Z -retorno a Δ ” é a função $R: \Delta \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$R(x) = \begin{cases} \min\{\operatorname{ord}(V); V \in \Omega(x)\} & \text{se } \Omega(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \Omega(x) = \emptyset \end{cases}. \quad (4.1)$$

Note que $R(x)$ é menor ou igual ao primeiro tempo de \mathfrak{z} -retorno a Δ , isto é, $R(x) \leq \min\{n \geq 1; f^n(x) \in \mathfrak{z}(x) \cap \Delta\}$ (Basta ver que se $\Omega(x) \neq \emptyset$, então $R(x) = \min\{n \geq 1; f^n(x) \in \mathfrak{z}(x) \cap \Delta\}$ e se $\Omega(x) = \emptyset$, então $R(x) = 0 < \min\{n \geq 1; f^n(x) \in \mathfrak{z}(x) \cap \Delta\} = +\infty$).

Definição 4.0.36. A aplicação induzida F em Δ associada ao “primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -retorno a Δ ” é a aplicação $F : \Delta \rightarrow \Delta$ dada por

$$F(x) = f^{R(x)}(x), \quad \forall x \in \Delta. \quad (4.2)$$

Como a coleção de conjuntos $\Omega(x)$ é totalmente ordenada pela inclusão, segue da Proposição 1.0.4 que existe um único $I(x) \in \Omega(x)$ tal que $\text{ord}(I(x)) = R(x)$, sempre que $\Omega(x) \neq \emptyset$.

Lema 4.0.37. Se $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$ então $I(x) \cap I(y) = \emptyset$ ou $I(x) = I(y)$.

Demonstração: Afirmamos que, se $\Omega(x) \neq \emptyset$, $I(x) \supset V$, $\forall V \in \Omega(x)$. De fato, se $I(x) \not\subseteq V$ com $V \in \Omega(x)$, como $\text{ord}(I(x)) < \text{ord}(V)$, segue da Proposição 1.0.4 que Δ está contido em uma $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -pré-imagem de si mesmo com ordem maior que zero. Mas isto é impossível pois temos contração nos tempos *zooming*, isto é, o diâmetro de uma $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -pré-imagem de Δ é menor que o diâmetro de Δ .

Sejam $x, y \in \Delta$ com $\Omega(x) \neq \emptyset \neq \Omega(y)$. Como $I(x)$ e $I(y)$ são $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -pré-imagens de Δ , se $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$ então $I(x) \supset I(y)$ ou $I(x) \subset I(y)$. Assim, $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$ implica que $I(x) \in \Omega(y)$ ou $I(y) \in \Omega(x)$. em qualquer dos casos, pela unicidade, temos $I(x) = I(y)$. \square

Definição 4.0.38. A partição de Markov associada ao “primeiro tempo de $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -retorno a Δ ” é a coleção \mathcal{P} de conjuntos abertos dados por

$$\mathcal{P} = \{I(x); x \in \Delta \text{ e } \Omega(x) \neq \emptyset\}. \quad (4.3)$$

O Corolário abaixo mostra que \mathcal{P} é de fato uma partição de Markov de conjuntos abertos.

Corolário 4.0.39 (Existência de uma aplicação de Markov completa induzida para um conjunto *zooming*). Seja F dada por (4.2), R dado por (4.1) e \mathcal{P} dado por (4.3). Se $\mathcal{P} \neq \emptyset$ então (F, \mathcal{P}) é uma aplicação de Markov completa induzida para f em Δ .

Demonstração: Por construção os elementos de \mathcal{P} são conjuntos abertos. Pelo Lema 4.0.37, \mathcal{P} satisfaz a primeira condição de uma partição de Markov para F . Como $F(P) = \Delta \supset Q \forall P, Q \in \mathcal{P}$, \mathcal{P} também satisfaz a segunda e a terceira condições de uma partição de Markov. Por outro lado, como $F|_P = f^{\text{ord}(P)}|_P$ e P é uma $\mathcal{E}_{\mathfrak{z}}$ -pré-imagem de ordem $n = \text{ord}(P)$, existe uma pré-bola *zooming* $V_n(x)$, $x \in Z_n(\alpha, \delta, f)$ contendo P e, além

disto, $F|_P$ pode ser estendida a um homeomorfismo entre \overline{P} e $\overline{\Delta}$ (pois $f^n|_{\overline{V_n(x)}}$ é um homeomorfismo). Dado $x \in \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P)$, defina $P_j = \mathcal{P}(F^j(x))$. Como $\text{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = \text{diam}(F|_{P_1}^{-1} \circ F|_{P_2}^{-1} \circ \dots \circ F|_{P_n}^{-1}(\Delta)) < \prod_{j=1}^n \alpha_{\text{ord}(P_j)}(\text{diam}(\Delta)) \leq \alpha_{\sum_{j=1}^n \text{ord}(P_j)}(\text{diam}(\Delta)) \rightarrow 0$, concluímos que \mathcal{P} é uma partição de *Markov* para F . Finalmente, como $\{R > 0\} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ e $F(P) = \Delta \forall P \in \mathcal{P}$, segue que a aplicação de *Markov* (F, \mathcal{P}) é de fato uma aplicação totalmente induzida de *Markov*.

□

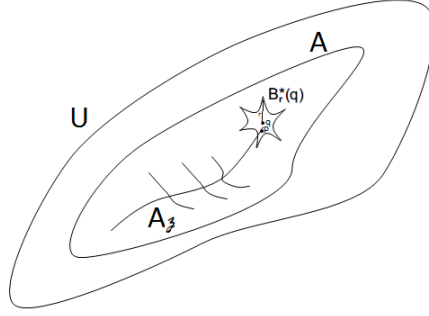


Figura 4.1: $\Delta = B_r^*(x)$

Seja μ uma medida fracamente (α, δ) -*zooming* com $\mu(X \setminus \Lambda) = 0$ e seja $U \subset X$ uma componente μ -ergódica. Sejam A o atrator associado a U e $A_3 \subset A$ o conjunto compacto tal que $\omega_{f,3}(x) = A_3$ para μ quase todo ponto $x \in U$ (dados pela Proposição 2.0.5 e pelo Lema 2.0.9 aplicados a $\mathcal{U} = \mathfrak{J}$).

Lema 4.0.40. *Seja (F, \mathcal{P}) como no Corolário 4.0.39 e suponha que $\Delta \cap A_3 \neq \emptyset$. Então (F, \mathcal{P}) é uma aplicação totalmente induzida de *Markov* definida em Δ e é compatível com $\mu|_U$.*

Demonstração: Seja $p \in \Delta \cap A_3$. Como $p \in \omega_{f,3}(x)$ para μ quase todo $x \in U$, temos que $\mu|_U(U \setminus \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\Delta)) = 0$. Assim, como $\mu|_U \circ f^{-1} \ll \mu|_U$, $\mu|_U(\Delta) > 0$.

Pelo Corolário 4.0.39, precisamos mostrar apenas que

$$\mu|_U(\Delta \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = \mu((\Delta \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) \cap U) = 0.$$

Como $p \in \omega_{f,3}(x)$ para μ quase todo $x \in U$, segue que $\Omega(x) \neq \emptyset$ para μ quase todo $x \in \Delta$. Assim, $\mu|_U(\{R = 0\}) = \mu|_U(\Delta \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P) = 0$.

□

Teorema 4.0.41. *Suponha que para algum $0 < r_0 < \delta/2$ e todo x a bola (α, δ) -*zooming* encaixada $B_{r_0}^*(x)$ está bem definida e contém $B_{r_0/2}(x)$. Sejam $\Lambda \subset \limsup_n Z_n(\alpha, \delta, f)$ um conjunto positivamente invariante e $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}(x))_{x \in \Lambda}$ a coleção de imagens (α, δ) -*zooming*.*

Seja μ uma medida de probabilidade fracamente (α, δ) -zooming com distorção limitada tal que $\mu(\Lambda) = 1$. Sejam $U \subset X$ uma componente ergódica para μ e A_3 o conjunto compacto tal que $\omega_{f,3}(x) = A_3$ para μ -quase todo ponto $x \in U$ (dados pelo Teorema 3.0.26). Seja Δ um conjunto (α, δ) -zooming encaixado aberto com $\text{diam}(\Delta) \leq r_0/2$ e tal que $\Delta \cap A_3 \neq \emptyset$.

Se (F, \mathcal{P}) é a aplicação induzida de Markov associada ao “primeiro tempo de \mathcal{E}_Z -retorno a Δ ” (como no Corolário 4.0.39) então (F, \mathcal{P}) é uma aplicação totalmente induzida de Markov com μ -distorção limitada. Ademais, existe uma probabilidade $\nu \ll \mu$ ergódica F -invariante com $\log \frac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu|_{\{\frac{d\nu}{d\mu} > 0\}})$ e $\nu(\Delta) = 1$.

Demonstração: Vamos mostrar que, como μ tem distorção limitada, $\mu|_U(\Delta) = \mu(\Delta)$. Para provar isto, seja $p \in \Delta \cap A_3$. Pelo Lema 3.0.23, $\mu(B_{r_0/2}(p) \cap U) = \mu(B_{r_0/2}(p))$. Como $\text{diam}(\Delta) \leq r_0/2$, $\Delta \subset B_{r_0/2}(p)$. Portanto, $\mu|_U(\Delta) = \mu(\Delta)$.

Como $\mu|_U(\Delta) = \mu(\Delta)$, obtemos do Lema 4.0.40 que (F, \mathcal{P}) é uma aplicação induzida de Markov completa definida em Δ compatível com μ .

Finalmente, como $\left| \log \frac{J_\mu F(x)}{J_\mu F(y)} \right| \leq \rho \text{dist}(F(x), F(y))$, $\forall x, y \in P$ e $\forall P \in \mathcal{P}$ (pois P está contido em uma pré-bola *zooming* de ordem $R(P)$ e μ tem distorção limitada nos tempos *zooming*), obtemos que (F, \mathcal{P}) tem μ -distorção limitada.

Aplicando a Proposição A.0.21, obtemos uma probabilidade ergódica F -invariante $\nu \ll \mu$ com $\log \frac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu|_{\{\frac{d\nu}{d\mu} > 0\}})$ e, é claro, $\nu(\Delta) = 1$.

□

Dado $\theta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, \theta, f)$ o conjunto de pontos $x \in X$ tais que $\#\{1 \leq j \leq n; x \in Z_j(\alpha, \delta, f)\} \geq \theta n$. Assim, o conjunto de pontos que têm infinitos momentos com θ -frequência de tempos (α, δ) -zooming (com respeito a f) é

$$\limsup_n \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, \theta, f) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n \geq j} \mathcal{Z}_n(\alpha, \delta, \theta, f).$$

Se μ é uma medida (α, δ) -zooming com distorção limitada, X pode ser decomposto em uma coleção finita $\{U_1, \dots, U_s\}$ de componentes μ -ergódicas (Teorema 3.0.26). Pela ergodicidade, $\exists \theta_i > 0$ tal que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in Z_j(\alpha, \delta, f)\} \geq \theta_i$$

para μ quase todo $x \in U_i \forall i$.

Obtemos assim a seguinte observação.

Observação 4.0.42. *Seja Λ um conjunto zooming e $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \Lambda}$ a coleção de imagens zooming. Seja μ uma medida zooming com $\mu(X \setminus \Lambda) = 0$. Se μ possui distorção limitada ou, mais em geral, possui um número finito de componentes ergódicas, então $\exists \theta > 0$ tal que*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \#\{j \leq n; j \text{ é um } \mathfrak{z} \text{-tempo para } x\} \geq \theta$$

para μ quase todo $x \in X$. Em particular, para toda medida zooming μ com distorção limitada (ou possuindo um número finito de componentes ergódicas) existe $\theta > 0$ tal que

$$\mu(X \setminus \limsup_m \mathcal{Z}_m(\alpha, \delta, \theta, f)) = 0.$$

Teorema 4.0.43. *Suponha que para algum $0 < r_0 < \delta/2$ e todo x a bola (α, δ) -zooming encaixada $B_{r_0}^*(x)$ está bem definida e contém $B_{r_0/2}(x)$. Sejam $\Lambda \subset X$ um conjunto (α, δ) -zooming e μ uma probabilidade zooming ergódica f -invariante com $\mu(\Lambda) = 1$. Sejam $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \Lambda}$ a coleção de imagens (α, δ) -zooming e $A_{+, \mathfrak{z}}$ o conjunto compacto tal que $\omega_{+, f, \mathfrak{z}}(x) = A_{+, \mathfrak{z}}$ para μ quase todo ponto $x \in X$ (dado pelo Lema 2.0.9 aplicado a $\mathcal{U} = \mathfrak{z}$). Seja Δ um conjunto (α, δ) -zooming encaixado aberto com $\text{diam}(\Delta) \leq r_0/2$ e tal que $\Delta \cap A_{+, \mathfrak{z}} \neq \emptyset$.*

Se R é o “primeiro tempo de \mathcal{E}_Z -retorno a Δ ” e (F, \mathcal{P}) é a aplicação induzida de Markov associada a R (como no Corolário 4.0.39) então (F, \mathcal{P}) é uma aplicação induzida de Markov completa compatível com μ e, além disto, existe uma medida finita F -invariante $\nu \ll \mu$ (de fato, $\nu(Y) \leq \mu(Y)$ para todo conjunto de Borel $Y \subset \Delta$) tal que $\int R d\nu < +\infty$ e

$$\mu = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^{+\infty} f_*^j(\nu|_{R>j}),$$

onde $\gamma = \sum_{j=0}^{+\infty} f_*^j(\nu|_{R>j})(X)$.

Demonstração: Seja $A_{\mathfrak{z}}$ o conjunto compacto (dado pelo Lema 2.0.9) tal que $\omega_{f, \mathfrak{z}}(x) = A_{\mathfrak{z}}$ para μ -quase todo $x \in X$. Como $A_{+, \mathfrak{z}} \subset A_{\mathfrak{z}}$, temos que $\Delta \cap A_{\mathfrak{z}} \neq \emptyset$. Assim, segue do Lema 4.0.40 que (F, \mathcal{P}) é uma aplicação induzida de Markov completa definida em Δ e compatível com μ .

Seja $\mathfrak{B} = \{x \in \Delta; F^j(x) \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P, \forall j \geq 0\}$. Do fato de μ ser f -invariante (em particular, f -não-singular), obtemos que $\Delta = \mathfrak{B}(\text{mod } \mu)$. Como $\Delta \cap A_{+, \mathfrak{z}} \neq \emptyset$ e μ é f -ergódica, existe $\Theta > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in \Delta\} \geq \Theta$$

para μ quase todo $x \in \Delta$, em que $G_j = \{x \in \Lambda; j \text{ é um } \mathfrak{z} - \text{tempo para } x\}$. Assim, tomando $B = \Delta$, $g = R$ e aplicando a primeira parte do Lema A.0.23 obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{j \geq 0; \sum_{k=0}^j R \circ F^k(x) \leq n\} \geq \Theta \quad (4.4)$$

para μ quase todo $x \in \Delta$. Como

$$\{j \geq 0; \sum_{k=0}^j R \circ F^k(x) \leq n\} = \{0 \leq j \leq n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x)\},$$

segue de (4.4) e do Teorema A.0.22 que existe uma medida F -invariante não trivial tal que $\nu(Y) \leq \mu(Y)$ para todo conjunto de Borel $Y \subset \Delta$ (em particular, $\nu \ll \mu$) com $\int R d\nu < +\infty$. Assim, $\eta = \sum_{j=0}^{+\infty} f_*^j(\nu|_{R>j})$ é uma medida finita f -invariante (veja a Observação A.0.20). Note que se $\eta(Y) > 0$ para algum conjunto de Borel $Y \subset X$ então $\nu(f^{-j}(Y)) > 0$ para algum $j \geq 0$ e, como $\nu \ll \mu$, $\mu(Y) = \mu(f^{-j}(Y)) > 0$. Assim, $\eta \ll \mu$. Como μ é uma probabilidade f -ergódica, obtemos

$$\mu = \frac{1}{\eta(X)} \eta = \frac{1}{\eta(X)} \sum_{j=0}^{+\infty} f_*^j(\nu|_{R>j}).$$

□

Teorema 4.0.44 (Existência de medidas *zooming* invariantes). *Se μ é uma medida *zooming* com distorção limitada, f é inversamente separada e $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(r)}{r} \right) < +\infty$ então existe uma coleção finita de probabilidades ergódicas f -invariantes absolutamente contínuas com respeito a μ tais que μ -quase todo ponto em X pertence à bacia de uma dessas probabilidades.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.0.26, X pode ser particionado em uma coleção finita de componentes μ -ergódicas com respeito a f . Seja U uma destas componentes ergódicas.

Denote o conjunto de imagens (α, δ) -*zooming* de f por $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}(x))_{x \in \Lambda}$, onde $\mathfrak{z}(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in Z_n(\alpha, \delta, f)\}$ é o conjunto de imagens (α, δ) -*zooming* de x por f e $\Lambda = \limsup_n Z_n(\alpha, \delta, f)$.

Pelo Teorema 3.0.26, existe um atrator grande A (com respeito a f) tal que $\omega_f(x) = A$ para μ -quase todo ponto $x \in X$. Ademais, existem conjuntos compactos $A_{+, \mathfrak{z}}, A_{\mathfrak{z}} \subset A$, com $A_{+, \mathfrak{z}} \subset A_{\mathfrak{z}}$, tais que $\omega_{f, \mathfrak{z}}(x) = A_{\mathfrak{z}}$ e $\omega_{+, f, \mathfrak{z}}(x) = A_{+, \mathfrak{z}}$ para μ -quase todo ponto $x \in X$.

Como f é inversamente separada e $\sup_{r>0} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(r)}{r} \right) < +\infty$, temos que existe $0 < r_0 < \delta/2$ tal que $B_r^*(x)$ está bem definida $\forall 0 < r \leq r_0$, onde $B_r^*(q)$ é a bola (α, δ) -*zooming* encaixada com respeito a f , com raio r e centro q (Veja a Definição 3.0.20). Seja $r = r_0/4$ e escolha qualquer ponto $q \in A_{+, \mathfrak{z}}$. Como $A_{+, \mathfrak{z}} \subset A_{\mathfrak{z}}$, temos que $B_r^*(q) \cap A_{\mathfrak{z}} \supset B_r^*(q) \cap A_{+, \mathfrak{z}} \neq \emptyset$.

Sejam $\Delta = B_r^*(q)$, \mathcal{E} a coleção de todas as pré-bolas (α, δ) -*zooming* com respeito a f , R o primeiro tempo de \mathcal{E} -retorno a Δ (com respeito a f) dado por (4.1), $F = f^R$ a aplicação induzida associada R e \mathcal{P} a partição de *Markov* dada por (4.3).

Aplicando o Teorema 4.0.41 a f , α , $\Delta = B_r^*(q)$ (note que $\text{diam}(\Delta) = r_0/2$), (F, \mathcal{P}) e μ , obtemos uma probabilidade F -invariante $\nu \ll \mu$. Para provar a existência de uma probabilidade ergódica f -invariante $\eta \ll \mu$ precisamos apenas mostrar que o tempo de indução R é ν integrável (veja a Proposição A.0.21).

Seja $\mathfrak{B} = \{x \in B_r^*(q); F^j(x) \in \cup_{P \in \mathcal{P}} P \ \forall j \geq 0\}$. Note que $\mu(B_r^*(q) \setminus \mathfrak{B}) = \nu(B_r^*(q) \setminus \mathfrak{B}) = 0$. Seja B o conjunto dos pontos $x \in \mathfrak{B}$ tais que $\limsup_n \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq$

$n; x \in Z_j(\alpha, \delta, f)$ e $f^j(x) \in \mathfrak{B}\} > 0$. Como $B_r^*(q) \cap A_{+,3} \neq \emptyset$, $\nu(\mathfrak{B} \setminus B) = \mu(\mathfrak{B} \setminus B) = 0$.

Tomando $G_j = Z_j(\alpha, \delta, f)$, $g = R$ e $T = F$, segue do Lema A.0.23 que

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) < +\infty$$

para todo $x \in B$. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, $\int R d\nu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R \circ F^j(x) < +\infty$ para ν -quase todo ponto $x \in B$. Assim, $\int R d\nu < +\infty$.

Como consequência, a projeção $\eta = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=0}^{k-1} f_*^j(\nu|_P)$ é uma medida finita, f -invariante e absolutamente contínua com respeito a μ .

Para completar a prova do teorema, precisamos apenas verificar que U pertence à bacia de η .

Seja $\mathcal{B}(\eta)$ a bacia de η . Pelo Teorema de Birkhoff, como η é f -invariante e $\eta|_U$ é ergódica, temos que $\eta|_U(\mathcal{B}(\eta)) = \eta(\mathcal{B}(\eta) \cap U) = \eta(U) > 0$. Como $\eta \ll \mu$, obtemos que $\mu(\mathcal{B}(\eta) \cap U) > 0$. Veja que $\mathcal{B}(\eta)$ é um conjunto f invariante (conforme vimos na Observação 4.0.29, no início deste Capítulo) e U é uma componente μ ergódica com respeito a f (isto é, $U \cap \mathcal{B}(\eta)$ é um subconjunto de invariante de U com medida positiva). Concluimos então que $U = \mathcal{B}(\eta) \pmod{\mu}$.

□

É importante enfatizar a diferença entre a prova do Teorema 4.0.44 e a prova do Teorema 4.0.43. Em ambas as provas iniciamos com uma medida de referência μ e precisamos mostrar a existência de uma medida induzida invariante $\nu \ll \mu$ e também a ν integrabilidade do tempo de indução R . Na hipótese do Teorema 4.0.44, temos uma medida *zooming* invariante μ com distorção limitada, mas não sabemos se μ é invariante. Por outro lado, no Teorema 4.0.43, queremos estudar medidas *zooming* para as quais não sabemos nada sobre a distorção, mas sabemos que elas são invariantes. Na prova do Teorema 4.0.44 a existência de ν é dada pela Proposição A.0.21 e na prova do Teorema 4.0.43 a existência de ν é assegurada pelo Teorema A.0.22 (este teorema é central na demonstração do Teorema 4.0.43). Em ambos os casos, a estimativa para obter a integrabilidade do tempo de indução é dada pelo Lema A.0.23 (Este lema aparece na demonstração dos Teoremas 4.0.44 e 4.0.43).

Capítulo 5

Propriedades estatísticas para medidas *zooming*

Apresentaremos aqui algumas propriedades estatísticas com estimativa local para medidas associadas a um sistema dinâmico, a saber, o decaimento de correlações e a validade do Teorema do Limite Central. Tais propriedades já foram estudadas por Alves, Luzzatto e Pinheiro em [3] e [4] e sua análise foi complementada por Gouëzel em [7] para o caso em que a medida de referência considerada é a medida de Lebesgue. Neste Capítulo iremos apresentar a extensão destes resultados para medidas *zooming*. As condições estatísticas analisadas estão de algum modo relacionadas com o decaimento da cauda dos tempos de retorno *zooming* (veja 4.0.35). A estratégia para garantir propriedades estatísticas consiste em verificar no contexto das medidas *zooming*, através dos Teoremas 4.0.44 e 4.0.43 que é possível obter um ambiente similar ao proposto por L. S. Young em [15], a saber, as *torres de Young*. Desta forma, as propriedades estatísticas obtidas para as torres são transferidas diretamente para as medidas *zooming* associadas a uma aplicação induzida de *Markov* completa.

Primeiramente descreveremos a construção da Torre de Young e enunciaremos os resultados obtidos para as propriedades estatísticas associadas a estes objetos. Isso é feito nas seções 5.1 e 5.2. As demonstrações para esses resultados podem ser encontradas em [15]. Na seção 5.3 iremos adaptar a teoria das medidas *zooming*, descrita nos capítulos anteriores, ao contexto das Torres de Young, obtendo assim uma descrição de algumas propriedades estatísticas associadas às medidas *zooming*.

5.1 Preliminares

O objeto matemático descrito nesta seção surge naturalmente em muitos sistemas dinâmicos com propriedades expansoras ou hiperbólicas. No caso expansor, ele é obtido

por meio de uma transformação de retorno completo (como a aplicação (F, \mathcal{P}) definida em 4.2, por exemplo) a um disco arbitrário; no caso hiperbólico (inversível), é obtido considerando aplicações de retorno a um conjunto com uma estrutura hiperbólica produto (ver Definição 1 de [16]). Veja [16] para uma discussão detalhada.

A construção proposta consiste de uma aplicação \mathbb{F} de um espaço Δ nele mesmo (\mathbb{F} e Δ serão definidos de modo formal logo adiante), junto com uma medida de referência m em Δ . Considere um conjunto Δ_0 arbitrário particionado em $\{\Delta_{0,i}\}_{i=1,2,\dots}$ e seja $R : \Delta_0 \rightarrow \mathbb{N}$ uma função de tempo de retorno que é constante em cada $\Delta_{0,i}$. Note que ao assumirmos a existência de uma função de tempo de retorno estamos assumindo implicitamente a existência de uma aplicação $f : X \rightarrow X$, com $\Delta_0 \subset X$ tal que $f^{R(x)}(x) \in \Delta_0$, para todo $x \in \Delta_0$ (ou seja, cada ponto x de Δ_0 retorna a Δ_0 no tempo $R(x)$). Uma definição formal de Δ é dada por:

Definição 5.1.1.

$$\Delta := \{(z, n) \in \Delta_0 \times \{0, 1, 2, \dots\}; n < R(z)\}.$$

Intuitivamente podemos dizer que o conjunto Δ é composto de várias torres, cujos andares são essencialmente cópias de um subconjunto $\Delta_{0,i}$, sobre os quais as torres começam. Os andares ou níveis de cada torre serão determinados pelos números naturais n . Nos referiremos a $\Delta_l := \Delta \cap \{n = l\}$ como sendo o l -ésimo nível da torre (aqui estamos considerando $\{n = l\} = \{(z, n) \in \Delta, n = l\}$). Sejam $\Delta_{l,i} = \Delta_l \cap \{(z, l); z \in \Delta_{0,i}\}$ e $R_i = R|_{\Delta_{0,i}}$, de modo que $\Delta_{R_i-1,i}$ é o subconjunto do maior nível da torre logo acima de $\Delta_{0,i}$. Veja a figura 5.1 abaixo. Iremos assumir, por simplicidade, que $\text{mdc}\{R_i\} = 1$. Definiremos uma aplicação $\mathbb{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ de modo a enviar (z, l) em $(z, l+1)$ se $l+1 < R(z)$ e enviar cada $\Delta_{R_i-1,i}$ bijectivamente em Δ_0 . Em termos mais explícitos, podemos escrever:

Definição 5.1.2.

$$\mathbb{F}(x, l) = \begin{cases} (z, l+1) & \text{se } l+1 < R(z) \\ (f^{R(z)}(z), 0) & \text{se } l+1 = R(z) \end{cases} \quad (5.1)$$

Assumiremos ainda que a partição $\eta := \{\Delta_{l,i}\}$ é geradora, isto é, $\bigvee_{i=0}^{\infty} F^{-i}\eta$ é a partição trivial em pontos (ver Definição 6.0.17).

Por simplicidade de notação iremos nos referir em alguns enunciados aos pontos em Δ como x ao invés de (z, l) , com $z \in \Delta_0$ (desde que não haja chances de equívocos). Além disto, iremos identificar Δ_0 com o subconjunto correspondente de Δ (a saber, $\Delta_0 \times \{0\}$) e denotar aplicação definida por $\mathbb{F}^R(x) = \mathbb{F}^{R(x)}(x)$ como $\mathbb{F}^R : \Delta_0 \rightarrow \Delta_0$ (esta é a aplicação de retorno a Δ_0 associada à aplicação \mathbb{F} na torre).

Note que podemos traçar (de maneira rude, talvez) um paralelo entre a construção proposta aqui e a construção proposta para as torres de *Kakutani* e *Rocklin* (veja, por

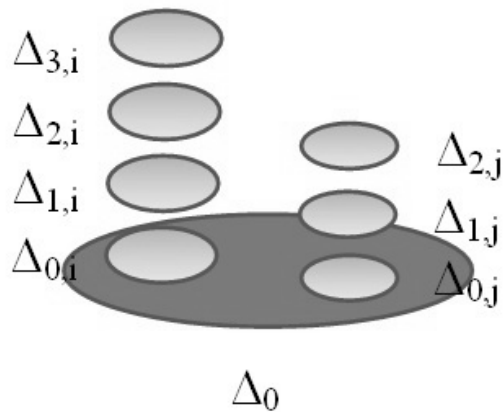


Figura 5.1: Diagrama mostrando a construção da Torre. Os conjuntos $\Delta_{0,i}$ e $\Delta_{0,j}$ possuem tempo de retorno $R(\Delta_{0,i}) = 4$ e $R(\Delta_{0,j}) = 3$, respectivamente.

exemplo, [12], página 66). Poderemos, por exemplo, garantir que para cada medida μ F -invariante em X (em que F é a transformação de primeiro retorno) existe uma medida $\tilde{\mu}$ que é \mathbb{F} -invariante em Δ .

De fato, suponha que μ é uma medida F -invariante e considere a medida $\tilde{\mu}$ definida em Δ dada por $\tilde{\mu}(A \times \{n\}) := \mu(A)$, para todo subconjunto μ -mensurável $A \subset \Delta_{0,i}$ e $0 \leq n < R_i$. Nos outros casos, podemos definir $\tilde{\mu}$ de maneira conveniente. Por exemplo, $\tilde{\mu} = 0$, se A_1, A_2 estão em elementos $\Delta_{0,i_1}, \Delta_{0,i_2}$ distintos, teremos $\tilde{\mu}((A_1 \times \{l_1\}) \cup (A_2 \times \{l_2\})) = \tilde{\mu}(A_1 \times \{l_1\}) + \tilde{\mu}(A_2 \times \{l_2\})$, e se l_1, l_2 são índices distintos, teremos igualmente $\tilde{\mu}(A_1 \times \{l_1\} \cup A_2 \times \{l_2\}) = \tilde{\mu}(A_1 \times \{l_1\}) + \tilde{\mu}(A_2 \times \{l_2\})$. É claro que, definida desta maneira, $\tilde{\mu}$ é uma medida σ -aditiva. Considere $A \subset \Delta_{0,i}$ e $n \in \mathbb{N}$. Para garantir $\tilde{\mu}$ é invariante por \mathbb{F} , teremos dois casos a considerar:

- $n > 0$

Nesse caso, teremos $\mathbb{F}^{-1}(A \times \{n\}) = (A \times \{n-1\})$ e portanto $\tilde{\mu}(\mathbb{F}^{-1}(A \times \{n\})) = \tilde{\mu}((A \times \{n-1\})) = \mu(A) = \tilde{\mu}(A \times \{n\})$.

- $n = 0$

Nesse caso, teremos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\mathbb{F}^{-1}(A \times \{n\})) &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (F^{-1}(A) \cap \Delta_{0,i} \times \{R_i\})\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(F^{-1}(A) \cap \Delta_{0,i} \times \{R_i\}) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(F^{-1}(A) \cap \Delta_{0,i}) = \mu(F^{-1}(A)) = \mu(A) = \tilde{\mu}(A \times \{n\}) \end{aligned}$$

Veja que nos dois casos acima usamos o fato de que μ é F -invariante. Temos então que $\tilde{\mu}$ é \mathbb{F} -invariante.

Definição 5.1.3 (Projeção). *Definimos a projeção da torre Δ em X como sendo a aplicação $\pi : \Delta \rightarrow X$ dada por*

$$\pi(x, n) = f^n(x).$$

Veja que definida desta forma a projeção π é contínua e satisfaz:

$$f \circ \pi = \pi \circ \mathbb{F}, \quad (5.2)$$

isto é, π é conjugação entre f e \mathbb{F} . Portanto, considerando a medida $\tilde{\mu}$ obtida acima, teremos que $\pi_*\tilde{\mu}$ é uma medida f -invariante. Temos também que $\tilde{\mu}(\Delta) = \int R d\mu$.

De fato, $\tilde{\mu}(\Delta) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{R_i-1} \Delta_{0,i} \times \{k\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=0}^{R_i-1} (\Delta_{0,i} \times \{k\})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i \mu(\Delta_{0,i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Delta_{0,i}} R d\mu = \int R d\mu$. Na penúltima igualdade usamos o fato de que a função de retorno $R : \Delta_0 \rightarrow \mathbb{N}$ é constante em cada $\Delta_{0,i}$. Com isto vemos que se a função de retorno, R , for integrável com respeito a μ , então $\tilde{\mu}$ será uma medida finita.

Além disso, vemos facilmente que

$$\pi_*\tilde{\mu} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{R_i-1} f_*^k(\mu|_{\Delta_{0,i}}) \left(= \sum_{i \in \mathbb{N}} f_*^k(\mu|_{\{R>k\}}) \right). \quad (5.3)$$

Passaremos agora a descrever a estrutura de $\mathbb{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ com mais detalhes. Seja \mathcal{B} uma σ -álgebra de subconjuntos de Δ (ver Definição ??). Iremos assumir que todos os conjuntos mencionados acima são \mathcal{B} -mensuráveis, que \mathbb{F} e $(\mathbb{F}|_{\Delta_{l,i}})^{-1}$ são mensuráveis e que existe uma medida de referência definida em (Δ, \mathcal{B}) com $m(\Delta_0) < \infty$. Nos níveis superiores, a regularidade de \mathbb{F} é ditada pela seguinte condição do tipo “Hölder” que nós impomos sobre $\mathbb{F}^R : \Delta_0 \rightarrow \Delta_0$. Primeiramente, introduzimos a noção de tempo de separação para $x, y \in \Delta_0$. Defina $s(x, y)$ como sendo o menor $n \geq 0$ tal que $(\mathbb{F}^R)^n x$ e $(\mathbb{F}^R)^n y$ se encontram em $\Delta_{0,i}$'s distintos, de modo que $s(x, y) \geq 0 \forall x, y \in \Delta_0$, $s(x, y) \geq 1 \forall x, y \in \Delta_{0,i}$ etc. Para cada i , assumimos que $\mathbb{F}^R|_{\Delta_{0,i}} : \Delta_{0,i} \rightarrow \Delta_0$ e sua inversa são não-singulares com respeito a m , de modo que o Jacobiano $J\mathbb{F}^R$ de \mathbb{F}^R com respeito a m existe e é maior que zero m -q.t.p. Nós ainda precisamos que

$$\exists C = C_{\mathbb{F},0} > 0 \text{ e } \beta \in (0, 1) \text{ tais que } \forall x, y \in \Delta_{0,i}, \text{ qualquer } i,$$

$$\left| \frac{J\mathbb{F}^R(x)}{J\mathbb{F}^R(y)} - 1 \right| \leq C \beta^{s(\mathbb{F}^R x, \mathbb{F}^R y)}.$$

Algumas vezes é conveniente ter $s(\cdot, \cdot)$ estendida a todos os pares $x, y \in \Delta$. Uma maneira de obter isto é fazer $s(x, y) = 0$ se x, y não pertencem ao mesmo $\Delta_{l,i}$; e para

$x, y \in \Delta_{l,i}$, fazer $s(x, y) = s(x', y')$, onde x', y' são os pontos correspondentes em $\Delta_{0,i}$. Finalmente, mencionamos alguns espaços de funções que são compatíveis com as estruturas já introduzidas. Seja $\beta < 1$ como acima e sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\beta(\Delta) &:= \{\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C_\phi \text{ tal que } |\phi(x) - \phi(y)| \leq C_\phi \beta^{s(x,y)} \forall x, y \in \Delta\}, \\ \mathcal{C}_\beta^+(\Delta) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}_\beta(\Delta) \mid \exists C_\varphi^+ \text{ tal que em cada } \Delta_{l,i}, \text{ ou } \varphi \equiv 0 \text{ ou} \\ &\quad \varphi > 0 \text{ e } \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} - 1 \right| \leq C_\varphi^+ \beta^{s(x,y)} \forall x, y \in \Delta_{l,i}\}. \end{aligned}$$

As funções teste a serem consideradas (tais como as funções ψ no Teorema 5.2.4, as funções ψ no Teorema 5.2.5 e no Teorema 5.3.6) irão pertencer a \mathcal{C}_β , enquanto que as medidas de probabilidade terão suas densidades em \mathcal{C}_β^+ .

5.2 Algumas propriedades estatísticas para a Torre de Young

Considerando a medida de referência m descrita acima, é possível garantir, conforme o Teorema 5.2.1 abaixo, a existência de uma medida de equilíbrio, denotada por ν satisfazendo algumas propriedades. Considere uma medida de probabilidade λ em Δ com $\frac{d\lambda}{dm} \in \mathcal{C}_{\beta^+}$ e a aplicação da torre \mathbb{F} como descrito acima. Nesse caso, também é possível fornecer algumas estimativas (conforme o Teorema 5.2.3 abaixo) para a velocidade de convergência de $\mathbb{F}_*^n \lambda$ à medida de equilíbrio ν ou, olhando de outra maneira, para a velocidade com que $|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu|$ tende a zero.

Começaremos com o Teorema abaixo que garante a existência do equilíbrio para m .

Teorema 5.2.1 (Existência e propriedades de medidas de equilíbrio). *Assuma que R é integrável com respeito a m , isto é, $\int R dm < \infty$. Então*

- i) $\mathbb{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ admite uma medida de probabilidade invariante ν que é absolutamente contínua com respeito a m ;
- ii) $\frac{d\nu}{dm} \in \mathcal{C}_\beta^+$ e é maior ou igual a c_0 para algum $c_0 > 0$.
- iii) (\mathbb{F}, ν) é exata, e portanto é ergódica e mixing.

A partir de agora, nesta seção, assuma que $\int R dm < \infty$. Seja $\widehat{R} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$ a função definida por

$$\widehat{R}(x) = \text{o menor inteiro } n \geq 0 \text{ tal que } \mathbb{F}^n x \in \Delta_0.$$

Observação 5.2.2. *É importante notar que, conforme se vê no pré-âmbulo do enunciado do Teorema A.0.22, quando estivermos analisando o contexto das medidas zooming na próxima seção não será preciso assumir a integrabilidade do tempo de indução para garantir a existência de uma medida com propriedades semelhantes às da medida ν aqui obtida. Na seção 5.3 veremos como adaptar os resultados desta seção ao contexto das medidas zooming.*

Note que $m\{\widehat{R} > n\} = \sum_{l>n} m(\Delta_l)$. O comportamento assintótico de $m\{\widehat{R} > n\}$ quando $n \leftarrow \infty$ irá desempenhar um papel extremamente importante no resultado seguinte.

Teorema 5.2.3. (Velocidade de convergência ao equilíbrio).

(i) (Cotas inferiores.) *Existem medidas de probabilidade λ em Δ com $\frac{d\lambda}{dm} \in \mathcal{C}_{\beta+}$ tais que*

$$|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu| \geq c m\{\widehat{R} > n\}$$

para algum $c = c(\lambda) > 0$.

(ii) (Cotas superiores.) *Para uma medida λ arbitrária com $\frac{d\lambda}{dm} \in \mathcal{C}_{\beta+}$, uma cota superior para $|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu|$ é determinada pelo comportamento assintótico de $m\{\widehat{R} > n\}$ associado a certas funções de decaimento exponencial. Dois casos especiais são:*

(a) *Se $m\{\widehat{R} > n\} = O(n^{-\alpha})$ para algum $\alpha > 0$, então para toda λ como acima,*

$$|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu| = O(n^{-\alpha});$$

(b) *Se $m\{\widehat{R} > n\} = O(\theta^n)$ para algum $\theta < 1$, então $\exists \tilde{\theta} < 1$ tal que para toda λ como acima,*

$$|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu| = O(\tilde{\theta}^n).$$

A velocidade do decaimento de correlação para variáveis aleatórias do tipo $\{\phi \circ \mathbb{F}^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ (onde o espaço de probabilidade associado é (Δ, ν) e $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ é um observável) está estritamente relacionada com a velocidade de convergência ao equilíbrio. Vamos denotar por $\text{Cor}(\cdot, \cdot)$ a correlação entre variáveis randômicas com respeito a ν , que é dada pela expressão:

$$\text{Cor}(\psi, \phi \circ \mathbb{F}^n) = \left| \int (\phi \circ \mathbb{F}^n) \psi d\nu - \int \phi d\nu \int \psi d\nu \right|$$

É possível mostrar, conforme a seção 5.1 de [15], que se λ satisfaz as hipóteses do item (ii) acima então a correlação entre variáveis randômicas tal como descrita acima possui uma certa relação com $|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu|$, a saber:

$$\exists C = C_{\psi, \phi, \lambda} > 0; \text{Cor}(\psi, \phi \circ F^n) \leq C_{\psi, \phi, \lambda} |\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu|$$

Desta forma, estimando a velocidade de convergência de $\mathbb{F}_*^n \lambda$ ao equilíbrio ν estaremos estimando o decaimento da correlação entre as variáveis randômicas ψ e ϕ , e o próximo teorema se torna de fato um corolário do teorema anterior.

Teorema 5.2.4 (Decaimento de correlações). *Os resultados na parte (ii) do Teorema 5.2.3 continuam válidos se $|\mathbb{F}_*^n \lambda - \nu|$ é substituído por $\text{Cor}(\phi \circ \mathbb{F}^n, \psi)$, com $\phi \in L^\infty(\Delta, m)$ e $\psi \in \mathcal{C}_\beta(\Delta)$.*

Para $\psi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ com $\int \psi d\nu = 0$, dizemos que o Teorema Central do limite vale para ψ (com espaço de probabilidade associado sendo (Δ, ν)) se $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ \mathbb{F}^i$ converge (em distribuição) a uma distribuição normal $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Quando $\sigma > 0$, isso significa que

$$\nu \left\{ x, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ \mathbb{F}^i(x) \leq z \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^z \exp^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

quando $n \rightarrow \infty$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Quando $\sigma = 0$ o limite é a distribuição de *Dirac*. Para maiores detalhes, ver o Apêndice E de [5].

Teorema 5.2.5 (Teorema do Limite Central). *Se $m\{\widehat{R} > n\} = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ para algum $\alpha > 1$, então o Teorema do Limite Central é válido para toda $\psi \in \mathcal{C}_\beta$ com $\int \psi d\nu = 0$, com $\sigma > 0$ se, e somente se $\psi \circ \mathbb{F} \neq \phi \circ \mathbb{F} - \phi$ para alguma ϕ .*

5.3 Conclusão

Vamos agora unir a abordagem proposta no contexto das torres por L. -S. Young com as medidas *zooming*.

Para isto, considere uma aplicação $f : X \rightarrow X$ mensurável inversamente separada definida num espaço métrico compacto, conexo e separável X . Considere também $\delta > 0$ e uma contração *zooming* $\alpha = \{\alpha_n\}$ com $\sup\{\frac{1}{r} \sum_n \alpha_n(r); r > 0\} < \infty$.

Seja μ uma medida de referência. Suponha que μ seja uma medida *zooming* com distorção limitada. Segue do Teorema 4.0.44 que existe uma única medida ergódica invariante $\nu \ll \mu$. Sem perda de generalidade, assumamos que $f|_{\text{supp } \mu}$ seja transitiva. Pelo Corolário 3.0.27, $\omega(x) = \text{supp } \mu$ para μ -q.t.p. $x \in X$. Ademais, $\text{supp } \nu = \text{supp } \mu$. Isso é importante pois as propriedades estatísticas serão obtidas com respeito à medida ν para

a dinâmica avaliada num conjunto que está contido no suporte de μ (a saber, o conjunto $B_r^*(p)$). Assim, é interessante que a medida ν também enxergue este conjunto.

Pelo Teorema 3.0.26, existe um conjunto compacto $A_{+,3} \subset \text{supp}\mu$ tal que $\omega_{+,f,3}(x) = A_{+,3}$ para μ -q.t.p. $x \in X$.

Tome $p \in A_{+,3}$ e $0 < r < \delta/2$ pequeno. Para μ quase todo ponto $x \in B_r^*(p)$, seja $z_p(x)$ o primeiro tempo *zooming* de retorno a $B_r^*(p)$, isto é,

$$z_p(x) = \min\{n \geq 1; f^n(x) \in B_r^*(p) \text{ e } x \in Z_n(\alpha, \delta, f)\}$$

Conforme o que foi visto no Capítulo 4, com as hipóteses propostas nesta seção garantimos que (F, \mathcal{P}) , tal como definida em 4.2 e 4.3, é uma aplicação induzida de *Markov* completa definida em $B_r^*(p)$ e que existe uma medida F -invariante $\eta \ll \nu$ tal que $\int R d\eta < +\infty$ (veja o Teorema 4.0.43).

Observamos que existe uma identificação natural entre uma aplicação totalmente induzida de *Markov* com μ -distorção limitada e uma Torre de *Young*. Defina $\Delta_0 = B_r^*(p)$. Usando o Corolário 4.0.39 temos definida em Δ_0 uma partição (de *Markov*), digamos, $\{\Delta_{0,i}\} := \mathcal{P}$, em que \mathcal{P} é definida conforme 4.3. Neste caso, o tempo de indução (conforme definido em 4.1) será tomado como o tempo de primeiro retorno z_p definido acima. Pela argumentação vista na seção 5.1, a partir da medida η F -invariante obtemos uma medida $\tilde{\eta}$ que é \mathbb{F} -invariante. Como o tempo de indução R é integrável com respeito a $\tilde{\eta}$ (isto é, é integrável com respeito a $\tilde{\eta}$ restrita ao primeiro nível da torre), obtemos pelo Teorema 5.2.1 que existe uma medida \mathbb{F} -invariante $\tilde{\nu}$ que é absolutamente contínua com respeito a $\tilde{\eta}$. Utilizando os teoremas 5.2.4 e 5.2.5 podemos então obter boas estimativas para o decaimento de correlações com respeito a $\tilde{\nu}$, bem como a validade do Teorema do Limite Central associado a essa medida.

A partir desse ponto o objetivo é estimar o decaimento de correlações associado a ν com respeito à dinâmica original f . Considere funções $\psi, \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, com ψ Hölder e ϕ limitada. Sendo π a aplicação definida em 5.1.3, definamos as aplicações $\Psi := \psi \circ \pi$ e $\Phi := \phi \circ \pi$. Verificaremos abaixo que essas aplicações se encaixam no contexto que abordamos no final da seção 5.1:

Lema 5.3.1. *Nas condições definidas acima, temos que:*

- 1) $\Psi \in \mathcal{C}_\beta(\Delta)$
- 2) $\Phi \in L^\infty(\Delta, m)$

Demonstração:

- 1) Suponha que ψ seja uma função Hölder, isto é, existem $\tilde{C} > 0$ e $a > 0$ tais que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \tilde{C}d(x, y)^a$. Vamos mostrar que $\Psi = \psi \circ \pi \in \mathcal{C}_\beta(\Delta)$. Considere

$x', y' \in \Delta$. Sem perdas, podemos tomar sempre x' e y' em um dado $\Delta_{l,i}$ contido na torre (podemos escrever $x' = (x, n)$, $y' = (y, n)$, com $x, y \in \Delta_{0,i}$ e $0 \leq n \leq R_i - 1$) isto é, $s(x', y') > 0$, pois caso tenhamos $s(x', y') = 0$, considerando \widehat{C} como sendo o diâmetro de X e $C_\Psi = \widetilde{C}\widehat{C}^a$, teremos obviamente que

$$|\Psi(x') - \Psi(y')| \leq C_\Psi = C_\Psi \beta^{s(x', y')}.$$

Seja $s_0 := s(x', y') = s(x, y) > 0$ o tempo de separação de x' e y' . Veja que $|\Psi(x, n) - \Psi(y, n)| = |\psi(\pi(x, n)) - \psi(\pi(y, n))| \leq \widetilde{C}(d(\pi(x, n), \pi(y, n)))^a = \widetilde{C}(d(f^n(x), f^n(y)))^a$. Observe que pela definição de tempo de separação obtemos que $F^j(x)$ e $F^j(y)$ estão na mesma vizinhança *zooming*, digamos, Δ_{0,i_j} . Logo, para cada $0 \leq j < s_0$ teremos que R_{i_j} é um tempo *zooming* para $F^j(x)$ e para $F^j(y)$. Logo, usando 3.0.15, podemos escrever:

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(y)) &\leq \alpha_{R_i-n}(d(f^{R_i}(x), f^{R_i}(y))) = \alpha_{R_i-n}(d(F(x), F(y))) \\ &\leq \alpha_{R_i-n}(\alpha_{R_{i_1}}(d(F^2(x), F^2(y)))) = \alpha_{R_i-n} \circ \alpha_{R_{i_1}}(d(F^2(x), F^2(y))) \\ &\leq \alpha_{R_i-n} \circ \alpha_{R_{i_1}} \circ \alpha_{R_{i_2}}(d(F^3(x), F^3(y))) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha_{R_i-n} \circ \alpha_{R_{i_1}} \circ \cdots \circ \alpha_{R_{i_{s_0-1}}}(d(F^{s_0}(x), F^{s_0}(y))) \\ &\leq \alpha_{R_i-n} \circ \alpha_{R_{i_1}} \circ \cdots \circ \alpha_{R_{i_{s_0-1}}}(\widehat{C}), \end{aligned}$$

onde \widehat{C} é o diâmetro de X . Veja que na definição de contração *zooming*, podemos tomar $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r)/r$ tão pequeno quanto quisermos. Em particular, podemos tomar essa soma como sendo menor que $\beta^{1/a}$. Daí, $\alpha_n(\widehat{C}) \leq \beta^{1/a}\widehat{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e obteremos da expressão anterior que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \beta^{1/a} \cdot \beta^{1/a} \cdot \dots \cdot \beta^{1/a} \cdot \widehat{C} = \beta^{s_0/a} \cdot \widehat{C}$ e assim teremos: $|\Psi(x, n) - \Psi(y, n)| \leq \widetilde{C}(d(f^n(x), f^n(y)))^a \leq \widetilde{C}\beta^{s_0}\widehat{C}^a$. Tomando novamente $C_\Psi = \widetilde{C}\widehat{C}^a$ teremos então que

$$|\Psi(x, n) - \Psi(y, n)| \leq C_\Psi \beta^{s_0}.$$

Como (x, n) e (y, n) foram tomados arbitrariamente, temos então que $\Psi \in \mathcal{C}_\beta(\Delta)$, como queríamos.

- 2) Como X é compacto e π é contínua, temos que π é limitada, e assim $\Phi = \phi \circ \pi$ também será limitada.

□

Devemos projetar a medida $\tilde{\nu}$ na base Δ_0 da torre por meio do *push-forward* desta medida pela projeção π . Usando o que foi visto anteriormente na seção 5.1, poderemos garantir que a medida dada pelo *push-forward* é invariante por f e que ela coincidirá com o *push-forward*, isto é, $\nu = \pi_*\tilde{\nu} = \tilde{\nu} \circ \pi^{-1}$. Com isso será possível obter para a medida ν boas estimativas para o decaimento de correlação e também a validade do Teorema do Limite Central, a partir dos resultados obtidos para a medida $\tilde{\nu}$ por meio dos Teoremas 5.2.4 e 5.2.5. Primeiramente iremos verificar alguns resultados básicos de Teoria Ergódica.

Lema 5.3.2. *Se μ_1 e μ_2 são medidas de probabilidades invariantes tais que μ_1 é ergódica e μ_2 é absolutamente contínua com relação a μ_1 então $\mu_1 = \mu_2$.*

Demonstração:

Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada. Como μ_1 é invariante e ergódica, temos pelo Teorema Ergódico de Birkhoff que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu_1$$

em μ_1 -quase todo ponto. Como $\mu_2 \ll \mu_1$ temos que esta última igualdade vale também em μ_2 -quase todo ponto. Usando novamente o Teorema Ergódico de Birkhoff (desta vez aplicado a μ_2) obtemos da igualdade acima que

$$\int \varphi d\mu_2 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) d\mu_2 = \int \left(\int d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int d\mu_1.$$

Concluimos que as integrais de φ com relação a μ_1 e μ_2 são iguais para toda função mensurável limitada φ . O resultado fica então provado quando consideramos as funções características. □

Lema 5.3.3. *Sejam η uma medida e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável definida num espaço métrico X . Então para toda função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitada temos*

$$\int \varphi df_*\eta = \int \varphi \circ f d\eta$$

Demonstração:

Primeiro observe que se φ é a função característica de um conjunto mensurável $A \subset X$, então $f_*\eta(A) = \eta(f^{-1}(A))$, pois η é invariante. Logo, a expressão acima é válida para funções características de conjuntos mensuráveis. A linearidade da integral nos permite estender a validade dessa expressão para o caso em que φ é uma função simples. Sabemos que toda função mensurável limitada pode ser aproximada uniformemente por funções simples (veja, por exemplo, a Proposição 0.3.7 de [12]). Logo, usando teoremas

de convergência da Teoria da Medida, temos que o lema vale no caso geral em que φ é limitada.

□

Sabemos pela discussão anterior ao Lema 5.3.1 que $\tilde{\nu} \ll \tilde{\eta}$. Logo, $\pi_*\tilde{\nu} \ll \pi_*\tilde{\eta} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{R_i-1} f_*^k(\eta|_{\Delta_{0,i}})$ (nesta última igualdade usamos 5.3). Mas sabemos também que $\eta \ll \nu$. Logo, $f_*^k\eta \ll f_*^k\nu$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e assim $\pi_*\tilde{\eta} \ll \nu$, isto é, $\pi_*\tilde{\nu} \ll \nu$. Como $\pi_*\tilde{\nu}$ é f -invariante, usando o Lema 5.3.2 concluimos que $\pi_*\tilde{\nu} = \nu$, como queríamos.

Proposição 5.3.4. *Considere funções $\psi, \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, com ψ Hölder, ϕ limitada e π a aplicação definida em 5.1.3. Definindo $\Psi := \psi \circ \pi$ e $\Phi := \phi \circ \pi$, temos que*

$$\text{Cor}(\Psi, \Phi \circ \mathbb{F}^n) = \text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n)$$

Demonstração:

Sabemos pela discussão no parágrafo anterior que $\pi_*\tilde{\nu} = \nu$. Agora, usando o Lema 5.3.3, concluimos que $\int \Phi d\tilde{\nu} = \int \phi \circ \pi d\tilde{\nu} = \int \phi d\nu$, o mesmo valendo para Ψ . Utilizando isto e o fato de que π é uma conjugação entre f e \mathbb{F} (e portanto $f^j \circ \pi = \pi \circ \mathbb{F}^j$, $\forall j \in \mathbb{N}$), obtemos que

$$\begin{aligned} \text{Cor}(\Psi, \Phi \circ \mathbb{F}^n) &= \left| \int \Psi \Phi \circ \mathbb{F}^n d\tilde{\nu} - \int \Psi d\tilde{\nu} \int \Phi d\tilde{\nu} \right| \\ &= \left| \int \psi \circ \pi \phi \circ \pi \circ \mathbb{F}^n d\tilde{\nu} - \int \psi \circ \pi d\tilde{\nu} \int \phi \circ \pi d\tilde{\nu} \right| \\ &= \left| \int \psi \circ \pi \phi \circ f^n \circ \pi d\tilde{\nu} - \int \psi \circ \pi d\tilde{\nu} \int \phi \circ \pi d\tilde{\nu} \right| \\ &= \left| \int (\psi \phi \circ f^n) \circ \pi d\tilde{\nu} - \int \psi \circ \pi d\tilde{\nu} \int \phi \circ \pi d\tilde{\nu} \right| \\ &= \left| \int \psi \phi \circ f^n d\nu - \int \psi d\nu \int \phi d\nu \right| \\ &= \text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n). \end{aligned}$$

□

A proposição 5.3.4 nos garante que as estimativas para o decaimento de correlação associado à dinâmica original f considerando funções $\psi, \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, com ψ Hölder e ϕ limitada serão as mesmas que obtivemos por meio do Teorema 5.2.4 para o decaimento de correlação na torre considerando as correspondentes funções Ψ e Φ .

Vamos agora analisar a validade do Teorema do Limite Central no contexto da medida ν .

Proposição 5.3.5. *O Teorema do Limite Central vale para o sistema (f, ν) .*

Demonstração:

Considere uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder satisfazendo $\int \psi d\nu = 0$ e tal que $\psi \circ f \neq \phi \circ f - \phi$ para alguma ϕ . Utilizando argumentos similares aos que foram vistos acima, vemos que a função $\Psi := \psi \circ \pi$ pertence ao conjunto $\mathcal{C}_\beta(\Delta)$ e também que $\int \psi d\nu = 0 \Rightarrow \int \Psi d\tilde{\nu} = 0$. Sabendo que π é conjugação entre f e \mathbb{F} , vemos facilmente que $\psi \circ f \neq \phi \circ f - \phi$ para alguma $\phi \Rightarrow \psi \circ f \circ \pi \neq \phi \circ f \circ \pi - \phi \circ \pi = \psi \circ \pi \circ \mathbb{F} \neq \phi \circ \pi \circ \mathbb{F} - \phi \circ \pi$ para $\phi \circ \pi$, isto é, $\Psi \circ \mathbb{F} \neq \Phi \circ \mathbb{F} - \Phi$, para $\Phi := \phi \circ \pi$. Nessas condições o teorema 5.2.5 nos garante que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \Psi \circ \mathbb{F}^i$ converge (em distribuição) a uma distribuição normal $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Observe (novamente usando o fato de que π é conjugação entre f e \mathbb{F}) que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \Psi \circ \mathbb{F}^i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ \pi \circ \mathbb{F}^i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i \circ \pi$. Mas como $\nu = \pi_* \tilde{\nu}$ temos que $\tilde{\nu}(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i \circ \pi) = \nu(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i)$. Concluimos então que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i$ também convergirá (em distribuição) a uma distribuição normal $\mathcal{N}(0, \sigma)$, isto é, o Teorema do Limite Central é válido no contexto da medida ν . □

As proposições 5.3.4 e 5.3.5 nos permitem obter boas estimativas para o decaimento de correlação e também a validade do Teorema do Limite Central associado ao sistema (f, ν) , já que estes resultados foram obtidos para o sistema $(\mathbb{F}, \tilde{\nu})$ por meio dos Teoremas 5.2.4 e 5.2.5. Desta forma, a discussão realizada desde o início desta seção nos possibilita provar o seguinte teorema, que conclui este trabalho.

Teorema 5.3.6 (Decaimento de correlação e Teorema do Limite Central para Medidas *zooming* com estimativa local). *Para quaisquer funções $\psi, \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$, com ψ Hölder e ϕ limitada, temos as seguintes estimativas para o decaimento de correlação:*

$$\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) = \left| \int \psi \phi \circ f^n d\nu - \int \psi d\nu \int \phi d\nu \right|$$

1. Se $\mu\{z_p > n\} = O(n^{-\gamma})$ para algum $\gamma > 0$, então $\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) = O(n^{-\gamma})$
2. Se $\mu\{z_p > n\} = O(\exp(-pn^\gamma))$ para algum $\rho, \gamma > 0$, então existe $\tilde{\rho} > 0$ tal que $\text{Cor}(\psi, \phi \circ f^n) = O(\exp(-\tilde{\rho}n^\gamma))$

Além disto, se $\mu\{z_p > n\} = O(n^{-\gamma})$ para algum $\gamma > 1$ então o Teorema do Limite Central é válido para qualquer função Hölder $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ com $\int \psi d\nu = 0$ tal que $\psi \circ f \neq \phi \circ f - \phi$ para alguma ϕ .

Capítulo 6

Definições básicas

Definição 6.0.7. Um subconjunto $U \subset X$ é chamado conjunto invariante (com respeito a f) se $f^{-1}(U) = U$, e é chamado de positivamente invariante se $f(U) \subset U$.

Definição 6.0.8 (σ -álgebra). Sejam X um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ um subconjunto do conjunto das partes de X . Dizemos que \mathcal{A} é uma álgebra se:

- $\emptyset \in \mathcal{A} (\Leftrightarrow X \in \mathcal{A})$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Em outras palavras, \mathcal{A} contém X e é fechada para uniões finitas, interseções finitas e passagem ao complemento. Se além disto as uniões e interseções acima podem ser tomadas enumeráveis, diremos então que \mathcal{A} é uma σ -álgebra.

Definição 6.0.9 (Conjunto mensurável). Seja X um conjunto e \mathcal{A} uma σ -álgebra de X . Os elementos de \mathcal{A} são chamados de conjuntos \mathcal{A} -mensuráveis ou simplesmente de conjuntos mensuráveis, quando a σ -álgebra \mathcal{A} estiver subentendida no contexto.

Definição 6.0.10 (Aplicação mensurável). Seja X um conjunto e $f : X \rightarrow X$. Dizemos que f é uma aplicação mensurável se a pré-imagem de qualquer subconjunto mensurável de X for ainda um subconjunto mensurável.

Definição 6.0.11 (σ -álgebra gerada). Seja $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma família de subconjuntos de X . Definimos a σ -álgebra gerada por \mathcal{P} como sendo a menor σ -álgebra que contém a família \mathcal{P} , ou seja, é a interseção de todas as σ -álgebras que contêm \mathcal{P} (aqui estamos assumindo implicitamente que a interseção arbitrária de σ -álgebras é ainda uma σ -álgebra, o que não é um resultado difícil de se verificar).

Quando X é um espaço topológico e \mathcal{P} é a família dos subconjuntos abertos de X , chamamos a σ -álgebra gerada por \mathcal{P} de σ -álgebra de Borel (ou σ -álgebra boreliana) de X . Neste caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de borelianos.

Definição 6.0.12 (Medida). *Sejam X um conjunto e \mathcal{A} uma σ -álgebra sobre X . Chamamos de medida (σ -aditiva) a qualquer função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma família de elementos de \mathcal{A} dois a dois disjuntos ($j \neq i \Rightarrow A_j \cap A_i = \emptyset$) tais que $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ então*

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Em geral neste trabalho só consideraremos $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, isto é, trabalharemos com medidas positivas finitas.

Definição 6.0.13 (Medida). *Sejam \mathcal{A} uma σ -álgebra sobre X e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ uma medida. Dizemos que μ é regular se $\forall S \in \mathcal{A}$ vale:*

1. $\mu(S) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{A} \text{ é aberto e contém } S\}$
2. $\mu(S) = \sup\{\mu(C); C \in \mathcal{A} \text{ é compacto e está contido em } S\}$

A seguinte Observação mostra o quão comuns são as medidas regulares. Sua demonstração pode ser vista na Proposição 10.1.6 de [8] num contexto um pouco mais geral.

Observação 6.0.14. *Sejam X um espaço métrico compacto e μ uma medida boreliana finita. Então μ é regular.*

Definição 6.0.15 (Jacobiano de uma medida). *Dizemos que uma medida μ tem um Jacobiano com respeito à aplicação $f : U \rightarrow X$, com $U \subset X$, se existe uma função $J_\mu f \in L^1(\mu)$ tal que $\mu(f(A)) = \int_A J_\mu f d\mu$, para todo conjunto mensurável A tal que $f|_A$ é injetiva. Nesse caso também dizemos que $J_\mu f$ é o Jacobiano de μ com respeito a f .*

Observação 6.0.16. *Quando o Jacobiano existe, ele é essencialmente único. Em geral o Jacobiano pode não existir, mas se, por exemplo, μ é uma medida f -invariante e cada ponto de X tem pré-imagem com cardinalidade enumerável, então o Jacobiano de μ com respeito a f está bem definido.*

Definição 6.0.17 (Partição geradora). *Sejam \mathcal{P} e \mathcal{Q} partições de um conjunto X . Definimos a soma das partições \mathcal{P} e \mathcal{Q} , denotada por $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, como sendo a partição de X cujos elementos são as interseções do tipo $P \cap Q$, com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Mais geralmente, dada qualquer família enumerável de partições \mathcal{P}_n , definimos*

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n; P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Observação 6.0.18. *Se $f : X \rightarrow X$ é uma transformação sobrejetora agindo em X e \mathcal{P} é uma partição de X , é fácil ver que a coleção de subconjuntos de X dada por $f^{-1}(\mathcal{P}) := \{f^{-1}(P); P \in \mathcal{P}\}$ é também uma partição de X . De fato, $X = f^{-1}(X) = f^{-1}\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} f^{-1}(P)$. Desta forma, dada a partição \mathcal{P} de X , faz sentido definirmos a partição $\mathcal{P}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P})$, para cada $n \geq 1$, ou mesmo a partição $\bigvee_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathcal{P})$.*

Apêndice A

Alguns resultados importantes

No presente apêndice, iremos apresentar alguns resultados que serão assumidos, a maioria deles, sem demonstração. Alguns desses resultados asseguram a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito a uma dada medida de referência na presença de condições especiais, a exemplo das partições de *Markov*. Outros são lemas essencialmente técnicos.

Iniciaremos com um resultado que garante a existência de partições finitas (mod μ) com diâmetro arbitrariamente pequeno em um espaço métrico compacto separável X .

Lema A.0.19. *Existe uma partição finita de X em conjuntos com diâmetro arbitrariamente pequeno que estão contidos nos fechados dos seus interiores e cujas fronteiras têm medida nula.*

Demonstração:

A ideia aqui é usar a compacidade para cobrir o espaço X essencialmente com bolas de diâmetro pequeno e que possuem fronteira com medida nula.

Seja $\epsilon > 0$ o diâmetro pretendido e considere um conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^k$ tal que as bolas de raio $\epsilon/2$ centradas nos pontos x_i cobrem X . Para cada x_i as fronteiras das bolas de raio r , com $0 < r < \epsilon/2$ são disjuntas duas a duas, e logo existe r_i tal que a fronteira da bola de raio r_i em torno de x_i tem medida nula (caso contrário, a bola considerada não possuiria medida finita). Considere a coleção de bolas $B(x_i, r_i)$. Tome $C_1 = B(x_1, r_1)$ e indutivamente $C_i = B(x_i, r_i) \setminus \bigcup_{j \leq i} C_j$. Facilmente podemos ver que esses conjuntos são conforme o pretendido.

□

A observação abaixo é um fato bem conhecido acerca de projeções de medidas invariantes associadas a aplicações induzidas. Veja, por exemplo, o Lema 3.1 no Capítulo V de [11].

Observação A.0.20. *Seja (F, \mathcal{P}) uma aplicação de Markov completa induzida associada a f definida em algum $Y \subset X$ e seja R o seu tempo de indução. Se ν é uma medida finita F -invariante tal que $\int R d\nu < \infty$ então*

$$\eta = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=0}^{R(P)-1} f_*^j(\nu|_P) \left(= \sum_{j=0}^{+\infty} f_*^j(\nu|_{\{R>j\}}) \right)$$

é uma medida finita f -invariante.

Note que, se (F, \mathcal{P}) é compatível com uma medida μ , a σ -álgebra gerada por $\{f^{-n}(P); P \in \mathcal{P} \text{ e } n \geq 0\}$ é igual à coleção dos conjuntos de Borel de $U \pmod{\mu}$. Assim, usando por exemplo o Lema 4.4.1 de [1], é fácil obter o seguinte resultado.

Proposição A.0.21 (Teorema folclórico). *Seja μ uma medida f -não-singular. Se (F, \mathcal{P}) é uma aplicação de Markov induzida completa para f com μ -distorção limitada então existe uma probabilidade ergódica F -invariante $\nu \ll \mu$ cuja densidade pertence a $L^\infty(\mu)$. De fato, $\log \frac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu|_{\{\frac{d\nu}{d\mu} > 0\}})$.*

Ademais, se o tempo de indução R de F é integrável com respeito a ν , então $\eta = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{j=0}^{R(P)-1} f_^j(\nu|_P)$ é uma medida ergódica finita f -invariante absolutamente contínua com relação a μ .*

Em [13], Pinheiro obteve uma melhoria para o resultado anterior, por meio do Teorema A.0.22, no qual é obtida uma medida ν absolutamente contínua F -invariante substituindo a condição de distorção limitada (que aparece na Proposição A.0.21) pela condição A.1 e o fato de μ ser f -invariante. Além disto, esta condição estatística garante que projetando ν pela dinâmica de f recuperamos a medida μ , pois assegura a integrabilidade do tempo de indução para a medida F -invariante obtida (daí usamos a Observação A.0.20). Isto é, toda medida invariante satisfazendo A.1 pode ser levantada.

Teorema A.0.22. *Seja (F, \mathcal{P}) uma aplicação de Markov completa induzida associada a f definida num conjunto aberto $B \subset X$. Sejam R o tempo de indução de F e μ uma medida de probabilidade ergódica f -invariante tal que $\mu(\{R=0\}) = 0$ e $\mathcal{O}_f^+(x) \cap \mathcal{O}_f^+(y) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}_F^+(x) \cap \mathcal{O}_F^+(y) \neq \emptyset$ para μ -q.t.p. $x, y \in B$. Se existe $\Theta > 0$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n; f^j(x) \in \mathcal{O}_F^+(x) \geq \Theta\} \tag{A.1}$$

para μ quase todo $x \in B$, então existe uma medida não trivial ($\neq 0$) ν finita e F -invariante tal que $\nu(Y) \leq \mu(Y)$ para todo conjunto de Borel $Y \subset B$ e tal que $\int R d\nu \leq \Theta^{-1}$.

O Lema A.0.23, cuja demonstração pode ser encontrada no Lema 4.7 de [13], é útil para acotar a média espacial do tempo de indução a partir de alguma informação sobre a média temporal do tempo de indução. Isto será necessário para projetar uma medida invariante associada à aplicação induzida em uma medida f -invariante.

Lema A.0.23. *Seja $\{G_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma coleção de subconjuntos de X tais que $f^j(x) \in G_{n-j} \forall 0 \leq j < n \forall x \in G_n$. Seja $B \subset X$ e seja $x \in B$ um ponto tal que $\#\{j \geq 0; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} = \infty$. Seja $T : \mathcal{O}_f^+(x) \cap B \longrightarrow \mathcal{O}_f^+(x) \cap B$ uma aplicação dada por $T(y) = f^{g(y)}(y)$, com $1 \leq g(y) \leq \min\{j \in \mathbb{N}; y \in G_j \text{ e } f^j(y) \in B\}$. Então*

$$\#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} \leq \#\{j \geq 0; \sum_{k=0}^j g(T^k(x)) \leq n\}.$$

Ademais, se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq j \leq n; x \in G_j \text{ e } f^j(x) \in B\} > \Theta > 0$, então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) \leq \Theta^{-1}.$$

Referências

- [1] Aaronson, J, *An introduction to infinite ergodic theory*, Math. Surv. Monographs 50, AMS, Providence R.I. US (1997).
- [2] J. F. Alves, C. Bonatti, M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, Invent. Math. **140** (2000), 351-398.
- [3] Alves, J. F., Luzzatto, S., Pinheiro, V., *Markov structures and decay of correlations for non-uniformly expanding dynamical systems*, Annales de L'Institut Henri Poincaré-Analyse Non Linéaire, **22** (2005), 817-839.
- [4] Alves, J. F., Luzzatto, S., Pinheiro, V., *Lyapunov exponents and rates of mixing for one-dimensional maps*, Ergodic Theory And Dynamical Systems, **24** (2004), 1-22.
- [5] Bonati, C., Diaz, L., Viana, M., *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, Vol. 102 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III, 2005.
- [6] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 4th ed., 2010.
- [7] Gouëzel, S., *Decay of correlations for nonuniformly expanding systems*, Bull. Soc. Math. France **134** (2006), no. 1, 1-31. 37D25 (37A25).
- [8] Júnior, A. A. C., *Curso de Teoria da Medida*, Projeto Euclides, 2004.
- [9] Mañe, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [10] Martens, M., *Distortion results and invariant Cantor Sets of unimodal maps*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **14(2)** (1994), 331-349.
- [11] de Melo, W., Strien, S. V., *One Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [12] Oliveira, K., Viana, M., *Fundamentos da Teoria Ergódica*, disponível em <http://w3.impa.br/~viana/out/fte.pdf>

- [13] Pinheiro, V., *Expanding Measures*, Analyse non Linéaire, to appear.
- [14] Walters, P., *Introduction to ergodic Theory*, Springer, New York, 1982.
- [15] Young, L. -S., *Recurrence times and rates of mixing*, Israel J. Math. **110** (1999), 153-188.
- [16] Young, L. -S., *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, to appear in Annals of Math

Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática / Colegiado da Pós-Graduação em Matemática

Av. Adhemar de Barros, s/n, Campus Universitário de Ondina, Salvador - BA

CEP: 40170-110

<<http://www.pgmat.ufba.br>>